

А. И. МАЛЬЦЕ

Избранные труды

ТОМ
I

КЛАССИЧЕСКАЯ
АЛГЕБРА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1976

КРАТКИЙ ОЧЕРК НАУЧНОЙ, ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ И ОБЩЕСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ АКАДЕМИКА А. И. МАЛЬЦЕВА



Анатолий Иванович Мальцев родился 27 ноября 1909 г. в семье рабочего-стеклодува Мишеронского района Московской области. Уже в школьные годы проявились его математические способности. Окончив в 1927 г. среднюю школу, А. И. Мальцев поступил на математическое отделение Московского университета. В 1930 г. он начал преподавание в высшей школе, которое продолжил после окончания университета в 1931 г. С 1932 по 1960 г. А. И. Мальцев работал в Ивановском педагогическом институте: сначала ассистентом, затем доцентом и с 1943 г. профессором, заведую кафедрой высшей алгебры.

В 1939—1941 гг. Анатолий Иванович — докторант в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР, а с 1942 по 1960 г. — старший научный сотрудник этого института. В 1941 г. Анатолий Иванович защитил докторскую диссертацию, а в 1944 г. получил звание профессора. В 1946 г. за исследования в области теории групп Ли А. И. Мальцев был удостоен Государственной премии. В 1953 г. он был избран членом-корреспондентом АН СССР по математике, а в 1958 г. — действительным членом Академии наук СССР. В 1956 г. Анатолию Ивановичу было присвоено звание заслуженного деятеля науки РСФСР. С 1960 г. А. И. Мальцев работал в Институте математики Сибирского отделения АН СССР заведующим отделом алгебры и в Новосибирском государственном университете, заведую кафедрой алгебры и математической логики. В 1964 г. А. И. Мальцев был удостоен Ленинской премии за цикл работ по приложениям математической логики к алгебре и теории алгебраических систем.

Математическое творчество А. И. Мальцева характеризуется насыщенностью новыми идеями, созданием новых математических направлений наряду с решением ряда классических проблем. Уже в первой работе А. И. Мальцева [1] * заключена весьма глубокая идея об общем методе получения так называемых локальных теорем. Доказанная в этой работе локальная теорема для языка узкого исчисления предикатов (УИП) произвольной сигнатуры утверждает, что произвольное множество формул УИП выполнимо (непротиворечиво) тогда и только тогда, когда непротиворечиво любое конечное подмножество этих формул. В этой же работе доказана теорема о расширении бесконечных моделей. Обе упомянутые теоремы являются одними из важнейших в математической логике и теории моделей — теории, одним из создателей которой по праву считается А. И. Мальцев. Опираясь на свой локальный метод, А. И. Мальцев доказал [8] ряд глубоких теорем теории групп и других алгебраических систем. В свое время большое впечатление на алгебраистов произвела доказанная в этой работе локальная теорема для классов групп, обладающих центральными или разрешимыми

* Библиографический список работ А. И. Мальцева см. во втором томе настоящего издания.

ствования такого представления, которое состоит в том, что представимы должны быть радикал группы Ли и ее фактор-группа по этому радикалу.

Ряд работ [9, 10, 12, 19] этого периода посвящен вопросу о характеристике групп Ли в целом и их замкнутых подгрупп. Известно, что связная группа Ли не восстанавливается однозначно по своей алгебре Ли. В связи с этим А. И. Мальцев вводит понятие рационального подмодуля алгебры Ли, который характеризует группу Ли однозначно с точностью до конечнолистных накрытий. Найденный А. И. Мальцевым критерий замкнутости подгруппы, отвечающей данной подалгебре алгебры Ли, представляет собой ряд условий на пересечения подалгебры с рациональными подмодулями, характеризующими данную группу. Многие задачи теории групп Ли приводятся к проблеме описания полупростых подгрупп простых групп Ли. Эта задача решена А. И. Мальцевым [15, 16] для всех групп классических серий, а также для простых групп. В [11, 16] доказана ставшая классической теорема Мальцева о сопряженности полупростых факторов в разложении Леви группы или алгебры Ли. Одновременно доказывается аналогичная теорема о единственности, с точностью до сопряженности, веддербарновского разложения конечномерной ассоциативной алгебры.

А. И. Мальцевым решена в положительном смысле проблема Картана о сопряженности максимальных компактных подгрупп связной группы Ли G [19]. Там же доказано, что если F — одна из таких подгрупп, то группа G гомеоморфна прямому произведению $F \times R^n$, где R^n — n -мерное евклидово пространство. Этот результат получил дальнейшее развитие в работах Бореля и Ивасава. Переходя к более общему классу топологических групп, А. И. Мальцев доказывает, что любая связная локально компактная разрешимая группа аппроксимируется по ее центральным компактным нормальным делителям группами Ли [20].

К упомянутым работам примыкают исследования А. И. Мальцева [17], [18] по конечномерным комплексным алгебрам Ли. Работа [18] сводит изучение разрежимых алгебр Ли к изучению нильпотентных алгебр и дает новый подход к проблеме инвариантов линейных групп.

Основополагающие результаты получены А. И. Мальцевым [27] в теории нильпотентных многообразий (однородных пространств, на которых транзитивно действуют нильпотентные группы Ли). А. И. Мальцев доказал, что фундаментальная группа нильпотентного многообразия является конечно порожденной нильпотентной группой без кручения и, наоборот, любая дискретная группа с этими свойствами является фундаментальной группой некоторого компактного нильпотентного многообразия. Это многообразие однозначно определяется своей фундаментальной группой в силу следующего утверждения: если N_1 , N_2 — односвязные нильпотентные группы Ли, а Γ_1 , Γ_2 — дискретные подгруппы групп N_1 и N_2 соответственно такие, что N_1/Γ_1 и N_2/Γ_2 компактны, то любой изоморфизм Γ_1 на Γ_2 однозначно продолжается до изоморфизма N_1 на N_2 . Ввиду упомянутых результатов представляют особый интерес такие односвязные нильпотентные группы Ли N , с которыми можно связать компактное нильпотентное многообразие. Как показал А. И. Мальцев, группа N тогда и только тогда обладает этим свойством, когда ее алгебра Ли имеет в некотором базисе рациональные структурные константы. Перечисленные результаты нашли существенное применение в теории потоков на однородных многообразиях. С другой стороны, они позволили А. И. Мальцеву доказать знаменитую теорему о существо-

системами. А. И. Мальцев неоднократно возвращался к общей локальной теореме [44, 55], распространяя ее на классы многоосновных моделей, на проективные и квазиуниверсальные классы моделей, что значительно расширило область применимости этой теоремы. В этих исследованиях внутренняя локальная теорема о локальности свойств моделей, которые можно выразить системами формул специальной структуры на логическом языке $\mathcal{L}$ -й ступени, была завершающим результатом необычайной силы. Локальный метод, разработанный А. И. Мальцевым, оказался весьма мощным методом алгебры и теории моделей.

В предвоенные годы А. И. Мальцев обращается также к проблеме Ван дер Вардена о существовании колец без делителей нуля, не вложимых в тело. В примере, построенном А. И. Мальцевым [2], кольцо обладает даже более сильным свойством: мультипликативная полугруппа его элементов, отличных от нуля, не вложима в группу. В связи с этим возникла весьма тонкая проблема о существовании колец, мультипликативная полугруппа которых вложима в группу и которые тем не менее не вложимы в тело. Развивая этот круг вопросов, А. И. Мальцев находит необходимые и достаточные условия вложимости полугруппы в группу и устанавливает, что класс полугрупп, вложимых в группы, является квазимногообразием, которое не может быть задано никакой конечной системой условных тождеств [4, 5].

Развитие теории линейных групп в нашей стране во многом обязано А. И. Мальцеву. В статье [6] получены важные результаты о представлениях бесконечных групп матрицами. Среди этих результатов отметим локальную теорему для класса групп, представимых матрицами заданной степени, а также теорему о финитной аппроксимируемости конечно порожденной линейной группы. Из последней теоремы вытекает, в частности, впервые полученное А. И. Мальцевым утверждение о финитной аппроксимируемости свободной группы. Локальная теорема о линейной представимости группы была использована А. И. Мальцевым в статье [25] для доказательства счетности локально свободных групп конечного общего ранга.

Плодотворная идея А. И. Мальцева о применении линейных групп к исследованию абстрактных групп особенно выпукло проявилась в работе [33]. Используя введенное им понятие ранга [25], А. И. Мальцев выделил пять важных классов A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) разрешимых групп и применил к их изучению линейные группы, доказав две фундаментальные теоремы о линейных группах. Одна из них (известная в настоящее время под названием теоремы Мальцева — Колчина) утверждает, что любая разрешимая линейная группа над алгебраически замкнутым полем обладает триангулируемой нормальной подгруппой, индекс которой конечен и не превосходит некоторого числа, зависящего только от порядка матриц. Согласно другой его теореме всякая разрешимая группа целочисленных матриц имеет тип A_5 , т. е. является полициклической.

К 40-м годам относится цикл работ А. И. Мальцева о группах Ли, в изучении которых А. И. Мальцев достиг выдающихся успехов. Так, в работе [7] А. И. Мальцев установил, что хорошо известная теорема Картана о включении произвольной локальной группы Ли в полную группу Ли не может быть распространена на класс локальных топологических групп. Точно так же было известно, что не всякая группа Ли обладает точным линейным представлением (Картан), в отличие от алгебр Ли (теорема Адо). А. И. Мальцев находит в [13] необходимое и достаточное условие для суще-

вании и единственности пополнения локально нильпотентной группы без кручения [28].

Особое место в научном наследии А. И. Мальцева занимают работы [39, 40, 49], которые открывают новое направление математических исследований — изучение общей теории топологических алгебраических систем. Эта теория имеет свой прообраз в теории топологических групп. Работа [49], где построена общая теория свободных топологических алгебр, является, несомненно, одной из самых глубоких в творчестве А. И. Мальцева. Чрезвычайно интересна и работа [40]. В ней классическое соответствие между группами и алгебрами Ли распространяется на альтернативные лупы и бинарные лиевы алгебры. Одновременно вводится новый класс алгебр, называемых, по современной терминологии, алгебрами Мальцева, которые представляют собой весьма естественное обобщение алгебр Ли и занимают промежуточное положение между алгебрами Ли и бинарно лиевыми алгебрами. Обзору работ в этой области был посвящен последний научный доклад А. И. Мальцева на 5-й Всесоюзной топологической конференции (1967).

Благодаря деятельности А. И. Мальцева успешно развивается новая, весьма перспективная область теории групп, связанная с изучением элементарных свойств групп, т. е. свойств, записываемых на языке узкого исчисления предикатов. Центральным результатом в этой области является теорема А. И. Мальцева о неразрешимости элементарной теории конечных групп [61]. В работе [50] выяснена тесная связь между классическими алгоритмическими проблемами и понятием аппроксимируемости алгебры относительно соответствующих предикатов. После этого уже довольно просто решаются проблемы равенства и вхождения для нильпотентных групп, а также некоторые другие алгоритмические вопросы. Надо заметить, что развитие и применение идей, содержащихся в [50], и в настоящее время еще далеки от своего исчерпания.

А. И. Мальцев своими работами, а также постановкой актуальных и увлекательных проблем постоянно привлекал внимание алгебраистов к исследованию упорядоченных групп. В работе [29] он находит необходимые и достаточные условия упорядочиваемости групп. В [23] доказана теорема о вложимости в тело групповой алгебры упорядоченной группы. Многочисленные отклики вызвала работа [32] о доупорядочиваемости локально нильпотентных групп без кручения, т. е. о возможности продолжения любого частного порядка до линейного порядка группы.

Многогранной и интенсивной была деятельность А. И. Мальцева в последний период его жизни, охватывающий примерно 10 лет. В этот период его интересы сосредоточиваются в основном на теории алгебраических систем, теории моделей, на синтезе идей алгебры и математической логики. В 1956—1959 гг. появляется цикл работ А. И. Мальцева [44, 46—48, 51—56], посвященный исследованиям в теории моделей. Эти работы насыщены свежими идеями, каждая из них является замечательным вкладом в науку. Круг вопросов, рассматриваемых в этих работах, чрезвычайно широк. В теорию моделей вводятся понятия, которые ранее обычно изучались в алгебре: операции порождения, производные операции и предикаты, прямые и подпрямые произведения, регулярное произведение; обобщается понятие определяющих соотношений. С этой целью используется язык теории категорий; в терминах категорий даются характеристики различных классов алгебр и моделей. В работе [54] рассматривается вопрос о существовании моделей той или иной мощности в зависимости от мощности сигнатуры. В работе

[56] теорема Мостовского о сохранении разрешимости элементарной теории при прямых произведениях распространяется на регулярные произведения.

Вопросы разрешимости различных элементарных теорий рассматриваются в серии работ [57—59, 61—63, 65]. В [58] доказана неразрешимость элементарной теории свободных нильпотентных групп и указана интересная алгебраическая связь между кольцами и группами. В [59] доказана неразрешимость элементарной теории свободных разрешимых групп. Поток исследований различных авторов вызвала работа А. И. Мальцева [57], где доказана неразрешимость элементарных теорий некоторых полей и поставлен ряд проблем. Глубокое, почти исчерпывающее исследование элементарных теорий классических линейных групп содержится в работе [64]. Интересный класс алгебр с разрешимой теорией — класс локально свободных алгебр — указан в [62, 65].

С теорией моделей тесно связаны работы А. И. Мальцева по теории алгебраических систем, в особенности по теории многообразий и квазимногообразий систем. Основы общей теории алгебраических систем изложены в статье [42] и в обзорном докладе на III Всесоюзном математическом съезде [99]. Целая программа исследований в этой области намечена А. И. Мальцевым в часовом докладе [80] по приглашению на Международном конгрессе математиков в Москве в 1966 г. Ряд свойств многообразий и квазимногообразий алгебр изучался в работах [31, 33]. Дальнейшее развитие эти идеи получили в работах [75, 78], которые составляют теоретический фундамент общей теории квазимногообразий алгебраических систем. В работе [75] даны определения тождества и квазитожества для алгебраических систем, не являющихся алгебрами (т. е. содержащих в своей сигнатуре не только функциональные, но и предикатные символы), определены понятия многообразия и квазимногообразия таких систем. На многообразия алгебраических систем распространяется теорема Биркгофа о характеристизации многообразий алгебр; дается алгебраическая характеристизация квазимногообразий. В [78] детально изучаются композиции (умножения) многообразий, квазимногообразий и других классов алгебраических систем. Вопросам конечной аксиоматизируемости и независимой аксиоматизируемости классов моделей посвящена последняя работа А. И. Мальцева [79], опубликованная посмертно. Здесь показано, в частности, что существует континуум различных универсально аксиоматизируемых подклассов класса частично упорядоченных множеств фиксированной размерности, в отличие от класса линейно упорядоченных множеств. Исследованиям по теории алгебраических систем с применением математической логики А. И. Мальцев предполагал посвятить специальную книгу в двух томах. Первый том этой книги, включающий основные структуры, исчисление предикатов и теорию квазимногообразий, опубликован посмертно в 1970 г. под названием «Алгебраические системы» (см. [88]).

Большую роль в пропаганде идей теории моделей и теории алгебраических систем сыграли обзорные доклады А. И. Мальцева на III и IV Всесоюзных математических съездах, на I Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре (1958) и Международном конгрессе математиков в Москве (1966). Его доклад на I Всесоюзном коллоквиуме, опубликованный (в расширенном виде) в «Успехах математических наук» [60], заложил основы нового научного направления — теории конструктивных алгебр, которое синтезирует идеи теории алгебраических систем и теории алгоритмов. К этому обзору примыкают работы [66, 67], содержащие ряд важных понятий и результатов, в частно-

сти положительное решение старой проблемы Мостовского о существовании рекурсивной групповой операции на множестве натуральных чисел N и выделенного конечного подмножества в N , с помощью которых элементарно определены обычные операции сложения и умножения натуральных чисел [66].

От интереса к приложениям теории алгоритмов А. И. Мальцев переходит к активной работе в самой теории алгоритмов. Он стремится найти наиболее естественную общность для формулировки теорем этой теории. С этой целью им создана общая теория нумераций, нумерованных множеств и нумерованных совокупностей [71—73], которая нашла важные применения в работах ряда ученых. Следует особо отметить, что Анатолию Ивановичу удалось выявить существенные черты нумераций Клини и Поста для частично рекурсивных функций и рекурсивно перечислимых множеств, что привело к понятию полной нумерации [60, 71]. Для полных нумераций он доказал теоремы типа теорем Роджерса, Райса, Майхилла и ряд других. Создание теории полных нумераций явилось выдающимся вкладом А. И. Мальцева в теорию алгоритмов. Существенная часть достижений А. И. Мальцева и весь опыт его работы в теории алгоритмов собраны в его замечательной книге «Алгоритмы и рекурсивные функции» [87].

Научное наследие А. И. Мальцева исключительно богато и разносторонне. Невозможно дать сейчас полный и законченный анализ того огромного влияния, которое оказал А. И. Мальцев своими работами на развитие математики. Научные труды А. И. Мальцева приобрели широкую мировую известность, и А. И. Мальцев по праву считается одним из лидеров современной математики. Математики разных направлений будут еще много раз и по разным поводам обращаться к работам А. И. Мальцева. Глубокие идеи А. И. Мальцева долгие годы будут питать алгебру и смежные с ней ветви математики.

А. И. Мальцев ушел из жизни в полном расцвете сил, которые он щедро направлял на развитие советской математики. Его творческая деятельность развивалась без перерывов по восходящей линии; вместе с ней росла и научно-организационная деятельность А. И. Мальцева. За время работы в Ивановском педагогическом институте Анатолий Иванович создал Ивановскую алгебраическую школу и организовал Ивановское математическое общество. Талант А. И. Мальцева как организатора советской науки особенно широко проявился в период его работы в Новосибирском научном центре. А. И. Мальцев создал при Институте математики Сибирского отделения АН СССР многочисленную логику-алгебраическую школу и был руководителем всемирно известного семинара «Алгебра и логика». В 1962 г. А. И. Мальцев основал специализированный журнал «Алгебра и логика» и с тех пор был редактором этого журнала. Анатолий Иванович был основателем Сибирского математического общества и первым его президентом, главным редактором и действительным руководителем «Сибирского математического журнала», а также членом редколлегии старейшего в нашей стране журнала «Математический сборник». А. И. Мальцев входил в состав Президиума Сибирского отделения АН СССР и был членом бюро Отделения математики Академии наук СССР.

Никакие из многочисленных обязанностей А. И. Мальцева не воспринимались им формально; во все направления своей огромной и разнообразной деятельности он вкладывал свою душу. В частности, советские алгебраисты с благодарностью будут вспоминать А. И. Мальцева как инициато-

Ра и вдохновителя традиционных всесоюзных коллоквиумов по общей алгебре.

Статья Анатолия Ивановича «Математика нужна всем» в газете «Правда» от 29 января 1967 г. содержит глубокие мысли об основных направлениях математических исследований в нашей стране и о подготовке молодых ученых. В математической логике и теории систем наряду с математической статистикой А. И. Мальцев видел теоретическую базу для использования и совершенствования вычислительных и управляющих машин. Поэтому понятен его призыв к развитию «дискретной» математики.

А. И. Мальцев постоянно вел большую педагогическую деятельность. По его инициативе в учебный план Новосибирского университета были включены курсы математической логики и теории алгоритмов. Неоценимую пользу слушателям и участникам приносили специальные курсы и семинары А. И. Мальцева. Книга А. И. Мальцева «Основы линейной алгебры» по праву считается одним из лучших учебников по линейной алгебре и оказала большое влияние на преподавание алгебры во всех университетах нашей страны. Интересны высказывания А. И. Мальцева по вопросам народного образования.

А. И. Мальцев вел большую общественную работу государственного масштаба. Он дважды избирался депутатом Верховного Совета СССР (1954, 1958), депутатом Верховного Совета РСФСР (1951), депутатом Ивановского областного Совета (1947—1955). С 1951 по 1960 г. А. И. Мальцев был председателем Ивановского областного комитета защиты мира. А. И. Мальцев награжден орденом Ленина, двумя орденами «Знак почета» и несколькими медалями.

Анатолий Иванович был человеком исключительного душевного обаяния, интереснейшим собеседником и мудрым советчиком во всех научных и даже житейских делах.

Как уже упоминалось, А. И. Мальцев был выходцем из рабочей среды, и он всю жизнь гордился этим. Его психология была демократична в истинном смысле слова. Будучи исключительно одаренной натурой, он глубоко понимал искусство. Он любил поэзию и музыку и терпеть не мог ту специфическую, крикливую «изысканность», за которой кроется внутренняя пустота и безвкусие. При этом диапазон его интересов был очень широк — от музыки Баха до русской народной песни.

Внезапная смерть настигла А. И. Мальцева (в ночь с 6 на 7 июля 1967 г.) во время проходившей в Новосибирске Всесоюзной топологической конференции, председателем Организационного комитета которой он был. К делу организации этой конференции Анатолий Иванович отнесся так же, как относился ко всем своим делам, — с полной отдачей сил. Это напряжение сил после только что окончившегося утомительного учебного года, вместе с июльской жарой и постоянным полным пренебрежением своим здоровьем было каплей, вызвавшей катастрофу, потрясшую всех участников этой конференции. Нельзя забыть той обстановки скорби и того волнения, в которой происходило прощание с А. И. Мальцевым всех математиков, как живших в Новосибирске, так и приехавших туда. Все чувствовали, что прощаются с большим ученым, которому многим обязана и которого всегда будет помнить наша наука и наша страна...

О ВЛОЖЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КОЛЕЦ В ТЕЛА *



Множество M с операцией умножения называется полугруппой с сокращением, если эта операция удовлетворяет следующим условиям [1, стр. 58]:

а) каждым двум элементам a и b из M соответствует третий элемент c из M , называемый произведением a и b :

$$c = ab,$$

б) операция умножения ассоциативна, т. е. для любых трех элементов a, b, c из M

$$a(bc) = (ab)c,$$

в) однозначно определены левое и правое частные, т. е. для любых элементов a и b , если $ax = ay$ или $xb = yb$, то $x = y$.

Легко проверить, что каждая коммутативная полугруппа с сокращением может быть вложена в группу. Однако аналогичный вопрос о некоммутативных полугруппах, насколько нам известно, оставался нерешенным.

А. К. Сушкевич [3] опубликовал доказательство того, что каждая полугруппа с сокращением вложима в группу. Однако в § 2 настоящей работы мы приводим пример полугруппы, не вложимой в группу, так что результат Сушкевича является ошибочным.

Ван дер Варденом [2, т. I, стр. 49] поставлена аналогичная проблема и для колец: каждое ли кольцо без делителей нуля вложимо в тело?

Хорошо известно, что в случае коммутативных колец такое вложение всегда возможно [2, т. I, стр. 47—48]. Мы покажем, что в общем случае некоммутативных колец это уже не всегда так; а именно, в § 3 мы построим кольцо без делителей нуля, не вложимое в тело. Это решает указанную проблему Ван дер Вардена.

Нам удалось получить необходимые и достаточные условия того, что полугруппа была вложима в группу. Однако они слишком сложны, чтобы их здесь привести.

§ 1. Условие Z

Следующее условие необходимо для вложимости полугруппы H в группу.

У с л о в и е Z . Если A, B, C, D, X, Y, U, V — такие восемь элементов полугруппы H , что

$$AX = BY, \quad CX = DY, \quad AU = BV,$$

то должно выполняться равенство $CU = DV$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем: $B^{-1}A = YX^{-1}$, $D^{-1}C = YX^{-1}$, $B^{-1}A = VU^{-1}$. Следовательно, $D^{-1}C = VU^{-1}$ или $CU = DV$, что и требовалось доказать.

* Math. Ann., 1937, 113, 686—691 (перевод с англ.).

Отсюда следует, что полугруппа с сокращением H , не обладающая свойством Z , не вложима в группу. Пример такой полугруппы мы построим в следующем параграфе.

§ 2. Построение полугруппы с сокращением, не вложимой в группу

Рассмотрим всевозможные последовательности из восьми букв a, b, c, d, x, y, u, v ; такие последовательности назовем словами. Число букв в слове будем называть его длиной.

Слова

ax и by ,

cx и dy ,

au и bv

(A)

назовем соответствующими.

Рассмотрим теперь слово α . Оно может содержать одно из подслов ax, by, cx, dy, au, bv (т. е. иметь вид $\dots mn\dots$, где mn — одна из указанных комбинаций букв). Если в слове α заменить подслово mn соответствующим подсловом из таблицы (A), то получим другое слово β . Будем говорить, что слово β получено из слова α элементарным преобразованием. Назовем слово γ эквивалентным слову α , если оно может быть получено из слова α конечным числом последовательных элементарных преобразований. Это обстоятельство запишем формулой $\alpha \sim \gamma$. Следующие свойства введенного отношения эквивалентности очевидны:

1) $\alpha \sim \alpha$,

2) если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$,

3) если $\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$,

4) два эквивалентных слова имеют равную длину.

Произведение двух слов α и β — это по определению слово $\alpha\beta$, полученное приписыванием β к слову α . Имеем:

5) если $\alpha \sim \beta$ и $\gamma \sim \delta$, то $\alpha\gamma \sim \beta\delta$.

Рассмотрим теперь три последовательные буквы m, n, p в некотором слове [... mnp ...]. Если к слову mn применимо некоторое элементарное преобразование, то к слову np никакое элементарное преобразование уже не применимо. Наоборот, если существует элементарное преобразование слова np , то для слова mn элементарное преобразование невозможно. Действительно, из таблицы (A) заключаем, что если к слову np применимо элементарное преобразование, то n должно быть одной из букв a, b, c, d ; в то же время, если элементарное преобразование применимо к слову mn , то n — это одна из букв x, y, u, v . Итак, эти два случая взаимно исключают друг друга.

С помощью предыдущего замечания легко вывести следующие два свойства эквивалентности:

6) если $\alpha\beta \sim \alpha\gamma$ или $\beta\delta \sim \gamma\delta$, то $\beta \sim \gamma$,

7) если $\alpha\beta \sim \gamma\delta$ и слова α и γ имеют одинаковую длину, то

$\alpha = \mu t$, $\beta = n v$, $\gamma \sim \mu t'$, $\delta \sim n' v$, $mn \sim m' n'$,

где t, n, t', n' — буквы алфавита $\{a, b, c, d, x, y, u, v\}$. Если слово α (или β) имеет длину 1, то множитель μ (соответственно v) отсутствует.

Свойства 1, 2 и 3 показывают, что все слова можно разбить на классы эквивалентности. Эти классы и будут элементами нашей полугруппы H .

Произведение двух классов определяется «по представителям». Свойство (5) показывает, что такое определение корректно. Из свойства (6) следует, что если $AB = AC$ или $BD = CD$, то $B = C$.

Таким образом, эти классы составляют полугруппу с сокращением H . Будем в дальнейшем обозначать через (α) класс, содержащий слово α . Определения равенства и произведения классов запишем следующим образом:

8) $(\alpha) = (\beta)$ тогда и только тогда, когда $\alpha \sim \beta$,

9) $(\alpha)(\beta) = (\alpha\beta)$.

Будем называть длиной элемента A длину слова α из класса $(\alpha) = A$. Согласно свойству 4) это определение не зависит от выбора слова α в классе A .

Докажем теперь, что полугруппа H не вложима в группу. Для этого достаточно показать, что H не удовлетворяет условию Z . Действительно, в H справедливы равенства

$$(a)(x) = (b)(y), \quad (c)(x) = (d)(y), \quad (a)(u) = (b)(v).$$

Тем не менее в противоречии с условием Z имеет место неравенство $(c)(u) \neq (d)(v)$, поскольку к слову cu не применимы никакие элементарные преобразования, так что это слово не эквивалентно никакому другому.

Мы доказали, что полугруппа H не удовлетворяет условию Z и потому не может быть вложена в группу, что и требовалось показать.

§ 3. Построение кольца, не вложимого в тело

Рассмотрим кольцо R всех линейных форм

$$\sum_i k_i X_i,$$

где X_i — элементы полугруппы H , построенной в § 2, а k_i — рациональные числа, лишь конечное число которых отлично от нуля.

Сумма и произведение двух таких форм определены в соответствии с обычными правилами сложения и умножения*, т. е.

$$\sum k_i X_i + \sum l_j X_j = \sum (k_i + l_j) X_i, \quad \sum k_i X_i \cdot \sum l_j X_j = \sum_{i,j} k_i l_j X_i X_j.$$

Мы покажем, что в кольце R нет делителей нуля. С этой целью докажем сначала следующее свойство полугруппы H .

Л е м м а. Пусть $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ — элементы полугруппы H . Если $X_1 Y_1 = X_2 Y_2$, $X_1 Y_2 = X_3 Y_3$, а все элементы X_1, X_2, X_3 имеют одну и ту же длину, то либо $Y_1 = Y_2$, либо $Y_2 = Y_3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения $X_1 Y_1 = X_2 Y_2$ вытекает (см. свойство 7), что

$$X_1 = X' \cdot (m), \quad Y_1 = (n) \cdot Y', \quad X_2 = X' \cdot (m'), \quad Y_2 = (n') \cdot Y', \\ (mn) = (m'n'),$$

где один или оба множителя X', Y' могут и отсутствовать. Точно так же из

$$X_1 Y_2 = X_3 Y_3$$

* Кольцо R можно рассматривать как гиперкомплексную систему бесконечного ранга с полугруппой H в качестве базиса (см., например, [2, т. II, стр. II 149]).

вытекает, что

$$X_1 = X' \cdot (m), \quad X_3 = X' \cdot (p), \quad Y_2 = (n') \cdot Y', \quad Y_3 = (q) \cdot Y', \\ (mn') = (pq).$$

Здесь буквы m, n, m', n', p, q обозначают слова длины 1. Если теперь $Y_1 \neq Y_2$ и $Y_2 \neq Y_3$, то $n \neq n'$ и $n' \neq q$, и в то же время $(mn) = (m'n')$, $(mn') = (pq)$. Покажем, что это невозможно.

В самом деле, из таблицы (A) видно, что буква n' — это x или y , так как в этой таблице никакая другая буква не встречается дважды в конце слова. Точно так же буква m — это a или b . Поэтому слово mn' должно равняться ax или by . Предположим, например, что $mn' = ax$. Тогда $mn = au$ и $m'n' = bv$. Последнее равенство невозможно, так как слово n' равно x или y . Аналогично приводится к противоречию предположение, что $mn' = by$. Итак, либо $n = n'$, либо $n' = p$. В первом случае получаем $Y_1 = Y_2$, во втором — $Y_2 = Y_3$, что и требовалось.

Теперь легко показать, что кольцо R не имеет делителей нуля. В самом деле, пусть

$$\sum k_i X_i \sum l_j Y_j = \sum_{i,j} k_i l_j X_i Y_j = 0. \quad (B)$$

Члены наибольшей длины в выражении $\sum k_i l_j X_i Y_j$ дают в сумме нуль, так как не имеют подобных членов меньшей длины.

Очевидно, что эти члены наибольшей длины получаются при перемножении членов наибольшей длины из $\sum k_i X_i$ и $\sum l_j Y_j$. Следовательно, сохраняя в выражениях $\sum k_i X_i$ и $\sum l_j Y_j$ лишь члены наибольшей длины и удаляя остальные, вновь приходим к соотношению (B). Из сказанного следует, что, не уменьшая общности, можно считать длины слов X_i (так же, как и Y_j) равными.

Итак, пусть

$$\sum k_i X_i \sum l_j Y_j = \sum k_i l_j X_i Y_j = 0$$

и все слова X_i (соответственно Y_j) имеют одинаковую длину.

Для того чтобы член $k_1 l_1 X_1 Y_1$ был подобен одному или нескольким членам суммы (B), необходимо, чтобы нашлись такие i и j ($i, j \neq 1$), для которых $k_i, l_j \neq 0$ и $X_1 Y_1 = X_i Y_j$.

В этом случае член $k_1 l_j X_1 Y_j$ отличен от нуля, для того чтобы это слагаемое привелось к нулю в сумме с другими подобными членами, необходимо, чтобы нашлись такие i' и j' ($j' \neq j$), что $X_1 Y_j = X_{i'} Y_{j'}$. Но тогда согласно лемме либо $Y_1 = Y_j$, либо $Y_j = Y_{j'}$, а это невозможно.

Таким образом, кольцо R не содержит делителей нуля. Однако кольцо R не может быть вложено в тело, поскольку тогда подгруппа H была бы вложима в группу (а именно, в мультипликативную группу тела), в то время как мы показали, что это невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Ю. Шмидт. Абстрактная теория групп. Киев, 1916.
2. B. L. Van der Waerden. Moderne Algebra, Bd. I. Berlin, 1930; Bd. II, 1931.
3. А. К. Сушкевич. Про поширення пивгруп по цілої груп.— Зап. Харьк. мат. о-ва, 1936, 4, № 12, 81—88.

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ КОНЕЧНОГО РАНГА БЕЗ КРУЧЕНИЯ*



В настоящей работе мы рассматриваем только абелевы группы, все элементы которых бесконечного порядка. Записывать мы их будем аддитивно. Рангом группы называется максимальное число линейно независимых элементов этой группы. В дальнейшем всюду, где мы будем говорить о группах, мы будем без специальных оговорок подразумевать, что речь идет об абелевых группах конечного ранга r , все элементы которых, за исключением нуля, бесконечного порядка. Группа G называется по Курошу примитивной относительно простого числа p , если в G можно найти такие r линейно независимых элементов $x_1, \dots, x_r$, что всякий элемент $g \in G$ связан с указанными элементами соотношением вида

$$p^\alpha g = m_1 x_1 + \dots + m_r x_r,$$

где α и m_i — некоторые целые рациональные числа.

В своей работе [1] А. Г. Курош изучал свойства примитивных групп и дал их полную классификацию. В настоящей работе мы даем классификацию всех абелевых групп конечного ранга. Таким образом, мы решаем одну из проблем, поставленных А. Г. Курошем в указанной работе. В § 11 мы показываем, как из нашей классификации можно получить классификацию примитивных групп А. Г. Куроша.

Ввиду того что мы рассматриваем произвольные базы группы, все доказательства значительно упрощаются и являются в большинстве случаев повторением соответственных рассуждений из хорошо известной теории элементарных делителей (см. [2, 3]). Мы их приводим только для полноты изложения. В частности, появляется возможность получить результаты А. Г. Куроша без всяких вычислений (за исключением тривиальных), что опять-таки было поставлено в качестве ближайшей задачи в той же работе А. Г. Куроша.

Наша классификация схематически может быть представлена следующим образом. В § 5 рассматриваются так называемые p -числа, являющиеся небольшим обобщением p -адических чисел. В § 6 мы каждой группе ставим в соответствие систему квадратных матриц $A^{(p_1)}, A^{(p_2)}, \dots$, где $p_1, p_2, \dots$ есть последовательность всех простых чисел, а элементами матрицы $A^{(p_i)}$ являются p_i -числа. В § 7—9 дается определение совершенных p -матриц и вводятся элементарные преобразования. Наконец, в § 10 определяется эквивалентность систем совершенных p_i -матриц. С помощью этой эквивалентности множество всех систем совершенных p_i -матриц распадается на классы эквивалентных систем. Теорема 6 показывает, что установленное в § 7 соответствие между системами p_i -матриц и группами таково, что каждой системе изоморфных между собою групп взаимно однозначно соответствует некоторый класс эквивалентных между собою систем совершенных p_i -матриц. Этим дается классификация всех рассматриваемых групп.

* Мат. сб., 1938, 4, № 1, 45—67.

Естественно, что классификация будет тем более законченной, чем уже будут классы рассматриваемых матриц. В конце § 10 мы показываем, как можно вместо всевозможных систем совершенных p_i -матриц рассматривать только те системы, матрицы которых имеют специальный вид. Этим, в частности, показывается, что вместо произвольных p -чисел можно ограничиться рассмотрением только p -адических чисел. Можно было бы еще более ограничить классы рассматриваемых матриц, но при этом пришлось бы усложнить элементарные преобразования.

Изложенное показывает, что изучение свойств групп сводится к изучению инвариантов систем матриц относительно элементарных преобразований. Построение полной системы этих инвариантов есть задача, тесно связанная с основными проблемами, относящимися к аксиоме Цермело. Так, множество всех неизоморфных групп 1-го ранга имеет мощность континуума. Однако эффективное установление взаимно однозначного соответствия между этим множеством и множеством всех вещественных чисел эквивалентно установлению такого же соответствия между всеми действительными числами и множеством так называемых систем рациональности*. Последнее, как известно, связано с построением неизмеримых множеств.

§ 1. Прimitивные подгруппы

Пусть G есть аддитивно записываемая абелева группа, все элементы которой бесконечного порядка. Рангом G называется максимальное число линейно независимых элементов в G . Мы будем предполагать, что ранг G есть конечное число r .

Выберем базу G — какие-нибудь r линейно независимых элементов $x_1, \dots, x_r$ группы G . Тогда всякий элемент g группы G будет связан с базой соотношением вида

$$ng = m_1 x_1 + \dots + m_r x_r,$$

где m_i и n суть целые рациональные числа. Так как при данных m_i и $n \neq 0$ в группе G может существовать только один элемент g , удовлетворяющий этому соотношению, то мы будем условно писать, что

$$g = \frac{m_1}{n} x_1 + \frac{m_2}{n} x_2 + \dots + \frac{m_r}{n} x_r$$

или

$$g = \left(\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \dots, \frac{m_r}{n} \right).$$

Числа m_i/n назовем координатами элемента g при данной базе. При сложении элементов их координаты, очевидно, складываются. Это показывает, что G изоморфна некоторой подгруппе r -членного модуля с телом рациональных чисел в качестве коэффициентов.

Отметим еще следующие очевидные свойства группы G :

1. Если элемент $(m_1/p^s, m_2/p^s, \dots, m_r/p^s)$ принадлежит группе G и $m_i = m'_i \pmod{p^s}$ ($i = 1, 2, \dots, r$),^{*}

то элемент $(m'_1/p^s, m'_2/p^s, \dots, m'_r/p^s)$ также принадлежит G .

* Два числа входят в одну и ту же систему рациональности, если разность между ними есть число рациональное.

2. Если $(m_1/p^s, m_2/p^s, \dots, m_r/p^s) \in G$, $(p, q) = 1$, то

$$\left(\frac{m_1}{p^s}, \frac{m_2}{p^s}, \dots, \frac{m_r}{p^s} \right) \in G.$$

3. Если

$$\left(\frac{m_1}{p^s}, \frac{m_2}{p^s}, \dots, \frac{m_r}{p^s} \right) \in G,$$

$$m'_i \equiv m_i \pmod{p^s} \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

и

$$(p, q) = 1,$$

то

$$\left(\frac{m'_1}{p^s}, \frac{m'_2}{p^s}, \dots, \frac{m'_r}{p^s} \right) \in G.$$

Пусть теперь $p_1, p_2, \dots$ есть последовательность всех простых чисел натурального ряда. Назовем p_i -примитивной подгруппой группы G при данной базе подгруппу $\Gamma^{(p_i)}$, образованную теми элементами G , которые могут быть представлены в форме

$$\left(\frac{m_1}{p_i^\alpha}, \frac{m_2}{p_i^\alpha}, \dots, \frac{m_r}{p_i^\alpha} \right).$$

Рассмотрим совокупность всех примитивных групп

$$\Gamma^{(p_1)}, \Gamma^{(p_2)}, \dots, \Gamma^{(p_n)}, \dots$$

группы G . Легко видеть, что всякий элемент из G выражается линейно с целыми коэффициентами через элементы этих подгрупп, т. е. что группа G порождается этими подгруппами. Отсюда следует, что, зная координаты элементов всех примитивных подгрупп при некоторой базе, мы тем самым знаем группу G . Однако знание только структуры примитивных подгрупп еще не определяет структуры самой группы G . В самом деле, аддитивная группа всех рациональных чисел, у которых в несократимой форме знаменатель не делится ни на один квадрат, не изоморфна группе всех целых чисел. Тем не менее примитивные подгруппы обеих групп соответственно изоморфны.

§ 2. Слои примитивных подгрупп

Рассмотрим подробнее какую-либо p -примитивную подгруппу $\Gamma^{(p)} = \Gamma$ группы G . Обозначим через Γ_s совокупность всех элементов группы Γ , которые могут быть представлены в форме

$$\left(\frac{m_1}{p^s}, \frac{m_2}{p^s}, \dots, \frac{m_r}{p^s} \right).$$

Ясно, что

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots \subset \Gamma_s \subset \dots$$

и

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_s + \dots,$$

где знак $+$ употреблен в теоретико-множественном смысле. Это показывает, что группа Γ вполне определяется заданием* своих слоев Γ_s . Элементы базы $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$, очевидно, принадлежат ко всем слоям. Каждый слой Γ_s имеет r образующих и является прямой суммой r циклических групп бесконечного порядка.

Условимся говорить, что некоторые элементы порождают группу Γ_s , если эти элементы вместе с элементами базы являются обыкновенными образующими группы Γ_s .

Возьмем квадратную матрицу

$$A_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

порядка r из целых рациональных чисел. Мы назовем эту матрицу матрицей слоя Γ_s , если элементы

$$\left(\frac{a_{i1}}{p^s}, \frac{a_{i2}}{p^s}, \dots, \frac{a_{ir}}{p^s} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

порождают группу Γ_s . Таким образом, r строк матрицы группы Γ_s дают r элементов, порождающих группу Γ_s , и, обратно, каждые r элементов, порождающих группу Γ_s , дают некоторую матрицу группы Γ_s .

Из свойства 1 § 1 следует, что всякая матрица, элементы которой сравнимы $\text{mod } p^s$ с соответственными элементами некоторой матрицы слоя Γ_s , будет также матрицей этого слоя. Это показывает, что элементы матриц слоя Γ_s можно считать определенными только по модулю p^s .

Рассмотрим следующие преобразования матриц A_s :

Преобразование $[\alpha]$. Умножить или разделить $\text{mod } p^s$ какую-либо строку матрицы на целое число, не делящееся на p .

Преобразование $[\beta]$. Из одной строки матрицы вычесть другую, умноженную предварительно на любое целое число.

Легко видеть, что, применяя эти преобразования к какой-либо матрице группы Γ_s , мы снова получим матрицу группы Γ_s **. Мы хотим теперь доказать следующее предложение:

Из двух матриц группы Γ_s каждая может быть получена из другой конечным числом преобразований $[\alpha]$, $[\beta]$.

Однако для этого будет удобнее предварительно рассмотреть свойства нормальных матриц группы Γ_s .

* Разумеется, в координатной форме. Здесь, как и во всем последующем до § 8, предполагается, что все происходит при некоторой фиксированной базе.

** См. свойства 2, 3 из § 1. Заметим, что перестановка строк матрицы A_s равносильна нескольким преобразованиям типа $[\alpha]$, $[\beta]$ и, следовательно, также возможна.

§ 3. Нормальные матрицы

Матрица N_s группы Γ_s называется нормальной, если она перестановкой колонн может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} p^{\lambda_1} & n_{12}p^{\lambda_1} & \dots & n_{1r}p^{\lambda_1} \\ 0 & p^{\lambda_2} & \dots & n_{2r}p^{\lambda_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p^{\lambda_r} \end{pmatrix}, \quad (v)$$

где $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_r \leq s$ и $0 \leq n_{ik} < p^{\lambda_k - \lambda_i}$ ($i < k$). Числа n_{ik} мы будем называть коэффициентами, а p^{λ_i} — множителями.

Необходимость такого определения возникает из следующего обстоятельства. Всюду до § 8 мы рассматриваем группу G при произвольной, но раз навсегда выбранной базе. Элементы этой базы нами занумерованы в некотором определенном порядке, который мы также не хотим менять. Всякую матрицу A_s преобразованиями $[\alpha]$, $[\beta]$ и перестановкой колонн можно привести к виду (v). Без перестановки колонн мы этого, вообще говоря, сделать не можем. Однако всякую матрицу A_s можно преобразованиями $[\alpha]$, $[\beta]$ привести к такому виду N , что для приведения N к виду (v) нужна будет только некоторая перестановка колонн. Мы называем матрицу N нормальной, а перестановку, которую нужно совершить над колоннами матрицы N , чтобы привести ее к виду (v), мы назовем расположением колонн нормальной матрицы N .

Пусть $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ 1 & 2 & \dots & r \end{pmatrix}$ есть перестановка колонн, которая приводит матрицу N к виду (v). Тогда число k мы будем называть порядком i_k -й колонны матрицы N .

В дальнейшем мы всегда будем писать нормальные матрицы сразу в виде (v), помня при этом, что на самом деле возможны случаи, когда нормальные матрицы имеют другое расположение колонн.

Л е м м а 1. *Всякую матрицу A_s группы Γ_s можно посредством преобразований $[\alpha]$, $[\beta]$ привести к одному из нормальных видов. Число* необходимых для этого преобразований не превышает $(r(r+11))/2$.*

В самом деле, пусть p^α ($\alpha \leq s$) есть наивысшая степень числа p , на которую делятся все элементы матрицы A_s .

Тогда найдется элемент a_{ik} матрицы A_s , равный ap^α , где $(a, p) = 1$. Перестановкой строк можно добиться, чтобы этот элемент оказался в первой строке. Делим первую строку на a . После этого преобразованиями типа $[\beta]$ можно сделать нулями все элементы k -й колонны, кроме первого. Теперь повторяем все указанные преобразования над частью матрицы A_s , остающейся после вычеркивания из A_s первой строки и k -го столбца, и т. д. Наконец, по возможности, уменьшим с помощью преобразований $[\beta]$ величину членов матрицы. В результате этих преобразований, общее число которых не превосходит $(r(r+11))/2$, мы получим нормальную матрицу, у которой на k -м месте будет стоять колонна первого порядка.

Л е м м а 2. *Нормальная матрица группы Γ_s с данным расположением колонн определяется однозначно.*

* Для дальнейшего важно только, что это число не зависит от элементов матрицы.

Из первого имеем $\lambda'_1 \geq \lambda_1$. Следовательно, $\lambda'_1 = \lambda_1$. Из второго и первого

$$n'_{12}p^{\lambda_1} \equiv n_{12}p^{\lambda_1} + u_2p^{\lambda_2} \pmod{p^s}.$$

Так как $\lambda_2 \geq \lambda_1$, то $n'_{12} = n_{12} \pmod{p^{\lambda_2 - \lambda_1}}$. Однако, в силу определения нормальных матриц, числа n_{12} и n'_{12} неотрицательны и меньше $p^{\lambda_2 - \lambda_1}$. Следовательно, они совпадают. Аналогично получается совпадение остальных элементов матриц.

З а м е ч а н и е 1. Пусть среди всех элементов группы Γ_s , имеющих вид $(p^{\lambda_1}/p^s, m_2/p^s, \dots, m_r/p^s)$, наименьшим значением μ обладает элемент $(p^{\lambda_1}/p^s, b_{12}/p^s, \dots, b_{1r}/p^s)$. Пусть, далее, среди всех элементов вида $(0, p^{\lambda_2}/p^s, m_3/p^s, \dots, m_r/p^s)$ наименьшим значением μ обладает элемент $(0, p^{\lambda_2}/p^s, \dots, b_{2r}/p^s)$ и т. д. Тогда эти элементы будут обыкновенными образующими группы Γ_s , и, следовательно, матрица

$$B_s = \begin{pmatrix} p^{\lambda_1} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & p^{\lambda_2} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p^{\lambda_r} \end{pmatrix}$$

будет матрицей группы Γ_s .

Обратно, если матрица вида B_s есть матрица группы Γ_s , то элементы этой группы, соответствующие различным строкам матрицы B_s , удовлетворяют указанным выше «условиям минимальности» и поэтому будут являться обыкновенными образующими группы Γ_s .

З а м е ч а н и е 2. Пусть k -й столбец нормальной матрицы N_s есть столбец первого порядка. Вычеркнем из N_s первую строку и k -й столбец. В результате получим некоторую матрицу $\tilde{N}_s$. С другой стороны, рассмотрим подгруппу $\tilde{\Gamma}_s$, составленную из тех элементов группы Γ_s , у которых k -я координата равна нулю. Тогда $\tilde{N}_s$ будет нормальной матрицей группы $\tilde{\Gamma}_s$.

З а м е ч а н и е 3. Пусть матрица

$$A_s = \begin{pmatrix} p^{\lambda_1} & a_{12}p^{\lambda_1} & \dots & a_{1r}p^{\lambda_1} \\ 0 & p^{\lambda_2} & \dots & a_{2r}p^{\lambda_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p^{\lambda_r} \end{pmatrix}$$

есть матрица группы Γ_s . Тогда матрица

$$A_{s-1} = \begin{pmatrix} p^{\lambda_1-1} & a_{12}p^{\lambda_1-1} & \dots & a_{1r}p^{\lambda_1-1} \\ 0 & p^{\lambda_2-1} & \dots & a_{2r}p^{\lambda_2-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p^{\lambda_r-1} \end{pmatrix}$$

будет матрицей слоя Γ_{s-1} . При этом, если $\lambda_i = 0$, то $\lambda_i - 1$ следует считать также нулем.

Если A_s есть нормальная матрица группы Γ_s , то A_{s-1} вообще не будет нормальной. Однако из A_{s-1} можно получить нормальную матрицу с тем же расположением колонн, произведя несколько операций типа $[\beta]$.

Л е м м а 3. Если одну из матриц группы Γ_s можно привести преобразованиями $[\alpha]$, $[\beta]$ к нормальному виду с заданным расположением колонн, то все остальные матрицы группы Γ_s можно привести к нормальному виду с тем же расположением колонн.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим координаты всех элементов группы Γ_s в несократимом виде. Пусть максимальный знаменатель k -й координаты будет p^β . Рассмотрим какую-либо матрицу A_s группы Γ_s . Легко видеть, что максимальная степень числа p , на которую делятся все элементы k -й колонны матрицы A_s , будет в точности $p^{s-\beta}$. Следовательно, эта максимальная степень будет одинакова для всех матриц группы Γ_s .

Рассматриваемая лемма отсюда вытекает непосредственно, если только вспомнить доказательство первой леммы. В самом деле, утверждение тривиально для ранга единица. Пусть оно справедливо для групп ранга $r - 1$. Докажем, что оно будет справедливым и для групп ранга r .

Пусть A_s и A_s^* — две какие-либо матрицы группы Γ_s . Максимальная степень p^α ($\alpha \leq s$), на которую делятся все элементы матрицы A_s , та же, что и у матрицы A_s^* . Если в k -й колонне матрицы A_s существует элемент вида ap^α , $(a, p) = 1$, то в k -й колонне матрицы A_s^* также найдется элемент указанного вида. Следовательно, если матрицу A_s привести к нормальному виду N_s , где колонна первого порядка будет стоять на k -м месте, то матрицу A_s^* можно будет привести к нормальному виду N_s^* , где колонна первого порядка будет стоять также на k -м месте. Если теперь из матриц N_s и N_s^* вычеркнуть первые строки и k -е колонны, то оставшиеся части $\tilde{N}_s$ и $\tilde{N}_s^*$ в силу замечания 2 будут приводимы друг к другу, так как это будут нормальные матрицы группы $\tilde{\Gamma}_s$ ранга $r - 1$. Следовательно, матрицы N_s и N_s^* приводимы одна к другой, что и требовалось доказать.

Соединяя леммы 1, 2, 3, мы приходим к следующей теореме, уже упомянутой в конце § 2:

Т е о р е м а 1. Среди матриц группы Γ_s каждая может быть получена из любой другой с помощью конечного числа преобразований $[\alpha]$, $[\beta]$. Максимальное число необходимых для этого преобразований не превосходит $r(r + 1)$.

З а м е ч а н и е 4. Пусть A_s есть матрица слоя Γ_s и k — некоторое натуральное число $\leq r$. Тогда матрицу A_s можно преобразованиями $[\alpha]$, $[\beta]$ привести к такому нормальному виду N_s , что коэффициенты первых $l - 1$ элементов k -й колонны матрицы N_s будут делиться на p . Здесь через l мы обозначили порядок k -й колонны матрицы N_s .

В самом деле, если в какой-либо нормальной матрице N_s группы Γ_s k -я колонна не обладает указанным свойством, то матрицу N_s можно привести к нормальному виду с другим расположением колонн, в котором k -я колонна будет иметь более низкий порядок.

§ 4. Последовательные нормальные матрицы

Теперь мы рассмотрим вопрос о том, какими соотношениями должны быть связаны соответственные элементы двух последовательных нормальных матриц. Мы ограничиваемся здесь только двумя частными случаями, так как в § 9 будет показано, как можно общий случай свести к этим частным случаям.

Пусть

$$N_s = \begin{vmatrix} p^{\lambda_1} & n_{12}p^{\lambda_1} & \dots & n_{1r}p^{\lambda_1} \\ 0 & p^{\lambda_2} & \dots & n_{2r}p^{\lambda_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p^{\lambda_r} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad N_{s+1} = \begin{vmatrix} p^{\lambda'_1} & n'_{12}p^{\lambda'_1} & \dots & n'_{1r}p^{\lambda'_1} \\ 0 & p^{\lambda'_2} & \dots & n'_{2r}p^{\lambda'_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p^{\lambda'_r} \end{vmatrix}$$

суть нормальные матрицы групп Γ_s и Γ_{s+1} с одинаковым расположением колонн.

С л у ч а й 1. Предположим, что $\lambda'_1 = \lambda'_2 = \dots = \lambda'_{m-1} = 0$, но $\lambda'_m > 0$. Тогда $\lambda'_i = \lambda_i + 1$, $n_{ik} = n_{ik}$ ($k > i \geq m$).

Действительно, пусть $\tilde{\Gamma}_{t,m}$ обозначает подгруппу тех элементов из Γ_t , у которых первые $m-1$ координат равны нулю. В рассматриваемом случае $\tilde{\Gamma}_{s+1,m} = \tilde{\Gamma}_{s,m}$, из чего немедленно вытекают указанные соотношения.

С л у ч а й 2. Предположим, что

$$N_s = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p^s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p^s & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & p^s \end{vmatrix}$$

$$\text{и } N_{s+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p^{s+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p^{s+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & p^{s+1} \end{vmatrix}.$$

Тогда $a'_{ik} \equiv a_{ik} \pmod{p^s}$.

В самом деле, элемент

$$g' = \left(\frac{1}{p^{s+1}}, 0, \dots, 0, \frac{a'_{11}}{p^{s+1}}, \dots, \frac{a'_{1n}}{p^{s+1}} \right)$$

принадлежит группе Γ_{s+1} . Поэтому pg' входит в Γ_s . Пусть

$$g = \left(\frac{1}{p^s}, 0, \dots, 0, \frac{a_{11}}{p^s}, \dots, \frac{a_{1n}}{p^s} \right).$$

Тогда

$$pg' - g = \left(0, \dots, 0, \frac{a'_{11} - a_{11}}{p^s}, \dots \right)$$

должен содержаться в $\tilde{\Gamma}_{s, m+1}^{\#} = \tilde{\Gamma}_{0, m+1}$. Следовательно, координаты элемента $g - pg'$ должны быть целыми, что и требовалось доказать.

§ 5. p -числа

Для более компактного представления последовательности матриц $A_1, A_2, \dots$ мы введем числа особого рода, которые назовем p -числами. По определению, p -числами называются бесконечные последовательности целых рациональных чисел, если относительно них установлены следующие соглашения.

Пусть α есть последовательность целых рациональных чисел $\{a_1, a_2, \dots\}$, или, короче, $\alpha = \{a_i\}$ и $\beta = \{b_i\}$. Тогда

1. $\alpha = \beta$ означает, что $a_i \equiv b_i \pmod{p^i}$ ($i = 1, 2, \dots$).

2. $\{a_i\} \cdot \{b_i\} = \{a_i b_i\}$.

3. $\{a_i\} + \{b_i\} = \{a_i + b_i\}$.

Если $\alpha = \{a_i\}$, то a_i мы будем называть i -й компонентой p -числа α . Очевидно, что p -числа образуют кольцо. Делителями нуля в этом кольце будут те числа, хотя бы одна компонента которых делится на p . Если ни одна компонента на p не делится, то такое p -число мы будем называть регулярным. Деление на регулярное число всегда возможно и однозначно.

Пусть $\alpha = \{a_i\}$. Тогда через $V\alpha$ обозначим число $\{0, pa_1, pa_2, \dots\}$. Операция V^{-1} , обратная к V , возможна только при условии, если все компоненты числа делятся на p . Условимся считать p -число равным целому рациональному числу m , если все компоненты его равны m . Некоторое p -число $\{a_i\}$ является p -адическим, если

$$a_{i+1} \equiv a_i \pmod{p^i} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Пусть $\alpha = \{a_i\}$ есть некоторое p -адическое число. Тогда]

$$V\alpha = p\alpha, \quad V^{-1}(p\alpha) = \alpha.$$

В самом деле, так как α p -адическое, то $a_i \equiv a_{i+1} \pmod{p^i}$. Следовательно, $pa_i \equiv pa_{i+1} \pmod{p^{i+1}}$. В силу определения равенства p -чисел это означает, что $V\alpha = p\alpha$.

В дальнейшем мы через P_α будем обозначать p -число $\{1, 1, \dots, 1, p, p^2, \dots\}$, где в начале стоит α единиц. В частности, $P_\infty = 1$, $P_0 = 0$. Если $\alpha = \{a_i\}$ есть p -адическое число, то $P_\alpha \alpha = a_\alpha P_\alpha$. В самом деле, если $i \leq \alpha$, то $a_i \equiv a_\alpha \pmod{p^i}$. Если же $i > \alpha$, то $a_i \equiv a_\alpha \pmod{p^\alpha}$. Следовательно,

$$p^{i-\alpha} a_i \equiv p^{i-\alpha} a_\alpha \pmod{p^i}.$$

Так как $p^{i-\alpha} a_i$ есть i -я компонента числа αP_α , а $p^{i-\alpha} a_\alpha$ есть i -я компонента числа $a_\alpha P_\alpha$, то

$$P_\alpha \alpha = P_\alpha a_\alpha.$$

Заметим, наконец, еще следующее обстоятельство. Пусть все компоненты числа α делятся на p . Тогда само число α тоже делится на p , но частное опре-

деляется не однозначно. Если же при этом α есть p -адическое число, то тогда среди решений уравнения $p\mathfrak{x} = \alpha$ найдется только одно, которое является p -адическим. Это решение дается формулой $\mathfrak{x} = V^{-1}\alpha$. Мы назовем его p -адическим частным.

§ 6. p -матрицы

Матрицу, элементами которой являются p -числа, мы будем называть p -матрицей. Матрицу A_s , элементы которой суть s -е компоненты соответствующих элементов p -матрицы A , мы будем называть s -й компонентой матрицы A .

Рассмотрим p -примитивную подгруппу $\Gamma^{(p)} = \Gamma$ группы G^* . Матрица p -чисел $A^{(p)} = A$ называется p -матрицей группы Γ , если s -я компонента A_s этой матрицы есть матрица слоя Γ_s ($s = 1, 2, \dots$).

Мы уже видели, что группа Γ вполне определяется своими слоями Γ_s . Поэтому группа Γ вполне определяется любой из своих p -матриц. Чтобы, наоборот, по заданной группе Γ построить какую-либо p -матрицу этой группы, достаточно поступить следующим образом: берем последовательность каких-либо матриц $A_1, A_2, \dots$, принадлежащих соответственно слоям $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, и затем берем p -матрицу A , компонентами которой являются матрицы $A_1, A_2, \dots$. Матрица A будет p -матрицей группы Γ .

Покажем теперь, что если над какой-либо p -матрицей A группы Γ совершить одно из преобразований:

Преобразование α : умножить или разделить какую-либо строку матрицы на произвольное регулярное p -число.

Преобразование β : прибавить к одной из строк другую, умноженную на любое p -число, то получится снова p -матрица группы Γ .

В самом деле, если над p -матрицей A совершается преобразование α или β , то это значит, что над компонентами ее совершаются преобразования соответственно типа $[\alpha]$ или $[\beta]$ (см. § 2). Следовательно, компоненты новой p -матрицы остаются матрицами соответствующих слоев группы Γ , что и требовалось доказать.

Обратно, если над k -й строкой ($k = 1, 2, \dots, r$) каждой компоненты p -матрицы A совершить преобразование типа $[\alpha]$, то новые компоненты образуют p -матрицу, которая получается из матрицы A одним преобразованием типа α .

То же самое, очевидно, верно и для преобразований $[\beta]$. Отсюда вытекает, принимая во внимание теорему 1, следующее предложение:

Теорема 2. Если имеются две p -матрицы группы Γ , то каждая из них может быть получена из другой с помощью конечного числа преобразований α, β .

Мы будем называть p -матрицу $\mathfrak{M}$ группы Γ нормальной, если ее компоненты суть нормальные матрицы соответствующих слоев группы Γ с одинаковым расположением колонн.

Из замечания 3 (см. § 3) вытекает, что существование нормальной матрицы слоя Γ_s с некоторым расположением колонн влечет за собой существование нормальных матриц с тем же расположением колонн у всех предшествующих слоев. Отсюда непосредственно следует, что нормальные p -матрицы группы Γ существуют.

* Пока все еще при некоторой выбранной базе.

Из рассуждений § 4 вытекает, что нормальная p -матрица группы Γ должна иметь вид*

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} P_{\infty} & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & P_{\infty} & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_{\infty} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P_{\alpha_1} & b_{12}P_{\alpha_1} & \dots & b_{1n}P_{\alpha_1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & P_{\alpha_2} & \dots & b_{2n}P_{\alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{\alpha_n} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_n \leq \alpha_{n-1} \leq \dots \leq \alpha_1 < \infty$. В начале § 4 было показано, что все компоненты какого-либо p -числа b_{ik} этой матрицы будут равны одному и тому же целому рациональному числу b_{ik} , за исключением, быть может, первых α_i компонент. Подставим теперь в матрицу $\mathfrak{N}$ вместо чисел b_{ik} соответственные целые рациональные числа b_{ik} . Полученная таким образом матрица

$$N = \begin{pmatrix} P_{\infty} & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & P_{\infty} & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_{\infty} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P_{\alpha_1} & b_{12}P_{\alpha_1} & \dots & b_{1n}P_{\alpha_1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & P_{\alpha_2} & \dots & b_{2n}P_{\alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

будет матрицей группы Γ , как это следует из замечания 4 (см. § 3). Однако N не будет нормальной матрицей, так как ее первые компоненты могут не быть нормальными матрицами. Назовем поэтому матрицу N квазинормальной матрицей группы Γ . Нормальная матрица группы Γ определяется однозначно, поэтому квазинормальная матрица определяется также однозначно**.

§ 7. Совершенные матрицы

Мы показали, как по данной p -примитивной группе Γ найти ее p -матрицу. Теперь мы рассмотрим обратную задачу.

Пусть A есть некоторая p -матрица и

$$A_s = \begin{pmatrix} a_{11}^{(s)} & \dots & a_{1r}^{(s)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1}^{(s)} & \dots & a_{rr}^{(s)} \end{pmatrix}$$

есть ее s -я компонента. Возьмем некоторый r -членный R -модуль с базисом $u_1, u_2, \dots, u_r$ ***. Обозначим через Γ_s ту подгруппу этого модуля, которая

* Или вид, получающийся из данного перестановкой колонн.

** При данном расположении колонн.

*** — тело рациональных чисел.

порождается элементами

$$\frac{a_{i1}^{(s)}}{p^s} u_1 + \frac{a_{i2}^{(s)}}{p^s} u_2 + \dots + \frac{a_{ir}^{(s)}}{p^s} u_r \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

и элементами базиса. Пусть группа Γ есть наименьшая подгруппа модуля, которая содержит все группы Γ_s ($s = 1, 2, \dots$). Мы будем говорить, что построенная таким образом группа Γ порождается матрицей A .

Если p -матрица A есть матрица некоторой группы Γ , то матрица A порождает как раз эту группу. Обратное вообще неверно, так как легко построить p -матрицу, которая не является p -матрицей той группы, которую эта матрица порождает. Отсюда следует определение: p -матрица называется совершенной, если она является p -матрицей порождаемой ею группы.

Нам нужно теперь указать алгебраические свойства, характеризующие совершенные p -матрицы. Однако мы сейчас рассмотрим только один частный случай, оставляя рассмотрение общей задачи до § 9.

Теорема 3. Для того чтобы p -матрица вида

$$K = \begin{pmatrix} P_\infty & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & P_\infty & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_\infty & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & P_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & P_0 \end{pmatrix}$$

была совершенной, необходимо и достаточно, чтобы числа a_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m, k = 1, \dots, n$) были p -адическими.

Действительно, необходимость условий непосредственно вытекает из тех соотношений между соответственными элементами двух последовательных нормальных матриц, которые были установлены в § 4 (случай 2). Достаточность получается следующим образом. Возьмем компоненту K_{s+t} номера $s+t$ матрицы K . Она порождает некоторую группу Γ_{s+t} . Нам достаточно показать, что s -й слой этой группы порождается s -й компонентой K_s матрицы K . Но матрица K_{s+t} есть нормальная матрица группы Γ_{s+t} . Поэтому для получения матрицы s -го слоя этой группы мы можем воспользоваться замечанием 3 (§ 3). Так как $(s+t)$ -е компоненты p -адических чисел совпадают с s -ми компонентами по мод p^s , то мы в результате получим матрицу K_s , что и требовалось доказать.

§ 8. Изменение базы

До сих пор мы изучали соответствие между примитивными подгруппами $\Gamma^{(p_i)}$ группы G и их p_i -матрицами при некоторой выбранной базе. Теперь мы должны выяснить, как меняются подгруппы $\Gamma^{(p_i)}$ и их p_i -матрицы при переходе к новой базе.

Пусть старая база есть $x_1, x_2, \dots, x_r$, новая $y_1, y_2, \dots, y_r$, где x_i и y_i — элементы группы G . Тогда

$$c_i x_i = c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \dots + c_{ir} y_r \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

где коэффициенты s суть целые рациональные числа и определитель $|c_{ik}| \neq 0$. Известно, что линейное преобразование с отличным от нуля определителем может быть заменено цепочкой следующих элементарных преобразований:

$$1) \quad x_i = x'_i + ax'_j, \quad x_\alpha = x'_\alpha \quad (i \neq j, \alpha \neq i),$$

$$2) \quad x_i = -x'_i, \quad x_\alpha = x'_\alpha \quad (\alpha \neq i),$$

$$3) \quad qx_i = x'_i, \quad x_\alpha = x'_\alpha \quad (\alpha \neq i),$$

$$4) \quad x_i = qx'_i, \quad x_\alpha = x'_\alpha \quad (\alpha \neq i),$$

где a есть некоторое целое рациональное и q — натуральное простое число. Поэтому нам достаточно выяснить, как изменяются p_i -матрицы групп $\Gamma^{(p_i)}$ только при этих преобразованиях.

Преобразование 1). Предположим для определенности, что $i = 1, j = 2$. Пусть $\bar{\Gamma}$ есть p -примитивная подгруппа группы G при новой базе и $\bar{\Gamma}_s$ есть s -й слой этой подгруппы.

Какой-либо элемент группы G с координатами $(m_1/p^s, m_2/p^s, \dots, m_r/p^s)$ после преобразования 1) получит новые координаты:

$$\left(\frac{m_1}{p^s}, \frac{m_2 + am_1}{p^s}, \dots, \frac{m_r}{p^s} \right).$$

Это показывает, что $\bar{\Gamma}_s \subset \Gamma_s$. Так как, совершая обратное преобразование, мы получим, что $\Gamma_s \subset \bar{\Gamma}_s$, то $\Gamma_s = \bar{\Gamma}_s$. Из этого, в свою очередь, вытекает, что элементы, порождающие группу Γ_s , будут порождать группу $\bar{\Gamma}_s$. Следовательно, чтобы получить матрицу $\bar{A}_s$ слоя $\bar{\Gamma}_s$, достаточно взять числители новых координат тех элементов, числители старых координат которых образовали матрицу A_s слоя Γ_s . Значит, матрицу $\bar{A}_s$ можно получить из A_s , прибавляя ко второму столбцу матрицы A_s ее первый столбец, умноженный на a . Это преобразование совершается одновременно над всеми компонентами матрицы A , что равносильно аналогичному преобразованию самой матрицы A . Таким образом, мы пришли к выводу, что преобразование базы 1) эквивалентно следующему преобразованию p -матрицы A :

Преобразование γ . К j -й колонне матрицы A прибавляется i -я колонна, умноженная на целое рациональное число a .

Преобразование 2). Это преобразование, очевидно, эквивалентно следующему преобразованию матрицы A :

Преобразование γ' . У всех элементов i -й колонны знак меняется на обратный.

Преобразование 3). При этом преобразовании i -я координата всех элементов группы G делится на q . Группы Γ и $\bar{\Gamma}$ теперь вообще различны. Однако легко видеть, что при $q \neq p$ новая p -матрица $\bar{A}$ получается из старой путем деления всех элементов i -й колонны матрицы A на q . Более сложно обстоит дело, когда $q = p$.

Приведем матрицу A к виду

$$N = \begin{vmatrix} P_{\alpha_1} & n_{12}P_{\alpha_1} & \dots & n_{1r}P_{\alpha_1} \\ 0 & P_{\alpha_2} & \dots & n_{2r}P_{\alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_{\alpha_r} \end{vmatrix}.$$

Пусть требуется произвести преобразование $px_1 = x'_1$, $x_\alpha = x'_\alpha$ ($\alpha \neq 1$), т. е. «разделить» первую колонку на p . Мы утверждаем, что матрица

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} P_{\alpha_1+1} & P_{\alpha_1+1}Vn_{12} & \dots & Vn_{1r}P_{\alpha_1+1} \\ 0 & P_{\alpha_2} & \dots & n_{2r}P_{\alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_{\alpha_r} \end{vmatrix}$$

будет p -матрицей группы $\bar{\Gamma}^*$. В самом деле, обозначим через $\tilde{\Gamma}$ группу тех элементов из Γ , у которых первая координата равна нулю. Если из матрицы N вычеркнуть первую строку, то останется p -матрица группы $\tilde{\Gamma}$. Так как при рассматриваемом преобразовании координаты элементов группы $\tilde{\Gamma}$ не меняются, то матрица $\bar{N}$ отличается от N только элементами первой строки.

Возьмем из слоя Γ_{s-1} элемент

$$g = \left(\frac{p^\lambda}{p^{s-1}}, \frac{p^\lambda n_{12}^{(s-1)}}{p^{s-1}}, \dots, \frac{p^\lambda n_{1r}^{(s-1)}}{p^{s-1}} \right),$$

который соответствует первой строке матрицы N_{s-1} . Этот элемент при новой базе будет иметь координаты

$$\left(\frac{p^\lambda}{p^s}, \frac{p^\lambda pn_{12}^{(s-1)}}{p^s}, \dots, \frac{p^\lambda pn_{1r}^{(s-1)}}{p^s} \right).$$

Среди всех элементов слоя Γ_{s-1} , имеющих вид

$$\left(\frac{p^\mu}{p^{s-1}}, \frac{p^\mu m_2}{p^{s-1}}, \dots, \frac{p^\mu m_r}{p^{s-1}} \right),$$

элемент g имеет наименьшее значение μ . Поэтому таким же свойством будет обладать g и относительно слоя $\bar{\Gamma}_s^{**}$. В силу замечания 3 (§ 3) из этого следует, что в качестве первой строки матрицы N_s можно взять числа $(p^\lambda, p^\lambda pn_{12}^{(s-1)}, \dots, p^\lambda pn_{1r}^{(s-1)})$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь требуется «разделить» на p i -й столбец той же матрицы N . На основании замечания 4 (§ 3) мы можем предполагать матрицу N приведенной к такому виду, чтобы коэффициенты $n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{i,i-1}$ делились на p^{***} . Тогда матрица

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} P_{\alpha_1} & P_{\alpha_1}n_{12} & \dots & P_{\alpha_1} \frac{n_{1i}}{p} & P_{\alpha_1}n_{1,i+1} & \dots & P_{\alpha_1}n_{1r} \\ 0 & P_{\alpha_2} & \dots & P_{\alpha_2} \frac{n_{2i}}{p} & P_{\alpha_2}n_{2,i+1} & \dots & P_{\alpha_2}n_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_{\alpha_i} & P_{\alpha_i}Vn_{i,i+1} & \dots & P_{\alpha_i}Vn_{i,r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P_{\alpha_{i+1}} & \dots & P_{\alpha_{i+1}}n_{i+1,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & P_{\alpha_r} \end{vmatrix}$$

* Если $\alpha_1 = \infty$, то $\alpha_1 + 1 = \infty$.

** Рассматривая уже новые координаты элементов.

*** Слово «приведенный» следует понимать в смысле «приведенный при данной базе», т. е. преобразованиями α, β .

будет матрицей группы $\bar{\Gamma}$. При этом в качестве частных π_{ki}/p можно брать любые их значения.

Доказательство совершенно аналогично предшествующему. Итак, преобразование базы 3) эквивалентно следующему преобразованию p -матрицы A :

Преобразование δ_q . i -я колонна p -матрицы A делится на некоторое натуральное простое число q .

Отметим еще раз, что деление колонок p -матрицы на p совершается по изложенным более сложным правилам.

Преобразование 4). Это преобразование является обратным по отношению к преобразованию 3). Поэтому, если мы умножением колонок на q назовем операцию, обратную операции деления колонок на q^* , то преобразование 4) будет эквивалентно такому преобразованию матрицы A :

Преобразование ε_q . i -я колонна матрицы A умножается на число q .

§ 9. Совершенные матрицы

В § 7 мы поставили себе задачу найти арифметические свойства, характеризующие совершенные p -матрицы. Следующая теорема дает решение этой задачи в общем виде:

Теорема 4. Для того чтобы некоторая p -матрица была совершенной, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было с помощью конечного числа преобразований α , β , γ , γ' , δ , ε привести к виду K (§ 7) с p -адическими коэффициентами.

Доказательство. Прежде всего заметим, что преобразования α , $\dots$, ε переводят совершенные матрицы в совершенные же. Так как матрицы вида K с p -адическими коэффициентами совершенны, то, следовательно, совершенными будут и те матрицы, которые преобразованиями α , $\dots$, ε приводятся к указанному виду. Это показывает достаточность условий. Покажем теперь, что условия теоремы необходимы. Пусть дана некоторая совершенная p -матрица A . В § 6 нами было показано, что такую матрицу можно конечным числом преобразований α , β привести к квазинормальному виду:

$$N = \begin{pmatrix} P_{\infty} & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & P_{\infty} & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_{\infty} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P_{\alpha_1} & b_{12}P_{\alpha_1} & \dots & b_{1r}P_{\alpha_1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & P_{\alpha_2} & \dots & b_{2r}P_{\alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{\alpha_n} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ конечны и b_{ik} суть целые рациональные числа. Произведем над матрицей N следующую систему преобразований: из $(m+2)$ -й колонны вычтем $(m+1)$ -ю, умноженную на b_{12} ; из $(m+3)$ -й вычтем $(m+1)$ -ю, умноженную на b_{13} , и т. д. Во вновь полученной матрице из $(m+3)$ -й колонны

* Таким образом, умножением колонок на q мы называем переход от матрицы $\bar{N}$ к матрице N .

вычитаем $(m + 2)$ -ю, умноженную на b_{23} ; из $(m + 4)$ -й вычитаем $(m + 2)$ -ю, умноженную на b_{24} , и т. д. После всех таких преобразований мы, очевидно, получим матрицу квазинормального вида, но такую, у которой коэффициенты b_{ik} будут равны нулю. Умножая теперь последнюю колонну α_n раз на p , предпоследнюю α_{n-1} раз на p и т. д., $(m + 1)$ -ю α_1 раз на p , мы получим матрицу вида K , что и требовалось доказать.

Мы хотим теперь дать другие необходимые и достаточные условия совершенности матрицы A , в которых фигурируют только преобразования α и β .

Пусть p -матрица A совершенна. Выберем какой-либо r -членный модуль с базисом $x_1, x_2, \dots, x_r$ и построим группу Γ , соответствующую матрице A . Пусть $\Gamma = G$. Тогда Γ есть p -примитивная подгруппа группы G при базе $x_1, x_2, \dots, x_r$.

Приведем A к квазинормальному виду N и затем сделаем над N указанную в предыдущем доказательстве цепочку S элементарных преобразований. Эти преобразования приведут нас к матрице вида K . Будем теперь производить все элементарные преобразования цепочки S в обратном направлении. Таким образом, нам сначала нужно будет разделить $(m + 1)$ -ю колонну α_1 раз на p . При делении на p можно брать различные частные; мы условимся брать p -адические. Тогда после всех делений из цепочки S^{-1} мы получим матрицу, у которой все элементы, лежащие в m первых строках и последних n колоннах, будут p -адическими числами. Производя все остальные преобразования из цепочки S^{-1} , мы не нарушим указанное свойство. Следовательно, выполнив все преобразования цепочки S^{-1} , мы получим матрицу вида

$$M = \begin{pmatrix} P_\infty & 0 & \dots & 0 & m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ 0 & P_\infty & \dots & 0 & m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_\infty & m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P_{\alpha_1} & b_{12}P_{\alpha_1} & \dots & b_{1n}P_{\alpha_1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & P_{\alpha_2} & \dots & b_{2n}P_{\alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{\alpha_n} \end{pmatrix},$$

где b_{ik} — целые рациональные и m_{ik} — p -адические числа. Такую матрицу мы будем называть канонической матрицей группы Γ . Так как после преобразований S^{-1} мы вернулись к старой базе $x_1, x_2, \dots, x_r$, то матрицы N и M , а следовательно, и A и M можно перевести одну в другую конечным числом преобразований α, β . Отсюда вытекает такая

Т е о р е м а 5. *Для того чтобы некоторая p -матрица была совершенной, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было привести к каноническому виду конечным числом преобразований α, β .*

Действительно, необходимость условий была только что показана. Достаточность очевидна, так как цепочкой преобразований S всякая каноническая матрица приводится к виду K с p -адическими элементами.

§ 10. Эквивалентность систем матриц

Пусть дана некоторая абелева группа G без кручения, ранга r . Выберем какую-либо базу $x_1, x_2, \dots, x_r$ в G и возьмем примитивные подгруппы группы G по всем простым числам. Пусть эти примитивные подгруппы будут

$\Gamma^{(p_1)}, \Gamma^{(p_2)}, \dots$. Рассмотрим p_i -матрицы этих групп $A^{(p_1)}, A^{(p_2)}, \dots$. Систему этих p_i -матриц мы будем называть системой p_i -матриц группы G при базе $x_1, \dots, x_r$.

Обратно, пусть дана система произвольных совершенных p_i -матриц $A^{(p_1)}, A^{(p_2)}, \dots$. Возьмем R -модуль с каким-либо базисом $x_1, \dots, x_r$. Каждая матрица $A^{(p_i)}$ порождает в этом модуле некоторую подгруппу $\Gamma^{(p_i)}$. Пусть G есть наименьшая подгруппа этого модуля, содержащая все $\Gamma^{(p_i)}$. Тогда матрицы $A^{(p_1)}, A^{(p_2)}, \dots$ образуют как раз систему p_i -матриц группы G при базе $x_1, \dots, x_r$.

Таким образом, нами установлено соответствие, при котором каждой группе G соответствует некоторая система совершенных p_i -матриц и каждой системе совершенных p_i -матриц соответствует некоторая группа G . При этом, если дана система совершенных p_i -матриц, то группа G определяется с точностью до изоморфизма. Нам остается поэтому ответить на обратный вопрос: какими арифметическими свойствами характеризуются последовательности p_i -матриц, соответствующие изоморфным группам?

Введем следующее определение: две системы p_i -матриц назовем эквивалентными, если из одной системы можно получить другую, произведя конечное число преобразований α, β над каждой матрицей системы отдельно и конечное число преобразований $\gamma, \gamma', \delta, \varepsilon$ над всеми матрицами системы одновременно.

Т е о р е м а 6. *Для того чтобы две системы совершенных p_i -матриц определяли изоморфные группы, необходимо и достаточно, чтобы эти системы были эквивалентны.*

Теорема очевидна, так как преобразования $\gamma, \gamma', \delta, \varepsilon$ переводят систему p_i -матриц группы G в систему p_i -матриц той же самой группы G , только при новой базе.

Если не заботиться о симметрии, то можно избавиться от усложняющего дело требования совершенности p_i -матриц и одновременно очень сильно ограничить класс необходимых p -чисел. Вместо произвольных p -чисел достаточно будет рассматривать только числа вида aP_α , где a — некоторое p -адическое число.

Рассмотрим матрицу вида

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \\ a_{m+1,1} \pi_{\alpha_1} & a_{m+1,2} \pi_{\alpha_1} & \dots & a_{m+1,r} \pi_{\alpha_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} \pi_{\alpha_{r-m}} & a_{r2} \pi_{\alpha_{r-m}} & \dots & a_{rr} \pi_{\alpha_{r-m}} \end{array} \right\|,$$

где a_{ik} суть некоторые p -адические числа, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-m}$ — некоторые натуральные числа и π_α — символы, значение которых мы установим ниже. Если из p -адической части этой матрицы* можно составить определитель, не делящийся на p , то мы будем называть такую матрицу регулярной.

* Т. е. из матрицы, образованной первыми m строками.

Пусть $\mathfrak{A}$ — регулярная матрица. Тогда матрица A , получающаяся из $\mathfrak{A}$ заменой всех π_α на P_α , будет совершенной p -матрицей. Мы будем говорить, что матрица A соответствует регулярной матрице $\mathfrak{A}$. Введем следующие правила действий с элементами π_α :

- λ) $\pi_0 = 0$, $p\pi_{\alpha+1} = \pi_\alpha$; если $a \equiv b \pmod{\alpha}$, то $a\pi_\alpha = b\pi_\alpha$,
- μ) $a\pi_\alpha = a_\alpha\pi_\alpha$, где a_α есть α -я компонента p -адического числа a ,
- ν) $a\pi_\alpha + b\pi_\alpha = (a + b)\pi_\alpha$.

Это в точности соответствует правилам действий с p -числами P_α , за исключением формулы $p\pi_{\alpha+1} = \pi_\alpha$, которая для P_α неверна. Однако и эта формула остается верной, если рассматривать не все компоненты, а только начиная с некоторой.

Мы можем теперь группу G характеризовать не системой произвольных p_i -матриц, а системами соответствующих регулярных матриц. Основная теорема об эквивалентных системах остается верной, если вместо элементарных преобразований $\alpha, \dots, \varepsilon$ произвольных p_i -матриц рассматривать следующие преобразования регулярных матриц:

(α_1) умножить или разделить любую строку на любое p -адическое число, не делящееся на p ,

(β_1) к одной из p -адических строк прибавить другую p -адическую строку,

(β_2) к одной из π -строк прибавить другую π -строку, умноженную на произвольное p -адическое число,

(β_3) к одной из π -строк прибавить любую p -адическую строку, умноженную предварительно на некоторое π_α (α — любое натуральное число),

($\gamma, \gamma', \delta, \varepsilon$). Эти преобразования совпадают с соответствующими старыми преобразованиями.

§ 11. Прimitивные группы

В настоящем параграфе мы хотим показать, как из предшествующих результатов получается классификация p -прimitивных групп Куроша. Для этого нам потребуется следующая

Л е м м а 4. *Если две системы p_i -матриц эквивалентны, то их можно перевести в одну и ту же систему p_i -матриц, совершая подходящие элементарные преобразования в таком порядке: сначала над той и другой системами делаем преобразования γ , затем преобразования γ' и, наконец, преобразования α, β, δ .*

Д о к а з а т е л ь с т в о совершенно элементарно, и мы его поэтому опускаем.

Займемся теперь примитивными группами. Группа G называется, по А. Г. Курошу, p -прimitивной, если в ней существует такая база, называемая примитивной базой, что каждый элемент g связан с элементами базы $x_1, \dots, x_r$ соотношением вида

$$p^\alpha g = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_r x_r,$$

где α и m_i — целые рациональные числа *. Очевидно, что система p_i -матриц группы G при выборе примитивной базы состоит из нулевых матриц, за исключением, может быть, только одной p -матрицы.

Назовем, вообще, систему совершенных p_i -матриц примитивной по p , если эта система содержит только, самое большее, одну матрицу, не равную

* Здесь, как и всюду, предполагается, что G — абелева группа без кручения, ранга r .

нулю, — именно p -матрицу. Ясно, что p -примитивной системе соответствует p -примитивная группа.

Преобразования $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \delta_p, \varepsilon_p$ переводят p -примитивную систему p_i -матриц снова в p -примитивную систему. С помощью леммы 4 легко вывести такое положение: две эквивалентные p -примитивные системы могут быть получены одна из другой с помощью конечного числа преобразований $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \delta_p, \varepsilon_p^*$. Это показывает, что для характеристики p -примитивных групп вместо общих систем p_i -матриц можно пользоваться только p -примитивными системами и даже просто p -матрицами этих систем. Мы сделаем это более точно следующим образом.

Пусть матрица A есть матрица p -адических чисел, у которой n последних строк состоят из нулей. Пусть по крайней мере один из определителей порядка $m = r - n$ матрицы A не делится на p . Такую матрицу мы будем называть примитивной матрицей. Число колонн r назовем рангом матрицы, а число $m = r - n$ назовем, согласно с А. Курошем, приведенным рангом матрицы.

Всякая примитивная p -матрица является совершенной, так как ее можно привести к виду K (см. § 6).

Рассмотрим p -примитивную систему, у которой p -матрицей является матрица A . Этой системе соответствует некоторая p -примитивная группа G . Эту группу мы будем называть соответствующей группой матрицы A . Обратно, каждой примитивной группе соответствует некоторая примитивная матрица. В самом деле, пусть B есть p -матрица какой-либо p -примитивной системы p_i -матриц группы G . Приведя преобразованиями $\alpha, \dots, \varepsilon_p$ матрицу B к виду K (§ 6), мы получим примитивную матрицу группы G .

Мы будем называть две p -примитивные матрицы A и B эквивалентными, если эквивалентны p -примитивные системы, содержащие эти матрицы. Но элементарные преобразования $\alpha, \dots, \varepsilon_p$ некоторой p -примитивной системы сводятся к соответствующим элементарным преобразованиям p -матрицы этой системы; следовательно, две примитивные p -матрицы эквивалентны, если из одной можно получить другую конечным числом преобразований $\alpha, \dots, \varepsilon_p$.

Из леммы 4 легко вывести, что любые две эквивалентные примитивные матрицы имеют одинаковый приведенный ранг и что одну из них можно получить из другой конечным числом таких элементарных преобразований, которые переводят примитивную матрицу в примитивную же. В дальнейшем нулевые строки примитивных матриц мы будем опускать.

Возьмем какую-либо примитивную матрицу. Преобразованиями α, β и перестановкой колонн ее можно привести к нормальному виду

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

В своей работе о примитивных группах А. Г. Курош в качестве матриц примитивных групп рассматривал только эти нормальные примитивные

* Таким образом, исключаются преобразования δ_q и ε_q с $q \neq p$.

матрицы, именно, их часть

$$K^* = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Для того чтобы найти элементарные преобразования матриц Куроша, мы должны после каждого из преобразований γ , γ' , δ_p , ε_p , выполненных над матрицей K , привести матрицу снова к нормальному виду и посмотреть, как при этом изменяется часть K^* . Этим путем мы немедленно получим все преобразования I—VIII А. Г. Куроша [1].

§ 12. Разложение в прямую сумму

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о разложении группы в прямую сумму своих подгрупп. Однако мы решим эту задачу только для случая, когда одно из прямых слагаемых есть или циклическая группа, или группа типа R_p^* .

Пусть группа G разлагается в прямую сумму своих подгрупп F и H^{**} . Пусть $f_1, \dots, f_s$ есть некоторая база группы F и $h_1, \dots, h_t$ — база группы H . Тогда совокупность $f_1, \dots, f_s, h_1, \dots, h_t$ является базой группы G .

Пусть, далее, p -матрицы $A^{(p)}$, $B^{(p)}$ являются p -матрицами соответственно групп F и H при указанных базах. Тогда «ящичная» матрица

$$C^{(p)} = \begin{vmatrix} A^{(p)} & 0 \\ 0 & B^{(p)} \end{vmatrix}$$

будет p -матрицей группы G .

Обратно, если все p_i -матрицы группы G при некоторой базе имеют подобный ящичный вид, то G разлагается в прямую сумму своих подгрупп. Таким образом, для того чтобы группа G разлагалась в прямую сумму своих подгрупп, необходимо и достаточно, чтобы система ее p_i -матриц была эквивалентна системе подобных ящичных p_i -матриц.

Рассмотрим сначала случай, когда от p -примитивной группы G отщепляется прямое слагаемое типа R_p .

Пусть A есть p -примитивная матрица. Мы назовем строки $\mathfrak{s}_i = (a_{i1}, \dots, a_{it})$ этой матрицы линейно зависимыми $\text{mod } R$, если можно найти такие p -адические числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, которые не были бы все равны нулю и для которых выражение $\lambda_{11} + \dots + \lambda_{m1}m$ представляло бы строку рациональных чисел.

Т е о р е м а 7. *Для того чтобы от p -примитивной группы G , определяемой примитивной матрицей A , отщеплялось прямое слагаемое типа R_p , необходимо и достаточно, чтобы строки матрицы A были линейно зависимы $\text{mod } R$.*

* R_p означает аддитивную группу всех рациональных чисел вида $\pm m/p^\alpha$, где α , m — произвольные натуральные числа, p — данное простое число.

** Здесь, как и всюду, предполагается, что G есть абелева группа конечного ранга, все элементы которой бесконечного порядка.

Докажем достаточность условий. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix}$$

есть примитивная матрица группы G и

$$\lambda_{11} + \dots + \lambda_{m1} \equiv 0 \pmod{R}.$$

Пусть λ_1 не делится на p . Тогда мы можем умножить первую строку матрицы на λ_1 и прибавить к ней остальные, умноженные соответственно на $\lambda_2, \dots, \lambda_m$. В результате получим матрицу, первая строка которой будет состоять из рациональных чисел. Умножая теперь первую строку на общий знаменатель этих чисел и производя необходимые преобразования γ, γ' , получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mr} \end{pmatrix}.$$

Так как матрица примитивна, то $(d, p) = 1$. Деля первую строку на d и производя соответственные преобразования α , приведем матрицу к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a''_{22} & \dots & a''_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a''_{m2} & \dots & a''_{mr} \end{pmatrix},$$

что и требовалось.

Покажем теперь необходимость условий. Прежде всего, если матрица имеет только что указанный вид, то строки, очевидно, линейно зависимы $\text{mod } R$. С другой стороны, все элементарные преобразования сохраняют линейную зависимость строк $\text{mod } R$. Следовательно, вообще все примитивные матрицы группы G будут иметь линейно зависимые $\text{mod } R$ строки, что и требовалось доказать *.

Применяя несколько раз теорему 7, мы получим

С л е д с т в и е. Для того чтобы от группы G с примитивной матрицей A отщеплялись k прямых слагаемых типа R_p , необходимо и достаточно, чтобы максимальное число линейно независимых $\text{mod } R$ строк матрицы A было не больше $m - k$.

Если примитивная матрица A приведена к нормальной форме, то в случае линейной зависимости $\text{mod } R$ строк коэффициенты этой зависимости необходимо должны быть числами рациональными. Отсюда получается такая теорема Куроша: для того чтобы группа G с нормальной примитивной матрицей K была разложима в прямую сумму подгрупп 1-го ранга, необходимо и достаточно, чтобы все элементы матрицы K были рациональными числами.

* Эта теорема была доказана А. Г. Курошем для случая $m = r - 1$, где m есть приведенный ранг группы.

В самом деле, в этом случае от G должны отщепляться m прямых слагаемых типа R_p . Следовательно, максимальное число линейно независимых строк матрицы должно быть равно нулю, т. е. каждая строка в силу нормальности матрицы должна быть рациональной, что и требовалось доказать.

Аналогично тому, как была доказана теорема 7, можно получить следующую теорему, дающую второй простейший случай разложения в прямую сумму:

Т е о р е м а 8. *Для того чтобы от группы G , определяемой системой p_i -матриц $A^{(p_i)}$, отщеплялась в качестве прямого слагаемого циклическая группа, необходимо и достаточно, чтобы между колоннами каждой матрицы $A^{(p_i)}$ существовало линейное соотношение с рациональными коэффициентами, одно и то же для всех матриц $A^{(p_i)}$ ($i = 1, 2, \dots$).*

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Kurosch*. Primitive torsionsfreie Abelsche Gruppen vom endlichen Range.— *Ann. Math.*, 1937, 38, N 1, 175—203.
2. *М. Бокер*. Введение в высшую алгебру. М.—Л., 1933.
3. *Б. Л. Ван дер Варден*. Современная алгебра, т. 2. М.—Л., 1947.

О ВКЛЮЧЕНИИ АССОЦИАТИВНЫХ СИСТЕМ В ГРУППЫ. I *



Ассоциативной системой называется система с одним действием. Относительно этого действия, называемого обычно умножением, требуется, чтобы оно было всегда выполнимо, однозначно и ассоциативно [1]. Множество элементов ассоциативного кольца относительно умножения образует ассоциативную систему. Этим объясняется значение теории ассоциативных систем для изучения ассоциативных колец [2—4]. Некоторые проблемы теории групп также связаны со свойствами ассоциативных систем. Однако для решения этих проблем необходимо более тщательное изучение условий, при которых данная ассоциативная система может быть рассматриваема как часть некоторой группы. В настоящей заметке указываются необходимые и достаточные условия для возможности включения ассоциативных систем в группы.

1. Условия несужаемости

Данную ассоциативную систему обозначим $\mathfrak{A}$. Каждому элементу x из $\mathfrak{A}$ поставим в соответствие два новых элемента x^- , x^+ , не входящие в $\mathfrak{A}$. Эти элементы будем называть идеальными элементами и соответственно первого и второго рода. Обозначим через S совокупность всевозможных конечных последовательностей из идеальных элементов и элементов $\mathfrak{A}$. Как всегда, такие последовательности будем называть словами. Определим теперь следующие элементарные преобразования:

- а) между любыми двумя соседними элементами слова вставляется пара x^-x или пара xx^+ (x — произвольный элемент из $\mathfrak{A}$),
- б) из слова выбрасывается либо пара x^-x , либо пара xx^+ ,
- в) два соседние элемента слова, принадлежащие к $\mathfrak{A}$, заменяются элементом, равным их произведению,
- г) элемент $a \in \mathfrak{A}$ заменяется парой элементов из $\mathfrak{A}$, произведение которых равно a .

Все слова относительно этих элементарных преобразований распадаются на классы эквивалентных между собою. Пусть (a) означает класс, к которому принадлежит слово a . По определению полагаем $(a)(b) = (ab)$. Классы относительно такого умножения образуют, очевидно, группу. Пусть эта группа будет $\mathfrak{G}$. Если ассоциативную систему $\mathfrak{A}$ можно заключить в некоторую группу $\mathfrak{H}$, то в один и тот же класс различные элементы из $\mathfrak{A}$ попасть не могут. Обратно, если в каждом классе лежит, самое большее, только по одному элементу из $\mathfrak{A}$, то эта система может быть включена в группу. Действительно, выберем из $\mathfrak{G}$ те классы, которые содержат элементы $\mathfrak{A}$. Эти классы образуют ассоциативную систему $\overline{\mathfrak{A}}$, которая в силу соответствия $x \rightarrow (x)$ изоморфна системе $\mathfrak{A}$ и лежит в группе $\mathfrak{G}$.

* Мат. сб., 1939, 6, № 2, 331—336.

Таким образом, для возможности включения ассоциативной системы в группу необходимо и достаточно, чтобы никакие два различные элемента этой системы не были эквивалентны [1].

В п. 2 мы покажем, что в этом условии можно ограничиться рассмотрением только нормальных цепочек преобразований.

2. Нормальная форма цепочек

Рассмотрим какую-нибудь цепочку преобразований T . Преобразуемое слово состоит из элементов. Мы будем предполагать, что идеальные элементы участвуют только в двух преобразованиях: первый раз появляются и второй раз исчезают*. Если найдется такой момент времени, когда два идеальных элемента a^* , b^* сразу находятся в слове, то в течение всего совместного существования относительный порядок их будет оставаться неизменным. Если при этом a^* лежит левее b^* , то мы будем писать $a^* \leq b^*$.

Л е м м а. Если в цепочке преобразований T идеальные элементы $a_1^*, \dots, a_k^*$ находятся в отношениях

$$a_1^* \leq a_2^* \leq \dots \leq a_k^*,$$

то a_1^* и a_k^* различны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в какой-нибудь момент времени в преобразуемом слове одновременно находятся три последовательные элемента из цепочки, то средний можно выбросить, — в результате получится укороченная монотонная цепочка с тем же началом и концом. Продолжая процесс, получим цепочку

$$a_1^* \leq a_{i_2}^* \leq \dots \leq a_k^*,$$

в которой никакие три последовательные элемента не могут одновременно существовать в преобразуемом слове. Пусть $I_1, I_{i_2}, \dots, I_k$ — интервалы времени, в которые существуют элементы $a_1^*, a_{i_2}^*, \dots, a_k^*$. Смежные интервалы имеют общие точки, но любые три последовательные из них имеют пустое пересечение. Отсюда следует, что при длине цепочки превосходящей 2, интервалы I_1, I_k не пересекаются и, таким образом, элементы a_1^*, a_k^* различны.

П р и м е ч а н и е. Если для цепочки $a_1^* \leq a_2^* \leq \dots \leq a_k^*$ интервал I_1 лежит внутри I_2, I_3 расположен правее I_1 и

$$a_1^* \text{ поп} \leq a_m^* \quad (m = 3, \dots, k),$$

то $I_3, \dots, I_k$ лежат правее I_1 .

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

О п р е д е л е н и е. Цепочка преобразований называется нормальной, если левее каждого идеального элемента 1-го рода и правее каждого идеального элемента 2-го рода во время их существования никаких преобразований не производится.

Две цепочки преобразований называются эквивалентными, если их начальные и конечные слова соответственно совпадают.

* Таким образом, если идеальный элемент появляется вторично, то обозначается другой буквой.

Т е о р е м а. *Всякая цепочка, начало и конец которой принадлежат ассоциативной системе, эквивалентна некоторой нормальной цепочке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы покажем, что в данной цепочке преобразований T можно так переставить отдельные преобразования, что получится нормальная цепочка. Множество $\{y_1^*, \dots, y_k^*\}$ элементов 1-го рода называется **н о р м а л ь н ы м** для цепочки T , если в течение их существования левее их никаких преобразований не производится и идеальных элементов, не входящих в это множество, нет.

Пусть цепочка T задана и элементы $y_1^*, \dots, y_k^*$ образуют нормальное множество для этой цепочки. Идеальный элемент 1-го рода назовем левым для цепочки T , если при существовании этого элемента левее его никаких идеальных элементов первого рода, отличных от $y_1^*, \dots, y_k^*$, нет. Если $y_1^*, \dots, y_k^*$ не исчерпывает всех элементов 1-го рода, то левый элемент заведомо найдется. Предположим противное и обозначим через Y_1^* какой-нибудь элемент 1-го рода, отличный от $y_1^*, \dots, y_k^*$. Так как Y_1^* не есть левый, то найдется элемент 1-го рода Y_2^* , отличающийся от $y_1^*, \dots, y_k^*$ и такой, что $Y_2^* \ll Y_1^*$. Продолжая этот процесс дальше, мы получим бесконечную цепочку элементов 1-го рода

$$\dots \ll Y_m^* \ll \dots \ll Y_2^* \ll Y_1^*.$$

Согласно лемме все элементы этой цепочки различны, что противоречит конечности цепочки преобразований. Итак, левый элемент найдется.

Обозначим через y_{k+1}^* тот из левых элементов, который в системе преобразований T появляется позже всех. Мы хотим трансформировать цепочку преобразований T так, чтобы в новой цепочке множество $\{y_1^*, \dots, y_k^*, y_{k+1}^*\}$ было нормальным. Пусть

$$\begin{array}{l|l} T: \dots & T_1: \dots \\ \hline & ab \\ & ay_{k+1}^* y_{k+1}^* b \\ & \dots \\ & \dots \\ & a_1 y_{k+1}^* y_{k+1}^* b \\ & a_1 y_{k+1}^* y_{k+1}^* b_1 \\ & a_1 b_1 \\ & \dots \\ & \dots \end{array}$$

Множество $\{y_1^*, \dots, y_k^*\}$ остается нормальным и в цепочке T_1 , так как если его элементы на участке от ab до $a_1 b_1$ существуют, то они существуют левее y_{k+1}^* . Но преобразования цепочки T_1 , относящиеся к участку слова, лежащему левее y_{k+1}^* , имеют ту же последовательность, что и в T .

Последним левым элементом в цепочке T_1 является элемент y_{k+1}^* . Таким образом, цепочку T мы заменили эквивалентной цепочкой T_1 , в которой левее последнего левого элемента никаких преобразований не производится.

Если a_1 не содержит идеальных элементов 2-го рода, то цепочка — искомая. Если, наоборот, a_1 содержит идеальный элемент 2-го рода x^* , то цепочку T_1 необходимо преобразовать дальше. Обозначим через s число всех идеальных элементов 2-го рода, участвующих в преобразованиях цепочки T_1 , начиная с момента появления y_{k+1}^* . Покажем, что T_1 можно заменить эквивалентной цепочкой T_2 , для которой число s меньше. Пусть $a_1 = a_1' x^* a_1''$,

$$\begin{array}{l|l}
 T_1: & T_2: \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 & a_1' x^* a_1'' b \\
 & \dots\dots\dots \\
 & a_2 x x^* a_1'' b \\
 & \dots\dots\dots \\
 & a_2 a_1'' b \\
 & \dots\dots\dots \\
 & a_2 a_1'' y_{k+1}^* y_{k+1} b \\
 & \dots\dots\dots \\
 & a_2 a_1'' x^* a_1'' b_1 \\
 & \dots\dots\dots \\
 & a_2 a_1'' y_{k+1}^* y_{k+1} b_1 \\
 & \dots\dots\dots \\
 & a_2 x x^* b_2 \\
 & \dots\dots\dots \\
 & a_2 b_2 \\
 & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Множество $\{y_1^*, \dots, y_k^*\}$ нормально в T_2 , так как в рассматриваемом промежутке времени его элементы могут находиться только левее x^* , а этот участок в T_1 и T_2 преобразуется одинаковым образом. Далее, элемент y_{k+1}^* является левым и в T_2 . Действительно, если бы это было не так, то на участке $a_2 a_1''$ имелся бы по крайней мере один элемент 1-го рода, отличный от $y_1^*, \dots, y_k^*$. Обозначим его через Y_1^* . Рассмотрим цепочку T_1 . Так как y_{k+1}^* — левый для T_1 , то Y_1^* не лежит на a_1'' . Следовательно, Y_1^* лежит на участке a_2 . Из схемы видно, что имеет место соотношение $Y_1^* \ll x^* \ll y_{k+1}^*$. Если в T_1 элемент Y_2^* не левый, то найдется идеальный элемент Y_2^* , для которого будет $Y_2^* \ll Y_1^*$ и т. д. Этот процесс оборвется, и мы получим (в T_1)

$$Y_m^* \ll \dots \ll Y_1^* \ll x^* \ll y_{k+1}^*,$$

где Y_m^* — левый в T_1 . Промежутки существования для y_{k+1}^* , x^* и Y_1^* расположены так, как указано в примечании к лемме. Кроме того, $Y_i^* \text{ по } \ll \ll y_{k+1}^* \text{ (} i = 1, 2, \dots, m \text{)}$. Следовательно, промежуток существования левого элемента Y_m^* лежит позже промежутка существования y_{k+1}^* , а это противоречит условию, что y_{k+1}^* есть последний левый элемент в T_1 . Таким образом, y_{k+1}^* является левым в T_2 . Очевидно, он же будет и самым последним левым в T_2 .

Если в T_2 левее y_{k+1}^* все еще будут иметься идеальные элементы 2-го рода, то мы можем, повторяя процесс, построить цепочку T_3 и т. д. Этот процесс

оборвется, так как число элементов 2-го рода, участвующих в последующих преобразованиях, каждый раз убывает. Пусть окончательная цепочка будет U . Цепочка T имеет нормальное множество из k элементов, а U имеет нормальное множество, содержащее $k + 1$ нормальных элементов. Повторяя такое преобразование достаточное число раз, мы получим цепочку V , в которой все идеальные элементы 1-го рода будут входить в нормальное множество. Меняя аналогично порядок преобразований в цепочке V , получим цепочку, в которой нормальными будут идеальные элементы обоих родов, т. е. нормальную цепочку.

До сих пор мы рассматривали только идеальные элементы и, следовательно, обращали внимание только на преобразования (α) , (β) . Что касается преобразований (γ) , (δ) , то их можно расположить таким образом, чтобы между соседними идеальными элементами одного и того же рода стояло по одному элементу из ассоциативной системы. Указанных свойств достаточно, чтобы составить себе ясное представление о нормальных цепочках. Подробнее это будет сделано в следующем пункте.

3. Нормальные системы равенств

При изучении возможности включения ассоциативной системы в группу нам нужно рассматривать только цепочки, у которых начальные и конечные слова принадлежат к системе. В силу предшествующего мы можем ограничиться только нормальными цепочками. Полученные необходимые и достаточные условия для возможности включения системы в группу сформулированы в терминах элементарных преобразований. Теперь мы хотим перейти от преобразований к равенствам. Ради краткости мы это сделаем на частном примере, так как то же имеет место и в общем случае. Предположим, что ассоциативная система $\mathfrak{A}$ содержит единицу, и рассмотрим какую-либо нормальную цепочку элементарных преобразований, которую можно себе представить следующим образом.

Начальное слово — элемент из $\mathfrak{A}$. Этот элемент заменяется парой $a_1 r_1$. Затем вводится идеальный элемент l_1^* . Получится слово $a_1 l_1^* r_1$. Пара $a_1 l_1^*$ заменяется парой $R_1 A_1$; таким образом, $R_1 A_1 = a_1 l_1^*$. Затем вводится идеальный элемент L_1 . Новое слово будет $R_1 L_1^* L_1 A_1 l_1^* r_1$. Пусть дальнейшая последовательность преобразований такова: еще вводится идеальный элемент L_2^* , после чего последовательно исчезают l_1^* , L_2^* , L_1^* . Цепочка преобразований имеет вид (z) (см. стр. 44). Это самый общий вид нормальной цепочки, в которой нормальные элементы вводятся и исчезают в порядке $\{l_1^*, L_1^*, L_2^*, L_1^*\}$ или, короче, $(1, 2, 2, -1, -2, -2)$. Если ассоциативная система может быть заключена в группу, то начальный и конечный элементы должны быть равны, т. е. равенство (Z') должно быть следствием системы (Z) . Обратное также очевидно: если при любых значениях входящих букв из ассоциативной системы равенство (Z') будет следствием равенств (Z) , то начальный и конечный элементы всякой цепочки типа $(1, 2, 2, -1, -2, -2)$ будут совпадать. Систему равенств (Z) , соответствующих некоторой нормальной цепочке общего вида, мы будем называть нормальной, а равенство (Z') — *з а м к а ю щ и м*. Принимая во внимание все сказанное выше, мы можем сформулировать такое предложение:

Для того чтобы ассоциативная система с единицей могла быть заключена в группу, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\begin{array}{l|l}
 a_1 r_1 & \\
 a_1 l_1 l_1^* r_1 & a_1 l_1 = R_1 A_1 \\
 R_1 A_1 l_1^* r_1 & \\
 R_1 L_1^* L_1 A_1 l_1^* r_1 & L_1 A_1 = R_2 A_2 \\
 R_1 L_1^* R_2 A_2 l_1^* r_1 & \\
 R_1 L_1^* R_2 L_2^* L_2 A_2 l_1^* r_1 & L_2 A_2 = b_1 l_1 \\
 R_1 L_1^* R_2 L_2^* b_1 l_1 l_1^* r_1 & \\
 R_1 L_1^* R_2 L_2^* b_1 r_1 & b_1 r = L_2 B_2 \\
 R_1 L_1^* R_2 L_2^* L_2 B_2 & \\
 R_1 L_1^* R_2 B_2 & R_2 B_2 = L_1 B_1 \\
 \\
 R_1 L_1^* L_1 B_1 & \\
 R_1 B_1 & R_1 B_1 = a_1 r_1
 \end{array} \quad (Z)$$

$$\begin{array}{l|l}
 R_1 L_1^* L_1 B_1 & \\
 R_1 B_1 & R_1 B_1 = a_1 r_1
 \end{array} \quad (Z')$$

если некоторые элементы ассоциативной системы удовлетворяют какой-либо нормальной системе равенств, то соответствующие элементы должны удовлетворять замыкающему равенству этой системы.

Фактическое построение нормальных систем может производиться так: задаем схему расположения идеальных элементов, т. е. произвольную последовательность чисел $\pm 1, \pm 2$, удовлетворяющую таким условиям: 1) на любом начальном отрезке этой последовательности число положительных единиц и двоек не меньше числа отрицательных единиц и соответственно двоек, 2) на всей последовательности эти числа совпадают. Теперь в такой последовательности n -ю положительную единицу (двойку) заменим буквой l_n (L_n), а n -ю отрицательную единицу (двойку) заменим через l_{i_n} (L_{i_n}), где i_n есть номер ближайшей слева положительной единицы (двойки), номер которой еще не был употреблен в качестве индекса буквы l^* (L^*). Каждой паре соседних элементов такой l -цепочки мы поставим в соответствие равенство, получаемое по следующему закону: левому элементу пары соответствует левая часть равенства, правому — правая, а само соответствие дается таблицей:

Слева				Справа			
l_i	l_i^*	L_i	L_i^*	l_i	l_i^*	L_i	L_i^*
$a_i l_i$	$b_i r_i$	$L_i A_i$	$R_i B_i$	$a_i r_i$	$b_i l_i$	$R_i A_i$	$L_i B_i$

Беря равенства, соответствующие всем парам l -цепочки, мы получим нормальную систему. Замыкающее равенство соответствует паре ui , где v — последний, а u — первый элемент l -цепочки.

Таким образом, мы видим, что для возможности включения системы в группу должно выполняться бесконечное множество условий. Если потребовать, чтобы выполнялась только часть этих условий, то получится ассоциативная система, более или менее приближающаяся к группе. Так, например, если взять простейшее условие, соответствующее цепочкам $\{l, l^*\}$, (L, L^*) , получится обычная полугруппа с сокращением. Если же взять более сильное условие, например соответствующее цепочке $\{l, L, l^*, L^*\}$, то получится ассоциативная система, более близкая к группе, но все еще не включаемая в нее, и т. д.

Для строгого проведения намеченной здесь классификации необходимо исследовать независимость указанных условий. Такая независимость легко изучается для простейших цепочек, например содержащих только один идеальный элемент 1-го рода. Однако в общем виде вопрос остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. К. Сушкевич. Теория обобщенных групп. Харьков, 1937.
2. I. Arnold. Ideale in kommutativen Halbgruppen.— *Mat. сб.*, 1929, 36, № 1, 401—409.
3. J. Dorroh. Concerning adjunctions to Algebras.— *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1932, 38, N 2, 85—88.
4. A. Malcev. On the immersion of an algebraic ring into a field.— *Math. Ann.*, 1937, 113, 686—691.

О ВКЛЮЧЕНИИ АССОЦИАТИВНЫХ СИСТЕМ В ГРУППЫ. II *



Настоящая работа является продолжением работы «О включении ассоциативных систем в группы» [1]. Для удобства ссылок нумерация разделов продолжена.

Разбираемые нами здесь вопросы сводятся к следующему. В коммутативном случае известно, что если группа $\mathfrak{G}$ содержит полугруппу $\mathfrak{H}$, элементы которой порождают всю группу $\mathfrak{G}$, то структура $\mathfrak{G}$ вполне определяется структурой полугруппы $\mathfrak{H}$. В случае некоммутативности это, вообще говоря, оказывается неверным (п. 4). Тогда возникает вопрос, каким образом можно получить все неизоморфные группы отношений для данной полугруппы. Эта задача решается в конце п. 4.

Среди нерешенных вопросов был также следующий. Дана система определяющих соотношений. Спрашивается, будет ли ассоциативная система с данными определяющими соотношениями содержаться в группе с теми же определяющими соотношениями? Частичный ответ на этот вопрос имеется в п. 5, где с такой точки зрения исследуются полугруппы, определяющие соотношения которых имеют вид $uv = xu$.

Результаты п. 5 применяются в п. 6 для доказательства следующего основного результата работы:

Не существует конечной системы условий вида «из данной совокупности равенств следует данное равенство», которая была бы необходимой и достаточной для возможности включения произвольной полугруппы в группу.

Наконец, в п. 7 доказывалось отсутствие делителей нуля у так называемых нормальных колец, которые заведомо не могут быть заключены в поля.

4. Минимальные расширения

Пусть $\mathfrak{A}$ — данная полугруппа и $\mathfrak{G}$ — некоторая группа, содержащая $\mathfrak{A}$. Группа $\mathfrak{G}$ называется **минимальным расширением** системы $\mathfrak{A}$, если в $\mathfrak{G}$ нет собственной подгруппы, содержащей $\mathfrak{A}$ [1]. Пусть $\mathfrak{G}$ — минимальное расширение системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}$. Если в каждом смежном классе $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ лежит не более одного элемента из $\mathfrak{A}$, то фактор-группу $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ можно рассматривать как расширение системы $\mathfrak{A}$. Для этого достаточно отождествить элементы $\mathfrak{A}$ с теми классами, в которых они содержатся. Если группа $\mathfrak{G}$ не имеет нормальных делителей, обладающих указанным свойством, то мы будем говорить, что группа $\mathfrak{G}$ есть **абсолютно минимальное расширение** системы $\mathfrak{A}^{**}$.

Т е о р е м а 1. *Во всяком минимальном расширении $\mathfrak{G}$ системы $\mathfrak{A}$ существует такой нормальный делитель $\mathfrak{N}$, что $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ будет абсолютно минимальным расширением.*

* Мат. сб., 1940, 8, № 2, 251—263.

** Обычно говорят, что $\mathfrak{G}$ есть группа отношений системы $\mathfrak{A}$. Мы хотим, однако, сохранить этот термин только за одной группой, которая будет определена далее.

Доказательство. Для доказательства все нормальные делители $\mathfrak{G}$ расположим в трансфинитную последовательность $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_w, \dots$. Пользуясь этой последовательностью, построим специальную возрастающую цепочку нормальных делителей $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \dots$. Построение индуктивно. $\mathfrak{M}_1$ есть первый нормальный делитель $\mathfrak{M}_1$, для которого смежные классы $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_1$ содержат самое большее по одному элементу из $\mathfrak{A}$.

Пусть известны $\mathfrak{M}_\alpha$ для $\alpha < \lambda$ и $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{M}_\alpha \subset \dots$. Если $\lambda = \lambda' + 1$, то $\mathfrak{M}_\lambda$ есть первый из нормальных делителей, которые содержат $\mathfrak{M}_{\lambda'}$ и для которых смежные классы содержат не больше чем по одному элементу из $\mathfrak{A}$. Если же λ предельное, то полагаем $\mathfrak{M}_\lambda = \sum_{\alpha < \lambda} \mathfrak{M}_\alpha$. Пусть $\mathfrak{N} = \sum_{\lambda} \mathfrak{M}_\lambda$.

Легко видеть, что $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ есть искомое абсолютно минимальное расширение.

Два расширения $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ системы $\mathfrak{A}$ мы назовем **изоморфными**, если между их элементами можно установить изоморфное соответствие, при котором элементы $\mathfrak{A}$ переходят сами в себя. Если $\mathfrak{A}$ — коммутативная полугруппа, то все ее минимальные расширения будут абсолютно минимальными и изоморфными.

Следующий пример показывает, что в некоммутативном случае этого может и не быть. Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная система со свободными образующими a, b , $\mathfrak{H}_1$ — группа с образующими a, b и определяющим соотношением $(ab^{-1})^2 = 1$. Система $\mathfrak{A}$ содержится в группе $\mathfrak{H}_1$, так как если два произведения положительных степеней образующих равны в $\mathfrak{H}_1$, то они тождественны, а значит, равны и в $\mathfrak{A}$. Аналогично, группа $\mathfrak{H}_2$ с образующими a, b и определяющим соотношением $(ab^{-1})^3 = 1$ также содержит $\mathfrak{A}$. Наконец, система $\mathfrak{A}$ содержится также в группе $\mathfrak{G}$ со свободными образующими a, b . Группа $\mathfrak{G}$ есть минимальное расширение системы $\mathfrak{A}$, но не абсолютно минимальное, так как содержит нормальный делитель $\mathfrak{N}$, для которого $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{H}_1$. Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ такие нормальные делители групп $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$, для которых $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{H}_2/\mathfrak{M}_2$ будут абсолютно минимальными расширениями системы $\mathfrak{A}$. Существование делителей $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ обеспечивается предыдущей теоремой. Группы $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{H}_2/\mathfrak{M}_2$ не могут быть изоморфными расширениями системы $\mathfrak{A}$, так как тогда между классами a, b существовали бы одновременно соотношения $(ab^{-1})^2 = 1$ и $(ab^{-1})^3 = 1$, из которых следует $a = b$, чего в $\mathfrak{A}$ нет. Таким образом, система $\mathfrak{A}$ допускает неизоморфные абсолютно минимальные расширения.

В п. 1 для каждой заданной системы $\mathfrak{A}$ была однозначно определена некоторая группа $\mathfrak{G}$, которую мы впредь будем называть **группой отношений системы $\mathfrak{A}$** . Группа $\mathfrak{G}$ содержит $\mathfrak{A}$, если вообще существует хотя бы одна группа, содержащая $\mathfrak{A}$. Группу отношений можно определить также следующим образом. Пусть образующими ассоциативной системы $\mathfrak{A}$ будут элементы $a_1, a_2, \dots$ и определяющими соотношениями равенств $R_i(a) = S_i(a)$, где R_i, S_i — произведения неотрицательных степеней образующих. Тогда группа с теми же самыми образующими и определяющими соотношениями будет как раз группой отношений системы $\mathfrak{A}$.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольное минимальное расширение ассоциативной системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{G}$ — ее группа отношений. Тогда в $\mathfrak{G}$ найдется такой нормальный делитель $\mathfrak{N}$, что расширение $\mathfrak{H}$ будет изоморфно факторрасширению $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Если $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ — различные нормальные делители $\mathfrak{G}$, смежные классы которых содержат не более чем по одному элементу из $\mathfrak{A}$, то расширения $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_2$ неизоморфны.

Доказательство. Эта теорема дает обзор всех неизоморфных минимальных расширений данной системы. Вторая ее часть очевидна. Займемся доказательством первой части. Пусть a — какое-нибудь произведение элементов системы $\mathfrak{A}$ или их формально обратных. Заменяя в этом произведении формально обратные обратными из $\mathfrak{G}$, мы получим некоторый элемент g из $\mathfrak{G}$. Если же в a формально обратные элементы заменить обратными из $\mathfrak{H}$, то получится элемент h из $\mathfrak{H}$. Легко видеть, что соответствие $g \rightarrow h$ есть гомоморфное отображение $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{H}$ и что при этом отображении элементы $\mathfrak{A}$ переходят сами в себя. Но тогда расширение $\mathfrak{H}$ изоморфно фактор-расширению $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — ядро только что построенного гомоморфизма.

Итак, все минимальные групповые расширения с точностью до изоморфизма исчерпываются факторами группы отношений. Обратно, если все минимальные расширения содержатся среди фактор-расширений некоторого минимального расширения, то это минимальное расширение изоморфно группе отношений.

5. Полные системы следствий ассоциативных систем

Пусть $a_1, a_2, \dots$ — образующие некоторой ассоциативной системы $\mathfrak{A}$ и $S_i(a) = R_i(a)$ — ее определяющие соотношения. Обозначим через $\mathfrak{G}$ группу отношений системы $\mathfrak{A}$. Всякое равенство вида $S(a) = R(a)$, где S, R — произведения неотрицательных степеней образующих, мы будем называть простым следствием системы $S_i(a) = R_i(a)$ ($i = 1, 2, \dots$), если это равенство имеет место в $\mathfrak{A}$. Равенство $S(a) = R(a)$ мы будем называть групповым следствием системы $\mathfrak{A}$, если оно имеет место в группе отношений $\mathfrak{G}$. Всякое простое следствие является в то же время групповым следствием. Всякое групповое следствие будет простым только тогда, когда ассоциативная система содержится в своей группе отношений. Пусть дана некоторая система групповых следствий $U_j(a) = V_j(a)$ из определяющих соотношений $S_i(a) = R_i(a)$. Эта система будет называться *полной системой групповых следствий*, если всякое групповое следствие определяющих соотношений является простым следствием соотношений

$$S_i(a) = R_i(a), \quad U_j(a) = V_j(a) \quad (i, j = 1, 2, \dots).$$

Иными словами, если $U_j(a) = V_j(a)$ ($j = 1, 2, \dots$) есть полная система групповых следствий, то ассоциативная система с определяющими равенствами $S_i(a) = R_i(a)$, $U_j(a) = V_j(a)$ содержится в своей группе отношений. Отметим теперь следующую очевидную лемму:

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая ассоциативная система и $\mathfrak{B}$ — ассоциативная система, имеющая одним образующим b и одним определяющим отношением $S(a, b) = R(a, b)$ больше, чем $\mathfrak{A}$. Если элемент b входит в дополнительное соотношение в качестве одного и только одного из сомножителей, то всякое групповое следствие системы $\mathfrak{B}$, не содержащее b , будет в то же время групповым следствием системы $\mathfrak{A}$.

Действительно, по одной хорошо известной теореме теории групп группа отношений системы $\mathfrak{B}$ содержится в группе отношений системы $\mathfrak{A}$, что и доказывает лемму.

Нахождение полной системы групповых следствий в общем случае довольно сложно. Следующая лемма позволяет решить эту задачу в некоторых частных случаях.

Л е м м а 2. Если ассоциативная система $\mathfrak{A}$ имеет образующие $r_1, r_2, \dots, r_\alpha, t_1, t_2, \dots, t_\beta$ и определяющие соотношения $r_{m_i} t_{n_i} = r_{p_i} t_{q_i}$ ($i = 1, 2, \dots$), то совокупность всех групповых следствий одного из следующих видов $r_j t_j = r_k t_l, r_m = r_n, t_m = t_n$ будет полной системой групповых следствий из $\mathfrak{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через ξ, η какие-либо элементы из $\mathfrak{A}$ и предположим, что $\xi = \eta$ есть групповое следствие этой системы. Согласно п. 1 в $\mathfrak{A}$ существует цепочка T элементарных преобразований, переводящая слово ξ в η . Возможно, что в цепочке T приходится вводить формально обратные элементы вида $(a_1, \dots, a_k)^*$. Однако ясно, что введение формально обратных слов можно заменить последовательным введением формально обратных образующих $a_k, \dots, a_1$. Наконец, всякую цепочку элементарных преобразований можно сделать нормальной, изменяя в ней порядок преобразований. Обозначим через T_1 такую нормальную цепочку, которая преобразует ξ в η и в то же время содержит наименьшее количество формально обратных образующих. Элементарные преобразования цепочки T_1 распадаются на три вида:

- 1) введение пары ll^* (или соответственно пары L^*L);
- 2) выбрасывание таких пар;
- 3) замена слова $a \in \mathfrak{A}$ равным ему словом $b \in \mathfrak{A}$.

Из формы определяющих соотношений видно, что в последнем случае все элементы слова a распадаются на пары и эти пары преобразуются отдельно по правилам определяющей системы. Пусть пара образующих ab из a при переходе к b заменилась парой $a_1 b_1$. Тогда a_1 мы будем называть следом a в новом слове и, аналогично, b_1 следом элемента b . Формально обратный элемент l^* называется правильным в цепочке T_1 , если он вводится парой ll^* и выбрасывается парой ll^* и элемент l из последней пары является следом элемента l из первой. Аналогично определяется и правильность левых формально обратных. Докажем, что в цепочке T_1 все формально обратные элементы правильны. Пусть это не так. Обозначим через L^* неправильный элемент, входящий последним, и для определенности положим, что это левый формально обратный. Элемент L^* не может уничтожиться ранее, чем след элемента L , в паре с которым L^* появился. Действительно, ни с одним из следов более старых элементов L^* уничтожиться не может, так как они лежат либо правее следа L , либо левее L^* , а со следом какого-нибудь нового элемента L^* уничтожиться не может, так как все новые по предположению правильны. След элемента L не может исчезнуть с одним из новых формально обратных в силу правильности последних. Поэтому формально обратный элемент l^* , исчезающий со следом L , существует в слове в момент появления L^* . Он лежит правее L^* и поэтому является правым обратным. Цепочка T_1 от момента введения L^*L до момента исчезновения следа L имеет вид

$$(T_1) mal^*n; mL^*Lal^*n; \dots; mL^*bll^*n; mL^*bn.$$

Все элементарные преобразования рассматриваемого участка можно разбить на два класса. К первому классу мы отнесем те преобразования, которые связаны с введением или выбрасыванием формально обратных элементов,

* Далее латинские буквы означают образующие, малые готические — произведения образующих и их формально обратных. Символ a^* означает формально обратный элемент для a , безразлично — правый или левый.

лежащих левее следа L , ко второму — остальные. Относительно самого L возможны такие предположения: либо L есть левый сомножитель в определяющих соотношениях ($L = r_i$), либо L является правым сомножителем ($L = t_i$).

Рассмотрим каждое из этих предположений в отдельности. Пусть L — левый сомножитель. Изменим порядок преобразований в цепочке T_1 : сначала произведем преобразования второго класса, лежащие правее следа L , а затем преобразования первого класса. Цепочка T_1 после перестановки примет следующий вид *:

$$(T_2) \text{ } \varphi\text{ } \eta; \text{ } \varphi ll^* \eta; \dots; \text{ } \eta al^* \eta; \text{ } \eta L^* Lal^* \eta; \dots; \text{ } \eta L^* ll^* \eta; \text{ } \eta L^* \eta; \dots; \text{ } \eta L^* Lq; \text{ } \eta q.$$

Порядок преобразований в T_2 мы еще раз изменим.

$$(T_3) \text{ } \varphi\text{ } \eta; \dots; \text{ } \varphi Lq = \varphi Laa^* q; \dots; \text{ } \varphi la^* q; \dots; \text{ } \eta aa^* q = \eta q.$$

Здесь a^* означает слово, формально обратное по отношению к a^{**} . Цепочка T_3 эквивалентна цепочке T_2 и, однако, содержит меньше формально обратных элементов, так как элементы L^* и l^* в T_3 не участвуют, а слово a^* содержит столько формально обратных образующих, сколько и a , что противоречит нашему предположению, что цепочка T_1 кратчайшая.

Рассмотрим второй случай. Элемент L есть правый сомножитель в определяющих соотношениях ($L = t_i$). Произведем в цепочке T_1 сначала все преобразования первого класса, а затем второго. Новая цепочка будет иметь вид

$$\eta al^* \eta; \eta L^* Lal^* \eta; \dots; \eta L^* bl_1 al^* \eta; \dots; \eta L^* bli^* \eta; \eta L^* b \eta.$$

Во время преобразований второго класса элемент l_1 , который является следом элемента L и потому правым, изменяться не может. Следовательно, $l_1 = l$ и преобразования второго класса уничтожают слово a . Расположим элементарные преобразования новой цепочки в таком порядке:

$$(T_4) \text{ } \varphi\text{ } \eta; \text{ } \varphi ll^* \eta; \dots; \text{ } \eta al^* \eta; \dots; \text{ } \eta l^* \eta; \text{ } \eta L^* Ll^* \eta; \dots; \text{ } \eta L^* bli^* \eta; \dots; \text{ } \eta L^* b \eta; \dots; \text{ } \eta L^* Lq; \text{ } \eta q.$$

Ясно, что T_4 эквивалентна следующей более короткой цепочке:

$$\varphi \eta = \varphi b^* b \eta; \dots; \varphi b^* Lq; \dots; \varphi b^* blq = \varphi lq; \dots; \eta aq; \dots; \eta q.$$

Таким образом, второе предположение также ведет к противоречию и наше утверждение о правильности цепочки доказано.

Пользуясь правильностью цепочки T_1 , легко показать справедливость указанной леммы. Нам дано, что правильная цепочка элементарных преобразований переводит слово ξ и η . Так как каждый формально обратный элемент этой цепочки исчезает со следом того элемента, с которым он появился, то следы элементов начального слова ξ не исчезают и переходят в соответствующие элементы слова η . Предположим, что никакой начальный отрезок слова ξ не эквивалентен соответствующему отрезку слова η . Если мы сможем доказать, что длина ξ в этом случае будет не больше 2, то этим самым тео-

* Выписывается не вся цепочка, а только интересующий нас отрезок ее.

** Например, если $a = ab^*c$, то $a^* = c^*ba^*$. На участке $\varphi Laa^*q; \dots; \varphi la^*q$ сначала слово La последовательно преобразуется в l так, как это происходит в цепочке T_2 . Затем в каждом слове полученной последовательности выбрасывается еще оставшаяся взаимно сокращающаяся часть произведения aa^* .

рема будет доказана. Слово ξ составлено из образующих r_i и t_j . Если $\xi = \xi_1 r_i \xi_2$ и соответствующее разбиение слова η есть $\eta_1 \eta_2$, то $\xi_1 \sim \eta_1$, $r_i \xi_2 \sim \eta_2$. Чтобы это обнаружить, мы произведем сначала в цепочке T_1 те преобразования, которые связаны с формально обратными элементами, лежащими левее следа r_i , а затем все остальные. Так как след r_i нигде не исчезает, то это произвести можно, и при новом порядке преобразований последовательность слов будет иметь вид

$$\xi_1 r_i \xi_2; \dots; \eta_1 r_i \xi_2; \dots; \eta_1 \eta_2.$$

Отсюда и вытекает наше утверждение.

Аналогично, если $\xi = \xi_1 t_i \xi_2$, $\eta = \eta_1 \eta_2$ — соответствующие разбиения слов ξ , η , то $\xi_1 t_i \sim \eta_1 \eta$, $\xi_2 \sim \eta_2$.

Из этих двух замечаний немедленно вытекает, что никакой кусок слова ξ не может быть эквивалентным соответствующему куску η только в том случае, когда длина ξ не больше 2. Если при этом длина ξ равна 2, то ξ и η имеют форму rt , что и требовалось доказать.

В п. 3 настоящей работы было дано определение направляющей цепочки или короче — схемы и соответствующей ей нормальной системы равенств. Напомним, что схема — это известная последовательность букв l_i , l_i^* , L_j , L_j^* , а соответствующая нормальная система состоит из определенных равенств, связывающих буквы a_i , r_i , l_i , b_i , A_j , R_j , L_j , B_j .

Схема называется *неприводимой*, если никакой ее отрезок не есть схема.

Следующие свойства нормальных систем равенств непосредственно вытекают из их конструкции (см. [1, п. 3]).

1) Все равенства нормальной системы имеют вид $XY = UV$, где в качестве левых множителей могут стоять только буквы a_i , b_i , R_j , L_j , а в качестве правых — только остальные образующие.

2) Пусть σ — некоторая нормальная система равенства и $\bar{\sigma}$ — система, получающаяся, если к σ добавить замыкающее равенство. Тогда каждая из упомянутых букв содержится точно в двух равенствах системы $\bar{\sigma}$.

3) Нормальная система σ , соответствующая неприводимой схеме, не может содержать подсистемы σ' , обладающей таким свойством: каждая буква, содержащаяся в одном из равенств σ' , содержится еще в одном, за исключением, быть может, самое большее четырех букв.

Нормальной ассоциативной системой схемы S мы будем называть такую систему, образующими которой являются буквы a_i , $b_i, \dots, R_j$, а определяющими соотношениями — нормальную систему равенств σ , соответствующую схеме S . Кроме нормальных ассоциативных систем, нам придется иметь дело с аналогичными системами, у которых в качестве определяющих соотношений взяты не все равенства нормальной системы, а только часть их.

Л е м м а 3. Пусть σ' есть какая-либо правильная часть неприводимой нормальной системы σ и равенство $uv = xy$ — групповое следствие σ' . Тогда это равенство либо входит в состав σ' , либо является тождеством.

До к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что равенство $xy = uv$ не есть простое следствие системы σ' .

Обозначим через σ'' минимальную часть σ' , групповым следствием которой равенство $xy = uv$ все еще является. В силу леммы 1 всякий элемент, отличный от x , y , u , v и содержащийся в каком-нибудь одном равенстве системы σ'' , должен содержаться по крайней мере еще в одном равенстве этой

системы. Однако мы уже отметили, что подсистем с такими свойствами в σ нет. Таким образом, упомянутое равенство есть простое следствие системы σ' и, значит, либо есть тождество, либо просто совпадает с одним из равенств системы.

Т е о р е м а 3. *Замыкающее равенство неприводимой нормальной системы равноств σ*

- 1) *не есть простое следствие этой системы,*
- 2) *есть ее групповое следствие и*
- 3) *само по себе образует полную систему групповых следствий из σ .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение вытекает непосредственно из строения нормальных равенств. Действительно, если $xu = uv$ есть замыкающее равенство нормальной системы, то к слову xu нельзя применить ни одного из преобразований этой системы*.

Второе утверждение очевидно, так как в группе отношений замыкающее равенство заведомо выполняется.

Остается убедиться в справедливости последнего пункта. По лемме 2 полную систему групповых следствий из σ будут давать уже следствия вида $pq = cd$. Пусть равенство $pq = cd$ есть групповое следствие из σ и не является простым следствием. Предположим, кроме того, что это равенство отлично от замыкающего. Тогда по крайней мере одна из букв замыкающего равенства не будет входить в равенство $pq = cd$. Обозначим ее через z . Буква z , как одна из букв замыкающего равенства, содержится только в одном равенстве системы σ и только в качестве одного сомножителя. Выбросим это равенство из σ . Тогда по лемме 1 равенство $pq = cd$ будет оставаться следствием уменьшенной системы. Однако по предшествующей лемме в этом случае указанное равенство было бы простым следствием системы σ , что противоречит предположению.

Из первого утверждения настоящей теоремы вытекает, что ни одна нормальная ассоциативная система не может быть заключена в группу**.

6. Независимость групповых условий

Пусть в некоторой ассоциативной системе дана нормальная цепочка элементарных преобразований T . Отметим последовательные моменты введения и выбрасывания формально обратных элементов следующим образом: момент введения i -го левого формально обратного через L_i , i -го правого — через l_i , момент выбрасывания их соответственно через L_i^* и l_i^* . Полученная последовательность букв l_i, l_i^*, L_i, L_i^* будет представлять собой схему цепочки T . Зная схему, мы можем построить соответствующую нормальную систему равенств σ и с помощью цепочки T указать некоторые элементы ассоциативной системы, которые будут удовлетворять этим равенствам. Обратно, если известны элементы ассоциативной системы, удовлетворяющие равенствам σ , то можно восстановить цепочку T . Говорят, что схема S выполняется в ассоциативной системе $\mathcal{A}$, если всякий раз, как только некоторые элементы $\mathcal{A}$ удовлетворяют нормальным равенствам схемы S , соответствующие элементы $\mathcal{A}$ удовлетворяют замыкающему равенству этой схемы.

* Здесь идет речь об элементарных преобразованиях самой системы, т. е. без применения формально обратных элементов.

** Частный случай этого был указан в работе [2].

Схема S называется следствием схемы S_1 , если S выполняется во всех ассоциативных системах, в которых выполняется схема S_1 . Прежде всего мы отметим следующее очевидное предложение, касающееся приводимых схем.

Если схема S имеет вид MPN , где отрезок P является схемой, то последовательность MN сама есть схема и S вытекает из MN и P .

Действительно, цепочка элементарных преобразований со схемой S имеет вид

$$a; \dots; \alpha_1 \alpha; \dots; \alpha_2 \alpha; \dots; b,$$

причем $\alpha_1, \alpha, \alpha_2, b$ — элементы из $\mathfrak{A}$ и α_1 преобразуются в α_2 с помощью цепочки схемы P . Если P выполняется в $\mathfrak{A}$, то $\alpha_1 = \alpha_2$ и указанную цепочку можно сократить, заменив следующей:

$$a; \dots; \alpha_1 \alpha; \alpha_2 \alpha; \dots; b.$$

Новая цепочка имеет схему MN , и если схема MN выполняется в $\mathfrak{A}$, то $a = b$, т. е. схема MPN также выполняется в $\mathfrak{A}$. Таким образом, приводимые схемы являются следствиями более коротких схем. Относительно неприводимых схем имеет место такая лемма:

Л е м м а 4. *Никакая неприводимая схема S длины n не может следовать из схем, длина которых меньше $n/2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть σ — нормальная система равенств, соответствующая схеме S , и $\mathfrak{A}$ — нормальная ассоциативная система, определяющими соотношениями которой являются равенства σ . Выше было показано, что сама схема S в системе $\mathfrak{A}$ не выполняется. Если мы сможем доказать, что все схемы длины меньше $n/2$ в $\mathfrak{A}$ выполняются, то справедливость леммы будет обнаружена. Итак, пусть S_1 — одна из схем, имеющих длину, меньшую $n/2$. Возьмем какую-нибудь цепочку T_1 элементарных преобразований из $\mathfrak{A}$, которая имеет схему S_1 .

Предположим, что эта цепочка преобразует $x \in \mathfrak{A}$ в $y \in \mathfrak{A}$. Если взять произвольный элемент из $\mathfrak{A}$, то его можно, вообще говоря, различными способами выразить через образующие. Мы хотим для всех элементов ассоциативной системы, участвующих в преобразованиях цепочки T_1 , установить некоторую нормальную форму их представления через образующие. Нормальную форму элемента $a \in \mathfrak{A}$ мы будем обозначать через $\bar{a}$. Кроме того, каждому формальному слову цепочки T_1 мы отнесем некоторое равенство из σ в качестве соответствующего.

Все это делается следующим образом. Прежде всего условимся одну сторону каждого равенства из σ называть левой, а другую правой. Если пара образующих составляет слово, являющееся левой или правой частью одного из равенств σ , то она называется преобразуемой. Очевидно, каждая преобразуемая пара может быть выражена двумя способами через образующие как левая или соответственно правая часть определяющего равенства. Все остальные пары допускают только одно представление. Возьмем теперь слово x и все преобразуемые пары в этом слове заменим левыми формами. Новое слово будет $\bar{x}$. Далее рассуждаем индуктивно. Предположим, что для всех элементов системы $\mathfrak{A}$, участвующих в i первых преобразованиях, нормальные формы уже установлены. Следующее $(i+1)$ -е слово получается из i -го после одного из следующих преобразований:

1. Произведение ab из i -го слова заменяется произведением cd и $ab = cd$ (в $\mathfrak{A}$). Для a, b нормальная форма по предположению установлена и $a = \bar{a}, b = \bar{b}^*$.

Теперь может быть два случая; каждый из них мы рассмотрим отдельно.

Первый случай: $\bar{ab} \equiv c_1 d_1, c_1 = c, d_1 = d$. Мы полагаем $\bar{c} \equiv c_1, \bar{d} \equiv d_1$. Пусть u — последняя буква из $\bar{c}$, v — первая из $\bar{d}$. Если uv — преобразуемая пара, то $uv = xy$ будет равенством из σ . Его мы и будем называть $(i + 1)$ -м соответствующим равенством.

Второй случай. Если указанное преобразование невозможно, то $\bar{ab} \equiv c_1 u v d_1, uv = xy, c = c_1 x, d = y d_1$. Нормальной формой c и d в этом случае мы будем называть слова $c_1 x, y d_1$. Равенство $uv = xy$ содержится в σ и будет называться $(i + 1)$ -м соответствующим равенством.

2. Новое слово получается путем введения формально обратного элемента $\mathfrak{Z}^*$ или $\mathfrak{I}^*$. Нормальная форма для $\mathfrak{Z}$ или $\mathfrak{I}$ получится, если все преобразуемые пары в этом элементе заменить их левой формой.

Соответствующее равенство из σ получается следующим образом. Рассматриваемое преобразование выглядит так: $tabn, ta\mathfrak{I}^*bn$. Пусть u — последняя буква из $\bar{a}$, v — первая из $\bar{b}$. Если пара uv преобразуема, то равенство $uv = xy$ есть соответствующее.

3. Новое слово получается из старого путем выбрасывания формально обратного элемента. Новых элементов из $\mathfrak{A}$ при этом не вводится и поэтому нормальную форму определять не требуется. Само преобразование имеет вид $ta\mathfrak{I}^*bn, tabn$. Пусть снова u — последний элемент a , а v — первый из b . Равенство $uv = xy$ называется $(i + 1)$ -м соответствующим, если вообще uv преобразуемо.

Обозначим через σ_1 совокупность всех «соответствующих» равенств для преобразований цепочки T_1 . Длина схемы этой цепочки по предположению меньше $n/2$. Поэтому число преобразований в T_1 меньше $n - 1$. Число равенств в σ_1 не больше числа преобразований T_1 и поэтому меньше $n - 1$. Число равенств в σ равно $n - 1$. Значит σ_1 есть правильная часть σ .

Возьмем теперь цепочку преобразований T_1 и все элементы из $\mathfrak{A}$, участвующие в этих преобразованиях, запишем в нормальной форме. Новую цепочку преобразований обозначим через $\bar{T}_1$. Мы утверждаем, что $\bar{T}_1$ можно рассматривать как цепочку элементарных преобразований в ассоциативной системе, определяемой равенствами σ_1 . Действительно, преобразования типа (1) имеют место в σ_1 , так как равенство $\bar{ab} = \bar{cd}$ или есть тождество, или же следует из равенства $uv = xy$, которое является соответствующим и, значит, входит в σ_1 . Преобразования типа (2) не обусловлены какими-либо равенствами, так что остается рассмотреть преобразования типа (3).

Пусть в T_1 выбрасывается пара $\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}^*$ (значит, в σ имеет место соотношение $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}$). Спрашивается, будет ли равенство $\bar{\mathfrak{I}}_1 = \bar{\mathfrak{I}}$ иметь место в σ_1 ? Пусть $x_1 y_1$ — какая-нибудь преобразуемая пара из $\bar{\mathfrak{I}}_1$ и xy — соответствующая пара из $\mathfrak{I}$. В силу равенств $\bar{\mathfrak{I}}_1 = \mathfrak{I}, \mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}, \mathfrak{I} = \bar{\mathfrak{I}}$ мы имеем $x_1 y_1 = xy$ в σ . Нам нужно обнаружить, что равенство $x_1 y_1 = xy$ входит в σ_1 . Однако возможны только два случая: либо образующие одной из пар $x_1 y_1, xy$ в некоторый момент принадлежали разным элементам системы $\mathfrak{A}$, либо каждая из этих пар всегда входила в состав одного и того же элемента. В первом случае равен-

* Знак $\equiv$ означает равенство в системе $\mathfrak{A}$, знак $\equiv$ мы будем употреблять для обозначения тождественности выражений через образующие.

ство $x_1 y_1 = x y$ есть соответствующее равенство того преобразования, где образующие впервые разъединились или соединились, а во втором случае обе пары должны иметь левую форму и, следовательно, быть тождественными. Таким образом, доказано, что цепочку $\bar{T}_1$ можно рассматривать как цепочку групповых элементарных преобразований в σ_1 . Начальное и конечное слова $\bar{T}_1$ суть $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Значит, равенство $\bar{x} = \bar{y}$ есть групповое следствие σ_1 . Так как σ_1 есть правильная часть неприводимой системы σ , то $\bar{x} = \bar{y}$ — простое следствие из σ_1 (лемма 3) и тем более σ . В системе σ мы имеем, кроме того, $\bar{x} = x, \bar{y} = y$. Значит, равенство $x = y$ имеет место в системе σ , т. е. схема S_1 в системе σ выполняется, что и требовалось доказать.

Из только что доказанной леммы непосредственно вытекает такое предложение:

Т е о р е м а 4. *Никакое конечное число групповых условий не может быть достаточным для возможности включения произвольной ассоциативной системы в группу*.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое конечное множество схем и n — длина наибольшей схемы этого множества. Нормальная ассоциативная система, соответствующая какой-либо неприводимой схеме длины $2n + 2$, в группу заключена не может быть. Однако все схемы длины $\leq n$, как только что было показано, в ней выполняются.

Следующая теорема лишь по форме является обобщением предшествующей:

Т е о р е м а 4а. *Никакая конечная система условий вида «из данной совокупности равенств вытекает данное» не может быть необходимой и достаточной для возможности включения произвольной ассоциативной системы в группу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждое условие рассматриваемой системы имеет вид: из системы равенств K_i следует равенство M_i . Это условие выполняется в любой ассоциативной системе и, в частности, в ассоциативной системе $\mathfrak{R}_i$, определяющими равенствами которой являются равенства системы K_i . Равенство M_i есть групповое следствие системы $\mathfrak{R}_i$. Поэтому его левая и правая части будут начальным и конечным словом некоторой цепочки групповых преобразований. Пусть S_i — схема этой цепочки. Значит, равенство M_i есть следствие условия S_i и системы равенств K_i , т. е. условие $K_i \rightarrow M_i$ есть следствие S_i . Возьмем все схемы S_i . Их конечное множество и из них все заданные условия вытекают. Если бы последние условия были достаточны, то были бы достаточны и условия S_i , чего на самом деле нет.

Последние теоремы оправдывают ту классификацию ассоциативных систем, которая была установлена нами в п. 3. Действительно, эти теоремы утверждают, что число различных классов ассоциативных систем бесконечно и что среди этих классов нет наименьшего.

Введем еще одно определение. Пусть S — произвольная схема. После вычеркивания из S нескольких пар букв l_i, l_i^* или L_j, L_j^* оставшаяся часть будет все еще образовывать схему S' , которую мы будем называть подчиненной схеме S . Пусть рассматриваются только системы с единицей. Тогда все схемы, подчиненные данной схеме S , будут ее следствиями.

Для доказательства достаточно заметить, что всякую цепочку преобразований с подчиненной схемой S' можно обратить в цепочку со схемой S , если

* Групповое условие — выполнение некоторой схемы.

вести в надлежащих местах в качестве формально обратных элементов единицы. Будет ли справедливо обратное предложение — остается невыясненным.

Для любых двух неприводимых схем весьма просто составить новую неприводимую схему, для которой данные схемы были бы подчиненными. Отсюда следует, что для любого конечного числа групповых условий можно найти такую схему, из которой они все вытекают.

В заключение заметим, что достаточность групповых условий была доказана нами (п. 3) в предположении, что ассоциативная система содержит единицу. В противном случае, достаточно потребовать сверх того, чтобы система была полугруппой с сокращением.

7. Нормальные кольца

Одно из приложений теории ассоциативных систем было уже ранее нами указано. Здесь мы хотим воспроизвести результат этой работы в несколько более общей форме.

Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная система и $\mathfrak{K}$ — произвольное коммутативное поле. По аналогии с групповыми кольцами можно ввести понятие $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ кольца. Если $\mathfrak{A}$ — нормальная ассоциативная система со схемой S длины > 2 , то кольцо $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ мы будем называть нормальным кольцом, соответствующим схеме S .

Т е о р е м а 5. *Нормальные кольца делителей нуля не имеют и в какие-либо поля заключены быть не могут.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что нормальное кольцо $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ не может быть заключено в поле, — очевидно, так как в противном случае нормальная ассоциативная система оказалась бы заключенной в мультипликативную группу поля. Остается показать, что нормальные кольца не имеют делителей нуля. Пусть A и B — два элемента из $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$, произведение которых равно нулю. В этом случае

$$A = \sum \alpha_i a_i, \quad B = \sum \beta_j b_j, \quad AB = \sum \alpha_i \beta_j a_i b_j \quad (\alpha, \beta \in \mathfrak{K}; a, b \in \mathfrak{A}).$$

Рассмотрим самые длинные члены из AB . Их сумма также равна нулю. Но самые длинные члены AB получаются в результате умножения самых длинных членов A на самые длинные B . Обозначим совокупность этих членов соответственно через $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Пусть $\bar{A} = \sum \bar{\alpha}_i a_i$, $\bar{B} = \sum \bar{\beta}_j b_j$. Тогда $\bar{A}\bar{B} = 0$ и можно предположить, что $\bar{\alpha}_i \neq 0$, $\bar{\beta}_j \neq 0$ ($i, j = 1, 2, \dots$) и $\bar{a}_i \neq \bar{a}_k$, $\bar{b}_i \neq \bar{b}_k$, если $i \neq k$. Из условия $\bar{A}\bar{B} = 0$ следует, что $\sum \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_j = 0$, где суммирование берется по тем значениям индексов, для которых произведение $\bar{a}_i \bar{b}_j$ одно и то же.

Рассмотрим член $\bar{a}_1 \bar{b}_1$. Так как $\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1 \neq 0$, то должен найтись по крайней мере еще один член $\bar{a}_i \bar{b}_j$, равный $\bar{a}_1 \bar{b}_1$. Длина $\bar{a}_i$ равна длине $\bar{a}_1$ и $a_i \neq a_1$. Поэтому

$$\bar{a}_i = a'u, \quad \bar{b}_j = vb', \quad \bar{a}_1 = a'x, \quad \bar{b}_1 = yb',$$

где равенство $uv = xy$ принадлежит схеме S . Рассмотрим теперь член $\bar{a}_i \bar{b}_1$.

По тем же соображениям должен найтись новый член $\bar{a}_k \bar{b}_m$, равный $\bar{a}_i \bar{b}_1$, и мы будем иметь

$$\bar{a}_k = a'w, \quad \bar{b}_m = zb',$$

где $wz = uy$ — снова равенство из S . Таким образом, схема S должна содержать равенства $uv = xy$ и $uy = wz$.

Легко убедиться, что таких равенств в S нет. Действительно, все образующие $\mathfrak{A}$ разбиваются на две категории, обозначенные соответственно малыми и большими латинскими буквами. Кроме того, все образующие снабжены индексами. Из конструкции нормальных равенств видно, что образующие каждой преобразуемой пары имеют одинаковый размер и одни и те же индексы. Поэтому u, v, x, y могут быть либо образующими a_i, l_i, b_i, r_i , либо A_i, L_i, B_i, R_i . Единственно возможное равенство в первом случае имеет вид $a_i l_i = b_i r_i$. Это равенство соответствует отрезку $l_i l_i^*$ схемы S . Так как схема S предполагается неприводимой и длины больше 2, то такого отрезка в ней быть не может.

Аналогично опровергается и второе предположение.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. О включении ассоциативных систем в группы.— Мат. сб., 1939, 6, № 2, 331—336.
2. А. Malcev. On the immersion of an algebraic ring into a field.— Math. Ann., 1937, 113, 686—691.

ОБ ИЗОМОРФНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП МАТРИЦАМИ *



Когда идет речь об изоморфном представлении некоторой абстрактно заданной бесконечной группы посредством матриц конечной степени, то естественно возникают два вопроса: 1) возможно ли вообще такое представление и 2) каков способ обозрения всех возможных представлений этой группы. В случае конечных групп представление достаточно высокой степени всегда имеется и поэтому вопрос о существовании для них отпадает. Наоборот, для бесконечных групп такой вопрос приобретает фундаментальное значение. В настоящей работе мы занимаемся именно этим вопросом.

Основная стоящая здесь проблема может быть сформулирована так: указать в терминах абстрактной теории групп необходимые и достаточные признаки того, чтобы некоторая группа допускала изоморфное представление какой-либо степени над каким-нибудь коммутативным полем. В § 1 эта проблема решается полностью для абелевых групп и групп периодических **. Что касается общего случая, то он сначала редуцируется к группам с конечным числом образующих, а затем сводится к проблеме представления конечных групп матрицами заданной степени. Оказывается, что матричные группы с конечным числом образующих могут быть с любой степенью точности аппроксимированы конечными группами, допускающими представление ограниченной степени, и, наоборот, из возможности такой аппроксимации уже вытекает представимость группы.

Из результатов, получаемых попутно с перечисленными фактами, отметим следующие. Прежде всего выясняется, что класс p -групп, допускающих изоморфное представление над полем характеристики нуль, в точности совпадает с классом специальных p -групп, недавно изученных С. Н. Черниковым [1].

Далее подробно выясняются связи, существующие между свойствами представлений группы в целом и свойствами представлений ее подгрупп с конечным числом образующих. Отсюда в качестве частных случаев получаются известные результаты Шура [2] о представлениях периодических групп в полях нулевой характеристики и, сверх того, аналогичные теоремы для представлений периодических групп в полях простой характеристики. Наконец, в § 6 для групп, допускающих изоморфное матричное представление, решается так называемая проблема Хопфа (см. [3]). Проблема состоит в следующем. Требуется доказать, что группы с конечным числом образующих не могут содержать собственного нормального делителя, фактор-группа по которому была бы изоморфна первоначальной группе. Такое утверждение было пока доказано только для свободных групп Магнусом, если не

* Мат. сб., 1940, 8, № 3, 405—422. Часть результатов этой работы была доложена на алгебраическом совещании в Москве 14.XI 1939 г.

** Для разрешимых и других групп см.: Ю. И. Мерзляков. Исследования по матричной представимости абстрактных групп и матричным группам.— Мат. заметки, 1973, 14, № 4, 597—606.— *Прим. ред.*

считать тривиальных случаев групп абелевых и конечных. Указанные типы групп заведомо допускают матричное представление и содержатся, следовательно, в нашем решении. Однако это решение охватывает и ряд существенно новых случаев, например свободные произведения конечного числа абелевых, свободные произведения конечного числа конечных групп и некоторые другие (ср. [4]).

§ 1. Абелевы и периодические группы

Простейшим случаем общей проблемы о представлениях бесконечных групп является вопрос о существовании изоморфных представлений абелевых групп. Чтобы иметь возможность формулировать его решение, напомним несколько определений. Пусть $\mathfrak{A}$ — абелева группа и p — некоторое простое число. Совокупность всех элементов группы $\mathfrak{A}$, порядок которых есть степень p , называется *примарной компонентой*, или *p -компонентой* группы $\mathfrak{A}$.

Абелева группа называется *квазициклической*, если всякое конечное множество ее элементов порождает циклическую подгруппу.

Теорема 1. *Для того чтобы абелева группа $\mathfrak{A}$ могла быть изоморфно представлена матрицами степени n над некоторым полем характеристики нуль, необходимо и достаточно, чтобы каждая ее примарная компонента была прямым произведением не более n квазициклических групп. Далее, чтобы абелева группа могла быть представлена матрицами степени n над некоторым полем простой характеристики p , необходимо и достаточно, чтобы ее p -компонента разлагалась в прямое произведение циклических групп порядка $\leq p^s$, а все остальные примарные компоненты были прямыми произведениями не более $n - s$ квазициклических групп.*

Доказательство. Докажем сначала первую половину теоремы, в которой речь идет о представлениях в полях нулевой характеристики. Необходимые и достаточные условия, сформулированные в этой части, эквивалентны требованию, чтобы уравнение $x^m = 1$ в группе $\mathfrak{A}$ имело не более m^n решений. Необходимость такого условия может быть обнаружена следующим путем. Пусть $\mathfrak{D}$ — изоморфное представление группы $\mathfrak{A}$ в поле $\mathfrak{K}$, которое мы можем предполагать алгебраически замкнутым. Обозначим через $\mathfrak{S}$ периодическую часть группы $\mathfrak{A}$. По теореме Шура представление $\mathfrak{D}$ эквивалентно такому $\mathfrak{D}_1$, в котором все матрицы $\mathfrak{S}$ имеют диагональный вид. Возьмем какой-нибудь элемент h из группы $\mathfrak{S}$ и рассмотрим его матрицу H в новом представлении. Если $h^m = 1$, то диагональные элементы матрицы H являются значениями радикала $\sqrt[m]{1}$ в поле $\mathfrak{K}$. Так как последний радикал имеет только m значений, а степень матрицы H есть n , то различных матриц, обладающих указанными свойствами, найдется не более m^n , что и доказывает необходимость условий.

Для доказательства достаточности мы прежде всего построим вспомогательную трансфинитную цепочку

$$\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{A}_\omega \subset \mathfrak{A}_{\omega+1} \subset \dots$$

подгрупп группы $\mathfrak{A}$, обладающую следующими свойствами:

1. $\mathfrak{A}_0$ совпадает с единицей группы $\mathfrak{A}$.

2. Если α — предельное, то $\mathfrak{A}_\alpha = \sum_{\lambda < \alpha} \mathfrak{A}_\lambda$. Если же $\alpha = \beta + 1$, то $\mathfrak{A}_\alpha =$

$= [\mathfrak{A}_\beta, a_\alpha]$, где либо никакая положительная степень элемента a_α не принадлежит $\mathfrak{A}_\beta$, либо $a_\alpha^p \in \mathfrak{A}_\beta$ и p — простое. Символ $[\mathfrak{A}_\beta, a_\alpha]$ означает группу, порожденную элементами, стоящими в скобках.

3. $\sum_{\alpha} \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}$.

Представления групп $\mathfrak{A}_\alpha$ мы будем искать в форме диагональных матриц и так, чтобы представление каждой следующей подгруппы было продолжением представления предшествующей. Построение индуктивно. Возьмем произвольное поле и обозначим его через $\mathbb{K}_0$. Единственному элементу группы $\mathfrak{A}_0$ поставим в соответствие единичную матрицу E степени n из поля $\mathbb{K}_0$. Предположим теперь, что для $\lambda < \alpha$ поля $\mathbb{K}_\lambda$ и представления групп $\mathfrak{A}_\lambda$ уже построены. Если α — число предельное, то полагаем $\mathbb{K}_\alpha = \sum_{\lambda < \alpha} \mathbb{K}_\lambda$,

а представления групп $\mathfrak{A}_\lambda$ дают и представление группы $\mathfrak{A}_\alpha$. Если α — изолированное, то $\alpha = \beta + 1$. По предположению группа $\mathfrak{A}_\beta$ уже представлена диагональными матрицами из поля $\mathbb{K}_\beta$.

В силу свойства (2) имеем $\mathfrak{A}_\alpha = [\mathfrak{A}_\beta, a_\alpha]$. Рассмотрим сначала случай, когда никакая положительная степень a_α не входит в $\mathfrak{A}_\beta$. Положим $\mathbb{K}_\alpha = \mathbb{K}_\beta(x)$ и $\|a_\alpha\| = xE$, где x — какой-нибудь элемент, трансцендентный относительно $\mathbb{K}_\beta$. Таким образом, мы имеем представление элемента a_α и группы $\mathfrak{A}_\beta$. Это представление очевидным способом распространяется на всю группу $\mathfrak{A}_\alpha$, что нам и требовалось. Пусть теперь $a_\alpha^p = b$, $b \in \mathfrak{A}_\beta$ и p — простое. Элементу b в представлении группы $\mathfrak{A}_\beta$ соответствует диагональная матрица $\|b\|$. Присоединим к $\mathbb{K}_\beta$ корни p -й степени из всех элементов матрицы $\|b\|$ и обозначим новое поле через $\mathbb{K}_\alpha$. В кольце матриц с элементами из $\mathbb{K}_\alpha$ имеется в точности p^n диагональных матриц X , удовлетворяющих условию $X^p = \|b\|$. Все эти матрицы не могут быть образами элементов из $\mathfrak{A}_\beta$. Действительно, если $\|x\|^p = \|b\|$, то $x^p = b$. Однако последнее уравнение имеет в группе $\mathfrak{A}$ согласно предположению не более p^n решений, одно из которых — a_α — в группе $\mathfrak{A}_\beta$ не содержится. Поэтому среди матриц X найдется такая, которая не является образом ни одного элемента $\mathfrak{A}_\beta$. Эту матрицу мы и поставим в соответствие элементу a_α . Всякий элемент c из $\mathfrak{A}_\alpha$ может быть записан в форме

$$c = a_\alpha^k a \quad (a \in \mathfrak{A}_\beta, \quad 0 \leq k < p).$$

Положим $\|c\| = \|a_\alpha\|^k \|a\|$. Ясно, что это отображение является точным представлением группы $\mathfrak{A}_\alpha$. Таким образом, мы построили представления всех групп $\mathfrak{A}_\alpha$, а значит, и группы $\mathfrak{A}$, которую можно рассматривать как последнюю среди $\mathfrak{A}_\alpha$. Очевидно, что использованные в доказательстве трансцендентные присоединения можно заменить присоединениями элементов, никакая степень которых не содержится в мультипликативной системе, образованной предшествующими элементами. В частности, если группа $\mathfrak{A}$ имеет мощность не выше континуальной, то все элементы матриц можно взять среди комплексных чисел единичной окружности и получить таким образом представление с ограниченными элементами. Справедливость второй части теоремы может быть обнаружена аналогичным путем.

Только что доказанное предложение позволяет легко строить примеры непредставимых групп. Например, прямое произведение бесконечного числа циклических групп данного порядка k не может быть представлено изоморфно матрицами, так как содержит бесконечно много элементов порядка k .

Счетная симметрическая группа $\mathfrak{S}_\infty$ также непреставима, так как содержит подгруппу, являющуюся прямым произведением счетного числа циклических второго порядка, и т. п.

Теперь мы перейдем к изучению периодических групп, т. е. групп, все элементы которых имеют конечный порядок. Интересующий нас вопрос о возможности точных представлений получает здесь такое решение.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы периодическая группа $\mathfrak{G}$ могла быть изоморфно представлена матрицами над некоторым полем нулевой характеристики, необходимо и достаточно, чтобы она имела представимый абелев нормальный делитель конечного индекса.*

Необходимость этих условий была доказана еще Шуром [2], а достаточность непосредственно вытекает из следующей леммы:

Л е м м а 1. *Если некоторая группа $\mathfrak{G}$ имеет подгруппу $\mathfrak{H}$ конечного индекса, которая допускает изоморфное представление матрицами, то сама группа $\mathfrak{G}$ также допускает изоморфное матричное представление над тем же полем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{D}$ — некоторое представление подгруппы $\mathfrak{H}$ и m — ее индекс. Каждому элементу $h \in \mathfrak{H}$ в представлении $\mathfrak{D}$ соответствует определенная матрица, которую мы обозначим через $\bar{h}$. Разложим $\mathfrak{G}$ в смежные классы по $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}g_2 + \dots + \mathfrak{H}g_m.$$

Произведение g_ig , где g — произвольный элемент из $\mathfrak{G}$, можно единственным образом записать в виде $h_ig_{n_i}$ ($h_i \in \mathfrak{H}$). Таким образом, каждому элементу g соответствует последовательность элементов $h_1, \dots, h_m$ из $\mathfrak{H}$ и последовательность чисел $n_1, n_2, \dots, n_m$. Последовательности $\{n_i\}$ поставим в соответствие вспомогательную матрицу $D(n_i)$, определяющуюся следующим образом:

$$D(n_i) = \|d_{jk}\| \quad (j, k = 1, 2, \dots, m), \quad d_{jn_j} = E, \quad d_{jk} = 0, \text{ если } k \neq n_j,$$

и E — единичная матрица в представлении $\mathfrak{D}$. Нам нужно каждому элементу $g \in \mathfrak{G}$ поставить в соответствие некоторую матрицу; в качестве нее мы выберем следующую:

$$\|g\| = \begin{vmatrix} \bar{h}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{h}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \bar{h}_m \end{vmatrix} D(n_i).$$

Ясно, что при таком соответствии разным элементам группы $\mathfrak{G}$ отвечают разные матрицы. Последующие вычисления покажут, что это соответствие есть изоморфизм. Пусть a, b — какая-нибудь пара элементов из $\mathfrak{G}$ и пусть

$$g_ia = a_ig_{u_i}, \quad g_ib = b_ig_{v_i} \quad (a_i, b_i \in \mathfrak{H}, \quad i = 1, 2, \dots, m).$$

Тогда $h_iab = a_ib_{u_i}g_{v_{u_i}}$ и, следовательно,

$$\|ab\| = \begin{vmatrix} \bar{a}_1\bar{b}_{u_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{a}_m\bar{b}_{u_m} \end{vmatrix} D(v_{u_i}).$$

Так как $D(v_{u_i}) = D(u_i) D(v_i)$, то матрицу $\|ab\|$ можно переписать в следующем виде:

$$\|ab\| = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{a}_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D(u_i) D^{-1}(u_i) & & \\ & \ddots & \\ & & D(u_i) D(v_i) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{b}_{u_i} & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{b}_{u_m} \end{vmatrix}$$

Отсюда получается

$$\|ab\| = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{a}_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{b}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{b}_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D(u_i) & & \\ & \ddots & \\ & & D(v_i) \end{vmatrix}$$

Следовательно, $\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|$, изоморфизм установлен, лемма доказана, а вместе с нею и теорема 2.

В качестве одного из следствий этой теоремы отметим такое: *всякая бесконечная специальная группа допускает изоморфное представление матрицами*. Действительно, общая специальная группа разлагается в прямое произведение конечного числа специальных p -групп. Каждая специальная p -группа имеет абелев нормальный делитель конечного индекса. Этот нормальный делитель будет изоморфно представим, так как является прямым произведением конечного числа групп типа p^∞ , которые представимы уже матрицами 1-й степени. В силу теоремы 2 отсюда следует, что специальные p -группы представимы, а значит, представимы и произвольные специальные группы.

Обратное, вообще, неверно, так как существуют периодические группы матриц, которые не являются специальными. Однако *всякая p -группа, допускающая изоморфное представление матрицами, будет специальной*. В самом деле, пусть $\mathfrak{P}$ есть p -группа, представляемая матрицами. Тогда она имеет абелев нормальный делитель $\mathfrak{A}$ конечного индекса. Совокупность элементов, имеющих бесконечную высоту в $\mathfrak{A}$, обозначим $\mathfrak{B}$. Вследствие представимости группа $\mathfrak{B}$ будет прямым произведением конечного числа групп типа p^∞ , а фактор-группа $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ распадется в прямое произведение конечного числа конечных сомножителей. Таким образом, группа $\mathfrak{B}$ будет нормальным делителем конечного индекса группы $\mathfrak{G}$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 дает полный ответ на вопрос — какие периодические группы изоморфно представимы матрицами над полями нулевой характеристики. Аналогичный вопрос для полей простой характеристики остается открытым. Из приведенных рассуждений вытекает только, что условия, сформулированные в теореме 2, будут достаточными и для полей произвольной характеристики.

§ 2. Поведение центра

Вопрос о существовании центра и его свойствах представляет обычно большой интерес. Группы, допускающие точное представление матрицами, ведут себя в этом отношении специфическим образом.

Т е о р е м а 3. *Если группа $\mathfrak{G}$ допускает изоморфное представление $\mathfrak{D}$ и содержит возрастающую цепочку подгрупп $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \dots$, для каждой из которых представление $\mathfrak{D}$ будет вполне приводимым, то между цен-*

трами этих подгрупп, начиная с некоторой из них, будут существовать соотношения

$$\mathfrak{Z}_k \subset \mathfrak{Z}_{k+1} \subset \dots$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}_n^{(1)}, \mathfrak{D}_n^{(2)}, \dots, \mathfrak{D}_n^{(k_n)}$ — неприводимые представления, на которые распадается $\mathfrak{D}$ для подгруппы $\mathfrak{G}_n$. Возьмем одну из предшествующих групп $\mathfrak{G}_m$ ($m < n$). Представления $\mathfrak{D}_n^{(i)}$ будут одновременно представлениями группы $\mathfrak{G}_m$. Если хотя бы одно из $\mathfrak{D}_n^{(i)}$ распадается при переходе к $\mathfrak{G}_m$, то мы скажем, что представление $\mathfrak{D}$ распадается при переходе от $\mathfrak{G}_n$ к $\mathfrak{G}_m$. Обозначим теперь через $\mathfrak{G}_{n_1}$ первую из подгрупп, для которых $\mathfrak{D}$ распадается при переходе к $\mathfrak{G}_1$. Аналогично, через $\mathfrak{G}_{n_2}$ обозначим первую из следующих групп, для которых $\mathfrak{D}$ распадается при переходе к $\mathfrak{G}_{n_1}$, и т. д. Если степень представления $\mathfrak{D}$ есть n , то цепочка $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_{n_1}, \dots$ не может содержать более n подгрупп. Пусть $\mathfrak{G}_{n_s}$ — последняя группа этой цепочки. Если теперь взять подгруппы $\mathfrak{G}_i$ и $\mathfrak{G}_j$, где $n_s < i < j$, то все неприводимые представления группы $\mathfrak{G}_j$, содержащиеся в $\mathfrak{D}$, будут неприводимыми и для $\mathfrak{G}_i$. Отсюда, как известно, следует, что центр подгруппы $\mathfrak{G}_i$ содержится в центре группы $\mathfrak{G}_j$, что и требовалось доказать.

Условия полной приводимости будут заведомо выполнены, если полем представления является поле комплексных чисел и само представление — с ограниченными элементами или если, например, группы $\mathfrak{G}_i$ конечны. В частности, из теоремы 3 непосредственно получается предложение Черникова: *всякая специальная p -группа имеет нетривиальный центр*. Действительно, специальные группы представимы матрицами, счетны и локально конечны. Поэтому всякую специальную p -группу можно представить как сумму возрастающей цепочки своих конечных подгрупп. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 + \dots$ — такое представление. Все $\mathfrak{G}_i$ являются конечными p -группами и поэтому имеют нетривиальные центры. По упомянутой теореме для некоторого k будем иметь $\mathfrak{Z}_k \subset \mathfrak{Z}_{k+1} \subset \dots$. Отсюда вытекает, что центр $\mathfrak{Z}$ группы $\mathfrak{G}$ будет иметь разложение $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 + \dots$ и, следовательно, будет нетривиальным.

§ 3. Локальные и общие представления

Пусть дана некоторая группа $\mathfrak{G}$. Локальной частью $\mathfrak{G}$ мы будем называть всякую ее подгруппу, порождающуюся конечным числом элементов. Многие проблемы теории групп относятся к выяснению связей между свойствами локальных частей и свойствами самой группы в целом. В настоящем параграфе мы рассмотрим связи, существующие между свойствами какого-нибудь представления группы и свойствами этого представления для всех локальных частей $\mathfrak{G}$.

Основным средством будет служить излагаемая ниже лемма. Пусть $x_1, x_2, \dots$ — некоторое множество переменных и $F_i(x_\alpha, \dots, x_\gamma)$ — целочисленные полиномы от этих переменных. Систему S , состоящую из некоторого (вообще, бесконечного) числа условий вида $F_i(x_\alpha, \dots, x_\gamma) = 0$ или $\prod F_i(x_\alpha, \dots, x_\gamma) \neq 0$ *, мы будем называть совместной, если су-

* Знак $\prod F_{n_i} \neq 0$ здесь означает логическую дизъюнкцию, т. е. утверждение «или $F_{n_1} \neq 0$, или ..., или $F_{n_k} \neq 0$ ».

ществует такое поле $\mathbb{K}$, в котором для переменных x_i можно найти значения, удовлетворяющие системе S .

Л е м м а 2. *Если всякая конечная часть смешанной системы равенств и неравенств совместна, то совместна и вся система.*

Доказательство проводится индуктивно по мощности системы S . Пусть лемма уже доказана для всех систем, содержащих меньше $\aleph_\sigma$ условий, и S — система, имеющая мощность $\aleph_\sigma$. Расположим все равенства и неравенства системы S в трансфинитную последовательность наименьшего типа Ω_σ и обозначим через S_α начальный отрезок этой последовательности типа α . Все целочисленные полиномы от $x_1, x_2, \dots$, не приводимые в кольце $C[x_1, x_2, \dots]$, образуют, очевидно, множество мощности $\aleph_\sigma$ и поэтому могут быть расположены в трансфинитную цепочку типа Ω_σ . Пусть эта цепочка будет $P_1, P_2, \dots$. Из цепочки $\{P\}$ мы теперь хотим выделить некоторую подпоследовательность $P_{n_1}, P_{n_2}, \dots$. Мощность любого отрезка S_α ($\alpha < \Omega_\sigma$) меньше $\aleph_\sigma$, поэтому найдется некоторое поле $\mathbb{K}_\alpha$, в котором система условий S_α будет разрешима. Значениями переменных x_i в поле $\mathbb{K}_\alpha$ мы будем называть какое-нибудь решение системы S_α в этом поле. Обозначим через P_{n_1} первый из полиномов последовательности $\{P_\lambda\}$, который обращается в нуль в $\aleph_\sigma$ полях последовательности $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \dots$. Далее рассуждаем индуктивно. Предположим, что нами уже выбраны полиномы P_{n_β} для всех $\beta < \tau$ и так, что каждая из составных систем $\{S_\alpha; P_{n_1} = 0, \dots, P_{n_\beta} = 0, \dots\}$ ($\beta < \tau$) совместна. Если τ — число изолированное, то $\tau = \kappa + 1$ и наше предположение означает, что для каждого $\alpha < \Omega_\sigma$ существует некоторое поле $\mathbb{K}_{\tau\alpha}$, в котором система $\{S_\alpha; P_{n_1} = 0, \dots, P_{n_\kappa} = 0\}$ разрешима. В этом случае мы через P_{n_τ} обозначим первый из полиномов последовательности $\{P_\lambda\}$, который отличен от всех уже выбранных P_{n_β} и который обращается в нуль в $\aleph_\sigma$ полях последовательности $\mathbb{K}_{\tau 1}, \mathbb{K}_{\tau 2}, \dots$. Пусть теперь τ — предельное. Система $S_{\tau\alpha}$, состоящая из S_α и всех равенств $P_{n_1} = 0, \dots, P_{n_\beta} = 0, \dots$ ($\beta < \tau$), имеет мощность, меньшую $\aleph_\sigma$, и любая ее конечная часть совместна, так как содержится в одной из совместных частичных систем $\{S_\alpha; P_{n_1} = 0, \dots, P_{n_\beta} = 0\}$. В силу основного индуктивного предположения мы к системе $S_{\tau\alpha}$ можем применить доказываемую лемму и заключить, что эта система совместна. Далее, как в первом случае, через $\mathbb{K}_{\tau\alpha}$ можно обозначить поле, в котором система $S_{\tau\alpha}$ разрешима, и в качестве P_{n_τ} взять первый из полиномов последовательности $\{P_\lambda\}$, отличный от всех P_{n_β} и обращающийся в нуль в $\aleph_\sigma$ полях $\mathbb{K}_{\tau\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots$). Таким образом, цепочка полиномов $\{P_{n_\beta}\}$ определена. Полиномы P_{n_β} в кольце $C[x_1, x_2, \dots]$ порождают некоторый идеал I . Докажем, что этот идеал является простым. Пусть F — какой-либо полином из I , $F = P_a P_b \dots P_c$ — его разложение на простые сомножители и $F = A_\alpha P_{n_\alpha} + \dots + A_\gamma P_{n_\gamma}$ — выражение F через базис идеала. Выберем некоторое трансфинитное число θ , большее чем $\max[a, \dots, c; n_\alpha, \dots, n_\gamma]$. Во всех полях $\mathbb{K}_{\theta 1}, \mathbb{K}_{\theta 2}, \dots$ полиномы $P_{n_\alpha}, \dots, P_{n_\gamma}$, а значит, и F равны нулю. Отсюда следует, что в каждом поле равен нулю по крайней мере один из сомножителей $P_a, \dots, P_c$. Обозначим через P_s тот из них, который обращается в нуль в $\aleph_\sigma$ полях $\mathbb{K}_{\theta\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, \dots$). Наконец, легко проверить, что $P_s = P_{n_\tau}$, где τ — порядковый тип последовательности $n_1, n_2, \dots, n_\beta, \dots$ ($\beta < s$).

Действительно, системы $S_{\tau\alpha} = \{S_\alpha; P_{n_1} = 0, \dots, P_{n_\beta} = 0, \dots\}$ ($\beta < \tau$) выполняются в полях $\mathbb{K}_{\tau\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots$), а P_s есть полином,

который обращается в нуль в $\aleph_s$ полях $\mathbb{K}_{\alpha}$. Следовательно, либо $s > n$, что невозможно, либо $s = n$, что нам и требуется.

Итак, показано, что I — простой идеал. Отсюда заключаем, что кольцо вычетов $C[x_1, x_2, \dots]/I$ делителей нуля не содержит и поэтому может быть заключено в поле отношений $\mathbb{K}$. Это поле и будет тем, в котором разрешима вся система S . Искомое решение можно выразить формулами $x_i = \bar{x}_i$, если через $\bar{x}_i$ обозначить тот класс кольца вычетов $C[x_1, \dots]/I$, который содержит x_i .

Как уже было сказано, леммой 2 можно воспользоваться для изучения свойств представлений. Предварительно мы введем несколько вспомогательных понятий. Пусть даны группы $\mathfrak{G}$ и натуральное число n . Каждому элементу g группы $\mathfrak{G}$ мы сопоставим множество из n^2 независимых переменных $x_{\alpha\beta}^g$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$). Матрицу $X_g = \|x_{\alpha\beta}^g\|$, составленную из этих переменных, назовем трансцендентной матрицей элемента g . Пусть g, h — какие-либо элементы группы $\mathfrak{G}$. Систему, состоящую из равенств

$$x_{\alpha\beta}^{gh} = \sum_{v=1}^n x_{\alpha v}^g x_{v\beta}^h \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

и неравенств $\prod_{\alpha, \beta} (x_{\alpha\beta}^g - x_{\alpha\beta}^h) \neq 0$, если $g \neq h$, мы будем называть смешанной

системой условий для пары g, h . Объединяя смешанные условия всевозможных пар элементов группы $\mathfrak{G}$, мы получим смешанную систему условий для самой группы $\mathfrak{G}$. Предположим теперь, что нам дано некоторое изоморфное представление группы $\mathfrak{G}$ и пусть в этом представлении элемент g изображается матрицей $\|a_{\alpha\beta}^g\|$. Тогда ясно, что $x_{\alpha\beta}^g = a_{\alpha\beta}^g$ будет решением смешанной системы условий для группы $\mathfrak{G}$. Обратно, если смешанная система условий группы $\mathfrak{G}$ разрешима в некотором поле и $x_{\alpha\beta}^g = a_{\alpha\beta}^g$ есть это решение, то соответствие $g \rightarrow \|a_{\alpha\beta}^g\|$ будет изоморфным представлением группы $\mathfrak{G}$. Если решение $x_{\alpha\beta}^g = a_{\alpha\beta}^g$ будет удовлетворять только равенствам системы, а некоторые из неравенств будут нарушаться, то соответствие $g \rightarrow \|a_{\alpha\beta}^g\|$ останется еще представлением группы $\mathfrak{G}$, но уже гомоморфным.

Имея в виду эти замечания, весьма просто установить следующее предложение *:

Т е о р е м а 4. Если всякая локальная часть группы $\mathfrak{G}$ допускает изоморфное представление степени n над некоторым полем, то группа $\mathfrak{G}$ также допускает изоморфное представление степени n .

Для доказательства рассмотрим смешанную систему условий $S_{\mathfrak{G}}$ для группы $\mathfrak{G}$. Нам нужно обнаружить, что $S_{\mathfrak{G}}$ совместна. Возьмем какую-нибудь конечную часть S' системы $S_{\mathfrak{G}}$. В условиях S' явно содержится только конечное число переменных $x^{g_1}, \dots, x^{g_k}$. Обозначим через $\mathfrak{H}$ подгруппу группы $\mathfrak{G}$, порождаемую элементами $g_1, \dots, g_k$. Система условий $S_{\mathfrak{H}}$ заведомо разрешима, так как по условиям теоремы группа $\mathfrak{H}$ допускает изоморфное представление степени n . Система S' является частью $S_{\mathfrak{H}}$ и поэтому также разрешима. Следовательно, любая конечная часть $S_{\mathfrak{G}}$ разрешима, а это по лемме 2 влечет за собой разрешимость $S_{\mathfrak{G}}$, что и требовалось.

* Частный случай этой теоремы для счетных групп другим методом одновременно был получен В. Л. Нисневичем [5].

Рассмотрим вопрос о существовании изоморфных представлений некоторой группы в полях различных характеристик. Уже из теоремы 1 видно, что существуют группы, представимые в полях одной характеристики и не представимые в полях другой характеристики. Из этой же теоремы видно, что для каждой простой характеристики p существует такая группа (например, квазициклическая p -группа), которая не представима в полях характеристики p и представима в полях всех остальных характеристик. Для нулевой характеристики последнее обстоятельство места не имеет. Именно, если какая-либо группа $\mathfrak{G}$ не допускает точного представления в полях характеристики нуль, то она не допускает точных представлений в полях почти всех простых характеристик (за исключением, быть может, конечного числа их).

Доказательство можно провести по способу от противного. Пусть $\mathfrak{G}$ допускает изоморфные представления степени n в полях характеристик $p_1, p_2, \dots$. Нам нужно показать разрешимость групповой смешанной системы $S_{\mathfrak{G}}$ в поле нулевой характеристики. Обозначим через S' какую-либо конечную часть системы $S_{\mathfrak{G}}$. По условию S' разрешима в поле любой из характеристик $p_1, p_2, \dots$, но тогда из доказательства обычной теоремы Штейница* следует, что S' разрешима и в поле характеристики нуль. Применяя лемму 2; мы убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Возвращаясь к изучению связей между локальными и интегральными свойствами представлений, отметим еще следующую теорему:

Т е о р е м а 5. Если некоторое представление группы $\mathfrak{G}$ приводимо для всякой локальной части этой группы, то оно будет приводимым и для всей группы; если представление расщепляется для всех локальных частей, то оно расщепляется и для самой группы.

Доказательство можно снова построить на лемме 2. Действительно, приводимость представления $g \rightarrow \|a_{\alpha\beta}^g\|$ равносильна разрешимости той системы уравнений, которая получится, если приравнять нулю элементы одного из угловых прямоугольников всех матриц $\|x_{\alpha\beta}\| \cdot \|a_{\alpha\beta}^g\| \cdot \|x_{\alpha\beta}\|^{-1}$. Всякая конечная часть этой системы уравнений разрешима в силу условий теоремы. Применяя лемму 2, мы убеждаемся в разрешимости всей системы, что нам и требовалось. Аналогично доказывается и вторая часть теоремы.

Из теоремы 5, в частности, автоматически вытекает известное предложение Шура, что всякое представление периодической группы в поле характеристики нуль расщепляется на абсолютно неприводимые части. В самом деле, пусть точное представление $\mathfrak{D}$ периодической группы $\mathfrak{G}$ приводимо. Всякая локальная часть $\mathfrak{G}'$ этой группы конечна, и представление $\mathfrak{D}$ для $\mathfrak{G}'$ по условию приводимо. По теореме Машке $\mathfrak{D}$ будет расщепляться для $\mathfrak{G}'$, а тогда по теореме 5 представление $\mathfrak{D}$ будет расщепляться и для $\mathfrak{G}$.

§ 4. Представления групп с конечным числом образующих в полях нулевой характеристики

Результаты предшествующего параграфа показывают, что проблема представления бесконечных групп матрицами в значительной мере сводится к изучению той же проблемы для групп с конечным числом образующих. Последним вопросом мы сейчас и займемся. Прежде всего вместо общей групповой системы условий, использованной в § 3, целесообразно ввести

* См., например, [6, т. 1, стр. 95].

аналогичную систему, связанную с данной системой образующих. Итак, пусть $u_1, u_2, \dots, u_s$ — некоторая конечная система образующих группы $\mathfrak{G}$. Мы предположим, сверх того, что каждый элемент $\mathfrak{G}$ может быть выражен в виде произведения неотрицательных степеней этих образующих. Рассмотрим множество независимых переменных $x_{\alpha\beta}^k$ ($k = 1, 2, \dots, s$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n$). Каждому образующему u_i поставим в соответствие матрицу $X_i = \|x_{\alpha\beta}^i\|$ и введем следующие соотношения: если $R(u_1, \dots, u_s) = e$ есть одно из соотношений между образующими, то полагаем $R(X_1, \dots, X_s) - E = 0$. Элементы матрицы, стоящей в этом соотношении слева, суть полиномы от x , равенство нулю которых и дает искомые соотношения. Совокупность всех этих равенств обозначим через $S'_\mathfrak{G}$. Присоединим к ней еще неравенства следующего вида: если g, h — два различных элемента из $\mathfrak{G}$ и $g = R_1(u_1, \dots, u_s)$, $h = R_2(u_1, \dots, u_s)$ — их выражения через образующие, то полагаем $R_1(X_1, \dots, X_s) - R_2(X_1, \dots, X_s) \neq 0$. Совокупную систему всех полученных равенств и неравенств обозначим через $S_\mathfrak{G}$. Легко убедиться, что группа $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда допускает изоморфное представление в поле $\mathfrak{K}$, когда ее полная система условий разрешима в этом поле.

Пусть теперь группа $\mathfrak{G}$ с образующими $u_1, \dots, u_s$ допускает изоморфное представление $u_i \rightarrow \|a_{\alpha\beta}^i\|$ степени n над некоторым полем нулевой характеристики. Множество всех полиномов от $x_{\alpha\beta}^i$ с рациональными коэффициентами, обращающихся в нуль в точке $x_{\alpha\beta}^i = a_{\alpha\beta}^i$ ($i = 1, 2, \dots, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$), является простым идеалом I в кольце полиномов $C[x_{\alpha\beta}^i]$. Поэтому для кольца вычетов $\Gamma[x_{\alpha\beta}^i]/I$ существует поле отношений $\mathfrak{K}$. Соответствие $u_i \rightarrow \|x_{\alpha\beta}^i\|$ ($\bar{x}$ означает класс вычетов, содержащий x) порождает изоморфное представление группы $\mathfrak{G}$ над полем $\mathfrak{K}$. Но $\mathfrak{K}$ есть конечное расширение поля рациональных чисел и, значит, представляет собой простое алгебраическое расширение некоторого чисто трансцендентного расширения поля рациональных чисел $\mathfrak{K} = \Gamma(x_1, \dots, x_k; y)$, где $x_1, \dots, x_k$ — независимые переменные, а y — алгебраическая функция от них.

Поле представления $\mathfrak{K}$ можно заменить еще более простым, если повысить степень представления. Действительно, группа $\mathfrak{G}$ представлена матрицами над полем $\mathfrak{K}$, т. е. представлена элементами некоторой гиперкомплексной системы $\mathfrak{A}$ над полем $\mathfrak{K}$. Само поле $\mathfrak{K}$ можно рассматривать как гиперкомплексную систему некоторого ранга r над чисто трансцендентным полем $\Gamma(x_1, \dots, x_k)$. Станем теперь и $\mathfrak{A}$ рассматривать как гиперкомплексную систему над $\Gamma(x_1, \dots, x_k)$. Тогда ее элементы, а значит, и элементы группы $\mathfrak{G}$ можно будет представить матрицами степени nr над $\Gamma(x_1, \dots, x_k)$, что и дает желаемое упрощение. Отсюда вытекает

Т е о р е м а 6. *Если группа $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих допускает точное представление над некоторым полем характеристики нуль, то она допускает изоморфное представление и над некоторым конечным чисто трансцендентным расширением поля рациональных чисел.*

Можно ли идти в этом направлении еще дальше и перейти путем соответственного повышения степени к представлению над полем рациональных чисел, остается неясным*.

* В настоящее время этот вопрос решен отрицательно (В. А. Чуркин. О представлении групп над полями рациональных функций. — Алгебра и логика, 1968, 7, № 4, 120—123). — Прим. ред.

В дальнейшем нам потребуется понятие предельной группы. Это понятие является небольшой модификацией известного понятия теории непрерывных групп (см. [7]) и может быть сформулировано следующим образом:

О п р е д е л е н и е. *Группа $\mathfrak{G}$ называется предельной для последовательности групп $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots$, если существует такая последовательность гомоморфизмов $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_2, \dots$, при которой каждый неединичный элемент группы $\mathfrak{G}$ имеет неединичный образ во всех гомоморфизмах, начиная с некоторого из них.*

Из этого определения непосредственно ясно, например, что для каждого конечного множества элементов предельной группы можно найти такое число m , что во всех гомоморфизмах $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_m, \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_{m+1}, \dots$ эти элементы будут иметь различные образы. Ясно также, что предел последовательности абелевых групп будет абелевой группой, предел последовательности m -ступенных групп будет m -ступенной группой и т. п. Однако для нас сейчас больший интерес представляет следующее предложение:

Группа, являющаяся предельной для последовательности групп, допускающих изоморфные представления n -й степени, сама допускает изоморфное представление степени n .

Доказательство этого предложения вполне аналогично доказательству теоремы 4. Пусть $S_{\mathfrak{G}}$ — смешанная система условий для группы $\mathfrak{G}$, S' — ее некоторая конечная часть и $g_1, g_2, \dots, g_k$ — элементы, которые явно содержатся в условиях S' . Выбираем такое m , чтобы при гомоморфизме $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_m$ элементы $g_1, \dots, g_k$ имели различные образы. Тогда система S' будет содержаться в смешанной системе условий для группы $\mathfrak{G}_m$. Так как в силу представимости $\mathfrak{G}_m$ последняя система совместна, то совместной будет и система S' . Применяя лемму 2, мы сразу же убеждаемся, что группа $\mathfrak{G}$ представима.

Применение понятия предельной группы к изучению представлений основывается на одном замечании из теории чисел, которое мы для отчетливости сформулируем в виде отдельной леммы.

Л е м м а 3. *Пусть дана система, состоящая из конечного числа условий вида $f_{\alpha}(x_1, \dots, x_k) = 0$ или соответственно $f_{\alpha}(x_1, \dots, x_k) \neq 0$, где левые части являются целочисленными полиномами от переменных $x_1, \dots, x_k$. Если эта система разрешима в каком-нибудь поле характеристики нуль, то она разрешима в бесконечном числе простых полей конечных характеристик.*

Теперь, пользуясь этой леммой, мы сможем доказать следующее утверждение:

Т е о р е м а 7. *Пусть группа $\mathfrak{G}$ имеет конечную систему образующих $u_1, \dots, u_s$ и допускает изоморфное представление степени n над полем характеристики нуль. Тогда она является пределом последовательности конечных групп, допускающих изоморфные представления той же степени в простых полях простой характеристики.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из смешанной системы условий данной группы выделим равенства и обозначим их совокупность через S^* . Система S^* содержит, вообще говоря, бесконечное число уравнений с одними и теми же переменными $x_{\alpha\beta}^i$. По теореме Гильберта, из этой системы можно выделить такую конечную часть, следствием которой являются все остальные уравнения. Эту конечную часть мы снова обозначим через S^* . Расположим все элементы группы $\mathfrak{G}$ в последовательность $g_1, g_2, \dots, g_k, \dots$ и возьмем ее начальный отрезок $g_1, \dots, g_k$. Пусть $g_i = R_i(u_1, \dots, u_s)$ — одно из

выражений g_i через образующие. Присоединим к S^* систему неравенств

$$R_i(X_1, \dots, X_s) - R_j(X_1, \dots, X_s) \neq 0 \quad (1 \leq i < j \leq k, X_i = \|x_{\alpha\beta}^i\|)$$

и обозначим новую систему через S^{**} . Система S^{**} содержится в смешанной системе условий для группы $\mathfrak{G}$ и поэтому разрешима в поле нулевой характеристики. Применяя лемму 3, мы заключаем, что найдется такое простое поле $\mathfrak{P}$ простой характеристики, в котором система S^{**} будет разрешима. Пусть это решение будет $x_{\alpha\beta}^i = a_{\alpha\beta}^i$ ($a_{\alpha\beta}^i \in \mathfrak{P}$). Система S^{**} содержит все равенства из групповой системы группы $\mathfrak{G}$. Следовательно, соответствие $u_i \rightarrow \|a_{\alpha\beta}^i\|$ будет порождать некоторое представление $\mathfrak{D}_k$ группы $\mathfrak{G}$. В этом представлении элементы $g_1, \dots, g_k$ будут иметь различные образы, так как соответствующие неравенства были включены в систему S^{**} . Представление $\mathfrak{D}_k$ является точным представлением некоторой фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_k$, которую мы обозначим через $\mathfrak{G}_k$. Гомоморфизмы $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_2, \dots$ удовлетворяют всем условиям определения предела, и, таким образом, группа $\mathfrak{G}$ будет предельной для последовательности $\{\mathfrak{G}_k\}$. Теорема 7 в известном смысле редуцирует проблему представимости для бесконечных групп к аналогичной проблеме для конечных групп, и в этом ее интерес. Примеры бесконечных квазициклических групп и группы всех неособенных матриц над полем рациональных чисел показывают, что предположение конечности числа образующих в теоремах 6 и 7 существенно.

§ 5. Представления групп в полях простой характеристики

Для полей простой характеристики предшествующие результаты изменяют свою форму. В частности, вместо теоремы 7 появляется предложение:

Теорема 8. *Всякая группа $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих, допускающая изоморфное представление степени n над некоторым полем $\mathfrak{K}$ простой характеристики p , является пределом последовательности групп, каждая из которых допускает изоморфное представление степени n над некоторым конечным полем той же характеристики.*

Доказательство. Пусть $u_1, \dots, u_s$, S^* и S^{**} означают то же, что и в доказательстве теоремы 7. Обозначим через $\mathfrak{P}$ минимальное алгебраически замкнутое поле характеристики p и рассмотрим алгебраическое многообразие M над полем $\mathfrak{P}$, определяемое системой уравнений S^* . Все неравенства системы S^{**} можно заменить одним вида $f(x_1, \dots, x_k) \neq 0$. Если полином $f(x_1, \dots, x_k)$ обращается в нуль во всех точках многообразия M , то он будет равен нулю на многообразии M при любом основном поле. Однако последнего быть не может, так как в поле представления $\mathfrak{K}$ система S^{**} выполняется. Следовательно, на многообразии M найдется точка, в которой полином f будет отличен от нуля. Другими словами, система разрешима в поле $\mathfrak{P}$. Пусть $x_{\alpha\beta}^i = a_{\alpha\beta}^i$ ($a_{\alpha\beta}^i \in \mathfrak{P}$) будет это решение. Соответствие $u_i \rightarrow \|a_{\alpha\beta}^i\|$ будет порождать гомоморфное представление $\mathfrak{D}_k$ группы $\mathfrak{G}$. Поле этого представления порождается элементами $a_{\alpha\beta}^i$, число которых конечно, и, значит, является конечным полем характеристики p . Обозначая ядро представления $\mathfrak{D}_k$ через $\mathfrak{N}_k$, мы видим, что нами построен гомоморфизм $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_k$ ($\mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}_k$), при котором образы элементов $g_1, \dots, g_k$ различны, а группа $\mathfrak{G}_k$ представлена изоморфно матрицами степени n над конечным полем $\mathfrak{P}_k$. Это показывает, что группа $\mathfrak{G}$ есть предел последовательности $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots$

Отметим здесь одно любопытное обстоятельство, непосредственно содержащееся в двух последних теоремах. Именно, из этих теорем вытекает, что *все бесконечные группы, имеющие конечное число образующих и допускающие изоморфное матричное представление, являются составными группами*. Будут ли вообще все бесконечные группы с конечным числом образующих составными, остается, по-видимому, до сих пор неизвестным*.

Теорема 8 позволяет перенести известные результаты Диксона [8] о модулярных представлениях конечных групп на случай бесконечных периодических групп. Предварительно докажем, что *порядок конечной p -группы, имеющей данное число s образующих и допускающей изоморфное представление матрицами степени n над каким-нибудь полем характеристики p , не может превосходить некоторого числа $N = N(s, n)$* . Действительно, пусть данная группа будет $\mathfrak{G}$, $u_1, \dots, u_s$ — ее образующие и $\mathfrak{D}$ — какое-либо изоморфное представление этой группы в поле характеристики p . Это представление будет эквивалентно такому, все матрицы которого под главной диагональю имеют нули, а на главной — единицы. Пусть образующие u_i в приведенном представлении изображаются матрицами

$$A_i = \begin{vmatrix} 1 & a_1^i & \cdots & a_{n-1}^i \\ 0 & 1 & \cdots & b_{n-2}^i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Рассмотрим вспомогательную группу $\mathfrak{H}$, порождающуюся матрицами

$$X_i = \begin{vmatrix} 1 & x_1^i & \cdots & x_{n-1}^i \\ 0 & 1 & \cdots & y_{n-2}^i \\ \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

элементы которых $x^i, y^i, \dots$ мы будем считать независимыми переменными, присоединенными к простому полю характеристики p . Группа $\mathfrak{G}$ является гомоморфным образом группы $\mathfrak{H}$. Поэтому, если мы докажем, что $\mathfrak{H}$ конечна, то все будет сделано. Возьмем какое-либо произведение положительных степеней матриц X_i . Это будет матрица, относительно элементов которой легко проверить следующее: элементы, стоящие в первом ряду, параллельном главной диагонали, будут линейными функциями переменных, стоящие во втором ряду — полиномами второй степени и т. д. Так как различных полиномов данной степени от данного конечного числа переменных с коэффициентами из конечного поля существует только конечное число, то группа $\mathfrak{H}$ конечна, что и требовалось. Из этого замечания следует

Т е о р е м а 9. *Всякая p -группа, допускающая изоморфное представление над каким-либо полем, является локально конечной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{G}$ есть p -группа с конечным числом образующих, допускающая изоморфное представление степени n над полем характеристики p . По теореме 8 группа $\mathfrak{G}$ есть предел последовательности конечных групп с тем же числом образующих и допускающих представление степени n над полем характеристики p . Выше было доказано, что порядки всех групп в этом случае не могут быть больше одного и того же числа N .

* См. второе примечание на стр. 74.— *Прим. ред.*

Значит, все $\mathfrak{G}_i$, начиная с некоторой, будут изоморфны группе $\mathfrak{G}$, которая, следовательно, также будет конечной.

Отсюда, наконец, легко получается и

Теорема 10. *Всякое представление степени больше 1 произвольной p -группы в поле характеристики p является приводимым.*

В самом деле, мы можем предположить представление изоморфным. Тогда всякая локальная часть данной группы будет конечна и представление для этой части по Диксону будет приводимым. Отсюда в силу теоремы 5 немедленно получается приводимость и для всей группы.

§ 6. Проблема Хопфа для матричных групп

Абстрактная теория групп содержит большое количество проблем, решение которых в общем виде отсутствует до настоящего времени. Однако некоторые из этих проблем получают решение, если предположить, что группы, о которых идет речь в этих проблемах, допускают изоморфные представления матрицами. Наиболее известный пример такого рода представляет проблема Бернсайда о периодических группах *. Решение этой проблемы для групп матриц над полем характеристики нуль было указано самим Бернсайдом [9] и затем Шуром, а для p -групп решение дает теорема 9. Другой пример представляет проблема существования бесконечных простых групп с конечным числом образующих **, которая для матричных групп (теоремы 7 и 8) решается отрицательно. В настоящем параграфе мы хотим рассмотреть еще одну проблему этого характера, именно, проблему Хопфа ***, которая, как будет показано, снова решается, если ограничиться группами, допускающими изоморфные матричные представления. Решение опирается на следующий своеобразный признак непредставимости для групп с конечным числом образующих.

Теорема 11. *Если группа $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих имеет бесконечную возрастающую цепочку нормальных делителей $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2 \subset \dots$, то для каждого натурального числа n найдется такое k , что фактор-группы*

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_k, \mathfrak{G}/\mathfrak{N}_{k+1}, \dots$$

уже не будут допускать изоморфных представлений степени n ни при какой характеристике поля представлений.

Доказательство. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_s$ — такая система образующих группы $\mathfrak{G}$, при которой всякий элемент может быть записан в виде положительных степеней этих образующих. Из каждого нормального делителя $\mathfrak{N}_i$ выберем по элементу g_i , не содержащемуся в $\mathfrak{N}_{i-1}$. Пусть

$$g_i = R_i(u_1, \dots, u_s) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

* В настоящее время решена (П. С. Новиков, С. И. Адян. О бесконечных периодических группах. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1968, 32, № 1, 2, 3. См. также: Е. С. Голод. О ниль-алгебрах и финитно аппроксимируемых p -группах. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1964, 28, № 2, 273—276; С. В. Алешин. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах. — Матем. заметки, 1972, 11, № 3, 319—328). — Прим. ред.

** В настоящее время решена положительно (G. Higman. A finitely generated infinite simple group. — J. London Math. Soc., 1951, 26, 61—64). — Прим. ред.

*** См. второе примечание редакции на стр. 72.

— выражение g_i через образующие, где R_i означает произведение неотрицательных степеней образующих. Возьмем s матриц $X_1, \dots, X_s$ степени n , $X_i = \|x_{\alpha\beta}^i\|$. Элементы этих матриц $x_{\alpha\beta}^i$ мы будем рассматривать как независимые переменные. Введем в рассмотрение следующие матрицы:

$$T_i = R_i(X_1, \dots, X_s) - E.$$

Элементами матрицы T_i являются полиномы от $x_{\alpha\beta}^i$. Обозначим множество таких полиномов через M . По теореме Гильберта * все полиномы множества M линейно выражаются через конечное число их. Обозначим эти базисные полиномы через $F_1, F_2, \dots, F_r$. Согласно определению полином F_i есть элемент некоторой матрицы T_{n_i} . Обозначим через k натуральное число, большее чем все $n_1, n_2, \dots, n_r$.

Докажем теперь, что $\mathcal{G}/\mathfrak{N}_k$ не может быть изоморфно представлена матрицами степени n . Пусть у нас имеется некоторое представление $\mathfrak{D}$ этой фактор-группы. В силу гомоморфизма $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}/\mathfrak{N}_k$ представление $\mathfrak{D}$ будет гомоморфным представлением группы $\mathcal{G}$. Элементы $u_1, \dots, u_s$ перейдут в этом представлении в некоторые матрицы $A_1 = \|a_{\alpha\beta}^1\|$, $A_2 = \|a_{\alpha\beta}^2\|, \dots$, где $a_{\alpha\beta}^i$ — элементы поля представлений. Элемент $a_{\alpha\beta}^i$ мы будем называть значением переменного $x_{\alpha\beta}^i$ в представлении $\mathfrak{D}$. Из соотношений (1), (2) и того, что в $\mathfrak{D}$ все элементы нормального делителя $\mathfrak{N}_k$ переходят в единичную матрицу, следует

$$R_i(A_1, \dots, A_s) - E = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Таким образом, все полиномы, являющиеся элементами матриц $T_1, \dots, T_k$, обращаются в нуль в представлении $\mathfrak{D}$ и, значит, в частности, обращаются в нуль полиномы $F_1, \dots, F_r$.

Однако всякий элемент матрицы T_{k+1} выражается линейно через эти полиномы и поэтому

$$T_{k+1}(\mathfrak{D}) = R_{k+1}(A_1, \dots, A_s) - E = \mathcal{C}.$$

Сравнивая это равенство с равенством

$$g_{k+1} = R_{k+1}(u_1, \dots, u_s),$$

мы заключаем, что элемент g_{k+1} в представлении $\mathfrak{D}$ переходит в единицу. Так как g_{k+1} не содержится в $\mathfrak{N}_k$, то выходит, что в группе $\mathcal{G}/\mathfrak{N}_k$ существует элемент, отличный от единичного, который в представлении $\mathfrak{D}$ переходит в единицу. Следовательно, представление $\mathfrak{D}$ не является изоморфным, что и требовалось доказать.

Как уже было сказано, одной из нерешенных проблем теории групп является так называемая проблема Хопфа. Эта проблема состоит в следующем: требуется доказать (или опровергнуть), что никакая группа с конечным числом образующих не может быть изоморфна своей истинной фактор-группе **. Кроме тривиального случая конечных групп и групп абелевых, эта проблема решена утвердительно для свободных групп и некоторых классов групп с бесконечным числом образующих [4]. Следующая теорема

* См., например, [6, т. 2, стр. 16].

** В настоящее время эта проблема решена отрицательно (B. H. Neumann. A two-generator group isomorphic to a proper factor group.— J. London Math. Soc., 1950, 25, 247—248; G. Higman. A finitely related group with an isomorphic proper factor group.— J. London Math. Soc., 1951, 26, 59—61).— Прим. ред.

дает решение проблемы Хопфа для групп, представимых изоморфно матрицами:

Теорема 12. *Если некоторая группа $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих допускает изоморфное представление, то она не может быть изоморфна никакой своей истинной фактор-группе.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Обозначим $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ через $\mathfrak{G}_1$. В силу изоморфизма $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}_1$, группа $\mathfrak{G}_1$ имеет нормальный делитель $\mathfrak{H}_1$ такой, что $\mathfrak{G}_1 \cong \mathfrak{G}_1/\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_2$, и т. д. С другой стороны, у нас имеется цепочка гомоморфизмов $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_1 \rightarrow \mathfrak{G}_2, \dots$, которая позволяет ввести составные гомоморфизмы $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_2, \dots$. Ядра последних гомоморфизмов обозначим через $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots$. Очевидно, эти ядра образуют возрастающую цепочку нормальных делителей группы $\mathfrak{G}$ и в силу теоремы 11 для каждого n найдется такое число k , что $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_k$ не будет допускать точного представления матрицами степени n . Так как группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_k$ изоморфны, то $\mathfrak{G}$ также не допускает представления степени n . Но число n произвольное и поэтому группа $\mathfrak{G}$ вообще не допускает изоморфных представлений матрицами.

Сделаем еще несколько замечаний по поводу существования групп с теми свойствами, о которых идет речь в предшествующем. Прежде всего нужно показать, что группы с конечным числом образующих, содержащие возрастающую цепочку нормальных делителей, существуют. Примеры таких групп легко построить непосредственно или извлечь из одной работы Неймана. Затем остается еще такой вопрос: существуют ли вообще группы с конечным числом образующих, которые не допускали бы изоморфного представления матрицами какой угодно степени. Мы хотим привести здесь пример такой группы. Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа всех подстановок множества всех целых рациональных чисел и $\mathfrak{G}_\omega$ — ее подгруппа, состоящая из тех подстановок, которые перемещают только положительные числа и только в конечном числе. Обозначим через A и B соответственно подстановки $(1, 2)$ и $(\dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots)$ и через $\mathfrak{G}$ — группу порожденную.

Так как $B^{-k}AB^k = (k, k+1)$, то $\mathfrak{G}_\omega \subset \mathfrak{G}$, т. е. счетная симметрическая группа есть подгруппа группы с двумя образующими. Однако счетная симметрическая группа, как уже указывалось, точных представлений не допускает. Поэтому не допускает точных представлений и группа $\mathfrak{G}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Черников. Бесконечные специальные группы. — Мат. сб., 1939, 6, № 2, 199—225.
2. I. Schur. Über Gruppen periodischer linearer Substitutionen. — Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1911, S. 619—627.
3. W. Magnus. Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring. — Math. Ann., 1935, 111, 259—280.
4. D. I. Fouze-Rabinovitch. On the determinator of an operator of the free group. — Мат. сб., 1940, 7, № 1, 197—208.
5. В. Л. Исневич. О группах, изоморфно представимых матрицами над коммутативным полем. — Мат. сб., 1940, 8, № 3, 395—403.
6. В. Л. Ван дер Ваерден. Современная алгебра, т. 1. М., 1934; т. 2, М., 1937.
7. Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. М., 1938.
8. L. E. Dickson. Modular theory of group-matrices. — Trans. Amer. Math. Soc., 1907, 8, 389—398.
9. W. Burnside. On criteria for the finiteness of the order of a group of linear substitutions. — Proc. London Math. Soc., 1905, 3, 435—440.

О ЛОКАЛЬНЫХ И ПОЛНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ *



В общей теории топологических групп изучаются обычные алгебраические ** группы с добавочным условием, что их элементы образуют некоторое топологическое пространство, в котором групповая операция и операция взятия обратного элемента непрерывны. Однако в теории групп Ли приходится рассматривать главным образом уже только «групповые ядра» или локальные группы. В частности, третья фундаментальная теорема Ли утверждает существование лишь локальной группы с заданными структурными константами. Вопрос — можно ли построить группу Ли, локально изоморфную данной локальной группе Ли, — был решен в положительном смысле Э. Картаном [1]. После него Л. С. Понтрягиным [2], П. А. Смитом [3, стр. 246] и др. ставилась задача — нельзя ли для каждой локальной топологической группы построить локально изоморфную с ней топологическую группу. В настоящей заметке указываются необходимые и достаточные условия для возможности такого построения и с помощью их показывается, что в общем своем виде эта проблема решается отрицательно.

1. С и м м е т р и ч н ы е г р у п п о и д ы. Некоторую систему элементов S мы будем называть группоидом (симметричным), если: 1) для некоторых пар a, b элементов из S однозначно определено их произведение $a \cdot b \in S$; 2) если $ab, ab \cdot c$ и bc определены, то определено $a \cdot bc$ и $ab \cdot c = a \cdot bc$ ***; 3) в S существует такой элемент e , что $ae = ea = a$ для всех $a \in S$; 4) для каждого $a \in S$ существует такой элемент $a^{-1} \in S$, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$; 5) если ab определено, то определено и $b^{-1}a^{-1}$.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — последовательность элементов некоторого группоида S и требуется составить их произведение $a_1 a_2 \dots a_n$. Это произведение можно вычислять различными способами. Может оказаться, что при одних способах расстановки скобок это произведение будет иметь смысл в S , а при других нет. Мы условимся говорить, что в группоиде S имеет место общий ассоциативный закон, если значение каждого произведения будет одним и тем же при всех расстановках скобок, при которых оно вообще имеет смысл в S . Если группоид есть группа, то общий ассоциативный закон есть следствие ассоциативного закона для трех сомножителей. В случае произвольных группоидов общего ассоциативного закона может и не быть. Простейшим способом для получения группоидов с общим ассоциативным законом является такой: пусть G — группа и V — какая-нибудь ее часть, содержащая единицу. Тогда пересечение $V \cap V^{-1}$ будет искомым

* Докл. АН СССР, 1941, 32, № 9, 606—608.

** Во время написания этой статьи под алгебраическими группами понимались абстрактные группы (без дополнительных структур).— *Прим. ред.*

*** Обычно берут более слабое условие: если $ab \cdot c$ и $a \cdot bc$ определены, то $ab \cdot c = a \cdot bc$. Однако для нас важно именно 2). Для локальных топологических групп это различие не существенно.

симметричным группоидом. Следующая теорема показывает, что этот способ является совершенно общим.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы некоторый симметричный группоид был изоморфен части группы, необходимо и достаточно, чтобы в нем имел место общий ассоциативный закон.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость очевидна, так как в группах общий ассоциативный закон заведомо имеет место. Пусть теперь дан группоид S с общим ассоциативным законом. Возьмем всевозможные слова, составленные из элементов S , и разобьем их на классы эквивалентных между собою относительно преобразований: пару любых соседних элементов в слове можно заменить их произведением в S и, наоборот, всякий элемент слова можно заменить парой элементов, произведение которых равно первоначальному элементу. Ясно, что эти классы образуют группу G , если под произведением слов понимать их последовательную запись. Пользуясь общим ассоциативным законом, можно доказать, что различные элементы из S будут различными и в G , т. е. что S содержится в G .

Теорема 1 легко может быть применена к локальным топологическим группам. Пусть V — такая окрестность единицы какой-нибудь локальной топологической группы S , что произведение любых двух элементов из V определено в S . Ясно, что пересечение $H = V \cap V^{-1}$ есть группоид. Если S может быть заключена в топологическую группу G , то и H , очевидно, будет заключаться в G . Если, наоборот, группоид H может быть заключен в абстрактную группу G , то G легко топологизировать. Действительно, пусть G порождается элементами H и $H_1, H_2, \dots$ — полная система окрестностей единицы в H . Так как H_i являются подмножествами группы G , то мы их можем принять в качестве полной системы окрестностей единицы в G . Легко видеть при этом, что все необходимые требования, налагаемые на систему окрестностей [2, стр. 66—69], здесь выполняются. Таким образом, локальная топологическая группа H оказалась заключенной в топологическую группу. Принимая во внимание теорему 1, мы можем, следовательно, сформулировать такой результат:

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы локальная топологическая группа была локально изоморфна некоторой топологической группе, необходимо и достаточно, чтобы она содержала такую окрестность единицы, в которой имел бы место общий ассоциативный закон.*

2. Р а н г г р у п п о и д а. Пользуясь теоремой 2, можно построить пример локальной топологической группы, не являющейся локально изоморфной никакой топологической группе. Однако для этого понадобятся некоторые промежуточные соображения.

Мы скажем, что группоид S имеет ранг $n \geq 1$, если он содержит подгруппоид T , обладающий следующими свойствами: 1) произведение любых n элементов из T при любой расстановке скобок определено в S , 2) общий ассоциативный закон в T не выполняется.

Т е о р е м а 3. *Существуют группоиды произвольно высокого ранга.*

Пусть n — произвольное натуральное число и $m = 2^n$. Рассмотрим группоид S_n , определенный следующими условиями: α) образующие группоида суть $a_1, \dots, a_m, b, c_1, \dots, c_m$; β) произведения, необходимые для вычисления выражений

$$\varphi_n = [\dots [a_1 (\dots (a_{m-1} (a_m b)) \dots)] c_1] c_2 \dots] c_m,$$

$$\psi_n = a_1 [\dots a_{m-1} [a_m [(\dots ((bc_1) c_2) \dots) c_m]] \dots],$$

существуют в нем; γ) произведения любых элементов, перечисленных в α) и β), при любой расстановке скобок существуют в группоиде. Существует, конечно, много различных группоидов с такими свойствами. По аналогии с группами, задающимися своими определяющими соотношениями, мы под S_n будем понимать группоид, в котором определено наименьшее количество произведений и который содержит наибольшее количество различных элементов. Такой группоид, очевидно, существует и определяется однозначно. Основным является то, что в S_n элементы φ_n и ψ_n различны. Доказательство этого факта можно провести в два приема. Сначала показывается, что если неравенство $\varphi_n \neq \psi_n$ имеет место в полугруппоиде, определенном условиями α), β), γ), то оно имеет место и в группоиде S_n . Необходимое для этого исключение отрицательных степеней проводится аналогично тому, как это сделано в нашей заметке [4] по поводу полугрупп. Затем по индукции доказывается, что неравенство $\varphi_n \neq \psi_n$ действительно имеет место в полугруппоиде.

Обозначим через T_n совокупность элементов $a_i, b, c_i, a_i (\dots (a_m b))$, $((bc_1) \dots c_i, [[a_1 (a_2 \dots (a_m b))c_1] \dots]c_i, a_i [\dots [a_m [((bc_1)c_2) \dots]c_m]]$ ($i = 1, 2, \dots, m$) и их обратных. Множество T_n является симметричным группоидом, в котором общий ассоциативный закон места не имеет ($\varphi_n \neq \psi_n$) и произведение любых n элементов из T_n в S_n существует. Таким образом, группоид S_n имеет ранг n .

3. Конструкция особой локальной топологической группы. Пусть $S_1, S_2, \dots$ — последовательность группоидов, имеющих соответственно ранги $1, 2, \dots$, и пусть T_1, T_2 — их подгруппоиды, по отношению к которым ранг определяется.

Обозначим через $\mathfrak{S}$ совокупность всех последовательностей $a = (a_1, a_2, \dots)$, где $a_n \in S_n$ ($n = 1, 2, \dots$) и только конечное число из a_n отлично от единиц соответствующих группоидов. Произведение двух последовательностей $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ будем считать определенным и равным $\{a_i b_i\}$, если все $a_i b_i$ определены в соответственных S_i . В силу этих условий $\mathfrak{S}$ делается группоидом. Нам остается только ввести в него топологию. Это мы сделаем с помощью задания полной системы окрестностей единицы.

Обозначим через U_k совокупность всех последовательностей $\{a_i\}$ из $\mathfrak{S}$, элементы которых подчиняются условию: a_n — либо единица S_n , либо допускает запись в виде произведения не более n/k элементов ядра T_n ($n = 1, 2, \dots$). Если теперь обратить внимание на то, что для каждого элемента из T_n в T_n имеется обратный и что произведение любых n элементов из T_n определено в S_n , то легко убедиться, что

- 1) $U_1 \supset U_2 \supset \dots$;
- 2) пересечение всех U_k ($k = 1, 2, \dots$) есть единица;
- 3) $U_k^{-1} = U_k$;
- 4) для каждого U_i существует такое U_j , что $U_j U_j^{-1} \subset U_i$;
- 5) для каждого $a \in U_i$ найдется U_j такое, что $a U_j \subset U_i$;
- 6) для каждого U_i и каждого $a \in U_i$ найдется такое U_j , что $a U_j a^{-1} \subset U_i$.

Это показывает, что система $\{U_i\}$ может быть принята в качестве полной системы окрестностей единицы в группоиде $\mathfrak{S}$, который тем самым становится локальной топологической группой. Однако $\mathfrak{S}$ не может быть локально изоморфна какой-нибудь топологической группе, так как ни в какой окрестности единицы $\mathfrak{S}$ общий ассоциативный закон не выполняется.

В заключение можно отметить, что наличие общего ассоциативного закона в некоторой окрестности единицы локальной полугруппы является необходимым условием для того, чтобы она была локально изоморфна какой-либо полугруппе. Однако это условие уже не будет достаточным. Отсюда, в частности, вытекает отрицательное решение и другой задачи, сформулированной в статье П. А. Смита.

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. Cartan*. La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs.— Memorial des sciences mathématiques, 1930, N 42. Gauthier-Villars.
2. *Л. С. Понтрягин*. Непрерывные группы. М.—Л., 1938.
3. *P. A. Smith*. Topological foundations in the theory of continuous transformation groups.— Duke Math. J., 1936, 2, N 2, 246—279.
4. *А. И. Мальцев*. О включении ассоциативных систем в группы.— Мат. сб., 1939, 6, № 2, 331—336.

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ТЕОРЕМ ТЕОРИИ ГРУПП *



В алгебре и особенно в теории групп существует довольно много теорем, имеющих вид: если некоторое свойство имеет место для всех частей какой-либо области (группы, кольца и т. п.), порожденных конечным множеством элементов этой области, то свойство A имеет место и для всей области. Цель настоящей заметки — показать, что такие предложения не являются, в своем большинстве, специфически алгебраическими и могут быть получены как непосредственные следствия одного общего предложения математической логики. Этот общий подход к локальным теоремам не дает, конечно, решения каких-либо трудных алгебраических проблем. Однако он во многих случаях делает доказательства этих теорем излишними и иногда позволяет непосредственно усмотреть, что соответствующие теоремы имеют место и в несколько более широких условиях. Так, приводимые ниже предложения о разрешимых группах и группах с силовским множеством были указаны С. Н. Черниковым только для локально конечных групп, предложение 3 о расширении структурного изоморфизма было первоначально установлено Бэрром для счетных групп и только недавно Л. Садовским указано доказательство, годное и для несчетных групп, и т. п.

Интересующее нас предложение математической логики может быть сформулировано следующим образом:

Пусть дано некоторое множество символов функций $\{F_i(x_1, \dots, x_{n_i})\}$. Эти функции в дальнейшем должны быть определены на некотором множестве элементов M и принимают два значения, которые мы будем обозначать 0 и 1. Равенство $F_i = 1$ записывается сокращенно через F_i , а равенство $F_i = 0$ — через $\bar{F}_i$. Кроме символов функций мы будем считать заданным еще некоторое множество символов M_0 — индивидуальных элементов из M . Как множество функций, так и множество символов индивидуальных элементов могут быть бесконечными. Некоторое свойство функций F_i называется принадлежащим узкому исчислению Гильберта, если оно выражается конечным образом через понятия «и», «или», «следует» (символически обозначается $\rightarrow$), «для всех элементов x из M » (символическая запись (x)), «существует такое x в M » (символически (Ex)) и через конечное число знаков индивидуальных элементов из M_0 . Система S , состоящая из произвольного множества предложений узкого исчисления Гильберта, называется совместной, если можно найти такое множество элементов M и так определить на нем функции F_i и индивидуальные элементы, чтобы все предложения S выполнялись.

Основная теорема. *Если всякая конечная часть некоторой бесконечной системы предложений узкого исчисления Гильберта совместна, то совместной является и вся система **.*

* Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1941, 1, № 1, 3—9.

** Точную формулировку и доказательство этого предложения см. в [4].

Теперь мы рассмотрим несколько приложений этого принципа в теории групп.

§ 1. Элементарным свойством группы мы будем называть свойство, удовлетворяющее двум требованиям:

1) оно является объединением свойств, каждое из которых выражается конечным образом с помощью слов «и», «или», «не», «равно», «произведение элементов», «для всех элементов группы», другими словами — свойств, формулируемых в узком исчислении Гильберта;

2) всякая подгруппа группы с таким свойством должна обладать этим свойством.

Элементарными будут, например, свойства: «группа абелева», «порядки всех элементов группы содержатся в заданном конечном множестве чисел», «порядки элементов группы не входят в любое заданное множество чисел», «порядок группы не превосходит заданного числа» и т. п.

Пусть теперь $E_1, E_2, \dots, E_k$ — элементарные свойства. Группу G назовем имеющей тип $[E_1, E_2, \dots, E_k]$, если G обладает нормальным рядом $G \supset G_1 \supset \dots \supset G_k$ длины k , фактор-группы которого $G/G_1, \dots, G_{k-1}/G_k$ имеют последовательно свойства $E_1, E_2, \dots, E_k$.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы некоторая группа G имела тип $[E_1, \dots, E_k]$, необходимо и достаточно, чтобы этот тип имела всякая ее подгруппа с конечным числом образующих.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы воспользоваться основной теоремой, нам нужно сформулировать понятие типа в узком исчислении Гильберта. С этой целью введем символы x_g^i , где g пробегает все элементы группы G ($i = 1, 2, \dots, k$). Эти символы мы будем рассматривать как символы индивидуальных элементов строящейся системы предложений S . Основные функции этой системы обозначим через $F_1(x, y, z), \dots, F_k(x, y, z)$.

С содержательной точки зрения символы x^i означают элементы фактор-группы, а отношение $F_i(x^i, y^i, z^i)$ означает равенство $x^i y^i = z^i$. Одну часть системы S пусть составляют аксиомы, утверждающие, что элементы x^i образуют группу относительно операции F_i и что эта группа обладает свойством E_i ($i = 1, 2, 3, \dots, k$). Другую часть пусть образуют предложения

$$x_g^{k-1} = x_h^{k-1} = x_e^{k-1} \rightarrow F(x_g^i, x_h^i, x_{gh}^i),$$

$$(x_g^{k-1} = x_h^{k-1} = x_e^{k-1} \text{ и } g \neq h) \rightarrow x_g^k \neq x_h^k,$$

где e — единица группы G , g и h пробегают независимо друг от друга всю группу G ($i = 1, 2, \dots, k$). Эти последние аксиомы означают, что группа X_i , порожденная специальными элементами x_g^i , есть гомоморфный образ группы G_{i-1} и что X_k изоморфна G_k . Чтобы отенить зависимость этой системы предложений от группы G , мы обозначим ее через S_G . Совместность системы S_G , как легко видеть, означает, что группа G имеет тип $[E_1, \dots, E_k]$.

Теорема 1 становится теперь очевидной. Действительно, если H есть подгруппа группы G , то система S_H содержится в S_G , и если S_G совместна, то совместной будет и S_H . Говоря другими словами, это значит, что всякая подгруппа группы типа $[E_1, \dots, E_k]$ имеет тип $[E_1, \dots, E_k]$. Пусть теперь, наоборот, всякая подгруппа с конечным числом образующих группы G имеет тип $[E_1, \dots, E_k]$. Возьмем какую-нибудь конечную часть S_M системы S_G . В S_M встречается только конечное число индивидуальных символов x_g^i . Индексы этих символов суть элементы группы G , их конечное множество.

и они порождают поэтому некоторую подгруппу H с конечным числом образующих. Очевидно, что S_M содержится в S_H . Так как по предположению H имеет тип $[E_1, \dots, E_k]$, то S_H , а значит, и S_M совместны. Итак, всякая конечная часть системы S_G совместна. По основной теореме отсюда следует, что S_G совместна, т. е. группа G имеет тип $[E_1, \dots, E_k]$.

Отметим несколько частных случаев только что доказанной теоремы. Прежде всего пусть $E_1, \dots, E_k$ означают абелевость. Тогда группы типа $[E_1, \dots, E_k]$ будут k -ступенными разрешимыми группами и теорема 1 обращается в предложение: для того чтобы группа G имела разрешимый нормальный ряд длины k , необходимо и достаточно, чтобы всякая подгруппа группы G с конечным числом образующих имела разрешимый нормальный ряд длины k [2].

Положим теперь $k = 2$, $E_1 =$ «группа не содержит элементов порядка p », $E_2 =$ «группа не содержит элементов порядков p_i », где $\{p, p_1, p_2, \dots\}$ — множество всех простых чисел. Применяя теорему 1, мы непосредственно получаем, что локально специальные группы являются прямыми произведениями своих силовских подгрупп [3].

Положим еще $k = 2$, $E_1 =$ «порядок группы $\leq n$ », $E_2 =$ «группа абелева». После этого теорема 1 обращается в такую: если всякая подгруппа с конечным числом образующих группы G имеет абелев нормальный делитель индекса $\leq n$, то и G имеет абелев нормальный делитель индекса $\leq n$.

Согласно Жордану [4], все конечные группы, допускающие изоморфное представление матрицами степени r над полем комплексных чисел, содержат абелев нормальный делитель индекса $\leq n$, где $n = n(r)$. Пусть теперь G есть бесконечная периодическая группа матриц степени r .

Все подгруппы такой группы, порожденные конечным числом элементов, конечны и, значит, по Жордану, содержат абелев нормальный делитель индекса $\leq n(r)$. Отсюда, как мы видели, следует, что G имеет абелев нормальный делитель конечного индекса и мы пришли к теореме Шура: всякая периодическая группа матриц над полем характеристики нуль содержит абелев нормальный делитель конечного индекса [5].

§ 2. В качестве второго примера приложения общего метода мы рассмотрим понятие так называемого силовского ряда. По определению система S нормальных делителей периодической группы G называется силовской для этой группы, если выполняются условия:

I. Из любых двух групп системы S одна содержится в другой. Единичная группа и сама группа G содержатся в S .

II. Если $N_1 \subset N_2$ — два нормальных делителя из S и фактор-группа N_1/N_2 имеет элементы, порядки которых взаимно просты, то в S найдется промежуточная группа $N_1 \subset N_3 \subset N_2$.

III. Если $N_1 \subset N_2 \subset N_3$ — три группы из S , то порядки элементов из N_2/N_1 взаимно просты с порядками элементов N_3/N_2 .

Покажем, что свойство «группа имеет силовскую систему нормальных делителей» формулируемо в узком исчислении Гильберта, и, следовательно, вместе с тем покажем, что имеет место предложение Черникова: если всякая подгруппа локально конечной группы G имеет силовское множество, то силовскую систему имеет и сама группа G [6].

Основными функциями системы аксиом S_G пусть будут $A_g(\alpha)$, где индексы пробегает некоторую группу G . Включим в S_G прежде всего аксиомы, утверждающие, что элементы α основного множества M образуют упорядоченную систему. Индивидуальными элементами пусть будут α_0 и α_1 . Содержательно выражение $A_g(\alpha)$ означает, что элемент α принадлежит

к классу α . Теперь мы запишем свойства I—III на языке узкого исчисления Гильберта:

1.a. Для всех $g \neq e$ имеем $A_g(\alpha)$, $A_g(\alpha_1)$, $A_e(\alpha_0)$, $A_e(\alpha_1)$.

1.b. $A_x(\alpha)$ и $A_y(\alpha) \rightarrow A_{xy^{-1}}(\alpha)$ (класс α есть подгруппа).

1.c. $A_x(\alpha) \rightarrow A_{yxy^{-1}}(\alpha)$ (класс α инвариантен).

1.d. $(\alpha)(\beta) [\alpha < \beta \text{ и } A_g(\alpha) \rightarrow A_g(\beta)]$
(если $\alpha < \beta$, то класс α содержится в β).

2. $(\alpha)(\beta)(E\gamma) [\bar{A}_g(\alpha) \text{ и } A_g(\beta) \text{ и } A_{g^p}(\alpha) \text{ и } \bar{A}_h(\alpha) \text{ и } A_h(\beta) \text{ и } A_{h^q}(\alpha) \rightarrow$
 $\rightarrow \alpha < \gamma < \beta \text{ и } (A_g(\gamma) \text{ и } \bar{A}_h(\gamma)) \text{ или } (\bar{A}_g(\gamma) \text{ и } A_h(\gamma))]$.

Это предложение следует мыслить написанным для всех элементов g , h группы G и для всех пар различных простых чисел p, q . Содержательный смысл его ясен.

3. $(\alpha)(\beta)(\gamma) [\alpha < \beta < \gamma \text{ и } \bar{A}_g(\alpha) \text{ и } A_g(\beta) \text{ и } \bar{A}_h(\beta) \text{ и } A_h(\gamma) \text{ и } A_{g^p}(\alpha) \rightarrow A_{h^p}(\beta)]$,

т. е. если p -я степень элемента g входит в α , но сам g в α не входит, тогда p -я степень всякого элемента h из γ , не содержащегося в β , в β не входит.

Таким образом, мы видим, что свойство «иметь силовскую систему нормальных делителей» формулируемо в терминах узкого исчисления Гильберта. Поэтому мы можем воспользоваться основной теоремой и таким путем получить цитированное предложение С. Н. Черникова. Однако легко заметить, что само понятие силовской системы нормальных делителей имеет смысл не только для групп локально конечных, но даже и для непериодических. В нашем доказательстве локальная конечность тоже нигде использована не была. Следовательно, мы можем сформулировать и более общее предложение: *если всякая подгруппа с конечным числом образующих какой-нибудь группы G имеет силовскую систему, то силовскую систему имеет и группа G .*

Можно пойти и дальше в построении таких обобщений понятия силовской системы, для которых локальная теорема остается все еще верной. Например, можно поступить следующим образом. Упорядочим произвольным способом множество всех простых чисел. Введем для этого порядка особое обозначение $\ll$ и будем называть его s -порядком. Систему подгрупп группы G мы назовем s -силовской, если выполняются условия:

а) Из любых двух подгрупп системы одна всегда содержится в другой. Единичная подгруппа и группа G содержатся в системе.

б) Пусть $H_1 \subset H_2$ — две подгруппы системы и g, h — два элемента из H_2 , не входящие в H_1 . Если g^m, h^n содержатся в H_1 и $(m, n) = 1$, то система содержит подгруппу H , лежащую между H_1 и H_2 .

в) Пусть $H_1 \subset H_2 \subset H_3$ — группы из данной системы и пусть g какой-либо элемент из H_2 , не входящий в H_1 , а h — элемент из H_3 , не содержащийся в H_2 . Если при этом g^p содержится в H_1 , h^q содержится в H_2 и p и q простые, то $q \ll h$.

Теперь легко убедиться, как и в случае с силовскими системами, что свойство «группа имеет s -систему» формулируемо в узком исчислении Гильберта. Применяя основную теорему, мы непосредственно получаем предложение:

Т е о р е м а 2. *Если всякая подгруппа с конечным числом образующих какой-либо группы G имеет s -систему подгрупп, то s -системой подгрупп обладает и группа G .*

Не выходя из этого круга идей, можно было бы указать и другие возможности. Мы остановимся только на одной из них.

Назовем систему S нормальных делителей какой-либо группы G коммутантной системой, если выполнены следующие условия:

1. Система S упорядочена, т. е. из любых двух ее нормальных делителей один содержится в другом. Единица и G входят в S .

2. Пусть g, h — какие-нибудь два элемента из G . Тогда в S либо найдется такой нормальный делитель, который будет содержать один из элементов g, h и не будет содержать другого, либо найдется такой нормальный делитель, который будет содержать коммутатор $ghg^{-1}h^{-1}$ и не будет содержать ни g , ни h .

Свойство «группа G имеет коммутантную систему», как легко видеть, формулируемо в узком исчислении Гильберта. Следовательно, имеет место

Т е о р е м а 3. *Если всякая подгруппа с конечным числом образующих группы G имеет коммутантную систему, то коммутантную систему имеет и сама группа G .*

Из этой теоремы вытекают некоторые следствия. Например, пусть какая-либо группа H разрешима. Тогда система ее последовательных коммутантов $H \supset K_1 \supset \dots \supset K_n = 1$, очевидно, будет обладать свойствами 1, 2. Таким образом, локально разрешимая группа всегда имеет коммутантную систему.

Другой пример. Назовем группу обобщенно разрешимой, если ее ряд последовательных коммутантов, идущий, вообще говоря, уже по трансфинитным числам имеет в пересечении только единицу. Ясно, что этот ряд также будет обладать свойствами 1, 2. Следовательно, и для таких групп справедлива теорема 3. В частности, известно, что свободные группы с конечным числом образующих обобщенно разрешимы. Применяя теорему 3, мы заключаем, что все локально свободные группы обладают коммутантной системой и, следовательно, являются непростыми.

Непростота локально свободных групп впервые была обнаружена Д. Фукс-Рабиновичем с помощью весьма частных подсчетов.

§ 3. В качестве последнего приложения общего метода мы рассмотрим одну теорему Бэра, относящуюся к теории структур. Две группы G и H называются структурно изоморфными, если между их подгруппами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором пересечение двух подгрупп из одной группы переходит в пересечение двух соответствующих подгрупп другой. Теорему Бэра можно формулировать следующим образом:

Т е о р е м а 4. *Если структурный изоморфизм между группами G и H таков, что для всех подгрупп с конечным числом образующих он является следствием обычного группового изоморфизма этих подгрупп, то данный структурный изоморфизм есть следствие группового изоморфизма групп G и H .*

Для доказательства рассмотрим двузначную функцию $A(g, h)$ и подчиним ее системе аксиом:

$$A(g, h_1) \text{ и } A(g, h_2) \rightarrow h_1 = h_2,$$

$$(I) \quad A(g_1, h) \text{ и } A(g_2, h) \rightarrow g_1 = g_2,$$

$$A(g_1, h_1) \text{ и } A(g_2, h_2) \rightarrow A(g_1 g_2, h_1 h_2),$$

которая выражает тот факт, что функция A устанавливает изоморфное соответствие между элементами групп G и H . Пусть u — какой-либо элемент из G и U — циклическая подгруппа, порождаемая этим элементом. Подгруппе U в силу структурного изоморфизма соответствует некоторая подгруппа V группы H . Так как для подгрупп с конечным числом образующих структурный изоморфизм есть следствие группового, то V циклическая. Всякая циклическая группа имеет конечное число примитивных элементов. Пусть примитивные элементы группы V будут $v_1, v_2, \dots, v_k$. Наложим на функцию $A(g, h)$ еще требования:

(J) $A(u, v_1)$ или $A(u, v_2)$ или $\dots$ или $A(u, v_k)$.

Совместность системы (I) означает изоморфизм групп G и H . Совместность системы (I, J) означает существование такого изоморфизма, при котором элемент u переходит либо в v_1 , либо в v_2 и т. д. По предположению всякая подгруппа с конечным числом образующих из G изоморфна соответственной подгруппе в H . Следовательно, всякая конечная часть системы (I, J) совместна. Но тогда совместна и вся система (I, J), т. е. группы G и H изоморфны и при этом так, что первоначальный структурный изоморфизм есть следствие этого группового изоморфизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Malcev*. Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik.— *Mat. сб.*, 1936, 1, № 3, 321—335.
2. *С. Н. Черников*. Бесконечные локально разрешимые группы.— *Mat. сб.*, 1940, 7, № 1, 35—61.
3. *С. Н. Черников*. Бесконечные специальные группы.— *Mat. сб.*, 1939, 6, № 2, 199—225.
4. *C. Jordan*. Memoire sur les equations différentielles lineaires à integrale algébrique.— *J. reine und angew.— Math.*, 1878, 84, 89—215.
5. *I. Schur*. Über Gruppen periodischer linearer Substitutionen.— *Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss.*, 1911, 619—627.
6. *С. Н. Черников*. О группах с силовским множеством.— *Mat. сб.*, 1940, 8, № 3, 377—392.

ОБ ОДНОСВЯЗНОСТИ НОРМАЛЬНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ ГРУПП ЛИ*



Пусть G — некоторая связная, односвязная группа Ли и G_l — ее локальная часть. Если G_l содержит локальный нормальный делитель N_l , то в G найдется нормальный делитель N , локальная часть которого будет совпадать с локальной частью N_l . Из предположенной односвязности G вытекает связность N . Однако до сего времени оставалось неизвестным, будет ли N также и односвязным (см. [1, стр. 298]). Мы покажем, что эта проблема решается в положительном смысле, т. е. что имеет место.

Т е о р е м а. *Всякий связный нормальный делитель односвязной лиевской группы является односвязным.*

При доказательстве рассматриваются отдельно группы разрешимые (A, B) , полупростые (C, D) и, наконец, произвольные (E, F) . Вспомогательным средством служит скрещенное произведение, которое может быть определено следующим образом. Пусть даны группы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и гомоморфное отображение $a \rightarrow b^a$ группы $\mathfrak{A}$ внутрь группы автоморфизмов группы $\mathfrak{B}$ **. Множество всех пар (a, b) ($a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$) с таблицей умножения $(a_1, b_1) \cdot (a, b) = (a_1 a, b_1^a b)$ образует группу $\mathfrak{G}$, называемую скрещенным произведением $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$. Пары вида (a, e) образуют подгруппу $\mathfrak{A}_1$, изоморфную $\mathfrak{A}$, пары (e, b) дают нормальный делитель $\mathfrak{B}_1$, изоморфный $\mathfrak{B}$, и $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{B}_1 = e$. Обратно, если какая-нибудь группа $\mathfrak{G}$ есть произведение своей подгруппы $\mathfrak{A}$ и нормального делителя $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = e$, то $\mathfrak{G}$ можно рассматривать как скрещенное произведение $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ ($b^a = a^{-1} b a$). Если данные группы топологические, то требуется, чтобы отображение $\mathfrak{A}$ внутрь группы автоморфизмов $\mathfrak{B}$ было непрерывным, и тогда по определению полагается, что пространство скрещенного произведения равно топологическому произведению пространств сомножителей. Легко проверить, что скрещенное произведение двух топологических групп будет снова топологической группой, скрещенное произведение лиевских групп будет группой Ли и скрещенное произведение односвязных групп будет группой односвязной.

Л е м м а. *Пусть N — нормальный делитель некоторой связной лиевской группы G и фактор-группа G/N односвязна. Тогда если локальная часть G_l группы G есть скрещенное произведение своей локальной подгруппы H_l и локального нормального делителя N_l (т. е. $H_l \cdot N_l H_l \cap N_l = e$), то элементы H_l порождают в G замкнутую подгруппу H , произведение которой на N дает всю группу G и $N \cap H = e$.*

Обозначим через $\{a\}$ класс вычетов G/N , содержащий a . Соответствие $a \rightarrow \{a\}$ ($a \in H_l$) есть локальный изоморфизм групп H_l и G/N . В силу односвязности G/N этот изоморфизм однозначно распространяется в гомоморфное отображение группы H на G/N *** . Прежде всего мы покажем, что

* Докл. АН СССР, 1942, 34, № 1, 12—15.

** b^a есть образ элемента b при автоморфизме, соответствующем элементу a .

*** H есть совокупность элементов из G , записывающихся в виде произведения конечного числа элементов H_l .

это отображение на самом деле взаимно однозначно. Действительно, всякий элемент G/N можно записать в виде произведения

$$\{a_1\} \cdot \{a_2\} \dots \{a_n\}, \quad a_i \in H_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

т. е. элементы $\{a\}$ ($a \in H_i$) дают полную систему образующих этой группы. Так как G/N односвязна, то соотношения вида $\{a\} \cdot \{b\} = \{c\}$ ($a, b, c \in H_i$) являются системой соотношений, целиком определяющих алгебраическую структуру G/N (ср. [2]). Следовательно, если $\{a_1\} \{a_2\} \dots \{a_n\} = \{e\}$, то это равенство является алгебраическим следствием соотношений вида $\{a\} \{b\} = \{c\}$ ($a, b, c \in H_i$). Так как $H_i \cap N = e$, то последние соотношения равносильны соотношениям $ab = c$ и, таким образом, мы имеем $a_1 a_2 \dots a_n = e$. Это показывает, что соответствие $H \rightarrow G/N$ является взаимно однозначным и $H \cap N = e$, $NN = G$. Остается доказать, что H замкнуто. Для этой цели рассмотрим универсальную накрывающую $\tilde{H}$ для H_i . Элементы $a \in H_i$ отображаются непрерывно в автоморфизмы N ($a \rightarrow a^{-1}Na$), и это отображение можно распространить на всю группу $\tilde{H}$. С помощью этого отображения формально составим скрещенное произведение $\tilde{G} = \tilde{H} \cdot N$. Локальное отображение $\tilde{H}$ на H_i однозначно распространяется в полное отображение $\tilde{H}$ на H , и это отображение в силу односвязности обеих групп будет взаимно однозначным. Заставляя пару $(\tilde{h}, n)$ из $\tilde{G}$ переходить в произведение соответствующих элементов hn группы G , мы получим взаимно однозначное, изоморфное и непрерывное в одну сторону отображение одной лиевской группы на другую. Согласно известному предложению это соответствие будет взаимно непрерывным и, таким образом, подгруппа H как образ замкнутого множества $\tilde{H}$ будет замкнутой.

Теперь мы перейдем к доказательству основной теоремы, сначала для частных случаев. Композиционным рядом связной группы Ли мы назовем ряд ее связных подгрупп, из которых каждая является максимальным связным нормальным делителем предыдущей. Связная группа Ли называется разрешимой, если ее инфинитезимальная группа разрешима. Радикалом группы Ли называется ее максимальный связный разрешимый нормальный делитель.

А) Для того чтобы связная разрешимая группа была односвязной, необходимо и достаточно, чтобы все факторы любого ее композиционного ряда были одномерными векторными группами.

Не о б о д и м о с т ь. Пусть данная односвязная группа имеет размерность g и пусть для групп меньшей размерности необходимость уже доказана. Обозначим через $\tilde{N}$ какой-либо связный нормальный делитель группы G с одномерной абелевой фактор-группой G/N . Известно (см. [1, стр. 293]), что в локальной части G_i группы G найдется однопараметрическая подгруппа $x_i(t)$, обладающая свойствами $x_i(t) \cap N_i = e$, $x_i(t) N_i = G_i$. Обозначим через $\tilde{x}$ и $\tilde{N}$ универсальные накрывающие для x_i и N_i . Автоморфизмы, вызываемые в группе N_i элементами x_i , однозначно продолжаются в автоморфизмы группы N . Получающееся таким образом отображение можно однозначно пополнить до отображения $\tilde{x}$ в автоморфизмы группы $\tilde{N}$. На основе этого отображения составим скрещенное произведение $\tilde{x} \cdot \tilde{N} = \tilde{G}$. Группа $\tilde{G}$ односвязна и локально изоморфна G . Так как G также односвязна, то этот изоморфизм может быть продолжен до изоморфизма полных групп G и $\tilde{G}$. Этот изоморфизм нормальный делитель $\tilde{N}$ переводит в N и

группу $\tilde{x}$ переводит в некоторую подгруппу x . Таким образом, N и $G/N \cong \tilde{x}$ односвязны, что и требовалось.

Достаточность. Пусть достаточность уже доказана для всех групп размерности меньше r , данная группа G имеет размерность r и

$$G \supset N \supset N_2 \supset \dots \supset N_r = e$$

— какой-нибудь ее композиционный ряд с одномерными векторными факторами. По индуктивному предположению N является односвязным нормальным делителем и G/N односвязна. С другой стороны, мы уже видели, что локальная часть G_i содержит подгруппу H_i со свойствами $H_i \cdot N_i = G_i$, $H_i \cap N_i = e$. Применяя лемму, мы видим, что группа G является скрещенным произведением односвязной подгруппы H на односвязный нормальный делитель N и, таким образом, сама односвязна.

В) *Всякая связная подгруппа H односвязной разрешимой группы G является односвязной.*

Рассмотрим композиционный ряд $G \supset N_1 \supset N_2 \supset \dots \supset N_r = e$ группы G . В силу (А) все факторы этого ряда являются одномерными векторными группами. Положим $H_0 = H$, $H_i = H \cap N_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Покажем, что все H_i связны. Действительно, H_0 связна и пусть по индукции уже известно, что H_{i-1} связна. При гомоморфизме

$$N_{i-1} \rightarrow N_{i-1}/N_i = \bar{N}_{i-1}$$

подгруппа H_{i-1} отобразится в некоторую связную подгруппу $\bar{H}_{i-1}$ одномерной векторной группы $\bar{N}_{i-1}$. Следовательно, $\bar{H}_{i-1}$ либо единица, либо совпадает с $\bar{N}_{i-1}$. В обоих случаях $\bar{H}_{i-1}$ односвязна. Так как $\bar{H}_{i-1} \cong H_{i-1}/H_i$ и из односвязности фактор-группы вытекает связность нормального делителя (см. [1, стр. 298]), то все H_i связны. Последовательность $H \supset H_1 \supset \dots \supset H_r = e$ после сокращения одинаковых членов дает композиционный ряд группы H с односвязными факторами. По п. А отсюда вытекает односвязность H .

С) *Связная и односвязная полупростая группа G распадается в прямое произведение односвязных простых групп.*

По теореме Картана локальная часть G_i группы G распадается в прямое произведение локальных простых групп. Беря прямое произведение универсальных накрывающих для сомножителей, мы получим односвязную группу, изоморфную данной и распавшуюся в требуемое прямое произведение.

Д) *Всякий связный нормальный делитель односвязной полупростой группы G является односвязным.*

Согласно п. С группа G разлагается в прямое произведение односвязных простых сомножителей. Легко видеть, что всякий связный нормальный делитель G есть прямое произведение некоторых из этих сомножителей и является, таким образом, односвязным.

Е) *Для того чтобы связная группа Ли была односвязной, необходимо и достаточно, чтобы ее радикал R и фактор-группа по радикалу были односвязны.*

Необходимость. По теореме Леви (см. [3]), в достаточно малой локальной части G_i группы G найдется подгруппа H_i со свойствами $G_i = H_i \cdot R_i$, $H_i \cap R_i = e$. Обозначим через $\bar{H}$, $\bar{R}$ универсальные накрывающие для H_i и R_i . Автоморфизмы, вызываемые в R_i элементами H_i , однозначно распространяются в автоморфизмы $\bar{R}$, и полученное отображение одно-

значно расширяется до отображения группы $\tilde{H}$ в автоморфизмы группы $\tilde{R}$. С помощью этого отображения мы можем формально составить скрещенное произведение $\tilde{H} \cdot \tilde{R} = \tilde{G}$. Группа $\tilde{G}$ односвязна и локально изоморфна G . Так как G также односвязна, то этот локальный изоморфизм распространяется в полный и $R \cong \tilde{R}$ и $G/R \cong \tilde{H}$ будут односвязны.

Д о с т а т о ч н о с т ь непосредственно вытекает из приведенной выше леммы.

Ф) *Всякий связный нормальный делитель N односвязной лиевской группы G является односвязным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (Е) группа G есть скрещенное произведение $H \cdot R$, где H и R односвязны. Рассмотрим естественный гомоморфизм $G \rightarrow G/R$. Так как G/R односвязна, то образ $\bar{N}$ нормального делителя N в группе G/N будет ее связным замкнутым нормальным делителем и по п. D будет даже односвязным. Из односвязности $\bar{N}$ и изоморфизма $\bar{N} \cong N/N \cap R$ вытекает связность $N \cap R$. Таким образом, $N \cap R$ является связной подгруппой односвязной разрешимой группы R и по п. В $N \cap R$ односвязна. Значит, радикал $N \cap R$ группы N и фактор-группа по радикалу $N/N \cap R$ односвязны. По п. Е отсюда вытекает односвязность самой группы N .

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. М.—Л., 1938.
2. O. Schreier. Abstrakte kontinuierliche Gruppen. — Abhandl. math. Seminar Univ. Hamburg, 1926, 4, 15—32.
3. T. H. C. Whitehead. On the decomposition of an infinitesimal group. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1936, 32, 229—237.



Пусть G — алгебра Ли над полем вещественных чисел и $\mathfrak{G}$ — соответствующая группа Ли, заданная в целом. Если H — подалгебра из G , то в достаточно малой окрестности единицы группы $\mathfrak{G}$ найдется локальная подгруппа $\mathfrak{H}_i$, соответствующая подалгебре H [1]. Обозначим через $\mathfrak{H}$ совокупность всевозможных конечных произведений элементов $\mathfrak{H}_i$. Тогда $\mathfrak{H}$ будет связной, не обязательно замкнутой, подгруппой группы $\mathfrak{G}$ и связная компонента единицы в пересечении $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_i$ будет замкнута в $\mathfrak{G}_i$. Обратно, если связная компонента единицы некоторой связной подгруппы $\mathfrak{H}$ в достаточно малой окрестности $\mathfrak{G}_i$ замкнута, то $\mathfrak{H}$ соответствует определенной подалгебре алгебры G [2]. Таким образом, мы имеем полную характеристику тех подгрупп, которые соответствуют подалгебрам алгебры G . Однако в теории топологических групп главное значение имеют замкнутые подгруппы, которые, собственно, только и называются подгруппами группы $\mathfrak{G}$. Отсюда возникает задача — выделить с помощью каких-либо алгебраических свойств те подалгебры H из G , для которых соответствующие лиевские подгруппы $\mathfrak{H}$ замкнуты в $\mathfrak{G}$. Эта задача рассматривалась до сих пор только в некоторых весьма частных случаях. Мы хотим дать ее общее решение.

Так как группа $\mathfrak{G}$ определяется алгеброй G только с точностью до локального изоморфизма, то вопрос распадается на следующие: 1) указать те подалгебры, которым соответствуют замкнутые подгруппы во всех формах $\mathfrak{G}$; 2) указать подалгебры, которым соответствуют замкнутые подгруппы в каком-либо данном линейном представлении G ; 3) указать подалгебры, соответствующие подгруппы которых замкнуты в односвязной форме $\mathfrak{G}$. Подалгебры типа 1) мы будем называть абсолютно замкнутыми, типа 2) — линейно замкнутыми и типа 3) — минимально замкнутыми в G . В настоящей заметке указываются некоторые классы абсолютно замкнутых подалгебр и дается полное решение второго из перечисленных трех вопросов. Остаточные две задачи будут рассмотрены отдельно.

1. Абсолютно замкнутые подалгебры. Пусть H — подалгебра некоторой линейной алгебры G . Центризатором H в G называется совокупность элементов G , перестановочных со всеми элементами H , т. е. совокупность x , удовлетворяющих условию $[xH] = 0$. Аналогично, совокупность x , для которых $[xH] \subset H$, называется нормализатором $N(H)$ подалгебры H в G . Теперь легко доказывается

Теорема 1. Центризатор и нормализатор любой подалгебры H в G являются абсолютно замкнутыми подалгебрами G .

Рассмотрим подгруппу $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$, соответствующую подалгебре H . Если $\mathfrak{H}$ окажется незамкнутой, то ее замыкание $\bar{\mathfrak{H}}$ будет замкнутой подгруппой $\mathfrak{G}$ и в алгебре G найдется подалгебра $\bar{H}$, соответствующая подгруппе $\bar{\mathfrak{H}}$. Подалгебру $\bar{H}$ мы будем называть замыканием H в G . Из теоремы 1 следует, что замыкание всякой подалгебры содержится в ее нормализато-

* Докл. АН СССР, 1942, 36, № 1, 5—8.

ре $H \subseteq \bar{H} \subseteq N(H)$ и, таким образом, H является идеалом в $\bar{H}^*$. Отсюда возникает вопрос о структуре алгебры вычетов $\bar{H}/H$. Ответ следующий:

Т е о р е м а 2. *Если $\bar{H}$ есть замыкание H в какой-нибудь группе $\mathfrak{G}$, то $\bar{H}$ является прямой суммой своего идеала H и некоторой коммутативной подалгебры. Коммутанты всех типов от $\bar{H}$ совпадают с соответственными коммутантами от H^{**} .*

Непосредственным следствием этого предложения является

Т е о р е м а 3. *Всякая максимальная подалгебра алгебры G , имеющая несколько фиксированных коммутантов, абсолютно замкнута в G^{***} .*

Из теорем 2, 3 вытекает, в частности, что замыкание разрешимой подалгебры разрешимо, замыкание нильпотентной — нильпотентно, максимальная разрешимая подалгебра абсолютно замкнута и т. п. Так как пересечение замкнутых подалгебр есть снова замкнутая подалгебра, то пересечение всех максимальных подалгебр, содержащих данную и имеющих заданные коммутанты, абсолютно замкнуто.

Если подалгебра H — идеал в G , то ее замыкание будет идеалом в G , и поэтому пересечение максимальных идеалов, имеющих данные коммутанты, также абсолютно замкнуто. Таким образом, радикал алгебры всегда абсолютно замкнут в ней.

Отметим еще, что из рассуждений, приведенных в нашей заметке [3], следует, что все подалгебры разрешимой алгебры минимально замкнуты и соответствующие им подгруппы в универсальной накрывающей односвязны.

2. Л и н е й н ы е а л г е б р ы. Пусть задается линейное представление какой-нибудь лиевской алгебры G и, таким образом, алгебра G становится подалгеброй полного кольца матриц P .

В полной матричной группе $\mathfrak{P}$, соответствующей кольцу P , алгебре G отвечает некоторая связная подгруппа $\mathfrak{G}$, которая может не оказаться замкнутой в $\mathfrak{P}$, т. е. замкнутой относительно обычной матричной топологии. Однако в этом случае в систему матриц $\mathfrak{G}$ можно ввести особую, внутреннюю топологию, относительно которой $\mathfrak{G}$ будет уже группой Ли (см. [1, стр. 293]). Если H есть подалгебра G , то под замыканием H в линейной алгебре G мы будем понимать замыкание H в группе $\mathfrak{G}$ с этой внутренней топологией.

Т е о р е м а 4. *Все коммутанты произвольной подалгебры H алгебры G замкнуты во всех линейных представлениях G .*

Частным случаем этой теоремы является предложение Иосида [5] о замкнутости полупростых линейных алгебр. Действительно, коммутант полупростой алгебры совпадает с ней самой и поэтому замкнут. Другой частный случай также может представлять интерес. Именно, пусть G — полупростая алгебра, Γ — какая-либо ее максимальная регулярная нильпотентная подалгебра и $E_\alpha, \dots, E_\gamma$ — корневые векторы G относительно Γ . Тогда всякая подалгебра, содержащая Γ , является абсолютно замкнутой в G . Аналогично, всякая подалгебра, порожденная некоторым множеством корневых векторов E_α , также абсолютно замкнута в G .

Т е о р е м а 5. *Для того чтобы подалгебра H алгебры G была замкнута в некотором линейном представлении G , необходимо и достаточно, чтобы в этом представлении G был замкнут радикал H .*

* Это предложение принадлежит Иосида [2].

** Коммутантами алгебры H называются выражения вида $[HH], [H]HH$ и т. п., где $[AB]$ означает совокупность линейных комбинаций от $[ab]$ ($a \in A, b \in B$) [4].

*** Максимальная, т. е. не заключающаяся ни в какой другой подалгебре с данными свойствами.

Это предложение сводит вопрос замкнутости произвольных подалгебр линейной алгебры к вопросу о замкнутости разрешимых подалгебр. Структуру разрешимых линейных групп определяет следующая

Т е о р е м а 6. *Связная линейная разрешимая группа Ли, взятая со своей внутренней топологией, распадается в произведение компактной абелевой подгруппы и своего односвязного нормального делителя. Все максимальные связные компактные подгруппы группы $\mathfrak{G}$ сопряжены в $\mathfrak{G}^*$.*

Пользуясь теоремой 6, можно указать, наконец, необходимые и достаточные условия замкнутости произвольной разрешимой подалгебры R в какой-либо линейной алгебре G . Пусть S — максимальная подалгебра в G , коммутант которой совпадает с $K = [RR]$, и пусть $\mathfrak{G}$ — линейная группа алгебры G , взятая со своей внутренней топологией. Обозначим через $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ подгруппы группы $\mathfrak{G}$, соответствующие подалгебрам K , R , S . Так как $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{S}$ замкнуты в $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{K}$ только тогда замкнута в $\mathfrak{G}$, когда $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ замкнута в $\mathfrak{S}/\mathfrak{K}$. Группа $\mathfrak{S}$ линейная разрешимая и, значит, по теореме 6 $\mathfrak{S} = \mathfrak{U}\mathfrak{U}$, где $\mathfrak{U}$ компактна, $\mathfrak{U}$ односвязна, $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U} = 1$. Рассмотрим соответствующее разложение $S = A + V$ алгебры S . В алгебре A существует такой базис $A_1, \dots, A_p$, все элементы которого определяют замкнутые подгруппы в $\mathfrak{U}^{**}$. Алгебра вычетов S/K коммутативна, и ее подалгебра $A + K/K$ соответствует максимальной компактной подгруппе в группе $\mathfrak{S}/R$. Отсюда следует: для того чтобы подалгебра R была замкнута в линейной алгебре G , необходимо и достаточно, чтобы пересечение $A + K/K \cap R/K$ допускало базис, образованный линейными комбинациями элементов $A_1, \dots, A_p$ с рациональными коэффициентами.

Критерий замкнутости линейных подалгебр можно представить в другой форме. Прежде всего можно доказать, что для замкнутости подалгебры R в линейной алгебре G необходимо и достаточно, чтобы замыкание всякой одномерной подалгебры $A \in R$ в G содержалось в R .

Замыкание одномерных алгебр в G сводится к замыканию их в полном кольце матриц P следующим путем. Если замыкание A в P содержится целиком в G , то оно совпадает с замыканием A в P . Если же замыкание A в P не содержится в G , то замыканием A в G будет являться сама матрица A . Что касается нахождения замыканий матрицы A в кольце всех матриц, то это является хорошо изученной, чисто арифметической операцией [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. М., 1938, с. 210, 254.
2. Kôzaku Josida. A problem concerning the second fundamental theorem of Lie.— Proc. Imper. Acad. Tokyo, 1937, 13, N 5, 152—155.
3. А. И. Мальцев. Об односвязности нормальных делителей групп Ли.— Докл. АН СССР, 1942, 34, № 1, 12—15.
4. H. Zassenhaus. Über Lie'sche Ringe mit Primzahlcharacteristik.— Abhandl. Math. Seminar Hansischen Univ., 1939, 13, N 1—2, 1—100.
5. Kôzaku Josida. A theorem concerning the semi-simple Lie groups.— Tohoku Math. J., 1938, 44, 81—84.
6. G. Birkhoff. Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices.— Ann. Math., 1937, 38, N 2, 526—532.
7. L. Kronecker. Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissensch. zu Berlin, 1884, N 45, 1071—1080.

* Теорема 6 содержит в качестве своего частного случая теорему Биркгофа, касающуюся структуры линейных нильпотентных групп [6].

** Матрицы $A_1, \dots, A_p$ нужно еще нормировать так, чтобы $e^{A_i} = E$.

О РАЗЛОЖЕНИИ АЛГЕБРЫ В ПРЯМУЮ СУММУ РАДИКАЛА И ПОЛУПРОСТОЙ ПОДАЛГЕБРЫ*



Пусть G — алгебра Ли и R — ее радикал. Классическая теорема Леви [1] утверждает, что в G существует такая полупростая подалгебра L , что $L \cap R = 0$ и $G = L + R$. Однако важный для приложений вопрос о степени однозначности такого разложения, насколько нам известно, до сих пор не обсуждался. Мы покажем, что с точностью до внутренних автоморфизмов алгебра L определяется однозначно. Более точно, пусть $\mathfrak{G}$ — односвязная лиевская группа с алгеброй G и $\mathfrak{L}, \mathfrak{N}$ — ее связанные подгруппы, соответствующие алгебрам L, R . При этих условиях известно, что $\mathfrak{G} = \mathfrak{L}\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N} = e$ и e — единица группы $\mathfrak{G}$ [2]. Мы утверждаем:

Т е о р е м а 1. *Если $\mathfrak{G} = \mathfrak{L}\mathfrak{N} = \mathfrak{L} * \mathfrak{N}$ — два представления связной лиевской группы в виде произведения своего радикала и полупростой подгруппы, то $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^*$ сопряжены в $\mathfrak{G}$ с помощью некоторого элемента из $\mathfrak{N}$.*

Аналогичный вопрос можно поставить и относительно обыкновенных ассоциативных алгебр, для которых имеет место теорема Веддерберна (см. [3]), совпадающая по своей формулировке с приведенной выше теоремой Леви. Однако если мы захотим и здесь доказывать единственность с точностью до внутренних автоморфизмов, то натолкнемся на ту трудность, что само понятие внутреннего автоморфизма имеет смысл только при наличии в алгебре единицы, что бывает не всегда. Поэтому мы прежде всего обобщим понятие внутреннего автоморфизма.

Предположим, что в ассоциативной алгебре G имеется пара элементов x и $\tilde{x}$, связанных соотношением $x\tilde{x} = \tilde{x}x = \tilde{x} + x$. Тогда соответствие $a^x = a - ax - \tilde{x}a + \tilde{x}ax$ будет, как легко видеть, автоморфизмом алгебры G . Этот автоморфизм мы назовем внутренним, порожденным элементом x . Ясно, что если в G есть единица, то внутренний автоморфизм, порожденный элементом x в новом смысле, будет внутренним и в обычном смысле, только произведенным элементом $e - x$, и наоборот. Заметим еще, что для каждого элемента x , принадлежащего радикалу G , в G существует элемент $\tilde{x}$, удовлетворяющий приведенному соотношению.

Т е о р е м а 2. *Если $G = L + R = L^* + R$ — два разложения ассоциативной алгебры G в прямую сумму ее радикала R и полупростой подалгебры, то L может быть переведена в L^* при помощи автоморфизма, порожденного некоторым элементом из R^{**} .*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Для групп размерности 1 теорема тривиальна. Предположим теперь, что теорема доказана для всех групп, имеющих меньшую размерность, чем данная. Если радикал $\mathfrak{N}$ содержит нетривиальный связный нормальный делитель $\mathfrak{S}$ группы $\mathfrak{G}$, отличный от $\mathfrak{N}$, то для фактор-группы $\bar{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ мы будем иметь два разложения

* Докл. АН СССР, 1942, 36, № 2, 46—50.

** В первой теореме предполагается, что алгебра берется над основным полем характеристики нуль, а во второй, — что центры простых составных частей фактор-алгебры G/R сепарабельны над основным полем.

$\mathfrak{G} = \bar{\mathfrak{L}} \cdot \bar{\mathfrak{R}} = \bar{\mathfrak{L}}^* \cdot \bar{\mathfrak{R}}$, где $\bar{\mathfrak{L}}$, $\bar{\mathfrak{L}}^*$, $\bar{\mathfrak{R}}$ суть образы соответственных групп при гомоморфизме $\mathfrak{G} \rightarrow \bar{\mathfrak{G}}$. Так как размерность $\bar{\mathfrak{G}}$ меньше размерности $\mathfrak{G}$, то в $\bar{\mathfrak{R}}$ найдется такой элемент $\bar{x}$, что $\bar{\mathfrak{L}}^* = \bar{x}^{-1} \bar{\mathfrak{L}} \bar{x}$. Следовательно, $\mathfrak{L}^* \equiv x^{-1} \mathfrak{L} x \pmod{\mathfrak{G}}$. Обозначим $x^{-1} \mathfrak{L} x$ через $\mathfrak{L}^{**}$ и заметим, что группа $\mathfrak{L}^* \mathfrak{G} = \mathfrak{L}^{**} \mathfrak{G}$ допускает снова два разложения. Так как ее размерность меньше размерности $\mathfrak{G}$, то в $\mathfrak{G}$ должен найтись элемент, переводящий $\mathfrak{L}^*$ в $\mathfrak{L}^{**}$, что нам и требовалось.

Рассмотрим теперь случай, когда радикал $\mathfrak{R}$ не содержит нормальных делителей $\mathfrak{G}$ и, значит, коммутативен. Перейдем к алгебрам Ли. Мы имеем $G = L + R = L^* + R$, $[RR] = 0$ и R не содержит идеалов алгебры G . Пусть $(e_1, \dots, e_r)$ — базис L , $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ — базис R и $[e_\alpha e_\beta] = c_{\alpha\beta}^\lambda e_\lambda$, $[e_\alpha \eta_i] = h_{\alpha i}^m \eta_m^{**}$. Так как $L \equiv L^* \pmod{R}$, то в L^* найдется базис, образованный элементами $e_\alpha^* = e_\alpha + v_\alpha^i \eta_i$ ($\alpha = 1, \dots, r$). Вводя обозначения $h_\alpha = \|h_{\alpha i}^m\|$, $v_\alpha = (v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^n)$ и принимая во внимание, что $[e_\alpha^* e_\beta^*] = c_{\alpha\beta}^\lambda e_\lambda^*$, мы получим

$$h_\alpha v_\beta - h_\beta v_\alpha = c_{\alpha\beta}^\lambda v_\lambda. \quad (1)$$

Линейное преобразование T пространства G , определяемое соотношениями

$$Te_\alpha = e_\alpha + v_\alpha^i \eta_i, \quad T\eta_i = \eta_i, \quad (2)$$

есть, очевидно, автоморфизм алгебры G , переводящий L в L^* . Остается показать, что он внутренний, т. е. что найдется такой элемент $t = t^i \eta_i$, что для матрицы A , определяемой соотношением $Ax = [tx]$ ($x \in G$), будет выполняться условие $T = e^A$. Так как $A^2 = 0$, то $e^A = E + A$ (E — единичная матрица), и отсюда, принимая во внимание (2), получим $h_\alpha t = v_\alpha$, где t есть искомым вектор $(t^1, \dots, t^n)$. Из соотношения (1) имеем

$$h^\alpha h_\beta v_\alpha = h^\alpha h_\alpha v_\beta - c_{\alpha\beta}^\lambda h^\alpha v_\lambda.$$

Замечая, что

$$h^\alpha h_\beta = h_\beta h^\alpha + c_{\dots\beta}^{\lambda\alpha} h_\lambda, \quad |c_{\mu\beta}^\lambda h^\mu = c_{\dots\beta}^{\lambda\mu} h_\mu,$$

и вводя обозначения $h^\alpha h_\alpha = \nabla$, $v = h^\alpha v_\alpha$, мы приходим к равенству

$$h_\beta v = \nabla v_\beta.$$

Так как отображение $e_\alpha \rightarrow h_\alpha$ является неприводимым представлением алгебры L и $\nabla h_\alpha = h_\alpha \nabla$, то $\nabla = \omega E$, $h_\beta v = \omega v_\beta$. Если представление ненулевое, то $\omega \neq 0$ (см. [4]) и $t = (1/\omega)v$ будет искомым решением уравнений $h_\alpha t = v_\alpha$. Если же все $h_\alpha = 0$, то соотношения (1) обращаются в $c_{\alpha\beta}^\lambda v_\lambda = 0$, откуда следует, что $v_\alpha = 0^{***}$ и $L^* = L$.

Доказательство теоремы 2. Так же как и в предыдущем доказательстве, здесь снова все сводится к случаю, когда радикал не содержит двусторонних идеалов кольца G . Этот случай мы только и будем рассмат-

* Группа $\mathfrak{G}$ односвязна, поэтому группа $\bar{\mathfrak{G}}$ также односвязна и $\bar{\mathfrak{L}}$, $\bar{\mathfrak{L}}^*$ замкнуты.

** Здесь, как и всюду дальше, по дважды встречающимся индексам ведется суммирование. Обозначения заимствуются нами из статьи Уайтхеда [4]. Опускание и поднятие индексов осуществляется с помощью основного симметрического тензора $c_{\alpha\beta} = c_{\alpha\mu}^\lambda \cdot c_{\lambda\beta}^\mu$, в частности, $c_{\alpha\beta}^\gamma = c_{\lambda\gamma}^\alpha \cdot c_{\lambda\beta}^\lambda$.

*** Действительно, $0 = -c_{\dots\beta}^{\lambda\alpha} v_\lambda = c_{\lambda\beta}^\lambda v^\lambda = v_\beta$.

ривать. Предположим сначала, что G единицы не содержит и допускает два разложения: $G = L + R = L^* + R$. Пусть $(e_1, \dots, e_r)$ — базис L , $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ — базис R , $e_\alpha^* = e_\alpha + v_\alpha^i \eta_i$ ($\alpha = 1, \dots, r$) — базис L^* и $e_\alpha \cdot e_\beta = c_{\alpha\beta}^\lambda e_\lambda$, $e_\alpha \eta_i = a_{\alpha i}^m \eta_m$, $\eta_i e_\alpha = b_{\alpha i}^m \eta_m$. Тогда, вводя обозначения $A_\alpha = \|a_{\alpha i}^m\|$, $B_\alpha = \|b_{\alpha i}^m\|$, $v_\alpha = (v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^n)$ и принимая во внимание равенства $e_\alpha e_\beta^* = c_{\alpha\beta}^\lambda e_\lambda^*$, мы получим

$$c_{\alpha\beta}^\lambda v_\lambda = A_\alpha v_\beta + B_\beta v_\alpha. \quad (3)$$

Линейное преобразование T , определяемое соотношениями (2), будет автоморфизмом алгебры G и в данном случае. Покажем, что автоморфизм T внутренний, т. е. что в R можно найти такой элемент t , для которого имели бы место соотношения *

$$Te_\alpha = e_\alpha + te_\alpha - e_\alpha t \quad (\alpha = 1, \dots, r).$$

Другими словами, нам нужно относительно компонент вектора t решить систему уравнений

$$B_\alpha t - A_\alpha t = v_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, r). \quad (4)$$

Алгебра L содержит единицу $e = a^\lambda \cdot e_\lambda$ и условия $e_\alpha e = ee_\alpha = e_\alpha$ дают $c_{\lambda\alpha}^\beta a^\lambda = c_{\alpha\lambda}^\beta a^\lambda = \delta_\alpha^\beta$. Умножая (3) на a^α и суммируя по α , мы получим $v_\beta = Av_\beta + B_\beta v$, где положено $A = a^\alpha A_\alpha$, $v = a^\alpha v_\alpha$.

Аналогично, умножая (3) на a^β и суммируя по β , мы придем ко второму соотношению $v_\alpha = A_\alpha v + Bv_\alpha$. Из этих соотношений следует

$$(A_\alpha - B_\alpha)v = (B - A)v_\alpha. \quad (5)$$

Равенства $ee_\alpha w = e_\alpha ew$ и $wee_\alpha = we_\alpha e$ показывают, что матрицы A, B перестановочны с A_α и B_α . Убедимся еще, что $\det |B - A| \neq 0$. Действительно, $(B - A)w = we - ew$ ($w \in R$). Но совокупность тех w из R , для которых $we - ew = 0$, является двусторонним идеалом кольца G . Значит, либо этот идеал совпадает с R и тогда e есть единица всей алгебры G , либо он равен нулю. Первое противоречит нашим предположениям, а второе как раз обозначает, что матрица $B - A$ неособенная. Соотношение (5) показывает, что вектор $t = (B - A)^{-1}v$ является искомым решением системы (4).

Предположим, наконец, что алгебра G содержит единицу e и допускает два разложения $G = L + R = L^* + R$. Пусть $L = \alpha_1 + \dots + \alpha_s$ — разложение алгебры L в прямую сумму простых двусторонних идеалов, $L^* = \alpha_1^* + \dots + \alpha_s^*$ — соответственно разложение алгебры L^* , $\alpha_i = \alpha_i^* \pmod{R}$ и $e_1, \dots, e_s$ — единицы алгебр $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ ($e_i e_k = 0$ для $i \neq k$). Множества $e_i R e_j$ являются двусторонними идеалами G и $R = \sum e_i R e_j$. В силу простоты R отсюда следует, что одно из них совпадает с R , а остальные равны нулю. Здесь может быть два случая: $e_i R e_j = R$ ($i \neq j$) и $e_i R e_i = R$. Рассмотрим первый из них и для определенности положим $e_1 R e_2 = R$. Пусть $I = \alpha_3 + \dots + \alpha_s$, $I^* = \alpha_3^* + \dots + \alpha_s^*$. Алгебра $I + R$ не содержит единицы и допускает два разложения $I + R = I^* + R$. Следовательно, $I^* = I^t$ ($t \in R$) и из $tI = It = 0$ вытекает, что $I = I^*$. Алгебра $\alpha_1 + R$ снова не содержит единицы и допускает два разложения $\alpha_1 + R = \alpha_1^* + R$. Значит, $\alpha_1^* = \alpha_1^x$ ($x \in R$). Так как $R\alpha_1 = 0$, то

* Из $t^2 = 0$ следует, что $\tilde{t} = -t$ и $x\tilde{t} = x - xt + tx$.

отображение x приводится к виду $a_1^* = a_1 - a_1x$. Аналогично, $a_2^* = a_2^y$ и $a_2^y = a_2 + ya_2$. Так как $a_1^* a_2^* = a_1 a_2 = 0$, то элементы x и y связаны соотношением $(a_1 - a_1x)(a_2 + ya_2) = 0$. Отсюда $a_1(x - y)a_2 = 0$ и, подставляя $a_1 = e_1$, $a_2 = e_2$, мы получим $x = y$. Это показывает, что элемент x переводит L в L^* .

Остается рассмотреть второй случай, когда $R = e_1 R e_1$. Так как теперь $a_2 + \dots + a_s = a_2^* + \dots + a_s^*$, то нужно только показать, что в алгебре $\mathfrak{A} = a_1 + R = a_1^* + R$ подалгебры a_1 и a_1^* сопряжены. Обозначим через Ω алгебраическое замыкание основного поля алгебры $\mathfrak{A}$ и рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}_\Omega$. Эта алгебра примарна и поэтому является полным кольцом матриц над своим радикалом [3]. Пусть c_{ik} — какая-либо система матричных единиц из $\mathfrak{A}_\Omega$, перестановочных со всеми элементами радикала, $\mathfrak{A}_\Omega = c_{11}R + \dots + c_{pp}R$ и $I = c_{11}\Omega + \dots + c_{pp}\Omega$. Тогда в a_1 найдется базис a_{ik} вида $c_{ik} + r_{ik}$ ($r_{ik} \in R$). Легко видеть, что a_{ik} образуют снова систему матричных единиц алгебры $\mathfrak{A}_\Omega$, перестановочную поэлементно с радикалом. По известной теореме единственности (см. [3, стр. 22]) отсюда следует, что $a_1 = cIy$, где $yx = e$.

Пусть $x = c - u$, тогда $y = c^{-1} - v$ ($c \in I$; $u, v \in R$) и $a_1 = (c - u)I \cdot (c^{-1} - v) = (e - c^{-1}u)cIc^{-1}(e - cv) = (e - c^{-1}u)I(e - cv)$. Значит, a_1 сопряжена с I при помощи элемента $a^{-1}u \in R$. По тем же причинам с I будет сопряжена и алгебра a_1^* . Таким образом, мы доказали, что при алгебраически замкнутом основном поле Ω алгебры a_1 и a_1^* сопряжены друг с другом при помощи некоторого радикального элемента x . Это значит, другими словами, что в Ω разрешима система уравнений

$$(e + x)e_\alpha = (e_\alpha + v_\alpha^i \eta_i)(e + x) \quad (\alpha = 1, \dots, r),$$

где e_α — какой-либо базис L , $e_\alpha^* = e_\alpha + v_\alpha^i \eta_i$ — соответственный базис I^* и x — искомый элемент радикала. Так как эта система линейна, то из ее разрешимости в расширенном поле вытекает разрешимость в поле коэффициентов, что и требуется.

Из теорем 1, 2 можно получить следующее, по виду более общее, предложение, которое мы сформулируем одинаково для лиевских и для ассоциативных алгебр.

Т е о р е м а 3. Все максимальные полупростые подалгебры алгебры G сопряжены между собой при помощи элементов радикала G .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G = L + R$ — разложение G в прямую сумму ее радикала R и полупростой подалгебры L и пусть M^* — какая-либо полупростая подалгебра из G . Обозначим через M проекцию M^* на подпространство L . Тогда M — полупростая подалгебра и $M \equiv M^* \pmod{R}$. Алгебра $M + R = M^* + R$ имеет два разложения, следовательно, $M^t = M^* \pmod{R}$ ($t \in R$). Но в таком случае $M^* \in L^*$, что и требуется.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Levi. Sulla struttura dei gruppi finiti e continui.— Atti Accad. Torino, 1905, 40, 423—437.
2. А. И. Мальцев. Об односвязности нормальных делителей групп Ли.— Докл. АН СССР, 1942, 34, № 1, 12—13.
3. M. Deuring. Algebren. Berlin, 1935.
4. H. Whitehead. On the decomposition of an infinitesimal group.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1936, 32, 229—237.

О ЛИНЕЙНЫХ СВЯЗНЫХ ЛОКАЛЬНО ЗАМКНУТЫХ ГРУППАХ *



Картаном и Биркгофом были указаны примеры групп Ли, не допускающих точных линейных представлений [1]. С другой стороны, И. Д. Адо доказал, что всякая алгебра Ли допускает точное матричное представление [2]. Это показывает, что связные группы Ли, допускающие изоморфное линейное представление, обладают особенной топологической структурой, и представлялось интересным найти эту структуру. Первый результат в этом направлении был получен Биркгофом, показавшим, что связная нильпотентная линейная группа распадается в прямое произведение компактной абелевой и односвязной нильпотентной подгрупп [3]. Далее, основная для этого направления работа Картана [4], в которой доказано, что полупрямое произведение односвязной разрешимой группы на какую-либо связную полупростую группу ее автоморфизмов допускает точное линейное представление **. Наконец, нами было найдено специфическое разложение для линейных разрешимых групп [5]. Пользуясь им и указанным результатом Картана, можно дать уже необходимые и достаточные условия для того, чтобы данная группа Ли была линейной, т. е. допускала изоморфное непрерывное матричное представление какой-либо степени над полем комплексных чисел. Это является целью настоящей заметки.

Пусть $\mathfrak{L}$ — полупростая вещественная связная группа Ли, допускающая точное матричное представление $\mathfrak{D}$. Это представление мы можем взять вещественным, и тогда группа $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$ однозначно определяет комплексную линейную форму $\mathfrak{L}_c$. Центр $\mathfrak{L}$ содержится в центре $\mathfrak{L}_c$. Более того, так как центр $\mathfrak{L}$ конечен, то он содержится в компактной связной абелевой подгруппе $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{L}$. Группу $\mathfrak{A}$ можно включить в максимальную компактную подгруппу $\mathfrak{B}$ группы $\mathfrak{L}_c$. Обозначим через $\mathfrak{Z}$ какой-либо дискретный нормальный делитель $\mathfrak{L}$. Тогда $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}/\mathfrak{Z}$ будет компактной группой, следовательно, допускающей точное вещественное представление $\mathfrak{D}^*$. Придавая параметрам $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{B})$ комплексные значения, мы получим группу $\mathfrak{L}_c^*$, являющуюся гомоморфным образом $\mathfrak{L}_c$. Это показывает, что представление $\mathfrak{D}^*$, примененное к группе $\mathfrak{L}$, есть точное представление группы $\mathfrak{L}/\mathfrak{Z}$, и мы приходим к выводу, что все фактор-группы полупростой линейной группы являются линейными. Аналогично можно показать, что среди локально изоморфных линейных групп существует максимальная, которая является линейной и фактор-группами которой являются все остальные. Эта универсальная линейная группа однозначно определяется также тем, что максимальная компактная подгруппа комплексной формы ее точного вещественного представления является односвязной.

* Докл. АН СССР, 1943, 40, № 3, 108—110.

** Пусть группа $\mathfrak{A}$ гомоморфно отображена в группу автоморфизмов группы $\mathfrak{B}$. Тогда полупрямым произведением $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ называется группа пар с законом умножения $(a_1, b_1)(a, b) = (a_1a, b_1^a b)$.

Тем самым вопрос о структуре полупростых линейных групп можно считать решенным. В другом крайнем случае — разрешимых групп — вопрос решается так: чтобы связная разрешимая группа была линейной, необходимо и достаточно, чтобы она была полупрямым произведением своей максимальной компактной подгруппы на односвязный нормальный делитель. Необходимость этого условия указана в [5], а достаточность получится сама собой при доказательстве следующей общей теоремы:

Т е о р е м а. *Для того чтобы связная группа Ли допускала изоморфное матричное представление, необходимо и достаточно, чтобы такое представление допускали в отдельности ее радикал и максимальная полупростая подгруппа.*

Пусть данная группа есть $\mathfrak{G}$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{G}}$ ее универсальную накрывающую, $\tilde{\mathfrak{G}}$ допускает полупрямое разложение $\tilde{\mathfrak{G}} = \tilde{\mathfrak{L}}\tilde{\mathfrak{N}}$, где $\tilde{\mathfrak{N}}$ — радикал и $\tilde{\mathfrak{L}}$ — максимальная полупростая подгруппа. При гомоморфизме $\tilde{\mathfrak{G}} \rightarrow \mathfrak{G}$ радикал $\tilde{\mathfrak{N}}$ переходит в радикал $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{G}$, а $\tilde{\mathfrak{L}}$ отображается в максимальную полупростую подгруппу $\mathfrak{L}$ (вообще незамкнутую). Элементы $l \in \mathfrak{L}$ производят автоморфизмы $l^{-1}\mathfrak{N}l$ группы $\mathfrak{N}$, которые однозначно распространяются в автоморфизмы $\tilde{\mathfrak{N}}$. Таким образом, $\mathfrak{L}$ гомоморфна группа автоморфизмов $\mathfrak{L}^* \cdot \tilde{\mathfrak{N}}$ радикала $\tilde{\mathfrak{N}}$. Согласно теореме Картана, полупрямое произведение $\mathfrak{L}^* \cdot \tilde{\mathfrak{N}}$ допускает изоморфное представление матрицами $\mathfrak{D}^*$. По условию группа $\mathfrak{L}$ также допускает изоморфное представление $\mathfrak{D}$. Пусть (l, r) — произвольный элемент $\tilde{\mathfrak{G}}$ ($l \in \tilde{\mathfrak{L}}, r \in \tilde{\mathfrak{N}}$). Тогда $\mathfrak{D}_0(l, r) = \mathfrak{D}(l) + \mathfrak{B}^*(l, r)$ будет, очевидно, точным представлением полупрямого произведения $\mathfrak{L} \cdot \tilde{\mathfrak{N}}$.

Теперь мы хотим так деформировать $\mathfrak{D}_0$, чтобы в результате получилось представление полупрямого произведения $\mathfrak{L} \cdot \tilde{\mathfrak{N}}$. Имеем: $\mathfrak{L}\tilde{\mathfrak{N}} \cong \mathfrak{L} \cdot \tilde{\mathfrak{N}}/\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z} \subset \tilde{\mathfrak{N}}$, $\tilde{\mathfrak{N}} \cong \tilde{\mathfrak{N}}/\mathfrak{Z}$. Нам дано, что $\tilde{\mathfrak{N}}$ представима. Значит, $\tilde{\mathfrak{N}} = \mathfrak{U}\mathfrak{S}$, $\tilde{\mathfrak{N}} = \mathfrak{U}\mathfrak{S}$, $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}/\mathfrak{Z}$ компактно. $\mathfrak{S}$ можно выбрать так, чтобы она была нормальным делителем в $\mathfrak{L} \cdot \tilde{\mathfrak{N}}$. Следовательно, мы имеем разложение группы $\mathfrak{L}\tilde{\mathfrak{N}}$ в полупрямое произведение трех сомножителей $\mathfrak{L}\mathfrak{U}\mathfrak{S}$. В $\mathfrak{U}$ выбираем независимую систему однопараметрических образующих $A_1(t), \dots, A_m(t)$ так, чтобы элементы $A_1(1), \dots, A_m(1)$ порождали группу Z . Пусть $L \in \mathfrak{L}$, $A \in \mathfrak{U}$, $L^{-1}AL = A_l S_l$, $S_l \in \mathfrak{S}$. Соответствие $A \rightarrow A_l$ дает автоморфизм в $\mathfrak{U}$. Так как при этом элементы $A_j(1)$ остаются на месте, то $A_l = A$ и $L^{-1}AL = AS_l$. Введем теперь следующее понятие. Однопараметрическая матричная подгруппа $T(t)$ называется централизаторным путем матрицы T_0 , если $T(0) = E$, $T(1) = T_0$ и $T(t)$ перестановочна с каждой матрицей, перестановочной с T_0 . Легко показать, что всякая матрица обладает по крайней мере одним централизаторным путем.

Обозначим $T_j(t)$ централизаторный путь матрицы $A_j(1)$ ($j = 1, \dots, m$).

Пусть $e_{\alpha\beta}$ — матричные единицы рассматриваемого представления $\mathfrak{D}_0$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$) и $e_{\gamma\delta}$ ($\gamma, \delta = 1, \dots, n+m$) — матричные единицы объемлющего кольца. Положим

$$\bar{L} = L + \sum e_{n+j, n+j}, \quad \bar{s} = s + \sum e_{n+j, n+j},$$

$$A_k(t) = A_k(t)T_k(-t) + \sum_{j \neq k} e_{n+j, n+j} + e_{n+k, n+k} \exp(2\pi it),$$

где $L \in \mathfrak{L}$, $A_i(t) \in \tilde{\mathfrak{M}}$, $S \in \mathfrak{S}$ — матрицы представления $\mathfrak{D}_0$ группы $\mathfrak{L} \cdot \tilde{\mathfrak{M}}$. Соответствие $LAS \rightarrow \bar{L}\bar{A}\bar{S}$ будет представлением $\mathfrak{D}_1$ группы $\mathfrak{L} \cdot \tilde{\mathfrak{M}}$. Ядро $\mathfrak{D}_1$ совпадает с Z , и, таким образом, $\mathfrak{D}_1$ есть изоморфное представление группы $\mathfrak{L} \cdot \tilde{\mathfrak{M}}$. В самом деле, с точки зрения своей абстрактной структуры группа $\mathfrak{L} \cdot \tilde{\mathfrak{M}}$ образована тройками элементов (l, a, s) с законом умножения $(l, a, s)(l_1, a_1, s_1) = (ll_1, a_1^l a, s^{la} s_1)$. Значит, для доказательства того, что $\mathfrak{D}_1$ есть представление группы $\mathfrak{L}\tilde{\mathfrak{M}}$, достаточно проверить равенства $\bar{L}\bar{L}_1 = \bar{L}\bar{L}_1$, $\bar{L}^{-1}\bar{A}\bar{L} = \bar{L}^{-1}\bar{A}\bar{L} = \bar{L}^{-1}\bar{A}\bar{L}$, $\bar{L}^{-1}\bar{S}\bar{L} = \bar{L}^{-1}\bar{S}\bar{L}$, $\bar{A}^{-1}\bar{S}\bar{A} = \bar{A}^{-1}\bar{S}\bar{A}$. Так как $T_j(t)$ перестановочны со всеми матрицами группы $\mathfrak{L}\tilde{\mathfrak{M}}$, то первое, второе и четвертое соотношения очевидны, а второе следует из $L^{-1}ATL = AT \cdot S$, $\bar{L}^{-1}\bar{A}\bar{L} = \bar{A}\bar{S}$.

Итак, мы получили, что полупрямое произведение $\mathfrak{S} = \mathfrak{L}\mathfrak{M}$ допускает изоморфное представление $\mathfrak{D}_1$. Первоначальная группа $\mathfrak{S}$ изоморфна фактор-группе от $\mathfrak{S}$ по некоторой центральной подгруппе Z и $Z \cap \mathfrak{L} = E$, $Z \cap \mathfrak{M} = E$. Пусть элементы Z будут $L_j R_j$ ($j = 1, 2, \dots, p$). Из центральности Z следует, что L_j — центральные в $\mathfrak{L}$, $L^{-1}R_j L = R_j$, $L_j^{-1} R L_j = R_j R R_j^{-1}$ ($L \in \mathfrak{L}$, $R \in \mathfrak{M}$). Так как центр $\mathfrak{L}$ конечен, то Z конечна и содержится в группе $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{K}$ — компактная связная абелева подгруппа $\mathfrak{L}$, содержащая элементы $L_1, \dots, L_p$. Обозначим через $\mathfrak{Q}$ максимальную компактную подгруппу группы $\mathfrak{M}$, содержащую $\mathfrak{K}$, и положим $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$. Группа $\mathfrak{M}$ является максимальной компактной подгруппой в $\mathfrak{M}$ и поэтому $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}\mathfrak{S}$. Выберем в $\mathfrak{B}$ независимую систему однопараметрических образующих $B_1(t), \dots, B_m(t)$ так, чтобы элементы $B_1(1) = R_1, \dots, B_q(1) = R_q$ порождали всю группу $\{R_j\}$. Пусть $T_j(t)$ — централизаторный путь матрицы $L_j R_j = L_j B_j(1)$ из $\mathfrak{D}_1$. Положим

$$\bar{L} = L + \sum e_{u+j, u+j}, \quad \bar{S} = S + \sum e_{u+j, u+j},$$

$$B_k(t) = B_k(t) T_k(t) + \sum_{j \neq k} e_{u+j, u+j} + e_{u+k, u+k} \exp(2\pi i t).$$

Как и в предыдущем случае, легко убеждаемся, что соответствие $LBS \rightarrow \bar{L}\bar{B}\bar{S}$ дает представление группы $\mathfrak{S}$. Если $\bar{L}\bar{B}\bar{S} = \bar{E}$, то $\bar{B} = \bar{B}_1(n_1) \dots \bar{B}_q(n_q)$, где n_j — целые. Следовательно, $\bar{B} = \bar{L}_1^{-n_1} \dots \bar{L}_q^{-n_q} \bar{L}_1^{-n_1} \dots \bar{L}_q^{-n_q} \bar{S} = \bar{E}$. Так как новое представление заведомо точное для группы $\mathfrak{L}\mathfrak{S}$, то $\bar{S} = \bar{E}$, $\bar{L} = \bar{L}_1^{n_1} \dots \bar{L}_q^{n_q}$, т. е. $LBS \in Z$, и это представление есть изоморфное представление группы $\mathfrak{S}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Birkhoff. Lie groups simply isomorphic with no linear group.— Bull. Amer. Math. Soc., 1936, 42, 883—888.
2. И. Д. Адо. О представлении конечных непрерывных групп с помощью линейных подстановок.— Изв. физ.-мат. о-ва (Казань), 1934—1935, 3, № 7, 1—43.
3. G. Birkhoff. Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices.— Ann. Math., 1937, 38, 526—532.
4. E. Cartan. Les representations lineaires de groupes de Lie.— J. math. pures et appl., 1938, 17, 1—12.
5. А. И. Мальцев. Подгруппы групп Lie в целом.— Докл. АН СССР, 1942, 36, № 1, 5—8.



Под именем алгебры, или гиперкомплексной системы, над полем Δ понимают обычно алгебраическое кольцо, являющееся в то же время правым или левым Δ -модулем. Всякая алгебра $\mathfrak{A}$ имеет базис, т. е. такую систему линейно независимых относительно Δ элементов, через которые все остальные элементы $\mathfrak{A}$ выражаются линейно с коэффициентами из Δ . Алгебра называется конечной, если обладает конечным базисом. Вместе с базисом часто приходится рассматривать образующие элементы алгебры. Говорят, что элементы $a, b, \dots$ являются образующими алгебры $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A}$ не содержит никакой собственной подалгебры, в которую входили бы элементы $a, b, \dots$. Все элементы алгебры могут быть выражены в виде некоммутативных полиномов от образующих.

Представлением алгебры $\mathfrak{A}$ называется всякое гомоморфное отображение $\mathfrak{A}$ внутрь кольца K_n квадратных матриц над некоторым полем K . При этом требуется, чтобы основное поле Δ лежало в поле представления K и чтобы гомоморфизм был операторным, т. е. чтобы из $a \rightarrow A, \lambda \in \Delta$ следовало $a\lambda \rightarrow A\lambda$ ($a \in \mathfrak{A}, A \in K_n$). Представление называется точным, если гомоморфизм является изоморфизмом. Всякое неточное представление будет точным представлением некоторой алгебры вычетов $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}$. Общая задача теории представлений — это изучение свойств всех представлений данной алгебры. Однако здесь следует подчеркнуть существенную разницу между конечными и бесконечными алгебрами. В то время как у конечных алгебр точные представления всегда существуют и речь идет лишь об общем обзоре всех представлений, класс изоморфно представимых бесконечных алгебр оказывается весьма узким, а главным объектом изучения являются специфические свойства алгебр этого класса. Последней задаче и посвящена настоящая работа.

Прежде всего требуется найти необходимые и достаточные условия для изоморфной представимости алгебр; результат исследования должен выявить особенности расположения идеалов самой алгебры $\mathfrak{A}$. Это и сделано для алгебр с конечным числом образующихся в п. 3 этой работы. Результат исследования таков:

для того чтобы алгебра $\mathfrak{A}$ с конечным числом образующих была изоморфно представима матрицами степени n , необходимо и достаточно, чтобы для каждой конечной системы элементов алгебры $\mathfrak{A}$ в этой алгебре существовал двусторонний идеал, не содержащий выбранных элементов, кольцо вычетов по которому было бы конечной алгеброй над Δ , допускающей изоморфное представление степени n .

Для общего случая ответ получается косвенный:

для изоморфной представимости алгебры необходимо и достаточно, чтобы все ее подалгебры с конечным числом образующих допускали изоморфные представления ограниченной степени.

Это предложение может служить примером так называемых локальных теорем — теорем, утверждающих, что свойство, присущее всем, в известном смысле, конечным частям некоторой системы, присуще и всей системе. Такое локальное рассмотрение применяется в данной работе весьма часто.

После того как выяснен вопрос о возможности представлений, вполне естественно возникает задача — найти поля простейшей структуры, в которых изоморфное представление было бы все еще возможным. Эта задача изучается в п. 2. Совершенно очевидно, что в самом основном поле Δ или его конечном алгебраическом расширении могут быть представлены изоморфно только конечные алгебры. Нами показано, что для представимой алгебры с конечным числом образующих полем представления может быть всегда взято конечное, чисто трансцендентное расширение Δ , а для периодических алгебр без радикала таким полем может быть выбрано алгебраическое замыкание Δ .

Наконец, в п. 4 показано, что представимая алгебра с конечным числом образующих не может быть изоморфна никакой своей собственной алгебре вычетов.

Все перечисленные вопросы и результаты вполне аналогичны рассмотренным нами ранее [4] соответствующим теоретико-групповым предложениям. Их доказательства также остаются вполне аналогичными. Более своеобразны результаты § 2. Здесь рассматриваются вопросы о представимости прямых сумм, прямых произведений и свободных произведений представимых алгебр. При этом в отличие от теоретико-группового случая, например, свободные произведения представимых алгебр вообще уже не будут представимыми алгебрами. Аналогично положение и с прямыми произведениями, хотя здесь окончательных условий представимости получить не удалось. В заключительных пунктах § 2 рассматриваются вопросы о построении представления кольца по заданному представлению его идеала конечного индекса и о представимости коммутативных алгебр.

В последнем, третьем, параграфе нами рассмотрен более детально вопрос о представлениях периодических алгебр. Под этим термином мы понимаем алгебры, все элементы которых являются корнями каких-нибудь полиномов с коэффициентами из основного поля. Понятие периодических алгебр аналогично понятию периодических групп, представления которых впервые изучались Бернсайдом и Шуром. Нашей задачей было найти аналоги соответствующих теорем Бернсайда — Шура. Это удалось сделать следующим образом. Прежде всего оказалось, что представимые периодические алгебры без радикала являются прямыми суммами друг друга аннулирующих простых алгебр, конечных над своими центрами, т. е. хорошо изученными алгебрами с условием обрыва убывающих цепочек левосторонних идеалов. Как следствие отсюда получается, что радикал всякой представимой периодической алгебры над алгебраически замкнутым основным полем имеет конечный индекс. Это показывает, что задача представления периодических алгебр над алгебраически замкнутыми полями целиком сводится к изучению представлений их радикала, так как вопрос о получении представления всей системы по заданному представлению какого-либо идеала конечного индекса был уже ранее решен в п. 8.

Для вывода этих предложений пришлось сначала доказать теорему, аналогичную основной теореме Бернсайда — Шура: всякая периодическая представимая алгебра с конечным числом образующих конечна над основным полем. Проблема Бернсайда для произвольных алгебр изучалась

А. Г. Курошем, который, в частности, показал, что в своем наиболее общем виде она имеет отрицательное решение [3].

Отметим еще, что более общая задача о представлении колец, не являющихся алгебрами над каким-либо полем, легко может быть приведена к задаче о представлении алгебр.

Действительно, пусть дано представление кольца $\mathfrak{v}$ матрицами степени n над некоторым полем K . Тогда, выбирая из кольца всех матриц K_n матрицы, имеющие вид αA , где $A \in \mathfrak{v}$ и α — элемент простого поля Δ , содержащегося в K , мы получим некоторую алгебру $\mathfrak{v}^*$ над Δ . Алгебра $\mathfrak{v}^*$ вполне характеризуется свойствами $\mathfrak{v}^* \supset \mathfrak{v}$, и если $a \in \mathfrak{v}^*$, то найдется такое натуральное m , что будет $ma \in \mathfrak{v}$. Таким образом, для представимости $\mathfrak{v}$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{v}$ допускало представимую обволакивающую алгебру $\mathfrak{v}^*$. Условия существования обволакивающей алгебры очевидны и могут быть выражены следующим образом:

Для того чтобы кольцо $\mathfrak{v}$ могло быть заключено в алгебру над каким-нибудь полем, необходимо и достаточно, чтобы из равенства $ma = 0$, имеющего место для какого-либо индивидуального $a \neq 0$ из $\mathfrak{v}$ и целого рационального m , следовало $mx = 0$ для всех x из $\mathfrak{v}$.

При выполнении этого условия множество всех аннулирующих $\mathfrak{v}$ целых чисел будет идеалом (p) . Если $p \neq 0$, то $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}^*$, если же $p = 0$, то $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{v}^*$.

§ 1. Общие свойства представимых алгебр

Как уже было отмечено, в этом параграфе нами рассматриваются такие свойства представимых алгебр, которые вполне аналогичны соответствующим свойствам представимых групп.

1. Локальные теоремы. Прежде всего мы покажем, что свойство быть представимой алгеброй оказывается чисто локальным, т. е. что имеет место

Теорема 1. *Если всякая подалгебра с конечным числом образующих алгебры $\mathfrak{A}$ над полем Δ допускает изоморфное представление степени n над некоторым полем, то и сама алгебра $\mathfrak{A}$ допускает точное представление степени n над соответственным полем.*

Доказательство аналогично доказательству соответствующей групповой теоремы: мы напомним лишь его схему. Каждому элементу a алгебры $\mathfrak{A}$ ставим в соответствие матрицу $\|a_{ij}\|$ степени n . Элементы этих матриц мы будем рассматривать как независимые переменные. Для этих неизвестных составляем систему равенств и неравенств по следующему способу. Если $a = bc$, то выписываем равенства $a_{ij} = \sum_{\lambda} b_{i\lambda} c_{\lambda j}$; если $a =$

$= \lambda b$ ($\lambda \in \Delta$), то пишем $a_{ij} = \lambda b_{ij}$; если $a = b + c$, то пишем $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ и, если $a \neq b$, то записываем « $a_{11} \neq b_{11}$, или $a_{12} \neq b_{12}, \dots$, или $a_{nn} \neq b_{nn}$ ».

Представимость алгебры $\mathfrak{A}$ в поле K равносильна разрешимости этой смешанной системы в поле K . Согласно основной лемме о смешанных системах такая система разрешима, если разрешима каждая ее конечная подсистема. Так как конечные подсистемы являются частями смешанных систем, составленных для подалгебр с конечным числом образующих, то из представимости всех подалгебр с конечными числом образующих следует представимость и самой алгебры.

Совершенно так же можно доказать и следующее предложение. Пусть $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ — такая система подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$, что любое конечное

множество элементов из $\mathfrak{A}$ лежит в одной из $\mathfrak{A}_i$, и пусть $\mathfrak{A}$ имеет некоторое представление $\mathfrak{D}$. Утверждается, что если представление $\mathfrak{D}$ приводимо для каждой алгебры $\mathfrak{A}_i$, то оно приводимо и для $\mathfrak{A}$; если $\mathfrak{D}$ вполне приводимо для каждой $\mathfrak{A}_i$, то $\mathfrak{D}$ вполне приводимо и для $\mathfrak{A}$.

Аналогично, два представления алгебры $\mathfrak{A}$ эквивалентны, если они эквивалентны для каждой подалгебры $\mathfrak{A}_i$.

2. Изменение поля представлений. Предположим, что нам стало известно, что алгебра $\mathfrak{A}$ допускает изоморфное представление в некотором поле K . Естественно, возникает вопрос — нельзя ли построить изоморфное представление и в каком-либо поле, имеющем более простую структуру по отношению к основному полю Δ , чем K ? Особый интерес представляют два крайних случая — когда поле представлений можно сделать алгебраическим над Δ и когда в качестве поля представлений можно взять чисто трансцендентное расширение Δ .

Рассмотрим сначала первый случай. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ допускает изоморфное представление $\mathfrak{D}$ в алгебраическом замыкании K основного поля Δ . Выберем в $\mathfrak{A}$ какое-нибудь конечное множество элементов $a_1, \dots, a_s$ и обозначим через $\mathfrak{A}^*$ подалгебру, порожденную этими элементами. В представлении $\mathfrak{D}$ элементам a_i соответствуют некоторые матрицы A_i ($i = 1, 2, \dots, s$). Если мы к основному полю Δ присоединим все элементы матриц A_i , то получим промежуточное поле Σ — конечное алгебраическое расширение Δ . Представление $\mathfrak{D}$ алгебры $\mathfrak{A}^*$ есть представление в поле Σ . Поэтому (см. введение) $\mathfrak{A}$ является конечной алгеброй над Δ . Следовательно, изоморфные представления над алгебраическим замыканием своего основного поля могут допускать только такие алгебры, в которых каждое конечное множество элементов порождает конечную подалгебру. Эти алгебры входят в класс периодических алгебр, рассматриваемых далее (§ 3). В частности, там же будет показано, что всякое представление периодической представимой алгебры без радикала эквивалентно некоторому представлению в алгебраическом замыкании основного поля.

Что касается второго случая — чисто трансцендентного расширения основного поля, то мы ограничимся следующим предложением:

Т е о р е м а 2. *Всякая алгебра с конечным числом образующих, допускающая изоморфное представление в каком-нибудь поле, является изоморфно представимой в конечном чисто трансцендентном расширении основного поля.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{A}$ имеет образующие $a_1, a_2, \dots, a_s$ и допускает изоморфное представление $\mathfrak{D}$ в поле K . Элементы a_i в представлении $\mathfrak{D}$ изображаются некоторыми матрицами A_i . Присоединим снова элементы всех матриц A_i к основному полю Δ и обозначим через Σ полученное расширение. Ясно, что представление $\mathfrak{D}$ будет представлением алгебры $\mathfrak{A}$ в поле Σ . По теореме Штейница поле Σ содержит подполе Σ^* , являющееся чисто трансцендентным расширением Δ , причем само поле Σ алгебраично над Σ^* . Так как, сверх того, Σ — конечное расширение Σ^* , то Σ можно рассматривать как конечный модуль над Σ^* . Пусть n — степень представления $\mathfrak{D}$. Алгебра матриц Σ_n будет конечным Σ -модулем и, следовательно, конечным модулем и над Σ^* . Поэтому Σ_n допускает изоморфное представление над полем Σ^* . Но тогда изоморфное представление над Σ^* допускает и алгебра $\mathfrak{A}$, составляющая часть кольца Σ_n .

3. Системы представлений. В предыдущем пункте было показано, что при изучении возможности изоморфного представления ал-

гебр с конечным числом образующих мы можем ограничиться только рассмотрением представлений над чисто трансцендентными полями. Можно даже ограничиться представлениями лишь в основном поле, т. е. по существу представлениями конечных алгебр. Для этого нам потребуется установить одно понятие, аналогичное понятию аппроксимируемости для групп.

Мы скажем, что алгебра $\mathfrak{A}$ над Δ допускает совершенную систему представлений $\mathfrak{S}$, если для каждой конечной системы элементов $a_1, a_2, \dots, a_m$ из $\mathfrak{A}$ в системе $\mathfrak{S}$ найдется такое представление, при котором элементы $a_1, a_2, \dots, a_m$ имеют различные образы*. Для сравнения напомним, что система представлений $\mathfrak{S}$ называется полной, если для любых двух элементов из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{S}$ найдется такое представление, при котором эти элементы имеют различные образы. Если не обращать внимания на степень представления, то из существования полной системы представлений вытекает существование совершенной системы. Однако из существования полной системы представлений данной степени отнюдь еще не следует существование совершенной системы представлений также какой-нибудь заданной степени. Тесная связь, существующая между изоморфными представлениями и совершенными системами представлений, дается следующей теоремой:

Теорема 3. Если алгебра $\mathfrak{A}$ допускает совершенную систему представлений данной степени n , то $\mathfrak{A}$ допускает изоморфное представление той же степени над подходяще выбранным полем.

Доказательство. Построим, как в п. 1, для алгебры $\mathfrak{A}$ смешанную систему равенств и неравенств S . Возьмем какую-нибудь конечную часть S_1 из S . В ней будет содержаться лишь конечное число неравенств, происходящих из неравенств между некоторыми элементами $a_1, a_2, \dots, a_l$ алгебры $\mathfrak{A}$. По предположению существует такое представление алгебры $\mathfrak{A}$, при котором элементы $a_1, a_2, \dots, a_l$ будут иметь разные образы.

Следовательно, при этом представлении все неравенства на S_1 будут выполняться, а равенства из S выполняются при любом представлении $\mathfrak{A}$. Таким образом, всякая конечная часть системы S совместна, следовательно, совместна и вся система S , т. е. $\mathfrak{A}$ допускает изоморфное представление.

Для алгебр с конечным числом образующих имеет место более сильное предложение:

Теорема 4. Для того чтобы алгебра с конечным числом образующих $\mathfrak{A}$ над полем с бесконечным числом элементов допускала изоморфное представление в каком-нибудь поле, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}$ допускала совершенную систему представлений ограниченной степени в самом поле Δ .

Доказательство. Достаточность условий непосредственно вытекает из предыдущей теоремы, так что нам остается доказать лишь необходимость их. Это можно сделать следующим образом.

Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ допускает изоморфное представление над некоторым полем. Тогда по теореме 2 $\mathfrak{A}$ допускает и представление над чисто трансцендентным расширением $\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t)$. Степень этого представления вообще будет больше степени первоначального, но об этом речи в теореме 4 пока нет. Итак, пусть $\mathfrak{A}$ представлена матрицами, элементы которых будут функциями из $\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t)$. Если вместо $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ подставить какие-либо значения из Δ , то получим представление $\mathfrak{A}$ уже над полем Δ . Остается,

* Если идет речь не о представлениях, а о гомоморфных отображениях кольца $\mathfrak{v}$ внутрь колец $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \dots$, то вместо совершенной системы представлений говорят об аппроксимируемости $\mathfrak{v}$ кольцами $\mathfrak{v}_i$.

таким образом, показать, что для каждой конечной системы элементов $a_1, a_2, \dots, a_k$ из $\mathfrak{A}$ можно для $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ подобрать такие значения из Δ , чтобы матрицы, соответствующие элементам a_i , оставались различными. Другими словами, нам дана некоторая конечная система полиномов $f(\xi_1, \dots, \xi_t)$ из $\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t)$ и требуется подобрать для ξ_i такие значения из Δ , чтобы эти полиномы имели разные значения. Пусть $f = \prod (f_i - f_j)$. Полином f отличен от нуля, и если Δ бесконечно, то найдутся такие значения для ξ_i , при которых $f \neq 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 4 не указывает связи между степенью первоначального представления и степенями совершенной системы представлений. Эта связь ясно дается следующей теоремой:

Т е о р е м а 5. *Для того чтобы алгебра $\mathfrak{A}$ с конечным числом образующих над Δ допускала изоморфное представление степени n над каким-нибудь полем, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}$ допускала совершенную систему представлений степени n над алгебраическим замыканием поля Δ .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность условий здесь ~~слова~~ содержится в теореме 3, так что остается доказать только их необходимость. При доказательстве теоремы 2 было обнаружено, что алгебра $\mathfrak{A}$ допускает точное представление над кольцом вычетов $\Delta[x]/\mathfrak{p}$, где $\Delta[x]$ — кольцо полиномов от конечного числа независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_r$ и $\mathfrak{p}$ — простой идеал. Поле отношений для этого кольца Σ есть конечное алгебраическое расширение чисто трансцендентного поля $\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t) = \Sigma^*$ и, следовательно, может быть рассматриваемо как поле алгебраических функций от $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$. Дадим переменным $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ некоторые значения $\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_t^0$ из алгебраического замыкания поля Δ . Тогда для всех остальных элементов ξ поля Σ можно подобрать такие значения ξ^0 , чтобы всякое алгебраическое соответствие между ними с коэффициентами из Δ сохранялось и для этих значений их. Такой подбор может быть невозможен лишь для систем значений $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$, обращающих в нуль некоторую специальную систему полиномов. Заметим далее, что если некоторое соотношение $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = 0$ между элементами поля Σ оказывается верным при всех указанных специализациях, то оно выполняется и в самом поле Σ (см. [8, стр. 58—59]).

Возвратимся к представлениям алгебры $\mathfrak{A}$. Нам дано представление этой алгебры в поле Σ . Если теперь специализировать элементы этого поля указанным образом, то получится некоторое новое представление алгебры $\mathfrak{A}$. В силу последнего замечания эту специализацию можно подобрать так, чтобы любое конечное число неравенств $f_i(\alpha) \neq 0$, имеющих место в поле Σ , при этом сохранилось. Другими словами, мы можем всегда подобрать такую специализацию, при которой любая наперед заданная конечная система элементов алгебры $\mathfrak{A}$ будет иметь различные образы, что и требовалось доказать.

По поводу этого доказательства можно заметить следующее. Если поле Δ содержит бесконечно много элементов, то все приведенные выше рассуждения остаются справедливыми, даже если для независимых переменных брать значения только из поля Δ . Но тогда значения для всех остальных переменных можно будет брать из некоторых конечных алгебраических расширений поля Δ : степень этих расширений не будет превосходить одного и того же числа — степени Σ относительно Σ^* .

Это значит, что алгебра $\mathfrak{A}$ в этом случае допускает совершенную систему представлений над полями, степень которых относительно Δ ограничена.

В частности, из теоремы 5 вытекает, что всякая бесконечная алгебра $\mathfrak{A}$, имеющая конечное число образующих и допускающая изоморфное представление над некоторым полем, не будет простой. Например, известно, что алгебра с образующими x, y и определяющим соотношением $xy - yx = 1$ проста [6]. Следовательно, она не допускает изоморфных представлений ни над каким полем.

4. Проблема Хопфа. Сформулируем еще одно свойство представимых алгебр с конечным числом образующих, вполне аналогичное соответствующему теоретико-групповому предложению.

Лемма. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ над полем Δ имеет конечное число образующих и содержит бесконечную возрастающую цепочку идеалов $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \dots$. Тогда для каждого n можно найти такое k , что алгебры вычетов $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}_k, \mathfrak{A}/\mathfrak{M}_{k+1}, \dots$ не будут допускать изоморфных представлений степени n ни над каким полем.

Доказательство. Выберем некоторое натуральное число n и рассмотрим образующие $a_1, a_2, \dots, a_s$ алгебры $\mathfrak{A}$. Каждому элементу a_i поставим в соответствие матрицу $X_i = \|x_{\alpha\beta}^i\|$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$). Составим теперь для переменных $x_{\alpha\beta}^i$ систему уравнений по следующему правилу. Пусть между образующими a_i существует соотношение вида $f(a_1, a_2, \dots, a_s) = 0$, где f — некоммутативный полином с коэффициентами из Δ . Заменим в этом соотношении образующие соответствующими матрицами и вместо полученного матричного уравнения $f(X_1, X_2, \dots, X_s) = 0$ выпишем систему равенств между элементами матриц. Совокупность всех возникающих соотношений обозначим через M_0 . Чтобы получить соответствующую систему уравнений для $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}_i$, нужно к M_0 присоединить дополнительную систему соотношений M_i . Уравнения M_i можно получить так: пусть $a \in \mathfrak{M}_i$ и $a = f(a_1, a_2, \dots, a_s)$ — выражение a через образующие. Возьмем матрицу $f(X_1, X_2, \dots, X_s)$ и приравняем нулю ее элементы. Все полученные таким образом уравнения и составляют M_i .

Рассмотрим в кольце полиномов $\Delta[x_{\alpha\beta}^i]$ идеал M , порожденный полиномами всех систем M_i . По теореме Гильберта, этот идеал будет иметь конечный базис. Следовательно, найдется такое значение k , что $M = (M_0, M_k)$. Отсюда уже видно, что алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}_l$ ($l > k$) не допускают изоморфных представлений степени n . Действительно, пусть $a_i \rightarrow \|a_{\alpha\beta}^i\|$ будет каким-либо представлением $\mathfrak{D}$ алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}_i$. Тогда при подстановке $x_{\alpha\beta}^i = a_{\alpha\beta}^i$ все полиномы из $M_i \not\subset M$, заведомо обратятся в нуль. Так как $M = (M_0, M_k)$, то при этой подстановке обратятся в нуль вообще все уравнения системы M .

Пусть $a \in \mathfrak{M}_{i+1}$, $a \in \mathfrak{M}_i$ и $a = f(a_1, a_2, \dots, a_s)$ — выражение элемента a через образующие в алгебре $\mathfrak{A}$. По предположению все элементы матрицы $f(X_1, X_2, \dots, X_s)$ входят в систему $M_{i+1} \subset M$ и поэтому при подстановке $x_{\alpha\beta}^i = a_{\alpha\beta}^i$ обращаются в нуль. Значит, элемент a , отличный от нуля в кольце $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}_i$, отображается в нуль в представлении $\mathfrak{D}$ и, таким образом, $\mathfrak{D}$ не может быть точным.

Теорема 6. Если алгебра $\mathfrak{A}$ с конечным числом образующих допускает точное представление, то она не может быть изоморфна никакой своей алгебре вычетов.

Доказательство. Пусть, наоборот, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{M}_1$. Обозначим $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}_1$ через $\mathfrak{B}$. Мы имеем два отображения $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$: одно — естественное гомоморфное $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ и другое — данный изоморфизм $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$. В силу изоморфизма идеал $\mathfrak{M}_1$ алгебры $\mathfrak{A}$ переходит в некоторый идеал $\mathfrak{N}_1$ алгебры $\mathfrak{B}$.

Совокупность всех элементов $\mathfrak{A}$, переходящих при гомоморфном отображении в $\mathfrak{M}_1$, дает новый идеал $\mathfrak{M}_2$ алгебры $\mathfrak{A}$. Повторяя ту же операцию, мы получим бесконечную возрастающую цепочку идеалов $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \dots$ алгебры $\mathfrak{A}$; при этом все кольца $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}_i$ будут изоморфны алгебре $\mathfrak{A}$. По условию алгебра $\mathfrak{A}$ допускает точное матричное представление. Следовательно, такое представление должны допускать и все кольца $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}_1, \mathfrak{A}/\mathfrak{M}_2, \dots$. Однако это противоречит только что доказанной лемме.

§ 2. Представимость прямых сумм, прямых и свободных произведений

Существует несколько способов, с помощью которых можно из данных алгебр получать новые. Сюда относятся образование прямых сумм, прямых произведений, свободных произведений и расширение одной алгебры при помощи другой. Наша задача — посмотреть, нельзя ли, зная представления данных алгебр, построить представления их прямых сумм, произведений и т. д.

5. Прямые суммы. Прямая сумма алгебр $\mathfrak{A}_i$ над одним и тем же полем Δ есть алгебра последовательностей $\{a_1, a_2, \dots\}$, $a_i \in \mathfrak{A}_i$, у которых только конечное число членов отлично от нуля и которые складываются и умножаются поэлементно. Слагаемые $\mathfrak{A}_i$ можно отождествить с соответственными подалгебрами прямой суммы, и эти подалгебры друг друга аннулируют (см. [2]).

Если прямая сумма представима, то представимы и все слагаемые. Обратное заведомо справедливо, если слагаемых конечное число. Действительно, пусть $a_1 \rightarrow A_1, \dots, a_n \rightarrow A_n$ — представления алгебр $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$. Тогда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}$$

будет искомым представлением их прямой суммы.

В общем случае ответ легко получается из такой леммы:

Л е м м а. Если алгебра $\mathfrak{A}$ допускает изоморфное представление степени r , то она не может содержать более r пар элементов $a_i, \bar{a}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$), удовлетворяющих соотношениям $a_i \bar{a}_i \neq 0, a_i \bar{a}_j = 0$ ($i \neq j$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть $\mathfrak{M} = m_1 \Delta + \dots + m_n \Delta$ — модуль представления (элементы алгебры являются его левыми операторами) и пусть $r + 1$ пара элементов $a_1, \bar{a}_1, \dots, a_{r+1}, \bar{a}_{r+1}$ алгебры $\mathfrak{A}$ удовлетворяет упомянутым соотношениям. По предположению модуль $\mathfrak{M}$ дает точное представление алгебры $\mathfrak{A}$. Поэтому $a_i \bar{a}_i \mathfrak{M} \neq 0$. Выберем в $\bar{a}_i \mathfrak{M}$ такой элемент n_i , чтобы $a_i n_i \neq 0$. Для $j \neq i$ мы имеем $a_j n_i = 0$. Элементы $n_1, n_2, \dots, n_{r+1}$ линейно независимы в $\mathfrak{M}$, так как если $\sum_{\alpha} n_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 0$, то

$\sum_{\alpha} a_j n_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 0, a_j n_j \lambda_j = 0$ и $\lambda_j = 0$. Следовательно, размерность $\mathfrak{M}$ должна быть по меньшей мере $r + 1$, что противоречит условиям леммы.

Назовем кольцо тривиальным, если произведение любых двух его элементов равно нулю. Все тривиальные алгебры представимы. Действительно, пусть $a_1, a_2, \dots$ — базис тривиальной алгебры $\mathfrak{A}$. Рассмотрим кольцо

полиномов $\Delta [a_1, a_2, \dots]$ и поставим в соответствие элементу $\sum_{\alpha} a_{\alpha} \lambda_{\alpha}$ из $\mathfrak{A}$ матрицу $\begin{vmatrix} 0 & \sum a_{\alpha} \lambda_{\alpha} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$. Это соответствие и есть одно из возможных представлений алгебры $\mathfrak{A}$. Комбинируя это замечание с только что доказанной леммой, мы непосредственно приходим к такому предложению:

Т е о р е м а 7. *Для того чтобы прямая сумма алгебр была изоморфно представимой, необходимо и достаточно, чтобы все слагаемые этой суммы были изоморфно представимы и чтобы только конечное число их было нетривиально.*

6. **П р я м ы е п р о и з в е д е н и я.** Пусть базисами алгебр $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ над одним и тем же полем Δ будут соответственно $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ и пусть $a_i a_j = \sum_{\alpha} a_{ij}^{\alpha} a_{\alpha}$, $b_i b_j = \sum_{\alpha} b_{ij}^{\alpha} b_{\alpha}$ — их таблицы умножения. Тогда прямым произведением $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ над Δ будет алгебра, базисом которой будут формальные произведения $a_i b_j$, а таблицей умножения служит правило (ср. [2]):

$$a_i b_j \cdot a_k b_m = \sum_{\alpha, \beta} a_{ik}^{\alpha} b_{jm}^{\beta} a_{\alpha} b_{\beta}.$$

Возникает вопрос: не будет ли прямое произведение двух представимых алгебр снова представимой алгеброй? В общем случае ответ оказывается отрицательным. Поэтому мы ограничимся случаем, когда одна из алгебр имеет конечное число образующих.

Т е о р е м а 8. *Прямое произведение представимой алгебры на представимую с конечным числом образующих есть алгебра представимая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ допускает изоморфное представление в поле K и $\mathfrak{B}$ — представимая алгебра с конечным числом образующих. По теореме 2 алгебра $\mathfrak{B}$ должна допускать изоморфное представление над полем рациональных функций $\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ от независимых переменных ξ_i . Переменные ξ_i мы можем считать алгебраически независимыми и относительно поля K .

Обозначим теперь через $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ базисы алгебр $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ относительно основного поля Δ , и пусть $a_i \rightarrow \|a_{jk}^i\|$, $b_i \rightarrow \|b_{jk}^i\|$ — их представления соответственно в полях K и $\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Мы хотим показать, что кронекеровское произведение обоих представлений

$$a_i b_j \rightarrow \|c_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{ij}\|, \quad c_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{ij} = a_{\alpha\gamma}^i b_{\beta\delta}^j$$

будет как раз точным представлением прямого произведения $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. Действительно, пусть $\sum d_{\lambda\mu} a_{\lambda} b_{\mu} \rightarrow 0$. Это значит, что имеют место соотношения

$$\sum_{\lambda, \mu} d_{\lambda\mu} a_{ij}^{\lambda} b_{kl}^{\mu} = 0 \quad (d_{\lambda\mu} \in \Delta),$$

где по крайней мере один из коэффициентов $d_{\lambda\mu} \neq 0$. Элементы b_{kl}^{μ} суть полиномы от переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ *. Обозначим через $b_{k\ell\alpha}^{\mu}$ коэффици-

* После умножения на общий знаменатель.

енты при соответствующих членах всех этих полиномов, $b_{k\alpha}^\mu \in \Delta$. Тогда

$$\sum_{\lambda, \mu} d_{\lambda\mu} a_{ij}^\lambda b_{k\alpha}^\mu = 0.$$

Рассмотрим суммы $\sum_{\mu} d_{\lambda\mu} b_{k\alpha}^\mu$. Если бы они при всех значениях k, l, α были равны нулю, то элемент $\sum_{\mu} d_{\lambda\mu} b_{k\alpha}^\mu \in \mathfrak{B}$ переходил бы в нуль в первоначальном представлении алгебры $\mathfrak{B}$ и это представление не было бы изоморфным. Следовательно, найдутся такие значения k_1, l_1, α_1 , что $\sum_{\mu} d_{\lambda\mu} b_{k_1 l_1 \alpha_1}^\mu \neq 0$. Но

$$\sum_{\lambda, \mu} d_{\lambda\mu} b_{k_1 l_1 \alpha_1}^\mu a_{ij}^\lambda = 0, \quad d_{\lambda\mu} b_{k_1 l_1 \alpha_1}^\mu \in \Delta.$$

Следовательно, элемент $\sum_{\lambda, \mu} d_{\lambda\mu} b_{k_1 l_1 \alpha_1}^\mu a_{ij}^\lambda$ из алгебры $\mathfrak{A}$ переходит в нуль в первоначальном представлении. Однако это противоречит предположениям, что и требовалось.

В частности, из теоремы 8 следует, что представимая алгебра при конечном алгебраическом расширении основного поля остается представимой.

7. С в о б о д н ы е п р о и з в е д е н и я. Пусть элементы $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ образуют соответственно базисы алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ над одним и тем же полем Δ . Рассмотрим всевозможные формальные произведения вида $a_{i_1} b_{j_1} \dots a_{i_k} b_{j_k}$, или $a_{i_1} b_{j_1} \dots a_{i_k} b_{j_k} a_{i_{k+1}}$, или же получающиеся из них путем замены a на b . По определению эти формальные произведения дают базис свободного произведения $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$. Умножаются они путем записи одного за другим. Если в середине нового формального произведения окажутся рядом элементы одной и той же алгебры, то их произведение нужно выразить через элементы базиса и все выражение заменить суммой, пользуясь формальным дистрибутивным законом. Свободное произведение колец определяется совершенно аналогично понятию свободного произведения групп. Известно, что свободное произведение представимых групп само представимо [5]. Поэтому можно было бы ожидать, что то же самое будет справедливо и для колец.

Однако имеет место следующее предложение:

Т е о р е м а 9. *Свободное произведение двух алгебр над полем Δ представимо только в том случае, когда каждая из них совпадает с Δ .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего напомним, что свободной алгеброй с образующими x, y над полем Δ называется алгебра всех некоммутативных полиномов от x, y с коэффициентами из Δ или, что то же самое, свободное произведение $\Delta[x] * \Delta[y]$.

Если теперь одна из данных алгебр, например $\mathfrak{A}$, не есть Δ , то ее базис содержит по крайней мере два элемента a_1, a_2 . Пусть b — элемент базиса второй алгебры. Тогда свободное произведение $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ содержит подалгебру, порожденную элементами $a_1 b$ и $a_2 b$. Эта подалгебра является свободной алгеброй с двумя образующими $a_1 b$ и $a_2 b$. Если мы покажем, что свободные алгебры с двумя образующими непредставимы, то необходимость условий будет доказана. Предположим, что мы имеем представление алгебры $\Delta[x] *$

* $\Delta[y]$ в кольце матриц K_r (K — некоторое поле). Пусть в этом представлении $x \rightarrow \|x_{ij}\|$, $y \rightarrow \|y_{ij}\|$. Рассмотрим все те элементы алгебры $\Delta[x] * \Delta[y]$, которые имеют вид

$$x^{a_1}y^{b_1}x^{a_2}y^{b_2} \dots x^{a_k}y^{b_k} \quad (a, b > 0),$$

где $a_1 + a_2 + \dots + a_k = s$, $b_1 + b_2 + \dots + b_k = t$ — некоторые фиксированные числа. Имеется в точности $p = (s+t)!/s!t!$ различных таких произведений, и все они в алгебре $\Delta[x] * \Delta[y]$ линейно независимы. Однако если мы вместо x и y подставим матрицы $\|x_{ij}\|$, $\|y_{ij}\|$, то среди полученных матриц будет не более, чем $q = r^2 \frac{(s+r^2-1)!}{s!(r^2-1)!} \cdot \frac{(t^2+t-1)!}{t!(r^2-1)!}$ линейно независимых относительно Δ .

Действительно, наибольшее число линейно независимых произведений получится, когда x_{ij} , y_{ij} будут независимыми переменными. В этом случае элементы матрицы, являющейся образом произведения, будут однородными полиномами степени s в переменных x_{ij} и степени t в переменных y_{ij} . Умножая число различных членов в таком полиноме общей формы на число элементов матрицы, мы и получим, очевидно, максимальное количество линейно независимых матриц указанного вида. Оно не более q . Но отношение q/p имеет пределом нуль, если s и t неограниченно растут. Следовательно, при достаточно больших s , t линейно независимые элементы кольца $\Delta[x] * \Delta[y]$ переходят в линейно зависимые матрицы и представление не может быть точным.

Нам остается рассмотреть только случай, когда обе алгебры совпадают с основным полем Δ . Обозначим единицу первого поля через e_1 , единицу второго e_2 . Присоединим к Δ независимые переменные x_{ij} , y_{ij} ($i, j = 1, 2$). Легко проверить, что соответствие

$$\begin{aligned} e_1 &\rightarrow X^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} X, \\ e_2 &\rightarrow Y^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} Y \end{aligned}$$

дает точное представление свободного произведения в поле $\Delta(x_{ij}, y_{ij})$.

8. К о н е ч н ы е р а с ш и р е н и я. Пусть Δ — поле, $\mathfrak{M}$ — (правый) Δ -модуль и $\mathfrak{N}$ — некоторый подмодуль. $\mathfrak{N}$ называется подмодулем индекса r в $\mathfrak{M}$, если фактор-модуль $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ будет конечным Δ -модулем размерности r . Аналогично, подалгебра $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ называется подалгеброй индекса r , если $\mathfrak{B}$, рассматриваемая как модуль, имеет индекс r в $\mathfrak{A}$.

Если $\mathfrak{N}$ — подмодуль индекса r модуля $\mathfrak{M}$, то естественный гомоморфизм $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ дает представление конечной размерности модуля $\mathfrak{M}$. Обратно, если имеется конечномерное представление $\mathfrak{M} \rightarrow \overline{\mathfrak{M}}$, то совокупность аннулирующихся элементов $\mathfrak{M}$ образует подмодуль конечного индекса. Пусть дано конечное число подмодулей конечного индекса $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_k$ модуля $\mathfrak{M}$. Складывая представление $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}/\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}/\mathfrak{N}_k$ и обозначим через $\mathfrak{N}$ ядро нового представления. Очевидно, $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{N}_k$. С другой стороны, новое представление будет представлением конечной размерности. Следовательно, пересечение конечного числа подмодулей конечного индекса есть подмодуль конечного индекса. Пусть, далее, алгебра $\mathfrak{A}$ содержит новый идеал $\mathfrak{B}$ конечного индекса. Тогда модуль вычетов $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ допускает $\mathfrak{A}$ в качестве области левых операторов и

может, таким образом, рассматриваться как модуль представлений для $\mathfrak{A}$. Совокупность аннулирующих в этом представлении элементов будет двусторонним идеалом в $\mathfrak{A}$, содержащимся в $\mathfrak{B}$ и имеющим конечный индекс в $\mathfrak{A}$; иными словами, всякий односторонний идеал конечного индекса содержит двусторонний идеал конечного индекса.

Отметив эти очевидные факты, перейдем к доказательству интересующей нас теоремы.

Т е о р е м а 10. Если алгебра $\mathfrak{A}$ содержит левый идеал $\mathfrak{B}$ конечного индекса, являющийся представимой алгеброй, то $\mathfrak{A}$ также допускает точное представление.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $b \rightarrow b^*$ — данное точное представление алгебры $\mathfrak{B}$. Обозначим степень его через n , и пусть $g_1, \dots, g_r$ — элементы алгебры $\mathfrak{A}$, образующие базис фактор-модуля $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$. Каждый элемент $a \in \mathfrak{A}$ можно однозначно представить в виде

$$a = a_0 + \alpha_{01}g_1 + \dots + \alpha_{0r}g_r \quad (a_0 \in \mathfrak{B}, \alpha_{0i} \in \Delta).$$

Положим

$$ag_i = a_i + \sum_{\lambda} a_{i\lambda}g_{\lambda} \quad (a_i \in \mathfrak{B}).$$

Введем обозначения

$$|a| = \begin{vmatrix} a_0^* & \alpha_{01}E_n & \dots & \alpha_{0r}E_n \\ a_1^* & \alpha_{11}E_n & \dots & \alpha_{1r}E_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_r^* & \alpha_{r1}E_n & \dots & \alpha_{rr}E_n \end{vmatrix}, \quad \|a\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11}E_{n(r+1)} & \dots & \alpha_{1r}E_{n(r+1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r1}E_{n(r+1)} & \dots & \alpha_{rr}E_{n(r+1)} \end{vmatrix},$$

$$\bar{a} = (|a_1|, \dots, |a_r|),$$

где E_s означает единичную матрицу степени s . Непосредственный подсчет показывает, что для $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$ мы имеем $|ab| = |a| \cdot |b|$.

Далее, для произвольных a, b из $\mathfrak{A}$ справедливы соотношения

$$\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|,$$

$$\overline{ab} = \bar{b} \cdot \|a\| + \|b\| \cdot \bar{a}.$$

Так как, кроме того,

$$|\lambda a + \mu b| = \lambda |a| + \mu |b|,$$

$$\|\lambda a + \mu b\| = \lambda \|a\| + \mu \|b\|,$$

$$\overline{\lambda a + \mu b} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{b},$$

то соответствие

$$a \rightarrow \begin{vmatrix} \|a\| & 0 \\ \bar{a} & |a| \end{vmatrix}$$

будет искомым точным представлением алгебры $\mathfrak{A}$.

9. Коммутативные алгебры. Мы рассмотрим только два простейших случая: 1) алгебру без нильпотентных элементов и 2) алгебру с конечным числом образующих.

Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна и не содержит нильпотентных элементов. Условия леммы п.5, необходимые для представимости любой алгебры, в на-

шем случае будут и достаточными. В самом деле, пусть $a_1, \dots, a_n$ — такие элементы алгебры $\mathfrak{A}$, что $a_i a_j = 0$ ($i \neq j$) и из $aa_1 = \dots = aa_n = 0$ следует $a^2 = 0$, т. е. ввиду отсутствия нильпотентных элементов $a = 0$. С помощью обычного процесса образования пар алгебру $\mathfrak{A}$ мы можем заключить в коммутативную алгебру $\mathfrak{B}$, содержащую единицу и в которой каждый неделитель нуля имеет обратный. Кроме того, в алгебре $\mathfrak{B}$, так же как и в $\mathfrak{A}$, существует не более n друг друга аннулирующих элементов. Обозначим через $\mathfrak{B}_i$ совокупность всех элементов алгебры $\mathfrak{B}$, аннулирующих $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$. $\mathfrak{B}_i$ будет кольцом без делителей нуля. Поэтому $\mathfrak{B}_i$ можно заключить в поле отношений $\mathbb{C}$. С другой стороны, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \dots + \mathfrak{B}_n$. Действительно, элемент $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ не будет делителем нуля*, а потому существует обратный элемент a^{-1} и $e = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ($b_i \in \mathfrak{B}_i$).

Итак, алгебра $\mathfrak{A}$ оказалась заключенной в прямую сумму конечного числа полей; следовательно, она представима. Получилась

Теорема 11. Для того чтобы коммутативная алгебра без нильпотентных элементов была представимой матрицами степени n , необходимо и достаточно, чтобы в ней имелось не более n друг друга аннулирующих элементов.

Более интересна следующая

Теорема 12. Всякая коммутативная алгебра с конечным числом образующих допускает изоморфное представление.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — образующие алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{A} \cong \Delta[x_1, x_2, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — идеал в кольце полиномов $\Delta[x_1, x_2, \dots, x_n]$, порожденный левыми частями определяющих соотношений. Идеал $\mathfrak{m}$ можно разложить в пересечение примарных идеалов

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_s.$$

Если мы покажем, что все кольца вычетов $\Delta[x_1, x_2, \dots, x_n]/\mathfrak{q}_i$ допускают изоморфные представления $a \rightarrow A_i$, то сумма этих представлений

$$a \rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_s \end{vmatrix}$$

даст изоморфное представление алгебры $\mathfrak{A}$. Рассмотрим, следовательно, алгебру $Q = \Delta[x_1, x_2, \dots, x_n]/\mathfrak{q}$, где $\mathfrak{q}$ — примарный идеал кольца $\Delta[x_1, x_2, \dots, x_n]$, и пусть $\mathfrak{p}$ обозначает простой идеал, соответствующий идеалу $\mathfrak{q}$. Если r — размерность идеала $\mathfrak{p}$, то среди переменных $x_1, \dots, x_n$ найдутся r алгебраически независимых относительно $\mathfrak{p}$. Пусть они будут $x_1, x_2, \dots, x_r$. Идеал $\mathfrak{q}$ имеет конечный базис $\mathfrak{q}$ ($f_1, f_2, \dots, f_t$). Рассмотрим теперь идеал $\mathfrak{q}'$ в кольце $Q = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_r)[x_{r+1}, \dots, x_n]$, порожденный теми же самыми полиномами $f_1, f_2, \dots, f_t$. Известно [8, стр. 76], что если полином $f \in \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ входит в $\mathfrak{q}'$, то он принадлежит и к $\mathfrak{q}$, т. е. $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \cap \Delta[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Это показывает, что точное представление алгебры Q' будет вместе с тем и точным представлением алгебры Q . Однако

* Если $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)b = 0$, то $a_i b = - \sum_{\alpha \neq i} a_\alpha b$, $(a_i b)^2 = - \sum a_\alpha a_i b^2 = 0$. Таким образом, $a_i b = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и $b = 0$.

изоморфное представление Q' существует. В самом деле, размерность идеала q' равна нулю. Это значит, что каждый элемент из Q' алгебраичен относительно поля $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_r)$. Пусть

$$x_i^l = a_i x_i^{l-1} + \dots + a_{i_0} \quad (i = r+1, \dots, n; a \in \Delta(x_1, x_2, \dots, x_r)).$$

Эти соотношения показывают, что одночлены от $x_{r+1}, \dots, x_n$, содержащие каждую переменную x_i в степени меньшей l , дадут линейный базис Q' относительно поля $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_r)$. Таким образом, Q' является конечной алгеброй над $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_r)$ и поэтому заведомо допускает изоморфное матричное представление.

В заключение рассмотрим один пример. Пусть K — поле всех алгебраических чисел. K можно представить себе как алгебру над полем рациональных чисел Γ . Прямое произведение $K \times K$ не содержит нильпотентных элементов. Однако в этом произведении существует сколько угодно друг друга аннулирующих элементов. Например, пусть e и e_1 — соответственно единицы полей K и K . Обозначим через $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ примитивные корни уравнения $x^n - e = 0$ в первом поле и через ξ — примитивный корень уравнения $x^n - e_1 = 0$ во втором поле.

Равенство

$$(\xi e - \xi_1 e_1)(\xi e - \xi_2 e_1) \dots (\xi e - \xi_n e_1) = 0$$

показывает, что элементы $u_i = \prod_{\alpha \neq i} (\xi e - \xi_\alpha e_1)$ друг друга аннулируют и ни один из них нулю не равен. Следовательно, произведение $K \times K$ не допускает изоморфных представлений.

§ 3. Периодические алгебры

Алгебра $\mathfrak{A}$ над полем Δ называется периодической, если всякий элемент из $\mathfrak{A}$ является корнем некоторого полинома с коэффициентами из Δ . Многие проблемы, относящиеся к теории периодических групп, могут быть сформулированы и для периодических алгебр [3]. Однако их решения, по-видимому, в значительной мере независимы друг от друга. В этом параграфе мы устанавливаем для случая представимых периодических алгебр аналоги известных теорем Шура, относящихся к представлениям периодических групп.

Так как речь будет идти главным образом о радикале, то целесообразно выделить такие общие свойства радикала представимых алгебр, которые сразу получаются из известных теорем теории конечных алгебр.

10. Р а д и к а л п р е д с т а в и м ы х а л г е б р. Элемент a алгебры $\mathfrak{A}$ называется собственно нильпотентным, если он лежит внутри некоторого нильпотентного идеала [8, стр. 150]. Совокупность всех собственно нильпотентных элементов образует двусторонний идеал R в $\mathfrak{A}$. Этот идеал R называется радикалом $\mathfrak{A}$ и может быть сам нильпотентным, но может им и не быть. Однако для представимых колец всегда имеет место первый случай.

Т е о р е м а 13. *Радикал R представимой алгебры $\mathfrak{A}$ всегда нильпотентен и алгебра вычетов $\mathfrak{A}/R$ снова представима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обратим прежде всего внимание на следующий хорошо известный факт. Пусть дано некоторое неприводимое представление алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда всякий нильпотентный идеал I из $\mathfrak{A}$ отображается в нуль. Действительно, если $\mathfrak{M}$ — левосторонний модуль представлений, то

$I\mathfrak{M}$ — допустимый подмодуль и либо $I\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, тогда и $I^e = \mathfrak{M}$, либо $I\mathfrak{M} = 0$. Ввиду нильпотентности I первого быть не может, что и требовалось [8, стр. 176]. Пусть теперь дано какое-нибудь представление алгебры $\mathfrak{A}$ в поле K и пусть

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}$$

будет его вполне приведенной формой в алгебраическом замыкании K . Представления $a \rightarrow A_{ii}$ неприводимы. Поэтому элементы радикала R отображаются в матрицы, у которых диагональные клетки все заполнены нулями. Однако произведение любых m матриц с нулевыми диагональными клетками есть нулевая матрица. Следовательно, R состоит из всех тех матриц, у которых $A_{11} = \dots = A_{mm} = 0$ и $R^m = 0$ (ср. [7]). Из этого же замечания следует, что соответствие

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}$$

есть изоморфное представление алгебры вычетов $\mathfrak{A}/R$.

11. Проблема Бернсайда. Для периодических алгебр можно сформулировать несколько проблем, в известном смысле аналогичных теоретико-групповой проблеме Бернсайда. Наиболее общая из них формулируется следующим образом. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — образующие алгебры $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ мультипликативную полугруппу, порожденную этими образующими. Предположим теперь, что всякий элемент из $\mathfrak{F}$ алгебраичен относительно основного поля Δ . Спрашивается: будет ли алгебра $\mathfrak{A}$ в этом случае конечной над Δ ? В уже цитированной работе А. Г. Куроша показано, что для произвольных алгебр проблема эта решается отрицательно. Тем не менее для изоморфно представимых алгебр решение оказывается положительным.

Теорема 14. Пусть изоморфно представимая алгебра имеет конечное число образующих $a_1, a_2, \dots, a_n$ и всякий элемент мультипликативной полугруппы $\mathfrak{F}$, порожденной этими образующими, является алгебраическим относительно основного поля Δ . Тогда $\mathfrak{A}$ будет конечной алгеброй над Δ .

Доказательство. Предположим сначала, что нам дано абсолютно неприводимое изоморфное представление степени r алгебры $\mathfrak{A}$. Рассмотрим систему матриц P , соответствующих элементам полугруппы $\mathfrak{F}$. Система P абсолютно неприводима и вместе с двумя матрицами содержит их произведение. По теореме Бернсайда, среди матриц P найдется r^2 линейно независимых в поле представления K [8, стр. 178]. Пусть эти матрицы будут $A_i = \|a_{\alpha\beta}^i\|$ ($i = 1, 2, \dots, r^2$). Возьмем какую-нибудь матрицу $A = \|a_{\alpha\beta}\|$ из P и рассмотрим произведения AA_i . Следы этих произведений принадлежат к алгебраическому замыканию Ω основного поля Δ . Действительно, AA_i принадлежит к P и поэтому удовлетворяет соотношению вида $\varphi(AA_i) = 0$, $\varphi(x) \in \Delta[x]$. Следовательно, след AA_i есть сумма некоторых корней полинома $\varphi(x)$ и содержится поэтому в Ω . Таким образом, для элементов

$a_{\alpha\beta}$ матрицы A мы можем написать систему линейных уравнений

$$\text{Sp}(AA_i) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta}^i a_{\alpha\beta} = \omega_i \quad (\omega_i \in \Omega). \quad (N)$$

Ввиду линейной независимости матриц A_i определитель этой системы отличен от нуля. Решая ее, мы выразим элементы матрицы A линейно через r^2 величин $u_{ik} = D_{ik}/D$, где D — определитель системы и D_{ik} — его адьюнкты. Коэффициенты этих линейных выражений будут принадлежать к полю Ω .

Обозначим через Σ поле, порожденное элементами u_{ik} , всеми элементами матриц, соответствующих образующим алгебры $\mathfrak{A}$, и элементами поля Δ . Σ является конечным расширением поля Δ и, очевидно, содержит элементы всех матриц алгебры $\mathfrak{A}$. Выделим из Σ те элементы, которые будут алгебраическими относительно Δ . Обозначим их совокупность через Σ_1 . Согласно известной лемме Шура, Σ_1 есть конечное алгебраическое расширение поля Δ [9]. С другой стороны, мы уже заметили, что элементы всех матриц P лежат в Σ . Следовательно, их следы лежат в поле Σ_1 и мы можем теперь считать, что элементы ω_i в системе (N) берутся из Σ . А раз так, то все элементы матриц P выражаются линейно через u_{ik} с коэффициентами из Σ_1 . Но элементы Σ_1 сами выражаются линейно с коэффициентами из Δ через конечное число их. Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}$ будет конечным Δ -модулем, что и требовалось доказать.

Итак, теорема 14 доказана в том частном случае, когда алгебра $\mathfrak{A}$ допускает изоморфное абсолютно неприводимое представление.

Общий случай можно легко свести к этому частному. Действительно пусть теорема уже доказана для всех алгебр, допускающих изоморфное представление степени $< r$, и пусть даны алгебра $\mathfrak{A}$ и какое-либо ее изоморфное представление степени r . Если это представление абсолютно неприводимо, то все доказано. Предположим теперь, что оно приводимо и его приведенная форма есть $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$. Кольцо матриц A удовлетворяет условиям теоремы и имеет степень, меньшую r . Следовательно, ее матрицы выражаются линейно через конечное число их $A_1, A_2, \dots, A_k$ с коэффициентами из Δ . По той же причине все матрицы C выражаются линейно с коэффициентами из Δ через конечное число их $C_1, C_2, \dots, C_l$. Пусть еще

$$a_i \rightarrow \begin{pmatrix} A^{(i)} & 0 \\ B^{(i)} & C^{(i)} \end{pmatrix}$$

— представление образующих. Теперь легко видеть, что все матрицы алгебры $\mathfrak{A}$ могут быть линейно (с коэффициентами из Δ) выражены через матрицы

$$\begin{pmatrix} A_\lambda & 0 \\ A_\lambda B^{(\beta)} C_\gamma & C_\mu \end{pmatrix}.$$

Так как таких матриц конечное число, то $\mathfrak{A}$ будет конечным модулем над полем Δ , что и требовалось доказать.

12. Представимые периодические алгебры без радикалов. Пусть $\mathfrak{A}$ — представимая периодическая алгебра без радикала, Δ — ее основное поле и K — алгебраическое замыкание поля изоморфного представлению $\mathfrak{A}$. Редуцированная в K форма этого представ-

и отдельные неприводимые представления $a \rightarrow A_{s_i}$ будут представлениями этих идеалов. Другими словами, это означает, что

$$\mathfrak{B}_i^{(\alpha)} = \mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{A}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

Тем самым наше утверждение доказано. Сверх того, из изложенного видно, что $a \rightarrow A_{s_i}$ есть неприводимое представление алгебры $\mathfrak{A}_i$. Итак, мы пришли к следующему предложению:

Т е о р е м а 15. *Всякая периодическая представимая алгебра без радикала распадается в прямую сумму друг друга аннулирующих алгебр, каждая из которых допускает абсолютно неприводимое изоморфное представление.*

Теперь нам остается только выяснить структуру периодических алгебр, допускающих абсолютно неприводимое изоморфное представление. Ответ получается следующий:

Т е о р е м а 16. *Если периодическая алгебра $\mathfrak{A}$ над Δ допускает абсолютно неприводимое изоморфное представление, то $\mathfrak{A}$ содержит единицу. Центр Z алгебры $\mathfrak{A}$ есть поле, алгебраическое над Δ , и сама алгебра $\mathfrak{A}$ является конечной простой алгеброй над Z .*

Пусть $\mathfrak{D}$ — абсолютно неприводимое представление степени r алгебры $\mathfrak{A}$. Мы уже видели, что в алгебре $\mathfrak{A}$ существует конечная подалгебра $\mathfrak{B}$, для которой представление $\mathfrak{D}$ остается все еще неприводимым. Так как $\mathfrak{B}$ — конечная алгебра и допускает изоморфное абсолютно неприводимое представление, то $\mathfrak{B}$ содержит единицу и является простой алгеброй ранга r^2 над своим центром U [2]. Но представление $\mathfrak{D}$ для $\mathfrak{B}$ абсолютно неприводимо, поэтому элементы изображаются скалярными матрицами и, следовательно, перестановочны вообще со всеми матрицами, а единица из $\mathfrak{B}$ изображается единичной матрицей. Таким образом, единица $\mathfrak{B}$ является единицей для $\mathfrak{A}$ и центр $\mathfrak{B}$ содержится в центре $\mathfrak{A}$.

Нам остается доказать, что $\mathfrak{A}$ ранга r^2 над своим центром Z . Пусть $a_0, a_1, \dots, a_{r^2-1}$ — $r^2 + 1$ произвольных элементов $\mathfrak{A}$. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{C}$, порожденную этими элементами и элементами $\mathfrak{B}$. Алгебра $\mathfrak{C}$ имеет конечное число образующих и потому будет конечной алгеброй. Но представление $\mathfrak{D}$ неприводимо для $\mathfrak{C}$, так как оно неприводимо для $\mathfrak{B}$, содержащейся в $\mathfrak{C}$. Следовательно, $\mathfrak{C}$ — простая алгебра ранга r^2 над своим центром V и V содержится в центре $\mathfrak{A}$. Из того, что ранг $\mathfrak{C}$ над V есть r^2 , следует, что между элементами a_i существует соотношение вида

$$v_0 a_0 + v_1 a_1 + \dots + v_{r^2-1} a_{r^2-1} = 0,$$

где $v_i \in V$ и по крайней мере для одного значения i $v_i \neq 0$, что и требовалось доказать.

Последние две теоремы показывают, что представимые периодические алгебры без радикала удовлетворяют условию обрыва возрастающих и убывающих цепочек левосторонних идеалов и принадлежат, таким образом, к классу хорошо изученных колец. Обратное, т. е. что алгебры без радикала, удовлетворяющие условию обрыва возрастающих и убывающих цепочек левосторонних идеалов, представимы, непосредственно вытекает из структурных теорем [8, стр. 166].

Из двух последних теорем можно вывести несколько следствий относительно представимых периодических алгебр с радикалом. Прежде всего предположим, что основное поле Δ периодической представимой алгебры $\mathfrak{A}$ алгебраически замкнуто. Согласно п. 10 алгебра вычетов $\mathfrak{A}$ по ее радикалу R

будет представимой периодической алгеброй без радикала. Следовательно, $\mathfrak{A}/R$ распадается в прямую сумму друг друга аннулирующих простых алгебр $\bar{\mathfrak{A}}_i$. Последние по теореме 16 будут конечными алгебрами над своими центрами $\bar{Z}_i$. Так как $\bar{Z}_i$ алгебраичны над Δ , а Δ алгебраически замкнуто, то $\bar{Z}_i$ должны совпадать с Δ , т. е. $\bar{\mathfrak{A}}_i$ будут конечными над Δ . Их прямая сумма, очевидно, также конечна над Δ , и мы приходим к следующему положению:

Т е о р е м а 17. *Радикал всякой представимой периодической алгебры над алгебраически замкнутым основным полем имеет конечный индекс.*

В п. 8 мы видели, как, зная какое-либо представление идеала конечного индекса, найти представление самой алгебры. Поэтому в случае алгебраически замкнутого основного поля теорема 17 сводит вопрос о представимости произвольных периодических алгебр целиком к аналогичному вопросу для нильпотентных алгебр.

Теоремами 15, 16 можно воспользоваться и для решения проблемы Бернсайда в той форме, в которой эта проблема была решена для матричных групп самим Бернсайдом. Именно, им было доказано, что группа матриц над полем характеристики нуль, порядки элементов которой в совокупности ограничены, содержит только конечное число матриц [1]. Аналогично можно поставить вопрос и для алгебр: не будет ли изоморфно представимая алгебра конечной, если каждый ее элемент является корнем некоторого полинома с коэффициентами из основного поля и степени всех этих полиномов в совокупности ограничены? Если не делать никаких предположений относительно радикала, то ответ будет заведомо отрицательный. Таким образом, речь может идти только о свойствах кольца вычетов по радикалу. Оказывается, что кольцо вычетов по радикалу у таких алгебр будет конечным над полем Δ .

Действительно, пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, удовлетворяющая перечисленным требованиям, и R — ее радикал. Алгебра $\mathfrak{A}/R$ радикала не содержит и снова удовлетворяет тем же требованиям. По теореме 15 $\mathfrak{A}/R$ распадается в прямую сумму простых алгебр $\bar{\mathfrak{A}}_1 + \bar{\mathfrak{A}}_2 + \dots + \bar{\mathfrak{A}}_k$. Каждое слагаемое $\bar{\mathfrak{A}}_i$ имеет конечный ранг над своим центром $\bar{Z}_i$. Рассмотрим $\bar{Z}_i$. По условию каждый элемент поля $\bar{Z}_i$ алгебраичен над Δ и степени всех элементов $\bar{Z}_i$ относительно Δ в совокупности ограничены. Однако это может быть только в том случае, когда $\bar{Z}_i$ будет конечным расширением основного поля Δ . Таким образом, $\bar{Z}_i$ конечны над Δ и $\bar{\mathfrak{A}}_i$ конечны над $\bar{Z}_i$. Следовательно, все $\bar{\mathfrak{A}}_i$, а значит, и $\mathfrak{A}/R$ конечны над Δ .

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Burnside. On criteria for the finiteness of the order of a group of linear substitutions.—Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1905, 3, 435—440.
2. M. Deuring. Algebren. Berlin, 1935.
3. А. Г. Куров. Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах.—Изв. АН СССР, сер. мат., 1941, 5, № 3, 233—240.
4. А. И. Мальцев. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами.—Мат. сб., 1940, 8, № 3, 405—422.
5. В. Л. Нусневич. О группах, изоморфно представимых матрицами над коммутативным полем.—Мат. сб. 1940, 8, № 3, 395—403.
6. I. Schur. Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen.—J. reine und angew. Math., 1905, 130, 66—76.
7. B. L. Van der Waerden. Gruppen von linearen Transformationen. Berlin, 1935.
8. B. L. Van der Waerden. Moderne Algebra, Bd. II. Berlin, 1931.
9. I. Schur. Über Gruppen periodischer linearer Substitutionen.—Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1911, 619—627.



Целью настоящей работы является решение задачи о нахождении всех классов сопряженных полупростых подгрупп полупростых групп Ли **. Эта задача, далее называемая для краткости основной задачей, сводится к перечислению полупростых подгрупп простых групп и решается в § 2—3 для всех простых групп, кроме трех особых групп E_6 , E_7 , E_8 .

В § 1 рассматривается более общая задача об изучении свойств полупростых подгрупп произвольных групп Ли. Здесь прежде всего показывается, что все максимальные полупростые подгруппы произвольной неполупростой группы Ли сопряжены между собой. Отсюда, далее, выводится, что классов сопряженных полупростых подгрупп в неполупростой группе $\mathfrak{G}$ в точности столько, сколько их имеется в максимальной полупростой подгруппе $\mathfrak{G}$. Таким образом, задача о перечислении полупростых подгрупп произвольных групп Ли оказывается эквивалентной своему частному случаю, сформулированному выше под именем основной задачи.

В заключение § 1 показывается, что проблема построения групп Ли с данным радикалом также сводится к упомянутой основной задаче. Этот результат, по-видимому, имеет и самостоятельный интерес. Действительно, в силу теоремы Леви фундаментальная проблема классификации групп Ли распадается на три части: 1) классификация полупростых групп, 2) классификация разрешимых групп и 3) классификация групп с заданным радикалом и заданной фактор-группой по нему. Теорема Леви хотя и является основной для решения последней проблемы, однако сама по себе ее еще не решает [11, стр. 287]. Упомянутое нами сведение этой задачи к основной задаче интересно в том отношении, что показывает, что ее решение зависит от решения вопросов, касающихся только теории полупростых групп. Говоря не вполне точно, групп с данным радикалом существует столько, сколько классов сопряженных полупростых подгрупп имеет максимальная полупростая группа автоморфизмов радикала. Принимая во внимание результаты § 2—3, отсюда следует, например, что неизоморфных групп с данным радикалом и данной фактор-группой по нему существует только конечное число.

К той же основной задаче приводятся и некоторые другие важные вопросы теории групп Ли. Так, В. В. Морозовым было показано, что классическая задача о нахождении примитивных групп Ли приводится к определению максимальных подгрупп полупростых групп [8]. С другой стороны, все неполупростые максимальные подгруппы им определены [9]. Таким образом, остается отыскать только полупростые максимальные подгруппы, что уже связано с нашей основной задачей.

* Изв. АН СССР, сер. мат., 1944, 8, № 4, 143—174.

** Здесь и в дальнейшем группами Ли называются комплексные связные группы и соответственно алгебрами Ли — алгебры над полем комплексных чисел. Как правило, группы будут обозначаться готическими, а их алгебры — латинскими буквами.

Наконец, к основной задаче приводится и задача отыскания компактных подгрупп групп Ли. Действительно, всякая компактная группа Ли есть прямое произведение полупростой и абелевой групп. Поэтому ясно, что задача определения компактных подгрупп вещественной группы Ли тесно связана с нахождением ее комплексных полупростых подгрупп. В другом месте нами показано, что обе задачи в точности эквивалентны [10]. Можно отметить, что геометрически нахождение подгрупп компактных групп дает перечисление однородных топологических многообразий с компактной транзитивной группой преобразований.

Таким образом, основная задача о перечислении полупростых подгрупп полупростых групп представляется имеющей большой интерес как сама по себе, так и по своим связям с различными другими вопросами. Решению ее посвящены § 2—3 настоящей статьи. В вводной части устанавливается зависимость этой задачи от теории представлений и показывается, что общая задача нахождения полупростых подгрупп в полупростых группах распадается на отдельные задачи определения полупростых подгрупп в простых группах Ли. Далее, в § 2 дается решение этой задачи для четырех бесконечных серий классических групп $\mathfrak{U}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{D}_n$. Решение ее для особых групп G_2 , F_4 содержится в § 3. Что касается полупростых подгрупп остальных трех простых групп E_6 , E_7 , E_8 , то они нами не определены и, таким образом, полученное решение основной задачи остается неполным.

Основным результатом § 3 является теорема о том, что всякие две трехчленные простые подгруппы $\{\varepsilon, f, \varepsilon^*\}$ и $(\varepsilon_1, f, \varepsilon_1^*)$ с общим элементом f являются сопряженными в любой полупростой группе, их содержащей *. Пользуясь этим, можно дать перечисление всех полупростых подгрупп G_2 , F_4 в совершенно явной форме, что в § 3 и выполнено.

Несколько более сложно обстоит дело в § 2. Здесь основным средством является теория представлений Картана — Вейля. Чтобы яснее представить результат, рассмотрим, например, серию $\mathfrak{C}_n$ симплектических групп. Пусть $\mathfrak{G}$ — заданная полупростая группа и требуется перечислить с точностью до сопряженности все изоморфные $\mathfrak{G}$ подгруппы какой-либо группы $\mathfrak{C}_p$. Если $\mathfrak{H}$ — одна из таких групп, то изоморфизм $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{H}$ является представлением $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{C}_p$, т. е. симплектическим представлением группы $\mathfrak{G}$ степени $2p$. Можно показать, что, обратно, всякое симплектическое представление $\mathfrak{G}$ степени $2p$ однозначно определяет некоторую подгруппу $\mathfrak{C}_p$ и что эквивалентные представления дают, вообще говоря, сопряженные подгруппы. Но в теории Картана [2] каждое линейное представление однозначно определяется некоторой линейной формой Λ , называемой весом представления, и для каждой полупростой группы $\mathfrak{G}$ все веса Картаном перечислены **. Следовательно, для решения нашей задачи нужно из полной серии картановских весов $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ группы $\mathfrak{G}$ выбрать те, которые отвечают симплектическим представлениям $\mathfrak{G}$. Такая выборка и производится в § 2 как для симплектических, так и для ортогональных представлений. Пусть теперь мы знаем веса $\Lambda_{n_1}, \Lambda_{n_2}, \dots$ симплектических представлений $\mathfrak{G}$. Согласно сказанному это дает нам право утверждать, что мы знаем все изоморфные $\mathfrak{G}$ подгруппы

* Здесь $\varepsilon, f, \varepsilon^*$ — канонический базис, связанный соотношениями $[f\varepsilon] = \varepsilon$, $[f\varepsilon^*] = -\varepsilon^*$, $[\varepsilon\varepsilon^*] = f$, аналогичными и для $\varepsilon_1, f, \varepsilon_1^*$.

** Если представление приводимо, то вместо одной линейной формы нужно взять систему форм, которую, очевидно, можно снова заменить линейной формой от большего числа переменных.

сразу всех простых групп серии $\mathfrak{C}$. Чтобы получить отсюда изоморфные $\mathfrak{G}$ подгруппы какой-нибудь индивидуальной группы $\mathfrak{C}_p$, нужно по формулам Вейля [11] вычислить степени представлений Λ_{n_i} и выбрать из них те, степени которых равны $2p$.

В заключение отметим, что отдельные частные случаи основной задачи рассматривались и ранее. Так, Ф. Р. Гантмахер [7] перечисляет все трехчленные подгруппы классических групп. Вспомогательным средством здесь также служит теория представлений, и само перечисление заключается в том, то указываются симплектические и ортогональные представления трехчленной простой группы. Относительно общей задачи им отмечено, что возможно только найти так называемые семирегулярные полупростые подгруппы простых групп.

§ 1. Максимальные полупростые подалгебры алгебр Ли

1. Единственность разложения Леви. В теории групп Ли большую роль играет теорема Леви, согласно которой во всякой алгебре Ли G с радикалом R существует полупростая подалгебра, изоморфная алгебре вычетов G/R . Обозначив эту подалгебру через L , мы получим для G разложение $G = L + R$. $L \cap R = 0$. Пусть $\mathfrak{G}$ — связная, односвязная группа Ли с алгеброй G . Подалгебрам L и R в $\mathfrak{G}$ отвечают замкнутые связные подгруппы $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}$, и теорема Леви дает представление $\mathfrak{G}$ в виде полупрямого произведения $\mathfrak{G} = \mathfrak{L}\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{R} = \{e\}$. Естественно возникает вопрос, насколько такое разложение однозначно. Абсолютно однозначным оно может быть только в тривиальном случае, когда $\mathfrak{G}$ распадается в прямое произведение $\mathfrak{L} \times \mathfrak{R}$. Следовательно, речь может идти только об однозначности с точностью до внутренних автоморфизмов и такая однозначность действительно имеет место.

Т е о р е м а 1. Если $\mathfrak{G} = \mathfrak{L}\mathfrak{R} = \mathfrak{L}^*\mathfrak{R}$ — два представления связной группы Ли в виде произведения своего радикала и полупростой подгруппы, то $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^*$ сопряжены в $\mathfrak{G}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для групп размерности 1 теорема тривиальна. Предположим теперь, что теорема доказана для всех групп, имеющих меньшую размерность, чем данная. Если радикал $\mathfrak{R}$ содержит нетривиальный связный нормальный делитель $\mathfrak{S}$ группы $\mathfrak{G}$, отличный от $\mathfrak{R}$, то для фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{S} = \bar{\mathfrak{G}}$ мы будем иметь два разложения $\bar{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{L}}\bar{\mathfrak{R}} = \bar{\mathfrak{L}}^*\bar{\mathfrak{R}}$, где $\bar{\mathfrak{L}}$, $\bar{\mathfrak{L}}^*$, $\bar{\mathfrak{R}}$ — образы соответственных подгрупп при гомоморфизме $\mathfrak{G} \rightarrow \bar{\mathfrak{G}}$. Так как размерность $\bar{\mathfrak{G}}$ меньше размерности $\mathfrak{G}$, то в $\bar{\mathfrak{G}}$ найдется такой элемент $\bar{x}$, что $\bar{\mathfrak{L}}^* = \bar{x}^{-1}\bar{\mathfrak{L}}\bar{x}$. Следовательно, $\mathfrak{L}^* \subset x^{-1}\mathfrak{L}x \cdot \mathfrak{S}$. Обозначим $x^{-1}\mathfrak{L}x$ через $\mathfrak{L}^{**}$ и заметим, что группа $\mathfrak{L}^*\mathfrak{S} = \mathfrak{L}^{**}\mathfrak{S}$ допускает снова два разложения Леви. Так как ее размерность меньше размерности $\mathfrak{G}$, то в ней должен найтись элемент, переводящий $\mathfrak{L}^*$ в $\mathfrak{L}^{**}$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь случай, когда радикал $\mathfrak{R}$ не содержит нормальных делителей $\mathfrak{G}$ и, значит, коммутативен. Перейдем к алгебрам Ли. Имеем: $G = L + R = L^* + R$, $[RR] = 0$ и R не содержит идеалов алгебры G . Пусть $e_1, \dots, e_r$ — базис L , $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — базис R , $[e_\alpha e_\beta] = c_{\alpha\beta}^\lambda e_\lambda$, $[e_\alpha \eta_i] = h_{\alpha i}^m \eta_m$. Так как $L \equiv L^* \pmod{R}$, то в L^* найдется базис, образованный элементами $e_\alpha^* = e_\alpha + v_\alpha^i \eta_i$ ($\alpha = 1, 2, \dots, r$). Вводя обозначения

$h_\alpha = |h_{\alpha i}^m|$, $v_\alpha = (v_\alpha^1, v_\alpha^2, \dots, v_\alpha^n)$ и принимая во внимание, что $[e_\alpha^* e_\beta^*] = c_{\alpha\beta}^\lambda c_\lambda^*$, мы получим *

$$h_\alpha v_\beta - h_\beta v_\alpha = c_{\alpha\beta}^\lambda v_\lambda. \quad (1)$$

Линейное преобразование T пространства G , определяемое соотношениями

$$Te_\alpha = e_\alpha + v_\alpha^i \eta_i, \quad T\eta_i = \eta_i, \quad (2)$$

есть, очевидно, автоморфизм алгебры G , переводящий L в L^* . Остается показать, что он внутренний, т. е. что найдется такой элемент $t = t^i \eta_i$, что для матрицы A , определяемой соотношением $Ax = [tx]$ ($x \in G$), будет выполняться условие $T = \exp A$. Так как $A^2 = 0$, то $A = E + A$ (E — единичная матрица) и отсюда, принимая во внимание (2), получим $h_\alpha t = v_\alpha$, где t — искомый вектор $(t^1, t^2, \dots, t^n)$. Из соотношения (1) имеем

$$h^\alpha h_\beta v_\alpha = h^\alpha h_\alpha v_\beta - c_{\alpha\beta}^\lambda h^\alpha v_\lambda.$$

Замечая, что

$$h^\alpha h_\beta = h_\beta h^\alpha + c_{\alpha\beta}^\lambda h_\lambda; \quad c_{\mu\beta}^\lambda h^\mu = c_{\alpha\beta}^\lambda h_\mu,$$

и вводя обозначения $h^\alpha h_\alpha = \nabla$, $v = h^\alpha v_\alpha$, мы приходим к равенству $h_\beta v = \nabla v$. Так как отображение $e_\alpha \rightarrow h_\alpha$ является неприводимым представлением алгебры L и $\nabla h_\alpha = h_\alpha \nabla$, то либо существует ∇^{-1} , либо $\nabla = 0$. Если представление не нулевое, то $\nabla \neq 0$ и $t = \nabla^{-1}v$ будет искомым решением уравнений $h_\alpha t = v_\alpha$. Если же все $h_\alpha = 0$, то соотношения (1) обращаются в $c_{\alpha\beta}^\lambda v_\lambda = 0$, откуда следует **, что $v_\alpha = 0$ и $L = L^*$.

Теорему 1 можно сформулировать также в следующей несколько более общей форме.

Т е о р е м а 1а. Пусть $\mathfrak{R}$ — радикал группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G} = \mathfrak{L}\mathfrak{R}$ — какое-либо ее разложение Леви. Тогда всякая полупростая подгруппа $\mathfrak{L}^* \subset \mathfrak{G}$ сопряжена с некоторой подгруппой из $\mathfrak{L}$.

Действительно, всякий элемент $l^* \in \mathfrak{L}^*$ однозначно представляется в виде произведения $l^* = lr$ ($l \in \mathfrak{L}$, $r \in \mathfrak{R}$). Совокупность всех l , участвующих в таких разложениях, является полупростой связной подгруппой $\mathfrak{L}^{**} \subset \mathfrak{L}$. Так как $\mathfrak{L}^{**}\mathfrak{R} = \mathfrak{L}^*\mathfrak{R}$, то найдется элемент $t \in \mathfrak{R}$, дающий $t^{-1}\mathfrak{L}^*t = \mathfrak{L}^{**}$, что и требовалось.

Одной из важных теорем теории полупростых групп является теорема о полной приводимости их линейных представлений. Эта теорема была доказана Г. Вейлем с помощью интегрирований по группе. Позже были даны и алгебраические доказательства ее, например, [4]. Мы покажем сейчас, что эта теорема является непосредственным следствием теоремы 1.

Т е о р е м а. Все линейные представления полупростой группы распадаются на неприводимые части.

* По дважды встречающимся индексам ведется суммирование. Опускание и поднятие индексов осуществляется с помощью основного тензора $c_{\alpha\beta} = c_{\alpha\mu}^\lambda c_{\lambda\beta}^\mu$. В частности, $h^\alpha = c^{\alpha\lambda} h_\lambda$, $c_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = c_{\lambda\gamma}^\alpha c^{\lambda\beta}$. Тождество $[[e_\alpha e_\beta] \eta] = [e_\alpha [e_\beta \eta]] - [e_\beta [e_\alpha \eta]]$ дает $h_\alpha h_\beta - h_\beta h_\alpha = c_{\alpha\beta}^\lambda h_\lambda$. Таким образом, соответствие $e_\alpha \rightarrow h_\alpha$ есть линейное представление алгебры L . Отсутствие идеалов G в R означает неприводимость этого представления.

** Действительно, $0 = -c_{\alpha\beta}^\lambda v_\lambda = c_{\lambda\beta}^\lambda v^\lambda = v_\beta$. Простое доказательство неравенства $\nabla \neq 0$ содержится в [12], откуда заимствуются и обозначения этого пункта.

В самом деле, пусть $\mathfrak{L}$ — матричная полупростая алгебра. Приведем все ее матрицы к виду

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & A_n \end{pmatrix},$$

где $\{A_i\}$ — уже неприводимые системы. Пусть далее

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}$$

и пусть R — совокупность всевозможных треугольных матриц, у которых места квадратов $A_1, \dots, A_n$ заняты нулями. Отображение $A \rightarrow A^*$ является изоморфным отображением алгебры L на полупростую алгебру $L^* = \{A^*\}$. Сумма $L + R = L^* + R$ есть алгебра Ли, радикалом которой служит R , а L и L^* являются ее максимальными полупростыми подалгебрами. По теореме 1 в R найдется такая матрица S , что $S^{-1}LS = L^*$, что и требовалось.

2. Сопряженность полупростых подгрупп. Во многих вопросах важно знать полупростые подгруппы некоторой группы Ли. Все эти подгруппы распадаются на классы сопряженных, и дело идет о перечислении этих классов. Следующая теорема показывает, что изучение полупростых подгрупп произвольной группы Ли и изучение полупростых подгрупп ее максимальной полупростой подгруппы — задачи вполне эквивалентные:

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{L}$ — максимальная связанная полупростая подгруппа связанной односвязной группы Ли $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ — две полупростые подгруппы из $\mathfrak{L}$. Если $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ сопряжены в $\mathfrak{G}$, то они сопряжены и в $\mathfrak{L}$. Если существует внешний автоморфизм группы $\mathfrak{G}$, переводящий $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{Q}$, то существует также автоморфизм $\mathfrak{G}$, переводящий $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{Q}$ и оставляющий $\mathfrak{L}$ на месте.

В самом деле, возьмем разложение Леви $\mathfrak{G} = \mathfrak{L}\mathfrak{R}$. Нам дано, что $g^{-1}\mathfrak{P}g = \mathfrak{Q}$. Пусть $g^{-1}pg = q$ ($p \in \mathfrak{P}, q \in \mathfrak{Q}$) и $g = lr$. Из $r^{-1}l^{-1}plr = q$, $l^{-1}pl \cdot r = q \cdot q^{-1}rq$ следует $l^{-1}pl = q$. Таким образом, $l^{-1}\mathfrak{P}l = \mathfrak{Q}$, что и требуется. Второе утверждение доказывается аналогичным путем. Пусть θ — автоморфизм $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{P}^0 = \mathfrak{Q}$. Так как $\mathfrak{R}$ — характеристическая подгруппа, то $\mathfrak{R}^0 = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{L}^0 \cdot \mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{L}^0$. Но теорема 1 дает $r\mathfrak{L}^0r^{-1} = \mathfrak{L}$. Соотношение $r\mathfrak{P}^0r^{-1} = r\mathfrak{Q}r^{-1} \subset \mathfrak{L}$ показывает, что $r^{-1}qr = l$, $r^{-1} \cdot qrq^{-1} = lq^{-1}$. Так как левая часть содержится в $\mathfrak{R}$, а правая в $\mathfrak{L}$, то $q = l$, $r\mathfrak{Q}r^{-1} = \mathfrak{Q}$, $r\mathfrak{P}^0r^{-1} = \mathfrak{Q}$. Значит, θr^{-1} — искомый автоморфизм группы $\mathfrak{G}$.

Иногда важно знать не только классы внутренне сопряженных, но и более широкие классы подгрупп, сопряженных относительно некоторой группы автоморфизмов A ($\mathfrak{G}$), содержащей также и внешние автоморфизмы $\mathfrak{G}$. Вторая часть теоремы 2 показывает, что в этом случае можно найти такую группу автоморфизмов A ($\mathfrak{L}$) группы $\mathfrak{L}$, что нахождение полупростых подгрупп $\mathfrak{G}$, сопряженных относительно A ($\mathfrak{G}$), и нахождение полупростых подгрупп $\mathfrak{L}$, сопряженных относительно A ($\mathfrak{L}$), будут равносильными задачами. Но группа всех автоморфизмов полупростой группы $\mathfrak{L}$ имеет конечный индекс относительно внутренних автоморфизмов A_0 ($\mathfrak{L}$) и канонические формы внешних автоморфизмов известны (ср. [3, 6]). Поэтому задача нахож-

дения классов полупростых подгрупп $\mathfrak{L}$, сопряженных относительно какой-нибудь группы автоморфизмов $A(\mathfrak{L}) \supset A_0(\mathfrak{L})$, в сущности эквивалентна нахождению классов внутренне сопряженных подгрупп.

3. Группы с данным радикалом. Теоремы 1, 2 вместе с теоремой Леви оказываются достаточными, чтобы решить один из вопросов, относящихся к классификации алгебр Ли. Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторая данная разрешимая группа Ли, которую мы будем предполагать связной и односвязной. Требуется указать с точностью до изоморфизма все группы Ли $\mathfrak{G}$, имеющие $\mathfrak{K}$ своим радикалом.

Прежде всего мы можем исключить из рассмотрения тривиальный случай, когда $\mathfrak{G}$ содержит полупростой нормальный делитель $\mathfrak{P}$. Действительно, в этом случае $\mathfrak{G}$ разлагается в прямое произведение $\mathfrak{P}$ и некоторой группы $\mathfrak{H}$ с тем же радикалом (см. [1]). Обратно, прямое произведение группы $\mathfrak{H}$ с радикалом $\mathfrak{K}$ на произвольную полупростую группу дает, очевидно, группу с радикалом $\mathfrak{K}$. Группы, не имеющие полупростых нормальных делителей, назовем *неразложимыми*, и тогда общая задача редуцируется к такой: найти все неразложимые группы с данным радикалом.

Пусть R — алгебра Ли группы $\mathfrak{K}$. Группа $\mathfrak{G}$ всех автоморфизмов $\mathfrak{K}$ совпадает с группой автоморфизмов алгебры R . Но автоморфизмы R суть матрицы, элементы которых удовлетворяют определенной конечной системе алгебраических уравнений, и, таким образом, $\mathfrak{G}$ может быть рассматриваемая как вполне известная. Обозначим через $\mathfrak{L}$ какую-либо максимальную связную полупростую подгруппу $\mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{G}$ линейна, то $\mathfrak{L}$ замкнута и все ее полупростые подгруппы также замкнуты. Группу внутренних автоморфизмов $\mathfrak{G}$, оставляющих на месте $\mathfrak{L}$, обозначим $A(\mathfrak{G})$. Каждый автоморфизм из $A(\mathfrak{G})$ индуцирует некоторый автоморфизм группы $\mathfrak{L}$. Совокупность таких индуцированных автоморфизмов обозначим через $A(\mathfrak{L})$. Ясно, что $A(\mathfrak{L})$ содержит все внутренние автоморфизмы $\mathfrak{L}$.

Составим полупрямое произведение $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}\mathfrak{K}$ группы $\mathfrak{K}$ на ее группу автоморфизмов $\mathfrak{L}$. Очевидно, $\mathfrak{F}$ является одной из групп, имеющих своим радикалом $\mathfrak{K}$. Подгруппы $\mathfrak{F}$ вида $\mathfrak{L}_1\mathfrak{K}$, где $\mathfrak{L}_1$ какая-либо полупростая подгруппа $\mathfrak{L}$, будут снова группами с радикалом $\mathfrak{K}$. Мы покажем, что эти подгруппы исчерпывают неразложимые группы с радикалом $\mathfrak{K}$.

Теорема 3. *Всякая неразложимая группа Ли с радикалом $\mathfrak{K}$ локально изоморфна одной из групп вида $\mathfrak{L}_1\mathfrak{K}$, где $\mathfrak{L}_1$ — полупростая подгруппа $\mathfrak{L}$. Две подгруппы $\mathfrak{L}_1\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{L}_2\mathfrak{K}$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ сопряжены в группе $A(\mathfrak{L})$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}$ — односвязная неразложимая группа с радикалом $\mathfrak{K}$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{L}}$ ее максимальную полупростую подгруппу. $\tilde{\mathfrak{L}}$ замкнута, и $\mathfrak{G} = \tilde{\mathfrak{L}}\mathfrak{K}$, $\tilde{\mathfrak{L}} \cap \mathfrak{K} = \{e\}$. Элементы $\tilde{\mathfrak{L}}$, перестановочные со всеми элементами $\mathfrak{K}$, образуют нормальный делитель $N \subset \tilde{\mathfrak{L}}$. Связная компонента единицы N является полупростым нормальным делителем $\mathfrak{G}$ и в силу предположенной неразложимости $\mathfrak{G}$ должна быть единицей. Таким образом, N дискретна и фактор-группа $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}/N = \tilde{\mathfrak{L}}/N \cdot \mathfrak{K}$ локально изоморфна $\mathfrak{G}$. Каждый элемент $\tilde{\mathfrak{L}}/N$ производит нетождественный автоморфизм $\mathfrak{K}$. Поэтому мы можем элементы $\tilde{\mathfrak{L}}/N$ отождествить с соответствующими автоморфизмами и тем самым отобразить изоморфно $\mathfrak{G}$ на некоторую подгруппу $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$ полупрямого произведения $\mathfrak{G}\mathfrak{K}$. В силу теоремы 1а найдется такой элемент $\sigma \in \mathfrak{G}$, что $\sigma^{-1}\mathfrak{P}\sigma \subset \mathfrak{L}$. Так как $\sigma^{-1}\mathfrak{K}\sigma = \mathfrak{K}^\sigma = \mathfrak{K}$, то $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{K}$

с помощью автоморфизма σ изоморфно отображится на $\sigma^{-1}\mathfrak{P}\sigma \cdot \mathfrak{K}$, и первое утверждение доказано. Вместе с тем мы видим, что сопряженные подгруппы $\mathfrak{L}_1$ и $\sigma^{-1}\mathfrak{L}_1\sigma$ дают изоморфные группы $\mathfrak{L}_1\mathfrak{K} \cong \sigma^{-1}\mathfrak{L}_1\sigma \cdot \mathfrak{K}$.

Остается доказать последнее утверждение. Пусть $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{L}_1\mathfrak{K}$, $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{L}_2\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{G}_1 \cong \mathfrak{G}_2$. Обозначим этот изоморфизм через θ , так что $\mathfrak{G}_1^{\theta} = \mathfrak{G}_2$. Радикал $\mathfrak{K}$ является характеристической подгруппой, поэтому $\mathfrak{K}^{\theta} = \mathfrak{K}$. Следовательно, θ индуцирует в $\mathfrak{K}$ некоторый автоморфизм σ . Пусть $\mathfrak{L}_1^{\theta} = \mathfrak{L}_2^*$, тогда $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{L}_2^* \mathfrak{K}$ и $(rl)^{\theta} = r^{\theta}l^{\theta} = l^{\theta}r^{\sigma l^{\theta}}$ ($r \in \mathfrak{K}$, $l \in \mathfrak{L}_1$). С другой стороны, $(rl)^{\theta} = (l^{\theta}r)^{\theta} = l^{\theta}r^{\sigma l^{\theta}}$. Сравнивая, мы видим, что $r^{\sigma l^{\theta}} = r^{\theta}$, т. е. $\sigma^{-1}l\sigma = l^{\theta}$ и $\mathfrak{L}_1^{\theta} = \sigma^{-1}\mathfrak{L}_2\sigma = \mathfrak{L}_2^*$. По теореме 1 группа $\mathfrak{L}_2^*$ сопряжена с $\mathfrak{L}_2$. Следовательно, $\mathfrak{L}_1$ сопряжена с $\mathfrak{L}_2$ в группе $\mathfrak{EK}$. Так как $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ содержатся в максимальной полупростой подгруппе $\mathfrak{L}$ этой группы, то, применяя теорему 2, мы видим, что $\mathfrak{L}_2$ переводится в $\mathfrak{L}_1$ некоторым автоморфизмом $A(\mathfrak{L})^*$.

§ 2. Ортогональные и симплектические представления полупростых групп

Предметом настоящего параграфа является изучение полупростых подгрупп полупростых же групп Ли. В § 1 было показано, что более общая задача определения полупростых подгрупп в произвольных группах вполне эквивалентна этому ее частному случаю.

Пусть G — алгебра Ли и $\mathfrak{G}$ — ее присоединенная связная группа. Две подалгебры H, H_1 из G называются сопряженными, если одна из них переводится в другую некоторым преобразованием $\mathfrak{G}$. Алгебрам H, H_1 в $\mathfrak{G}$ отвечают связные, но может быть незамкнутые подгруппы $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1$, которые тогда и только тогда сопряжены в $\mathfrak{G}$, когда сопряжены их подалгебры. Ясно, что для определения сопряженности подалгебр можно вместо $\mathfrak{G}$ брать любую группу с алгеброй G , лишь бы эта группа была связной.

Основной задачей является следующая. Дана полупростая алгебра G и система полупростых алгебр L_i ($i = 1, 2, \dots$). Требуется в каждой из L_i найти все классы изоморфных G сопряженных подалгебр. В такой форме эта задача тесно связана с общей задачей теории представлений. Действительно, если $\mathfrak{G}_1$ — подгруппа $\mathfrak{L}_i$, изоморфная $\mathfrak{G}$, то изоморфизм $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_1$ есть по определению представление $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{L}_i$. Два представления $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ эквивалентны в $\mathfrak{L}_i$, если существует элемент $l \in \mathfrak{L}_i$, удовлетворяющий соотношению $l^{-1}\mathfrak{D}_1(g)l = \mathfrak{D}_2(g)$ для всех $g \in \mathfrak{G}$. Ясно, что эквивалентные представления $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ дают подгруппы $\mathfrak{D}_1(\mathfrak{G}), \mathfrak{D}_2(\mathfrak{G})$, сопряженные в $\mathfrak{L}_i$. Обратное не всегда верно. Именно, из $\mathfrak{D}_2(\mathfrak{G}) = l^{-1}\mathfrak{D}_1(\mathfrak{G})l$ следует только, что для каждого $g \in \mathfrak{G}$ существует единственный элемент $g^{\sigma} \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющий соотношению $\mathfrak{D}_2(g) = l^{-1}\mathfrak{D}_1(g^{\sigma})l$. Преобразование σ является автоморфизмом $\mathfrak{G}$. Если этот автоморфизм внутренний, то $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ сопряжены в $\mathfrak{L}_i$; если внешний, то сопряженности может не быть.

К этому же кругу вопросов можно отнести и задачу определения классов внешние сопряженных подалгебр из L_i , т. е. подалгебр, переводящихся друг в друга не только внутренними, но и внешними автоморфизмами L_i .

Отношения, существующие между сформулированными тремя задачами, могут быть представлены следующим образом. Пусть сначала каким-либо

* Если бы $\mathfrak{G}$ была связной, то введение группы $A(\mathfrak{L})$ было бы излишним. Однако $\mathfrak{G}$ в общем случае несвязна и внутренние автоморфизмы $\mathfrak{G}$ могут давать внешние автоморфизмы связной ее компоненты.

путем мы нашли все представления G в L_i с точностью до эквивалентности. Тогда, объединяя в один класс представления, переводящиеся друг в друга внешними автоморфизмами G , мы получим сопряженные подалгебры L_i . Наконец, объединяя в один класс представления G , переходящие друг в друга не только при всех автоморфизмах G , но и при всех автоморфизмах L_i , мы получим внешние сопряженные подалгебры L_i . Таким образом, основным является отыскание представлений G в системе $\{L_s\}$ и нахождение внешних автоморфизмов G и L_i . Нас интересует определение полупростых подгрупп в полупростых группах. Так как внешние автоморфизмы полупростых групп хорошо известны, то дело сводится к построению теории представлений полупростых групп в полупростых группах.

Эта задача допускает дальнейшие упрощения. По теореме Картана каждая полупростая алгебра распадается в прямую сумму своих простых идеалов. Пусть $L = L_1 + L_2 + \dots + L_k$ — такое разложение и $\mathfrak{D}$ — некоторое представление G в L . Тогда разложение $\mathfrak{D}(g) = l_1 + l_2 + \dots + l_k$ ($l_i \in L_i$) создает систему представлений $g \rightarrow l_i = \mathfrak{D}_i(g)$ алгебры G в простых алгебрах L_i . Обратно, произвольная система таких представлений ведет к представлению G в L . Два представления $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ сопряжены в L тогда и только тогда, когда их соответственные составляющие $\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}'_i$ ($i = 1, \dots, k$) сопряжены в L_i . Следовательно, общая задача оказывается эквивалентной определению всех представлений G в простых алгебрах.

Простые группы известны и распадаются на четыре бесконечные серии $\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_n, \mathfrak{C}_n, \mathfrak{D}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) классических групп и на пять особых групп $\mathfrak{E}_6, \mathfrak{E}_7, \mathfrak{E}_8, \mathfrak{F}_4, \mathfrak{G}_2$. Для решения общей задачи нужно, следовательно, построить теорию представлений в каждой из этих групп. Однако здесь мы это сделаем только для классических групп. Что касается особых групп, то наименьшие из них $\mathfrak{F}_4, \mathfrak{G}_2$ будут рассмотрены в § 3, а представления в $\mathfrak{E}$ пока не изучены.

В известных мемуарах Е. Картана [2] и Г. Вейля [11] дана общая теория линейных представлений полупростых групп. Так как всякая матричная связная полупростая группа может сдерживать только матрицы определителя 1, то теорию Картана можно рассматривать как теорию представлений полупростых групп в группах $\mathfrak{A}_n$. Результаты этой теории позволяют построить и теорию представлений полупростых групп в остальных классических группах $\mathfrak{B}_n, \mathfrak{C}_n, \mathfrak{D}_n$, т. е. теорию симплектических и ортогональных представлений. В дальнейшем мы будем пользоваться общей системой координат. В таких координатах группы $\mathfrak{B}_n, \mathfrak{D}_n$ будут группами всех линейных преобразований в пространстве соответственно $2n + 1$ и $2n$ измерений, оставляющих инвариантной некоторую невырожденную симметричную билинейную форму, а группы $\mathfrak{C}_n$ будут группами линейных преобразований в пространстве $2n$ измерений, оставляющих инвариантной произвольную невырожденную кососимметрическую форму.

4. Ортогональная и симплектическая эквивалентность. Как сказано, нашей задачей является изучение ортогональных и симплектических представлений полупростых групп. Эти представления — частный случай общих линейных представлений, которые известны. Однако общие линейные представления классифицируются с точностью до эквивалентности в общей линейной группе, в то время как симплектические и ортогональные представления должны быть определены с точностью до симплектической или соответственно собственно ортогональной эквивалентности. Отсюда общая задача распадается на две части:

1) узнать, каким образом класс эквивалентных в общей линейной группе симплектических представлений распадается на классы симплектически эквивалентных (и аналогично для ортогональных);

2) определить, какие линейные представления являются ортогональными и какие симплектическими. Ответ на первый вопрос дают два предложения этого пункта.

Т е о р е м а 1. *Если два симплектических или ортогональных представления $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ некоторой группы $\mathfrak{G}$ эквивалентны в общей линейной группе, то они эквивалентны и в группе симплектических или соответственно в группе всех собственных и несобственных ортогональных преобразований.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы для случая ортогональных групп содержится уже у Фробениуса [5]. Для полноты мы его здесь воспроизводим. Положим $\mathfrak{D}_1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}_1, \mathfrak{D}_2(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}_2$. По условию преобразования $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ оставляют инвариантной квадратичную форму $\sum x_i^2$. Так как $A^{-1}\mathfrak{G}_1A = \mathfrak{G}_2$, то $\mathfrak{G}_2$ оставляет инвариантной вторую форму с матрицей $U = A^*A^*$. Это означает, что $G_2^*G_2 = E$ и $G_2^*UG_2 = U$ для $G_2 \in \mathfrak{G}$. Следовательно, U перестановочна со всеми матрицами $\mathfrak{G}_2$. Квадратичную форму U ортогональным преобразованием D можно привести к диагональному виду $U = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_s E_s$. Таким образом, в новой системе координат матрицы $\mathfrak{G}_2$ перестановочны с диагональной матрицей U и поэтому сами распадаются на соответственные части $G_2 = G_2^{(1)} + \dots + G_2^{(s)}$. Отсюда следует, что матрица $T = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} E_1 + \dots + \frac{1}{\sqrt{\lambda_s}} E_s$ также перестановочна с $\mathfrak{G}_2$. Матрица $B = AT$ ортогональна и $B^{-1}\mathfrak{G}_1B = \mathfrak{G}_2$, что и требовалось.

С л у ч а й с и м п л е к т и ч е с к и х п р е д с т а в л е н и й. Даны две связанные группы $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$, симплектических матриц, эквивалентные в общей линейной группе: $\mathfrak{G}_2 = A^{-1}\mathfrak{G}_1A$. Нам нужно показать, что найдется симплектическая матрица S , для которой произведение AS будет перестановочно со всеми матрицами $\mathfrak{G}_1$. Пусть U — кососимметрическая билинейная форма, инвариантность которой определяет понятие симплектичности в данной системе координат. Выберем новую систему координат так, чтобы пара кососимметрических форм U и $V = AUA^*$ приняла вид

$$U = \begin{vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{vmatrix}.$$

Группы $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ связаны и поэтому вместо них самих можно рассматривать их соответственные инфинитезимальные алгебры $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$. Пусть $G_1 \in \mathfrak{G}_1, G_2 = A^{-1}G_1A, G_2 \in \mathfrak{G}_2$. По предположению

$$G_1^*U + UG_1 = 0, \tag{1}$$

$$G_2^*U + UG_2 = 0. \tag{2}$$

Подставляя в (2) вместо G_2 его выражение через G_1 и исключая G_1^* с помощью (1), мы получим соотношение

$$G_1W = WG_1, \tag{3}$$

* Через A^* будет обозначаться транспонированная матрица. Выражение $X = Y + Z$ обозначает, что матрица X распадается на части Y, Z .

где

$$W = -VU = \begin{vmatrix} X & 0 \\ 0 & X^* \end{vmatrix}.$$

Нам нужно найти матрицу S , удовлетворяющую условиям

$$AS \cdot G_1 = G_1 \cdot AS, \quad S^*US = U. \quad (4)$$

Ищем S в виде $S = UAQ$, где

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & \varphi(X^*) \\ -\varphi(X) & 0 \end{vmatrix},$$

φ — неизвестная пока функция. Условия (4) теперь переписутся так:

$$G_1 \cdot W\varphi(W) = W\varphi(W) \cdot G_1,$$

$$\varphi(X^*)X^*\varphi(X^*) = E.$$

Первое из этих равенств выполняется при любой функции φ в силу (3), а из второго находим

$$\varphi(X) = X^{-1/2},$$

где для $\sqrt{X}$ следует взять значение, выражающееся в виде полинома от X .

Теорема 1 не вполне решает вопрос о разложении классов эквивалентных представлений на ортогонально эквивалентные. Действительно, согласно определению два представления алгебры G в алгебре L называются сопряженными в L , если они сопряжены в присоединенной группе $\mathfrak{L}$ или вообще в любой связной группе с алгеброй L . Однако, в то время как группа всех симплектических преобразований связна, группа всех ортогональных преобразований $\mathfrak{O}$ распадается на две компоненты. Легко видеть при этом, что в пространстве нечетного числа измерений сопряженность при помощи несобственного ортогонального преобразования влечет за собой сопряженность при помощи собственного. Таким образом, теорема 1 полностью решает вопрос о сопряженности представлений в группах $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$. Что касается групп $\mathfrak{D}_n$, то они требуют особого рассмотрения.

Т е о р е м а 2. Пусть $\mathfrak{A}$ — вполне приводимая связная группа ортогональных матриц степени $2n$. Если каждая из неприводимых частей, на которые распадается $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{O}(2n)$, имеет четную степень, то класс эквивалентных в $\mathfrak{O}(2n)$ представлений $\mathfrak{A}$ распадается на два подкласса относительно собственных ортогональных преобразований $\mathfrak{O}^+(2n)$. Если среди ортогонально неприводимых частей $\mathfrak{A}$ есть часть нечетной степени, то все сопряженные с $\mathfrak{A}$ ортогональные представления остаются сопряженными и в $\mathfrak{O}^+(2n)$.

Достаточно доказать только первое утверждение, так как второе очевидно. Преобразуя $\mathfrak{A}$ с помощью несобственной ортогональной матрицы, мы получим новое представление $\mathfrak{A}$. Нужно показать, что это представление не эквивалентно старому в $\mathfrak{O}^+(2n)$ или, что то же самое, что не существует несобственной ортогональной матрицы, перестановочной со всеми матрицами $\mathfrak{A}$. Раскладываем $\mathfrak{A}$ на ортогональные, ортогонально неприводимые части и выбираем такую систему координат, чтобы эквивалентные части стояли рядом. Объединяя эквивалентные части в отдельные клетки, мы получим разложение $\mathfrak{A}$ вида

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots + \mathfrak{A}_m.$$

Ниже будет показано, что ортогонально неприводимые системы либо абсолютно неприводимы, либо распадаются на две взаимно контрагredientные абсолютно неприводимые части. В частности, неэквивалентные ортогонально неприводимые системы не содержат эквивалентных частей. Следовательно, всякая матрица T , перестановочная с $\mathfrak{M}$, распадается на соответственные части

$$T = T_1 \dot{+} T_2 \dot{+} \dots \dot{+} T_m.$$

Если T ортогональна, то и T_i ортогональны. Поэтому теорема требует доказательства только для систем, распадающихся на эквивалентные ортогонально неприводимые части. Здесь могут представиться три случая:

1) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \dot{+} \mathfrak{M}_2 \dot{+} \dots \dot{+} \mathfrak{M}_m$, $\mathfrak{M}_i$ — ортогональны и абсолютно неприводимы. Выберем такую систему координат, чтобы все $\mathfrak{M}_i$ совпали. Тогда перестановочная с $\mathfrak{M}$ матрица T должна иметь вид $T = |t_{ij}E|$, где E — единичная матрица, размерность которой p равна размерности отдельных неприводимых частей и, следовательно, четна. Из ортогональности T следует ортогональность $|t_{ik}|$. Но в таком случае

$$|T| = |t_{ik}|^p = (\pm 1)^p = 1.$$

2) $\mathfrak{M}$ разлагается на ортогональные части, каждая из которых состоит из двух эквивалентных абсолютно неприводимых частей. Выбирая подходящую систему координат, мы приведем все матрицы $A \in \mathfrak{M}$ к виду

$$A = (A_1 \dot{+} A_1) \dot{+} (A_1 \dot{+} A_1) \dot{+} \dots \dot{+} (A_1 \dot{+} A_1),$$

где $\{A_1\}$ абсолютно неприводимы и неортогональны. По предположению $A_1^{*-1} = U^{-1}A_1U$ (см. п. 5). Отсюда следует, что U кососимметрична. Единственными инвариантными симметрическими формами для преобразований $A_1 \dot{+} A_1$ будут формы вида $\lambda \begin{vmatrix} 0 & U \\ -U & 0 \end{vmatrix}$. Соответственно единственными инвариантными симметрическими формами для A будут формы вида

$$S = \lambda_1 \begin{vmatrix} 0 & U \\ -U & 0 \end{vmatrix} \dot{+} \dots \dot{+} \lambda_m \begin{vmatrix} 0 & U \\ -U & 0 \end{vmatrix}.$$

Форму S можно записать в виде произведения VW , где

$$V = (U \dot{+} U) \dot{+} \dots \dot{+} (U \dot{+} U),$$

$$W = \lambda_1 \begin{vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{vmatrix} \dot{+} \dots \dot{+} \lambda_m \begin{vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{vmatrix}.$$

Если T перестановочна с $\mathfrak{M}$ и форма S инвариантна для T , то T должна иметь вид

$$T = \|t_{ij} E\|, \quad T^*VWT = VW \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2m).$$

Последнее соотношение дает $T^*WT = W$. Значит, T — симплектическая матрица и в качестве таковой имеет определитель $+1$.

3) Ортогонально неприводимые части $\mathfrak{M}$ распадаются на пары неэквивалентных абсолютно неприводимых частей. В этом случае матрицы $\mathfrak{M}$ можно привести к виду

$$A = A_1 \dot{+} \dots \dot{+} A_1 \dot{+} A_1^{*-1} \dot{+} \dots \dot{+} A_1^{*-1}.$$

Инвариантная относительно A симметрическая форма должна иметь вид

$$S = \begin{vmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{vmatrix}.$$

Если T перестановочна со всеми A , то T распадается $T = T_1 + T_2$ и условие инвариантности S относительно T дает соотношение $T_1^* X T_2 = X$, откуда $|T| = |T_1| |T_2| = +1$.

5. Разложение на неприводимые части. Всякое линейное представление полупростой группы вполне характеризуется определенной системой инвариантов — так называемых картановских весов неприводимых частей этого представления. Результаты предшествующего пункта показывают, что теми же инвариантами характеризуются и представления полупростых групп в $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$. Что касается представлений в $\mathfrak{D}_n$, то здесь система весов определяет иногда одно, иногда два представления, переходящие друг в друга посредством несобственного ортогонального преобразования. Так как здесь каждому весу соответствует самое большее два представления, к тому же весьма просто друг с другом связанные, то можно считать, что и в $\mathfrak{D}_n$ представления можно задавать весами. Таким образом, остается решить только второй из двух сформулированных в п. 4 вопросов, именно, определить, каким системам весов соответствуют симплектические и каким — ортогональные представления. Мы придем к решению этой задачи, как обычно, с помощью разложения ортогональных и симплектических представлений на их неприводимые части.

Т е о р е м а 3. *Если ортогональное или симплектическое представление $\mathfrak{D}$ полупростой группы $\mathfrak{G}$ распадается на две части, одна из которых ортогональна или соответственно симплектична, тогда и вторая часть соответственно ортогональна или симплектична.*

Рассмотрим случай ортогональных представлений. По условию пространство R , в котором оперируют преобразования $\mathfrak{D}$, распадается на два инвариантных подпространства $R_1 + R_2$, причем на R и R_1 существуют невырожденные симметрические билинейные формы $f(x, y)$ и $g(x, y)$, инвариантные относительно $\mathfrak{G}$. Если $f(x, y)$ не вырождается на R_1 , то, беря ортогональное к R_1 подпространство R_3 , мы получим расщепление $R = R_1 + R_3$, соответственно которому разложится на требуемые ортогональные части и представление $\mathfrak{D}^*$. Если, наоборот, $f(x, y)$ вырождается на R_1 , то, полагая $g(x, r_2) = 0$ ($x \in R$, $r_2 \in R_2$), мы продолжим $g(x, y)$ на все пространство R . Инвариантная форма $h(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ при достаточно малых λ не вырождается ни на R , ни на R_1 , и, считая, что понятие ортогональности определяется теперь формой $h(x, y)$, мы возвращаемся к разобранному случаю. Ясно, что те же самые рассуждения остаются в силе и для симплектических представлений.

С л е д с т в и е. Все ортогональные и симплектические представления полупростых групп распадаются в $\mathfrak{D}^+(n)$ или $\mathfrak{C}$ на ортогонально или соответственно симплектически неприводимые части.

Действительно, из только что доказанной теоремы следует, что такое разложение возможно в общей линейной группе. Так как оба представления, исходное и разложенное, ортогональны или симплектичны, то в силу теорем предыдущего пункта они эквивалентны и в $\mathfrak{D}(n)$ или соответственно $\mathfrak{C}_n$.

* В силу известной теоремы об однозначности распада представления на неприводимые части представления $\mathfrak{G}$ в R_2 и R_3 эквивалентны.

Но сверх того ясно, что если распадение представления возможно в $\mathfrak{D}(n)$, то оно возможно и в $\mathfrak{D}^+(n)$, что и требовалось.

Симплектически или ортогонально неприводимые представления весьма просто связаны с абсолютно неприводимыми. Пусть $\mathfrak{G}$ — какая-либо группа, $g \rightarrow G$ — ее матричное представление. Соответствие $g \rightarrow G^{*-1}$ будет также представлением $\mathfrak{G}$. Это представление называется *дуальным* или *контрагредиентным* первоначальному.

Теорема 4. *Ортогональное, ортогонально неприводимое представление $\mathfrak{D}$ полупростой группы $\mathfrak{G}$ либо абсолютно неприводимо, либо эквивалентно сумме двух контрагредиентных абсолютно неприводимых представлений. То же самое имеет место для симплектических представлений. Сумма двух контрагредиентных представлений одновременно ортогональна и симплектична.*

Доказательство. Пусть данное представление $\mathfrak{D}$ ортогонально и приводимо в полной линейной группе, $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \dot{+} \mathfrak{D}_2$, где $\mathfrak{D}_1$ — одна из абсолютно неприводимых частей $\mathfrak{D}$. Обозначим через $f(x, y)$ инвариантную симметричную форму, определенную и невырождающуюся на всем пространстве R . Соответственно разложению $\mathfrak{D}$ это пространство разложится на инвариантные подпространства $R_1 \dot{+} R_2$. Если $f(x, y)$ не равна тождественно нулю на одном из этих подпространств, например R_2 , то $\mathfrak{D}$ ортогонально приводимо. Действительно, совокупность векторов R_2 , перпендикулярных ко всему R_2 , образует инвариантное подпространство. Так как всякое представление полупростой группы распадается на неприводимые части, то в R_2 найдется дополнительное инвариантное подпространство, на котором $f(x, y)$ будет уже невырожденной. Отсюда согласно предыдущей теореме вытекает ортогональная приводимость $\mathfrak{D}$. Таким образом, $f(x, y)$ аннулируется на обоих подпространствах R_1 и R_2 . Это позволяет выбрать в R специальный базис. Пусть e_1 — произвольный вектор в R_1 . Из невырожденности $f(x, y)$ вытекает, что в R_2 найдется вектор ε_1 , $f(e_1, \varepsilon_1) = 1$. Рассмотрим подпространство $R' \subset R$, перпендикулярное к паре e_1, ε_1 . Очевидно, $R' = R'_1 \dot{+} R'_2$, где $R'_1 = R_1 \cap R'$, $R'_2 = R_2 \cap R'$. Теперь мы можем выбрать пару векторов $e_2 \in R'_1$, $\varepsilon_2 \in R'_2$, $f(e_2, \varepsilon_2) = 1$ и т. д. Пусть элементу $g \in \mathfrak{G}$ при фиксированном таким способом базисе $e_1, \dots, e_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ соответствует матрица $A \dot{+} B$. Для $x = \sum x^i e_i$, $y = \sum y^i \varepsilon_i$ имеем $f(x, y) = \sum x^i y^i$. Инвариантность этой формы дает $A^* B = E$, т. е. $B = A^{*-1}$. Те же самые рассуждения имеют силу и для симплектических преобразований. Наконец, последнее утверждение теоремы очевидно, так как преобразование $A \dot{+} A^{*-1}$ оставляет инвариантными формы с матрицами

$$U = \begin{vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{vmatrix}.$$

Теорема 5. *Для того чтобы представление $\mathfrak{D}$ некоторой группы допускало инвариантную невырождающуюся билинейную форму, необходимо и достаточно, чтобы оно было эквивалентно своему контрагредиентному.*

Действительно, если форма $x^* T y$ инвариантна относительно преобразования A , то $A^* T A = T$, или $A = T^{-1} A^*^{-1} T$. Обратно, если $A = T^{-1} A^*^{-1} T$, то $x^* T y$ инвариантна. Отсюда же видно, что для ортогональности $\mathfrak{D}$ достаточно, чтобы $\mathfrak{D}$ преобразовывалось в $\mathfrak{D}^{*-1}$ при помощи симметрической, а для симплектичности — при помощи кососимметрической матрицы.

Теорема 6. Абсолютно неприводимая система матриц не может быть одновременно ортогональной и симплектической. Абсолютно неприводимая самоконтрагredientная система либо ортогональна, либо симплектична.

В самом деле, если система $\mathfrak{D}$ симплектична и ортогональна, то $U^{-1}D^{*-1}U = D$, $V^{-1}D^{*-1}V = D$, где U кососимметрична, V симметрична и $D \in \mathfrak{D}$. Отсюда $UV^{-1} \cdot D = D \cdot UV^{-1}$. По лемме Шура $UV^{-1} = \lambda E$, что невозможно. Если система $\mathfrak{D}$ самоконтрагredientна, то она допускает инвариантную билинейную форму $f(x, y)$. Формы $g = f + f^*$, $h = f - f^*$ также инвариантны, и обе быть невырожденными не могут. Пусть одна из них, например $g(x, y)$, вырождается, но не обращается тождественно в нуль. Тогда совокупность векторов, перпендикулярных относительно $g(x, y)$ ко всему пространству, была бы инвариантным подпространством системы $\mathfrak{D}$, которого по условию нет. Следовательно, $g = 0$, $f = -f^*$, что и требовалось.

Для дальнейшего нам будет удобнее иметь теорему 5, сформулированную в терминах картановской теории весов. Пусть G — полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{D}$ — ее матричное представление. Обозначим, как обычно, через H максимальную регулярную абелеву подалгебру в G . Так как H коммутативна, то в пространстве R найдутся векторы, являющиеся собственными векторами одновременно для всех матриц H . Это так называемые весовые векторы представления $\mathfrak{D}$. Пусть $h_1, \dots, h_n$ — линейный базис алгебры H и $\bar{a}$ — какой-либо весовой вектор. Тогда $h_i \bar{a} = a_i \bar{a}$, $h \bar{a} = \Lambda \bar{a}$, где $h = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_n h_n$ — общий элемент H (λ_i — произвольные параметры) и $\Lambda = a_1 \lambda_1 + \dots + a_n \lambda_n$ — вес вектора $\bar{a}$. Каждое представление G имеет конечное число весов Λ (при фиксированных $h_1, \dots, h_n$). Считая линейную форму от λ_i положительной, если положителен первый отличный от нуля коэффициент ее, мы упорядочиваем все веса всех представлений G . Согласно Картану, наибольший из весов какого-нибудь представления G определяет это представление с точностью до эквивалентности*.

Рассмотрим теперь контрагredientное представление группы $\mathfrak{G}$. Переходу $A \rightarrow A^{*-1}$ в группе матриц соответствует переход $A \rightarrow -A^*$ в инфинитезимальной алгебре матриц. Таким образом, чтобы найти веса контрагredientного представления алгебры G , нужно решить уравнение $-H^*x = \Lambda x$. Однако при любом представлении G в пространстве R можно найти такую систему координат, чтобы матрицы H имели диагональную форму [6]. Тогда $H^* = H$ и уравнение для определения весов принимает вид $-Hx = \Lambda x$. Отсюда следует, что веса контрагredientного представления равны весам первоначального, взятым с обратным знаком. В частности,

Чтобы два неприводимых представления полупростой группы были контрагredientны, необходимо и достаточно, чтобы максимальный вес одного представления равнялся взятому с обратным знаком минимальному весу другого. Чтобы представление было самоконтрагredientно, необходимо и достаточно, чтобы его максимальный и минимальный веса отличались лишь знаком.

Картаном указан способ, как, зная максимальный вес представления, найти все остальные его веса [2]. В соединении с изложенными теоремами это дает возможность выделить все представления, имеющие инвариантную били-

* В последующем наибольший вес неприводимого представления называется также максимальным, или главным. — Прим. ред.

нейную форму. Однако остается еще вопрос, когда эта форма будет симметричной и когда — кососимметричной. Для простых групп ответ на него будет дан в явном виде в следующем пункте, а сейчас мы обычным путем покажем, что случай полупростых групп непосредственно приводится к изучению простых.

В самом деле, пусть даны неприводимые представления $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ групп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{D}_1(a) = \|a_{ij}\|$, $\mathfrak{D}_2(b) = \|b_{kl}\|$, $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$, то соответствие

$$\mathfrak{D}(a, b) = \|c_{ik, jl}\|, \quad c_{ik, jl} = a_{ij}b_{kl}$$

является представлением прямого произведения $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. Это представление неприводимо, и все неприводимые представления $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ таким способом могут быть получены. Теперь легко видеть, что представление прямого произведения тогда и только тогда самоконтрагredientно, когда самоконтрагredientны представления сомножителей, из которых оно получено. Действительно, представление произведения, рассматриваемое для какого-либо сомножителя в отдельности, распадается на сумму одинаковых представлений, эквивалентных первоначальному представлению этого сомножителя. Но сумма эквивалентных представлений самоконтрагredientна. Обратное также верно, ибо если форма с матрицей $f = \|f_{ij}\|$ инвариантна для представления $\mathfrak{D}_1$, форма $g = \|g_{kl}\|$ — для представления $\mathfrak{D}_2$, то форма $h = f \times g$ с матрицей $h = \|h_{ik, jl}\|$, $h_{ik, jl} = f_{ij}g_{kl}$ будет инвариантной относительно представления прямого произведения. В частности, отсюда видно, что если оба исходных представления ортогональны или симплектичны, то представление прямого произведения будет ортогональным; если одно из исходных ортогонально, а другое симплектично, то представление произведения симплектично.

Аналогично, если два неприводимых представления $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ прямого произведения получаются указанным способом из неприводимых представлений $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ и $\mathfrak{D}'_1$, $\mathfrak{D}'_2$ сомножителей, то $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}'$ тогда и только тогда контрагredientны, когда $\mathfrak{D}_1$ контрагredientно $\mathfrak{D}'_1$, $\mathfrak{D}_2$ контрагredientно $\mathfrak{D}'_2$.

6. Представления простых групп. Согласно Картану, неприводимые представления простых групп $\mathfrak{G}$ получаются так. Сначала строятся так называемые базисные представления $\mathfrak{G}$. Затем кронекеровские произведения произвольного числа этих представлений расщепляются на неприводимые части и среди последних каждый раз берется часть с наибольшим весом. Совокупность полученных таким способом представлений исчерпывает вообще все неприводимые представления $\mathfrak{G}$. Следует еще отметить, что при расщеплении кронекеровского произведения на неприводимые части часть с максимальным весом встречается только один раз и ее вес равен сумме весов перемножаемых представлений. При составлении базисных представлений Картаном используется процесс альтернирования, который будет описан ниже. Нас интересует вопрос об ортогональности и симплектичности представлений, и естественно сначала установить, как ведут себя представления при кронекеровских произведениях и альтернированиях.

Л е м м а 1. *Кронекеровское произведение двух контрагredientных представлений ортогонально. Кронекеровское произведение двух ортогональных или двух симплектических представлений ортогонально, произведение ортогонального на симплектическое — симплектично.*

Доказательство. Пусть данные представления группы $\mathfrak{G}$ суть A и B . Обозначим базис пространства первого из них через $e_1, e_2, \dots, e_m$, второго — через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Линейные комбинации формальных произведений $e_i \varepsilon_j$ дают линейное пространство R . Если векторы e_i подвергнуть преобразованию $A(g)$, а векторы ε_j — преобразованию $B(g)$, $g \in \mathfrak{G}$, то билинейные формы, образующие пространство R , подвергнутся некоторому линейному преобразованию, которое и будет кронекеровским произведением $A \times B$. Пусть базисные векторы e_i, ε_j выбраны так, что представления A, B точно контрагredientны, $A(g) = B^{*-1}(g)$. Тогда билинейная форма, определяемая равенствами $f(e_i \varepsilon_k, e_j \varepsilon_l) = \delta_{il} \delta_{kj}$, будет, очевидно, невырожденной, симметричной и инвариантной относительно $A \times B$.

Рассмотрим теперь второе утверждение леммы. Пусть A оставляет инвариантной форму $f(x, y)$, B — форму $k(x, y)$. Билинейная форма $h(e_i \varepsilon_s, e_j \varepsilon_t) = f(e_i, e_j) k(\varepsilon_s, \varepsilon_t)$ не вырождена и инвариантна относительно $A \times B$. Ясно, что если f, k обе симметричны или обе кососимметричны, то h симметрична. В противном случае h кососимметрична, и все утверждения леммы доказаны.

Процесс альтернирования заключается в следующем. Пусть дано некоторое преобразование A в пространстве с базисом $e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots, e_n^{(1)}$. Образует формально еще систему линейных пространств с базисами $e_1^{(2)}, \dots, e_n^{(2)}; \dots; e_1^{(k)}, \dots, e_n^{(k)}$. Кронекеровское произведение $T = A \times A \times \dots \times A$ можно рассматривать как преобразование в пространстве полилинейных форм

$$f(e^{(1)}, \dots, e^{(k)}) = \sum M_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^{(1)} \dots e_{i_k}^{(k)}.$$

Формы, меняющие свой знак при каждой транспозиции рядов переменных $e^{(1)}, \dots, e^{(k)}$, образуют линейное инвариантное относительно T подпространство S . Преобразование, индуцируемое T в S , носит название k -го альтернирования A и будет обозначаться $A^{[k]}$. Если A оставляет инвариантной билинейную форму f в пространстве R , то форма $h = f \times f \times \dots \times f$ будет невырожденной в $R \times R \times \dots \times R$ и инвариантной относительно $T = A \times A \times \dots \times A$. Легко видеть, что h остается невырожденной и на S . Принимая во внимание лемму 1, мы видим, что имеет место также

Лемма 2. *Альтернирования ортогонального представления ортогональны. Четные альтернирования симплектического представления ортогональны, нечетные — симплектичны.*

Леммы 1, 2 и результаты предшествующего пункта позволяют легко найти все ортогональные и симплектические представления простых групп. Нам нужно, следовательно, 1) для каждого веса указать контрагredientный вес и 2) для каждого самоконтрагredientного веса определить, принадлежит ли он симплектическому или ортогональному представлению.

Группы A_n . Наибольшими весами являются формы $\Lambda = p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + \dots + p_n \lambda_n$, где p_i — целые числа, $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 0$. Полагаем $\lambda_{n+1} = -\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n$ и пишем Λ в виде $p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + \dots + \dots + p_n \lambda_n + 0 \cdot \lambda_{n+1}$. Если в этом выражении произвольно переставлять λ_i ($i = 1, 2, \dots, n+1$), то снова получаются веса того же самого представления и притом все крайние веса таким способом заведомо получатся (ср. [2]). Отсюда видно, что наименьшим весом будет форма

$$\begin{aligned} p_1 \lambda_{n+1} + p_2 \lambda_n + \dots + p_n \lambda_2 = \\ = -p_1 \lambda_1 - (p_1 - p_n) \lambda_2 - \dots - (p_1 - p_2) \lambda_n \end{aligned}$$

и максимальный вес контрагredientного представления равен

$$\Lambda^* = p_1 \lambda_1 + (p_1 - p_n) \lambda_2 + \dots + (p_1 - p_2) \lambda_n.$$

Значит, для самоконтрагredientности Λ необходимо и достаточно, чтобы

$$p_1 = p_2 + p_n = p_3 + p_{n-1} = \dots$$

Теперь определим, какие из самоконтрагredientных весов ортогональны и какие симплектичны. Пусть, сначала, коэффициент p_1 четен, $p_1 = 2k$. Форма

$$Q = q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2 + \dots + q_n \lambda_n,$$

где

$$q_1 = k, \quad q_i = \frac{1}{2} (p_i - p_{n-i+2}), \quad q_j = 0 \quad (i = 1, \dots, k; j = k + 1, \dots, n),$$

будет весом некоторого представления. Контрагredientный вес имеет выражение

$$Q^* = q_1 \lambda_1 + q_1 \lambda_2 + \dots + q_1 \lambda_k + p_{k+1} \lambda_{k+1} + \dots + p_n \lambda_n$$

и, таким образом, $\Lambda = Q + Q^*$. Кронекеровское произведение $\mathfrak{D}$ представлений с весами Q, Q^* среди своих абсолютно неприводимых частей содержит и только один раз представление с весом Λ . Так как $\mathfrak{D}$ ортогонально, то все абсолютно неприводимые части $\mathfrak{D}$ должны быть либо ортогональными, либо входить в пары взаимно контрагredientных. Но Λ самоконтрагredientно и встречается один раз. Следовательно, оно ортогонально. В частности, если n четно, $n = 2m$, то в самоконтрагredientном весе $p_1 = 2p_m$ — число четное. Поэтому все самоконтрагredientные представления групп A_{2m} ортогональны.

Пусть n нечетно, $n = 2m + 1$. Группа $\mathfrak{A}_n$ матричная и поэтому является своим собственным представлением. Альтернируя его $m + 1$ раз, мы получим неприводимое представление $A_n^{[m+1]}$ веса $\Lambda_{m+1} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{m+1}$. Это представление самоконтрагredientно и вообще является наинизшим самоконтрагredientным представлением $\mathfrak{A}_n$. Покажем, что для m четного Λ_{m+1} симплектично, для нечетного — ортогонально. Действительно, $\mathfrak{A}_n$ образована матрицами определителя 1, поэтому детерминант $D = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n+1)}]$, составленный из компонент $n + 1$ переменного вектора $x^{(i)}$, инвариантен. Разложение D по минорам первых $m + 1$ строк можно рассматривать как билинейную форму относительно этих миноров последних $m + 1$ строк. Заменяя в D миноры соответствующими компонентами вектора в пространстве $A_n^{[m+1]}$, мы получим искомую инвариантную билинейную форму. Ясно, что эта форма симметрическая для $m + 1$ четного и кососимметрическая в противном случае.

Обращаясь к другим представлениям $\mathfrak{A}_n$, мы предположим сначала, что $m + 1$ четно, $m = 2k + 1, n = 4k + 3$. Утверждается, что в этом случае все самоконтрагredientные представления $\mathfrak{A}_n$ ортогональны. В самом деле, для наинизшего представления с весом Λ_{m+1} это верно. Пусть $\Lambda = \sum p_i \lambda_i$ самоконтрагredientно. Если старший коэффициент Λ четен, то ортогональность Λ была обнаружена уже ранее. Если же p_1 нечетен, то разность $\Lambda - \Lambda_{m+1} = \Lambda'$ есть вес некоторого неприводимого представления. Старший коэффициент Λ' четен, значит Λ' ортогонально. Кронекеровское про-

изведение представления Λ' на Λ_{m+1} ортогонально и содержит в качестве своей высшей неприводимой части представление веса Λ . Отсюда, как и выше, заключаем, что Λ ортогонально. Сходные рассуждения показывают, что для $m = 2k$ самоконтрагredientные представления с четным старшим коэффициентом ортогональны, с нечетным — симплектичны. Следовательно,

Если $n \equiv 1 \pmod{4}$, то самоконтрагredientные неприводимые представления группы $\mathfrak{A}_n$, веса которых имеют четный старший коэффициент, ортогональны, нечетный старший коэффициент — симплектичны. Для остальных значений n все самоконтрагredientные представления $\mathfrak{A}_n$ ортогональны.

Г р у п п ы C_n . Главными весами неприводимых представлений C_n являются формы $\Lambda = p_1\lambda_1 + \dots + p_n\lambda_n$, где $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 0$ — целые рациональные числа. Перестановки переменных λ_i и изменения их знаков дают снова веса того же самого представления $\mathfrak{D}$. Значит, форма $-\Lambda$ является весом $\mathfrak{D}$ и все представления C_n самоконтрагredientны. Покажем теперь, что

Неприводимое представление C_n ортогонально, если сумма коэффициентов его главного веса четна, и симплектично, если сумма коэффициентов нечетна.

В самом деле, группа C_n , рассматриваемая как свое собственное представление, симплектична. Ее i -кратное альтернирование дает неприводимое представление $C_n^{[i]}$ веса $\Lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i$. Согласно второй лемме этого пункта Λ_i ортогонально для четных i и симплектично для нечетных. Далее пользуемся индукцией. Пусть Λ — данный вес, отличный от $\Lambda_1, \dots, \dots, \Lambda_n$. Ищем такое k , $1 \leq k \leq n$, чтобы разность $\Lambda - \Lambda_k = \Lambda'$ была снова старшим весом некоторого представления. Представление Λ есть наивысшая неприводимая часть кронекеровского произведения Λ' на Λ_k . Если сумма коэффициентов Λ четна, то такие же суммы у Λ' и Λ_k имеют одинаковую четность. Значит, перемножаемые представления либо оба ортогональны, либо оба симплектичны. В том и другом случае кронекеровское произведение, а значит и Λ , ортогонально. Если сумма коэффициентов Λ нечетна, то сумма коэффициентов одного из весов Λ' , Λ_k четна, другого нечетна. Тогда кронекеровское произведение симплектично, а вместе с ним симплектично и Λ .

Г р у п п ы D_n . Главные веса имеют вид $\Lambda = p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \dots + p_n\lambda_n$, где коэффициенты $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{n-1} \geq |p_n|$ либо все целые, либо все полуцелые. Перестановка коэффициентов и изменение знака у любой пары переменных дают снова веса того же представления.

Пусть $n = 2m + 1$. Минимальный вес представления Λ равен $-p_1\lambda_1 - \dots - p_{n-1}\lambda_{n-1} + p_n\lambda_n$. Значит, контрагredientное представление имеет вес

$$\Lambda^* = p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \dots + p_{n-1}\lambda_{n-1} - p_n\lambda_n.$$

Самоконтрагredientные веса характеризуются условием $p_n = 0$. Однако представления с такими весами могут быть получены путем расщепления на неприводимые части кронекеровских произведений представлений

$$\Lambda_1 = \lambda_1, \Lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2, \dots, \Lambda_{n-1} = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}.$$

Представление Λ_i есть i -е альтернирование основного представления группы D_n . Так как $\mathfrak{D}_n$ ортогональна, то все Λ_i также ортогональны. Отсюда непосредственно заключаем, что все самоконтрагredientные представления D_{2m+1} ортогональны.

Рассмотрим более сложный случай, когда $n = 2m$. Здесь наряду с Λ форма $-\Lambda$ будет также весом. Поэтому все представления D_{2m} самоконтраградиентны.

Представления с весами

$$\Lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-2),$$

$$\Lambda_{n-1} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} - \lambda_n),$$

$$\Lambda_n = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n)$$

образуют базис. Таким образом, расщепляя их кронекеровские произведения, можно получить любое другое неприводимое представление. Представление Λ_i ($i = 1, \dots, n-2$) есть i -е альтернирование основного представления D_n и поэтому ортогонально. Мы покажем, что остающиеся два так называемые спинорные представления Λ_{n-1} , Λ_n ортогональны для четных m и симплектичны для нечетных m . Согласно п. 5 для этого достаточно знать, симметрической или кососимметрической будет матрица T , преобразующая представление в его контраградиентное.

Спинорные представления, по Картану [2], строятся так. Пусть $h_1, \dots, h_n, e_\alpha, \dots, e_\gamma$ — канонический базис алгебры D_n . Обозначим через Λ переменную, значениями которой являются формы $\frac{1}{2}(\pm \lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \dots \pm \lambda_n)$, где знаков минус нужно брать четное число для представления Λ_n и нечетное для Λ_{n-1} . Образует матрицы

$$A = |a_{\Lambda, \mu}| = \sum a_{\Lambda\mu} e_{\Lambda\mu},$$

индексами элементов которых служат формы Λ , $e_{\Lambda\mu}$ — матричные единицы. Элементу $h = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_n h_n$ ставим в соответствие матрицу $H = \sum \Lambda(h) e_{\Lambda\Lambda}$, а элементу e_α — матрицу

$$E_\alpha = \sum_{\Lambda} \mu(\Lambda, \alpha) e_{\Lambda, \Lambda-\alpha},$$

где $\mu(\Lambda, \alpha) = 0$, если $\Lambda - \alpha$ не является весом, в противном случае $\mu(\Lambda, \alpha) = \delta_{i+1} \delta_{i+2} \dots \delta_{j-1}$ для $\alpha = \lambda_i \pm \lambda_j$, $\mu(\Lambda, \alpha) = -\delta_{i+1} \dots \delta_{j-1}$ для $\alpha = -\lambda_i - \lambda_j$, $\Lambda = \frac{1}{2} \sum \delta_i \lambda_i$. Ищется матрица T , удовлетворяющая соотношениям $TA = -A^*T$, $A \in \mathfrak{D}$. Из условия $TH = -HT$ имеем $M t_{\Lambda\mu} e_{\Lambda\mu} = -\Lambda e_{\Lambda\mu} t_{\Lambda\mu}$, т. е. $t_{\Lambda\mu} = 0$ для $\Lambda + \mu \neq 0$, $t_{\Lambda, -\Lambda} \neq 0$. Соотношение $TE_\alpha = -E_\alpha^* T$ дает

$$\mu(\Lambda + \alpha, \alpha) t_{\Lambda+\alpha, -\Lambda-\alpha} = t_{\Lambda, -\Lambda} \mu(-\Lambda, \alpha).$$

Применяя это равенство k раз, получим

$$t_{\Lambda+\alpha_1+\dots+\alpha_k, -\Lambda-\alpha_1-\dots-\alpha_k} = (-1)^k \frac{\mu(-\Lambda, \alpha_1)}{\mu(\Lambda+\alpha_1, \alpha_1)} \dots \frac{\mu(-\Lambda-\alpha_1-\dots-\alpha_{k-1}, \alpha_k)}{\mu(\Lambda+\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1}, \alpha_k)}. \quad (t)$$

Положим здесь

$$\Lambda = \frac{1}{2}(\delta_1 \lambda_1 + \dots + \delta_n \lambda_n), \quad \alpha_i = -\delta_{2i-1} \lambda_{2i-1} - \delta_{2i} \lambda_{2i} \quad (i = 1, 2, \dots, n/2).$$

Так как согласно определению $\mu(\Lambda, \alpha_i) = 1$, то формула (t) дает $t_{\Lambda, -\Lambda} = (-1)^{n/2} \cdot t_{-\Lambda, \Lambda}$. Следовательно, T симметрична для четных $n/2$ и ко-

сосимметрична для нечетных $n/2$. Теперь, зная характер базисных представлений, легко найти поведение и всех остальных. Окончательный результат следующий:

Все представления групп D_{4k} ортогональны. Неприводимые представления D_{4k+2} с целыми весами ортогональны, с полуцелыми симплектичны. Все самоконтрагredientные представления групп D_{2m+1} ортогональны.

Г р у п п ы B_n . Максимальные веса неприводимых представлений суть $\Lambda = p_1\lambda_1 + \dots + p_n\lambda_n$, где $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 0$ либо все целые, либо все полуцелые. Перестановки переменных и изменения их знаков дают веса того же представления. Значит, *все представления B_n самоконтрагredientны*. Их можно получить расщеплением кронекеровских произведений базисных представлений с весами $\Lambda_1 = \lambda_1$, $\Lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2, \dots$, $\Lambda_{n-1} = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}$, $\Lambda_n = 1/2 (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$. Первые $n-1$ из этих весов являются весами последовательных альтернирований основного представления B_n и поэтому ортогональны. Последнее, спинорное представление строится так же, как соответственное представление Λ_n в предыдущем случае. Из формулы (t), применимой и здесь, видно, что Λ_n будет ортогонально для $n = 4k$, симплектично для $n = 4k + 2$. Если $n = 2m + 1$, то, полагая в этой формуле

$$\alpha_i = -\delta_{2i-1}\lambda_{2i-1} - \delta_{2i}\lambda_{2i}, \quad \alpha_{m+1} = -\delta_n\lambda_n \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где $\Lambda = 1/2 (\delta_1\lambda_1 + \dots + \delta_n\lambda_n)$, получим снова $t_{-\Lambda, \Lambda} = (-1)^{m+1}t_{\Lambda, -\Lambda}$. Следовательно, для m четных Λ_n оказывается симплектическим, для m нечетных — ортогональным. Отсюда, как и ранее, получаем окончательный результат:

Все представления групп B_{4k} , B_{4k+1} ортогональны. Неприводимые представления B_{4k+1} , B_{4k+2} с целыми весами ортогональны, с полуцелыми симплектичны.

Г р у п п а G_2 . Максимальными весами являются формы $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, где p_i — рациональные дроби с знаменателем 3 и с сравнимыми mod 3 числителями, $p_1 \geq p_2 \geq p_3$, $p_2 \leq 0$.

Преобразованием

$$\Lambda \rightarrow \Lambda - 3m_i\lambda_i, \quad \Lambda \rightarrow \Lambda - (m_i - m_j)(\lambda_i - \lambda_j)$$

дают веса того же представления. Отсюда следует, что $-\Lambda$ — также вес представления Λ . Поэтому все представления G_2 самоконтрагredientны. Представления с весами $\Lambda_1 = 2/3\lambda_1 - 1/3\lambda_2 - 1/3\lambda_3$, $\Lambda_2 = \lambda_1 - \lambda_2$ образуют базис. Первое из них есть представление степени 7, указанное Картаном в [1]. Оно имеет инвариантную квадратичную форму и, значит, ортогонально. Второе — присоединенное и, следовательно, также ортогонально. Отсюда в силу теорем п. 5 вытекает, что *все представления G_2 ортогональны*.

Г р у п п а F_4 . Формы $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 + p_4\lambda_4$, где $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4$, $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4$, p_i — целые или все полуцелые, являются старшими весами неприводимых представлений F_4 . Преобразования

$$\Lambda \rightarrow \Lambda - 2m_i\lambda_i, \quad \Lambda \rightarrow \Lambda - (\pm m_i \pm m_j)(\pm \lambda_i \pm \lambda_j),$$

$$\Lambda \rightarrow \Lambda - (1/2 \sum \pm m_i) (\sum \pm \lambda_i)$$

дают снова веса того же представления. Первое преобразование показывает, что наряду с Λ весом является и $-\Lambda$. Таким образом, все представления

F_4 самоконтрагredientны. Базис образуют представления с весами $\Lambda_1 = \lambda_1$, $\Lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2$, $\Lambda_3 = \frac{1}{2}(3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$, $\Lambda_4 = 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Первое из них есть представление, указанное Картаном в [1], и имеет инвариантную квадратичную форму. Представление Λ_2 — присоединенное и поэтому также ортогонально. Второе альтернирование представления Λ_1 содержит наивысшую часть с весом Λ_3 , а третье альтернирование — часть с весом Λ_4 . Так как Λ_1 ортогонально, то Λ_3 , Λ_4 также ортогональны, откуда следует, что все представления F_4 ортогональны.

Г р у п п а E_6 . Максимальные веса здесь — формы $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \dots + p_6\lambda_6$, где $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_6$, $p_1 + p_2 + p_3 \leq 2(p_4 + p_5 + p_6)$, $p_i - p_j$ — целые, $\frac{1}{3} \sum p_\alpha$ — целое. Преобразования

$$\Lambda \rightarrow \Lambda - (p_i - p_j)(\lambda_i - \lambda_j),$$

$$\Lambda \rightarrow \Lambda + \left(\frac{1}{3} \sum p_\alpha - p_i - p_j - p_k\right)(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k),$$

$$\Lambda \rightarrow \Lambda - \frac{1}{3} \sum p_\alpha \left(\sum \lambda_\alpha\right)$$

дают все крайние веса. Отсюда легко проверить, что наименьший вес представления Λ равен

$$\left(p_6 - \frac{1}{3} \sum p_\alpha\right)\lambda_1 + \left(p_5 - \frac{1}{3} \sum p_\alpha\right)\lambda_2 + \dots + \left(p_1 - \frac{1}{3} \sum p_\alpha\right)\lambda_6.$$

Таким образом, контрагredientное представление имеет вес

$$\Lambda^* = \left(\frac{1}{3} \sum p_\alpha - p_6\right)\lambda_1 + \left(\frac{1}{3} \sum p_\alpha - p_5\right)\lambda_2 + \dots + \left(\frac{1}{3} \sum p_\alpha - p_1\right)\lambda_6,$$

и условия самоконтрагredientности Λ пишутся в виде

$$\frac{1}{3} \sum p_\alpha = p_1 + p_6 = p_2 + p_5 = p_3 + p_4.$$

Отсюда, в частности, следует, что коэффициенты самоконтрагredientного представления целые. Фундаментальную систему образуют представления с весами

$$\Lambda_1 = \frac{2}{3} \sum \lambda_\alpha - \lambda_6, \quad \Lambda_2 = \sum \lambda_\alpha, \quad \Lambda_3 = \frac{1}{3} \sum \lambda_\alpha + \lambda_1,$$

$$\Lambda_4 = \frac{4}{3} \sum \lambda_\alpha - \lambda_5 - \lambda_6, \quad \Lambda_5 = \frac{2}{3} \sum \lambda_\alpha + \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$\Lambda_6 = \sum \lambda_\alpha + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Среди них Λ_1 , Λ_3 и Λ_4 , Λ_5 — взаимно контрагredientны, Λ_2 , Λ_6 — самоконтрагredientны. Представление Λ_2 — присоединенное, следовательно, ортогональное. Альтернирование $\Lambda_2^{[2]}$ содержит в качестве своей наивысшей части Λ_6 , которое, таким образом, тоже ортогонально. Отсюда видно, что все самоконтрагredientные представления группы E_6 ортогональны.

Действительно, единственными самоконтрагredientными представлениями $\sum p_\alpha \leq 9$ являются Λ_2 и Λ_6 , для которых это верно. Пусть теперь Λ самоконтрагredientно, $\sum p_\alpha > 9$ и для низших весов предложение доказано. Если $p_3 > p_4$, то $\Lambda - \Lambda_6 = \Lambda'$ будет самоконтрагredientным весом и, значит, ортогональным. Кронекеровское произведение представлений $\Lambda' \times$

$\times \Lambda_6$ ортогонально и содержит Λ своей главной частью. Следовательно, Λ ортогонально. Если, наконец, $p_3 = p_4$, то можно найти такие взаимно контрагredientные представления, кронекеровское произведение которых содержит своей высшей частью Λ . Так как произведение контрагredientных представлений ортогонально, то ортогонально и Λ .

Г р у п п а E_7 . Старшими весами представлений являются формы $\Lambda = p_1\lambda_1 + \dots + p_7\lambda_7$, где коэффициенты p_i и $1/3 \sum p_\alpha$ либо целые, либо все полуцелые, $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_7$, $p_1 \leq 1/3 \sum p_\alpha \leq p_5 + p_6 + p_7$. Преобразования

$$\Lambda \rightarrow \Lambda - (p_i - p_j)(\lambda_i - \lambda_j),$$

$$\Lambda \rightarrow \Lambda + (1/3 \sum p_\alpha - p_i - p_j - p_k)(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k),$$

$$\Lambda \rightarrow \Lambda + (1/3 \sum p_\alpha - p_i) \left(- \sum \lambda_\alpha + \lambda_i \right)$$

позволяют найти все крайние веса. Из этих преобразований можно усмотреть, что вместе с Λ весом того же представления будет и $-\Lambda$. Таким образом, все представления E_7 самоконтрагredientны. Базис образуют представления с весами

$$\Lambda_1 = \sum \lambda_\alpha, \quad \Lambda_2 = \lambda_1 + 1/2 \sum \lambda_\alpha, \quad \Lambda_3 = 3/2 \sum \lambda_\alpha,$$

$$\Lambda_4 = \lambda_1 + \lambda_2 + \sum \lambda_\alpha, \quad \Lambda_5 = 2 \sum \lambda_\alpha - \lambda_6 - \lambda_7,$$

$$\Lambda_6 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 3/2 \sum \lambda_\alpha, \quad \Lambda_7 = 3 \sum \lambda_\alpha - \lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_7.$$

Форма Λ_1 является весом присоединенной группы и, следовательно, ортогональна. Форма Λ_2 есть вес особого картановского представления, являющегося симплектическим (см. [1]). Из соотношений $\Lambda_2^{[2]} = \Lambda_4 + \dots$; $\Lambda_2^{[3]} = \Lambda_6 + \dots$; $\Lambda_2^{[4]} = \Lambda_7 + \dots$; $\Lambda_1^{[2]} = \Lambda_5 + \dots$; следует, что Λ_4 , Λ_5 , Λ_7 ортогональны, а Λ_6 симплектично. Остается рассмотреть Λ_3 . Пусть $M = 7/2 \sum \lambda_\alpha - \lambda_6 - \lambda_7$. Тогда из $\Lambda_2^{[5]} = M + \dots$ следует, что M симплектично, а соотношение $\Lambda_3 \times \Lambda_5 = M + \dots$ показывает, что представление Λ_3 должно быть симплектическим. Зная поведение базисных представлений, легко находим, что неприводимые представления E_7 , главный вес которых имеет целые коэффициенты, — ортогональны, с дробными коэффициентами — симплектичны.

Г р у п п а E_8 . Веса неприводимых представлений даются формами $\Lambda = p_1\lambda_1 + \dots + p_9\lambda_9$, $\sum p_\alpha = 0$, $\sum \lambda_\alpha = 0$, коэффициенты которых p_α — рациональные дроби с знаменателем 3 и с числителями, сравнимыми mod 3, $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_9$, $p_1 + p_8 + p_9 \geq 0 \geq p_2 + p_3 + p_4$.

Преобразования

$$\Lambda \rightarrow \Lambda - (p_i - p_j)(\lambda_i - \lambda_j),$$

$$\Lambda \rightarrow \Lambda + (p_i + p_j + p_k) \left(1/3 \sum \lambda_\alpha - \lambda_i - \lambda_j - \lambda_k \right)$$

позволяют из наивысшего веса получить все крайние веса. Отсюда находим, что $-\Lambda$ является весом представления Λ . Значит, все представления группы E_8 самоконтрагredientны.

Базис образуют веса

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \lambda_1 - \lambda_9, & \Lambda_2 &= 2\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{3} \sum \lambda_\alpha, & \Lambda_3 &= 2\lambda_1 - \lambda_8 - \lambda_9, \\ \Lambda_4 &= 3\lambda_1 - \frac{1}{3} \sum \lambda_\alpha, & \Lambda_5 &= 3\lambda_1 - \lambda_7 - \lambda_8 - \lambda_9, \\ \Lambda_6 &= 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \frac{2}{3} \sum \lambda_\alpha, & \Lambda_7 &= 4\lambda_1 - \lambda_6 - \lambda_7 - \lambda_8 - \lambda_9, \\ \Lambda_8 &= 5\lambda_1 - \lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_7 - \lambda_8 - \lambda_9.\end{aligned}$$

Среди них первый вес есть вес присоединенного представления и потому ортогонален. Полагая $M = 7\lambda_1 - \lambda_6 - \lambda_7 - \lambda_8 - \lambda_9 - \frac{1}{3} \sum \lambda_\alpha$, мы из соотношений

$$\begin{aligned}\Lambda_1^{[2]} &= \Lambda_3 + \dots; & \Lambda_1^{[3]} &= \Lambda_5 + \dots; & \Lambda_1^{[4]} &= \Lambda_7 + \dots; & \Lambda_1^{[5]} &= \Lambda_8 + \dots; \\ \Lambda_2^{[3]} &= \Lambda_8 + \dots; & \Lambda_2^{[2]} &= \Lambda_6 + \dots; & \Lambda_2^{[4]} &= M + \dots; & \Lambda_4 \times \Lambda_7 &= M + \dots\end{aligned}$$

последовательно выводим, что все базисные веса E_8 ортогональны, откуда, в свою очередь, вытекает, что вообще все представления группы E_8 ортогональны.

7. Полупростые подгруппы классических групп. Все представления полупростых групп в классических группах нами теперь найдены. Это дает возможность определить и все полупростые подгруппы их.

Пусть $\mathfrak{Q}$ — какое-нибудь линейное представление степени n полупростой группы $\mathfrak{L}$. Ее образ $\mathfrak{Q}(\mathfrak{L})$ в полной линейной группе будет одновременно подгруппой группы $\mathfrak{G}$, равной соответственно A_{n-1} , $B_{(n-1)/2}$, $C_{n/2}$, $D_{n/2}$, в зависимости от четности n и от того, будет ли представление $\mathfrak{Q}$ ортогональным или симплектическим. При этом подгруппы, отвечающие неприводимым представлениям, характеризуются особым свойством — они не содержатся ни в одной собственной регулярной подгруппе $\mathfrak{G}$. Ради краткости мы будем называть такие подгруппы неприводимыми.

В начале настоящего параграфа было показано, что классы представлений $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{G}$, переводимые друг в друга внешними автоморфизмами $\mathfrak{L}$, взаимно однозначно соответствуют классам внутренне сопряженных подгрупп $\mathfrak{G}$, изоморфных $\mathfrak{L}$. В частности, классы неприводимых представлений определяют неприводимые подгруппы.

Найдем сначала неприводимые простые подгруппы $\mathfrak{L}$ какой-либо классической группы $\mathfrak{G}$. По предположению $\mathfrak{L}$ простая и, значит, изоморфна одной из групп A_m , B_m , ..., G_2 . Среди этих групп внешними автоморфизмами обладают только A_m , D_m и E_6 (ср. [3], а также [6]). За исключением D_4 , все они с точностью до внутренних имеют только один внешний автоморфизм, который мы возьмем в картановской канонической форме и обозначим через σ . Пусть неприводимое представление группы $\mathfrak{L}$ имеет вес Λ . Вес представления $L \rightarrow \mathfrak{Q}(L^\sigma)$, получающегося из $\mathfrak{Q}$ с помощью автоморфизма σ , обозначим Λ^σ , вес контрагredientного представления $\mathfrak{Q}^{*-1}$ пусть будет Λ^* . Тогда, принимая во внимание, что вес целиком определяется представлением максимальной абелевой подгруппы, мы из формул Картана легко усматриваем, что $\Lambda^\sigma = \Lambda^*$. Однако неприводимые представления в A_n , B_n , C_n однозначно характеризуются своими весами, поэтому неприводимые простые подгруппы B_n , C_n однозначно характеризуются своими весами, а подгруппы A_n — парами взаимно контрагredientных весов.

Для подгрупп группы D_n положение несколько иное. Здесь следует различать подгруппы двух типов: 1) подгруппы, изоморфные A_m , D_m , E_6 , и 2) подгруппы, изоморфные остальным простым группам.

Подгруппы второго типа внешних автоморфизмов не имеют и поэтому их самоконтрагредиентному весу степени $2n$ в группе D_n отвечают в точности два класса сопряженных подгрупп. Что касается подгрупп первого типа, то здесь такому весу могут отвечать иногда один (для четных n), иногда два (для нечетных n) класса сопряженных подгрупп.

Пестрота, вызываемая особым поведением групп D_n , исчезает, если ищутся классы внешне сопряженных подгрупп. Именно, *каждому самоконтрагредиентному весу и каждой паре взаимно контрагредиентных весов отвечает в точности по одному классу внешне сопряженных подгрупп в классических группах.*

Действительно, группы B_n , C_n внешних автоморфизмов не имеют и для них утверждение совпадает с ранее высказанным. Внешний автоморфизм σ для групп A_n имеет вид $A \rightarrow A^{*-1}$. Таким образом, каждое представление σ переводит в контрагредиентное. Наконец, σ для групп D_n обозначает преобразование посредством несобственной ортогональной матрицы. В D_n каждому весу отвечают два несопряженных представления, однако оба они переводятся друг в друга автоморфизмом σ , что и требовалось.

Чтобы получить все простые группы, а не только неприводимые, достаточно заметить, что всякое представление простой группы распадается в классических группах на неприводимые части. Поэтому простые подгруппы будут характеризоваться системами весов, сумма степеней которых не превосходит степени соответствующей классической группы. Взаимно контрагредиентные системы определяют один и тот же класс внутренне сопряженных подгрупп в A_n , B_n , C_n и, вообще говоря, два класса в D_n . *Внешне сопряженные простые подгруппы классических групп взаимно однозначно соответствуют парам контрагредиентных систем весов.*

§ 3. Трехчленные простые подгруппы

В предшествующем параграфе были определены полупростые подгруппы классических групп. Таким образом, для решения общей задачи остается найти полупростые подгруппы пяти особых групп. Мы здесь укажем способ для нахождения их простых трехчленных подгрупп. Зная эти подгруппы, в группах G_2 и F_4 легко найти и вообще все полупростые подгруппы. Перечень их здесь прилагается. Что касается подгрупп E_6 , E_7 , E_8 , то этот метод для них требует пересмотра большого числа комбинаций корневых векторов, и они остаются нерассмотренными.

8. Идемпотенты полупростых алгебр Ли. Пусть G — полупростая алгебра Ли. Ради краткости максимальные регулярные абелевы подалгебры полупростых подалгебр G мы будем называть идемпотентами G . Максимальные регулярные абелевы подалгебры самой алгебры G будут называться главными идемпотентами G . Известно, что всякий идемпотент G содержится в некотором ее главном идемпотенте и что все главные идемпотенты сопряжены между собой (ср. [6]). Следовательно, каждый идемпотент G сопряжен с одним из идемпотентов, лежащих в произвольно выбранном фиксированном главном идемпотенте.

Т е о р е м а 1. *Каждый идемпотент G содержит внутри себя лишь конечное число идемпотентов.*

Доказательство. Так как всякий идемпотент раскладывается в прямую сумму одномерных, то достаточно показать, что главный идемпотент H алгебры G содержит лишь конечное число одномерных идемпотентов. Пусть $h_1, h_2, \dots, h_n$ — базис H , $\pm\alpha, \pm\beta, \dots, \pm\gamma$ — корни G , $e_\alpha, e_{-\alpha}, \dots, e_\gamma, e_{-\gamma}$ — соответственные корневые элементы G и λf — одномерный идемпотент из H . Трехмерная простая подгруппа F , имеющая f своим главным идемпотентом, натягивается элементами $f, \varepsilon, \varepsilon^*$, связанными соотношениями

$$[f\varepsilon] = \varepsilon; \quad [f\varepsilon^*] = -\varepsilon^*; \quad [\varepsilon\varepsilon^*] = f. \quad (1)$$

Пусть

$$\varepsilon = f_0 + a_\alpha e_\alpha + \dots + a_\gamma e_\gamma,$$

$$\varepsilon^* = f_1 + a_\alpha^* e_{-\alpha} + \dots + a_\gamma^* e_{-\gamma}.$$

Из соотношений (1) вытекает

$$f_0 = f_1 = 0, \quad a_\alpha(f\alpha) = a_\alpha, \quad a_\alpha^*(f\alpha) = a_\alpha^*; \quad (2)$$

$$\sum_{\alpha_i - \alpha_j = \gamma} a_{\alpha_i} a_{\alpha_j}^* N_{\alpha_i, -\alpha_j} = 0,$$

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha} a_{\alpha}^* h_{\alpha} = f. \quad (3)$$

Таким образом, ε может содержать только члены e_φ , соответствующие корням φ , для которых $(f, \varphi) = 1$, а ε^* — соответственно только члены $e_{-\varphi}$. Если условиться изображать корневые векторы как векторы пространства H , то в силу соответствия $\alpha \rightarrow h_\alpha$ будем иметь $(h_\alpha h_\beta) = (\alpha\beta)$ и равенство $(f\varphi) = 1$ перейдет в

$$(fh_\varphi) = 1. \quad (4)$$

Условия (3), (4) геометрически означают следующее. Через концы векторов $h_{\varphi_1}, \dots, h_{\varphi_p}$ проводится гиперплоскость минимального числа измерений, и из начала координат на нее опускается перпендикуляр. Этот перпендикуляр, нормированный так, чтобы выполнялось (4), и есть f . Так как всевозможных комбинаций корневых векторов только конечное число, то и возможных значений f существует лишь конечное множество.

9. Трехчленные простые подалгебры. Пусть мы желаем найти трехчленные простые подалгебры алгебры G . Тогда с точностью до сопряженных мы можем искать лишь те из них, идемпотент которых лежит в фиксированном главном идемпотенте H алгебры G . Далее можно поступать так. Берем произвольную систему корневых векторов $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, ищем соответствующий перпендикуляр f и составляем систему уравнений (2), (3) с неопределенными $a_{\varphi_i}, a_{\varphi_i}^*$. Если эта система несовместна, то f не идемпотент. Если же решения существуют, то каждое из них дает трехчленную подгруппу. Мы покажем, что все эти подгруппы сопряжены между собой.

Т е о р е м а 2. Пусть две трехчленные простые подалгебры имеют общий идемпотент и изоморфны относительно него. Тогда этот изоморфизм может быть продолжен до внутреннего автоморфизма всей алгебры.

При доказательстве нам потребуется

Так как структурные константы $N_{\alpha, \beta}$ связаны соотношениями $N_{\alpha+\beta, -\alpha} = -N_{-\beta, \alpha+\beta}$, то матрица коэффициентов при переменных dt_i, dc_{ψ_f} системы (6) и матрица коэффициентов при $a_{\varphi_1}^*, \dots, a_{\varphi_p}^*$ системы (7) получаются друг из друга путем трансформирования и изменения знака. При тех значениях a_{φ_i} , при которых трехчленная группа существует, вектор ε^* согласно лемме определяется однозначно. Следовательно, ранг матрицы системы (7) при этих значениях a_{φ_i} должен быть равен p . Но тогда и ранг системы (6) также равен p . Это означает, что дифференциалы da_{φ_i} независимы. Таким образом, если $F = \{f, \varepsilon, \varepsilon^*\}$ — простая трехчленная подалгебра с идемпотентом f , то корневые векторы $\bar{\varepsilon} = \sum \bar{a}_{\varphi_i} e_{\varphi_i}$ сопряженных с F подалгебр заполняют некоторую окрестность вектора $\varepsilon = \sum a_{\varphi_i} e_{\varphi_i}$ в пространстве $\mathcal{G}$ векторов вида $\lambda_1 e_{\varphi_1} + \dots + \lambda_p e_{\varphi_p}$. Отсюда непосредственно следует, что все F сопряжены.

Действительно, если $\varepsilon = \sum a_{\varphi_i} e_{\varphi_i}$ и $\bar{\varepsilon} = \sum \bar{a}_{\varphi_i} e_{\varphi_i}$ — соответствующие корневые векторы двух трехчленных групп с идемпотентом f , то матрицы системы (7), составленные для a_{φ_i} и для $\bar{a}_{\varphi_i}$, имеют тот же ранг p . Соединим $\bar{\varepsilon}$ и ε непрерывной кривой ε_t , $0 \leq t \leq 1$, $\varepsilon_0 = \bar{\varepsilon}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$ в пространстве $\mathcal{G}$ и так, чтобы ранг системы (7) вдоль этой кривой все время был равен p . Тогда, если для какого-нибудь значения t элемент ε_t есть корневой вектор трехчленной группы F_t , тогда и для всех соседних значений t существуют трехчленные группы и все они сопряжены между собой. С другой стороны, множество тех значений t , при которых F_t существует, замкнуто. Отсюда ясно прежде всего, что F_t существует для всех t , а затем с помощью леммы Гейне — Бореля и то, что все F_t сопряжены.

По существу эта теорема дает способ для вычисления трехчленных простых групп. Действительно, она показывает, что каждый перпендикуляр f определяет самое большее один класс сопряженных подгрупп. Узнать, существует ли этот класс, можно, исследуя совместность системы (7). Однако здесь возможны упрощения. Именно, в ходе доказательства установлено, что если $e = \sum a_{\varphi_i} e_{\varphi_i}$ есть корневой вектор некоторой группы F , то корневым вектором будет и всякая комбинация $e = \sum \bar{a}_{\varphi_i} e_{\varphi_i}$, лишь бы только ранг системы (7) был при этом равен p . Таким образом, дело сводится к изучению совместности системы (7) при индивидуальных значениях a_{φ_i} , которые можно выбрать, в частности, так, чтобы система (7) сильно упрощалась. Особо можно отметить случай, когда в G нет корневых векторов, перпендикулярных f . Тогда речь идет только о системе $\sum a_{\varphi_i} a_{\varphi_i}^* h_{\varphi_i} = f$, которая заведомо совместна. Значит, трехчленная группа в этом случае всегда существует.

В качестве примера рассмотрим группу G_2 . Ее корневые векторы суть $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j - 2\varepsilon_k)$, $i, j, k = 1, 2, 3$. С точностью до зеркальных отражений здесь существуют четыре перпендикуляра, которые должны быть опущены из начала координат на линии, соединяющие концы векторов. Из них перпендикуляры на линии, соединяющие конец вектора $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3$ с концом вектора $2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ и конец вектора $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$ с концом $\varepsilon_3 - \varepsilon_{23}$, трехчленных подгрупп не дают, а остальные два дают. Присоединяя к ним еще две регулярные трехчленные группы $\{e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, e_{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\}$, $\{e_{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}, e_{-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}\}$, получим таким образом всего четыре класса сопряженных трехчленных про-

стных подгрупп. Полупростые подалгебры ранга 2 регулярны, это $\{e_{\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}, e_{\pm(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)}\}$ и $\{e_{\pm(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)}, e_{\pm(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)}\}$.

В качестве следующего примера вычислим простые подгруппы F . Корневые векторы F_4 суть $\pm \varepsilon_i$, $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $1/2 (\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$).

Беря всевозможные комбинации этих векторов по 2, 3, 4 и опуская перпендикуляры h из начала координат на гиперплоскости, проходящие через их концы, мы с точностью до зеркальных отражений получим 24 таких перпендикуляра. Из них нужно отобрать те, которые на самом деле дают трехчленные группы. Часть перпендикуляров можно сразу отбросить, если обратить внимание на то, что корневые элементы F_4 являются весовыми векторами того представления искомой трехчленной группы, которое содержится в регулярном представлении F_4 . Так как проекции корней F на h являются весами корневых элементов F_4 в указанном представлении, то эти проекции должны образовать одну или несколько арифметических прогрессий, содержащих нуль и имеющих знаменателем единицу. Другие упрощения получим, если сначала найдем трехчленные подгруппы группы B_4 , содержащейся в F_4 . Окончательно остаются следующие 14 перпендикуляров:

$$\begin{array}{lll} h_1 = \varepsilon_1, & h_6 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3, & h_{10} = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + 4\varepsilon_4, \\ h_2 = 1/2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), & h_7 = 1/2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3) & h_{11} = 1/2 \varepsilon_1, \\ h_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, & h_8 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3, & h_{12} = 1/2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 8\varepsilon_4), \\ h_4 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2, & h_9 = 1/2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + & h_{13} = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + 8\varepsilon_4, \\ h_5 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, & + 2\varepsilon_3 + 4\varepsilon_4), & h_{14} = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4. \end{array}$$

Вычисления убеждают, что все эти h_i действительно соответствуют трехчленным подгруппам. Эти подгруппы не могут быть сопряженными, так как проекции корней F_4 на h образуют различные системы. Первые десять из этих подгрупп можно взять содержащимися в B_4 .

Чтобы найти простые подгруппы ранга 2, нужно из h_i строить корневые звезды. Таких звезд, удовлетворяющих дополнительному условию, что идемпотент искомой группы содержится в выбранном идемпотенте F_4 , получается только четыре. Вычислениями легко обнаруживается, что эти звезды действительно дают простые подгруппы. Эти подгруппы* следующие:

$$\{e_1, e_{1'}, e_{1234}\}; \{e_{12}, e_{1'2'}, e_{13}\}; \\ \{e_1, e_{1'}, e_{12}\}; \{e_1 + e_{23}; 2e_{1'} + e_{2'3'}, e_2 + e_{13'} + e_{24} + 3/2 e_{24'}\}.$$

Простые группы ранга 3 и 4 регулярны и находятся непосредственно**.

* Группы указаны своими производящими элементами. Для краткости положено $e_{\varepsilon_1} = e_1$, $e_{-\varepsilon_1} = e_{1'}$, $e_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = e_{12}$ и т. д.

** Завершение работы по классификации полупростых подалгебр комплексных алгебр Ли и продолжение ее на вещественные алгебры Ли см. в статьях: *Е. Б. Дынкин*. Максимальные подгруппы классических групп.— *Тр. Моск. мат. о-ва*, 1952, 1, 39—166; *Е. Б. Дынкин*. Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли.— *Мат. сб.*, 1952, 30, 349—462; *Ф. И. Карпелевич*. Простые подалгебры вещественных алгебр Ли.— *Тр. Моск. мат. о-ва*, 1955, 4, 3—112.— *Прим. ред.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. Cartan*. Sur la structure des groupes des transformations finis et continus. 2 ed These. Paris, Vuibert, 1933.
2. *E. Cartan*. Les groupes projectives qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane.— Bull. Soc. math. France, 1913, 41, 53—96.
3. *E. Cartan*. Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semisimples — Bull. Soc. math. France, 1925, 49, 361—374.
4. *H. Casimir, B. L. Van der Waerden*. Algebraischer Beweis der vollständigen Reduzierbarkeit der Darstellung halbeinfacher Liescher Gruppen.— Math. Ann., 1935, 3, 1—12.
5. *G. Frobenius*. Über die kogredienten Transformationen der bilinearen Formen.— Berlin. Sitzungsber. Math.— Phys. Kl., 1896, S. 7—16.
6. *F. Gantmacher*. Canonical representation of automorphisms of a complex semi-simple Lie group.— Mat. сб., 1939, 5, N 47, 101—146.
7. *Ф. Р. Гантмахер*. О трехпараметрических простых подгруппах в простых группах Ли.— Изв. АН СССР, Отд. физ.-мат. наук. Научно-исслед. работы. Сборник рефератов за 1940 г. М.—Л., 1941, с. 22—23.
8. *В. В. Морозов*. О примитивных группах.— Мат. сб., 1939, 5, № 47, 355—390.
9. *В. В. Морозов*. О неполупростых максимальных подгруппах простых групп. Канд. дис. Казань, 1943.
10. *A. Malcev*. On the theory of the Lie groups in the large.— Мат. сб., 1945, 16, № 2, 163—189.
11. *H. Weyl*. Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen.— Math. Z., 1925, 23, 271—309; 1925, 24.
12. *J. H. C. Whitehead*. On the decomposition of an infinitesimal group.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1936, 32, 229—237.

КОММУТАТИВНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ *



Рассмотрим группу $\mathfrak{A}_{n-1}$ всех матриц степени n над полем комплексных чисел, определитель которых равен единице. И. Шуром [4] доказана следующая теорема:

Наивысшая размерность абелевых подгрупп группы $\mathfrak{A}_{n-1}$ равна $[n^2/4]$. При $n > 3$ абелевы подгруппы этой размерности переводятся друг в друга автоморфизмами $\mathfrak{A}_{n-1}$.

Группы $\mathfrak{A}_{n-1}$ образуют одну серию простых комплексных групп Ли. Естественно возникает задача о нахождении абелевых подгрупп максимальной размерности во всех остальных простых, а тем самым, и полупростых группах Ли. Решение этой задачи составляет предмет настоящей работы. В дальнейшем вместо групп удобнее рассматривать их алгебры Ли, и речь идет о нахождении коммутативных подалгебр наивысшей размерности.

Пусть G — простая комплексная алгебра Ли, A — какая-либо максимальная коммутативная подалгебра, $a \in A$. Элемент a можно однозначно представить в форме $r + t$, где $[rt] = 0$, t — нильпотентный и r — семирегулярный элемент G [1, стр. 110]. Из $[aA] = 0$ вытекает $[rA] = 0$. Так как A максимальная, то $r \in A$. Следовательно, либо все элементы A нильпотентны ($r = 0$), либо A содержит по крайней мере один семирегулярный элемент. Покажем, что основным является первый случай, в то время как во втором случае дело сводится к нахождению максимальных коммутативных подалгебр в простых алгебрах низшей размерности. Действительно, пусть $r \in A$, где r семирегулярен. Совокупность элементов G , перестановочных с A , образует полупростую алгебру $F \subset G$, которая распадается в прямую сумму простых алгебр $G_1, \dots, G_s$ низшей размерности и еще, может быть, некоторой коммутативной подалгебры B . Алгебра A содержится в F . С другой стороны, ясно, что максимальные коммутативные подалгебры F представляют собою прямые суммы максимальных коммутативных подалгебр G_i . Таким образом, главная задача сводится к нахождению абелевых подалгебр максимальной размерности, все элементы которых нильпотентны. Основной результат дает следующая

Т е о р е м а. *Каждая простая алгебра Ли, за исключением** A_2, B_4, D_4, G_2 , с точностью до автоморфизмов имеет только одну коммутативную подалгебру наивысшей размерности с нильпотентными элементами. Эта размерность равна $[n^2/4]$ для алгебр A_{n-1} ($n > 3$), $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ — для B_n ($n > 4$), $\frac{1}{2}n(n+1)$ — для C_n ($n \geq 2$), $\frac{1}{2}n(n-1)$ — для D_n ($n > 4$), 16, 27, 36, 9, 5 — соответственно для E_6, E_7, E_8, F_4, B_3 . Алгебра B_4 имеет два класса сопряженных абелевых подалгебр наивысшей размерности 7, D_4 — два класса размерности 6 и G_2 — три класса размерности 3.*

Для вывода теоремы придется воспользоваться следующими замечаниями. Пусть G — заданная простая алгебра, H — ее максимальная регуляр-

* Изв. АН СССР, сер. мат., 1945, 9, 291—300.

** Алгебра A_2 имеет два класса сопряженных абелевых подалгебр наивысшей размерности 2. — Прим. ред.

ределенными коэффициентами a_{ij} . Условия $[x_i x_j] = 0$, принимая во внимание (1), дают систему уравнений для a_{ij} . В случае алгебр A_n, C_n, D_n, E_6, E_7 из этих уравнений следует, что $a_{ij} = 0$ и, таким образом, каждой максимальной системе корней отвечает только одна подалгебра. Для алгебр B_n, F_4, E_8 сначала пишутся уравнения (2) с неопределенными коэффициентами, затем показывается, что некоторые из коэффициентов можно обратить в нуль, производя подходящий автоморфизм N . После этого из условий $[x_i x_j] = 0$ получается равенство нулю остальных коэффициентов a_{ij} . Таким образом, и для этих алгебр вторая задача оказывается решенной. Наконец, только что описанная процедура в случае алгебр B_4, D_4, G_2 дает несколько подалгебр. Чтобы показать их несопряженность, вычисляется нормализатор этих подалгебр *, размерность которого в разных случаях оказывается различной. Так как нормализаторы сопряженных подалгебр должны быть сопряженными и, следовательно, изоморфными, то это обстоятельство доказывает несопряженность первоначальных абелевых подалгебр.

Решение третьей задачи трудностей не представляет, так как почти во всех случаях максимальные коммутативные системы корней легко переводятся друг в друга автоморфизмами основной алгебры.

А л г е б р ы A_n . Корни имеют вид $\omega_i - \omega_j$ ($i \neq j; i, j = 1, \dots, n+1$), где $\omega_1, \dots, \omega_{n+1}$ — линейно независимые векторы вспомогательного евклидова пространства. Положительными можно считать корни $\omega_i - \omega_j$ ($i < j$). Пусть $S = \{\omega_{i_1} - \omega_{j_1}, \dots, \omega_{i_k} - \omega_{j_k}\}$ — максимальная система коммутирующих корней, $M = \{i_1, \dots, i_k\}$, $N = \{j_1, \dots, j_k\}$. Обозначим через s и t числа различных элементов в множествах M и N . Так как сумма двух корней из S не может быть корнем, то $M \cap N = 0$, $s + t \leq n+1$. Следовательно, число корней в S не более st и может быть равно st только в том случае, если каждое число множества M меньше каждого числа множества N . Максимум st при условии $s + t \leq n+1$ равен $[(n+1)^2/4]$ и достигается, таким образом, только для системы

$$S_0 = \{\omega_i - \omega_j\} \quad \left(i = 1, \dots, \frac{n+1}{2}; j = \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n+1 \right)$$

при n нечетном и для систем

$$S_1 = \{\omega_i - \omega_j\} \quad \left(i = 1, \dots, \frac{n}{2}; j = \frac{n}{2} + 1, \dots, n+1 \right),$$

$$S_2 = \{\omega_i - \omega_j\} \quad \left(i = 1, \dots, \frac{n}{2} + 1; j = \frac{n}{2} + 2, \dots, n+1 \right)$$

при n четном. Обозначим через p одно из чисел $(n+1)/2, n/2, n/2 + 1$ соответственно тому, какую систему корней рассматриваем. Базис коммутативной подалгебры, отвечающей этим системам, должен иметь вид

$$x_{\alpha\alpha} = e_{\alpha\alpha'} + \sum_{i,j} A_{\alpha\alpha}^{ij} e_{ij'}$$

$$(i < a, i < j; a, i, j = 1, \dots, p; \alpha = p+1, \dots, n+1),$$

где для краткости введено обозначение $e_{\alpha\alpha'}$ вместо $e_{\omega_{\alpha}-\omega_{\alpha'}}$. Условие $[x_{\alpha\alpha} x_{\beta\beta}] = 0$ ($\alpha \neq \beta$) дает

$$\sum_i A_{\alpha\alpha}^{ij} M_i e_{ij'} + \sum_i A_{\beta\beta}^{ia} N_i e_{ia'} = 0, \quad (3)$$

* Нормализатором A в G называется совокупность элементов g , удовлетворяющих условию $[gA] \subset A$.

где M_i, N_i — структурные константы, отличные от нуля и взятые из формул (4). Ввиду линейной независимости e_{mn} (3) дает $A_{\alpha\alpha}^{ij} = 0$. Так как система S_1 переводится в S_2 автоморфизмом A_n , то это дает теорему Шура: алгебра A_n с точностью до автоморфизмов содержит единственную абелеву подалгебру наивысшей размерности $[(n+1)^2/4]$.

А л г е б р ы D_n ($n > 4$). Корни имеют вид $\pm \omega_i \pm \omega_j$ ($i \neq j$; $i, j = 1, \dots, n$); среди них положительные $\omega_i \pm \omega_j$ ($i < j$). Пусть S — система коммутирующих положительных корней, M — совокупность таких i , для которых S содержит корень вида $\omega_i \pm \omega_j$, N — совокупность тех j , для которых в S имеется корень $\omega_k - \omega_j$,

$$P = M \cap N, \quad M - P = \{i_1, \dots, i_p\}, \quad N - P = \{j_1, \dots, j_q\},$$

$$P = \{l_1, \dots, l_r\}.$$

Максимальное число положительных коммутирующих корней при данных p, q, r не более $s = \frac{1}{2}p(p-1) + pq + 2r$ и равно s только при условии, что каждое i меньше каждого j . Числа p, q, r , очевидно, связаны соотношением $p + q + r \leq n$, и максимум s ($n \geq 5$) равен $\frac{1}{2}n(n-1)$. Этот максимум достигается при двух системах:

$$S_1 = \{\omega_i + \omega_j, \omega_i + \omega_n\}, \quad S_2 = \{\omega_i + \omega_j, \omega_i - \omega_n\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1).$$

Полагая для сокращения $e_{ij} = e_{\omega_i + \omega_j}$, $e_{ij'} = e_{\omega_i - \omega_j}$, $e_{in} = e_{\omega_i + \omega_n}$, $e_{in'} = e_{\omega_i - \omega_n}$ в случае, когда рассматривается система S_1 , и $e_{in} = e_{\omega_i + \omega_n}$, $e_{in'} = e_{\omega_i - \omega_n}$, если рассматривается S_2 , мы видим, что базис соответственной коммутативной подалгебры имеет в обоих случаях вид

$$x_{ab} = e_{ab} + \sum_{i,j} A_{ab}^{ij} e_{ij}, \quad (i < j; i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Из условий (2) получаем дополнительно, что $x_{1k} = e_{1k}$ ($k = 1, \dots, n-1$). Соотношения $[x_{ab}e_{1k}]$ дают $A_{ab}^{ij} = 0$ для $i \neq 1, j \neq n$. Таким образом,

$$x_{ab} = e_{ab} + \sum_{i=2}^{n-2} A_{ab}^i e_{1i'} + \sum_{i=1}^{n-1} B_{ab}^i e_{in'}.$$

Условия $[x_{ab}x_{cn}] = 0$ ($a, b \neq n$) дают

$$A_{ab}^i = B_{ab}^i = 0 \quad \text{и} \quad A_{an}^j = B_{an}^j = 0 \quad (j \neq a).$$

Выберем три различных индекса a, b, c , отличных от 1, n . Тогда предыдущие равенства дают

$$x_{an} = e_{an} + B_a e_{an'}, \quad x_{bn} = e_{bn} + B_b e_{bn'}, \quad x_{cn} = e_{cn} + B_c e_{cn'}.$$

Правила коммутирования $[e_{in}e_{jn}] = e_{ij}$ ($i < j$) [1, стр. 141] и соотношения коммутативности $[x_{an}x_{bn}] = [x_{an}x_{cn}] = [x_{bn}x_{cn}] = 0$ дают $B_a = B_b = B_c = 0$. Следовательно, $x_{ab} = e_{ab}$ ($a, b = 1, 2, \dots, n$). Таким образом, системам S_1, S_2 соответствует только по одной коммутативной подалгебре. Так как S_1 переводится в S_2 автоморфизмом D_n , то оказывается, что в алгебре D_n ($n > 4$) с точностью до автоморфизмов существует только одна коммутативная подалгебра наивысшей размерности $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Алгебры C_n . Корни имеют вид $\pm 2\omega_i$, $\pm \omega_i \pm \omega_j$; из них положительными являются $2\omega_i$, $\omega_i \pm \omega_j$ ($i < j$; $i, j = 1, 2, \dots, n$). В предыдущем случае установлено, что максимальная коммутативная система корней вида $\omega_i \pm \omega_j$ может быть либо S_1 , либо S_2 . Присоединяя к S_1 корни $2\omega_j$, получим единственную максимальную коммутативную систему корней C_n . Базис (2) соответственной абелевой подалгебры имеет вид

$$x_a = e_a + \sum_{i,j} A_a^{ij} e_{ij},$$

$$x_{ab} = e_{ab} + \sum_{i,j} B_{ab}^{ij} e_{ij}.$$

Условия (2) дают, кроме того, $x_{1a} = e_{1a}$. Из соотношений

$$[e_{1a} x_p] = [e_{1b} x_{pq}] = 0$$

непосредственно получается $x_a = e_a$, $x_{ab} = e_{ab}$. Следовательно, алгебра C_n с точностью до сопряженности содержит единственную абелеву подалгебру наивысшей размерности $1/2 n (n + 1)$.

Алгебры B_n ($n > 4$). Корни B_n имеют вид $\pm \omega_i$, $\pm \omega_i \pm \omega_j$; из них положительными ω_i , $\omega_i \pm \omega_j$ ($i < j$). Коммутативная система корней может содержать не более одного корня вида ω_i . Максимальные коммутативные системы корней вида $\omega_i \pm \omega_j$ были определены выше. Отсюда заключаем, что существуют только следующие коммутативные системы, содержащие наибольшее число корней:

$$S_p = \{\omega_p, \omega_i + \omega_j, \omega_i + \omega_n\}, S_q^* = \{\omega_q, \omega_i + \omega_j, \omega_i - \omega_n\} \\ (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n-1; p = 1, \dots, n; q = 1, \dots, n-1).$$

Вводя для корневых элементов обозначения, аналогичные использованным при рассмотрении D_n , мы видим, что базис соответственной абелевой подалгебры во всех случаях может быть взят в форме

$$x_{1i} = e_{1i},$$

$$x_{km} = e_{km} + \sum A_{km}^{ij} e_{ij} + \sum B_{km}^i e_i,$$

$$x_s = e_s + \sum A^i e_i + \sum B^i e_i.$$

Автоморфизмами вида $\exp \lambda e_{is}$ можно уничтожить члены $B^i e_i$ в выражении x_s , после чего условия $[e_{1i}, x_s] = [e_{1i}, x_{km}] = 0$ дают $A^{ij} = A_{km}^{ij} = 0$ ($i \neq 1$, $j \neq n$). Далее, из условий $[x_s, x_{km}] = [x_s, x_{kn}] = 0$ последовательно находим $A^{1i} = A^{1n} = B_{km}^i = 0$. При рассмотрении D_n было выяснено, что

$$x_{km} = e_{km} + \sum A_{km}^{ij} e_{ij}$$

коммутируют только при условии $A_{km}^{ij} = 0$, что дает $x_{km} = e_{km}$. Так как системы S_n , S_q^* переводятся друг в друга автоморфизмами B_n , то алгебра B_n ($n > 4$) с точностью до сопряженности содержит только одну абелеву подалгебру наивысшей размерности $1/2 n (n - 1) + 1$.

Алгебра F_4 . Корни имеют вид $\pm \omega_i$, $\pm \omega_i \pm \omega_j$, $1/2 (\pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \omega_4)$; положительные ω_i , $\omega_i \pm \omega_j$ ($i < j$), $1/2 (\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \omega_4)$. Среди корней последнего типа коммутировать между собой могут только

пары. Поэтому максимальные системы корней F_4 имеют следующий вид:

$$S = \{\omega_1, \omega_1 \pm \omega_i, \omega_{1abc}, \omega_{1lmn}\} \quad (i = 2, 3, 4),$$

$$S_p = \{\omega_p, \omega_i + \omega_j, \omega_i + \omega_4, \omega_{1abc}, \omega_{1lmn}\} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$S_q^* = \{\omega_q, \omega_i + \omega_j, \omega_i - \omega_4, \omega_{1abc}, \omega_{1lmn}\} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Рассмотрим первый случай. Базис соответственной абелевой подалгебры (2) будет иметь вид

$$x_1 = e_1, \quad x_{1i} = e_{1i},$$

$$x_{1abc} = e_{1abc} + \sum A^{ijk} e_{1ijk},$$

$$x_{1lmn} = e_{1lmn} + \sum B^{ijk} e_{1ijk}.$$

Автоморфизмами типа $\exp te_i$, $\exp te_{ij}$ можно уничтожить в выражениях для x_{1abc} , x_{1lmn} все члены, кроме первых. Таким образом, с точностью до автоморфизмов в первом случае имеется только одна абелева подалгебра $A_1 = \{e_1, e_{1i}, e_{1i'}, e_{1234}, e_{1234'}\}$. Аналогичным способом показывается, что во втором и третьем случаях будет с точностью до автоморфизмов также по одной коммутативной подалгебре. Так как системы корней S , S_p , S_q^* автоморфизмами переводятся друг в друга, то и соответственные подалгебры оказываются сопряженными. Таким образом, в алгебре F_4 с точностью до сопряженности имеется одна коммутативная подалгебра наивысшей размерности 9.

А л г е б р а E_6 . Корни E_6 суть $\omega_i - \omega_j$, $\pm(\omega_i + \omega_j + \omega_k)$, $\pm(\omega_1 + \dots + \omega_6) = \pm\omega_0$; из них положительными можно считать $\omega_i - \omega_j$, $\omega_i + \omega_j + \omega_k$, ω_0 ($i < j$; $i, j, k = 1, \dots, 6$). Назовем два корня вида $\omega_i + \omega_j + \omega_k$ дополнительными, если их сумма есть ω_0 . Системы корней

$$S_1 = \{\omega_1 - \omega_i; \omega_1 + \omega_i + \omega_j; \omega_0\} \quad (i, j = 2, 3, 4, 5, 6),$$

$$S_2 = \{\omega_i - \omega_6; \omega_i + \omega_j + \omega_k; \omega_0\} \quad (i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

являются коммутативными и содержат по 16 корней. Покажем, что других коммутативных систем S , содержащих ≥ 16 корней, нет. В самом деле, из каждой пары взаимно дополнительных корней вида $\omega_i + \omega_j + \omega_k$ в S может входить только один корень. Всего корней этого вида 20 и из них в S входит не более 10. Следовательно, S должно содержать не менее 5 корней вида $\omega_i - \omega_j$. Пусть $\omega_{i_1} - \omega_{j_1}, \dots$ — эти корни. Если $i_1 = i_2 = \dots = i_5$, или $j_1 = \dots = j_5$, то получим системы S_1 , S_2 . В остальных случаях, как легко видеть, общее число корней будет меньше 16.

Рассмотрим соответственные абелевы подалгебры A_1 , A_2 . В силу условий (2) базис A_1 будет иметь вид $x_{1i'} = e_{1i'}$, $x_{1ij} = e_{1ij}$, $x_0 = e_0$ и алгебра A_1 — единственная. Базис алгебр A_2 , отвечающих системе S_2 , должен иметь вид

$$x_0 = e_0, \quad x_{1ij} = e_{1ij},$$

$$x_{2ij} = e_{2ij} + \sum A_{ij}^{\alpha} e_{1\alpha 6} + \sum B_{ij}^{\alpha} e_{1\alpha'},$$

$$x_{345} = e_{345} + \sum A^{\alpha} e_{1\alpha 6} + \sum B^{\alpha} e_{2\alpha 6} + \sum C^{\alpha} e_{1\alpha'} + \sum D^{\alpha} e_{2\alpha'},$$

$$x_{i6'} = e_{i6'} + \sum P_i^{\alpha n} e_{\alpha n 6} + \sum Q_i^{\alpha \beta} e_{\alpha \beta'}.$$

Условия $[x_{i6'}, e_{1jk}] = 0$ дают $P_j^{\alpha n} = Q_j^{\alpha \beta} = 0$ для $\alpha > 1$. Условия $[x_{i6'}, x_{jkm}] = 0$ дают $A = \dots = Q = 0$. Таким образом, базис A_2 оказывается равным $\{e_{i6'}, e_{ijk}, e_0\}$. Внешним автоморфизмом [1, стр. 142] A_1 переводится в A_2 . Отсюда алгебра E_6 с точностью до автоморфизмов содержит единственную абелеву подалгебру максимальной размерности 16.

А л г е б р а E_7 . Корни имеют вид $\omega_i - \omega_j, \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_j + \omega_k + \omega_m - \omega_p - \omega_q - \omega_r - \omega_s)$; из них положительные ($i < j$) $\omega_i - \omega_j = \omega_{ij}, \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_i + \omega_j + \omega_k - \dots - \omega_s) = \omega_{ijk}$ ($\{i, j, k, \dots, s\} = \{2, \dots, 8\}$). Система

$$S_0 = \{\omega_{1i}; \omega_{2i}; \omega_{2ij}\} \quad (i, j = 3, 4, \dots, 8)$$

является коммутативной и содержит 27 корней. Докажем, что всякая другая коммутативная система положительных корней содержит меньшее число элементов. Для этого удобно воспользоваться такой леммой:

Л е м м а. *Рассмотрим всевозможные тройки (l, m, n) , образованные числами $1, 2, \dots, N$ ($N > 6$). Если любые две тройки, принадлежащие некоторой системе троек Σ , имеют непустое пересечение, то Σ содержит не более $\frac{1}{2}(N-1)(N-2)$ троек. Если при этом Σ содержит в точности $\frac{1}{2}(N-1)(N-2)$ троек, то тройки Σ имеют вид (a, i, j) , где a — некоторое фиксированное число, входящее, таким образом, во все тройки Σ .*

Доказательство этой леммы не представляет интереса и может быть опущено.

Пусть теперь S — система коммутирующих положительных корней E_7 , содержащая не менее 27 элементов. Чтобы два корня $\omega_{ijk}, \omega_{pqr}$ коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы тройки $(i, j, k), (p, q, r)$ имели непустое пересечение. В силу леммы отсюда следует, что число корней этого вида, содержащихся в S , не превосходит 15. Поэтому S должна содержать по крайней мере 12 корней вида $\omega_i - \omega_j$. Множество первых индексов этих корней обозначим M , множество вторых — N . Если M содержит только два элемента, то, очевидно, $S = S_0$. Легко видеть, что в случае, когда M содержит 3, 4, 5 или 6 чисел, число корней S будет меньше 27. Рассмотрим абелеву подалгебру A_0 , отвечающую системе S_0 . Базис A_0 согласно условиям (2) должен иметь вид

$$x_{1i} = e_{1i}, \quad x_{2ij} = e_{2ij}, \quad x_{2i} = e_{2i} + \sum A_i^{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq 2).$$

Условия $[x_{2i}, x_{2pq}] = 0$ дают $A_i^{\alpha\beta\gamma} = 0$. Таким образом, с точностью до сопряженности E_7 содержит лишь одну абелеву подалгебру максимальной размерности 27.

А л г е б р а E_8 . Корни этой алгебры имеют вид $\omega_i - \omega_j, \pm(\omega_i + \omega_j + \omega_k)$, где $i, j, k = 1, 2, \dots, 9, \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_9 = 0$; положительными корнями являются $\omega_i - \omega_j$ ($i < j$), $\omega_1 + \omega_j + \omega_k, -\omega_j - \omega_k - \omega_m$ ($i = 1, \dots, 9; j, k, m = 2, \dots, 9$). Рассуждениями, сходными с предыдущими, но принимающими довольно громоздкую форму, можно установить, что коммутативными системами, имеющими наибольшее число элементов, здесь будут

$$S_0 = \{\omega_1 - \omega_i, \omega_1 + \omega_i + \omega_j\} \quad (i, j = 2, \dots, 9),$$

$$S_p = \{\omega_1 - \omega_i, \omega_2 - \omega_i, \omega_1 + \omega_2 + \omega_i, -\omega_p - \omega_j - \omega_k\} \\ (i = 3, \dots, 9; j, k \neq p; j, k = 3, 4, \dots, 9).$$

$$S_{pabc} = \{\omega_1 - \omega_i, \omega_p - \omega_j, -\omega_s - \omega_j - \omega_k, -\omega_a - \omega_b - \omega_c, \omega_1 + \omega_p + \omega_i, \\ \omega_1 + \omega_s + \omega_i\} \quad (i \neq p, i = 2, \dots, 9; j, k = a, b, c; s, t \neq 1, p, a, b, c);$$

$$S_{abc} = \{\omega_1 - \omega_i; \omega_1 + \omega_j + \omega_s, \omega_1 + \omega_j + \omega_k, -\omega_s - \omega_i - \omega_u\} \\ (i = 2, \dots, 9; j, k = a, b, c; s, t, u \neq a, b, c).$$

Каждая из этих систем может быть переведена в любую другую некоторым автоморфизмом E_8 . Можно также проверить, что с точностью до автоморфизмов каждой из этих систем отвечает одна коммутативная подалгебра.

А л г е б р а G_2 . Корни G_2 можно представить в форме $\pm \omega_i, \omega_i - \omega_j$, где $i \neq j, i, j = 1, 2, 3; \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. Вводя обозначения $\omega_i = \omega_{i0}, -\omega_i = \omega_{0i}, \omega_i - \omega_j = \omega_{ij}$, можно представить положительные корни в виде $\omega_{12} < \omega_{20} < \omega_{10} < \omega_{03} < \omega_{23} < \omega_{13}$. Максимальные коммутирующие системы:

$$S_1 = \{\omega_{13}, \omega_{23}, \omega_{03}\}, \quad S_2 = \{\omega_{13}, \omega_{23}, \omega_{10}\}, \quad S_3 = \{\omega_{13}, \omega_{23}, \omega_{20}\}, \\ S_4 = \{\omega_{13}, \omega_{03}, \omega_{12}\}, \quad S_5 = \{\omega_{13}, \omega_{10}, \omega_{12}\}.$$

Первой системе отвечает единственная абелева подалгебра A_1 с нормализатором N_1 :

$$A_1 = \{e_{13}, e_{23}, e_{03}\}, \quad N_1 = \{H, e_{13}, e_{23}, e_{03}, e_{10}, e_{20}, e_{12}, e_{21}\}.$$

Второй системе отвечает один класс сопряженных абелевых подалгебр, представителем которого служит

$$A_2 = \{e_{13}, e_{23}, e_{10}\}, \quad N_2 = \{H, e_{13}, e_{23}, e_{10}, e_{03}, e_{12}\}.$$

Третьей системе соответствует один класс сопряженных абелевых подалгебр, совпадающий с A_2 . Абелевы подалгебры, соответствующие четвертой системе, разбиваются на два класса, один из которых совпадает с A_2 , а представителем второго может служить

$$A_4 = \{e_{13}, e_{03}, e_{23} + e_{12}\}, \quad N_4 = \{[e_{13}, e_{31}], e_{13}, e_{23}, e_{03}, e_{10}, e_{12}\}.$$

Подалгебры, соответствующие пятой системе, распадаются на два класса, один из которых совпадает с A_1 , а другой — с A_4 . Так как нормализаторы N_1, N_2, N_4 неизоморфны, то алгебры A_1, A_2, A_4 не могут быть сопряженными.

А л г е б р а D_4 . Корни $\pm \omega_i \pm \omega_j$; положительные $\omega_i \pm \omega_j$ ($i < j; i, j = 1, 2, 3, 4$). Имеются три максимальные системы коммутирующих корней:

$$S_1 = \{\omega_2 \pm \omega_i\}, \quad S_2 = \{\omega_j + \omega_k, \omega_j + \omega_4\}, \\ S_3 = \{\omega_j + \omega_k, \omega_j - \omega_4\} \quad (i = 2, 3, 4; j, k = 1, 2, 3).$$

S_1 отвечает в точности одна абелева подалгебра

$$A_1 = \{e_{12}, e_{12'}, e_{13}, e_{13'}, e_{14}, e_{14'}\}, \quad N_1 = \{H, A_1, e_\alpha\}, \\ \alpha = \pm \omega_i \pm \omega_j \quad (i, j = 2, 3, 4).$$

Системе S_2 отвечают два класса сопряженных подалгебр, один из которых автоморфизмами D_4 переводится в A_1 , а представителем второго служит

алгебра

$$A_2 = \{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23} + e_{14'}, e_{24} + e_{13'}, e_{34} + e_{12'}\},$$

$$N_2 = \{h_{12}, h_{13}, h_{14}, e_{ij}, e_{1k'}, e_{km'}\} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4; k, m = 2, 3, 4).$$

Для системы S_3 снова получаем два класса сопряженных абелевых подалгебр. Один из этих классов автоморфизмом D_4 переводится в A_1 , другой — в A_2 . Классы, к которым принадлежат A_1, A_2 , друг в друга перевести каким-либо автоморфизмом D_4 не могут, так как нормализаторы N_1, N_2 неизоморфны.

А л г е б р а B_4 . Корнями будут $\pm \omega_i, \pm \omega_i \pm \omega_j$; из них положительны $\omega_i, \omega_i \pm \omega_j$ ($i < j$). Максимальные системы коммутирующих корней имеют вид

$$S_0 = \{\omega_1, \omega_1 \pm \omega_i\}, S_p = \{\omega_p, \omega_j + \omega_k, \omega_j + \omega_4\},$$

$$S_q^* = \{\omega_q, \omega_j + \omega_k, \omega_j - \omega_4\} \quad (i = 2, 3, 4; j, k = 1, 2, 3).$$

Легко показать, что абелевы подалгебры, соответствующие какой-либо одной из этих систем, сопряжены между собой. С другой стороны, системы S_q, S_q^* переводятся одна в другую автоморфизмами B_4 . Таким образом, каждая из абелевых подалгебр максимальной размерности сопряжена либо с $A_0 = \{e_1, e_{1i}, e_{1i'}\}$, либо с $A_1 = \{e_1, e_{ij}, e_{i4}\}$. Нормализатором A_0 является $N_0 = \{H, e_1, e_i, e_{1i}, e_{ij}\}$ ($i, j = \pm 2, \pm 3, \pm 4$), нормализатором A_1 служит $N_1 = \{H, e_i, e_{ij'}, e_{jk'}, e_{ij}\}$ ($i < j; i = 1, 2, 3, 4; j, k = 2, 3, 4$). N_0, N_1 имеют разную размерность, поэтому A_0, A_1 не сопряжены.

А л г е б р а B_3 . Положительные корни: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_1 \pm \omega_2, \omega_1 \pm \omega_3, \omega_2 \pm \omega_3$. Максимальная система коммутирующих корней одна — $S = \{\omega_1, \omega_1 \pm \omega_2, \omega_1 \pm \omega_3\}$ и ей отвечает единственная абелева подалгебра в B_3 .

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Gantmacher. Canonical representation of automorphisms of a complex semi-simple Lie group.— Math. sb., 1939, 5, N 1, 101—146.
2. В. В. Морозов. О нильпотентном элементе в полупростой алгебре Ли.— Докл. АН СССР, 1942, 36, № 3, 91—94.
3. Н. Г. Чеботарев. Теория групп Ли. М., 1940.
4. I. Schur. Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen.— J. reine und angew. Math., 1905, 130, 66—76.



В теории алгебр Ли центральное место в настоящее время занимают алгебры над полем комплексных чисел. Наиболее изученными из них являются полупростые алгебры, полная классификация которых дается известной теорией Картана — Киллинга. Решена также задача, как, исходя из данной разрешимой алгебры $\mathfrak{K}$ и полупростой $\mathfrak{S}$, построить все алгебры $\mathfrak{L}$ с радикалом $\mathfrak{K}$ и алгеброй вычетов $\mathfrak{L}/\mathfrak{K}$, изоморфной $\mathfrak{S}$. Таким образом, общая задача классификации алгебр Ли над полем комплексных чисел приводится к исследованию разрешимых алгебр.

Однако уже в теории Картана — Киллинга выяснилась важная роль одного специального типа разрешимых алгебр, именно алгебр ранга нуль, или, по другой терминологии, нильпотентных алгебр. С известной точки зрения общий случай разрешимых алгебр занимает промежуточное положение между полупростыми алгебрами, где конфигурация так называемых корней алгебры целиком определяет алгебру; и нильпотентными алгебрами, где все корни равны нулю и ничего не определяют. У разрешимых не нильпотентных алгебр имеются ненулевые корни, однако знания их конфигурации, вообще говоря, недостаточно для определения алгебры.

В настоящей работе разрешимые алгебры подвергнуты более детальному изучению. Помимо нахождения общих свойств основная цель работы сводится к выяснению того, насколько вопросы, касающиеся структуры разрешимых алгебр, можно свести к аналогичным вопросам относительно нильпотентных алгебр.

Задача разделяется на две части. Сначала изучается специальный класс разрешимых алгебр — так называемые **р а с щ е п л я е м ы е а л г е б р ы**. Все такие алгебры допускают разложение в полупрямую сумму своего максимального нильпотентного идеала — ядра алгебры и некоторой особой коммутативной подалгебры. Свойства расщепляемой алгебры легко усматриваются из свойств такого разложения, и основным инвариантом, определяющим разрешимую расщепляемую алгебру, является ее ядро. Чтобы получить все расщепляемые разрешимые алгебры с данным ядром $\mathfrak{Z}$, строится вспомогательное, зависящее от $\mathfrak{Z}$ линейное пространство $\mathfrak{M}$ и некоторая конечная группа Θ линейных преобразований в $\mathfrak{M}$. Тогда каждому линейному подпространству $\mathfrak{M}$ однозначно соответствует расщепляемая алгебра, причем эти алгебры изоморфны тогда и только тогда, когда исходные подпространства переводятся друг в друга преобразованиями Θ .

Во второй части показывается, что всякая разрешимая алгебра $\mathfrak{K}$ содержится в некоторой расщепляемой алгебре. Минимальная расщепляемая алгебра, содержащая $\mathfrak{K}$, определяется однозначно и называется **р а с щ е п л е н и е м $\mathfrak{K}$** . Свойства разрешимых алгебр оказываются весьма тесно связанными со свойствами их расщеплений. Так как расщепляемые алгебры были в первой части, в известном смысле, классифицированы, то оказывает-

* Изв. АН СССР, сер. мат., 1945, 9, 329—356.

ся естественным считать расщепление основным инвариантом, определяющим разрешимую алгебру. Конструирование разрешимых алгебр с данным расщеплением производится вполне аналогично тому, как это было сделано для расщепляемых алгебр с данным ядром. Отличие состоит в том, что здесь группа Θ уже будет группой Ли, однако нильпотентной. Таким образом, задача приводится к нахождению линейных подпространств, переводящихся друг в друга данной нильпотентной линейной группой.

В качестве следствий этой теории получаются такие результаты:

1) Общие теоремы § 2 вместе с теоремой Биркгофа о представимости нильпотентных алгебр непосредственно приводят к теореме Адо.

2) Теорема о расщепляемости алгебраических групп (п. 3) может быть применена в теории инвариантов, чтобы редуцировать основную проблему теории инвариантов к аналогичной проблеме для нильпотентных групп. Эта редукция по существу совпадает с редукцией Витценбока [10]. Однако благодаря наличию общих теорем о расщепляемых алгебрах редукция получается здесь сразу для всей группы, в то время как редукция Витценбока производится для каждого преобразования в отдельности.

3) Общие теоремы § 1, 2 дают возможность найти с точностью до внутренней сопряженности все максимальные нильпотентные подалгебры алгебр Ли. Таких подалгебр в каждой алгебре Ли оказывается конечное число, и среди них находятся две крайние — картановская подалгебра и максимальная подалгебра, образованная нильпотентными элементами. Единственность класса картановских подалгебр совпадает с известной теоремой об их сопряженности [5].

§ 1. Расщепляемые алгебры

1. Полупрямые разложения. Линейное векторное пространство $\mathfrak{G}$ над полем K называется алгеброй Ли над этим полем, если в $\mathfrak{G}$ дополнительно задана операция коммутирования $[fg]$, обладающая свойствами

$$[fg] = -[gf], \quad [\lambda f + \mu g, h] = \lambda [fh] + \mu [gh],$$

$$[f [gh]] + [g [hf]] + [h [fg]] = 0.$$

Преобразование $[gx] = Gx$, $x \in \mathfrak{G}$, является линейным преобразованием пространства $\mathfrak{G}$. Соответствие $g \rightarrow G$ называется регулярным представлением $\mathfrak{G}$. В регулярном представлении операции коммутирования $[fg]$ отвечает коммутирование соответственных линейных преобразований $FG - GF = [FG]$. Если матрица G имеет простые элементарные делители, то она сама и отвечающий ей элемент $g \in \mathfrak{G}$ называются *семирегулярными* *. Если некоторая степень G равна нулю, то G и g называются *нильпотентными* [5]. Очевидно, при гомоморфном отображении одной алгебры на другую нильпотентные и семирегулярные элементы первой переходят соответственно в нильпотентные и семирегулярные элементы второй. Аналогично, если некоторый элемент f подалгебры $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ нильпотентен или семирегулярен в $\mathfrak{G}$, то он будет таким же и в $\mathfrak{F}$. Обратное в общем случае неверно.

В дальнейшем всюду, где не оговорено противное, в качестве основного поля K берется поле всех комплексных чисел. Тогда семирегулярными элементами $\mathfrak{G}$ будут такие элементы, матрица которых в регулярном пред-

* По другой терминологии — полупростыми. — *Прим. ред.*

ставлении $\mathfrak{G}$ приводима к диагональной жордановой форме. Отметим еще, что линейное преобразование $\exp G = E + G/1! + G^2/2! + \dots$ является так называемым внутренним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{G}$, порожденным элементом g . Вместо $\exp G$ мы будем также употреблять обозначение $\exp g$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{G}$ содержит подалгебру $\mathfrak{F}$, $g \in \mathfrak{G}$, $[g\mathfrak{F}] \subset \mathfrak{F}$, $g = a + t$, где a — семирегулярный и t — нильпотентный элементы $\mathfrak{G}$, $[at] = 0$. Тогда $[a\mathfrak{F}] \subset \mathfrak{F}$ и структура алгебры $\{\lambda a + \mu t + \mathfrak{F}\}$ целиком определяется подалгеброй $\{\lambda g + \mathfrak{F}\}$, хотя формально представление $g = a + t$ зависит от объемлющей алгебры $\mathfrak{G}$.

Доказательство. Пусть в регулярном представлении $\mathfrak{G}$ элементами g , a , t отвечают матрицы G , A , T . Обозначим через $\rho_1, \dots, \rho_s$ характеристические числа G и разложим пространство $\mathfrak{G}$ в прямую сумму инвариантных корневых подпространств $\mathfrak{G}_i$ ($i = 1, \dots, s$), отвечающих этим характеристическим числам. Тогда $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_i$ будут соответственными инвариантными корневыми подпространствами $\mathfrak{F}$ относительно G . Возьмем линейное преобразование A_1 пространства $\mathfrak{G}$, определяемое соотношениями

$$A_1 g = \rho_i g \quad (g \in \mathfrak{G}_i).$$

Матрица $T_1 = G - A_1$ нильпотентна и перестановочна с A_1 . Таким образом, для G имеются два разложения $G = A + T = A_1 + T_1$, где $[AT] = [A_1 T_1] = 0$, A , A_1 семирегулярны, T , T_1 нильпотентны. Приводя G к нормальной жордановой форме, непосредственно убеждаемся, что $A = A_1$, $T = T_1$. Числа ρ_i для подпространств $\mathfrak{F}_i$ известны, коль скоро известно, какое преобразование элемент g вызывает в $\mathfrak{F}$. Поэтому структура алгебры $\{\lambda a + \mu g + \mathfrak{F}\}$ вполне известна, если известна структура $\{\mu g + \mathfrak{F}\}$.

В частности, пусть $[g, g_2] = 0$ и $g_1 = a_1 + t_1$ — упомянутое в теореме 1 разложение. Тогда, применяя эту теорему к подалгебре $\mathfrak{F} = \{\lambda g_2\}$, мы получим $[ag_2] = [tg_2] = 0^*$.

О п р е д е л е н и е. Элемент g алгебры $\mathfrak{G}$ называется разложимым, если его можно представить в виде суммы $a + t$, где a — семирегулярный и t — нильпотентный элементы $\mathfrak{G}$. Если, сверх того, $[at] = 0$, то разложение $g = a + t$ называется нормальным, а сам элемент g — нормальным разложимым.

В дальнейшем рассматриваются, главным образом, разрешимые алгебры и их связи с нильпотентными алгебрами. Алгебра $\mathfrak{G}$ называется разрешимой, если цепочка ее последовательных коммутантов $\mathfrak{G}^{[1]} = [\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$, $\mathfrak{G}^{[2]} = [\mathfrak{G}^{[1]}\mathfrak{G}^{[1]}]$, $\dots$ содержит нулевую алгебру; $\mathfrak{G}$ называется нильпотентной, если нулевую алгебру содержит цепочка ее степеней: $\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^2 = [\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$, $\mathfrak{G}^3 = [\mathfrak{G}\mathfrak{G}^2]$, $\dots$ **. Согласно теореме Ли, всякой разрешимой алгебре $\mathfrak{G}$ можно выбрать такой базис, в котором все матрицы регулярного представления $\mathfrak{G}$ имеют треугольную форму. Ясно, что при этом нильпотентными элементами $\mathfrak{G}$ будут те и только те, которым отвечают матрицы с нулевой диагональю. Отсюда следует, что множество всех нильпотентных элементов $\mathfrak{G}$ есть идеал этой алгебры, который в дальнейшем

* Принадлежит Гантмахеру [5].

** Если $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ — какие-либо множества элементов из $\mathfrak{G}$, то $[\mathfrak{P}\mathfrak{Q}]$ означает линейное подпространство, натянутое коммутаторами $[pq]$ ($p \in \mathfrak{P}$, $q \in \mathfrak{Q}$).

Напомним также, что алгебра называется полупростой, если она не имеет отличных от нуля разрешимых идеалов. Максимальный разрешимый идеал алгебры называется ее радикалом.

будет называться ядром $\mathfrak{G}$. Ядро $\mathfrak{G}$ является нильпотентной алгеброй и также может быть определено, как максимальный нильпотентный идеал $\mathfrak{G}$. Из теоремы Ли следует, что коммутант разрешимой алгебры нильпотентен и поэтому содержится в ее ядре (ср. [1]).

Т е о р е м а 2. *Всякий разложимый элемент разрешимой алгебры $\mathfrak{G}$ является нормально разложимым.*

Пусть $g = a + t$, где a — семирегулярный и t — нильпотентный элемент $\mathfrak{G}$. Раскладываем $\mathfrak{G}$ на корневые подпространства $\mathfrak{G}_i$ относительно a . Тогда $t = t_0 + t_1 + \dots + t_s$, где $t_j \in \mathfrak{G}_j$, $[at_j] = \rho_j t_j$, $\rho_0 = 0$, $\rho_1 \dots \dots \rho_s \neq 0$. Так как $t_i = \frac{1}{\rho_i} [at_i] \in [\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$, $i \neq 0$, то t_i , а вместе с ними и t_0 нильпотентны.

Положим $[\mathfrak{G}\mathfrak{G}] = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}^1 = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}^2 = [\mathfrak{K}\mathfrak{K}^1]$, $\dots$, $\mathfrak{K}^p = [\mathfrak{K}\mathfrak{K}^{p-1}] = 0$ и обозначим через k наибольшее число, для которого $u = t_1 + \dots + t_s \in \mathfrak{K}^k$. Так как $\mathfrak{K}^k$ — идеал в $\mathfrak{G}$, то элементы

$$[au] = \rho_1 t_1 + \dots + \rho_s t_s = u_1,$$

$$[au_1] = \rho_1^2 t_1 + \dots + \rho_s^2 t_s = u_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$[au_{s-1}] = \rho_1^s t_1 + \dots + \rho_s^s t_s = u_s$$

входят в $\mathfrak{K}^k$. Решая эту систему относительно t_i , мы видим, что $t_i \in \mathfrak{K}^k$. Произведем в $\mathfrak{G}$ автоморфизм $\exp\left(\frac{1}{\rho_1} t_1 + \dots + \frac{1}{\rho_s} t_s\right)$. Имеем

$$\begin{aligned} g' &= \exp\left(\sum \frac{1}{\rho_i} t_i\right) \cdot g = \exp\left(\sum \frac{1}{\rho_i} t_i\right) \cdot a + \sum_{j=0}^s \exp\left(\sum \frac{1}{\rho_i} t_i\right) \cdot t_j = \\ &= a - \sum t_i + \sum_{j=0}^s t_i + \sum_{i,j} \frac{1}{\rho_i} [t_i t_j] + \dots = a + t_0 + t', \end{aligned}$$

где $t' \in \mathfrak{K}^{k+1}$. Разлагая t' в сумму корневых элементов относительно a , получим представление g' в форме

$$g' = a + (t_0 + t'_0) + t'_1 + \dots + t'_s,$$

где уже $t' \in \mathfrak{K}^{k+1}$. Производя снова подходящий автоморфизм, мы повысим индекс $k+1$ на $k+2$ и т. д., пока не сделаем его равным p . В результате для элемента $g^{(p-k)}$ получится нормальное разложение

$$g^{(p-k)} = a + (t_0 + t'_0 + \dots + t_0^{(p-k)}).$$

Обратные автоморфизмы переведут $g^{(p-k)}$ в g , $t_0 + t'_0 + \dots + t_0^{(p-k)}$ — в некоторый элемент $\bar{t}$, a — в семирегулярный элемент $\bar{a}$ и $g = \bar{a} + \bar{t}$ будет искомым нормальным разложением.

Т е о р е м а 3. *Если каждый элемент разрешимой алгебры $\mathfrak{G}$ разложим, то сама алгебра $\mathfrak{G}$ допускает разложение вида $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{Z}$, где $\mathfrak{Z}$ — ядро $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ — коммутативная подалгебра, все элементы которой семирегулярны, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{Z} = 0$. Обратное, очевидно, также верно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{B}$ — одна из максимальных коммутативных подалгебр $\mathfrak{G}$, образованных исключительно семирегулярными элементами $\mathfrak{G}$. Покажем, что тогда $\mathfrak{G} = \mathfrak{B} + \mathfrak{Z}$.

В самом деле, разложим $\mathfrak{G}$ в прямую сумму корневых подпространств $\mathfrak{G}_i$ относительно системы матриц $\mathfrak{B}$. Следовательно, всякий элемент $g \in \mathfrak{G}$ будет представим в форме

$$g = g_0 + g_1 + \dots + g_s, \quad \text{где} \quad [\mathfrak{B}g_0] = 0, \\ [bg_i] = \rho_i(b)g_i, \quad i \neq 0, \quad g_j \in \mathfrak{G}_i, \quad b \in \mathfrak{B}.$$

Так как для каждого i при некотором b имеем $\rho_i(b) \neq 0$ ($i \neq 0$), то g_i входят в коммутант и, значит, в ядро $\mathfrak{Z}$. Согласно теореме 2 все элементы $\mathfrak{G}$ допускают нормальное разложение. Пусть $g_0 = a + t$ — такое разложение. Так как $[g_0\mathfrak{B}] = 0$, то по теореме 1 $[a\mathfrak{B}] = 0$. В силу семирегулярности a и максимальности $\mathfrak{B}$ это влечет за собой $a \in \mathfrak{B}$, что и требовалось. Однако разложение $\mathfrak{G} = \mathfrak{B} + \mathfrak{Z}$ еще не будет искомым, так как $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{Z}$ содержат центр $\mathfrak{G}$. Но $\mathfrak{B}$ — алгебра коммутативная и поэтому допускает разложение в прямую сумму $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{Z})$. Новое разложение $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{Z}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Ответ на вопрос об однозначности полученного разложения непосредственно вытекает из приводимой ниже теоремы. Мы будем называть подалгебру $\mathfrak{B}$ какой-либо алгебры Ли $\mathfrak{L}$ *семирегулярной**, если все элементы $\mathfrak{B}$ являются семирегулярными элементами $\mathfrak{L}$. Алгебра $\mathfrak{L}$ будет называться *расщепляемой*, если каждый ее элемент допускает нормальное разложение.

Теорема 4. *Все максимальные коммутативные семирегулярные подалгебры расщепляемой разрешимой алгебры $\mathfrak{G}$ переводятся друг в друга внутренними автоморфизмами, производимыми элементами коммутанта $\mathfrak{G}^{**}$.*

Для алгебр размерности 1 и вообще нильпотентных алгебр это утверждение тривиально. Поэтому доказательство можно вести методом полной индукции, считая утверждение верным для всех алгебр размерности, меньшей $\mathfrak{G}$, и предполагая, что $\mathfrak{G}$ ненильпотентна. Рассмотрим сначала случай, когда ядро $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{G}$ некоммутативно, $\mathfrak{Z}^2 = [\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}] \neq 0$.

Положим $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ — какие-либо максимальные коммутативные семирегулярные подалгебры $\mathfrak{G}$. Пусть $\overline{\mathfrak{B}}_1, \overline{\mathfrak{B}}_2$ — их образы в алгебре вычетов $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{Z}^2$, $\overline{\mathfrak{B}}_1, \overline{\mathfrak{B}}_2$ — коммутативные семирегулярные подалгебры $\overline{\mathfrak{B}}$ и содержатся в некоторых максимальных подалгебрах $\overline{\mathfrak{C}}_1, \overline{\mathfrak{C}}_2$, обладающих этими свойствами. Так как размерность $\overline{\mathfrak{G}}$ меньше $\mathfrak{G}$, то по индуктивному предположению

$$\overline{\mathfrak{C}}_1 = (\exp \overline{g}) \overline{\mathfrak{C}}_2,$$

откуда

$$\mathfrak{C}_1 = (\exp g) \mathfrak{C}_2,$$

где $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ — полные прообразы $\overline{\mathfrak{C}}_1, \overline{\mathfrak{C}}_2$ в $\mathfrak{G}$, g — прообраз $\overline{g}$ в $\mathfrak{G}$. Так как $\overline{g} \in [\overline{\mathfrak{G}}\overline{\mathfrak{G}}]$, $\mathfrak{Z}^2 \subset [\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$, то $[\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$ — полный прообраз для $[\overline{\mathfrak{G}}\overline{\mathfrak{G}}]$ и $g \in [\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$. Полагая $(\exp g) \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_2'$, имеем $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{C}_1$. Покажем, что размерность $\mathfrak{C}_1$ меньше размерности $\mathfrak{G}$. Действительно, противное означало бы, что $\mathfrak{G}$ абелева. Но по теореме 3 для $\mathfrak{G}$ имеем разложение вида

* По другой терминологии — *торидалльной*. — Прим. ред.

** Легко видеть, что семирегулярные подалгебры разрешимой алгебры само собой коммутативны.

$\mathfrak{A} + \mathfrak{Z}$. Так как $\mathfrak{A}$ образована семирегулярными элементами, то в $\mathfrak{Z}$ существуют элементы $t_1, \dots, t_m$, дающие базис для $\mathfrak{Z}/\mathfrak{Z}^2$ и являющиеся корневыми элементами относительно $\mathfrak{A}$. Пусть $[at_i] = \rho_i(a) t_i$. Если $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}^2$ абелева, то $\rho_i(a) = 0$. Однако известно, что в нильпотентных алгебрах базис $\mathfrak{Z}/\mathfrak{Z}^2$ порождает всю алгебру $\mathfrak{Z}$. Значит, из $[\mathfrak{A}t_i] = 0$ следовало бы, что $[\mathfrak{A}\mathfrak{Z}] = 0$, т. е. что $\mathfrak{A} + \mathfrak{Z}$ нильпотентна. Итак, размерность $\mathfrak{G}_1$ меньше размерности $\mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{G}_1$ содержит подалгебру $\mathfrak{B}_1$, то по теореме 3 $\mathfrak{G}_1$ является расщепляемой алгеброй. Поэтому к $\mathfrak{G}_1$ можно применить индуктивное предположение. Следовательно, в $\mathfrak{G}_1$ найдутся две коммутативные подалгебры $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$, связанные соотношениями

$$(\exp c) \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1,$$

$$\mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{D}_2 \supset \mathfrak{B}_2'.$$

Полагая $(\exp c) \mathfrak{B}_2' = \mathfrak{B}_2''$, мы видим, что максимальные семирегулярные подалгебры $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2''$ поэлементно коммутируют друг с другом, откуда $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2''$, что и требовалось.

Остается рассмотреть случай, когда ядро $\mathfrak{Z}$ коммутативно. Если центр $\mathfrak{G}$ нетривиален, то при коммутативном $\mathfrak{Z}$ его можно отщепить в качестве прямого слагаемого и свести дело к алгебрам без центра.

Пусть, следовательно, $\mathfrak{G}$ центра не имеет, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}$ — коммутативное ядро $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ — семирегулярная подалгебра $\mathfrak{G}$. Легко видеть, что теперь коммутант $\mathfrak{G}$ совпадает с $\mathfrak{Z}$. Обозначим через $\mathfrak{B}$ какую-либо максимальную семирегулярную коммутативную подалгебру $\mathfrak{G}$. Выберем в $\mathfrak{B}$ такой базис $b_1, \dots, b_m$, чтобы

$$b_i = a_i, \quad b_\alpha = a_\alpha + t_\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, k; \quad \alpha = k + 1, \dots, m);$$

a_i, a_α, t_α линейно независимы, $t_\alpha \in \mathfrak{Z}$, $a \in \mathfrak{A}$, $a_\alpha \in \mathfrak{A}$. Из коммутативности $\mathfrak{B}$ следуют соотношения

$$[a_i t_\alpha] = 0, \tag{1.1}$$

$$[a_\alpha t_\beta] = [a_\beta t_\alpha]. \tag{1.2}$$

Покажем, что найдется такой элемент $t = \sum \xi_\alpha t_\alpha$, для которого

$$(\exp t) b_i = a_i, \tag{1.3}$$

$$(\exp t) b_\alpha = a_\alpha. \tag{1.4}$$

Условия (1.3) ввиду (1.1) выполняются при любых значениях ξ_α . Что касается условий (1.4), то их можно переписать в форме

$$[a_\alpha t] = t_\alpha. \tag{1.5}$$

Выберем в $\mathfrak{Z}$ базис $u_1, \dots, u_p$, состоящий из корневых векторов относительно $\mathfrak{A}$. Пусть

$$t_\alpha = \sum_{\nu} \eta_{\alpha\nu} u_\nu, \tag{1.6}$$

$$[a_\alpha u_\beta] = \xi_{\alpha\beta} u_\beta \quad (\alpha = k + 1, \dots, m; \quad \beta = 1, \dots, p). \tag{1.7}$$

Если ранг матрицы $\| \xi_{\alpha\beta} \|$ меньше $m - k$, то система

$$\sum_{\alpha} \xi_{\alpha\beta} \lambda_\alpha = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, p)$$

допускает нетривиальное решение. Элемент $\sum_a \lambda_a a_a$ в силу (1.7) будет центральным в алгебре $\mathfrak{G}$. Но по предположению $\mathfrak{G}$ центра не имеет. Следовательно, $\text{rang} \|\zeta_{\alpha\beta}\|$ должен быть равен $m - k$. Аналогично убеждаемся, что $\text{rang} \|\zeta_{\alpha\beta}\|$ также равен p . Отсюда $m - k = p$ и $\det \|\zeta_{\alpha\beta}\| \neq 0$. Подставляя в (1.5) вместо t, t_a их выражения из (1.6) и пользуясь (1.2), получим для определения чисел $\xi_{\alpha\beta}$ систему уравнений

$$\sum_{\alpha, \beta} \zeta_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}.$$

Эта система заведомо удовлетворится, если будут выполнены условия

$$\sum_{\alpha, \beta} \zeta_{\alpha\beta} = 1 \quad (\beta = 1, 2, \dots, p). \quad (1.8)$$

Так как $\|\zeta_{\alpha\beta}\| \neq 0$, то система (1.8) разрешима и искомый элемент t существует.

В качестве примера рассмотрим вопрос об однозначности того разложения алгебры $\mathfrak{G}$, о котором идет речь в теореме 3. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{X} + \mathfrak{Z} = \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Z}$ — два таких разложения и $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{X} + \mathfrak{Z}, \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Z}$ — максимальные коммутативные семирегулярные подалгебры $\mathfrak{G}$.

В силу теоремы 4 существует автоморфизм $\exp t$, переводящий $\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{X} + \mathfrak{Z}$, и оба разложения оказываются сопряженными с точностью до центральных слагаемых.

2. Классификация расщепляемых разрешимых алгебр. Теорема 3 о разложимости расщепляемых разрешимых алгебр в полупростую сумму и теорема 4 в основном достаточны, чтобы установить общий обзор расщепляемых алгебр с заданным ядром и тем самым привести задачу об их классификации к задаче о классификации нильпотентных алгебр. Теоремы 5, 6 дают необходимые для этого дополнительные свойства семирегулярных подалгебр.

Т е о р е м а 5. Коммутирующие друг с другом семирегулярные элементы разрешимой расщепляемой алгебры $\mathfrak{G}$ не могут быть внутренне сопряженными в $\mathfrak{G}$.

Пусть b_1, b_2 — коммутирующие семирегулярные элементы алгебры $\mathfrak{G}$. Эти элементы содержатся в некоторой максимальной подалгебре $\mathfrak{B}$. По теореме 3 имеем разложение

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B} + \mathfrak{Z}, \quad (2.1)$$

где $\mathfrak{Z}$ — ядро $\mathfrak{G}$. Группа $\mathfrak{G}^*$ внутренних автоморфизмов $\mathfrak{G}$ соответственно (2.1) разложится в произведение $\mathfrak{B}^* \mathfrak{Z}^*$, где $\mathfrak{B}^*$ — группа автоморфизмов, производимая элементами $\mathfrak{B}$, и $\mathfrak{Z}^*$ — производимая элементами $\mathfrak{Z}$. Так как автоморфизмы $\mathfrak{B}^*$ оставляют b_i на месте, то остается посмотреть, не смогут ли перевести b_1 в b_2 автоморфизмы $\mathfrak{Z}^*$. Выберем в $\mathfrak{Z}$ базис $t_1, \dots, t_n$, образованный корневыми элементами относительно b_1 . Пусть

$$[b_1 t_i] = \rho_i t_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$t = \lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n,$$

$$\lambda_1 \rho_1 \lambda_2 \rho_2 \dots \lambda_n \rho_n \neq 0, \quad \lambda_{k+1} \rho_{k+1} = \dots = \lambda_n \rho_n = 0,$$

$$t_1 \in \mathfrak{Z}^{m+1}, \quad t_i \in \mathfrak{Z}^m \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Тогда

$$\exp tb_1 = b_1 - \lambda_1 \rho_1 t_1 - \dots - \lambda_n \rho_n t_n - \sum_{i,j} \lambda_i \rho_j [t_i t_j] - \dots \quad (2.2)$$

Все члены (2.2), стоящие после $\lambda_n \rho_n t_n$, входят в $\mathfrak{Z}^{n+1}$ и поэтому их выражения через элементы базиса не содержат t_1 . Таким образом,

$$\exp tb_1 = b_1 - \lambda_1 \rho_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \dots + \mu_n t_n.$$

Если $b_2 = \exp tb_1$, то условие $[b_1 b_2] = 0$ дает

$$\begin{aligned} [b_1, -\lambda_1 \rho_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \dots + \mu_n t_n] = \\ = -\lambda_1 \rho_1^2 t_1 + \mu_2 \rho_2 t_2 + \dots + \mu_n \rho_n t_n = 0, \end{aligned}$$

что ввиду $\lambda_1 \rho_1 \neq 0$ невозможно.

Пусть $\mathfrak{B}$ — какая-либо фиксированная максимальная семирегулярная подалгебра разрешимой расщепляемой алгебры $\mathfrak{G}$. Из теорем 4, 5 следует, что всякая семирегулярная подалгебра $\mathfrak{B}$ внутренне сопряжена с одной и только одной подалгеброй из $\mathfrak{B}$. Это окончательное решение вопроса о внутренне сопряженных семирегулярных подалгебрах. В дальнейшем потребуется знать, какие из семирегулярных подалгебр внешне сопряжены. Частичный ответ на это дает

Т е о р е м а 6. Пусть $\mathfrak{G} \rightarrow$ расщепляемая разрешимая алгебра, $\mathfrak{G} = \mathfrak{X} + \mathfrak{Z}$ — ее полупрямое разложение, как в теореме 3. Внешние автоморфизмы $\mathfrak{G}$, оставляющие на месте $\mathfrak{X}$, индуцируют в $\mathfrak{X}$ группу линейных преобразований Θ .

А. Группа Θ конечна.

В. Чтобы две подалгебры $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ из $\mathfrak{X}$ были внешне сопряженными, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{X}_1$ переводилась в $\mathfrak{X}_2$ каким-либо преобразованием Θ .

С. Если размерность подалгебры $\mathfrak{B}_1$ из $\mathfrak{G}$ совпадает с размерностью некоторой подалгебры $\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{Z} = 0$, где $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{B}_1$ внешне сопряжена с $\mathfrak{X}_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. А. Разложим $\mathfrak{Z}$ на корневые подпространства $\mathfrak{Z}_i$ относительно преобразований $\mathfrak{X}$. Таким образом, если $a \in \mathfrak{X}$, $t_i \in \mathfrak{Z}_i$, то $[at_i] = \Lambda_i(a)t_i$. Подпространства $\mathfrak{Z}_i$ определяются алгеброй $\mathfrak{X}$ однозначно, и, значит, автоморфизмы $\mathfrak{G}$, оставляющие на месте $\mathfrak{X}$, могут только переставлять эти пространства между собой. Покажем, что два автоморфизма $\mathfrak{G}$, оставляющие на месте $\mathfrak{X}$ и вызывающие одну и ту же перестановку $\mathfrak{Z}_i$, индуцируют одно и то же линейное преобразование в $\mathfrak{X}$, откуда и будет следовать конечность Θ . Для этого рассмотрим линейные функции $\Lambda_i(a)$, определенные на $\mathfrak{X}$. Среди $\Lambda_i(a)$ ($i = 1, 2, \dots$) существует точно n линейно независимых, где n — размерность $\mathfrak{X}$. Действительно, в противном случае нашелся бы такой элемент $a \in \mathfrak{X}$, $a \neq 0$, для которого все $\Lambda_i(a)$ обращались бы в нуль. Тогда $[a, \mathfrak{Z}] = 0$ и a входил бы в центр $\mathfrak{G}$, что противоречит предположению. Пусть теперь $\mathfrak{Z} =$ некоторый автоморфизм $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{X}^0 = \mathfrak{X}$. Положим

$$\mathfrak{Z}_i^0 = \mathfrak{Z}_{i_0}, \quad \Lambda_i^0(a) = \Lambda_{i_0}(a).$$

Условия $[a^0 t_i^0] = \Lambda_i(a) t_i^0$ дают $\Lambda_i^0(a^0) = \Lambda_i(a)$ ($i = 1, 2, \dots$), откуда элемент a^0 при заданном a и заданной перестановке i_0 определяется однозначно.

В. Пусть ρ — автоморфизм $\mathfrak{U}$, переводящий $\mathfrak{U}_1$ в $\mathfrak{U}_2$. Обозначим через σ существующий по теореме 4 автоморфизм, переводящий $\mathfrak{U}^e + \mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{U} + \mathfrak{Z}$. Имеем $\mathfrak{U}_2 \subset \mathfrak{U} + \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}_2^e \subset \mathfrak{U} + \mathfrak{Z}$, σ — внутренний; следовательно по теореме 5 $\mathfrak{U}_2^e = \mathfrak{U}_2$. Выберем в $\mathfrak{U}$ такой базис $a_1, \dots, a_n$, чтобы $a_1, \dots, a_n$ давали базис $\mathfrak{U}_1$. Тогда

$$a_i^{\rho\sigma} = a_i' + z_i, \quad a_i' \in \mathfrak{U}, \quad z_i \in \mathfrak{Z} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Преобразование

$$\begin{aligned} a_i^t &= a_i' - z_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ t^* &= t \quad (t \in \mathfrak{Z}) \end{aligned}$$

есть, очевидно, автоморфизм Θ и

$$\mathfrak{U}^{\Theta\sigma} = \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{U}_1^{\Theta\sigma} = \mathfrak{U}_2.$$

С. Утверждение С становится очевидным, если заметить, что преобразования Θ вида $a_i^t = a_i + z_i$, $t^* = t$, где $\{a_i\}$ — базис $\mathfrak{U}$, $z_i \in \mathfrak{Z}$, $t \in \mathfrak{Z}$, являются внешними автоморфизмами Θ .

Общий обзор всех неизоморфных разрешимых расщепляемых алгебр с данным ядром $\mathfrak{Z}$ теперь дается следующей теоремой.

Теорема 7. Для каждой нильпотентной алгебры $\mathfrak{Z}$ можно найти такую универсальную разрешимую расщепляемую алгебру $\mathfrak{U} = \mathfrak{U} + \mathfrak{Z}$, что всякая другая разрешимая расщепляемая алгебра с ядром $\mathfrak{Z}$ будет изоморфна одной из подалгебр $\mathfrak{U}$ вида $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}$. Всякая подалгебра этого вида есть расщепляемая алгебра с ядром $\mathfrak{Z}$.

Для того чтобы $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{Z}$ была изоморфна $\mathfrak{U}_2 + \mathfrak{Z}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{U}_1$ переводилась в $\mathfrak{U}_2$ линейным преобразованием $\mathfrak{U}$, входящим в некоторую конечную группу Θ . Группа Θ состоит из преобразований, которые индуцируются в $\mathfrak{U}$ автоморфизмами $\mathfrak{U}$, оставляющими на месте $\mathfrak{U}$. Всякий автоморфизм $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{Z}$ может быть продолжен до автоморфизма $\mathfrak{U}$, оставляющего на месте $\mathfrak{U}$.

Доказательство. Для доказательства удобнее вместо алгебр Ли рассматривать группы Ли. Звездочка далее будет значить, что берется связанная группа Ли, алгебра которой обозначена той же буквой без звездочки. Пусть $\mathfrak{M}^*$ — группа всех непрерывных автоморфизмов данной нильпотентной группы $\mathfrak{Z}^*$. $\mathfrak{M}^*$ можно считать линейной группой, оперирующей в пространстве $\mathfrak{Z}$. Обозначим через $\mathfrak{U}^*$ максимальную связную коммутативную подгруппу, образованную семирегулярными матрицами $\mathfrak{M}^*$, и составим полупрямое произведение $\mathfrak{U}^* \mathfrak{Z}^* = \mathfrak{U}^*$. Утверждается, что $\mathfrak{U}^*$ будет изоморфна универсальной разрешимой группой. Действительно, всякая расщепляемая разрешимая группа с ядром $\mathfrak{Z}^*$ имеет по теореме 3 вид $\mathfrak{U}_0^* \mathfrak{Z}^*$. Внутренние автоморфизмы, вызываемые элементами $\mathfrak{U}_0^*$, индуцируют группу линейных преобразований пространства $\mathfrak{Z}$, содержащуюся в $\mathfrak{M}^*$ и изоморфную $\mathfrak{U}_0^*$. В силу этого $\mathfrak{U}_0^*$ можно считать подгруппой $\mathfrak{M}^*$. Так как $\mathfrak{U}_0^*$ образована семирегулярными матрицами, то по теореме 4а (п. 6) $m^{-1}\mathfrak{U}_0^*m \subset \mathfrak{U}^*$, где $m \in \mathfrak{M}^*$. Вводя обозначение $m^{-1}\mathfrak{U}_0^*m = \mathfrak{U}_1^*$ и рас-

* Полупрямое произведение группы автоморфизмов $\mathfrak{U}^*$ группы $\mathfrak{Z}^*$ на $\mathfrak{Z}^*$ есть группа пар (a, b) с композицией $(a_1, b_1)(a, b) = (a_1a, b_1^a b)$.

смагивая $\mathfrak{U}_0^* \mathfrak{Z}^*$, $\mathfrak{U}_1^* \mathfrak{Z}^*$ как подгруппы из $\mathfrak{M}^* \mathfrak{Z}^*$, мы видим, что $\mathfrak{U}_0^* \mathfrak{Z}^*$, $\mathfrak{U}_1^* \mathfrak{Z}^*$ сопряжены в $\mathfrak{M}^* \mathfrak{Z}^*$ и поэтому изоморфны.

Таким образом, первое утверждение теоремы 7 доказано. Остается показать, что если $\mathfrak{U}_1^* \mathfrak{Z}^*$ изоморфна $\mathfrak{U}_2^* \mathfrak{Z}^*$ ($\mathfrak{U}_1^* \subset \mathfrak{U}^*$, $\mathfrak{U}_2^* \subset \mathfrak{U}^*$), то найдется автоморфизм θ^* , оставляющий на месте $\mathfrak{U}^*$ и переводящий $\mathfrak{U}_1^*$ в $\mathfrak{U}_2^*$. С этой целью обозначим через θ заданное изоморфное отображение $\mathfrak{U}_1^* \mathfrak{Z}^*$ на $\mathfrak{U}_2^* \mathfrak{Z}^*$, $(\mathfrak{U}_1^* \mathfrak{Z}^*)^\theta = \mathfrak{U}_2^* \mathfrak{Z}^*$. Ввиду теоремы 6 можно считать, что $\mathfrak{U}_1^* = \mathfrak{U}_2^*$. Так как $\mathfrak{Z}^{**} = \mathfrak{Z}^*$, то θ вызывает некоторый автоморфизм $\tau \in \mathfrak{M}^*$ группы $\mathfrak{Z}^*$. Из

$$(ta_1)^\theta = t^* a_1^\theta = a_1^* t^{**\theta} = (a_1 t^*)^\theta = a_1^* t^{**\theta} \quad (a_1 \in \mathfrak{U}_1^*, t \in \mathfrak{Z}^*)$$

следует $ta_1^\theta = a_1 t$, или

$$a_1^\theta = \tau^{-1} a_1 \tau, \quad \mathfrak{U}_1^\theta = \mathfrak{U}_1^* = \tau^{-1} \mathfrak{U}_1^* \tau.$$

Таким образом, внутренний автоморфизм группы $\mathfrak{M}^*$ переводит $\mathfrak{U}_1^* \subset \mathfrak{U}^*$ в $\mathfrak{U}_2^* \subset \mathfrak{U}^*$. В силу теоремы 4а (п. 6), отсюда следует существование элемента $m \in \mathfrak{M}^*$, для которого

$$m^{-1} \mathfrak{U}_m^* = \mathfrak{U}^*, \quad m^{-1} \mathfrak{U}_1^* m = \mathfrak{U}_2^*.$$

Тогда $m^{-1} \mathfrak{U}^* \mathfrak{Z}^* m = \mathfrak{U}^* \mathfrak{Z}^*$ и m производит в $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{U}^* \mathfrak{Z}^*$ искомый автоморфизм. Этот автоморфизм является, очевидно, продолжением первоначального изоморфизма θ , откуда следует и последнее утверждение теоремы.

3. А л г е б р а и ч е с к и е г р у п п ы. Простейшими расщепляемыми алгебрами являются алгебры всех матриц данной степени над полем комплексных чисел. Для получения нормального разложения достаточно привести матрицу к нормальной жордановой форме и взять в качестве семирегулярного слагаемого диагональную матрицу, диагональ которой совпадает с диагональю этой жордановой формы. Остаток дает нильпотентное слагаемое. Более важные примеры получаются следующим образом.

Пусть $\mathfrak{G}^*$ — линейная группа Ли. Н о р м а л ь н ы м р а з л о ж е н и е м ее элемента g будем называть представление g в виде произведения семирегулярной матрицы на коммутирующую с ней матрицу с характеристическими числами, равными единице. Ясно, что если каждый элемент $\mathfrak{G}^*$ нормально разложим в $\mathfrak{G}^*$, то инфинитезимальная алгебра $\mathfrak{G}$ будет расщепляемой. Введем еще следующее

О п р е д е л е н и е. Линейная группа $\mathfrak{G}^*$ будет называться а л г е б р а и ч е с к о й, если она является совокупностью всех неособенных матриц $\|g_{ij}\|$, элементы которых удовлетворяют заданной системе алгебраических уравнений.

Т е о р е м а 8. Все линейные алгебраические группы расщепляемы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G \in \mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{G}^*$ — алгебраическая. Приведем G к нормальной жордановой форме. При этом уравнения $F(g_{ij}) = 0$, определяющие группу $\mathfrak{G}^*$, также следует трансформировать надлежащим образом. Представим G в виде AT , где $AT = TA$, A — диагональная, T — треугольная с единичной диагональю. Рассмотрим какое-либо уравнение $F(g_{ij}) = 0$ и докажем, что вместе с G^* ($v = 1, 2, \dots$) ему удовлетворяют A^* и T^* . Действительно, элементы матрицы G^* суть полиномы от v и от $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \rho_n^*$, где $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ — числа, стоящие на главной диагонали A .

Подставляя эти полиномы в $F(g_{ij}) = 0$, получим уравнение вида

$$\sum a_{i\alpha_i \dots \gamma_i} v^i (\rho_1^{\alpha_i} \rho_2^{\beta_i} \dots \rho_n^{\gamma_i})^v = 0.$$

По условию это уравнение должно удовлетворяться при всех натуральных значениях v . Заставляя v расти неограниченно, мы непосредственно видим, что левая часть должна заведомо уничтожаться при $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n = 1$. Следовательно, матрица T^v удовлетворяет уравнениям $F(g_{ij}) = 0$. Так как эти уравнения по условию определяют группу, то им должна удовлетворять и A^v .

Отметим несколько частных случаев этой теоремы.

А. (Ф. Р. Гантмахер). *Группа автоморфизмов всякой алгебры расщепляема.*

Для доказательства достаточно заметить, что группа автоморфизмов есть группа матриц G , элементы которых подчинены условиям $[Ga, Gb] = G[ab]$, и, следовательно, алгебраическая.

В. *Группа всех неособенных линейных преобразований переменных $x_1, \dots, x_n$, оставляющая инвариантными заданные полиномы, расщепляема.* Действительно, эта группа снова алгебраическая и, следовательно, расщепляема.

С. *Все полупростые алгебры расщепляемы.*

Вытекает из А, так как с точностью до внутренних автоморфизмов полупростая алгебра $\mathfrak{S}$ имеет только конечное число внешних автоморфизмов. Поэтому алгебра группы автоморфизмов $\mathfrak{S}$ совпадает с $\mathfrak{S}$.

§ 2. Расщепления алгебр

4. *Существование и однозначность расщеплений.* Свойства расщепляемых алгебр, изложенные в предшествующем параграфе, могут быть применены к изучению некоторых вопросов, относящихся и к произвольным алгебрам Ли. Для этого каждой алгебре $\mathfrak{F}$ поставим в соответствие расщепляемую алгебру $\mathfrak{S}$, свойства которой окажутся весьма тесно связанными со свойствами $\mathfrak{F}$.

Теорема 9. *Всякая алгебра Ли $\mathfrak{F}$ содержится в некоторой расщепляемой алгебре $\mathfrak{S}$. Если $\mathfrak{S}$ не содержит промежуточных расщепляемых подалгебр, то $\mathfrak{S}$ будет называться расщеплением $\mathfrak{F}$. Каждый автоморфизм $\mathfrak{F}$ однозначно расширяется до автоморфизма расщепления $\mathfrak{S}$, и все расщепления $\mathfrak{F}$ изоморфны над $\mathfrak{F}$.*

Теорема содержит несколько утверждений, и доказательство их удобнее вести в обратной последовательности, т. е. сначала доказать изоморфизм, затем расширяемость автоморфизмов и, наконец, существование расщеплений.

А. Предположим, что $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ — два расщепления $\mathfrak{F}$. Берем в $\mathfrak{F}$ какой-нибудь нерасщепляющийся элемент f_1 и раскладываем его нормально в $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$. Пусть $f_1 = a_1 + t_1$, $f_1 = a'_1 + t'_1$ — эти разложения. По теореме 1 структура подалгебр $\mathfrak{F}_1 = \{a_1, \mathfrak{F}\}$, $\mathfrak{F}'_1 = \{a'_1, \mathfrak{F}\}$ однозначно определяется элементом f и подалгеброй $\mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}'_1$ должны быть изоморфны. Расщепляя аналогичным образом соответственные элементы $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}'_1$, мы продолжим изоморфизм на большие подалгебры. Повторяя этот процесс достаточное число раз, мы придем к алгебрам $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$.

В. Пусть θ — автоморфизм $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ — расщепление $\mathfrak{F}$, f_1 — какой-либо неразложимый элемент $\mathfrak{F}$. Согласно предположению в $\mathfrak{G}$ существуют нормальные разложения $f_1 = a_1 + t_1$, $f_1^0 = a_1' + t_1'$. По теореме 1 дополнительное соответствие $a_1^0 = a_1'$ продолжает θ до изоморфизма алгебр $\mathfrak{F}_1 = \{a_1, \mathfrak{F}\}$ и $\mathfrak{F}_1' = \{a_1', \mathfrak{F}\}$. Расширяя подалгебры $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_1'$ аналогичным образом, мы получим изоморфные подалгебры $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_2'$ и т. д., пока, наконец, не придем к одной и той же алгебре $\mathfrak{G}$ с продолженным автоморфизмом θ .

С. *Всякая разрешимая алгебра $\mathfrak{F}$ содержится в некоторой расщепляемой.* Выберем в $\mathfrak{F}$ базис и обозначим через r размерность $\mathfrak{F}$. Дифференцирования $\mathfrak{F}$ образуют матричную алгебру Ли $\mathfrak{M}$, которая является инфинитезимальной алгеброй для группы автоморфизмов $\mathfrak{F}^*$.

Так как последняя группа расщепляема (теорема 8), то расщепляема и алгебра $\mathfrak{M}$. Матрицы регулярного представления $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{M}$ и образуют в ней идеал $\mathfrak{M}_i$ в внутренних дифференцированиях. Ввиду разрешимости $\mathfrak{M}_i$ можно предполагать, что базис $\mathfrak{F}$ выбран так, что матрицы $\mathfrak{M}_i$ имеют треугольный вид. Обозначим через $\mathfrak{N}$ совокупность всех треугольных матриц степени r . $\mathfrak{M}$ — разрешимая расщепляемая алгебра и $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{M}_i$. Поэтому минимальная расщепляемая матричная, содержащая $\mathfrak{M}_i$, алгебра $\mathfrak{N}_i$ будет также разрешимой. Очевидно, $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}_i + \mathfrak{Z}_i$ — нормальное разложение $\mathfrak{N}_i$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ максимальную коммутативную, образованную семирегулярными матрицами и содержащую $\mathfrak{N}_i$ подалгебру $\mathfrak{M}$. Составим полупрямую сумму алгебры дифференцирований $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{F}^{**}$. $\mathfrak{G}$ является искомой расщепляемой алгеброй. Действительно, прежде всего ясно, что элементы $\mathfrak{A}$ семирегулярны в $\mathfrak{G}$. Разложим, далее, $\mathfrak{F}$ в прямую сумму инвариантных корневых подпространств $\mathfrak{F}_i$ относительно $\mathfrak{A}$. Так как элементы тех $\mathfrak{F}_i$, которые отвечают ненулевым корням, входят в коммутант $\mathfrak{G}$ и тем самым являются нильпотентными элементами $\mathfrak{G}$, то всякий элемент g допускает разложение $g = A + f + h$, где h нильпотентен в $\mathfrak{G}$, A семирегулярен, $f \in \mathfrak{F}$, $[\mathfrak{A}f] = 0$. Пусть F — матрица, отвечающая f в регулярном представлении $\mathfrak{F}$. Таким образом, $F \in \mathfrak{N}_i$. Для $\mathfrak{N}_i$ мы имеем разложение $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}_i + \mathfrak{Z}_i$, соответственно которому разложится и F , $F = A' + T$, $A' \in \mathfrak{A}$, T нильпотентна. Рассмотрим $g' = -A' + f$. Для произвольного элемента $g'' \in \mathfrak{G}$, $g'' = A'' + f''$, имеем $[-A' + f, A'' + f''] = -[A', f''] + [f, f''] = -A'f'' + Ef'' = (F - A')f'' = Tf''$. Так как матрица T нильпотентная, то $-A' + f$ является нильпотентным элементом $\mathfrak{G}$. Следовательно, $g = (A + A') + ((-A' + f) + h)$ есть искомое разложение для g .

Д. *Если радикал $\mathfrak{R}$ некоторой алгебры Ли $\mathfrak{G}$ расщепляем, то $\mathfrak{G}$ также расщепляема.* По теореме Леви $\mathfrak{G}$ содержит полупростую подалгебру $\mathfrak{S}$, изоморфную $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$. Следовательно, $\mathfrak{G} = \mathfrak{S} + \mathfrak{R}$, $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = 0$. По предположению $\mathfrak{R}$ допускает разложение $\mathfrak{R} = \mathfrak{B} + \mathfrak{Z}$, где $\mathfrak{Z}$ — максимальный

* Дифференцированиями $\mathfrak{F}$ называются линейные преобразования A пространства $\mathfrak{F}$, удовлетворяющие условию

$$A[ab] = [Aa, b] + [a, Ab].$$

** Полупрямая сумма алгебры $\mathfrak{A}$ дифференцирований $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ есть алгебра пар (A, f) с операциями

$$\lambda(A, f) = (\lambda A, \lambda f), (A, f) + (A_1, f_1) = (A + A_1, f + f_1),$$

$$[(A, f), (A_1, f_1)] = ([AA_1], Af_1 + A_1f + [ff_1])$$

и соответствует полупрямому произведению групп.

нильпотентный идеал, $\mathfrak{B}$ — максимальная семирегулярная подалгебра из $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{N}$. В результате имеем разложение

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{C} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{Z}) \quad (4.1)$$

или, переходя от алгебр к группам Ли,

$$\mathfrak{G}^* = \mathfrak{C}^*(\mathfrak{B}^*\mathfrak{Z}^*).$$

Обозначим через $\mathfrak{N}^*$ совокупность элементов $\mathfrak{G}^*$, перестановочных с $\mathfrak{B}^*$. Так как $s^{-1}\mathfrak{B}^*s$, $s \in \mathfrak{C}^*$, — снова максимальная семирегулярная подгруппа $\mathfrak{N}^*$, то по теореме 4 найдется $r \in \mathfrak{N}^*$ со свойством $r^{-1}\mathfrak{B}^*r = s^{-1}\mathfrak{B}^*s$. Отсюда $sr^{-1}\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}^*sr^{-1}$, $sr^{-1} \in \mathfrak{N}^*$, $s \in \mathfrak{N}^*\mathfrak{N}^*$, $\mathfrak{C}^* \subset \mathfrak{N}^*\mathfrak{N}^*$, т. е. $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{N} + \mathfrak{N}$. Так как $\mathfrak{C}$ — максимальная полупростая в $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}$ изоморфна $\mathfrak{C}$ и по теореме Леви в $\mathfrak{N}$ найдется подалгебра $\mathfrak{C}_1$, изоморфная $\mathfrak{C}$. Подставляя $\mathfrak{C}_1$ в (4.1) вместо $\mathfrak{C}$, получим новое разложение

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{C}_1 + (\mathfrak{B} + \mathfrak{Z}),$$

которое можно переписать в виде

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{B}) + \mathfrak{Z}, \quad (4.2)$$

ибо элементы $\mathfrak{C}_1^*$ перестановочны с $\mathfrak{B}^*$ и $\mathfrak{C}_1^*\mathfrak{B}^*$ — группа. Соответствие

$$b \rightarrow [s_1b] = S_1b \quad (b \in \mathfrak{B}, s_1 \in \mathfrak{C}_1)$$

есть линейное преобразование пространства $\mathfrak{B}$, а $s_1 \rightarrow S_1$ дает линейное представление алгебры $\mathfrak{C}_1$ в $\mathfrak{B}$. Центр $\mathfrak{Z}$ алгебры $\mathfrak{N}$ является инвариантным подпространством $\mathfrak{B}$. Из теоремы о полной приводимости представлений полупростых алгебр следует, что в $\mathfrak{B}$ найдется инвариантное подпространство $\mathfrak{M}$, дополнительное к $\mathfrak{Z}$. Таким образом,

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{M} + \mathfrak{Z}, \mathfrak{M} \cap \mathfrak{Z} = 0, \quad [\mathfrak{C}_1\mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M}, \quad [\mathfrak{C}_1\mathfrak{Z}] \subset \mathfrak{Z}$$

и (4.2) оказывается возможным заменить разложением

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{M}) + \mathfrak{Z}, \quad (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{Z} = 0. \quad (4.3)$$

Разложение (4.3) может быть названо нормальным разложением расщепляемой алгебры. Легко видеть, что в (4.3) элементы $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{M}$ перестановочны. Действительно, известно, что коммутант всякой алгебры Ли имеет нильпотентный радикал. Так как радикал коммутанта есть идеал, содержащийся в радикале первоначальной алгебры, то он будет содержаться в ядре этого первоначального радикала. В нашем случае это значит, что $[\mathfrak{C}_1, \mathfrak{M}] \subset \mathfrak{Z}$. Так как $[\mathfrak{C}_1, \mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{Z} = 0$, то $[\mathfrak{C}_1, \mathfrak{M}] = 0$, что и требовалось.

Наконец, из нормального разложения (4.3) уже непосредственно следует, что $\mathfrak{G}$ расщепляема. Действительно, пусть $g \in \mathfrak{G}$, $g = s_1 + a + t$. Полупростые алгебры расщепляемы и при этом семирегулярные и нильпотентные элементы их изображаются в любом линейном представлении соответственно семирегулярными и нильпотентными матрицами*. Если $s_1 = m_1 + u_1$, где m_1 — семирегулярный, u_1 — нильпотентный элемент $\mathfrak{C}_1$, то из сделанного замечания следует, что такими же будут эти элементы и в $\mathfrak{G}$. Искомое разложение для g есть $g = (m_1 + a) + (u_1 + t)$.

* Ср. [5], где это доказано для семирегулярных элементов; для нильпотентных доказывается аналогично.

Е. Всякая алгебра Ли $\mathfrak{L}$ содержится в некоторой расщепляемой алгебре. Представим $\mathfrak{L}$ в виде $\mathfrak{L} = \mathfrak{S} + \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — радикал $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} = 0$. Совокупность элементов $\mathfrak{S}$, коммутирующих со всеми элементами $\mathfrak{N}$, образует некоторый идеал $\mathfrak{S}_1$ в $\mathfrak{S}$. Однако всякий идеал полупростой алгебры является прямым слагаемым, поэтому $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = 0$, $[\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2] = 0$. Отсюда $\mathfrak{L} = \mathfrak{S}_1 + (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{N})$. Первое слагаемое этой прямой суммы есть полупростая и, следовательно, расщепляемая алгебра. Поэтому остается доказать, что алгебру $\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{N} = \mathfrak{L}_2$ можно заключить в расщепляемую. На $\mathfrak{L}_2$ можно смотреть как на полупрямую сумму алгебры $\mathfrak{S}_2$ дифференцирований $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}$. Согласно п. С для $\mathfrak{N}$ имеется расщепление, которое обозначим $\mathfrak{G}$. Согласно п. А всякое дифференцирование алгебры $\mathfrak{N}$ однозначно распространяется в дифференцирование ее расщепления $\mathfrak{G}$.

Таким образом, $\mathfrak{S}_2$ можно рассматривать как алгебру дифференцирований $\mathfrak{G}$. Составим полупрямую сумму $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{G}$. Согласно D $\mathfrak{L}_1$ расщепляема, так как ее радикал $\mathfrak{G}$ расщепляем и $\mathfrak{L}_1 \supset \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{N}$.

Т е о р е м а 10. Пусть $\mathfrak{G}$ — расщепление алгебры $\mathfrak{F}$. Тогда всякий идеал $\mathfrak{F}$ будет идеалом в $\mathfrak{G}$, коммутант $\mathfrak{G}$ совпадает с коммутантом $\mathfrak{F}$, центр $\mathfrak{G}$ совпадает с центром $\mathfrak{F}$.

Первое утверждение непосредственно следует из доказательства теоремы 1. Доказательство второго может быть проведено следующим образом. Возьмем какой-либо неразложимый элемент f из $\mathfrak{F}$ и разложим его нормально в $\mathfrak{G}$. Пусть $f = a + t$ — это разложение. Раскладываем теперь пространство $\mathfrak{F}$ относительно f на корневые инвариантные подпространства $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_s$. Обозначим через $\rho_0 = 0, \rho_1, \dots, \rho_s$ соответственные корни $f, \rho_1 \dots \rho_s \neq 0$. По определению корневых подпространств существует такое натуральное число ν , что $(F - \rho_i E)^\nu f = 0$, где F — матрица f в регулярном представлении $\mathfrak{F}$, E — единичная матрица $f_i \in \mathfrak{F}_i$.

Отсюда видно, что $\mathfrak{F}_i \subset [\mathfrak{F}\mathfrak{F}]$ для $i \neq 0$. С другой стороны, рассмотрим алгебру $\mathfrak{F}' = \{a, \mathfrak{F}\}$. Ее коммутант порождается элементами вида $[a, \mathfrak{F}]$ и $[\mathfrak{F}\mathfrak{F}]$.

Пусть $h \in \mathfrak{F}$. Тогда

$$h = h_0 + h_1 + \dots + h_s, \quad h_i \in \mathfrak{F}_i \quad (i = 0, 1, \dots, s),$$

$$[ah] = \rho_1 h_1 + \dots + \rho_s h_s.$$

Так как $h_i \in [\mathfrak{F}\mathfrak{F}]$ ($i = 1, 2, \dots, s$), то $[ah] \in [\mathfrak{F}\mathfrak{F}]$, $[\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'] = [\mathfrak{F}\mathfrak{F}]$. Переходя аналогичным образом от $\mathfrak{F}'$ к большей алгебре $\mathfrak{F}''$ и т. д., в конце концов мы придем к $\mathfrak{G}$ и, таким образом, получим $[\mathfrak{G}\mathfrak{G}] = [\mathfrak{F}\mathfrak{F}]$.

Наконец, относительно центров ясно, что центр $\mathfrak{F}$ лежит внутри центра $\mathfrak{G}$. Для доказательства обратного обозначим центр $\mathfrak{G}$ через $\mathfrak{Z}$ и рассмотрим гомоморфное отображение $\mathfrak{G} \rightarrow \overline{\mathfrak{G}}$, где $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/[\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$. Так как алгебра $\mathfrak{G}$ абелева, то ее можно разложить в прямую сумму вида

$$\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{F}} + \overline{\mathfrak{P}} + \overline{\mathfrak{Z}}_1, \quad (4.4)$$

где $\overline{\mathfrak{F}}$ — образ $\mathfrak{F}$, $\overline{\mathfrak{Z}}_1$ — образ некоторой центральной подалгебры $\mathfrak{Z}_1$, которую в случае $\mathfrak{Z} \not\subset \mathfrak{F}$ можно заведомо сделать отличной от нуля, $\overline{\mathfrak{P}}$ — дополнительная подалгебра. Обозначая через $\mathfrak{H}$ полный прообраз $\overline{\mathfrak{F}} + \overline{\mathfrak{P}}$ в $\mathfrak{G}$ и замечая, что $[\mathfrak{G}\mathfrak{G}] \subset \mathfrak{F}$, мы из (4.4) получаем прямое разложение для алгебры $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{Z}_1. \quad (4.5)$$

Так как расщепление прямой суммы равно сумме расщеплений слагаемых и $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{F}$, то (4.5) показывает, что расщеплением $\mathfrak{F}$ будет $\mathfrak{G}$, а не $\mathfrak{E}$, как было предположено. Следовательно, $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{F}$.

5. Конструкция разрешимых алгебр. Поставим следующую задачу: какими инвариантами можно характеризовать разрешимые алгебры, если в число допустимых инвариантов включить и нильпотентные алгебры, считая их, таким образом, как бы известными и более простыми? Этот вопрос был решен в п. 2 для расщепляемых алгебр. Теоремы п. 4 позволяют дать аналогичное решение для произвольных разрешимых алгебр. Для этого в качестве основного инварианта, определяющего разрешимую алгебру $\mathfrak{F}$, мы примем ее расщепление $\mathfrak{G}$, что ввиду п. 2 возможно. Так как алгебр с данным расщеплением в общем случае существует бесконечное множество, то требуется указать дополнительные инварианты.

По теореме 10 коммутант $\mathfrak{K}$ алгебры $\mathfrak{F}$ совпадает с коммутантом $\mathfrak{G}$ и, таким образом, $\mathfrak{F}$ находится среди алгебр, промежуточных между $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{K}$. Все такие алгебры однозначно характеризуются своим образом в $\bar{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$. Однако $\bar{\mathfrak{G}}$ абелева и ее подалгебры — произвольные линейные подпространства пространства $\bar{\mathfrak{G}}$. Следовательно, нужно знать, каким подпространствам $\bar{\mathfrak{G}}$ отвечают подалгебры, расщепление которых совпадает с $\mathfrak{G}$, и какие среди них изоморфны. Ответ на эти вопросы дают теоремы 11, 12.

Теорема 11. Пусть $\mathfrak{G}$ — расщепляемая разрешимая алгебра, $\mathfrak{Z}$ — центр, $\mathfrak{K}$ — коммутант $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{M} + \mathfrak{Z}$ — нормальное разложение*. Для того чтобы подалгебра $\mathfrak{F}$ имела своим расщеплением $\mathfrak{G}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \mathfrak{G} \supset \mathfrak{F} \supset \mathfrak{K}, \quad 2) \mathfrak{F} \supset \mathfrak{Z}, \quad 3) \mathfrak{G} = \mathfrak{M} + \mathfrak{F} = \mathfrak{Z} + \mathfrak{F}.$$

Необходимость очевидна, так как 1), 2) содержатся в теореме 10, а по поводу 3) достаточно заметить, что $\mathfrak{M} + \mathfrak{F}$ заведомо расщепляемая при любом $\mathfrak{F}$. Остается показать достаточность условий. Обозначим через $\mathfrak{Z}_i$ ($i = 0, 1, \dots, s$) корневые подпространства $\mathfrak{Z}$ относительно преобразований $\mathfrak{M}$. Таким образом,

$$[at] = \rho_i(a)t, \quad (5.1)$$

где $a \in \mathfrak{M}$, $t \in \mathfrak{Z}_i$ ($i = 0, 1, \dots, s$), $\rho_0(a) = 0$, $\rho_j(a) \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$). Подпространства $\mathfrak{Z}_j$ ($j = 1, \dots, s$) ввиду (5.1) лежат в $[\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$ и, следовательно, в $\mathfrak{F}$. Выберем базис $\mathfrak{F}$ в форме

$$a_1 + t_1, a_2 + t_2, \dots, a_k + t_k, t_{k+1}, \dots, t_m, \\ a_{k+1}, \dots, a_n, \{\mathfrak{Z}_1\}, \dots, \{\mathfrak{Z}_s\},$$

где $a_{k+1}, \dots, a_n$ — базис $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$, $t_{k+1}, \dots, t_m$ — базис $\mathfrak{Z}_0 \cap \mathfrak{F}$. Докажем, что элементы $a_i + t_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) не могут быть в алгебре $\mathfrak{F}$ ни нильпотентными, ни семирегулярными и, таким образом, должны разлагаться при переходе к расщеплению $\mathfrak{F}$. Пусть $a_1 + t_1$ нильпотентен в $\mathfrak{F}$. Это может быть только, если $[a_1\mathfrak{Z}_i] = 0$ ($i = 0, 1, \dots, s$), т. е. если a_1 центральный в $\mathfrak{G}$. Согласно 2) отсюда следует, что $a_1 \in \mathfrak{F}$, $t_1 \in \mathfrak{F}$ в противоречии с выбором базиса. Пусть, наоборот, $a_1 + t_1$ семирегулярен в $\mathfrak{F}$. Обозначим через A_1, T_1 линейные преобразования, вызываемые в $\mathfrak{F}$ коммутированиями соответственно с элементами a_1, t_1 . Так как $A_1, A_1 + T_1$ семирегулярны, T_1

* Т. е. разложение теоремы 3.

нильпотентно, $[A_1 T_1] = 0$, то $T_1 = 0$, $[t_1 \mathfrak{F}] = 0$. Отсюда $[t_1, a_i + t_i] = 0$, $[t_1, t_i] = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) и, следовательно, $[t_1 \mathfrak{G}] = 0$. По 2) это дает $t_1 \in \mathfrak{F}$, $a_1 \in \mathfrak{F}$, что снова противоречит выбору базиса.

Теорема 12. Пусть $\mathfrak{G}$ — расщепляемая алгебра, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{Z}$ — ее нормальное разложение, $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{G}$, $\bar{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/[\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$. Существует группа линейных преобразований $\bar{\Gamma}^*$, оперирующая в пространстве $\bar{\mathfrak{G}}$ и обладающая следующими свойствами:

1. Связная компонента единицы $\bar{\Gamma}_0^*$ группы $\bar{\Gamma}^*$ nilьпотентна.
2. $\bar{\Gamma}^*/\bar{\Gamma}_0^*$ конечна.
3. Образы $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{Z}}$, $\bar{\mathfrak{Z}}$ алгебр $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}$ в $\bar{\mathfrak{G}}$ инвариантны относительно $\bar{\Gamma}^*$.
4. Если подпространство $\bar{\mathfrak{F}}$ из $\bar{\mathfrak{G}}$ таково, что $\bar{\mathfrak{F}} + \bar{\mathfrak{A}} = \bar{\mathfrak{F}} + \bar{\mathfrak{Z}} = \bar{\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{Z} \subset \bar{\mathfrak{F}}$, то его прообраз в $\mathfrak{G}$ есть алгебра $\mathfrak{F}$, расщепление которой совпадает с $\mathfrak{G}$.
5. Чтобы две подалгебры $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$, расщепления которых совпадают с $\mathfrak{G}$, были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы их образы $\bar{\mathfrak{F}}_1, \bar{\mathfrak{F}}_2$ переводились друг в друга некоторыми преобразованиями из $\bar{\Gamma}^*$.

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{U}$, определенную для заданного ядра $\mathfrak{Z}$ в теореме 7. Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{A} + \mathfrak{Z}$ — нормальное разложение $\mathfrak{U}$. Согласно теореме 7 $\mathfrak{G}$ можно рассматривать как одну из подалгебр $\mathfrak{U}$ вида $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$. Обозначим через Θ^* группу автоморфизмов $\mathfrak{U}$, оставляющих инвариантной подалгебру $\mathfrak{A}$, и через Γ^* — подгруппу, образованную элементами Θ^* , оставляющими на месте подалгебру $\mathfrak{A}_1$. Так как Θ^* индуцирует в $\mathfrak{A}$ конечную группу линейных преобразований (теорема 7), то фактор-группа Θ^*/Γ^* конечна, $\Gamma_0^* = \Theta_0^*$. Пусть $\bar{\Gamma}^*$ — группа преобразований, индуцируемых в $\bar{\mathfrak{G}}$ автоморфизмами Γ^* . Тогда свойства 1, 2 следуют из аналогичных свойств группы Θ^* . Свойство 4 следует из теоремы 11, а свойство 3 очевидно, так как $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}$ — характеристические подалгебры $\mathfrak{G}$.

Наконец, условие 5 можно получить следующим образом. Пусть две подалгебры $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ изоморфны и имеют своим расщеплением алгебру $\mathfrak{G}$. Вследствие теоремы 9 этот изоморфизм продолжаем до некоторого автоморфизма θ алгебры $\mathfrak{G}$. По теореме 7 автоморфизм θ может быть продолжен до автоморфизма $\mathfrak{U}$, оставляющего на месте $\mathfrak{A}$. Таким образом, θ индуцирует некоторым автоморфизмом группы Γ^* , что и требовалось. Достаточность условий 5 очевидна.

6. Вещественные алгебры. Примеры. В теории групп Ли приходится иметь дело непосредственно лишь с алгебрами Ли над полем вещественных чисел. Поэтому представляет интерес выделить свойства, имеющие место для алгебр над таким полем. Одно из подобных свойств дает теорема 13. Определения nilьпотентных и семирегулярных элементов не зависели от основного поля, и мы их оставляем прежними.

Теорема 13. Максимальные коммутативные подалгебры, образованные семирегулярными элементами вещественной разрешимой алгебры $\mathfrak{F}$, внутренне сопряжены в $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{A}$ — какая-либо коммутативная семирегулярная подалгебра $\mathfrak{F}$, то для $\mathfrak{F}$ существует разложение вида $\mathfrak{F} = \mathfrak{A} + \mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_1$ — идеал $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{A}$ содержится в центре $\mathfrak{F}$.

Доказательство можно вести аналогично доказательству теоремы 4. При этом снова дело сводится к случаю, когда коммутант $\mathfrak{K} = [\mathfrak{F}\mathfrak{F}]$ абелев.

Пусть $\bar{\mathfrak{F}}$ — комплексная форма алгебры $\mathfrak{F}$, $\bar{\mathfrak{K}}$ — комплексная форма коммутанта $\mathfrak{K}$. Очевидно, $\bar{\mathfrak{K}} = [\bar{\mathfrak{F}}\bar{\mathfrak{F}}]$. Рассмотрим две максимальные семирегулярные подалгебры $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ алгебры $\mathfrak{F}$. Нам нужно показать, что найдется такой элемент $x \in \bar{\mathfrak{F}}$, для которого

$$[\mathfrak{M}_1, e^x \mathfrak{M}_2] = 0 \quad (6.1)$$

или, более подробно,

$$[a_1^{(i)}, e^x a_2^{(j)}] = 1, \quad (6.2)$$

где $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots$ — базис $\mathfrak{M}_1$, $a_2^{(1)}, a_2^{(2)}, \dots$ — базис $\mathfrak{M}_2$. Пользуясь коммутативностью $\bar{\mathfrak{K}}$, соотношения (6.2) можно переписать в виде

$$[a_1^{(i)} a_2^{(j)}] + [a_1^{(i)} [x a_2^{(j)}]] = 0. \quad (6.3)$$

Полагая $x = \omega_1 x_1 + \dots + \omega_s x_s$, где $x_1, \dots, x_s$ — базис $\mathfrak{F}$, мы видим, что (6.3) является системой линейных уравнений относительно ω_i . Из теоремы 4 видно, что система (6.3) в поле комплексных чисел решение заведомо имеет. Однако тогда она имеет и вещественное решение, так как все ее коэффициенты вещественны. Утверждение теоремы о существовании полупрямого разложения $\mathfrak{M} + \bar{\mathfrak{F}}_1$ очевидно.

Из теоремы 13, в частности, следует, что *максимальные компактные связанные подгруппы разрешимой группы Ли $\mathfrak{F}^*$ сопряжены в $\mathfrak{F}^*$* [7]. Действительно, компактным подгруппам $\mathfrak{F}^*$ отвечают семирегулярные коммутативные подалгебры. По теореме 13 отсюда следует, что любую компактную подгруппу $\bar{\mathfrak{F}}_1^*$ можно трансформировать посредством такого элемента $x \in \mathfrak{F}^*$, чтобы элементы $x^{-1} \bar{\mathfrak{F}}_1^* x$ стали перестановочными с элементами любой другой наперед заданной компактной подгруппы $\bar{\mathfrak{F}}_2^*$. Так как произведение двух компактных перестановочных подгрупп компактно и $x^{-1} \bar{\mathfrak{F}}_1^* x, \bar{\mathfrak{F}}_2^*$ максимальны, то $x^{-1} \bar{\mathfrak{F}}_1^* x = \bar{\mathfrak{F}}_2^*$, что и требовалось.

Возвращаясь снова к алгебрам над полем комплексных чисел, докажем сначала некоторое усиление теоремы 4, а затем рассмотрим один пример на классификацию разрешимых алгебр с данным ядром.

Т е о р е м а 4а. *Максимальные коммутативные подалгебры произвольной расщепляемой алгебры Ли $\mathfrak{L}$ сопряжены в $\mathfrak{L}$. Более того, если $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ — две подалгебры одной и той же максимальной коммутативной семирегулярной подалгебры $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{L}$ и если существует автоморфизм $\mathfrak{L}$, переводящий $\mathfrak{B}_1$ в $\mathfrak{B}_2$, то существует также автоморфизм $\mathfrak{L}$, переводящий $\mathfrak{B}_1$ в $\mathfrak{B}_2$ и оставляющий на месте алгебру $\mathfrak{B}$.*

Согласно теореме 9 D алгебра $\mathfrak{L}$ имеет форму

$$\mathfrak{L} = (\mathfrak{S} + \mathfrak{M}) + \mathfrak{Z}, \quad (6.4)$$

где $\mathfrak{Z}$ — нильпотентный идеал, $\mathfrak{M}$ — коммутативная семирегулярная, $\mathfrak{S}$ — полупростая, $[\mathfrak{M}\mathfrak{S}] = 0$. Так как подлежащее доказательству утверждение имеет место для полупростых и для разрешимых, то из (6.4) легко усматривается, что оно имеет место и для $\mathfrak{L}$.

В заключение найдем все разрешимые алгебры, ядро расщепления которых коммутативно. Для этого ищем сначала расщепляемые разрешимые алгебры с данным коммутативным ядром $\mathfrak{Z}$. Автоморфизмы $\mathfrak{Z}$ являются неособенными линейными преобразованиями пространства $\mathfrak{Z}$ и при каком-либо фиксированном базисе $\mathfrak{Z}$ обращаются в группу $\mathfrak{M}^*$ всех неособенных матриц

степени n . Диагональные матрицы из $\mathfrak{M}^*$ составляют ее максимальную коммутативную семирегулярную подгруппу $\mathfrak{A}^*$. Алгебра $\mathfrak{A}$ группы $\mathfrak{A}^*$ имеет размерность n , равную размерности $\mathfrak{Z}$. Пусть e_{ik} — матричные единицы. Базис $\mathfrak{A}$ дают единицы $e_{11}, \dots, e_{nn}$. Внутренние автоморфизмы $\mathfrak{M}^*$, оставляющие инвариантной $\mathfrak{A}$, вызывают перестановки ее базисных элементов e_{ii} , и любая перестановка, таким образом, производится. Следовательно, группа Θ (см. теорему 4) является симметрической группой перестановок базисных элементов. Два линейных подпространства $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ из $\mathfrak{A}$ дают изоморфные подалгебры $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{Z}, \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{Z}$ тогда и только тогда, когда одно из них переходит в другое при некоторой перестановке координатных осей $e_{11}, e_{22}, \dots, e_{nn}$.

Нерасщепляемых алгебр $\mathfrak{F}$, расщепление которых $\mathfrak{G}$ имело бы коммутативное ядро $\mathfrak{Z}$, не существует. Ибо если $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{Z}$ — нормальное разложение $\mathfrak{G}$, то по теореме 10 центр и коммутант $\mathfrak{G}$ должны совпадать соответственно с центром и коммутантом $\mathfrak{F}$. Однако $\mathfrak{G}$ допускает прямое разложение вида $\mathfrak{G} = (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{Z}_1) + \mathfrak{Z}$, где $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{G}$, а коммутант алгебры $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{Z}_1$ совпадает с $\mathfrak{Z}_1$. Отсюда $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z} \subset \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$.

§ 3. Приложения

7. Теорема Адо. Нормальное разложение (4.3), полученное в п. 4 для расщепляемых алгебр, может быть использовано для доказательства известной теоремы Адо о том, что *всякая алгебра Ли допускает изоморфное матричное представление* [4].

Действительно, всякая алгебра содержится в расщепляемой и поэтому достаточно ограничиться рассмотрением только последних. Пусть $\mathfrak{L}$ — расщепляемая алгебра Ли и

$$\mathfrak{L} = (\mathfrak{G} + \mathfrak{A}) + \mathfrak{Z}$$

— ее нормальное разложение из п. 4. Переходя к группам, мы получим

$$\mathfrak{L}^* = (\mathfrak{G}^* \mathfrak{A}^*) \mathfrak{Z}^*.$$

Для нильпотентных групп Биркгофом [2] было получено точное матричное представление $\mathfrak{D}$, обладающее тем свойством, что для каждого автоморфизма нильпотентной группы θ найдется такая матрица V_θ , для которой

$$\mathfrak{D}(t^\theta) = V_\theta^{-1} \mathfrak{D}(t) V_\theta \quad (t \in \mathfrak{Z}). \quad (7.1)$$

Каждый элемент $p \in \mathfrak{G}^* \mathfrak{A}^*$ порождает внутренний автоморфизм группы $\mathfrak{L}^*$ и, следовательно, индуцирует также некоторый автоморфизм $\theta(p)$ в $\mathfrak{Z}$. Пусть $V(p) = V_{\theta(p)}$ — матрица, обладающая свойством (7.1). Тогда соответствие

$$pt \rightarrow V(p) \mathfrak{D}(t)$$

будет представлением $\mathfrak{L}^*$. Пусть $\mathfrak{D}_1(p)$ — очевидно существующее локально точное представление $\mathfrak{G}^* \mathfrak{A}^*$. Представление

$$\mathfrak{D}(pt) = \mathfrak{D}_1(p) + V(p) \mathfrak{D}(t)$$

есть искомое локально точное представление $\mathfrak{L}^*$ и, следовательно, точное для алгебры $\mathfrak{L}$. В частности, если в качестве $\mathfrak{A}^* \mathfrak{Z}^*$ взять односвязную группу, а для $\mathfrak{G}^*$ выбрать линейно представимую форму, то $\mathfrak{L}^*$ будет линейно представима и в целом (ср. [3]).

8. И н в а р и а н т ы. Пусть $\mathfrak{G}^*$ — замкнутая группа линейных преобразований векторного пространства E с базисом $e_1, \dots, e_n$. Каждое линейное преобразование $G \in \mathfrak{G}^*$ переводит вектор $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ с независимыми переменными компонентами x_i в некоторый вектор $Gx = \bar{x}_1 e_1 + \dots + \bar{x}_n e_n$. Функция $F(x_1, \dots, x_n)$ называется и н в а р и а н т о м (векторным) группы $\mathfrak{G}^*$, если $F(x_1, \dots, x_n) = F(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ для всех $G \in \mathfrak{G}^*$. Целые рациональные инварианты образуют кольцо $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}^*)$, содержащееся в кольце полиномов от $x_1, \dots, x_n$. Дробные рациональные инварианты образуют подполе $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^*)$ поля рациональных функций. Фундаментальной задачей теории инвариантов является изучение алгебраической структуры $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}^*)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^*)$ для различных $\mathfrak{G}^*$ [11]. Например, доказано, что $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^*)$ имеет конечное число образующих [9]. Однако можно ли, например, для конечных групп $\mathfrak{G}^*$ выбрать эти образующие алгебраически независимыми, представляет известную проблему минимального рационального базиса. Аналогично, имеет ли кольцо $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}^*)$ всегда конечное число образующих, является так называемой первой основной проблемой теории инвариантов. Эта проблема решена положительно для отдельных типов групп $\mathfrak{G}^*$: компактных, циклических, полупростых и некоторых других. В общем случае она остается нерешенной. Витценбоком [10] было доказано, что если $\mathfrak{G}^*$ связна, то $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}^*)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^*)$ совпадают соответственно с $\mathfrak{D}(\mathfrak{N}^*)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{N}^*)$, где $\mathfrak{N}^*$ — максимальная связная разрешимая подгруппа $\mathfrak{G}^*$. Таким образом, для связных групп все приводится к изучению инвариантов разрешимых групп. В той же работе показывается, как найти инварианты разрешимой, зная инварианты нильпотентных групп. Однако это сделано несколько обходным путем, в результате чего остается неясным, от каких нильпотентных групп зависят инварианты исходной группы. Теоремы 3, 8 позволяют получить редукцию прямо и сделать явной эту нильпотентную группу.

Т е о р е м а 14. Если $\mathfrak{Z}^*$ — ядро расщепления $\mathfrak{G}^*$ разрешимой линейной группы $\mathfrak{N}^*$ и если $\mathfrak{D}(\mathfrak{Z}^*)$ имеет конечное число образующих, то $\mathfrak{D}(\mathfrak{N}^*) = \mathfrak{D}(\mathfrak{G}^*)$ также имеет конечное число образующих.

Пусть $\mathfrak{Z}^*$ — группа всех неособенных линейных преобразований, оставляющих инвариантными полиномы кольца $\mathfrak{D}(\mathfrak{N}^*)$. Очевидно, $\mathfrak{Z}^* \supset \mathfrak{N}^*$, $\mathfrak{D}(\mathfrak{Z}^*) = \mathfrak{D}(\mathfrak{N}^*)$. По теореме 8 $\mathfrak{Z}^*$ расщепляема, следовательно, $\mathfrak{Z}^* \supset \mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}^*) = \mathfrak{D}(\mathfrak{N}^*)$.

Перейдем к изучению связи между $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}^*)$ и $\mathfrak{D}(\mathfrak{Z}^*)$. Группу $\mathfrak{G}^*$ можно представить, при подходящем выборе базиса в E , в форме $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{U}^* \mathfrak{Z}^*$, где $\mathfrak{U}^*$ — абелева группа диагональных матриц (теорема 3). Так как $\mathfrak{Z}^*$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}^*$, то инварианты $\mathfrak{Z}^*$ переводятся преобразованиями $\mathfrak{U}^*$ снова в инварианты $\mathfrak{Z}^*$. Следовательно, чтобы получить инварианты $\mathfrak{G}^*$, нужно из $\mathfrak{D}(\mathfrak{Z}^*)$ выбрать полиномы, остающиеся инвариантными при преобразованиях $\mathfrak{U}^*$. Выберем в $\mathfrak{U}^*$ преобразование A общего вида *. Так как A диагональна, то $Ax_i = p_i x_i$, $A^\nu x_i = p_i^\nu x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $\nu = 1, 2, \dots$). Назовем весом одночлена $ax_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ число $p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}$. Полином F называется и з о б а р и ч н ы м, если все его члены одного и того же веса. Пусть $F(x_1, \dots, x_n)$ инвариантен относительно $\mathfrak{Z}^*$ и $F = F_1 + \dots + F_k$ — его разложение в сумму изобаричных частей с различными весами $\pi_1, \dots, \pi_k$. Так как

* Т. е. обладающее следующим свойством: если между $p_1, \dots, p_n$ существует соотношение $p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} = 1$ с целыми k_i , то такое же соотношение существует для всех матриц $\mathfrak{U}^*$ ($p_1, \dots, p_n$ — диагональные элементы A).

$A^s F \in \mathfrak{D}(\mathfrak{L}^*)$, то из системы уравнений

$$A^v F = \pi_1^v F_1 + \dots + \pi_k^v F_k \quad (v = 0, 1, \dots, k-1)$$

находим, что $F_i \in \mathfrak{D}(\mathfrak{L}^*)$. Предположим, теперь, что кольцо $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}^*)$ имеет конечное число образующих. Раскладывая эти образующие на изобаричные слагаемые, мы получим конечную систему изобаричных образующих для $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}^*)$. Обозначим эти образующие через $f_1, \dots, f_s$, их веса через $\sigma_1, \dots, \sigma_s$. Легко видеть, что всякий инвариант $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}^*)$ есть сумма членов вида $a f_1^{m_1} f_2^{m_2} \dots f_s^{m_s}$, где вес каждого члена равен нулю. Поставим в соответствие всякому произведению вида $f_1^{m_1} f_2^{m_2} \dots f_s^{m_s}$ ($m_i \geq 0$) вектор $(m_1, m_2, \dots, m_s)$ вспомогательного s -мерного пространства. Произведениям веса нуль отвечают векторы, координаты которых связаны соотношением

$$m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 + \dots + m_s \sigma_s = 0. \quad (8.1)$$

Однако ясно, что среди решений уравнения (8.1) с целыми неотрицательными m_i найдется конечное число базисных, через которые остальные будут выражаться в виде сумм [12]. Произведения $f_1^{m_1} \dots f_s^{m_s}$, отвечающие базисным решениям, очевидно, и будут образующими кольца $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}^*)$.

Доказанная теорема сводит, таким образом, общую проблему к проблеме нахождения инвариантов нильпотентных линейных групп*. Вообще говоря, инварианты нильпотентных групп ведут себя более просто, чем инварианты разрешимых групп. Например, было упомянуто, что $\mathfrak{P}(\mathfrak{L}^*)$ всегда имеет конечное число образующих. Если $\mathfrak{L}^*$ нильпотентна, то для степеней образующих можно указать верхнюю границу, зависящую только от степени матриц $\mathfrak{L}^*$. Это заведомо не имеет места для разрешимых групп.

Заметим еще, что $\mathfrak{P}(\mathfrak{L}^*)$ для связных $\mathfrak{L}^*$ допускает алгебраически независимую систему образующих. Таким образом, проблема минимального рационального базиса для связных групп имеет положительное решение.

9. Н и л ь п о т е н т н ы е п о д а л г е б р ы. Нильпотентная подалгебра максимальна, если она не содержится ни в какой другой большей нильпотентной подалгебре. Так как все подалгебры нильпотентной алгебры нильпотентны, то первой задачей при изучении нильпотентных подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{L}$ будет нахождение максимальных.

Пусть $\mathfrak{K}$ — какая-либо фиксированная максимальная разрешимая подалгебра $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{F}$ — максимальная нильпотентная из $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{K}_1$ — одна из максимальных разрешимых подалгебр $\mathfrak{L}$, содержащих $\mathfrak{F}$. По теореме Чеботарева — Морозова [8] существует такой элемент $x \in \mathfrak{L}^*$, что $x^{-1} \mathfrak{K}_1 x = \mathfrak{K}$. Алгебра $\mathfrak{F}_1 = x^{-1} \mathfrak{F} x$ содержится в $\mathfrak{K}$ и является в ней максимальной нильпотентной. Таким образом, дело сводится к нахождению максимальных нильпотентных подалгебр разрешимой алгебры $\mathfrak{K}$.

Обозначим через $\mathfrak{G}$ расщепление $\mathfrak{K}$. Мы сначала найдем максимальные нильпотентные подалгебры $\mathfrak{G}$, а затем покажем, что они взаимно однозначно соответствуют аналогичным подалгебрам $\mathfrak{K}$.

Л е м м а. Если $\mathfrak{F}$ — нильпотентная подалгебра расщепляемой алгебры $\mathfrak{G}$, то расщепление $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{G}$ также нильпотентно.

Действительно, если $f \in \mathfrak{F}$, $f = a + t$ — нормальное разложение f в $\mathfrak{G}$, то корневые подпространства $\mathfrak{F}$ относительно f и относительно a должны быть

* Под нильпотентной группой здесь снова понимается группа матриц, приводимых к треугольной форме с единичной главной диагональю.

теми же самыми. Так как $\mathfrak{F}$ нильпотентна, то $\mathfrak{F}$ принадлежит корню нуль относительно f . Поэтому $\{a, \mathfrak{F}\} = 0$. Следовательно, расщепление $\mathfrak{F}$ либо совпадает с $\mathfrak{F}$, либо отличается от него на абелево прямое слагаемое, что и требовалось.

Приведем все матрицы регулярного представления $\mathfrak{G}$ к треугольной форме и обозначим через $\rho_1(g), \dots, \rho_n(g)$ диагональные элементы матрицы, отвечающей элементу $g \in \mathfrak{G}$. Мы будем говорить, что элемент $f \in \mathfrak{G}$ имеет тип больший или равный типу $g \in \mathfrak{G}$, если из $\rho_i(g) \neq \rho_j(g)$ следует $\rho_i(f) \neq \rho_j(f)$ ($i, j = 1, \dots, n$).

Т е о р е м а 15. *С точностью до сопряженности все максимальные нильпотентные подалгебры $\mathfrak{F}$ расщепляемой разрешимой алгебры $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{Z}$ имеют вид $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}_1 + Z_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_1)$, где $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, $Z_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_1)$ — совокупность элементов $\mathfrak{Z}$, перестановочных с элементами $\mathfrak{A}_1$, $Z_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{A}_1$. Если $a_1 \in \mathfrak{A}_1$, $a \in \mathfrak{A}$ и тип a не больше типа a_1 , то $a \in \mathfrak{A}_1$. Таким образом, максимальные нильпотентные подалгебры $\mathfrak{G}$ с точностью до сопряженности в $\mathfrak{G}$ однозначно характеризуются наивысшим типом содержащихся в них элементов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{F}$ — максимальная нильпотентная подалгебра $\mathfrak{G}$. Согласно лемме $\mathfrak{F}$ расщепляема. Пользуясь теоремой 4, мы находим, что с точностью до сопряженности $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{Z}$. Так как $\mathfrak{F}$ нильпотентна, то $[\mathfrak{A}_1, \mathfrak{F}_1] = 0$. Следовательно, нильпотентные подалгебры $\mathfrak{A}_1 + Z_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{A}_1)$, $Z_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}_1) + \mathfrak{F}_1$ содержат $\mathfrak{F}$. Ввиду максимальной $\mathfrak{F}$ эти подалгебры должны совпадать с $\mathfrak{F}$, откуда $\mathfrak{F}_1 = Z_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{A}_1)$, $\mathfrak{A}_1 = Z_{\mathfrak{A}}(Z_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{A}_1))$. Алгебра $\mathfrak{A}_1$ состоит из элементов, матрицы которых в регулярном представлении приводятся к диагональной форме. Совокупность матриц, перестановочных с данной системой диагональных матриц, не зависит от чисел, стоящих на диагонали этих матриц, а зависит только от их типа. Таким образом, доказано и последнее утверждение теоремы.

Т е о р е м а 16. *Пусть $\mathfrak{G}$ — расщепление разрешимой алгебры $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{F}$ — максимальная нильпотентная подалгебра $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{F}_1$ — расщепление $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{G}$. Алгебра $\mathfrak{F}_1$ содержится в единственной максимальной нильпотентной подалгебре $\mathfrak{F}_m$ из $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{F}_m$. Если две максимальные нильпотентные подалгебры $\mathfrak{G}$ сопряжены в $\mathfrak{G}$, то их пересечения с $\mathfrak{K}$ сопряжены в $\mathfrak{K}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 4 с точностью до сопряженности имеем $\mathfrak{F}_m = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{F}_1$, где $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$. Докажем, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{F}_1$. Пусть $a_1 \in \mathfrak{A}_1$, $a_1 + t \in \mathfrak{K}$, $t \in \mathfrak{F}$. Разложим t в сумму корневых элементов относительно $\mathfrak{A}_1$:

$$t = t_0 + t_1 + \dots + t_s, \quad [at_i] = \rho_i(a) \cdot i,$$

где $a \in \mathfrak{A}_1$, $\rho_0(a) = 0$, $\rho_j(a) \neq 0$ ($j \neq 0$). Элементы t_j ($j \neq 0$) входят в коммутант $\mathfrak{G}$ и, следовательно (теорема 10), в $\mathfrak{K}$. Поэтому $a_1 + t_0 \in \mathfrak{K}$. Но $[\mathfrak{A}_1, t_0] = 0$, т. е. $t_0 \in Z_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{A}_1)$, откуда $a_1 + t_0 \in \mathfrak{F}_m$, $a_1 + t_0 \in \mathfrak{F}$, $a_1 \in \mathfrak{F}_1$.

Таким образом, $\mathfrak{A}_1$, а следовательно, и $\mathfrak{F}_m = \mathfrak{A}_1 + Z_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{A}_1)$ определяются алгеброй $\mathfrak{F}$ однозначно. Что касается сопряженности, то она непосредственно следует из теорем 4 и 10. Действительно, по теореме 4 две семирегулярные подалгебры $\mathfrak{G}$, сопряженные в $\mathfrak{G}$, будут сопряжены посредством некоторого элемента из коммутанта $\mathfrak{G}$. Так как коммутант $\mathfrak{G}$ входит в $\mathfrak{K}$, то сопряженность семирегулярных подалгебр в $\mathfrak{G}$ эквивалентна их сопряженности в $\mathfrak{K}$. Максимальные нильпотентные подалгебры однозначно определяются семирегулярными и поэтому их сопряженность в $\mathfrak{G}$ также эквивалентна сопряженности в $\mathfrak{K}$.

С л е д с т в и е. Картановские подалгебры произвольной алгебры Ли $\mathfrak{L}$ сопряжены в $\mathfrak{L}$ (Вейль, Шевалле [4]).

Пусть $l \in \mathfrak{L}$ — элемент, матрица которого в регулярном представлении $\mathfrak{L}$ имеет максимальное возможное число различных характеристических чисел (корней). Тогда совокупность элементов $\mathfrak{L}$, принадлежащих корню нуль относительно l , образует нильпотентную подалгебру $\mathfrak{H}_l$, называемую картановской. Беря максимальную разрешимую подалгебру $\mathfrak{K} \ni l$ из $\mathfrak{L}$, мы видим, что картановскими подалгебрами будут максимальные нильпотентные подалгебры $\mathfrak{K}$, имеющие наивысший тип и, таким образом, образующие один класс сопряженных подалгебр.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Д. Адо. О представлении конечных непрерывных групп с помощью линейных подстановок.— Изв. Казанского ФМО, 1934/35, 7, 1—43.
2. G. Birkhoff. Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices.— Ann. Math., 1937, 38, N 2, 526—532.
3. E. Cartan. Les représentations linéaires des groupes de Lie.— J. math. pures et appl. 1938, 17, 1—12.
4. C. Chevalley. An algebraic proof of a property of Lie groups.— Amer. J. Math., 1941, 63, 785—793.
5. F. Gantmacher. Canonical representation of automorphisms of a complex semi-simple Lie group.— Math. sb., 1939, 5, N 1, 101—146.
6. А. И. Мальцев. О полупростых подгруппах групп Ли.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1944, 8, № 4, 143—174.
7. A. Malcev. On the theory of the Lie groups in the large.— Mat. сб., 1945, 16, 163—189.
8. В. В. Морозов. О нильпотентном элементе в полупростой алгебре Ли.— Докл. АН СССР, 1942, 36, № 3, 91—94.
9. E. Noether. Die Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearen Gruppen der Charakteristik p. Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. aus Jahre 1926. Berlin, 1927, S. 28—35.
10. R. Wietzenböck. Über Invarianten von linearen Gruppen.— Acta math., 1932, 58, 231—293.
11. H. Weyl. The classical groups. Princeton, 1939.
12. J. G. Van der Corput. Ueber Diophantische Systeme von linear homogenen Gleichungen und Ungleichungen.— Proc. Koninkl. Akad. wet. Amsterdam, 1931, 34, N 3, 372—382.

Введение

В этой работе мы изучаем группы Ли в целом, т. е. такие топологические группы $\mathfrak{G}$, некоторая окрестность единичного элемента которых может быть гомеоморфно отображена на внутренность r -мерной сферы так, что координаты образа произведения двух элементов являются аналитическими функциями координат образов множителей. Рассмотрим переменный элемент $x(t)$, координаты $x^1, \dots, x^r$ которого являются непрерывными и дифференцируемыми функциями параметра t . Всегда будет считаться, что путь $x(t)$ исходит из единичного элемента $e = x(0) = (0, \dots, 0)$ группы и определен для всех достаточно малых значений t . Вектор с компонентами $(dx^i/dt)_{t=0}$ обозначим через $dx/dt_0 = a$ и назовем касательным к пути $x(t)$. Множество векторов, касательных ко всем путям в $\mathfrak{G}$, образует r -мерное линейное касательное пространство G . Если $x(t), y(t)$ — пути с касательными векторами a и b соответственно, то касательным вектором к пути $x(t)y(t)$ будет $a + b$. Вектор

$$c = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} x(t)y(t)x^{-1}(t)y^{-1}(t)$$

зависит только от a и b , называется коммутатором a и b и обозначается через $c = [a, b]$. Операция коммутирования обладает следующими свойствами:

$$[a, b] = -[b, a],$$

$$[\lambda a + \mu b, c] = \lambda [a, c] + \mu [b, c]. \quad (\lambda, \mu — \text{скаляры}),$$

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0.$$

Любое векторное пространство, в котором определена операция с этими свойствами, называется алгеброй Ли. (1) означает, что каждой группе Ли однозначно соответствует алгебра Ли**. Обратное также верно: каждая алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой группы Ли. Между группами Ли и их алгебрами Ли существует тесная связь: многие свойства групп находят свои аналоги в свойствах алгебр Ли. Однако алгебра Ли полностью определена, если мы знаем структуру некоторой окрестности единицы группы. Поэтому алгебры Ли могут выражать только локальные свойства групп Ли. Что же каса-

* Мат. сб., 1945, 16, (58), № 2, 163—189 (перевод с англ.).

Статья эта, исключая некоторые замечания во введении, была написана в 1942 г. Основные результаты сформулированы в заметках [10] — [12]. Уже когда статья была закончена, я узнал из реферата в Math. revs (1942, № 2) о статье К. Шевалле [7]. В реферате отмечались два результата: 1) односвязная разрешимая группа имеет связную абелеву подгруппу, содержащую ее центр, и разлагается в топологическое произведение этой подгруппы и односвязного подмножества; 2) топологическое пространство разрешимой группы гомеоморфно топологическому произведению прямых и окружностей. Первый результат содержится в теореме 3, второй — в теореме 6 нашей статьи.

** Координаты элементов $\mathfrak{G}$, а следовательно, и векторное пространство G и алгебры Ли всегда считаются вещественными.

ется свойств групп Ли в целом, то они хотя и зависят от локальных свойств, но не вытекают полностью из той информации, что дают алгебры Ли.

Одна из первых подлежащих решению проблем здесь — насколько группа Ли определяется своей алгеброй Ли? Проблема эта была решена О. Шрейером [15], который показал, что каждой алгебре Ли G однозначно с точностью до автоморфизмов соответствует связная, односвязная группа $\tilde{G}$. Все другие группы с той же самой алгеброй G изоморфны фактор-группам группы $\tilde{G}$ по различным дискретным нормальным делителям. Остается решить чисто алгебраическую проблему — что необходимо для того, чтобы определить форму группы Ли в целом? Одно из возможных решений этой проблемы дано в § 3. Оно следующее:

В алгебре G мы выбираем определенную с точностью до автоморфизмов характеристическую абелеву подалгебру A , содержащую центр Z алгебры G . Под рациональным подмодулем в A мы понимаем любое множество элементов из A вида $\rho_1 a_1 + \dots + \rho_k a_k$, где $a_1, \dots, a_k$ — элементы алгебры A , линейно независимые над полем рациональных чисел, а $\rho_1, \dots, \rho_k$ независимо друг от друга пробегает все рациональные числа. В алгебре вычетов A/Z мы выбираем сингулярный рациональный модуль A_0/Z . Наконец, рациональный подмодуль M_0 , принадлежащий A , назовем характеристическим, если его образ в A/Z содержится в сингулярном модуле A_0/Z . Доказывается, что (теорема 12) каждая форма группы $\tilde{G}$ с точностью до эквивалентности (определенной ниже) однозначно определяется характеристическим подмодулем алгебры A и обратно; каждому характеристическому подмодулю алгебры A соответствует форма группы $\tilde{G}$.

В качестве вспомогательного средства мы исследуем подгруппы, обладающие некоторыми топологическими свойствами. Одним из наиболее интересных классов подгрупп в группах Ли является класс компактных подгрупп; их изучению посвящены § 1 (разрешимые группы) и § 2 (общий случай). Как показал Картан [5] для случая полупростых групп, все максимальные связные компактные подгруппы в них сопряжены. Мы показываем (§ 2), что то же самое верно и для произвольных групп Ли. Далее, мы показываем, что проблема нахождения всех классов взаимно сопряженных компактных подгрупп эквивалентна задаче определения сопряженных подгрупп в упомянутых выше максимальных компактных подгруппах. Другим интересным классом подгрупп является класс связных коммутативных подгрупп, содержащих центр группы $\tilde{G}$. В теоремах 3 и 8 мы устанавливаем их существование и доказываем, что в односвязной группе все минимальные связные абелевы подгруппы, содержащие заданную центральную подгруппу, взаимно сопряжены.

Вторая основная проблема теории групп Ли в целом — это проблема топологической структуры группового пространства. Исследования в этом направлении были начаты Э. Картаном [4], который показал, что пространство связной, односвязной группы Ли $\tilde{G}$ гомеоморфно топологическому произведению евклидова пространства и пространства компактной подгруппы группы $\tilde{G}$. Что касается неодносвязных форм, то известно, что пространство каждой связной нильпотентной группы Ли является топологическим произведением прямых линий и окружностей. Мы показываем, что каждая связная группа Ли гомеоморфна топологическому произведению евклидова пространства и пространства ее максимальной компактной подгруппы.

Более частный характер носит проблема структуры линейных топологи-

ческих групп. Интерес ее заключается в следующем. Как показал Адо [1], каждая алгебра Ли допускает изоморфное матричное представление. С другой стороны, Г. Биркгоф [2] дал примеры групп Ли, которые не допускают изоморфных матричных представлений. В этом направлении первый результат был получен Г. Биркгофом, который показал, что связные нильпотентные линейные группы разлагаются в прямое произведение компактной и односвязной подгрупп [3]. После этого Э. Картан [6] дал новое доказательство теоремы Адо, из которого, в частности, вытекает существование изоморфных матричных представлений связных, односвязных разрешимых групп. К этим результатам мы добавляем следующий (теорема 1): каждая связная разрешимая линейная группа разлагается в прямое произведение своей максимальной компактной подгруппы и односвязного нормального делителя. Так как легко показать, что центр любой связной линейной полупростой группы конечен, то отсюда следует необходимое условие линейной представимости группы Ли: в разложении Леви связной линейной группы Ли полупростой фактор должен иметь конечный центр, а коммутант радикала быть односвязным *.

Третья важная проблема теории групп Ли в целом следующая. Как известно, если G — алгебра Ли группы $\mathcal{G}$, то каждой подалгебре $H \subset G$ соответствует так называемая локальная подгруппа $\mathcal{H}_i$, определенная в достаточной малой окрестности $\mathcal{E}$ единицы группы $\mathcal{G}$. Конечные произведения элементов из $\mathcal{H}_i$ образуют подгруппу $\mathcal{H}$ группы $\mathcal{G}$. Подгруппа эта единственным образом определена подалгеброй H и связна. Связная компонента единиц в пересечении $\mathcal{H} \cap \mathcal{E}$ замкнута в $\mathcal{E}$. Как показали сначала Д. фон Нейман [13] для линейных групп, а затем Картан [6] для общего случая, эти свойства — связность и локальная замкнутость — также достаточны для того, чтобы $\mathcal{H}$ соответствовала подалгебре алгебры G . Таким образом, было установлено характеристическое топологическое свойство подгрупп, соответствующих подалгебрам алгебры G . Однако в общей теории топологических групп замкнутые подгруппы особо важны и только их называют подгруппами группы $\mathcal{G}$. Поэтому возникает вопрос: какими свойствами выделяются подалгебры $H \subset G$, которым в $\mathcal{G}$ соответствуют замкнутые подгруппы. Так как ответ на этот вопрос зависит от формы $\mathcal{G}$ в целом, то форма эта должна быть каким-то образом задана.

Отметим следующее: предположим, что форма $\mathcal{G}$ гомоморфно отображается на форму $\mathcal{G}_1$ и что ядро гомоморфизма конечно. Тогда каждая замкнутая подгруппа в $\mathcal{G}$ отображается на замкнутую подгруппу в $\mathcal{G}_1$ и обратно. Две группы называются эквивалентными, если они являются конечнолистными накрытиями одной и той же третьей группы. Множество всех локально изоморфных групп разбивается на классы эквивалентных групп и, как следует из сделанного выше замечания, любая подалгебра, замкнутая в какой-либо группе, будет замкнута и во всех эквивалентных группах **.

Отсюда следует, что, занимаясь проблематикой замкнутых подгрупп, мы с точностью до эквивалентности должны знать форму группы. Далее, форму можно задать соответствующим рациональным подмодулем. В § 4 мы и находим условия, при которых подгруппа, соответствующая подалгебре H ,

* Мы показали, что эти условия для линейной представимости также достаточны при соблюдении некоторых условий, налагаемых на структуру центра полупростой группы [18].

** Для краткости мы говорим, что подалгебра $H \subset G$ замкнута в $\mathcal{G}$, если подгруппа, соответствующая H в форме $\mathcal{G}$, замкнута в $\mathcal{G}$.

замкнута в форме $\mathfrak{G}$, заданной алгеброй G и ее характеристическим подмодулем. Результат следующий (теорема 17): подалгебра H замкнута в форме $\mathfrak{G}$, определенной характеристическим подмодулем M_0 , тогда и только тогда, когда совпадают размерности пересечений $H \cap (M_0 + \Gamma_0)$ и $H \cap (M + \Gamma)$. Здесь Γ_0 — специальный дополнительный рациональный подмодуль, а $M + \Gamma$ — подалгебра, порожденная элементами $M_0 + \Gamma_0$.

Результат этот получен при помощи теорем более частного характера, например, для замкнутости подгруппы $\mathfrak{H}$ необходимо и достаточно, чтобы замыкание каждой однопараметрической подгруппы из $\mathfrak{H}$ содержалось в $\mathfrak{H}$.

В теории групп Ли существуют две различные терминологии. Одна из них классифицирует группы по их алгебрам, другая — по свойствам самих групп, рассматриваемых с абстрактной теоретико-групповой точки зрения. Для определенности условимся в следующем: под подгруппой группы Ли будем понимать — если не оговорено противное — только связную локально замкнутую подгруппу; топологическую группу будем называть абелевой, нильпотентной или разрешимой, если она такова с точки зрения абстрактной теории групп. Аналогично, под коммутантом $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ группы Ли будем понимать ее абстрактный коммутант. Через $[A, B]$ в лиевских алгебрах мы обозначаем линейное пространство, натянутое на коммутаторы $[a, b]$ ($a \in A, b \in B$). Алгебра G коммутативна, если $[G, G] = 0$, она нильпотентна, если последовательность $G^2 = [G, G], G^3 = [G, G^2], \dots$ оканчивается нулем, она разрешима, если нулем оканчивается последовательность коммутантов. Легко видеть, что абелевым, нильпотентным, разрешимым подалгебрам алгебры Ли G отвечают в $\mathfrak{G}$ соответственно абелевы, нильпотентные, разрешимые подгруппы (см., например, [8]). Для случая абелевых подалгебр доказательство совершенно очевидно. Что же касается подалгебр нильпотентных и разрешимых, то эти случаи легко сводятся к случаю абелевых подалгебр с помощью так называемой внутренней топологии групп. Эта топология вводится так: пусть $\mathfrak{H}$ — связная подгруппа в $\mathfrak{G}$, $H \subset G$ — их алгебры Ли. Если $\mathfrak{H}$ не замкнута в $\mathfrak{G}$, то, не будучи локально компактной, она вообще не является группой Ли. Выберем полную систему $\mathfrak{G}_1 \supseteq \mathfrak{G}_2 \supseteq \dots$ окрестностей единицы в $\mathfrak{G}$ так, чтобы компонента единицы в $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}$ была замкнута в $\mathfrak{G}_1$. Легко проверить, что система $\{\mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{H}\}$ удовлетворяет всем аксиомам, налагаемым на систему окрестностей единицы в $\mathfrak{H}$ [14, стр. 66—69], и, следовательно, определяет в $\mathfrak{H}$ некоторую «внутреннюю» топологию. Тожественное отображение группы $\mathfrak{H}$ с ее внутренней топологией в $\mathfrak{H}$ с топологией, индуцированной из $\mathfrak{G}$, одно-однозначно и непрерывно в одном направлении. Рассматриваемая с ее внутренней топологией, группа $\mathfrak{H}$ является группой Ли и ее алгебра изоморфна алгебре H .

Отметим еще следующее. Пусть H — подалгебра в G и $\mathfrak{H}$ — соответствующая подгруппа в $\mathfrak{G}$. Тогда

$$1) [\bar{\mathfrak{H}}, \bar{\mathfrak{H}}] = [\bar{\mathfrak{H}}, \mathfrak{H}]^*.$$

2) Коммутант $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$ соответствует подалгебре $[H, H]$ алгебры G .

Доказательство. 1) Группа $[\bar{\mathfrak{H}}, \mathfrak{H}]$ состоит из произведений вида $c = \prod_{i=1}^k a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$, $\{a_i, b_i\} \subset \bar{\mathfrak{H}}$. В силу непрерывности можно выбрать элементы

* Черта означает замыкание в $\mathfrak{G}$.

a_{i_1}, b_{i_1} в подгруппе $\mathfrak{H}$ так, чтобы произведение $c_1 = \prod a_{i_1} b_{i_1} a_{i_1}^{-1} b_{i_1}^{-1}$ было сколь угодно близким к c . Так как $c_1 \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$, то $c \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$, что и требовалось.

2) Возьмем группу $\mathfrak{H}$ с ее внутренней топологией и рассмотрим все произведения вида

$$c(t, \tau) = \prod_{i=1}^k x_i(t) y_i(\tau) x_i^{-1}(t) y_i^{-1}(\tau) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где $x_i(t), y_i(\tau)$ — произвольные пути в $\mathfrak{H}$, исходящие из единичного элемента. Векторы

$$c(\tau) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} c(t, \tau)$$

образуют в алгебре H линейное пространство S . Пусть $c_1(\tau_1), \dots, c_m(\tau_m)$ — базис в S . Если a и b — касательные векторы к $x(t)$ и $y(t)$, то

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \frac{1}{t\tau} x(t) y(\tau) x^{-1}(t) y^{-1}(\tau) = [a, b].$$

Поэтому $[H, H] \subset S$ и S — идеал в H , которому соответствует подгруппа $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{H}$; кроме того, $[H, H]$ соответствует подгруппа $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{H}$. Так как $H/[H, H]$ абелева, то абелева и $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$, и $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] \subset \mathfrak{K}$. С другой стороны, произведения $c_1(t_1, \tau_1), \dots, c_m(t_m, \tau_m)$ при переменных $t_1, \dots, t_m$ заполняют окрестность единицы в $\mathfrak{S}$ и в то же время принадлежат $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$, откуда $\mathfrak{S} \subset [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$. Таким образом,

$$[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] \subset \mathfrak{K} \subset \mathfrak{S} \subset [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}],$$

что и требовалось.

§ 1. Разрешимые группы

Основным методом исследования разрешимых групп является изучение их компактных подгрупп.

Т е о р е м а 1. *Каждая связная линейная разрешимая группа, рассматриваемая со своей внутренней топологией, разлагается в произведение односвязного нормального делителя и связной компактной подгруппы*.*

Доказательство основано на следующих леммах.

Л е м м а 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — множество матриц, у которых элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю, и $\mathfrak{N}$ — подмножество матриц с единицами по главной диагонали. Если $A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{N}$ и $AB = BA$, то в $\mathfrak{N}$ существует единственная матрица X , такая, что $X^2 = B$, и X коммутирует с A .*

Записав уравнения для элементов матрицы X и предполагая лемму справедливой для матриц низшего порядка, мы легко установим, что она справедлива и для матриц данного порядка.

Л е м м а 2. *Рассмотрим систему уравнений*

$$F_i(x_1, \dots, x_m; a_1, \dots, a_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (4)$$

* Здесь и в последующем рассматриваются только связные подгруппы, соответствующие лиевским подалгебрам (см. Введение).

где F_j — вещественные полиномы от x и a . Пусть вещественные точки M_j ($x_1^j, \dots, x_m^j; a_1^j, \dots, a_n^j$) ($j = 1, 2, \dots$) удовлетворяют системе (1) и их проекции ($a_1^j, \dots, a_n^j$) плотно расположены в шаре M вещественного пространства ($a_1, \dots, a_n$). Тогда существует такой шар $M^* \subset M$, что для любой системы ($a_1, \dots, a_n$), принадлежащей M^* , система (1) имеет вещественные решения относительно x .

Доказательство *. Рассмотрим построенный на M цилиндр с образующими, параллельными x -пространству. Внутри него лежит конечное число кусков полостей многообразия (1). Будем проектировать их на a -пространство.

Если размерность каждой из проекций меньше чем n , то они не могут плотно покрывать основание. Значит, размерность хотя бы одной из проекций равна n . Но это доказывает лемму.

Доказательство теоремы 1. Пусть R — разрешимая линейная алгебра Ли и $\mathfrak{K}$ — соответствующая линейная связная разрешимая группа, рассматриваемая с ее внутренней топологией. Приведем матрицы из $\mathfrak{K}$ к треугольному виду. Тогда матрицы коммутанта $K = [R, R]$ будут иметь на главной диагонали нули, а матрицы соответствующей группы $\mathfrak{K}$ — единицы. Так как группа всех треугольных матриц с единичными диагоналями и нильпотентна и односвязна, то каждая из ее подгрупп, соответствующая подалгебре ее алгебры Ли, будет замкнута и односвязна [10]. В частности, замкнута и односвязная группа $\mathfrak{K}$. Фактор-группа $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ связна и коммутативна. Если она односвязна, то односвязна и $\mathfrak{K}$ и теорема доказана. Пусть $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ не односвязна. Тогда она разлагается в прямое произведение однопараметрических компактных абелевых групп $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_s$ и абелевой векторной группы. Пусть эти однопараметрические группы определяются образами элементов $A_1, \dots, A_s$ алгебры R ; нормализуем A_i так, чтобы было $e^{A_i} \in \mathfrak{K}$. Тогда при любых рациональных значениях параметров $r_1, \dots, r_s$ элемент $A = r_1 A_1 + \dots + r_s A_s$ определяет в $\mathfrak{K}$ однопараметрическую подгруппу, образ которой в $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ компактен и замкнут. Подгруппа эта состоит из матриц e^{At} , и так как ее образ в $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ компактен и замкнут, то найдется такое значение $t \neq 0$ параметра t , что $e^{At_0} \in \mathfrak{K}$. Но каждый элемент из $\mathfrak{K}$ принадлежит некоторой однопараметрической подгруппе, значит существует такая матрица $C \in K$, что $e^{At_0} = e^{Ct_0}$. Матрицы $\exp \frac{1}{2^n} C t_0$ имеют единичные главные диагонали и по лемме 1 коммутируют со всеми e^{At} . Следовательно, A и C коммутируют и однопараметрическая группа $e^{(A-C)t}$ компактна. Значит матрицу $A - C$ можно привести к диагональной форме, причем диагональные элементы будут чисто мнимыми, а их отношения — рациональными. В терминах уравнений это значит, что система

$$X(r_1 A_1 + \dots + r_s A_s) = A^* X + X(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_t K_t), \quad (2)$$

$$\sum \lambda_i K_i \cdot \sum r_j A_j = \sum r_j A_j \cdot \sum \lambda_i K_i,$$

где A^* — диагональная матрица с теми же собственными значениями, что $\sum r_j A_j$, а $K_1, \dots, K_t$ — фиксированный базис алгебры K , имеет комплексные решения для элементов матрицы X и вещественные — для параметров $\lambda_1, \dots$

* В оригинале дано довольно сложное доказательство, нуждающееся к тому же в уточнениях. Здесь приводится более простое и короткое доказательство. — *Прим. ред.*

..., λ_i при любых рациональных значениях параметров $r_1, \dots, r_s$. Согласно лемме 2 система (2) имеет решения — комплексные для X и вещественные для λ — для всех значений r , заполняющих некоторый шар. Внутри этого шара можно выбрать вещественные значения r_i параметров r_i так, чтобы не существовало нетривиальных соотношений вида $\alpha_1 r_1 + \dots + \alpha_s r_s = 0$ с рациональными α . Пусть $\lambda_1^*, \dots, \lambda_t^*$ — соответствующие значения $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ из (2). Однопараметрическая группа e^{At} , $A = \sum r_i^* A_i - \sum \lambda_j^* K_j$ компактна, но не замкнута. Замыкание ее в $\mathfrak{N}$ есть компактная абелева подгруппа $\mathfrak{A}$, образ которой в $\mathfrak{N}/\mathfrak{K}$ совпадает со всей компактной подгруппой этой группы. Пусть $\mathfrak{N}/\mathfrak{K} = \mathfrak{N}_1/\mathfrak{K} \times \mathfrak{N}_2/\mathfrak{K}$, где $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{K}$ — компактная, а $\mathfrak{N}_2/\mathfrak{K}$ — векторная группа. Тогда $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}_2 = \{e\}$. Первое равенство очевидно, а второе следует из того, что ни $\mathfrak{N}_2/\mathfrak{K}$, ни $\mathfrak{K}$ не содержат компактных подгрупп.

Теорема 2. Если связная разрешимая группа $\mathfrak{G}$ допускает разложение вида $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N} = \{e\}$, где $\mathfrak{N}$ — односвязный нормальный делитель, а $\mathfrak{A}$ — связная компактная подгруппа, то каждая компактная (не обязательно замкнутая) подгруппа группы $\mathfrak{G}$ сопряжена с ее образом в $\mathfrak{A}$ посредством некоторого элемента из $\mathfrak{N}$.

Доказательство индукцией по размерности $\mathfrak{G}$. Для групп размерности 1 теорема очевидна. Пусть она доказана для всех групп размерности меньшей, чем размерность $\mathfrak{G}$. Предположим сначала, что $\mathfrak{N}$ содержит связный нормальный делитель $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{G}$, и рассмотрим фактор-группу $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} = \bar{\mathfrak{G}}$. Нужно доказать, что каждая компактная подгруппа $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ сопряжена с ее образом $\mathfrak{B}^*$ в $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\bar{\mathfrak{B}}$ и $\bar{\mathfrak{B}}^*$ соответственно образы подгрупп $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}^*$ при естественном гомоморфизме $\mathfrak{G} \rightarrow \bar{\mathfrak{G}}$. Так как $\bar{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{A}}\bar{\mathfrak{N}}$ и $\bar{\mathfrak{G}}$ меньшей размерности, чем $\mathfrak{G}$, то $x^{-1}\bar{\mathfrak{B}}^*x = \bar{\mathfrak{B}}$ ($x \in \bar{\mathfrak{G}}$), т. е. $\mathfrak{B} \subset x^{-1}\mathfrak{B}^*x \cdot \mathfrak{N}$. Таким образом, группа $\bar{\mathfrak{B}} = x^{-1}\mathfrak{B}^*x \cdot \mathfrak{N}$ имеет размерность меньшую, чем $\mathfrak{G}$, и содержит компактную подгруппу $\mathfrak{B}$, образ которой в компактном факторе $x^{-1}\mathfrak{B}^*x$ совпадает с самой этой подгруппой. Следовательно, существует такой элемент $y \in \bar{\mathfrak{B}}$, что $y^{-1}x^{-1}\mathfrak{B}^*xy = \mathfrak{B}$, что и требовалось.

Осталось рассмотреть случай, когда $\mathfrak{N}$ не содержит нормальных делителей группы $\mathfrak{G}$. Тогда $[R, R] = 0$ и $\mathfrak{N}$ — абелев нормальный делитель. Так как $\mathfrak{N}$ односвязен, то это — векторная группа. Внутренние автоморфизмы, порожденные в $\mathfrak{N}$ элементами из $\mathfrak{A}$, индуцируют в $\mathfrak{N}$ некоторые преобразования. Если представить групповую операцию в $\mathfrak{N}$ в аддитивной форме, то преобразования эти становятся линейными и мы получим линейное представление группы $\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{A}$ компактна, то вещественное пространство $\mathfrak{N}$ распадается в инвариантные подпространства размерностей 1 и 2. Но инвариантные подпространства в $\mathfrak{N}$ суть нормальные делители в $\mathfrak{G}$. Так как по предположению нормальных делителей группы $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{N}$ не содержится, то сама группа $\mathfrak{N}$ должна иметь размерность 1 или 2. В первом случае $\mathfrak{G}$ абелева и доказывать нечего. Второй случай нужно разобрать подробно. Сначала предположим, что $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ — одномерная группа. Конечные уравнения группы $\mathfrak{B}\mathfrak{N} = \alpha(t)\mathfrak{N}$ будут

$$\alpha(-t)(a, b)\alpha(t) = (a \cos \lambda \alpha(t) - b \sin \lambda \alpha(t), a \sin \lambda \alpha(t) + b \cos \lambda \alpha(t)) \quad (a, b) \in \mathfrak{N},$$

и нетрудно подсчитать, что каждая однопараметрическая подгруппа, не содержащаяся в $\mathfrak{N}$, сопряжена с $\alpha(t)$. Если размерность $\mathfrak{B}$ больше единицы, то мы

выбираем в $\mathfrak{B}$ незамкнутую однопараметрическую подгруппу $\alpha(t)$, замыкание которой совпадает со всей $\mathfrak{B}$. Как мы показали, $\alpha(t)$ сопряжена со своим образом в $\mathfrak{A}$. Следовательно, замыкание $\alpha(t)$ сопряжено с замыканием образа $\alpha(t)$, что и требовалось показать.

Т е о р е м а 3. *Все центральные элементы связной, разрешимой группы $\mathfrak{G}$ лежат в связной коммутативной подгруппе $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ — минимальные связные абелевы подгруппы, содержащие центр, то они сопряжены в $\mathfrak{G}$, а их образы в присоединенной группе компактны. Если образ в присоединенной группе связной подгруппы $\mathfrak{B}$ компактен, то $\mathfrak{B}$ содержится в одной из минимальных связных абелевых групп, содержащих центр. Однопараметрические подгруппы, проходящие через один и тот же центральный элемент $\mathfrak{G}$, сопряжены в $\mathfrak{G}^*$.*

Пусть группа $\mathfrak{G}$ односвязна. Пусть $\mathfrak{Z}$ — центр группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{Z}^*$ — связная компонента единицы в $\mathfrak{Z}$. Положим $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}^* = \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{Z}/\mathfrak{Z}^* = D$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z} \cong \mathfrak{G}_1/D = \bar{\mathfrak{G}}$. Группа $\mathfrak{G}_1$ односвязна (см. [4]), D дискретна и $\bar{\mathfrak{G}}$ — линейная группа, присоединенная к $\mathfrak{G}$. По теореме 1 $\bar{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{A}}\bar{\mathfrak{N}}$, где $\bar{\mathfrak{A}}$ компактна, $\bar{\mathfrak{N}}$ односвязна и $\bar{\mathfrak{A}} \cap \bar{\mathfrak{N}} = \{e\}$. Пусть $\mathfrak{A}$ — связная компонента единицы в полном обратном образе группы $\bar{\mathfrak{A}}$ в $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{N}$ — аналогичная подгруппа для $\bar{\mathfrak{N}}$. Группы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}$ односвязны и $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N} \subset D$. Но образ $\mathfrak{N}$ при гомоморфизме $\mathfrak{G}_1 \rightarrow \bar{\mathfrak{G}}$ односвязен [4], следовательно, $\mathfrak{N} \cap D = \{e\}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N} = \{e\}$. Так как $\mathfrak{N}$ — нормальный делитель в $\mathfrak{G}_1$, то $\mathfrak{A}\mathfrak{N}$ — группа, она связна и, следовательно, замкнута в $\mathfrak{G}_1$ и $\dim(\mathfrak{A}\mathfrak{N}) = \dim \mathfrak{G}_1$. Отсюда $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{N}$. Покажем теперь, что $D \subset \mathfrak{A}$. В самом деле, если $d \in D$, $d = ar$ ($a \in \mathfrak{A}$, $r \in \bar{\mathfrak{N}}$), то $\bar{a}\bar{r} = \bar{e}$, $\bar{a} = \bar{r}^{-1}$. Так как $\bar{\mathfrak{A}} \cap \bar{\mathfrak{N}} = \{e\}$, то $\bar{a} = \bar{r}^{-1} = e$, т. е. $a \in D$, $r \in D$ и $r = e$. Остается показать, что $\mathfrak{A}$ коммутативна. Это следует из того, что $\mathfrak{A}$ связна, а $\mathfrak{A}/D$ коммутативна. Обозначим через $\mathfrak{F}_0$ связную компоненту единицы в полном обратном образе группы $\bar{\mathfrak{A}}$ при гомоморфизме $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_1$. Группа $\mathfrak{F}_0$ содержит $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{F}_0/\mathfrak{Z}$ коммутативна, следовательно, $\mathfrak{F}_0$ нильпотентна. Известно, что центр связной нильпотентной группы связан. Следовательно, центр $\mathfrak{F}$ группы $\mathfrak{F}_0$ есть связная абелева подгруппа, содержащая $\mathfrak{Z}$, что и требовалось.

Теперь легко доказать второе утверждение теоремы, именно, что любые две минимальные абелевы связные подгруппы $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, содержащие центр, сопряжены в $\mathfrak{G}$. Действительно, это следует из того, что их образы $\bar{\mathfrak{F}}_1$ и $\bar{\mathfrak{F}}_2$ в $\bar{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ компактны и $\bar{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{F}}_1\bar{\mathfrak{N}} = \bar{\mathfrak{F}}_2\bar{\mathfrak{N}}$. Отсюда по теореме 2 $x^{-1}\bar{\mathfrak{F}}_1x = \bar{\mathfrak{F}}_2$, т. е. $x^{-1}\mathfrak{F}_1x \subset \mathfrak{F}_2\mathfrak{Z}$. Так как $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{F}_2$, то $x^{-1}\mathfrak{F}_1x = \mathfrak{F}_2$.

Наконец, пусть $u(t)$, $v(t)$ — однопараметрические подгруппы односвязной разрешимой группы $\mathfrak{G}$, причем $u(t_0) = v(t_0) \in \mathfrak{Z}$ ($t_0 \neq 0$). Как только-

* Теорема доказана в предположении односвязности рассматриваемой группы. Если $\mathfrak{G}$ связна и разрешима, то остаются справедливыми утверждения о нильпотентности и связности полного обратного образа группы $\mathfrak{A}$ и вывод: центр полного обратного образа группы $\mathfrak{A}$ есть связная абелева группа, содержащая центр группы $\mathfrak{G}$. Эту связную абелеву группу назовем мальцевской подгруппой группы $\mathfrak{G}$. Из ее существования следует и существование минимальных связных абелевых подгрупп, содержащих центр группы $\mathfrak{G}$ (мальцевских мини-подгрупп). Если $\mathfrak{G}$ односвязна, то каждая ее мальцевская подгруппа совпадает с содержащейся в ней мальцевской мини-подгруппой (иначе не был бы компактен образ мальцевской подгруппы в присоединенной группе $\mathfrak{G}$).

Доказательство третьего утверждения в оригинале отсутствует. Для доказательства достаточно взять в качестве $\mathfrak{A}$ подгруппу присоединенной группы, содержащую образ $\mathfrak{B}$. — *Прим. ред.*

что доказано, в $\mathfrak{G}$ существуют две такие связные абелевы подгруппы U, V , что $u(t) \subset U, v(t) \subset V, x^{-1}Ux = V (x \in \mathfrak{G})$. Пусть $x^{-1}u(t)x = w(t)$. Однопараметрические подгруппы $v(t), w(t)$ одной и той же односвязной абелевой группы V (см. [10]) имеют два общих элемента. Это возможно лишь тогда, когда они совпадают, т. е. $x^{-1}u(t)x = v(t)$.

Теорема 4. Пусть связная разрешимая группа $\mathfrak{G}$ имеет фундаментальную группу D . Тогда в $\mathfrak{G}$ существует связная компактная подгруппа $\mathfrak{H}$, фундаментальная группа которой изоморфна D . Каждая компактная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ содержится в одной из подгрупп, сопряженных с $\mathfrak{H}$.

Действительно, пусть $\tilde{\mathfrak{G}}$ — универсальная накрывающая для $\mathfrak{G}$ и $\tilde{\mathfrak{G}}/D = \mathfrak{G}$, где D — дискретный нормальный делитель группы $\tilde{\mathfrak{G}}$. Пусть, далее, $\tilde{\mathfrak{F}}$ — связная абелева подгруппа группы $\tilde{\mathfrak{G}}$, содержащая центр, и $\tilde{\mathfrak{F}}$ — ее образ в $\mathfrak{G}$. Тогда $\tilde{\mathfrak{F}}$ разлагается в прямое произведение компактной подгруппы $\tilde{\mathfrak{F}}$ и векторной группы $\tilde{\mathfrak{U}}$. D является фундаментальной группой группы $\tilde{\mathfrak{F}}$ и первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $\tilde{\mathfrak{F}}_1$ и $\tilde{\mathfrak{F}}_2$ — любые две максимальные компактные подгруппы в $\tilde{\mathfrak{G}}$. Так как образы их в присоединенной группе также компактны, то $\tilde{\mathfrak{F}}_1$ лежит в минимальной связной абелевой подгруппе $\mathfrak{A}_1$, содержащей центр $\mathfrak{G}$, а $\tilde{\mathfrak{F}}_2$ лежит в соответствующей подгруппе $\mathfrak{A}_2$. По теореме 3 $x^{-1}\mathfrak{A}_1x = \mathfrak{A}_2$. Но $\tilde{\mathfrak{F}}_1$ есть компактная часть $\mathfrak{A}_1$, т. е. определена в $\mathfrak{A}_1$ однозначно, откуда $x^{-1}\tilde{\mathfrak{F}}_1x = \tilde{\mathfrak{F}}_2$.

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{S}$ — связный замкнутый нормальный делитель разрешимой группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ — естественный гомоморфизм. Тогда каждая компактная подгруппа группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ лежит в образе компактной подгруппы группы $\mathfrak{G}$.

Не теряя общности, можно считать $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ компактной. Тогда существует группа $\mathfrak{G}^*$ со следующими свойствами:

1°. $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}^*/D$, где D — дискретный нормальный делитель в $\mathfrak{G}^*$;

2°. $\mathfrak{G}^*$ содержит связный нормальный делитель $\mathfrak{S}^*$, образ которого в $\mathfrak{G}$ совпадает с $\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}^* \cap D = 1$);

3°. $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{S}^*$ односвязна.

В силу теоремы 3 в $\mathfrak{G}^*$ существует минимальная связная абелева подгруппа $\mathfrak{A}^*$, содержащая D . Вследствие минимальности образ $\mathfrak{A}^*$ в $\mathfrak{G}$ — компактная абелева группа $\mathfrak{A}$. Мы утверждаем, что $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{A}^*\mathfrak{S}^*$. Действительно, $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{S}^*$ односвязна и $\mathfrak{A}^*\mathfrak{S}^*/\mathfrak{S}^*$ — ее связный нормальный делитель. Следовательно, $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{A}^*\mathfrak{S}^*$ односвязна. С другой стороны, $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{A}^*\mathfrak{S}^*$ есть факторгруппа компактной группы $\mathfrak{G}^*/D\mathfrak{S}^*$ и, следовательно, сама компактна. Будучи связной, разрешимой, односвязной и компактной одновременно, $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{A}^*\mathfrak{S}^*$ необходимо сводится лишь к единичному элементу, т. е. $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{A}^*\mathfrak{S}^*$, откуда $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{S}$, что и требовалось.

Теорема 6. Каждая связная разрешимая группа допускает представление вида

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{U}_1 \dots \mathfrak{U}_n\mathfrak{K},$$

где $\mathfrak{A}$ — компактная подгруппа, $\mathfrak{U}_i$ — одномерные векторные подгруппы, $\mathfrak{K}$ — компактная центральная подгруппа, $\mathfrak{U}_i\mathfrak{U}_{i+1} \dots \mathfrak{U}_n\mathfrak{K}$ ($i = 1, \dots, n$) — нормальные делители группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{U}_i \cap \mathfrak{U}_{i+1} \dots \mathfrak{U}_n\mathfrak{K} = \{e\}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 \dots \mathfrak{U}_n\mathfrak{K} = \{e\}$. В частности, топологическое пространство связной разрешимой группы гомеоморфно топологическому произведению прямых линий и окружностей.

Предварительно заметим, что пересечение центра $\mathfrak{Z}$ с замкнутым коммутантом* $\mathfrak{K}$ связной разрешимой группы $\mathfrak{G}$ связно. Затем, если $\mathfrak{A}$ — минимальная связная абелева группа, содержащая центр, то $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{K}$. Действительно, при соответствующем выборе базиса для $\mathfrak{K}$ все элементы из $\mathfrak{K}$ будут в присоединенной группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ изображаться треугольными матрицами с единичной диагональю. Следовательно, $\mathfrak{K}\mathfrak{Z}/\mathfrak{Z} \cong \mathfrak{K}/\mathfrak{K} \cap \mathfrak{Z}$ односвязна, а это означает, что $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{Z}$ связна, ибо связна $\mathfrak{K}$. С другой стороны, образ $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ компактен. Следовательно, образ $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{K}$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$, будучи односвязным и компактным, сводится к единичному элементу, т. е. $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{K} \subset \mathfrak{Z}$.

Перейдем к доказательству теоремы 6. Пусть $\mathfrak{K}$ — коммутант группы $\mathfrak{G}$. Абелева группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ разлагается в прямое произведение связной компактной группы $\mathfrak{B}/\mathfrak{K}$ и векторной группы $\mathfrak{C}/\mathfrak{K}$. По теореме 5 в $\mathfrak{G}$ существует компактная абелева группа $\mathfrak{A}$, которая содержит центр группы $\mathfrak{G}$ и образ которой в $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ покрывает группу $\mathfrak{B}/\mathfrak{K}$. Как было замечено выше, группа $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ связна. Поэтому $\mathfrak{A}$ разлагается в прямое произведение ее связной подгруппы $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{K}$. Пусть $\mathfrak{A}'_c$ — компактная часть группы $\mathfrak{A}'$. Очевидно, что образ $\mathfrak{A}'_c$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ совпадает с образом $\mathfrak{B}$. Значит, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_c \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'_c \cap \mathfrak{C} = \{e\}$.

Осталось разложить $\mathfrak{C}$. Фактор-группа $\mathfrak{C}/\mathfrak{K}$ односвязна и

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \dots \mathfrak{U}_n \mathfrak{K},$$

где $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_n$ — одномерные векторные группы. Коммутант $\mathfrak{K}$ — связная нильпотентная группа. Ее максимальная компактная подгруппа $\mathfrak{K}_c$ содержится в центре и $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_c$ односвязна. Отсюда $\mathfrak{K} = \mathfrak{U}_{i+1} \dots \mathfrak{U}_n \mathfrak{K}_c$, где $\mathfrak{U}_{i+1}, \dots, \mathfrak{U}_n$ — снова одномерные векторные группы. Сопоставляя эти разложения, получаем требуемое разложение группы $\mathfrak{G}$.

§ 2. Компактные подгруппы групп Ли

Изучение компактных подгрупп групп Ли можно разбить на три части: изучение компактных подгрупп в группах разрешимых, затем в полупростых и обобщение результатов на произвольные группы. Первая часть рассмотрена в § 1, основной результат дается теоремой 4. Компактные подгруппы полупростых групп изучены Картаном. Так как результаты Картана необходимы при рассмотрении общего случая, то удобно формулировать их здесь.

Все полупростые алгебры над полем комплексных чисел известны, поэтому их можно взять за исходный пункт для изучения вещественных полупростых алгебр и групп. Пусть L — вещественная полупростая алгебра с базисом $e_1, \dots, e_r$ и структурой $[e_j, e_k] = \sum_{\alpha} c_{jk\alpha}^{\alpha} e_{\alpha}$. Обозначим через L^* алгебру

с тем же базисом и той же структурой, но определенную над полем комплексных чисел. Алгебра L^* , как комплексная и полупростая, известна. Обратное, для получения таким методом вещественной алгебры из комплексной алгебры L^* достаточно выбрать в L^* такой базис, в котором структурные постоянные c_{jk}^{α} были бы вещественными, и затем формально рассмотреть вещественную алгебру с этими структурными постоянными. Вследствие произвола в выборе базиса обратный переход не однозначен и полученные таким путем из L^* вещественные алгебры $L_1, L_2, \dots$ могут быть не изоморфными. Они называются

* Замкнутый коммутант есть замыкание обычного (теоретико-группового) коммутанта.

вещественными формами алгебры L^* . Среди них существует одна и только одна такая алгебра L , что соответствующая односвязная группа Ли $\mathfrak{L}$ компактна. Таким образом, все такие алгебры известны. Картан указал процесс, которым можно получить из алгебры L все ее вещественные формы L_i . В то же время процесс этот дает ответ и на вопрос о компактных подгруппах вещественных групп.

Пусть L допускает инволютивный автоморфизм θ , т. е. автоморфизм, квадратом которого является тождественное преобразование. Так как θ — линейное преобразование пространства L , то в L существует такой базис $e_1, \dots, e_r$, что

$$\theta e_j = -e_j \quad (j = 1, 2, \dots, m); \quad \theta e_\alpha = e_\alpha \quad (\alpha = m+1, \dots, r).$$

Легко проверить, что структурные константы алгебры L^* в базисе

$$e'_j = ie_j, \quad e'_\alpha = e_\alpha \quad (j = 1, \dots, m; \alpha = m+1, \dots, r; i = \sqrt{-1})$$

будут вещественными и, таким образом, автоморфизм θ позволяет нам получать из алгебры L новую вещественную форму L_θ . Как показал Картан, все вещественные формы алгебры L^* можно получить указанным методом из компактной формы L .

Далее, рассмотрим комплексную присоединенную группу $\mathfrak{L}^*$ алгебры L^* . Каждая вещественная форма L_k содержится в L^* , и ее присоединенная группа $\mathfrak{L}_k$ является подгруппой в $\mathfrak{L}^*$. В частности, компактной форме L соответствует в $\mathfrak{L}^*$ компактная подгруппа $\mathfrak{L}$. Инволютивный автоморфизм θ алгебры L индуцирует в $\mathfrak{L}$ некоторый автоморфизм. Обозначим через $\mathfrak{K}_\theta$ совокупность элементов из $\mathfrak{L}$, которые инвариантны под действием автоморфизма θ . Очевидно, что $\mathfrak{K}_\theta$ — подгруппа в $\mathfrak{L}$ и ей соответствует подалгебра K_θ в алгебре L ; K_θ состоит из инвариантных элементов из L . Таким образом, K_θ — алгебра, натянутая элементами e_α ($\alpha = m+1, \dots, r$). Вещественная форма L_θ , полученная из L с помощью автоморфизма θ , содержит K_θ в качестве подалгебры. Следовательно, присоединенная группа $\mathfrak{L}_\theta$ алгебры L_θ содержит $\mathfrak{K}_\theta$ как компактную подгруппу. Картан показал, что каждая компактная подгруппа группы $\mathfrak{L}_\theta$ сопряжена одной из подгрупп $\mathfrak{K}_\theta$, т. е. $\mathfrak{K}_\theta$ — максимальная компактная подгруппа группы $\mathfrak{L}_\theta$, и все максимальные компактные подгруппы группы $\mathfrak{L}_\theta$ сопряжены между собой.

Принадлежащий Картану основной результат показывает, что каждый класс сопряженных компактных подгрупп полупростой группы $\mathfrak{L}_\theta$ имеет представителей в заданной компактной подгруппе $\mathfrak{K}_\theta$. Если эти представители сопряжены в $\mathfrak{K}_\theta$, то задача определения классов сопряженных компактных подгрупп в $\mathfrak{L}_\theta$ оказывается эквивалентной задаче определения таких классов в $\mathfrak{K}_\theta$. Чтобы доказать сопряженность этих представителей, нам потребуется еще третий результат Картана. Именно, Картан показал, что каждый элемент группы $\mathfrak{L}_\theta$ допускает единственное представление в виде mk , где $m^0 = m^{-1}$, $k^0 = k$ и совокупность элементов m гомеоморфна евклидову пространству. Отсюда требуемый результат следует непосредственно. На самом деле, если $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ — две подгруппы, сопряженные в $\mathfrak{L}_\theta$, $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \subset \mathfrak{K}_\theta$, то

$$k^{-1}m^{-1}\mathfrak{P}_1mk = \mathfrak{P}_2.$$

Обозначая через p_1 произвольный элемент из $\mathfrak{P}_1$, имеем

$$k^{-1}m^{-1}p_1mk = p_2, \quad p_1mp_1^{-1}p_1k = mkp_2.$$

Так как $(p_1 m p_1^{-1})^0 = (p_1 m p_1^{-1})^{-1}$, то $p_1 m p_1^{-1} = m$, $p_1 k = k p_2$, откуда $k^{-1} \mathfrak{P}_1 k = \mathfrak{P}_2$, что и требовалось.

Таким образом, мы видим, что изучение компактных подгрупп полупростых групп сводится к определению подгрупп компактных групп. С помощью того же метода Картана легко установить, что проблема эквивалентна следующей: определить комплексные полупростые подалгебры комплексных полупростых алгебр Ли. Действительно, пусть L^* — комплексная полупростая алгебра, L — ее компактная вещественная форма, $\mathfrak{L}^*$, $\mathfrak{L}$ — соответствующие присоединенные группы. Комплексную группу $\mathfrak{L}^*$ можно рассматривать как вещественную группу Ли с $2r$ параметрами, максимальной компактной подгруппой которой является вещественная группа $\mathfrak{L}$. Действительно, вещественная алгебра L^{**} комплексной группы $\mathfrak{L}^*$ получается, если за ее базис выбрать элементы $e'_j = i e_j$ ($j = 1, \dots, r$), $e'_{j+r} = e_j$ ($i = \sqrt{-1}$). Соответствие $\theta e'_j = -e'_j$, $\theta e'_{j+r} = e'_{j+r}$ определяет инволютивный автоморфизм алгебры L^{**} и картановская форма L_0^{**} компактна, если компактна L с базисом e_i . Таким образом, L^{**} получается из компактной формы L_0^{**} с помощью инволютивного автоморфизма θ и L — инвариантная часть в L_0^{**} . Следовательно, L соответствует максимальной компактной подгруппе группы $\mathfrak{L}^{**}$.

Теперь становится очевидной связь между комплексными полупростыми подалгебрами алгебры L^* и вещественными полупростыми подалгебрами алгебры L . Пусть M^* — комплексная полупростая подалгебра алгебры L^* и $\mathfrak{M}^*$ — соответствующая комплексная подгруппа присоединенной группы $\mathfrak{L}^*$. Максимальная компактная подгруппа $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^*$ сопряжена одной из подгрупп вещественной группы $\mathfrak{L}$. Как показано выше, если сопряжены комплексные подгруппы $\mathfrak{M}_1^*$, $\mathfrak{M}_2^*$, то сопряжены и их максимальные компактные подгруппы и их представители в группе $\mathfrak{L}$. Обратное очевидно. Наконец, произвольную компактную группу можно локально разложить в прямое произведение абелевой и полупростой групп и проблема приводится к случаю полупростой группы.

Мы видим, таким образом, что проблема определения компактных подгрупп, по крайней мере в группах разрешимых и полупростых, состоит из двух частей: а) определение максимальных компактных подгрупп и б) определение подгрупп этих компактных групп. Первую проблему для обоих типов групп можно считать решенной, вторая приводится к задаче из теории комплексных полупростых алгебр Ли. Следующая теорема показывает, что то же самое справедливо для общего случая.

Т е о р е м а 7. *Все максимальные связные компактные подгруппы группы Ли $\mathfrak{G}$ сопряжены между собой. Если $\mathfrak{F}$ — максимальная связная компактная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — подгруппы группы $\mathfrak{F}$, сопряженные в $\mathfrak{G}$, то они сопряжены и в $\mathfrak{F}$.*

Сначала докажем теорему для случая, когда $\mathfrak{G}$ — связная линейная группа. В силу теоремы Леви алгебра G группы $\mathfrak{G}$ разлагается в полупрямую сумму радикала R и полупростой подалгебры L . Соответствующие подгруппы в $\mathfrak{G}$ обозначим через $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{L}$. Тогда $\mathfrak{G} = \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{R}^*$. Сначала покажем, что для каждой максимальной компактной подгруппы $\mathfrak{X}$ группы $\mathfrak{L}$ существует максимальная компактная подгруппа $\mathfrak{S}$ группы $\mathfrak{R}$, элементы которой коммутируют с элементами $\mathfrak{X}$.

* Так как $\mathfrak{L}$ линейна, то она замкнута в $\mathfrak{G}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — максимальная абелева подгруппа группы $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{K}$ — коммутант группы $\mathfrak{X}$. Подгруппа $\mathfrak{K}$ — односвязная замкнутая подгруппа группы $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}/\mathfrak{K}$ абелева и ее компактная часть $\mathfrak{S}/\mathfrak{K}$ является характеристической подгруппой этой фактор-группы. Следовательно, $\mathfrak{S}$ характеристична в $\mathfrak{X}$ и система $\mathfrak{A}\mathfrak{S}$ — группа. Фактор-группа $\mathfrak{A}\mathfrak{S}/\mathfrak{K}$ компактна, так как $\mathfrak{K}$ односвязна. Отсюда по теореме 5

$$\mathfrak{A}\mathfrak{S} = \mathfrak{Z}\mathfrak{K} \quad (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{K} = \{e\}),$$

где $\mathfrak{Z}$ — произвольная максимальная компактная подгруппа группы $\mathfrak{A}\mathfrak{S}$. Выберем $\mathfrak{Z}$ так, чтобы $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{Z}$. По теореме 4 в $\mathfrak{Z}$ существует подгруппа $\mathfrak{B}$, сопряженная с максимальной компактной подгруппой группы $\mathfrak{S}$. Но $\mathfrak{S}$ — нормальный делитель в $\mathfrak{A}\mathfrak{S}$ и поэтому $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}\mathfrak{K}$, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{K} = \{e\}$. Подгруппа $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{X}$ — максимальная компактная и поэлементно коммутирует с $\mathfrak{A}$. Заменим $\mathfrak{B}$ другой компактной подгруппой в $\mathfrak{X}$, коммутирующей с $\mathfrak{A}$.

Алгебра S группы $\mathfrak{S}$ есть полупрямая сумма $B + K$ алгебр групп $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{K}$. Внутренние автоморфизмы группы $\mathfrak{S}$, порожденные элементами из $\mathfrak{X}$, индуцируют в S линейные преобразования. Так получается естественное линейное представление группы $\mathfrak{X}$ в пространстве S . Подпространство K инвариантно, так как соответствует нормальному делителю $\mathfrak{K}$. Так как $\mathfrak{K}$ компактна, то S содержит дополнительное инвариантное подпространство M , $S = K + M$, $M \equiv B \pmod{K}$. Группа $\mathfrak{A}$ индуцирует в M единичное представление, ибо из

$$m = b + k \quad (m \in M, b \in B, k \in K)$$

следует

$$m^\alpha = b^\alpha + k^\alpha = b + k^\alpha, \quad k^\alpha - k \in K, \quad m^\alpha - m \in K,$$

$$m^\alpha = m \quad (\alpha \in \mathfrak{A}).$$

Как известно из «структурных теорем» теории компактных групп, представление компактной группы полностью определяется представлением ее максимальной абелевой подгруппы. В нашем случае этой подгруппой является группа $\mathfrak{A}$ и ее представление в M — единичное. Следовательно, и представление всей группы $\mathfrak{X}$ в M единичное, т. е. принадлежащие $\mathfrak{X}$ автоморфизмы оставляют инвариантными все элементы пространства M . Пусть H — подалгебра в S , порожденная элементами из M , и $\mathfrak{H}$ — соответствующая подгруппа в $\mathfrak{S}$. Если $\mathfrak{H}$ не замкнута, ее можно заменить ее замыканием. Все элементы из $\mathfrak{H}$ коммутируют с $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}\mathfrak{K} = \mathfrak{S}$. Обозначим через $\mathfrak{N}$ связную компоненту единицы в подгруппе тех элементов из $\mathfrak{S}$, которые коммутируют с $\mathfrak{X}$ поэлементно. Так как $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{S} = \mathfrak{N}\mathfrak{K}$. Докажем, что $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}$ связна. Пусть $n_0 \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}$ и $n(t)$ — такая однопараметрическая подгруппа нильпотентной группы $\mathfrak{K}$, что $n(0) = e$, $n(t_0) = n_0$.

Взяв произвольный элемент $x \in \mathfrak{X}$, соединим его с единицей группы $\mathfrak{X}$ однопараметрической подгруппой $x(t)$. Так как $x(t)\mathfrak{K}$ — разрешимая матричная группа и x коммутирует с $n(t_0)$, то по лемме 1 вся группа $n(t)$ коммутирует с x . Значит, вместе с элементом n_0 , $\mathfrak{N}$ содержит однопараметрическую подгруппу $n(t)$, соединяющую n_0 с единичным элементом, и, таким образом, $\mathfrak{N}$ связна.

В силу теорем об изоморфизме

$$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{S}/\mathfrak{K} \cong \mathfrak{N}/\mathfrak{K} \cap \mathfrak{N},$$

а это значит, что фактор-группа группы $\mathfrak{N}$ по ее связному нормальному делителю компактна. По теореме 5 в $\mathfrak{N}$ существует компактная подгруппа $\mathfrak{C}$, образ которой в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ совпадает с образом $\mathfrak{B}$. Размерность $\mathfrak{C}$ равна размерности $\mathfrak{B}$, так что $\mathfrak{C}$ и является требуемой максимальной компактной подгруппой группы $\mathfrak{N}$, коммутирующей с $\mathfrak{X}$ поэлементно.

Произведение $\mathfrak{X}\mathfrak{C}$ является компактной подгруппой в $\mathfrak{G}$.

Покажем, что любая другая компактная подгруппа $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ содержится в одной из подгрупп, сопряженных с $\mathfrak{X}\mathfrak{C}$. Действительно, $\mathfrak{G} = \mathfrak{L}\mathfrak{N}$, образ $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{L}$ компактен и содержится в максимальной компактной подгруппе $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{L}$, $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{X}\mathfrak{N}$. Компактные группы $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ разлагаются в произведения $\mathfrak{X} = \mathfrak{P}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{Q}\mathfrak{B}$, где $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ — полупростые, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — абелевы группы. Группа $\mathfrak{P}$ — максимальная полупростая подгруппа в $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$, следовательно (см. [12]), $s^{-1}\mathfrak{Q}s \subset \mathfrak{P}$, $s \in \mathfrak{X}\mathfrak{N}$, и можно считать, что $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$. Разложение Леви для группы $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ будет $\mathfrak{P} \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{N})$. Обозначим через $\mathfrak{B}^*$ образ группы $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{P}$, и пусть символ $(\mathfrak{A})^{\mathfrak{B}}$ обозначает совокупность элементов из $\mathfrak{A}$, коммутирующих с $\mathfrak{B}$, в то время как символ $\mathfrak{A}_c$ пусть обозначает произвольную максимальную компактную подгруппу в $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{Q}\mathfrak{B}^* \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{N})$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}^* \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{N})$ и потому $\mathfrak{B} \subset (\mathfrak{B}^* \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{N}))^{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{B}^* \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{N})^{\mathfrak{Q}}$. Группа $\mathfrak{B}^* \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{N})^{\mathfrak{Q}}$ разрешима, следовательно, $\mathfrak{B}^* \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{N})_c^{\mathfrak{Q}\mathfrak{B}^*}$ — одна из ее максимальных компактных подгрупп. Отсюда по теореме 4

$$\mathfrak{B} \subset t^{-1}\mathfrak{B}^* \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{N})_c^{\mathfrak{Q}\mathfrak{B}^*} t, \quad t \in \mathfrak{B}^* \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{N})^{\mathfrak{Q}}.$$

Как мы видели выше, $(\mathfrak{A}\mathfrak{N})_c^{\mathfrak{B}}$ — максимальная компактная подгруппа в $\mathfrak{A}\mathfrak{N}$ и, следовательно, в $(\mathfrak{A}\mathfrak{N})^{\mathfrak{Q}\mathfrak{B}^*}$. Отсюда

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{N})_c^{\mathfrak{Q}} = u^{-1}(\mathfrak{A}\mathfrak{N})_c^{\mathfrak{B}} u, \quad u \in (\mathfrak{A}\mathfrak{N})^{\mathfrak{Q}}.$$

Значит,

$$\mathfrak{B} \subset t^{-1}\mathfrak{B}^* u^{-1}(\mathfrak{A}\mathfrak{N})_c^{\mathfrak{B}} ut = (ut)^{-1}\mathfrak{B}^* (\mathfrak{A}\mathfrak{N})_c^{\mathfrak{B}} ut \subset (ut)^{-1}\mathfrak{P}(\mathfrak{A}\mathfrak{N})_c^{\mathfrak{B}} ut,$$

т. е.

$$\mathfrak{F} \subset (ut)^{-1}\mathfrak{P}(\mathfrak{A}\mathfrak{N})_c^{\mathfrak{B}}(ut).$$

Аналогично,

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{N})_c^{\mathfrak{B}} = v^{-1}\mathfrak{A}(\mathfrak{N})_c^{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} v, \quad v \in \mathfrak{A}(\mathfrak{N})^{\mathfrak{B}},$$

$$\mathfrak{F} \subset (vut)^{-1}\mathfrak{P}\mathfrak{A}(\mathfrak{N})_c^{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} vut = (vut)^{-1}\mathfrak{X}\mathfrak{C}(vut).$$

Мы доказали, что максимальные компактные подгруппы линейных групп сопряжены. Осталось распространить этот результат на произвольные группы Ли. Пусть $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — максимальные связные компактные подгруппы группы $\mathfrak{G}$ и пусть $\mathfrak{G}$ — присоединенная группа для $\mathfrak{G}$. Гомоморфное отображение $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$ переводит $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ в компактные подгруппы $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ линейной группы $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{F}$ — максимальная компактная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{H}_2$. Согласно доказанному выше $t^{-1}\mathfrak{H}_1 t \subset \mathfrak{F}$, $t \in \mathfrak{G}$. Рассмотрим полный обратный образ $\mathfrak{F}$ группы $\mathfrak{F}$ в группе $\mathfrak{G}$. Для алгебры Ли группы $\mathfrak{F}$ мы имеем разложение Леви

$$F = P + (A + Z) = P + B, \quad B = A + Z,$$

где P — полупростая компактная алгебра, A — абелева и Z — центр алгебры G . Следовательно, группа $\tilde{G}$ имеет вид $\mathfrak{P} \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{P}$ компактна и полупроста, $\mathfrak{B}$ абелева и $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{P}$ коммутируют. Группы $\mathfrak{H}_2$ и $t^{-1}\mathfrak{H}_1 t$ содержатся в $\tilde{G}$ и являются в $\tilde{G}$ максимальными компактными подгруппами. Однако $\tilde{G}$ содержит единственную максимальную компактную подгруппу, именно $\mathfrak{P}\mathfrak{B}_c$. Следовательно, $\mathfrak{H}_2 = t^{-1}\mathfrak{H}_1 t$, что и требовалось.

Наконец, последнее утверждение теоремы 7, что подгруппы максимальной компактной группы сопряжены, легко получается из аналогичного утверждения для компактных подгрупп полупростой группы, доказанного выше, и из соответствующей теоремы для разрешимых групп.

Т е о р е м а 8. *Все минимальные связные подгруппы группы Ли $\mathfrak{G}$, содержащие центр, абелевы, и если $\mathfrak{G}$ односвязна, то они взаимно сопряжены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tilde{\mathfrak{G}}$ — универсальная накрывающая группа для группы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$ — дискретный нормальный делитель группы $\tilde{\mathfrak{G}}$ и $\mathfrak{G} \cong \tilde{\mathfrak{G}}/\mathfrak{N}$. Очевидно, что центр $\tilde{\mathfrak{G}}$ — полный обратный образ центра $\mathfrak{G}$. По теореме Леви, $\tilde{\mathfrak{G}} = \tilde{\mathfrak{L}}\mathfrak{N}$. Образ центра группы $\tilde{\mathfrak{G}}$ в $\tilde{\mathfrak{L}}$ лежит в центре $\tilde{\mathfrak{L}}$. Но, согласно теореме Картана, центр группы $\tilde{\mathfrak{L}}$ содержится в прямом произведении полупростой компактной группы $\mathfrak{P}$ и векторной группы $\mathfrak{A}$. Значит, центр группы $\tilde{\mathfrak{G}}$ лежит в подгруппе $\mathfrak{Z} = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{N}$. Пусть $\mathfrak{Z}$ — центр группы $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{Z}^*$ — связная компонента единицы в $\mathfrak{Z}$. Положим $\mathfrak{Z}/\mathfrak{Z}^* = \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{P}_1\mathfrak{N}_1$, $D = \mathfrak{Z}/\mathfrak{Z}^*$, $D_1 = D \cap \mathfrak{N}_1$, где $\mathfrak{P}$ — компактная полупростая, а $\mathfrak{N}_1$ — связная разрешимая группа. Так как $\mathfrak{P}_1$ конечна, то конечен индекс группы D_1 в D . Рассмотрим фактор-группу $\mathfrak{H}_1/D_1 = \mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{N}_1/D_1$. Группа $\mathfrak{N}_1/D_1$ содержит такую компактную абелеву подгруппу $\mathfrak{B}_1$, что ее связный обратный образ $\mathfrak{B}_1$ в группе $\mathfrak{N}_1$ содержит D_1 . Согласно доказанному выше группу $\mathfrak{B}_1$ можно выбрать поэлементно коммутирующей с $\mathfrak{P}_1$. Группа $\mathfrak{H}_1/D_1$ — присоединенная, значит, линейная и потому представима в виде

$$\mathfrak{H}_1/D_1 = (\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{B}_1) \mathfrak{K}_1,$$

где $\mathfrak{K}_1$ — связная, односвязная разрешимая группа.

Группа D/D_1 — центральная конечная подгруппа группы $\mathfrak{H}_1/D_1$ и поэтому содержится в $\mathfrak{P}\mathfrak{B}_1^*$. Так как элементы $\mathfrak{B}_1$ коммутируют с элементами $\mathfrak{P}_1$, то и связный обратный образ $\mathfrak{B}_1$ также поэлементно коммутативен с $\mathfrak{P}_1$. Группа $\mathfrak{P}_1\mathfrak{B}_1$ содержит D и связна. Ее обратный образ в $\mathfrak{Z}$ — связная группа $\mathfrak{P}\mathfrak{B}_2$. Так как в $\mathfrak{P}\mathfrak{B}_2$ существует дискретный нормальный делитель D^* , причем $\mathfrak{P}\mathfrak{B}_2/D^*$ компактна, то $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{B}_2$ поэлементно коммутативны. Таким образом, центр группы $\mathfrak{G}$ лежит в связной подгруппе, которая является прямым произведением компактной полупростой подгруппы и векторной подгруппы: $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{P}\mathfrak{B}_2$. Образ $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{P}$ конечен и лежит в связной абелевой подгруппе $\mathfrak{A}_2$. Следовательно, $\mathfrak{Z}$ содержится в связной абелевой группе $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ и минимальная подгруппа группы $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$, содержащая $\mathfrak{Z}$, определена единственным образом. Все группы, с которыми мы имели дело в этом доказатель-

* Пусть $\mathfrak{G} = \Omega\mathfrak{G}$, где Ω компактна, а $\mathfrak{G}$ односвязна и разрешима. Все центральные элементы конечного порядка группы $\mathfrak{G}$ принадлежат группе Ω . Действительно, если $a = q_0 s_0$ — центральный элемент конечного порядка, то q_0 принадлежит центру Ω и в Ω замкнутая однопараметрическая подгруппа $q(t)$ проходит через q_0 . Рассмотрим группу $q(t)\mathfrak{G}$. Так как $a \in q(t)\mathfrak{G}$, то существует однопараметрическая группа $v(t)$, проходящая через a , $v(t_0) = a$, компактная, если конечен порядок a . По теореме 2 имеем $q(t) = x^{-1}v(t)x$, $a = v(t_0) \in q(t)$, что и требовалось доказать.

стве, определены с точностью до внутренних автоморфизмов. Следовательно, результирующая подгруппа определена с точностью до сопряженности в $\mathfrak{G}$,

В последующем нам понадобятся подгруппы, содержащие «почти весь центр», т. е. центральные подгруппы, индексы которых в центре конечны.

Т е о р е м а 9. *В каждой связной группе Ли $\mathfrak{G}$ существуют связные абелевы подгруппы, содержащие почти весь центр группы $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{G}$ односвязна, то все минимальные подгруппы с этим свойством сопряжены в $\mathfrak{G}$ и их образы в присоединенной группе компактны.*

Сначала проведем доказательство для односвязных групп. Группа $\mathfrak{G}$ есть полупрямое произведение $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}\mathfrak{M}$ и ее центр $\mathfrak{Z}$ содержится в $\mathfrak{M}\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — компактная полупростая, а $\mathfrak{M}$ — векторная подгруппа группы $\mathfrak{Z}$. Группа $\mathfrak{M}\mathfrak{M}$ определена с точностью до внутренних автоморфизмов. Как видно из разложения $\mathfrak{M} \cdot (\mathfrak{M}\mathfrak{M})$, индекс $[\mathfrak{Z} : (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{M}\mathfrak{M})]$ конечен. Таким образом, почти весь центр $\mathfrak{Z}$ содержится в центре $\mathfrak{M}\mathfrak{M}$. Группа $\mathfrak{M}\mathfrak{M}$ разрешима, и ее центр лежит в минимальной связной абелевой подгруппе $\mathfrak{B}$, определенной также с точностью до сопряженности в $\mathfrak{G}$. Наконец, в $\mathfrak{B}$ существует единственная связная минимальная подгруппа $\mathfrak{C}$, содержащая $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{M}\mathfrak{M}$. Легко видеть, что $\mathfrak{C}$ не изменится, если взять вместо $\mathfrak{Z}_1$ любую подгруппу центра с конечным индексом. Образ $\mathfrak{C}$ в присоединенной группе группы $\mathfrak{G}$ компактен, иначе группу $\mathfrak{C}$ можно было бы разбить на два фактора, один из которых содержал бы всю $\mathfrak{Z}_1$.

Переход от универсальной накрывающей к произвольной форме группы очевиден. Действительно, $\mathfrak{G} \cong \tilde{\mathfrak{G}}/D$, где $\tilde{\mathfrak{G}}$ — универсальная накрывающая, а D — дискретный нормальный делитель. Центр $\mathfrak{Z}$ группы $\mathfrak{G}$ есть $\tilde{\mathfrak{Z}}/D$. Так как $\tilde{\mathfrak{Z}} \subset \mathfrak{M}\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{M}\mathfrak{M}/D \cong \mathfrak{M}\mathfrak{M}_1/\bar{D}$, где $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}/D_1$, $D_1 = D \cap \mathfrak{M}$, $\bar{D} = D/D_1$. Пусть $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{M}_1$ — образы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$ в гомоморфизме $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}\mathfrak{M}_1/\bar{D}$. Группа $\mathfrak{P}$ связна и $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1/\bar{D} = \mathfrak{P}\mathfrak{M}_1$. Индекс $[\mathfrak{Z} : (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{M}_1)]$ конечен. Действительно, если $z \in \mathfrak{Z}$, $z = pr$, $p \in \mathfrak{P}$, $r \in \mathfrak{M}_1$, то p принадлежит центру группы $\mathfrak{P}$, потому что из $pr \cdot x = x \cdot pr$ следует $px \cdot r^x = xp \cdot r$, $x^{-1}px = pr(r^{-1})^x$, где $r(r^{-1})^x \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{M}_1$. Это означает, что $\mathfrak{P}$ содержит лишь конечное число элементов, сопряженных с p . Но так как $\mathfrak{P}$ связна, то отсюда следует, что p — центральный элемент в $\mathfrak{P}$. Таким образом, любой элемент из $\mathfrak{Z}$ представляется в виде pr , где p пробегает конечную систему элементов. Значит, $\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{M}$ конечного индекса в $\mathfrak{M}$ и, повторяя рассуждения, мы приходим к требуемому результату.

Т е о р е м а 10. *Если $\mathfrak{M}$ — связный нормальный делитель группы Ли $\mathfrak{G}$ и если $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ компактна, то $\mathfrak{G} = \tilde{\mathfrak{Z}}\mathfrak{M}$, где $\tilde{\mathfrak{Z}}$ — компактная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, притом такая, что $\tilde{\mathfrak{Z}} \cap \mathfrak{M}$ дискретна.*

Пусть $\mathfrak{H}$ — максимальная связная компактная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} = \mathfrak{L}/\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{M}/\mathfrak{M}$ — разложение компактной группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ в прямое произведение абелевой группы $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}$ и связной полупростой группы $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$. Рассмотрим произведение $\mathfrak{H}\mathfrak{L}$. Так как $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ абелева, то $\mathfrak{H}\mathfrak{L}$ — нормальный делитель в $\mathfrak{G}$. Обозначим через $\mathfrak{Q}$ связный нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$, такой что $\mathfrak{Q} \supset \mathfrak{H}\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}$ одномерна и компактна. Универсальная накрывающая $\tilde{\mathfrak{G}}$ разлагается в полупрямое произведение однопараметрической векторной группы $x(t)$ и нормального делителя $\bar{\mathfrak{Q}}$. Так как фундаментальные группы групп $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{G}$ совпадают, то центр $\tilde{\mathfrak{G}}$ лежит в $\bar{\mathfrak{Q}}$. Но из компактности $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}$ следует, что $x(t_0) \cdot r \in \bar{\mathfrak{Q}}$, где $t_0 \neq 0$ и r — центральный элемент

группы $\mathfrak{G}$. Таким образом, $x(t_0) \in \bar{\Omega}$ в противоречии со свойствами полу-прямого произведения.

Возвращаясь к первоначальной проблеме, мы видим, что образ любой максимальной компактной подгруппы $\mathfrak{H}$ в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ покрывает фактор $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$. С другой стороны, по теореме Леви, в $\mathfrak{G}$ существует подгруппа $\mathfrak{P}$, образ которой в $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ совпадает с $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$. Группа $\mathfrak{P}$ полупроста и, следовательно, компактна. Выберем $\mathfrak{H}$ по условию $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{H}$. Тогда образ $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ совпадает с $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}$. Пересечение $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{F}_1$ — нормальный делитель в $\mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{H}$ разлагается в прямое произведение двух компактных факторов $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{F}_1$. Разложение $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}$ искомое.

Из полученного результата вытекает следующая общая

Т е о р е м а 11. *Топологическое пространство связной группы Ли гомеоморфно топологическому произведению пространства ее максимальной компактной подгруппы на евклидово пространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{L}\mathfrak{N}$ — разложение Леви группы $\mathfrak{G}$. Группа $\mathfrak{L}$ полупроста и, согласно Картану [6], имеет место разложение $\mathfrak{L} = U\mathfrak{C}$, где U — подмножество в $\mathfrak{L}$, гомеоморфное евклидову пространству, а $\mathfrak{C}$ — компактная подгруппа; центр группы $\mathfrak{L}$ содержится в $\mathfrak{C}$, и $U \cap \mathfrak{C} = \{e\}$. Так как $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N}$ лежит в центре $\mathfrak{L}$, то $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{N}$, $\mathfrak{G} = U \cdot \mathfrak{C}\mathfrak{N}$. Остается рассмотреть группу $\mathfrak{C}\mathfrak{N}$. Для $\mathfrak{N}$ возьмем разложение теоремы 6, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ поэлементно коммутативны. Тогда

$$\mathfrak{C}\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{C}\mathfrak{A}(\mathfrak{U}_1 \dots \mathfrak{U}_n)\mathfrak{K} = \mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{U}(\mathfrak{U}_1^{\mathfrak{C}} \dots \mathfrak{U}_n)$$

будет требуемым разложением, ибо множество $(\mathfrak{U}_1 \dots \mathfrak{U}_n)$ гомеоморфно евклидову пространству и

$$\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{K} \cap \mathfrak{U}_1 \dots \mathfrak{U}_n = \{e\}^*.$$

§ 3. Локально изоморфные группы

Рассмотрим связную, односвязную группу Ли $\tilde{\mathfrak{G}}$ с данной инфинитезимальной алгеброй G . Согласно Шрейеру [15], любая другая связная группа с алгеброй G получается из $\tilde{\mathfrak{G}}$ как фактор-группа по дискретному центральному нормальному делителю. Следовательно, с теоретико-групповой точки зрения все группы $\mathfrak{G}$ определены, если задан центр группы $\tilde{\mathfrak{G}}$, а последний, как и вся группа $\tilde{\mathfrak{G}}$, однозначно определяется алгеброй G . Возникает вопрос, какими элементами алгебры G определяется центр группы $\tilde{\mathfrak{G}}$ и его положение в $\tilde{\mathfrak{G}}$? Ниже на этот вопрос дается ответ в предположении, что две связные локально изоморфные группы рассматривают как эквивалентные, если они являются конечнолистными накрытиями одной и той же третьей группы.

Пусть $\mathfrak{A}$ — минимальная связная коммутативная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, содержащая почти весь центр $\mathfrak{G}$, т. е. такая, что $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{Z}$ имеет в $\mathfrak{Z}$ конечный индекс. Группа $\mathfrak{A}$ и соответствующая алгебра A определены с точностью до внутренних автоморфизмов единственным образом. Для краткости назовем характеристическими группу $\mathfrak{A}$ и ее алгебру. Образ $\mathfrak{A}$ в регулярном представлении группы $\mathfrak{G}$ компактен и разлагается в прямое произведение одномерных компактных замкнутых подгрупп. Предположим, что компакт-

* $D = \mathfrak{C}\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}_1 \dots \mathfrak{U}_n \mathfrak{K}$ дискретна и, значит, конечна. Пусть $d \in D$. Фактор-группа $\mathfrak{U}_1 \dots \mathfrak{U}_n \mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ односвязна и разрешима и потому элементов конечного порядка не содержит. Образ d в этой фактор-группе — единица, поэтому $D \subset \mathfrak{K}$.

ные замкнутые одномерные подгруппы в регулярном представлении группы $\mathfrak{G}$ соотнесены элементам $a_1, \dots, a_s$ алгебры Ли A . Эти элементы нормализуем по условию $e^{\|\alpha_{i\lambda}\| \cdot r_i} = 1$, где $\|a_i\|$ — матрица элемента a_i в регулярном представлении G и r_i — рациональные числа. Максимальная система линейно независимых элементов с этими свойствами задает специальный базис алгебры вычетов A/Z (Z — центр алгебры G), который назовем характеристическим базисом для A/Z . Легко видеть, что базис $b_1, \dots, b_s$ алгебры A/Z ($b_i \in A$) является характеристическим тогда и только тогда, когда

$$b_i \equiv \sum_{\lambda} \alpha_{i\lambda} a_{\lambda} \pmod{Z}, \quad \det \|\alpha_{ik}\| \neq 0,$$

где $\alpha_{i\lambda}$ — рациональные числа.

Характеристическая алгебра A является модулем над полем вещественных чисел. Согласимся называть рациональным подмодулем модуля A любое множество элементов вида $r_1 u_1 + r_2 u_2 + \dots + r_k u_k$, где $u_1, u_2, \dots, u_k$ — элементы модуля A , линейно независимые над полем вещественных чисел, а r_i пробегает все рациональные значения. Рациональный подмодуль модуля A назовем характеристическим, если его образ в A/Z содержится в рациональном модуле алгебры A/Z , натянутом элементами характеристического базиса $a_1, a_2, \dots, a_s$. Очевидно, что рациональные модули алгебры A/Z , порожденные различными характеристическими базисами, совпадают, так что определение от выбора базиса не зависит. *

Предположим, что группа $\mathfrak{G}$ связна и G — ее алгебра, A — характеристическая подалгебра в G и $\mathfrak{A}$ — соответствующая связная коммутативная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Группа $\mathfrak{A}$ разлагается в прямое произведение векторной подгруппы и конечного числа одномерных замкнутых компактных подгрупп. Обозначим через $b_1, b_2, \dots, b_k$ векторы алгебры A , касательные в начале к этим компактным однопараметрическим группам. Векторы эти нормализуем по условию $e^{\beta_i \|b_i\|} = E$, где β_i — рациональные числа, а $\|b_i\|$ — матрица, соответствующая b_i в регулярном представлении алгебры G . Рациональный подмодуль алгебры A , порожденный векторами $b_1, \dots, b_k$, назовем отнесенным форме $\mathfrak{G}$.

Т е о р е м а 12. *Каждый рациональный подмодуль, отнесенный форме $\mathfrak{G}$, является характеристическим подмодулем в $\mathfrak{A}$, и, наоборот, каждому характеристическому подмодулю алгебры A однозначно соответствует форма $\mathfrak{G}$, которой отнесен этот модуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $\mathfrak{G}/Z$, где Z — центр группы $\mathfrak{G}$. Компактные одномерные подгруппы группы $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ имеют в $\mathfrak{G}/Z$ компактные образы. Так как $\mathfrak{G}/Z$ изоморфна регулярному представлению группы $\mathfrak{G}$, то

$$b_i \equiv \sum_{\lambda} \alpha_{i\lambda} a_{\lambda} \pmod{Z} \quad (\alpha_{i\lambda} \text{ рациональны}).$$

Эти соотношения показывают, что рациональный подмодуль алгебры A , порожденный элементами $b_1, \dots, b_k$, есть подмодуль характеристический.

Обратно, пусть дан характеристический подмодуль B с базисом $b_1, \dots, b_k$:

$$b_i = \sum_{\lambda} \alpha_{i\lambda} a_{\lambda} + z_i \quad (z_i \in Z, \alpha_{i\lambda} \text{ рациональны}).$$

В характеристической векторной подгруппе $\tilde{\mathfrak{A}}$ универсальной накрываю-

щей группы $\mathfrak{G}$ можно ввести каноническую систему координат [14] так, чтобы элементы с координатными векторами $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s$ были центральными элементами группы $\mathfrak{G}$ (где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — соответственно выбранные рациональные числа). Тогда при некотором целом N элементы $Nb_1, Nb_2, \dots, Nb_k$ будут центральными в $\mathfrak{G}$. Пусть D — подгруппа, порожденная элементами $Nb_1, \dots, Nb_k$. Очевидно, что D — центральная дискретная подгруппа и модуль B отнесен форме $\mathfrak{G}/D$.

§ 4. Замкнутые подгруппы

Рассмотрим связную группу Ли $\mathfrak{G}$. Пусть G — ее инфинитезимальная алгебра. Каждой подалгебре $H \subset G$ в $\mathfrak{G}$ соответствует связная подгруппа $\mathfrak{H}$, однако не обязательно замкнутая. Так как часто бывает важно, чтобы $\mathfrak{H}$ была замкнута, то возникает вопрос, каким подалгебрам алгебры G отвечают замкнутые подгруппы группы $\mathfrak{G}$ (см. [8, 16, 17], а также [14]). Очевидно, что ответ определяется не только алгеброй G , но зависит также от формы $\mathfrak{G}$. С другой стороны, раз ответ одинаков для эквивалентных форм, то форму $\mathfrak{G}$ можно фиксировать посредством характеристического подмодуля, как это было показано в предыдущем параграфе. Так мы приходим к следующей проблеме: даны алгебра Ли G , ее характеристическая подалгебра A и в A — характеристический подмодуль M ; определить, каким подалгебрам алгебры G в группе $\mathfrak{G}$, определенной этой алгеброй и подмодулем M , отвечают замкнутые подгруппы. Для решения проблемы нам понадобятся некоторые общие свойства подгрупп и их алгебр.

Обозначим через $N_G(H)$ нормализатор подалгебры H в алгебре G , т. е. совокупность таких элементов $x \in G$, что $[xH] \subset H$. $N_G(H)$ — максимальная подалгебра, содержащая H в качестве идеала.

Т е о р е м а 13. *Нормализатору любой подалгебры $H \subset G$ соответствует подгруппа, замкнутая во всех формах группы $\mathfrak{G}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Алгебре H в группе $\mathfrak{G}$ отвечает подгруппа $\mathfrak{H}$, вообще не замкнутая. Пусть $\mathfrak{N}$ — совокупность элементов из $\mathfrak{G}$, коммутирующих с $\mathfrak{H}$. Покажем, что $\mathfrak{N}$ замкнута. Действительно, внутренние автоморфизмы, порожденные элементами группы $\mathfrak{G}$, индуцируют в алгебре G линейные преобразования. По условию подпространство H остается инвариантным под действием автоморфизмов, вызванных элементами из $\mathfrak{N}$. Предположим, что $x_n \in \mathfrak{N}$, $\lim x_n = x$ и X_n — линейное преобразование, индуцированное элементом x_n в пространстве G . В силу непрерывности соответствия $x_n \rightarrow X_n$ имеем $\lim X_n = X$. Так как $X_n H = H$, то $XH \subset H$, т. е. $x^{-1}\mathfrak{H}x = \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{N}$ замкнута. С другой стороны, как легко видеть, подгруппе $\mathfrak{N}$ в алгебре G соответствует как раз нормализатор $N_G(H)$.

С л е д с т в и е 1 (Иосида [16]). *Если H — подалгебра алгебры G , $\mathfrak{H}$ — соответствующая подгруппа, $\bar{\mathfrak{H}}$ — ее замыкание и $\bar{H}$ — алгебра группы $\bar{\mathfrak{H}}$, то H — идеал в $\bar{H}$.*

Действительно, замкнутая подгруппа $\mathfrak{N}$ соответствует нормализатору $N_G(H)$. Так как $N_G(H) \supset H$, то $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{N} \supset \bar{\mathfrak{H}}$. Следовательно, $H \subset \bar{H} \subset N_G(H)$. Будучи идеалом в $N_G(H)$, алгебра H будет идеалом и в промежуточной алгебре $\bar{H}^*$.

* Таким же рассуждением можно получить более сильный результат: каждый идеал алгебры H будет идеалом и в алгебре $\bar{H}$.

С л е д с т в и е 2. $[\overline{H}\overline{H}] = [HN]$, $\overline{H} = B + H$, где B — коммутативная подалгебра и $B \cap H = 0$.

Рассмотрим универсальную накрывающую группу $\tilde{\mathfrak{G}}^*$ группы $\tilde{\mathfrak{G}}$. В алгебре $\overline{H}$ содержится идеал H , которому в $\tilde{\mathfrak{G}}^*$ соответствует замкнутый нормальный делитель $\mathfrak{H}^*$. Пусть $\tilde{\mathfrak{G}} = \tilde{\mathfrak{G}}^*/D$, где D — центральный нормальный делитель. Замыкание $\mathfrak{H}$ в $\tilde{\mathfrak{G}}$ совпадает с $\tilde{\mathfrak{H}}$, так что замыкание $D\mathfrak{H}^*$ в $\tilde{\mathfrak{G}}^*$ необходимо совпадает с $\mathfrak{H}^*$. Как отмечено во введении, алгебра абстрактного коммутанта любой группы Ли $\mathfrak{L}$ есть $[Q\overline{Q}]$ и $[\mathfrak{L}\overline{\mathfrak{L}}] \subset [\mathfrak{L}\mathfrak{L}]$. Применяя этот результат, получим

$$[\mathfrak{H}^*, \mathfrak{H}^*] = [\overline{D\mathfrak{H}^*}, \overline{D\mathfrak{H}^*}] \subset [\overline{D\mathfrak{H}^*}, D\mathfrak{H}^*] = [\mathfrak{H}^*, \mathfrak{H}^*].$$

Но $[\mathfrak{H}^*, \mathfrak{H}^*]$ — подгруппа односвязной группы $\tilde{\mathfrak{G}}^*$, соответствующая идеалу $[HN]$. В силу известной теоремы [14] это значит, что $[\mathfrak{H}^*, \mathfrak{H}^*]$ замкнута в $\mathfrak{H}^*$, т. е. $[\mathfrak{H}^*, \mathfrak{H}^*] = [\mathfrak{H}^*, \mathfrak{H}^*]$, откуда $[\overline{H}\overline{H}] = [HN]$.

Второе утверждение можно доказать так: обозначим через $\mathfrak{A}$ характеристическую абелеву подгруппу группы $\tilde{\mathfrak{G}}^*$. По определению $\mathfrak{A}$ содержит почти весь центр группы $\tilde{\mathfrak{G}}^*$ и поэтому $D_1 = D \cap \mathfrak{A}$ имеет в D конечный индекс. Формы $\tilde{\mathfrak{G}}^*/D$ и $\tilde{\mathfrak{G}}^*/D_1$ эквивалентны, так что можно рассмотреть только $\tilde{\mathfrak{G}}^*/D$. Тогда $\overline{D\mathfrak{H}^*} = \mathfrak{H}^*$ и, следовательно, $\mathfrak{A}\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}^*$. Отсюда

$$\overline{H} = A + H, \quad A = B + (A \cap H), \quad \overline{H} = B + H.$$

С л е д с т в и е 3. Если $\overline{H}$ — замыкание H и $H = L + R$ — разложение Леви для H , то разложение Леви для $\overline{H}$ будет $\overline{H} = L + S$, $S \supset R$, где L полупроста, R и S разрешимы.

Действительно, пусть $\overline{H} = L_1 + S$. Согласно сказанному выше каждый идеал в H будет идеалом и в $\overline{H}$. Поэтому R — идеал в $\overline{H}$. Проекция R в L_1 нулевая, так как L_1 полупроста и не содержит разрешимых идеалов. Следовательно, $R \subset S$ и проекция H в L_1 совпадает с проекцией L в L_1 . Значит, $L_1 = L + L_2$, где L_2 — полупростая подалгебра. Тогда алгебра вычетов $\overline{H}/H$ содержала бы часть, изоморфную L_2 , и не была бы абелевой, вопреки предыдущему следствию. Значит, $L_2 = 0$, $L_1 = L$.

Т е о р е м а 14. Пусть H — подалгебра, $\overline{H}$ — ее замыкание, $H = L + R$ и $\overline{H} = L + S$ — разложения Леви и A — характеристическая подалгебра для L . Тогда $\overline{A + R} = A + S$. Если $\overline{A + R} = A + R$, то $R = S$ и H замкнута.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Алгебре $\overline{H}$ в $\mathfrak{G}$ соответствует замкнутая подгруппа $\tilde{\mathfrak{H}}$. Обозначая через $\tilde{\mathfrak{H}}^*$ ее универсальную накрывающую, имеем $\tilde{\mathfrak{H}} \cong \tilde{\mathfrak{H}}^*/D$. Пусть $\tilde{\mathfrak{H}}^* = \tilde{\mathfrak{L}}\tilde{\mathfrak{S}}$ — разложение Леви. Элементы нормального делителя D единственным образом представимы произведениями $d_i = l_i s_i$ ($l_i \in \tilde{\mathfrak{L}}$, $s_i \in \tilde{\mathfrak{S}}$). Множители l_i образуют в $\tilde{\mathfrak{L}}$ центральную подгруппу D^* . Обозначим через $\mathfrak{A}$ характеристическую абелеву подгруппу в $\tilde{\mathfrak{L}}$. Пусть затем A — соответствующая ей подалгебра в G . Пересечение $D^* \cap \mathfrak{A}$ имеет в D^* конечный индекс. Пусть D_1 — совокупность тех элементов $l_i s_i$ группы D , для которых $l_i \in \mathfrak{A}$. Индекс $[D : D_1]$ конечен, ибо

$$D/D_1 \cong (D/\mathfrak{N})/(D_1/\mathfrak{N}) \cong D^*/D^* \cap \mathfrak{A},$$

где $\mathfrak{N} = D \cap \mathfrak{S}$. Таким образом, форма $\tilde{\mathfrak{H}}^*/D$ эквивалентна форме $\tilde{\mathfrak{H}}^*/D_1$

и достаточно рассмотреть последнюю. Группа $\mathfrak{U}\tilde{\mathfrak{E}}$ замкнута в $\tilde{\mathfrak{H}}^*$ и содержит D_1 . Следовательно, образ $\mathfrak{U}\tilde{\mathfrak{E}}$ в $\tilde{\mathfrak{H}}^*/D_1$ замкнут, т. е. $\overline{A + S} = A + S$. Покажем, что замыкание $A + R$ содержит S . В самом деле, алгебре H в $\tilde{\mathfrak{H}}^*$ соответствует подгруппа $\tilde{\mathfrak{H}}^*$. По предположению $\overline{D_1\tilde{\mathfrak{H}}^*} = \tilde{\mathfrak{H}}^*$. Следовательно, каждый элемент группы $\tilde{\mathfrak{E}}$ является предельной точкой произведений вида $l_n \cdot r_n s_n$, где $r_n \in \mathfrak{R}$, $l_n s_n \in D_1$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = 1$, то каждый элемент из $\tilde{\mathfrak{E}}$ является пределом элементов из $\mathfrak{R}D_2$, где D_2 — множество всех s_n ($l_n s_n \in D_1$). Таким образом, $\overline{\mathfrak{R}D_2} = \tilde{\mathfrak{E}}$ и $D_1\mathfrak{R}D_2 \supset \tilde{\mathfrak{E}}$. Но $D_1\mathfrak{R}D_2 \subset \mathfrak{U}D_1\mathfrak{R}$, и поэтому $\overline{\mathfrak{U}D_1\mathfrak{R}} \sim \overline{A + R} \supset S$. Следовательно, $\overline{A + R} = A + S$. Если $\overline{A + R} = A + R$, то из $S \supset R$ следует $S = R$.

Значение этой теоремы в том, что она сводит проблему замкнутости произвольных подгрупп к более простой проблеме замкнутости разрешимых подгрупп.

Т е о р е м а 15. *Связная подгруппа Ли $\mathfrak{H}$ замкнута в $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда замыкание любой однопараметрической подгруппы из $\mathfrak{H}$ содержится в $\mathfrak{H}$.*

Необходимость условия очевидна, и нужно доказать лишь достаточность. Для подгрупп размерности 1 теорема тривиальна. Допустим, что она верна для всех подгрупп размерности меньшей, чем размерность $\mathfrak{H}$. По теореме 14 можно ограничиться случаем, когда $\mathfrak{H}$ разрешима*. Рассмотрим коммутанты $\mathfrak{H}_1 = [\mathfrak{H}\mathfrak{H}]$, $\mathfrak{H}_2 = [\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_1]$, ... Последний из них — связная, но не обязательно замкнутая абелева группа $\mathfrak{H}_k$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ замыкание $\mathfrak{H}_k$ во внутренней топологии группы $\mathfrak{H}$. Группа $\mathfrak{A}$ — абелев нормальный делитель группы $\mathfrak{H}$, и замыкание любой одномерной подгруппы группы $\mathfrak{A}$ содержится в $\mathfrak{A}$. Если $\dim \mathfrak{A} < \dim \mathfrak{H}$, то по индуктивному предположению $\mathfrak{A}$ содержится в $\mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}$, то любая замкнутая одномерная подгруппа группы $\mathfrak{A}$ является замкнутым нормальным делителем группы $\mathfrak{H}$. Таким образом, в обоих случаях $\mathfrak{H}$ содержит нетривиальный замкнутый коммутативный нормальный делитель, который обозначим через $\mathfrak{N}$. Пусть $\tilde{\mathfrak{H}}$ — замыкание $\mathfrak{H}$. Группа $\mathfrak{N}$ является замкнутым нормальным делителем группы $\tilde{\mathfrak{H}}$, значит, $\mathfrak{H}$ замкнута тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ замкнута в $\tilde{\mathfrak{H}}/\mathfrak{N}$. Допустим, что $\mathfrak{H}$ не замкнута. Так как $\dim(\mathfrak{H}/\mathfrak{N}) < \dim \mathfrak{H}$, то в $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ существует однопараметрическая подгруппа $h(t)$, замыкание которой не содержится в $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$. Пусть $\mathfrak{E}/\mathfrak{N}$ — это замыкание. Замыкание одномерной незамкнутой подгруппы компактно, следовательно, $\mathfrak{E}/\mathfrak{N}$ компактна и по теореме 10 $\mathfrak{E} = \mathfrak{B}\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{B}$ компактна, а $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}$ конечна. Если $\mathfrak{N}$ компактна, то $h(t)$ также компактна и ее замыкания в $\mathfrak{H}$ и в $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ совпадают, т. е. $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{H}$ вопреки предположению. Если, наоборот, $\mathfrak{N}$ — векторная группа, то $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} = \{e\}$ и в $\mathfrak{H}$ существует компактная однопараметрическая подгруппа $u(t)$, образ которой в $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ совпадает с образом $h(t)$ **. В силу компактности образ замыкания $u(t)$ совпадает с замыканием ее образа в $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$.

* Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{Q}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ — характеристическая подгруппа для $\mathfrak{Q}$, то тот факт, что замыкание одномерной подгруппы из $\mathfrak{Q}\mathfrak{N}$ принадлежит $\mathfrak{H}$, означает, что это замыкание принадлежит самой группе $\mathfrak{Q}\mathfrak{N}$. Значит, если условие теоремы выполнено для $\mathfrak{H}$, то оно выполнено и для $\mathfrak{Q}\mathfrak{N}$ и потому можно ограничиться рассмотрением группы $\mathfrak{Q}\mathfrak{N}$.

** Здесь мы пользуемся очевидным уточнением теоремы 2: если $\mathfrak{H}$ разрешима, $\mathfrak{N}$ — ее односвязный нормальный делитель и $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ компактна, то $\mathfrak{H}$ содержит компактную подгруппу $\mathfrak{B}$ даже тогда, когда $\mathfrak{H}$ не замкнута.

Так как по предположению замыкание $u(t)$ содержится в $\mathfrak{F}$, мы снова получаем противоречие: $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$.

С л е д с т в и е. Для замкнутости подгруппы $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ необходима и достаточна замкнутость пересечений $\mathfrak{F}$ со всеми максимальными компактными подгруппами группы $\mathfrak{G}$.

Т е о р е м а 16. Разрешимая подгруппа $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ замкнута в $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда замкнута ее характеристическая подгруппа $\mathfrak{H}$.

Доказательство очевидно. В силу теоремы 15 достаточно рассмотреть замыкания всех однопараметрических подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Но замыкание каждой незамкнутой однопараметрической подгруппы компактно и поэтому содержится в одной из характеристических подгрупп группы $\mathfrak{F}$. Следовательно, если замкнута подгруппа $\mathfrak{H}$, то замкнута и $\mathfrak{F}$. Обратное очевидно.

Вернемся к общей проблеме, сформулированной в начале параграфа. Пусть даны алгебра G , произвольная подалгебра $H \subset G$ и характеристический подмодуль M_0 . Алгебра G и модуль M_0 определяют связную группу Ли $\mathfrak{G}$ с точностью до эквивалентности. Подалгебре H в $\mathfrak{G}$ соответствует связная подгруппа $\mathfrak{F}$. Нужно определить, при каких условиях подгруппа $\mathfrak{F}$ замкнута в $\mathfrak{G}$.

Рассмотрим подалгебру M , порожденную элементами из M_0 . Этой алгебре в $\mathfrak{G}$ соответствует замкнутая компактная подгруппа $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{F}$ замкнута, то должна быть замкнутой и подгруппа группы $\mathfrak{G}$, соответствующая пересечению $H \cap M$. Пусть $m_1, \dots, m_k$ — характеристический базис в M_0 и $h \in H \cap M$. Замыкание однопараметрической подгруппы h группы $\mathfrak{G}$ содержит некоторые независимые замкнутые однопараметрические подгруппы группы $\mathfrak{M}$. Это значит, что соответствующая подалгебра содержит систему векторов

$$h_i = \sum \alpha_{i\nu} m_\nu, \quad h = \mu_1 h_1 + \dots + \mu_s h_s,$$

где $\alpha_{i\nu}$ рациональны, а μ_i вещественны. Если замыкание h принадлежит H , то H содержит все h_i и элементы из $H \cap M$ можно линейно выразить через элементы из $H \cap M_0$. Следовательно, размерность $H \cap M$ равна размерности $H \cap M_0$. Обратно, если эти размерности равны, то замыкание каждого элемента пересечения $H \cap M$ принадлежит H .

Теперь предположим, что $\mathfrak{G}$ разрешима. Тогда каждая компактная подгруппа лежит в одной из характеристических подгрупп. Приняв во внимание теорему 15, видим, что в этом случае условие $\dim(H \cap M) = \dim(H \cap M_0)$ для всех сопряженных M достаточно для замкнутости $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{G}$ не разрешима, то не каждая компактная подгруппа принадлежит характеристической. В этом случае можно поступить так: пусть A — характеристическая подалгебра в G . Выберем в G максимальную полупростую компактную подалгебру P , поэлементно коммутирующую с A , и в P — максимальную коммутативную подалгебру Γ . В каждой группе Ли $\mathfrak{F}$ с алгеброй P алгебре Γ соответствует замкнутая компактная абелева подгруппа; подгруппа эта разлагается в прямое произведение однопараметрических замкнутых компактных подгрупп. Обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ элементы базиса Γ , нормализованные так, что $e^{r_i \gamma_i} = E$ при рациональных r_i в регулярном представлении алгебры G . Множество элементов вида $r_1 \gamma_1 + \dots + r_t \gamma_t$ образует в G рациональный подмодуль Γ_0 . Прямую сумму $M_0 + \Gamma_0$ назовем обобщенным характеристическим подмодулем F_0 , отнесенным форме $\mathfrak{G}$. Повторяя рассуждения, убеждаемся, что условие $\dim[H \cap (M_0 + \Gamma_0)] =$

$= \dim [H \cap (M + \Gamma)]$ необходимо и достаточно для замкнутости пересечения подгруппы $\mathfrak{H}$ с подгруппой $\mathfrak{F}$, которая имеет алгебру $F = M + \Gamma$. Но из доказательства теоремы 7 следует, что $\mathfrak{F}$ — максимальная компактная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и что каждая компактная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ принадлежит одной из подгрупп, сопряженных с $\mathfrak{F}$. Отсюда с помощью теоремы 15 получается следующий критерий:

Т е о р е м а 17. *Для того чтобы подгруппа $\mathfrak{H}$ с алгеброй H была замкнута в $\mathfrak{G}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого обобщенного характеристического подмодуля F_0 , отнесенного группе $\mathfrak{G}$, выполнялось условие $\dim (H \cap F_0) = \dim (H \cap F)$.*

По теореме 15 все подмодули F_0 сопряжены. Поэтому для того, чтобы был замкнут нормальный делитель $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$, необходимо и достаточно, чтобы условие $\dim (H \cap F_0) = \dim (H \cap F)$ выполнялось для некоторого фиксированного F_0 .

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть формой $\mathfrak{G}$ является универсальная накрывающая группа. Тогда отнесенный ей характеристический подмодуль — нулевой и мы приходим к такому выводу: для замкнутости подгруппы $\mathfrak{H}$ в односвязной группе $\mathfrak{G}$ достаточно, чтобы было замкнуто пересечение $\mathfrak{H}$ с компактной полупростой подгруппой группы $\mathfrak{G}$.

Если подгруппа $\mathfrak{H}$ замкнута в форме $\mathfrak{G}$, она, очевидно, будет замкнута и в универсальной накрывающей $\tilde{\mathfrak{G}}$. Таким образом, класс подгрупп, замкнутых в универсальной накрывающей группе, — самый широкий. Наоборот, класс подгрупп, замкнутых во всех формах группы $\mathfrak{G}$, — самый узкий. Условия такой замкнутости более сложные.

Пусть H — подалгебра алгебры Ли G , A — характеристическая подалгебра и Γ — максимальная коммутативная подалгебра в максимальной компактной полупростой подалгебре алгебры G , $[A, \Gamma] = 0$. Следующие условия необходимы и достаточны для замкнутости H во всех формах группы $\mathfrak{G}$:

1°. Подгруппа $\mathfrak{H}$ замкнута в универсальной накрывающей группе $\tilde{\mathfrak{G}}$.

2°. $\mathfrak{H}$ замкнута в регулярном представлении группы $\mathfrak{G}$.

3°. Либо H содержит центр алгебры G , либо $H \cap (A + \Gamma) = H \cap \Gamma$ для всех обобщенных характеристических подалгебр $A + \Gamma$.

Необходимость условия 1° тривиальна. Чтобы показать необходимость условия 2°, рассмотрим ту форму группы $\mathfrak{G}$, в которой центр ее $\mathfrak{Z}$ компактен. По условию $\mathfrak{H}$ замкнута в $\mathfrak{G}$, следовательно, образ $\mathfrak{H}$ замкнут в факторгруппе $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$, что и требовалось показать. Необходимость условия 3° можно показать так. Допустим, что H содержит элемент h , $h \in A + \Gamma$, $h \notin \Gamma$, но не содержит фиксированного центрального элемента z . Обозначим через $a_1, \dots, a_s$ и $g_1, \dots, g_t$ рациональные базисы характеристических модулей A_0 и F_0 соответственно. Тогда $h = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s + \beta_1 g_1 + \dots + \beta_t g_t$, где хотя бы одно из α , скажем α_1 , отлично от нуля. Возьмем ту форму $\mathfrak{G}$, которой отнесен характеристический подмодуль M_0 с базисом $a_1 + \lambda z, a_2, \dots, a_s$. Если λ выбрать так, чтобы $\alpha_1 \lambda$ линейно и с рациональными коэффициентами выражалось через $\alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t$, то замыкание однопараметрической подгруппы $h(t)$ в этой форме группы $\mathfrak{G}$ содержит z (см. [5]) и, значит, $\mathfrak{H}$ не замкнута.

Докажем достаточность условий. Возьмем произвольную форму группы $\mathfrak{G}$ и в ней подгруппу $\mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{H}$ содержит связную компоненту центра, то замкнутость $\mathfrak{H}$ сразу вытекает из условия 2°. Если H центра алгебры G не содержит, то условие 3° говорит, что каждая компактная однопараметриче-

ская подгруппа $h(t)$ группы $\mathfrak{G}$ содержится в компактной полупростой подгруппе $\mathfrak{P}$. Но замыкание в $\mathfrak{P}$ будет тем же, что в $\mathfrak{G}$ и что в универсальной накрывающей $\tilde{\mathfrak{G}}$. Так как подгруппа $\mathfrak{Z}$ замкнута в $\tilde{\mathfrak{G}}$, то замыкание $h(t)$ в $\tilde{\mathfrak{G}}$, а значит, и в $\mathfrak{G}$ принадлежит к $\mathfrak{Z}$, что и требовалось показать.

В качестве примера рассмотрим коммутант разрешимой группы. Из условий 1° — 3° непосредственно следует, что коммутант разрешимой группы $\mathfrak{G}$ замкнут в каждой форме этой группы тогда и только тогда, когда он либо содержит весь центр $\mathfrak{G}$, либо вообще не содержит ненулевых центральных элементов. Как отмечено во введении, классы замкнутых подгрупп в эквивалентных формах совпадают. Применяя теоремы этого параграфа, легко установить, что верно и обратное.

Т е о р е м а 18. Если в формах $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ алгебры G с нециклическими фундаментальными группами классы замкнутых подалгебр совпадают, то формы эти эквивалентны.

Доказательство очевидно, ибо если известны замкнутые подгруппы абелевой характеристической группы $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$, то возможно восстановить топологию в $\mathfrak{A}$ и определить характеристический подмодуль. Однако невозможно отличить векторную группу V_n от прямого произведения окружности и векторной группы V_{n-1} , что соответствует случаю циклической фундаментальной группы для $\mathfrak{G}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Д. Адо. О представлении конечных непрерывных групп линейными подстановками. — Изв. КФМО, 1934—1935, 3/7, 1—43.
2. G. Birkhoff. Lie groups isomorphic with no linear group. — Bull. Amer. Math. Soc., 1936, 42, 882—888.
3. G. Birkhoff. Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices. — Ann. Math., 1937, 38, N 2, 526—532.
4. E. Cartan. La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs. — Mém. Soc. Math. (Paris), 1930, 42.
5. E. Cartan. Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne. — J. Math., 1929, 8, N 9, 1—33.
6. E. Cartan. Les représentations linéaires des groupes de Lie. — J. math. pures et appl., 1937, 9, N 17, 1—12.
7. C. Chevalley. On the topological structure of solvable groups. — Ann. Math., 1941, 42, N 2, 668—675.
8. N. Jacobson. Structure and automorphisms of semi-simple Lie groups in the large. — Ann. Math., 1939, 40, N 2, 755—763.
9. E. Levi. Sulla struttura dei gruppi finiti e continui. — Atti Accad. Torino, 1905, 40, 423—437.
10. А. И. Мальцев. Подгруппы групп Ли в целом. — Докл. АН СССР, 1942, 36, № 1, 5—8.
11. А. И. Мальцев. О разложении алгебры в прямую сумму радикала и полупростой подалгебры. — Докл. АН СССР, 1942, 36, № 2, 46—50.
12. А. И. Мальцев. О группах Ли в целом. — Докл. АН СССР, 1942, 37, № 1, 3—6.
13. J. von Neumann. Gruppen linearen Transformationen. — Math. Z., 1929, 30, 3—42.
14. Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. М., 1938.
15. O. Schreier. Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im Grössen. — Abhandl. math. Seminar Univ. Hamburg, 1917, 5, 233—244.
16. K. Yosida. A problem concerning the second fundamental theorem of Lie. — Proc. Imper. Acad. Tokyo, 1937, 13, N 5, 152—155.
17. K. Yosida. A theorem concerning the semi-simple Lie groups. — Tôhoku Math. J., 1938, 44, 81—84.
18. А. И. Мальцев. О линейных связных локально замкнутых группах. — Докл. АН СССР, 1943, 40, № 3, 108—110.



Топологическая группа G называется разрешимой, если она содержит конечную цепочку нормальных делителей $G \supset G_1 \supset \dots \supset G_k = \{e\}$ с коммутативными факторами G_{i-1}/G_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Из этого определения видно, что класс разрешимых групп тесно связан с классом абелевых групп. Теория локально компактных абелевых групп была создана Л. С. Понтрягиным в 1934 г. [1], после чего естественно возникла задача об изучении структуры локально компактных разрешимых групп. В 1941 г. Шевалле [2] опубликовал следующий важный результат: *локально компактная, связная, локально связная разрешимая группа конечной размерности есть группа Ли.*

В настоящей заметке изучается структура более общего класса связных, локально компактных разрешимых групп.

Топологическая группа G называется аппроксимируемой группами Ли по системе нормальных делителей $\{N_i\}$, если для каждого $g \in G$ существует такой нормальный делитель N_i , что $g \notin N_i$ и G/N_i есть группа Ли. Основные результаты настоящей заметки могут быть сформулированы в виде трех теорем.

1. *Всякая связная, локально компактная разрешимая группа аппроксимируема группами Ли по центральным компактным нормальным делителям.* С помощью рассуждений, обычных в теории проекционных пределов [1, стр. 221—228], отсюда получается теорема.

2. *Связная, локально компактная разрешимая группа локально изоморфна прямому произведению разрешимой группы Ли на компактную абелеву группу.*

Упомянутый выше результат Шевалле есть частный случай теоремы 2, так как по теореме Понтрягина [1] компактные локально связные абелевы группы конечной размерности являются группами Ли. Теорема 2 позволяет, кроме того, установить структуру топологических пространств, на которых могут действовать разрешимые группы. Именно,

3. *Если связная, локально компактная разрешимая группа G есть транзитивная группа преобразований топологического пространства L , то стабильная подгруппа является группой Ли, а G локально изоморфна топологическому произведению Γ на евклидово пространство.*

В частности, связные, локально компактные разрешимые группы, действующие транзитивно на топологических многообразиях, являются группами Ли.

1. *Аппроксимируемость.* Для вывода теоремы 1 понадобится несколько лемм.

Л е м м а 1. *Если локально компактная группа G содержит нормальный делитель N , являющийся связной коммутативной группой Ли, и если G/N — однопараметрическая группа, то G содержит однопараметрическую подгруппу, образ которой в G/N совпадает с G/N .*

Доказательство будем вести индукцией по размерности N , имея в виду, что для размерности 0 лемма тривиальна. Легко показать, что все дело сводится к случаю, когда N не содержит нормальных делителей G . В самом деле, пусть N содержит связный нормальный делитель D группы G . Фактор-группа G/D содержит абелев нормальный делитель N/D с однопараметрической фактор-группой $(N/D)/(G/D)$. Так как размерность N/D меньше размерности N , то по индукции G/D содержит однопараметрическую подгруппу H/D . Так как размерность D меньше размерности N , то по индукции H содержит однопараметрическую подгруппу $h(t)$, образ которой в H/D совпадает с H/D . Подгруппа $h(t)$ является искомой подгруппой в G .

Предположим теперь, что N содержит только дискретные нормальные делители G . Тогда либо N содержит максимальный отличный от N нормальный делитель D , либо N будет однопараметрической центральной подгруппой G . В первом случае D будет дискретным нормальным делителем и N/D не будет содержать нормальных делителей G/D . Так как G/D локально изоморфна G , то задача сводится к доказательству леммы для G/D . Во втором случае G содержит однопараметрическую подгруппу N с однопараметрической фактор-группой G/N . Докажем, что G абелева. Группа G/N изоморфна либо аддитивной группе вещественных чисел, либо аддитивной группе вещественных чисел, взятых по модулю 1. Обозначим через $t(g)$ то вещественное число, которое отвечает элементу $g \in G$ при гомоморфном отображении $G \rightarrow G/N$. Если g, h — два элемента G , то их коммутатор $[gh] = g^{-1}h^{-1}gh$ содержится в N и зависит, очевидно, только от $t(g)$ и $t(h)$. Поэтому положим $[gh] = n(t(g), t(h))$, $n \in N$. Так как $[g^2, g] = e$, то

$$n\left(t, \frac{t}{2}\right) = n\left(t, \frac{t}{4}\right) = \dots = n\left(t, \frac{kt}{2^m}\right) = e.$$

С другой стороны, $n(t, u)$ — непрерывная функция от t, u . Следовательно, $n(t, u) = e$, т. е. $gh = hg$ при любых g, h из G . Применяя теорему Понтрягина о коммутативных группах, получаем, что G — группа Ли, что и требовалось.

Итак, мы видим, что если в условиях леммы N содержит нормальный делитель G , то лемма справедлива. Рассмотрим последний случай, когда N не содержит нормальных делителей G . Фактор-группу G/N мы можем отождествить либо с аддитивной группой вещественных чисел, либо с аддитивной группой вещественных чисел по модулю 1. Обозначим через t_g число, в которое отображается $g \in G$ при гомоморфизме $G \rightarrow G/N$. Внутренний автоморфизм, вызываемый в G элементом g , индуцирует в N линейное преобразование A_g^* .

Так как A_g зависит только от t_g , то обозначим A_g через A_t . Легко видеть, что A_t зависит непрерывно от t и является, таким образом, однопараметрической группой линейных преобразований. Если A_t при всех t есть тождественное преобразование E , то N лежит в центре G и мы приходим к уже рассмотренному случаю. Если же A_t не есть E ни при каком t , то найдется малое значение $t = \tau$, при котором A_τ не будет оставлять на месте ни одного элемента N . Выберем в G элемент h , который вызывает в N преобразование A_τ , и рассмот-

* По условию N — связная абелева группа Ли, поэтому N есть прямое произведение векторной группы V и компактной K . Так как компактная группа K является характеристической, а N по условию нормальных делителей не содержит, то либо $N = K$, либо $N = V$. В первом случае в силу леммы 1 K лежит в центре G и мы имеем уже рассмотренный случай. Во втором случае N — векторная группа и ее автоморфизмы суть линейные преобразования.

рим произвольный элемент $g \in G$. Коммутатор $[hg] = h^{-1}g^{-1}hg$ принадлежит N и зависит только от g . Поэтому положим $[hg] = n(g)$ и каждому элементу $g \in G$ поставим в соответствие пару $(t_g, n(g))$. Так как gf отвечает пара $(t_g + t_h, n(g) + n(f))$, то отображение $g \rightarrow (t_g, n(g))$ есть непрерывное гомоморфное отображение G в полупрямое произведение группы линейных преобразований A_i на N . По условию A_i неподвижных элементов в N не имеет, поэтому гомоморфизм будет изоморфизмом. Мы получили, что G изоморфна полупрямому произведению двух групп Ли. Следовательно, G есть группа Ли, а для групп Ли лемма заведомо справедлива.

Л е м м а 2. Если локально компактная разрешимая группа G допускает цепочку нормальных делителей $G \supset G_1 \supset \dots \supset G_k = \{e\}$, все факторы которой являются коммутативными, связными группами Ли, то G — группа Ли.

Доказательство будем вести индукцией по сумме s размерностей фактор-групп цепочки. Для $s = 1$ утверждение тривиально. Предположим, что для групп, у которых существуют цепочки с суммой размерностей факторов, меньшей s , лемма уже доказана, и рассмотрим группу G с суммой s . По предположению G/G_1 есть связная, коммутативная группа Ли. Следовательно, G/G_1 можно представить в виде прямого произведения однопараметрической подгруппы $\bar{V}(t)$ на некоторую подгруппу $\bar{W}$. Обозначив через $\bar{W}$ прообраз $\bar{W}$ в отображении $G \rightarrow G/G_1$, мы получим для G новую цепочку нормальных делителей

$$G \supset [W \supset G_1 \supset \dots \supset G_{k-1} \supset G_k = \{e\},$$

где G/W — однопараметрическая, а сумма размерностей факторов $W/G_1, \dots, G_{k-1}/G_k$ равна $s - 1$. Согласно индуктивному предположению $\bar{W}$ — группа Ли. Докажем, что G содержит однопараметрическую подгруппу $V(t)$, образ которой в G/W совпадает с G/W . В случае $W = G_{k-1}$ это непосредственно следует из леммы 1. Пусть $W \neq G_{k-1} \neq \{e\}$. Для фактор-группы G/G_{k-1} имеем цепочку

$$G/G_{k-1} \supset W/G_{k-1} \supset G_1/G_{k-1} \supset \dots \supset G_{k-1}/G_{k-1},$$

сумма размерностей факторов которой меньше s . Следовательно, G/G_{k-1} есть группа Ли и поэтому содержит однопараметрическую подгруппу $\bar{H}$, образ которой в $\frac{G/G_{k-1}}{W/G_{k-1}}$ совпадает с последней. Рассмотрим прообраз

H группы $\bar{H}$ в гомоморфном отображении $G \rightarrow G/G_{k-1}$. Для H имеем цепочку $H \supset G_{k-1} \supset \{e\}$, где H/G_{k-1} — однопараметрическая, а G_{k-1} — абелева. Отсюда по лемме 1 следует, что H содержит однопараметрическую подгруппу $V(t)$, образ которой в H/G_{k-1} совпадает с H/G_{k-1} . Нетрудно видеть, что $V(t)$ есть искомая однопараметрическая подгруппа G . Итак, образ $V(t)$ в G/W совпадает с G/W . Поэтому локально мы можем представить G в виде полупрямого произведения $V(t)$ на W . Однако полупрямое произведение двух групп Ли есть снова группа Ли. Следовательно, G есть группа Ли. Из леммы 2 непосредственно следует, что если группа G допускает цепочку подгрупп $G \supset G_1 \supset \dots \supset G_{k-1} \supset G_k = \{e\}$, каждая из которых есть нормальный делитель предшествующей, и если все фактор-группы G_{i-1}/G_i суть коммутативные связные группы Ли, то G есть группа Ли.

Л е м м а 3. Пусть G — локально компактная, связная разрешимая группа, L — связный нормальный делитель G с компактной фактор-группой

G/L и T — какая-нибудь компактная подгруппа L . Тогда G содержит связную компактную подгруппу K , для которой $G = KL$, $K \supset T$.

Рассмотрим сначала частный случай, когда L — коммутативная. Обозначим через P максимальную компактную подгруппу L . P — характеристическая подгруппа L и поэтому P — нормальный делитель G . Фактор-группа $G/P = H$ содержит нормальный делитель $L/P = V$, являющийся векторной группой. Рассуждения, приведенные в конце доказательства леммы 1, применимы и здесь, и из них следует, что H изоморфна полупрямому произведению фактор-группы H/V на V . Следовательно, H содержит подгруппу Q , изоморфную H/V и такую, что $H = QV$. Так как H/V изоморфна G/L , то Q компактна. Пусть K — прообраз Q в группе G при гомоморфизме отображении $G \rightarrow G/P$. Ввиду компактности P группа K компактна и $G = KL$. Так как $T \subset P$, $P \subset K$, то $T \subset K$.

Доказательство леммы в общем случае теперь можно провести следующим образом. Обозначим через $L', L'', \dots, L^{(k)} = \{e\}$ соответственно замыкания первого, второго, ..., k -го коммутанта L . Возьмем фактор-группу $G/L' = H$. Группа H содержит абелев нормальный делитель $F = L/L'$, для которого H/F изоморфна G/L и поэтому компактна. Согласно рассмотренному частному случаю H содержит связную компактную подгруппу Q , удовлетворяющую условию $H = QF$. Обозначим через G_1 прообраз Q при гомоморфизме $G \rightarrow G/L'$. Имеем $G = G_1L$, $G_1 \supset L'$, G_1/L' компактна. Применяя те же рассуждения вместо G к G_1 , мы получим группу G_2 со свойствами: $G = G_2L$, $G_2 \supset L''$, G_2/L'' компактна. Продолжая этот процесс далее, мы получим, наконец, группу G_k со свойствами: $G = G_kL$, $G_k/L^{(k)} = G_k$ компактна, что и требуется.

Л е м м а 4. *Каждый компактный, коммутативный нормальный делитель A связной топологической группы G лежит в центре G .*

Пусть $\chi(a)$ — характер A . Тогда $\chi(g^{-1}ag) = \chi_g(a)$ — снова характер A , где $g \in G$. Отображение $g \rightarrow \chi_g(a)$ есть непрерывное отображение G в группу характеров A . Так как G связна, а группа характеров дискретна, то образ G должен состоять из одного элемента, т. е. $\chi(g^{-1}ag) = \chi(a)$ для любых g и χ . Ввиду полноты системы характеров это дает $g^{-1}ag = a$.

Т е о р е м а 1. *Каждая окрестность единицы связной разрешимой локально компактной группы G содержит нормальный делитель, фактор-группа по которому есть группа Ли.*

Цепочка замыканий последовательных коммутантов G

$$G \supset G' \supset G'' \supset \dots \supset G_{\frac{k}{2}}^{(k)} = \{e\}$$

конечна, так как G разрешима. Если $k = 1$, то теорема тривиальна. Далее применяем индукцию по k , предполагая, что теорема уже доказана для групп с цепочкой коммутантов длины, меньшей k . В частности, G' есть связная, локально компактная группа с цепочкой коммутантов длины $k - 1$. Следовательно, в G' существует сколь угодно малый компактный нормальный делитель Z , лежащий в центре G' , фактор-группа по которому G'/Z есть группа Ли. Обозначим через Y центр G' и пусть Y_0 — связная компонента единицы Y . Y и Y_0 — нормальные делители G . Фактор-группа G/Y_0 содержит нульмерный нормальный делитель Y/Y_0 . Однако всякий нульмерный нормальный делитель связной группы лежит в ее центре. Таким образом, Y/Y_0 — центральная подгруппа группы G/Y_0 , и, следовательно, все подгруппы Y , содержащие Y_0 , являются нормальными делителями G . Одна из теорем Понтрягина гласит, что всякая локально компактная, коммутативная группа A

содержит открытую подгруппу B , разлагающуюся в прямое произведение векторной V и компактной Q и такую, что A/B дискретна. Таким образом, Y содержит открытую подгруппу $B \supset Y_0$, которая разлагается в прямое произведение VQ . Так как B — нормальный делитель G , то и однозначно определенная его подгруппа Q также является нормальным делителем G . Согласно лемме 4 это дает, что Q лежит в центре G . С другой стороны, B — открытая подгруппа, поэтому если подгруппа Z достаточно мала, то $Z \subset B$, и так как Q содержит все компактные подгруппы B , то $Z \subset Q$. Следовательно, все достаточно малые компактные центральные нормальные делители G' являются центральными в G .

Итак, пусть Z — компактный нормальный делитель G' , лежащий в центре G , G'/Z — группа Ли. Фактор-группа G/G' — связная, коммутативная и поэтому разлагается в прямое произведение векторной V/G' и компактной W/G' , где V и W — подгруппы G . Так как G'/Z и $(G'/ZV)/(Z)$ — группы Ли, то по лемме 2 V/Z также является группой Ли. С другой стороны, G/V компактна. По лемме 3 в G найдется связная компактная группа K , содержащая Z и такая, что $G = KV$. Группа K является компактной, связной, разрешимой и поэтому коммутативной.

Введем обозначения

$$G/Z = \bar{G}, \quad K/Z = \bar{K}, \quad V/Z = \bar{V}.$$

Имеем: $\bar{K}$ — компактная, связная, $\bar{V}$ — группа Ли, $\bar{G} = \bar{K}\bar{V}$. Обозначим через $\bar{T}$ совокупность элементов $\bar{K}$, перестановочных со всеми элементами $\bar{V}$. Каждый элемент $t \in \bar{K}$ производит некоторый автоморфизм τ группы $\bar{V}$. Так как $\bar{V}$ — группа Ли, то группа ее автоморфизмов есть также группа Ли. Следовательно, отображение $t \rightarrow \tau$ есть непрерывно гомоморфное отображение $\bar{K}$ в группу Ли. Ядро этого отображения есть $\bar{T}$. Следовательно, $\bar{K}/\bar{T}$ — группа Ли. В группе $\bar{K}$ в силу ее компактности существует произвольно малый нормальный делитель $\bar{N}$, для которого фактор-группа $\bar{K}/\bar{N}$ есть группа Ли. Но тогда и $\bar{K}/\bar{N} \cap \bar{T}$ будет группой Ли. Обозначим через P прообраз $\bar{N} \cap \bar{T}$ в K при отображении $K \rightarrow K/Z$. Так как Z — сколь угодно малая подгруппа G , а $\bar{N}$ — сколь угодно малая подгруппа K/Z , то P — сколь угодно малая подгруппа G . Но $P \subset K$ и образ P лежит в $\bar{T}$, следовательно, P — коммутативный нормальный делитель G . Ввиду леммы 4 это означает, что P лежит в центре G . С другой стороны, $G/P = K/P \cdot VP/P$. Группа K/P есть группа Ли и группа VP/P ввиду

$$VP/P \cong V/V \cap P \cong V/Z \cap P/Z$$

есть также группа Ли. Отсюда G/P — группа Ли, что и доказывает теорему.

2. Локальная структура. Из теоремы 1 следует, что все связные, локально компактные разрешимые группы являются пределами последовательностей групп Ли (см. [1, стр. 221]). Однако то обстоятельство, что все группы этих последовательностей разрешимы, а ядра гомоморфизмов — центральные, дает возможность более отчетливо представить структуру таких групп.

Л е м м а 5. Если алгебра Ли G отображается гомоморфно на алгебру H с ядром гомоморфизма Z , лежащим в центре G , и если никакая часть Z не отщепляется от G в качестве прямого слагаемого, то размерность G не превосходит некоторого числа, зависящего от H .

Пусть G' — коммутант G , $U = Z \cap G'$, $Z = U + V$, $U \cap V = 0$. Алгебра G/G' коммутативна и поэтому представима в виде прямой суммы

$\bar{V} + \bar{W}$, где $\bar{V}$ — образ V в G/G' . Обозначим прообраз $\bar{W}$ в G через W . Ясно, что $G = V + W$, $V \cap W = 0$. По условиям леммы для $V \neq 0$ это невозможно. Таким образом $V = 0$ и $Z \subset G'$.

Рассмотрим заданное в лемме гомоморфное отображение $G \rightarrow H$. Пусть $h_1, h_2, \dots, h_n$ — базис H , $g_1, g_2, \dots, g_n$ — какие-либо элементы G , переходящие соответственно в $h_1, h_2, \dots, h_n$. Добавляя к $g_1, \dots, g_n$ линейно независимые элементы из Z , мы получим базис G в виде $g_1, \dots, g_n, z_1, \dots, z_m$. Базис G' составляется из коммутаторов элементов G . Так как $[g_i z_j] = [z_j z_k] = 0$, то базис G' можно выбрать из элементов вида $[g_i g_k]$. Число этих элементов равно $\frac{1}{2} n(n-1)$. Однако $Z \subset G'$, следовательно, размерность Z также не превосходит $\frac{1}{2} n(n-1)$. Отсюда размерность G не более $n + \frac{1}{2} n(n-1)$, что и требовалось.

Теорема 2. *Локально компактная, связная разрешимая группа G локально изоморфна прямому произведению локальной группы Ли и компактной коммутативной группы.*

Согласно теореме 1 группа G содержит убывающую цепочку центральных подгрупп $Z_1 \supset Z_2 \supset \dots$, пересечение которых есть единица и фактор-группы $G_i = G/Z_i$ — группы Ли. Для групп G_i устанавливается естественная система гомоморфных отображений $G_i \leftarrow G_j$, $i < j^*$. В частности, рассмотрим систему гомоморфизмов $G_1 \leftarrow G_i$, $i = 2, 3, \dots$. Обозначим ядра этих отображений соответственно через $Y_1, Y_2, \dots$. Согласно лемме 5 найдется такое p , что Y_{p+n} , $n = 1, 2, \dots$, может быть локально представлено в форме $Y_{p+n} = X_{p+n} U_{p+n}$, где U_{p+n} локально отщепляется в качестве прямого сомножителя от G_{p+n} , а размерность X_{p+n} остается постоянной. Рассмотрим цепочку гомоморфизмов

$$G_p \leftarrow G_{p+1} \leftarrow G_{p+2} \leftarrow \dots \quad (1)$$

Выберем в G_p настолько малую окрестность единицы, чтобы в ней можно было ввести каноническую систему координат. В силу выбора p ядро каждого гомоморфизма $G_{p+i} \leftarrow G_{p+j}$ локально отщепляется от G_{p+j} прямым сомножителем. Поэтому в G_{p+j} найдется локальная подгруппа L_{p+i} такая, что предел последовательности

$$L_p \leftarrow L_{p+1} \leftarrow L_{p+2} \leftarrow \dots \quad (2)$$

будет локальной группой Ли L (ср. [1, стр. 228—229]). Группа G , являющаяся пределом цепочки (1), очевидно, распадается локально в прямое произведение L и некоторой коммутативной компактной подгруппы.

3. Группы преобразований. Пусть M — локально компактное топологическое пространство, G — локально компактная группа. G называется группой преобразований M , если для каждой пары g, m , $g \in G$, $m \in M$, однозначно определен некоторый элемент gm в M , который непрерывно зависит от g , m и для которого выполняются условия:

$$\alpha) g_1(g_2 m) = (g_1 g_2) m;$$

$$\beta) \text{ если } g_1 m = g_2 m \text{ для всех } m \in M, \text{ то } g_1 = g_2.$$

Группа G называется транзитивной, если каждый элемент M переводится в любой другой некоторым преобразованием из G . Пусть m — фиксированный элемент M . Совокупность элементов G , оставляющих m неподвижным, называется стабильной подгруппой. Из условия $\beta)$ сле-

* Здесь мы, чтобы не отклоняться от [1], предположили, что G удовлетворяет 1-й аксиоме счетности. В противном случае вместо упорядоченной цепочки отображений следовало бы рассматривать полуупорядоченную, что не изменило бы результата.

дует, что стабильная подгруппа не может содержать нормальных делителей G . Если H — стабильная подгруппа транзитивной группы G , то пространство M гомеоморфно пространству смежных классов $G : H$. Обратно, если H — произвольная подгруппа G , не содержащая нормальных делителей G , то G можно рассматривать как транзитивную группу преобразований пространства вычетов $G : H$.

Т е о р е м а 3. *Если связная разрешимая локально компактная группа G является транзитивной группой преобразований топологического пространства M , то стабильная подгруппа есть группа Ли, а G локально гомеоморфна топологическому произведению M на евклидово пространство.*

Так как G транзитивна на M , то M гомеоморфно пространству вычетов G по стабильной подгруппе H . По теореме 2 G локально изоморфна прямому произведению разрешимой группы Ли L и компактной коммутативной группы K . Но тогда G изоморфна фактор-группе от $L \times K$ по дискретному нормальному делителю D . Мы можем предполагать, что L связная и односвязная. Пусть $L \times K = \tilde{G}$, $\tilde{H}$ — прообраз H в группе $\tilde{G}$. Пространство $M = G : H$ гомеоморфно, очевидно, пространству $\tilde{G} : \tilde{H}$. Обозначим через A компоненту $\tilde{H}$ в L . Естественное гомоморфное отображение $\tilde{H} \rightarrow A$ имеет своим ядром $\tilde{H} \cap K$. Однако H нормальных делителей G не содержит, поэтому все нормальные делители $\tilde{G}$, содержащиеся в $\tilde{H}$, содержатся в D . В частности, содержится в D и $\tilde{H} \cap K$. Так как D дискретна, а K компактна, то $\tilde{H} \cap K$ конечно. Следовательно, $\tilde{H}$ непрерывно гомоморфно отображается в группу Ли L и ядро этого отображения дискретно. Отсюда $\tilde{H}$ — группа Ли. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть H_0 — связная компонента единицы $\tilde{H}$. Так как $\tilde{H}$ — группа Ли, то $\tilde{H}/H_0$ дискретна и, следовательно, пространство вычетов $\tilde{G} : \tilde{H}$ локально гомеоморфно $\tilde{G} : H_0$. Группу L мы выбрали связной и односвязной, поэтому всякая ее связная подгруппа Ли будет также односвязной. В частности, компонента H_0 в L односвязна, гомоморфизм $H_0 \rightarrow L$ есть изоморфизм и $H_0 \cap K = \{e\}$.

Докажем, что $\tilde{G} : H_0$ гомеоморфно топологическому произведению K на евклидово пространство. Обозначим через A_0 компоненту H_0 в L и пусть L', L'' — первый и второй коммутанты L . Доказательство будем вести индукцией по размерности L , считая, что для всех групп, допускающих прямое разложение $L \times K$, где L имеет меньшую размерность, утверждение уже доказано.

Если $A_0 L' \neq L$, то L можно разложить в полупрямое произведение однопараметрической подгруппы $x(t)$ и связного нормального делителя N , содержащего A_0 . Но тогда $\tilde{G} : H_0$ распадается в топологическое произведение $x(t)$ и пространства вычетов $NK : H_0$. Так как N имеет размерность, меньшую размерности L , то группа NK удовлетворяет индуктивным предположениям. Следовательно, $NK : H_0$ гомеоморфно топологическому произведению прямых и K . Отсюда $\tilde{G} : H_0$ также есть топологическое произведение прямых и K .

Остается рассмотреть случай, когда $A_0 L' = L$. Пусть $L/L'' = F$, образ A_0 при гомоморфизме $L \rightarrow L/L''$ есть некоторая подгруппа $B \subset F$. Из $A_0 L' = L$ следует, что $BF' = F$. Воспользуемся следующей очевидной леммой из теории групп Ли: если коммутант связной, односвязной группы Ли F абелев и если связная, замкнутая подгруппа B такова, что $BF' = F$, то F можно представить в виде произведения BU , где U — коммутативная связная подгруппа, $U \subset F'$, $B \cap U = \{e\}$. В нашем случае F и B удовлетворяют

условиям этой леммы, поэтому мы можем воспользоваться разложением $F = BU$. Обозначим через $\bar{U}$ прообраз U в L . Так как $U \subset F'$, то $\bar{U} \subset L'$ и $\bar{U}/L''$ — векторная группа. Отсюда следует, что $\bar{U}$ можно представить в виде полупрямого произведения нормального делителя L'' и системы однопараметрических групп $x_1(t_1), \dots, x_k(t_k)$. Соответствие

$$(t_1, \dots, t_k) \rightarrow x_1(t_1) \dots x_k(t_k)$$

между точками $(t_1, \dots, t_k)$ вспомогательного евклидова пространства E^k и соответственными элементами группы L взаимно однозначно и взаимно непрерывно. С другой стороны, всякий элемент L может быть однозначно записан в виде

$$x_1(t_1) \dots x_k(t_k)b, \quad b \in A_0L''.$$

Отсюда всякий элемент $g \in \bar{G}$ допускает единственную запись

$$x_1(t_1) \dots x_k(t_k)c, \quad c \in A_0L''K.$$

Следовательно, пространство $\bar{G} : H_0$ гомеоморфно топологическому произведению E^k и $A_0L''K$. Группа $A_0L''K$ имеет разрешимый сомножитель A_0L'' размерности, меньшей L . Отсюда по индукции следует, что $A_0L''K : H_0$ гомеоморфно топологическому произведению прямых и пространства K . Возвращаясь к группе $\bar{G}$, мы видим, что $\bar{G} : H_0$ гомеоморфно топологическому произведению K и евклидова пространства.

В заключение отметим, что изложенное доказательство устанавливает попутно следующее предложение: *пространство вычетов связной, односвязной разрешимой группы L по ее связной подгруппе гомеоморфно евклидову пространству.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. М.—Л., 1938.
2. С. Chevalley. Two theorems on solvable topological groups.— Lectures in Topology. Arbor, Univ. Michigan Press, Ann, 1941.

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ А. Н. КОЛМОГорова, А. А. ПЕТРОВА и Ю. М. СМЕРНОВА «ОДНА ФОРМУЛА ГАУССА ИЗ ТЕОРИИ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ»*



В [1] ищется максимум и минимум величины

$$\Omega = \sum_{r=1}^N \left(\sum_{k=1}^n \Omega_{rk}^2 \right)^2,$$

где Ω_{rk} — элементы вещественной ортогональной матрицы степени N ($n < N$).

Согласно [1] величина Ω окажется минимальной, если все суммы $\sum_{k=1}^n \Omega_{rk}^2$ будут равными. В связи с этим авторы указанной работы обратились ко мне с вопросом: *существует ли вещественная ортогональная матрица Ω^* степени N , у которой сумма квадратов первых n элементов в каждом столбце одна и та же (N, n произвольны, $n < N$)?*

Вопрос, очевидно, равносильен следующему: существует ли прямоугольная вещественная матрица A с n строками и N столбцами, строки которой ортогональны, сумма квадратов элементов каждой строки равна единице, а сумма квадратов элементов каждого столбца одна и та же и, следовательно, равна n/N ? Пример матрицы A строится ниже.

Если матрица Ω^* при некоторых n, N существует, то, располагая ее строки в обратном порядке, мы получим ортогональную матрицу Ω_1^* , у которой сумма квадратов первых $N - n$ элементов каждого столбца будет одна и та же. Поэтому можно считать, что $n \leq \frac{1}{2} N$. В случае $n = \frac{1}{2} N$ в качестве A можно взять пару каких-нибудь ортогональных матриц степени n , умноженных на $1/\sqrt{2}$ и поставленных рядом. Таким образом, можно предполагать, что $n < \frac{1}{2} N$.

Заметим еще, что для каждого m существует по меньшей мере 2^m взаимно ортогональных строк длины 2^m , все элементы которых равны ± 1 . Действительно, при $m = 1$ эти строки будут $1, 1$ и $1, -1$, а если для $m = s - 1$ искомые строки найдены и расположены в виде матрицы P , то строки матрицы $\begin{pmatrix} P & P \\ P & -P \end{pmatrix}$ будут искомыми при $m = s$.

Построение матрицы A можно осуществить теперь следующим образом. Представим N в форме

$$N = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_t} \quad (0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_t).$$

Пусть $\begin{vmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{vmatrix}$
 $2^{m_s} < n \leq 2^{m_{s+1}}, \quad p = 2^{m_{s+1}} + \dots + 2^{m_t}.$

Разобьем столбцы A на группы из $2^{m_1}, \dots, 2^{m_s}, p$ столбцов, а строки — соответственно на группы из $2^{m_1}, 2^{m_2} - 2^{m_1}, \dots, 2^{m_s} - 2^{m_{s-1}}, n - 2^{m_s}$ строк.

* Изв. АН СССР, сер. мат., 1947, 11, № 6, 567—568.

В результате матрица A разобьется на клетки A_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, s+1$). Клетки $A_{11}, \dots, A_{ss}$ и клетки $A_{1, s+1}, \dots, A_{s+1, s+1}$ заполняем числами ± 1 так, чтобы строки, стоящие друг под другом, были ортогональны. Согласно замечанию это сделать возможно. Остальные клетки A заполняем нулями. Теперь элементы A_{ii} умножаем на некоторые числа α_i , а элементы $A_{j, s+1}$ — на числа β_j ($i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, s+1$). Очевидно, при любых α_i, β_j строки матрицы A останутся ортогональными и нам надо только добиться, чтобы сумма квадратов элементов в каждом столбце была n/N , а в каждой строке 1. Условия относительно столбцов дают

$$\alpha_1^2 = \frac{n}{2^{m_1} N}, \quad \alpha_2^2 = \frac{n}{(2^{m_2} - 2^{m_1}) N}, \dots, \quad \alpha_s^2 = \frac{n}{(2^{m_s} - 2^{m_{s-1}}) N}, \quad (1)$$

$$2^{m_1} \beta_1^2 + (2^{m_2} - 2^{m_1}) \beta_2^2 + \dots + (2^{m_s} - 2^{m_{s-1}}) \beta_s^2 + (n - 2^{m_s}) \beta_{s+1}^2 = \frac{n}{N}. \quad (2)$$

Аналогично, условия относительно строк дают

$$p\beta_1^2 = 1 - \frac{n}{N}, \quad p\beta_i^2 = 1 - \frac{2^{m_i n}}{(2^{m_i} - 2^{m_{i-1}}) N}, \quad p\beta_{s+1}^2 = 1 \quad (i = 2, \dots, s). \quad (3)$$

Так как $n < \frac{1}{2} N$, то правые части в (3) положительны и, следовательно, вещественные значения для β_i найти возможно.

Равенство (2) вытекает из (1), (3) и на α_i, β_j новых ограничений не накладывает.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, А. А. Петров, Ю. М. Смирнов. Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1947, 11, № 6, 561—567.

О ВКЛЮЧЕНИИ ГРУППОВЫХ АЛГЕБР В АЛГЕБРЫ С ДЕЛЕНИЕМ*



Пусть заданы некоторое поле P и произвольная некоммутативная группа $\mathfrak{G}$. Групповую алгебру $\mathfrak{G}$ над P обозначим через $\mathfrak{G}_P$. Возникает вопрос, при каких условиях алгебра $\mathfrak{G}_P$ может быть расширена до алгебры с делением. Если поле P и группа $\mathfrak{G}$ упорядоченные, то групповая алгебра $\mathfrak{G}_P$ легко упорядочивается и речь идет о возможности вложения $\mathfrak{G}_P$ в упорядоченное тело. В статье Муфанг [1] показано, что $\mathfrak{G}_P$ можно вложить в упорядоченное тело, если $\mathfrak{G}$ — метабелева группа с образующими a, b, c и соотношениями $ba = abc, ca = ac, bc = cb$. Там же отмечено, что вопрос о вложимости $\mathfrak{G}_P$ в тело для случая свободной группы $\mathfrak{G}$ все еще остается открытым.

Цель настоящей заметки — доказать следующую теорему:

Т е о р е м а. Пусть P — произвольное поле, $\mathfrak{G}$ — упорядоченная группа. Групповая алгебра $\mathfrak{G}_P$ может быть расширена до некоторой алгебры $L(\mathfrak{G})$ с делением. Если поле P упорядоченное, то тело $L(\mathfrak{G})$ упорядочиваемо, притом с сохранением порядка элементов P и $\mathfrak{G}$.

Отсюда вытекает, что необходимым и достаточным условием для вложимости групповой алгебры $\mathfrak{G}_P$ в упорядоченное тело является упорядочиваемость группы $\mathfrak{G}$ и поля P . Известно, что свободная группа упорядочиваема **, следовательно, групповое кольцо свободной группы вложимо в алгебру с делением. Это дает положительное решение упомянутой проблемы Муфанг. Упорядочиваемы также нильпотентные группы без кручения, локально свободные группы и некоторые другие. Групповые алгебры всех этих групп вложимы в алгебры с делением. В частности, простейшей нильпотентной группой без кручения является и группа, рассмотренная Муфанг.

Перейдем к доказательству теоремы. Нам дана упорядоченная группа $\mathfrak{G}$ и произвольное, быть может, неупорядоченное поле P . Формальную сумму $\sum \alpha_i g_i$ ($\alpha_i \in P, g_i \in \mathfrak{G}, g_i \neq g_j$ для $i \neq j$) условимся называть l -рядом, если совокупность элементов $\mathfrak{G}$, имеющих в этой сумме ненулевые коэффициенты, вполне упорядочена по убыванию. Складывая по обычным правилам l -ряды или умножая их на элементы поля P , мы получим, очевидно, снова l -ряды. Чтобы две формальные суммы перемножить, нужно каждый член первой умножить на каждый член второй по формуле $ag \cdot \beta h = \alpha\beta \cdot gh$, полученные произведения записать в виде формальной суммы и привести подобные члены. Если подобных членов бесконечное множество, то произведение не определено.

Покажем, что произведение любых двух l -рядов определено и является l -рядом.

Достаточно обнаружить, что если $g_1 > \dots > g_\lambda > \dots$ $h_1 > \dots > h_\mu > \dots$ — две убывающие трансфинитные последовательности элементов $\mathfrak{G}$, то каждая цепочка вида $g_i h_j \leq g_i h_{j+1} \leq \dots$ содержит только конечное число различных произведений. В противном случае, выберем

* Докл. АН СССР, 1948, 60, № 9, 1499—1501.

** См., например, [2] и цитированную там литературу.

среди $g_{i_1}, g_{i_2}, \dots$ наибольший элемент g_{i_α} ; из элементов, следующих за g_{i_α} , выберем наибольший g_{i_β} и т. д. Из неравенств $g_{i_\alpha} h_{j_\alpha} \leq g_{i_\beta} h_{j_\beta} \leq \dots$ и $g_{j_\alpha} > g_{j_\beta} > \dots$ следует $h_{j_\alpha} < h_{j_\beta} < \dots$, что противоречит условию, так как $h_{j_\alpha}, h_{j_\beta}, \dots$ принадлежат множеству, вполне упорядоченному по убыванию.

Итак, совокупность l -рядов группы $\mathfrak{G}$ образует алгебру над полем P , содержащую групповое кольцо $\mathfrak{G}_P$ в качестве своей подалгебры.

Эту алгебру условимся обозначать $L(\mathfrak{G})$. Если поле P упорядоченное, то алгебру $L(\mathfrak{G})$ также можно упорядочить, называя положительным l -ряд с положительным коэффициентом при старшем члене. Единичный элемент группы $\mathfrak{G}$ является единицей алгебры $L(\mathfrak{G})$.

Покажем, что $L(\mathfrak{G})$ — алгебра с делением.

Ясно, что все дело сводится к построению обратного элемента для l -ряда вида

$$1 + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_\lambda g_\lambda + \dots = 1 + u,$$

где $1 > g_1 > g_2 > \dots > g_\lambda > \dots$. Если будет обнаружено, что ряд $1 - u + u^2 - u^3 + \dots$ имеет смысл, т. е. что по возведении u в требуемые степени и подстановки результатов в $1 - u + u^2 - u^3 + \dots$ получатся лишь конечные совокупности подобных членов, после приведения которых возникнет l -ряд, то формальное умножение $1 + u$ на $1 - u + u^2 - u^3 + \dots$ будет законно и даст единицу. Поэтому речь идет только о доказательстве следующей леммы:

Если $1 > g_1 > g_2 > \dots > g_\lambda > \dots$ — трансфинитная последовательность элементов группы $\mathfrak{G}$, то каждая неубывающая последовательность произведений этих элементов

$$g_i g_{i_1} \dots g_{i_k} \leq g_i g_{i_2} \dots g_{i_l} \leq \dots \quad (1)$$

содержит лишь конечное число различных произведений (различающихся сомножителями или порядком их).

Пусть $g \in \mathfrak{G}$, $g < 1$. Обозначим через $I(g)$ совокупность элементов $x \in \mathfrak{G}$, для которых $g < x^n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), а через $E(g)$ — совокупность элементов $x \in \mathfrak{G}$ таких, что при некотором n будет $g^n < y$, где $y = \min \{x, x^{-1}\}$. $E(g)$ и $I(g)$ — подгруппы группы $\mathfrak{G}$, причем $I(g)$ — нормальный делитель $E(g)$; фактор-группа $E(g)/I(g)$ архимедовски упорядоченная и коммутативная (см. [3]). Из неравенств $1 > g_1 > g_2 > \dots$ вытекает, что $1 = E(1) \subseteq E(g_1) \subseteq E(g_2) \subseteq \dots$. Положим $E_\alpha = \bigcup_{\lambda < \alpha} E(g_\lambda)$. Если все сомножители в (1) принадлежат E_1 , то лемма справедлива, так как ее условия не выполняются. Далее, воспользуемся трансфинитной индукцией. Пусть α — некоторое трансфинитное число и пусть лемма верна, если все сомножители (1) входят в некоторое E_λ , где $\lambda < \alpha$. Предположим теперь, что нам дана последовательность (1), все сомножители которой содержатся в E_α и которая противоречит лемме. Назовем классом сомножителя g_i наименьшее трансфинитное число β , для которого $g_i \in E(g_\beta)$. Мы можем i -е произведение записать в виде $u_{i0} a_{i1} u_{i1} a_{i2} \dots a_{is_i} u_{is_i}$, где $a_{i1}, \dots, a_{is_i}$ — сомножители высшего класса, а $u_{i0}, \dots, u_{is_i}$ — произведения промежуточных сомножителей. Из определения групп $E(g)$ вытекает, что класс каждого произведения в точности совпадает с классом сомножителей. Поскольку произведения (1) меньше единицы, то с возрастанием класса они должны убывать. Следовательно, произведения (1), начиная с некоторого места, имеют один

и тот же класс β . Если α предельное или $\beta < \alpha - 1$, то лемма по предположению верна. Поэтому будем считать, что $\beta = \alpha - 1$. Из $g_i \in I(g_\beta)$ следует $g_i > g_\beta$, и класс g_i меньше β . Таким образом, ни один из отмеченных множителей в $I(g_\beta)$ не содержится, в то время как все неотмеченные множители лежат в $I(g_\beta)$. Пусть наибольший среди отмеченных множителей всех произведений равен g . Тогда величина i -го произведения будет не больше g^s . Но при достаточно большом s элемент g^s будет меньше любого элемента $E(g_\beta)$, в частности, меньше любого заданного произведения (1). Отсюда следует, что число отмеченных множителей в каждом произведении не превосходит некоторой границы s .

Рассмотрим произведения $u_{10}, u_{20}, u_{30}, \dots$. Их множители содержатся в E_β и потому к ним лемма применима; в частности, значения этих произведений образуют множество, вполне упорядоченное по убыванию. Следовательно, мы можем найти бесконечную подпоследовательность индексов $m_1 < m_2 < \dots$ такую, чтобы $u_{m_t 0} \geq u_{m_{t+1} 0} \geq \dots$ и чтобы последовательность

$$a_{m_{t1}} u_{m_{t1}} a_{m_{t2}} \dots a_{m_{ts}} u_{m_{ts}} \quad (t = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

содержала бесконечное число различных произведений. При этих условиях последовательность (2) будет противоречить лемме. Из последовательности (2) тем же приемом можно выделить подпоследовательность

$$u_{m_{i1}} a_{m_{i2}} \dots a_{m_{is}} u_{m_{is}} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

снова противоречащую лемме. Продолжая этот процесс, мы не более чем через $2s$ шагов придем к некоторой подпоследовательности произведений $u_{1s}, u_{2s}, \dots$, противоречащей лемме. Но это невозможно, так как сомножители из $u_{1s}, u_{2s}, \dots$ содержатся в E_β .

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Moufang. Einige Untersuchungen über geordnete Schiefkörper.— J. reine und angew. Math., 1936, 176, N 4, 203—223.
2. Е. П. Шмбурева. К теории частично упорядоченных групп.— Мат. сб., 1947, 20, № 1, 145—175.
3. F. Levi. Ordered groups.— Proc. Indian Acad. Sci., 1942, 16, 256—263.

О НОРМИРОВАННЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ*



В нашей заметке, печатающейся в другом месте **, изучено соответствие между нильпотентными алгебрами Ли над полем рациональных чисел и абстрактными дивизионно полными нильпотентными группами без элементов конечного порядка ***. Там же указано, что это соответствие можно распространить и на более широкий класс обобщенно нильпотентных алгебр и групп. В настоящей заметке такое распространение фактически проводится. При этом оказывается естественным вместо абстрактных групп и алгебр рассматривать топологические группы и нормированные алгебры.

Соответствие между нормированными алгебрами Ли над полем вещественных чисел и принадлежащими им локальными группами было изучено Биркгофом [1]. Аналогичная задача для полей p -адических чисел в линейном случае решена Хуком [3] и в общем виде Дынкиным. В этих работах существенно, что основное поле содержит элементы с неединичной нормой. В нашем случае основное поле имеет дискретную топологию. Благодаря этому вместо обычных предельных переходов приходится сводить дело к случаю чисто дискретных алгебр и групп, указанному выше. В отличие от полей вещественных и p -адических чисел, соответствие получается между алгебрами и группами в целом.

§ 1. R -алгебры. Алгебру $\mathfrak{L}$ над полем рациональных чисел мы условимся называть R -алгеброй, если каждому ее элементу a поставлено в соответствие вещественное число $\|a\|$, обладающее свойствами:

- 1) $0 < \|a\| \leq 1/4, a \neq 0$; 2) $\|a + b\| \leq \max(\|a\|, \|b\|)$;
- 3) $\|\alpha a\| = \|a\|$; 4) $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$,

и если $\mathfrak{L}$ полна относительно метрики $\rho(a, b) = \|a - b\|$. Обозначим через $\mathfrak{L}_m$ совокупность элементов, норма которых не превосходит 4^{-m} . Из условий 1) — 4) непосредственно видно, что $\mathfrak{L}_m$ — идеал в $\mathfrak{L}$, являющийся одновременно открытым и замкнутым, и $\mathfrak{L}_m \subset \mathfrak{L}_{m+1}, \mathfrak{L}_m \mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}_{m+1}$. Алгебры вычетов $\mathfrak{U}_m = \mathfrak{L}/\mathfrak{L}_m$ ($m = 1, 2, \dots$) являются нильпотентными алгебрами с дискретной топологией над полем рациональных чисел. Естественные гомоморфизмы $\mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{U}_m$ порождают цепочку гомоморфизмов

$$\{0\} = \mathfrak{U}_1 \leftarrow \mathfrak{U}_2 \leftarrow \mathfrak{U}_3 \leftarrow \dots \quad (1.1)$$

Обратно, пусть задана цепочка гомоморфизмов (1.1) произвольных абстрактных нильпотентных алгебр над полем рациональных чисел. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{B}$, элементами которой являются последовательности $(a_1, a_2, \dots)$ ($a_m \in \mathfrak{U}_m, a_m \leftarrow a_{m+1}, m = 1, 2, \dots$), действия над которыми сводятся к соответственным действиям над компонентами a_m . Обозначим через $\mathfrak{B}_m$ ядро гомоморфного отображения $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{U}_m$. Идеалы $\mathfrak{B}_m$ не воз-

* Докл. АН СССР, 1948, 62, № 6, 745—748.

** А. И. Мальцев. Мат. сб., 1949, 25 (67), 347—366.

*** Дивизионно полными здесь называются группы, в которых уравнение $x^m = g$ ($m > 0$) имеет решение при любом g .

растают, и пересечение их состоит из нуля. Из нильпотентности алгебр $\mathfrak{U}_m$ следует, что последовательность $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}_2 \supset \dots$ можно уплотнить новыми идеалами так, чтобы получилась последовательность

$$\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}_2 \supset \mathfrak{C}_3 \supset \dots,$$

для которой при любом m имеют место включения $\mathfrak{B}\mathfrak{C}_m \subset \mathfrak{C}_{m+1}$, $\mathfrak{C}_m\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}_{m+1}$. Введем в алгебру $\mathfrak{B}$ норму, полагая $\|0\| = 0$ и $\|b\| = 2^{-2^n}$, если $b \in \mathfrak{C}_n$, $b \notin \mathfrak{C}_{n+1}$. Условия 1) — 4), очевидно, выполняются. Например, проверим последнее из них. Пусть $\|a\| = 2^{-2^m}$, $\|b\| = 2^{-2^n}$, $m \leq n$. Так как $b \in \mathfrak{C}_n$, то $ab \in \mathfrak{C}_{n+1}$ и

$$\|ab\| \leq 2^{-2^{n+1}} \leq 2^{-2^{n-2^m}} = \|a\| \cdot \|b\|.$$

Так же легко проверяется и полнота $\mathfrak{B}$. Алгебру $\mathfrak{B}$ мы условимся называть *нормированным пределом цепочки* (1.1).

Возвратимся к первоначальной алгебре $\mathfrak{L}$. В этой алгебре выделена цепочка идеалов $\mathfrak{L}_m$ и построена последовательность гомоморфизмов (1.4). Отображение $\mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}/\mathfrak{L}_m$ каждому элементу $a \in \mathfrak{L}$ относит в качестве соответствующего некоторый элемент $a_m \in \mathfrak{U}_m$. Тем самым каждому элементу $a \in \mathfrak{L}$ оказывается поставленной в соответствие последовательность $a_1, a_2, \dots$, являющаяся элементом предела $\mathfrak{B}$ цепочки (1.1). Мы получили отображение алгебры $\mathfrak{L}$ в алгебру $\mathfrak{B}$. Оно является, как легко видеть, топологическим изоморфизмом между $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{B}$. Следовательно, *R-алгебры и только они являются пределами цепочек обратных гомоморфизмов нильпотентных алгебр с дискретной топологией*. Воспользовавшись понятием аппроксимации, обычным в теории непрерывных групп, можно сказать, что *R-алгебры и только они аппроксимируемы дискретными нильпотентными алгебрами*.

§ 2. R-группы. Топологическая полная группа G будет называться *R-группой*, если в G существует цепочка замкнутых и одновременно открытых нормальных делителей

$$G = G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$$

таких, что пересечение их равно единице для любого m ($G, G_m \subset G_{m+1}$ и все фактор-группы G_m/G_{m+1} дивизионно полны и не содержат элементов конечного порядка. При соблюдении этих условий фактор-группы $G/G_m = H_m$ будут дискретными нильпотентными дивизионно полными группами без элементов конечных порядков. Естественные гомоморфизмы $G \rightarrow H_m$ порождают цепочку обратных гомоморфизмов

$$H_1 \leftarrow H_2 \leftarrow H_3 \leftarrow \dots, \quad (2.1)$$

и топологический предел этой цепочки изоморфен G (см. [2]).

Обратно, если дана последовательность гомоморфизмов дискретных нильпотентных дивизионно полных групп (2.1) без элементов конечных порядков, то ее топологический предел есть *R-группа*, так как содержит цепочку нормальных делителей, удовлетворяющих перечисленным выше условиям.

§ 3. Алгебры Ли R-групп. Рассмотрим некоторую *R-алгебру* $\mathfrak{L}$, являющуюся алгеброй Ли. Введем по обычному правилу для элементов $\mathfrak{L}$ новую операцию

$$a * b = \log(e^a e^b) = F(a, b), \quad (3.1)$$

где $F(a, b)$ — так называемый ряд Кемпбелла — Хаусдорфа. Число членов степени n в этом ряде не превосходит, очевидно, 2^n . Каждый член по норме

не более 4^{-n} . Поэтому ряд (3.1) сходится абсолютно для любых a, b из $\mathfrak{L}$ и определяет в $\mathfrak{L}$ ассоциативную операцию. Относительно этой операции $\mathfrak{L}$ является топологической группой, которую мы будем называть принадлежащей алгебре $\mathfrak{L}$.

Из формулы (3.1) непосредственно видно, что замкнутые подалгебры и идеалы алгебры $\mathfrak{L}$ будут замкнутыми, дивизионно полными подгруппами и соответственно нормальными делителями принадлежащей $\mathfrak{L}$ группы. В частности, отсюда следует, что *принадлежащая алгебре $\mathfrak{L}$ группа является R -группой*.

А. Пусть H — некоторая замкнутая, дивизионно полная подгруппа группы G , принадлежащей алгебре $\mathfrak{L}$. Покажем, что H является подалгеброй алгебры $\mathfrak{L}$. Рассмотрим идеалы $\mathfrak{L}_m$, образованные элементами с нормами, не превосходящими 4^{-m} . Обозначив через $\mathfrak{M}_m$ алгебру вычетов $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_m$ и одновременно фактор-группу $G/\mathfrak{L}_m$, мы сможем представить $\mathfrak{L}$ и G как предел цепочки гомоморфизмов

$$\mathfrak{M}_1 \leftarrow \mathfrak{M}_2 \leftarrow \dots \leftarrow \mathfrak{M}_m \leftarrow \dots$$

Пусть $\mathfrak{M}_m^*$ есть образ подгруппы H в $\mathfrak{M}_m$ при гомоморфизме $G \rightarrow \mathfrak{M}_m$. Так как H дивизионно полна, то ее образ $\mathfrak{M}_m^*$ будет также дивизионно полной подгруппой в группе $\mathfrak{M}_m$. Но группа $\mathfrak{M}_m$ принадлежит дискретной нильпотентной алгебре Ли $\mathfrak{M}_m$ над полем рациональных чисел. В силу [4] отсюда следует, что $\mathfrak{M}_m^*$ будет подалгеброй алгебры $\mathfrak{M}_m$. Из замкнутости H вытекает, что H является пределом цепочки

$$\mathfrak{M}_1^* \leftarrow \mathfrak{M}_2^* \leftarrow \dots \leftarrow \mathfrak{M}_3^* \leftarrow \dots,$$

следовательно, H будет подалгеброй и в $\mathfrak{L}$. Аналогичные рассуждения показывают также, что всякий замкнутый, дивизионно полный нормальный делитель G есть замкнутый идеал алгебры $\mathfrak{L}$.

В. Каждая R -группа принадлежит некоторой R -алгебре Ли. Пусть G — заданная R -группа. Представим ее в виде предела последовательности обратных гомоморфизмов

$$H_1 \leftarrow H_2 \leftarrow H_3 \leftarrow \dots, \quad (3.2)$$

где H_m — дискретные, нильпотентные, дивизионно полные группы без элементов конечного порядка. Из элементов H_m можно построить нильпотентную алгебру Ли над полем рациональных чисел; при этом групповой гомоморфизм между группами H_{m+1} и H_m будет и алгебраическим. Цепочку (3.2) можно рассматривать как цепочку гомоморфизмов алгебр. Нормированный предел ее состоит формально из тех же элементов, что и группа G . Операция группового умножения проекций a_m, b_m любых двух элементов a, b из G связана с операциями сложения и коммутирования этих проекций формулой (3.1). Поэтому той же формулой будут связаны и сами элементы a, b в алгебре и группе G , т. е. группа G принадлежит алгебре G .

С. Если принадлежащие R -алгебрам Ли $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ группы G_1, G_2 топологически изоморфны, то алгебры $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ также топологически изоморфны.

Алгебру Ли $\mathfrak{L}_1$ мы будем считать определенной на множестве элементов группы G_1 . Аналогично, элементами $\mathfrak{L}_2$ можно считать элементы G_2 . Мы хотим показать, что топологический изоморфизм между группами G_1, G_2 будет изоморфизмом (может быть, меняющим норму) и между алгебрами $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$. По условию группа G_1 содержит систему замкнутых и открытых дивизионно полных нормальных делителей $G_{11} \supset G_{12} \supset \dots$ с равным единице пересечением

и нильпотентными фактор-группами G_1/G_{1m} ($m = 1, 2, \dots$). Обозначим через G_{2m} нормальный делитель группы G_2 , отвечающий подгруппе G_{1m} . Согласно A , G_{1m} и G_{2m} — идеалы в алгебрах $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$. Фактор-группы $G_1/G_{1m}, G_2/G_{2m}$ принадлежат алгебрам $\mathfrak{L}_1/G_{1m}, \mathfrak{L}_2/G_{2m}$. Так как последние дискретны и нильпотентны, то групповой изоморфизм между G_1/G_{1m} и G_2/G_{2m} является в то же время изоморфизмом между алгебрами $\mathfrak{L}_1/G_{1m}$ и $\mathfrak{L}_2/G_{2m}$. Итак, соответствие между $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ обладает тем свойством, что оно с любой степенью точности сумму и произведение элементов из $\mathfrak{L}_1$ переводит в сумму и произведение соответственных элементов $\mathfrak{L}_2$. Согласно предположению это соответствие непрерывно. Следовательно, оно является изоморфизмом между $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$.

§ 4. *Р - пол н е н и я*. Отбросив в определении R -групп требование полноты и требование, чтобы фактор-группы G_{m+1}/G_m были дивизионно полными, но оставив условие, чтобы эти фактор-группы не содержали элементов конечного порядка, мы придем к несколько более широкому классу групп, которые условимся называть R_0 -группами. Согласно определению в каждой R_0 -группе G найдется система открытых и замкнутых нормальных делителей $G \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$ с единичным пересечением и нильпотентными фактор-группами $G/G_i = H_i$, не содержащими элементов конечного порядка. Рассмотрим цепочку естественных гомоморфизмов $H_1 \leftarrow H_2 \leftarrow \dots$. Каждую группу H_i можно включить в минимальную дивизионно полную нильпотентную группу H_i^* . Гомоморфизмы $H_i \leftarrow H_{i+1}$ однозначно распространяются в гомоморфизмы $H_i^* \leftarrow H_{i+1}^*$. Пусть G^* есть предел последовательности $H_1^* \leftarrow H_2^* \leftarrow \dots$. Очевидно, G^* содержит G в качестве своей подгруппы и, таким образом, всякая R_0 -группа может быть погружена в некоторую R -группу.

Например, пусть G — свободная абстрактная группа. Обозначим через $G^1 = G, G^2, G^3, \dots$ ее нижний центральный ряд. Беря $G^1, G^2, \dots$ в качестве полной системы окрестностей единицы, мы обратим G в топологическую R_0 -группу. Наконец, указанным выше способом мы можем погрузить G в R -группу G^* . Принадлежащая группе G^* алгебра Ли $\mathfrak{L}^*$ строится следующим образом. Берем свободную алгебру Ли $\mathfrak{L}$ над полем рациональных чисел того же ранга, что и группа G . Систему идеалов $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}^2, \mathfrak{L}^3, \dots$ принимаем в качестве окрестностей нуля $\mathfrak{L}$. Пополнение топологизированной алгебры $\mathfrak{L}$ и будет алгеброй $\mathfrak{L}^*$ группы G^* .

В заключение отметим, что R -группы могут быть охарактеризованы еще следующим путем. Условимся произвольную группу G называть R -нормированной, если каждому элементу $g \in G$ поставлено в соответствие вещественное число $\|g\|$, удовлетворяющее требованиям: 1) $\|g\| = \|g^m\| \leq 1/2$ ($g \neq e, m = \pm 1, \pm 2, \dots$); 2) $\|gh\| \leq \max(\|g\|, \|h\|)$; 3) $\|ghg^{-1}h^{-1}\| \leq \|g\| \cdot \|h\|$; 4) G полна относительно метрики $\rho(g, h) = \|gh^{-1}\|$; 5) G дивизионно полна как алгебраическая группа. Ясно, что всякая R -группа может быть R -нормирована. Обратное, множество G_i элементов R -нормированной группы G , нормы которых не превосходят 2^{-i} , является нормальным делителем G . Эти нормальные делители удовлетворяют требованиям § 2 и, таким образом, классы R -групп и R -нормируемых групп совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Birkhoff. Analytical group.— Trans. Amer. Math. Soc., 1938, 43, N 1, 61—101.
2. Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. М.—Л., 1938.
3. R. Hooke. Linear p -adic groups and their Lie algebras.— Ann. Math., 1942, 43, 641—655.
4. А. И. Мальцев. Нильпотентные группы без кручения.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, 13, № 3, 201—212.



Понятие ранга абелевой группы можно распространить на произвольные группы двумя способами: 1) можно говорить, что группа $\mathfrak{G}$ имеет ранг не выше R , если любое конечное число ее элементов содержится в некоторой подгруппе, допускающей R образующих, и 2) можно говорить, что $\mathfrak{G}$ имеет ранг не выше r , если любое конечное число ее элементов порождает подгруппу, имеющую r образующих. Наименьшие числа R и r , обладающие соответственно свойствами 1) и 2), мы условимся называть общим рангом и специальным рангом $\mathfrak{G}$. Если чисел, обладающих свойством 1) или 2), нет, то соответствующий ранг называется бесконечным.

Легко видеть, что оба ранга для коммутативных групп совпадают. Общий ранг симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ от n переменных равен 2, так как $\mathfrak{S}_n$ может быть порождена двумя подстановками. В то же время специальный ранг $\mathfrak{S}_n$ не менее $[n/2]$, поскольку подгруппа $\mathfrak{S}_n$, порожденная циклами $(1, 2), (3, 4) \dots$, имеет $[n/2]$ независимых образующих. Свободная группа с n образующими дает пример группы, у которой $R = n, r = \infty$.

В дальнейшем общий ранг группы мы будем называть просто ее рангом. Непосредственный подсчет показывает, что все абелевы, а также все нильпотентные группы конечного ранга счетны. Поэтому возникает предположение: не будут ли счетными вообще все группы конечного ранга? На этот вопрос в его самой общей форме следует ответить отрицательно. Действительно, группа $\mathfrak{S}$ конечных подстановок элементов любого множества $\mathfrak{M}$ имеет ранг 2, так как любое конечное число подстановок $\mathfrak{S}$ содержится в конечной симметрической группе, имеющей, как указывалось, две образующие. Мощность $\mathfrak{S}$ равна мощности $\mathfrak{M}$. Поэтому существуют группы ранга 2 любой мощности.

Мы покажем теперь, что для групп матриц положение иное.

Т е о р е м а. *Всякая группа $\mathfrak{G}$ конечного ранга R , допускающая изоморфное представление матрицами степени n над некоторым полем K , не более чем счетна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через P простое поле, содержащееся в K . Пусть элемент g из группы $\mathfrak{G}$ представляется матрицей $\|x_{ij}(g)\|$, где $i, j = 1, 2, \dots, n$. Присоединим к P все элементы $x_{ij}(g)$ для всех g . Расширенное поле обозначим через Q . Таким образом, всякий элемент из Q есть рациональная функция от конечного числа элементов $x_{ij}(g)$ с коэффициентами из P .

Возьмем теперь произвольное конечное число s элементов $q_1, q_2, \dots, q_s$ из Q . Каждый из них выражается через конечное число элементов $x_{ij}(g)$. Следовательно, $q_1, \dots, q_s$ выражаются рационально через элементы матриц, отвечающих некоторым элементам $g_1, \dots, g_t$ группы $\mathfrak{G}$. Но ранг $\mathfrak{G}$ равен R . Поэтому $g_1, \dots, g_t$ выражаются в виде произведений некоторых элементов

$g'_1, \dots, g'_R$ и их обратных. Отсюда следует, что элементы $q_1, \dots, q_s$ выражаются рационально через n^2R элементов матриц $\|g'_1\|, \dots, \|g'_R\|$. Мы видим, следовательно, что поле Q не может содержать более n^2R алгебраически независимых элементов и степень трансцендентности Q над P не более n^2R .

Согласно известной теореме Штейница, Q содержится в алгебраическом замыкании конечного трансцендентного расширения P . Поле P конечно или счетно, следовательно, счетно и алгебраическое замыкание конечного расширения P . Отсюда вытекает, что Q счетно. Но в таком случае матриц степени n с элементами из Q будет также счетное множество. Следовательно, мощность группы $\mathfrak{G}$ не выше счетной.

Только что доказанная теорема допускает одно интересное следствие. Известно, что счетные свободные группы могут быть представлены изоморфно матрицами степени 2 над полем рациональных чисел. С другой стороны, нами показано [1], что всякая группа, представимая матрицами степени n локально, допускает представление степени n в целом. Отсюда следует, что локально свободные группы представимы матрицами степени 2 над подходяще выбранным полем. Применяя теорему о счетности представимых групп конечного ранга, мы видим, что все локально свободные группы конечного ранга являются счетными.

Это представляет собой положительный ответ на вопрос, сформулированный А. Г. Курошем [2; 3, стр. 316].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами. — Мат. сб., 1940, 8, № 3, 405—422.
2. А. Г. Курош. Локально свободные группы. Докл. АН СССР, 1939, 24, № 2, 99—101.
3. А. Г. Курош. Теория групп. М.—Л., 1944.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ*



Пусть $\mathcal{G}$ — локально компактная топологическая группа со второй аксиомой счетности, M — топологическое пространство. Говорят, что $\mathcal{G}$ действует на M или что $\mathcal{G}$ есть группа движений M , если каждой паре элементов $g \in \mathcal{G}$, $m \in M$ поставлен в соответствие элемент из M , называемый произведением mg , непрерывно зависящий от g , m и такой, что

$$(mg)h = m(gh), \quad me = m,$$

где e — единица $\mathcal{G}$, g, h — произвольные элементы $\mathcal{G}$. Отсюда видно, что отображение $m \rightarrow mg$ для каждого фиксированного g из $\mathcal{G}$ является гомеоморфным отображением пространства M на себя. Совокупность элементов $\mathcal{G}$, оставляющих на месте все точки пространства M , является замкнутым нормальным делителем $\mathcal{N}$ в $\mathcal{G}$. Элементы $\mathcal{G}$, принадлежащие одному и тому же классу вычетов по $\mathcal{N}$, вызывают одинаковые преобразования M . Поэтому по существу на M действует не группа $\mathcal{G}$, а фактор-группа $\mathcal{G}/\mathcal{N}$. Если $\mathcal{N}$ — единичный нормальный делитель, то $\mathcal{G}$ называется эффективной на M . В этом случае ее элементы можно рассматривать как преобразования пространства M .

Далее, мы будем говорить, что $\mathcal{G}$ действует на M правильно, если нормальный делитель $\mathcal{N}$ дискретен.

Группа $\mathcal{G}$ действует на M транзитивно, если для любых двух точек m_1, m_2 из M найдется такой элемент $g \in \mathcal{G}$, что $m_1g = m_2$.

Два топологических пространства M_1, M_2 с действующими на них группами $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ называются изоморфными, если между $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ существует топологический гомоморфизм, а между M_1, M_2 — гомеоморфизм, при которых произведение элемента M_1 на элемент $\mathcal{G}_1$ переходит в произведение соответствующих элементов M_2 и $\mathcal{G}_2$.

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольная локально компактная топологическая группа со 2-й аксиомой счетности и $\mathcal{H}$ — ее некоторая замкнутая подгруппа. Совокупность правых смежных классов $\{\mathcal{H}g\}$, естественным образом топологизированная, является топологическим пространством с действующей на нем группой $\mathcal{G}$, если под произведением класса $\mathcal{H}g$ на элемент g' понимать обычное произведение $\mathcal{H}gg'$. Группа $\mathcal{G}$ на этом пространстве транзитивна, а нормальный делитель $\mathcal{N}$, о котором говорилось выше, является максимальным нормальным делителем $\mathcal{G}$, содержащимся в $\mathcal{H}$.

Пусть группа $\mathcal{G}$ действует транзитивно на каком-нибудь пространстве M . Выберем в M произвольную точку m и обозначим через $\mathcal{H}_m$ совокупность тех элементов $\mathcal{G}$, которые точку m переводят в себя. $\mathcal{H}_m$ называется стабильной подгруппой. Легко показывается, что M изоморфно пространству вычетов $\mathcal{G}$ по $\mathcal{H}_m$. Таким образом, изучение пространств с действующими на них транзитивными группами приводится к изучению пространств вычетов топологических групп $\mathcal{G}$ по их замкнутым подгруппам $\mathcal{H}$. При этом можно ограни-

* Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, 13, № 1, 9—32.

читься только случаем, когда нормальный делитель $\mathfrak{N}$ равен единице, т. е. когда подгруппа $\mathfrak{H}$ не содержит нетривиальных нормальных делителей $\mathfrak{G}$. Допустим, что группа $\mathfrak{G}$ имеет универсальную накрывающую $\tilde{\mathfrak{G}}$ и пусть $\tilde{\mathfrak{H}}$ — подгруппа $\tilde{\mathfrak{G}}$, не содержащая нормальных делителей. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{H}}$ прообраз $\mathfrak{H}$ в $\tilde{\mathfrak{G}}$. Пространство вычетов $\tilde{\mathfrak{G}} : \tilde{\mathfrak{H}}$ изоморфно пространству $\mathfrak{G} : \mathfrak{H}$, причем подгруппа $\tilde{\mathfrak{H}}$ содержит только дискретный нормальный делитель $\tilde{\mathfrak{G}}$. Это показывает, что при изучении пространств с транзитивными группами движений можно ограничиться рассмотрением только пространств вычетов односвязных групп по подгруппам, не содержащим недискретных нормальных делителей.

Конечная система нормальных делителей

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{G}_s \supset 1$$

топологической группы $\mathfrak{G}$ называется ее убывающим центральным рядом, если коммутатор

$$g^{-1}g_i^{-1}gg_i = (g, g_i)$$

любого элемента $g \in \mathfrak{G}$ с любым элементом $g_i \in \mathfrak{G}_i$ содержится в $\mathfrak{G}_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Группа $\mathfrak{G}$ называется нильпотентной, если она содержит убывающий центральный ряд, оканчивающийся единицей.

Среди топологических пространств с группой движений наиболее изученными являются пространства с компактной группой, в частности пространства с компактной группой Ли. Однако в теории групп Ли значительное место занимают нильпотентные группы. Поэтому наряду с пространствами, имеющими компактную группу движений, известный интерес могут представлять и пространства с нильпотентной группой движений. Свойства этих пространств и рассматриваются в настоящей работе.

Основные результаты следующие. Известно [3], что связная, локально компактная, нильпотентная группа, действующая правильно на некотором многообразии, есть группа Ли. Поэтому достаточно рассматривать только многообразия, на которых действует транзитивно связная нильпотентная группа Ли. Эти пространства распадаются в топологическое произведение евклидова и компактного многообразий, обладающих теми же свойствами.

Компактное многообразие с односвязной, связной, нильпотентной группой Ли движений мы называем нильмногообразием. Всякое нильмногообразие изоморфно пространству вычетов связной, односвязной нильпотентной группы Ли по ее дискретной подгруппе. Нильмногообразия однозначно определяются своими фундаментальными группами, причем некоторая абстрактная группа $\mathfrak{D}$ тогда и только тогда является фундаментальной группой некоторого нильмногообразия, если $\mathfrak{D}$ — нильпотентная группа с конечным числом образующих, не содержащая элементов конечного порядка.

Не всякая нильпотентная группа Ли $\mathfrak{G}$ может правильно и транзитивно действовать на некотором компактном многообразии; для этого необходимо и достаточно, чтобы алгебра Ли группы $\mathfrak{G}$ имела в подходящем базисе рациональные структурные константы.

Каждому нильмногообразию можно поставить в соответствие определенную с точностью до изоморфизма нильпотентную алгебру Ли над полем рациональных чисел. Для того чтобы два нильмногообразия имели изоморфные алгебры, необходимо и достаточно, чтобы они являлись конечнолистными накрытиями одного и того же третьего нильмногообразия.

§ 1. Равномерные подгруппы

Подгруппу $\mathfrak{H}$ связной группы $\mathfrak{G}$ мы будем называть **равномерной** в $\mathfrak{G}$, если пространство вычетов $\mathfrak{G}$ по замыканию $\mathfrak{H}$ подгруппы $\mathfrak{H}$ компактно.

Л е м м а 1. Если $\mathfrak{G}$ — векторная n -мерная группа, то для равномерности ее подгруппы $\mathfrak{H}$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{H}$ содержала n линейно независимых элементов.

Достаточность очевидна, так как если $\mathfrak{H}$ содержит линейно независимые элементы $d_1, \dots, d_n$, то $\mathfrak{H}$ содержит и подгруппу $\mathfrak{D}$ целочисленных линейных форм $m_1 d_1 + \dots + m_n d_n$. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ есть n -мерный тор и, следовательно, компактна. Пространство вычетов $\mathfrak{G}/\overline{\mathfrak{H}}$ есть непрерывный образ пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ и потому само компактно.

Необходимость также ясна. Если $\mathfrak{H}$ не содержит n линейно независимых элементов, то $\overline{\mathfrak{H}}$ лежит в m -мерном ($m < n$) пространстве $\mathfrak{H}^*$, являющемся линейной оболочкой $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{G}$ можно представить в виде прямой суммы $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{H}^*$, а пространство вычетов $\mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{H}}$ — в виде топологического произведения $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{H}^* : \overline{\mathfrak{H}}$. Так как подгруппа $\mathfrak{G}_1$ векторная и, следовательно, некомпактная, то пространство $\mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{H}}$ также некомпактно.

Л е м м а 2. Пусть группа Ли $\mathfrak{G}$ имеет систему однопараметрических подгрупп $x_1(t), \dots, x_r(t)$, обладающих следующими свойствами:

1°. Всякий элемент $\mathfrak{G}$ представим в форме

$$x_1(t_1)x_2(t_2)\dots x_r(t_r).$$

2°. Совокупность элементов вида $x_i(t_i)\dots x_r(t_r)$ есть замкнутый нормальный делитель $\mathfrak{G}_i$ в $\mathfrak{G}$.

3°. Фактор-группы $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$ однопараметрические векторные.

Тогда, если некоторая подгруппа $\mathfrak{H}$ содержит элементы $x_1(1), x_2(1), \dots, x_r(1)$, то $\mathfrak{H}$ равномерна в $\mathfrak{G}$.

В самом деле, условия 1°—3° показывают, что соответствие

$$x_1(t_1)x_2(t_2)\dots x_r(t_r) \longleftrightarrow (t_1, t_2, \dots, t_r)$$

дает взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение элементов $\mathfrak{G}$ на точки $(t_1, t_2, \dots, t_r)$ r -мерного евклидова координатного пространства. Поэтому совокупность $\mathfrak{M}$ элементов $\mathfrak{G}_1$, имеющих координаты $t_1, \dots, t_r$, по абсолютной величине не большие единицы, является компактным множеством. С другой стороны, каковы бы ни были числа $u_1, \dots, u_r$, всегда можно подобрать целые числа $n_1, \dots, n_r$ так, чтобы

$$x_1(u_1)\dots x_r(u_r)x_1(n_1)\dots x_r(n_r) = x_1(t_1)\dots x_r(t_r),$$

где $|t_i| < 1$. Это показывает, что $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, т. е. образ компактного множества $\mathfrak{M}$ при непрерывном отображении $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{H}}$ покрывает все пространство $\mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{H}}$. Следовательно, $\mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{H}}$ компактно.

Т е о р е м а 1. Пусть $\mathfrak{G}$ — связная, односвязная, нильпотентная группа Ли, $\mathfrak{H}$ — ее некоторая подгруппа. Для того чтобы $\mathfrak{H}$ была равномерной в $\mathfrak{G}$, необходимо и достаточно, чтобы фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}\mathfrak{G}'$, где $\mathfrak{G}'$ — коммутант $\mathfrak{G}$, была компактна.

Необходимость очевидна, так как пространство $\mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{H}\mathfrak{G}'}$ является непрерывным образом $\mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{H}}$. Мы покажем, что из компактности $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}\mathfrak{G}'$ вытекает существование системы однопараметрических подгрупп $x_i(t)$, для которых

$x_i(1) \in \mathfrak{H}$ и которые обладают свойствами 1°, 3° леммы 2 и свойством 2', заключающимся в том, что цепочка

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{G}_l \supset 1$$

является уплотнением нижнего центрального ряда группы $\mathfrak{G}^*$. Ввиду леммы 2 отсюда непосредственно будет следовать компактность пространства $\mathfrak{G} : \mathfrak{H}$. Пусть

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^2 \supset \mathfrak{G}^3 \supset \dots \supset \mathfrak{G}^l \supset 1$$

— нижний центральный ряд группы $\mathfrak{G}$. При $l = 1$ группа $\mathfrak{G}$ абелева и теорема тривиальна. Поэтому мы можем применить индукцию и считать, что для групп с меньшим значением l теорема уже доказана. Рассмотрим факторгруппу

$$\mathfrak{G}_* = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}^l.$$

Пусть $\mathfrak{H}_*$, $\mathfrak{G}_*^i$ — образы подгруппы $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}^i$ в $\mathfrak{G}_*$, при гомоморфизме $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_*$. Так как ядро гомоморфизма $\mathfrak{G}^l$ содержится в $\mathfrak{G}^2$, то $\mathfrak{G}^2 = (\mathfrak{G}_*)^2$ и $[\mathfrak{G}_* : \mathfrak{G}_*^2 \mathfrak{H}_*]$ совпадает с $\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^2 \mathfrak{H}$. Длина нижнего центрального ряда у $\mathfrak{G}_*$ равна $l - 1$. В силу индукции отсюда следует, что в $\mathfrak{G}_*$ найдется система однопараметрических подгрупп $x_1^*(t), \dots, x_s^*(t)$ со свойствами 1°, 2', 3° и таких, что $x_1^*(1), \dots, x_s^*(1)$ содержатся в $\mathfrak{H}_*$. Выберем в $\mathfrak{G}$ произвольные однопараметрические подгруппы $y_1(t), \dots, y_s(t)$, образы которых в $\mathfrak{G}_*$ совпадают соответственно с $x_1^*(t), \dots, x_s^*(t)$. Так как $x_1^*(1) \in \mathfrak{H}_*$, то $y_i(1)z_i \in \mathfrak{H}$, где z_i — подходящие элементы из $\mathfrak{G}^l$. По условию $\mathfrak{G}^l$ лежит в центре $\mathfrak{G}$ и является векторной группой. Рассмотрим однопараметрические подгруппы $z_i(t)$, идущие в $\mathfrak{G}^l$, для которых $z_i(1) = z_i$. Положим

$$x_i(t) = y_i(t)z_i(t).$$

Образы однопараметрических подгрупп $x_i(t)$ совпадают с $x_i^*(t)$ и $x_i(1) \in \mathfrak{H}$. Пусть

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)$$

— линейно независимая система подгрупп в $\mathfrak{G}^l$,

$$x_1(t), \dots, x_s(t), u_1(t), \dots, u_p(t)$$

является системой подгрупп группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей условиям 1°, 2', 3°. Пусть

$$x_m(t), \dots, x_s(t), u_1(t), \dots, u_p(t)$$

порождают $\mathfrak{G}^{l-1}$. Так как

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^2 \supset \dots \supset \mathfrak{G}^{l-1} \supset \mathfrak{G}^l \supset 1$$

— нижний центральный ряд группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}^l$ порождается коммутаторами элементов $\mathfrak{G}$ с элементами $\mathfrak{G}^{l-1}$ и даже коммутаторами образующих $\mathfrak{G}$ с об-

* Цепочка подгрупп $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^1 \supset \mathfrak{G}^2 \supset \dots \supset \mathfrak{G}^l \supset \mathfrak{G}^{l+1} = 1$ называется нижним центральным рядом группы $\mathfrak{G}$, если группа $\mathfrak{G}^{i+1}$ алгебраически порождается коммутаторами вида $g^{-1}h^{-1}gh$, где $g \in \mathfrak{G}$, $h \in \mathfrak{G}^i$; $i = 1, \dots, l+1$. Для односвязных нильпотентных групп все $\mathfrak{G}^i$ будут замкнутыми. Очевидно, $\mathfrak{G}^2 = \mathfrak{G}'$.

разующими $\mathfrak{G}^{l-1}$. Поэтому $\mathfrak{G}^l$ есть совокупность произведений элементов вида

$$x_{i\alpha}(t, u) = x_i(t)x_\alpha(u)x_i(-t)x_\alpha(-u) \quad (i = 1, \dots, s, \alpha = m, \dots, s). \quad (1)$$

Все $x_{i\alpha}(t, u)$ центральные в $\mathfrak{G}$, и из (1) следует

$$x_i(n)x_\alpha(u)x_i(-n) = x_\alpha(u)[x_{i\alpha}(1, u)]^n. \quad (2)$$

Проведем в $\mathfrak{G}^l$ через $x_{i\alpha}(1, u)$ однопараметрическую подгруппу $z(t)$, $z(1) = x_{i\alpha}(1, u)$. Из (2) вытекает, что при всех целых n

$$x_i(n)x_\alpha(u)x_i(-n) = x_\alpha(u)z(n). \quad (3)$$

В группе $\mathfrak{G}^l$ из соотношения $a^m = b^m$ следует $a = b$. Поэтому (3) имеет место и при всех рациональных значениях n . В силу непрерывности отсюда следует, что (3) имеет место вообще при любых вещественных n . Таким образом, $x_{i\alpha}(t, u)$ есть однопараметрическая подгруппа от t , лежащая в $\mathfrak{G}^l$.

Аналогично доказывается, что $x_{i\alpha}(t, u)$ есть однопараметрическая подгруппа и относительно u . Среди однопараметрических подгрупп $x_{i\alpha}(t, u)$ выберем максимальное число линейно независимых. Пусть это будут

$$x_{i_1\alpha_1}(t, u_1), \dots, x_{i_p\alpha_p}(t, u_p).$$

Очевидно,

$$x_{i_1\alpha_1}(1, 1), \dots, x_{i_p\alpha_p}(1, 1)$$

будут также линейно независимы и подгруппы

$$x_{s+m}(t) = x_{i_m\alpha_m}(t, 1), \quad m = 1, \dots, p,$$

дадут базис $\mathfrak{G}^l$. Система подгрупп

$$x_1(t), \dots, x_s(t), x_{s+1}(t), \dots, x_r(t)$$

обладает свойствами 1° , $2'$, 3° , и $x_1(1), \dots, x_r(1)$ входят в $\mathfrak{H}$. Теорема доказана. Вместе с тем из доказательства видно, что в условиях теоремы $\mathfrak{G}^i \cap \mathfrak{H}$ является равномерной подгруппой в $\mathfrak{G}^i$.

Т е о р е м а 2. *Всякое пространство M , на котором транзитивно действует связная нильпотентная группа Ли $\mathfrak{G}$, есть топологическое произведение компактного пространства с транзитивно действующей связной подгруппой группы $\mathfrak{G}$ и некоторого евклидова пространства.*

Для одномерной группы $\mathfrak{G}$ теорема тривиальна. Поэтому мы сделаем индуктивное предположение, что для пространств с транзитивно действующими группами размерности, меньшей чем у $\mathfrak{G}$, теорема справедлива. Пространство M есть пространство вычетов $\mathfrak{G}$ по некоторой ее замкнутой подгруппе $\mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{H}$ равномерна в $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}:\mathfrak{H}$ компактно и доказывать нечего. В противном случае согласно теореме 1 $\mathfrak{H}\mathfrak{G}^2/\mathfrak{G}^2$ не будет равномерна в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2$ *. Но $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2$ абелева. В силу леммы 1 группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2$ распадается в прямое произведение векторной однопараметрической подгруппы $\mathfrak{A}^*$ и замкнутой подгруппы $\mathfrak{H}^*$, содержащей $\mathfrak{G}^2/\mathfrak{G}^2$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ однопараметрическую подгруппу $\mathfrak{G}$, образ которой при гомоморфизме $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2$ дает $\mathfrak{A}^*$. Пусть $\mathfrak{B}$ — полный прообраз $\mathfrak{H}^*$. Тогда $\mathfrak{G}$ можно будет представить в виде полупрямого произведения $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$,

* Уже указывалось, что группу $\mathfrak{G}$, действующую на каком-либо пространстве M , можно всегда предполагать односвязной. Тогда коммутант $\mathfrak{G}^2$ будет замкнутым в $\mathfrak{G}$.

где $\mathcal{U} \cap \mathfrak{B} = 1$, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{B}$, а пространство $\mathfrak{G} : \mathfrak{H}$ — в виде топологического произведения прямой $\mathcal{U}$ и пространства $\mathfrak{B} : \mathfrak{H}$. Поскольку на $\mathfrak{B} : \mathfrak{H}$ действует группа $\mathfrak{B}$, размерность которой меньше $\mathfrak{G}$, то по индуктивному предположению

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{H} = \mathcal{U}_1 \times M_1,$$

где $\mathcal{U}_1$ — евклидово, а M_1 — компактное подпространство с транзитивно действующей связной подгруппой из $\mathfrak{B}$. Разложение

$$M_1 = (\mathcal{U} \times \mathcal{U}_1) \times M_1$$

будет, очевидно, искомым.

Условимся компактные пространства с транзитивно действующей связной нильпотентной группой Ли называть нильмногообразиями. Таким образом, теорема 2 утверждает, что всякое пространство с транзитивно действующей связной нильпотентной группой Ли гомеоморфно топологическому произведению евклидова пространства на некоторое нильмногообразие.

Л е м м а 3. Если связная замкнутая подгруппа $\mathcal{U}$ связной нильпотентной группы Ли $\mathfrak{G}$ инвариантна относительно какого-нибудь элемента $g \in \mathfrak{G}$, то $\mathcal{U}$ инвариантна и относительно однопараметрической подгруппы $g(t)$, проходящей через g .

Пусть G — алгебра Ли группы $\mathfrak{G}$, A — подалгебра, отвечающая подгруппе $\mathcal{U}$. Рассмотрим группу $\bar{\mathfrak{G}}$ внутренних автоморфизмов группы $\mathfrak{G}$. Эти автоморфизмы вызывают линейные преобразования пространства $\mathfrak{G}$ и $\bar{\mathfrak{G}}$ можно рассматривать как группу линейных преобразований G . Выбирая в G надлежащий базис, мы представим элементы $\bar{\mathfrak{G}}$ треугольными матрицами с единичной диагональю. Пусть

$$\bar{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 & g_{12}(t) & \dots & g_{1r}(t) \\ & 1 & \dots & g_{2r}(t) \\ & & \dots & \dots \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Так как $\bar{g}(t)$ — однопараметрическая подгруппа от t , то элементы $g_{ij}(t)$ являются полиномами от t . Нам нужно доказать, что подпространство A инвариантно относительно всех преобразований $\bar{g}(t)$, причем известно, что A заведомо инвариантно относительно $\bar{g}(1)$. Выберем в A произвольный элемент a и обозначим через $e_1, e_2, \dots, e_s$ какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему векторов из совокупности $a \cdot \bar{g}(t)$. Всякий вектор $a \cdot \bar{g}(t)$ будет допускать выражение

$$a \cdot \bar{g}(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + \dots + f_s(t)e_s,$$

где $f_1(t), \dots, f_s(t)$ ввиду полиномиальности матрицы (4) будут также полиномами от t . Пусть $e_i = a \cdot \bar{g}(t_i)$,

$$F(x_1, \dots, x_s) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_s(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_s) & \dots & f_s(x_s) \end{vmatrix},$$

где $x_1, \dots, x_s$ — независимые переменные. Линейная независимость векторов $e_1, \dots, e_s$ показывает, что

$$F(t_1, \dots, t_s) \neq 0$$

и тем более

$$F(x_1, \dots, x_s) \neq 0.$$

Но тогда найдутся целые числа $n_1, \dots, n_s$ такие, что

$$F(n_1, \dots, n_s) \neq 0.$$

Из последнего неравенства вытекает, что векторы $a \cdot \bar{g}(n_1), \dots, a \cdot \bar{g}(n_s)$ линейно независимы и что, следовательно, каждый вектор $a \cdot \bar{g}(t)$ может быть представлен в форме

$$a \cdot \bar{g}(t) = \alpha_1 \cdot a \bar{g}(n_1) + \alpha_2 \cdot a \bar{g}(n_2) + \dots + \alpha_s \cdot a \bar{g}(n_s).$$

Однако по условию векторы

$$a \bar{g}(n_i) = a [\bar{g}(1)]^{n_i}$$

лежат в подпространстве A . Поэтому в A лежат и все векторы $a \cdot \bar{g}(t)$.

Отметим такое следствие леммы 3: *если связная подгруппа $\mathfrak{A}$ связной нильпотентной группы Ли $\mathfrak{G}$ инвариантна относительно какой-либо равномерной подгруппы $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{A}$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}$.*

В самом деле, из доказательства теоремы 1 видно, что в $\mathfrak{G}$ существуют однопараметрические подгруппы $x_1(t), \dots, x_r(t)$, обладающие тем свойством, что всякий элемент $\mathfrak{G}$ можно представить в виде $x_1(t_1) \dots x_r(t_r)$ и что $x_i(1) \in \mathfrak{H}$. По условию группа $\mathfrak{A}$ инвариантна относительно $x_i(1)$. Согласно лемме 3 отсюда следует, что $\mathfrak{A}$ инвариантна относительно всех элементов $x_i(t)$. Но тогда $\mathfrak{A}$ будет инвариантна и относительно их произведений $x_1(t_1) \dots x_r(t_r)$, т. е. относительно всех элементов группы $\mathfrak{G}$.

Т е о р е м а 3. *Если связная нильпотентная группа Ли $\mathfrak{G}$ действует транзитивно и правильно на компактном пространстве M , то стабильная подгруппа $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{G}$ дискретна.*

Пусть $\tilde{\mathfrak{G}}$ — односвязная накрывающая для $\mathfrak{G}$, $\tilde{\mathfrak{D}}$ — прообраз $\mathfrak{D}$ в $\tilde{\mathfrak{G}}$. Пространство M изоморфно пространству вычетов $\tilde{\mathfrak{G}} : \tilde{\mathfrak{D}}$. Так как M компактно, то $\tilde{\mathfrak{D}}$ равномерна в $\tilde{\mathfrak{G}}$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{D}}_0$ связную компоненту единицы $\tilde{\mathfrak{D}}$. $\tilde{\mathfrak{D}}_0$ есть нормальный делитель в $\tilde{\mathfrak{D}}$ и согласно следствию леммы 3 $\tilde{\mathfrak{D}}_0$ будет нормальным делителем в $\tilde{\mathfrak{G}}$. Но группа $\tilde{\mathfrak{G}}$ действует на M правильно. Поэтому стабильная подгруппа $\mathfrak{D}$ связных нормальных делителей $\mathfrak{G}$, отличных от единицы, содержать не может, т. е. $\tilde{\mathfrak{D}}_0 = 1$ и $\tilde{\mathfrak{D}}$ — дискретная подгруппа.

Теорема 3 утверждает, что нильногообразия совпадают с пространствами вычетов связных, односвязных, нильпотентных групп Ли $\mathfrak{G}$ по их равномерным дискретным подгруппам $\mathfrak{D}$. Топологическое значение подгрупп $\mathfrak{D}$ известно [5]. Они изоморфны фундаментальным группам пространств вычетов $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}$. В частности, естественное отображение $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G} : \mathfrak{D}$ показывает, что $\mathfrak{G}$ является односвязным накрывающим многообразием для нильногообразия $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}$. Так как пространство связной, односвязной, нильпотентной группы Ли является евклидовым, то односвязное накрывающее пространство каждого нильногообразия является евклидовым.

Следующее условие является необходимым для дискретности подгруппы $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{G}$:

Т е о р е м а 4. *Если $\mathfrak{D}$ — равномерная дискретная подгруппа связной, односвязной, нильпотентной группы Ли $\mathfrak{G}$, то образ $\mathfrak{D}$ в факторгруппе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2$ равномерен и дискретен.*

В самом деле, выберем в $\mathfrak{D}$ такую систему элементов $d_1, \dots, d_s$, чтобы их образы в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2$ порождали равномерную и дискретную подгруппу. Обозначим через $\mathfrak{D}_0$ подгруппу из $\mathfrak{D}$, порожденную элементами $d_1, \dots, d_s$. Группа $\mathfrak{D}_0$ дискретна, и в силу теоремы 1 пространство вычетов $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}_0$ компактно. Естественное отображение $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}_0 \rightarrow \mathfrak{G} : \mathfrak{D}$ дает накрытие многообразия $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}$ многообразием $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}_0$. Так как $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}_0$ компактно, то это накрытие конечной кратности. Пусть p — его индекс. $\mathfrak{D}_0$ и $\mathfrak{D}$ — фундаментальные группы многообразий $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}$, поэтому p есть индекс подгруппы $\mathfrak{D}_0$ в $\mathfrak{D}$. Но индекс $\mathfrak{D}_0 \mathfrak{G}^2$ в $\mathfrak{D} \mathfrak{G}^2$ не больше индекса $\mathfrak{D}_0$ в $\mathfrak{D}$ и, таким образом, конечен. По условию $\mathfrak{D}_0 \mathfrak{G}^2 / \mathfrak{G}^2$ дискретна в $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}^2$. Отсюда следует, что $\mathfrak{D} \mathfrak{G}^2 / \mathfrak{G}^2$ также дискретна в $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}^2$.

Условия теоремы 4 заведомо не являются достаточными для дискретности $\mathfrak{D}$, так как образ подгруппы $\mathfrak{D} \mathfrak{G}^2$ в $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}^2$ всегда совпадает с образом $\mathfrak{D}$.

§ 2. Канонический базис

Для исследования свойств дискретных подгрупп удобно воспользоваться формулой Кемпбелла — Хаусдорфа. Пусть $\mathfrak{K}$ — ассоциативная алгебра формальных степенных рядов от независимых некоммутирующих переменных u, v . Формула Кемпбелла — Хаусдорфа дает выражение для z , удовлетворяющего соотношению

$$e^z = e^u e^v$$

в виде бесконечного ряда

$$z = u + v + \frac{1}{2} [u, v] + \dots, \quad (5)$$

где $[u, v] = uv - vu$, а точками обозначены члены, образованные из u, v с помощью операции $[\]$, примененной несколько раз. Рассмотрим нильпотентную алгебру Ли $\mathfrak{G}$. Введем для элементов $\mathfrak{G}$ новую операцию умножения, считая, что

$$u \times v = u + v + \frac{1}{2} [u, v] + \dots, \quad (6)$$

где правая часть совпадает с правой частью формулы (5), а скобки означают операцию коммутирования в алгебре $\mathfrak{G}$. Обозначая через l длину убывающего центрального ряда алгебры $\mathfrak{G}$, мы видим, что правая часть в (6) будет содержать только конечное число членов и вопрос о сходимости в этом случае не возникает.

Известно [6], что умножение $\times$ ассоциативно и элементы $\mathfrak{G}$ образуют относительно него группу Ли $\mathfrak{G}$, алгебра которой изоморфна $\mathfrak{G}$. Совокупность элементов вида αa , где параметр α пробегает все вещественные числа, является однопараметрической подгруппой, так как формула (6) дает

$$\alpha a \times \beta a = \alpha a + \beta a + \frac{1}{2} [\alpha a, \beta a] + \dots = (\alpha + \beta) a.$$

Следовательно, через каждый элемент $\mathfrak{G}$ проходит однопараметрическая подгруппа и эта подгруппа изоморфна вещественной прямой. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{G}$ связна и односвязна.

Выберем в алгебре $\mathfrak{G}$ такой базис $e_1, e_2, \dots, e_r$, чтобы совокупность элементов вида

$$\alpha_i e_i + \alpha_{i+1} e_{i+1} + \dots + \alpha_r e_r$$

являлась идеалом G_i в G . Всякий элемент g алгебры G , а следовательно, и группы $\mathfrak{G}$, может быть однозначно представлен в форме

$$g = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_r e_r.$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ мы будем называть координатами 1-го рода элемента g , а векторы $e_1, \dots, e_r$ — системой координат 1-го рода. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_r$ — координаты 1-го рода элементов x, y группы $\mathfrak{G}$, $\xi_1, \dots, \xi_r$ — координаты их произведения $z = xy$. По предположению алгебра G нильпотентна и совокупность элементов вида

$$\alpha_i e_i + \dots + \alpha_r e_r$$

есть идеал G_i в G . Отсюда следует, что $[a, e_i] \in G_{i+1}$, где a — любой элемент G . Поэтому, вычисляя $x \times y$ согласно формуле (6), мы найдем для $\xi_1, \dots, \xi_r$ выражения

$$\xi_i = \xi_i + \eta_i + p_i(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}; \eta_1, \dots, \eta_{i-1}), \quad (7)$$

где $p(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}; \eta_1, \dots, \eta_{i-1})$ — полиномы от переменных $\xi_1, \dots, \xi_{i-1}; \eta_1, \dots, \eta_{i-1}$. Мы уже видели, что однопараметрические подгруппы в $\mathfrak{G}$ имеют вид $x(t) = tx(1)$. Обозначив через $\xi_1, \dots, \xi_r$ координаты $x(t)$, а через $\xi_1^0, \dots, \xi_r^0$ — координаты $x(1)$, мы получим

$$\xi_i = \xi_i^0 t \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (8)$$

Наряду с координатами 1-го рода нам будут нужны еще координаты 2-го рода. Пусть система однопараметрических подгрупп $x_1(t), \dots, x_r(t)$ в $\mathfrak{G}$ удовлетворяет требованиям 1°–3° леммы 2. Тогда всякий элемент $\mathfrak{G}$ может быть однозначно представлен в виде

$$x = x_1(t_1)x_2(t_2) \dots x_r(t_r).$$

Числа $t_1, t_2, \dots, t_r$ мы будем называть координатами, а подгруппы $x_1(t_1), \dots, x_r(t_r)$ — системой координат 2-го рода. Если векторы $e_1, \dots, e_r$ дают систему координат 1-го рода в $\mathfrak{G}$, то, проводя через них однопараметрические подгруппы $x_i(t) = te_i$, мы, очевидно, получим систему координат 2-го рода. Эту систему координат мы будем называть соответствующей первой. Обратно, если $x_1(t), \dots, x_r(t)$ — система координат 2-го рода, то $x_1(1), \dots, x_r(1)$ дают соответствующую систему координат 1-го рода. Повторным применением формулы (6) получим

$$\begin{aligned} x &= x_1(t_1) \dots x_r(t_r) = t_1 e_1 \times t_2 e_2 \times \dots \times t_r e_r = \\ &= t_1 e_1 + t_2 e_2 + \dots + t_r e_r + \dots, \end{aligned}$$

где опущенные члены возникают из $t_1 e_1, \dots, t_r e_r$ в результате операции коммутирования. Вспоминая, что

$$[a, e_i] = \alpha_{i+1} e_{i+1} + \dots + \alpha_r e_r,$$

мы непосредственно видим, что координаты 1-го рода $\xi_1, \dots, \xi_r$ имеют такие выражения:

$$\xi_i = t_i + \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_{i-1}), \quad (9)$$

где φ_i — полиномы. Отсюда

$$t_i = \xi_i + \psi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}), \quad (10)$$

где ψ_i — также полиномы. Наконец, сравнивая (9), (10) с (7), мы приходим к выводу, что если $t_1, \dots, t_r$ и $u_1, \dots, u_r$ — координаты 2-го рода элементов x, y , а $v_1, \dots, v_r$ — соответственные координаты их произведения $z = xy$, то

$$v_i = t_i + u_i + q_i(t_1, \dots, t_{i-1}; u_1, \dots, u_{i-1}), \quad (11)$$

где q_i — полиномы.

Аналогично, если $u_1, \dots, u_r$ — координаты 2-го рода элемента $g(t)$, где $g(t)$ — однопараметрическая подгруппа, то $u_1, \dots, u_r$ являются полиномами от t^* .

Рассмотрим абстрактную нильпотентную группу $\mathfrak{D}$. Элементы $d_1, d_2, \dots, d_r$ мы будем называть каноническим базисом $\mathfrak{D}$, если всякий элемент $d \in \mathfrak{D}$ может быть представлен в виде

$$d = d_1^{n_1} d_2^{n_2} \dots d_r^{n_r};$$

совокупность элементов вида $d_1^{n_1} \dots d_r^{n_r}$ образует нормальный делитель $\mathfrak{D}_i$ группы $\mathfrak{D}$ и фактор-группы $\mathfrak{D}_i/\mathfrak{D}_{i+1}$ бесконечные циклические. Целые числа $n_1, \dots, n_r$ будут называться каноническими координатами d .

Л е м м а 4. *Всякая равномерная дискретная подгруппа $\mathfrak{D}$ связной, односвязной, нильпотентной группы Ли $\mathfrak{G}$ содержит по крайней мере один канонический базис.*

В самом деле, если $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^2 \supset \dots \supset \mathfrak{G}^l \supset 1$ — убывающий центральный ряд группы $\mathfrak{G}$, то согласно замечанию в конце доказательства теоремы 1 пересечение $\mathfrak{G}^l \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_l$ есть равномерная подгруппа в $\mathfrak{G}^l$. Пусть

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{D}_l = \mathfrak{G}_l, \quad \mathfrak{G}^l/\mathfrak{D}_l = \mathfrak{G}_l^l, \quad \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_l = \mathfrak{D}_l^l.$$

Подгруппа $\mathfrak{D}_*$ дискретна в $\mathfrak{G}_*$, $\mathfrak{G}_*^l$ компактна. Поэтому $\mathfrak{D}_*$, $\mathfrak{D}_*^l$ замкнуты в $\mathfrak{G}_*$ и образ $\mathfrak{D}_*$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^l$ также замкнут. Так как $\mathfrak{D}$ счетна, то ее образ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^l$ дискретен. Мы можем сделать индуктивное предположение, что для групп с меньшей длиной центрального ряда лемма доказана. Группа $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_l$ является равномерной дискретной подгруппой в группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^l$ с длиной центрального ряда $l-1$. Согласно индукции в $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_l$ существует канонический базис $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_s$. Пусть $d_1, \dots, d_s$ — прообразы элементов $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_s$ в $\mathfrak{D}$. Обозначим через $d_{s+1}, \dots, d_r$ какой-нибудь базис абелевой группы $\mathfrak{D}_l$. Тогда $d_1, \dots, d_s, d_{s+1}, \dots, d_r$ будет, очевидно, каноническим базисом $\mathfrak{D}$.

Л е м м а 5. *Пусть $\mathfrak{D}$ — равномерная дискретная подгруппа связной, односвязной, нильпотентной группы Ли $\mathfrak{G}$ и $d_1, \dots, d_r$ — канонический базис $\mathfrak{D}$. Проведем через $d_1, \dots, d_r$ однопараметрические подгруппы*

$$d_i(t), \quad d_i(1) = d_i \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Тогда подгруппы $d_1(t), \dots, d_r(t)$ будут обладать свойствами 1°—3° леммы 2.

Согласно теореме 1 в $\mathfrak{G}$ найдется система координат 2-го рода $x_1(t), \dots, x_r(t)$ такая, что $x(1) \in \mathfrak{D}$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Каждая подгруппа $d_i(t)$ может быть представлена в виде]

$$d_i(t) = x_1(u_{i1})x_2(u_{i2}) \dots x_r(u_{ir}),$$

* Другие доказательства этих предложений находятся в [3] и [4].

где $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ir}$ — полиномы от t . На основании формулы (14) произведение $d_1(t_1) \dots d_r(t_r)$ мы можем представить в виде

$$d_1(t_1) \dots d_r(t_r) = x_1(u_1)x_2(u_2) \dots x_r(u_r), \quad (12)$$

где $u_1, u_2, \dots, u_r$ будут снова полиномами от $t_1, t_2, \dots, t_r$. При целых значениях параметров $u_1, \dots, u_r$ произведение $x_1(u_1) \dots x_r(u_r)$ входит в $\mathfrak{D}$. Поэтому, выбирая подходящие целые значения для $t_1, \dots, t_r$, мы можем получить любую систему целых значений для $u_1, \dots, u_r$. Это означает, что $u_1, \dots, u_r$, рассматриваемые как полиномы от независимых переменных $t_1, \dots, t_r$, являются алгебраически независимыми. Покажем, что совокупность элементов вида $d_i(t_i) \dots d_r(t_r)$ образует нормальный делитель $\mathfrak{G}_i$ в $\mathfrak{G}$. Для $\mathfrak{G}_r$ это очевидно. Действительно, элемент d_r перестановочен со всеми элементами $\mathfrak{D}$, следовательно, элементы однопараметрической подгруппы $d_r(t)$ также перестановочны со всеми элементами $\mathfrak{D}$. Но $\mathfrak{D}$ — равномерная подгруппа в $\mathfrak{G}$, поэтому в силу леммы 3 элементы $d_r(t)$ перестановочны со всеми элементами $\mathfrak{G}$. Далее применяем индукцию. Пусть известно, что совокупность элементов вида

$$d_i(t_i) \dots d_r(t_r)$$

образует нормальный делитель $\mathfrak{G}_i$. Тогда элементы вида

$$d_{i-1}(t_{i-1})d_i(t_i) \dots d_r(t_r)$$

дадут некоторую подгруппу $\mathfrak{G}_{i-1}$ в $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{G}_{i-1} \subset \mathfrak{G}_i$, то в равенстве (12) слева можно вычеркнуть сомножитель $d_{i-1}(t_{i-1})$, причем полиномы $u_1, \dots, u_r$ от $t_1, \dots, t_{i-2}, t_i, \dots, t_r$ все еще будут алгебраически независимы. Но r полиномов от $r-1$ переменных алгебраически независимыми быть не могут, таким образом, $\mathfrak{G}_{i-1} \neq \mathfrak{G}_i$.

Рассмотрим фактор-группу $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$. Эта фактор-группа односвязна, так как $\mathfrak{G}$ односвязна, а нормальный делитель $\mathfrak{G}_i$ связан. Обозначим через $\mathfrak{D}^*$ образ подгруппы $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$. Подгруппа $\mathfrak{D}^*$ равномерна в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$, образ d_{i-1}^* элемента d_{i-1} является центральным в $\mathfrak{D}^*$. Следовательно, однопараметрическая подгруппа $d_{i-1}^*(t)$ центральная в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$ и, таким образом, $\mathfrak{G}_{i-1}$ есть нормальный делитель. Из односвязности $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$ вытекает, что подгруппа $\mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_i$ векторная. Лемма доказана.

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}^*$ — равномерные дискретные подгруппы связанных, односвязных, нильпотентных групп Ли $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$. Тогда всякий изоморфизм между $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}^*$ может быть однозначно продолжен до топологического изоморфизма между $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$. В частности, всякий автоморфизм $\mathfrak{D}$ однозначно продолжится до топологического автоморфизма $\mathfrak{G}$.

Для доказательства рассмотрим какой-нибудь канонический базис $d_1, \dots, d_r$ группы $\mathfrak{D}$. Пусть $d_1^*, \dots, d_r^*$ — элементы группы $\mathfrak{D}^*$, отвечающие в заданном изоморфном отображении элементам $d_1, \dots, d_r$. Система $d_1^*, \dots, d_r^*$ образует канонический базис в $\mathfrak{G}^*$. Проведем однопараметрические подгруппы $d_i(t), d_i^*(t)$, где

$$d_i(1) = d_i, \quad d_i^*(1) = d_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

В силу леммы 5 $d_1(t), \dots, d_r(t)$ и $d_1^*(t), \dots, d_r^*(t)$ — системы координат 2-го рода в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$. Назовем элементы

$$d_1(t_1) \dots d_r(t_r) = g \quad \text{и} \quad d_1^*(t_1) \dots d_r^*(t_r) = g^*$$

соответственными. Это соответствие между $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$ взаимно однозначное и взаимно непрерывное. Нам надо показать, что при нем произведение gg' переходит в произведение $g^*g'^*$. Пусть

$$g' = d_1(t'_r) \dots d_r(t'_r), \quad g'^* = d_1^*(t'_1) \dots d_r^*(t'_r),$$

$$gg' = d_1(u_1) \dots d_r(u_r), \quad g^*g'^* = d_1^*(v_1) \dots d_r^*(v_r).$$

По формуле (11) имеем

$$u_i = t_i + t'_i + q_i(t_1, \dots, t_{i-1}; t'_1, \dots, t'_{i-1}),$$

$$v_i = t_i + t'_i + q_i^*(t_1, \dots, t_{i-1}; t'_1, \dots, t'_{i-1}),$$

где q_i, q_i^* — полиномы. При целых значениях t_j и t'_j элементы g, g', g^*, g'^* лежат соответственно в $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}^*$, и в силу изоморфизма этих групп имеем

$$q_i(t_1, \dots, t_{i-1}; t'_1, \dots, t'_{i-1}) = q_i^*(t_1, \dots, t_{i-1}; t'_1, \dots, t'_{i-1}). \quad (13)$$

Равенство (13), справедливое для целых значений аргументов, будет справедливо и для всех вещественных значений их. Поэтому $u_i = v_i$, т. е. $(gg')^* = g^*g'^*$.

С л е д с т в и е. *Нильногообразия, имеющие изоморфные фундаментальные группы, сами изоморфны.*

§ 3. Линейная представимость

Мы установили, что каждое нильногообразие однозначно определяется своей фундаментальной группой. Возникает вопрос: какие же абстрактные группы могут быть фундаментальными группами нильногообразий? Необходимые условия найти легко. Каждое нильногообразие M есть пространство вычетов связной, односвязной, нильпотентной группы Ли $\mathfrak{G}$ по некоторой ее дискретной, равномерной подгруппе $\mathfrak{D}$. Фундаментальная группа M изоморфна $\mathfrak{D}$. Было доказано, что $\mathfrak{D}$ содержит канонический базис и, следовательно, имеет конечное число образующих. С другой стороны, $\mathfrak{D}$ как подгруппа нильпотентной группы $\mathfrak{G}$, не содержащей элементов конечного порядка, сама нильпотентна и не содержит элементов конечного порядка. Наша цель теперь установить, что эти условия являются и достаточными.

Л е м м а 6. *Пусть $\mathfrak{N}$ — система линейных преобразований комплексного векторного пространства V , матрицы которых в надлежащей системе координат приводятся к треугольной форме с единичной диагональю. Далее, пусть T — неособенное линейное преобразование пространства V , оставляющее систему $\mathfrak{N}$ инвариантной и производящее в ней нильпотентный автоморфизм, т. е. $T^{-1}\mathfrak{N}T = \mathfrak{N}$ и для каждого N из $\mathfrak{N}$ выражение $\{T\{T \dots \{TN\} \dots\}\}$, где $\{TN\} = T^{-1}N^{-1}TN$, при достаточном числе сомножителей равно единичной матрице E . Тогда в подходящей системе координат матрицы $\mathfrak{N}$ и T распадутся одновременно на диагональные клетки, каждая из которых будет треугольной матрицей с равными диагональными элементами.*

Предположим, что размерность V есть n и что для пространств меньшей размерности лемма доказана. Обозначим через V_k совокупность векторов a , удовлетворяющих соотношению

$$a(N - E)^k = 0$$

при любом N и $\mathfrak{N}$. Равенство

$$aT(N - E)^k = aT(N - E)^k T^{-1} T = a(TNT^{-1} - E)^k T$$

показывает, что подпространства V_k инвариантны относительно T . Из условий леммы видно, что $V_n = V$. Выберем в V_1 базис $e_1, \dots, e_{n_1}$ так, чтобы матрица преобразования T в V_1 имела нормальную форму Жордана. Затем дополним его элементами $e_{n_1+1}, \dots, e_{n_2}$ до такого базиса V_2 , чтобы матрица преобразования T в пространстве вычетов V_2/V_1 также имела форму Жордана, и т. д. В результате мы получим базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V , в котором матрицы $\mathfrak{N}$ и T будут иметь треугольную форму. Подпространство V^* с базисом $e_2, \dots, e_n$ будет инвариантным и, значит, матрицы T и $\{N\}$ будут иметь вид

$$N = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & N^* \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \alpha & t \\ 0 & T^* \end{pmatrix},$$

где n, t — их первые строки. Так как система матриц $\{N^*\}$, T^* удовлетворяет условиям леммы и действует в пространстве V^* размерности $n - 1$, то по индукции мы можем считать, что базис $e_2, \dots, e_n$ выбран таким образом, что N и T имеют вид:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & n_1 & n_2 & \dots & n_p \\ & N_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & N_2 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ & & & & N_p \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \alpha & t_1 & t_2 & \dots & t_p \\ & T_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & T_2 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ & & & & T_p \end{pmatrix} \quad (14)$$

где T_k — треугольная матрица, у которой на главной диагонали стоит одно и то же число α_k , а N_k — треугольная матрица с единичной диагональю. Если $\alpha = \alpha_1 = \dots = \alpha_k$, то доказывать нечего. В противном случае, изменяя систему координат в V^* , мы добьемся, чтобы $\alpha = \alpha_1 = \dots = \alpha_q$, а $\alpha_{q+1}, \dots, \alpha_p \neq \alpha$. Рассмотрим матрицы

$$Q'_k = \begin{pmatrix} \alpha & t_k \\ 0 & T'_k \end{pmatrix} \quad (k = q + 1, \dots, p).$$

Характеристические числа T_k отличны от α . Поэтому существует такая треугольная матрица X_k , что

$$X_k Q'_k X_k^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & T'_k \end{pmatrix} = Q_k.$$

Положим

$$P_k = X_k \begin{pmatrix} 1 & n_k \\ 0 & N_k \end{pmatrix} X_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & m_k \\ 0 & N'_k \end{pmatrix}.$$

Рассматривая правила действий с матрицами вида (14), легко заметить, что из $\{T\{T \dots \{TN\} \dots\}\} = 1$ следует $\{Q_k\{Q_k \dots \{Q_k P_k\} \dots\}\} = E$. Однако если

$$S = \{Q_k\{Q_k \dots \{Q_k P_k\} \dots\}\} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

то

$$\{Q_k, S\} = Q_k^{-1} S^{-1} Q_k S = \begin{vmatrix} 1 & \alpha^{-1} a A^{-1} (\alpha E - T'_k) A \\ 0 & \{T'_k A\} \end{vmatrix}.$$

Матрицы A и $\alpha E - T'_k$ неособенные, поэтому если $a \neq 0$, то соответственный член матрицы $\{Q_k S\}$ также отличен от нуля. По предположению выражение S при достаточном числе множителей обращается в единичную матрицу; это возможно только при $m_k = 0$. Итак, для матриц P_k имеем выражение

$$P_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N'_k \end{vmatrix}.$$

Введем теперь клеточно-диагональную матрицу X с диагональными клетками $1, E, \dots, E, X_{q+1}, \dots, X_p$ и положим

$$N' = XNX^{-1}, \quad T' = XTX^{-1}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что матрицы $\{N'\}$, T' имеют требуемый леммой вид.

Теорема 6. *Всякую абстрактную нильпотентную группу $\mathfrak{D}$ с конечным числом образующих, не содержащую элементов конечного порядка, можно включить в качестве равномерной дискретной подгруппы в связную, односвязную, нильпотентную группу Ли.*

Легко видеть, что $\mathfrak{D}$ содержит нормальный ряд

$$\mathfrak{D} \supset \mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{D}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{D}_{r+1} \supset 1,$$

все факторы которого — бесконечные циклические группы. Длину его r назовем размерностью $\mathfrak{D}$. Из теоремы Шрейера следует, что размерность $\mathfrak{D}$ не зависит от выбора нормального ряда. Если $r = 1$, то $\mathfrak{D}$ циклическая, и теорема очевидна. Далее, рассуждаем индуктивно, считая, что для групп размерности, меньшей r , теорема доказана. В частности, группа $\mathfrak{D}_1$ имеет размерность $r - 1$. Поэтому $\mathfrak{D}_1$ может быть включена в некоторую связную, односвязную, нильпотентную группу Ли $\mathfrak{G}_1$ в качестве дискретной равномерной подгруппы. Пусть d — элемент $\mathfrak{D}$, образ которого в фактор-группе $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_1$ порождает эту группу.

Рассмотрим автоморфизм φ , вызываемый элементом d в $\mathfrak{D}_1$. Согласно теореме 5 этот автоморфизм продолжаем до автоморфизма группы $\mathfrak{G}_1$. Возьмем матричное представление $\mathfrak{G}_1$ по Биркгофу [1]. Это представление обладает тем свойством, что все матрицы $\mathfrak{G}_1$ приводимы к треугольной форме с единичной диагональю и для каждого автоморфизма φ группы $\mathfrak{G}_1$ найдется такая матрица T , что

$$\|g^\varphi\| = T \|g\| T^{-1}, \quad g \in \mathfrak{G}_1. \quad (15)$$

Так как автоморфизм φ нильпотентен, то к системе $\{\|g\|\}$, T можно применить лемму 6. Следовательно, в надлежащей системе координат матрицы $\|g\|$ и T примут клеточно-диагональную форму:

$$\|g\| = \begin{vmatrix} \|g\|_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \|g\|_p \end{vmatrix}, \quad T = \begin{vmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_p \end{vmatrix} \quad (16)$$

с треугольными диагональными клетками. Пусть диагональные элементы клетки T_k равны α_k . Положим

$$A = \alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_p E_p, \quad S = A^{-1} T.$$

Из (15) и (16) видно, что

$$A^{-1} \|g\| A = \|g\|, \quad \|g^\varphi\| = T^{-1} \|g\| T = S^{-1} \|g\| S.$$

Обозначим через F группу всех комплексных треугольных матриц с единичной диагональю. F можно рассматривать также и как вещественную группу. Эта группа будет связной, односвязной, нильпотентной группой Ли и будет содержать связную подгруппу $\|\mathfrak{G}_1\|$. Элемент S оставляет подгруппу $\|\mathfrak{G}_1\|$ инвариантной. Согласно лемме 3 однопараметрическая подгруппа $S(t)$, проходящая через S , будет также оставлять $\|\mathfrak{G}_1\|$ инвариантной. Обозначим через $\varphi(t)$ однопараметрическую группу автоморфизмов группы $\mathfrak{G}_1$, вызываемых в ней элементами $S(t)$, и составим полупрямое произведение $\mathfrak{G}$ группы $\varphi(t)$ на $\mathfrak{G}_1$. Это произведение содержит в качестве своей дискретной и равномерной подгруппы совокупность $\varphi(n) \mathfrak{D}_1$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Ясно, что подгруппа $\{\varphi(n) \mathfrak{D}_1\}$ изоморфна $\mathfrak{D}$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. *Всякая абстрактная нильпотентная группа с конечным числом образующих, не содержащая элементов конечного порядка, есть фундаментальная группа некоторого нильмногообразия.*

С л е д с т в и е 2. *Если $\mathfrak{D}$ — абстрактная нильпотентная группа с конечным числом образующих, не содержащая элементов конечного порядка, и $\mathfrak{Z}$ — ее центр, то фактор-группа $\mathfrak{D}/\mathfrak{Z}$ также не содержит элементов конечного порядка.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{G}$ — связная, односвязная, нильпотентная группа Ли, содержащая $\mathfrak{D}$ в качестве равномерной дискретной подгруппы. Предположим, что $\mathfrak{D}/\mathfrak{Z}$ содержит элемент $\bar{d}$ конечного порядка n . Обозначив через d прообраз этого элемента в $\mathfrak{D}$, мы видим, что d^n входит в центр $\mathfrak{D}$, а d в него не входит. Однопараметрическая подгруппа $d^n(t)$, проходящая через d^n в $\mathfrak{G}$, состоит, как известно, из одних центральных элементов $\mathfrak{G}$. Так как

$$\|d^n(1/n)\|^n = d^n,$$

то $d = d^n(1/n)$ и, таким образом, $d \in \mathfrak{Z}$, что противоречит предположению.

§ 4. Рациональные алгебры

Вопрос о том, может ли заданная нильпотентная группа Ли $\mathfrak{G}$ действовать транзитивно и правильно на каком-либо компактном многообразии, равносильно тому, имеет или не имеет $\mathfrak{G}$ равномерные дискретные подгруппы. Предположение, что каждая группа $\mathfrak{G}$ такие подгруппы содержит, оказывается неверным.

Т е о р е м а 7. *Для того чтобы односвязная, связная, нильпотентная группа Ли $\mathfrak{G}$ содержала равномерную дискретную подгруппу, необходимо и достаточно, чтобы алгебра Ли этой группы в подходящем базисе имела рациональные структурные константы.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{D}$ — равномерная дискретная подгруппа $\mathfrak{G}$. Выберем в $\mathfrak{D}$ каноническую систему элементов $d_1, \dots, d_r$ и проведем через них однопараметрические подгруппы

$$d_1(t), \dots, d_r(t), \quad d_i(1) = d_i.$$

Эти подгруппы дают в $\mathfrak{G}$ систему координат 2-го рода. Рассмотрим формулы умножения (11). Подставляя в них вместо t_i, u_i произвольные целые числа, мы должны для v_i получить целые значения, так как при сделанных предположениях элементы x, y , а следовательно, и их произведение xy входят в $\mathfrak{D}$. Таким образом, полиномы q_i являются целозначными и потому имеют рациональные коэффициенты. Структурные константы алгебры Ли являются разностями коэффициентов при членах второй степени полиномов q_i и потому также рациональны.

Обратно, пусть алгебра Ли G группы $\mathfrak{G}$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_r$ имеет рациональные структурные константы. Заменяя $e_1, e_2, \dots, e_r$ их линейными комбинациями с рациональными коэффициентами, мы можем добиться того, чтобы базис $e_1, e_2, \dots, e_r$ был канонический, т. е. чтобы $e_i, \dots, e_r$ давали базис идеала G_i в алгебре G . Воспользуемся хаусдорфовым представлением элементов группы $\mathfrak{G}$ через элементы алгебры G . Беря базис $e_1, e_2, \dots, e_r$ в качестве системы координат 1-го рода в $\mathfrak{G}$, мы будем иметь формулы умножения в виде (ср. § 2):

$$\zeta_i = \xi_i + \eta_i + p_i(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \eta_1, \dots, \eta_{i-1}), \quad (7)$$

где p_i — некоторые полиномы, ξ_i, η_i — координаты произвольных элементов x, y из $\mathfrak{G}$, а ζ_i — координаты произведения $z = xy$. Так как структурные константы алгебры G в базисе $e_1, \dots, e_r$ рациональны, то коэффициенты полиномов p_i будут также рациональными. Поэтому формулы (7) можно представить в виде

$$\zeta_i = \xi_i + n_i + \frac{1}{N_i} P_i(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \eta_1, \dots, \eta_{i-1}), \quad (17)$$

где числа N_i и коэффициенты полиномов P_i — целые рациональные. Обозначим через $\mathfrak{D}$ совокупность тех элементов $\mathfrak{G}$, координаты которых имеют форму $\xi_i = m_i : n_i$, причем m_i — произвольные целые, а n_i определяются из условий

$$n_{i+1} = n_i^{s_i} N_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, r-1),$$

где s_i обозначает степень полинома P_i . Из (17) видно, что произведение двух элементов $\mathfrak{D}$ снова принадлежит $\mathfrak{D}$. Аналогично, если $x \in \mathfrak{D}$, то $x^{-1} = -x$ также принадлежит $\mathfrak{D}$. Поэтому $\mathfrak{D}$ является подгруппой $\mathfrak{G}$. Очевидно, $\mathfrak{D}$ дискретна и в силу леммы 2 равномерна в $\mathfrak{G}$.

Приведем теперь пример группы $\mathfrak{D}$, не содержащей дискретных равномерных подгрупп или, что то же самое, пример нильпотентной алгебры Ли G , не допускающей базиса с рациональными структурными константами. Пусть алгебра G имеет базис

$$a_1, \dots, a_n, b_{jk} \quad (j < k; j, k = 2, 3, \dots, n)$$

и таблицу умножения

$$[a_i a_j] = b_{ij} \quad (i < j; i, j = 1, 2, \dots, n),$$

$$b_{li} = \sum \alpha_{ijk} b_{jk} \quad (i = 2, \dots, n; j < k; j, k = 2, \dots, n),$$

где α_{ijk} — независимые относительно поля рациональных чисел трансцендентные вещественные числа, а b_{ij} лежат в центре G . Утверждается, что при $n \geq 6$ алгебра G не содержит базиса с рациональными структурными константами. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_s$ — система векторов алгебры G . Выберем

среди них максимальную систему линейно независимых, а все остальные выразим через эту систему линейно. Коэффициенты линейных выражений присоединим к полю рациональных чисел. В результате получится некоторое поле K , которое мы назовем присоединенным полем системы $v_1, v_2, \dots, v_s$. Очевидно, K не зависит от выбора упомянутой максимальной линейно независимой подсистемы. Пусть $v'_1, v'_2, \dots, v'_s$ — другая система векторов, выражающаяся линейно через $v_1, \dots, v_s$ с коэффициентами из некоторого поля P . Обозначим через K' наименьшее поле, содержащее K и P . Очевидные рассуждения показывают, что присоединенное поле системы $v'_1, v'_2, \dots, v'_s$ содержится в K' .

Возвратимся к алгебре G . Допустим, что G имеет базис с рациональными структурными константами a'_i, c'_j ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, [(n-1)(n-2)/2]$). Не стесняя общности рассуждений, можно предположить, что c'_j лежат в центре G . Пусть

$$[a'_i, a'_k] = b'_{ik} \quad (i < k; i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Структурные константы G в новом базисе рациональны, поэтому b'_{ik} выражаются линейно через c'_j с рациональными коэффициентами. Отсюда следует, что присоединенное поле системы b'_{ik} есть поле рациональных чисел. Пусть

$$a_i = \beta_{i1}a'_1 + \dots + \beta_{in}a'_n + \gamma_{i1}c'_1 + \gamma_{i2}c'_2 + \dots,$$

тогда

$$b_{ij} = [a_i a_j] = \sum_{\lambda, \mu} \beta_{i\lambda} \beta_{j\mu} b'_{\lambda\mu}.$$

Последнее равенство показывает, что присоединенное поле K системы b_{ij} должно содержаться в поле K' рациональных функций с рациональными коэффициентами от β_{ij} . Отсюда следует, что степень трансцендентности K' относительно поля рациональных чисел не выше n^2 . Однако K содержит $1/2 (n-1)^2 (n-2)$ алгебраически независимых чисел α_{ijk} . Таким образом, степень трансцендентности K не меньше

$$1/2 (n-1)^2 (n-2).$$

При $n \geq 6$ имеем

$$1/2 (n-1)^2 (n-2) > n^2$$

и, следовательно, K не может содержаться в $K' *$.

До сих пор мы рассматривали лишь алгебры Ли над полем вещественных чисел. Теперь нам будут нужны алгебры Ли над полем рациональных чисел. Эти алгебры мы будем называть рациональными. Пусть G — алгебра Ли над полем вещественных чисел, $e_1, \dots, e_r$ — базис G ,

$$[e_i e_j] = \sum c_{ij}^{\lambda} e_{\lambda}.$$

Если структурные константы c_{ij}^{λ} рациональны, то линейные комбинации $e_1, \dots, e_r$ с рациональными коэффициентами дадут рациональную алгебру Ли G_0 , которую мы будем называть содержащейся в G , а G — вещественным

* Этот же пример показывает, что для каждого $r \geq 16$ существует бесчисленное множество неизоморфных двуступенных нильпотентных алгебр G размерности r над полем комплексных чисел.

расширением G_0 . Ясно, что изоморфные рациональные алгебры имеют изоморфные вещественные расширения. Обратное неверно. Далее будет указан пример нильпотентной вещественной алгебры Ли, содержащей неизоморфные рациональные алгебры.

Пусть задано некоторое нильмногообразие M . Обозначим через $\mathfrak{D}$ его фундаментальную группу. Мы видели, что $\mathfrak{D}$ — нильпотентная группа с конечным числом образующих, не содержащая элементов конечного порядка. Включим $\mathfrak{D}$ в связную, односвязную, нильпотентную группу Ли $\mathfrak{G}$ в качестве равномерной дискретной подгруппы. $\mathfrak{D}$ содержит каноническую систему элементов $d_1, \dots, d_r$. Однопараметрические подгруппы

$$d_i(t), d_i(1) = d_i \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

дают в группе $\mathfrak{G}$ систему координат 2-го рода. Структурные константы алгебры Ли группы $\mathfrak{G}$, вычисленные в этой системе координат, рациональны. Обозначим через G_0 рациональную алгебру Ли, имеющую эти структурные константы. Мы будем называть G_0 рациональной алгеброй нильмногообразия M . Наше построение алгебры G_0 зависит от выбора канонической системы $d_1, \dots, d_r$. Покажем, что рациональная алгебра G_1 , построенная при помощи любой другой канонической системы, изоморфна G_0 . Для этого снова воспользуемся хаусдорфовым представлением группы $\mathfrak{G}$ элементами ее вещественной алгебры Ли G (см. § 2). Структурные константы группы $\mathfrak{G}$, вычисленные в системе координат 2-го рода, образованной подгруппами $d_1(t), \dots, d_r(t)$, совпадают со структурными константами алгебры Ли G , вычисленными в базисе $d_1, \dots, d_r$. Поэтому рациональная алгебра G_0 изоморфна алгебре G_0^* всех рациональных линейных комбинаций от $d_1, \dots, d_r$, содержащейся в G .

Аналогично, рациональная алгебра G_1 , вычисленная при помощи канонической системы $d'_1, \dots, d'_r$, изоморфна алгебре G_1^* рациональных линейных комбинаций от $d'_1, \dots, d'_r$. Элементы $d'_1, \dots, d'_r$ линейно независимы. Каждый из них может быть представлен в виде

$$d'_i = d_1^{n_{1i}} d_2^{n_{2i}} \dots d_r^{n_{ri}}.$$

Формулы умножения (7) в нашем случае имеют рациональные коэффициенты. Поэтому $d'_1, \dots, d'_r$ содержатся в G_0^* , т. е. $G_0^* = G_1^*$. Тем самым утверждение об изоморфизме G_0 и G_1 доказано.

Итак, каждому нильмногообразию отвечает определенная с точностью до изоморфизма рациональная нильпотентная алгебра Ли. Однако это соответствие не взаимно однозначно *. Поэтому возникает вопрос, какими свойствами характеризуются нильмногообразия с изоморфными рациональными алгебрами.

Т е о р е м а 8. *Для того чтобы два нильмногообразия имели изоморфные рациональные алгебры, необходимо и достаточно, чтобы оба эти многообразия являлись конечнолистными накрытиями одного и того же третьего нильмногообразия.*

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть M_1, M_2 — конечнолистные накрывающие нильмногообразия M и $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}$ — соответственные фундаментальные группы. По условию $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ — подгруппы конечного индекса в $\mathfrak{D}$. Рассмотрим

* Например, группы с образующими a, b, c и определяющими соотношениями $ba = abc^n, ac = ca, bc = cb$ ($n = 1, 2, \dots$) неизоморфны. Рациональные же алгебры нильмногообразий с такими фундаментальными группами изоморфны.

связную, односвязную, нильпотентную группу Ли $\mathfrak{G}$, содержащую $\mathfrak{D}$ своей дискретной и равномерной подгруппой. Алгебру Ли $\mathfrak{G}$ обозначим через G и возьмем хаусдорфово представление $\mathfrak{G}$ элементами G . Если $d_1, \dots, d_r$ — каноническая система элементов в $\mathfrak{D}$, а $d'_1, \dots, d'_r$ — аналогичная система в $\mathfrak{D}_1$, то многообразиям M и M_1 отвечают алгебры G_0, G_{01} , образованные рациональными линейными комбинациями элементов $d_1, \dots, d_r$ и соответственно $d'_1, \dots, d'_r$. Так как $\mathfrak{D}_1$ — подгруппа конечного индекса в $\mathfrak{D}$, то для каждого d'_i найдется такое целое положительное n_i , что $d_i^{n_i} \in \mathfrak{D}$, т. е. $n_i d'_i \in \mathfrak{D}$. Отсюда следует, что $d'_i \in G_0, G_{01} = G_0$. Аналогично устанавливается и равенство $G_{02} = G_0$.

Необходимость. Пусть алгебры G_{01}, G_{02} многообразий M_1, M_2 изоморфны. Этот изоморфизм можно продолжить до вещественных расширений G_{01}, G_{02} и, следовательно, установить изоморфное соответствие между нильпотентными группами, действующими на M_1 и M_2 . отождествляя эти группы, мы отождествим их алгебры Ли, а также алгебры G_{01}, G_{02} . В результате мы придем к следующему положению. В связной, односвязной, нильпотентной группе Ли $\mathfrak{G}$ с алгеброй G задана рациональная подалгебра G_0 , имеющая базисы $d'_1, \dots, d'_r$ и $d''_1, \dots, d''_r$, составленные из канонических элементов дискретных подгрупп $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ группы $\mathfrak{G}$. Обозначим через $\mathfrak{D}$ общую часть $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$. Мы хотим показать, что индексы $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ конечны.

Пусть $d'(t)$ — однопараметрическая подгруппа, проходящая через какой-нибудь элемент $d' = d'(1)$ подгруппы $\mathfrak{D}_1$. Согласно § 2 имеем

$$d'(t) = d_1''(u_1) d_2''(u_2) \dots d_r''(u_r),$$

где $u_i = f_i(t)$ — полиномы от t без свободных членов. Поскольку элемент d' может быть выражен линейно через $d''_1, \dots, d''_r$ с рациональными коэффициентами и структурные константы алгебры G_0 рациональны, то коэффициенты полиномов $f_i(t)$ также рациональны. Поэтому найдется такое целое положительное n , что $f_i(n)$ будут также целыми числами. Мы имеем

$$d'^n = d_1'^{n f_1(n)} d_2'^{n f_2(n)} \dots d_r'^{n f_r(n)},$$

т. е. d'^n содержится в $\mathfrak{D}_2$, а следовательно, и в $\mathfrak{D}$. Итак, всякий элемент $\mathfrak{D}_1$ в подходящей положительной степени содержится в $\mathfrak{D}$. Группа $\mathfrak{D}_1$ нильпотентная, с конечным числом образующих. Следовательно, $\mathfrak{D}$ имеет конечный индекс и в $\mathfrak{D}_1$ *. Аналогичные рассуждения показывают, что $\mathfrak{D}$ имеет конечный индекс и в $\mathfrak{D}_2$. Рассматривая пространства вычетов

$$\mathfrak{G} : \mathfrak{D}_1, \quad \mathfrak{G}_1 : \mathfrak{D}_2, \quad \mathfrak{G} : \mathfrak{D},$$

мы видим, что первые два являются конечнолистными накрытиями третьего. Теорема доказана.

В заключение приведем пример вещественной нильпотентной алгебры Ли, содержащей неизоморфные рациональные алгебры. Пусть θ — вещественное

* Пусть $\mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{D}_1^2 \supset \dots \supset \mathfrak{D}_1^i \supset 1$ — убывающий центральный ряд для $\mathfrak{D}_1$. Каждая фактор-группа $\mathfrak{D}_1^i / \mathfrak{D}_1^{i+1} \mathfrak{D}$ — периодическая, абелева, с конечным числом образующих, и, таким образом, конечна. Индекс $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{D}_1$ равен произведению порядков этих факторов и также конечен. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1, можно легко получить и следующее, несколько более сильное утверждение: если нильпотентная группа $\mathfrak{D}_1$ имеет конечное число образующих и некоторые положительные степени этих образующих содержатся в подгруппе $\mathfrak{D}$, то индекс $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{D}_1$ конечен.

число, K — поле, содержащее это число. Алгебра Ли G_0 над полем K с базисом $e_1, e_2, \dots, e_6$ и таблицей умножения

$$\begin{aligned} [e_1 e_2] &= e_4, & [e_1 e_3] &= e_5 + \theta e_6, & [e_2 e_4] &= e_6, \\ [e_1 e_3] &= e_6, & [e_1 e_4] &= e_5, & [e_3 e_4] &= 0, \\ [e_\alpha, e_\beta] &= 0 \quad (\alpha = 1, \dots, 6; \beta = 5, 6) \end{aligned}$$

является нильпотентной. Посмотрим, при каких условиях алгебра G_0 изоморфна над полем K алгебре G_0 . Для этого необходимо и достаточно, чтобы существовали линейные комбинации $e'_1, \dots, e'_6$ от $e_1, \dots, e_6$, удовлетворяющие той же таблице умножения, но при $\theta = 0$. Так как подалгебра Z с базисом $\{e_5, e_6\}$ является центром G_0 , $G_0^2 = \{e_4, e_5, e_6\}$, $\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$ — центр в G_0/Z и аналогичное имеет место в G_0 , то

$$\begin{aligned} e'_1 &= \alpha e_1 + \beta e_2 + \lambda e_3 + \mu e_4 + \dots, \\ e'_2 &= \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \lambda_1 e_3 + \mu_1 e_4 + \dots, \\ e'_3 &= \gamma e_3 + \nu e_4 + \dots, \quad (\gamma \neq 0), \\ e'_4 &= \delta e_4 + \dots, \quad (\delta \neq 0), \end{aligned}$$

где члены с e_5, e_6 обозначены точками. Из таблицы умножения получаем

$$[e'_1 e'_2] = (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) e_4 + \dots = e'_4, \quad (18)$$

$$[e'_1 e'_4] = \alpha\delta e_5 + \beta\delta e_6 = e'_5, \quad (19)$$

$$[e'_2 e'_4] = \alpha_1\delta e_5 + \beta_1\delta e_6 = e'_6. \quad (20)$$

Равенство (18) дает

$$\delta = \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta.$$

Вычисляя выражения

$$[e'_1 e'_2] = e'_6, \quad [e'_2 e'_3] = e'_5$$

и сравнивая их с (19) и (20), получим

$$\beta\gamma + \alpha\nu = \alpha_1\delta, \quad (21)$$

$$\beta_1\gamma + \alpha_1\nu = \alpha\delta, \quad (22)$$

$$\alpha\gamma + \beta\gamma\theta + \beta\nu = \beta_1\delta, \quad (23)$$

$$\alpha_1\gamma + \beta_1\gamma\theta + \beta_1\nu = \beta\delta. \quad (24)$$

Исключение θ из (23), (24) дает

$$\gamma = \beta_1^2 - \beta^2,$$

а исключение δ из (21), (22) дает

$$\nu = \alpha_1\beta_1 - \alpha\beta.$$

Подставляя эти значения в (21), (23), получим

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}_1^2 &= \beta_1^2 - \beta^2, \\ \beta\alpha - \beta_1\alpha_1 &= \frac{1}{2}\theta(\beta_1^2 - \beta^2),\end{aligned}$$

откуда

$$\alpha = \frac{-\theta\beta \pm \beta_1 \sqrt{4 + \theta^2}}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{-\theta\beta_1 \pm \beta \sqrt{4 + \theta^2}}{2}. \quad (25)$$

Если мы возьмем для β и β_1 произвольные значения и с помощью полученных формул вычислим остальные коэффициенты, то в результате найдем изоморфизм, переводящий G_1 в G_0 . Однако рационального изоморфизма между алгебрами G_1 и G_0 нет, так как при рациональных β, β_1 коэффициенты α, α_1 в силу формул (25) будут иррациональны. Алгебры G_1, G_0 дают простейший пример неизоморфных рациональных нильпотентных алгебр, имеющих изоморфные вещественные расширения.

ЛИТЕРАТУРА.

1. *G. Birkhoff*. Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices.— *Ann. Math.* 1937, 38, 526—532.
2. *E. Cartan*. Les représentations linéaires des groupes de Lie.— *J. math. pures et appl.*, 1938, 9, 17, 1—12.
3. *А. И. Мальцев*. Топологические разрешимые группы.— *Мат. сб.*, 1946, 19, № 2, 165—174.
4. *А. Я. Повзнер*. О нильпотентных группах.— *Зап. мат. тов. (Харьков)*, 1940, (4) 16, 135—142.
5. *Л. С. Понтрягин*. Непрерывные группы. М.—Л., 1938.
6. *Н. Г. Чеботарев*. Теория групп Ли. М.—Л., 1940.



Нильпотентной группой мы будем называть группу, имеющую конечный убывающий центральный ряд, оканчивающийся единицей (см. [2]). Группу $\mathfrak{G}$ условимся называть полной, если уравнение $x^n = g$ для каждого положительного n и каждого g из $\mathfrak{G}$ имеет хотя бы одно решение в $\mathfrak{G}$. Элементы конечного порядка нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ образуют нормальный делитель $\mathfrak{N}$ этой группы, причем фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ элементов конечного порядка уже не содержит. Отсюда видно, что изучение свойств нильпотентных групп без элементов конечного порядка должно представлять известный интерес в общей теории нильпотентных групп.

В работе [5] нами показано, что для каждой нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ без элементов конечного порядка, порождающейся конечным числом своих элементов, можно построить особое многообразие M . Свойства M весьма просто связаны со свойствами $\mathfrak{G}$, и, в частности, фундаментальная группа M изоморфна $\mathfrak{G}$. Это показывает, что нильпотентные группы без элементов конечного порядка могут представлять также и геометрический интерес. В упомянутой работе [5] показано, что каждому многообразию M отвечает особая нильпотентная алгебра над полем рациональных чисел. Так как M однозначно определяет свою фундаментальную группу $\mathfrak{G}$, то тем самым каждой нильпотентной группе без элементов конечного порядка с конечным числом образующих оказывается поставленной в соответствие нильпотентная алгебра над полем рациональных чисел. В настоящей заметке это соответствие распространяется на более широкие классы алгебр и групп и свойства его изучаются более подробно. Прежде всего показывается, что каждая нильпотентная группа $\mathfrak{G}$ без элементов конечного порядка может быть погружена в некоторую однозначно определенную полную нильпотентную группу без элементов конечного порядка $\mathfrak{G}^*$. Свойства группы $\mathfrak{G}$ оказываются тесно связанными со свойствами пополнения $\mathfrak{G}^*$ и его полных подгрупп.

Формула Хаусдорфа позволяет каждой нильпотентной алгебре Ли $\mathfrak{L}$ над полем рациональных чисел поставить в соответствие определенную полную нильпотентную группу без элементов конечного порядка. Это соответствие оказывается взаимно однозначным и легко распространяется и на более широкие классы локально нильпотентных алгебр и групп **.

Полные группы, обладающие возрастающим центральным рядом, рассматривались С. Н. Черниковым [7]. Используемое им определение полноты хотя и отлично от приведенного выше, тем не менее для нильпотентных групп ему эквивалентно. Среди результатов Черникова имеется теорема о том, что периодические элементы почной группы с возрастающим центральным рядом

* Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, 13, № 3, 201—212.

** Рассматриваемое соответствие между алгебрами Ли и полными группами в известных пределах аналогично соответствию между алгебрами Ли над полем характеристики p и конечными p -группами, введенному Магнусом [4] и Цассенхаузом [8].

лежат в ее центре. Эта теорема показывает, что произвольные полные группы с возрастающим центральным рядом являются фактор-группами от некоторых однозначно определенных полных групп без элементов конечного порядка по их центральным и, в известном смысле, дискретным подгруппам.

Таким образом, общая теория полных групп с возрастающим центральным рядом оказывается существенно зависимой от теории групп без элементов конечного порядка.

Легко видеть, что все группы с возрастающим центральным рядом локально нильпотентны. Поэтому к полным группам без элементов конечного порядка с возрастающим центральным рядом применимо упомянутое соответствие между группами и алгебрами Ли и теория таких групп оказывается эквивалентной теории рациональных алгебр Ли с возрастающим центральным рядом.

Определения верхнего и нижнего центральных рядов, а также необходимые свойства нильпотентных групп изложены в монографии А. Г. Куроша [2]. В доказательствах существенно используются также результаты работы [5].

§ 1. Нильпотентные группы без элементов конечного порядка

Мы будем рассматривать только группы без элементов конечного порядка. Такие группы мы условимся называть группами без кручения или чистыми группами.

Т е о р е м а 1. *Если $\mathfrak{G}$ — чистая нильпотентная группа и $a^n b = ba^n$, где a, b — элементы $\mathfrak{G}$, то $ab = ba$.*

Элементы a, b порождают внутри $\mathfrak{G}$ некоторую подгруппу $\mathfrak{H}$. Эта подгруппа нильпотентная с двумя образующими и не содержит элементов конечного порядка. В силу теоремы 6 работы [5] $\mathfrak{H}$ является подгруппой связной, односвязной, нильпотентной группы Ли, а для последних утверждение теоремы заведомо справедливо *.

Из теоремы 1 следует, что фактор-группа чистой нильпотентной группы по ее центру есть снова чистая группа. В частности, имеет место

Т е о р е м а 2. *Все факторы возрастающего центрального ряда чистой нильпотентной группы являются чистыми абелевыми группами.*

Для убывающего центрального ряда это утверждение неверно. Например, группа $\mathfrak{A}$ с образующими a, b, c и определяющими соотношениями

$$ab = ba \cdot c^2, \quad ac = ca, \quad bc = cb$$

является чистой и нильпотентной. Однако ее фактор-группа по коммутанту содержит элемент 2-го порядка.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает и следующее известное свойство чистых нильпотентных групп: если a, b — элементы чистой нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ и $a^n = b^n$ ($n > 0$), то $a = b$, т. е. операция извлечения корня в чистых нильпотентных группах однозначна.

Доказательство — индуктивное, по длине верхнего центрального ряда $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{G}$, $\bar{a}, \bar{b}$ — образы элементов a, b в $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$. Так как длина верхнего центрального ряда $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ меньше, чем $\mathfrak{G}$, и $\bar{a}^n = \bar{b}^n$, то $\bar{a} = \bar{b}$,

* Теорема 1 непосредственно вытекает также и из результатов Бара [4].

т. е. $a = bz$, где $z \in \mathfrak{Z}$. Отсюда

$$a^n = b^n z^n, \quad z^n = 1, \quad z = 1,$$

что и требовалось.

Группу $\mathfrak{G}$ мы будем называть полной, если для каждого g из $\mathfrak{G}$ и каждого натурального положительного n уравнение $x^n = g$ разрешимо в $\mathfrak{G}$. Для краткости прилагательные «полный», «чистый», «нильпотентный» будут обозначаться их начальными буквами, например, ч.п.н. группа будет означать — чистая полная нильпотентная группа.

Из теоремы 1 непосредственно вытекают такие следствия:

1) уравнение $x^n = g$ в ч.п.н. группе имеет одно и только одно решение;
2) центр ч.п.н. группы и фактор-группа по нему являются также ч.п.н. группами; таким образом, все члены и фактор-группы верхнего центрального ряда ч.п.н. группы являются ч.п.н. группами;

3) фактор-группа ч.п.н. группы по полному нормальному делителю является ч.п.н. группой.

Теорема 3. Если фактор-группа по коммутанту нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ полная, то группа $\mathfrak{G}$ и все члены ее нижнего центрального ряда являются также полными.

Предположим, что для групп с меньшей длиной нижнего центрального ряда теорема справедлива. Пусть

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^2 \supset \mathfrak{G}^3 \supset \dots \supset \mathfrak{G}^n \supset 1$$

— нижний центральный ряд группы $\mathfrak{G}$. Согласно предположению фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2$ полная. В силу индукции отсюда следует, что группы $\mathfrak{G}^i/\mathfrak{G}^n$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) полные. Подгруппа $\mathfrak{G}^n$ центральная в $\mathfrak{G}$ и порождается коммутаторами вида

$$(g, h) = g^{-1}h^{-1}gh, \quad g \in \mathfrak{G}, \quad h \in \mathfrak{G}^{n-1}.$$

Пусть

$$g^{-1}h^{-1}gh = z, \quad gh = hgz. \quad (1)$$

Из полноты $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^n$ вытекает, что для любого $m > 0$ в $\mathfrak{G}$ найдется элемент g_1 , для которого $\bar{g}_1^m = \bar{g}$, где $\bar{g}_1, \bar{g}$ — образы элементов g_1, g в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^n$. Так как $h \in \mathfrak{G}^{n-1}$, то

$$g_1 h = h g_1 z_1 \quad (z_1 \in \mathfrak{G}^n), \quad (2)$$

откуда

$$g_1^m h = h g_1^m z_1^m.$$

Принимая теперь во внимание соотношение (1) и равенство $\bar{g}_1^m = \bar{g}$, мы заключаем, что $z = z_1^m$. Таким образом, из каждого образующего абелевой группы $\mathfrak{G}^n$ можно извлечь корень любой положительной степени. Это показывает, что $\mathfrak{G}^n$ — полная группа. Из соотношений

$$g = g_1^m u \quad (u \in \mathfrak{G}^n), \quad g = (g_1 u^{1/m})^m$$

следует, что полной является и группа $\mathfrak{G}$. Аналогично доказывается и полнота групп $\mathfrak{G}^i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

С л е д с т в и е. Члены и фактор-группы нижнего центрального ряда ч.п.н. группы $\mathfrak{G}$ являются ч.п.н. группами.

В самом деле, по теореме 3 все члены нижнего центрального ряда $\mathfrak{G}$ являются полными нормальными делителями. Но тогда фактор-группы по ним, как отмечалось выше, будут чистыми, что и требовалось.

§ 2. Пополнение чистых нильпотентных групп

Если ч.п.н. группа $\mathfrak{G}^*$ содержит подгруппу $\mathfrak{G}$, обладающую тем свойством, что каждый элемент $\mathfrak{G}^*$ в подходящей положительной степени содержится в $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}^*$ называется пополнением группы $\mathfrak{G}$. Непосредственно ясно, что если ч.п.н. группа $\mathfrak{G}^*$ есть пополнение своей подгруппы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}^*$ не содержит полных истинных подгрупп, заключающих $\mathfrak{G}$. Обратное будет доказано несколько позже.

Теорема 4. Если ч.п.н. группа $\mathfrak{G}^*$ есть пополнение своей подгруппы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}^*$ — какая-либо полная подгруппа $\mathfrak{G}^*$, то $\mathfrak{H}^*$ есть пополнение пересечения $\mathfrak{H}^*$ и $\mathfrak{G}$.

В самом деле, любой элемент h из $\mathfrak{H}^*$ в подходящей положительной степени m содержится в $\mathfrak{G}$. Но тогда h^m содержится и в пересечении $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{H}^*$.

Теорема 5. Пусть ч.п.н. группа $\mathfrak{G}^*$ есть пополнение каждой из своих подгрупп $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. Тогда $\mathfrak{G}^*$ будет пополнением и их пересечения.

По условию для каждого $g \in \mathfrak{G}^*$ найдутся такие положительные m_1, m_2 , что $g^{m_1} \in \mathfrak{H}_1, g^{m_2} \in \mathfrak{H}_2$. Но в таком случае $g^{m_1 m_2}$ будет входить в $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$, что и требуется.

Дальнейшее изложение будет основываться на следующей лемме:

Лемма. Существует такая целочисленная функция $\varphi(k, n) > 0$, что в каждой нильпотентной группе $\mathfrak{G}_1$, имеющей убывающий центральный ряд длины k , произведение p^n -х степеней произвольных элементов $\mathfrak{G}$ есть $p^{\varphi(k, n)}$ -я степень элемента $\mathfrak{G}$, где p — произвольное натуральное число, $\varphi(k, n) \rightarrow \infty$, если $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}$ — свободная группа с двумя образующими a_1, a_2 . Обозначим через $\mathfrak{F}$ фактор-группу от $\mathfrak{G}$ по $(k+1)$ -му члену ее убывающего центрального ряда. $\mathfrak{F}$ является нильпотентной группой, не имеющей элементов конечного порядка, нижний центральный ряд которой

$$\mathfrak{F} \supset \mathfrak{F}^2 \supset \dots \supset \mathfrak{F}^k \supset 1$$

имеет длину k . Все фактор-группы $\mathfrak{F}^i/\mathfrak{F}^{i+1}$ чистые с конечным числом образующих [3]. Выбирая в $\mathfrak{F}^i$ такие элементы, образы которых в $\mathfrak{F}^i/\mathfrak{F}^{i+1}$ дают независимую систему образующих, и объединяя их для всех i , мы получим регулярный базис $a_1, a_2, \dots, a_m$ группы $\mathfrak{F}$. Этот базис обладает тем свойством, что каждый элемент $a \in \mathfrak{F}$ допускает однозначную запись вида

$$a = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_m^{\alpha_m},$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m \perp$ целые числа. Группу $\mathfrak{F}$ можно включить в связную, односвязную, нильпотентную группу Ли $\mathfrak{F}^*$ в качестве равномерной и дискретной подгруппы (см. [5]), причем однопараметрические подгруппы

$$a_i(t), \quad a_i(1) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

дадут в $\mathfrak{F}^*$ систему координат 2-го рода.

Рассмотрим в $\mathfrak{F}^*$ однопараметрическую подгруппу $a(t)$, проходящую через $a_1 a_2$, т. е. $a(1) = a_1 a_2$. Согласно формуле (11) работы [5] и ее следствию

имеем

$$a(t) = a_1(u_1)a_2(u_2) \dots a_m(u_m),$$

где $u_i = f_i(t)$ — полиномы от t с рациональными коэффициентами и без свободных членов. Придавая t целое значение n и имея в виду, что $u_1 = t$, $u_2 = t$, мы получим

$$(a_1 a_2)^n = a_1^n a_2^n a_3^{f_3(n)} \dots a_m^{f_m(n)}. \quad (3)$$

Элементы $a_3, \dots, a_m$ входят в надлежащие члены нижнего центрального ряда $\mathfrak{F}$ и потому выражаются в виде произведений коммутаторов соответствующих порядков от элементов a_1, a_2 . Выберем для каждого элемента a_i одно из выражений этого рода, например $F_i(a_1, a_2)$, и подставим в (3). Полученная таким путем формула

$$(a_1 a_2)^n = a_1^n a_2^n [F_3(a_1, a_2)]^{f_3(n)} \dots [F_m(a_1, a_2)]^{f_m(n)} \quad (4)$$

будет, очевидно, тождеством во всякой нильпотентной группе с длиной центрального ряда, не превосходящей k . Повторное применение формулы (4) дает

$$\begin{aligned} (a_1 a_2 \dots a_s)^n &= \\ &= a_1^n a_2^n \dots a_s^n \prod_{\alpha} [F_{\alpha}(a_{s-1}, a_s)]^{f_{\alpha}(n)} \dots \prod_{\alpha} [F_{\alpha}(a_1, a_2, \dots, a_s)]^{f_{\alpha}(n)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь перейдем к непосредственному доказательству леммы, которое будет вестись индукцией по длине нижнего центрального ряда. Пусть $\varphi(k-1, n)$ существует. Коэффициенты полиномов $f_{\alpha}(n)$ в (5) рациональны. Представим их в несократимом виде и обозначим через λ — наивысший из показателей степеней простых чисел, входящих в знаменатели полиномов $f_{\alpha}(n)$.

Выберем произвольные целые положительные числа p и N . Если $N > \lambda$, то все $f_{\alpha}(p^N)$ заведомо делятся на $p^{N-\lambda}$. Принимая в формуле (5) $n = p^N$, мы видим, что дополнительные множители этой формулы стоят в степенях, делящихся на $p^{N-\lambda}$. Так как эти множители лежат в подгруппе $\mathfrak{F}^2$, длина нижнего центрального ряда которой меньше k , то согласно индукции

$$(a_1 a_2 \dots a_s)^{p^N} = a_1^{p^N} a_2^{p^N} \dots a_s^{p^N} u^{p^{\varphi(k-1, N-\lambda)}}$$

или

$$a_1^{p^N} a_2^{p^N} \dots a_s^{p^N} = a^{p^{\varphi(k-1, N-\lambda)}} b^{p^{\varphi(k-1, N-\lambda)}}, \quad (6)$$

поскольку, очевидно, можно считать, что $\varphi(k-1, N) \leq N$. На основании формулы (4) правая часть равенства (6) может быть представлена в виде

$$(ab)^{p^l} [F_m(a, b)]^{-f_m(p^l)} \dots [F_3(a, b)]^{-f_3(p^l)}, \quad (7)$$

где для краткости положено $l = \varphi(k-1, N-\lambda)$. Элемент b содержится в $\mathfrak{F}^2$, поэтому дополнительные множители $F_i(a, b)$ содержатся в $\mathfrak{F}^3$. Обозначим через $\mathfrak{K}$ подгруппу, порожденную $\mathfrak{F}^3$ и элементом ab . Длина центрального ряда $\mathfrak{K}$ заведомо не больше $k-1$. Все множители (7) стоят в степенях, делящихся на $p^{l-\lambda}$. В силу индукции отсюда вытекает, что выра-

жение (7) есть $p^{\varphi(k-1, l-\lambda)}$ -я степень некоторого элемента $\mathfrak{K}$. Таким образом, в качестве искомой функции $\varphi(k, N)$ можно взять

$$\varphi[k-1, \varphi(k-1, N-\lambda) - \lambda].$$

Применим эту лемму к исследованию свойств пополнений. Пусть ч. п. н. группа $\mathfrak{G}^*$ есть пополнение какой-либо своей подгруппы $\mathfrak{G}$. В этом случае $\mathfrak{G}^*$ не содержит полных подгрупп, заключающих $\mathfrak{G}$. Обратно, допустим, что $\mathfrak{H}$ — какая-либо ч. п. н. группа и $\mathfrak{G}$ — ее некоторая подгруппа. Обозначим через $\mathfrak{G}^*$ пересечение всех полных подгрупп $\mathfrak{H}$, содержащих $\mathfrak{G}$. Ясно, что $\mathfrak{G}^*$ будет полной подгруппой, именно минимальной полной подгруппой, содержащей $\mathfrak{G}$. Мы хотим доказать, что $\mathfrak{G}^*$ есть пополнение группы $\mathfrak{G}$.

Рассмотрим подгруппу $\mathfrak{K}_1$, порожденную теми элементами $\mathfrak{G}^*$, положительные степени которых содержатся в $\mathfrak{G}$. Лемма показывает, что $\mathfrak{K}$ будет полной подгруппой и, следовательно, $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{K}$. Итак, каждый элемент $h \in \mathfrak{G}^*$ может быть представлен в виде $h = h_1 h_2 \dots h_s$, где $h_i^{m_i} = g_i \in \mathfrak{G} (m_i > 0)$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ подгруппу, порожденную элементами $h_1, \dots, h_s$, а через $\mathfrak{B}$ — аналогичную подгруппу, порожденную $g_1, \dots, g_s$. Мы имеем: $\mathfrak{A}$ — нильпотентная группа с конечным числом образующих, положительная степень каждого из которых содержится в подгруппе $\mathfrak{B}$. Отсюда следует, что индекс $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$ конечен*. В частности, каждый элемент $\mathfrak{A}$ в положительной степени содержится в $\mathfrak{B}$. Возвращаясь к группе $\mathfrak{G}^*$, мы видим, что положительная степень каждого элемента $\mathfrak{G}^*$ содержится в $\mathfrak{G}$, т. е. $\mathfrak{G}^*$ есть пополнение $\mathfrak{G}$.

Теорема 6. *Каждая чистая нильпотентная группа $\mathfrak{G}$ содержится в некоторой ч. п. н. группе $\mathfrak{G}^*$, являющейся пополнением $\mathfrak{G}$. Все пополнения $\mathfrak{G}$ изоморфны.*

Докажем сначала эту теорему для групп $\mathfrak{G}$, имеющих конечное число образующих. Каждую такую группу можно включить (см. [5]) в связную, односвязную, нильпотентную группу Ли $\mathfrak{L}$ в качестве равномерной дискретной подгруппы. С абстрактной точки зрения $\mathfrak{L}$ является ч. п. н. группой. Поэтому, беря в $\mathfrak{L}$ те элементы, целая положительная степень которых содержится в $\mathfrak{G}$, мы получим искомое пополнение группы $\mathfrak{G}$. Остается показать, что все пополнения $\mathfrak{G}$ изоморфны. Пусть $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ — два пополнения $\mathfrak{G}$. Рассмотрим какой-нибудь элемент a_1 из $\mathfrak{H}_1$. По предположению для некоторого $m > 0$ имеем $a_1^m = g$, где $g \in \mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{H}_2$ — ч. п. н. группа, то в $\mathfrak{H}_2$ найдется один и только один элемент a_2 , который будет удовлетворять соотношению $a_2^m = g$. Условимся называть элементы a_1 и a_2 соответствующими. Тем самым между $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. Покажем, что оно изоморфное. В самом деле, пусть b_1, b_2 — еще какая-нибудь пара соответствующих элементов из $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. Обозначим через $\mathfrak{G}_1$ подгруппу из $\mathfrak{H}_1$, порожденную элементами a_1, b_1 и подгруппой $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{G}_2$ будет аналогичная подгруппа в $\mathfrak{H}_2$. Так как $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ имеют конечное число образующих, то их можно включить в связные, односвязные, нильпотентные группы Ли $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$. Индексы подгруппы $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ конечны, поэтому $\mathfrak{G}$ будет равномерной дискретной подгруппой как в $\mathfrak{L}_1$, так и в $\mathfrak{L}_2$. Однако всякий изоморфизм между дискретными равномерными подгруппами продолжаем до изоморфизма охватывающих групп Ли [5]. Таким образом,

* См. примечание к доказательству теоремы 8 в [5].

между $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ существует изоморфизм, переводящий элементы $\mathfrak{G}$ самих в себя. Ясно, что в таком случае из $h_1^m = g$, $h_2^m = g$ следует, что h_1 и h_2 — соответствующие элементы при изоморфизме $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$. Таким образом, наше первоначальное соответствие между $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ является также изоморфизмом.

Переход к группам с бесконечным числом образующих основан на следующем замечании. Пусть $\mathfrak{G}$ — чистая, нильпотентная группа с конечным числом образующих, $\mathfrak{G}^*$ — ее пополнение. Всякий элемент h из $\mathfrak{G}^*$ однозначно определяется положительным числом n и элементом g из $\mathfrak{G}$, удовлетворяющим условию $h^n = g$. Поэтому элементы $\mathfrak{G}^*$ можно представить символически парами $(g; n)$, причем две пары $(g; n)$, $(g_1; n_1)$ равны в том и только том случае, если $g^{n_1} = g_1^n$, а закон умножения пар $(g; n)$ и $(g_1; n_1)$ однозначно определяется структурой подгруппы, порожденной в $\mathfrak{G}$ элементами g и g_1 . Чтобы построить для группы $\mathfrak{G}$ с бесконечным числом образующих пополнение $\mathfrak{G}^*$, мы строим группу пар $(g; n)$, равенство и закон умножения которых определяется указанным выше способом. Эта группа пар и даст искомое пополнение $\mathfrak{G}$.

Теорема 7. Если $\mathfrak{G}^*$ — пополнение чистой нильпотентной группы $\mathfrak{G}$, а $\mathfrak{H}$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}$, то пополнение $\mathfrak{H}^*$ подгруппы $\mathfrak{H}$ будет нормальным делителем в $\mathfrak{G}^*$. Если $\mathfrak{H}$ — центр $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{H}^*$ — центр $\mathfrak{G}^*$.

Последнее утверждение непосредственно следует из теоремы 1. Что касается первого утверждения, то его, очевидно, достаточно доказать только для групп $\mathfrak{G}$, имеющих конечное число образующих.

Включим $\mathfrak{G}$ в связную, односвязную, нильпотентную группу $\mathfrak{L}$ в качестве равномерной дискретной подгруппы. Обозначим через $\mathfrak{L}_1$ минимальную связную подгруппу группы $\mathfrak{L}$, содержащую $\mathfrak{H}$. Подгруппа $\mathfrak{H}$ будет дискретной и равномерной в $\mathfrak{L}_1$. Поэтому $\mathfrak{L}_1$ будет нормальным делителем в $\mathfrak{L}$. Но тогда $\mathfrak{H}^*$ будет нормальным делителем в $\mathfrak{G}^*$, что и требовалось.

Теоремы 4, 5, 7 устанавливают некоторые связи между подгруппами произвольной чистой нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ и подгруппами ее пополнения. Эти связи будут яснее, если ввести следующее определение. Условимся подгруппу $\mathfrak{H}$ чистой нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ называть сервантной, если из $g^m \in \mathfrak{H}$, $m > 0$, следует $g \in \mathfrak{H}$. Легко видеть, что если $\mathfrak{G}^*$ — пополнение группы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ — сервантная подгруппа в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}^*$ — ее пополнение, то $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}$. Обратно, пересечение каждой полной подгруппы из $\mathfrak{G}^*$ с группой $\mathfrak{G}$ дает сервантную подгруппу $\mathfrak{G}$.

Пусть $\mathfrak{H}_1^*$, $\mathfrak{H}_2^*$ — две полные подгруппы из $\mathfrak{G}^*$. Если

$$\mathfrak{H}_1^* \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{H}_2^* \cap \mathfrak{G},$$

то на основании теоремы 4 $\mathfrak{H}_1^* = \mathfrak{H}_2^*$. Таким образом, соответствие между сервантными подгруппами $\mathfrak{G}$ и полными подгруппами пополнения $\mathfrak{G}^*$ взаимно однозначное. Теорема 7 показывает, что при этом полные нормальные делители $\mathfrak{G}^*$ переходят в сервантные нормальные делители $\mathfrak{G}$ и т. д.

Так как пересечение сервантных подгрупп есть подгруппа сервантная, то всякая подгруппа $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{G}$ лежит внутри однозначно определенной минимальной сервантной подгруппы $\mathfrak{G}$.

Для того чтобы две подгруппы $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ группы $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих содержались в одной и той же минимальной сервантной подгруппе, необходимо и достаточно, чтобы их пересечение имело конечный индекс в каждой из них.

Общим рангом или просто рангом абстрактной группы $\mathfrak{G}$ называют минимальное положительное число R , обладающее тем свойством, что любое конечное число элементов $\mathfrak{G}$ лежит внутри некоторой подгруппы $\mathfrak{G}$, имеющей R образующих. Если в этом предложении слова «лежит внутри» заменить словом «порождает», то получится определение другого числа, называемого специальным рангом $\mathfrak{G}$ (ср. [6]). В частности, если группа $\mathfrak{G}$ имеет s образующих, то ее ранг не превосходит s , а специальный ранг может быть и бесконечным.

Теорема 8. Ранг пополнения $\mathfrak{G}^*$ чистой нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ не больше ранга $\mathfrak{G}$.

Обозначим ранг $\mathfrak{G}$ через r . Пусть $g_1^*, \dots, g_s^*$ — произвольные элементы $\mathfrak{G}^*$. Ищем такие положительные числа $m_1, \dots, m_s$, чтобы элементы $g_i^{m_i} = g_i$ ($i = 1, \dots, s$) лежали в $\mathfrak{G}$. Согласно предположению в $\mathfrak{G}$ найдутся такие элементы $a_1, \dots, a_r$, что $g_1, \dots, g_s$ можно будет представить в виде

$$g_i = a_{\alpha_{i1}}^{m_{i1}} a_{\alpha_{i2}}^{m_{i2}} \dots a_{\alpha_{ik}}^{m_{ik}} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (8)$$

Для каждого $N > 0$ в $\mathfrak{G}^*$ существуют элементы $x_1, \dots, x_r$, удовлетворяющие соотношениям $x_i^N = a_i$. Согласно лемме, если N делится на достаточно высокие степени чисел m_i , то вследствие (8) элементы g_i могут быть записаны в форме

$$g_i = (x_{\beta_{i1}}^{n_{i1}} x_{\beta_{i2}}^{n_{i2}} \dots x_{\beta_{ik}}^{n_{ik}})^{m_i}. \quad (9)$$

Сравнивая соотношения $g_i = g_i^{*m_i}$ и (9), мы находим

$$g_i^* = x_{\beta_{i1}}^{n_{i1}} x_{\beta_{i2}}^{n_{i2}} \dots x_{\beta_{ik}}^{n_{ik}},$$

т. е. все элементы g_i^* лежат внутри подгруппы, порожденной элементами $x_1, x_2, \dots, x_r$. Это показывает, что ранг $\mathfrak{G}^*$ не превосходит r . То, что ранг $\mathfrak{G}^*$ в некоторых случаях может быть ниже ранга $\mathfrak{G}$, показывает рассмотренный выше пример группы $\mathfrak{A}$ с образующими a, b, c и определяющими соотношениями $ab = bac^2, ac = ca, bc = cb$. Минимальное число образующих $\mathfrak{A}$ равно трем. Таков же и ее ранг. Однако ранг ее пополнения, как легко видеть, равен двум.

Пусть $\mathfrak{H}$ — ч. п. н. группа конечного ранга r . Тогда фактор-группа $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}^2$ будет чистой полной абелевой группой, ранг которой s не превосходит r . Докажем, что на самом деле $s = r$.

Группа $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}^2$ распадается в прямое произведение подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел. Выберем в каждой из этих подгрупп по элементу и пусть $g_1, \dots, g_s$ будут их прообразами в группе $\mathfrak{H}$. Образы элементов $g_i^{1/N}$ ($N = 1, 2, \dots, s$) в фактор-группе $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}^2$ порождают всю фактор-группу. Согласно известному свойству нильпотентных групп отсюда следует, что элементы $g_i^{1/N}$ являются системой образующих и для $\mathfrak{H}$.

Рассмотрим подгруппу $\mathfrak{G}$, порожденную элементами $g_1, g_2, \dots, g_s$ в $\mathfrak{H}$. Мы хотим показать, что $\mathfrak{H}$ есть пополнение $\mathfrak{G}$. Пусть h — произвольный элемент $\mathfrak{H}$. Тогда найдется такое значение числа N , что h будет лежать в подгруппе $\mathfrak{G}_1$, порожденной элементами $g_1^{1/N}, \dots, g_s^{1/N}$. Группа $\mathfrak{G}_1$ нильпотентна, имеет конечное число образующих и N -я степень каждого образующего лежит в подгруппе $\mathfrak{G}$. Следовательно, $\mathfrak{G}$ имеет конечный индекс в $\mathfrak{G}_1$ и каждый элемент $\mathfrak{G}_1$ в подходящей положительной степени содержится в $\mathfrak{G}$. В част-

ности, при некотором $m > 0$ h^m будет содержаться в $\mathfrak{G}$. Таким образом, группа $\mathfrak{H}$ является пополнением $\mathfrak{G}$. Ранг $\mathfrak{G}$ не больше s , следовательно, и ранг $\mathfrak{H}$ также не больше s . Но, с другой стороны, s не больше r , откуда $r = s$.

Попутно мы получили, что всякая ч.п.н. группа конечного ранга есть пополнение чистой нильпотентной группы с конечным числом образующих. Обратное в силу теоремы 8 очевидно. Из следствия теоремы 4 вытекает также, что ч. п. н. группы конечного ранга, и только они, обладают конечным нормальным рядом с фактор-группами, изоморфными аддитивной группе рациональных чисел.

§ 3. Алгебры Ли чистых полных нильпотентных групп

Рассмотрим некоторую ч.п.н. группу $\mathfrak{G}^*$ конечного ранга. Мы видели, что в $\mathfrak{G}^*$ существует подгруппа $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих, пополнением которой является $\mathfrak{G}^*$.

Каждой чистой нильпотентной группе с конечным числом образующих отвечает однозначно определенная нильпотентная алгебра Ли над полем рациональных чисел (см. [5]). Если $\mathfrak{G}_1$ — какая-либо другая подгруппа с конечным числом образующих, пополнением которой является $\mathfrak{G}^*$, то согласно теореме 5 пересечение $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{G}_1$ имеет конечные индексы в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_1$. В [5] показано, что отсюда вытекает изоморфизм алгебры Ли, отвечающий группам $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_1$. Таким образом, рациональная алгебра Ли G , отвечающая подгруппе $\mathfrak{G}$, не зависит от выбора $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}^*$. Мы будем называть G рациональной алгеброй Ли группы $\mathfrak{G}^*$.

Т е о р е м а 9. Соответствие между рациональными нильпотентными алгебрами Ли и ч. п. н. группами конечного ранга взаимно однозначно.

Однозначность этого соответствия в одну сторону была уже установлена. Рассмотрим обратное соответствие. Пусть задана рациональная нильпотентная алгебра Ли G . Согласно [5] G является рациональной алгеброй некоторого нильногообразия M . Фундаментальная группа $\mathfrak{G}$ этого многообразия нильпотентна, имеет конечное число образующих и не содержит элементов конечного порядка. Пополнение $\mathfrak{G}^*$ группы $\mathfrak{G}$ будет искомой ч.п.н. группой конечного ранга с алгеброй G . Если M_1 — какое-либо другое нильногообразие с алгеброй G , то M_1 и M будут конечнолистными накрытиями некоторого третьего нильногообразия M_2 . В силу этих накрытий фундаментальные группы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$ многообразий M , M_1 можно рассматривать как подгруппы фундаментальной группы $\mathfrak{G}_2$ многообразия M_2 . Поскольку накрытия конечнолистные, то индексы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_1$ в $\mathfrak{G}_2$ конечны. Но тогда пополнения $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$ совпадают с пополнением $\mathfrak{G}_2$ и, следовательно, изоморфны.

Построение ч.п.н. группы по алгебре Ли может быть произведено следующим прямым способом. Пусть задана нильпотентная алгебра Ли G над полем рациональных чисел. Определим для элементов G дополнительную операцию $\times$ посредством формулы Хаусдорфа:

$$a \times b = a + b + \frac{1}{2}[a, b] + \dots \quad (10)$$

Ввиду нильпотентности G правая часть содержит только конечное число членов и вопрос о сходимости не возникает. Легко видеть, что элементы алгебры G образуют относительно операции $\times$ ч. п. н. группу $\mathfrak{G}^*$ конечного ранга. Это и будет группа с алгеброй G .

Из формулы (10) непосредственно видно, что элементы любой подалгебры $H \subset G$ образуют относительно операции $\times$ полную подгруппу $\mathfrak{G}^*$ группы $\mathfrak{G}^*$. Если H — идеал в G , то $\mathfrak{G}^*$ будет нормальным делителем $\mathfrak{G}^*$. Для доказательства обратного утверждения условимся подгруппы группы $\mathfrak{G}^*$, изоморфные аддитивной группе рациональных чисел, называть однопараметрическими. Таким образом, всякую однопараметрическую подгруппу можно представить в виде функции $g(t)$, где параметр t пробегает рациональные значения и $g(t+u) = g(t) \times g(u)$.

Пусть $g(1) = g$. Тогда из соотношений $g^n = ng$, $g^n = g(n)$ следует, что $g(t) = tg$ для всех рациональных значений t . Элемент

$$g(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t} g(t)$$

условимся называть касательным к подгруппе $g(t)$. Повторяя рассуждения, хорошо известные из теории групп Ли, мы придем к следующей общей теореме.

Т е о р е м а 10. *Если ч. п. н. группа $\mathfrak{G}^*$ конечного ранга имеет рациональную алгебру Ли G , то между полными подгруппами $\mathfrak{G}^*$ и подалгебрами G существует естественное взаимно однозначное соответствие, при котором нормальным делителям $\mathfrak{G}^*$ отвечают идеалы G , фактор-группам отвечают алгебры вычетов, центру $\mathfrak{G}^*$ отвечает центр G .*

В теоремах 9, 10 шла речь только о ч.п.н. группах конечного ранга и соответственных алгебрах Ли конечной размерности. Совершенно очевидным способом это соответствие распространяется на ч.п.н. группы бесконечного ранга и нильпотентные рациональные алгебры Ли бесконечной размерности.

§ 4. Локально нильпотентные группы

Основные результаты предыдущих параграфов распространяются без всяких изменений и на некоторые более широкие классы групп. Одни из таких классов образуют локально нильпотентные группы. Как известно [2], группа $\mathfrak{G}$ называется локально нильпотентной, если каждое конечное множество ее элементов порождает нильпотентную подгруппу. По аналогии с этим условимся алгебру Ли называть локально нильпотентной, если каждое конечное множество ее элементов лежит внутри некоторой нильпотентной подалгебры этой алгебры. Повторяя рассуждения, приведенные выше, мы без труда получим следующие результаты.

Для каждой локально нильпотентной группы $\mathfrak{G}$, не содержащей элементов конечного порядка, существует чистая полная локально нильпотентная группа $\mathfrak{G}^*$, заключающая группу $\mathfrak{G}$ в качестве своей подгруппы и такая, что некоторая положительная степень каждого элемента $\mathfrak{G}^*$ содержится в $\mathfrak{G}$. Группа $\mathfrak{G}^*$, обладающая этими свойствами, с точностью до изоморфизма единственна и называется пополнением группы $\mathfrak{G}$. Теоремы 1, 2, 4, 5, 7, 8 имеют место для локально нильпотентных групп.

Формула (10) устанавливает соответствие между локально нильпотентными алгебрами Ли над полем рациональных чисел и локально нильпотентными чистыми полными группами. Это соответствие обладает свойствами, изложенными в теоремах 9, 10.

В ранее упоминавшейся работе [7] С. Н. Черников изучал общие свойства полных групп, обладающих возрастающим центральным рядом. Легко заме-

тить, что всякая группа, обладающая возрастающим центральным рядом, локально нильпотентна. Доказательство можно провести индукцией по длине верхнего центрального ряда. Пусть $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{G}_\omega \subset \dots \subset \mathfrak{G}_\alpha = \mathfrak{G}$ — возрастающий центральный ряд группы $\mathfrak{G}$ и пусть для групп с меньшей длиной центрального ряда утверждение верно. Рассмотрим конечную систему неединичных элементов $a_1, \dots, a_n$ из $\mathfrak{G}$. Если α предельное, то все эти элементы содержатся в некоторой подгруппе $\mathfrak{G}_\beta$ ($\beta < \alpha$) и в силу индукции порождают в ней нильпотентную подгруппу. Пусть α изолированное, $\alpha = \beta + k$, β — предельное, $0 < k < \omega$. Обозначим через $b_1, \dots, b_s$ всевозможные коммутаторы вида $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{k+1}})$. Согласно предположению элементы $b_1, \dots, b_s$ лежат в $\mathfrak{G}_\beta$, потому и в некоторой группе $\mathfrak{G}_\gamma$, $\gamma < \beta$, так как β — предельное.

Пусть H — подгруппа, порожденная элементами из $\mathfrak{G}_\gamma$ и $a_1, \dots, a_n$. Подгруппа H содержит нормальный делитель $\mathfrak{G}_\gamma$, фактор-группа по которому нильпотентна и имеет центральный ряд длины не более $m + 1$. Но тогда H будет иметь возрастающий центральный ряд длины, не превосходящей числа $\gamma + m + 1 < \beta$. Отсюда по индукции следует, что любая конечная система элементов H , в том числе и $a_1, a_2, \dots, a_n$, порождает нильпотентную подгруппу. Это же рассуждение, очевидно, верно и для алгебр.

Из этого замечания следует, что все результаты настоящей заметки применимы и к группам, обладающим возрастающим центральным рядом, эквивалентно изучению рациональных алгебр Ли, имеющих возрастающий центральный ряд.

Заметим, что некоторые из полученных выше результатов можно распространить и на группы, допускающие убывающий центральный ряд с чистыми абелевыми фактор-группами.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Baer. Minimal central chains of a group.— Trans. Amer. Math. Soc., 1945, 58, N 3, 348—389.
2. А. Г. Курош. Теория групп. М., 1944.
3. W. Magnus. Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren.— J. reine und angew. Math., 1937, 177, 105—115.
4. W. Magnus. Über Gruppen und zugeordnete Liesche Ringe.— J. reine und angew. Math., 1940, 182, 142—149.
5. А. И. Мальцев. Об одном классе однородных пространств.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, 13, № 1, 9—32.
6. А. И. Мальцев. О группах конечного ранга.— Мат. сб., 1948, 22, № 2, 351—352.
7. С. Н. Черников. Полные группы, обладающие возрастающим центральным рядом.— Мат. сб., 1946, 18, № 3, 397—421.
8. H. Zassenhaus. Ein Verfahren, jeder endlichen p -Gruppe einen Lie Ring mit der Charakteristik p zu zuordnen.— Abhandl. Math. Seminar Univ., Hamburg, 1939, 13, 200—205.



Абстрактная группа G называется упорядоченной, если между элементами установлено отношение порядка, подчиненное обычным требованиям: для любых a, b из G верно одно и только одно из отношений

$$a < b, \quad a = b, \quad b > a;$$

если $a < b, b < c$, то $a < c$; если $a < b$, то $cad < cbd$.

При изучении свойств упорядоченных групп естественно встают два вопроса;

- 1) какие абстрактные группы можно упорядочить и
- 2) какие упорядоченные множества можно сделать упорядоченными группами, определив на них подходящим образом групповую операцию?

Первый вопрос, в известном смысле, решается в п. 1, где указаны необходимые и достаточные условия для упорядочиваемости абстрактной группы. Несколько необходимых признаков было ранее найдено Ф. Леви [1]. Достаточные условия были указаны Ф. Леви [2] и Е. П. Шимбиревой [3]. Ими же было показано, что эти условия не являются достаточными.

В п. 2 рассматриваются упорядоченные прямые произведения и доказывается, что любые два разложения упорядоченной группы в упорядоченные прямые произведения обладают изоморфными уплотнениями. Частный случай этой теоремы для упорядоченных произведений групп, изоморфных группе вещественных чисел, был рассмотрен еще Ханом [4]. Аналогичная теорема для кардинальных произведений была доказана Биркгофом [5] и обобщена Е. П. Шимбиревой [3] на случай однокомпонентных частично упорядоченных групп.

В п. 3 рассматриваются возможные порядковые типы упорядоченных групп.

1. Условия упорядочиваемости. Подгруппа H упорядоченной группы G называется выпуклой, если из $a \in H, b \in H, a < c < b$, следует $c \in H$.

Обозначим через Σ систему всех выпуклых подгрупп группы G . Эта система обладает следующими очевидными свойствами:

- 1) Σ содержит единичную подгруппу и группу G ;
- 2) из любых двух подгрупп системы Σ одна содержится внутри другой;
- 3) объединение и пересечение любого числа подгрупп из Σ снова содержится в Σ ;
- 4) если A содержится в Σ , то все сопряженные с A подгруппы также содержатся в Σ .

Из 2) и 4) вытекает, что если $A \subset B$ — соседние подгруппы в Σ , то A является нормальным делителем B . Фактор-группа B/A упорядоченная и не содержит выпуклых подгрупп. Поэтому B/A архимедова и, следовательно, коммутативная. Таким образом, имеем

5) если $A \subset B$ — соседние подгруппы системы Σ , то B/A — абелева без элементов конечного порядка.

Свойства 1), 3), 5) означают, что Σ есть нормальная разрешимая система подгрупп группы G в смысле Куроша — Черникова [6] и G есть группа типа RN .

Из 4) вытекает, что система Σ инвариантна относительно внутренних автоморфизмов, а ее подгруппы инфраинвариантны в смысле Краснера [7]. Отсюда видно, что тип системы Σ является промежуточным между нормальным разрешимым и инвариантным разрешимым и может быть назван инфраразрешимым.

Пусть G — произвольная абстрактная группа и Σ — какая-либо система ее подгрупп, обладающая свойствами 1)–5). Рассмотрим соседние подгруппы $A \subset B$ этой системы. Введем для коммутативной фактор-группы B/A аддитивную запись. Если для $g \in G$ имеем $g^{-1}Ag = A$, то $g^{-1}Bg = B$. Поэтому элемент g производит автоморфизм в фактор-группе B/A , который мы будем называть главным. Главные автоморфизмы порождают в полном кольце эндоморфизмов группы B/A некоторое подкольцо $O(A)$. Ненулевой эндоморфизм $\alpha \in O(A)$ назовем аннулятором, если в B/A найдется ненулевой элемент a , для которого $a\alpha = 0$. Если кольцо $O(A)$ аннуляторов не содержит, то оно не содержит и делителей нуля. Если, сверх того, $O(A)$ коммутативно, то для него можно построить поле отношений $O^*(A)$. Расширенное поле, полученное из $O^*(A)$ присоединением квадратных корней из главных элементов, обозначим через $K(A)$. Если группа G упорядоченная, а Σ — система всех ее выпуклых подгрупп, то

6) присоединенное кольцо $O(A)$ каждой пары соседних подгрупп $A \subset B$ из Σ коммутативно, аннуляторов не содержит и его расширенное поле $K(A)$ является формально действительным, т. е. в $K(A)$ элемент -1 не есть сумма квадратов.

В самом деле, группа B/A архимедова и потому изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы вещественных чисел. Главные эндоморфизмы B/A продолжаемы до автоморфизмов всей группы вещественных чисел. Но упорядоченные (возрастающие) и обратно упорядоченные автоморфизмы группы вещественных чисел образуют поле вещественных чисел. Поэтому $K(A)$ изоморфно некоторому подполю поля вещественных чисел и свойство 6) выполняется.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы абстрактная группа G была упорядочиваемой, необходимо и достаточно, чтобы G содержала систему подгрупп, обладающую свойствами 1) — 6) *.*

Необходимость доказана выше. Обратное, пусть G содержит систему подгрупп Σ со свойствами 1)–6). Подгруппы Σ , имеющие непосредственно предыдущие, распадаются на классы сопряженных. Из каждого класса выберем по представителю B_α и назовем их отмеченными подгруппами. Пусть A_α — непосредственно предшествующая подгруппа отмеченной группы B_α . Рассмотрим присоединенное кольцо $O_\alpha = O(A_\alpha)$, его поле отношений O_α^* и расширенное поле $K_\alpha = K(A_\alpha)$. По условию K_α формально действительно и, следовательно, его можно упорядочить. Так как главные элементы O_α являются квадратами в K_α , то они будут положительными. Кольцо O_α есть область

* При чтении корректур мне стала известна статья К. Ивасава (K. Iwasawa. On linearly ordered groups. — J. Math. Soc. Japan, 1948, 1, 1–9), теорема 2 которой частично перекрывается с нашей теоремой.

операторов для модуля B_α/A_α . Поскольку в O_α нет аннулирующих элементов, то B_α/A_α можно упорядочить и притом так, что положительные операторы O_α не будут нарушать порядка элементов B_α/A_α *. В частности, порядок элементов B_α/A_α не будет нарушаться внутренними автоморфизмами G , так как эти автоморфизмы являются главными и, следовательно, положительными элементами O_α . Пусть $g \in G$. Обозначим через A_g объединение подгрупп системы Σ , не содержащих g , и через B_g — пересечение подгрупп Σ , содержащих g . Подгруппы A_g, B_g — соседние в Σ . Поэтому в Σ найдется отмеченная подгруппа B , сопряженная с B_g . Пусть $B = h^{-1}B_g h$. Элемент g в группе G условимся считать большим единицы, если образ его сопряженного $h^{-1}gh$ в B/A положителен **.

А) Отношение $g > e$ не зависит от выбора элемента h .

Действительно, если $B = h_1^{-1}B_g h_1$, то

$$h^{-1}h_1 B (h^{-1}h_1)^{-1} = B,$$

т. е. $h^{-1}h_1$ индуцирует в B/A главный автоморфизм. Так как $0 < \overline{h^{-1}gh}$ в B/A , то

$$0 < \overline{(h^{-1}gh)^{h^{-1}h_1}} = \overline{h_1^{-1}gh_1}.$$

Б) Для любого элемента $g \neq e$ либо $g > e$, либо $g^{-1} > e$.

В) Если $g > e$, то $a^{-1}ga > e$ ($a \in G$).

Имеем:

$$B_{a^{-1}ga} = a^{-1}B_g a,$$

и если $B = h^{-1}B_g h$, то

$$B = h^{-1}aB_a^{-1}a^{-1}h,$$

откуда

$$\overline{h^{-1}aa^{-1}ga^{-1}h} = \overline{h^{-1}gh}.$$

Г) Из $a > e$, $b > e$ следует $ab > e$.

Пусть

$$B_\alpha = u^{-1}B_a u, \quad B_\beta = v^{-1}B_b v, \quad B_\alpha \subset B_\beta.$$

Если $B_\alpha = B_\beta$, то утверждение очевидно. Если же $B_\alpha \neq B_\beta$, то $B_\alpha \subset A_b \subset B_\beta$. Отсюда $B_{ab} = B_\beta$ и

$$\overline{vabv^{-1}} = \overline{v b v^{-1}} > 0.$$

Теперь, как обычно, полагаем $a > b$, если $ab^{-1} > e$. Из Б) — Г) следует, что все аксиомы упорядоченности выполняются.

Достаточность условий Е. П. Шимбиревой [3] из теоремы 1 вытекает непосредственно. Именно, если группа G содержит центральную систему подгрупп

* Например, можно погрузить B_α/A_α в модуль над полем O_α^* , выбрать в этом модуле определенную базу, расположить ее в трансфинитную последовательность и упорядочить элементы модуля лексикографически по их координатам. Отметим также, что формальная действительность поля $K(A)$ равносильна требованию упорядочиваемости кольца $O(A)$, при которой главные элементы остаются положительными.

** Фактор-группа B/A рассматривается в аддитивной записи. Черта сверху означает образ соответствующего элемента в B/A .

Σ , все факторы которой без кручения, то главные автоморфизмы их приводятся к единице и, следовательно, присоединенные кольца будут изоморфны кольцу целых чисел, т. е. группа G будет упорядочиваемой.

Близость условий Е. П. Шимбиревой и необходимых условий теоремы 1 особенно ясна для нормально упорядоченных групп, т. е. групп, все выпуклые подгруппы которых инвариантны. Именно, выпуклые подгруппы коммутанта нормально упорядоченной группы образуют в нем центральную систему.

В самом деле, пусть $A \subset B$ — такие выпуклые соседние подгруппы нормально упорядоченной группы G , пересечения которых с G' дают соседние выпуклые подгруппы $A_1 \subset B_1$ в G' . Так как группа B_1/A_1 архимедова, то автоморфизмы, индуцируемые в ней элементами G , перестановочны, а автоморфизмы, индуцируемые коммутаторами, являются единичными.

2. Прямые произведения. Обозначим через σ некоторое трансфинитное число, обладающее свойством, что сумма и произведение любых двух чисел, меньших σ , снова меньше σ . Пусть M — упорядоченное множество и $\{G_\alpha\}$ — система упорядоченных групп, занумерованных элементами M .

σ -произведением групп G_α называется упорядоченная группа G , элементами которой являются системы $g = \{g_\alpha\}$, содержащие по одному элементу g_α из каждой группы G_α , причем множество индексов элементов g_α , отличных от единицы, должно быть вполне упорядоченным по убыванию и иметь порядковое (по убыванию) число меньше σ . Перемножаются системы $g = \{g_\alpha\}$ и $h = \{h_\alpha\}$ по правилу $gh = \{g_\alpha h_\alpha\}$, а упорядочиваются лексикографически по последним отличными элементам.

Разложения групп G и H в σ -произведения

$$G = \prod G_\alpha, \quad H = \prod H_\alpha$$

называются изоморфными, если между множествами их индексов можно установить взаимно однозначное, сохраняющее порядок соответствие, при котором множители G_α и H_α с соответствующими индексами были бы упорядоченно изоморфны. Ясно, что группы, допускающие изоморфные σ -разложения, сами изоморфны. Чтобы сформулировать теорему о свойствах произвольных σ -разложений изоморфных групп, введем обычное понятие уплотнения разложения. Пусть в системе $\{G_\alpha\}$ каждая группа представлена σ -произведением $\prod_i G_{i\alpha}$. Упорядочивая пары индексов (i, α) лексикографически сначала по второму, а затем и по первому индексам, можно составить σ -произведение $\prod_{(i, \alpha)} G_{i\alpha}$. Это произведение будет называться уплотнением первого. Очевидно, уплотненное произведение является группой, упорядоченно изоморфной первоначальному произведению.

Теорема 2. Если два σ -произведения $\prod A_\alpha$ и $\prod U_\lambda$ являются упорядоченно изоморфными группами, то эти произведения допускают изоморфные уплотнения.

Для доказательства заметим сначала, что если $U = \prod U_\lambda$ и множество индексов, по которым берется произведение, разбито на две части S, T так, что элементы S меньше элементов T , то $\prod U_\lambda (\lambda \in S)$ есть выпуклая подгруппа в U . Далее, имеет место

Л е м м а 1. Если A, B — нормальные делители группы $\prod U_\lambda$, из которых A выпуклый, $A \cap B = 1$, $AB = \prod U_\lambda$, B_λ — компонента подгруппы U_λ в B , то

$$B \cong \prod B_\lambda, A = \prod (A \cap U_\lambda).$$

Действительно, элементами $\prod U_\lambda$ являются σ -последовательности $\{u_\lambda\}$. Последовательность $\{u_\lambda\}$, у которой $u_\lambda = 1$ для $\lambda \neq \alpha$, отождествим с элементом u_α . Легко видеть, что $\{u_\lambda\}$ тогда и только тогда содержится в A , если компонента каждого u_λ в B равна единице. В самом деле, пусть компонента u_λ (B) элемента u_λ в B есть единица для всех λ и пусть $u_\mu > 1$, где u_μ — последний отличный от единицы элемент в $\{u_\lambda\}$. Тогда $u_\mu^2 \in A$ и $u_\mu^2 > \{u_\lambda\} > 1$. Ввиду выпуклости A это дает $\{u_\lambda\} \in A$. Обратно, если $\{u_\lambda\} \in A$, $u_\mu > 1$, то $\{u_\lambda\}^2 > u_\mu > 1$, и из $\{u_\lambda\}^2 \in A$ следует $u_\mu \in A$, т. е. $u_\mu(B) = 1$. Пусть β таково, что $u_\lambda(B) = 1$ для $\lambda > \beta$ и $\beta < \mu$. Из $u_\mu > u_\beta^{\pm 1}$ следует $u_\mu(B) \geq u_\beta^{\pm 1}(B)$, т. е. $1 \geq u_\beta^{\pm 1}(B)$ или $u_\beta(B) = 1$.

Покажем, что $A = \prod (A \cap U_\lambda)$. Вхождение правой части в левую уже установлено.

Если $a = \{a_\lambda\} \in A$, то по доказанному $a_\lambda(B) = 1$, следовательно, $a_\lambda \in A \cap U_\lambda$. Соответствие $\{u_\lambda\} \rightarrow \{u_\lambda(B)\}$ является искомым изоморфным отображением B на σ -произведение $\prod U_\lambda(B)$.

Доказательство теоремы 2 протекает теперь следующим образом:

А) Обозначим через φ данное изоморфное отображение $\prod U_\lambda$ на

$\prod A_\alpha$ и рассмотрим компоненту $A_{\lambda\alpha}$ подгруппы $N_\alpha A_\alpha \cap U_\lambda \varphi$ в A_α , где $N_\alpha = \prod_{\beta < \alpha} A_\beta$. Положим $M_\alpha = \prod_{\beta > \alpha} A_\beta$. Мы имеем $N_\alpha A_\alpha M_\alpha = \prod A_\beta^2$, откуда

$$N_\alpha \varphi^{-1} \cdot A_\alpha \varphi^{-1} \cdot M_\alpha \varphi^{-1} = \prod U_\lambda.$$

В силу леммы

$$N_\alpha \varphi^{-1} \cdot A_\alpha \varphi^{-1} = \prod (U_\lambda \cap N_\alpha \varphi^{-1} \cdot A_\alpha \varphi^{-1}),$$

$$N_\alpha A_\alpha = \prod (U_\lambda \varphi \cap N_\alpha A_\alpha).$$

Применяя ту же лемму, получим $A_\alpha \cong \prod A_{\lambda\alpha}$, т. е.

$$\prod A_\alpha \cong \prod_{(\lambda, \alpha)} A_{\lambda\alpha}.$$

Б) Если $A_{\lambda\alpha} \neq 1$, то $A_{\mu\beta} = 1$ для $\mu < \lambda$, $\alpha < \beta$, или, что то же самое, $U_\mu \varphi \subset N_\alpha A_\alpha$. Из $A_{\lambda\alpha} \neq 1$ следует существование элемента $u_\lambda \in U_\lambda$, $u_\lambda > 1$, обладающего разложением $u_\lambda \varphi = \{a_\alpha\}$, где $a_\alpha > 1$ и $a_\alpha = 1$ для $\alpha > \lambda$. Если теперь

$$u_\mu > 1, \quad u_\mu \in U_\mu, \quad u_\mu \varphi = \{b_\beta\},$$

то $u_\lambda > u_\mu$ и, следовательно, первый отличный от единицы элемент в $\{b_\beta\}$ будет больше единицы и его индекс будет не больше α , т. е. $u_\mu \varphi \subset N_\alpha A_\alpha$.

В) $\prod'_\alpha A_{\lambda\alpha} = A_\lambda^*$ есть отрезок разложения $\prod'_{(\mu, \alpha)} A_{\mu\alpha}$, где штрих означает, что сомножители, равные единице, следует вычеркнуть.

Пусть $A_{\lambda\alpha}$, $A_{\lambda\gamma}$ — неединичные сомножители из A_λ^* . Покажем, что $A_{\mu\beta} = 1$ при условии $\lambda \neq \mu$ и $(\lambda, \alpha) < (\mu, \beta) < (\lambda, \gamma)$. Действительно, если $\alpha < \beta \leq \gamma$, $\mu < \lambda$, то из $A_{\lambda\alpha} \neq 1$ в силу В) имеем $A_{\mu\beta} = 1$. Если же $\alpha \leq \beta < \gamma$, $\lambda < \mu$, то из $A_{\mu\beta} \neq 1$ следовало бы $A_{\lambda\gamma} = 1$.

В силу В) мы имеем

$$\prod_{(\lambda, \alpha)} A_{\lambda\alpha} \cong \prod A_\lambda^*.$$

Остается показать, что A_λ^* изоморфна группе U_λ . Докажем сначала, что

$$\prod_{\mu \leq \lambda} A_\mu^* = \left(\prod_{\mu \leq \lambda} U_\mu \right) \varphi. \quad (1)$$

Обозначим через P_λ множество тех индексов α , для которых $A_{\lambda\alpha} \neq 1$. Тогда

$$A_\lambda^* = \prod A_{\lambda\alpha}, \quad \alpha \in P_\lambda.$$

Если $\alpha \in P_\lambda$, $\beta \in P_\lambda$, $\alpha < \beta$, то

$$\prod_{(\mu, \gamma) \leq (\lambda, \alpha)} A_{\mu\gamma} \not\subset \left(\prod_{\mu \leq \lambda} U_\mu \right) \varphi, \quad (2)$$

ибо в $U_\lambda \varphi$ заведомо есть элементы, разложение которых в $\prod A_{\lambda\alpha}$ кончается в $A_{\lambda\beta}$. Слева и справа от знака $\supset$ в (2) стоят выпуклые подгруппы поэтому одна из них содержится в другой, т. е.

$$\prod_{(\mu, \gamma) \leq (\lambda, \alpha)} A_{\mu\gamma} \subset \left(\prod_{\mu \leq \lambda} U_\mu \right) \varphi. \quad (3)$$

Если в P_λ максимального элемента нет, то из (3) следует, что

$$\prod A_\mu^* \subset \left(\prod U_\mu \right) \varphi.$$

Так как обратное включение очевидно, то равенство (1) в этом случае доказано.

Пусть теперь β — максимальный элемент в P_λ . Из (3) следует, что

$$\prod_{\mu \leq \lambda} A_\mu^* = \prod_{(\mu, \gamma) < (\lambda, \beta)} A_{\mu\gamma} \cdot A_{\lambda\beta} \supset \left(\prod_{\mu \leq \lambda} U_\mu \right) \varphi \supset \prod_{(\mu, \gamma) < (\lambda, \beta)} A_{\mu\gamma}. \quad (4)$$

Так как компонента U_λ в $A_{\lambda\beta}$ совпадает с $A_{\lambda\beta}$, то в (4) вместо первого включения можно взять знак равенства. Таким образом, формула (1) доказана и в этом случае. Мы ею воспользуемся, чтобы установить изоморфизм групп A_λ^* и U_λ . Именно, каждому элементу u_λ из U_λ поставим в соответствие его компоненту в A_λ^* в разложении (1). Так как

$$U_\lambda \varphi \cap \prod_{\mu < \lambda} A_\mu^* = 1,$$

то соответствие будет упорядоченным и изоморфным.

Из теоремы 2 видно, что прямые произведения упорядоченных групп ведут себя проще, чем прямые произведения абстрактных групп. Однако и среди упорядоченных групп имеются такие, которые не могут быть представлены в виде упорядоченного произведения далее неразложимых групп. Для построения соответствующего примера достаточно взять конструкцию, рассмотренную в монографии А. Г. Куроша [8], принять в ней в качестве исходной группы группу пар вещественных чисел с законом умножения

$$(a, b)(c, d) = (ac, bc + d), \quad a > 0, c > 0,$$

и лексикографическим упорядочением и считать все встречающиеся в конструкции произведения упорядоченными.

Уже отмечалось, что аналогичная теорема о кардинальных произведениях частично упорядоченных групп была доказана Е. П. Шимбиревой в более сильной формулировке, именно, что любые два разложения частично упорядоченной группы в ω -произведения своих однокомпонентных подгрупп допускают общее уплотнение. Легко видеть, однако, что в этой форме теорема для упорядоченных ω -произведений перестает быть справедливой.

3. Порядковые типы. Пусть задана вполне упорядоченная последовательность упорядоченных множеств $M_0, M_1, \dots, M_\alpha, \dots$, имеющих порядковые типы $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\alpha, \dots$. Произведением $\xi_0 \xi_1 \dots \xi_\alpha \dots$ этих типов или их ω -произведением называют порядковый тип множества конечных систем $(m_{\alpha_1}, \dots, m_{\alpha_k})$, $m_i \in M_i$, упорядоченных лексикографически по последним различным элементам. Если $\xi_0 = \xi_1 = \dots = \xi$, то полагают $\xi_0 \xi_1 \dots \xi_\alpha \dots = \xi^\beta$, где β — порядковый тип последовательности.

Т е о р е м а 3. Если упорядоченная группа G имеет вполне упорядоченную возрастающую последовательность выпуклых подгрупп

$$1 \subset G_1 \subset \dots \subset G_\alpha \subset \dots \subset G,$$

где подгруппы с предельным индексом являются объединением предшествующих, то порядковый тип группы G равен произведению порядковых типов пространств правых смежных классов $G_{\alpha+1} : G_\alpha$.

В каждом из смежных классов выберем по представителю и фиксируем их. Рассмотрим произвольный элемент $g \in G$. Для некоторого α имеем

$$g \in G_\alpha, \quad g \in G_{\alpha+1}.$$

Пусть g_α — представитель того смежного класса $G_{\alpha+1} : G_\alpha$, который содержит g . Имеем $gg_\alpha^{-1} \in G_\alpha$ и, следовательно, найдется такой индекс $\beta < \alpha$, для которого

$$gg_\alpha^{-1} \in G_\beta, \quad gg_\alpha^{-1} \in G_{\beta+1}.$$

Через g_β обозначим представителя смежного класса $G_{\beta+1} : G_\beta$, содержащего элемент gg_α^{-1} . Далее рассмотрим элемент $gg_\alpha^{-1}g_\beta^{-1}$ и т. д. Последовательность $g_\alpha, g_\beta \dots$ не может быть бесконечной, и мы имеем разложение

$$g = g_\gamma \dots g_\beta g_\alpha.$$

В результате каждому элементу $g \in G$ отвечает определенная конечная последовательность представителей $g_\gamma, \dots, g_\beta, g_\alpha$. Это соответствие взаимно

однозначное и будет упорядоченным, если последовательности упорядочить лексикографически. Теорема доказана.

Условимся в дальнейшем через ζ обозначать порядковый тип множества всех целых чисел, а через η — порядковый тип множества рациональных чисел.

Т е о р е м а 4. *Порядковый тип любой счетной упорядоченной группы имеет вид $\zeta^\lambda \eta^\varepsilon$, где λ — порядковое число, $\varepsilon = 0, 1$. Если порядковый тип группы G есть $\zeta^\lambda \eta^\varepsilon$, то G содержит возрастающую цепочку выпуклых нормальных делителей*

$$E \subset G_1 \subset \dots \subset G_\lambda \subset G,$$

у которой члены с предельными индексами являются объединениями предыдущих, $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ есть центральная выпуклая циклическая подгруппа в G/G_α ($\alpha < \lambda$) и G/G_λ имеет тип η^ε . Для каждого порядкового типа $\zeta^\lambda \eta^\varepsilon$ существует имеющая этот тип абелева упорядоченная группа.

Для доказательства сначала заметим, что если упорядоченная группа G содержит два элемента $g_1 < g_2$, между которыми нет промежуточных, то в G есть элемент a , непосредственно следующий за единицей, и подгруппа, порожденная этим элементом, центральная и выпуклая. Пусть теперь G — произвольная счетная упорядоченная группа. Если в G между любыми различными элементами есть промежуточные, то ввиду счетности тип G будет η . В противном случае, пользуясь сделанным замечанием, мы найдем вполне упорядоченную возрастающую цепочку выпуклых нормальных делителей с описанными в теореме свойствами. Так как порядковый тип $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ есть ζ , а порядковый тип G/G_λ равен η^ε , то в силу теоремы 3 отсюда следует, что порядковый тип G равен $\zeta^\lambda \eta^\varepsilon$.

Аналогичное рассуждение показывает справедливость и второго утверждения теоремы, если обратить внимание на то, что порядковые типы вида $\zeta^\lambda \eta^\varepsilon$ различны при различных λ или ε ($\varepsilon = 0, 1$).

Третье утверждение очевидно, так как искомым порядковым типом обладает упорядоченное ω -произведение λ циклических и ε рациональных групп.

С л е д с т в и е 1. *Если порядковый тип упорядоченной группы есть ζ^λ , то G имеет возрастающий центральный ряд с циклическими факторами.*

С л е д с т в и е 2. *Для того чтобы абелева группа G была ω -прямой суммой λ циклических групп (λ — порядковое число), необходимо и достаточно, чтобы порядковый тип G имел вид ζ^λ .*

Подгруппы групп типа ζ^λ имеют тип ζ^{λ_1} ($\lambda_1 \leq \lambda$). Отсюда видно, что всякая подгруппа ω -произведения λ циклических групп сама есть прямое ω -произведение циклических групп.

Сходными свойствами обладают и группы типа ξ^λ , где ξ — порядковый тип множества вещественных чисел. Например, всякая группа G порядкового типа ξ^λ содержит возрастающую цепочку выпуклых нормальных делителей

$$E \subset G_1 \subset \dots \subset G_\lambda = G,$$

у которой члены с предельными индексами являются объединениями предыдущих, а фактор-группы $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ изоморфны аддитивной группе вещественных чисел.

Далее, пусть G — коммутативная группа типа ξ^λ . Индукцией по λ легко доказывается, что каждый элемент G содержится в подгруппе, имеющей тип ξ . Отсюда, как и выше, следует, что абелева упорядоченная группа тогда и только тогда есть ω -произведение λ групп вещественных чисел, если ее порядковый тип равен ξ^λ .

Из теоремы 4 следует, что для каждой счетной упорядоченной группы G существует абелева группа, имеющая тот же порядковый тип что и G . Верно ли это для несчетных групп, остается невыясненным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *F. Levi*. Ordered groups.— Proc. Indian Acad. Sci., A, 1942, 16, 256—263.
2. *F. Levi*. Contributions to the theory of ordered groups.— Proc. Indian Acad. Sci., A, 1943, 17, 190—201.
3. *Е. П. Шимбурева*. К теории частично упорядоченных групп.— Мат. сб., 1947, 20, № 1, 145—175.
4. *H. Hahn*. Über die nichtarchimedischen Grössensysteme.— Sitzungsber. math. naturwiss. Kl. Wiener Acad., 1907, 116, 601—655.
5. *G. Birkhoff*. Lattice-ordered groups.— Ann. Math., 1942, 43, N 2, 298—331.
6. *А. Г. Курош, С. Н. Черников*. Разрешимые и нильпотентные группы.— Успехи мат. наук, 1947, 2, № 3, 18—59.
7. *M. Krasner*. Une généralisation de la notion de sous-groupe invariant.— C. r. Acad. sci. Paris, 1939, 208, 1867—1869.
8. *А. Г. Курош*. Теория групп. М.— Л., 1944.

ОБОБЩЕННО НИЛЬПОТЕНТНЫЕ АЛГЕБРЫ И ИХ ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ГРУППЫ*



Абстрактная группа G называется нильпотентной, если ее нижний центральный ряд $G = G^1 \supset G^2 \supset G^3 \supset \dots$ через конечное число шагов достигает единичной подгруппы **. Магнус [10] показал, что если G — свободная группа, то, хотя все группы ее нижнего центрального ряда и отличны от единицы, их пересечение все же оказывается равным единице. Эта теорема послужила поводом к следующему обобщению понятия нильпотентности:

Группа G называется обобщенно нильпотентной или N -группой, если пересечение подгрупп ее нижнего центрального ряда равно единице ***. N -группы тесно связаны с нильпотентными группами. Действительно, пусть $\{H_\alpha\}$ — некоторая система групп. Мы скажем, что группа G аппроксимируема группами $\{H_\alpha\}$, если для каждого отличного от единицы элемента g из G существует такое гомоморфное отображение G в одну из групп H_α , при котором образ g в H_α отличен от единицы. Ясно, что обобщенно нильпотентные группы могут быть определены как группы, аппроксимирующиеся нильпотентными группами.

Аналогичные понятия могут быть установлены также для колец и алгебр. Кольцо O называется нильпотентным, если в цепочке его степеней $O \supset O^2 \supset O^3 \supset \dots \supset O^n \supset \dots$ через конечное число шагов встречается нуль. Кольцо O называется обобщенно нильпотентным или N -кольцом, если нулю равно пересечение всех его конечных степеней. Зависимость между обобщенно нильпотентными алгебрами и группами становится явной, если воспользоваться присоединенным умножением.

Соотношение

$$a \circ b = a + b + ab$$

определяет для элементов кольца O новую операцию $\circ$, которая называется присоединенным умножением в O ****. Присоединенное умножение ассоциативно; роль единицы в нем играет нуль кольца O , а взаимно обратными являются элементы a, b , связанные в O равенствами $a + b + ab = b + a + ba = 0$. Присоединенно обратимые элементы кольца O образуют относительно присоединенного умножения группу $\mathcal{G}(O)$, которую мы условимся называть присоединенной. Если O имеет единицу e , то соответствие $e + a \rightarrow a$ отображает изоморфно мультипликативную группу обыкновенных обра-

* Мат. сб., 1949, 25, № 3, 347—366.

** G^{i+1} есть подгруппа, порожденная коммутаторами $(g, h) = g^{-1}h^{-1}gh$, где $g \in G$ и $h \in G^i$ ($i = 1, 2, \dots$). Иногда приходится пользоваться понятием убывающего центрального ряда: цепочка подгрупп $G \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$ называется убывающим центральным рядом группы G , если для всех $g \in G$, $h \in G^i$ коммутаторы (g, h) содержатся в G^{i+1} ($i = 1, 2, \dots$) (см. А. Г. Курош [7]).

*** См., например, Р. Бэр [3].

**** С различными целями эту операцию ввели приблизительно в одно время разные лица (см., например, [5, 11, 13]). По существу этой же операцией пользовался, не вводя ее явно, И. Д. Адо [1].

тимых элементов O на $\mathfrak{G}(O)$ и присоединенное умножение в этом случае не дает ничего нового. Если же O единицы не содержит, то рассмотрение присоединенной группы часто оказывается полезным.

Применяя понятие присоединенного умножения к обобщенно нильпотентным алгебрам, мы сразу замечаем, что присоединенные группы N -алгебр, а также все их подгруппы являются N -группами. Отсюда возникает вопрос об условиях, при которых заданная N -группа изоморфна подгруппе присоединенной группы некоторой N -алгебры. Нахождение необходимых и достаточных условий такой вложимости является основной задачей настоящей работы. Чтобы сформулировать их, введем следующие определения:

Элемент g некоторой N -группы G называется ее обобщенным p -элементом (p — простое), если для каждого i найдется такое f , что $g^{p^f} \in G^i$. Аналогично, элемент g из G называется периодическим в G , если для каждого i найдется такое целое число $n > 0$, что $g^n \in G^i$. Наконец, мы скажем, что $g \neq 1$ имеет бесконечную p -высоту в G , если для любых i и f найдутся элементы $x \in G$ и $a \in G^i$, удовлетворяющие соотношению $x^{p^f} = ga$.

Мы доказываем следующую теорему:

Для того чтобы N -группа G могла быть изоморфно вложена в присоединенную группу некоторой N -алгебры над полем характеристики нуль, необходимо и достаточно, чтобы G не содержала периодических элементов; чтобы N -группа G могла быть изоморфно вложена в присоединенную группу N -алгебры над полем характеристики $p > 0$, необходимо и достаточно чтобы G не содержала элементов бесконечной p -высоты.

В качестве приложения рассматривается вопрос об условиях, при которых свободное произведение N -групп будет N -группой. Упомянутая выше теорема Магнуса показывает, что свободное произведение бесконечных циклических групп есть N -группа. Обобщая эту теорему, Д. И. Фукс-Рабинович [6] высказал утверждение, что свободные произведения произвольных абелевых групп также являются N -группами. Отсюда возникло предположение, что вообще все свободные произведения N -групп будут N -группами. Однако и первое, и второе оказываются неверными*.

В § 3 даются необходимые, а также достаточные условия для того, чтобы свободное произведение N -групп было N -группой. Если перемножаемые группы нильпотентны, то необходимые условия являются вместе с тем и достаточными. Именно, свободное произведение нильпотентных групп тогда и только тогда является N -группой, если либо все эти группы не содержат элементов конечного порядка, либо для некоторого фиксированного простого числа p ни одна из них не содержит элементов бесконечной p -высоты.

Естественным обобщением N -групп являются группы, у которых нижний центральный ряд достигает единицы на каком-нибудь, может быть, и трансфинитном месте. В обзоре А. Г. Куроша и С. Н. Черникова [9] такие группы предложено называть ZD -группами. Наименьшее трансфинитное число α , для которого $G^\alpha = 1$, удобно называть классом этой группы. Используя присоединенные группы аналогично определяемых ZD -алгебр, мы показываем, что для каждого трансфинитного числа α ZD -группы класса α действительно существуют. Тем самым вопрос XVIII [9] решается положительно. Рассматривая вместо нижнего центрального ряда убывающий ряд коммутантов группы, можно поставить аналогичный вопрос и относительно существова-

* Доказательство Д. И. Фукса-Рабиновича, неверное в общем случае, однако, проходит, если заданные абелевы группы не содержат элементов конечного порядка.

ния групп с произвольно длинным рядом коммутантов (вопрос XII [9]). Присоединенные группы надлежаще выбранных алгебр дают положительный ответ и на этот вопрос. Свойства свободного произведения двух циклических групп второго порядка показывают, что на вопросы XXIX и XXXI [9] должен быть дан отрицательный ответ.

Предварительные результаты, содержащиеся в п. 1,2, не являются новыми и могут быть найдены, например, в работах И. Д. Адо [1] и В. Андрунакиевича [2]. Основные понятия и теоремы абстрактной теории групп, используемые в настоящей статье, изложены в книге А. Г. Куроша [7].

§ 1. Присоединенные группы

1. Предварительные замечания. Рассмотрим некоторое ассоциативное кольцо O . Как уже было сказано, операция

$$a \circ b = a + b + ab$$

называется присоединенным умножением в O . Совокупность элементов $a \in O$, для которых в O существует x , удовлетворяющий соотношению

$$a + x + ax = x + a + xa = 0, \quad (1)$$

является относительно присоединенного умножения группой — присоединенной группой $\mathfrak{G}(O)$ кольца O . Из (1) видно, что совокупность элементов какого-либо подкольца O_1 из O , обратимых в O_1 , есть подгруппа группы $\mathfrak{G}(O)$. Если O_1 — двусторонний идеал O , то непосредственная проверка показывает, что $\mathfrak{G}(O_1)$ будет нормальным делителем в $\mathfrak{G}(O)$.

Покажем, что фактор-группа $\mathfrak{G}(O)/\mathfrak{G}(O_1)$ изоморфна соответствующей подгруппе присоединенной группы кольца вычетов O/O_1 .

В самом деле, если g и g_1 принадлежат одному и тому же смежному классу $\mathfrak{G}(O)$ по $\mathfrak{G}(O_1)$, то $g_1 = g \circ a$, где a — обратимый элемент O_1 . Но $g \circ a = g + a + ga$, следовательно, $g_1 - g = a + ga \in O_1$. Обратно, если g_1 и g сравнимы по идеалу O_1 и x — присоединенно обратный для g , то

$$g_1 = g + a, \quad g + x + gx = 0 \quad (a \in O_1),$$

$$g^{-1} \circ g_1 = x + g + a + gx + ax = a + ax \in O_1,$$

т. е. g_1 и g сравнимы по $\mathfrak{G}(O_1)$, что и требовалось доказать.

Заметим еще, что если в кольце O произведение любых двух элементов равно нулю, то присоединенное умножение совпадает со сложением и присоединенная группа $\mathfrak{G}(O)$ изоморфна аддитивной группе O .

2. Прямые суммы. Рассмотрим систему $\{O_\alpha\}$ колец или алгебр над одним и тем же полем. Как известно, прямой суммой ΣO_α называется кольцо O , элементами которого являются всевозможные системы $\{a_\alpha\}$ элементов $a_\alpha \in O_\alpha$ при условии, что только конечное число элементов в каждой системе отлично от нуля. Складываются и умножаются эти системы по правилам

$$\{a_\alpha\} + \{b_\alpha\} = \{a_\alpha + b_\alpha\}, \quad \{a_\alpha\}\{b_\alpha\} = \{a_\alpha b_\alpha\}.$$

Если O_α — алгебры над полем P , то полагают также

$$\lambda \{a_\alpha\} = \{\lambda a_\alpha\}, \quad \lambda \in P.$$

Если в этом определении отбросить требование конечности числа ненулевых элементов в системах $\{a_\alpha\}$, то получим определение полной прямой суммы

колец или алгебр. Прямое и полное прямое произведения групп строятся совершенно аналогично и напоминать их определения мы не будем. Отметим тот очевидный факт, что присоединенные группы прямой и полной прямой суммы колец распадаются соответственно в прямое и полное прямое произведение присоединенных групп этих колец.

Полные прямые произведения для нас будут важны вследствие своей связи с понятием аппроксимируемости групп. Пусть $\{\mathfrak{G}_\alpha\}$ — произвольная система групп. Группа $\mathfrak{G}$ аппроксимируема группами системы $\{\mathfrak{G}_\alpha\}$, если для каждого $g \neq 1$ из $\mathfrak{G}$ существует такое гомоморфное отображение $\mathfrak{G}$ в одну из групп этой системы, при котором образ g отличен от единицы. Покажем, что $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда аппроксимируема системой $\{\mathfrak{G}_\alpha\}$, если $\mathfrak{G}$ изоморфна подгруппе полного прямого произведения групп $\mathfrak{H}_\beta$, каждая из которых изоморфна какой-либо группе системы $\{\mathfrak{G}_\alpha\}$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{G}$ аппроксимируема группами $\{\mathfrak{G}_\alpha\}$. Согласно условию каждому элементу $g \neq 1$, $g \in \mathfrak{G}$ отвечает гомоморфное отображение $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_{\alpha_g}$, при котором образ g отличен от единицы. Обозначим через $\mathfrak{H}_g$ группу, изоморфную $\mathfrak{G}_{\alpha_g}$, и фиксируем гомоморфизм $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{H}_g$, при котором образ g отличен от единицы. Если $a \in \mathfrak{G}$, то пусть a_g означает образ a в $\mathfrak{H}_g$. Рассмотрим полное прямое произведение $\mathfrak{H}$ групп $\mathfrak{H}_g$. Соответствие $a \rightarrow \{a_g\}$ является гомоморфным отображением $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{H}$. Так как для $a \neq 1$ и $a_a \neq 1$, то это отображение изоморфно. Наоборот, допустим, что $\mathfrak{G}$ есть подгруппа полного прямого произведения $\mathfrak{G}$ некоторых групп $\mathfrak{H}_\beta$. Каждый элемент $\mathfrak{G}$ есть система $\{h_\beta\}$. Отображения $\{h_\beta\} \rightarrow h_\beta$ представляют собой систему гомоморфизмов, обладающую всеми необходимыми свойствами для того, чтобы $\mathfrak{G}$ аппроксимировалась группами $\{\mathfrak{H}_\beta\}$.

3. Свободные произведения. Свободным произведением алгебр A_α над одним и тем же полем P называется алгебра A над полем P , образованная по следующему правилу. В каждой из алгебр A_α выбирается база e_1^α , e_2^α , ... и из элементов этих баз составляются «слова» вида

$$e_{i_1}^{\alpha_1} e_{i_2}^{\alpha_2} \dots e_{i_s}^{\alpha_s}, \text{ где } \alpha_i \neq \alpha_j, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots; \quad s = 1, 2, \dots$$

Эти «слова» по определению дают базу A . Чтобы два слова $e_{i_1}^{\alpha_1} \dots e_{i_s}^{\alpha_s}$ и $e_{j_1}^{\beta_1} \dots e_{j_r}^{\beta_r}$ перемножить, пишут их одно за другим. Если $\alpha_s \neq \beta_1$, то получится снова «слово», которое и называется произведением двух первых. Если $\alpha_s = \beta_1$, то в новой последовательности пару элементов $e_{i_s}^{\alpha_s} e_{j_1}^{\beta_1}$ из одной и той же алгебры A_{α_s} заменяют их произведением; это произведение выражают через базу A_{α_s} и всю последовательность заменяют суммой с помощью дистрибутивного закона. Если и в получившейся сумме снова встречаются последовательности, у которых рядом стоят элементы одной и той же алгебры, то такие элементы снова перемножают и т. д. Алгебра A , полученная таким образом, на самом деле не зависит от выбора базисов в A_α . Линейные комбинации элементов $e_1^\alpha, e_2^\alpha, \dots$ содержатся в A и дают подалгебру, изоморфную A_α .

Присоединенная группа свободного произведения A алгебр A_α содержит свободное произведение присоединенных групп этих алгебр в качестве своей подгруппы.

Действительно, алгебра A содержит все A_α в качестве своих подалгебр. Поэтому присоединенные группы $\mathfrak{G}_\alpha$ алгебр A_α являются подгруппами присоединенной группы $\mathfrak{G}$ алгебры A . Обозначим через $\mathfrak{H}$ подгруппу из $\mathfrak{G}$, порожденную элементами всех $\mathfrak{G}_\alpha$. Нужно показать, что $\mathfrak{H}$ есть свободное произведение групп $\mathfrak{G}_\alpha$. Для этого достаточно обнаружить, что два нетождественных произведения $g_{\alpha_1} \circ g_{\alpha_2} \circ \dots \circ g_{\alpha_r}$ и $g_{\beta_1} \circ g_{\beta_2} \circ \dots \circ g_{\beta_s}$ не могут быть равны, если рядом стоящие множители каждого из них не принадлежат одной и той же подгруппе $\mathfrak{G}_\alpha$.

Пусть $g_{\alpha_i} = \lambda_{i1} e_{i1}^{\alpha_i} + \lambda_{i2} e_{i2}^{\alpha_i} + \dots + \lambda_{ip} e_{ip}^{\alpha_i}$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Выполняя присоединенное умножение этих элементов, получим

$$g_{\alpha_1} \circ g_{\alpha_2} \circ \dots \circ g_{\alpha_r} = \left(\sum \lambda_{1m} e_{1m}^{\alpha_1} \right) \left(\sum \lambda_{2m} e_{2m}^{\alpha_2} \right) \dots \left(\sum \lambda_{rm} e_{rm}^{\alpha_r} \right) + \dots,$$

где опущены члены, выражающиеся через слова меньшей длины. При перемножении сумм, стоящих в правой части равенства, никаких подобных членов получиться не может. Поэтому, зная результат умножения, мы сможем восстановить и сомножители с точностью до коэффициентов пропорциональности из P . Итак, если

$$g_{\alpha_1} \circ g_{\alpha_2} \circ \dots \circ g_{\alpha_r} = g_{\beta_1} \circ g_{\beta_2} \circ \dots \circ g_{\beta_s}, \quad (2)$$

то $r = s$, $g_{\beta_i} = \lambda_i g_{\alpha_i}$, где $\lambda_i \in P$, $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r = 1$, $i = 1, 2, \dots, r$. Производя в (2) присоединенное умножение и сравнивая члены длины $r - 1$, начинающиеся элементами базы A_{α_2} , получим $\lambda_2 \dots \lambda_r = 1$, т. е. $\lambda_1 = 1$, $g_{\alpha_1} = g_{\beta_1}$. Умножив обе части соотношения (2) на присоединенно обратный элемент для g_{α_1} , мы сведем его к равенству

$$g_{\alpha_2} \circ \dots \circ g_{\alpha_r} = g_{\beta_1} \circ \dots \circ g_{\beta_r},$$

откуда получим последовательно $1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r$, что и требовалось доказать.

4. Обобщенно нильпотентные алгебры. Если O — какое-либо кольцо, то через O^n ($n = 1, 2, \dots$) обозначают подкольцо, составленное из сумм всевозможных произведений по n сомножителей из кольца O . Ясно, что O^n есть двусторонний идеал в O . Кольцо O называется **о б о б щ е н н о н и л ь п о т е н т н ы м** или **N -к о л ь ц о м**, если пересечение всех его степеней равно нулю. Каждое подкольцо N -кольца, очевидно, само является N -кольцом. Также ясно, что прямая и полная прямая суммы N -колец являются N -кольцами. Наконец, свободное произведение N -алгебр также является N -алгеброй.

В самом деле, рассмотрим сначала какую-нибудь нильпотентную алгебру B . Обозначим через $e_\alpha^1, e_\beta^1, \dots$ элементы B , образы которых в B/B^2 составляют базу этой алгебры. Пусть $e_\alpha^2, e_\beta^2, \dots$ — элементы B^2 , образы которых в B^2/B^3 составляют базу B^2/B^3 , и т. д. Совокупность $\{e_\lambda^i\}$ будет особой базой алгебры B , которую мы будем называть специальной. Весом произвольного элемента $e \in B$ условимся называть наименьшее число i , для которого $e \in B^i$. Рассмотрим систему нильпотентных алгебр $\{A_\alpha\}$ и их свободное произведение A . Выберем в каждой алгебре A_α специальную базу. Всевозможные слова, составленные из элементов этих баз, дадут базу алгебры A . Сумму весов элементов, составляющих слово, назовем весом этого слова. Так как в каждой алгебре A_α произведение двух базисных элементов линейно вы-

ражается через базисные элементы строго большего веса, то то же самое можно сказать и о произведении базисных элементов алгебры A . Обозначим через $A^{(n)}$ совокупность элементов A , являющихся линейными комбинациями базисных элементов, имеющих вес не меньше n . Пересечение всех $A^{(n)}$, очевидно, есть нуль. С другой стороны, $A^n \subset A^{(n)}$ и, таким образом, пересечение алгебр A^n также есть нуль.

Мы доказали, что свободное произведение нильпотентных алгебр есть N -алгебра. Общий случай произведения N -алгебр легко сводится к указанному. В самом деле, пусть $\{A_\alpha\}$ — система N -алгебр. Весом элемента $a_\alpha \in A_\alpha$ условимся опять называть число i , для которого $a_\alpha \in A_\alpha^i$, $a_\alpha \notin A_\alpha^{i+1}$. Если a — элемент свободного произведения A алгебр A_α , то мы скажем, что вес a не меньше s , если a можно представить в виде $\sum a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_m}$, где $a_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}$ и сумма весов сомножителей $a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_m}$ в каждом члене не меньше s . Ясно, что новое определение веса совпадает со старым в случае, когда алгебры A_α нильпотентны. Обозначая через $A^{(\lambda)}$ совокупность элементов алгебры A , вес которых не меньше λ , мы будем иметь при любом $a \in A$ включения $aA^{(\lambda)} \subset A^{(\lambda+1)}$ и $A^{(\lambda)}a \subset A^{(\lambda+1)}$, откуда $A^\lambda \subset A^{(\lambda)}$. Остается только доказать, что всякий ненулевой элемент a алгебры A имеет конечный вес. Пусть $a = \sum \xi e_{i_1}^{\alpha_1} \dots e_{i_t}^{\alpha_t}$, где e_i^α — элементы какого-нибудь базиса алгебры A_α . Так как сумма конечная, то для каждого фиксированного α члены суммы содержат явно лишь конечное число элементов $e_{j_1}^\alpha, \dots, e_{j_k}^\alpha$ базиса алгебры A_α . Выберем такое натуральное число n_α , чтобы образы $\bar{e}_{j_1}^\alpha, \dots, \bar{e}_{j_k}^\alpha$ элементов $e_{j_1}^\alpha, \dots, e_{j_k}^\alpha$ в алгебре вычетов $\bar{A}_\alpha = A_\alpha/A_\alpha^{n_\alpha}$ были линейно независимы. Гомоморфизмы $A_\alpha \rightarrow \bar{A}_\alpha$ естественным образом распространяются в гомоморфизм $A \rightarrow \bar{A}$, где $\bar{A}$ — свободное произведение алгебр $\bar{A}_\alpha$. Образ элемента a в алгебре $\bar{A}$ имеет представление $\bar{a} = \sum \xi \bar{e}_{i_1}^{\alpha_1} \dots \bar{e}_{i_t}^{\alpha_t}$, и поэтому отличен от нуля. В силу принятых определений вес образа $\bar{a}$ не может быть меньше веса элемента a . Так как $\bar{a}$ — отличный от нуля элемент свободного произведения нильпотентных алгебр, то по доказанному выше вес a конечен, поэтому конечен и вес a .

Рассмотрим нижний центральный ряд какой-нибудь группы

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^1 \supset \mathfrak{G}^2 \supset \mathfrak{G}^3 \supset \dots \supset \mathfrak{G}^n \supset \dots$$

Если пересечение всех его членов $\mathfrak{G}^n$ есть единица группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ называется обобщенно нильпотентной или N -группой. Очевидно, всякая подгруппа N -группы, а также прямое и полное прямое произведение N -групп являются снова N -группами. Вопрос о том, будет ли свободное произведение N -групп снова N -группой, — более тонкий. Мы рассмотрим его в § 3.

Следующее предложение устанавливает простую связь между N -группами и N -алгебрами:

Присоединенная группа всякой N -алгебры A является N -группой. Если основное поле алгебры A имеет простую характеристику $p > 0$, то ее присоединенная группа $\mathfrak{G}$ содержит убывающий центральный ряд, все факторы которого имеют только элементы порядка p , а пересечение всех членов равно единице. Если же основное поле имеет характеристику нуль, то $\mathfrak{G}$ содержит

аналогичный убывающий центральный ряд, все фактор-группы которого имеют лишь элементы бесконечного порядка.

Для доказательства обозначим через $\mathfrak{G}_n$ присоединенную группу алгебры A^n . Согласно п. 1 $\mathfrak{G}_n$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$, а фактор-группа $\mathfrak{G}_{n-1}/\mathfrak{G}_n$ содержится в присоединенной группе алгебры вычетов A^{n-1}/A^n . Так как в A^{n-1}/A^n произведение любых двух элементов равно нулю, то $\mathfrak{G}(A^{n-1}/A^n)$ изоморфна аддитивной группе алгебры A^{n-1}/A^n . Если характеристика поля есть $p > 0$, то $pa = 0$, и, следовательно, все элементы A^{n-1}/A^n , а вместе с ними и элементы $\mathfrak{G}_{n-1}/\mathfrak{G}_n$ имеют порядок p . Если же $p = 0$, то элементы $\mathfrak{G}(A^{n-1}/A^n)$ имеют бесконечный порядок. По условию пересечение идеалов A^n равно нулю, поэтому пересечение групп $\mathfrak{G}_n$ равно их единице. Остается показать, что коммутаторы вида $(g, g_i) = g^{-1} \circ g_i^{-1} \circ g \circ g_i$, $g \in \mathfrak{G}$, $g_i \in \mathfrak{G}_i$, содержатся в $\mathfrak{G}_{i+1}$. Выписывая этот коммутатор подробно, получим

$$(g, g_i) = g^{-1} + g_i^{-1} + g^{-1}g_i^{-1} + g + g_i + gg_i + (g^{-1} + g_i^{-1} + g^{-1}g_i^{-1})(g + g_i + gg_i). \quad (3)$$

Раскрывая здесь скобки и пользуясь соотношениями

$$g^{-1} + g + g^{-1}g = 0, \quad g_i^{-1} + g_i + g_i^{-1}g_i = 0,$$

мы видим, что все оставшиеся после приведения члены в правой части соотношения (3) будут произведениями элементов A на элементы A^i , т. е. входят в A^{i+1} . Так как и присоединенно обратный элемент (g_i, g) по тем же причинам входит в A^{i+1} , то $(g, g_i) \in \mathfrak{G}_{i+1}$ и, значит, $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_2 \supset \mathfrak{G}_3 \supset \dots$ есть убывающий центральный ряд группы $\mathfrak{G}$. Члены нижнего центрального ряда $\mathfrak{G}$ связаны с $\mathfrak{G}_i$ включениями $\mathfrak{G}_i \supset \mathfrak{G}^i$. Поскольку $\bigcap \mathfrak{G}_i = 1$, то $\bigcap \mathfrak{G}^i = 1$, т. е. $\mathfrak{G}$ есть N -группа.

Итак, присоединенные группы N -алгебр, а также все их подгруппы являются N -группами. Вопрос о том, какие из N -групп изоморфны подгруппам присоединенных групп N -алгебр, рассматривается в следующем параграфе.

§ 2. Условия вложимости

5. Обобщенно периодические элементы. Рассмотрим нижний центральный ряд какой-либо N -группы

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^2 \supset \mathfrak{G}^3 \supset \dots \supset \mathfrak{G}^n \supset \dots$$

По условию пересечение всех его членов равно единице. Элемент $g \in \mathfrak{G}$ мы будем называть обобщенно периодическим, если образ g в каждой фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^n$ имеет конечный порядок. Аналогично, элемент g мы будем называть обобщенным p -элементом, если образ g в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^n$ ($n = 1, 2, \dots$) имеет порядок, равный степени простого числа p . Для краткости слово обобщенный мы будем опускать и говорить просто о периодических и p -элементах N -групп. Так как в нильпотентных группах элементы конечного порядка, а также p -элементы образуют нормальные делители, то нормальными делителями N -групп будут и совокупности обобщенных периодических, а также p -элементов этих групп. Понятия периодических и p -элементов инвариантны относительно перехода от подгрупп к группе, т. е. если g есть периодический или p -элемент какой-либо подгруппы N -группы $\mathfrak{G}$, то таким же он будет и в самой группе $\mathfrak{G}$.

В каждую N -группу $\mathfrak{G}$ можно естественным образом ввести топологию, принимая члены нижнего центрального ряда $\mathfrak{G}$ за полную систему окрестностей единицы. На языке этой топологии всякий p -элемент g группы $\mathfrak{G}$ обладает тем свойством, что последовательность его степеней $g, g^p, g^{p^2}, \dots$ сходится к единице. Обратно, если последовательность $g, g^p, g^{p^2}, \dots$ сходится к единице, то это значит, что для каждой окрестности $\mathfrak{G}^i$ найдется такое f , что g^{p^f} будет входить в $\mathfrak{G}^i$, т. е. g будет p -элементом. Таким образом, в указанной топологии обобщенные p -элементы N -группы совпадают с ее топологическими p -элементами, как они определены, например, в работе А. Г. Куроша [8].

6. Элементы бесконечной p -высоты. По аналогии с абелевыми группами мы будем говорить, что элемент g N -группы $\mathfrak{G}$ имеет в этой группе бесконечную p -высоту, если для каждого i и каждого f в группе $\mathfrak{G}$ найдется элемент x , удовлетворяющий равенству

$$x^{p^f} = ga_i \quad (a_i \in \mathfrak{G}^i). \quad (4)$$

Иными словами, элемент g имеет бесконечную p -высоту, если для каждого f найдутся сколь угодно близкие к g в смысле упомянутой топологии элементы, из которых может быть извлечен корень степени p^f . Обозначив образы элементов x, g в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^i$ соответственно через $\bar{x}, \bar{g}$, мы сможем переписать равенство (4) в равносильной форме $\bar{x}^{p^f} = \bar{g}$; таким образом, элементами бесконечной p -высоты группы $\mathfrak{G}$ будут те и только те ее элементы, из образов которых в каждой фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^i$ можно извлечь корень любой степени вида p^f .

Пусть g — некоторый p -элемент группы $\mathfrak{G}$, q — простое число, отличное от p . Образ g в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^i$ имеет конечный порядок p^l . Для каждого натурального l сравнение

$$xq^l \equiv 1 \pmod{p^f}. \quad (5)$$

имеет решение в целых числах. Но из (5) следует, что $(\bar{g}^x)^{q^l} = \bar{g}$, где $\bar{g}$ — образ g в группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^i$. Следовательно, каждый обобщенный p -элемент является элементом бесконечной высоты по всякому простому числу q , отличному от p .

Л е м м а 1. Если a, b — элементы нильпотентной группы $\mathfrak{G}$, $(k+1)$ -й член $\mathfrak{G}^{k+1}$ нижнего центрального ряда которой равен единице, и если $a^{n^s} = 1$, то элемент a перестановочен с $b^{n^{s(k-1)}}$.

При $k=1$ лемма тривиальна, так как группа $\mathfrak{G}$ в этом случае абелева. Далее, применяем индукцию, считая лемму верной для групп с меньшей длиной центрального ряда. Пусть образы элементов a, b в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^k = \bar{\mathfrak{G}}$ суть $\bar{a}, \bar{b}$. Так как $\bar{a}^{n^s} = 1$, $\bar{\mathfrak{G}}^k = 1$, то

$$\bar{a}\bar{b}^{n^{s(k-2)}} = \bar{b}^{n^{s(k-2)}}\bar{a} \quad \text{или} \quad ab^{n^{s(k-2)}} = b^{n^{s(k-2)}}az,$$

где z — центральный элемент группы $\mathfrak{G}$. Из последнего соотношения непосредственно следует

$$a^t b^{n^{s(k-2)}} = b^{n^{s(k-2)}} a^t z^t, \quad (6)$$

$$a (b^{n^{s(k-2)}})^t = (b^{n^{s(k-2)}})^t a z^t. \quad (7)$$

Полагая $t = n^s$, мы из (6) ввиду соотношения $a^{n^s} = 1$ найдем $z^{n^s} = 1$. Но тогда (7) обратится в требуемое равенство $ab^{n^s(k-1)} = b^{n^s(k-1)}a$.

Т е о р е м а 1. *Элементы бесконечной p -высоты N -группы $\mathfrak{G}$ перестановочны со всеми ее p -элементами. В частности, каждый q -элемент $\mathfrak{G}$ перестановочен с каждым p -элементом, где q — любое простое число, отличное от p .*

Пусть g — произвольный p -элемент, а h — элемент бесконечной p -высоты N -группы $\mathfrak{G}$. Если g и h не коммутируют, то $(g, h) \neq 1$. Рассмотрим настолько большое число i , что $(g, h) \in \mathfrak{G}^i$. Обозначим через $\bar{g}$ и $\bar{h}$ образы элементов g, h в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^i$. По условию найдется такое f , что

$$\bar{g}^{p^f} = \bar{1}, \quad (8)$$

а с другой стороны, найдется такой элемент x , образ которого $\bar{x}$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^i$ удовлетворяет соотношению

$$\bar{x}^{p^{f(i-1)}} = \bar{h}. \quad (9)$$

Согласно лемме 1 из равенств (8) и (9) следует перестановочность $\bar{g}$ и $\bar{h}$, т. е. $(\bar{g}, \bar{h}) = 1$, $(g, h) \in \mathfrak{G}^i$, что противоречит выбору i . Первая часть теоремы доказана. Так как всякий q -элемент при $q \neq p$ имеет бесконечную p -высоту, то вторая часть также доказана.

Теперь мы сформулируем необходимые условия для того, чтобы заданная N -группа допускала изоморфное вложение в присоединенную группу некоторой N -алгебры. В последующих пунктах будет доказано, что эти условия являются и достаточными.

Т е о р е м а 2а. *Присоединенная группа N -алгебры над полем характеристики нуль и все ее подгруппы не содержат обобщенно периодических элементов; присоединенная группа N -алгебры над полем характеристики $p > 0$ и все ее подгруппы не содержат элементов бесконечной p -высоты.*

Пусть A — некоторая N -алгебра над полем характеристики нуль. В п. 4 показано, что присоединенная группа $\mathfrak{G}$ этой алгебры содержит убывающий центральный ряд $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_2 \supset \mathfrak{G}_3 \supset \dots \supset \mathfrak{G}_n \supset \dots$, все фактор-группы которого не содержат элементов конечного порядка, причем $\bigcap \mathfrak{G}_i = 1$. Предположим, вопреки доказываемому, что $\mathfrak{G}$ содержит обобщенно периодический элемент $g \neq 1$. Выберем такое i , что $g \in \mathfrak{G}_i$. Согласно предположению найдется f , при котором g^f содержится в $\mathfrak{G}^i$. Так как $\mathfrak{G}_i \supset \mathfrak{G}^i$, то тем более g^f входит в $\mathfrak{G}_i$. Следовательно, образ элемента g в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$ будет отличным от единицы периодическим элементом. Однако это невозможно, так как фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2/\mathfrak{G}_3, \dots, \mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_i$ периодических элементов не содержат. Поскольку обобщенно периодические элементы любой подгруппы $\mathfrak{G}$ являются обобщенно периодическими и в $\mathfrak{G}$, то первое утверждение теоремы доказано.

Предположим теперь, что A есть N -алгебра над полем характеристики $p > 0$ и $\mathfrak{G}$ — присоединенная группа. Согласно п. 4 группа $\mathfrak{G}$ содержит убывающий центральный ряд $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_2 \supset \mathfrak{G}_3 \supset \dots$, все фактор-группы которого содержат только элементы порядка p и $\bigcap \mathfrak{G}_i = 1$. Допустим, что в $\mathfrak{G}$ имеется элемент $g \neq 1$ бесконечной p -высоты. Выбираем снова такое i , что $g \in \mathfrak{G}_i$. По условию в группе $\mathfrak{G}$ найдется элемент x , для которого

$$\bar{x}^{p^{i-1}} = \bar{g}, \quad (10)$$

где $\bar{x}$, $\bar{g}$ — образы элементов x , g в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^i$. Так как $\mathfrak{G}_i \supset \mathfrak{G}^i$, то из (10) следует, что

$$\bar{x}^{p^{i-1}} = \bar{g}, \quad (11)$$

где $\bar{x}$, $\bar{g}$ — образы элементов x , g в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$. Все элементы фактор-групп $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{G}_3$, ..., $\mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_i$ имеют порядок p , поэтому элементы фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$ удовлетворяют соотношению: $y^{p^{i-1}} = \bar{1}$. Таким образом из равенства (11) следует $\bar{g} = \bar{1}$ или $g \in \mathfrak{G}_i$, что противоречит выбору числа i . Мы доказали, что $\mathfrak{G}$ не содержит элементов бесконечной p -высоты. Элементы бесконечной высоты любой подгруппы $\mathfrak{H}$ имеют бесконечную p -высоту и в $\mathfrak{G}$. Поэтому никакая подгруппа группы $\mathfrak{G}$ не содержит элементов бесконечной p -высоты.

7. Достаточность условий в случае $p > 0$. Мы хотим показать, что условия, сформулированные в теореме 2а, достаточны для вложимости заданной группы в присоединенную группу N -алгебры. Рассмотрим сначала случай простой характеристики p . Пусть $\mathfrak{H}$ — какая-либо N -группа, не содержащая элементов бесконечной p -высоты. Следовательно, $\mathfrak{H}$ аппроксимируема нильпотентными группами $\mathfrak{H}_i$ ($i = 1, 2, \dots$), причем эти группы также не содержат элементов бесконечной высоты*. Если нам удастся каждую группу $\mathfrak{H}_i$ вложить в присоединенную группу некоторой нильпотентной алгебры A_i над простым полем характеристики p , то полное прямое произведение групп $\mathfrak{H}_i$, а вместе с ним и его подгруппа $\mathfrak{H}$ будут вложены в присоединенную группу полной прямой суммы алгебр, изоморфных A_i . Но полная прямая сумма N -алгебр есть N -алгебра; тем самым группа $\mathfrak{H}$ окажется вложенной в присоединенную группу N -алгебры. Следовательно, интересующая нас задача равносильна доказательству того, что нильпотентная группа без элементов бесконечной p -высоты может быть вложена в присоединенную группу N -алгебры. Чтобы свести дело к еще более простому случаю, мы воспользуемся следующей леммой**:

Л е м м а 2. Для каждой нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ существует такая целочисленная функция $\varphi(s)$, стремящаяся к бесконечности при неограниченном возрастании s , что при произвольном p произведение любого числа p^s -х степеней элементов $\mathfrak{G}$ будет являться $p^{\varphi(s)}$ -й степенью некоторого ее элемента.

Пусть $\mathfrak{H}$ — заданная нильпотентная группа, не содержащая элементов бесконечной p -высоты. Тогда для каждого элемента $h \in \mathfrak{H}$ найдется такое число f , что уравнение

$$x^p = h \quad (12)$$

не имеет решений в $\mathfrak{H}$. Выберем s настолько большим, что $\varphi(s) > f$, где $\varphi(s)$ — функция из леммы 2. Обозначим через $\mathfrak{H}_s$ подгруппу, порожденную p^s -ми степенями всех элементов $\mathfrak{H}$. Очевидно, $\mathfrak{H}_s$ — нормальный делитель $\mathfrak{H}$ и порядки всех элементов фактор-группы $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_s$ делят p^s . Из (12) в силу леммы 2 следует, что h не может содержаться в $\mathfrak{H}_s$ и, следовательно, образ его в фак-

* Пусть $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}^2 \supset \dots$ — центральный ряд $\mathfrak{H}$. Совокупность элементов в $\mathfrak{H}$, образы которых в $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}^n$ имеют бесконечную p -высоту, обозначим через $\mathfrak{P}_n$. Согласно лемме 2 $\mathfrak{P}_n$ — нормальный делитель в $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}/\mathfrak{P}_n$ элементов бесконечной высоты не содержит. Пересечение $\mathfrak{P} = \bigcap \mathfrak{P}_n$ есть совокупность элементов группы $\mathfrak{H}$, имеющих в $\mathfrak{H}$ бесконечную p -высоту. По условию $\mathfrak{P} = 1$. Таким образом, $\mathfrak{H}$ аппроксимируется группами $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}/\mathfrak{P}_n$, которые ввиду включения $\mathfrak{P}_n \supset \mathfrak{H}_n$ являются нильпотентными.

** Доказательство см. в работе [12, стр. 204].

тор-группе $\mathfrak{S}/\mathfrak{S}_s$ отличен от единицы. Ввиду произвольности h это означает, что $\mathfrak{S}$ аппроксимируема группами $\mathfrak{S}/\mathfrak{S}_s$ ($s = 1, 2, \dots$).

Повторяя изложенные выше рассуждения, убеждаемся, что группа $\mathfrak{S}$ будет вложена в присоединенную группу N -алгебры, если удастся вложить в присоединенные группы N -алгебр фактор-группы $\mathfrak{S}/\mathfrak{S}_s$. Рассмотрим одну из них $F = \mathfrak{S}/\mathfrak{S}_s$. Для каждого элемента $a \in F$ имеет место равенство $a^{p^s} = 1$. Отсюда, как легко видеть, следует, что F содержит конечный убывающий центральный ряд

$$F \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots \supset F_{n+1} = 1, \quad (13)$$

обладающий тем свойством, что все элементы его фактор-групп F_i/F_{i+1} имеют порядок p . Следовательно, каждая фактор-группа F_i/F_{i+1} есть прямое произведение циклических групп порядка p . Обозначим через $e_{i\alpha}$ те элементы группы F_i , образы которых в F_i/F_{i+1} являются независимыми образующими этой фактор-группы. Индексы α мы условимся брать из упорядоченных множеств. Тогда каждый элемент F будет допускать единственную запись вида

$$a = e_{1\alpha_1}^{i_1} \dots e_{1\alpha_l}^{i_l} e_{2\beta_1}^{j_1} \dots e_{2\beta_m}^{j_m} \dots e_{n\gamma_1}^{k_1} \dots e_{n\gamma_r}^{k_r}, \quad (14)$$

где показатели $i, j, \dots, k$ суть неотрицательные целые числа, меньшие p , а вторые индексы внутри каждой группы растут.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ групповую алгебру группы F , взятую над простым полем характеристики p . Таким образом, элементами $\mathfrak{A}$ являются всевозможные конечные линейные комбинации элементов F . Пусть $\bar{\mathfrak{A}}$ — подалгебра тех линейных комбинаций, сумма коэффициентов которых равна нулю. Покажем, что $\bar{\mathfrak{A}}$ есть N -алгебра. Для этого введем обозначение $\bar{a} = e - a$, где $a \in F$. Мы имеем

$$\overline{ab} = -\bar{a}\bar{b} + \bar{a} + \bar{b} \quad (a, b \in F). \quad (15)$$

Элементы вида $\bar{a}$, где $a \in F$, образуют, очевидно, базу алгебры $\bar{\mathfrak{A}}$. Формулы (14), (15) показывают, что каждый элемент $\bar{\mathfrak{A}}$ может быть представлен в виде линейной комбинации одночленов

$$\bar{e}_{1\alpha_1}^{i_1} \dots \bar{e}_{1\alpha_l}^{i_l} \bar{e}_{2\beta_1}^{j_1} \dots \bar{e}_{2\beta_m}^{j_m} \dots \bar{e}_{n\gamma_1}^{k_1} \dots \bar{e}_{n\gamma_r}^{k_r}, \quad (16)$$

причем это представление единственно*.

Число

$$i_1 + \dots + i_l + p(j_1 + \dots + j_m) + \dots + p^{n-1}(k_1 + \dots + k_r)$$

условимся называть весом одночлена (16). Весом линейной комбинации одночленов мы будем называть вес ее наинизшего члена. Покажем, что вес произведения двух одночленов не меньше суммы весов этих одночленов.

Действительно, чтобы произведение двух одночленов вида (16) представить линейной комбинацией одночленов того же вида, достаточно пользоваться следующими правилами. Рассмотрим какой-либо одночлен общего

* В самом деле, любое конечное число таких одночленов лежит внутри подалгебры $\mathfrak{A}_0$, порожденной конечной подгруппой F_0 из F . Число одночленов вида (16) с элементами e из F_0 совпадает с общим числом элементов F_0 , отличных от единицы, т. е. с числом элементов базы алгебры $\mathfrak{A}_0$. Следовательно, одночлены (16) линейно независимы.

вида

$$\bar{e}_{i_1\alpha_1}^{j_1} \bar{e}_{i_2\alpha_2}^{j_2} \dots \bar{e}_{i_u\alpha_u}^{-j_u} \quad (0 \leq j_m < p). \quad (17)$$

Если в этом одночлене стоят рядом степени одного и того же базисного элемента, например, $\bar{e}_{i\alpha}^{j_m} \bar{e}_{i\alpha}^{j_{m+1}}$ и $j_m + j_{m+1} < p$, то заменяем эту пару выражением $\bar{e}_{i\alpha}^{j_m + j_{m+1}}$. Общий вес при этом не изменится. Если же $j_m + j_{m+1} = j + p$, то произведение $\bar{e}_{i\alpha}^{j_m} \bar{e}_{i\alpha}^{j_{m+1}}$ представляем в виде $\bar{e}_{i\alpha}^j \bar{e}_{i\alpha}^p$. Так как $\bar{e}_{i\alpha}^p$ входит в более высокие члены центрального ряда (13), то $\bar{e}_{i\alpha}^p$ можно будет заменить суммой одночленов, принадлежащих этим более высоким членам. Общий вес при этом не уменьшится. Пусть теперь рядом стоящие элементы $\bar{e}_{i_m\alpha_m}^{j_m} \bar{e}_{i_{m+1}\alpha_{m+1}}^{j_{m+1}}$ таковы, что в нормальной форме (16) их порядок должен был бы быть обратным. Тогда комбинацию $\bar{e}_{i_m\alpha_m} \bar{e}_{i_{m+1}\alpha_{m+1}}$ заменяем выражением

$$\bar{e}_\beta \bar{e}_\alpha = \bar{e}_\alpha \bar{e}_\beta - \bar{e}_\alpha \bar{e}_\beta (\bar{e}_\beta, e_\alpha) + \bar{e}_\alpha (\bar{e}_\beta, e_\alpha) + \bar{e}_\beta (\bar{e}_\beta, e_\alpha) - (\bar{e}_\beta, e_\alpha), \quad (18)$$

где $e_\alpha = e_{i_m\alpha_m}$, $e_\beta = e_{i_{m+1}\alpha_{m+1}}$, $(e_\beta, e_\alpha) = e_\beta^{-1} e_\alpha^{-1} e_\beta e_\alpha$. Поскольку (13) является центральным рядом группы F , то коммутатор (e_β, e_α) будет содержаться в члене более высокого номера, чем e_α и e_β . Поэтому веса членов, стоящих в равенстве (18) справа, не меньше веса $\bar{e}_\beta \bar{e}_\alpha$. Применяя наши правила, мы сможем каждое произведение вида (17) выразить через произведения, имеющие больший порядок, и вес членов при этом не уменьшится.

Остается показать, что через конечное число шагов все члены приобретут нормальную форму (16). Это очевидно, так как все наши преобразования не выведут за пределы групповой алгебры, построенной на конечной группе, порожденной элементами заданного одночлена.

Обозначим через $\bar{\mathfrak{A}}_i$ совокупность членов алгебры $\bar{\mathfrak{A}}$, вес которых не меньше i . Пересечение всех $\bar{\mathfrak{A}}_i$ есть нуль. С другой стороны, из только что доказанного утверждения о весе произведения следует, что $\bar{\mathfrak{A}}^i \subset \bar{\mathfrak{A}}_i$. Таким образом, $\bar{\mathfrak{A}}$ есть N -алгебра. Соответствие

$$a \rightarrow \bar{a}, \quad ab \rightarrow \bar{a}\bar{b} = -\overline{ab} + \bar{a} + \bar{b}$$

дает изоморфное вложение группы F в присоединенную группу алгебры $\bar{\mathfrak{A}}$. Следовательно, достаточность условий теоремы 2а в случае простой характеристики доказана.

Из приведенных рассуждений легко вытекает следующее, несколько более сильное предложение:

Если r^s -степени всех элементов группы F равны единице и F имеет нижний центральный ряд длины $k + 1$, то F вложима в присоединенную группу нильпотентной алгебры $\mathfrak{B}$ над полем характеристики p , причем $\mathfrak{B}^l = 0$, $l = p^{ks} + 1$.

В качестве алгебры $\mathfrak{B}$ можно взять алгебру вычетов построенной выше алгебры $\bar{\mathfrak{A}}$ по идеалу $\bar{\mathfrak{A}}_l$. Нильпотентность алгебры $\bar{\mathfrak{A}}$ в случае конечной группы F была доказана ранее И. Д. Адо [1].

8. Достаточность в случае нулевой характеристики. Пусть $\mathfrak{F}$ — N -группа, не имеющая обобщенно периодических элементов. Рассмотрим ее нижний центральный ряд

$$\mathfrak{F} \supset \mathfrak{F}^2 \supset \mathfrak{F}^3 \supset \dots$$

Совокупность $\mathfrak{F}_i$ элементов $\mathfrak{F}$, образы которых в фактор-группе $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}^i$ имеют конечный порядок, есть нормальный делитель группы $\mathfrak{F}$. Фактор-группы $F_i = \mathfrak{F}/\mathfrak{F}_i$ нильпотентны, не содержат элементов конечного порядка и вполне аппроксимируют группу $\mathfrak{F}$. Если мы вложим каждую группу F_i в присоединенную группу N -алгебры над полем рациональных чисел, то в силу п. 4 группа $\mathfrak{F}$ также окажется вложенной в присоединенную группу N -алгебры над полем рациональных чисел. Поэтому рассмотрим одну из групп F_i , пусть F . Группа F нильпотентна и не содержит элементов конечного порядка. Поэтому F можно вложить в полную нильпотентную группу F^* (см. [12]). Обозначим через $\mathfrak{G}$ нильпотентную алгебру Ли над полем рациональных чисел, отвечающую группе F^* . Если для элементов $\mathfrak{G}$ ввести операцию умножения $\times$ по формуле Кемпбелла — Хаусдорфа

$$a \times b = a + b + \frac{1}{2}[ab] + \dots, \quad (19)$$

то получится как раз группа F^* . Согласно Биркгофу [4], существует такая ассоциативная нильпотентная алгебра A над полем рациональных чисел, что F изоморфна подалгебре Ли из A . Алгебра A нильпотентна, поэтому, вводя для ее элементов умножение $\times$ по формуле (19), мы получим нильпотентную группу $\mathfrak{A}$, содержащую в себе группу F^* . Но $\mathfrak{A}$ изоморфна присоединенной группе алгебры A^{**} . Следовательно, группы F^* и F изоморфны подгруппам присоединенной группы нильпотентной алгебры над полем рациональных чисел, что нам и требовалось доказать. Итак, имеем следующую теорему:

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы N -группа $\mathfrak{G}$ была изоморфна подгруппе присоединенной группы некоторой N -алгебры над полем простой характеристики p , необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{G}$ не содержала элементов бесконечной p -высоты. Чтобы $\mathfrak{G}$ была изоморфна подгруппе присоединенной группы N -алгебры над полем характеристики нуль, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{G}$ не содержала обобщенно периодических элементов.*

Необходимость утверждается теоремой 2а, а достаточность только что была показана.

§ 3. Группы с нижним центральным рядом

9. Свободные произведения N -групп. В качестве приложения предыдущих результатов рассмотрим вопрос о том, при каких условиях свободное произведение заданных групп будет N -группой. Так как заданные группы являются подгруппами их свободного произведения, то необходимо, чтобы эти группы сами были N -группами. Из п. 4 и теоремы 2 непосредственно вытекает

* A_i есть алгебра Ли, образованная элементами алгебры A с теми же операциями скалярного умножения и сложения, что и в A , и с операцией коммутирования $[ab] = ab - ba$.

** Присоединяя к алгебре A единицу e , мы получим новую ассоциативную алгебру B , все элементы которой однозначно представляются в виде $\lambda e + a$, $a \in A$. Элементы $e + a$ образуют группу $\mathfrak{B}$, которая в силу соответствия $e + a \rightarrow a$ изоморфна присоединенной группе алгебры A . Всякий элемент $e + a$ допускает запись вида $e + a = \exp u$, $u \in A$, так как в качестве u можно взять $\ln(e + a) = a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 - \dots$

Формула (19) построена так, что равенство $(e + a) \times (e + b) = (e + c)$ равносильно соотношению $\exp u \cdot \exp v = \exp w$, где $u = \ln(e + a)$, $v = \ln(e + b)$, $w = \ln(e + c)$. Следовательно, соответствие $a \rightarrow \ln(e + a)$ есть изоморфизм между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, т. е. между $\mathfrak{A}$ и присоединенной группой алгебры A .

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы свободное произведение N -групп было N -группой, достаточно, чтобы эти группы были вложимы в присоединенные группы N -алгебр над полями одной и той же характеристики.*

Иными словами, если заданные группы не содержат обобщенно периодических элементов или если все они не содержат элементов бесконечной p -высоты при некотором фиксированном простом p , то свободное произведение этих групп есть N -группа.

Доказательство — непосредственное. Действительно, поскольку все заданные группы являются подгруппами присоединенных групп N -алгебр над одним и тем же полем, то свободное произведение их содержится в присоединенной группе свободного произведения N -алгебр. Свободное произведение N -алгебр есть N -алгебра. Поэтому свободное произведение заданных групп есть N -группа.

Необходимые условия мы сформулируем в следующей форме:

Т е о р е м а 4. *Если свободное произведение N -групп есть N -группа, то либо все заданные группы вложимы в присоединенные группы N -алгебр над полями одной и той же простой характеристики, либо каждая из них не содержит обобщенных p -элементов ни при каком p .*

Допустим, наоборот, что какая-либо из заданных групп $\mathfrak{G}_i$ содержит обобщенный p -элемент g и при этом группы $\{\mathfrak{G}_i\}$ не допускают вложения в присоединенные группы N -алгебр над полями характеристики p . Следовательно, по крайней мере одна группа $\mathfrak{G}_j$ содержит элемент h бесконечной p -высоты. Если свободное произведение $\mathfrak{G}$ групп $\{\mathfrak{G}_i\}$ является N -группой, то g будет обобщенным p -элементом, а h — элементом бесконечной p -высоты и в $\mathfrak{G}$. Согласно теореме 1 g и h должны быть перестановочны. Это может быть только тогда, когда g и h принадлежат к одной и той же группе $\mathfrak{G}_i$. Преобразуем g каким-нибудь элементом $x \neq 1$, взятым из группы $\mathfrak{G}_k$, отличной от $\mathfrak{G}_i$. Элемент $x^{-1}gx$ снова будет обобщенным p -элементом в $\mathfrak{G}$ и, значит, должен быть перестановочен с h , что противоречит определению свободного произведения. Теорема доказана.

Совпадают или нет указанные необходимые и достаточные условия в общем случае, нам неизвестно. Однако если заданные группы таковы, что в них из отсутствия обобщенных p -элементов по всем p вытекает отсутствие обобщенных периодических элементов, то необходимые условия теоремы 4 эквивалентны достаточным условиям теоремы 3. Например, пусть перемножаются нильпотентные группы. В нильпотентных группах, как известно, подгруппа периодических элементов распадается в прямое произведение p -подгрупп. Поэтому для того, чтобы свободное произведение нильпотентных групп было N -группой, необходимо и достаточно, чтобы либо все эти группы не содержали элементов бесконечной p -высоты при некотором p , либо чтобы ни одна из групп не содержала элементов конечного порядка.

Можно заметить также, что достаточные условия теоремы 3 будут и необходимыми, если одна из перемножаемых групп, например, содержит элемент, имеющий бесконечную высоту по каждому p .

10. Примеры. В работе Д. И. Фукса-Рабиновича [6] утверждается, что свободное произведение произвольных абелевых групп является N -группой. В такой общей форме это утверждение неверно, так как теорема 4 показывает, что свободное произведение циклической группы 2-го порядка на циклическую группу 3-го порядка N -группой не будет. Указанное выше следствие из теорем 3 и 4 дает необходимые и достаточные условия, для того чтобы свободное произведение абелевых групп было N -группой.

Рассмотрим еще свободное произведение $\mathfrak{A}$ двух циклических групп 2-го порядка с образующими a и b . Согласно теореме 3 $\mathfrak{A}$ есть N -группа. Непосредственный подсчет показывает, что все истинные фактор-группы $\mathfrak{A}$ являются конечными, разрешимыми, но не обязательно нильпотентными группами. Таким образом, $\mathfrak{A}$, по терминологии обзора Куроша — Черникова [9], является одновременно Z и $\bar{R}\bar{J}$ -группой. Существование у $\mathfrak{A}$ конечных, не нильпотентных фактор-групп показывает, что $\mathfrak{A}$ не есть $\bar{Z}$ -группа. Следовательно, из свойств Z и $\bar{R}\bar{J}$ свойство $\bar{Z}$ не вытекает, и вопрос XXIX [9] решается отрицательно. Также отрицательно решается и вопрос XXXI. Действительно, $\mathfrak{A}$ есть Z -группа. В то же время элементы $\mathfrak{A}$, порядок которых есть степень двух, не образуют подгруппы, так как ab имеет в $\mathfrak{A}$ бесконечный порядок.

11. Группы с трансфинитным нижним центральным рядом. Система под-

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^2 \supset \mathfrak{G}^3 \supset \dots \supset \mathfrak{G}^\omega \supset \mathfrak{G}^{\omega+1} \supset \dots$$

группы $\mathfrak{G}$ называется ее нижним (трансфинитным) центральным рядом, если $\mathfrak{G}^{\alpha+1}$ порождается коммутаторами вида (g, g_α) , $g \in \mathfrak{G}$, $g_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha$, а $\mathfrak{G}^\alpha$ для α предельного есть пересечение всех предыдущих подгрупп. Если при некотором α $\mathfrak{G}^\alpha = 1$, то $\mathfrak{G}$ называется группой с убывающим центральным рядом или, согласно Курошу — Черникову [9], ZD -группой. Наименьшее α , при котором $\mathfrak{G}^\alpha = 1$, называется классом $\mathfrak{G}$. Определение трансфинитного центрального ряда использовалось несколькими авторами. Однако существование ZD -групп произвольных классов установлено не было (см. обзор Куроша — Черникова [9, проблема XVIII]).

Мы хотим показать, что ZD -группы любых классов фактически существуют. Для этого сначала удобнее ввести аналогичные понятия для алгебр.

Система подалгебр

$$A \supset A^2 \supset A^3 \supset \dots \supset A^\omega \supset A^{\omega+1} \supset \dots$$

называется нижним центральным рядом для A , если $A^{\alpha+1}$ есть подалгебра, порожденная произведениями вида aa^α и $a^\alpha a$, $a \in A$, $a^\alpha \in A^\alpha$, а A^α с предельным α есть пересечение предыдущих. Если при некотором α $A^\alpha = 0$, то A называется алгеброй с нижним центральным рядом или ZD -алгеброй. Наименьшее α , удовлетворяющее равенству $A^\alpha = 0$, называется классом ZD -алгебры.

Рассуждения п. 4 показывают, что присоединенная группа ZD -алгебры класса α есть ZD -группа класса не выше α . Однако фактически класс присоединенной группы может быть меньше класса ZD -алгебры. Поэтому гарантировать совпадение классов алгебры и присоединенной группы можно для сравнительно узких категорий алгебр.

Алгебру A мы будем называть косой, если в A существует базис e_α , обладающий следующими свойствами: а) произведение любых двух базисных элементов есть либо нуль, либо базисный элемент; б) если $e_\alpha e_\beta \neq 0$, то $e_\beta e_\alpha = 0$. Базис с этими свойствами мы будем называть правильным.

Л е м м а 3. *Класс присоединенной группы косой ZD -алгебры совпадает с классом этой алгебры.*

Пусть A — косая ZD -алгебра, $\mathfrak{G}$ — ее присоединенная группа. Обозначим через $\mathfrak{G}^\alpha$, как обычно, α -й член нижнего центрального ряда группы $\mathfrak{G}$. Покажем, что все элементы правильной базы A , содержащиеся в A^α , входят

и в $\mathfrak{G}^\alpha$. При $\alpha = 1$ это очевидно, так как всякий элемент e правильной базы удовлетворяет соотношению $e^2 = 0$ (условие б) и, значит, имеет присоединенно обратный элемент $-e$. Допустим, что наше утверждение справедливо для всех α , меньших β . Если β — предельное, то утверждение будет, очевидно, верным и для $\mathfrak{G}^\beta$. Поэтому предположим, что $\beta = \alpha + 1$. Выберем произвольный элемент правильной базы $e_{\alpha+1}$ из $A^{\alpha+1}$. Согласно определению алгебры $A^{\alpha+1}$ ее базис состоит из произведений вида $e_\lambda e_\alpha$ и $e_\alpha e_\lambda$, $e_\alpha \in A^\alpha$, $e_\lambda \in A$. Пусть $e_{\alpha+1} = e_\lambda e_\alpha$ и, значит, $e_\alpha e_\lambda = 0$. Так как $e_\alpha^2 = 0$, то присоединенно обратным для e_α будет $-e_\alpha$, откуда $e_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha$. Мы имеем $(e_\lambda, e_\alpha) \in \mathfrak{G}^{\alpha+1}$. Но

$$\begin{aligned}(e_\lambda, e_\alpha) &= (-e_\lambda) \circ (-e_\alpha) \circ e_\lambda \circ e_\alpha = (-e_\lambda) \circ (-e_\alpha + e_\lambda - e_\alpha e_\lambda) \circ e_\alpha = \\ &= (-e_\lambda) \circ (-e_\alpha + e_\lambda) \circ e_\alpha = e_{\alpha+1} - e_\lambda e_{\alpha+1} = e_{\alpha+1},\end{aligned}$$

т. е. $e_{\alpha+1} \in \mathfrak{G}^{\alpha+1}$. Лемма доказана.

Введем еще одно понятие. Пусть над некоторым полем P заданы алгебры A и B с базисами e_{α_i} и e_{β_j} ($i = 1, 2, \dots$). Рассмотрим алгебру C с базисом, составленным из элементов $e_{\alpha\beta}$, $e_\alpha e_\beta$, и таблицей умножения:

$$e_\beta \cdot e_\alpha = 0, \quad e_\alpha e_\beta \cdot e_\gamma = 0, \quad e_\alpha e_\beta \cdot e_\gamma = e_\alpha (e_\beta e_\gamma),$$

$$e_\alpha \cdot e_\beta e_\gamma = (e_\alpha e_\beta) e_\gamma, \quad e_\gamma \cdot e_\alpha e_\beta = 0, \quad e_\alpha e_\beta \cdot e_\gamma e_\delta = 0.$$

Алгебра C , как легко видеть, ассоциативна. Мы назовем ее косым произведением A на B . Если A и B — косые с правильными базисами e_α , e_β , то косое произведение A на B будет косой алгеброй с правильным базисом e_α , e_β , $e_{\alpha\beta}$.

Л е м м а 4. *Косое произведение C алгебры A класса $\alpha + 1$ на алгебру B класса β имеет класс, не меньший $\alpha + \beta$.*

В самом деле, базис C^α заведомо содержит все элементы вида $e_i e_j$, где $e_i \in A^\alpha$, $e_j \in B$. Отсюда видно, что базис $C^{\alpha+\lambda}$ ($\lambda < \beta$) содержит все элементы $e_i e_j$, где $e_i \in A^\alpha$, $e_j \in B^\lambda$. Следовательно, $C^{\alpha+\lambda} \neq 0$ при $\lambda < \beta$, что и требовалось доказать.

Теперь мы в состоянии доказать общую теорему существования.

Т е о р е м а 5. *Для каждого трансфинитного числа α существуют косые ZD-алгебры класса α .*

Если α конечно, то в качестве искомой алгебры можно взять алгебру треугольных матриц степени α с нулевой главной диагональю. Правильный базис этой алгебры дают матричные единицы e_{ij} , $i < j$ ($i, j = 1, 2, \dots, \alpha$). Далее применяем индукцию. Пусть доказано, что косые алгебры классов, меньших α , существуют. Если α — предельное, то прямая сумма косых алгебр классов, стремящихся к α , даст косую алгебру класса α . Допустим, что $\alpha = \alpha' + 1$ и $\alpha' = \beta + 1$. Тогда косая сумма двух косых алгебр класса $\beta + 1$ даст в силу леммы 4 косую алгебру класса $\beta + \beta \geq \alpha$. Остается случай, когда $\alpha = \alpha' + 1$ и α' — предельное. Лемма 4 здесь непосредственно не применима. Поэтому рассуждаем следующим образом. Пусть $\alpha_\lambda < \alpha'$, $\lim \alpha_\lambda = \alpha'$. Для каждого λ строим косую алгебру A_λ класса $\alpha_\lambda + 1$.

Мы можем считать, кроме того, что размерности $A_\lambda^{\alpha_\lambda}$ при всех λ одинаковы. Отобразим все $A_\lambda^{\alpha_\lambda}$ изоморфно на $A_1^{\alpha_1}$. Теперь составим прямую сумму A алгебр A_λ и в этой сумме отождествим соответственные элементы подалгебр $A_\lambda^{\alpha_\lambda}$. Очевидно, в новой алгебре $\bar{A}$ все степени вида $\bar{A}^{\alpha_\lambda}$ содержат $\bar{A}_1^{\alpha_1}$, и,

таким образом, $\bar{A}^{\alpha'}$ также содержит $\bar{A}_1^{\alpha_1}$. Отсюда видно, что класс $\bar{A}$ равен требуемому числу $\alpha' + 1$. Беря присоединенные группы косых ZD -алгебр, мы получим ZD -группы произвольных классов.

12. Группы с трансфинитным рядом коммутантов. N -группы и группы с трансфинитным убывающим центральным рядом в некотором смысле при-
 нимают к нильпотентным группам. Аналогичным образом обобщается и понятие разрешимой группы. Цепочка подгрупп

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}' \supset \mathfrak{G}'' \supset \dots \supset \mathfrak{G}^{(\omega)} \supset \mathfrak{G}^{(\omega+1)} \supset \dots$$

называется (трансфинитной) цепочкой последовательных коммутантов, если $\mathfrak{G}^{(\alpha+1)}$ есть коммутант группы $\mathfrak{G}^{(\alpha)}$, а для предельного α $\mathfrak{G}^{(\alpha)}$ есть пересечение предыдущих коммутантов. Группа $\mathfrak{G}$ называется RK -группой класса α , если $\mathfrak{G}^{(\alpha)} = 1$, $\mathfrak{G}^{(\beta)} \neq 1$, $\beta < \alpha$. Естественно, возникает вопрос о существовании RK -групп произвольных классов. В частности, этот вопрос сформулирован в упомянутом обзоре Куроша-Черникова (проблема XII), откуда заимствовано и название RK -группы. Покажем, что этот вопрос решается положительно.

Пусть A — алгебра с базой $e_{\alpha\beta}$, где α, β пробегает некоторое множество трансфинитных чисел $1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \alpha < \beta$, и обычной матричной таблицей умножения

$$e_{\alpha\beta}e_{\beta\gamma} = e_{\alpha\gamma}, \quad e_{\alpha\beta}e_{\beta\delta} = 0 \quad (\beta \neq \beta_1).$$

Обозначим через $\mathfrak{G}$ присоединенную группу алгебры A . Введем функцию $\varphi(\alpha)$ посредством соотношений

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(\alpha + 1) = \varphi(\alpha) + \varphi(\alpha), \quad \varphi(\beta) = \lim_{\lambda < \beta} \varphi(\lambda),$$

где β — предельное. Утверждается, что $\mathfrak{G}^{(\lambda)}$ содержит все элементы $e_{\alpha\beta}$, у которых $\beta \geq \alpha + \varphi(\lambda)$. В самом деле, для $\lambda = 0$ это тривиально, так как по определению $\mathfrak{G}^{(0)} = \mathfrak{G}$. Допустим, что утверждение верно для всех значений λ , меньших некоторого σ . Если σ — предельное, то утверждение будет, очевидно, справедливо и для σ . Остается рассмотреть случай, когда $\sigma = \rho + 1$. Возьмем некоторый элемент $e_{\alpha\beta}$, $\beta \geq \alpha + \varphi(\sigma)$. Этот элемент можно представить в виде $e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\gamma}e_{\gamma\beta}$, $\gamma = \alpha + \varphi(\rho)$, $\beta \geq \gamma + \varphi(\rho)$. По условию $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\gamma\beta}$ содержатся в $\mathfrak{G}^{(\rho)}$, следовательно, коммутатор $(e_{\alpha\gamma}, e_{\gamma\beta})$ входит в $\mathfrak{G}^{(\rho+1)}$. Но

$$(e_{\alpha\gamma}, e_{\gamma\beta}) = (-e_{\alpha\gamma}) \circ (-e_{\gamma\beta}) \circ e_{\alpha\gamma} \circ e_{\gamma\beta} = e_{\alpha\beta},$$

т. е. $e_{\alpha\beta} \in \mathfrak{G}^{\sigma}$, что и требовалось доказать. Таким образом, выбирая достаточно высокие значения для ρ , мы получим RK -группы произвольно высокого класса *.

В предыдущих пунктах нас интересовал вопрос, при каких условиях свободное произведение N -групп будет N -группой. Для RK -групп один из аналогичных вопросов решается тривиально: свободное произведение RK -групп класса не выше α есть RK -группа класса не выше $\alpha + \omega$.

Действительно, пусть $\{\mathfrak{G}_\lambda\}$ — заданные RK -группы класса не выше α . Обозначим через $\mathfrak{N}$ нормальный делитель их свободного произведения $\mathfrak{G}$, порожденный коммутаторами (g_λ, g_μ) , $\lambda \neq \mu$, $g_\lambda \in \mathfrak{G}_\lambda$, $g_\mu \in \mathfrak{G}_\mu$. Фактор-

* Легко видеть из п. 11, что RK -группы класса ω могут быть ZD -группами произвольных классов.

группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ изоморфна прямому произведению групп $\mathfrak{G}_i$ и, следовательно, есть RK -группа класса не выше α . С каждым из сомножителей $\mathfrak{G}_i$ нормальный делитель $\mathfrak{N}$ общих, отличных от единицы элементов не имеет. Теорема Куроша о подгруппах свободного произведения показывает, что $\mathfrak{N}$ — свободная группа. Согласно упомянутой во введении теореме Магнуса, всякая некоммутативная свободная группа есть RK -группа класса ω . Поэтому $\mathfrak{G}$ есть RK -группа класса не выше $\alpha + \omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Д. Адо. О нильпотентных алгебрах и p -группах.— Докл. АН СССР, 1943, 40, 339—342.
2. В. Андрунакиевич. Полурадикальные кольца.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1948, 12, 129—178.
3. R. Baer. The higher commutator subgroups of a group.— Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, 143—160.
4. G. Birkhoff. Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices.— Ann. Math., 1937, 38, 526—532.
5. A. Foster. The idempotent elements of a commutative ring form a Boolean algebra.— Duke Math. J., 1945, 12, 143—152.
6. D. I. Fousse-Rabinowitch. On the determinators of an operator of the free group.— Mat. сб., 1940, 7, № 1, 197—208.
7. А. Г. Курош. Теория групп. М.— Л., 1944.
8. А. Г. Курош. Силовские подгруппы нульмерных топологических групп.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1945, 9, № 2, 66—78.
9. А. Г. Курош, С. Н. Черников. Разрешимые и нильпотентные группы.— Успехи мат. наук, 1947, 2, № 3, 18—59.
10. W. Magnus. Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring.— Math. Ann., 1953, 111, 259—280.
11. А. И. Мальцев. О разложении алгебры в прямую сумму радикала и полупростой под-алгебры.— Докл. АН СССР, 1942, 36, 46—50.
12. А. И. Мальцев. Нильпотентные группы без кручения.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, 13, № 3, 201—212.
13. S. Perlis. A characterization of the radical of an algebra.— Bull. Amer. Math. Soc., 1942, 48, 128—132.

ОБ АЛГЕБРАХ С ТОЖДЕСТВЕННЫМИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ СООТНОШЕНИЯМИ*



Несколько лет назад И. Д. Адо [1] и И. Р. Шафаревич [2] получили ряд теорем об автоморфизмах нильпотентных групп Ли и одного типа конечных p -групп. Эти теоремы для обоих классов групп формулируются совершенно одинаково, хотя доказательства их у И. Д. Адо и у И. Р. Шафаревича основываются на различных и весьма специальных подсчетах. Поэтому казалось интересным найти более широкий класс объектов, для которых аналогичные теоремы имеют место, и вместе с тем освободить доказательства от вычислений.

В настоящей статье показывается, что упомянутые теоремы сохраняют свою силу для нильпотентных алгебр, а также колец и групп, которые могут быть заданы тождественными определяющими соотношениями. Сюда относятся, например, свободные нильпотентные группы, свободные нильпотентные алгебры Ли и т. п.

Последние параграфы этой работы посвящены проблеме классификации алгебр с однородными тождественными определяющими соотношениями заданной степени.

Свойства групп, заданных тождественными соотношениями, рассматривались Б. Нейманом [3] и Р. Бэром [4]. Поскольку нас интересуют главным образом алгебры, то все необходимые определения в настоящей статье воспроизводятся полностью.

§ 1. Нильпотентные алгебры

Пусть $\mathfrak{A}$ — линейное пространство, вообще говоря, бесконечной размерности над некоторым полем P . Если для всех элементов $\mathfrak{A}$ определена операция умножения со свойствами

$$\alpha\alpha \cdot \beta b = \alpha\beta (ab),$$

$$(a + b)c = ac + bc, \quad a(b + c) = ab + ac \quad (\alpha, \beta \in P; a, b, c \in \mathfrak{A}),$$

то говорят, что $\mathfrak{A}$ есть алгебра над полем P .

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *ассоциативной*, если $a \cdot bc = ab \cdot c$, и *алгеброй Ли*, если $a^2 = 0$, $a \cdot bc = ab \cdot c + b \cdot ac$. Для неассоциативных алгебр способ расстановки скобок в произведении является существенным. Понятия подалгебры, идеалов, алгебры вычетов определяются обычным способом.

Рассмотрим произвольную алгебру $\mathfrak{A}$. Линейные комбинации произведений по k элементов $\mathfrak{A}$, взятых с произвольной расстановкой скобок, образуют двусторонний идеал в $\mathfrak{A}$, который условимся обозначать через $\mathfrak{A}^k$. Если при некотором k будет $\mathfrak{A}^k = 0$, то $\mathfrak{A}$ называется нильпотентной алгеброй класса $k - 1$. Таким образом, каждая нильпотентная алгебра $\mathfrak{A}$ содержит цепочку двусторонних идеалов

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}^2 \supset \mathfrak{A}^3 \supset \dots \supset \mathfrak{A}^k = 0, \quad (1)$$

* Мат. сб., 1950, 26, № 1, 19—33.

все факторы которой $\mathfrak{A}^i/\mathfrak{A}^{i+1}$ являются нуль-алгебрами, т. е. алгебрами, в которых произведение любых двух элементов равно нулю.

Легко видеть, что подалгебры и алгебры вычетов нильпотентных алгебр являются снова нильпотентными алгебрами. Вместо цепочки (1) можно рассматривать более редкую. Для этого введем понятие *нормального произведения элементов*. Произведение любых двух элементов по определению считается нормальным. Если a — нормальное произведение элементов, то aa и aa ($a \in \mathfrak{A}$) будут также нормальными. Совокупность конечных линейных комбинаций нормальных произведений из k элементов обозначим через $\mathfrak{A}_k$. Очевидно, $\mathfrak{A}_k$ — идеал в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^k \supset \mathfrak{A}_k$. С другой стороны, легко видеть, что $\mathfrak{A}_k \supset \mathfrak{A}^{2^k}$. Поэтому обрыв цепочки идеалов $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{A}_3 \supset \dots$ является необходимым и достаточным условием для нильпотентности алгебры $\mathfrak{A}$.

Т е о р е м а 1. *Если алгебра $\mathfrak{A}$ нильпотентна и для некоторой ее подалгебры $\mathfrak{B}$ имеет место соотношение $\mathfrak{B} + \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$.*

Доказательство проводится индукцией по классу алгебры $\mathfrak{A}$. Для алгебр первого класса $\mathfrak{A}^2 = 0$, и утверждение тривиально. Пусть теперь $\mathfrak{A}$ имеет класс k и для всех алгебр класса $k-1$ теорема уже доказана. Рассмотрим гомоморфизм

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^k = \bar{\mathfrak{A}}.$$

Обозначим соответственно через $\bar{\mathfrak{B}}$ и $\bar{\mathfrak{A}}^2$ образы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}^2$ в $\bar{\mathfrak{A}}$. Так как $\mathfrak{A}^2 \supset \mathfrak{A}^k$, то $\bar{\mathfrak{A}}^2 = \bar{\mathfrak{A}}^2$ и из $\mathfrak{B} + \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}$ следует $\bar{\mathfrak{B}} + \bar{\mathfrak{A}}^2 = \bar{\mathfrak{A}}$. Алгебра $\bar{\mathfrak{A}}$ имеет класс $k-1$, поэтому $\bar{\mathfrak{B}} = \bar{\mathfrak{A}}$, т. е. $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}^k$. Согласно определению $\mathfrak{A}^2$ состоит из всевозможных линейных комбинаций произведений вида $(b_1 + a_1)(b_2 + a_2)$, где $b_i \in \mathfrak{B}$, $a_i \in \mathfrak{A}^k$ ($i = 1, 2$). Но $\mathfrak{A}^{k+1} = 0$, поэтому $(b_1 + a_1)(b_2 + a_2) = b_1 b_2$, т. е. $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{B}^2$. По условию $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}^2$, откуда следует, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

Теорема 1 является аналогом теоремы об образующих конечных нильпотентных групп. Легко получить и аналог теоремы Холла о центральных рядах. *Левый верхний центральный ряд $\mathfrak{Z}_n$ произвольной алгебры $\mathfrak{A}$ определяется индуктивно: $\mathfrak{Z}_0 = 0$; $\mathfrak{Z}_n$ есть совокупность тех a из $\mathfrak{A}$, для которых $\mathfrak{A}a \subset \mathfrak{Z}_{n-1}$. Совокупности $\mathfrak{Z}_n$ образуют неубывающую цепочку левых идеалов в $\mathfrak{A}$. Если I — произвольный левый идеал в $\mathfrak{A}$, то при любом t из непустоты $I \cap (\mathfrak{Z}_{m+1} \setminus \mathfrak{Z}_m)$ следует непустота $I \cap (\mathfrak{Z}_m \setminus \mathfrak{Z}_{m-1})$.* Действительно, пусть $a \in I \cap (\mathfrak{Z}_{m+1} \setminus \mathfrak{Z}_m)$. Так как $a \in \mathfrak{Z}_{m+1}$, то $\mathfrak{A}a \subset \mathfrak{Z}_m$. Если $\mathfrak{A}a \cap (\mathfrak{Z}_m \setminus \mathfrak{Z}_{m-1})$ пусто, то $\mathfrak{A}a \subset \mathfrak{Z}_{m-1}$, т. е. $a \in \mathfrak{Z}_m$, что противоречит условию. Таким образом, пересечение $\mathfrak{A}a \cap (\mathfrak{Z}_m \setminus \mathfrak{Z}_{m-1})$ непустое. Поскольку I — левый идеал, то $\mathfrak{A}a \subset I$ и, следовательно, пересечение $I \cap (\mathfrak{Z}_m \setminus \mathfrak{Z}_{m-1})$ также непустое.

Система элементов $a_1, a_2, \dots$ называется *системой образующих* алгебры $\mathfrak{A}$, если всякий элемент $\mathfrak{A}$ есть линейная комбинация произведений элементов этой системы. Из теоремы 1 непосредственно следует, что *если образы элементов $a_1, a_2, \dots$ нильпотентной алгебры $\mathfrak{A}$ дают базис пространства $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$, то $a_1, a_2, \dots$ — система образующих алгебры $\mathfrak{A}$.*

Всякую систему образующих $\mathfrak{A}$, образы которых в $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ линейно независимы, мы будем называть *независимой*. Очевидно, из каждой системы образующих можно выбрать независимую, и все независимые системы имеют одну и ту же мощность.

§ 2. Приведенные свободные алгебры

Пусть задана система символов $a_\alpha, a_\beta, \dots$. Последовательности из этих символов и скобок, определяемые следующим способом, называются *словами*. Каждый символ a_α и каждая пара их $a_\alpha a_\beta$ есть слово. Далее, если a, b — слова, отличные от символов a_α , то $(a)(b)$ — также слово, которое называется произведением a на b . Аналогично, словами будут и выражения $(a) a_\alpha, a_\alpha (a)$, называемые произведениями a на a_α и a_α на a . Алгебра $\mathfrak{A}$, базисом которой являются слова, перемножающиеся по изложенным правилам, называется *свободной неассоциативной алгеброй* с образующими $a_\alpha, a_\beta, \dots$ (А. Г. Курош, [5]).

Пусть $a_1, a_2, \dots$ — некоторые элементы алгебры $\mathfrak{A}$. Рассмотрим минимальный двусторонний идеал $\mathfrak{C}$, содержащий $a_1, a_2, \dots$. Если обозначить образы образующих $a_\alpha, a_\beta, \dots$ в алгебре вычетов $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ теми же символами, то в $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ образующие $a_\alpha, a_\beta, \dots$ будут связаны соотношениями

$$a_1 = 0, a_2 = 0, \dots \quad (2)$$

Алгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ называется *алгеброй, заданной образующими $a_\alpha, a_\beta, \dots$ и определяющими соотношениями* (2).

Пусть задана некоторая система символов $x, y, \dots$. Строим свободную неассоциативную алгебру $\mathfrak{X}$ с образующими $x, y, \dots$, и пусть $f_i(x, y, \dots, z)$ ($i = 1, 2, \dots$) — какие-нибудь элементы $\mathfrak{X}$. Мы будем говорить, что алгебра $\mathfrak{X}$ с образующими $b_1, b_2, \dots$ *определяется тождественными соотношениями*

$$f_i(x, y, \dots, z) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (3)$$

если системой определяющих соотношений для $\mathfrak{X}$ являются соотношения, получаемые из (3) путем подстановки вместо $x, \dots, z$ всевозможных элементов свободной алгебры с образующими $b_1, b_2, \dots$.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Алгебра с образующими $a_\alpha, a_\beta, \dots$ и тождественным определяющим соотношением

$$x(yz) = (xy)z \quad (4)$$

называется *свободной ассоциативной алгеброй*.

2. Алгебра с тождественными определяющими соотношениями

$$x^2 = 0, \quad x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0 \quad (5)$$

называется *свободной алгеброй Ли*.

3. Алгебра $\mathfrak{A}$ с образующими $a_\alpha, a_\beta, \dots$ и тождественными определяющими соотношениями

$$xy \dots z = 0, \quad (6)$$

где число сомножителей фиксировано и равно k , а скобки расставлены всевозможными способами, является нильпотентной неассоциативной алгеброй класса $k - 1$. Она будет называться *свободной нильпотентной алгеброй класса $k - 1$ с образующими $a_\alpha, a_\beta, \dots$* . Очевидно, все другие нильпотентные алгебры класса $k - 1$, имеющие то же число образующих, будут алгебрами вычетов от $\mathfrak{A}$.

4. Присоединяя к (6) соотношения (4) или (5), мы получим соответственно свободные нильпотентные ассоциативные или лиевские алгебры класса $k - 1$ и т. п.

Алгебру $\mathfrak{A}$ мы будем называть *приведенной свободной* *, если в некоторой системе образующих эта алгебра может быть задана системой тождественных соотношений $\mathfrak{S}$. Всякая система образующих $\mathfrak{A}$, в которой $\mathfrak{A}$ определяется тождественными соотношениями $\mathfrak{S}$, будет называться *свободной относительно $\mathfrak{S}$* .

Если $a_\alpha, a_\beta, \dots$ и $a'_\alpha, a'_\beta, \dots$ — две системы образующих алгебры $\mathfrak{A}$, свободные относительно системы тождественных определяющих соотношений $\mathfrak{S}$, то соответствие $a_\alpha \rightarrow a'_\alpha, a_\beta \rightarrow a'_\beta, \dots$ определяет автоморфизм $\mathfrak{A}$, так как две алгебры, заданные одинаковым числом образующих, подчиненных тем же определяющим соотношениям, изоморфны.

Т е о р е м а 2. Если приведенная свободная алгебра $\mathfrak{A}$ имеет конечное число n свободных образующих и не изоморфна никакой своей истинной алгебре вычетов, то любая система образующих $\mathfrak{A}$, состоящая из n элементов, будет свободной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ в образующих $a_1, a_2, \dots, a_n$ задается тождественными соотношениями $\mathfrak{S}$. Выпишем все соотношения, связывающие какую-нибудь другую систему из n образующих $b_1, b_2, \dots, b_n$ алгебры $\mathfrak{A}$. Среди этих соотношений будут и все те, которые получаются из $\mathfrak{S}$. Рассмотрим свободную алгебру $\mathfrak{C}$ с образующими $c_1, \dots, c_n$. Соответствие $c_i \rightarrow a_i$ определяет гомоморфное отображение $\mathfrak{C}$ на $\mathfrak{A}$ по идеалу I , порожденному соотношениями $\mathfrak{S}$. Соответствие $c_i \rightarrow b_i$ определяет аналогичное гомоморфное отображение $\mathfrak{C}$ на $\mathfrak{A}$ по некоторому идеалу J . Так как все соотношения $\mathfrak{S}$ в образующих b_i выполняются, то $J \supset I$. Мы имеем

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}/I \cong \mathfrak{C}/J.$$

Обозначим образ J в $\mathfrak{C}/I$ при отображении $\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}/I$ через J_1 , а образ J_1 в $\mathfrak{A}$ при изоморфизме $\mathfrak{C}/I \cong \mathfrak{A}$ — через J_2 . Тогда $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}/J_2$. Согласно предположению это дает $J_2 = 0$, т. е. $J = I$, что и требовалось.

Т е о р е м а 3. Если алгебра $\mathfrak{A}$ имеет в образующих $a_\alpha, a_\beta, \dots$ тождественные определяющие соотношения $\mathfrak{S}$, то всякая ее подалгебра $\mathfrak{B}$, порожденная частью образующих $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots$, будет иметь в этих образующих те же тождественные соотношения $\mathfrak{S}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим свободную алгебру $\mathfrak{C}$ с образующими $a_\alpha, a_\beta, \dots$. Если

$$f(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_m}) = 0 \quad (7)$$

— какое-либо соотношение между образующими $\mathfrak{B}$, то f принадлежит идеалу I , порожденному в $\mathfrak{C}$ соотношениями $\mathfrak{S}$, т. е. при надлежащей расстановке скобок

$$f(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_m}) = \sum a_i f_i(x_i, y_i, \dots) b_i, \quad (8)$$

где $f_i(x, y, \dots) = 0$ — соотношения из $\mathfrak{S}$, а $x_i, y_i, \dots, a_i, b_i$ — элементы $\mathfrak{C}$. Так как (8) представляет собой соотношение в свободной алгебре, то оно останется верным, если в нем все элементы $a_\alpha, a_\beta, \dots$, не являющиеся образующими подалгебры $\mathfrak{B}$, заменить нулями. В результате получится новое соотношение

$$f(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_m}) = \sum \bar{a}_i f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \dots) \bar{b}_i,$$

* Аналогичный термин для групп употреблялся, например, Р. Бэром [4].

которое и показывает, что (7) есть следствие соотношений $\mathfrak{S}$ в системе образующих $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots$.

Алгебру $\mathfrak{A}$ над полем P условимся называть *обобщенно нильпотентной*, если пересечение всех степеней ее равно нулю.

Т е о р е м а 4. *Всякая приведенная свободная алгебра над бесконечным основным полем является обобщенно нильпотентной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a_1, a_2, \dots$ — система образующих алгебры $\mathfrak{A}$ с тождественными определяющими соотношениями

$$f_i(x, y, \dots, z) = 0, \quad (9)$$

и пусть

$$\Phi(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0 \quad (10)$$

— какое-либо соотношение между образующими в $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ суммы членов полинома Φ , имеющих одну и ту же степень. Покажем, что из соотношения (10) следует $\varphi_1 = \dots = \varphi_k = 0$. В самом деле, так как (10) вытекает из (9), то в свободной алгебре $\mathfrak{S}$ с образующими $a_1, a_2, \dots$ должно иметь место соотношение

$$\Phi = \sum a_i f_{\alpha_i}(\xi_i, \dots, \xi_i) b_i,$$

где a_i, b_i — слова, а $\xi_i, \dots, \xi_i$ — некоторые элементы из $\mathfrak{S}$. Заменим здесь все a_k на $\lambda_k a_k$, где λ_k — произвольные числа основного поля P . После очевидных преобразований правая часть приведет к виду

$$\Phi' = \sum \lambda_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \dots \lambda_{\alpha_n}^{\varepsilon_n} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n},$$

где $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ — однородный полином из $\mathfrak{S}$. При любых λ_i в алгебре $\mathfrak{A}$ должно иметь место соотношение

$$\sum \lambda_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \dots \lambda_{\alpha_n}^{\varepsilon_n} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0. \quad (11)$$

Так как поле P бесконечно, то из (11) следует, что $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0$. Полином Φ' при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 1$ обращается в Φ и, таким образом, Φ есть сумма однородных частей, порознь равных нулю в $\mathfrak{A}$.

Докажем теперь, что $\bigcap \mathfrak{A}^i = 0$. Пусть

$$a \in \bigcap \mathfrak{A}^i. \quad (12)$$

Выразим a каким-нибудь способом через образующие, например, пусть $a = f(a_1, \dots, a_s)$; обозначим через t степень наивысшего члена, входящего в f . Из (12) видно, что a можно также выразить через элементы идеала $\mathfrak{A}^{t+1}$. Пусть это выражение будет $a = f_1(a_1, \dots, a_s)$. Согласно определению идеала $\mathfrak{A}^{t+1}$ полином f_1 содержит только члены степени не ниже $t+1$ относительно $a_1, \dots, a_s$. Мы имеем

$$f(a_1, \dots, a_s) - f_1(a_1, \dots, a_s) = 0.$$

Разлагая левую часть этого равенства на сумму однородных частей и пользуясь тем, что эти части должны порознь равняться нулю, мы приходим к выводу, что $a = f = f_1 = 0$.

Из теоремы 4 следует, что *всякая приведенная свободная алгебра конечного ранга над бесконечным основным полем нильпотентна.*

Алгебры конечного ранга над конечным полем содержат лишь конечное число элементов, и для них имеет место следующее утверждение:

Всякая алгебра с конечным числом элементов изоморфна алгебре вычетов некоторой приведенной свободной алгебры также с конечным числом элементов. В частности, всякое конечное поле есть алгебра вычетов конечной приведенной свободной алгебры. Поэтому среди конечных приведенных свободных алгебр есть и не нильпотентные.

Для доказательства достаточно повторить рассуждения из статьи Б. Неймана [3], относящиеся к аналогичной теореме о приведенных свободных группах.

В. Магнусом показано, что обобщенно нильпотентные группы с конечным числом образующих не могут быть изоморфны никакой своей истинной фактор-группе. Аналогичные рассуждения показывают, что обобщенно нильпотентные алгебры с конечным числом образующих также не могут быть изоморфны никакой своей истинной алгебре вычетов. Сравнивая этот результат с теоремами 4 и 2, мы приходим к выводу, что если алгебра над бесконечным полем имеет n образующих с тождественными определяющими соотношениями $\mathfrak{S}$, то в любых своих n образующих она будет определяться теми же тождественными соотношениями $\mathfrak{S}$. Например: в свободной йордановой алгебре с n образующими любые n образующих свободны и т. д.

§ 3. Нильпотентные приведенные свободные алгебры

Рассмотрим теперь более подробно автоморфизмы нильпотентных алгебр с тождественными определяющими соотношениями.

Л е м м а. *Если нильпотентная алгебра $\mathfrak{A}$ допускает конечную систему образующих и в некоторой системе образующих определяется системой тождественных соотношений $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{A}$ во всякой независимой системе образующих определяется системой $\mathfrak{S}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть k — класс алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда все элементы $\mathfrak{A}$ выражаются линейно через произведения не более k образующих. Так как в $\mathfrak{A}$ можно выбрать конечную систему образующих, то отсюда видно, что ранг $\mathfrak{A}$ конечен и, следовательно, $\mathfrak{A}$ не изоморфна никакой своей истинной алгебре вычетов. В некоторой системе образующих $a_1, a_2, \dots$ алгебра $\mathfrak{A}$ свободна. Выбирая из нее независимую систему образующих, мы в силу теоремы 3 получим снова свободную систему образующих. Наконец, ввиду теоремы 2 всякая независимая система образующих $\mathfrak{A}$ будет свободной, так как независимые системы содержат одинаковое число элементов.

Т е о р е м а 5. *Всякая независимая система образующих нильпотентной алгебры $\mathfrak{A}$ с тождественными определяющими соотношениями $\mathfrak{S}$ является свободной, и, таким образом, любая независимая система образующих $\mathfrak{A}$ переводится в любую другую некоторым автоморфизмом $\mathfrak{A}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a_\alpha, a_\beta, \dots$ — свободная независимая, а $b_\alpha, b_\beta, \dots$ — произвольная независимая система образующих $\mathfrak{A}$. Так как в образующих $a_\alpha, a_\beta, \dots$ алгебра $\mathfrak{A}$ определяется тождественными соотношениями $\mathfrak{S}$, значит, всякое соотношение между $a_\alpha, a_\beta, \dots$ имеет место и для $b_\alpha, b_\beta, \dots$, то надо показать только, что всякое соотношение

$$f(b_\alpha, \dots, b_\gamma) = 0 \quad (13)$$

между $b_\alpha, \dots, b_\gamma$ справедливо и для $a_\alpha, \dots, a_\gamma$. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{B}$,

порожденную элементами $a_\alpha, \dots, a_\gamma$ и всеми теми элементами $a_\delta, \dots, a_\lambda$, через которые выражаются $b_\alpha, \dots, b_\gamma$. В силу теоремы 3 алгебра $\mathfrak{B}$ определяется в образующих $a_\alpha, \dots, a_\lambda$ системой $\mathfrak{C}$. Число образующих $\mathfrak{B}$ конечно, откуда на основании предыдущей леммы можно заключить, что всякая независимая система образующих $\mathfrak{B}$ свободна. Дополним систему $b_\alpha, \dots, b_\gamma$ некоторыми элементами $b_\delta, \dots, b_\lambda$ до независимой системы образующих $\mathfrak{B}$. Отображение $a_\alpha \rightarrow b_\alpha, \dots, a_\lambda \rightarrow b_\lambda$ определяет автоморфизм подалгебры $\mathfrak{B}$, и из соотношения (13) следует $f(a_\alpha, \dots, a_\gamma) = 0$.

Т е о р е м а 6. Если $\mathfrak{A}$ — нильпотентная приведенная свободная алгебра и I — какой-либо ее идеал, то всякий автоморфизм $\mathfrak{A}/I$ индуцируется некоторым автоморфизмом $\mathfrak{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}/I = \bar{\mathfrak{A}}$. Выберем в $\bar{\mathfrak{A}}$ независимый базис $\bar{a}_\alpha, \bar{a}_\beta, \dots$, и пусть этот базис переводится автоморфизмом θ в новый независимый базис $\bar{a}'_\alpha, \bar{a}'_\beta, \dots$ алгебры $\bar{\mathfrak{A}}$. Обозначим через $a_\alpha, a_\beta, \dots, a'_\alpha, a'_\beta$ какие-либо прообразы соответствующих элементов алгебры $\bar{\mathfrak{A}}$ в $\mathfrak{A}$. Элементы $a_\alpha, a_\beta, \dots$ и элементы $a'_\alpha, a'_\beta, \dots$ можно пополнить элементами идеала I до независимых базисов алгебры $\mathfrak{A}$. На основании теоремы 5 можно утверждать, что в $\mathfrak{A}$ существует автоморфизм θ' , переводящий $a_\alpha, a_\beta, \dots$ соответственно в $a'_\alpha, a'_\beta, \dots$. Этот автоморфизм оставляет I на месте, так как если $f(a_\alpha, a_\beta, \dots) \in I$, то $f(\bar{a}_\alpha, \bar{a}_\beta, \dots) = 0$. Отсюда имеем $f(\bar{a}'_\alpha, \bar{a}'_\beta, \dots) = 0$, т. е. $f(a'_\alpha, a'_\beta, \dots) \in I$. Следовательно, автоморфизм θ' индуцирует в $\mathfrak{A}/I$ некоторый автоморфизм, который и совпадает, очевидно, с θ .

Т е о р е м а 7. Если I, J — идеалы нильпотентной приведенной свободной алгебры $\mathfrak{A}$, имеющие изоморфные алгебры вычетов $\mathfrak{A}/I, \mathfrak{A}/J$, и если образы этих идеалов в $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ имеют один и тот же ранг, то I переводится в J некоторым автоморфизмом $\mathfrak{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\mathfrak{A}/I = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}/J = \mathfrak{C}$ и рассмотрим естественные гомоморфизмы $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$. Выберем в $\mathfrak{B}$ независимую систему образующих $\bar{a}, \bar{a}_2, \dots$. Изоморфизм $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ переведет эту систему в некоторую систему независимых образующих $\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \dots$ алгебры $\mathfrak{C}$. Обозначим прообразы указанных элементов в $\mathfrak{A}$ через $a_1, a_2, \dots$ и $a'_1, a'_2, \dots$. Дополним первую систему элементами идеала I , а вторую — элементами J до независимых систем образующих $\mathfrak{A}$. По предположению дополнительные элементы этих систем можно отобразить взаимно однозначно друг на друга. Это отображение вместе с соответствием $a_i \rightarrow a'_i$ ($i = 1, 2, \dots$) дает взаимно однозначное отображение первой системы образующих на вторую и определяет некоторый автоморфизм θ алгебры $\mathfrak{A}$. Покажем, что $I^0 = J$. Действительно, если $f(a_1, a_2, \dots) \in I$, то $f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots) = 0$, откуда $f(\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \dots) = 0$ и, следовательно, $f(a'_1, a'_2, \dots) \in J$. Обратно, из $f(a'_1, a'_2, \dots) \in J$ аналогичным образом следует $f(a_1, a_2, \dots) \in I$.

Теоремы 5 и 6 для свободных нильпотентных алгебр Ли конечного ранга были доказаны ранее другим методом И. Д. Адо *.

§ 4. Автоморфизмы групп и колец

Почти все результаты предыдущих параграфов переносятся на группы и кольца. Так как положение для групп и колец совершенно аналогично, то мы ограничимся лишь формулировкой результатов для групп.

* Доклад в Математическом институте АН СССР. Казань, 1942.

Пусть G — некоторая группа. Обозначим, как обычно, через G^2 подгруппу, порожденную коммутаторами $(g, h) = g^{-1}h^{-1}gh$ ($g, h \in G$), через G^3 — подгруппу, порожденную коммутаторами (g, g_2) ($g \in G, g_2 \in G^2$), и т. д. Последовательность

$$G = G^2 \supset G^3 \dots$$

есть *нижний центральный ряд группы G* . Если при некотором k окажется, что $G^k = 1$, то группу G называют *нильпотентной класса k* — 1. Если в теореме 1 слово *алгебра* заменить словом *группа*, то получится известное свойство nilпотентных групп. Легко видеть, что теоремы 2 и 3 при такой замене также останутся верными.

Чтобы иметь возможность переформулировать для групп теоремы 5—7, мы должны определить понятие независимой системы образующих. Это проще всего сделать, используя следующий результат Б. Неймана [3]:

Фактор-группа приведенной свободной группы по ее коммутанту либо есть единица, либо раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп одного и того же конечного или бесконечного порядка d .

Предположим теперь, что приведенная свободная группа G nilпотентна. Тогда ее фактор-группа по коммутанту G/G^2 отлична от единицы и, следовательно, по теореме Б. Неймана, разлагается в прямое произведение циклических подгрупп одного и того же порядка d . Систему элементов $a_1, a_2, \dots$ группы G мы условимся называть *независимой системой образующих*, если образы их в G/G^2 порождают циклические подгруппы порядка d , причем G/G^2 является прямым произведением этих подгрупп. Легко видеть, что лемма из § 3, а также доказательство теоремы 5 остаются верными и для групп, и таким образом мы получаем следующее предложение:

Т е о р е м а 5а. *Всякая независимая система образующих nilпотентной приведенной свободной группы G является свободной и может быть переведена подходящим автоморфизмом G в любую другую независимую систему образующих.*

Теоремы 6 и 7 в самой общей форме для групп перестают быть верными. Например, бесконечная циклическая группа является свободной nilпотентной. Однако эта группа имеет только два автоморфизма, а ее фактор-группа 5-го порядка имеет четыре автоморфизма. Вместе с тем ясно, что все рассуждения § 3 сохраняются, если мы будем рассматривать нормальные делители, лежащие внутри коммутанта. Поэтому следующие теоремы являются верными:

Т е о р е м а 6а. *Если I — нормальный делитель, лежащий внутри коммутанта приведенной свободной nilпотентной группы G , то всякий автоморфизм G/I индуцируется некоторым автоморфизмом G .*

Т е о р е м а 7а. *Пусть I, J — нормальные делители приведенной свободной nilпотентной группы G , лежащие внутри ее коммутанта и такие, что G/I и G/J изоморфны. Тогда I может быть переведен в J некоторым автоморфизмом G .*

Если порядок d циклических групп, в прямое произведение которых разлагается фактор-группа G/G^2 , есть простое число, то теорема 6а будет верна и для нормальных делителей, не лежащих в G^2 , а теорема 7а — для нормальных делителей I, J , образы которых в G/G^2 имеют одинаковую мощность.

Укажем еще несколько известных примеров приведенных свободных nilпотентных групп:

5. Пусть G — свободная группа с образующими $a_1, a_2, \dots$, $G \supset G^2 \supset G^3 \supset \dots$ — ее нижний центральный ряд. Фактор-группа $G/G^k = F_k$ будет приведенной свободной нильпотентной группой класса $k - 1$, которую можно просто называть свободной нильпотентной группой. Всякая нильпотентная группа класса $k - 1$, имеющая такое же число образующих, изоморфна некоторой фактор-группе от F_k .

6. Пусть G — свободная группа с конечным числом образующих, p — простое число. Обозначим через G_1 подгруппу, порожденную коммутаторами элементов G и p -ми степенями элементов G . Положим

$$G_{i+1} = (G_i)_1, \quad T_i = G/G_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Группа T_n будет приведенной свободной нильпотентной группой конечного порядка p^n .

Теоремы 5а, 6а, 7а для T_n были доказаны иным способом И. Р. Шафаревичем [2]. Так как элементы T_n/T_n^2 имеют порядок p , то условие, чтобы нормальные делители I и J содержались внутри T_n^2 , здесь излишне.

§ 5. Равносильные системы тождественных соотношений

Соотношение $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, где f — полином от свободных неассоциативных переменных, является *тождественным* в некоторой алгебре $\mathfrak{A}$, если $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ для любых элементов $a_1, \dots, a_n$ из $\mathfrak{A}$. Системы тождественных соотношений $f_i = 0$ и $\varphi_j = 0$ *равносильны*, если в каждой алгебре $\mathfrak{A}$, в которой соотношения одной из систем являются тождественными, соотношения другой системы также тождественны. При этом предполагается, что основное поле P алгебры $\mathfrak{A}$ содержит коэффициенты полиномов f_i, φ_j .

Мы хотим сделать несколько очевидных замечаний, позволяющих указать одну из возможных классификаций систем однородных тождественных соотношений с точностью до их равносильности при условии, что основное поле P имеет характеристику нуль. Соответственно этому характеристика P в дальнейшем предполагается равной нулю.

Среди алгебр с образующими $a_1, a_2, \dots$ и данной системой однородных соотношений $f_i = 0$ имеется самая широкая $\mathfrak{A}$ с теми же образующими, но в которой соотношения $f_i = 0$ являются тождественными определяющими соотношениями. Равносильные системы тождественных соотношений определяют изоморфные алгебры $\mathfrak{A}$. Если системы тождественных соотношений не равносильны, то при достаточном числе образующих, например счетном, алгебры $\mathfrak{A}$ не изоморфны. Поэтому классификация систем тождественных соотношений дает в то же время и классификацию алгебр с тождественными определяющими соотношениями.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ — тождественное соотношение в некоторой алгебре $\mathfrak{A}$. Представим полином f в форме $f = f_0 + \dots + f_k$, где f_i — совокупность членов, содержащих x_1 i раз ($i = 0, \dots, k$). Из $f = 0$ следует, что в $\mathfrak{A}$ при любом элементе α основного поля P имеет место равенство

$$f(\alpha x_1, \dots, x_n) = f_0(x_1, \dots, x_n) + \dots + \alpha^k f_k(x_1, \dots, x_n).$$

Ввиду бесконечности P отсюда следует, что соотношения

$$f_0(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_k(x_1, \dots, x_n) = 0$$

выполняются в алгебре $\mathfrak{A}$ тождественно. Повторяя эту операцию, мы заменим соотношение $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ равносильной системой тождественных со-

отношений, все члены которых по отношению к любому переменному однородны (см., например, [6]).

Предположим, что все члены тождественного соотношения $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ содержат букву x_1 k раз. При любом α из P имеем

$$\begin{aligned} f(x_1 + \alpha y, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= f(x_1, \dots, x_n) + \alpha \varphi(x_1, y, x_2, \dots, x_n) + \dots + \alpha^k f(y, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в $\mathfrak{A}$ справедливо тождество $\varphi(x_1, y, x_2, \dots, x_n) = 0$, где полином φ — однородный относительно x_1 и y соответственно степеней $k - 1$ и 1 . Так как $f(x_1 + \alpha x_1, x_2, \dots, x_n) = (1 + \alpha)^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{k} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, откуда следует, что соотношение $\varphi(x, y, x_2, \dots, x_n) = 0$ равносильно первоначальному $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Последовательным применением этого процесса для каждого переменного мы получим соотношение $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$, каждый член которого содержит каждую букву один раз. Это соотношение мы будем называть *полилинейным*. Следовательно, каждая система тождественных соотношений равносильна некоторой системе тождественных полилинейных соотношений и весь вопрос сводится к изучению последних.

Пусть даны системы S_i полилинейных соотношений от букв $x_1, x_2, \dots, x_i$ соответственно ($i = 2, 3, \dots$). Эти системы мы будем называть *согласованными*, если из того, что S_i содержит соотношение $f(x_1, \dots, x_i) = 0$, вытекает, что S_{i+1} содержит соотношения $x_{i+1}f(x_1, \dots, x_i) = 0$, $f(x_1, \dots, x_i)x_{i+1} = 0$ и $f(x_1x_{i+1}, x_2, \dots, x_i) = 0$. Условимся систему S_i называть *симметричной*, если она вместе с соотношением $f(x_1, \dots, x_i) = 0$ содержит и все соотношения, возникающие из него перестановками переменных.

Если алгебра $\mathfrak{A}$ с образующими $a_1, a_2, \dots$ определяется симметричными и согласованными системами полилинейных тождественных соотношений S_i от букв $x_1, \dots, x_i$ ($i = 2, 3, \dots$), то всякое полилинейное соотношение $f(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}) = 0$ между образующими алгебры $\mathfrak{A}$ будет линейной комбинацией соотношений системы S_p , в которых переменные $x_1, \dots, x_p$ заменены соответствующими образующими $a_{i_1}, \dots, a_{i_p}$.

Действительно, из заданных условий следует, что при надлежащей расстановке скобок

$$f(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}) = \sum \alpha a_{k_1} \dots a_{k_m} \varphi_k(\xi_1, \dots) a_{l_1} \dots a_{l_n}, \quad (14)$$

где полиномы $\varphi_k(x_1, \dots)$ принадлежат заданной системе тождественных соотношений, а $\xi_1, \xi_2, \dots$ — полиномы от образующих. По условию полиномы φ_k полилинейны, поэтому выражения ξ можно считать одночленами. Равенство (14) имеет место в свободной неассоциативной алгебре, таким образом, все члены правой части, у которых сумма чисел m, n и степеней одночленов ξ отлична от p , должны уничтожиться. Но каждый член, у которого указанная сумма равна p , получается из φ_k путем подстановок, перестановок и умножений, т. е. содержится в S_p .

В дальнейшем удобно иметь следующую формулировку только что доказанного предложения: последовательности S_i и T_i систем согласованных симметричных полилинейных тождественных соотношений переменных $x_1, \dots, x_i$ ($i = 2, 3, \dots$) тогда и только тогда равносильны, если каждое соотношение из i -й системы одной последовательности есть линейная комбинация соотношений i -й системы другой последовательности.

§ 6. Однородные системы соотношений

Рассмотрим более детально случай, когда система тождественных соотношений S состоит из полилинейных соотношений от одних и тех же букв $x_1, \dots, x_n$. Переставляя в этих соотношениях переменные и присоединяя линейные комбинации получающихся соотношений к S , мы получим симметричную систему S^* , равносильную старой. Предшествующие результаты показывают, что для равносильности двух систем полилинейных тождественных соотношений S, T от одних и тех же переменных необходимо и достаточно, чтобы пополненные симметричные системы S^*, T^* совпадали.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — заданная система переменных. Линейные комбинации одночленов $x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n}$ с произвольно расставленными скобками, где $i_1, i_2, \dots, i_n$ — перестановки из чисел $1, 2, \dots, n$, образуют линейное пространство $\mathfrak{L}$. Перестановки переменных вызывают в $\mathfrak{L}$ линейные преобразования, совокупность которых является группой, изоморфной симметрической группе $\mathfrak{S}_n$. Из вышеизложенного следует, что классификация однородных систем тождественных соотношений степени n совпадает с классификацией линейных подпространств пространства $\mathfrak{L}$, инвариантных относительно $\mathfrak{S}_n$. Последняя задача допускает, очевидно, явное решение, которое можно представить в следующей форме.

Одночлены $x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n}$ с каким-либо фиксированным способом σ расстановки скобок дают базу инвариантного подпространства $\mathfrak{L}_\sigma$. Расставляя скобки всевозможными способами $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, мы получим разложение пространства $\mathfrak{L}$ в прямую сумму инвариантных подпространств $\mathfrak{L}_{\sigma_1}, \mathfrak{L}_{\sigma_2}, \dots$. Представление $\mathfrak{S}_n$ в каждом $\mathfrak{L}_\sigma$ эквивалентно регулярному представлению $\mathfrak{S}_n$ как группы подстановок. Перенумеровывая неприводимые представления $\mathfrak{S}_n$ и разлагая $\mathfrak{L}_{\sigma_i}$ на неприводимые подпространства, мы сможем представить $\mathfrak{L}_{\sigma_i}$ в виде прямой суммы $\mathfrak{L}_{i1} + \mathfrak{L}_{i2} + \dots + \mathfrak{L}_{is}$, где $\mathfrak{L}_{ij}$ — сумма неприводимых подпространств указанного разложения, отвечающих j -му неприводимому представлению $\mathfrak{S}_n$. Полагая $\mathfrak{M}_j = \mathfrak{L}_{1j} + \mathfrak{L}_{2j} + \dots$, мы будем иметь разложение $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \dots + \mathfrak{M}_s$ для основного пространства $\mathfrak{L}$. Каждое инвариантное подпространство из $\mathfrak{L}$ есть прямая сумма своих пересечений с $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_s$. Поэтому дело сводится к комбинированию инвариантных подпространств из различных $\mathfrak{M}_j$. Любое пространство $\mathfrak{M}_j$ есть прямая сумма абсолютно неприводимых инвариантных подпространств, в каждом из которых группа $\mathfrak{S}_n$ имеет одно и то же представление. Определение инвариантных подпространств в пространствах такого рода можно основать на следующей лемме:

Л е м м а. Пусть пространство $\mathfrak{M}$, в котором действует некоторая группа линейных преобразований $\mathfrak{G}$, распадается в прямую сумму инвариантных, абсолютно неприводимых, операторно изоморфных подпространств $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_r$. Обозначим через θ_m операторно изоморфное отображение $\mathfrak{M}_1$ на $\mathfrak{M}_m$. Выберем в $\mathfrak{M}_1$ произвольный ненулевой вектор a и пусть $\mathfrak{L}$ есть подпространство с базисом $a, a\theta_2, \dots, a\theta_r$. Тогда каждое линейное подпространство $\mathfrak{K}$ из $\mathfrak{L}$ есть пересечение $\mathfrak{L}$ с некоторым инвариантным подпространством $\mathfrak{K}^*$ из $\mathfrak{M}$; подпространство $\mathfrak{K}^*$ определяется подпространством $\mathfrak{K}$ однозначно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пересечения инвариантных подпространств с подпространством $\mathfrak{L}$ вполне характеризуются тем свойством, что если какие-либо векторы $b_1, \dots, b_r$ принадлежат пересечению и если вектор $b_1a_1 + \dots + b_ra_r$, где a_i — элементы группового кольца группы $\mathfrak{G}$, принадлежит

$\mathfrak{Q}$, то $b_1 a_1 + \dots + b_r a_r$ также принадлежит пересечению. Нам нужно доказать, что этим свойством обладает каждое подпространство $\mathfrak{K}$ из $\mathfrak{Q}$. Выберем в $\mathfrak{K}$ базис вида

$$u_i = a\theta_i + \alpha_{i, i+1} a\theta_{i+1} + \dots + \alpha_{i, i} a\theta_i \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

что можно сделать, изменяя в случае надобности нумерацию подпространств $\mathfrak{N}_i$. Пусть $b_\lambda = \sum \beta_{\lambda i} u_i$ — произвольные векторы из $\mathfrak{K}$ и $b = \sum b_\lambda a_\lambda = \sum u_i b_i \in \mathfrak{Q}$, где a_λ, b_i — элементы группового кольца группы $\mathfrak{G}$. Так как b входит в $\mathfrak{Q}$ и

$$b = a b_1 + a\theta_2 (\alpha_{12} b_1 + b_2) + \dots + a\theta_i (\alpha_{1i} b_1 + \dots + \alpha_{si} b_s),$$

то

$$a b_1 = \lambda_1 a, \quad a\theta_2 (\alpha_{12} b_1 + b_2) = \lambda_2 \cdot a\theta_2, \dots$$

Отсюда следует, что $a\theta_i b_i = \mu_i a\theta_i$, где μ_i — подходящие числа ($i = 1, \dots, s$). Далее, если $i \leq s$, $i < j$, то $a\theta_j b_i = a\theta_i \theta_i^{-1} \theta_j b_i = \mu_i a\theta_j$. Следовательно, $u_i b_i = \mu_i u_i$, $b = \sum \mu_i u_i \in \mathfrak{K}$. Первое утверждение леммы доказано. Чтобы обнаружить справедливость второго утверждения, достаточно показать, что во всяком инвариантном подпространстве $\mathfrak{K}^*$ можно найти базис, состоящий из векторов вида

$$(\alpha_1 a + \alpha_2 a\theta_2 + \dots + \alpha_i a\theta_i) A \quad (A \in \mathfrak{G}). \quad (15)$$

Доказательство проводится индукцией по числу t неприводимых слагаемых в разложении основного пространства $\mathfrak{N}$. Если $t = 1$, то утверждение тривиально. Рассмотрим случай $t \geq 2$, считая, что для $t - 1$ слагаемых утверждение верно. Если компонента подпространства $\mathfrak{K}^*$ в слагаемом $\mathfrak{N}_1$ равна нулю, то $\mathfrak{K}^*$ лежит в сумме $\mathfrak{N}_2 + \dots + \mathfrak{N}_t$, и утверждение в силу индукции будет верно. Пусть компонента $\mathfrak{K}^*$ в $\mathfrak{N}_1$ отлична от нуля и, следовательно, совпадает с $\mathfrak{N}_1$. Тогда пространство $\mathfrak{K}^*$ будет допускать базис из векторов вида

$$u = \alpha_1 a A + a_2 + \dots + a_i, \quad a_i \in \mathfrak{N}_i, \quad A \in \mathfrak{G}. \quad (16)$$

Если в (16) $\alpha_1 = 0$, то $u \in (\mathfrak{N}_2 + \dots + \mathfrak{N}_t) \cap \mathfrak{K}^*$, и в силу индукции мы можем считать, что u есть линейная комбинация векторов вида (15), где $\alpha_1 = 0$. Предположим поэтому, что $\alpha_1 \neq 0$ и что $a_k = \alpha_k a\theta_k A$ ($k = 1, \dots, i$), $a_{i+1} \neq \lambda a\theta_{i+1} A$. Рассмотрим отображение $a A c \rightarrow a_{i+1} c$, где c пробегает групповое кольцо группы $\mathfrak{G}$. Это отображение операторное и ни с каким отображением $\lambda A \theta_{i+1}$ не совпадает. Поэтому оно не может быть однозначным, т. е. при некотором c будем иметь $a A c \neq 0$, $a_{i+1} c = 0$. Поскольку $\mathfrak{N}_1$ неприводимо, то для некоторого b из группового кольца получим $a A \cdot c b = a A$. Следовательно, для $a = c b$ имеем $a A a = a A$, $a_{i+1} a = 0$. Отсюда

$$u a = (\alpha_1 a + \dots + \alpha_i a\theta_i) A + a'_{i+2} + \dots + a'_i,$$

так как $a\theta_k A a = a A a\theta_k = a\theta_k A$. С другой стороны, $u - u a = a_{i+1} + a_{i+2} (1 - a) + \dots + a_i (1 - a)$. Следовательно, u есть линейная комбинация векторов пространства $\mathfrak{K}^*$, имеющих в силу индукции требуемый вид, и мы можем считать лемму доказанной. Из этой леммы видно, что задача классификации инвариантных подпространств пространства $\mathfrak{N}$ приводится к пе-

речислению всех линейных подпространств пространства $\mathfrak{Q}$, что достигается введением координат Плюккера.

В качестве примера рассмотрим возможные типы тождественных соотношений 2-й и 3-й степени. Для соотношений 2-й степени пространство $\mathfrak{Q}$ состоит из полиномов вида $\alpha xy + \beta yx$ и распадается в прямую сумму инвариантных подпространств с базисными векторами $xy + yx$ и $xy - yx$. Следовательно, тождественные соотношения 2-й степени могут быть трех типов:

1) $xy = -yx$; 2) $xy = yx$; 3) $xy + yx = xy - yx = 0$, $xy = 0$.

Пространство $\mathfrak{Q}$ для соотношений 3-й степени состоит из полиномов вида $\sum \alpha x_i (x_j x_k) + \sum \beta (x_i x_j) x_k$, соответственно чему для $\mathfrak{Q}$ имеем разложение $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{\sigma_1} + \mathfrak{Q}_{\sigma_2}$. В свою очередь, $\mathfrak{Q}_{\sigma_1}$ можно представить в виде $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{D}_1$, где подпространства $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{B}_1$ одномерные с базисными векторами $\sum x_i (x_j x_k)$ и $\sum \pm x_i (x_j x_k)$ (знак минус у нечетных перестановок), а подпространства $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1$ — двумерные, операторно изоморфные, с базисами

$$x_1 (x_2 x_3) + x_2 (x_1 x_3) - x_2 (x_3 x_1) - x_3 (x_2 x_1),$$

$$x_1 (x_3 x_2) + x_3 (x_1 x_2) - x_3 (x_2 x_1) - x_2 (x_3 x_1),$$

$$x_1 (x_2 x_3) + x_1 (x_3 x_2) - x_3 (x_2 x_1) - x_3 (x_1 x_2),$$

$$x_1 (x_2 x_3) + x_1 (x_3 x_2) - x_2 (x_3 x_1) - x_2 (x_1 x_3).$$

Переставляя скобки, получим аналогичное разложение $\mathfrak{Q}_{\sigma_2} = \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{D}_2$. Следовательно,

$$\mathfrak{Q} = (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2) + (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2) + (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2). \quad (17)$$

Если рассматриваются ассоциативные алгебры, то вместо разложения (17) можно взять такое: $\mathfrak{Q} = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{B}_1 + (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{D}_1)$. Тождественные соотношения приводятся к виду

$$1) \sum x_i x_j x_k = 0; \quad 2) \sum \pm x_i x_j x_k = 0;$$

$$3) \alpha (x_1 x_2 x_3 + x_2 x_1 x_3 - x_2 x_3 x_1 - x_3 x_2 x_1) + \beta (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 x_2 - x_3 x_2 x_1 - x_3 x_1 x_2) = 0$$

и их комбинациям. Для алгебр Ли соотношения $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{D}_1$ выполняются в силу антикоммутативности и тождеств Якоби. Поэтому нетривиальные соотношения даются инвариантными подпространствами в $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{D}_2$. Все они приводятся к виду $x(yz) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Д. Адо. О представлении конечных непрерывных групп с помощью линейных подстановок. — Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва, 1934/35, (3), 7, 1—43.
2. И. Р. Шафаревич. О p -расширениях. — Мат. сб., 1947, 20, № 2, 351—363.
3. В. Н. Neumann. Identical relations in groups, I. — Math. Ann., 1937, 114, 506—525.
4. R. Baer. Representations of groups as quotient groups, I. — Trans. Amer. Math. Soc., 1945, 58, N 3.
5. А. Г. Курош. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр. — Мат. сб., 1947, 20, № 2, 239—260.
6. I. Kaplansky. On a problem of Kurosch and Jacobson. — Bull. Amer. Math. Soc., 1946, 52, N 6, 496—500.



Группа G называется частично упорядоченной, если для некоторых пар ее элементов определено соотношение $a < b$, обладающее следующими свойствами: $a \triangleleft a$; если $a < b$, $b < c$, то $a < c$; если $a < b$, $c \in G$, то $ac < bc$ и $ca < cb$. Если для каждой пары различных элементов a, b частично упорядоченной группы имеет место $a < b$ или $b < a$, то группа называется упорядоченной. Говорят, что частично упорядоченная группа G доупорядочиваема, если отношение $a < b$, определенное в G лишь для некоторых пар элементов, можно так доопределить для остальных пар, чтобы группа G стала упорядоченной. Е. П. Шимбирева [1] показала, что всякую частично упорядоченную абелеву группу можно доупорядочить. Другое доказательство этого было дано А. А. Виноградовым [2]. Им же было показано, что теорема о доупорядочиваемости имеет место для более широкого класса частично упорядоченных двуступенных нильпотентных групп без элементов конечного порядка и для произвольных нильпотентных структурно упорядоченных групп. Мы показываем, что теорема о доупорядочиваемости имеет место для произвольных локально нильпотентных групп без элементов конечного порядка.

Л е м м а. Пусть H — нормальный делитель нильпотентной группы G с конечным числом образующих и $[G, H]$ — подгруппа, порожденная коммутаторами вида $(g, h) = g^{-1}h^{-1}gh$, $g \in G$, $h \in H$. Пусть, далее, A — инвариантная в G полугруппа, содержащаяся в H и содержащая единицу. Если образ подпадающей положительной степени каждого элемента группы H в гомоморфном отображении $H \rightarrow H/[G, H]$ содержится в образе полугруппы A , то некоторая положительная степень каждого элемента H содержится в A .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определяем индуктивно цепочку подгрупп $H^{(i)}$, полагая $H^{(1)} = H$, $H^{(i+1)} = [G, H^{(i)}]$. Из нильпотентности группы G следует, что при некотором s будет $H^{(s)} = 1$. Если $s = 2$, то утверждение леммы тривиально. Поэтому предположим, что лемма справедлива для всех нильпотентных групп и их подгрупп, у которых $H^{(s)} = 1$, и пусть рассматриваются группа G и ее подгруппа H , удовлетворяющие условиям леммы и такие, что $H^{(s+1)} = 1$. Обозначая через $\bar{A}$ и $\bar{H}$ образы A и H в фактор-группе $\bar{G} = G/H^{(s)}$, мы в силу индуктивного предположения заключаем, что для каждого $h \in H$ найдется такое положительное число m , что $h^m = az$, где $a \in A$, z — некоторый элемент из $H^{(s)}$. Пусть $g_1, g_2, \dots, g_\alpha$ — образующие группы G и $h_1, h_2, \dots, h_\beta$ — образующие группы $H^{(s-1)}$. Согласно сказанному найдется такое положительное число n , что $h_i^n u_i \in A$, $h_i^n v_i \in A$ ($i = 1, \dots, \beta$; $u_i, v_i \in H^{(s)}$).

Из условия $H^{(s+1)} = 1$ следует, что элементы из $H^{(s)}$ лежат в центре группы G . Поскольку $H^{(s)} = [G, H^{(s-1)}]$, то каждый элемент $z \in H^{(s)}$ есть произведение коммутаторов вида (g, h) , $g \in G$, $h \in H^{(s-1)}$. Так как для $g, g' \in G$ и $h, h' \in H^{(s-1)}$ имеем $(gg', hh') = (g, h)(g, h')(g', h)(g', h')$, то z может быть представлен в виде произведения $z = \prod (g_i, h_k)^{\alpha_{ik}}$, откуда $z^n = \prod (g_i^{\alpha_{ik}}, h_k^n)$. Вводя обозначение $z_0 = (u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_\beta v_\beta)^\alpha$, где u_i, v_i — указанные выше элементы из $H^{(s)}$, мы будем иметь $z_0 \in A$, $z^n z_0 = \prod (g_i^{-\alpha_{ik}} h_k^{-n} u_k g_i^{\alpha_{ik}}) h_k^n v_k$, т. е.

* Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1951, 38, 173—175.

$z^n z_0 \in A$. Полагая здесь $z = z_0^{-1}$, получим $z_0^{-(n-1)} \in A$. Так как для произвольного z $z^n z_0 \in A$, то $z^{n(n-1)} z_0^{(n-1)} \in A$, откуда $z^{n(n-1)} \in A$.

По условию для каждого $h \in H$ существует такое m и такой элемент $z \in H^{(s)}$, что $h^m z \in A$. Следовательно, $h^{n(n-1)m} z^{n(n-1)} \in A$. Поскольку $z^{-1} \in H^{(s)}$, то $z^{-n(n-1)} \in A$, и, значит, $h^{n(n-1)m} \in A$, что и требовалось.

Т е о р е м а. *Всякую локально нильпотентную частично упорядоченную группу G без элементов конечного порядка можно доупорядочить.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что группа имеет конечное число образующих. Обозначим через A совокупность элементов G , больших или равных единице. A есть инвариантная полугруппа в группе G . Пусть H есть совокупность тех элементов группы G , некоторая положительная и некоторая отрицательная степени которых содержатся в A $[G, G]$. Ясно, что H — инвариантная подгруппа, содержащая $[G, G]$. Покажем, что H — выпуклая подгруппа. Пусть $h \in H$, $h > h_0 > 1$. Тогда $hh_0^{-1} > 1$, $hh_0^{-1} = a \in A$. По условию при некотором натуральном n имеем $\bar{h}^{-n} \in A$, где черта означает, что берется образ в фактор-группе $G/[G, G]$. Таким образом, $h_0 \in A$ и $\bar{h}^{-n} = \bar{h}^{-n} a^n$, т. е. $\bar{h}_0^{-n} \in \bar{A}$, $h_0 \in H$. Из определения H видно, что фактор-группа G/H неединичных элементов конечного порядка не содержит. Далее, $G \neq H$, так как из равенства $G = H$ в силу леммы следовало бы, что для каждого $a > 1$ существует такое натуральное n , для которого $a^{-n} \in A$, т. е. $a^{-n} > 1$, что невозможно. Полагаем теперь $H = H_1$ и далее строим цепочку выпуклых подгрупп следующим образом. Пусть выпуклый нормальный делитель H_i уже построен. Обозначим через A_i совокупность элементов H_i , больших или равных единице. Очевидно, $A_i = A \cap H_i$, так что A_i есть инвариантная в G полугруппа. Обозначим через H_{i+1} совокупность тех элементов H_i , некоторая положительная и некоторая отрицательная степени которых содержатся в A_i $[G, H_i]$. Легко видеть, что H_{i+1} — выпуклый нормальный делитель группы G и что фактор-группа H_i/H_{i+1} без кручения. В силу леммы равенство $H_{i+1} = H_i$ исключено и имеет место строгое включение $H_i \supset H_{i+1}$. Итак, построена убывающая цепочка $G \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots$ выпуклых нормальных делителей группы G . Соотношение $H_{i+1} \supset [G, H_i]$ показывает, что эта цепочка является убывающим центральным рядом. Из конечности числа образующих группы G и того, что все факторы цепочки — группы без кручения, следует, что цепочка на конечном месте оканчивается единицей. Поскольку все факторы доупорядочиваемы, следует, что и сама группа доупорядочиваема.

Итак, доказано, что всякая частично упорядоченная нильпотентная группа с конечным числом образующих доупорядочиваема. Однако в силу общих соображений [3] имеет место локальная теорема: если всякая подгруппа с конечным числом образующих частично упорядоченной группы доупорядочиваема, то доупорядочиваема и сама группа. Тем самым доказательство теоремы о доупорядочиваемости закончено в общем случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Шимбирева. К теории частично упорядоченных групп. — Мат. сб., 1947, 20, № 1, 145—175.
2. А. А. Виноградов. Частично упорядоченные и структурно упорядоченные группы. Канд. дис. М., 1949.
3. А. И. Мальцев. Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп. — Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1941, 1, № 1, 3—9.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ БЕСКОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП*



В теории конечных групп важную роль играют разрешимые и нильпотентные группы. Переноса понятия разрешимости и нильпотентности на бесконечные группы, можно в качестве определяющего признака брать то или иное свойство конечных групп.

В настоящей работе мы придерживаемся обычных определений.

Конечная или бесконечная группа G называется разрешимой, если она обладает конечной нормальной цепочкой подгрупп $G \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset 1$ с коммутативными факторами. Группа G называется нильпотентной, если в ней существуют подгруппы G_i , образующие конечный центральный ряд, т. е. G_i/G_{i+1} лежит в центре G/G_{i+1} ($i = 0, 1, \dots, n$), $G_0 = G$, $G_{n+1} = 1$.

Разрешимые группы, обладающие конечным нормальным рядом с циклическими факторами, изучались под именем S -групп Гершем [3] (см. также Цалпа [12]). Различные обобщения понятий разрешимости и нильпотентности изложены в обзоре А. Г. Куроша и С. Н. Черникова [5], где указана и соответствующая литература. В частности, группа G называется локально разрешимой, если любое конечное множество ее элементов порождает разрешимую подгруппу. В работах О. Ю. Шмидта [15, 16], С. Н. Черникова [13, 14], И. Д. Адо [1] и др. найден ряд условий, при которых локально разрешимая или локально нильпотентная группа будет разрешимой. Рассматриваемые этими авторами группы обычно предполагаются периодическими. От этого ограничения можно освободиться, используя понятие ранга [7]. В простейшем случае локально нильпотентных групп это сделано Н. Н. Мягковой [11].

В настоящей работе рассматриваются более широкие классы разрешимых групп, причем, кроме разыскания условий, при которых из локальной разрешимости вытекает разрешимость исследуемых групп, решается и ряд вопросов о свойствах самих групп. Основные результаты сформулированы нами в заметке [9] и лишь теорема 6 из [9] в настоящей работе заменена более сильной теоремой 7, благодаря чему и ее следствие получило более законченную формулировку. Доказательства в значительной степени основываются на свойствах групп матриц, и некоторые результаты являются аналогами теорем о матричных группах.

§ 1. Линейные разрешимые группы

Совокупность всех треугольных матриц заданного порядка n с элементами из какого-либо поля образует разрешимую группу, n -й коммутант которой равен 1^{**} . Первый коммутант этой группы состоит из треугольных матриц специального вида — с единицами по главной диагонали. Если состав-

* Мат. сб., 1951, 28, № 3, 567—588.

** Для определенности под треугольными матрицами будут пониматься матрицы, у которых все элементы, стоящие под главной диагональю, — нули.

вить нижний центральный ряд для коммутанта, то его n -й член окажется равным 1, так что всякая группа специальных треугольных матриц является нильпотентной. Следующее предложение показывает, что треугольная форма является в некотором смысле нормальной формой для разрешимых матричных групп.

Теорема 1. *Каждая разрешимая группа матриц с элементами из алгебраически замкнутого поля содержит подгруппу конечного индекса, матрицы которой приводимы к совместному треугольному виду.*

Доказательству этой теоремы мы предположим лемму:

Лемма 1. *Пусть G — периодическая группа матриц степени n , порядок элементов которой являются делителями заданного числа N , взаимно простого с характеристикой основного поля, если эта характеристика положительна. Тогда группа G конечна и ее порядок не превосходит некоторой границы, зависящей лишь от n и N и не зависящей от характеристики поля.*

Рассмотрим произвольную подгруппу H группы G , порожденную конечным числом элементов. Порядок H конечен (см. [17], а также [6]) и взаимно прост с характеристикой поля. Поэтому всякое неприводимое представление H в заданном поле получается редуцированием некоторого неприводимого немодулярного представления H (ср. [2, стр. 74]). Отсюда видно, что группа H допускает изоморфное немодулярное представление степени n . Согласно теореме Жордана, H содержит абелев нормальный делитель A , индекс которого не превосходит числа k_n , зависящего лишь от n . Элементы A удовлетворяют соотношению $x^N = 1$, и, значит, число их не превосходит N^n . Таким образом, порядок любой конечной подгруппы группы G не больше $k_n N^n$, а следовательно, и общее число элементов G также не больше $k_n N^n$.

Доказательство теоремы 1. Эта теорема, очевидно, непосредственно вытекает из следующего утверждения: всякая абсолютно неприводимая разрешимая группа матриц содержит приводимую подгруппу конечного индекса. Последнее мы и будем доказывать. В доказательстве нам придется опираться на теорему Клиффорда, согласно которой, если группа матриц вполне приводима, то вполне приводимым будем и всякий ее нормальный делитель.

Итак, пусть G — неприводимая разрешимая группа матриц над алгебраическим замкнутым полем. Предположим сначала, что G содержит не лежащий в центре абелев нормальный делитель A . Согласно теореме Клиффорда, матрицы группы A можно считать приведенными к диагональному виду. Пусть $a = a_1 e_{11} + \dots + a_n e_{nn}$ — элемент из A , не лежащий в центре G (e_{ij} — матричные единицы), так что при некоторых i, j будет $a_i \neq a_j$. Поскольку A — нормальный делитель в G , то для $g \in G$ имеем $g^{-1}ag = a_i e_{11} + \dots + a_i e_{nn}$. Отображение

$$g \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

является вообще неоднозначным гомоморфным отображением группы G внутрь симметрической группы подстановок степени n . Совокупность элементов G , вызывающих тождественную подстановку, обозначим через R . Так как симметрическая группа конечна, то R имеет конечный индекс в G . С другой стороны, элементы R перестановочны с нескаларной матрицей a , и, значит, группа R приводима.

Остается рассмотреть случай, когда все абелевы нормальные делители группы G содержатся в ее центре Z . Обозначим через H совокупность матриц

вида $\alpha^{-1}g$, где $g \in G$, $\alpha^n = |g|$. Ясно, что вместе с группой G совокупность H является неприводимой разрешимой группой. Если для некоторых g_1, g_2 из G имеем $\alpha_1^{-1}g_1 = \alpha_2^{-1}g_2$, $\alpha_1^n = |g_1|$, $\alpha_2^n = |g_2|$, то g_1 и g_2 принадлежат одному и тому же смежному классу по Z . Обратно, из $g_2 = g_1z$, $z \in Z$, вытекает, что при подходящих α_1 и α_2 , удовлетворяющих условиям $\alpha_1^n = |g_1|$, $\alpha_2^n = |g_2|$, мы ввиду скалярности матриц Z будем иметь $\alpha_1^{-1}g_1 = \alpha_2^{-1}g_2$. Таким образом, соответствие $\alpha^{-1}g \rightarrow g$ есть гомоморфное отображение группы H на фактор-группу G/Z . Ядро этого отображения N образует скалярные матрицы вида vE , где $v^n = 1$. Пусть характеристика основного поля есть $p > 0$ и $n = p^k m$, $(m, p) = 1$. Тогда соотношение $\alpha^n = 1$ равносильно соотношению $\alpha^m = 1$, т. е. порядки элементов группы N делят m . Покажем, что центр H совпадает с N .

Действительно, центральные элементы неприводимой группы H должны быть скалярными матрицами. Но скалярные матрицы H могут возникнуть лишь из скалярных же матриц группы G . Поэтому они должны иметь вид vE , $v^n = 1$ и входить в N , т. е. N есть центр H .

Ввиду разрешимости H группа H/N также разрешима и содержит нетривиальный абелев нормальный делитель A/N . Группа A нильпотентна, так как ее коммутант лежит внутри центральной подгруппы N . Обозначим через A_m подгруппу, порожденную m -ми степенями всех элементов A . Поскольку элементы коммутанта группы A имеют своими порядками делители m , то A_m лежит в центре Q группы A . Если Q не содержится в N , то Q является центральным коммутативным нормальным делителем H . Рассматривая прообраз Q в G , мы получим нецентральный абелев нормальный делитель G , что противоречит предположению. Таким образом, $A_m \subset Q \subset N$. Но m -я степень любого элемента A содержится в группе A_m , являющейся подгруппой группы N порядка m . Поэтому порядки всех элементов A являются делителями числа m^2 . Согласно лемме отсюда вытекает конечность группы A и, следовательно, конечность индекса ее централизатора B в H . Группа A содержит нескальную матрицу. Все элементы B с этой матрицей перестановочны, и, значит, группа B приводима. Прообраз B в группе G будет искомой приводимой подгруппой конечного индекса.

Отметим, что из приведенных рассуждений вытекает, что индекс подгруппы, о которой идет речь в теореме 1, будет не больше некоторой границы, зависящей лишь от порядка матриц. В частности, получается известный результат: длина цепочки коммутантов разрешимой матричной группы не превосходит границы, зависящей лишь от порядка матриц.

Группа треугольных специальных матриц обладает той особенностью, что все характеристические числа каждого ее элемента равны 1. Верно и обратное (Колчин [4]): *если все характеристические числа каждого элемента матричной группы над алгебраически замкнутым полем равны 1, то группа приводима к специальной треугольной форме.*

Для полноты приведем краткое доказательство этого замечания. Если основное поле имеет простую характеристику $p > 0$, то из равенства единице всех характеристических чисел некоторой матрицы a следует, что $a^{p^n} = e$, где n — порядок a , e — единичная матрица. Таким образом, каждое конечное множество элементов заданной группы порождает конечную подгруппу, порядок которой имеет вид p^k . По известной теореме такая подгруппа приводима к специальной треугольной форме, а из этого непосредственно следует, что и сама группа приводима к специальной треугольной форме [6]. Пусть те-

перь характеристика поля есть 0. Обозначим через S свободную группу со свободными образующими a_g , где индекс g пробегает всю заданную группу G . Рассмотрим представления $a_g \rightarrow g$ и $a_g \rightarrow e$ группы S . Следы обоих представлений совпадают. Поэтому они содержат соответственно эквивалентные неприводимые части, т. е. группа G приводима к специальной треугольной форме.

Легко видеть, что если группа матриц приводима к специальной треугольной форме в алгебраическом замыкании основного поля, то она будет приводимой и в основном поле, так что требование алгебраической замкнутости в условии замечания не существенно.

В дальнейшем нам будет нужно рассматривать автоморфизмы абелевых групп некоторых классов. Пусть M — абелева группа конечного ранга без элементов конечного порядка, записываемая аддитивно. Выберем в M максимальную систему линейно независимых элементов $m_1, \dots, m_s$. Тогда для каждого элемента $m \in M$ найдется целое положительное t такое, что при подходящих целых $t_1, \dots, t_s$ будем иметь

$$tm = t_1 m_1 + \dots + t_s m_s. \quad (1)$$

Запись (1) мы будем считать равносильной записи

$$m = \frac{t_1}{t} m_1 + \dots + \frac{t_s}{t} m_s.$$

Ввиду этого каждый элемент M можно выразить линейно с рациональными коэффициентами через m_i , и такая запись будет однозначной. В результате группа M окажется включенной в группу M^* линейных форм от m_i , обладающую тем свойством, что некоторое кратное любого элемента M^* содержится в M , M^* не имеет элементов конечного порядка и уравнение $tx = m$ разрешимо в M^* при любых положительных целых t .

Пусть σ — автоморфизм группы M . Тогда $m_i^\sigma = \alpha_{i1} m_1 + \dots + \alpha_{is} m_s$, где α_{ij} — некоторые рациональные числа. Соответствие $\sigma \rightarrow \|\alpha_{ij}\|$ представляет автоморфизм группы M неособенной матрицей с рациональными элементами. В общем случае не всякая матрица дает автоморфизм группы M .

Л е м м а 2. Если матрицы некоторой группы автоморфизмов G абелевой группы конечного ранга без кручения M приводимы в поле рациональных чисел к совместной треугольной форме, то в группе M найдется цепочка инвариантных относительно G подгрупп $M \supset M_1 \supset \dots \supset M_{s-1} \supset 0$ с факторгруппами без элементов конечного порядка ранга 1.

Условимся записывать M аддитивно и рассмотрим для M группу M^* , определенную выше. M^* можно рассматривать как линейное пространство над полем рациональных чисел. По условию в M^* есть цепочка инвариантных подпространств $M^* \supset M_1^* \supset \dots \supset M_{s-1}^* \supset 0$ размерностей $s, s-1, \dots, 1, 0$. Совокупность всех элементов M , целое кратное которых входит в M_i^* , будет подгруппой M_i группы M , инвариантной относительно автоморфизмов G , и цепочка $M \supset M_1 \supset \dots \supset M_{s-1} \supset 0$ удовлетворяет требованиям леммы.

Пусть теперь задана абелева группа M , распадающаяся в прямую сумму $M = M_1 \dot{+} \dots \dot{+} M_s$, где каждое слагаемое M_i — группа типа p^∞ (p — заданное простое число). В M_i выберем систему образующих $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots$, связанных соотношениями $pa_{j+1}^{(i)} = a_j^{(i)}$ ($j = 1, 2, \dots$). Если σ — некоторый

эндоморфизм M , то

$$a_j^{(i)\sigma} = \tilde{\alpha}_{j1}^{(i)} a_j^{(1)} + \tilde{\alpha}_{j2}^{(i)} a_j^{(2)} + \dots + \tilde{\alpha}_{js}^{(i)} a_j^{(s)},$$

где $\alpha_{jk}^{(i)}$ — целые числа, определенные $\text{mod } p^j$ и связанные условиями $p\alpha_{jk}^{(i)} \equiv \alpha_{j-1,k}^{(i)} \pmod{p^{j-1}}$. Поэтому последовательности

$$\tilde{\alpha}_k^{(i)} = \{\alpha_{1k}^{(i)}, \alpha_{2k}^{(i)}, \dots, \alpha_{nk}^{(i)}\}$$

можно рассматривать как целые p -адические числа и эндоморфизм σ определяет матрицу $\|\alpha_k^{(i)}\|$ степени s с целыми p -адическими элементами $\alpha_k^{(i)}$. Обратно, каждая такая матрица определяет некоторый эндоморфизм группы M . Произведение двух эндоморфизмов переходит в произведение соответствующих матриц. Поэтому, чтобы эндоморфизм был изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы была целообратимой его матрица, т. е. чтобы определитель ее не делился на p .

Л е м м а 3. Если матрицы некоторой группы автоморфизмов G прямой суммы M групп типа p^∞ приводимы в поле p -адических чисел к совместной треугольной форме, то в M можно найти такие подгруппы $\bar{M}_i$ типа p^∞ , что $M = \bar{M}_1 + \dots + \bar{M}_s$ и подгруппы $\bar{M}_k + \bar{M}_{k+1} + \dots + \bar{M}_s$ инвариантны относительно автоморфизмов G .

Матрицы автоморфизмов G являются, как указано, матрицами с целыми p -адическими коэффициентами, определители которых не делятся на p . Дано, что все матрицы G можно привести к треугольному виду, преобразуя их некоторой матрицей с целыми p -адическими элементами, определитель которой, может быть, делится на p . Нужно найти матрицу, обладающую тем же свойством, но определитель которой не делится на p . Пусть E^* — вспомогательное пространство над полем p -адических чисел с базисом $e_1, e_2, \dots, e_s$, и пусть E — совокупность векторов из E^* , имеющих целые координаты в указанном базисе. Матрицы из G преобразуют E в себя. Нам требуется найти в E новый базис, в котором матрицы G имели бы треугольную форму. По условию в E^* существует вектор $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_s e_s$, удовлетворяющий соотношениям

$$u^\sigma = \Lambda(\sigma) u \quad (\sigma \in G).$$

Ищем такое t , чтобы координаты tu были целыми и чтобы по меньшей мере одна из этих координат, например первая, не делилась на p . Тогда $tu, e_2, \dots, e_s$ будет новым базисом в E . Подпространство $\{\lambda u\}$ инвариантно относительно G , и мы можем рассмотреть пространство вычетов $G/\{\lambda u\}$. Продолжая этот процесс, мы найдем базис в E , в котором матрицы автоморфизмов G будут иметь треугольную форму. Переход от первого ко второму базису осуществляется посредством преобразования, матрица которого T имеет целые p -адические элементы и ее определитель не делится на p . Следовательно, T является матрицей некоторого автоморфизма τ группы M . Мы предполагали, что группа M представлена в виде прямой суммы $\sum M_i$ своих подгрупп типа p^∞ . Но тогда треугольность матриц G означает, что $M = \sum M_i^\tau$ и подпространства $M_k^\tau + M_{k+1}^\tau + \dots + M_s^\tau$ инвариантны относительно G .

Т е о р е м а 2. Всякая разрешимая группа автоморфизмов абелевой группы M с конечным числом образующих обладает конечной нормальной цепочкой подгрупп с циклическими факторами.

Доказательство. Обозначим периодическую часть группы M через P . Всякий автоморфизм σ группы M порождает в группе вычетов M/P некоторый автоморфизм $\bar{\sigma}$. Соответствие $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ является гомоморфизмом с конечным ядром. Поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда M не содержит элементов конечного порядка. Тогда M будет прямым произведением конечного числа бесконечных циклических групп и группа автоморфизмов M будет изоморфна группе целочисленных матриц с определителем ± 1 .

Итак, пусть G — разрешимая группа целочисленных матриц степени s с определителем ± 1 . Согласно теореме 1 в G найдется подгруппа H конечного индекса, матрицы которой будут приводимы к треугольному виду в подходящем расширении K поля рациональных чисел. Как видно из доказательства теоремы 1, поле K можно считать конечной степени. Элементы матрицы X , приводящей G к треугольному виду, можно предполагать целыми элементами поля K . Тогда, умножая элементы всех матриц системы $X^{-1}HX$ на одно и то же целое число, например на определитель матрицы X , мы сделаем их целыми, т. е. элементы матриц $X^{-1}HX$ имеют общий знаменатель.

Диагональные элементы матрицы $X^{-1}AX$, где $A \in H$, являются характеристическими числами A . Так как определитель матрицы A равен ± 1 , то ее характеристические числа являются единицами поля K . Поставив каждому элементу $A \in H$ в соответствие диагональную часть матрицы $X^{-1}AX$, мы получим представление группы H ; ядро H_0 которого состоит из всех тех матриц системы $X^{-1}HX$, диагональные элементы которых равны 1. Согласно теореме Дирихле, группа единиц поля K имеет конечное число образующих. Поэтому группа D всех диагональных матриц, диагональные элементы которых равны единицам K , также имеет конечное число образующих. Фактор-группа H/H_0 изоморфна некоторой подгруппе группы D и, значит, имеет конечное число образующих. Остается рассмотреть H_0 . Эта группа образована треугольными матрицами с единичной диагональю, причем элементы всех ее матриц имеют общий знаменатель. Обозначим через H_{0i} совокупность тех матриц группы H_0 , у которых первые i рядов, параллельных главной диагонали, состоят из нулей. Цепочка $H_0 \supset H_{01} \supset \dots \supset H_{0s-1} = 1$ есть нормальный ряд группы H_0 . Фактор-группы H_{0i}/H_{0i+1} изоморфны некоторым подгруппам прямых сумм аддитивных групп чисел поля K , имеющих знаменатель $|X|$. Так как аддитивная группа чисел поля K , представимых в виде дробей с данным знаменателем, имеет конечное число образующих, то и фактор-группы H_{0i}/H_{0i+1} имеют конечное число образующих.

§ 2. Разрешимые A_4 -группы

При изучении свойств разрешимых групп естественно налагать различные требования на факторы разрешимой цепочки, являющиеся коммутативными группами. Среди изучавшихся классов коммутативных групп простейшими являются следующие: A_1) коммутативные группы, фактор-группа которых по их периодической части имеет конечный ранг; A_2) группы типа A_1 , периодическая часть которых распадается в прямое произведение конечного числа циклических и локально циклических подгрупп; A_3) группы типа A_1 , периодическая часть которых распадается в прямое произведение конечного числа циклических и *примарных* локально циклических подгрупп (типа p^∞); A_4) группы типа A_1 , периодическая часть которых конечна; A_5) абелевы груп-

пы с конечным числом образующих. Соответственно этому разрешимая группа будет называться группой типа A_i , если она допускает конечную нормальную цепочку подгрупп, все факторы которой — абелевы группы типа A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) *.

Принимая во внимание, что подгруппы абелевых A_i -групп являются A_i -группами ($i = 1, \dots, 5$), мы обычным путем приходим к заключению, что *подгруппы разрешимых A_i -групп являются разрешимыми A_i -группами*.

Аналогично, для $i = 1, 2, 5$ фактор-группы абелевых A_i -групп являются снова A_i -группами. Поэтому *фактор-группы разрешимых A_i -групп — опять-таки разрешимые A_i -группы* ($i = 1, 2, 5$). Для $i = 3, 4$ в общем случае можно лишь утверждать, что фактор-группы разрешимых A_i -групп по их периодическим нормальным делителям являются разрешимыми A_i -группами.

Называя приведенным рангом абелевой группы ранг ее фактор-группы по подгруппе всех периодических элементов, мы при помощи теоремы Шрейера легко убеждаемся, что *сумма приведенных рангов факторов разрешимой нормальной цепочки A_1 -группы не зависит от выбора цепочки*.

Произведение периодических нормальных делителей произвольной группы есть снова периодический нормальный делитель. Отсюда следует, что каждая группа обладает единственным максимальным периодическим нормальным делителем.

Теорема 3. *Фактор-группа разрешимой A_1 -группы по ее максимальному периодическому нормальному делителю есть разрешимая A_4 -группа, обладающая конечной цепочкой характеристических подгрупп с абелевыми факторами типа A_4 .*

Доказательство. Разрешимые группы характеризуются тем свойством, что их ряд последовательных коммутантов заканчивается через конечное число шагов единицей. Поэтому доказательство теоремы 3 можно вести индукцией по номеру обращающегося в единицу коммутанта. Если первый коммутант равен 1, то группа коммутативна и утверждение теоремы очевидно. Предположим, что для групп с равным единице n -м коммутантом теорема справедлива, и рассмотрим какую-либо разрешимую A_1 -группу G , у которой в единицу обращается $(n + 1)$ -й коммутант $G^{(n+1)}$. Обозначим через P максимальный периодический нормальный делитель группы G и пусть $H = G/P$, так что H является разрешимой A_1 -группой, не содержащей периодических нормальных делителей, отличных от 1, и $H^{(n+1)} = 1$. $H^{(n)}$ — характеристическая коммутативная подгруппа группы H . Поскольку максимальный периодический нормальный делитель H равен 1, то $H^{(n)}$ не содержит элементов конечного порядка и, таким образом, является абелевым нормальным делителем конечного ранга без кручения. Пусть $Q/H^{(n)}$ — максимальный периодический нормальный делитель фактор-группы $H/H^{(n)}$. Так как коммутант n -го порядка этой фактор-группы равен 1, а сама она — разрешимая типа A_1 , то в силу индукции можно заключить, что группа $H/H^{(n)}/Q/H^{(n)} \cong H/Q$ обладает цепочкой характеристических подгрупп с абелевыми факторами типа A_4 .

Подгруппа $H^{(n)}$ является нормальным делителем в Q . Внутренние автоморфизмы Q индуцируют в $H^{(n)}$ автоморфизмы, которые при выборе в $H^{(n)}$ определенной базы (см. § 1) могут быть представлены матрицами над полем рациональных чисел. Возникающее таким образом представление D группы

* Свойства A_5 -групп рассматривались Гиршем в работе [3], где эти группы названы S -группами.

Q имеет своим ядром централизатор Z подгруппы $H^{(n)}$ в Q . Представление D является изоморфным для фактор-группы Q/Z , которая, таким образом, может быть рассматриваема как группа матриц над полем рациональных чисел. Поскольку группа $Q/H^{(n)}$ — периодическая и $H^{(n)}$ содержится в Z , то Q/Z — также периодическая группа. Но всякая периодическая группа матриц над полем рациональных чисел конечна. Поэтому конечна и группа Q/Z .

Остается рассмотреть группу Z . Подгруппа $H^{(n)}$ — центральная в группе $H^{(n)} Z^{(n-1)}$, а фактор-группа $H^{(n)} Z^{(n-1)}/H^{(n)}$ коммутативна. Значит, группа $H^{(n)} Z^{(n-1)}$ — нильпотентная. Периодических элементов, отличных от единицы, эта группа не содержит, так как периодические элементы нильпотентной группы образуют характеристическую подгруппу, которая являлась бы периодическим нормальным делителем самой группы H , по условию не содержащей отличных от единицы периодических нормальных делителей. Поскольку группа $H^{(n)} Z^{(n-1)}/H^{(n)}$ — периодическая, то группа $H^{(n)} Z^{(n-1)}$ есть пополнение группы $H^{(n)}$ в смысле работы [8]. Но пополнение абелевой группы есть группа абелева, и, таким образом, группа $H^{(n)} Z^{(n-1)}$ коммутативна. Из коммутативности $Z^{(n-1)}$ вытекает, что $Z^{(n)} = 1$. Следовательно, группа Z удовлетворяет индуктивным предположениям и, значит, обладает конечной цепочкой характеристических подгрупп с коммутативными факторами типа A_4 .

Итак, в группе H нашлись характеристические подгруппы $H \supset Q \supset Z \supset 1$ такие, что фактор-группы H/Q , Q/Z , Z обладают конечными цепочками характеристических подгрупп с абелевыми факторами типа A_4 . Отсюда непосредственно следует, что тем же свойством обладает и группа H .

Согласно определению разрешимыми A_i -группами называются группы, обладающие нормальной цепочкой подгрупп с абелевыми факторами типа A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Из теоремы 3 вытекает, что в этом определении нормальные цепочки можно заменить цепочками характеристических подгрупп. Именно, имеет место

С л е д с т в и е. *Каждая разрешимая A_i -группа ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) обладает конечной цепочкой характеристических подгрупп с абелевыми факторами типа A_i .*

Поскольку фактор-группы разрешимых A_i -групп для $i = 1, 2, 5$ являются снова A_i -группами, то при указанных значениях i цепочка последовательных коммутантов будет уже обладать требуемыми свойствами.

Пусть G — разрешимая группа типа A_4 . Обозначим через P максимальный периодический нормальный делитель группы G . Группа P конечна. По теореме 3 фактор-группа G/P обладает конечной цепочкой характеристических подгрупп, факторы которой коммутативны и имеют тип A_4 . Присоединяя к прообразам групп этой цепочки в G еще цепочку последовательных коммутантов группы P , мы получим искомую цепочку характеристических подгрупп группы G .

Наконец, пусть G — разрешимая группа типа A_3 , P — ее максимальный периодический нормальный делитель. Поскольку P — периодическая разрешимая A_3 -группа, а фактор-группы периодических разрешимых A_3 -групп являются снова A_3 -группами, то ряд последовательных коммутантов P будет цепочкой характеристических подгрупп с абелевыми факторами типа A_3 . Присоединяя эту цепочку к прообразам подгрупп характеристической цепочки для фактор-группы G/P , мы опять получим искомую цепочку характеристических подгрупп группы G .

Теорема 4. *Каждая разрешимая группа G типа A_3 обладает подгруппой конечного индекса, коммутант которой нильпотентен.*

Доказательство. Согласно теореме 3 и ее следствию группа G обладает цепочкой нормальных делителей $G \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset 1$, фактор-группы которой или конечны, или абелевы конечного ранга без кручения, или разлагаются в прямое произведение конечного числа абелевых групп типа p^∞ (по одному и тому же p). В группе G теперь строим убывающую цепочку подгрупп H_i следующим образом: полагаем $H_0 = G$ и далее рассуждаем индуктивно. Пусть подгруппа H_i для некоторого i построена. Внутренние автоморфизмы группы G , производимые элементами H_i , индуцируют некоторые автоморфизмы фактор-группы G_{i-1}/G_i . Если эта фактор-группа конечна, то через H_{i+1} обозначаем совокупность тех элементов группы H_i , которые производят в G_{i-1}/G_i тождественный автоморфизм. Ввиду конечности G_{i-1}/G_i подгруппа H_{i+1} имеет конечный индекс в H_i . Пусть теперь G_{i-1}/G_i — группа без кручения или прямое произведение конечного числа групп типа p^∞ . Тогда автоморфизмы, вызываемые в этой группе элементами H_i , согласно § 1 могут быть представлены матрицами над полем рациональных или соответственно p -адических чисел. Совокупность матриц, в которые таким образом отображаются элементы H_i , обозначим через D_i . D_i будет разрешимой матричной группой, и ввиду теоремы 1 D_i содержит подгруппу F_i конечного индекса, матрицы которой в алгебраическом замыкании основного поля будут приводимы к треугольной форме. Совокупность всех элементов H_i , отображающихся в F_i , будет подгруппой конечного индекса в группе H_i . Эту подгруппу мы и обозначим через H_{i+1} . Рассмотрим последнюю подгруппу $H = H_{n+1}$. Так как все индексы $H_{i-1} : H_i$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$) конечны, то H — подгруппа конечного индекса в G . Остается показать, что H' нильпотентна.

Аutomорфизмы, вызываемые элементами H , оставляют на месте элементы фактор-групп G_{i-1}/G_i конечных порядков и могут быть представлены треугольными матрицами для бесконечных фактор-групп. Но если элементы H представлены треугольными матрицами, то элементы коммутанта H' будут представляться треугольными матрицами с единичной диагональю, причем в силу теоремы 1 представление H' может быть приведено к треугольной форме в основном поле. В силу леммы 2 и 3 отсюда следует, что в каждой бесконечной фактор-группе G_{i-1}/G_i найдется цепочка инвариантных относительно элементов H' подгрупп

$$G_{i-1}/G_i \supset B_{i1}/G_i \supset \dots \supset B_{ik_i}/G_i \supset G_i/G_i,$$

таких, что фактор-группы $G_{i-1}/B_{i1}, \dots, B_{ik_i}/G_i$ будут ранга 1 и элементы H' будут вызывать в них лишь тождественные автоморфизмы. Вставляя в цепочку $G \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset 1$ между каждыми соседними подгруппами G_{i-1}, G_i , имеющими бесконечную фактор-группу G_{i-1}/G_i , указанные промежуточные группы $B_{i1}, \dots, B_{ik_i}$, мы получим новую цепочку $G \supset K_1 \supset \dots \supset K_s \supset 1$ подгрупп группы G . Подгруппы K_i инвариантны относительно элементов H' , и эти элементы вызывают в фактор-группах K_{i-1}/K_i лишь тождественные автоморфизмы. Положим $N_i = H' \cap K_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Цепочка $H' \supset N_1 \supset \dots \supset N_s \supset 1$ состоит из нормальных делителей группы H' . Элементы H' индуцируют во всех фактор-группах N_i/N_{i+1} единичные автоморфизмы. Таким образом, указанная цепочка есть убывающий центральный ряд H' и H' нильпотентна.

§ 3. Локально нильпотентные группы

Группа G называется локально нильпотентной, если любое конечное множество ее элементов лежит в некоторой нильпотентной подгруппе группы G . Аналогично, группа G называется локально разрешимой, если любое конечное множество элементов G лежит в ее некоторой разрешимой подгруппе. Нас будут интересовать условия, которые следует наложить на подгруппы группы G , чтобы из локальной нильпотентности или локальной разрешимости G вытекала ее нильпотентность или соответственно разрешимость.

Теорема 5. Если все абелевы подгруппы локально нильпотентной группы G имеют тип A_1 , то фактор-группа G/P , где P — максимальный периодический нормальный делитель группы G , является нильпотентной группой типа A_4 .

Доказательство. Совокупность всех элементов конечных порядков локально нильпотентной группы является нормальным делителем этой группы. Поэтому фактор-группа G/P не имеет отличных от единицы периодических элементов. Покажем, что все абелевы подгруппы группы G/P имеют тип A_1 , т. е. являются абелевыми группами конечного ранга без кручения.

Пусть, наоборот, A/P — абелева подгруппа бесконечного ранга группы G/P . Выберем в A бесконечную последовательность элементов $a_1, a_2, \dots$, образы которых в A/P линейно независимы. Подгруппа H_i , порожденная в группе A элементами a_1, a_i , является нильпотентной группой с двумя образующими. Поэтому периодическая часть P_i этой группы конечна. Отсюда следует, что автоморфизм, индуцируемый в P_i элементом a_i , имеет конечный порядок n_i . Поскольку фактор-группа H_i/P_i абелева, то $a_i^{-n_i} a_1 a_i^{n_i} = a_1 c_1$ ($c_1 \in P_i$), откуда $a_i^{-kn_i} a_1 a_i^{kn_i} = a_1 c_i^k$ ($k = 1, 2, \dots$). Обозначая через m_i порядок c_i , будем иметь $a_i^{n_i m_i} a_1 = a_1 a_i^{n_i m_i}$. Итак, элемент a_1 коммутирует с подходящими положительными степенями $a_i^{n_i m_i}$ элементов a_i . Повторяя те же рассуждения, мы найдем, что элемент $a_2^{n_2 m_2}$ коммутирует с некоторыми положительными степенями $a_i^{n_i m_i k_i}$ элементов $a_i^{n_i m_i}$ ($i = 3, 4, \dots$) и т. д. Система $a_1, a_2^{n_2 m_2}, a_3^{n_3 m_3 k_3}$ порождает в группе G абелеву подгруппу бесконечного ранга, что противоречит условиям теоремы. Таким образом, группа G/P локально нильпотентна, не содержит собственных периодических элементов и все ее абелевы подгруппы имеют конечный ранг. Согласно [8] отсюда следует, что группу G/P можно включить в полную локально нильпотентную группу G^* без собственных периодических элементов и такую, что подходящая положительная степень каждого элемента G/P содержится в G^* . Всякая полная абелева подгруппа группы G^* является пополнением соответствующей абелевой подгруппы из G/P . Так как при пополнении ранг абелевой группы не меняется, то G^* — локально нильпотентная полная группа без элементов конечного порядка, все абелевы подгруппы которой имеют конечный ранг. Обозначим через $\mathfrak{G}$ алгебру Ли группы G^* . В силу [8] алгебра $\mathfrak{G}$ локально нильпотентна, и все ее абелевы подалгебры имеют конечный ранг. Нам остается доказать, что $\mathfrak{G}$ нильпотентна.

Дальнейшие рассуждения основаны на аналоге известной леммы Холла и в основном параллельны рассуждениям Х. Х. Мухаммеджана [10] и С. Н. Черникова [13].

Л е м м а 4. Если алгебра Ли $\mathfrak{G}$ обладает верхним центральным рядом

$$\mathfrak{Z}_1 \subset \mathfrak{Z}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{Z}_n \subset \dots, \quad \bigcup \mathfrak{Z}_n = \mathfrak{G},$$

с факторами конечных рангов, то этот ряд обрывается через конечное число шагов.

Согласно определению верхнего центрального ряда $\mathfrak{Z}_0 = 0$, а $\mathfrak{Z}_n$ — совокупность тех элементов a из алгебры $\mathfrak{G}$, для которых $[a, \mathfrak{G}] \subset \mathfrak{Z}_{n-1}$. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторый идеал алгебры $\mathfrak{G}$. Тогда, если при некотором j $\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{Z}_{j+1} \setminus \mathfrak{Z}_j) \neq \Lambda$, где Λ — пустое множество, то для любого $i < j$ имеем $\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{Z}_{i+1} \setminus \mathfrak{Z}_i) \neq \Lambda$. Действительно, пусть $a \in \mathfrak{A}$, $a \in \mathfrak{Z}_{j+1} \setminus \mathfrak{Z}_j$. Если для всех $g \in \mathfrak{G}$ имеем $[a, g] \in \mathfrak{Z}_j \setminus \mathfrak{Z}_i$, то из $[a, g] \in \mathfrak{A}$, $[a, g] \in \mathfrak{Z}_j$ следует, что $[a, g] \in \mathfrak{Z}_i$, т. е. $a \in \mathfrak{Z}_{i+1}$, а это противоречит условию. Итак, для каждого $i < j$ найдется элемент g , для которого $[a, g] \in \mathfrak{Z}_j \setminus \mathfrak{Z}_i$, в частности $\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{Z}_j \setminus \mathfrak{Z}_{j-1}) \neq \Lambda$.

Из доказанного утверждения следует, что каждый идеал $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathfrak{G}$ или содержится в некотором $\mathfrak{Z}_j$, или имеет непустое пересечение с каждой разностью $\mathfrak{Z}_{j+1} \setminus \mathfrak{Z}_j$.

Перейдем к доказательству леммы. Обозначим через $\mathfrak{N}_i$ централизатор $\mathfrak{Z}_i$ в $\mathfrak{G}$, т. е. совокупность тех элементов $g \in \mathfrak{G}$, для которых $[g, \mathfrak{Z}_i] = 0$. Все $\mathfrak{N}_i$ — идеалы в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2 \supset \dots$, $\bigcap \mathfrak{N}_i = \mathfrak{Z}_1$. По предположению ранги алгебр $\mathfrak{Z}_i$ конечны. Отсюда следует, что конечными будут и ранги алгебр вычетов $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_i$. Нам надо показать, что алгебра $\mathfrak{G}$ имеет конечный ранг. Если при некоторых натуральных p, q окажется, что $\mathfrak{N}_p \subset \mathfrak{Z}_q$, то ранг $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_q$ будет не больше ранга $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_p$, т. е. будет конечным. Если же при любых p и q $\mathfrak{N}_p \not\subset \mathfrak{Z}_q$, то по изложенному $(\mathfrak{Z}_2 \setminus \mathfrak{Z}_1) \cap \mathfrak{N}_p \neq \Lambda$ для любого p . Подалгебры $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{Z}_2$ отличны от $\mathfrak{Z}_1$ и содержатся в $\mathfrak{Z}_2$. Их ранги не могут убывать неограниченно. Поэтому для некоторого p $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{N}_{p+1} \cap \mathfrak{Z}_2 = \dots$. Но $\bigcap_i (\mathfrak{N}_{p+i} \cap \mathfrak{Z}_2) \subset \mathfrak{Z}_1$, т. е. $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{Z}_2 \subset \mathfrak{Z}_1$, что противоречит

установленному выше неравенству $(\mathfrak{Z}_2 \setminus \mathfrak{Z}_1) \cap \mathfrak{N}_p \neq \Lambda$.

Л е м м а 5. Если алгебра Ли $\mathfrak{G}$ локально нильпотентна и все ее коммутативные подалгебры имеют конечный ранг, то алгебра $\mathfrak{G}$ является нильпотентной и имеет конечный ранг.

Пусть $\mathfrak{G}$ не нильпотентна. Тогда в $\mathfrak{G}$ найдется возрастающая цепочка нильпотентных подалгебр $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_2 \subset \dots$, длины верхних центральных рядов которых стремятся к бесконечности. Обозначим через $\mathfrak{A}_i$ центр алгебры $\mathfrak{H}_i$. Сумма $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots$ будет абелевой подалгеброй в $\mathfrak{G}$ и, значит, должна иметь конечный ранг. Отсюда следует, что при некотором i $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_{i+1} = \dots$, и, следовательно, $\mathfrak{A}_i$ будет центральной подалгеброй в алгебре $\mathfrak{H} = \bigcup \mathfrak{H}_\alpha$. Итак, алгебра $\mathfrak{H}$ имеет нетривиальный центр; обозначим его через $\mathfrak{Z}_1$. Покажем, что все абелевы подалгебры вычетов $\mathfrak{H}/\mathfrak{Z}_1$ имеют конечный ранг. Действительно, пусть $\mathfrak{H}/\mathfrak{Z}_1$ содержит абелеву подалгебру $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}_1$ бесконечного ранга и пусть $a_1, a_2, \dots$ — элементы алгебры $\mathfrak{F}$, образы которых линейно независимы в $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}_1$. Имеем $[a_1, a'_i] = z_i$, $z_i \in \mathfrak{Z}_1$. Так как алгебра $\mathfrak{Z}_1$ — конечного ранга, то найдется бесконечное множество линейно независимых элементов $a'_2, a'_3, \dots$, являющихся линейными комбинациями $a_2, a_3, \dots$ и удовлетворяющих условиям $[a_1, a'_i] = 0$. Поступая аналогичным образом с $a'_2, a'_3, \dots$ и т. д., мы найдем в алгебре $\mathfrak{H}$ бесконечную последовательность коммутирующих и линейно независимых элементов $a_1, a'_2, a''_3, \dots$, что по условию невозможно. Итак, $\mathfrak{H}/\mathfrak{Z}_1$ счетна, локально нильпотентна и все ее абелевы подалгебры имеют конечный ранг. Согласно приведенному

выше рассуждению отсюда вытекает, что $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}_1$ имеет нетривиальный центр $\mathfrak{Z}_2/\mathfrak{Z}_1$. В силу тех же соображений $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}_2$ будет иметь нетривиальный центр $\mathfrak{Z}_3/\mathfrak{Z}_2$ и т. д. Пусть $\mathfrak{Z} = \bigcup \mathfrak{Z}_\alpha$. Алгебра $\mathfrak{Z}$ имеет возрастающий центральный ряд $\mathfrak{Z}_1 \subset \mathfrak{Z}_2 \subset \dots$. Отсюда следует, что $\mathfrak{Z}$ будет иметь и верхний центральный ряд. Ввиду конечности рангов абелевых подалгебр $\mathfrak{Z}$, все факторы ее верхнего центрального ряда будут также конечного ранга. По лемме 4 заключаем, что $\mathfrak{Z}$ имеет конечный ранг. Таким образом, последовательность $\mathfrak{Z}_1 \subset \mathfrak{Z}_2 \subset \dots$ конечна и $\mathfrak{F}$ нильпотентна. Но это противоречит тому, что $\mathfrak{F}$ содержит подалгебры $\mathfrak{F}_\alpha$, длины верхних центральных рядов которых растут неограниченно. Лемма 5, а вместе с нею и теорема 5 доказаны.

Пусть G — локально нильпотентная группа, все абелевы подгруппы которой имеют тип A_3 . Обозначим через P периодическую часть группы G . По теореме 5 фактор-группа G/P — нильпотентная типа A_3 . С другой стороны, P является локально нильпотентной группой, все абелевы подгруппы которой удовлетворяют условию минимальности для подгрупп. В силу результата С. Н. Черникова [13], P разрешима и имеет тип A_3 . Поскольку G/P и P — разрешимые A_3 -группы, то группа G сама является разрешимой A_3 -группой. Итак, если все абелевы подгруппы локально нильпотентной группы G имеют тип A_3 , то G — разрешимая A_3 -группа.

Отметим еще одно следствие из теоремы 5.

С л е д с т в и е. Если все абелевы подгруппы локально нильпотентной группы G имеют тип A_4 , то G — нильпотентная группа.

Действительно, по условию все абелевы подгруппы периодической части P группы G конечны. Так как P , сверх того, нильпотентна, то P конечна. Но путем очевидных рассуждений легко устанавливается, что всякий отличный от единицы конечный нормальный делитель локально нильпотентной группы содержит по меньшей мере один отличный от единицы центральный элемент этой группы. Следовательно, если $1 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots$ — верхний центральный ряд группы G , то при некотором конечном t будем иметь $P \subset \subset G_m$, а так как фактор-группа G/P в силу теоремы 5 нильпотентна, то при некотором конечном n $G_n = G$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 6. Если каждое конечное множество элементов группы G лежит внутри некоторого нильпотентного нормального делителя G и все абелевы подгруппы группы G имеют тип A_3 , то G — нильпотентная A_3 -группа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Q — максимальный периодический нормальный делитель группы G . Обозначим через Q^∞ совокупность элементов Q , из которых можно извлекать корни любых степеней. Q^∞ — абелев нормальный делитель группы G , причем индекс Q^∞ в Q конечен. Отсюда следует, что все абелевы подгруппы фактор-группы G/Q^∞ имеют тип A и в силу отмеченного выше следствия из теоремы 5 эта фактор-группа нильпотентна. Группа Q^∞ есть прямое произведение конечного числа своих примарных подгрупп $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$, каждая из которых, в свою очередь, является прямым произведением конечного числа групп типа p^∞ .

Таким образом, нам достаточно доказать следующее утверждение: если любое конечное множество элементов группы G содержится в некотором нильпотентном нормальном делителе группы G и если G имеет нормальный делитель H , распадающийся в прямое произведение конечного числа подгрупп типа p^∞ , причем фактор-группа G/H нильпотентна, то G нильпотентна.

Рассмотрим сначала случай, когда H разлагается в прямое произведение конечного числа сомножителей типа p^∞ по одному и тому же простому числу p . Пусть a — произвольный элемент группы G . A — автоморфизм, вызывае-

мый в H преобразованием элементов H посредством a . Имеем $a^{-1}ha = hA$, $h \in H$, или $(h, a) = h^{-1}a^{-1}ha = h(A - E)$, где E — тождественный автоморфизм. По условию элемент a должен входить в некоторый нильпотентный нормальный делитель N группы G . Следовательно, $(h, a) \in N$, $h(A - E) \in N$. Но из нильпотентности N вытекает, что найдется положительное n , для которого при любом $\mathfrak{H}$ из N будет $((\dots ((f, a)a) \dots)a) = 1$ и, следовательно, для $f = (h, a)$ будет $h(A - E)^{n+1} = 0$, т. е. $(A - E)^{n+1} = 0$. Это означает, что все собственные значения матрицы преобразования A равны единице. Ставя каждому элементу a из G в соответствие индуцируемое им в H преобразование A , мы получим представление группы G .

Выбирая определенное разложение H в прямое произведение групп типа p^∞ , мы можем представить каждое преобразование A матрицей над полем p -адических чисел. Совокупность матриц, представляющих элементы группы G , будет также группой, причем все характеристические числа этих матриц равны единице. На основании § 1 заключаем, что все матрицы можно привести к совместной треугольной форме, откуда на основании леммы 4 вытекает, что в H существует система подгрупп $1 \subset H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_k = H$, инвариантных относительно преобразований A и таких, что группы вычетов H_{i+1}/H_i будут группами типа p^∞ . Следовательно, H_i являются нормальными делителями группы G . Поскольку характеристические числа преобразований A равны единице, то автоморфизмы, индуцируемые в фактор-группах H_{i+1}/H_i внутренними автоморфизмами G , являются тождественными. Это значит, что система подгрупп $1 \subset H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H$ образует возрастающий центральный ряд для G . Добавляя к нему подгруппы, образующие верхний центральный ряд для G/H , мы получим требуемый центральный ряд группы G , оканчивающийся самой группой G .

Доказательство утверждения в общем случае проводится индукцией по числу примарных сомножителей, на которые разлагается группа H . Пусть заданная группа G имеет нормальный делитель H , распадающийся на s примарных сомножителей, и пусть для нормальных делителей с меньшим числом сомножителей теорема доказана. Выбираем простое число p , которому отвечает неединичная примарная компонента Q_p . Произведение всех компонент, отвечающих остальным простым числам, будет некоторым нормальным делителем Q группы G . Фактор-группа G/Q имеет примарный нормальный делитель H/Q и удовлетворяет всем условиям доказываемого утверждения. Ввиду рассмотренного частного случая мы можем заключить, что G/Q нильпотентна. Мы видим: группа G имеет нормальный делитель Q с нильпотентной фактор-группой G/Q и удовлетворяет остальным требованиям утверждения. Поскольку Q имеет лишь $s - 1$ примарных множителей, то в силу индукции группа G будет нильпотентна.

Теорема 6 может быть применена к вопросу о существовании максимального нильпотентного нормального делителя. Хорошо известно, что произведение двух нильпотентных нормальных делителей какой-либо группы является нильпотентным нормальным делителем этой группы. Отсюда следует, что произведение всех нильпотентных нормальных делителей какой-либо группы обладает тем свойством, что любое конечное множество элементов этого произведения содержится в некотором его нильпотентном нормальном делителе. Если мы предположим, что все абелевы подгруппы заданной группы G имеют тип A_3 , то тем же свойством будет обладать и произведение нильпотентных нормальных делителей. Ввиду теоремы 6 отсюда следует нильпотентность указанного произведения, которое и будет, таким образом,

максимальным нильпотентным нормальным делителем группы G . Итак, если все абелевы подгруппы некоторой группы G имеют тип A_3 , то G обладает максимальным нильпотентным нормальным делителем.

В частности, если G — разрешимая A_3 -группа, то G содержит максимальный нильпотентный нормальный делитель N . Теорема 4 утверждает, что в G существует нормальный делитель H конечного индекса, коммутант которого H' нильпотентен. Поскольку H' — нильпотентный нормальный делитель группы G , то $H' \subset N$ и мы видим, что фактор-группа G/N является конечным расширением своей абелевой подгруппы. Аналогичным образом может быть рассмотрен и вопрос о существовании максимального разрешимого нормального делителя какой-либо группы.

Т е о р е м а 7. Если всякое конечное множество элементов группы G содержится в ее некотором разрешимом нормальном делителе и если все абелевы подгруппы группы G имеют тип A_3 , то группа G разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если длины рядов коммутантов разрешимых нормальных делителей G ограничены в совокупности, то в силу локального условия группа G будет разрешимой. Поэтому допустим, что G содержит последовательность возрастающих разрешимых нормальных делителей H_i , длины цепочек коммутантов которых растут. Рассмотрим группу $H = \bigcup H_i$. Ее абелевы подгруппы имеют тип A_3 . Поэтому H содержит максимальный нильпотентный нормальный делитель N , который на основании теоремы 6 имеет тип A_3 . Пусть $1 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_s = N$ — возрастающий центральный ряд группы N , образованный ее характеристическими подгруппами и такой, что все фактор-группы N_{i+1}/N_i являются либо абелевыми группами конечного ранга без кручения, либо прямыми произведениями конечного числа групп типа p^∞ , либо конечными абелевыми группами. Внутренний автоморфизм группы H , производимый ее произвольным элементом a , индуцирует некоторый автоморфизм θ_i в каждой фактор-группе N_{i+1}/N_i . Выбирая в N_{i+1}/N_i надлежащую базу, мы сможем автоморфизм θ_i представить матрицей над подходящим полем. Поскольку характеристика полей равна нулю, то эти поля можно считать подполями одного и того же поля. Ставя элементу a в соответствие прямую сумму матриц θ_i , мы получим гомоморфное отображение группы H в группу матриц. Обозначим ядро этого отображения через R . Фактор-группа H/R локально разрешима и представима изоморфно матрицами. Но из теоремы 1 следует, что всякая локально разрешимая группа матриц является разрешимой. Поэтому H/R разрешима. Если мы покажем, что $R \subset N$, то все будет доказано, так как из нильпотентности N и разрешимости H/N вытекает разрешимость H .

Пусть $NR \neq N$; тогда для некоторого m будем иметь $NR \cap NH_m \neq N$. Обозначим $NR \cap NH_m$ через D ; D является разрешимым нормальным делителем H , поэтому для одного из его последовательных коммутантов $D^{(i)}$ будем иметь $D^{(i)} \subset N$, $D^{(i-1)}N \neq N$. $D^{(i-1)}N$ является нормальным делителем группы H , большим чем N . Цепочка $D^{(i-1)}N \supset N \supset N_{s-1} \supset \dots \supset N_1 \supset 1$ есть убывающий центральный ряд для $D^{(i-1)}N$, и мы приходим к заключению, что N не является максимальным нильпотентным нормальным делителем в H . Теорема 7 доказана.

Из нее, как и выше, получаем.

С л е д с т в и е. Если все абелевы подгруппы некоторой группы имеют тип A_3 , то G обладает максимальным разрешимым нормальным делителем.

В самом деле, обозначим через R произведение всех разрешимых нормальных делителей G . Так как произведение конечного числа разрешимых нор-

мальных делителей есть разрешимый нормальный делитель, то любое конечное число элементов R содержится внутри некоторого разрешимого нормального делителя R . Сверх того, все абелевы подгруппы в R имеют тип A_3 . В силу теоремы 7 подгруппа R будет разрешимой и, следовательно, она является максимальным разрешимым нормальным делителем в G .

В заключение докажем еще следующее предложение:

Т е о р е м а 8. *Если все абелевы подгруппы разрешимой группы G имеют тип A_5 , т. е. имеют конечное число образующих, то группа G сама имеет тип A_5 .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводим индукцию по длине цепочки коммутантов. Пусть $(n+1)$ -й коммутант $G^{(n+1)}$ заданной группы равен единице, и пусть для групп, у которых n -й коммутант обращается в единицу, теорема справедлива. По условию теоремы $G^{(n)}$ — абелева группа с конечным числом образующих. Обозначим через H централизатор $G^{(n)}$ в G . H изоморфна некоторой подгруппе группы автоморфизмов $G^{(n)}$ и в силу теоремы 2 является A_5 -группой. Как уже упомянуто, нормальный делитель $G^{(n)}$ также является A_5 -группой. Следовательно, если нам удастся обнаружить, что A_5 -группой является и фактор-группа $H/G^{(n)}$, то теорема будет доказана. Пусть $A/G^{(n)}$ — какая-либо абелева подгруппа группы $H/G^{(n)}$. Рассмотрим произвольную максимальную абелеву подгруппу B группы A . Так как $G^{(n)}$ лежит в центре A , то $B \supset G^{(n)}$ и B — нормальный делитель в A . Ввиду максимальнойности B централизатор B в A совпадает с B и фактор-группа A/B изоморфна некоторой подгруппе группы автоморфизмов B , и, значит, A/B имеет конечное число образующих. Но фактор-группа $B/G^{(n)}$ также имеет конечное число образующих. Следовательно, произвольная абелева подгруппа $A/G^{(n)}$ группы $H/G^{(n)}$ имеет конечное число образующих. Так как n -й коммутант у $H/G^{(n)}$ обращается в единицу, то по индуктивному предположению $H/G^{(n)}$ есть A_5 -группа, что и требовалось.

§ 4. Периодические подгруппы A_4 -групп

Вопрос об исследовании периодических подгрупп разрешимых A_4 -групп приводится ввиду теоремы 3 к исследованию, с одной стороны, подгрупп периодических разрешимых групп, а с другой — к исследованию периодических и, следовательно, конечных подгрупп разрешимых A_4 -групп. Легко видеть, что ни максимальные периодические подгруппы разрешимых A_4 -групп, ни их силовские подгруппы в общем случае не будут сопряженными. Например, группа с образующими a, b, c и определяющими соотношениями $a^4 = 1$, $a^{-1}ba = c$, $a^{-1}ca = b^{-1}$, $bc = cb$ имеет два класса сопряженных силовских подгрупп 4-го порядка и один класс силовских подгрупп 2-го порядка. Это положение характерно и для общего случая.

Т е о р е м а 9. *Периодические подгруппы разрешимой A_4 -группы распадутся в конечное число классов сопряженных подгрупп.*

В основе доказательства лежит следующая общеизвестная лемма, доказательство которой для полноты здесь также приводится. Условимся говорить, что в аддитивно записываемой абелевой группе A о п р е д е л е н о с р е д н е е п о г р у п п е G , если каждой функции $a(g)$, определенной на G , со значениями в A поставлен в соответствие некоторый элемент $\int a(g)dg$ из A , обладающий свойствами:

$$1) \int [a(g) + b(g)] dg = \int a(g) dg + \int b(g) dg;$$

$$2) \int [a(g)] L dg = \left(\int a(g) dg \right) L, \text{ где } L — \text{автоморфизм } A;$$

$$3) \int a(gxh) dx = \int a(x) dx;$$

$$4) \int a(x) dx = a, \text{ если } a(x) = a.$$

Л е м м а 6. Если группа G содержит разрешимый нормальный делитель R , обладающий разрешимой цепочкой нормальных делителей $R \supset R_1 \supset \dots \supset R_s \supset 1$ группы G , для всех фактор-групп R_i/R_{i+1} которой определены средние по группе G/R , то G содержит дополнительную подгруппу H со свойствами $H \cap R = 1$, $HR = G$ и все дополнительные подгруппы, обладающие этими свойствами, сопряжены в G .

Рассмотрим сначала случай, когда нормальный делитель R — абелев и в нем определено среднее по G/R . Выберем в каждом смежном классе $\alpha \in G/R$ по представителю g_α . Пусть, как обычно, $g_\alpha g_\beta = g_{\alpha\beta} r(\alpha, \beta)$. Условия $g_\alpha \cdot g_\beta g_\gamma = g_\alpha g_\beta \cdot g_\gamma$ дают

$$r(\alpha, \beta\gamma) + r(\beta, \gamma) = r(\alpha\beta, \gamma) + r(\alpha, \beta) A_\gamma, \quad (2)$$

где A_γ — автоморфизм, вызываемый в R элементом g_γ . Осредняя (2) по α и полагая $\int r(\alpha, \beta) d\alpha = -r(\beta)$, имеем

$$-r(\beta\gamma) + r(\beta, \gamma) = -r(\gamma) - r(\beta) A_\gamma. \quad (3)$$

Пусть $h_\alpha = g_\alpha r(\alpha)$, тогда

$$h_\beta h_\gamma = g_\beta g_\gamma \cdot g_\gamma^{-1} r(\beta) g_\gamma \cdot r(\gamma) = h_{\beta\gamma} r^{-1}(\beta\gamma) r(\alpha, \gamma) \cdot r(\beta) A_\gamma \cdot r(\gamma),$$

т. е. ввиду соотношения (3) $h_\beta h_\gamma = h_{\beta\gamma}$. Это показывает, что элементы вида h_α образуют подгруппу H в G , причем $H \cap R = 1$, $HR = G$.

Докажем теперь сопряженность дополнительных подгрупп. Пусть

$$G = HR = KR, \quad h = k_h r_h \quad (h \in H, k_h \in K, r_h \in R),$$

где H и K — дополнительные подгруппы. Так как H и K — группы, то

$$ab = k_a b r_{ab} = k_a k_b \cdot r_a^{k_b} r_b \quad (a, b \in H), \quad r_{ab} = r_a A_{k_b} + r_b.$$

Осредняя по a , получим $r = r A_{k_b} + r_b$, где $r = \int r_a da$. Отсюда

$$r h r^{-1} = r k_h r_h r^{-1} = k_h (r A_{k_h} + r_h - r) = k_h, \quad r H r^{-1} = K.$$

Доказательство леммы для случая, когда нормальный делитель R содержит разрешимую цепочку $R \supset R_1 \supset \dots \supset R_s \supset 1$, проводится индукцией по длине s этой цепочки. В самом деле, пусть для групп с длиной цепочки $s-1$ лемма справедлива. Фактор-группа G/R_s имеет нормальный делитель R/R_s с цепочкой длины $s-1$. Поэтому в G/R_s найдется дополнительная подгруппа H_1/R_s . Группа H_1 содержит абелев нормальный делитель R_s с определенным в нем средним по H_1/R_s . Согласно разобранным выше случаю в H_1 найдется дополнительная подгруппа H , которая и будет искомой дополнительной подгруппой в G . Аналогично доказывается и сопряженность дополнительных подгрупп.

Далее нам потребуется такое

С л е д с т в и е. Если группа G содержит полный нильпотентный нормальный делитель R без элементов конечного порядка с конечной фактор-группой G/R , то всякая конечная подгруппа из G содержится в конечной подгруппе, изоморфной G/R , причем все конечные подгруппы группы G , изоморфные G/R , сопряжены в G .

Действительно, фактор-группы верхнего центрального ряда для R будут полными абелевыми группами без кручения. В качестве среднего некоторой функции $a(\alpha)$, определенной на G/R , со значениями в полной абелевой группе без кручения, можно взять выражение $\frac{1}{n} \sum_{\alpha} a(\alpha)$, где n — число эле-

ментов G/R . Согласно лемме 6 отсюда следует, что в группе G есть подгруппа H , изоморфная G/R , и что все подгруппы, изоморфные G/R , сопряжены в G . Пусть B — какая-либо конечная подгруппа в G . Тогда для каждого ее элемента b в H найдется элемент h_b , для которого $b = h_b r_b$ ($r_b \in R$). Совокупность всех h_b образует подгруппу H_1 группы H . Так как H_1 и B — конечные подгруппы группы BR , изоморфные BR/R , то по доказанному $B = r^{-1} H_1 r$, где $r \in R$. Отсюда видно, что B содержится в подгруппе $r^{-1} H r$, которая изоморфна H .

Указанное следствие можно обобщить:

Пусть группа G содержит полный локально нильпотентный нормальный делитель R без кручения, фактор-группа по которому локально конечна и счетна. Тогда всякая локально конечная подгруппа группы G содержится в некоторой дополнительной подгруппе H со свойствами $H \cap R = 1$, $HR = G$. Если фактор-группа G/R конечна, то дополнительные подгруппы сопряжены в G .

Пусть $b_1, \dots, b_n$ — элементы группы G , образы которых в G/R составляют подгруппу этой фактор-группы. Обозначим через B подгруппу группы G , порожденную элементами b_i . Пересечение $B \cap R = R_1$ является нормальным делителем конечного индекса в B и, значит, имеет, так же как и B , конечное число образующих. Поскольку группа R локально нильпотентна, то R_1 — нильпотентный нормальный делитель B . Обозначим через R_1^* пополнение R_1 в R . Согласно [8] R_1^* является нормальным делителем в группе BR , причем индекс R_1^* в BR_1^* конечен. Следствие из леммы 7 показывает, что в BR_1^* существует конечная подгруппа, образ которой в G/R совпадает с образом B . Из этого же следствия видно, что все конечные подгруппы из G , имеющие одинаковые образы в G/R , сопряжены в G . Если G/R конечна, то все доказано. Если же G/R бесконечна, то ее можно представить в виде суммы возрастающей цепочки конечных подгрупп $\bar{G}_1 \subset \bar{G}_2 \subset \dots$. Как было доказано, в G найдутся конечные подгруппы G_i , образы которых в G/R совпадают с соответствующими подгруппами $\bar{G}_i$. Ввиду сопряженности конечных подгрупп с совпадающими образами подгруппы G_i можно выбрать так, чтобы они составляли возрастающую цепочку. Объединение всех G_i и даст искомую дополнительную подгруппу в G .

Перейдем теперь к доказательству теоремы 9.

А) Пусть группа G содержит абелев нормальный делитель R конечного ранга без кручения и конечную подгруппу H , изоморфную фактор-группе G/R . Мы предположим, кроме того, что R не содержит центральных элементов группы G . Группу R мы будем записывать аддитивно. Элементы G можно представить парами (h, r) , $h \in H$, $r \in R$, с законом умножения

$$(h_1, r_1)(h_2, r_2) = (h_1 h_2, r_1 A_{h_2} + r_2), \quad (4)$$

где A_{h_2} — автоморфизм, индуцированный в R элементом h_2 . Пополним R до абелевой группы с делением R^* . Автоморфизмы R однозначно продолжаются в автоморфизмы R^* , и мы можем рассматривать группу G как подгруппу группы G^* пар (h, r) , $h \in H, r \in R^*$, закон умножения которых дается формулой (4). Пусть $B = \{b_1, \dots, b_s\}$ — конечная подгруппа в G и $b_i = (a_i, r_i)$, $a_i \in H, r_i \in R$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Согласно следствию из леммы 6 B сопряжена при помощи некоторого элемента $x \in R^*$ с подгруппой A , образованной элементами $a_1, \dots, a_s$, т. е.

$$b_i = (1, x) (a_i, 0) (1, -x) = (a_i, x(A_i - E)), \quad (5)$$

причем

$$x(A_i - E) \in R. \quad (6)$$

Обозначим совокупность элементов x из R^* , удовлетворяющих условиям (6), через R_0^* . Все конечные подгруппы группы G , образ которых в G/R совпадает с A , получаются из A посредством преобразований A элементами совокупности R_0^* . Если r_1, r_2 — элементы R_0^* и $r_1 - r_2 \in R$, то подгруппы $r_1^{-1}Ar_1$ и $r_2^{-1}Ar_2$ будут сопряжены в G при помощи элемента $r_1 - r_2$. Следовательно, число несопряженных конечных подгрупп группы G , образ которых в G/R совпадает с A , не превосходит числа смежных классов R_0^* по R .

Остается показать, что число этих классов конечно. Группу R^* можно рассматривать как линейное пространство над полем рациональных чисел. Выбирая в нем координатную систему, мы заменим линейные преобразования A_i матрицами. Соответствие $a_i \rightarrow A_i$ дает представление конечной группы A . Это представление в поле комплексных чисел распадается на неприводимые части, среди которых единичное представление ввиду отсутствия в R центральных элементов группы G не встречается. Имеем $(A_i - E)(A_j - E) = (A_i A_j - E) - (A_i - E) - (A_j - E)$. Поэтому совокупность всевозможных линейных комбинаций разностей $A_i - E$ образует матричную гиперкомплексную систему. Эта система распадается на абсолютно неприводимые части, и среди них нулевых частей нет. Следовательно, рассматриваемая система содержит неособенные матрицы. Пусть $U = \sum m_i (A_i - E)$ — одна из таких матриц. Мы можем предполагать, что коэффициенты m_i — числа целые. Так как преобразования A_i суть автоморфизмы группы R , то U будет эндоморфизмом этой группы. Поскольку определитель U отличен от нуля, то преобразование U , рассматриваемое как преобразование пространства R^* , имеет обратное U^{-1} , причем $U^{-1} = \alpha_0 + \alpha_1 U + \dots + \alpha_{n-1} U^{n-1}$, где α_i — некоторые рациональные числа. Обозначая через N общий знаменатель этих чисел, мы получим $NU^{-1} = k_0 + k_1 U + \dots + k_{n-1} U^{n-1}$, где k_i — целые.

Пусть $x \in R_0^*$. Из (6) следует, что $xU = r \in R$. Но тогда $Nx = rNU^{-1} = k_0 r + \dots + k_{n-1} r U^{n-1}$, т. е. $Nx \in R$. Это показывает, что группа вычетов R_0^*/R — периодическая абелева группа конечного ранга, порядки элементов которой ограничены в совокупности. Следовательно, порядок R_0^*/R конечен, что и требовалось.

Мы предполагали, что нормальный делитель R не содержит центральных элементов G . От этого ограничения легко избавиться. Пусть Z — совокупность всех центральных элементов G , содержащихся в R . Фактор-группа G/Z содержит абелев нормальный делитель R/Z конечного ранга без кручения и конечную подгруппу AZ/Z , изоморфную G/R , причем ранг R/Z меньше

ранга R . Это позволяет вести доказательство индукцией по рангу R и считать, что конечные подгруппы из G/Z распадаются в конечное число классов сопряженных подгрупп. Но если конечные подгруппы A и B группы G сравнимы $\text{mod } Z$, то они совпадают. Поэтому число классов сопряженных конечных подгрупп в G не больше числа аналогичных классов в G/Z .

В) Допустим теперь, что группа G содержит абелев нормальный делитель R конечного ранга без кручения конечного индекса в G . Группу G мы можем считать расширением группы R при помощи конечной группы $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} = G/R$ с некоторой системой факторов $r(\alpha_i, \alpha_j)$ и автоморфизмов A_i . Включим R в полную группу R^* того же ранга. Автоморфизмы A_i однозначно продолжатся в автоморфизмы R^* . Пусть G^* — расширение R^* при помощи группы G/R с той же системой факторов $r(\alpha_i, \alpha_j)$ и продолженными автоморфизмами A_i . На основании следствия из леммы 6 группу G^* можно представить в виде произведения AR , где A — конечная подгруппа в G^* , изоморфная G^*/R^* . Первоначальную группу G можно рассматривать как подгруппу группы G^* . Если $a_1, \dots, a_s$ — элементы A , то при некоторых $r_i \in R^*$, $a_i r_i \in G$.

Обозначим через N натуральное число, для которого $Nr_i \in R$ ($i = 1, 2, \dots, s$), и пусть $R_0^* =$ совокупность тех элементов x из R^* , для которых $Nx \in R$. Очевидно, R_0^* — нормальный делитель в G^* и G содержится в AR_0^* . Индекс R в R_0^* , а следовательно, и индекс G в AR_0^* конечны. Согласно А) число классов сопряженных конечных подгрупп в группе AR_0^* конечно. Ввиду конечности индекса G в AR_0^* отсюда следует, что число классов сопряженных конечных подгрупп в группе G также конечно.

С) Рассмотрим общий случай. Пусть G — разрешимая A_4 -группа. Согласно теореме 3 G обладает убывающей цепочкой нормальных делителей $G \supset G_1 \supset \dots \supset G_s \supset 1$, все факторы которой — либо конечные группы, либо абелевы группы конечного ранга без кручения. Если $s = 0$, то утверждения доказываемой теоремы очевидны. Это позволяет применить индукцию по s и считать, что фактор-группа G/G_s обладает конечным числом классов сопряженных конечных подгрупп. Пусть группы A_i/G_s являются представителями всех этих классов и, таким образом, каждая конечная подгруппа группы G/G_s , с точностью до сопряженности, содержится в одной из групп A_i/G_s . Если группа G_i конечна, то все A_i также конечны и все доказано. Если же группа G_s бесконечна, то согласно В) в каждой из групп A_i содержится конечное число классов сопряженных конечных подгрупп, т. е. конечное число классов сопряженных конечных подгрупп содержит и G .

Теорема доказана. Из нее, в частности, вытекает, что во всякой разрешимой группе типа A_1 максимальные периодические подгруппы распадаются в конечное число классов сопряженных подгрупп.

Действительно, согласно теореме 3 каждая разрешимая A_1 -группа G обладает периодическим нормальным делителем P , фактор-группа по которому имеет тип A_1 . Этот нормальный делитель входит во все максимальные периодические подгруппы, и число классов сопряженных максимальных периодических подгрупп в G не может превосходить числа классов сопряженных конечных подгрупп в G/P .

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Д. Адо. Доказательство счетности локально конечной p -группы с условием минимальности для нормальных делителей.— Докл. АН СССР, 1947, 58, № 4, 523—524.
2. B. L. Van der Waerden. Gruppen von linearen Transformationen. Berlin, 1935.
3. K. A. Hirsch. On infinite soluble groups, I, II, III.— Proc. London Math. Soc., 1938, 44, 53—60, 336—344, 1946, 49, 184—194.
4. E. K. Kolchin. On certain concepts in the theory of algebraic matrices groups. Ann. Math., 1948, 49, 774—789.
5. А. Г. Курош, С. Н. Черников. Разрешимые и нильпотентные группы.— Успехи мат. наук, 1947, 2, № 3, 18—59.
6. А. И. Мальцев. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами.— Мат. сб., 1940, 8, № 3, 405—422.
7. А. И. Мальцев. О группах конечного ранга.— Мат. сб., 1948, 22, № 2, 351—352.
8. А. И. Мальцев. Нильпотентные группы без кручения.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, 13, № 3, 201—212.
9. А. И. Мальцев. О бесконечных разрешимых группах.— Докл. АН СССР, 1949, 67, № 1, 23—25.
10. X. X. Мухаммеджан. К теории бесконечных групп, обладающих возрастающим центральным рядом.— Докл. АН СССР, 1949, 65, № 3, 269—272.
11. Н. Н. Мягкова. О группах конечного ранга.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, 13, № 6, 495—512.
12. G. Zappa. Sui gruppi di Hirsch supersolubili I, II.— Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1941, 12, 1—11, 62—80.
13. С. Н. Черников. К теории специальных p -групп.— Докл. АН СССР, 1948, 63, № 1, 11—14.
14. С. Н. Черников. К теории локально разрешимых групп с условием минимальности для подгрупп.— Докл. АН СССР, 1949, 65, № 1, 21—24.
15. О. Ю. Шмидт. О бесконечных специальных группах.— Мат. сб., 1940, 8, № 3, 363—376.
16. О. Ю. Шмидт. Бесконечные разрешимые группы.— Мат. сб., 1945, 17, № 2, 145—162.
17. I. Schur. Über Gruppen periodischer linearer Substitutionen.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1911, 619—627.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППОИДЫ *



Множество элементов G называется группоидом, если каждой упорядоченной паре его элементов a, b поставлен в соответствие однозначно-определенный элемент $c \in G$, называемый произведением a на b и обозначаемый через ab . Группоид называется ассоциативным **, если $x(yz) = (xy)z$ для любых его элементов x, y, z . Ассоциативные группоиды называются также ассоциативными системами. Понятия подгруппоида, изоморфизма и гомоморфизма определяются обычным образом.

Однозначные отображения произвольного множества M в себя называются преобразованиями или подстановками элементов этого множества. Если A — какое-либо преобразование множества M и $m \in M$, то через mA далее обозначается образ элемента m при отображении A . Произведение преобразований A, B множества M определяется, как обычно, формулой $m(AB) = (mA)B$. Умножение преобразований ассоциативно, поэтому совокупность всех преобразований множества M является ассоциативным группоидом, который далее будет называться симметрическим группоидом и обозначаться через S_M .

Помимо очевидной важности симметрических группоидов для теории преобразований значение их в общей теории определяется тем фактом, что всякий ассоциативный группоид изоморфен подгруппоиду подходящего симметрического группоида.

В настоящей работе рассматриваются простейшие свойства симметрических группоидов как конечных, так и бесконечных. В § 1 дается абстрактная характеристика симметрических группоидов, из которой в качестве следствия выводится известный факт, что всякий автоморфизм симметрического группоида является внутренним. В § 2 находятся все фактор-группоиды симметрических группоидов.

Как известно, фактор-группоиды не могут быть охарактеризованы системами элементов группоида, напоминающими нормальные делители в группах. Только простейшие фактор-группоиды определяются при помощи идеалов и нормальных подгруппоидов, являющихся полными прообразами нуля и соответственно единицы (см. [1]). В заметке Н. Н. Воробьева [2] были найдены все нормальные подсистемы конечного симметрического группоида S_M . Они оказались совпадающими с нормальными делителями симметрической группы преобразований множества M . Однако общая задача нахождения всех фактор-группоидов симметрических группоидов, по-видимому, до сих пор оставалась нерассмотренной. Поскольку каждый фактор-группоид однозначно определяется соответствующим отношением эквивалентности, согласованным с операцией умножения, то задача состоит в определении всех таких отношений на симметрическом группоиде. Перечисление этих отношений

* Мат. сб., 1952, 31, № 1, 136—151.

** В современной литературе ассоциативные группоиды называют полугруппами.—
Прим. ред.

и дается теоремой § 2 настоящей работы. Оказалось, что, кроме нормальных делителей симметрической группы преобразований той же степени, что и заданный группоид, необходимо принимать во внимание и нормальные делители симметрических групп низших степеней, а для бесконечных группоидов, кроме того, еще рассматривать суммы произведений нормальных и идеальных отношений эквивалентности.

§ 1. Правые нули и автоморфизмы

Элементы e и 0 называются единицей и нулем группоида G , если $ex = xe = x$, $x0 = 0x = 0$ для всех x из G . Правым нулем группоида G называется элемент n , удовлетворяющий при любом $x \in G$ соотношению $xn = n$. Группоид, состоящий из одних правых нулей, очевидно, ассоциативен и с точностью до изоморфизма определяется числом своих элементов.

Т е о р е м а. Пусть G — произвольный ассоциативный группоид и N — совокупность всех его правых нулей. Для того чтобы G был изоморфным симметрическому группоиду, необходимо и достаточно, чтобы

1) из справедливости соотношения $na = nb$ для всех правых нулей $n \in N$ следовало $a = b$;

2) для каждого однозначного отображения U множества правых нулей N в себя существовал в G элемент u со свойством

$$nU = nu$$

для всех n из N .

Н е о б х о д и м о с т ь. Правые нули симметрического группоида C_M являются преобразованиями, отображающими все элементы множества M в какой-либо один элемент этого множества. Действительно, пусть P_a обозначает преобразование, переводящее все элементы M в $a \in M$, и пусть B — произвольный правый нуль в C_M . Тогда для произвольного t из M и произвольного фиксированного $c \in M$ имеем

$$tB = tP_c B = cB = tP_{cB},$$

т. е. $B = P_{cB}$. Обратно, всякое преобразование P_c является правым нулем в C_M , поскольку $t(P_c) = (tB)P_c = c = tP_c$ ($B \in C_M$).

Свойство 1) в симметрическом группоиде выполняется, так как если $P_a A = P_a B$ для всех правых нулей P_a , то при любом $t \in M$ имеем $tP_a A = tP_a B$, $aA = aB$, откуда $A = B$.

Пусть теперь задано какое-нибудь однозначное отображение U совокупности правых нулей из C_M в себя. Правые нули группоида C_M взаимно однозначно соответствуют элементам множества M . Поэтому преобразование U множества нулей определяет некоторое преобразование A в M , подчиняющееся соотношению $P_m U = P_{mA}$ ($m \in M$), откуда

$$a \cdot P_m A = mA = aP_{mA} = a \cdot P_m U,$$

т. е. $P_m U = P_{mA}$. Следовательно, симметрические группоиды обладают свойством 2).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть G — ассоциативный группоид, обладающий свойствами 1) и 2). Если n — правый нуль и a — произвольный элемент из G , то na будет снова правым нулем G . Поэтому умножение правых нулей на произвольный фиксированный элемент a из G вызывает в множестве пра-

вых нулей вполне определенное преобразование A_a ($nA_a = na$). Отображение $a \rightarrow A_a$ является гомоморфизмом группоида G в симметрический группоид C_N всех преобразований множества N правых нулей G . Условие 2) показывает, что это отображение является отображением G на C_N , а из условия 1) следует, что различные элементы G вызывают в N различные преобразования. Следовательно, группоид G изоморфен C_N .

Изоморфное отображение какого-либо группоида на себя называется а в т о м о р ф и з м о м. Отображение вида $x \rightarrow a^{-1}xa$, где a — фиксированный обратимый элемент ассоциативного группоида G с единицей, называется в н у т р е н н и м а в т о м о р ф и з м о м, производимым в G элементом a .

В качестве следствия докажем, что все автоморфизмы симметрического группоида являются внутренними (см. [4]).

Пусть N — совокупность всех правых нулей симметрического группоида G . Любой автоморфизм A группоида G правые нули G переводит снова в правые нули G и вызывает, таким образом, некоторое обратимое преобразование в множестве N . Согласно теореме в G найдутся элементы a, b , удовлетворяющие для всех правых нулей n соотношениям

$$nA = na, \quad nA^{-1} = nb.$$

Отсюда имеем:

$$n \cdot a (bA) = nA \cdot bA = (nb)A = n, \quad nA \cdot (bA \cdot a) = nA,$$

т. е. $a \cdot bA = bA \cdot a = e$, $bA = a^{-1}$. Так как при произвольном n произведение $ng \in G$ есть правый нуль, то

$$nA \cdot gA = (ng)A = nga = na \cdot a^{-1}ga.$$

Принимая во внимание произвольность nA и свойство 1), указанное в условии теоремы, отсюда получаем $gA = a^{-1}ga$, что и требовалось.

Р а н г о м о т о б р а ж е н и я A множества M на свою часть M_1 условимся называть мощность множества M_1 . Так как произведение двух преобразований ранга, не превосходящего ξ , является преобразованием ранга не выше ξ , то совокупность всех преобразований множества M , имеющих ранг, меньший ξ , является подгруппоидом C_M^ξ симметрического группоида C_M . Правые нули группоида C_M^ξ совпадают с правыми нулями C_M . Поэтому если в теореме произвольное отображение U заменить отображением ранга не выше ξ , то получится характеристика группоида C_M^ξ .

Аналогичное замечание можно сделать и по поводу следствия теоремы. В этом следствии утверждается по существу, что каждое взаимно однозначное отображение множества правых нулей C_M на себя однозначно продолжается до автоморфизма C_M . Поскольку множество правых нулей у группоидов C_M и C_M^ξ — одно и то же, то можно утверждать в силу свойства 1), что каждое взаимно однозначное отображение совокупности правых нулей группоида C_M^ξ на себя одним и только одним способом продолжаемо до автоморфизма этого группоида. Таким образом, группа автоморфизмов всех подгруппоидов C_M^ξ — одна и та же, т. е. изоморфна группе всех перестановок элементов C_M^2 .

§ 2. Гомоморфизмы симметрических группоидов

Нахождение всех фактор-группоидов данного группоида G равносильно нахождению всех отношений эквивалентности между элементами G , согласованных с основной операцией группоида $*$, т. е. обладающих следующими свойствами: для всех a, b, c, d из G 1) $a \sim a$, 2) из $a \sim b$ следует $b \sim a$, 3) из $a \sim b, b \sim c$ следует $a \sim c$, 4) из $a \sim b$ следует $ad \sim bd, da \sim db$.

Совокупность элементов I группоида G называется идеалом в G , если из $a \in I, x \in G$ вытекает $ax \in I, xa \in I$. Элементы a, b группоида G называются сравнимыми по идеалу I , если они или одинаковы, или оба входят в I . Ясно, что сравнения по идеалу являются отношениями эквивалентности на G . Соответствующий фактор-группоид G/I получается из G путем выбрасывания всех элементов идеала I и замены их нулевым элементом. Если элементы G удовлетворяют некоторому тождественному соотношению, то такому же тождественному соотношению удовлетворяют и элементы фактор-группоида G/I . Поэтому если группоид G ассоциативен, то G/I будет также ассоциативным.

В общем случае идеальные фактор-группоиды представляют собой весьма частный случай фактор-группоидов. Однако для нахождения всех фактор-группоидов симметрического группоида идеальные фактор-группоиды имеют существенное значение.

Л е м м а 1. Все идеалы симметрического группоида S_M исчерпываются подгруппоидами вида S_M^{ξ} **.

Поскольку произведение любого преобразования множества M на преобразование ранга, меньшего ξ , является преобразованием ранга, меньшего ξ , то все подгруппоиды S_M^{ξ} являются идеалами в S_M . Остается показать, что если какой-либо идеал I группоида S_M содержит преобразование A ранга ξ , то I содержит все преобразования, ранг которых не превосходит ξ .

Пусть B — произвольное преобразование множества M ранга ξ . Занумеруем элементы множества MA и MB одними и теми же вспомогательными индексами $\alpha, \beta, \dots$, и пусть M_{λ} обозначает совокупность элементов из M , отображающихся подстановкой B в $b_{\lambda} \in MB$ ($\lambda = \alpha, \beta, \dots$). Выберем произвольные элементы $a'_{\lambda} \in M$, отображающиеся подстановкой A соответственно в $a_{\lambda} \in MA$. Теперь легко видеть, что, умножая подстановку A справа на подстановку, переводящую элементы a_{λ} в соответственные элементы b_{λ} , и слева на подстановку, переводящую совокупности M_{λ} соответственно в элементы a'_{λ} ($\lambda = \alpha, \beta, \dots$), мы получим подстановку B . Так как $A \in I$, то, следовательно, $B \in I$. Если ранг подстановки B меньше ξ , то, умножая A на подходящую подстановку справа, мы получим подстановку из идеала I того же ранга, что и B . Повторяя предшествующие рассуждения, получим, что $B \in I$, а это и требовалось.

Совокупность всех элементов множества M , отображающихся подстановкой A в один и тот же элемент $a \in M$, назовем смежным классом относительно A . Очевидно, различные смежные классы общих элементов не имеют и совокупность их представляет собой некоторое разбиение основного множества M .

Пусть n — конечное натуральное число, не превосходящее числа элементов множества M . Обозначим через $\mathfrak{N}_n$ один из нормальных делителей сим-

* Такие отношения обычно называют конгруэнциями. — *Прим. ред.*

** Мне стало известно, что аналогичное предложение доказано (Н. Н. Воробьев. Докл. АН СССР, 1952, 85, 641—644).

метрической группы перестановок чисел $1, 2, \dots, n$; при $n > 4$ $\mathfrak{N}_n$ — либо сама симметрическая группа, либо совокупность всех четных перестановок, либо единичная перестановка. Преобразования A, B множества M условимся называть с р а в н и м ы м и по $\mathfrak{N}_n$, символически $A \equiv B \pmod{\mathfrak{N}_n}$, если выполняется одно из следующих условий:

- а) A и B равны;
- б) A и B имеют ранги, меньшие n ;
- в) ранги A и B равны n ; $MA = MB$; смежные классы относительно A и относительно B — те же самые, причем если произвольным образом занумеровать эти смежные классы числами $1, 2, \dots, n$ и записать подстановки A, B в виде

$$A = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_n} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где M_i — соответствующие смежные классы, то перестановка $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ принадлежит $\mathfrak{N}_n$.

При изменении нумерации смежных классов перестановка P заменяется сопряженной. Поэтому в условии в) вместо принадлежности P к $\mathfrak{N}_n$ при любой нумерации смежных классов достаточно требовать принадлежности P к $\mathfrak{N}_n$ хотя бы при одной нумерации.

Сравнения по нормальным делителям $\mathfrak{N}_n$ являются отношениями эквивалентности на симметрическом группоиде C_M , согласованными с операцией умножения.

Рефлексивность, симметричность и транзитивность сравнений по $\mathfrak{N}_n$ непосредственно следуют из того, что $\mathfrak{N}_n$ — группа. Поэтому достаточно рассмотреть лишь возможность умножения сравнений на произвольную подстановку D из C_M . Пусть $A \equiv B \pmod{\mathfrak{N}_n}$. Если A, B удовлетворяют условию а) или б), то AD, BD и DA, DB удовлетворяют, очевидно, тому же условию; следовательно, в этом случае $AD \equiv BD, DA \equiv DB$. Предположим

теперь, что подстановки A, B имеют вид (1) и $D = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & \dots \\ d_1 & d_2 & & d_n & \dots \end{pmatrix}$. Тогда

$$AD = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix}, \quad BD = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_n \\ d_{i_1} & d_{i_2} & \dots & d_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Если среди элементов $d_1, \dots, d_n$ имеются одинаковые, то ранги AD и BD меньше n и $AD \equiv BD$. Если же все d_i различны, то AD и BD удовлетворяют всем условиям в). Для доказательства сравнения $DA \equiv DB$ обозначим через L_i совокупность элементов множества M , отображающихся подстановкой D в множество M_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Если какое-либо из множеств L_i пусто, то ранги DA и DB меньше n и, следовательно, $DA \equiv DB$. Если каждое из множеств L_i не пусто, то DA и DB удовлетворяют условию в) и, значит, снова $DA \equiv DB$.

Легко видеть, что определенные аналогичным образом сравнения по нормальным делителям бесконечных симметрических групп не выдерживают умножений и потому для построения фактор-группоидов не годятся. Вместо этого мы определим сравнения по $\mathfrak{N}_\xi$, где ξ — какое-либо бесконечное кардинальное число, особым образом, причем здесь $\mathfrak{N}_\xi$ не будет обозначать нормального делителя, а будет являться обозначением самой эквивалент-

ности. Именно, пусть A, B — данные преобразования множества M . Обозначим через M_0 совокупность тех элементов из M , для которых $tA \neq tB$. Условимся говорить, что подстановки A и B отличаются на ξ -местах, если ξ — наибольшая из мощностей множеств M_0A и M_0B . Ясно, что число мест различия подстановок A, B не может превосходить максимума рангов этих подстановок. Если подстановка A является единичной, то число мест различия A и B равно числу элементов множества M , передвигаемых подстановкой B . Преобразования A, B множества M будут называться с р а в н ы м и п о $\mathfrak{N}_\xi$, если число их мест различия меньше ξ .

Сравнения по $\mathfrak{N}_\xi$ являются на группоиде C_M эквивалентностями, согласованными с операцией умножения.

Докажем, например, что эти сравнения можно умножать справа на любое преобразование D . Действительно, соотношение $AD \not\equiv BD$ означает, что мощность одной из совокупностей M_0AD или M_0BD не меньше ξ , где M_0 состоит из тех элементов t , для которых $tAD \neq tBD$. Но в таком случае мощность соответствующей совокупности M_0A или M_0B будет также не меньше ξ и из $t \in M_0$ будет следовать $tA \neq tB$, т. е. $A \not\equiv B \pmod{\mathfrak{N}_\xi}$. Аналогичным образом доказываются и остальные свойства.

Как уже было отмечено, совокупность подстановок, ранг которых меньше заданного кардинального числа ξ , образует идеал в группоиде C_M . Этот идеал будет обозначаться через I_ξ . Если μ — мощность множества M , а ν — ближайшая большая мощность, то сравнения по идеалу I_ν и по $\mathfrak{N}_\nu$, очевидно, равносильны, так как и в том и в другом случае все подстановки из C_M эквивалентны друг другу. Сравнения по идеалам I_n конечного индекса n равносильны сравнениям по нормальному делителю $\mathfrak{N}_n$, состоящему из одной тождественной перестановки. В частности, сравнения по I_2 и по $\mathfrak{N}_2$ являются обыкновенными равенствами. При $\aleph_0 \leq \xi \leq \mu$ сравнения по идеалам I_ξ и по $\mathfrak{N}_\xi$ отличны друг от друга.

Отношение эквивалентности θ_1 называется с о д е р ж а щ и м о т н о ш е н и е θ_2 , символически $\theta_1 \geq \theta_2$, если из $x \equiv y \pmod{\theta_1}$ для любых x, y следует $x \equiv y \pmod{\theta_2}$. Суммой произвольной системы эквивалентностей $\{\theta_i\}$ называется эквивалентность θ , для которой $x \equiv y \pmod{\theta}$ тогда и только тогда, если $x \equiv y \pmod{\theta_i}$ для каждого θ_i из данной совокупности. Произведением эквивалентностей $\{\theta_i\}$ называется эквивалентность θ' , для которой $x \equiv y \pmod{\theta'}$ тогда и только тогда, если существует конечная цепочка элементов $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, удовлетворяющих сравнениям

$$x \equiv x_1 \pmod{\theta_{i_1}}, \quad x_1 \equiv x_2 \pmod{\theta_{i_2}}, \quad \dots, \quad x_{n-1} \equiv y \pmod{\theta_{i_n}},$$

где $\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \dots, \theta_{i_n}$ — некоторые эквивалентности из данной системы.

Обозначая символами $\mathfrak{N}_\xi, I_\xi$ сравнения по модулю $\mathfrak{N}_\xi$ и идеалу I_ξ , будем иметь, очевидно, $\mathfrak{N}_\xi \geq \mathfrak{N}_{\xi'}, I_\xi \geq I_{\xi'}, I_\xi > \mathfrak{N}_{\xi'} (\xi \leq \xi')$. Пусть

$$\aleph_0 \leq \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k \leq \eta_k < \eta_{k-1} < \dots < \eta_1 < \eta_0 \leq \nu. \quad (2)$$

Тогда эквивалентность θ , определяемая формулой

$$\theta = I_{\eta_0} + I_{\eta_1} \mathfrak{N}_{\xi_1} + I_{\eta_2} \mathfrak{N}_{\xi_2} + \dots + I_{\eta_k} \mathfrak{N}_{\xi_k},$$

имеет следующий смысл: $A \equiv B \pmod{\theta}$ тогда и только тогда, если выполняется одно из следующих условий: а) ранги A и B меньше η_k ; б) ранги A и B равны ρ , $\eta_{i+1} \leq \rho \leq \eta_i$ и число мест различия подстановок A и B меньше ξ_{i+1} ; в) $A = B$.

Т е о р е м а. Каждая эквивалентность на симметрическом группоиде C_M есть или сравнение по нормальному делителю $\mathfrak{R}_\xi$ конечного индекса ξ , или сравнение по одному из модулей вида $\theta = I_{n_0} + I_{n_1} \mathfrak{R}_{\xi_1} + \dots + I_{n_k} \mathfrak{R}_{\xi_k}$, где индексы подчинены условию (2). В частности, все эквивалентности на конечном симметрическом группоиде C_k исчерпываются сравнениями по нормальным делителям $\mathfrak{R}_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Доказательство этой теоремы имеет вычислительный характер, и его удобно разбить на ряд лемм. Под эквивалентностью в дальнейшем всюду понимается эквивалентность на группоиде C_M , согласованная с операцией умножения.

Л е м м а 2. При любой эквивалентности, отличной от равенства, все преобразования ранга 1 эквивалентны между собой. Если при некоторой эквивалентности преобразование ранга ρ эквивалентно преобразованию меньшего ранга, то все преобразования ранга, не превосходящего ρ , эквивалентны между собой.

Пусть A, B — два различных, но эквивалентных между собой преобразования из группоиде C_M . Выберем в M такой элемент m , для которого $mA \neq mB$, и обозначим через P_m преобразование ранга 1, переводящее все элементы M в m , а через D — преобразование, переводящее mA, mB соответственно в произвольные наперед заданные элементы a, b . Тогда $P_m AD \sim \sim P_m BD$, т. е. $P_a \sim P_b$ и первое утверждение доказано. Отсюда, в частности, видно, что совокупность подстановок, эквивалентных подстановкам ранга 1, образует идеал в C_M и, значит, в силу леммы 1, если какая-либо подстановка ранга ρ эквивалентна подстановке ранга 1, то все подстановки ранга не выше ρ эквивалентны между собой.

Доказательство второго утверждения леммы в случае бесконечного ρ очевидно. Действительно, обозначив через D преобразование, отображающее все элементы множества MB в какой-либо один элемент m и оставляющее все остальные элементы на месте, из $A \sim B$ получим $AD \sim BD$, т. е. $AD \sim \sim P_m$. Поскольку ранг AD остается равным ρ , а ранг P_m равен 1, то по сделанному замечанию все преобразования ранга, не превосходящего ρ , эквивалентны.

Пусть теперь ρ конечно. Переписав эквивалентность $A \sim B$ подробнее в виде

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_k & M_{k+1} & \dots & M_\rho \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k & c_1 & \dots & c_{\rho-k} \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_m & N_{m+1} & \dots & N_{\rho+m-k} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m & c_1 & \dots & c_{\rho-k} \end{pmatrix} = B, \end{aligned}$$

где $c_1, \dots, c_{\rho-k}$ — элементы, общие множествам MA, MB , и умножив ее справа на подстановку, переводящую $b_1, \dots, b_m$ в c_1 , а остальные элементы оставляющую на месте, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} N_{m+1} & N_{m+2} & \dots & N_{\rho+m-k} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{\rho-k} \end{pmatrix} = B_1. \quad (3)$$

Умножая далее (3) справа на подстановки D_i ($i = 1, 2, \dots, \rho - k$), переводящие $c_1, c_2, \dots, c_i$ в a_1 , а остальные элементы оставляющие на месте, получим цепочку эквивалентностей

$$A \sim B_1, A_1 \sim B_2, \dots, A_{\rho-k} \sim B_{\rho-k+1}.$$

Так как ранг A_{p-k} равен k , а ранг B_{p-k+1} есть 1, то все преобразования ранга k эквивалентны между собой. В частности, преобразование B_{p-k} ранга 2 будет эквивалентно B_{p-k+1} , а преобразование A_{p-k-1} ранга $k+1$, эквивалентное B_{p-k} , будет эквивалентно B_{p-k+1} . Продолжая этот процесс, мы видим, что A эквивалентно преобразованию ранга 1.

Л е м м а 3. Если преобразование A конечного ранга неэквивалентно преобразованиям ранга 1 и $A \sim B$, то $MA = MB$ и A, B производят одинаковые разбиения множества M .

Допустим сначала, что $MA \neq MB$. Тогда, умножая A и B справа на преобразование D , отображающее какие-либо два элемента $m_1 \in MB$, $m_2 \in MB$, $m_2 \in MA$ в m_1 , а остальные элементы оставляющее на месте, мы получим эквивалентность $A \sim BD$, где ранг BD меньше ранга A , что в силу леммы 1 влечет за собой эквивалентность A преобразованиям ранга 1. Пусть теперь $MA = MB$ и

$$A = \begin{pmatrix} M_1 & \dots & M_p \\ a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} N_1 & \dots & N_p \\ a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix} = B. \quad (4)$$

Если разбиения $M_1, \dots, M_p$ и $N_1, \dots, N_p$ различны, то найдутся элементы n_i, n_j , принадлежащие различным множествам N_i, N_j второго разбиения и принадлежащие одному и тому же множеству M_k первого разбиения. Выбирая в остальных множествах второго разбиения по элементу $n_p \in N_p$, умножая эквивалентность (4) справа на подстановку, переводящую $a_1, \dots, a_p$ соответственно в $n_1, \dots, n_p$, и возводя в квадрат обе части новой эквивалентности, мы получим, что подстановка ранга p будет эквивалентна подстановке меньшего ранга, что противоречит условию леммы.

Л е м м а 4. Если преобразование A конечного ранга p неэквивалентно преобразованиям ранга 1 и $A \sim B$, $A \neq B$, то рассматриваемая эквивалентность является сравнением по одному из нормальных делителей $\mathfrak{P}_p$.

Докажем сначала, что все подстановки ранга, меньшего p , эквивалентны между собой. Согласно лемме 3 эквивалентность $A \sim B$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_p \\ a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} M_{i_1} & M_{i_2} & \dots & M_{i_p} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В случае, когда $p = 2$, утверждение содержится в лемме 2. Если же $p > 2$, то найдется такая пара индексов k, j , что $\{k, j\} \neq \{i_k, i_j\}$, откуда $M_k + M_j \neq M_{i_k} + M_{i_j}$. Умножая обе части (5) справа на подстановку, переводящую a_k, a_j в a_k и оставляющую остальные элементы на месте, получим эквивалентность между подстановками ранга $p-1$, осуществляющими различные разбиения множества M . В силу леммы 3 отсюда следует, что все подстановки ранга не выше $p-1$ эквивалентны друг другу.

В условиях леммы 4 подстановки ранга, большего p , эквивалентны только тогда, если они равны. Действительно, в противном случае по доказанному все подстановки ранга, меньшего $p+1$, в том числе и подстановки A, B , были бы эквивалентны подстановкам ранга 1.

Пусть теперь $M = M_1 + \dots + M_p$ — какое-либо разбиение множества M на p непустых взаимно не налегающих классов. Рассмотрим какую-либо упорядоченную пару преобразований A, B , принадлежащих указанному разбиению. Эти преобразования можно записать в виде

$$A = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_p \\ a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_p \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_p} \end{pmatrix}.$$

Перестановка, переводящая $1, 2, \dots, \rho$ соответственно в $i_1, i_2, \dots, i_\rho$, была названа выше отвечающей паре A, B . Обозначим через $\mathfrak{R}_\rho$ совокупность перестановок, отвечающих всевозможным эквивалентным парам A, B . $\mathfrak{R}_\rho$ содержит единичную подстановку, так как она отвечает эквивалентности $A \sim A$. Далее, пусть α, β — подстановки, отвечающие эквивалентностям

$$\begin{pmatrix} M_1 & \dots & M_\rho \\ a_1 & \dots & a_\rho \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} M_1 & \dots & M_\rho \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_\rho} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} M_1 & \dots & M_\rho \\ b_1 & \dots & b_\rho \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} M_1 & \dots & M_\rho \\ b_{j_1} & \dots & b_{j_\rho} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Умножая вторую из них на преобразование, переводящее элементы $b_1, \dots, b_\rho$ соответственно в $a_1, \dots, a_\rho$, и сравнивая результат с первой эквивалентностью, получим эквивалентность

$$\begin{pmatrix} M_1 & \dots & M_\rho \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_\rho} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} M_1 & \dots & M_\rho \\ a_{j_1} & \dots & a_{j_\rho} \end{pmatrix},$$

отвечающую подстановке $\beta\alpha^{-1}$. Наконец, умножая первую из эквивалентностей (6) слева на преобразование, переводящее $M_1, \dots, M_\rho$ соответственно в $m_{j_1}, \dots, m_{j_\rho}$ ($m_k \in M_k$), мы получим эквивалентную пару, отвечающую подстановке $\beta\alpha\beta^{-1}$. Таким образом, $\mathfrak{R}_\rho$ является нормальным делителем симметрической группы перестановок множества чисел $1, 2, \dots, \rho$.

Нам остается доказать, что два преобразования ранга ρ , производящие одно и то же разбиение множества M и, следовательно, имеющие вид

$$A = \begin{pmatrix} N_1 & \dots & N_\rho \\ a_1 & \dots & a_\rho \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} N_1 & \dots & N_\rho \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_\rho} \end{pmatrix} = B,$$

тогда и только тогда эквивалентны, если перестановка $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho \\ i_1 & i_2 & \dots & i_\rho \end{pmatrix}$ принадлежит $\mathfrak{R}_\rho$. Если $A \sim B$, то, умножая эту эквивалентность слева на подстановку, переводящую $M_1, \dots, M_\rho$ соответственно в элементы $n_1, \dots, n_\rho$ ($n_k \in N_k$), мы получим эквивалентность, отвечающую разбиению $M_1, \dots, M_\rho$ и соответствующую перестановке α , откуда $\alpha \in \mathfrak{R}_\rho$. Обратно, если $\alpha \in \mathfrak{R}_\rho$, то, беря эквивалентность, отвечающую разбиению $M_1, \dots, M_\rho$ и соответствующую перестановке α , и умножая ее слева на надлежащую подстановку, получим эквивалентность $A \sim B$. Тем самым лемма 4, а вместе с нею и теорема для конечных группоидов доказаны. Поэтому в дальнейшем предполагается, что основное множество M бесконечно.

Л е м м а 5. Если эквивалентные подстановки A, B бесконечного ранга ρ отличаются на множестве мест, имеющем бесконечную мощность ξ , то любые две подстановки одного и того же ранга, не превосходящего ρ , отличающиеся на множестве мест мощности не больше ξ , эквивалентны.

В условиях леммы подстановки A, B можно представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & R_1 & R_2 & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & c_1 & c_2 & \dots \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & R_1 & R_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & c_1 & c_2 & \dots \end{pmatrix},$$

где элементы нижних строк различны, а над ними выписаны их прообразы. Поскольку ξ бесконечно, то можно считать, что множества элементов $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ имеют мощность ξ , а множество элементов $\{c_i\}$ — либо пустое в случае $\xi = \rho$, либо мощности ρ , если $\xi < \rho$. Умножив эквивалентность $A \sim B$ справа на подстановку, переводящую элементы $c_1, c_2, \dots$ соответственно в $r_1, r_2, \dots$ ($r_i \in R_i$), а остальные элементы оставляющую на месте, получим

эквивалентность вида

$$\begin{pmatrix} P_1 P_2 \dots R_1 R_2 \dots \\ a_1 a_2 \dots r_1 r_2 \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} Q_1 Q_2 \dots R_1 R_2 \dots \\ b_1 b_2 \dots r_1 r_2 \dots \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Относя в случае необходимости ξ элементов из множества $\{r_i\}$ в множество $\{a_i\}$ и множество $\{b_i\}$, мы можем считать, что в записи (7) элементы a_i и b_i не входят в множество $R = R_1 + R_2 + \dots$. Пусть $M' = P_1 + P_2 + \dots$. Каждой подстановке A элементов множества M , $M'A \subset M'$, $R_i A = r_i$ ($i = 1, 2, \dots$) поставим в соответствие преобразование A' , индуцируемое в M' преобразованием A . Это соответствие взаимно однозначно и сохраняет операцию умножения. Поэтому в дальнейшем вместо преобразований A будут рассматриваться индуцированные преобразования A' . Итак, мы имеем два эквивалентных преобразования

$$\begin{pmatrix} P_1 P_2 \dots \\ a_1 a_2 \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} Q_1 Q_2 \dots \\ b_1 b_2 \dots \end{pmatrix} \quad (8)$$

ранга ξ множества M' , отличающиеся на множестве мест мощности ξ . Представим множества нижних элементов в виде

$$\{a_i\} = \{c_i\} + \{d_i\}, \quad \{b_i\} = \{c_i\} = \{e_i\},$$

где $\{c_i\} = \{a_i\} \cap \{b_i\}$. Если мощность множества $\{d_i\}$ равна ξ , то, умножая эквивалентность (8) справа на подстановку, переводящую все элементы b_i в элемент b_1 и оставляющую остальные элементы на месте, мы получим слева подстановку ранга ξ , а справа — подстановку ранга 1. В силу леммы 2 отсюда следует, что все подстановки ранга не выше ξ множества M' эквивалентны друг другу. То же самое справедливо, если ξ — мощность множества $\{e_i\}$. Докажем, что и в случае, когда мощности множеств $\{d_i\}$ и $\{e_i\}$ меньше ξ , все подстановки элементов множества M' также эквивалентны между собой. Умножив (8) справа на подстановку, переводящую все элементы множеств $\{d_i\}$ и $\{e_i\}$ в c_1 и оставляющую остальные элементы на месте, мы получим эквивалентность вида

$$\begin{pmatrix} M_1 M_2 \dots \\ c_1 c_2 \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} N_1 N_2 \dots \\ c_1 c_2 \dots \end{pmatrix}. \quad (9)$$

По условию подстановки этой эквивалентности отличаются на ξ местах. Следовательно, из множеств M_i можно выбрать по представителю $m_i \in M_i$ таким образом, чтобы для ξ из них образ в левой подстановке отличался от образа в правой. Умножив (9) справа на подстановку, переводящую $c_1, c_2, \dots$ соответственно в $m_1, m_2, \dots$, и умножив обе части полученной эквивалентности слева на ее левую подстановку, будем иметь

$$\begin{pmatrix} M_1 M_2 \dots \\ m_1 m_2 \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} M_1 M_2 \dots \\ m_{\sigma_1} m_{\sigma_2} \dots \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где подстановки в силу выбора представителей m_i все еще отличаются на ξ местах. Множества M_i кроме элементов $m_1, m_2, \dots$ могут содержать и другие элементы, которые мы дальше не будем выписывать явно, так что эквивалентность (10) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} m_1 m_2 \dots \\ m_1 m_2 \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} m_{\alpha_1} m_{\alpha_2} \dots X_1 X_2 \dots \\ m_{\beta_1} m_{\beta_2} \dots m_{\gamma_1} m_{\gamma_2} \dots \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где все m_β , m_γ различны, а множества X_i содержат каждое более чем по одному элементу: $X_i = \{m_{\mu_i}, m_{\nu_i}, \dots\}$. Если число множеств X_i равно ξ , то, умножая эквивалентность (11) слева на подстановки, переводящие $m_1, m_2, \dots$ соответственно в $m_{\mu_1}, m_{\mu_2}, \dots$ и в $m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, \dots$, и замечая, что в обоих случаях справа окажется одна и та же подстановка, получим

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots \\ m_{\mu_1} & m_{\mu_2} & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots \\ m_{\nu_1} & m_{\nu_2} & \dots \end{pmatrix}.$$

Поскольку множества нижних элементов здесь общих элементов не имеют, то каждая из подстановок эквивалентна подстановкам ранга 1 и, значит, все подстановки элементов $m_1, m_2, \dots$ эквивалентны между собой. То же самое будет, если число множеств X_i меньше ξ , но сумма их содержит ξ элементов. В этом случае достаточно умножить (11) слева на подстановку, переводящую элементы $m_1, m_2, \dots$ в различные элементы этой суммы. В результате получим, что подстановка ранга ξ будет эквивалентна подстановке меньшего ранга, что в силу леммы 2 влечет за собой эквивалентность всех подстановок друг другу. Рассмотрим, наконец, случай, когда сумма множеств X_i содержит менее ξ элементов. Обозначим через $\{m_{k_1}, m_{k_2}, \dots\}$ совокупность тех элементов, которые некоторой положительной степенью правой подстановки из (11) переводятся в элемент из $\{m_{\gamma_1}, m_{\gamma_2}, \dots\}$, а через $\{m_{i_1}, m_{i_2}, \dots\}$ — совокупность остальных элементов. Перепишем эквивалентность (11) в виде

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots \\ m_1 & m_2 & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} m_{i_1} & m_{i_2} & \dots & m_{k_1} & m_{k_2} & \dots \\ m_{j_1} & m_{j_2} & \dots & m_{l_1} & m_{l_2} & \dots \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Совокупность $\{m_{i_1}, m_{i_2}, \dots\}$ содержит $\{m_{j_1}, m_{j_2}, \dots\}$, и мощность их равна ξ , так как мощность совокупности $\{m_{k_1}, m_{k_2}, \dots\}$ равна мощности суммы $X_1 + X_2 + \dots$ и, следовательно, меньше ξ . Умножая (12) слева на подстановку, переводящую $m_1, m_2, \dots$ соответственно в $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots$, и справа на подстановку, переводящую $m_{l_1}, m_{l_2}, \dots$ в $m_1, m_2, \dots$, получим

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots \\ m_1 & m_2 & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots \\ m_{p_1} & m_{p_2} & \dots \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где все m_p различны, причем ξ из них отличны от своих верхних элементов. Можно предполагать, что число элементов из множества $\{m_1, m_2, \dots\}$, не содержащихся среди $m_{p_1}, m_{p_2}, \dots$, меньше ξ , так как в противном случае, умножая обе части на подстановку, переводящую $m_{p_1}, m_{p_2}, \dots$ в $m_{p_1}, m_{p_2}, \dots$ и оставляющую остальные элементы на месте, и применяя лемму 2, мы получили бы эквивалентность всех подстановок друг другу. Правую подстановку в (13) обычным образом разложим в произведение циклов и полуциклов, т. е. подстановок вида

$$[a_1, a_2, \dots] = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots \end{pmatrix}$$

без общих элементов. Полуциклы начинаются с элементов, отсутствующих в нижней строке, поэтому их число меньше ξ . Переписывая (13) в виде

$$E \sim \prod_{\lambda} (\dots, a_{-1}^{\lambda}, a_0^{\lambda}, a_1^{\lambda}, \dots) \prod_{\mu} [b_1^{\mu}, b_2^{\mu}, \dots], \quad (14)$$

откуда

$$\prod_{\mu} [b_1^{\mu}, b_2^{\mu}, \dots] \sim \prod_{\lambda} (\dots, a_1^{\lambda}, a_0^{\lambda}, a_{-1}^{\lambda}, \dots), \quad (15)$$

и умножая (14) справа на $\prod_{\mu} \begin{pmatrix} b_1^{\mu} & b_2^{\mu} & b_3^{\mu} & \dots \\ b_1^{\mu} & b_1^{\mu} & b_2 & \dots \end{pmatrix}$, получим

$$\prod_{\mu} \begin{pmatrix} b_1^{\mu} & b_2^{\mu} & b_3^{\mu} & \dots \\ b_1^{\mu} & b_1^{\mu} & b_2^{\mu} & \dots \end{pmatrix} \sim \prod_{\lambda} (\dots, a_{-1}^{\lambda}, a_0^{\lambda}, a_1^{\lambda}, \dots). \quad (16)$$

Поскольку число полужиклов меньше ξ , а число передвигающихся элементов равно ξ , то число элементов, встречающихся в циклах, равно ξ . Разделив их на два эквивалентных множества $\{c_i^{\lambda}\}$, $\{a_{\lambda}^{\lambda}\}$ мощности ξ и преобразуя эквивалентности (15) и (16) при помощи надлежащей обратимой подстановки, мы получим эквивалентности

$$\prod_{\mu} [b_1^{\mu}, b_2^{\mu}, \dots] \sim \prod_{\lambda} (\dots, c_1^{\lambda}, c_0^{\lambda}, c_{-1}^{\lambda}, \dots),$$

$$\prod_{\mu} \begin{pmatrix} b_1^{\mu} & b_2^{\mu} & b_3^{\mu} & \dots \\ b_1^{\mu} & b_1^{\mu} & b_2^{\mu} & \dots \end{pmatrix} \sim \prod_{\lambda} (\dots, d_1^{\lambda}, d_0^{\lambda}, d_{-1}^{\lambda}, \dots),$$

перемножив которые, придем к эквивалентности вида $U \sim E$, где E — единичная подстановка элементов $m_1, m_2, \dots$, а U — обратимая подстановка тех же элементов, передвигающая ξ элементов. Совокупность всех обратимых подстановок, эквивалентных единичной подстановке, является нормальным делителем группы обратимых подстановок. Так как этот нормальный делитель содержит подстановку U , передвигающую ξ элементов, то он должен совпадать со всей группой (см. [3]), т. е. эквивалентность $U \sim E$ имеет место для любой обратимой подстановки элементов $m_1, m_2, \dots$.

Докажем, что эквивалентность $U \sim E$ имеет место для любого разнозначного отображения множества $m_1, m_2, \dots$ в себя. Для этого разложим U в произведение циклов и полужиклов без общих элементов. По доказанному произведение циклов эквивалентно E . Следовательно, можно считать, что U состоит из одних полужиклов. Имеем

$$E \sim \prod_{\mu} (\dots, a_3^{\mu}, a_1^{\mu}, a_2^{\mu}, a_4, \dots),$$

откуда

$$E \sim \prod_{\mu} \begin{pmatrix} a_1^{\mu} & a_2^{\mu} & a_3^{\mu} & \dots \\ a_2^{\mu} & a_4^{\mu} & a_6^{\mu} & \dots \end{pmatrix} (\dots, a_3^{\mu}, a_1^{\mu}, a_2^{\mu}, a_4^{\mu}, \dots) \begin{pmatrix} \dots & a_3^{\mu} & a_1^{\mu} & a_2^{\mu} & a_4^{\mu} & a_6^{\mu} & \dots \\ \dots & a_1^{\mu} & a_1^{\mu} & a_1^{\mu} & a_2^{\mu} & a_3^{\mu} & \dots \end{pmatrix},$$

т. е. $E \sim \prod [a_1^{\mu}, a_2^{\mu}, \dots]$, что и требовалось.

Разобьем теперь элементы $m_1, m_2, \dots$ на два равномоощных класса $m_{\lambda_1}, m_{\lambda_2}, \dots$ и $m_{\mu_1}, m_{\mu_2}, \dots$. Согласно установленному

$$E \sim \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots \\ m_{\lambda_1} & m_{\lambda_2} & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots \\ m_{\mu_1} & m_{\mu_2} & \dots \end{pmatrix}.$$

Поскольку множества нижних элементов не пересекаются, то каждая из подстановок эквивалентна подстановкам ранга 1, откуда следует, что все подстановки множества $m_1, m_2, \dots$ эквивалентны друг другу. Подстановки элементов $m_1, m_2, \dots$ являлись лишь сокращенными обозначениями для преобразований множества M' , переводящих совокупности $M_1, M_2, \dots$.

где $m_i \in M_i$, соответственно в $m_i, m_i, \dots$. Таким образом, каждая подстановка элементов множества M' , имеющая этот вид, эквивалентна подстановке ранга 1, переводящей все совокупности M_i в элемент m_i . Поскольку среди указанных подстановок имеются подстановки ранга ξ , то в силу леммы 2 все подстановки множества M' эквивалентны подстановкам ранга 1. Подстановки множества M' являлись, в свою очередь, лишь сокращенными обозначениями для подстановок множества M , имеющих определенный вид. Поэтому нами доказана справедливость всех эквивалентностей вида

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \dots & R_1 & R_2 & \dots \\ m_1 & m_2 & \dots & r_1 & r_2 & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} M' & R_1 & R_2 & \dots \\ m_1 & r_1 & r_2 & \dots \end{pmatrix} \quad (M' = M_1 + M_2 + \dots), \quad (17)$$

где $M_1, M_2, \dots$ — любое разбиение множества M' не более чем на ξ частей; $m_i \in M_i$; $R_1, R_2, \dots$ — фиксированные подмножества, число которых равно ρ , причем $r_i \in R_i$. Пусть теперь даны две произвольные подстановки A_1, B_1 множества M , имеющие один и тот же ранг σ ($\sigma \leq \rho$) и отличающиеся не более чем на ξ местах. Эти подстановки могут быть записаны в виде

$$A_1 = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & S_1 & S_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & s_1 & s_2 & \dots \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & S_1 & S_2 & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & s_1 & s_2 & \dots \end{pmatrix},$$

где число элементов s_i равно σ , а число элементов p_i и q_i не превосходит ξ . Умножая справа (17) на подстановку, переводящую достаточное число элементов r_i в r_1 , и беря число совокупностей M_i равным числу элементов p_i , мы получим эквивалентность, умножая которую слева на подстановку, переводящую совокупности $P_1, P_2, \dots, S_1, S_2, \dots$ соответственно в элементы $m_1, m_2, \dots, r_1, r_2, \dots$, и одновременно умножая справа на подстановку, переводящую $m_1, m_2, \dots, r_1, r_2, \dots$ соответственно в $p_1, p_2, \dots, s_1, s_2, \dots$, получим эквивалентность

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & S_1 & S_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & s_1 & s_2 & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} M' & S_1 & S_2 & \dots \\ p_1 & s_1 & s_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

Сравнивая ее с аналогичной эквивалентностью для подстановки B_1 , будем иметь: $A_1 \sim B_1$, что и доказывает лемму 5.

Л е м м а 6. Если эквивалентные подстановки A, B бесконечного ранга ρ различны и отличаются на конечном числе мест, то все подстановки ранга не больше ρ , отличающиеся на конечном числе мест, эквивалентны друг другу.

Повторяя предыдущие рассуждения, мы получим эквивалентность

$$\begin{pmatrix} M_1 & \dots & M_\alpha & R_1 & R_2 & \dots \\ m_1 & \dots & m_\alpha & r_1 & r_2 & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} M_1 & \dots & M_\alpha & R_1 & R_2 & \dots \\ m_{i_1} & \dots & m_{i_\alpha} & r_1 & r_2 & \dots \end{pmatrix},$$

где $m_i \in M_i$, $r_i \in R_i$ и число элементов r_i равно ρ . Рассматривая подстановки $\begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_\alpha & r_1 & \dots & r_\beta \\ a_1 & \dots & a_\alpha & b_1 & \dots & b_\beta \end{pmatrix}$ элементов множества $m_1, \dots, m_\alpha, r_1, \dots, r_\beta$ (β — произвольное конечное фиксированное) в качестве представителей подстановок $\begin{pmatrix} M_1 & \dots & M_\alpha & R_1 & \dots & R_\beta & R_{\beta+1} & \dots \\ a_1 & \dots & a_\alpha & b_1 & \dots & b_\beta & r_{\beta+1} & \dots \end{pmatrix}$ данного множества, из эквивалентности

$$\begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_\alpha & r_1 & \dots & r_\beta \\ m_1 & \dots & m_\alpha & r_1 & \dots & r_\beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_\alpha & r_1 & \dots & r_\beta \\ m_{i_1} & \dots & m_{i_\alpha} & r_1 & \dots & r_\beta \end{pmatrix}$$

закключаем на основании леммы 3, что

$$\begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_\alpha & r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_\beta \\ m_1 & \dots & m_\alpha & r_1 & r_1 & r_3 & \dots & r_\beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_\alpha & r_1 & \dots & r_\beta \\ m_1 & \dots & m_1 & m_1 & \dots & m_1 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} M_1 & \dots & M_\alpha & R'_1 & R_3 & \dots \\ m_1 & \dots & m_\alpha & r_1 & r_3 & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} M_1 + \dots + M_\alpha & R'_1 & R_3 & \dots \\ m_1 & r_1 & r_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Отсюда, как и в доказательстве предыдущей леммы, непосредственно вытекает общее утверждение леммы 6.

Из лемм 2—6 справедливость теоремы теперь может быть выведена очевидным путем. В самом деле, пусть на бесконечном симметрическом группоиде S_M задана некоторая эквивалентность. Если все подстановки из S_M эквивалентны друг другу, то эквивалентность совпадает со сравнениями по идеалу $I_\nu = S_M$. Пусть не все подстановки эквивалентны друг другу. Обозначим через η_1 минимальный ранг подстановок, не эквивалентных подстановкам ранга 1. Если η_1 конечно, то в силу леммы 4 рассматриваемая эквивалентность совпадает со сравнениями по одному из нормальных делителей $\mathfrak{N}_{\eta_1}$. Поэтому предположим, что η_1 бесконечно. Если η_α — какая-либо мощность, то обозначим через ξ_α наименьшую мощность, большую числа мест различия каждых двух эквивалентных подстановок ранга η_α . Леммы 5, 6 показывают, что если $\eta_\alpha < \eta_\beta$, то $\xi_\alpha \geq \xi_\beta$. Пусть η_2 — наименьшая из мощностей η_α , для которых $\xi_\alpha < \xi_1$, η_3 — наименьшая из мощностей η_β , для которых $\xi_\beta < \xi_2$, и т. д. Так как кардинальные числа вполне упорядочены по возрастанию, то процесс оборвется и мы получим конечную последовательность

$$\xi_k < \dots < \xi_2 < \xi_1 \leq \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_k. \quad (18)$$

Пусть A, B — произвольные подстановки, ранг которых η удовлетворяет соотношению $\eta_i \leq \eta \leq \eta_{i+1}$. Если число мест различия этих подстановок меньше ξ_i , то они в силу определения последовательности (18) будут эквивалентны. Обратно, если A и B эквивалентны, то число их мест различия меньше ξ_i . Поэтому заданная эквивалентность совпадает с эквивалентностью $I_{\eta_1} \mathfrak{N}_{\xi_1} + I_{\eta_2} \mathfrak{N}_{\xi_2} + \dots + I_{\eta_k} \mathfrak{N}_{\xi_k}$. Теорема доказана.

Согласно Е. С. Ляпину [1], система элементов K некоторого ассоциативного группоида S называется его нормальной подсистемой, если существует такое гомоморфное отображение S на группоид с единицей, при котором K является полным прообразом единицы. Из доказанной теоремы непосредственно видно, что единственными нормальными подсистемами конечного симметрического группоида S_M являются нормальные делители симметрической группы S_M . Этот результат был получен Н. Н. Воробьевым [2]. В случае бесконечных симметрических группоидов теорема показывает, что единственными их нормальными подгруппоидами будут совокупности подстановок, передвигающих менее ξ элементов, где ξ — любая заданная бесконечная мощность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. С. Ляпин. Нормальные комплексы ассоциативных систем. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1950, 14, № 2, 179—192.
2. Н. Н. Воробьев. Нормальные подсистемы конечной симметрической ассоциативной системы. — Докл. АН СССР, 1947, 58, № 9, 1877—1879.
3. J. Schreier, S. Ulam. Über die Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge. — Stud. Math., 1933, 4, 134—141.
4. J. Schreier. Über Abbildungen einer abstrakten Menge auf ihre Teilmengen. — Fundam. Math., 1937, 28, 261—264.

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕАССОЦИАТИВНЫХ КОЛЕЦ*



Пусть A — ассоциативное кольцо с некоторой областью Ω операторов. Определим для элементов x, y из A новую операцию $\circ$ посредством билинейной формулы

$$x \circ y = \sum a_i x b_i y c_i + \sum f_i y g_i x h_i, \quad (1)$$

где $a_i, b_i, c_i, f_i, g_i, h_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) — фиксированные элементы A . Тогда совокупность элементов A относительно старой операции сложения и операции $x \circ y$, рассматриваемой в качестве новой операции умножения, будет снова кольцом с той же областью операторов, но вообще неассоциативным. Известными частными случаями являются способы получения колец Ли и колец Йордана посредством формул $x \circ y = xy - yx$, $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$. Если вместо этих частных формул воспользоваться общей формулой (1), то таким способом оказывается возможным получить любое неассоциативное кольцо. Именно, далее показывается, что каждое неассоциативное кольцо с операторами изоморфно $\circ$ -подкольцу некоторого ассоциативного кольца с той же областью операторов, причем вместо произвольных билинейных $\circ$ -операций достаточно рассматривать лишь операции вида $x \circ y = axy$.

1. Сначала рассмотрим случай конечных неассоциативных алгебр, где представление вида (1) можно выписать сразу в явной форме. Пусть B — неассоциативная алгебра над полем P с базисом $e_1, \dots, e_n$ и таблицей умножения

$$e_i e_j = \sum_{\alpha} \gamma_{ij\alpha} e_{\alpha} \quad (i, j, \alpha = 1, 2, \dots, n; \gamma_{ij\alpha} \in P).$$

В качестве ассоциативного кольца A возьмем алгебру матриц порядка n над P и каждому элементу $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ из B поставим в соответствие диагональную матрицу $\alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{22} + \dots + \alpha_n E_{nn}$, где E_{ij} — обычные матричные единицы. Мы хотим подобрать матрицы A^{ij}, B^{ij}, C^{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) так, чтобы

$$\sum_{\alpha, \beta} A^{\alpha\beta} E_{ii} B^{\alpha\beta} E_{jj} C^{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} \gamma_{ij\alpha} E_{\alpha\alpha}. \quad (2)$$

Обозначая через $a_{ij}^{\alpha\beta}, b_{ij}^{\alpha\beta}, c_{ij}^{\alpha\beta}$ соответственные элементы матриц $A^{\alpha\beta}, B^{\alpha\beta}, C^{\alpha\beta}$, легко проверить, что значения

$$a_{ij}^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha i} \delta_{\beta i}, \quad b_{ij}^{\alpha\beta} = \gamma_{ij\alpha}, \quad c_{ij}^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha j} (\delta_{ii} = 1, \delta_{ji} = 0, i \neq j)$$

удовлетворяют уравнениям (2). Таким образом, если в алгебре матриц определить $\circ$ -операцию формулой

$$X \circ Y = \sum_{\alpha, \beta} A^{\alpha\beta} X B^{\alpha\beta} Y C^{\alpha\beta},$$

* Успехи мат. наук, 1952, 7, № 1, 181—185.

где $A^{\alpha\beta}$, $B^{\alpha\beta}$, $C^{\alpha\beta}$ имеют указанные выше значения, то неассоциативная алгебра B будет изоморфна $\circ$ -подалгебре всех диагональных матриц алгебры A .

2. Для доказательства общей теоремы необходимо воспользоваться несколькими вспомогательными понятиями. Пусть Ω — фиксированное кольцо, которое далее будет приниматься в качестве кольца операторов, и пусть $\{a_\alpha\}$ — произвольная система элементов. Согласно А. Г. Курошу [1], конечные последовательности, составленные из элементов a_α и скобок $(\)$, называются неассоциативными «словами» в следующих случаях: элемент a_α , каждый в отдельности, есть неассоциативное слово; если p и q — неассоциативные слова, то (pq) — также неассоциативное слово. Свободным неассоциативным кольцом над Ω с образующими $\{a_\alpha\}$ называется кольцо выражений вида $\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \dots + \sigma_m p_m$, где $p_1, \dots, p_m$ — различные неассоциативные слова. Перемножение производится по обычному правилу:

$$\sum \sigma_i p_i \cdot \sum \sigma_j p_j = \sum (\sigma_i \sigma_j) (p_i p_j) \quad (\sigma_i, \sigma_j \in \Omega).$$

Свободное ассоциативное кольцо над Ω с образующими $\{a_\alpha\}$ определяется аналогично, только «словами» здесь будут конечные последовательности элементов без скобок.

Теорема 1. Пусть A — свободное ассоциативное кольцо с образующими $a_0, \{a_\alpha\}$ над Ω . Введем в A билинейную операцию $x \circ u = a_0 x u$ и обозначим через B $\circ$ -подкольцо, порожденное элементами $\{a_\alpha\}$. Тогда B есть свободное неассоциативное кольцо над Ω с образующими a_α , и если I_0 — какой-либо двусторонний $\circ$ -идеал в B , а I — двусторонний идеал в кольце A , порожденный элементами I_0 , то $I_0 = I \cap B$.

Элементы кольца B являются линейными комбинациями $\circ$ -одночленов вида $a_{\alpha_1} \circ a_{\alpha_2} \circ \dots \circ a_{\alpha_m}$, где в надлежащих местах должны быть поставлены скобки. Заменяя в $\circ$ -одночлене выражения $x \circ u$ через $a_0 x u$, получим обычный одночлен из кольца A .

Л е м м а. Если произведение $g = a_{\beta_1} a_{\beta_2} \dots a_{\beta_n}$ и некоторый его участок $g' = a_{\beta_i} \dots a_{\beta_j}$ можно представить в виде $\circ$ -одночленов h и h' , то h' тождествен некоторому участку $\circ$ -одночлена h и при разворачивании h в g участок h' переходит в g' .

Доказательство индукцией по числу $\circ$ -сомножителей одночлена h . Предположим сначала, что участок g' имеет вид $a_0 a_\alpha a_\beta$. Пусть $h = h_1 \circ h_2 = a_0 h_1 h_2$. Если степени $\circ$ -одночленов h_1, h_2 больше единицы, то при разворачивании их в начале появятся буквы a_0 . Поэтому либо $h = a_\alpha \circ a_\beta$, либо участок $a_0 a_\alpha a_\beta$ появляется при разворачивании одного из сомножителей, и тогда по индукции утверждение можно считать доказанным. В случае, когда степень h' больше двух, этот $\circ$ -одночлен содержит отрезок вида $a_\alpha \circ a_\beta$, а, следовательно, отрезок g' содержит участок $a_0 a_\alpha a_\beta$. Тогда по доказанному $\circ$ -одночлен h содержит отрезок $a_\alpha \circ a_\beta$, который при разворачивании h переходит в участок из g' . Замена участков $a_\alpha \circ a_\beta = a_0 a_\alpha a_\beta$ в одночленах h, h', g, g' одной буквой приводит дело к одночленам низшей степени, что и доказывает лемму. Из леммы, в частности, следует, что $\circ$ -одночлены, являющиеся различными неассоциативными словами, при разворачивании обращаются в различные элементы кольца A . Поэтому B является свободным неассоциативным кольцом от образующих $\{a_\alpha\}$.

Для доказательства второго утверждения теоремы заметим сначала, что каждый элемент идеала I_0 имеет вид

$$f = \sum p_i f_i q_i, \quad (3)$$

где p_i, q_i — одночлены из A , а f_i — элементы идеала I_0 , каждый из которых может быть представлен в форме

$$f_i = \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} a_{\alpha_1} \circ a_{\alpha_2} \circ \dots \circ a_{\alpha_m} \quad (\sigma_{\alpha} \in \Omega).$$

Согласно лемме, если для одночленов $p, q \in A, r \in B$, произведение prq можно представить в виде $\circ$ -одночлена, то в виде $\circ$ -одночлена можно представить и любое произведение rxq , где $x \in B$. Поэтому, если хотя бы один член суммы $p_i f_i q_i$ входит в B , то все остальные члены также входят в B , и выражение $p_i f_i q_i$ можно представить в виде $a_{\beta_1} \circ \dots \circ a_{\beta_k} \circ f_i \circ a_{\gamma_1} \circ \dots \circ a_{\gamma_l}$. Следовательно, в этом случае $p_i f_i q_i \in I_0$. Раскрытие остальных выражений $p_i f_i q_i$ из (3) дает лишь одночлены, не входящие в B . Поэтому в случае, когда $f \in B$, такие выражения должны взаимно уничтожаться, и f будет входить в I_0 , что и требовалось.

Теорема 2. Каждое неассоциативное кольцо C над произвольным кольцом операторов Ω изоморфно $\circ$ -подкольцу подходящего ассоциативного Ω -кольца, в котором $\circ$ -операция определяется формулой $x \circ y = axy$.

Кольцо C изоморфно фактор-кольцу B/I_0 подходящего свободного неассоциативного кольца B над Ω по некоторому идеалу I_0 . Обозначим через $\{a_{\alpha}\}$ образующие кольца B и рассмотрим свободное ассоциативное кольцо A с образующими $a_0, \{a_{\alpha}\}$ над Ω . По теореме 1 кольцо B можно отождествить с $\circ$ -подкольцом, порожденным в кольце A элементами $\{a_{\alpha}\}$ относительно операции $x \circ y = a_0 xy$. Рассмотрим фактор-кольцо A/I , где I — идеал в кольце A , порожденный элементами из I_0 . Образы элементов B при естественном гомоморфном отображении A на $\bar{A}$ порождают в $\bar{A}$ $\circ$ -подкольцо $\bar{B}$, являющееся гомоморфным образом $\circ$ -кольца B . Ядром этого гомоморфизма служит пересечение B с I , т. е. идеал I_0 . Следовательно, $\circ$ -подкольцо $\bar{B}$ изоморфно кольцу вычетов B/I_0 , в свою очередь изоморфному кольцу C .

Как обычно, легко видеть, что ассоциативное кольцо $\bar{A}$, построенное указанным способом для кольца $\bar{B}$, вполне характеризуется следующим свойством максимальности: всякое изоморфное отображение кольца $\bar{B}$ на $\circ$ -подкольцо F какого-либо ассоциативного кольца K с операцией $x \circ y = kxy$, порождающегося элементами F и k , можно распространить до гомоморфного отображения кольца $\bar{A}$ на кольцо K , переводящего элемент a_0 в k .

Все сказанное относительно операции $x \circ y = axy$ справедливо, очевидно, и для операции $x \circ y = xya$. Аналогичная операция $x \circ y = xau$ в ассоциативном кольце сама ассоциативна и потому для образования неассоциативных колец неприменима.

Заметим еще, что существуют неассоциативные алгебры конечного ранга, не представимые с помощью операции $x \circ y = axy$ ни в какой конечной ассоциативной алгебре. Примером может служить алгебра с базисом e_1, e_2 и таблицей умножения $e_1^2 = e_1, e_1 e_2 = 0, e_2 e_1 = e_2, e_2^2 = e_2$. Действительно, пусть квадратные матрицы некоторого порядка A, P, Q удовлетворяют соотношениям $AP^2 = P, APQ = 0, AQP = Q$. Матрица P должна быть особенной, так как в противном случае из указанных соотношений следует $Q = 0$. Поэтому P можно представить в виде $P = P_1 + P_2$, где P_1 — нильпотент-

ная, P_2 — неособенная. Из равенства $AP^2 = P$ видно, что ранг P^2 равен рангу P , откуда $P_1 = 0$. Пусть $A = (A_{ik})$, $Q = (Q_{ik})$ — соответствующие клеточные разложения матриц A и Q ($i, k = 1, 2$). Из написанных выше соотношений следует, что $Q_{11} = Q_{21} = Q_{22} = 0$, откуда $AQ^2 = 0$. Но это противоречит равенству $AQ^2 = Q$, которое должно было бы выполняться ввиду соотношения $e_2^2 = e_2$, если бы матрицы P , Q давали точное ϕ -представление заданной алгебры.

3. Известно, что любая конечная сепарабельная алгебра над бесконечным полем имеет два образующих элемента [2]. Для произвольных алгебр это, очевидно, места не имеет, но рассуждения, вполне аналогичные проведенным в п. 2, позволяют непосредственно обнаружить справедливость следующего утверждения:

Т е о р е м а 3. *Каждое конечное или счетное ассоциативное кольцо K изоморфно подкольцу некоторого ассоциативного кольца с двумя образующими.*

Пусть кольцо K есть кольцо вычетов свободного ассоциативного кольца A с образующими $a_1, a_2, \dots$ по некоторому идеалу I . Рассмотрим вспомогательное свободное ассоциативное кольцо B с двумя образующими b_1, b_2 . Элементами A являются многочлены $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ от образующих. Соответствие $f(a_1, \dots, a_n) \rightarrow f(b_1 b_2 b_1, \dots, b_1 b_2^n b_1^n)$ отображает кольцо A гомоморфно на подкольцо C кольца B , порожденное элементами вида $b_1 b_2^n b_1^n$ ($n = 1, 2, \dots$). Обозначим через J_0 и J соответственно образ идеала I в кольце B и идеал кольца B , порожденный всеми элементами из J_0 . Положим $\bar{a}_n = b_1 b_2^n b_1^n$. Заметим, что если произведение вида $b_{i_1} \dots b_{i_k} \bar{a}_{i_{k+1}} \dots \bar{a}_{i_m} b_{i_{m+1}} \dots b_{i_n}$ может быть представлено в форме $\bar{a}_{j_1} \bar{a}_{j_2} \dots \bar{a}_{j_s}$, то в такой же форме могут быть представлены и $b_{i_1} \dots b_{i_k}, b_{i_{m+1}} \dots b_{i_n}$. Элементы идеала J имеют вид

$$f = \sum b_{i_1} \dots b_{i_k} f_i b_{i_{m+1}} \dots b_{i_n} \quad (f_i \in J_0).$$

Из приведенного замечания следует, что $f \in C$ тогда и только тогда, если в правой части все слагаемые, у которых или $b_{i_1} \dots b_{i_k} \in C$, или $b_{i_{m+1}} \dots b_{i_n} \in C$, взаимно уничтожаются. Поскольку остающиеся слагаемые входят в J_0 , то $J_0 = J \cap C$. Кольцо вычетов B/J порождается двумя образующими и содержит подкольцо $C + J/J$, изоморфное в силу соотношений $C + J/J \cong C/C \cap J \cong C/J_0$ заданному кольцу K .

Теорема 3 и ее доказательство сохраняют свою силу и для алгебр конечно- или счетного ранга.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Курош. Неассоциативные алгебры и свободные произведения алгебр. — Мат. сб., 1947, 20, № 2, 239—260.
2. A. A. Albert. Tow element generation of a separable algebra. — Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, N 10, 786—789.



Система всех квадратных матриц данного порядка n с элементами из данного поля F относительно действия матричного умножения является ассоциативной системой, обозначаемой далее через F_n . Множество F_n^r матриц из F_n , ранг которых не превосходит заданного числа r , будет ассоциативной подсистемой системы F_n . Пользуясь рассуждениями, аналогичными изложенным в заметке [1], мы указываем далее в явной форме все гомоморфизмы, допускаемые системами F_n^r . Гомоморфизмы F_n ранее рассматривались Н. Сиверцевой [2], доказавшей, что если при гомоморфном отображении F_n в ассоциативную систему с единицей в единицу отображается какая-либо особенная матрица, то все матрицы F_n отображаются в единицу.

Наша задача состоит в том, чтобы для матриц F_n^r найти все отношения сравнения, рефлексивные, симметричные, транзитивные и выдерживающие умножение как справа, так и слева на произвольную матрицу из F_n^r . Окончательный результат следующий:

Пусть μ — произвольное фиксированное число, $1 \leq \mu \leq r$; $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_{\mu-1}$ — неубывающая цепочка подгрупп мультипликативной группы поля F , а G_μ — какой-либо нормальный делитель группы всех неособенных матриц порядка $r - \mu + 1$, содержащий $G_{\mu-1}$. Полагаем

$$A \equiv B (G_1, \dots, G_\mu) \quad (A, B \in F_n^r), \quad (1)$$

если выполняется одно из следующих условий: а) ранг $A \leq r - \mu$, ранг $B \leq r - \mu$; б) ранг $A = r - i + 1$, $B = \lambda A$, $\lambda \in G_i$ ($\mu - 1 \leq i \leq r$); в) ранг $A = \text{ранг } B = r - \mu + 1$, $LA = LB$, $B = AU$, $U_0 \in G_\mu$, где U — некоторая матрица ранга $r - \mu + 1$, L — пространство векторов-строк размерности n , U_0 — матрица преобразования, индуцированного преобразованием U в подпространстве LA (терминологию см. в [3]).

Т е о р е м а. *Сравнения вида (1) рефлексивны, симметричны, транзитивны и выдерживают умножение как справа, так и слева на произвольную матрицу из F_n^r . Различные системы подгрупп $G_1, \dots, G_\mu$ определяют различные сравнения, и каждое сравнение на F_n^r , обладающее указанными свойствами, имеет вид (1) при подходящих $G_1, \dots, G_\mu$.*

Ввиду того, что нормальные делители группы неособенных матриц известны [4, 5], эта теорема дает явное перечисление конгруэнтностей (сравнений с указанными свойствами) на F_n^r .

Доказательство того, что отношения вида (1) действительно обладают требуемыми свойствами, не представляет затруднений и здесь может быть опущено. Доказательство же, что каждая конгруэнтность на F_n^r имеет вид (1), удобнее разбить на отдельные части. Дальнейшее опирается на следую-

* Докл. АН СССР, 1953, 90, № 3, 333—335.

щие хорошо известные свойства матриц: для каждой матрицы A ранга r существуют такие матрицы того же ранга U, V , что $UA = AV = A$. Если $LA \supset LB$, то существует матрица X , для которой $B = XA$. Для разрешимости матричного уравнения $B = AY$ необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора $x \in L$ из $xA = 0$ следовало $xB = 0$.

А. Если для некоторой конгруэнтности на F_n^r какая-либо матрица A ранга s сравнима с матрицей B меньшего ранга, то все матрицы ранга $\leq s$ сравнимы друг с другом.

Ищем такие неособенные матрицы S, T , чтобы $SAT = E_s \dot{+} O_{n-s} = R$, где E_s — единичная, O_{n-s} — нулевая матрицы соответствующих порядков, а знак $\dot{+}$ означает прямое сложение матриц (см. [3]). Тогда $R^3 \equiv RSBTR$, т. е. $E_s \dot{+} O_{n-s} \equiv B'_s \dot{+} O_{n-s}$, где ранг B'_s меньше s . Умножая справа и слева последнюю конгруэнтность на подходящие матрицы $P_s \dot{+} O_{n-s}$ и $P_s^{-1} \dot{+} O_{n-s}$, получим сравнение вида $E_s \dot{+} O_{n-s} \equiv B''_{s-k} \dot{+} N_k \dot{+} O_{n-s}$, где N_k — нильпотентная матрица. Отсюда путем возведения в k -ю степень получим конгруэнтность $E_s \dot{+} O_{n-s} \equiv B'''_{s-k} \dot{+} O_{n-s+k}$, умножая которую справа и слева на матрицу $E_{s-k} \dot{+} O_{n-s+k}$ и сравнивая с данной, получим $E_s \dot{+} O_{n-s} \equiv E_{s-k} \dot{+} O_k \dot{+} O_{n-s}$. Наконец, преобразуя обе части последней конгруэнтности с помощью матрицы вида $Q_s \dot{+} O_{n-s}$ (Q_s — неособенная, порядка s), можно в слагаемом $E_{s-k} \dot{+} O_k$ правой части добиться любого распределения нулей и единиц на главной диагонали, после чего путем почленного перемножения полученных конгруэнтностей придем к сравнениям $E_{s'} \dot{+} O_{n-s'} \equiv O_n$ ($s' = 1, \dots, s$). Для любой матрицы C' ранга $s' \leq s$ существуют неособенные матрицы S, T такие, что $C = S(E_{s'} \dot{+} O_{n-s'})T$. Умножая это равенство слева и справа на матрицы U, V ранга s' , удовлетворяющие условию $UCV = C$, получим $C = S_0(E_{s'} \dot{+} O_{n-s'})T_0$, где S_0, T_0 имеют ранг s' . Из сравнения $E_{s'} \dot{+} O_{n-s'} \equiv O_n$ теперь следует $C \equiv 0$, что и требовалось.

Б. Если в F_n^r матрицы A, B конгруэнтны, но $LA \neq LB$, то $A \equiv 0$.

Для LB и L , очевидно, существуют прямые разложения $LB = (LA \cap LB) \dot{+} M$ и $L = L \dot{+} LA \dot{+} (M \dot{+} N)$. Обозначая через P проектирование L на LA , соответствующее указанному прямому разложению, будем иметь $A = AP$, ранг BP меньше ранга A , $AP \equiv BP$. В силу A это дает $A \neq 0$.

В. Если в F_n^r $A \equiv B$ и для некоторого вектора x $xA = 0$, $xB \neq 0$, то $A \equiv 0$.

Согласно A можно считать, что ранги A и B равны одному и тому же числу s . Обозначая через M совокупность векторов, переводящихся преобразованием B в нуль, найдем для L прямое разложение $L = M \dot{+} N$, $x \in N$. Так как для проектирования P пространства L на N , отвечающего этому разложению, при любом $z \in L$ из $zB = 0$ следует $zP = 0$, то $P = BC, AC \equiv P$ ($C \in F_n^r$), откуда $PAC \equiv P$. Но ранг PAC меньше s , поскольку PAC переводит в нуль не только M , но и вектор x , в M не лежащий. Поэтому $P \equiv 0$ и, следовательно, $A \equiv 0$.

Г. Если $B \equiv BU_0$, где U_0 — неособенное линейное преобразование пространства LB , ранг B равен рангу A и T — линейное отображение LB на LA , то $A \equiv A \cdot T^{-1}U_0T$.

Распространяя T до линейного отображения L на себя, будем иметь $LB = LAT^{-1}$. Поэтому найдется такая матрица V , что $AT^{-1} = VB$. Но $VB \equiv VBU_0$, т. е. $AT^{-1} \equiv AT^{-1}U_0$, откуда указанным способом следует $A \equiv A \cdot T^{-1}U_0T$.

Пусть теперь задана какая-либо конгруэнтность на F_n^r . Обозначим через $r - \mu + 1$ наинизший ранг преобразований, не конгруэнтных нулю. Для каждого заданного i , $1 \leq i \leq \mu$, фиксируем какое-либо преобразование A ранга $r - i + 1$ и в подпространстве LA выбираем определенный базис. Согласно Б и В если $A \equiv B$, то $LA = LB$, $B = AU_0$, где U_0 — однозначно определенное неособенное преобразование подпространства LA . Совокупность матриц U_0 , отвечающих всевозможным преобразованиям B , сравнимым с A , обозначим G_i . Если $U_0, V_0 \in G_i$, то $A \equiv AU_0, A \equiv AV_0$, откуда согласно Г имеем $A \equiv AU_0V_0^{-1}$, т. е. $U_0V_0^{-1} \in G_i$. Следовательно, G_i — группа. Из Г следует также, что если $A \equiv AU_0, X_0$ — линейное отображение LA на себя, то $A \equiv A \cdot X_0^{-1}U_0X_0$, т. е. $X_0^{-1}U_0X_0 \in G_i$. Поэтому G_i — нормальный делитель группы всех неособенных матриц порядка $r - i + 1$. Наконец, если B — произвольное преобразование ранга $r - i + 1$ и $B \equiv BU_0$, где U_0 — неособенное линейное преобразование пространства LB , то, обозначая через T линейное отображение LB на LA , получим согласно Г $A \equiv A \cdot T^{-1}U_0T$, т. е. матрица U_0 принадлежит G_i .

Д. Если скалярная матрица λE_{r-i+1} входит в G_i , то λE_{r-i} принадлежит G_{i+1} .

По условию $\lambda(E_{r-i+1} + O_{n-r+i-1}) \equiv E_{r-i+1} + O_{n-r+i-1}$. Умножая эту конгруэнтность на $E_{r-i} + O_{n-r+i}$, получим $\lambda(E_{r-i} + O_{n-r+i}) = E_{r-i} + O_{n-r+i}$ или $\lambda E_{r-i} \in G_{i+1}$.

Е. Нескалярные матрицы может содержать лишь группа G_μ .

В самом деле, пусть A — преобразование ранга $r - i + 1$, $1 \leq i \leq \mu$, $A \equiv AU_0$ и U_0 не скалярное. Если бы все $(r - i)$ -мерные подпространства в LA были инвариантны относительно U_0 , то инвариантными относительно U_0 были бы и все одномерные подпространства, что возможно лишь для скалярных преобразований. Поэтому в LA найдется $(r - i)$ -мерное подпространство M , для которого $MU_0 \neq M$. Обозначим через N прообраз M в L относительно A и рассмотрим какое-либо проектирование P пространства L на N . Из $LPA = NA = M$ следует, что ранг PA равен $r - i$. В то же время $PA \equiv PAU_0, LPA \neq LPAU_0$. Ввиду А, Б отсюда следует, что все преобразования ранга $\leq r - i$ конгруэнтны нулю, т. е. $r - i \leq r - \mu, i = \mu$.

Из предложений А — Е основная теорема следует непосредственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Симметрические группоиды. — Мат. сб., 1952, 31, № 1, 136—151.
2. Н. Сиверцева. О простоте ассоциативной системы особых квадратных матриц. — Мат. сб., 1949, 24, № 1, 101—106.
3. А. И. Мальцев. Основы линейной алгебры. М. — Л., 1948.
4. L. E. Dickson. Linear groups. Leipzig, 1901.
5. B. L. Van der Waerden. Gruppen von linearen Transformationen. Berlin, 1935.



Система элементов H называется полугруппой, если с каждой парой a, b элементов H сопоставлен определенный элемент c из H , называемый произведением a на b , и если определенная таким образом операция умножения ассоциативна. Говорят, что в полугруппе H имеет место закон сокращения, если для любых элементов a, b, x полугруппы H каждое из равенств $ax = bx$ и $xa = xb$ влечет за собой $a = b$. Полугруппа называется группой, если в ней уравнения $ax = b$ и $ya = b$ разрешимы для любых a, b из полугруппы.

Часть группы, являющаяся полугруппой, называется подполугруппой этой группы. Поскольку закон сокращения в каждой группе имеет место, то любая подполугруппа группы также удовлетворяет закону сокращения. Таким образом, наличие закона сокращения является необходимым условием для вложимости полугруппы в группу. Известно, что в общем случае это условие недостаточно, причем необходимые и достаточные условия оказались довольно громоздкими (см. [1]). Поэтому представляет интерес нахождение более или менее широких классов полугрупп, для которых выполнение закона сокращения является достаточным для вложимости в группу. Классическим примером этого является теорема о том, что всякая абелева полугруппа с законом сокращения вложима в абелеву группу.

Весьма близкими к абелевым, но значительно более сложными являются нильпотентные и затем разрешимые группы. Ввиду большой роли этих классов групп в общей теории групп, естественно, возникает вопрос об определении понятия нильпотентности и разрешимости и для полугрупп. Нахождение такого естественного определения нильпотентности для полугрупп можно считать основным результатом настоящей заметки. При этом оказывается, что каждая нильпотентная полугруппа с законом сокращения допускает вложение в нильпотентную группу. В заключение дается доказательство невозможности введения понятия разрешимых полугрупп, удовлетворяющего некоторым естественным требованиям.

Абелевы, нильпотентные и разрешимые группы характеризуются выполнением в них определенных тождеств. Так, группа G абелева, если для всех ее элементов x, y выполняется равенство $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = 1$; группа G будет n -ступенно нильпотентной, если для всех $x, y_1, \dots, y_n$ из G имеем

$$[[[x, y_1], y_2] \dots], y_n] = 1.$$

Наконец, группа G будет n -ступенно разрешимой, если для всех $x_1, \dots, x_m$ ($m = 2^n$) из G

$$K(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1,$$

* Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1953, 4, 107—111.

где $K(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ и

$$K(x_1, \dots, x_{2m}) = [K(x_1, \dots, x_m), K(x_{m+1}, \dots, x_{2m})].$$

Было бы естественно эти же тождества принять и в качестве определения абелевых, нильпотентных и разрешимых погрупп. Хотя этот путь непосредственно не ведет к цели, так как входящие в указанные тождества отрицательные степени в погруппах не имеют смысла, но в случае нильпотентных и абелевых групп можно найти тождества, не содержащие отрицательных степеней и равносильные в группах указанным. Выполнение таких тождеств и будет принято в качестве признака нильпотентности погрупп.

В абелевом случае все очевидно, так как соотношение $x^{-1}y^{-1}xy = 1$ можно записать в виде $xy = yx$, которое и принимается за определение абелевости погрупп. Для n -ступенно нильпотентных групп поступаем следующим образом. Пусть $x, y, u_1, \dots, u_n$ — произвольные переменные. Полагаем $X_0 = x, Y_0 = y$ и далее по индукции

$$X_{n+1} = X_n u_{n+1} Y_n, \quad Y_{n+1} = Y_n u_{n+1} X_n,$$

откуда, в частности,

$$X_2 = x u_1 y u_2 y u_1 x, \quad Y_2 = y u_1 x u_2 x u_1 y$$

и т. д.

Теорема 1. Для n -ступенной нильпотентности группы необходимо и достаточно, чтобы в G имело место тождество $X_n = Y_n$.

Для $n = 1$ теорема очевидна, так как речь в этом случае идет об абелевых группах. Необходимость условий в общем случае легко получается индукцией. Именно, пусть Z — центр n -ступенно нильпотентной группы G и пусть в $(n-1)$ -ступенно нильпотентных группах тождество $X_{n-1} = Y_{n-1}$ выполняется. Берем в G произвольные элементы $x, y, u_1, \dots, u_n$ и обозначаем чертой переход к образам в фактор-группе G/Z . Поскольку G/Z $(n-1)$ -ступенно нильпотентна, то $\bar{X}_{n-1} = \bar{Y}_{n-1}$ и, следовательно, $X_{n-1} = Y_{n-1} \cdot z$, где $z \in Z$. Отсюда

$$X_n = X_{n-1} u_n Y_{n-1} = X_{n-1} u_n X_{n-1} z^{-1} = X_{n-1} z^{-1} u_n X_{n-1} = Y_n,$$

что и требовалось.

Для доказательства достаточности допустим снова по индукции, что из выполнения тождества $X_{n-1} = Y_{n-1}$ следует $(n-1)$ -ступенная нильпотентность группы, и пусть в заданной группе G имеет место тождество $X_n = Y_n$, т. е.

$$X_{n-1} u Y_{n-1} = Y_{n-1} u X_{n-1}. \quad (1)$$

При $u = 1$ отсюда имеем $X_{n-1} Y_{n-1} = Y_{n-1} X_{n-1}$ или $Y_{n-1}^{-1} X_{n-1} = X_{n-1} Y_{n-1}^{-1}$. Возвращаясь к (1), мы видим, что при любом u из G

$$Y_{n-1}^{-1} X_{n-1} \cdot u = u \cdot Y_{n-1}^{-1} X_{n-1},$$

т. е. $Y_{n-1}^{-1} X_{n-1}$ лежит в центре Z группы G . Следовательно, в фактор-группе G/Z имеет место тождество $\bar{Y}_{n-1}^{-1} \bar{X}_{n-1} = 1$ или $\bar{X}_{n-1} = \bar{Y}_{n-1}$. В силу индукции отсюда вытекает $(n-1)$ -ступенная нильпотентность G/Z и, следовательно, n -ступенная нильпотентность G .

Определение. Полугруппы H , элементы которой удовлетворяют тождеству $X_n = Y_n$, называется n -степенно нильпотентной.

Теорема 1 показывает, что всякая подполугруппа n -степенно нильпотентной группы является n -степенно нильпотентной.

Полугруппа H называется полугруппой с общими правыми кратными, если для любых ее элементов a, b существуют такие x, y из H , что $ax = by$. Полугруппы с общими левыми кратными определяются аналогично. Хорошо известно, что всякая полугруппа с общими правыми (левыми) кратными и законом сокращения вложима в группу.

Наконец, условимся говорить, что полугруппа H имеет нетривиальное тождество, если любые ее элементы $x_1, \dots, x_n$ удовлетворяют равенству вида

$$x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s} = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_t}, \quad (2)$$

где хотя бы при одном значении k имеем $i_k \neq j_k$.

Всякая полугруппа с законом сокращения и хотя бы одним нетривиальным тождеством вложима в группу.

Пусть в полугруппе H с законом сокращения имеет место тождество (2). Если $i_1 = j_1$ и $s > 1, t > 1$, то, сокращая обе части тождества на x_{i_1} , получим более короткое тождество. Продолжая этот процесс, придем либо к тождеству вида (2), где $i_1 \neq j_1, s > 1, t > 1$, либо получим тождество вида $x_{i_1} = x_{i_1} \dots x_{i_t} (t \geq 1)$. В первом случае тождество (2) показывает, что в полугруппе H произвольные элементы x_{i_1}, x_{j_1} имеют общее правое кратное. Если во втором случае $i_1 = j_1 = \dots = j_k \neq j_{k+1}$, то, умножая обе части тождества справа на $x_{i_1}^{k+1}$ и затем сокращая слева на $x_{i_1}^k$, мы возвратимся к первому случаю. Наконец, если в H имеет место тождество $x = x^p$, то ввиду закона сокращения полугруппа H будет группой. Итак, во всех случаях в H имеются правые общие кратные и, следовательно, H вложима в группу.

Теорема 2. Всякая n -степенно нильпотентная полугруппа H с законом сокращения вложима в n -степенно нильпотентную группу.

Поскольку в H имеет место тождество $X_n = Y_n$, то H можно вложить в группу F . Обозначим через G подгруппу, порожденную элементами H в F . Группа G называется группой отношений для H . Остается доказать, что группа отношений n -степенно нильпотентной полугруппы сама n -степенно нильпотентна. Для $n = 1$ это очевидно. Далее, по индукции считаем, что H n -степенно нильпотентна и что группы отношений $(n-1)$ -степенно нильпотентных полугрупп $(n-1)$ -степенно нильпотентны. По условию для произвольных $x, y, u_1, \dots, u_n$ из H имеем $X_{n-1} u_n Y_{n-1} = Y_{n-1} u_n X_{n-1}$. Заменяя здесь u_n последовательно через X_{n-1} и X_{n-1}^2 , получим

$$X_{n-1}^2 Y_{n-1} = Y_{n-1} X_{n-1}^2, \quad X_{n-1}^3 Y_{n-1} = Y_{n-1} X_{n-1}^3,$$

откуда

$$Y_{n-1} X_{n-1}^3 = X_{n-1} \cdot X_{n-1}^2 Y_{n-1} = X_{n-1} \cdot Y_{n-1} X_{n-1}^2$$

или

$$X_{n-1}^{-1} Y_{n-1} = Y_{n-1} X_{n-1}^{-1}.$$

С другой стороны, для произвольного u_n из H имеем

$$u_n \cdot Y_{n-1} X_{n-1}^{-1} = X_{n-1}^{-1} Y_{n-1} \cdot u_n = Y_{n-1} X_{n-1}^{-1} \cdot u_n,$$

т. е. $Y_{n-1} X_{n-1}^{-1}$ перестановочно с любым элементом H , а значит, и с любым элементом G . Обозначая через Z центр G и через $\bar{H}$ — образ полугруппы H в фактор-группе $\bar{G} = G/Z$, будем для любых $\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}$ из $\bar{G}$ иметь $\bar{X}_{n-1}^{-1} = \bar{Y} = 1$. Это показывает, что в $\bar{H}$ выполняется тождество $\bar{X}_{n-1} = \bar{Y}_{n-1}$, откуда по индуктивному предположению вытекает, что группа отношений $\bar{G}$ для полугруппы H является $(n-1)$ -ступенно нильпотентной и, следовательно, что G есть n -ступенно нильпотентная группа.

С л е д с т в и е. Если какая-либо группа F содержит нильпотентную полугруппу H , то совокупность G элементов F , имеющих вид $h_1 h_2^{-1}$ ($h_1, h_2 \in H$), есть нильпотентная подгруппа группы F .

В самом деле, как показано выше, полугруппа H с правыми общими кратными.

Поэтому, если $h_1 h_2^{-1}$ и $h_3 h_4^{-1}$ — произвольные элементы из G , то, находя в H такие x, y , чтобы $h_2 x = h_4 y$, получим

$$(h_1 h_2^{-1})(h_3 h_4^{-1})^{-1} = h_1 \cdot h_2^{-1} h_4 \cdot h_3^{-1} = (h_1 x)(h_3 y)^{-1},$$

т. е. G есть подгруппа в F . Нильпотентность G непосредственно видна из теоремы 2.

В частности, если нильпотентная группа F содержит какую-либо полугруппу H , то совокупность элементов F , имеющих вид $h_1 h_2^{-1}$ ($h_1, h_2 \in H$), есть подгруппа группы F .

В заключение покажем, что сходное с понятием нильпотентности понятие разрешимости уже нельзя ввести указанным путем для полугрупп. В самом деле, пусть разрешимость полугрупп какой-либо ступени выше первой характеризуется выполнением некоторого тождества вида (2), которому удовлетворяют и элементы разрешимых групп соответственной ступени. Рассмотрим свободную разрешимую группу G 2-й ступени с образующими a, b , т. е. фактор-группу от абсолютно свободной группы с образующими a, b по ее второму коммутанту. Обозначим через H совокупность элементов G , представимых в виде произведения неотрицательных степеней образующих a, b . H является подполугруппой группы G , причем G порождается элементами H . Если бы элементы H удовлетворяли согласно предположению некоторому нетривиальному тождеству, то, как отмечено выше, полугруппа H была бы с общими правыми кратными и тогда все элементы G можно было бы представить в виде $h_1^{-1} h_2$, где $h_1, h_2 \in H$. Покажем, что последнее неверно.

Как известно [2], коммутант G' группы G есть свободная абелева группа со свободными образующими

$$(i, j) = a^{-i} b^{-j} a^{-1} b^{-1} a b b^j a^i,$$

где индексы i, j пробегает все целые рациональные числа. Легко проверить, что каждый элемент $a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_m} b^{\beta_m}$ ($\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0$) из H представим в виде $b^{\beta} a^{\alpha} k$, где k — произведение выражений (i, j) с неотрицательными $i, j, \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \beta = \beta_1 + \dots + \beta_m$. В самом деле, пусть это верно для произведений, у которых сумма $\alpha + \beta$ имеет меньшее значение, чем

у данного. Тогда

$$\begin{aligned} a \cdot a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \dots a^{\alpha} m b^{\beta} m &= a \cdot b^{\beta} a^{\alpha-1} k = ab \cdot b^{\beta-1} a^{\alpha-1} k = ba (0, 0) b^{\beta-1} a^{\alpha-1} k = \\ &= b \cdot ab^{\beta-1} a^{\alpha-1} \cdot a^{-\alpha+1} b^{-\beta+1} (0, 0) b^{\beta-1} a^{\alpha-1} k = b \cdot b^{\beta-1} a^{\alpha} k_1 (\alpha-1, \beta-1) k, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Если бы каждый элемент G имел вид $h_1^{-1} h_2$, то каждый элемент коммутанта G' имел бы вид

$$(b^{\beta} a^{\alpha} k)^{-1} \cdot (b^{\beta} a^{\alpha} k_1) = k^{-1} k_1,$$

т. е. выражался бы только через скобки (i, j) с неотрицательными параметрами i, j . Однако в G' есть независимые элементы, например $(-1, -1)$, которые нельзя выразить через (i, j) , с $i \geq 0, j \geq 0$. Таким образом, предположение о существовании в полугруппе H нетривиального тождества приводит к противоречию.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. О включении ассоциативных систем в группы. — Мат. сб., 1939, 6, № 2, 331—336.
2. R. Baer. Groups without proper isomorphic quotient groups. — Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, N 4, 267—278.



Множество элементов G с определенными на нем операциями умножения правого и левого делений $\cdot, /, \backslash$, называется лупой, если существует в G элемент e , для которого $xe = ex = x$, и если $x/y \cdot y = y \cdot y \backslash x = (xy)/y = y \backslash (yx) = x$ для всех x, y из G . Лупа, элементами которой являются точки топологического пространства, а операции непрерывны, называется топологической. Топологическое пространство G , для некоторых пар элементов которого определены операции $\cdot, /, \backslash$, называется локальной лупой, если: 1) существует такой элемент e , для которого результаты операций $xe, ex, x/e, e \backslash x$ определены для всех $x \in G$ и эти результаты равны x ; 2) если какая-либо из основных операций определена для пары элементов x, y и результат ее равен z , то для каждой окрестности W точки z найдутся такие окрестности U, V точек x, y , что рассматриваемая операция определена для всех $x \in U, y \in V$ и результат ее содержится в W ; 3) основные операции связаны указанными выше тождествами [1].

Пусть H — некоторое множество элементов локальной топологической лупы G . Совокупность всех элементов G , которые можно получить, применяя последовательно конечное число раз основные операции к элементам H , называется подлупой, порожденной элементами H . Определения локальной подлупы, замкнутой локальной подлупы, изоморфизма и гомоморфизма остаются такими же, как и для локальных топологических групп [2].

По аналогии с альтернативными кольцами условимся локальную лупу называть альтернативной, если для каждого n существует такая окрестность G_n единицы лупы, что произведение $2n$ сомножителей вида $a^{p_1} b^{q_1} a^{p_2} b^{q_2} \dots a^{p_n} b^{q_n}$ ассоциативно для всех a, b , для которых $a^p \in G_n, b^q \in G_n, |p| \leq \max |p_i|, |q| \leq \max |q_i|$ ($q, p = \pm 1, \pm 2, \dots$). Неассоциативную алгебру условимся называть бинарно лиевой (BL-алгеброй), если любая пара ее элементов содержится в некоторой лиевой подалгебре.

Целью настоящей заметки является показать, что классическое соответствие между аналитическими локальными группами и алгебрами Ли, устанавливаемое тремя основными теоремами Ли, в полной мере имеет место и между аналитическими альтернативными локальными лупами и бинарно лиевыми алгебрами.

1. Локальная лупа G называется аналитической, если подходящую окрестность U единицы G можно взаимно однозначно и взаимно непрерывно отобразить на r -мерный координатный куб $x \rightarrow (x^1, \dots, x^r), e \rightarrow (0, \dots, 0), x \in G, |x^i| < 1$, так, что для любых $x, y \in U$ произведение $xy = z$ существует и координаты z раскладываются в степенные ряды по $x^1, \dots, x^r, y^1, \dots, y^r$, сходящиеся для всех $x, y \in U$.

* Мат. сб., 1955, 36, 569—576.

Совокупность касательных векторов в G ко всем дифференцируемым путям $g(t)$, выходящим из e , будет касательным линейным пространством размерности r (см. [2]). Если $g(t)$, $h(t)$ — аналитические пути, выходящие из e и имеющие касательные векторы a , b , то касательный вектор $c = ab$ в e к пути $k(t)$, где $k(t^2) = g(t)h(t)[h(t)g(t)]^{-1}$, $p^{-1} = p \setminus e$, есть билинейная функция векторов a , b . Касательное линейное пространство с дополнительной операцией умножения $c = ab$ будет алгеброй, которую условимся называть касательной алгеброй локальной луны G (в данной системе координат).

Непрерывный путь $g(t)$, выходящий из e и определенный для малых t , называется однопараметрической подгруппой, если для малых s, t имеет место равенство $g(s+t) = g(s)g(t)$. Наконец, если в луне $z = xy$ и $z^i = f^i(x^1, \dots, x^r, y^1, \dots, y^r)$, то, полагая $v_j^i(x^1, \dots, x^r) = \frac{\partial}{\partial y^j} f^i(x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0)$, имеем следующую теорему:

Т е о р е м а 1. *Всякая однопараметрическая подгруппа $g(t)$, имеющая в e касательный вектор a , удовлетворяет системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{d}{dt} g^i(t) = v_a^i(g(t)) a^\alpha \quad (1)$$

с начальными условиями

$$g^i(0) = 0. \quad (2)$$

Обратно, всякое решение $g(t)$ этой системы с указанными начальными условиями в аналитической локальной альтернативной луне представляет однопараметрическую подгруппу*.

Доказательства теорем о возможности введения канонических координат, об инвариантности, о локальных подгруппах [2, гл. 6] опираются лишь на теорему 1 и потому имеют место и для альтернативных локальных лун.

Т е о р е м а 2. *Касательная алгебра аналитической локальной альтернативной луны является бинарно лиевой. Каждая бинарно лиева алгебра есть касательная алгебра одной и с точностью до локальных изоморфизмов только одной локальной альтернативной луны.*

Действительно, из альтернативности следует, что произведения вида $g(t_1)h(s_1)g(t_2)h(s_2)\dots g(t_n)h(s_n)$, где $g(t)$, $h(s)$ — произвольные однопараметрические подгруппы с данными касательными a , b , не зависят при малых $t_1, s_1, \dots, t_n, s_n$ от расстановки скобок, а потому подалгебра касательной алгебры, порожденная векторами a , b , лиева, т. е. сама алгебра бинарно лиева. Далее, вводя координаты первого рода и замечая, что однопараметрические подгруппы $g(t)$, $h(s)$ порождают ассоциативную локальную подгруппу, видим, что в луне в канонических координатах имеет место обычная формула Кемпбелла — Хаусдорфа $xy = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots$, позволяющая по алгебре восстановить луну. Эта же формула позволяет для каждой бинарно лиевой алгебры построить группоид, который будет альтернативной локальной луной с данной касательной алгеброй.

* Доказательство теоремы в оригинале содержит ошибку, хотя само утверждение справедливо даже в более общей формулировке (см. Е. Н. Кузьмин. О связи между алгебрами Мальцева и аналитическими лунами Муфанг. — Алгебра и логика, 1971, 10, № 1, 3—22). — Прим. ред.

Доказательства классических теорем о соответствии между локальными подгруппами и подалгебрами касательной алгебры опираются лишь на свойства однопараметрических подгрупп и потому остаются справедливыми и для альтернативных локальных луп.

2. Естественно ожидать, что требование аналитичности локальной альтернативной лупы скажется на структуре локальной лупы и повлечет за собой ряд следствий. Действительно, одно из таких следствий очевидно: поскольку касательная алгебра для коммутативной лупы является алгеброй, в которой произведение любых двух элементов равно нулю, а такие алгебры ассоциативны, то всякая аналитическая локальная альтернативная и коммутативная лупа является коммутативной группой. Аналогично получаем, что всякая аналитическая метабелева альтернативная локальная лупа является локальной группой.

Более существенными представляются, однако, свойства, связанные с гомоморфизмами. Если G — произвольная локальная лупа, то ее локальная подлупа H называется н о р м а л ь н о й, если существует такая окрестность U единицы G , что для любых x, y из U имеем

$$U \cap [(xH_1)*y] = U \cap [x*(yH_1)] = U \cap [(x*y)H_1], \quad (3)$$

где $*$ — любая из операций $\cdot, /, \backslash$, а $H_1 = U \cap H$. Очевидно, что замкнутые нормальные локальные подлупы и только они суть ядра непрерывных открытых гомоморфизмов.

Для аналитической локальной альтернативной лупы G условия (3) приводятся к одному обычному условию $x^{-1}H_1x \subset H$.

В самом деле, ядро гомоморфного отображения одной локальной лупы на другую удовлетворяет указанному условию и потому в касательной алгебре ему соответствует идеал. Обратно, если задан идеал, то гомоморфизм алгебр индуцирует гомоморфизм и в лупах, полученных из алгебр при помощи формулы Кемпбелла — Хаусдорфа.

3. Выше лупы рассматривались как системы с тремя основными операциями. Более обычно из трех упомянутых операций в качестве основной рассматривать умножение. В общем случае оба определения не эквивалентны. Однако для аналитических локальных систем простые замечания показывают равноправность указанных точек зрения. Именно, топологическое пространство G называется л о к а л ь н ы м г р у п п о и д о м, если в G определена частичная операция умножения, непрерывная в указанном выше смысле, и если G содержит единичный элемент e , для которого при всех $x \in G$ имеем $xe = ex = x$. Локальный группоид называется а н а л и т и ч е с к и м, если в некоторой окрестности его единицы можно ввести координаты, в которых закон умножения выражается аналитическими функциями. Пользуясь обычным образом теоремой о неявных функциях, непосредственно видим, что в G найдутся такие окрестности единицы U, V , что уравнение $xy = z$ при $x, z \in U$ будет иметь единственное решение $y = x \backslash z$ в V , а при $y, z \in U$ — единственное решение $x = z/y$ в V . Эти решения будут аналитически зависеть от своих аргументов. Беря их в качестве дополнительных операций правого и левого делений, мы обратим G в аналитическую локальную лупу.

4. Пусть A — произвольная алгебра над некоторым полем P . К о м м у т а т о р о м и а с с о ц и а т о р о м ее элементов называются соответственно выражения

$$[a, b] = ab - ba, \quad [a, b, c] = ab \cdot c - a \cdot bc.$$

Элементы A относительно определенных для них в A операций сложения, умножения на элементы из P и операции коммутирования, рассматриваемой в качестве нового умножения, условимся называть *коммутаторной алгеброй* A_k . В случае, когда A ассоциативна, коммутаторная алгебра A_k является левой. Если A альтернативна, то легко видеть, в частности, из дальнейшего, что A_k не обязательно левая, но заведомо бинарно левая. Однако коммутаторные алгебры альтернативных алгебр обладают более сильными свойствами, чем простая альтернативная левость. Условимся некоторую алгебру называть *ML-алгеброй* (Муфанг-Лиевой), если ее элементы удовлетворяют тождествам

$$x^2 = 0, \quad xy \cdot xz = x y z x + y z x x + z x x y. \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем, если встречается произведение нескольких сомножителей, то недостающие скобки следует расставлять слева направо, например $x(yz)uv$ означает $((x(yz))u)v$.

Теорема 3. *Коммутаторная алгебра A_k произвольной альтернативной алгебры A является ML-алгеброй.*

Действительно, второе из тождеств (4) равносильно такому

$$xy(xz) + y(xz)x + (xz)xy = (xyz + yzx + zxy)x. \quad (5)$$

Принимая во внимание, что в альтернативном кольце [3]

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = -6[u, v, w],$$

мы можем тождество (5), записанное в A_k , представить в A в виде тождества

$$6[x, y, xz - zx] = 6[x, y, z]x - 6x[x, y, z],$$

которое непосредственно следует из известных соотношений

$$[x, y, xz] = [x, y, z]x, \quad [x, y, zx] = x[x, y, z]$$

теории альтернативных колец.

Лупа называется *М-лупой* (лупой Муфанг), если все ее элементы удовлетворяют тождеству $xy \cdot zx = x(yz)x$. Локальную альтернативную лупу условимся называть *локальной М-лупой*, если указанному тождеству удовлетворяют все элементы некоторой окрестности единицы. Согласно Муфанг (см. [4]), любая ассоциативная тройка элементов M -лупы порождает ассоциативную подлупу и, в частности, всякая M -лупа является альтернативной.

Теорема 4. *Касательная алгебра локальной аналитической М-лупы есть ML-алгебра.*

Для доказательства достаточно ввести в лупу канонические координаты и вычислить по формуле Кемпбелла — Хаусдорфа произведения $xy \cdot zx$, $x(yz) \cdot x$. Сравнивая в полученных разложениях члены, содержащие x, x, y, z , придем к соотношению, равносильному тождеству (5).

5. Для элементов произвольной алгебры A с обычными операциями $+$, $\cdot$ можно ввести известную операцию присоединенного умножения $x \circ y = x + y + xy$. Относительно присоединенного умножения элементы A образуют группоид с единицей, которой является здесь нуль алгебры A . Этот группоид обозначим через A_p . Предполагая основное поле полем вещественных чисел, алгебру A можно рассматривать как топологическую, а группоид A_p — как топологический группоид. Пусть $e_1, \dots, e_r$ — некоторый

базис A и $e_i e_j = \sum a_{ij}^{\alpha} e_{\alpha}$ — таблица умножения для A . Если $x = x^1 e_1 + \dots + x^r e_r$, то $x^1, \dots, x^r$ можно рассматривать как координаты элемента x в группоиде A_p . Закон перемножения в A_p дается формулой $z^i = x^i + y^i + \sum a_{\alpha\beta}^i x^{\alpha} y^{\beta}$, и, следовательно, A_p — аналитический группоид с единицей. Вычисления, проведенные в [2, стр. 252], не используют каких-либо предположений ассоциативности и показывают, что структурные константы $c_{\alpha\beta}^i$ касательной алгебры для группоида A_p равны $a_{\alpha\beta}^i - a_{\beta\alpha}^i$. Следовательно, если x, y — элементы алгебры A , то, рассматривая их как элементы касательной алгебры для A_p , имеем

$$[x, y]^i = \sum (a_{\alpha\beta}^i - a_{\beta\alpha}^i) x^{\alpha} y^{\beta} = (xy - yx)^i,$$

т. е. касательной алгеброй присоединенного группоида A_p является коммутаторная алгебра A_k .

Если алгебра A содержит единицу e , то, представляя близкие к e элементы в виде $e + x$, принимая в качестве координат элемента $e + x$ компоненты x в каком-либо базисе и замечая, что соотношение $e + z = (e + x)(e + y)$ равносильно равенству $z = x + y + xy = x \circ y$, видим, что присоединенный группоид A_p локально изоморфен группоиду близких к e элементов A относительно обычной операции умножения. В случае, когда алгебра A альтернативна, близкие к e элементы содержатся в альтернативном группоиде всех обратимых элементов A , и, таким образом, коммутаторная алгебра вещественной альтернативной алгебры A с единицей есть касательная алгебра для альтернативного группоида всех обратимых элементов этой алгебры A .

6. Тройку элементов a, b, c какого-либо кольца назовем л и е в о й, если $abc + bca + cab = 0$.

Кольцо с тождеством $x^2 = 0$ называется а н т и к о м м у т а т и в н ы м. Заметим, что во всяком антикоммутативном кольце тройки вида x, x, y заведомо лиевы.

В известном смысле промежуточными между BL - и ML -кольцами являются кольца, которые условимся называть SL -кольцами. Именно, антикоммутативное кольцо называется SL -кольцом, если в нем каждая лиева тройка элементов удовлетворяет равенству

$$xy \cdot xz = x y x z - x y z x. \quad (6)$$

Кроме того, условимся говорить, что кольцо допускает сокращение на 6, если из $6x = 0$ в нем следует, что $x = 0$.

Т е о р е м а 5. В SL -кольце с сокращением на 6 каждая совокупность элементов, любые три из которых составляют лиеву тройку, порождает лиево подкольцо. В частности, всякое SL -кольцо с сокращением на 6 является бинарно лиевым.

Рассмотрим сначала четверку элементов u, v, w , любая тройка которых лиева. Заменяя в (6) x через $u + v$, а z — через w , получим

$$u v \cdot v w + u v \cdot u w = u v w + u v w - u v w - u v w. \quad (7)$$

Поскольку тройка x, x, y всегда лиева, то в SL -кольцах имеет место тождество $x u x = x u x$. Заменяя в нем x через $u + v$, а y — через $u + w$, получим

$$u v w + u v w + v u w + w u v = u v w + u v w + v u w + w u v,$$

что ввиду лиевости троек y, u, v и y, v, w можно переписать в виде

$$2yuvw + 2yvwu - yuiv - yvui = yuivv + yvuiw + y(uvw) + y(vwu).$$

Переставляя здесь u и v , вычитая из данного равенства полученное и сокращая результат на 3, будем иметь

$$y(uvw) = yuivv + yvuiw - yuiv - yvui. \quad (8)$$

Переставим в (7) сначала циклически буквы u, v, w , затем в (7) переставим буквы y, u и изменим знаки всех членов, полученные равенства сложим с исходными и в результирующем равенстве заменим член $y(uvw)$ его выражением из (8). После сокращения на 2 будем иметь

$$yu \cdot vw = yuivv - yvuiw. \quad (9)$$

Пусть теперь задана некоторая совокупность элементов $\{a_\alpha\}$ SL -кольца с сокращением на 6. Выражения вида $a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_n}$ с любой расстановкой скобок назовем *одночленами степени n* . Элементы подкольца, порожденного совокупностью $\{a_\alpha\}$, являются линейными комбинациями одночленов, и потому для доказательства лиевости подкольца достаточно доказать, что любая тройка одночленов z, v, w лиева. По условию тройки одночленов, сумма степеней которых равна 3, лиевы. По индукции предположим, что для троек, сумма степеней одночленов которых меньше, чем эта же сумма у данной тройки z, v, w , утверждение верно, и пусть степень z больше единицы. Тогда $z = yu$ и в силу индукции любая тройка элементов из четверки y, u, v, w лиева. Следовательно, указанные четыре элемента связаны соотношением (9), которое и показывает, что тройка z, v, w лиева.

Если x, y, z — лиева тройка элементов какого-либо ML -кольца, то, заменяя правую часть равенства (5) нулем и пользуясь антикоммутативностью, легко преобразуем это равенство к виду (6). Таким образом, всякое ML -кольцо является SL -кольцом. Из теоремы 3 следует теперь, что все ML -кольца с сокращением на 6 бинарно лиевы.

7. Покажем, наконец, что классы BL -, SL -, ML -колец и лиевых L -колец действительно различны. Прежде всего замечаем, что коммутаторная алгебра алгебры чисел Кэли, являясь в силу теоремы 1 ML -алгеброй, не есть алгебра Ли. Поэтому класс ML -алгебр шире класса алгебр Ли. Далее, легко проверить, что свободная алгебра с тремя образующими a, b, c и тождественными соотношениями $xyzu = 0$, где скобки следует расставить всевозможными способами, есть SL -алгебра, но не является ML -алгеброй. Наконец, BL -алгебра с образующими a, b, c и одним определяющим соотношением $abc + bca + cab = 0$ не есть SL -алгебра. Следовательно, классы BL -, SL -, ML - и L -алгебр различны.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. К общей теории алгебраических систем.— Мат. сб., 1954, 35, № 1, 3—20.
2. Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. М.— Л., 1938.
3. Л. А. Скорняков. Альтернативные тела.— Укр. мат. ж., 1950, 2, № 1, 70—85.
4. R. H. Bruck. Pseudo-automorphisms and Moufangs loops.— Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, N 1, 66—72.

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ О НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ*



В статье О. Н. Головина и Н. П. Гольдиной [6] путем непосредственных вычислений доказано, что в свободной метабелевой группе любые элементы, образы которых линейно независимы в фактор-группе по коммутанту, порождают свободную метабелевую подгруппу и являются свободными образующими этой подгруппы.

В § 1 настоящей заметки показывается, что аналогичная теорема имеет место для свободных нильпотентных групп произвольной конечной степени. Теорема эта является более или менее непосредственным следствием общих теорем работ [2, 3] и для доказательства особых вычислений не требует.

В § 2 подробно излагается алгоритм для решения проблемы тождества в нильпотентных группах, найденный мною несколько лет назад. Указание на существование такого алгоритма сделано в работе [4], однако П. С. Новиков и А. П. Дидман обратили мое внимание на желательность опубликования подробного изложения алгоритма, поскольку в упомянутой работе самый алгоритм не описан с достаточной ясностью.

§ 1. Свободные подгруппы свободных нильпотентных групп

Пусть V — свободная n -ступенно нильпотентная группа с r свободными образующими $v_1, \dots, v_r$. Положим $V^1 = V$, $V^{i+1} = [V, V^i]$, где $[A, B]$ — подгруппа, порожденная коммутаторами вида $(a, b) = a^{-1}b^{-1}ab$ ($a \in A$, $b \in B$). Согласно Витту [5], фактор-группа V^i/V^{i+1} есть свободная абелева группа ранга h_i . В частности, V — группа без кручения и потому может быть пополнена [2] до полной нильпотентной группы V^* . Обозначим через L алгебру Ли группы V^* . Так как фактор-группа V/V^i не имеет кручения, то пополнению V^{i*} подгруппы V^i отвечает в L идеал L^i , причем размерность L^i/L^{i+1} равна h_i .

Покажем, что L является свободной n -ступенно нильпотентной алгеброй Ли с r образующими над полем рациональных чисел.

В самом деле, известно [5], что для свободной n -ступенно нильпотентной алгебры Ли L_v с r образующими размерности фактор-алгебр L_v^i/L_v^{i+1} равны именно h_i . С другой стороны, справедлива

Л е м м а. Пусть A — алгебра с r образующими над бесконечным полем, удовлетворяющая некоторой системе тождеств, и S — свободная алгебра для указанной системы тождеств, имеющая то же число образующих. Если фактор-алгебры A_i/A_{i+1} какого-либо убывающего центрального ряда $A = A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ алгебры A имеют те же размерности, что и соответствующие фактор-алгебры нижнего центрального ряда свободной алгебры S , то A изоморфна S , а A_i — члены нижнего центрального ряда A .

* Мат. сб., 1955, 37, № 3, 567—572.

Эта лемма является аналогом теоремы 3 указанной выше работы О. Н. Головина и Н. П. Гольдиной, относящейся, впрочем, к метабелевым группам. Утверждение о свободе алгебры L непосредственно следует из леммы.

Доказательство леммы очевидно и вполне аналогично доказательству следующего утверждения о группах:

Пусть V — свободная или свободная n -ступенно нильпотентная группа с r образующими и W — группа, фактор-группы нижнего центрального ряда которой изоморфны соответствующим фактор-группам нижнего центрального ряда V . Тогда если W имеет r образующих, а в остальном произвольна или соответственно n -ступенно нильпотентна, то W изоморфна V .

Для полноты проведем доказательство в случае, когда V — свободная группа.

Рассмотрим естественное гомоморфное отображение $V \rightarrow W$ и допустим, что в V существует элемент $v \neq 1$, образ которого в W равен единице. По теореме Магнуса, найдется такое i , что $v \in V^i$. Пусть N/V^i — нормальный делитель фактор-группы V/V^i , порожденный в ней образом элемента v . Гомоморфизм $V \rightarrow W$ индуцирует гомоморфизм $V/N \rightarrow W/W^i$. Но последний гомоморфизм невозможен, так как ранг V/N меньше ранга V/V^i , ранг V/V^i равен рангу W/W^i , а ранг гомоморфного образа не может быть больше ранга самой группы. Тем самым утверждение доказано.

Т е о р е м а. Пусть V — свободная n -ступенно нильпотентная группа с произвольным числом свободных образующих $v_1, v_2, \dots, v_\sigma, \dots$. Для того чтобы некоторые элементы a_α группы V порождали в V свободную n -ступенно нильпотентную подгруппу, свободными образующими которой они бы являлись, необходимо и достаточно, чтобы образы элементов a_α в фактор-группе V/V^2 были линейно независимы.

Элементы группы V можно рассматривать как элементы свободной n -ступенно нильпотентной алгебры Ли L , групповая операция которой связывается с кольцевыми операциями L формулами Кемпбелла — Хаусдорфа. Элементы коммутанта V^2 содержатся в L^2 , а потому линейная независимость элементов a_α в V/V^2 равносильна их линейной независимости по модулю L^2 . Пусть элементы a_α из V линейно независимы в V/V^2 и, следовательно, в L/L^2 . Дополним их множество элементами b_β до базиса в L/L^2 . Согласно [3] система a_α, b_β есть независимая система образующих для L , и потому найдется автоморфизм θ алгебры L , переводящий указанную систему в заданную независимую систему образующих v_σ . Этот автоморфизм переведет подгруппу, порождаемую элементами a_α , в подгруппу, порождаемую некоторыми элементами, принадлежащими множеству v_σ . Так как согласно [3] любая подсистема свободных образующих свободна, то подгруппа, порожденная элементами, принадлежащими системе v_σ , а вместе с нею и подгруппа, порожденная элементами a_α , будут свободны.

Для доказательства необходимости предположим, что среди заданной системы элементов a_α элемент a_λ по модулю V^2 линейно зависит от элементов $a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_m}$. Это значит, что для некоторых отличных от нуля целых

$t_1, \dots, t_m, t$ имеем $a_{\alpha_1}^{t_1} \dots a_{\alpha_m}^{t_m} a_\lambda^{-t} \in V^2$. По условию элементы $a_\lambda, a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_m}$ являются свободными образующими в порождаемой ими свободной n -ступенно нильпотентной подгруппе, которую обозначим через B . Тогда образы этих элементов будут, линейно независимы по модулю B^2 и, в частности, будут по этому модулю линейно независимы элементы $a_\lambda^t = b$

и $a_{x_1}^{t_1} \dots a_{x_m}^{t_m} = c$. Ввиду доказанной достаточности отсюда следует, что b и c порождают свободную n -ступенно нильпотентную подгруппу, а следовательно, и свободную n -ступенно нильпотентную подалгебру в алгебре L . Но в алгебре L имеем $b = c + u$, $u \in L^2$, откуда $[b, c^{-n}] = 0$, что невозможно, так как в свободной n -ступенно нильпотентной алгебре с образующими b, c известно $[b, c^{-n}] \neq 0$, что и требовалось.

§ 2. Проблема тождеств

Задача ставится следующим образом. Даны образующие $v_1, \dots, v_r$ группы G и ее определяющие соотношения $a_i(v_1, \dots, v_r) = 1$ ($i = 1, 2, \dots, q$), причем заранее предполагается, что группа удовлетворяет тождеству $(\dots((x_1, x_2), x_3), \dots, x_{n+1}) = 1$, где $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$. Требуется указать регулярный алгоритм, позволяющий решить вопрос о равенстве в G двух элементов, заданных в виде произведений степеней образующих.

Если абелева группа с теми же определяющими соотношениями, что и G , имеет конечный порядок, то группа G также конечна и верхняя граница ее порядка легко записывается как функция от порядка нильпотентности n и порядка указанной абелевой группы. Это сразу же дает возможность указать требуемый алгоритм, так как число неизоморфных групп данного порядка конечно. Для той же цели в рассматриваемом случае пригоден и алгоритм Шрейера нахождения определяющих соотношений для подгрупп конечного индекса.

Столь же просто решается задача и в случае, когда известно, что группа G без кручения. Дело в том, что тогда группа G допускает точное представление матрицами, степень которого зависит лишь от числа образующих и числа n . Записав элементы v_i матрицами $\|\alpha_{kl}^i\|$ с неопределенными элементами α_{kl}^i , получим вместо соотношений $a_i = 1$ систему равенств между неизвестными α_{kl}^i . После этого вопрос о равенстве какого-либо слова $v_{i_1}^{t_1} \dots v_{i_m}^{t_m}$ единице сводится к вопросу о том, является ли равенство $\|\alpha_{kl}^{i_1}\|^{t_1} \dots \|\alpha_{kl}^{i_m}\|^{t_m} = E$ следствием равенств $a_i = 1$ в кольце многочленов от α_{kl}^i с комплексными коэффициентами, а последний вопрос, как известно [1, гл. 11], разрешим алгоритмически.

Переходя к рассмотрению общего случая, обозначим через V свободную n -ступенно нильпотентную группу с образующими $v_1, \dots, v_r$. Группа V — без кручения и потому обладает таким базисом $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_s$, в котором каждый элемент $v \in V$ однозначно записывается в виде

$$v = v_1^{\alpha_1} \dots v_r^{\alpha_r} v_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \dots v_s^{\alpha_s}, \quad (1)$$

где α_i — целые рациональные числа, причем имеют место следующие формулы коммутации:

$$a_j^{\delta} a_i^{\varepsilon} = a_i^{\varepsilon} a_j^{\delta} a_{j+1}^{\zeta_{j+1}} \dots a_s^{\zeta_s} \quad (\zeta_k = \zeta_k(i, j, \varepsilon, \delta); \quad i < j; \varepsilon, \delta = \pm 1). \quad (2)$$

Выражения элементов базиса через образующие и числа ζ_k легко найти, используя, например, представление свободной группы в свободном кольце Магнуса. Поскольку соотношения (2) позволяют находить каноническую запись произведения двух элементов, заданных канонически, то соотношения

(2) можно рассматривать как полную систему определяющих соотношений свободной нильпотентной группы в образующих $a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_s$.

Погрузим группу V в нильпотентную группу Ли, элементы которой представляются в той же форме (1), но с произвольными вещественными параметрами $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. Если a, b — элементы этой группы Ли, имеющие соответственно параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ и $\beta_1, \dots, \beta_s$, то параметры элемента $c = ab$ будут выражаться формулами

$$\gamma_i = \Gamma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s) \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (3)$$

где Γ_i — многочлены степени не выше n от своих аргументов. Эти многочлены можно найти или при помощи формул (2), используя метод неопределенных коэффициентов, или при помощи формулы Хаусдорфа — Кемпбелла. По самому своему смыслу многочлены Γ_i — целозначные, т. е. при целых значениях аргументов принимают целые значения. Из аналогичных соображений следует, что в рассматриваемой группе имеет место формула

$$(v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \dots v_s^{\alpha_s})^t = v_1^{p_1(\alpha, t)} \dots v_s^{p_s(\alpha, t)}, \quad (4)$$

где $p_i(\alpha, t)$ — многочлены от $\alpha_1, \dots, \alpha_s, t$ степени не выше $n + 1$, целозначные и допускающие эффективное нахождение.

Рассмотрим теперь следующую вспомогательную задачу: в нормальном делителе группы V , порожденном конечным числом элементов, заданных в канонической форме (1), найти такие образующие, через которые все его элементы выражались бы в виде конечных произведений.

Поскольку одной из возможных систем образующих является система заданных элементов и всех их сопряженных, то дело сводится к следующему: *из системы, состоящей из данного элемента и всех его сопряженных, выбрать такую конечную подсистему элементов, через которые все остальные выражаются в виде конечных произведений.*

Применяя формулы (3), (4), найдем, что

$$v^{-1} x v = v_1^{q_1(\alpha)} v_2^{q_2(\alpha)} \dots v_s^{q_s(\alpha)},$$

где x — данный элемент, v — произвольный элемент с разложением (1), $q_i(\alpha)$ — многочлены от $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, принимающие целые значения при целых значениях аргументов. В силу известных свойств целозначных многочленов $q_i(\alpha)$ можно представить как линейную комбинацию $Q_i(\alpha)$ -произведений факториальных степеней переменных, т. е. выражений вида $\alpha^m = [\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - m + 1)]/m!$, с целыми коэффициентами.

Обозначая через d_1 наибольший общий делитель коэффициентов многочлена $Q_1(\alpha)$, видим, что d_1 будет наибольшим общим делителем чисел $q_1(i_1, \dots, i_s)$, где i_λ независимо друг от друга пробегает значения от нуля до степени n_λ многочлена q_1 относительно α_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, s$). Поэтому

$$d_1 = \sum_{i_\alpha} \lambda(\alpha) q_1(\alpha) \quad (\alpha = (i_1, \dots, i_s))$$

при подходящих целых $\lambda(\alpha)$. Полагаем теперь

$$x_1 = \prod [v^{-1}(\alpha) x v(\alpha)]^{-\lambda(\alpha)} = v_1^{-d_1} \dots v_s^{m_1},$$

$$y_1(\alpha) = v^{-1}(\alpha) x v(\alpha) x_1^{q_1(\alpha) d_1^{-1}} = v_2^A \dots v_s^A,$$

где $A_i(\alpha)$ — факториальные многочлены с целыми коэффициентами. Пусть d_2 — наибольший общий делитель коэффициентов A_2 и

$$d_2 = \sum_{\alpha} \mu(\alpha) A_2(\alpha),$$

где $\mu(\alpha)$ — подходящие целые числа. Полагаем

$$x_2 = \prod [y_1(\alpha)]^{-\mu(\alpha)} = v_2^{-d_2} \dots v_s^{m_s},$$

$$y_2(\alpha) = y_1(\alpha) x_2^{A_2(\alpha)d_2^{-1}} = v_2^{B_2} \dots v_s^{B_s}$$

и аналогичным образом продолжаем этот процесс далее. Получающаяся система элементов $x_1, x_2, \dots, x_s$, очевидно, обладает тем свойством, что каждый из них выражается через элементы вида $v^{-1}xv$ и, наоборот, каждый элемент последнего вида выражается через полученные элементы, что и требовалось.

Рассмотрим теперь основную задачу о нахождении алгоритма для проблемы тождества в нильпотентных группах. Пусть требуется узнать, равно ли единице слово a в n -ступенно нильпотентной группе G с данными образующими и данными определяющими соотношениями $a_1 = a_2 = \dots = a_q = 1$.

Во вспомогательной n -ступенно нильпотентной группе V с образующими $v_1, \dots, v_r$ слова $a_1, \dots, a_q$ при помощи соотношений (2) приводим к канонической форме. Замену в системе $a_1, \dots, a_q$ какого-либо слова a_i словом a_i^{-1} или словом $a_i a_j^{-1}$ ($i \neq j$) назовем элементарным преобразованием системы. Как и в теории абелевых групп, при помощи конечной цепочки элементарных преобразований и подходящей нумерации образующих данную систему слов $a_1, \dots, a_q$ заменяем либо системой вида

$$b_1 = v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \dots v_r^{\alpha_r} \dots v_s^{\alpha_s},$$

$$b_2 = v_2^{\beta_2} \dots v_r^{\beta_r} \dots v_s^{\beta_s}, \quad (\alpha_1 \beta_2 \dots \gamma_r \neq 0)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$b_r = v_r^{\gamma_r} \dots v_s^{\gamma_s},$$

$$\dots \dots \dots$$

либо системой вида

$$b_i = v_2^{\alpha_{2i}} \dots v_s^{\alpha_{si}} \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Так как соотношения $b_1 = \dots = b_q = 1$ дают систему определяющих соотношений для группы G , то в первом случае фактор-группа G/G^2 , а следовательно, и самая группа G конечны. Поэтому интерес представляет лишь второй случай. Группу G тогда можно представить в виде полупрямого произведения бесконечной циклической группы с образующим v_1 и нормального делителя G_2 , состоящего из тех элементов G , нормальная запись которых не содержит v_1 . Порождающими элементами G_2 будем считать элементы $v_1, \dots, v_s$. Равенства (2) при $i, j \geq 2$ и приравненные единице образующие нормального делителя группы V , порожденного словами $b_1, \dots, b_q$, дают полную систему определяющих соотношений для G_2 . Процесс нахождения этих образующих был указан выше.

ГРУППЫ И ДРУГИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ *



§ 1. Введение

В гл. IV (том 1)**, посвященной алгебре многочленов, уже шла речь об основных путях развития алгебры, ее месте среди других математических дисциплин, об изменениях во взглядах на самый предмет алгебры. Цель настоящей главы заключается в том, чтобы дать читателю представление о тех новых алгебраических теориях, которые, возникнув еще в прошлом веке, достигли полного развития в текущем столетии и оказали большое влияние на современные математические исследования.

Современная алгебра, так же как классическая, есть учение о действиях, о правилах вычислений. Но она не ограничивается изучением свойств действий над числами, а стремится изучать свойства действий над элементами все более общей природы. Эта тенденция диктуется потребностями практики. Так, в механике складываются силы, скорости, повороты. В линейной алгебре (см. гл. XVI), идеи и методы которой находят широкое применение в практических расчетах, областью действий являются матрицы, линейные преобразования, векторы n -мерного пространства.

Особо выдающуюся роль в современной алгебре играет теория групп, которой и будет посвящена большая часть этой главы. Из других алгебраических теорий мы остановимся на теории гиперкомплексных систем, являющейся необходимым и важным этапом в историческом процессе развития понятия числа. Этими двумя теориями, конечно, далеко не исчерпывается содержание современной алгебры, но ее идеи и методы освещаются ими достаточно ясно.

Теория групп возникла из необходимости найти аппарат для изучения таких важных закономерностей реального мира, как закономерность симметрии.

Познание свойств симметрии каких-либо геометрических тел или других математических и физических объектов иногда дает ключ к выяснению строения этих тел и объектов. Однако, несмотря на всю наглядность понятия симметрии, точная и общая формулировка того, что такое симметрия, и в особенности количественный учет свойств симметрии требуют использования аппарата теории групп.

Теория групп возникла сравнительно давно: в конце XVIII и начале XIX в. Первоначально она развивалась лишь как вспомогательный аппарат для задачи о решении уравнений высших степеней в радикалах. Это было вызвано тем, что именно в указанной задаче впервые было замечено, что свойства равноправности, симметрии корней уравнения являются основными для решения всей задачи. В течение XIX и XX вв. важная роль закономерностей

* В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение, т. 3. Изд-во АН СССР, 1956, стр. 248—331.

** Здесь и в дальнейшем автор ссылается на книгу «Математика, ее содержание, методы и значение». — *Прим. ред.*

Если испытываемое слово a имеет вид $a = v_1^{\lambda_1} v_2^{\lambda_2} \dots v_s^{\lambda_s}$, где $\lambda_1 \neq 0$, то $a \in G_2$ и потому $a \neq 1$. Если же $\lambda_1 = 0$, то a принадлежит группе G_2 , n -ступенно нильпотентной, образующие и определяющие соотношения которой вычислимы. Применив изложенный процесс к группе G_2 , мы либо решим вопрос об a , либо придем к группе G_3 и т. д. Цепочка подгрупп G_3 оборвется через конечное число шагов, так как ранг каждой следующей подгруппы на единицу меньше ранга предыдущей. Под рангом здесь подразумевается число бесконечных циклических факторов в нормальном ряде с циклическими факторами.

В заключение отметим, что интересная проблема изоморфизма нильпотентных групп с конечным числом определяющих соотношений, а также проблема тождества для разрешимых групп остаются открытыми *.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Л. Ван дер Варден. Современная алгебра, т. 2. М.—Л., 1947.
2. А. И. Мальцев. Об одном классе однородных пространств.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, 13, № 1, 9—32.
3. А. И. Мальцев. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями.— Мат. сб., 1950, 26, № 1, 19—33.
4. R. C. Lyndon. Two notes on nilpotent groups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, N 4, 579—583.
5. E. Witt. Treue Darstellung Liescher Ringe.— J. reine und angew. Math., 1937, 177, N 3, 152—160.
6. О. Н. Головин, Н. П. Гольдина. Подгруппы свободных метабелевых групп.— Мат. сб., 1955, 37, № 2, 323—336.

* Проблема равенства слов для разрешимых групп ступени разрешимости пять решается отрицательно: В. Н. Ремесленников. Пример разрешимой группы, конечно определенной в $\mathfrak{A}^5$, с неразрешимой проблемой равенства слов.— Алгебра и логика, 1973, 12, № 5, 577—602.— Приж. ред.

где $A_i(\alpha)$ — факториальные многочлены с целыми коэффициентами. Пусть d_2 — наибольший общий делитель коэффициентов A_2 и

$$d_2 = \sum_{\alpha} \mu(\alpha) A_2(\alpha),$$

где $\mu(\alpha)$ — подходящие целые числа. Полагаем

$$x_2 = \prod [y_1(\alpha)]^{-\mu(\alpha)} = v_2^{-d_2} \dots v_s^{m_s},$$

$$y_2(\alpha) = y_1(\alpha) x_2^{A_2(\alpha)d_2^{-1}} = v_3^{B_3} \dots v_s^{B_s}$$

и аналогичным образом продолжаем этот процесс далее. Получающаяся система элементов $x_1, x_2, \dots, x_s$, очевидно, обладает тем свойством, что каждый из них выражается через элементы вида $v^{-1}xv$ и, наоборот, каждый элемент последнего вида выражается через полученные элементы, что и требовалось.

Рассмотрим теперь основную задачу о нахождении алгоритма для проблемы тождества в нильпотентных группах. Пусть требуется узнать, равно ли единице слово a в n -ступенно нильпотентной группе G с данными образующими и данными определяющими соотношениями $a_1 = a_2 = \dots = a_q = 1$.

Во вспомогательной n -ступенно нильпотентной группе V с образующими $v_1, \dots, v_r$ слова $a_1, \dots, a_q$ при помощи соотношений (2) приводим к канонической форме. Замену в системе $a_1, \dots, a_q$ какого-либо слова a_i словом a_i^{-1} или словом $a_i a_j^{-1}$ ($i \neq j$) назовем элементарным преобразованием системы. Как и в теории абелевых групп, при помощи конечной цепочки элементарных преобразований и подходящей нумерации образующих данную систему слов $a_1, \dots, a_q$ заменяем либо системой вида

$$b_1 = v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \dots v_r^{\alpha_r} \dots v_s^{\alpha_s},$$

$$b_2 = v_2^{\beta_2} \dots v_r^{\beta_r} \dots v_s^{\beta_s}, \quad (\alpha_1 \beta_2 \dots \gamma_r \neq 0)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$b_r = v_r^{\gamma_r} \dots v_s^{\gamma_s},$$

$$\dots \dots \dots$$

либо системой вида

$$b_i = v_2^{\alpha_{2i}} \dots v_s^{\alpha_{si}} \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Так как соотношения $b_1 = \dots = b_q = 1$ дают систему определяющих соотношений для группы G , то в первом случае фактор-группа G/G^2 , а следовательно, и самая группа G конечны. Поэтому интерес представляет лишь второй случай. Группу G тогда можно представить в виде полупрямого произведения бесконечной циклической группы с образующим v_1 и нормального делителя G_2 , состоящего из тех элементов G , нормальная запись которых не содержит v_1 . Порождающими элементами G_2 будем считать элементы $v_1, \dots, v_s$. Равенства (2) при $i, j \geq 2$ и приравненные единице образующие нормального делителя группы V , порожденного словами $b_1, \dots, b_q$, дают полную систему определяющих соотношений для G_2 . Процесс нахождения этих образующих был указан выше.

симметрии выявилась во многих других разделах науки: геометрии, кристаллографии, физике, химии. Благодаря этому методы и результаты теории групп получили широкое распространение. Поскольку каждая область приложений ставила перед теорией групп свои особенные задачи, рост числа этих областей оказывал и обратное воздействие, вызывая развитие новых отделов теории групп, приведшее к тому, что современная теория групп, являясь единой по своим основным понятиям, фактически распадается на ряд более или менее самостоятельных дисциплин: общая теория групп, теория конечных групп, теория непрерывных групп, дискретные группы преобразований, теория представлений и характеров групп. Постепенно развиваясь, методы и понятия теории групп оказались важными не только для изучения закономерностей симметрии, но и для решения многих других вопросов.

В настоящее время понятие группы стало одним из важнейших обобщающих понятий современной математики, а теория групп заняла видное место среди математических дисциплин. Выдающийся вклад в развитие теории групп и ее приложений внесли Е. С. Федоров, О. Ю. Шмидт, Л. С. Понтрягин. Исследования советских математиков в области теории групп занимают ведущее место и в современном развитии этой теории.

§ 2. Симметрия и преобразования

Простейшие виды симметрии. Начнем с напоминания простейших видов симметрии, знакомых читателю из повседневной жизни. Одним из таких видов симметрии является зеркальная симметрия геометрических тел или симметрия относительно плоскости.

Точка A пространства называется симметричной точке B относительно плоскости α (рис. 1), если плоскость пересекает отрезок AB в его середине перпендикулярно этому отрезку. Говорят также, что точка B является зеркальным образом точки A относительно плоскости α . Геометрическое тело называется симметричным относительно плоскости, если эта плоскость разбивает тело на две части, из которых каждая является зеркальным отражением другой относительно данной плоскости. Сама плоскость называется в этом случае плоскостью симметрии тела. Зеркальная симметрия очень распространена в природе. Например, форма человеческого тела, форма тела зверей, птиц имеет обычно плоскость симметрии.

Симметрия относительно прямой определяется аналогичным образом. Говорят, что точки A , B лежат симметрично относительно прямой, если эта прямая пересекает отрезок AB в его средней точке и перпендикулярна AB (рис. 2). Геометрическое тело называется симметричным относительно прямой или имеющим эту прямую своей осью симметрии 2-го порядка, если для каждой точки тела симметричная точка также принадлежит телу.

Тело, имеющее ось симметрии 2-го порядка, совмещается с собой при повороте тела вокруг этой оси на половину полного поворота, т. е. на угол в 180° .

Понятие оси симметрии естественным образом обобщается. Прямая называется осью симметрии порядка n для данного тела, если это тело совмещается с собой при повороте вокруг оси на угол $360^\circ/n$. Так, правильная пирамида, основанием которой является правильный n -угольник, имеет ось симметрии порядка n прямую, соединяющую вершину пирамиды с центром основания (рис. 3).

Прямая называется осью вращения тела, если тело совмещается с собой при повороте вокруг оси на любой угол. Так, оси цилиндра и конуса, любой диаметр шара суть их оси вращения. Ось вращения является вместе с тем осью симметрии любого порядка.

Наконец, важным типом симметрии является также симметрия относительно точки или центральная симметрия. Точки A и B называются симметричными относительно центра O , если отрезок, соединяющий точки A и B , делится точкой O пополам. Тело называется симметричным относительно

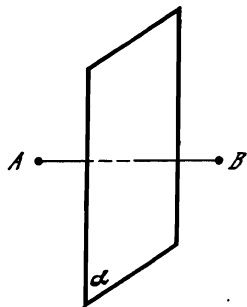


Рис. 1

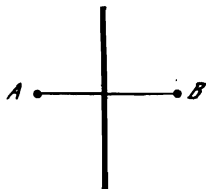


Рис. 2

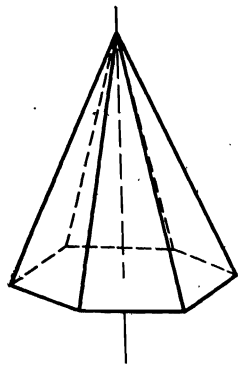


Рис. 3

центра O , если все его точки распадаются на пары точек, симметричных относительно O . Примерами центрально симметричных тел могут служить шар и куб, центры которых являются их центрами симметрии (рис. 4).

Знание всех плоскостей, осей и центров симметрии тела дает довольно полное представление о свойствах его симметрии.

Однако понятие симметрии имеет смысл не только в применении к геометрическим фигурам. Например, имеет совершенно ясный смысл утверждение, что в многочлене $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ переменные x_1, x_2, x_3, x_4 входят симметрично, а в многочлене $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ входят симметрично переменные x_1 и x_4, x_2 и x_3 , в то время как, например, переменные x_1 и x_2 играют различную роль. Число таких примеров можно легко увеличить. Это заставляет поставить важный вопрос: что же такое симметрия в общем случае и как можно математически учитывать отношения симметрии? Оказывается, точный ответ на этот вопрос связан с понятием преобразования, которое уже много раз встречалось в этой книге, начиная с самых первых ее глав. Чтобы иметь возможность дать общее определение симметрии, охватывающее такие разнородные случаи, как симметрия пространственных тел и симметрия многочленов, необходимо и понятие преобразования сформулировать в очень общем виде.

Преобразования. Пусть M обозначает конечную или бесконечную совокупность совершенно произвольных объектов. Например, M может быть совокупностью чисел $1, 2, \dots, n$, совокупностью независимых переменных x_1, x_2, x_3, x_4 , множеством всех точек плоскости. Если каждому элементу множества M поставлен в соответствие вполне определенный элемент того же множества, то говорят, что задано преобразование множества M . Каждое преобразование конечного множества M можно задать посредством таблицы,

состоящей из двух строк: в верхней строке пишутся в произвольном порядке обозначения элементов множества M и под каждым из них записывается обозначение соответствующего ему элемента. Например, таблица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ обозначает преобразование совокупности чисел 1, 2, 3, 4, при котором числа 1, 2, 3, 4 переходят соответственно в числа 2, 3, 2, 1. Располагая в верхней строке числа 1, 2, 3, 4 в порядке 3, 4, 1, 2, мы можем то же самое преобразование записать и таблицей $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Если множество M бесконечно, но имеется возможность перечислить (перенумеровать) его элементы, расположив их обозначения в одну строку (например, если M есть множество всех чисел натурального ряда 1, 2, 3, ...), то преобразование можно задавать аналогичным образом.

Изучая преобразования, нужно ввести для них целесообразные обозначения. Будем обозначать преобразования просто буквами A , B и т. д., причем если какое-либо преобразование множества M будет обозначено буквой A , то через tA , где t — произвольный элемент из M , будет обозначаться образ элемента t , т. е. тот элемент, в который переходит t при преобразовании A . Пусть, например $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, тогда

$$1A = 2, \quad 2A = 3, \quad 3A = 2, \quad 4A = 1.$$

Укажем несколько преобразований, играющих важную роль в геометрии.

Выберем в пространстве какую-либо прямую a и поставим в соответствие каждой точке P пространства точку Q , получаемую путем поворота точки P вокруг оси a на фиксированный угол φ (рис. 5). Тем самым мы определили преобразование совокупности всех точек пространства, называемое поворотом пространства на угол φ вокруг оси a .

Заметим, что слово «поворот» в механике означает некоторый процесс, в результате которого точки тела переходят в новое положение. Здесь же термин «поворот» употребляется в смысле преобразования пространства. При этом отвлекаются от самого процесса движения и рассматривают только его конечный результат — соответствие начального и конечного положения точек.

Другим важным преобразованием пространства является параллельный перенос всех точек в данном направлении на заданное расстояние. Из рис. 6, на котором для произвольных точек P_1, P_2, P_3 указаны соответствующие точки Q_1, Q_2, Q_3 , видно, что, зная при параллельном переносе соответствующую точку лишь для одной точки пространства, можно найти соответственные точки для всех других точек пространства.

Выше были определены понятия плоскости, оси и центра симметрии пространственной фигуры. Каждому из этих понятий отвечает определенное преобразование пространства: отражение относительно плоскости, вращение относительно прямой и отражение относительно центра. Например, отра-

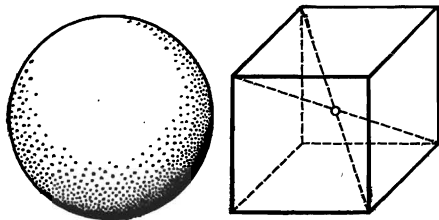


Рис. 4

жение относительно плоскости есть преобразование, при котором каждой точке пространства ставится в соответствие точка, симметричная относительно этой плоскости. Аналогично определяется вращение относительно прямой и отражение относительно центра.

Мы говорили о преобразованиях пространства. Соответствующие преобразования плоскости: поворот плоскости вокруг ее точки на данный угол, параллельный перенос плоскости по самой себе в данном направлении, отра-

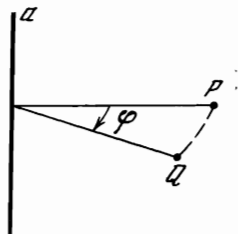


Рис. 5

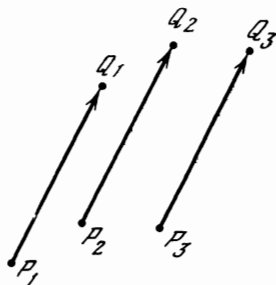


Рис. 6

жение относительно прямой, лежащей в плоскости, — определяются аналогичным образом и являются еще более наглядными, чем аналогичные преобразования пространства.

Взаимно однозначные преобразования. При рассмотрении всевозможных преобразований одного и того же множества прежде всего замечается фундаментальное различие между взаимно однозначными отображениями множества на себя и отображениями не взаимно однозначными. Преобразование A множества M называется взаимно однозначным отображением этого множества на себя, если не только каждому элементу множества M отвечает определенный единственный элемент множества M — это содержится в определении преобразования, — но если также для каждого элемента y множества M существует один и только один элемент x , который переходит в элемент y . Иными словами, преобразование A является взаимно однозначным, если «уравнение» $xA = y$ для каждого y из M имеет одно и только одно «решение» x в M .

Все рассмотренные выше преобразования пространства — отражения, повороты и переносы — являются взаимно однозначными, так как при этом не только для каждой точки X существует точка, в которую X переходит, но также существует единственная точка, которая переходит в X .

Легко привести и противоположные примеры; так, преобразование множества чисел 1, 2, 3, 4, заданное таблицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, не является взаимно однозначным, так как при нем в число 4 ничто не переходит. Преобразование множества всех натуральных чисел 1, 2, 3, ..., заданное таблицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \dots \end{pmatrix}$, также не является взаимно однозначным. Хотя здесь для каждого числа n имеется число $2n$, которое в него переходит, но число $2n$ не единственное, обладающее этим свойством, поскольку $2n - 1$ также переходит в n . Вообще для преобразований, заданных таблицами, очень легко

установить признак, при котором преобразования будут взаимно однозначными. Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы в нижней строке таблицы встречался каждый элемент множества и притом только один раз.

Иногда в математике рассматривают и не взаимно однозначные преобразования. Например, известно, какое большое значение имеет операция проектирования пространства на плоскость. Это преобразование не взаимно однозначное, так как при нем в каждую точку проектируется не одна, а целый ряд точек пространства. Но в большинстве случаев приходится иметь дело лишь с взаимно однозначными преобразованиями; эти преобразования, в частности, играют основную роль, когда рассматриваются физические процессы, при которых элементы изучаемой системы не сливаются друг с другом, не уничтожаются и не возникают.

В дальнейшем, говоря о преобразованиях, мы будем подразумевать преобразования взаимно однозначные; их часто называют также подстановками, особенно в случаях, когда речь идет о преобразованиях конечного множества.

Для каждого (взаимно однозначного) преобразования A множества M на себя легко определить обратное преобразование A^{-1} . Если преобразование A переводит произвольный элемент x множества M в элемент y , то преобразование, переводящее элемент y в x , называется обратным преобразованием A и обозначается A^{-1} . Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, то $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; если A — поворот пространства вокруг оси на угол φ , то A^{-1} —

поворот вокруг той же оси на угол φ в противоположном направлении, и т. д.

Иногда может случиться, что обратное преобразование будет совпадать с данным. Таким свойством, в частности, обладают отражения относительно плоскости или точки в пространстве. Тем же свойством обладает подстановка $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, так как $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Заметим, что говорить об обратном преобразовании для преобразований не взаимно однозначных нельзя, так как эти преобразования в отдельные элементы могут или ничего не переводить или переводить несколько элементов.

Общее определение симметрии. В математике и ее приложениях очень редко возникает потребность рассмотрения всех преобразований данного множества. Дело в том, что сами множества редко приходится мыслить только как простое объединение своих элементов, ничем не связанных друг с другом. Это и естественно, так как множества, рассматриваемые в математике, являются отвлеченными образами реальных совокупностей, элементы которых всегда находятся в бесконечном числе взаимосвязей друг с другом и в связях с тем, что находится за пределами рассматриваемого множества. При этом в математике приходится отвлекаться от большей части этих связей, но наиболее существенные сохранять и учитывать. Это заставляет в первую очередь рассматривать такие преобразования множества, которые не нарушают тех или иных учитываемых связей между элементами. Такие преобразования часто называют допустимыми преобразованиями или *автоморфизмами* по отношению к учитываемым связям элементов множества. Например, для точек пространства важным является понятие расстояния между двумя точ-

ками. Наличие этого понятия учитывает связь между точками, заключающуюся в том, что любые две точки находятся на определенном расстоянии одна от другой. Преобразованиями, не нарушающими этих связей, являются такие преобразования, при которых расстояния между точками не изменяются. Эти преобразования называются «*движениями*» пространства.

Пользуясь понятием автоморфизма, не трудно дать общее определение симметрии. Пусть дано некоторое множество M , в котором учитываются определенные связи между элементами, и пусть P есть некоторая часть M . Говорят, что совокупность P симметрична или инвариантна относительно допустимого преобразования A множества M , если преобразование A переводит каждый элемент множества P снова в элемент множества P . Поэтому симметрия множества P характеризуется совокупностью допустимых преобразований объемлющего множества M , преобразующих P в себя. Понятие симметрии тел в пространстве вполне подходит под данное определение. Роль множества M играет все пространство, роль допустимых преобразований — «*движения*», роль P — данное тело. Симметрия тела P характеризуется, таким образом, совокупностью движений, при которых тело P совмещается с собой.

Рассмотренные ранее отражения, параллельные переносы и повороты пространства около заданной прямой являются частными случаями движений, так как расстояния между точками при этих преобразованиях, очевидно, не меняются. Более подробное исследование показывает, что каждое движение плоскости есть либо перенос, либо поворот около центра, либо отражение относительно прямой, либо комбинация отражения относительно прямой с переносом вдоль этой прямой. Аналогично каждое движение пространства есть либо параллельный перенос, либо поворот около оси, либо винтовое движение, т. е. поворот вокруг оси, сопровождаемый переносом вдоль этой оси, либо же отражение относительно плоскости, сопровождаемое, может быть, еще переносом вдоль плоскости отражения или поворотом вокруг перпендикулярной к этой плоскости оси.

Параллельные переносы, повороты и винтовые движения пространства называются его собственными движениями, или движениями 1-го рода. Остальные «*движения*» (включающие в себя отражение) носят название несобственных движений, или движений 2-го рода. На плоскости движениями 1-го рода будут параллельные переносы и повороты, а отражения относительно прямой и отражения, сопровождаемые поворотом или переносом, будут движениями 2-го рода.

Легко сообразить, что преобразования, являющиеся движениями 1-го рода, можно получить как результат непрерывного движения пространства самого в себе или плоскости самой по себе. Движения 2-го рода таким образом получить невозможно, так как этому препятствуют зеркальные отражения, входящие в их состав.

Часто говорят, что плоскость симметрична во всех своих частях или что все точки плоскости равноправны. На точном языке преобразований это утверждение означает, что любую точку плоскости можно совместить с любой другой ее точкой посредством подходящего «*движения*».

Рассмотренные ранее случаи симметрии тел или фигур также охватываются общим определением симметрии. Так, например, тело, симметричное относительно плоскости α , совмещается само с собой при отражении относительно плоскости α ; тело, симметричное относительно центра O , совмещается само с собой при отражении относительно O . Поэтому степень симметричности

тела или пространственной фигуры вполне характеризуется совокупностью тех движений 1-го и 2-го рода пространства, которые совмещают тело или фигуру саму с собой. Чем богаче и разнообразнее указанная совокупность движений, тем большей степенью симметричности обладает тело или фигура. В частности, если эта совокупность не содержит никаких движений, кроме тождественного преобразования, то тело можно назвать несимметричным.

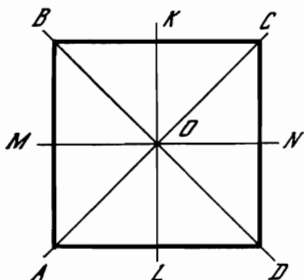


Рис. 7

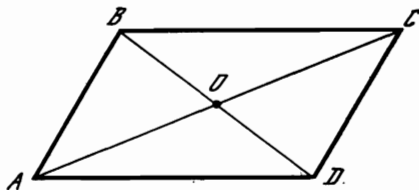


Рис. 8

Степень симметричности квадрата на плоскости характеризуется совокупностью движений плоскости, совмещающих квадрат сам с собой. Но если квадрат совмещается сам с собой, то точка пересечения его диагоналей также должна совмещаться сама с собой. Поэтому искомые движения оставляют центр квадрата неподвижным и потому являются либо поворотами около центра, либо отражениями относительно прямых, проходящих через центр. Из рис. 7 легко усматриваем, что квадрат $ABCD$ симметричен относительно поворотов вокруг его центра O на углы, кратные 90° , а также по отношению к отражениям относительно диагоналей AC, BD и прямых KL, MN . Эти восемь движений и характеризуют симметрию квадрата.

Совокупность симметрий прямоугольника сводится к поворотам около центра на 180° и отражениям относительно прямых, соединяющих середины противоположных сторон, а совокупность симметрий параллелограмма (рис. 8) состоит лишь из поворотов вокруг центра на углы, кратные 180° , т. е. из отражения относительно центра и тождественного преобразования.

Выше мы приводили алгебраический пример симметрии; именно, было отмечено, что имеет смысл понятие симметрии многочлена от нескольких переменных.

Рассмотрим, как можно охарактеризовать симметрию многочлена. Будем говорить, что в многочлене $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ сделана подстановка неизвестных $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_{i_1} & x_{i_2} & \dots & x_{i_n} \end{pmatrix}$, или, короче, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$, если в данный многочлен всюду вместо буквы x_1 поставлена буква x_{i_1} , вместо x_2 поставлена x_{i_2} и т. д. Полученный таким образом многочлен обозначается через FA . Так, если $F = x_1^2 - 2x_2 + x_3 - x_4$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, то $FA = x_3^2 - 2x_1 + x_4 - x_2$.

Симметрия данного многочлена характеризуется совокупностью тех подстановок неизвестных, которые, будучи выполнены над многочленом, его не изменяют. Например, симметрия многочлена $x_1^3 + 2x_2 + x_3^3 + 2x_4$ ха-

характеризуется четырьмя подстановками: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, а симметрия многочлена $x_1^3 + 2x_2 + x_3^3 + x_4$ характеризуется лишь двумя подстановками: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

§ 3. Группы преобразований

Умножение преобразований. Изучая свойства преобразований, легко заметить, что некоторые преобразования можно составить из нескольких других. Так, винтовые движения состояются из поворотов вокруг оси и сдвигов вдоль оси. Этот процесс составления новых преобразований из заданных носит название умножения преобразований. Производя над произвольным элементом x множества M какое-либо преобразование A и затем к новому элементу xA применяя преобразование B , получим элемент $(xA)B$. Преобразование, переводящее x непосредственно в $(xA)B$, называется произведением преобразования A на B и обозначается через AB . Следовательно по определению имеем

$$x(AB) = (xA)B.$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Действительно, первая подстановка переводит 1 в 2, а вторая 2 переводит в 4, поэтому результирующая подстановка должна переводить 1 в 4 и т. д. Вот еще несколько примеров:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Последние два примера показывают, что умножение преобразований есть, как говорят, действие некоммутативное: его результат зависит от порядка сомножителей. Это же легко подтверждается и для умножения движений плоскости. Пусть, например, A есть поворот плоскости на 90° вокруг начала O , а B — перенос вдоль оси Ox на единицу.

Посмотрим, во что переводят преобразования AB и BA точку O . По определению имеем (рис. 9)

$$O(AB) = (OA)B = OB = M,$$

$$O(BA) = (OB)A = MA = N,$$

т. е. $AB \neq BA$.

Чтобы ближе выяснить геометрическую природу преобразования BA , рассмотрим точку P . Имеем

$$P(BA) = (PB)A = QA = P,$$

т. е. точка P остается при преобразовании BA неподвижной. Исходя из этого, легко показать, что BA есть просто поворот плоскости на 90° вокруг точки P . Аналогично

$$Q(AB) = (QA)B = PB = Q,$$

и AB есть поворот плоскости на 90° вокруг точки Q .

Умножение движений плоскости или пространства происходит в общем случае по довольно сложным законам. Однако в двух важных случаях зако-

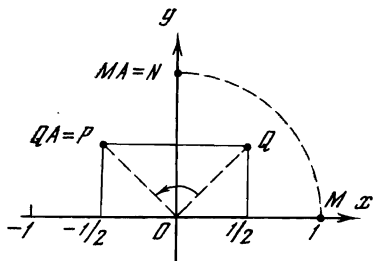


Рис. 9

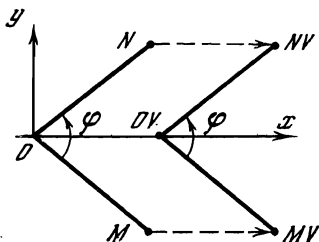


Рис. 10

ны умножения очень просты. Во-первых, если умножаются повороты плоскости вокруг одной и той же точки или повороты пространства вокруг одной и той же прямой на углы φ и ψ , то результирующее преобразование будет соответственным поворотом на угол $\varphi + \psi$. Во-вторых, если умножаются переносы, характеризуемые векторами $\vec{MN}$ и $\vec{NP}$, то произведение будет также переносом, характеризуемым вектором $\vec{MP}$, т. е. суммой первоначальных векторов.

Сам термин «умножение» преобразований вызван некоторой аналогией между умножением чисел и умножением преобразований. Однако эта аналогия неполная. Так, при умножении чисел имеет место коммутативный (переместительный) закон. Мы уже видели, что при умножении преобразований этот закон может быть нарушен. Второй же основной закон арифметики — сочетательный закон (ассоциативность) умножения — в полной мере сохраняется для преобразований. Именно, для любых преобразований A, B, C множества M имеет место равенство $A(BC) = (AB)C$.

В самом деле, если m — произвольный элемент из M , то

$$m[A(BC)] = (mA)(BC) = [(mA)B]C = [m(AB)]C = m[(AB)C].$$

Ассоциативный закон позволяет вместо двух произведений $A(BC)$ и $(AB)C$ преобразований A, B, C говорить лишь об одном произведении $A(BC) = (AB)C = ABC$. Этот же закон показывает, что и произведение четырех и более преобразований не зависит от расстановки скобок.

Далее, среди преобразований имеется преобразование, играющее роль числа 1, это — тождественное или единичное преобразование E , которое оставляет каждый элемент множества M неизменным. Ясно, что $AE = EA = A$, каково бы ни было преобразование A .

Отметим еще следующий важный факт: произведение взаимно однозначных преобразований есть преобразование взаимно однозначное. В самом де-

ле, чтобы найти элемент x множества M , который произведением AB переводится в данный элемент a , достаточно найти элемент x_1 , переводимый преобразованием B в a , и затем найти элемент x_2 , переводимый преобразованием A в x_1 . Так как $x_2 (AB) = (x_2 A) B = x_1 B = a$, то x_2 и будет искомым элементом x .

Произведение преобразования A на обратное преобразование A^{-1} есть единичное преобразование, т. е.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Это непосредственно следует из определения обратного преобразования.

Рассмотренный выше пример умножения переноса плоскости на поворот показывает, что свойства произведения преобразований не всегда легко усмотреть, исходя из свойств сомножителей. Однако произведение преобразований вида $C = B^{-1}AB$ представляет важное исключение: свойства C здесь очень просто связаны со свойствами A и B . Именно, если элемент m множества M преобразованием A переводится в n , то «сдвинутый» посредством преобразования B элемент mB преобразованием C переводится в «сдвинутый» элемент nB .

Доказательство: $(mB) B^{-1}AB = mAB = nB$.

Преобразование $B^{-1}AB$ называют полученным из A путем преобразования его при помощи B или *сопряженным* с A посредством B .

Преобразуем, например, поворот P_0 плоскости около точки O при помощи переноса V . Согласно приведенному правилу, чтобы найти пары начальных и конечных положений точек для преобразованного движения $C = V^{-1}P_0V$, надо сдвинуть при помощи V соответственные пары точек для преобразования P_0 . Так как точка O при повороте P_0 отвечает самой себе (рис. 10), то и точка OV относительно преобразования C отвечает самой себе. Далее, если точка M переводится преобразованием P в точку N , то сдвинутая точка MV будет переводиться преобразованием C в точку NV . Из рис. 10, таким образом, видно, что преобразование C будет поворотом около точки OV на тот же угол φ , что и поворот P .

Аналогично может быть доказано, что если перенос плоскости, характеризуемый вектором $\overrightarrow{MN}$, преобразовать посредством поворота P_0 на угол φ , то получится снова перенос плоскости, характеризуемый повернутым вектором.

Указанное выше правило для отыскания преобразования $B^{-1}AB$ весьма изящно формулируется также в случае, когда преобразования задаются таблицами. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix},$$

тогда

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_{a_1} & b_{a_2} & \dots & b_{a_n} \end{pmatrix},$$

т. е., чтобы преобразовать подстановку A при помощи подстановки B , нужно все элементы верхней и нижней строк подстановки A подвергнуть преобразованию, предусмотренному подстановкой B . Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

то

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1B & 2B & 3B & 4B & 5B \\ 3B & 5B & 4B & 1B & 2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что хотя в общем случае произведение двух преобразований зависит от порядка сомножителей, в отдельных случаях произведение AB и BA могут быть одинаковыми. Тогда преобразования A и B называются перестановочными или коммутирующими. Если $AB = BA$, то

$$B^{-1}AB = B^{-1}BA = A.$$

Таким образом, преобразование данной подстановки при помощи коммутирующей с ней подстановки не меняет данную подстановку.

Группы преобразований. Совокупности преобразований, характеризующих симметрию некоторой фигуры, не могут быть произвольными, они заведомо должны обладать следующими свойствами:

1. Произведение двух преобразований, принадлежащих совокупности, само принадлежит этой совокупности.
2. Тождественное преобразование принадлежит совокупности.
3. Если преобразование принадлежит совокупности, то обратное преобразование также принадлежит совокупности.

Эти свойства оказались очень важными для изучения преобразований, ввиду чего всякую совокупность взаимно однозначных преобразований множества M , обладающую перечисленными тремя свойствами, стали называть *группой преобразований* множества M , независимо от того, характеризует эта совокупность симметрию некоторой фигуры или нет.

С точки зрения алгебры свойства 1—3 являются очень существенными, так как они позволяют, исходя из некоторых преобразований $A, B, C, \dots$, принадлежащих заданной совокупности, составлять различные новые преобразования вида $ABAC, A^{-1}BCB^{-1}$ и т. п., причем свойства 1—3 гарантируют, что все получаемые преобразования не выходят за пределы заданной совокупности преобразований.

Число преобразований, составляющих группу, называется *порядком группы*; последний может быть и конечным и бесконечным. Соответственно этому и группы разделяются на конечные и бесконечные. Выше была рассмотрена группа симметрий квадрата на плоскости. Эта группа оказалась содержащей всего восемь преобразований. С другой стороны, бесконечная совокупность точек A_i плоскости, изображенная на рис. 11, преобразуется в себя следующими движениями плоскости: переносами вдоль оси OA в том и другом направлении на расстояния, кратные расстоянию OA ; отражениями относительно пунктирных прямых; отражением относительно оси OA . Отсюда видно, что группа симметрий этой фигуры бесконечная.

Совокупность преобразований, сохраняющих некоторый объект, т. е. характеризующих его симметрию, всегда является группой. Этот способ задания групп в виде групп симметрий принадлежит в число важнейших. По этому принципу получают наиболее важные группы. К ним прежде все-

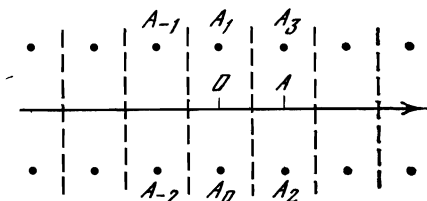


Рис. 11

го следует отнести группы движений плоскости и пространства. Большой интерес представляют также группы симметрий правильных многогранников. Как известно, в пространстве существует всего пять типов правильных многогранников (4, 6, 8, 12 и 20-гранники). Беря какой-либо из правильных многогранников и рассматривая все движения пространства, совмещающие данный многогранник с собой, мы получим группу — группу симметрий этого многогранника. Если вместо всех движений рассматривать только движения 1-го рода, совмещающие многогранник с самим собой, то получим опять группу, являющуюся частью полной группы симметрий многогранника. Эта группа называется группой вращений многогранника. Поскольку при совмещении многогранника с собой его центр также совмещается с самим собой, то все движения, входящие в группу симметрий многогранника, оставляют неподвижным центр многогранника и потому могут быть только или поворотами около осей, проходящих через центр, или отражениями относительно плоскостей, проходящих через центр, или, наконец, отражениями в таких плоскостях, сопровождаемыми поворотами вокруг осей, проходящих через центр и перпендикулярных к этим плоскостям.

Пользуясь этим замечанием, легко найти все группы симметрий и группы вращений правильных многогранников. В табл. 1 указаны порядки групп симметрий и групп вращений правильных многогранников. Все эти группы являются конечными.

Таблица 1

Число граней	4	6	8	12	20
Порядок группы симметрий	24	48	48	120	120
Порядок группы вращений	12	24	24	60	60

Группы подстановок. Из групп преобразований исторически первыми рассматривались в математике группы подстановок переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ в многочленах от этих переменных. Рассмотрение таких групп тесно связано с вопросом о решении в радикалах уравнений высших степеней. Очевидно, что совокупность всех подстановок переменных, не меняющих значений одного или нескольких многочленов от этих переменных, является группой. Многочлены, не меняющиеся при всех подстановках переменных, называются симметрическими многочленами. Например, $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ есть симметрический многочлен. Соответственно, совокупность всех подстановок данного множества переменных называется *симметрической группой* подстановок этого множества.

Число переставляемых переменных называется степенью симметрической группы. Вместо подстановок переменных $x_1, \dots, x_n$ можно рассматривать просто подстановки чисел $1, 2, \dots, n$. Так как каждую подстановку чисел можно записать в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — числа $1, 2, \dots, n$, записанные в некотором порядке, то число всех подстановок равно числу перестановок n элементов, т. е. порядок симметрической группы равен $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Этот порядок очень быстро растет со степенью n , и порядок группы подстановок 10 переменных равен уже 3 628 800.

Рассмотрим многочлен

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}). \quad (1)$$

Ясно, что каждая подстановка переменных или оставляет величину многочлена F неизменной или меняет лишь его знак. Подстановки первого рода называются четными. Подстановки, меняющие знак F , называются нечетными. Совокупность четных подстановок образует группу симметрий многочлена (1). Она называется знакопеременной группой подстановок.

Произведение двух четных подстановок есть четная подстановка, ибо четные подстановки образуют группу. Произведение двух нечетных подстановок есть подстановка четная.

Действительно, если A и B — нечетные подстановки, то

$$FAB = (FA)B = (-F)B = -(-F) = F.$$

Таким же образом доказывается, что произведение четной и нечетной подстановок есть нечетная подстановка и что подстановка, обратная к четной или нечетной подстановке, есть подстановка той же четности.

Примером нечетной подстановки может служить подстановка $S = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, \dots, n \\ 2, 1, 3, \dots, n \end{pmatrix}$, меняющая местами элементы 1 и 2.

Разложение подстановок на циклы. При изучении групп подстановок большое значение имеет представление подстановок в виде произведений так называемых циклов. По определению символом $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ обозначается подстановка, переводящая m_1 в m_2 , m_2 в m_3 , ..., m_{k-1} в m_k , m_k снова в m_1 , а все остальные элементы рассматриваемого множества оставляющая на месте. Так, например, если рассматриваются подстановки чисел 1, 2, 3, 4, 5, то

$$(1, 2, 3, 4, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Подстановка вида $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ называется *циклической* или *циклом* длины k ; $m_1, m_2, \dots, m_k$ называются элементами цикла. Единичная подстановка условно записывается в виде циклов $(1) = (2) = \dots$ длины 1. Циклы длины 2 называются *транспозициями*. Переставляя элементы цикла в циклическом порядке, мы получаем ту же самую подстановку, например $(1, 2, 3) = (2, 3, 1) = (3, 1, 2)$, $(5, 6) = (6, 5)$.

Легко проверяется, что циклы без общих элементов, например $(2, 3)$ и $(1, 4, 5)$, являются коммутирующими подстановками, и поэтому при перемножении таких циклов можно не обращать внимания на порядок сомножителей в произведении.

Значение циклов в общей теории основывается на следующей теореме: всякая подстановка может быть представлена в виде произведения циклов без общих элементов, причем это представление однозначно с точностью до порядка сомножителей.

Доказательство теоремы непосредственно видно из способа такого представления. Допустим, что мы желаем разложить подстановку $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Мы видим, что A переводит 1 в 4, 4 в 3, 3 в 6, 6 в 1. В результате имеем первый множитель $(1, 4, 3, 6)$. Берем оставшееся число 2 и видим, что A пере-

водит 2 в 5, 5 в 2. Поэтому второй множитель будет (2, 5). Поскольку все числа рассмотрены, то

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 4, 3, 6) (2, 5). \quad (2)$$

Разложение подстановок на циклы, имеющие общие элементы, также возможно, но уже неоднозначно. Например,

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2) (a_1, a_3) \dots (a_1, a_n) = (a_2, a_3) (a_2, a_4) \dots (a_2, a_n) (a_2, a_1). \quad (3)$$

Докажем, что каждый двойной цикл есть нечетная подстановка. Мы уже убедились в этом для цикла (1, 2). Но любой цикл (i, j) есть $S^{-1} (1, 2) S$, где S — любая подстановка $\begin{pmatrix} 1, 2, \dots \\ i, j, \dots \end{pmatrix}$, переводящая 1 в i и 2 в j . Подстановка $S^{-1} (1, 2) S$ есть нечетная подстановка, ибо (1, 2) нечетная, а S и S^{-1} одновременно или четные, или нечетные.

Согласно формуле (3) цикл длины $m + 1$ может быть представлен в виде произведения m нечетных подстановок. Поэтому цикл длины $m + 1$ есть подстановка нечетная, если $m + 1$ четно, и четная, если $m + 1$ нечетно. Это дает возможность быстро подсчитать четность подстановок, разложение которых на циклы известно. В частности, подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ четна, так как она согласно формуле (2) есть произведение двух нечетных подстановок.

Подгруппы. Часть группы, сама являющаяся группой, называется *подгруппой* данной группы. Так, знакопеременная группа подстановок переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ является подгруппой симметрической группы подстановок этих переменных. Совокупность собственных движений плоскости есть группа, являющаяся подгруппой группы всех собственных и несобственных движений плоскости.

С формальной точки зрения единичное (тождественное) преобразование само по себе уже образует подгруппу. Точно так же и любая группа может быть рассматриваема как своя подгруппа. Однако, кроме этих тривиальных подгрупп, почти всегда группы содержат много других подгрупп. Знание всех подгрупп данной группы дает довольно полное представление о внутреннем строении заданной группы.

Одним из распространенных способов образования подгрупп является указание так называемых образующих подгрупп.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_m$ — какие-либо преобразования, принадлежащие группе G . Совокупность H всех преобразований, которые можно получить, перемножая между собой в произвольном числе заданные преобразования и преобразования, им обратные, будет группой. Действительно, единичное преобразование принадлежит к этой совокупности, так как его можно представить в виде $A_1 A_1^{-1}$. Далее, если преобразования B и C можно представить в виде произведений, то, перемножая эти произведения, мы получим требуемое представление и для BC . Наконец, если B выражается в виде произведения, например $B = A_1^{-1} A_2 A_1 A_1 A_2^{-1}$, то и B^{-1} можно представить в виде требуемого произведения, так как $B^{-1} = A_2 A_1^{-1} A_1^{-1} A_2^{-1} A_1$.

Группа H является, очевидно, подгруппой группы G и называется подгруппой, порожденной преобразованиями $A_1, \dots, A_m$, а сами преобразования $A_1, \dots, A_m$ называются образующими подгруппы H . Может случиться, что H совпадает с G , тогда $A_1, \dots, A_m$ называются образующими самой группы G . Нетрудно убедиться на примерах, что одна и та же подгруппа может порождаться самыми различными системами образующих.

Подгруппа, порождаемая одним преобразованием A , называется циклической подгруппой. Ее элементами являются преобразования

$$E, A, AA, AAA, \dots, A^{-1}, A^{-1}A^{-1}, A^{-1}A^{-1}A^{-1}, \dots,$$

которые, естественно, называются степенями преобразования A . Именно,

$$E = A^0, A = A^1, AA = A^2, \dots, A^{-1}A^{-1} = A^{-2}, A^{-1}A^{-1}A^{-1} = A^{-3}, \dots$$

Легко доказывается, как в обычной арифметике, что

$$A^m A^n = A^{m+n} \quad \text{и} \quad (A^m)^n = A^{mn}. \quad (4)$$

Преобразование называется *периодическим*, если некоторая его положительная степень равна тождественному преобразованию. Наименьший положительный показатель степени, в которую возвести нужно периодическое преобразование, чтобы получить тождественное, называется *порядком преобразования*. Условно говорят, что порядок непериодического преобразования бесконечен.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть A — поворот плоскости вокруг точки O на $360^\circ/n$, где n — данное положительное целое число, большее единицы. Тогда A^2 будет поворотом на угол $2(360^\circ/n)$, A^3 — поворотом на $3(360^\circ/n)$, A^{n-1} — поворотом на $(n-1)(360^\circ/n)$, A^n — поворотом на 360° , т. е. будет тождественным преобразованием. Это показывает, что поворот на $360^\circ/n$ есть периодическое преобразование порядка n .

Пусть A — перенос плоскости вдоль некоторой прямой. Тогда $A^2, A^3, \dots$ будут также переносами вдоль той же прямой соответственно на двойное, тройное и т. д. расстояния. Поэтому никакая положительная степень A не есть тождественное преобразование, и порядок A бесконечен.

Элементами циклической группы, порожденной элементом A , являются

$$\dots, A^{-2}, A^{-1}, E, A, A^2, \dots \quad (5)$$

Если A — преобразование бесконечного порядка, то все преобразования в последовательности (5) различны, и группа бесконечна. Действительно, в противном случае мы имели бы равенство вида $A^k = A^l$ ($k < l$), откуда $A^{l-k} = E$, $l - k > 0$, что противоречит непериодичности A .

Предположим теперь, что A — периодическое преобразование порядка m . Тогда

$$A^m = E, \quad A^{m+1} = A, \quad A^{m+2} = A^2, \quad \dots, \quad A^{m-1} = A^{-1}, A^{m-2} = A^{-2}, \dots,$$

т. е. последовательность (5) состоит из одних и тех же периодически повторяющихся преобразований $E, A, A^2, \dots, A^{m-1}$. Они между собой различны, так как если бы оказалось $A^k = A^l$ ($0 \leq k < l < m$), то было бы $A^{l-k} = E$, $0 < l - k < m$, что противоречит выбору m . Следовательно, циклическая подгруппа, порожденная преобразованием порядка m , содержит ровно m различных преобразований.

Группа, все элементы которой коммутируют друг с другом, называется коммутативной или абелевой, по имени норвежского математика Абеля, открывшего важное значение таких групп для теории уравнений.

Формулы (4) показывают, что степени одного и того же преобразования всегда коммутируют друг с другом: $A^m A^n = A^n A^m = A^{m+n}$. Поэтому циклические подгруппы всегда абелевы.

В арифметике чисел наряду с умножением важную роль играет действие деления. В теории групп вследствие некоммутативности умножения приходится говорить о двух делениях: правом и левом. В самом деле, решение уравнения $Ax = B$, где A, B — данные преобразования, а x — искомое преобразование, естественно назвать правым частным, а решение уравнения $yA = B$ — левым частным от деления B на A . Умножая обе части первого равенства на A^{-1} слева, а обе части второго на A^{-1} справа, получим $x = A^{-1}B$, $y = BA^{-1}$. Таким образом, в качестве «частного» преобразований B и A можно рассматривать $A^{-1}B$ или BA^{-1} .

На многочисленных примерах мы видели, что в группах, вообще говоря, $AB \neq BA$. «Частное» $(AB)(BA)^{-1}$ или $(BA)^{-1}(AB)$ можно принять за «меру» некоммутативности подстановок A и B . Второе из этих выражений, именно $(BA)^{-1}(AB) = A^{-1}B^{-1}AB$, называют коммутатором A и B и обозначают (A, B) . Из формулы

$$(A, B) = A^{-1}B^{-1}AB$$

следует, что коммутатор можно представлять себе и как частное от «деления» сопряженного преобразования $B^{-1}AB$ на первоначальное A .

Если, например, A — перенос плоскости, то сопряженное преобразование будет также переносом, а частное двух переносов, очевидно, есть перенос. Поэтому коммутатор переноса и любого движения плоскости есть перенос. Пусть A — поворот на угол φ вокруг некоторой точки O , а B — поворот или перенос. Тогда сопряженное преобразование будет снова поворотом на угол φ , но вокруг смещенной точки O' . Следовательно, коммутатор (A, B) в рассматриваемом случае есть произведение поворота вокруг точки O на отрицательный угол φ и поворота вокруг точки O' на положительный угол φ . Из рис. 12 видно, что результирующее преобразование есть перенос под углом $\pi/2 - \varphi/2$ к отрезку $\overline{OO'}$ на расстояние $2 \cdot \overline{OO'} \sin(\varphi/2)$.

Таким образом, мы приходим к интересному факту, что для плоскости коммутатор любых двух движений 1-го рода есть параллельный перенос или тождественное преобразование. Поскольку $(A, B) = E$ означает, что $AB = BA$, то на плоскости любая некоммутативная группа движений 1-го рода содержит параллельные переносы.

Подгруппа, порожденная коммутаторами всевозможных элементов группы G , называется коммутантом группы G . Вспоминая соответствующие определения, можно сказать, что коммутант группы G состоит из тех и только тех ее элементов, которые можно представить в виде произведения коммутаторов. Поскольку для плоскости коммутатор любых двух движений 1-го рода есть параллельный перенос, а произведения параллельных переносов суть также параллельные переносы, можно утверждать, что коммутант группы движений плоскости 1-го рода состоит лишь из параллельных переносов.

Коммутант абелевой группы состоит из единичного преобразования, так как из $AB = BA$ следует $(A, B) = E$.

Пусть G — симметрическая группа всех подстановок чисел $1, 2, \dots, n$. Покажем, что коммутатор любых двух подстановок A, B всегда будет под-

становкой четной. В самом деле, подстановки AB , BA , а следовательно и $(BA)^{-1}$, всегда имеют одинаковую четность; тогда коммутатор $(A, B) = (BA)^{-1}(AB)$, как произведение подстановок одинаковой четности, есть подстановка четная.

Мы видим, что коммутант симметрической группы состоит лишь из четных подстановок. Легко можно доказать, что он совпадает со всей знакопеременной группой.

Коммутант группы G называется также производной группой и обозначается через G' ; коммутант коммутанта G называется вторым коммутантом группы G и обозначается через G'' . Повторяя этот процесс, мы получим определение коммутанта любого порядка группы G .

Если из коммутантов группы G хотя бы один (а тогда и все последующие) состоит лишь из единичного преобразования, то группа G называется *разрешимой*. Название это возникло в теории уравнений, где разрешимости группы соответствует разрешимость уравнения в радикалах. Группа движений 1-го рода для плоскости разрешима, так как уже ее 2-й коммутант равен единице. Симметрические группы 2, 3 и 4-й степени также разрешимы, поскольку их соответственно 1, 2 и 3-й коммутанты обращаются в единицу. Напротив, симметрические группы 5-й и более высоких степеней неразрешимы, так как можно доказать, что их 2-й коммутант совпадает с 1-м и отличен от единицы.

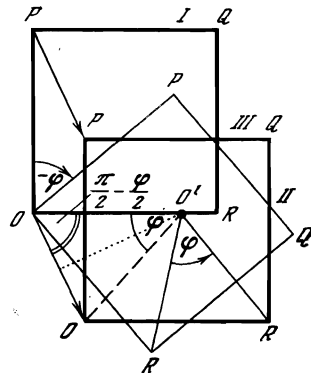


Рис. 12

§ 4. Федоровские группы

Группы симметрий конечных плоских фигур. Как уже было установлено, симметричность фигуры или тела характеризуется группой движений плоскости или пространства, совмещающих фигуру с собой.

Наиболее просто находятся группы симметрий конечных фигур на плоскости*. В самом деле, пусть дана какая-либо конечная фигура на плоскости и пусть эта фигура совмещается сама с собой некоторым движением A . Тогда центр тяжести фигуры O должен движением A также совмещаться сам с собой, т. е. A есть или поворот около O , или отражение относительно прямой, проходящей через O . Итак, группа симметрий любой конечной плоской фигуры может состоять лишь из поворотов около ее центра тяжести и из отражений относительно прямых, проходящих через центр.

Рассмотрим последовательно различные случаи, которые могут представиться при рассмотрении групп симметрий конечной плоской фигуры:

1. Группа симметрий K_1 состоит лишь из единичного (тождественного) преобразования. Это — группа симметрий любой несимметричной фигуры (рис. 13).

2. Группа симметрий K_2 состоит из единичного преобразования и отражения около одной прямой (рис. 14).

* Конечность понимается в том смысле, что вся фигура расположена в ограниченной части плоскости, например в некотором круге.

Заметим, что если группа K содержит отражения около двух прямых a, b , проходящих через O и образующих угол φ между собой, то произведение этих отражений будет поворотом вокруг O на угол 2φ (рис. 15). Отсюда видно, что группа K_2 — единственная из групп симметрий, не содержащая поворотов.

3. Группа симметрий K_3 состоит лишь из одних поворотов, среди которых нет поворотов на сколь угодно малый угол. В таком случае среди поворотов в группе K_3 найдется поворот на наименьшей положительный угол. Пусть



Рис. 13

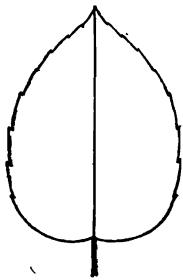


Рис. 14

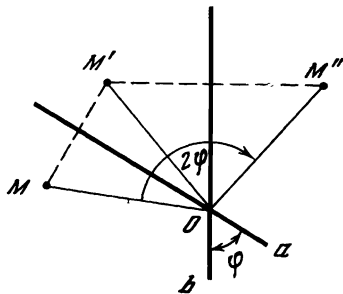


Рис. 15

этот угол равен α° . Докажем, что любой другой поворот, содержащийся в группе, будет кратен α° . Обозначим число градусов в этом повороте через β и найдем такое целое число h , чтобы $h\alpha^\circ \leq \beta^\circ < (h+1)\alpha^\circ$, откуда $0 \leq \beta^\circ - h\alpha^\circ < \alpha^\circ$. Группа K_3 , имея повороты на α° и β° , будет иметь и поворот на $\beta^\circ - h\alpha^\circ$. Но $0 \leq \beta^\circ - h\alpha^\circ < \alpha^\circ$, а группа не содержит положительных поворотов меньше чем на α° . Поэтому $\beta^\circ - h\alpha^\circ = 0$, т. е. $\beta^\circ = h\alpha^\circ$. В частности, поскольку группа K_3 содержит поворот на 360° , то для некоторого целого n имеем $n\alpha^\circ = 360^\circ$, откуда $\alpha^\circ = 360^\circ/n$.

Итак, группа K_3 состоит из поворотов на $0, 360^\circ/n, 2(360^\circ/n), \dots, (n-1) \cdot (360^\circ/n)$. Придавая n значения $2, 3, 4, \dots$, мы получим все типы групп K_3 . Пример фигур, группа симметрий которых состоит только из поворотов вокруг O на углы, кратные $360^\circ/n$, при $n = 19, n = 3$, приведен на рис. 16.

4. Группа симметрий K_4 состоит из одних поворотов и содержит сколь угодно малые повороты. Тогда поворот на произвольный угол α можно с любой степенью точности составить из поворотов, принадлежащих группе K_4 . Нас здесь интересуют, конечно, только замкнутые фигуры, т. е. такие, которые включают в себя все свои граничные точки (см. гл. XVII, § 9). Легко установить, что для замкнутых фигур группа K_4 содержит повороты на любой угол φ . Это — случай направленной круговой симметрии, примером которой может служить окружность, кольцевая полоса и т. п., снабженные некоторым направлением обхода (рис. 17). Здесь при всех допустимых преобразованиях должна совмещаться не только сама фигура, но и направление ее обхода, что исключает отражения относительно прямой.

Нам остается рассмотреть еще смешанные случаи, когда группа симметрий K содержит и повороты, и отражения. Опуская соответствующие доказательства, которые и здесь остаются очень простыми, укажем лишь результат: кроме групп $K_1 - K_4$, существуют еще группы только следующих двух типов.

5. Группа симметрий K_5 состоит из n отражений относительно прямых, проходящих через O , делящих плоскость на $2n$ равных углов, и из поворотов на углы, кратные $360^\circ/n$. Такой группой симметрии обладает, например, правильный n -угольник (рис. 18).

6. Группа симметрий K_6 состоит из всех поворотов около O и отражений относительно всевозможных прямых, проходящих через центр O . Это — случай полной круговой симметрии, примером которой может служить симметрия ненаправленной окружности или ненаправленного кругового кольца.

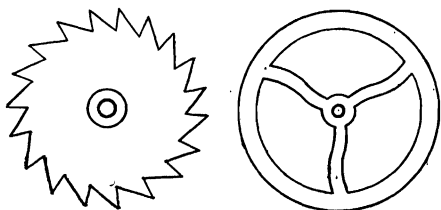


Рис. 16

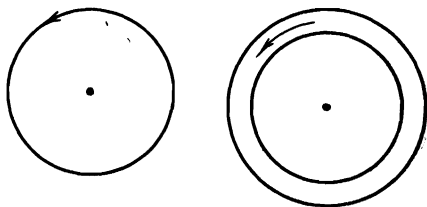


Рис. 17

Группы симметрий бесконечных плоских фигур. Нахождение всевозможных групп симметрий бесконечных плоских фигур — задача более сложная. Конечно, практически нам никогда не бывает дана вся бесконечная плоскость. Однако кусок плоскости часто бывает покрыт столь мелкими фигурами, что сам кусок представляется по сравнению с ними бесконечно большим. Например, гладко отшлифованная плоскость куска стали оказывается покрытой узорами микроскопических размеров. Правильность этих узоров свидетельствует о внутренней однородности структуры металла.

Другим примером могут служить росписи стен и тканей повторяющимися фигурами. Искусство такой росписи — искусство орнамента — широко развито у большинства народов, начиная с древнейших времен и кончая нашими днями. На рис. 19 дан образец египетской росписи потолка, восходящей к середине второго тысячелетия до нашей эры.

Уже для групп симметрий конечных фигур мы были принуждены отдельно рассматривать случаи 1, 2, 3, 5, когда группа симметрий не содержит поворотов на сколь угодно малый угол, и случаи 4, 6, когда в группе есть такие повороты. При изучении групп симметрий бесконечных фигур, особенно в пространственном случае, это разделение на дискретные группы и группы со сколь угодно малыми преобразованиями приобретает еще большее значение. Поэтому мы сначала более точно проведем разграничение между этими случаями.

Группа движений плоскости называется *дискретной*, если каждую точку плоскости можно окружить таким кругом, что каждое движение из группы либо оставляет данную точку неподвижной, либо выводит ее сразу за пределы взятого круга.

Как и выше, можно найти все дискретные группы движений плоскости. Все эти группы являются группами симметрий плоских фигур. Здесь естественно различаются три типа дискретных групп симметрий:

I. На плоскости существует точка, остающаяся неподвижной при всех преобразованиях симметрии. Этот тип содержит перечисленные выше группы K_1 , K_2 , K_3 и K_5 .

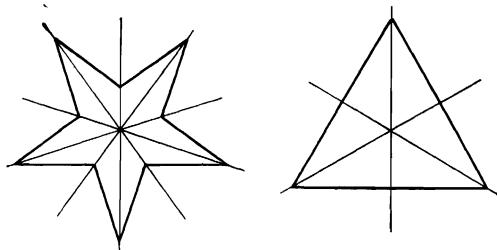


Рис. 18

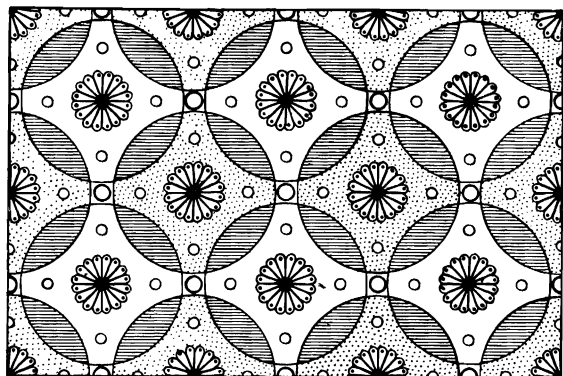


Рис. 19

II. На плоскости не существует неподвижной точки, но существует прямая, совмещающаяся с собой при всех преобразованиях группы. Эта прямая называется осью группы. Группы симметрий этого типа имеют орнаменты, вытянутые в виде бесконечной полосы (бордюры). Таких групп существуют всего семь:

1. Группа симметрий L_1 , состоящая только из переносов на расстояния, кратные некоторому отрезку a .

2. Группа L_2 , получающаяся из L_1 присоединением вращения на 180° относительно одной из точек оси группы.

3. Группа L_3 , получающаяся из L_1 присоединением отражения относительно прямой, перпендикулярной к оси группы.

4. Группа L_4 , получающаяся из L_1 присоединением отражения относительно оси.

5. Группа L_5 , получающаяся из L_1 присоединением переноса на отрезок $a/2$, соединенного с отражением относительно оси.

6. Группа L_6 , получающаяся из L_4 присоединением отражения относительно некоторой прямой, перпендикулярной оси группы.

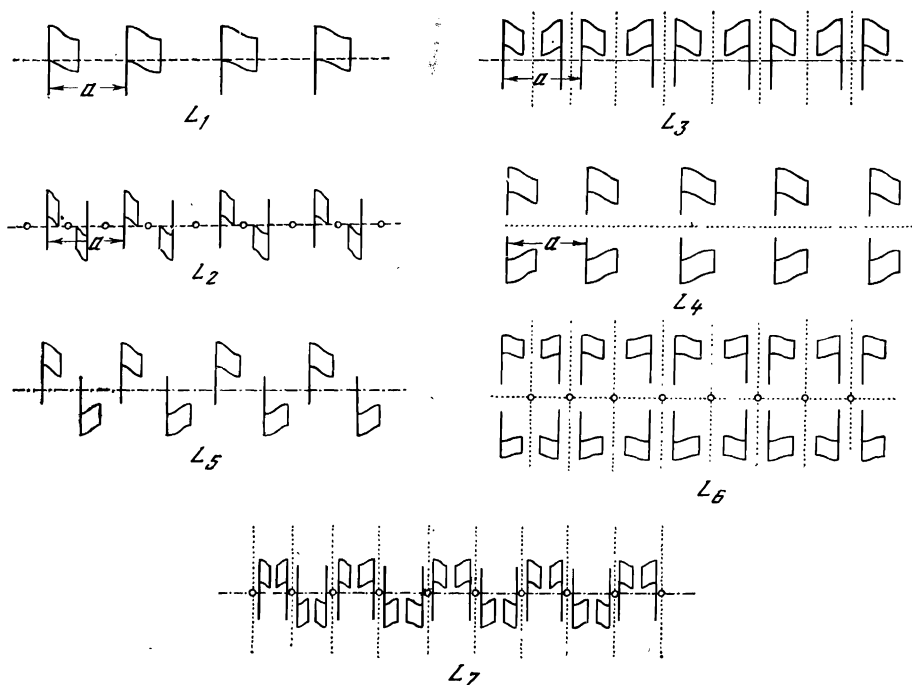
7. Группа L_7 , получающаяся из L_5 присоединением отражения относительно некоторой прямой, перпендикулярной к оси группы.

Табл. 2 дает схемы «бордюров», соответствующих каждой из групп $L_1 - L_7$.

III. На плоскости не существует ни точки, ни прямой, совмещающихся с собой при всех преобразованиях группы. Группы этого типа называются *плоскими федоровскими группами*. Они являются группами симметрий бесконечных плоских орнаментов. Их существует всего 17: пять состоит только из движений 1-го рода, двенадцать — из движений 1 и 2-го рода.

В табл. 3 даны схемы орнаментов, соответствующих каждой из 17 плоских федоровских групп; при этом каждая группа состоит из тех и только тех

Таблица 2



движений, которые любой флаг, начерченный на чертеже, переводят в любой другой флаг того же чертежа.

Интересно отметить, что мастера орнамента практически открыли орнаменты со всеми возможными группами симметрий; на долю теории групп выпало лишь доказать отсутствие других видов.

Кристаллографические группы. В 1890 г. знаменитый русский кристаллограф и геометр Е. С. Федоров решил теоретико-групповыми методами одну из основных задач кристаллографии: задачу классификации правильных пространственных систем точек. Это было первым случаем непосредственного применения теории групп к решению больших задач естествознания и оказало существенное влияние на развитие теории групп.

Кристаллические тела обладают той особенностью, что составляющие их атомы образуют в пространстве в некотором смысле правильную систему. Рассмотрим те движения пространства, которые переводят точки системы снова в точки системы. Эти движения образуют группу, свойства которой позволяют более точно сформулировать и само понятие правильной системы точек.

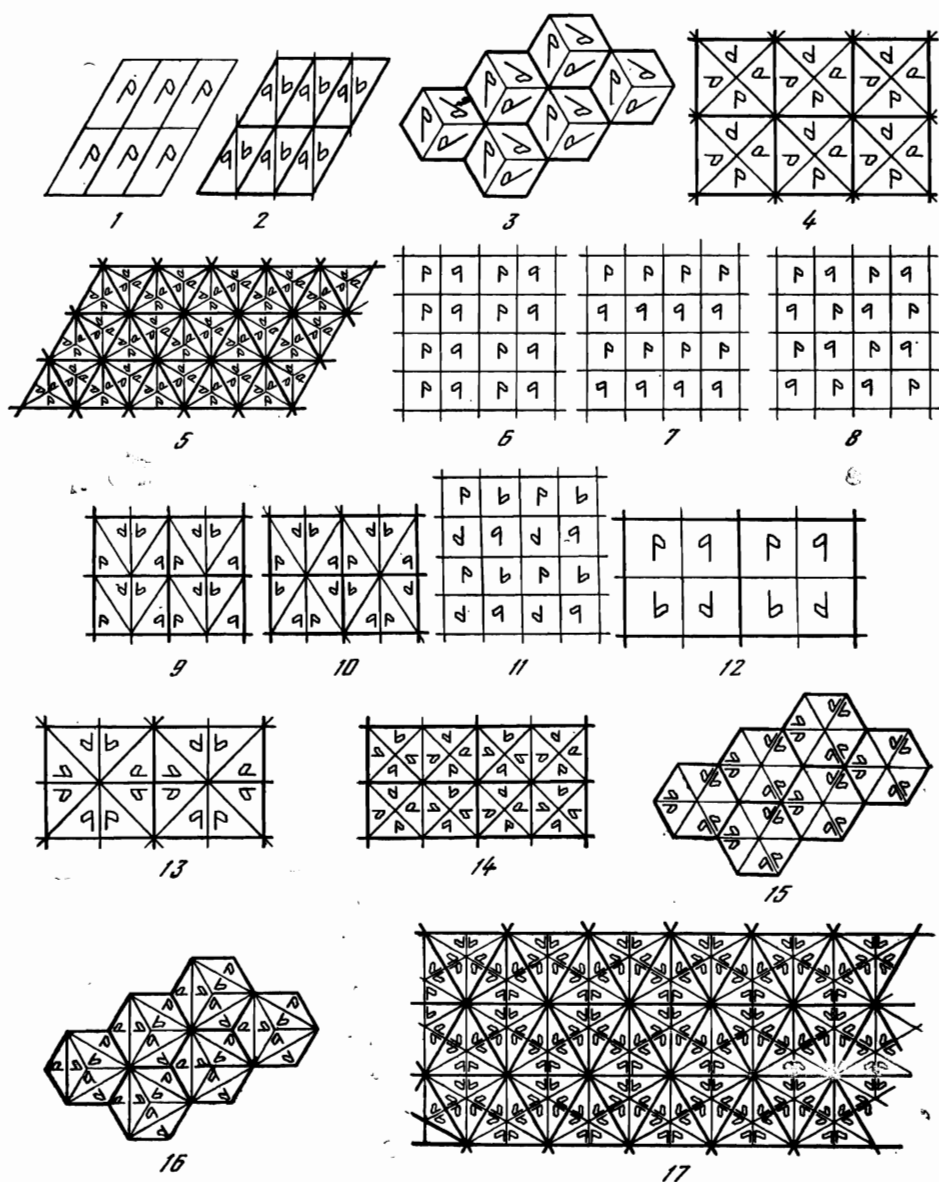
Систему точек пространства называют *правильной пространственной системой точек*, если

1) любую точку системы можно перевести в любую другую ее точку посредством движения, совмещающего систему с собой;

2) никакой шар конечного радиуса не содержит бесконечного числа точек системы;

3) существует такое положительное число r , что всякий шар радиуса r содержит по меньшей мере одну точку системы.

Таблица 3



Задача изучения строения кристаллических тел оказывается тесно связанной с классификацией правильных пространственных систем точек, которая в свою очередь связана с классификацией дискретных групп движений пространства. Подобно плоскому случаю, группа движений H пространства называется *дискретной*, если около каждой точки A пространства можно описать такой шар положительного радиуса r с центром в A , что каждое движение, входящее в H , или оставляет точку A на месте, или выводит ее за пределы шара.

Можно показать, что совокупность движений пространства, совмещающих с собой данную правильную пространственную систему точек, является обязательно дискретной группой, причем все точки системы можно получить из любой фиксированной точки системы, сдвигая ее при помощи преобразований этой группы. Обратно, если известна некоторая дискретная группа H , то, беря в пространстве произвольную точку A и сдвигая ее при помощи всевозможных движений, входящих в H , мы получим систему точек, обладающую свойствами 1, 2. Путем несложных дополнительных требований можно из дискретных групп выделить те группы, которые для подходяще выбранных точек A дают настоящие правильные пространственные системы точек, т. е. системы точек со всеми тремя свойствами 1, 2, 3. Такие дискретные группы носят название *федоровских*, или *кристаллографических*, групп. Из сказанного видно, что нахождение федоровских групп есть первый и важнейший шаг в исследовании правильных пространственных систем точек. Оказалось, что для целей естествознания необходимо рассматривать не только группы, составленные лишь из собственных движений, но также группы, содержащие и собственные и несобственные движения (т. е. включающие отражение). Число федоровских групп, составленных только из собственных движений, значительно меньше числа федоровских групп, составленных из собственных и несобственных движений, и только в последнем, более общем случае многообразие получаемых правильных пространственных систем точек действительно исчерпывает все богатство встречающихся в природе строений кристаллических тел.

Интересно отметить, что лишь теория групп позволила разобраться в этом исключительном богатстве возможностей в отличие от упоминавшегося выше плоского случая.

Сложность пространственной задачи сравнительно с плоской видна из следующего сопоставления:

Число пространственных федоровских групп	
содержащих только движения 1-го рода . . .	65
содержащих также движения 2-го рода . . .	165
Всего . . . 230	

Подробный вывод и перечисление всех федоровских групп в пространстве еще и в настоящее время требуют нескольких десятков страниц текста. Поэтому мы ограничимся сообщением только этих количественных результатов, отсылая интересующихся читателей к специальной литературе*.

Современное развитие кристаллографии сделало необходимым дальнейшее развитие понятия симметрии. Новые возможности и пути этого намечены в книге кристаллографа акад. А. В. Шубникова «Симметрия и антисимметрия конечных фигур» (Изд-во АН СССР, 1951).

* Подробный вывод плоских дискретных групп движений 1-го рода изложен в книге Д. Гильберта и С. Э. Кон-Фоссена «Наглядная геометрия» (М.—Л., 1951). Вывод пространственных кристаллографических групп можно найти в основном труде Е. С. Федорова «Симметрия правильных систем фигур» (Е. С. Федоров. Основные работы. Изд-во АН СССР, 1949), а также в книге Б. Делоне, Н. Падурова и А. Александрова «Математические основы структурного анализа кристаллов» (М.—Л., 1934) или С. А. Богомолова «Вывод правильных систем по методу Федорова» (изд-во Кубуч, 1934).

§ 5. Группы Галуа

Результаты, изложенные на предыдущих страницах, дают некоторое представление о роли, которую сыграла теория групп в решении задачи о классификации кристаллических форм. Однако не эта задача послужила причиной возникновения теории групп. Приблизительно на сто лет раньше Лагранжем была замечена связь между свойствами симметрии корней алгебраического уравнения и возможностью решения уравнения в радикалах. В трудах знаменитых математиков первой трети прошлого века Абеля и Галуа эта связь была глубоко исследована, что привело их к решению знаменитой проблемы об условиях разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Это решение целиком опиралось на тонкие рассуждения свойств групп подстановок и явилось фактически началом существования теории групп.

Изучение связей между свойствами алгебраических уравнений и свойствами групп составляет ныне предмет обширной теории, известной под именем теории Галуа.

Понятие об истории вопроса и о значении теории Галуа изложено в гл. IV (том 1). Поскольку, однако, теория Галуа сыграла решающую роль в развитии теории групп, мы здесь снова приведем основные факты этой теории, но уже в виде, наиболее удобном для освещения самой теории групп. Доказательства этих фактов требуют многочисленных вспомогательных понятий и будут нами опущены.

Группа алгебраического уравнения. Пусть дано уравнение n -й степени

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (6)$$

коэффициенты которого считаются данными величинами, например, некоторыми комплексными числами. Совокупность величин, которые можно получить из коэффициентов уравнения при помощи конечного числа действий сложения, вычитания, умножения и деления, называется *основным полем* или областью рациональности уравнения.

Например, если уравнение имеет рациональные коэффициенты, то область рациональности будет состоять из всех рациональных чисел; если же уравнение имеет вид $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$, то область рациональности состоит из всех чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a, b — рациональные числа.

Обозначим теперь через $\xi_1, \dots, \xi_n$ корни данного уравнения. Совокупность величин, которые можно получить при помощи конечного числа действий сложения, вычитания, умножения и деления, исходя из корней $\xi_1, \dots, \xi_n$, называется *полем разложения* уравнения. Так, например, поле разложения уравнения $x^2 + 1 = 0$ есть совокупность комплексных чисел $a + bi$ с рациональными a, b , а поле разложения упомянутого выше уравнения $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$ есть совокупность чисел вида $a + bi + c\sqrt{2} + di\sqrt{2}$, где a, b, c, d — рациональные числа.

В силу формул Виета коэффициенты уравнения получаются из его корней при помощи операций сложения и умножения, поэтому поле разложения уравнения всегда содержит его основное поле. Иногда эти поля совпадают.

Взаимно однозначное отображение A поля разложения на себя называется *автоморфизмом* поля разложения относительно основного поля, если для каждой пары элементов поля разложения их сумма переходит в сумму, произведение — в произведение, а каждый элемент основного поля переходит

сам в себя. Указанные свойства можно записать формулами

$$(a + b)A = aA + bA, \quad (ab)A = aA \cdot bA, \quad \alpha A = \alpha$$

$$(a, b \in K, \alpha \in P), \quad (7)$$

где aA — тот элемент, в который переходит элемент a при отображении A ; P — основное поле; K — поле разложения.

Согласно упоминавшемуся общему принципу совокупность всех автоморфизмов поля разложения относительно основного поля является группой. Эта группа и называется *группой Галуа* данного уравнения.

Чтобы составить себе несколько более конкретное представление о группе Галуа, заметим прежде всего, что автоморфизмы из группы Галуа переводят корни данного уравнения снова в корни этого же уравнения. Действительно, если x — корень уравнения (6), то, действуя на обе части этого уравнения автоморфизмом A и пользуясь свойствами (7), получим

$$(xA)^n + a_1A(xA)^{n-1} + \dots + a_nA = 0 \cdot A;$$

так как $0 \cdot A = 0$, $a_iA = a_i$, то отсюда имеем

$$(xA)^n + a_1(xA)^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

что и требовалось. Следовательно, каждый автоморфизм A вызывает определенную подстановку множества корней уравнения. С другой стороны, зная эту подстановку, мы знаем и сам автоморфизм, поскольку все элементы поля разложения получаются из корней только при помощи арифметических операций. Это показывает, что вместо группы автоморфизмов можно рассматривать соответствующую ей группу подстановок корней уравнения. Отсюда следует, в частности, что все группы Галуа конечны.

Найти группу Галуа какого-либо уравнения — задача обычно сложная и лишь в отдельных случаях группа Галуа находится сравнительно просто. Рассмотрим, например, уравнение (6) с буквенными коэффициентами $a_1, \dots, a_n$. Основное поле этого уравнения составляют рациональные дроби от коэффициентов, т. е. дроби, числители и знаменатели которых являются многочленами от $a_1, \dots, a_n$. Поле разложения составляют рациональные дроби от корней уравнения $\xi_1, \dots, \xi_n$, связанных с коэффициентами формулами

$$-a_1 = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n,$$

$$a_2 = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \dots + \xi_{n-1}\xi_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(-1)^na_n = \xi_1\xi_2 \dots \xi_n.$$
(8)

Поскольку уравнение (6) «общее», мы можем считать его корни независимыми переменными. Тогда всякая подстановка этих корней будет вызывать автоморфизм поля разложения. Формулы (8) показывают, что при любом таком автоморфизме коэффициенты переходят сами в себя, а вместе с ними сами в себя переходят и все рациональные дроби от них. Таким образом, группа Галуа общего уравнения n -й степени по существу является симметрической группой всех подстановок n букв.

Можно указать также уравнения с численными коэффициентами, имеющие симметрическую группу своей группой Галуа. Доказано, например,

что группа Галуа уравнения

$$1 - \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots +$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} x^n = 0 \quad (9)$$

при любом n есть симметрическая группа подстановок степени n .

Вообще известны способы построения уравнений с любой наперед заданной группой в качестве группы Галуа, но при условии, что коэффициенты можно брать произвольными. Если же требовать построения уравнений, имеющих непременно рациональные коэффициенты, то такое построение в настоящее время известно лишь для отдельных типов групп. Значительного успеха в этом направлении добился советский математик И. Р. Шафаревич, нашедший способы построения уравнений с рациональными коэффициентами, имеющими своей группой Галуа любую наперед заданную разрешимую группу. В общем же случае эта задача остается пока нерешенной.

Разрешимость уравнений в радикалах. Группа Галуа уравнения характеризует, как это видно из определения, внутреннюю симметрию корней уравнения. Оказалось, что все наиболее существенные вопросы, касающиеся возможности свести решение заданного уравнения к решению уравнений низших степеней, а также многие другие, могут быть сформулированы в виде вопросов о строении группы Галуа, а группа Галуа каждого уравнения n -й степени есть некоторая группа подстановок n -й степени, т. е. объект вполне конечный, все соотношения в котором, по меньшей мере теоретически, можно найти хотя бы путем проб.

Изучение группы Галуа представляет собой замечательный метод решения проблем, относящихся к алгебраическим уравнениям высших степеней. Например, можно доказать, что уравнение разрешимо в радикалах в том и только том случае, если разрешима его группа Галуа (определение разрешимой группы см. § 3, стр. 369). Уже упоминалось, что симметрические группы 2, 3 и 4-й степени разрешимы. Это находится в полном согласии с общеизвестным фактом разрешимости в радикалах уравнений 2, 3 и 4-й степени. Группы Галуа «общих» уравнений 5, 6-й и т. д. степеней суть симметрические группы тех же степеней. Но эти группы неразрешимы. Отсюда следует, что общие уравнения выше 4-й степени не могут быть разрешены в радикалах.

К числу уравнений, не разрешимых в радикалах, относятся и уравнения (9) при $n > 4$, поскольку их группа Галуа также симметрическая.

§ 6. Основные понятия общей теории групп

В XIX в. теория групп развивалась преимущественно как теория групп преобразований. Однако с течением времени становилось все более ясным, что наиболее существенные из полученных результатов зависят лишь от того, что преобразования можно перемножать и что это действие обладает рядом характерных свойств. С другой стороны, были найдены объекты, вовсе не являющиеся преобразованиями, но над которыми можно производить некоторое действие (назовем его по-прежнему умножением), обладающее теми же свойствами, что и в группах преобразований, и к которым главные теоремы теории групп преобразований оказались также применимыми. В силу этого к концу прошлого столетия понятие группы стали применять не только к системам преобразований, но и к системам произвольных элементов.

Общее определение группы. В настоящее время общепринято следующее определение группы: пусть каждой паре рассматриваемых в определенном порядке элементов a, b произвольного множества G сопоставлен вполне определенный элемент c того же множества. Тогда говорят, что на множестве G задана операция или действие. Обычно для операций вводят особые названия: сложение, умножение, композиция. Элемент множества G , отвечающий паре a, b , называется в таком случае соответственно суммой, произведением, результатом композиции элементов a, b и обозначается соответственно $a + b, ab, a * b$. Название «сложение» или «умножение» употребляется и в тех случаях, когда рассматриваемая операция не имеет никакого отношения к обычным действиям сложения и умножения чисел.

Множество G вместе с определенной на нем операцией $*$ называется *группой* относительно этой операции, если выполняются следующие групповые аксиомы:

1. Для любых трех элементов x, y, z из G

$$x * (y * z) = (x * y) * z \text{ (закон ассоциативности).}$$

2. Среди элементов G существует элемент e , для которого при любом x из G

$$x * e = e * x = x.$$

3. Для каждого элемента a из G в G существует такой элемент a^{-1} , что

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Элемент e , указанный в аксиоме 2, называется *нейтральным элементом* группы, а элемент a^{-1} , существование которого утверждает аксиома 3, называется *обратным* для a . Если групповая операция называется сложением или умножением, то нейтральный элемент называется соответственно *нулевым* или *единичным*, а групповые аксиомы принимают вид

$$1) x + (y + z) = (x + y) + z, \quad 1) x(yz) = (xy)z,$$

$$2) x + 0 = 0 + x = x, \quad 2) xe = ex = x,$$

$$3) x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad 3) xx^{-1} = x^{-1}x = e.$$

В предшествующих параграфах рассмотрено много примеров групп. Элементами этих групп были преобразования, а групповым действием служило умножение преобразований. Совокупность чисел $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ относительно операции сложения является также группой, так как сумма целых чисел есть снова целое число, сложение целых чисел ассоциативно; нейтральным элементом является целое число 0, и для каждого числа a среди рассматриваемых чисел есть противоположное число $-a$. Другим примером группы может служить совокупность всех действительных чисел (за исключением нуля) относительно умножения. В самом деле, произведение любых двух, отличных от нуля, действительных чисел есть действительное число, отличное от нуля; действие умножения действительных чисел ассоциативно; нейтральный элемент существует и равен 1; у каждого ненулевого действительного числа a есть обратное число $a^{-1} = 1/a$. Число аналогичных примеров можно неограниченно увеличить.

Хотя групповая операция может называться различно, мы условимся в дальнейшем почти всегда называть ее умножением. Понятия подгруппы, степеней элемента группы, циклической группы, порядка элемента группы

определяются так же, как и для групп преобразований, и мы их повторять не будем (см. § 3). Отметим лишь, что элемент a группы G называется сопряженным с элементом b , если в G найдется такой элемент x , что $b = x^{-1}ax$. Так как $a = a^{-1}aa$, то каждый элемент группы сопряжен с самим собой. Далее, из $b = x^{-1}ax$, очевидно, следует $xbx^{-1} = a$, или $a = (x^{-1})^{-1}bx^{-1}$, т. е. если элемент a сопряжен с b , то b сопряжен с a . Наконец, если $b = x^{-1}ax$ и $c = y^{-1}by$, то

$$c = y^{-1}x^{-1}axy = (xy)^{-1}a(xy).$$

Следовательно, два элемента, сопряженные с третьим, сопряжены между собой. Эти свойства показывают, что в группе все элементы распадаются на различные классы сопряженных друг с другом элементов. Впрочем, если группа коммутативна, т. е. $xy = yx$ для любых x и y , то сопряженные элементы совпадают и каждый класс сопряженных элементов оказывается состоящим из одного элемента.

Изоморфизм. В понятии группы можно различать две стороны. Чтобы задать группу, нужно указать: 1) какие объекты являются ее элементами и 2) закон перемножения элементов. Сообразно этому и изучение свойств групп можно производить с разных точек зрения. Можно изучать связи между индивидуальными свойствами элементов группы и их совокупностей и свойствами их по отношению к групповой операции. Такой точки зрения часто держатся при изучении отдельных конкретных групп, например при изучении свойств группы движений пространства или плоскости. Однако можно изучать и те свойства групп, которые целиком выражаются через свойства групповой операции. Эта точка зрения характерна для *абстрактной* или *общей* теории групп. Более отчетливо она может быть выражена при помощи понятия изоморфизма.

Две группы называются *изоморфными*, если элементы одной из них можно так сопоставить с элементами другой, что произведению произвольных элементов первой группы будет отвечать произведение соответствующих элементов второй группы. Взаимно однозначное соответствие между элементами двух групп, обладающее указанными свойствами, называется *изоморфизмом*.

Легко видеть, что элементы двух групп, отвечающие друг другу при изоморфном соответствии, будут обладать одинаковыми свойствами по отношению к групповой операции. Так, при изоморфном соответствии нейтральный элемент, взаимно обратные элементы, элементы данного порядка n , подгруппы одной группы переходят соответственно в нейтральный элемент, взаимно обратные элементы, элементы того же порядка n , подгруппы другой группы. Поэтому можно сказать, что абстрактная теория групп изучает лишь те свойства групп, которые сохраняются при изоморфных отображениях. Например, с точки зрения абстрактной теории групп группа всех подстановок четырех элементов и группа собственных и несобственных движений пространства, переводящих в себя фиксированный правильный четырехгранник, обладают одинаковыми свойствами, так как они изоморфны. Действительно, рассматриваемые движения переводят вершины четырехгранника снова в его вершины. Число этих движений равно 24. Сопоставляя с каждым движением вызываемую им перестановку вершин, мы получим взаимно однозначное соответствие между элементами обеих групп, которое и будет искомым изоморфизмом.

Замечательный пример изоморфного соответствия дает теория логарифмов. Ставя каждому положительному действительному числу в соответствие

логарифм этого числа, мы получим взаимно однозначное отображение множества действительных положительных чисел на множество всех положительных и отрицательных действительных чисел. Соотношение $\log(xy) = \log x + \log y$ показывает, что установленное отображение является изоморфным отображением группы положительных действительных чисел относительно умножения на группу всех действительных чисел относительно сложения. Практическая важность этого изоморфизма общеизвестна.

Примерами неизоморфных групп могут служить конечные группы различных порядков.

Как уже было сказано выше, абстрактная группа определяется законом умножения элементов независимо от их природы, так что различные изоморфные между собой конкретно заданные группы можно рассматривать как модели одной и той же абстрактной группы.

Абстрактную группу можно задавать различными способами, из которых наиболее естественным, по крайней мере для конечных групп, является задание посредством «таблицы умножения».

Для группы порядка n , элементы которой записаны в каком-либо порядке, такая таблица умножения состоит из квадрата, разделенного на n строк и n столбцов. В клетке, лежащей в i -й строке и j -м столбце, обозначается элемент, являющийся произведением элемента с номером i на элемент с номером j . Такая таблица умножения для конечной группы иногда называется ее квадратом Кэли.

Однако практически задание группы посредством таблицы умножения почти не употребляется ввиду большой громоздкости.

Существуют и другие способы задания абстрактной группы. С одним из них — заданием группы при помощи производящих элементов и определяющих соотношений — мы еще познакомимся. Однако чаще всего абстрактную группу определяют заданием изоморфной ей конкретной группы, в частности группы преобразований.

Возникает естественный вопрос, можно ли любую абстрактную группу рассматривать как группу преобразований. Ответ дает следующая теорема: каждая группа G изоморфна некоторой группе преобразований множества ее элементов.

Действительно, пусть g — фиксированный элемент из G . Обозначим через A_g то преобразование множества элементов G , при котором каждому элементу x из G отвечает элемент xg . Преобразование A_g взаимно однозначное, так как уравнение

$$xA_g = xg = a$$

при любом данном a имеет единственное решение $x = ag^{-1}$. С другой стороны, произведению элементов группы gh отвечает произведение соответствующих преобразований $A_g A_h$, ибо

$$xA_{gh} = x(gh) = (xg)h = (xA_g)A_h = x(A_g A_h).$$

Нейтральному элементу e группы G отвечает единичное, а обратному элементу g^{-1} обратное преобразование. Поэтому совокупность Γ всех преобразований, отвечающих элементам группы G , является группой преобразований, изоморфной G . Легко убедиться, что если число элементов G больше 2, то совокупность Γ не исчерпывает всех преобразований множества G и является лишь подгруппой «симметрической» группы всех преобразований этого множества.

Инвариантные подгруппы и фактор-группы. Пусть P и Q — произвольные совокупности элементов какой-либо группы G . Произведением совокупности P на совокупность Q , символически PQ , называется множество тех элементов группы G , которые могут быть представлены в виде произведения некоторого элемента из P на некоторый элемент из Q . В частности, произведение gP , где g — элемент группы G , есть совокупность произведений элемента g на каждый элемент множества P .

Подгруппа H группы G называется *инвариантной подгруппой* или *нормальным делителем* группы G , если $gH = Hg$ для любого g из G . Совокупности вида gH и Hg , где H — произвольная подгруппа, называются соответственно *правым* и *левым смежными классами* группы G по подгруппе H , содержащими элемент g . Таким образом, можно сказать, что инвариантные подгруппы вполне характеризуются тем свойством, что для них левый и правый смежные классы, отвечающие одному и тому же элементу, совпадают.

Если H — инвариантная подгруппа, то произведение двух смежных классов будет, как легко доказать, снова смежным классом, именно, $aH \cdot bH = ab \cdot H$. Подгруппа H сама по себе является смежным классом, отвечающим единице или любому своему элементу h , так как $hH = H$. Умножение смежных классов ассоциативно

$$(aH \cdot bH) cH = (ab \cdot c) H = (a \cdot bc) H = aH (bH \cdot cH).$$

Подгруппа H играет роль нейтрального элемента в этом умножении: $H \cdot aH = eH \cdot aH = (ea) H = aH$ аналогично $aH \cdot H = aH$. Смежный класс $a^{-1}H$ является обратным относительно aH , так как $aH \cdot a^{-1}H = aa^{-1}H = H$. Следовательно, рассматривая каждый смежный класс по инвариантной подгруппе в качестве элемента нового множества, мы видим, что это множество будет группой относительно операции умножения смежных классов. Эта группа называется *фактор-группой* группы G по инвариантной подгруппе H и обозначается G/H .

Легко установить, что для конечных групп каждый смежный класс по любой подгруппе H содержит столько различных элементов, сколько их содержит сама подгруппа H , и что разные смежные классы общих элементов не имеют. Отсюда следует, что число смежных классов конечной группы G по какой-либо ее подгруппе H равно порядку G , деленному на порядок H , откуда вытекает важная теорема Лагранжа о том, что порядок любой подгруппы конечной группы является делителем порядка группы.

Из определения инвариантной подгруппы видно, что в абелевых группах всякая подгруппа является инвариантной. Другой крайний случай представляют так называемые *простые группы*, ни одна подгруппа которых, отличная от единичной и от самой группы, не является инвариантной. Помимо абелевых и простых групп, важное значение имеют также разрешимые группы, определение которых было уже дано в § 3. Можно показать, что разрешимые группы обладают конечной цепочкой инвариантных подгрупп $G, G_1, G_2, \dots, G_k$, первая из которых совпадает с заданной группой G ; каждая следующая содержится в предыдущей; последняя подгруппа является единичной, а все фактор-группы $G/G_1, G_1/G_2, \dots, G_{k-1}/G_k$ являются абелевыми.

Гомоморфизм. Понятие фактор-группы весьма тесно связано с основным для всей теории групп понятием гомоморфного отображения.

Однозначное отображение совокупности элементов группы G на совокупность элементов группы H называется *гомоморфизмом* или *гомоморфным*

отображением, если произведению каждых двух элементов первой группы отвечает произведение соответствующих элементов второй.

Таким образом, обозначая для каждого элемента x из группы G через x' соответствующий элемент группы H , гомоморфное отображение можно характеризовать свойством

$$(x_1 x_2)' = x'_1 x'_2.$$

Из определений гомоморфизма и изоморфизма видно, что изоморфное отображение обязательно взаимно однозначное, в то время как гомоморфное отображение однозначно только в одну сторону: каждому элементу группы G отвечает единственный элемент группы H , но различные элементы G могут иметь один и тот же образ в H . В известном смысле можно утверждать, что при изоморфном отображении группа H является точной копией группы G , а при гомоморфном отображении, при переходе от G к H , различия между некоторыми элементами G стираются, некоторые элементы как бы «склеиваются» в один элемент H . Однако эта «грубость» гомоморфного отображения не есть недостаток, а, наоборот, является большим преимуществом, позволяющим употреблять гомоморфное отображение в качестве мощного средства для исследования свойств групп.

Во многих положениях, связанных с преобразованиями, гомоморфное отображение появляется само собой. Рассмотрим, например, группу симметрий правильного тетраэдра (рис. 20). Эта группа изоморфна симметрической группе подстановок четырех элементов, ибо существует одно и только одно движение (1-го или 2-го рода), переводящее вершины A_1, A_2, A_3, A_4 в любое другое заданное расположение.

Рассмотрим теперь прямые l_1, l_2, l_3 , соединяющие середины противоположных ребер. Каждое движение, совмещающее тетраэдр с собой, порождает некоторую подстановку l_1, l_2, l_3 и всякая подстановка l_1, l_2, l_3 порождается некоторой симметрией тетраэдра. Ясно, что произведению преобразований тетраэдра соответствует произведение подстановок прямых l_1, l_2, l_3 . По рис. 20 легко проследить, как естественным образом осуществляется при этом гомоморфное отображение симметрической группы подстановок четырех элементов A_1, A_2, A_3, A_4 на симметрическую группу подстановок трех элементов l_1, l_2, l_3 . Без труда можно найти элементы «большой» группы, которые «склеиваются» при этом гомоморфизме.

Рассмотрим еще несколько примеров. Совокупность всех подстановок n элементов является при $n > 2$ некоммутативной группой. С другой стороны, числа $+1$ и -1 относительно умножения также образуют группу. Поставим теперь в соответствие каждой четной подстановке каких-либо n элементов число $+1$, а каждой нечетной подстановке — число -1 . Это дает гомоморфное отображение симметрической группы подстановок n элементов на группу $\{+1, -1\}$, так как согласно § 3 произведение подстановок одинаковой четности есть подстановка четная, а произведение подстановок различной четности есть подстановка нечетная.

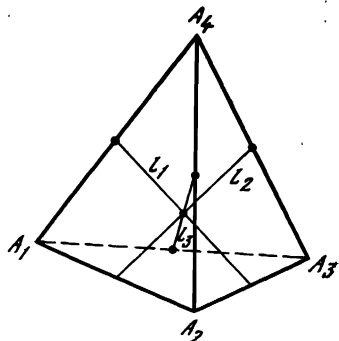


Рис. 20

Другой пример: если каждому действительному числу $x \neq 0$ поставить в соответствие его абсолютную величину $|x|$, то возникающее отображение группы положительных и отрицательных действительных чисел относительно умножения (нуль исключается) на группу только положительных действительных чисел относительно умножения будет гомоморфизмом, поскольку $|xy| = |x||y|$.

Выше было отмечено, что на плоскости каждое движение 1-го рода A может быть представлено в виде произведения подходящего поворота V_A вокруг фиксированной точки O и некоторого параллельного переноса D_A . Повороты вокруг точки O образуют группу. Поэтому соответствие $A \rightarrow V_A$ однозначно отображает группу плоских движений 1-го рода на группу поворотов плоскости вокруг точки O . Покажем, что это отображение является гомоморфизмом. Из разложений $A = V_A D_A$, $B = V_B D_B$ следует

$$AB = V_A D_A V_B D_B = (V_A V_B) (V_B^{-1} D_A V_B D_B).$$

Первая скобка есть поворот вокруг O , а вторая — произведение преобразованного переноса $V_B^{-1} D_A V_B$ на перенос D_B и, следовательно, является переносом. Это показывает, что произведению движений AB отвечает произведение соответствующих поворотов $V_A V_B$, т. е. что рассматриваемое отображение есть гомоморфизм.

Наконец, докажем, что фактор-группа G/N произвольной группы G по любому ее нормальному делителю N есть гомоморфный образ группы G .

Действительно, поставив каждому элементу g группы G в соответствие смежный класс gN , содержащий g , мы получаем искомого гомоморфное отображение G на G/N , так как произведению gh отвечает смежный класс ghN , равный произведению смежных классов gN и hN , отвечающих элементам g и h .

Возвращаясь к общим свойствам гомоморфных отображений, покажем, что нейтральный элемент при любом гомоморфизме переходит в нейтральный элемент и что взаимно обратные элементы переходят во взаимно обратные же.

В самом деле, если e — нейтральный элемент группы G , e' — его образ в H , то из $ee = e$ следует $e'e' = e'$, откуда, обозначая через ε нейтральный элемент группы H , получим $e' = e'e'^{-1} = \varepsilon$. Первое утверждение доказано. Пусть теперь x и y — взаимно обратные элементы в G , а x' и y' — их образы в H . Из $xy = e$ следует $x'y' = e' = \varepsilon$, т. е. x и y — взаимно обратные элементы в H и, значит,

$$(x^{-1})' = x'^{-1}.$$

Доказанные утверждения позволяют легко найти образ любого произведения элементов из G . Например,

$$(ab^{-1}c^{-1}dh^{-1})' = a' (b^{-1})' (c^{-1})' d' (h^{-1})' = a' b'^{-1} c'^{-1} d' h'^{-1}.$$

Следующая теорема лежит в основе всей теории гомоморфных отображений.

При гомоморфном отображении произвольной группы G на группу H совокупность N элементов группы G , отображающихся в нейтральный элемент e' группы H , является инвариантной подгруппой в G ; совокупность элементов G , отображающихся в произвольный фиксированный элемент группы H , является смежным классом G по N , а устанавливаемое таким обра-

зом взаимно однозначное соответствие между смежными классами G по N и элементами группы H есть изоморфизм между H и фактор-группой G/N .

Докажем эту теорему. Пусть a, b — произвольные элементы из N . Это означает, что $a' = b' = e'$, где штрихом, как и ранее, обозначены образы элементов G в N . Но тогда

$$(ab)' = a'b' = e'e' = e', \quad (a^{-1})' = a'^{-1} = e'^{-1} = e',$$

т. е. ab и обратные элементы a^{-1}, b^{-1} принадлежат N и, следовательно, совокупность N является группой. Далее, для произвольного элемента g из G

$$(g^{-1}ag)' = g'^{-1}a'g' = g'^{-1}e'g' = g'^{-1}g' = e',$$

т. е. $g^{-1}ag$ входит в N при любом g из G и любом a из N , а из этого, очевидно, следует, что N — инвариантная подгруппа. Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения возьмем в группе G произвольный элемент g и рассмотрим совокупность U всех тех элементов u из G , образ которых u' совпадает с образом g' элемента g . Пусть $u \in gN$, т. е. $u = gn$, где $n \in N$, тогда $u' = g'n' = g'e' = g'$. Следовательно, $gN \subset U$. Обратно, если $u' = g'$, то $(g^{-1}u)' = g'^{-1}u' = g'^{-1}g' = e'$, т. е. $g^{-1}u = n$, где n — элемент из N . Отсюда $u = gn$ и, значит, $U \subset gN$. Из $gN \subset U$, $U \subset gN$ следует: $U = gN$.

Наконец, третье утверждение теоремы очевидно: произвольным смежным классам gN, hN из фактор-группы G/N отвечают в H элементы g', h' , а произведению классов, в силу формулы

$$gN \cdot hN = ghN,$$

отвечает $(gh)' = g'h'$, что и требовалось доказать.

Теорема о гомоморфизмах показывает, что каждый гомоморфный образ H группы G изоморфен соответствующей фактор-группе G/N . Таким образом, с точностью до изоморфизма все гомоморфные образы заданной группы G исчерпываются ее различными фактор-группами.

§ 7. Непрерывные группы

Группы Ли. Непрерывные группы преобразований. Успех, выпавший на долю теории групп в решении алгебраических уравнений высших степеней, побудил математиков середины прошлого века попытаться применить теорию групп к решению уравнений других видов, в первую очередь к решению дифференциальных уравнений, играющих столь большую роль в приложениях математики. Эта попытка увенчалась успехом. Хотя группы в дифференциальных уравнениях заняли совершенно иное место, нежели в теории алгебраических уравнений, исследования по применениям теории групп к решению дифференциальных уравнений привели к существеннейшему расширению самого понятия группы и созданию новой теории так называемых непрерывных групп и групп Ли, оказавшихся чрезвычайно важными для развития самых разнообразных отделов математики.

В то время как группы алгебраических уравнений состоят лишь из конечного числа преобразований, построенные аналогичным образом группы дифференциальных уравнений оказались бесконечными. Кроме того, оказалось, что преобразования, принадлежащие к группе дифференциального уравнения,

возможно задать посредством конечной системы параметров, меняя численные значения которых, можно получить все преобразования группы. Пусть, например, все преобразования группы определяются значениями параметров $a_1, a_2, \dots, a_r$. Придавая этим параметрам значения $x_1, x_2, \dots, x_r$, мы получим некоторое преобразование X ; придавая тем же параметрам новые значения $y_1, y_2, \dots, y_r$, получим другое преобразование Y . По условию произведение этих преобразований $Z = XY$ входит в группу и, значит, получается при определенных новых значениях параметров $z_1, z_2, \dots, z_r$. Значения z_i будут зависеть от $x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_r$, т. е. будут некоторыми функциями от них:

$$z_1 = \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_r; y_1, y_2, \dots, y_r),$$

$$z_2 = \Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_r; y_1, y_2, \dots, y_r),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$z_r = \Phi_r(x_1, x_2, \dots, x_r; y_1, y_2, \dots, y_r).$$

Группы, элементы которых непрерывно зависят от значений конечной системы параметров, а закон умножения выражается при помощи дважды дифференцируемых функций $\Phi_1, \dots, \Phi_r$, называются группами Ли, по имени норвежского математика Софуса Ли, впервые исследовавшего эти группы.

В первой половине XIX в. в трудах Н. И. Лобачевского была изложена новая геометрическая система, носящая ныне его имя. Примерно в то же время в самостоятельную геометрическую систему выделилась проективная геометрия; несколько позже была создана геометрия Римана. В результате ко второй половине XIX в. можно было насчитать уже ряд самостоятельных геометрических систем, с различных точек зрения изучавших «пространственные формы действительного мира» (Энгельс). Охватить все эти геометрические системы с единой точки зрения, сохранив при этом важнейшие качественные отличия их, оказалось возможным при помощи теории групп.

Рассмотрим взаимно однозначные преобразования совокупности точек какого-либо геометрического пространства, не изменяющие тех основных отношений между фигурами, которые изучаются в данной геометрии. Совокупность этих преобразований составляет группу, называемую обычно группой движений или автоморфизмов данной геометрии. Группа движений вполне характеризует данную геометрию, так как если группа движений известна, то соответствующая геометрия может рассматриваться как наука, изучающая те свойства совокупностей точек, которые остаются неизменными при преобразованиях данной группы. Метод классификации различных геометрических систем по их группам движений был выдвинут во второй половине прошлого века в работах Ф. Клейна. Об этом методе и различных геометрических системах было рассказано в главе об абстрактных пространствах. Здесь же мы только отметим, что группы движений всех фактически изучавшихся в прошлом веке геометрических систем оказались группами Ли. В силу этого задача изучения групп Ли приобрела особую важность.

Благодаря обилию связей с самыми различными областями математики и механики теория групп Ли энергично развивалась от своего основания вплоть до наших дней. При этом оказалось, что некоторые вопросы, не решенные для конечных групп и в настоящее время, были сравнительно быстро разрешены для групп Ли. Так, задача классификации простых конечных групп (т. е. конечных групп, не имеющих нетривиальных инвариантных подгрупп) остается до сих пор мало продвинутой, а соответствующая класси-

фикация простых групп Ли была получена Киллингом и Картаном еще в конце прошлого века. Развивая теорию групп Ли, советские математики В. В. Морозов, А. И. Мальцев, Е. Б. Дынкин нашли полное решение важной проблемы классификации простых *подгрупп* групп Ли, долгое время ожидавшей своего решения. В ином направлении развивалась теория групп Ли советскими математиками И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком, нашедшими так называемые неприводимые представления простых групп Ли унитарными преобразованиями гильбертова пространства; последняя задача представляет особый интерес для анализа и физики.

Изучение групп Ли осуществляется посредством своеобразного аппарата так называемых «инфинитезимальных групп», или алгебр Ли. Более подробно они будут рассмотрены в § 13.

Топологические группы. Наряду с широким развитием классической теории групп Ли в СССР исключительных успехов достигла более общая теория топологических или непрерывных групп. В отличие от понятия группы Ли, где требуется, чтобы элементы группы определялись конечной системой параметров и чтобы закон умножения выражался при помощи дифференцируемых функций, понятие топологической группы проще и шире. Именно, группа называется *топологической*, если для ее элементов, кроме обычной групповой операции, определено понятие близости и при этом из близости элементов группы следует близость их произведений и близость обратных элементов.

Первоначально понятие топологической группы оказалось необходимым, чтобы привести в надлежащий порядок многие основные понятия теории групп Ли. Однако впоследствии обнаружилась чрезвычайно большая важность этого понятия и для других отделов математики. Первые работы по теории общих топологических групп относятся к началу 20-х годов нашего века, но фундаментальные результаты, позволившие говорить о возникновении новой дисциплины, были найдены лишь в конце 20-х — начале 30-х годов. Значительная часть их была получена советским математиком Л. С. Понтрягиным, который заслуженно считается одним из создателей современной теории непрерывных групп. Его книга «Непрерывные группы», содержащая первое в мировой литературе сводное изложение теории непрерывных групп, остается основным руководством в этой области уже почти 20 лет.

§ 8. Фундаментальные группы

Во всех рассмотренных в предыдущих параграфах конкретных случаях группы обычно появлялись как группы преобразований тех или иных множеств. Исключение составляли лишь группы чисел относительно сложения и умножения. Теперь мы хотим разобрать важный пример, когда с самого начала группа возникает не как группа преобразований, а именно как некоторая алгебраическая система с одним действием.

Фундаментальная группа. Рассмотрим некоторую поверхность S и на ней подвижную точку M . Заставляя M пробегать на поверхности непрерывную кривую, соединяющую точку A с точкой B , мы получим определенный путь из A в B . Этот путь может пересекать сам себя любое число раз и даже может идти сам по себе на отдельных участках. Чтобы указать путь, мало задать только кривую, по которой перемещается точка M . Нужно еще указать участки, которые эта точка проходит несколько раз, и направление их прохождения. Например, точка может пробегать одну и ту же окружность различное число раз и в различных направлениях, причем все эти круговые пути счи-

таются различными. Два пути с одинаковыми начальными и конечными точками называются эквивалентными, если один из них можно перевести в другой непрерывным изменением. На плоскости или сфере любые два пути, соединяющие точку A с точкой B , эквивалентны (рис. 21). Однако на поверхности тора, например, замкнутые пути U и V (рис. 22), выходящие и оканчивающиеся в точке A , не эквивалентны друг другу.

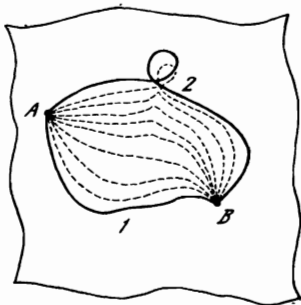


Рис. 21

Если вместо тора рассмотреть бесконечно простирающийся в обе стороны круговой цилиндр и на нем взять путь X (рис. 23), то легко сообразить, что любой замкнутый путь с начальной точкой A , проведенный на цилиндре, будет эквивалентен пути вида X^n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), где под X^n ($n > 0$) следует понимать путь X , повторенный n раз; под X^0 — нулевой путь, состоящий лишь из одной точки A , а под X^{-n} — путь X^n , пробегаемый в обратную сторону, например: $Z \sim X^{-1}$, $Y \sim X^2$, $U \sim X^0$ (рис. 23). Этот пример показывает значение понятия эквивалентности путей: в то время как различных замкнутых путей на цилиндре существует необозримое множество, с точностью до эквивалентности все эти пути сводятся только к окружности X , пробегаемой в том или ином направлении достаточное число раз. При $m \neq n$ пути X^m и X^n не эквивалентны.

Возвращаясь к рассмотрению произвольной поверхности, предположим, что нам заданы на ней два пути — путь U , ведущий из точки A в точку B , и путь V , ведущий из точки B в точку C . Тогда, заставляя сначала точку пробежать путь AB , а затем BC , мы получим путь AC , который естественно назвать произведением путей $U = AB$ и $V = BC$ и обозначить через UV . Если пути U, V соответственно эквивалентны путям U_1, V_1 , то произведения их UV и U_1V_1 будут также эквивалентны. Умножение путей ассоциативно в том смысле, что если одно из произведений $U(VW)$ или $(UV)W$ определено, то другое также определено и оба представляют эквивалентные пути. Если подвижную точку M заставить пробегать какой-нибудь путь $U = AB$ в противоположном направлении, то получится обратный путь $U^{-1} = BA$, ведущий из точки B в точку A . Произведение пути AB на обратный ему путь BA будет замкнутым путем, эквивалентным нулевому пути, состоящему лишь из одной точки A .

Согласно определению перемножать можно не любые два пути, а лишь такие, у которых конечная точка первого пути совпадает с начальной точкой второго. Этот недостаток исчезает, если рассматривать лишь замкнутые пути, выходящие из одной и той же начальной точки A . Любые два такие пути можно перемножить, в результате чего снова получится замкнутый путь с начальной точкой A . Кроме того, для каждого замкнутого пути с начальной точкой A обратный путь обладает теми же свойствами.

Условимся теперь эквивалентные пути считать различными представителями одного и того же «пути», лишь проведенного различными способами на поверхности, а неэквивалентные пути будем считать представителями существенно различных «путей». Приведенные выше замечания показывают, что в таком случае совокупность всех замкнутых путей (кавычки мы опускаем), выходящих из какой-либо точки A поверхности, будет являться группой от-

носителем операции умножения путей. Единичным (нейтральным) элементом этой группы будет нулевой путь, а обратным элементом для данного пути будет служить этот же путь, только проходимый в обратном направлении.

Группа путей, вообще говоря, зависит не только от вида поверхности, но и от выбора начальной точки A . Однако если поверхность не распадается на отдельные куски, т. е. если любые ее две точки могут быть соединены непрерывным путем, лежащим на поверхности, то группы путей, отвечающих

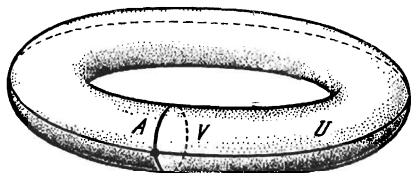


Рис. 22

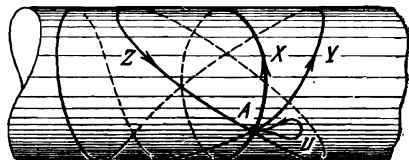


Рис. 23

различным точкам, будут изоморфными, и в этом случае можно говорить просто о группе путей поверхности S , не указывая точки A . Эта группа путей поверхности и называется ее *фундаментальной группой*.

Если поверхность S есть плоскость или сфера, то группа путей состоит лишь из единичного элемента, так как на плоскости и на сфере любой путь стягивается в точку. Однако уже на поверхности бесконечного кругового цилиндра, как мы видели, есть замкнутые пути, не стягиваемые в одну точку. Поскольку всякий замкнутый путь на цилиндре, выходящий из точки A , эквивалентен некоторой степени пути X (рис. 23), причем различные степени X между собой не эквивалентны, группа путей цилиндрической поверхности является бесконечной циклической группой. Можно доказать, что группа путей тора (рис. 22) состоит из путей вида $U^m V^n$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), причем $UV = VU$ и $U^m V^n = U^{m_1} V^{n_1}$ только при $m = m_1, n = n_1$ (напомним, что при рассмотрении группы путей равенство путей понимается в смысле их эквивалентности).

Важность группы путей объясняется следующим ее свойством. Допустим, что, кроме поверхности S , дана другая поверхность S_1 , такая, что между точками поверхностей S и S_1 можно установить взаимно однозначное и непрерывное соответствие. Например, такое соответствие возможно, если поверхность S_1 получена из S посредством некоторой непрерывной деформации без разрывов и без склеиваний различных точек поверхности. Каждому пути на исходной поверхности S будет соответствовать путь на поверхности S_1 . При этом эквивалентным путям будут соответствовать эквивалентные, произведению двух путей — произведение, так что группа путей на поверхности S_1 будет изоморфна группе путей на поверхности S . Иначе говоря, группа путей, рассматриваемая с абстрактной точки зрения, т. е. с точностью до изоморфизма, является инвариантом при всевозможных взаимно однозначных и непрерывных преобразованиях поверхности. Если группы путей для двух поверхностей различны, то соответствующие поверхности не могут быть переведены непрерывно одна в другую. Так, например, плоскость не может быть без склеиваний и разрывов деформирована в цилиндрическую поверхность, потому что группа путей плоскости состоит из единичного элемента, а группа путей цилиндра бесконечна.

Свойства фигур, остающиеся неизменными при взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразованиях, изучаются в особой математической дисциплине топологии, основные идеи которой были освещены в гл. XVIII. Инварианты непрерывных преобразований называются *топологическими инвариантами*. Группа путей является одним из замечательнейших примеров топологических инвариантов. Ясно, что группа путей может быть определена не только для поверхности, но и для любых множеств точек, лишь бы в этих множествах можно было говорить о путях и их деформациях.

Определяющие соотношения. Способы вычисления групп путей подробно изучены в топологии. При этом оказалось, что, как правило, указанные группы приходится определять при помощи особого способа, который часто применяется в теории групп для задания абстрактных групп, а не только для фундаментальных групп в топологии. Заключается он в следующем.

Пусть G — некоторая группа. Элементы $g_1, g_2, \dots, g_n$ называются образующими элементами группы G , если всякий элемент g можно представить в виде

$$g = g_{i_1}^{\alpha_1} g_{i_2}^{\alpha_2} \dots g_{i_k}^{\alpha_k},$$

где $i_1, i_2, \dots, i_k$ — некоторые из чисел $1, 2, \dots, n$; не стоящие рядом номера i могут совпадать; число сомножителей k произвольно; показатели $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — не равные нулю положительные или отрицательные целые числа.

Чтобы знать группу G , достаточно, кроме образующих, знать еще, какие произведения представляют один и тот же элемент группы и какие представляют различные элементы. Таким образом, для задания группы нужно перечислить все равенства вида

$$g_{i_1}^{\alpha_1} g_{i_2}^{\alpha_2} \dots g_{i_k}^{\alpha_k} = g_{j_1}^{\beta_1} g_{j_2}^{\beta_2} \dots g_{j_l}^{\beta_l},$$

имеющие место в группе G . Так как таких равенств всегда бесконечное множество, то вместо перечисления всех их даются обычно лишь такие равенства, из которых все остальные вытекают в силу групповых аксиом. Эти равенства и называются определяющими соотношениями.

Ясно, что одна и та же группа может быть задана самыми различными определяющими отношениями.

Рассмотрим, например, группу H с образующими a, b и соотношениями

$$a^2 = b^3, \quad ab = ba. \quad (10)$$

Положив $c = ab^{-1}$, будем иметь

$$a = bc, \quad a^2 = b^2 c^2, \quad b^3 = b^2 c^2, \quad b = c^2, \quad a = c^3.$$

Мы видим, что все элементы группы H можно выразить через один элемент c , причем

$$a = c^3, \quad b = c^2.$$

Так как из этих равенств соотношения (10) непосредственно вытекают, то для c никаких нетривиальных соотношений нет. Следовательно, группа H является бесконечной циклической группой с образующим элементом c .

Если в группе можно выбрать такие образующие, которые не связаны никакими нетривиальными соотношениями, то группа называется *свободной*,

а указанные образующие — свободными образующими. Если, например, группа имеет свободные образующие a, b , то всякий ее элемент *однозначно* записывается в форме

$$a^{\alpha_0} b^{\beta_1} a^{\alpha_1} b^{\beta_2} a^{\alpha_2} \dots b^{\beta_k} a^{\alpha_k},$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n$, показатели $\alpha_0, \beta_1, \alpha_1, \dots, \beta_k, \alpha_k$ представляют собой целые числа, положительные или отрицательные, отличные от нуля, кроме «крайних» α_0 и α_k , которые могут принимать и нулевые значения. Аналогичное утверждение справедливо и для свободных групп с большим числом образующих.

Если выписать образующие и определяющие соотношения для двух групп при условии, что рассматриваемые группы общих элементов не имеют, то, объединяя эти соотношения, мы получим новую группу, называемую свободным произведением данных.

Теория свободных групп, а также более общая теория свободных произведений, занимает в теории групп заметное место.

С геометрической точки зрения свободное произведение групп H_1 и H_2 это группа путей такой фигуры, которую можно представить в виде суммы двух замкнутых фигур, склеенных лишь в одной точке и имеющих H_1 и H_2 своими группами путей. Мы знаем уже, что группы путей цилиндрической поверхности есть свободная группа с одним образующим. Из сделанного замечания следует, например, что группа путей поверхности, изображенной на рис. 24, есть свободная группа с двумя образующими.

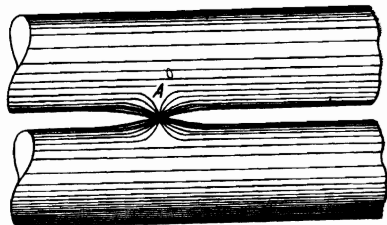


Рис. 24

Подобно тому, как определялась фундаментальная группа поверхности, можно ввести фундаментальную группу для пространственных тел, конечных или бесконечных.

Узлы и группы узлов. Как уже говорилось, с точки зрения топологии две поверхности считаются одинаковыми, если одну из них можно перевести в другую путем взаимно однозначного и взаимно непрерывного преобразования. Задача топологической классификации всех замкнутых поверхностей давно уже решена. Оказалось, что каждая замкнутая поверхность, расположенная в нашем обыкновенном пространстве, топологически эквивалентна либо сфере, либо сфере с несколькими ручками (рис. 25). Так, например, поверхность тора, изображенная на рис. 22, может быть непрерывно деформирована в сферу с одной ручкой, поверхность куба — в поверхность сферы и т. п. Ввиду этого изучение фундаментальных групп для замкнутых поверхностей не очень интересно, так как замкнутые поверхности вполне классифицированы и без этих групп. Однако существуют очень простые задачи, где без фундаментальных групп до сих пор почти ничего не удалось сделать. К числу их относится знаменитая проблема узлов.

Узлом мы будем называть замкнутую кривую, расположенную в обычном трехмерном пространстве. Это расположение может быть, как показывает рис. 26, весьма различным. Два узла называются эквивалентными, если один из них можно деформировать в другой непрерывным процессом, не разрывая кривой и не зацепляя ее саму за себя.

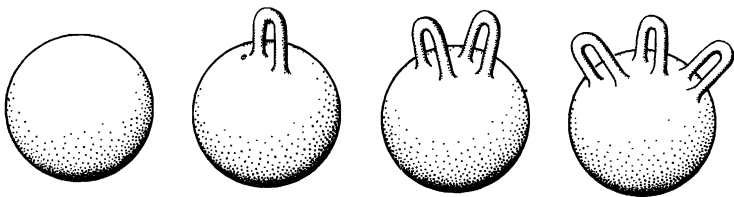


Рис. 25

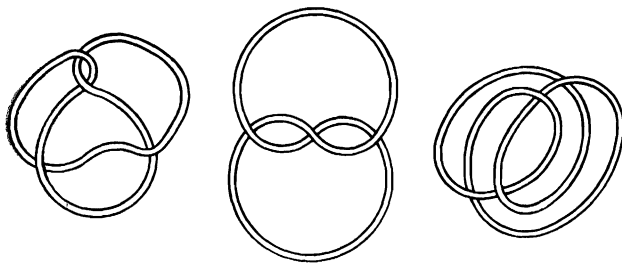


Рис. 26

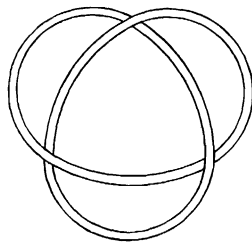


Рис. 27

Сразу же возникают две задачи: 1) как узнать, эквивалентны или нет любые два узла, заданные своими плоскими чертежами; 2) как классифицировать все неэквивалентные узлы.

Обе задачи до сих пор остаются нерешенными, причем имеющиеся пока основные успехи в их частичном решении связаны с теорией групп.

Выбросим из пространства точки, принадлежащие данному узлу, и рассмотрим фундаментальную группу оставшегося множества точек. Эту группу и называют группой узла. Непосредственно очевидно, что если узлы эквивалентны, то их группы изоморфны. Поэтому из неизоморфности группы узлов можно заключить о неэквивалентности самих узлов. Так, например, группа узла, приводящегося к окружности, есть циклическая группа, а группа узла, имеющего вид трилистника (рис. 27), есть более сложная группа. Последняя группа некоммутативна и, таким образом, неизоморфна группе окружности. Поэтому можно утверждать, что трилистниковый узел невозможно расправить в окружность, не разрубая его, — факт, очевидный экспериментально, но требующий для своего доказательства тонких математических соображений.

К сожалению, при рассмотрении групп узлов также встают не решенные до сих пор трудные задачи. Дело в том, что в топологии известны очень простые способы, как по заданному изображению узла найти образующие и определяющие соотношения группы узла. Но чтобы использовать группы для сравнения различных узлов, необходимо уметь решить, изоморфны или нет группы, заданные своими образующими и определяющими соотношениями, а решение этой задачи до сих пор неизвестно. Более того, советский математик П. С. Новиков недавно доказал замечательную теорему о том, что невозможно указать никакой единый регулярный способ (точнее — так называемый нормальный алгоритм), посредством которого можно было бы всегда решить, определяют ли две заданные системы определяющих соотно-

шений для одних и тех же образующих одну и ту же группу или нет. Эта теорема заставляет невольно высказать сомнение и в существовании какого-либо единообразного общего способа для распознавания эквивалентности узлов, заданных своими плоскими изображениями.

§ 9. Представления и характеры групп

Общая теория групп по своим методам несколько напоминает элементарную геометрию: в обоих случаях в основу кладется определенная система аксиом, исходя из которой и строится все здание теории. Но пример аналитической геометрии показывает, насколько полезным для исследования геометрических проблем оказывается привлечение аналитических, числовых методов.

Приложением средств анализа и классической алгебры к теории групп является так называемая теория представлений групп. Как аналитическая геометрия дает методы решения не только геометрических задач при помощи анализа, но и, наоборот, бросает геометрический свет на многие сложные проблемы анализа, так в еще большей степени теория представлений не только служит вспомогательным аппаратом для исследования свойств групп, но и, связывая воедино глубокие понятия и проблемы анализа и теории групп, позволяет для групповых фактов находить выражения в числовых соотношениях, а для аналитических зависимостей находить групповое истолкование. В настоящее время большая часть важных приложений теории групп в физике связана именно с теорией представлений.

Представления групп матрицами. В линейной алгебре (см. гл. XVI) уже рассматривалось действие умножения для матриц. Это действие ассоциативно, но, вообще говоря, некоммутативно. Неособенные квадратные матрицы данного порядка образуют группу относительно умножения. Действительно, произведение двух неособенных матриц есть снова неособенная матрица, роль нейтрального элемента играет единичная матрица и для каждой неособенной матрицы существует обратная, тоже неособенная.

Допустим, что дана некоторая группа G и каждому ее элементу g поставлена в соответствие определенная неособенная матрица комплексных чисел A_g порядка n и притом так, что при перемножении элементов группы соответствующие им матрицы также перемножаются: $A_{gh} = A_g \cdot A_h$. Тогда говорят, что дано представление группы G матрицами степени n . Обычно слово «матрицами» опускается и говорят просто о представлении степени n группы G . Представление степени n данной группы G есть просто гомоморфное отображение группы G в группу неособенных матриц степени n . Из общих свойств гомоморфных отображений следует, что при любом представлении нейтральный элемент группы G переходит в единичную матрицу, взаимно обратные элементы в G переходят во взаимно обратные матрицы.

Матрицы 1-го порядка — это отдельные комплексные числа. Поэтому представлением 1-й степени группы G является соответствие, при котором каждому элементу группы G отвечает комплексное число, причем произведению элементов группы отвечает произведение соответствующих комплексных чисел. Например, отображение, при котором четным подстановкам симметрической группы отвечает число 1, а нечетным — число -1 , будет представлением 1-й степени.

Поставив в соответствие каждому элементу группы G единичную матрицу E степени n , мы получим представление группы G , называемое ее единич-

ным представлением степени n . Если группа G конечная и содержит неединичные элементы, то, кроме единичного представления различных степеней, группа G обязательно имеет также бесконечно много других представлений. Способы нахождения их будут указаны дальше.

Зная одно представление группы G , можно получить бесчисленное множество других. Действительно, пусть $g \rightarrow A_g$ — данное представление группы G матрицами степени n . Выберем произвольную неособенную матрицу P той же степени n и положим $B_g = P^{-1}A_gP$. Соответствие $g \rightarrow B_g$ будет снова представлением группы G , так как

$$B_{gh} = P^{-1}A_{gh}P = P^{-1}A_gA_hP = P^{-1}A_gPP^{-1}A_hP = B_gB_h.$$

Представления, получающиеся этим способом из данного представления путем выбора различных матриц P , называются *эквивалентными* данному представлению. В теории представлений эквивалентные представления не считаются существенно различными, все представления рассматриваются обычно лишь с точностью до эквивалентности.

Другим способом нахождения новых представлений является прямое сложение представлений, заключающееся в следующем: пусть $g \rightarrow A_g$, $g \rightarrow B_g$ — какие-либо представления группы G матрицами соответственно степеней m и n . Рассмотрим отображение

$$g \rightarrow \begin{vmatrix} A_g & 0 \\ 0 & B_g \end{vmatrix}.$$

Учитывая правила перемножения матриц (см. гл. XVI), имеем

$$gh \rightarrow \begin{vmatrix} A_{gh} & 0 \\ 0 & B_{gh} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_gA_h & 0 \\ 0 & B_gB_h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_g & 0 \\ 0 & B_g \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_h & 0 \\ 0 & B_h \end{vmatrix},$$

т. е. указанное отображение снова является представлением группы G . Оно называется суммой двух данных представлений и обозначается $A_g + B_g$. Если слагаемые переставить, то получится иное представление

$$g \rightarrow \begin{vmatrix} B_g & 0 \\ 0 & A_g \end{vmatrix},$$

которое, однако, эквивалентно старому. Поэтому, если эквивалентные представления не различать, то сложение представлений будет коммутативной операцией. Легко видеть, что при том же условии сложение будет и ассоциативной операцией. Имея некоторый запас представлений $A_g, B_g, C_g, \dots$ группы G , можно путем их сложения получать представления все более высоких степеней: $A_g + B_g + C_g, A_g + A_g + A_g + A_g$ и т. д.

Например, числа $1, -1, i, -i$ относительно умножения образуют группу. Ставя каждому числу этой группы в соответствие само это число, мы получим представление 1-й степени. В качестве второго представления можно взять отображение $1 \rightarrow 1, -1 \rightarrow -1, i \rightarrow -i, -i \rightarrow i$. Суммой этих представлений будет отображение

$$1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad -1 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad i \rightarrow \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix}, \quad -i \rightarrow \begin{vmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{vmatrix}.$$

Преобразуя его при помощи матрицы $P = \begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{vmatrix}$, получим эквивалентное представление

$$1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad -1 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad i \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad -i \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Интересно отметить, что все матрицы этого представления действительны.

Допустим, что все матрицы некоторого представления степени n группы G имеют вид

$$g \rightarrow A_g = \begin{vmatrix} B_g & C_g \\ 0 & D_g \end{vmatrix},$$

где B_g, D_g — квадратные матрицы, а левый нижний угол A_g целиком заполнен нулями. Перемножая матрицы A_g и A_h , получим

$$A_{gh} = A_g A_h = \begin{vmatrix} B_g B_h & B_g C_h + C_g D_h \\ 0 & D_g D_h \end{vmatrix},$$

т. е. $B_{gh} = B_g B_h, D_{gh} = D_g D_h$. Это показывает, что отображения $g \rightarrow B_g$ и $g \rightarrow D_g$ будут также представлениями группы G , но только более низкой степени. Представление A_g называется ступенчатым представлением группы G , а всякое эквивалентное ему представление называется *приводимым*. Представление же, не эквивалентное никакому ступенчатому, называется *неприводимым*.

Если во всех матрицах A_g не только левый нижний, но и правый верхний угол C_g заполнен нулями, то представление A_g называется *распадающимся* в сумму представлений B_g, D_g . Представление, эквивалентное сумме неприводимых представлений, называется *вполне приводимым*.

В теории групп доказывалось, что всякое представление конечной группы вполне приводимо *. Отсюда следует, что для нахождения всех представлений конечной группы достаточно знать ее неприводимые представления, так как все остальные эквивалентны различным суммам неприводимых.

Практическое вычисление неприводимых представлений какой-либо конечной группы является, обычно, довольно сложной задачей, которая в явной форме решена лишь для отдельных классов конечных групп, например для коммутативных групп, для симметрических групп и некоторых других, хотя с теоретической точки зрения свойства представлений конечных групп изучены довольно подробно.

Для каждой конечной группы вводится особое «регулярное» представление, которое строится следующим образом. Пусть $g_1, g_2, \dots, g_n$ — элементы заданной группы G , перенумерованные в произвольном порядке, и пусть

$$g_i g_k = g_{i_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Выбирая какое-либо фиксированное значение для k , составим матрицу степени n , у которой в i -й строке стоит 1 на i_k -м месте, а остальные места заняты нулями ($i = 1, 2, \dots, n$), и введем для нее обозначение R_{g_k} . Соответствие $g_k \rightarrow R_{g_k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) называется *регулярным представлением* группы G . То, что это действительно представление, доказывается путем простых вычислений.

Можно доказать также, что, изменяя нумерацию элементов группы, мы перейдем к эквивалентному представлению и, следовательно, с точностью до эквивалентности каждая конечная группа имеет лишь одно регулярное представление.

Формулируем вкратце основные теоремы теории представлений конечных групп. Число различных (неэквивалентных) неприводимых представлений

* Напомним, что мы рассматриваем представления групп матрицами, элементами которых могут являться произвольные комплексные числа.

конечной группы конечно и равно числу классов сопряженных (см. стр. 380) элементов этой группы. Степени неприводимых представлений обязательно являются делителями порядка группы, причем регулярное представление эквивалентно сумме всех неэквивалентных неприводимых представлений, в которой каждое неприводимое слагаемое повторяется столько раз, какова его степень.

Отсюда вытекает следующее интересное соотношение между порядком конечной группы и степенями неприводимых представлений.

Обозначим число элементов группы G через n , число классов сопряженных элементов — через k и степени неприводимых представлений G — соответственно через $n_1, n_2, \dots, n_k$. Из построения регулярного представления видно, что его степень равна n . Поскольку, кроме того, регулярное представление эквивалентно сумме n_1 представлений, эквивалентных первому неприводимому представлению, плюс n_2 представлений, эквивалентных второму, и т. д., и при сложении представлений их степени складываются, должно иметь место равенство

$$n = n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_k^2. \quad (11)$$

Поставив каждому элементу группы в соответствие число 1, мы получим тривиальное неприводимое представление степени 1, которым обладает каждая группа. Понимая под n_1 в формуле (11) степень именно этого единичного представления, можно формулу (11) переписать в равносильной форме

$$n = 1 + n_2^2 + \dots + n_k^2,$$

где $n_2, \dots, n_k$ означают теперь степени нетривиальных неприводимых представлений.

Пользуясь тем, что $n_2, \dots, n_k$ должны быть делителями числа n , и зная k , иногда можно только из одного равенства (11) уже найти $n_2, \dots, n_k$. Например, симметрическая группа S_3 перестановок трех элементов имеет три класса сопряженных перестановок: (1); (12), (13), (23); (123), (132). При $n = 6$, $k = 3$ равенство (11) допускает единственную систему решений: $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$. Поэтому S_3 имеет два различных представления 1-й степени и одно неприводимое представление 2-й степени.

Другим примером могут служить конечные абелевы группы. Здесь каждый элемент составляет отдельный класс. Поэтому $k = n$, и из формулы (11) следует, что $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$, т. е. все неприводимые представления таких групп имеют первую степень и число их равно порядку группы.

Неприводимые представления абелевых групп иначе называются их характерами. Для всякого представления неабелевой группы характером называется набор так называемых следов (т. е. сумм диагональных элементов) матриц, образующих представление. Характеры конечных групп обладают замечательными свойствами и соотношениями. Исследование представлений и характеров групп обогатило теорию групп интересными общими результатами, нашедшими обширные приложения и в современной теоретической физике.

§ 10. Общая теория групп

Мы уже отмечали, что в течение почти всего прошлого века теория групп развивалась преимущественно как теория групп преобразований. Однако постепенно выяснилось, что основным является изучение именно групп, как

таковых, а изучение групп преобразований может быть сведено к изучению абстрактных групп и их подгрупп.

Переход от теории групп преобразований к теории абстрактных групп совершился вначале в теории конечных групп, но быстрое развитие теории групп Ли, а также проникновение теории групп в топологию сделали необходимым создание общей теории групп, в которой конечные группы рассматривались бы лишь как некоторый частный случай.

Первым руководством по теории групп, в котором со всей отчетливостью была проведена эта точка зрения, явилась книга О. Ю. Шмидта, вышедшая в Киеве в 1916 г. В 20-х годах Шмидт получил также важную теорему, относящуюся к теории бесконечных групп, которая стала отправным пунктом исследований для ряда других советских алгебраистов. Благодаря деятельности О. Ю. Шмидта и П. С. Александрова, много сделавших для популяризации идей современной алгебры, в Москве образовалась крупная школа теории групп, руководителем которой вскоре стал их ученик А. Г. Курош. Широкую известность приобрела, в частности, доказанная им теорема о том, что всякая подгруппа свободного произведения сама является свободным произведением подгрупп, изоморфных соответствующим подгруппам сомножителей, и, может быть, еще отдельной свободной подгруппы. Позже им была опубликована монография по теории групп, в которой впервые был систематически изложен богатый фактический материал, полученный в области общей теории групп. Эта монография в настоящее время является наиболее полным в мировой литературе курсом общей теории групп, пользующимся широкой международной известностью.

Вслед за алгебраистами Москвы общей теорией групп стали заниматься алгебраисты Ленинграда и других городов, внесшие большой вклад в ее развитие. Исследования по теории групп, ведущиеся в настоящее время в СССР, охватывают все ее существенные разделы, а полученные советскими математиками результаты уже неоднократно оказывали решающее влияние на развитие теории групп.

§ 11. Гиперкомплексные числа

При решении практических задач алгебраическим методом обычно в простейших случаях приходят к одному или нескольким уравнениям, из которых находят значения неизвестных величин. Неизвестные при этом являются количественными характеристиками изучаемых объектов; уравнения же составляются при помощи анализа реальных отношений, существующих между объектами.

Так обстоит дело в случаях, когда речь идет о простейших величинах, подобных массе, объему или расстоянию, для количественной характеристики которых достаточно одного числа. Однако в конкретных задачах встречаются не только объекты, характеризующиеся одним числом. Напротив, с развитием техники все большее значение приобретают объекты более сложной природы, для характеристики которых необходимо несколько и даже бесконечно много чисел. Уже такие важные физические величины, как сила, скорость, ускорение, характеризуются направленным отрезком и требуют для своего задания трех чисел. Далее известно, что положение точки в пространстве характеризуется тремя числами, положение плоскости — также тремя, положение прямой — четырьмя, а положение твердого тела — даже шестью числами. Поэтому когда приходится при помощи алгебры решать задачи,

касающиеся более сложных объектов, то получаются уравнения с большим числом неизвестных, разобраться в которых часто оказывается труднее, чем решить задачу непосредственно, пользуясь ее геометрическими или физическими особенностями. Отсюда естественно возникла мысль попытаться характеризовать более сложные объекты не системами обыкновенных чисел, а какими-нибудь более сложными обобщенными числами, над которыми можно было бы совершать операции, похожие на обычные арифметические действия. Эта постановка вопроса была тем более естественна, что история науки показывала не неизменность понятия числа, а его изменчивость, постепенное обогащение совокупности чисел от чисел натуральных к числам дробным, затем к относительно простым числам, действительным (рациональным и иррациональным) и, наконец, к комплексным.

Комплексные числа. Из гл. IV (том 1) читателю уже известны основные свойства комплексных чисел и простейшие их приложения. Сейчас нас будет интересовать только обоснование понятия комплексного числа. Напомним, как обычно определяется само понятие комплексного числа. Сначала рассматривают только обыкновенные действительные числа и замечают, что квадратный корень из отрицательных чисел не имеет смысла, поскольку квадрат каждого действительного числа есть число положительное или нуль. Далее указывают, что неотложные потребности науки заставили математиков рассматривать и выражения вида $a + b\sqrt{-1}$ как особого рода числа, которые они, в отличие от обыкновенных, действительных чисел, стали называть мнимыми. Если считать, что эти мнимые числа подчиняются тем же правилам арифметических действий, что и обычные числа, то все корни квадратные из отрицательных чисел могут быть выражены через величину $i = \sqrt{-1}$, а результат арифметических действий, произведенных в любом конечном числе над действительными и мнимыми числами, может быть всегда представлен в виде $a + bi$, где a и b — действительные числа.

Ясно, что такое определение мнимых чисел в высшей степени противоречит здравому смыслу, так как сначала утверждается, что выражения $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$ и т. п. смысла не имеют, а затем предлагается эти не имеющие смысла выражения называть мнимыми числами. Это обстоятельство вызвало большие сомнения математиков XVII и XVIII вв. в законности пользования комплексными числами. Однако эти сомнения рассеялись в начале XIX в., когда нашли геометрическое изображение комплексных чисел точками на плоскости. Строгое чисто арифметическое обоснование теории комплексных чисел было дано немного позже венгерским математиком Бойаи и английским — Гамильтоном. Это обоснование заключается в следующем.

Вместо чисел $a + bi$ будем говорить просто о парах действительных чисел (a, b) . Две пары условимся называть равными, если равны соответственно их первые и вторые члены, т. е. $(a, b) = (c, d)$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$. Сложение и умножение пар определим формулами

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Например, имеем

$$\begin{aligned} (2, 3) + (1, -2) &= (3, 1), & (2, 3)(1, -2) &= (8, -4), \\ (3, 0) + (2, 0) &= (5, 0), & (3, 0)(2, 0) &= (6, 0). \end{aligned}$$

Эти примеры показывают, в частности, что арифметические действия над парами, у которых на втором месте стоит 0, приводятся к тем же действиям над

их первыми членами, в силу чего такие пары можно обозначить просто их первым числом. Вводя еще обозначение i для пары $(0, 1)$, будем иметь

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi,$$

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

т. е. будем иметь обычные обозначения комплексных чисел.

Итак, с изложенной точки зрения комплексные числа являются парами обычных действительных чисел и действия с комплексными числами — лишь особого рода действия с парами действительных чисел.

Гиперкомплексные числа. Многообразное и успешное применение комплексных чисел побудило математиков уже в первые десятилетия XIX в. задуматься над вопросом, нельзя ли подобно тому, как комплексные числа строятся в виде пар действительных чисел, построить высшие комплексные числа, изображающиеся тройками, четверками и т. д. действительных чисел. Начиная с середины прошлого века было исследовано много различных частных систем таких высших комплексных или гиперкомплексных чисел, а в конце прошлого и первой половине текущего столетия была разработана общая теория гиперкомплексных чисел, нашедшая ряд важных приложений в смежных областях математики и физики.

Итак, назовем гиперкомплексным числом ранга n число, изображающееся совокупностью n действительных чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, которые пока условно будем называть координатами этого гиперкомплексного числа. Гиперкомплексные числа $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ будем называть равными, если равны их соответствующие координаты, т. е. если $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$. Действие сложения определим естественной формулой

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

аналогичной формуле сложения для комплексных чисел.

Также естественно вводится операция умножения гиперкомплексного числа на действительное: по определению считается, что

$$a(a_1, a_2, \dots, a_n) = (aa_1, aa_2, \dots, aa_n).$$

Сверх того, должно быть определено действие умножения двух гиперкомплексных чисел друг на друга, причем результат этого действия должен являться гиперкомплексным числом.

Распространить на общий случай определение умножения обыкновенных комплексных чисел трудно. Оно может быть осуществлено различными путями, и при этом будут получаться различные системы гиперкомплексных чисел. Поэтому прежде всего следует уяснить, что должно быть достигнуто таким определением. Несомненно желательно, чтобы определяемые нами действия над гиперкомплексными числами были похожи по своим свойствам на обычные действия с действительными числами. Каковы же свойства этих обычных действий?

Рассматривая внимательно свойства чисел и операций над ними, наиболее часто используемые в алгебре, легко заметить, что они сводятся к следующим:

1. Для любых двух чисел однозначно определена их сумма.
2. Для любых двух чисел однозначно определено их произведение.
3. Существует число нуль со свойством $a + 0 = a$ для любого a .

4. Для каждого числа a существует противоположное число x , удовлетворяющее равенству $a + x = 0$.

5. Сложение переместительно (коммутативно)

$$a + b = b + a.$$

6. Сложение обладает сочетательным (ассоциативным) свойством

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

7. Умножение переместительно

$$ab = ba.$$

8. Умножение сочетательно

$$(ab) \cdot c = a \cdot (bc).$$

9. Умножение распределительно (дистрибутивно)

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca.$$

10. Для каждого a и каждого $b \neq 0$ существует единственное число x , удовлетворяющее равенству $bx = a$.

Свойства 1—10 были выделены в результате тщательного анализа; развитие математики в последнее столетие показало их большую важность. В настоящее время всякая система величин, удовлетворяющая условиям 1—10, называется *полем*. Например, полями являются: совокупность всех рациональных чисел, совокупность всех действительных чисел, совокупность всех комплексных чисел, так как числа каждой из этих совокупностей можно складывать, перемножать, получая числа из той же совокупности, и эти действия обладают свойствами 1—10. Кроме этих трех наиболее важных полей, можно указать бесчисленное множество других полей, образованных числами. Однако наряду с полями, образованными числами, большой интерес представляют и поля, образованные величинами иной природы. Например, еще в средней школе нас обучают действиям с так называемыми алгебраическими дробями, т. е. дробями, у которых числитель и знаменатель являются многочленами относительно некоторых букв. Алгебраические дроби можно складывать, вычитать, перемножать, делить, и эти действия обладают свойствами 1—10. Следовательно, алгебраические дроби образуют систему объектов, являющуюся полем. Можно привести много других примеров полей, составленных величинами все более и более сложной природы. Ввиду важности свойств 1—10, определяющих поле, первоначально была поставлена задача найти такое действие умножения гиперкомплексных чисел, чтобы гиперкомплексные числа образовали поле. В случае успеха тем самым были бы получены новые, более общие комплексные числа. Однако уже в самом начале прошлого века обнаружили, что это возможно лишь для гиперкомплексных чисел ранга 2, причем получаются только обыкновенные комплексные числа. Этот результат показал, что комплексные числа занимают совершенно особое место и что получить расширение числовой системы за пределы комплексных чисел нельзя, если непременно требовать, чтобы выполнялись все свойства 1—10. Поэтому при дальнейших попытках построения высших числовых систем необходимо было отказаться от одного или нескольких свойств 1—10.

Кватернионы. Исторически первой гиперкомплексной системой, рассмотренной в математике, является система кватернионов, т. е. «четверных чи-

сел», введенная английским математиком и механиком Гамильтоном в середине прошлого столетия. Эта система удовлетворяет всем требованиям 1—10, кроме 7 (коммутативность умножения).

Кватернионы описываются следующим образом. Введем для четверок $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ сокращенные обозначения $1, i, j, k$. Тогда в силу равенства

$$(a, b, c, d) = a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0) + d(0, 0, 0, 1)$$

каждый кватернион можно однозначно представить в виде

$$(a, b, c, d) = a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k.$$

Кватернион 1 будем считать единицей строящейся системы величин, т. е. будем считать, что $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$ для любого кватерниона α . Далее положим по определению: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$;

$$ij = -ji = k,$$

$$ik = -ki = -j,$$

$$jk = -kj = i.$$

Эту «таблицу умножения» кватернионов легко запомнить при помощи рис. 28, на котором точками i, j, k на окружности изображены последовательные кватернионы i, j, k . Произведение двух рядом расположенных кватернионов равно третьему, если движение от первого множителя ко второму происходит на рисунке по часовой стрелке, и равно третьему со знаком минус, если движение происходит против часовой стрелки. Зная таблицу умножения кватернионов i, j, k , умножение произвольных кватернионов производят, пользуясь распределительным законом 9. Именно:

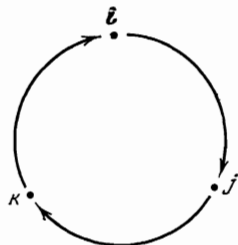


Рис. 28

$$\begin{aligned} & (a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k)(a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot i + c_1 \cdot j + d_1 \cdot k) = \\ & = aa_1 \cdot 1 + ab_1 \cdot i + ac_1 \cdot j + ad_1 \cdot k + ba_1 \cdot i + bb_1 \cdot ii + bc_1 \cdot ij + bd_1 \cdot ik + \\ & + ca_1 \cdot j + cb_1 \cdot ji + cc_1 \cdot jj + cd_1 \cdot jk + da_1 \cdot k + db_1 \cdot ki + dc_1 \cdot kj + dd_1 \cdot kk = \\ & = (aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1) \cdot 1 + (ab_1 + ba_1 + cd_1 - dc_1) \cdot i + \\ & + (ac_1 + ca_1 - bd_1 + db_1) \cdot j + (ad_1 + da_1 + bc_1 - cb_1) \cdot k. \end{aligned}$$

Множитель 1 в первом члене кватерниона обычно опускают и вместо $a \cdot 1$ пишут a . Равенства $ij = -ji$, $ik = -ki$, $jk = -kj$ показывают, что умножение кватернионов не перестановочно. Множимое и множитель здесь не равноправны. Поэтому при вычислениях с кватернионами необходимо тщательно следить за порядком сомножителей. В остальном действия с кватернионами не отличаются какой-либо трудностью. В частности, сочетательный закон 8 при умножении кватернионов имеет место. Он легко проверяется для базисных кватернионов $1, i, j, k$ при помощи таблицы умножения; переход же к общему случаю очевиден.

Число a кватерниона $a + bi + cj + dk$ называется его действительной или скалярной частью, а сумма $bi + cj + dk$ — его векторной частью. Кватернионы $a + bi + cj + dk$ и $a - bi - cj - dk$, отличающиеся лишь знаком векторной части, называются сопряженными. Очевидно, сумма двух сопряженных кватернионов есть число действительное. Кроме того, перемно-

жая сопряженные кватернионы по приведенной выше формуле, получим

$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \quad (12)$$

т. е. действительным числом является и произведение сопряженных кватернионов.

Сумма квадратов коэффициентов $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ кватерниона $a + bi + cj + dk$ называется его нормой. Поскольку квадрат любого действительного числа есть число неотрицательное, то норма каждого кватерниона есть также число неотрицательное, равное нулю только для нулевого кватерниона.

Формула (12) показывает, что произведение какого-либо кватерниона на сопряженный кватернион равно норме данного кватерниона.

Условимся звездочкой обозначать кватернион, сопряженный данному. Тогда непосредственное перемножение показывает справедливость следующей формулы:

$$(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*.$$

Отсюда вытекает интересное следствие: норма произведения кватернионов равна произведению норм сомножителей. В самом деле, на основании предыдущего имеем

$$\text{норма } (\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\alpha\beta)^* = \alpha\beta\beta^*\alpha^* = (\alpha\alpha^*)(\beta\beta^*) = \text{норма } \alpha \cdot \text{норма } \beta.$$

Свойства нормы позволяют весьма просто решить и вопрос о делении кватернионов. Пусть $\alpha = a + bi + cj + dk$ — произвольный ненулевой кватернион. Тогда

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk) \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} (a - bi - cj - dk) &= \\ = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) &= 1, \end{aligned}$$

т. е. кватернион

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} (a - bi - cj - dk) = \alpha^{-1}$$

является обратным для заданного кватерниона α .

Умея находить обратный кватернион, легко найти и частные двух кватернионов. Действительно, пусть даны два кватерниона α , β , из которых первый отличен от нуля. Тогда частными от деления β на α мы должны называть решения уравнений

$$\alpha x = \beta, \quad y\alpha = \beta.$$

Умножая обе части первого уравнения на обратный кватернион α^{-1} слева, получим

$$x = \alpha^{-1}\beta.$$

Умножая обе части второго уравнения на α^{-1} справа, будем иметь

$$y = \beta\alpha^{-1}.$$

Так как произведения $\alpha^{-1}\beta$ и $\beta\alpha^{-1}$ в общем случае различны, то для кватернионов приходится различать два деления — правое и левое; оба они всегда выполнимы, за исключением, конечно, деления на нуль.

Алгебра векторов. Хотя действия с кватернионами во многом сходны с действиями над комплексными числами, все же отсутствие переместительного

закона для умножения делает свойства кватернионов глубоко отличными от свойств чисел. Например, из алгебры комплексных чисел хорошо известно, что квадратное уравнение имеет два корня. Если же мы будем рассматривать хотя бы квадратное уравнение

$$x^2 + 1 = 0$$

в области кватернионов, то найдем сразу 6 его корней: $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$, а более точный анализ показывает, что имеется еще бесчисленное множество других решений. Это обстоятельство сильно затрудняет использование кватернионов в математике, и, несмотря на многочисленные попытки Гамильтона и других математиков ввести кватернионы в различные отделы математики и физики, роль кватернионов остается до сих пор в математике относительно скромной и ни в какой мере не сравнимой с ролью комплексных чисел.

Однако кватернионы дали толчок развитию векторной алгебры, являющейся незаменимым средством в современной технике и физике. Дело в том, что в механике и физике существенную роль играют понятия скорости, ускорения, силы и т. д., для характеристики которых нужны три числа. Выше мы видели, что каждый кватернион может быть рассматриваем как совокупность действительного числа a и векторной части $bi + cj + dk$. Поскольку векторная часть кватерниона определяется тремя числами, для характеристики важнейших физических величин достаточно уже векторных частей кватернионов.

Геометрически векторную часть $bi + cj + dk$ кватерниона $a + bi + cj + dk$ принято изображать вектором, выходящим из начала прямоугольной декартовой системы координат, проекции которого на оси координат соответственно равны числам b, c, d . Поэтому произвольный кватернион геометрически можно представлять как совокупность числа и вектора в пространстве. Посмотрим, какое истолкование при этом получают действия с кватернионами.

Возьмем два векторных кватерниона $xi + yj + zk$ и $x_1i + y_1j + z_1k$, скалярная часть которых равна нулю. Геометрически они изображаются векторами, выходящими из начала координат. Сумма этих кватернионов будет снова векторным кватернионом $(x + x_1)i + (y + y_1)j + (z + z_1)k$. Легко видеть, что вектор, изображающий эту сумму, будет диагональю параллелограмма, построенного на первых двух векторах. Таким образом, сложению векторных кватернионов отвечает хорошо известная операция сложения векторов по правилу параллелограмма. Аналогично, если умножить векторный кватернион на какое-либо действительное число, то изображающий кватернион вектор в результате также умножится на это число.

С иным положением мы сталкиваемся при перемножении кватернионов. Действительно,

$$\begin{aligned} (xi + yj + zk)(x_1i + y_1j + z_1k) = \\ = -xx_1 - yy_1 - zz_1 + (yz_1 - y_1z)i + (zx_1 - z_1x)j + (xy_1 - x_1y)k, \end{aligned}$$

т. е., перемножая два векторных кватерниона, мы получаем полный кватернион, имеющий скалярную часть и векторную часть.

Скалярная часть произведения векторных кватернионов, взятая с обратным знаком, называется скалярным произведением векторов, изображающих данные кватернионы, а вектор, изображающий векторную часть произведения, — векторным произведением указанных векторов. Скалярное произведение векторов α и β обозначается обычно через $(\alpha\beta)$ или просто $\alpha\beta$, а векторное произведение тех же векторов — через $[\alpha\beta]$. Пусть i, j, k — векторы, отве-

чающие кватернионам i, j, k , т. е. векторы единичной длины, отложенные вдоль соответственных осей координат. Согласно определению, если $\alpha = x_1i + y_1j + z_1k$, $\beta = x_2i + y_2j + z_2k$,

то

$$(\alpha\beta) = xx_2 + yy_2 + zz_2, [\alpha\beta] = (y_2z_1 - y_1z_2)i + (zx_2 - z_1x)j + (xy_2 - x_1y)k.$$

При помощи последних формул легко дать и геометрическое истолкование скалярному и векторному произведениям векторов. Оказывается, скалярное произведение двух векторов равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, а векторное произведение двух векторов есть вектор, по длине равный площади параллелограмма, построенного на данных векторах, и направленный перпендикулярно площадке указанного параллелограмма в ту сторону, откуда вращение от первого данного вектора ко второму кажется совершающимся в ту же сторону, что и вращение от оси Ox к оси Oy , если смотреть со стороны оси Oz .

В настоящее время в механике и физике не употребляются, как правило, действия с кватернионами, а вместо них рассматриваются лишь действия над векторами, причем эти действия определяются чисто геометрическим способом, следуя сформулированным только что результатам.

В заключение укажем одну задачу из механики, решаемую при помощи кватернионов особенно красиво. Решение ее собственно и послужило одной из причин открытия кватернионов.

Пусть твердое тело сначала поворачивается на некоторый угол φ в заданном направлении около определенной оси OA , проходящей через заданную точку O , после чего поворачивается на угол φ_1 около другой оси OB , проходящей через ту же точку. Спрашивается, около какой оси и на какой угол следует повернуть тело, чтобы оно из первого положения сразу перешло в третье? Это известная задача механики о сложении конечных поворотов. Правда, она может быть решена средствами обычной аналитической геометрии, что и было сделано еще Эйлером в XVIII в. Однако гораздо более прозрачную форму имеет ее решение при помощи кватернионов.

Пусть $\xi = xi + yj + zk$ и $\alpha = a + bi + cj + dk$ — два кватерниона, из которых первый мы будем считать переменным, а второй заданным. Выражение $\alpha^{-1}\xi\alpha$, как легко проверить вычислением, будет векторным кватернионом. Если теперь кватернионы ξ , $\alpha^{-1}\xi\alpha$ и векторную часть кватерниона α изобразить векторами ξ , ξ_1 , α , то окажется, что вектор ξ_1 геометрически получается из вектора ξ поворотом вокруг оси, проходящей через вектор α , на угол φ , определяемый формулой $\cos(\varphi/2) = a/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Поэтому можно считать, что кватернион $\alpha = a + bi + cj + dk$ изображает поворот пространства на угол φ вокруг оси $\alpha = bi + cj + dk$.

Обратно, зная ось поворота и угол φ , можно искать кватернион, изображающий этот поворот. Таких кватернионов оказывается бесконечное множество, но все они отличаются друг от друга лишь численным множителем.

Рассмотрим теперь еще один поворот на угол φ_1 вокруг некоторой оси $\beta = b_1i + c_1j + d_1k$. Пусть этот поворот изображается кватернионом $\beta = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$. Под воздействием первого поворота произвольный вектор $\xi = xi + yj + zk$ перейдет в вектор $\alpha^{-1}\xi\alpha$, а под воздействием второго поворота этот последний вектор перейдет в $\beta^{-1}(\alpha^{-1}\xi\alpha)\beta$. На основании закона ассоциативности последний результат можно представить в форме

$$\beta^{-1}(\alpha^{-1}\xi\alpha)\beta = (\alpha\beta)^{-1}\xi\alpha\beta.$$

Поскольку умножение вектора, т. е. векторного кватерниона ξ на кватернион $(\alpha\beta)^{-1}$ слева и кватернион $\alpha\beta$ справа равносильно повороту этого вектора на соответствующий угол вокруг соответствующей оси, мы приходим к выводу, что результат двух последовательных поворотов, характеризующихся кватернионами α и β , есть поворот, характеризующийся произведением $\alpha\beta$. Иными словами, сложению поворотов отвечает перемножение соответствующих им кватернионов.

Помимо геометрических и физических приложений, кватернионы нашли замечательные приложения и в теории чисел. Из последующих работ в этой области следует отметить в особенности работы Ю. В. Линника.

§ 12. Ассоциативные алгебры

Общее определение алгебр (гиперкомплексных систем). Гиперкомплексные числа определялись как величины, для задания которых необходимо несколько действительных чисел, причем для определенности гиперкомплексные числа рассматривались просто как системы действительных чисел. Однако такая точка зрения слишком узка, и для теоретических исследований постепенно стали применять следующее более общее определение.

Некоторая система величин S называется алгеброй (или гиперкомплексной системой) над полем P , если

а) для каждого элемента a поля P и каждой величины α системы S определен элемент этой системы, называемый произведением a на α и обозначаемый через $a\alpha$;

б) для каждых двух величин α, β системы однозначно определена некоторая величина той же системы, называемая суммой первых двух величин и обозначаемая через $\alpha + \beta$;

в) для каждых двух величин системы α, β однозначно определена величина той же системы, называемая произведением первых величин и обозначаемая через $\alpha\beta$;

и если указанные три действия обладают следующими свойствами *

$$1') \alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

$$2') (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$

$$3') \text{ в системе } S \text{ существует нулевая величина } \theta \text{ со свойством } \alpha + \theta = \alpha,$$

$$4') a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta,$$

$$5') (a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha,$$

$$6') (ab)\alpha = a(b\alpha),$$

$$7') \theta\alpha = \theta, 1 \cdot \alpha = \alpha, \text{ где } 1 \text{ — единичный элемент поля } P,$$

8') среди величин системы S существуют такие величины $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, через которые каждая величина системы может быть однозначно представлена в виде $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$,

$$9') (a\alpha)\beta = \alpha(a\beta) = a(\alpha\beta),$$

$$10') \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha.$$

В этом определении роль, которую до сих пор играли действительные числа, играют элементы произвольного поля P . Из условия 8' видно, что каждая гиперкомплексная величина определяется системой n элементов $\alpha_1,$

* Буквами греческого алфавита обозначены произвольные величины системы S , а буквами латинского алфавита — элементы поля P .

$a_2, \dots, a_n$ поля P , и, следовательно, в зависимости от выбора поля P может определяться n комплексными числами, n рациональными числами, n действительными числами и т. п.

Первые восемь требований означают, что S образует линейное конечномерное пространство (см. гл. XVI, § 2) над полем P , называемым основным полем алгебры.

Требования 9' и 10' можно объединить в виде равенств

$$(a\beta + b\gamma)\alpha = a(\beta\alpha) + b(\gamma\alpha),$$

$$\alpha(a\beta + b\gamma) = a(\alpha\beta) + b(\alpha\gamma),$$

из которых следует, что действие умножения есть действие линейное относительно каждого из сомножителей.

Из двух терминов «гиперкомплексная система» и «алгебра» в последние годы отдается предпочтение второму, так как элементы столь общих «гиперкомплексных систем» по своим свойствам могут настолько сильно отличаться от обычных чисел, что называть их «гиперкомплексными числами» нецелесообразно. Термины «гиперкомплексные системы», «гиперкомплексные числа» применяются теперь лишь к простейшим алгебрам, например к системе обыкновенных кватернионов.

Из требований 1'—10' видно, что в алгебрах не предполагается коммутативности и ассоциативности умножения, не предполагается существования единичного элемента и выполнимости «деления».

В каждой алгебре S существует базис, т. е. такая система элементов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, через которую все элементы алгебры однозначно представляются в виде линейных комбинаций $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$ с коэффициентами из основного поля P . Каждая алгебра может иметь бесчисленное множество базисов, но число элементов каждого базиса одно и то же и называется рангом алгебры.

Система комплексных чисел, рассматриваемая как алгебра над полем действительных чисел, имеет своим базисом числа 1 и i . Но пары чисел 2 и $3i$, 1 и $a + bi$ (a, b — действительные, $b \neq 0$) также могут служить базисами.

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ — базис какой-нибудь алгебры над некоторым полем P . Согласно определению всякий элемент алгебры однозначно записывается в форме

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n.$$

Если $\beta = b_1\varepsilon_1 + \dots + b_n\varepsilon_n$ — какой-либо другой ее элемент, то в силу свойств 4'—6' имеем

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1)\varepsilon_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon_2 + \dots + (a_n + b_n)\varepsilon_n.$$

Аналогично для любого a из поля P

$$a\alpha = aa_1\varepsilon_1 + aa_2\varepsilon_2 + \dots + aa_n\varepsilon_n.$$

Следовательно, действия сложения величин алгебры и их умножения на элементы поля P производятся вполне однозначно по приведенным формулам. Действие перемножения величин алгебры должно каждый раз задаваться особо, причем нет нужды знать, как перемножаются произвольные величины алгебры, достаточно знать закон перемножения лишь базисных величин ε_i . Действительно, в силу свойств 9' и 10'

$$(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n)(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \dots + b_n\varepsilon_n) = \sum a_ib_j \cdot \varepsilon_i\varepsilon_j.$$

Каждое из произведений $\varepsilon_i \varepsilon_j$ есть некоторая величина алгебры и поэтому может быть выражена через базисные элементы

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = c_{ij1} \varepsilon_1 + c_{ij2} \varepsilon_2 + \dots + c_{ijn} \varepsilon_n.$$

Здесь c_{ijk} означают элементы основного поля P , над которым строится алгебра. Первый индекс означает номер первого множителя, второй — второго множителя, а третий указывает номер того элемента, коэффициентом при котором является c_{ijk} . Коэффициенты c_{ijk} называются структурными константами алгебры, так как знание их вполне определяет все действия над величинами алгебры.

Легко подсчитать число структурных констант алгебры ранга n . Каждая константа имеет три номера i, j, k . Поэтому число структурных констант алгебры ранга n равно числу троек, образованных натуральными числами $1, 2, \dots, n$, т. е. равно n^3 . Например, система комплексных чисел над полем действительных чисел имеет базис, состоящий из чисел $1, i$. В силу равенств

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot i, \quad i \cdot 1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot i,$$

$$1 \cdot i = 0 \cdot 1 + 1 \cdot i, \quad i \cdot i = -1 \cdot 1 + 0 \cdot i$$

структурные константы будут равны соответственно,

$$c_{111} = 1, \quad c_{112} = 0, \quad c_{211} = 0, \quad c_{212} = 1,$$

$$c_{121} = 0, \quad c_{122} = 1, \quad c_{221} = -1, \quad c_{222} = 0.$$

Обратно, пусть дано n^3 элементов какого-нибудь поля P , занумерованных тройками натуральных чисел c_{ijk} ($i, j, k = 1, 2, \dots, n$). Тогда их можно принять в качестве структурных констант алгебры над полем P , принимая

равенства $\varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \varepsilon_k$ как определение правила умножения в алгебре.

Выше мы видели, что каждая алгебра, вообще говоря, имеет бесчисленное множество различных базисов. Структурные константы зависят от выбора базиса, и поэтому одна и та же алгебра определяется различными системами структурных констант.

Какие же алгебры следует считать различными и какие одинаковыми? В теории алгебр принято считать две алгебры над одним и тем же полем P одинаковыми, если они изоморфны, т. е. если величины одной алгебры можно так взаимно однозначно сопоставить с величинами другой, что сумма и произведение двух любых величин первой алгебры будут сопоставлены соответственно с суммой и произведением соответствующих величин второй алгебры, а произведению какого-либо элемента поля P на величину из первой алгебры будет отвечать произведение того же элемента поля P на соответственный элемент второй алгебры.

Это определение одинаковости алгебр показывает, что в теории алгебр изучают лишь те свойства величин и систем величин алгебр, которые находят свое выражение в виде некоторых свойств трех основных операций. Коротко говоря, теория алгебр изучает свойства операций, производимых над величинами алгебр, и не интересуется природой величин, составляющих алгебры.

Легко доказать, что если две алгебры изоморфны, то величинам, составляющим базис одной алгебры, отвечают величины, образующие базис другой, причем структурные константы, вычисленные в соответствующих бази-

сах, являются соответственно равными. Обратно, если две алгебры над одним и тем же полем имеют в подходящих базисах соответственно равные структурные константы, то такие алгебры изоморфны.

Среди алгебр весьма важную роль играли и до сих пор играют ассоциативные алгебры, т. е. алгебры, действие умножения в которых удовлетворяет ассоциативному закону $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$. Изложению свойств таких алгебр и посвящен настоящий параграф. Среди неассоциативных наиболее интересными являются алгебры Ли, для которых предполагается выполнение следующих свойств умножения:

$$\alpha\beta = -\beta\alpha, \quad \alpha(\beta\gamma) + \beta(\gamma\alpha) + \gamma(\alpha\beta) = 0.$$

Они представляют интерес ввиду тесной связи, существующей между алгебрами Ли и группами Ли, о которых шла речь в § 7.

Алгебра матриц. Выше указывалось, что в продолжение первого периода развития теории гиперкомплексных систем главное внимание обращалось на исследование отдельных систем, по тем или иным причинам вызывавших особый интерес исследователей. Некоторые из этих систем были уже нами разобраны. Примерно в середине прошлого века начались исследования алгебры матриц, играющей ныне основную роль в общей теории алгебр. Мы здесь напомним кратко определения действий с матрицами (см. гл. XVI, § 1).

Матрицей над полем P называется совокупность элементов этого поля, расположенных в виде прямоугольной таблицы. Две матрицы называются равными, если равны их элементы, стоящие на соответственных местах. Здесь мы будем рассматривать только квадратные матрицы, число строк которых равно числу их столбцов. Число строк квадратной матрицы или равное ему число столбцов называется порядком матрицы.

Чтобы сложить две матрицы одинакового порядка, складывают их соответственные элементы. Умножение числа на матрицу по определению означает умножение на это число всех элементов матрицы. Действие умножения матрицы на матрицу определяется более сложно: произведением двух матриц порядка n называется матрица того же порядка, у которой элемент, стоящий в i -й строке и j -м столбце, равен сумме произведений элементов i -й строки первой матрицы на соответственные элементы j -го столбца второй. Например,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax + bx_1 & ay + by_1 \\ a_1x + b_1x_1 & a_1y + b_1y_1 \end{vmatrix}.$$

Причины, по которым определение перемножения матриц выбрано именно так, были изложены в гл. XVI.

В силу указанных определений матрицы n -го порядка с элементами из какого-либо поля P образуют систему величин, которые можно складывать, умножать на элементы поля P и перемножать между собой. Несложные вычисления показывают, что свойства 1'—10', определяющие алгебру, здесь выполняются. Кроме того, легко доказывается, что умножение матриц подчиняется ассоциативному закону. Поэтому система всех матриц данного порядка n с элементами из заданного поля P образует ассоциативную алгебру над этим полем.

Очевидное равенство

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

показывает, что четыре матрицы, стоящие в правой части, образуют базис алгебры матриц 2-го порядка. Вообще, обозначая через ε_{ij} матрицу, у которой в i -й строке и j -м столбце стоит 1, а остальные места заняты нулями, будем иметь равенство

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i,j} a_{ij} \varepsilon_{ij},$$

показывающее, что матрицы ε_{ij} образуют базис алгебры матриц n -го порядка. Так как число матриц ε_{ij} равно n^2 , то ранг алгебры матриц также равен n^2 . Таблица умножения базисных матриц ε_{ij} имеет вид

$$\varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{il}, \quad \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{kl} = 0, \quad j \neq k, \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, n.$$

Алгебра матриц содержит единицу, роль которой играет единичная матрица.

Представления ассоциативных алгебр. Пусть каждой величине некоторой алгебры A над полем P отнесена определенная величина какой-либо алгебры B над тем же полем P . Если при этом сумме и произведению каждых двух элементов алгебры A отвечают сумма и произведение соответствующих элементов алгебры B и произведению каждого элемента поля P на произвольный элемент алгебры A отвечает произведение того же элемента поля P на соответствующий элемент алгебры B , то говорят, что алгебра A отображена гомоморфно в алгебру B . Гомоморфное отображение ассоциативной алгебры в алгебру матриц порядка n называется представлением алгебры A степени n . Если различным элементам алгебры A отвечают различные матрицы, то представление называется точным или изоморфным. Когда алгебра A представлена изоморфно матрицами, можно считать, что действия над величинами алгебры сводятся к действиям над соответствующими матрицами. Поэтому задача нахождения представлений алгебр имеет значительный интерес. Мы рассмотрим здесь только самые простые способы нахождения представлений алгебр, которые, однако, играют важную роль в общей теории.

Выберем в заданной ассоциативной алгебре A какой-либо базис $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ и пусть α — произвольная величина из A . Произведения $\varepsilon_1\alpha, \varepsilon_2\alpha, \dots, \varepsilon_n\alpha$ являются снова величинами из A и потому должны выражаться линейно через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Пусть

$$\varepsilon_1\alpha = a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2 + \dots + a_{1n}\varepsilon_n,$$

$$\varepsilon_2\alpha = a_{21}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \dots + a_{2n}\varepsilon_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varepsilon_n\alpha = a_{n1}\varepsilon_1 + a_{n2}\varepsilon_2 + \dots + a_{nn}\varepsilon_n.$$

Как видим, при фиксированном базисе с каждым элементом α может быть сопоставлена определенная матрица $\|a_{ij}\|$. Весьма простой подсчет показывает, что это сопоставление является представлением алгебры A . Это представление часто называют регулярным представлением алгебры A . Степень его, очевидно, равна рангу алгебры.

Комплексные числа можно рассматривать как алгебру ранга 2 над полем действительных чисел с базисом 1, i . Равенства

$$1 \cdot (a + bi) = a \cdot 1 + b \cdot i,$$

$$i \cdot (a + bi) = -b \cdot 1 + a \cdot i$$

показывают, что в соответствующем регулярном представлении комплексному числу $a + bi$ отвечает матрица $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$. Аналогичное представление кватернионов имеет вид

$$a + bi + cj + dk \rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

Указанные представления комплексных чисел и кватернионов являются точными (т. е. изоморфными самой алгебре). Примеры показывают, однако, что регулярное представление не всегда точное. Но если алгебра содержит единицу, то ее регулярное представление заведомо точное.

Легко показать, что всякую ассоциативную алгебру можно включить в алгебру с единицей. Регулярное представление объемлющей алгебры будет точным; следовательно, это представление будет точным и для данной алгебры. Таким образом, всякая ассоциативная алгебра обладает точным представлением матрицами.

Указанный способ нахождения представлений недостаточен для построения всех представлений алгебры. Более тонкий способ связан с понятием идеала алгебры, которое вообще играет большую роль в современной математике.

Система I элементов некоторой алгебры называется *правым идеалом*, если она есть линейное подпространство алгебры и произведение любого элемента из I на любой элемент алгебры снова содержится в I . Аналогично (с переменной порядка множителей) определяется левый идеал. Идеал, являющийся одновременно левым и правым, называется *двусторонним*. Ясно, что нулевой элемент алгебры сам по себе уже образует двусторонний идеал — так называемый нулевой идеал алгебры. Так же и вся алгебра может рассматриваться как свой собственный двусторонний идеал. Однако, кроме этих двух тривиальных идеалов, алгебра может содержать и другие идеалы, существование которых обычно связано с интересными свойствами алгебры.

Пусть ассоциативная алгебра A содержит правый идеал I . Выберем в этом идеале базис $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$. Так как I составляет в общем случае лишь часть A , то базис I будет иметь, как правило, меньше элементов, чем базис A . Пусть α — произвольный элемент из A . Так как I — правый идеал и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ содержатся в I , то произведения $\varepsilon_1\alpha, \dots, \varepsilon_m\alpha$ также содержатся в I и, значит, выражаются линейно через базис $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$, т. е.

$$\varepsilon_1\alpha = a_{11}\varepsilon_1 + \dots + a_{1m}\varepsilon_m,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varepsilon_m\alpha = a_{m1}\varepsilon_1 + \dots + a_{mm}\varepsilon_m.$$

Сопоставляя с элементом α матрицу $\|a_{ij}\|$, получим, как и ранее, представление алгебры A . Степень этого представления равна числу элементов базиса идеала I и, следовательно, в общем случае будет меньшей, чем степень регулярного представления. Очевидно, степень представления, полученного при помощи идеала, будет наименьшей, если сам идеал будет минимальным. Отсюда можно понять особую роль минимальных идеалов в теории алгебр.

Строение алгебр. Согласно сказанному каждая ассоциативная алгебра A может быть изоморфно представлена матрицами некоторого порядка. Сово-

купность матриц, отвечающих в этом представлении величинам алгебры A , будет сама алгеброй, но являющейся лишь частью алгебры всех матриц данного порядка. Если некоторая часть величин алгебры сама является алгеброй, то она называется подалгеброй данной алгебры. Можно сказать, следовательно, что всякая ассоциативная алгебра изоморфна некоторой подалгебре матриц.

Хотя этот результат представляет принципиальный интерес, так как он сводит вопрос о нахождении всех алгебр к нахождению всевозможных подалгебр матричных алгебр, он не дает прямого ответа на вопрос о строении алгебр. Впервые общий ответ на этот вопрос был дан в конце прошлого века в работах профессора Юрьевского (Тартуского) университета Ф. Э. Молина (1861—1941), с 1900 г. преподававшего в Томском политехническом институте.

Алгебру называют *простой*, если она не содержит никаких двусторонних идеалов, отличных от нулевого и всей алгебры. Ф. Э. Молиным было показано, что всякая простая ассоциативная алгебра ранга 2 или большего над полем комплексных чисел изоморфна алгебре всех матриц подходящего порядка над этим полем.

Продолжая основополагающие исследования Молина, Веддербарн получил в начале XX в. ряд результатов, вскрывающих весьма полно строение алгебр над произвольным полем.

Какая-либо система элементов алгебры A (в частности, сама алгебра A , ее некоторый идеал или подалгебра) называется *нильпотентной*, если существует такое натуральное число s , что произведение любых s элементов системы равно нулю. Всякая ассоциативная алгебра обладает единственным максимальным двусторонним нильпотентным идеалом, называемым радикалом алгебры. Алгебра, радикал которой равен нулю, называется *полупростой*. Можно показать, что всякая полупростая алгебра распадается в особом рода сумму простых алгебр, благодаря чему изучение полупростых алгебр целиком сводится к изучению простых. Наконец, алгебра A называется *алгеброй с делением*, если в A каждое уравнение вида $ax = b$ ($a \neq 0$) имеет решение.

Строение простых алгебр над полем комплексных чисел полностью описывается упомянутой теоремой Молина. Если же основное поле P произвольно, то имеет место более общая теорема Веддербарна: всякая простая алгебра ранга 2 или большего над полем P изоморфна алгебре всех матриц подходящего порядка с элементами из некоторой алгебры с делением над тем же полем P . Таким образом, теорема Веддербарна сводит вопрос о нахождении простых алгебр над заданным полем P к нахождению алгебр с делением над полем P . Над полем комплексных чисел есть только одна алгебра с делением — само поле комплексных чисел. По теореме Веддербарна отсюда следует, что все простые алгебры над полем комплексных чисел изоморфны алгебрам матриц над этим полем, т. е. следует теорема Молина.

Над полем действительных чисел существуют лишь три ассоциативные алгебры с делением: само поле действительных чисел, поле комплексных чисел и алгебра кватернионов. Доказательство этого утверждения не очень просто, и мы не будем на нем останавливаться. В силу теоремы Веддербарна отсюда вытекает, что каждая простая алгебра над полем действительных чисел изоморфна алгебре матриц подходящего порядка либо над полем действительных чисел, либо над полем комплексных чисел, либо над алгеброй кватернионов.

Из этих примеров видно, как раскрывается строение полупростых алгебр теоремами Молина и Веддербарна. Что касается алгебр с радикалом, то для них большое значение имеет так называемая основная теорема Веддербарна, согласно которой при некоторых ограничениях, накладываемых на основное поле, в каждой алгебре A с радикалом R существует полупростая подалгебра L , такая, что каждый элемент заданной алгебры может быть однозначно представлен в виде суммы $\lambda + \rho$ ($\lambda \in L$, $\rho \in R$), причем подалгебра L определяется в некотором смысле однозначно внутри алгебры A .

Только что сформулированные основные теоремы дают стройное представление о возможных типах ассоциативных алгебр и сводят вопрос об их строении в основном к аналогичному вопросу о строении нильпотентных алгебр. Теория последних пока еще находится в процессе становления.

§ 13. Алгебры Ли

В § 12 говорилось, что, кроме теории ассоциативных алгебр, в настоящее время весьма детально разработана теория алгебр Ли, умножение в которых подчинено требованиям

$$\alpha\beta = -\beta\alpha, \quad \alpha(\beta\gamma) + \beta(\gamma\alpha) + \gamma(\alpha\beta) = 0.$$

Важность этих алгебр объясняется тем, что они тесно связаны с группами Ли (см. § 7), т. е. с важнейшим классом непрерывных групп. Как мы видели выше, группы Ли играют значительную роль в современной геометрии. В соответствии с происхождением теории групп и алгебр Ли наибольший интерес представляют алгебры Ли над полями всех действительных и всех комплексных чисел.

Одним из простых примеров алгебры Ли является следующий. Рассмотрим множество всех квадратных матриц данного порядка n . Введем для них действие коммутирования, понимая под ним составление по данным матрицам A и B их так называемого коммутатора $AB - BA$, обозначаемого через $[A, B]$.

Нетрудно проверить, что

$$[A, B] = -[B, A],$$

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

Следовательно, множество всех квадратных матриц данного порядка образует алгебру Ли относительно операции коммутирования. Ясно, что всякая подалгебра алгебры Ли, образованной матрицами, т. е. всякое множество матриц, замкнутое относительно действий сложения, умножения на числа основного поля и коммутирования, в свою очередь является алгеброй Ли.

Вопрос о том, для всякой ли абстрактно заданной алгебры Ли существует изоморфная ей матричная алгебра, долгое время оставался открытым. Он был решен положительно только в 1935 г. И. Д. Адо, учеником известного алгебраиста Н. Г. Чеботарева.

Коснемся теперь в общих чертах, не входя в подробности и не давая строгих формулировок, соответствия между группами Ли и алгебрами Ли, ограничившись случаем, когда группа Ли и алгебра Ли представлены матрицами.

Пусть L — некоторая матричная алгебра Ли. Сопоставим каждой матрице A , принадлежащей L , матрицу $U = e^A = E + A/1! + A^2/2! + \dots$. Тогда

совокупность всех полученных таким образом матриц образует группу Ли относительно обычного матричного умножения. Обратное, для каждой группы Ли найдется единственная (с точностью до изоморфизма) алгебра Ли, такая, что соответствующая ей группа будет изоморфна данной.

Для простоты мы привели не точную, а упрощенную формулировку теоремы о соответствии между группами и алгебрами Ли. В действительности соотношение $U = e^A$ существует лишь для U , достаточно близкой к единичной матрице, и A , достаточно близкой к нулевой матрице. Строгая формулировка требует введения довольно сложных понятий локальной группы и локального изоморфизма.

Таким образом, переход от алгебры Ли к соответствующей группе осуществляется посредством действия, аналогичного потенцированию, а обратный переход — от группы к алгебре — посредством действия, аналогичного логарифмированию.

Если L совпадает с алгеброй всех матриц порядка n , то соответствующая группа Ли будет группой всех неособенных матриц, так как любая близкая к единичной матрица U может быть представлена в виде $U = e^A$.

Матрица $A = \|a_{ij}\|$ называется кососимметрической, если ее элементы удовлетворяют соотношению $a_{ji} = -a_{ij}$. Кососимметрические матрицы образуют алгебру Ли, так как если A и B кососимметрические, то матрицы $AB - BA = [A, B]$ и $\alpha A + \beta B$ будут также кососимметрическими.

Легко проверить, что для каждой кососимметрической матрицы A выражение e^A будет ортогональной матрицей, причем каждая ортогональная матрица, близкая к единичной, может быть представлена в указанной экспоненциальной форме. Следовательно, алгеброй Ли группы ортогональных матриц является алгебра кососимметрических матриц.

Из аналитической геометрии известно, что каждое вращение пространства около начала координат задается ортогональной матрицей, причем произведению вращений отвечает произведение соответствующих матриц. Иными словами, группа вращений пространства около неподвижной точки изоморфна группе ортогональных матриц 3-го порядка. Отсюда мы заключаем, что алгебра Ли для группы вращений пространства есть алгебра всех кососимметрических матриц 3-го порядка, т. е. алгебра Ли матриц вида

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

Так как каждая из этих матриц вполне характеризуется тремя числами a, b, c , то ее можно условно изобразить вектором $\mathbf{a}$, имеющим по осям координат проекции a, b, c . При этом линейной комбинации $\alpha A_1 + \beta A_2$ матриц A_1 и A_2 указанного вида будет, очевидно, отвечать линейная комбинация соответствующих векторов $\alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2$, а коммутатору матриц

$$\begin{aligned} [A_1, A_2] &= A_1 A_2 - A_2 A_1 = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -a_1 & -b_1 \\ a_1 & 0 & -c_1 \\ b_1 & c_1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -a_2 & -b_2 \\ a_2 & 0 & -c_2 \\ b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -a_2 & -b_2 \\ a_2 & 0 & -c_2 \\ b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -a_1 & -b_1 \\ a_1 & 0 & -c_1 \\ b_1 & c_1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & b_2 c_1 - b_1 c_2 & a_1 c_2 - a_2 c_1 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 & 0 & a_2 b_1 - a_1 b_2 \\ a_2 c_1 - a_1 c_2 & a_1 b_2 - a_2 b_1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

будет отвечать вектор с проекциями $b_1c_2 - b_2c_1$, $a_2c_1 - a_1c_2$, $a_1b_2 - a_2b_1$, т. е. векторное произведение векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Мы пришли к замечательному результату, что совокупность обычных векторов относительно действий сложения, умножения на скаляр и векторного умножения образует алгебру Ли, отвечающую группе вращений пространства около неподвижной точки. Это еще раз показывает, насколько тесно геометрические понятия связаны с группой вращения пространства, т. е., другими словами, с законами движений твердых тел.

Для алгебр Ли в конце прошлого и начале нынешнего столетий был получен ряд результатов, аналогичных основным результатам об ассоциативных алгебрах, хотя доказательства и формулировки здесь оказываются более сложными. Так, в результате усилий Ли, Киллинга и Картана к началу XX в. для алгебр Ли удалось установить понятия радикала, полупростоты и найти все простые алгебры Ли над полями действительных и комплексных чисел. К началу 30-х годов Картаном и Вейлем была в основном построена теория представлений алгебр Ли матрицами, оказавшаяся замечательным инструментом для решения многих задач. В последние 15 лет разработкой теории алгебр Ли занимался ряд советских математиков, получивших в этой области немало замечательных результатов. В частности, ими была существенно продвинута теория представлений алгебр Ли и окончательно решены вопросы о полупростых подалгебрах алгебр Ли, о построении алгебр с заданным радикалом и т. п.

§ 14. Кольца

В § 11 (стр. 399) было дано общее определение поля как произвольного множества элементов, на котором определены действия сложения и умножения, удовлетворяющие приводившимся там требованиям 1—10. Опустив в этом определении требование 10 о существовании частного и требований 7, 8 коммутативности и ассоциативности умножения, получим определение понятия кольца — одного из важнейших понятий современной алгебры.

Всякое поле, а также всякая алгебра, рассматриваемая только относительно операций сложения и умножения, является кольцом. Еще более простым примером кольца служит совокупность целых рациональных чисел с обычными операциями сложения и умножения. Относительно этих операций кольцами будут также совокупности чисел вида $a + bi$, $a + b\sqrt{2}$, $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ и т. п., где a, b, c — целые рациональные числа. Элементами этих колец являются числа, благодаря чему и сами кольца называются числовыми. Некоторые важные свойства и приложения этих колец были рассмотрены в гл. IV (том 1) и X (том 2).

Однако существуют важные классы и нечисловых колец. Так, например, относительно обычных операций сложения и умножения кольцами являются совокупность многочленов от данных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ с коэффициентами из какого-либо фиксированного кольца или поля, совокупность всех непрерывных функций, определенных на некоторой области, совокупность линейных преобразований линейного или гильбертова пространств.

Арифметические свойства числовых колец являются предметом изучения глубокой теории алгебраических чисел, пограничной между собственно алгеброй и собственно теорией чисел. Исследованием свойств колец многочленов

занимается так называемая теория полиномиальных идеалов, тесно связанная с высшими отделами аналитической геометрии. Наконец, кольца функций и преобразований играют основную роль в функциональном анализе (см. гл. XIX).

На базе этих и некоторых других конкретных теорий в текущем столетии стали быстро развиваться общая теория колец и теория топологических колец.

За ограниченностью места далее будут указаны лишь отдельные результаты, относящиеся только к введению в теорию колец.

Идеалы. Подмножество I элементов некоторого (не обязательно ассоциативного) кольца K называется его *идеалом*, если разность любых двух элементов из I снова содержится в I и если произведения ax, xa произвольного элемента a из I на произвольный элемент x кольца K содержатся в I .

Каждый идеал является такой частью кольца, которая сама является кольцом относительно действующих в заданном кольце операций сложения и умножения. Такие части называются подкольцами данного кольца, и, значит, каждый идеал является в то же время подкольцом. Обратное, как правило, несправедливо.

Пересечение любой системы идеалов кольца снова является идеалом этого кольца, в частности, идеалом кольца будет пересечение всех идеалов, содержащих какой-нибудь фиксированный элемент a кольца. Этот идеал называется *главным идеалом*, порожденным элементом a , и обозначается через (a) .

Таким же образом определяется понятие идеала, порожденного двумя или несколькими элементами. Легко показать, что если ассоциативное коммутативное кольцо имеет единичный элемент, то идеалом, порожденным элементами $a_1, \dots, a_n$, будет просто совокупность всех элементов кольца, допускающих запись в виде суммы $x_1a_1 + \dots + x_na_n$, где $x_1, \dots, x_n$ — произвольные элементы кольца. В частности, главный идеал (a) в коммутативном ассоциативном кольце с единицей есть просто совокупность всех элементов, кратных a , т. е. имеющих вид xa .

В кольце всех целых рациональных чисел каждый идеал является главным. Тем же свойством обладают кольцо многочленов от одного переменного с коэффициентами из некоторого поля, кольцо комплексных чисел вида $a + bi$, где a, b — целые рациональные, и ряд других колец. Однако уже совокупность всех многочленов от двух переменных x, y без свободного члена не будет главным идеалом в кольце всех многочленов от x, y с рациональными коэффициентами.

Аналогично тому, как это было с нормальными делителями в теории групп, для каждого идеала I кольца K можно построить фактор-кольцо K/I . Делается это следующим образом. Элементы a, b кольца K называются *сравнимыми по идеалу I* , символически $a \equiv b (I)$, если их разность $a - b$ содержится в I . Легко устанавливается, что отношение сравнимости симметрично, рефлексивно и транзитивно (см. гл. XV) и, следовательно, все элементы K разбиваются на классы сравнимых между собой по идеалу I . Рассматривая теперь эти классы как элементы нового множества, вводят для них понятие суммы и произведения, называя «суммой» двух классов тот класс, который содержит сумму каких-либо двух элементов, входящих соответственно в эти классы, а произведением — класс, содержащий произведение указанных представителей. Из определения идеалов следует, что так определенные сум-

ма и произведение на самом деле не зависят от выбора представителей и что в результате совокупность классов становится кольцом.

Роль фактор-колец в теории колец совершенно аналогична роли фактор-групп в теории групп. В частности, построение фактор-колец от известных колец представляет собой удобный способ образования колец с самыми различными свойствами. Более того, легко доказывается, например, что произвольное коммутативное кольцо K изоморфно фактор-кольцу кольца многочленов с целыми рациональными коэффициентами от достаточного числа переменных.

Арифметические свойства колец. В числовых кольцах и в полях произведение нескольких элементов может равняться нулю, только если хотя бы один из сомножителей равен нулю. В произвольных кольцах это может оказаться неверным, например произведение двух ненулевых матриц может быть равно нулю. Если в некотором кольце $ab = 0$, причем $a \neq 0$, $b \neq 0$, то a и b называются *делителями нуля*. Если таких элементов в кольце нет, то кольцо называется *кольцом без делителей нуля*.

При исследовании законов делимости в кольцах обычно предполагается, что кольцо коммутативно и не имеет делителей нуля. Такие кольца принято называть областями целостности. Упомянутые выше числовые и полиномиальные кольца являясь областями целостности.

Пусть K — некоторая область целостности. Говорят, что элемент a делится в области K на элемент b , если $a = bq$, $q \in K$. Отсюда непосредственно следует, что сумма элементов, делящихся на b , делится на b и что произведение нескольких элементов из K заведомо делится на b , если один из сомножителей делится на b . При введении понятия простого элемента, аналогичного понятию простого числа, в теории колец возникает усложнение, уже упоминавшееся в гл. X (том 2). Именно: сначала приходится ввести понятие ассоциированных элементов кольца, называя элементы a , b ассоциированными, если a делится на b , а b делится на a . Полагая $a = bq_1$, $b = aq_2$, имеем $ab = ab \cdot q_1q_2$, т. е. $q_1q_2 = e$, где e — единица области K . Частные ассоциированных элементов называются поэтому делителями единицы. Всякий элемент области делится на любой делитель единицы. В кольце целых рациональных чисел делителями единицы являются ± 1 , в кольце чисел вида $a + bi$, где a , b — целые, делителями единицы будут числа ± 1 , $\pm i$.

Каждый элемент области целостности K обладает разложениями вида $a = a\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1}$, где ε — какой-либо делитель единицы. Эти разложения называются тривиальными. Если никаких других разложений у a нет, то a называется простым или неразложимым элементом K . В связи с важным значением теоремы об однозначном разложении целых чисел на простые множители представляет интерес нахождение таких классов колец, в том числе и некоммутативных, в которых остается справедливой аналогичная теорема. Например, эта теорема имеет место в кольцах главных идеалов, т. е. областях целостности, в которых все идеалы главные.

В связи с вопросом об однозначности разложения на простые сомножители возникло и само понятие об идеалах. Приблизительно в середине прошлого века немецкий математик Куммер, пытаясь доказать знаменитое предположение Ферма о том, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет ненулевых целочисленных решений при $n \geq 3$, пришел к мысли рассматривать числа вида $a_0 + a_1\zeta + \dots + a_n\zeta^{n-1}$, где $\zeta = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$ — решение уравнения $x^n = 1$, а $a_0, \dots, a_n$ — обычные целые числа. Числа указанного вида образуют область целостности, и Куммер сначала принял в качестве очевид-

ного предположение, что в этой области имеет место теорема об однозначности разложения на простые множители. При этом им было построено и доказательство предположения Ферма. Однако при проверке обнаружилось, что упомянутое допущение об однозначности разложения неверно. Желая сохранить однозначность разложения на простые сомножители, Куммер оказался вынужденным рассматривать разложения чисел области на сомножители, не входящие в саму область. Эти числа он назвал идеальными. Впоследствии при построении общей теории вместо идеальных чисел стали вводить совокупности элементов области, делящиеся на то или иное идеальное число, которые и получили название идеалов.

Открытие неоднозначности разложения на простые сомножители в числовых кольцах представляется одним из интереснейших фактов, найденных в прошлом столетии, приведшим к созданию обширной теории алгебраических чисел.

Одно из изящных применений этой теории к вопросу о разложении обычных целых чисел на сумму квадратов указано в конце гл. X (том 2). Значительную роль в развитии теории числовых колец сыграли работы отечественных математиков Е. И. Золотарева, Г. Ф. Вороного, И. М. Виноградова и Н. Г. Чеботарева.

Алгебраические многообразия. Другой исток теории идеалов лежит в алгебраической геометрии. Уже при первоначальном ознакомлении с теорией кривых 2-го порядка обычно вызывает удивление, что единой кривой гиперболой называют совокупность двух не связанных друг с другом кривых — ветвей гиперболы — и что в то же время пару прямых называют распадающейся кривой 2-го порядка. Это различие в терминологии находит объяснение в алгебре: если уравнения кривых рассматривать в виде $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — многочлен от x, y , то в первом случае левая часть этого уравнения будет неприводимым многочленом второй степени, а во втором — произведением двух сомножителей первой степени. Кривую, уравнение которой можно представить при помощи неприводимого многочлена $f(x, y)$, называют неприводимой, а в противном случае — приводимой.

При переходе к пространственным кривым дело становится сложнее. Пространственная кривая изображается системой двух уравнений $f(x, y, z) = 0, g(x, y, z) = 0$, причем многочлены f и g определяются кривой далеко не однозначно. Что же здесь называть неприводимой кривой?

Естественный ответ дает теория идеалов. Пусть $f_1, f_2, \dots$ — некоторое множество многочленов от переменных x, y, z вообще с комплексными коэффициентами. Совокупность точек пространства (комплексного), координаты которых обращают все данные многочлены в нуль, называется алгебраическим многообразием, определяемым данными многочленами. Обозначим это многообразие через M и рассмотрим все многочлены от переменных x, y, z , обращающиеся в нуль в каждой точке M . Легко видеть, что совокупность I всех таких многочленов будет идеалом в кольце многочленов от x, y, z . Этот идеал, кроме того, будет обладать тем свойством, что если степень какого-либо многочлена содержится в I , то и сам многочлен содержится в I . Оказывается, что в то время как различные совокупности многочленов могут определять одно и то же алгебраическое многообразие, соответствие между многообразиями и идеалами с упомянутым дополнительным свойством является взаимно однозначным.

Таким образом, при изучении свойств многообразий естественно рассматривать не более или менее случайные «уравнения» их, а изучать соответству-

ющий идеал. Если идеал I может быть представлен в виде пересечения каких-либо двух идеалов I_1, I_2 , то многообразие M будет объединением многообразий M_1, M_2 , отвечающих идеалам I_1, I_2 . Отсюда видно, что многообразие M естественно называть неприводимым в том случае, когда соответствующий идеал I нельзя представить в виде пересечения двух других объемлющих идеалов. Распадению кривой на кривые низших порядков, разложению многообразия на неприводимые теперь будет отвечать представление соответствующего идеала в виде пересечения неразложимых. Вопрос об однозначности и возможности таких разложений является одним из первых в теории алгебраических многообразий и общей теории идеалов.

Строение некоммутативных колец. Всякая алгебра является в то же время кольцом относительно операций сложения и умножения. Поэтому значительное число основных понятий и результатов теории алгебр имеет силу и для произвольных колец. Однако перенесение более тонких результатов теории алгебр, аналогичных, в частности, теоремам Молина — Веддербарна (ср. § 11), связано с рядом трудностей, отчасти преодоленных только за последние 10—15 лет. Речь прежде всего идет о нахождении такого определения радикала кольца, чтобы кольца с нулевым радикалом имели какое-то сходство с полупростыми алгебрами и, во всяком случае, чтобы из теорем теории колец соответствующие результаты структурной теории алгебр получились в качестве частных случаев. В настоящее время в теории колец имеется уже ряд определений радикала, позволяющих при тех или иных ограничениях строить содержательную теорию строения полупростых колец. Как уже отмечалось, интерес к теории некоммутативных колец в значительной мере стимулируется весьма заметным значением теории колец операторов в функциональном анализе.

§ 15. Структуры

Как читатель уже знает, множество объектов называется частично упорядоченным, если для некоторых пар его элементов определено, какой из этих объектов предшествует другому или подчинен другому, предполагая при этом, что: 1) каждый объект подчинен самому себе; 2) из подчиненности a объекту b и подчиненности b объекту a следует тождественность a с b ; 3) из подчиненности a объекту b и подчиненности b объекту c следует подчиненность a объекту c . Отношение подчиненности обычно обозначают знаком $\leq$.

Важным примером частично упорядоченной совокупности является система всех подмножеств какого-либо множества, где отношение подчиненности означает, что одно подмножество является частью другого.

Если отношение подчиненности определено для каждой пары элементов частично упорядоченного множества, то множество называется упорядоченным (линейно). Упорядоченным, например, является множество действительных чисел, где отношение $a \leq b$ означает, что число a не больше b . Напротив, частично упорядоченное множество всех частей какой-либо совокупности, содержащей более одного элемента, не будет упорядоченным, так как подмножества без общих элементов уже не будут сравнимыми между собой.

Пусть элементы некоторого частично упорядоченного множества M обладают тем свойством, что каждая пара их a, b имеет единственный ближайший общий больший элемент c , т. е. такой, для которого $a \leq c, b \leq c$ и при

любом d из M , удовлетворяющем условиям $a \leq d$, $b \leq d$, будет $c \leq d$. Тогда M называется *верхней полуструктурой*, а элемент c — «суммой» a и b . Легко убедиться, что это «сложение» обладает следующими свойствами:

$$a + b = b + a, \quad (a + b) + c = a + (b + c), \quad a + a = a. \quad (13)$$

Весьма замечательно, что можно утверждать и обратное. Если в некотором множестве определено действие сложения, обладающее свойствами (13), то, называя элемент a подчиненным элементу b , если $a + b = b$, мы получим частично упорядоченное множество, в котором $a + b$ будет единственным ближайшим общим бóльшим для a и b .

Аналогично можно определить нижние полуструктуры, рассматривая вместо ближайших бóльших ближайшие меньшие, которые здесь называются «произведениями» данных элементов. Эта операция обладает теми же свойствами, что и «сложение», именно

$$ab = ba, \quad (ab)c = a(bc), \quad aa = a. \quad (14)$$

Частично упорядоченное множество, являющееся одновременно верхней и нижней полуструктурой, называется *структурой*. Согласно изложенному в каждой структуре можно определить два действия, подчиненные условиям (13), (14). Однако эти действия связаны друг с другом, так как отношение $a \leq b$ в структуре можно записать в любой из форм $a + b = b$, $ab = a$. Иначе говоря, в структурах равенства $a + b = b$ и $ab = a$ должны быть равносильными. Оказывается, последнее условие можно записать алгебраически в виде равенств

$$a + ab = a, \quad a(a + b) = a, \quad (15)$$

благодаря чему изучение структур становится чисто алгебраической задачей об изучении систем с двумя действиями, подчиненными требованиям (13) — (15). Значение алгебраического подхода к изучению структур, грубо говоря, состоит в том, что особенности той или иной конкретной структуры в отдельных случаях удастся выразить в виде тех или иных алгебраических соотношений между элементами, а также воспользоваться богатым аппаратом классических теорий групп и колец.

Как уже упоминалось, совокупность всех подмножеств некоторого множества является частично упорядоченным множеством. Нетрудно видеть, что оно будет структурой, причем структурной суммой будет здесь объединение, а структурным произведением — пересечение соответствующих подмножеств. Если рассматривать не все, а только некоторые подмножества, то можно получить самые разнообразные структуры. Например, структурой будет совокупность всех подгрупп, а также всех инвариантных подгрупп произвольной группы, совокупность всех подколец и совокупность всех идеалов произвольного кольца и т. п. В частности, в структурах всех инвариантных подгрупп группы и всех идеалов кольца, кроме основных тождеств (13) — (15), имеет место еще следующий так называемый модулярный закон:

$$a(ab + c) = ab + ac.$$

Теория структур с модулярным законом (дедекиндовых структур) составляет важную главу общей теории структур.

Значительное число теорем теории групп и теории колец является высказываниями о расположении подгрупп, инвариантных подгрупп и идеалов,

вследствие чего эти теоремы могут быть переформулированы как теоремы о структурах подгрупп или идеалов. При некоторых ограничениях аналогичные теоремы имеют место и для общих структур. Таким путем в теорию структур были перенесены некоторые важные теоремы из теории групп, теории колец и других дисциплин. С другой стороны, использование аппарата теории структур оказалось полезным, наоборот, при нахождении свойств конкретных структур, например в теории групп и теории колец.

Теория структур возникла совсем недавно — в 20—30-х годах нашего столетия и еще не имеет таких важных применений, как, скажем, теория групп. Однако уже в настоящее время теория структур — вполне оформившаяся математическая дисциплина с большим содержанием и существенной проблематикой.

§ 16. Общие алгебраические системы

В предыдущих параграфах была сделана попытка дать понятие о том, как применение алгебраических методов к все расширяющемуся кругу задач привело к расширению систем объектов, изучаемых алгеброй, и к обобщению понятия самих алгебраических операций. Большую роль в этом сыграло развитие аксиоматического метода, вызванное работами Н. И. Лобачевского по основаниям геометрии, а также развитие общей теории множеств.

Одним из основных итогов этого явилось постепенное выкристаллизовывание общих понятий алгебраической операции, алгебраической системы и накопление важнейших фактов, относящихся к определенным алгебраическим системам. Вместо конкретно определяемых в школьной алгебре действий, относящихся большей частью к числам, в современной алгебре исходят из общего понятия действия или операции. Именно, пусть дана некоторая система элементов S и дано правило, сопоставляющее каждой системе $a_1, a_2, \dots, a_m$ из m элементов S , взятых в определенном порядке, вполне определенный элемент a той же системы. Тогда говорят, что на системе S задана m -членная операция и что элемент a есть результат этой операции, выполненной над элементами $a_1, a_2, \dots, a_m$. Множество элементов с определенными на нем одной или несколькими операциями называется алгебраической системой. Одной из основных задач алгебры является изучение и классификация алгебраических систем. Однако в такой форме задача имеет слишком общий характер. На самом деле к настоящему времени оказались действительно важными и обладающими содержательными теориями лишь некоторые специальные алгебраические системы. Так, из систем с одним действием в глубокую математическую науку разрослась пока лишь теория групп, которой были посвящены § 1—10 этой главы, а из систем с двумя и большим числом действий важное значение имеют теории полей, алгебр, колец и структур. Однако число фактически рассматриваемых по тому или иному поводу алгебраических систем непрерывно растет. В то же время некоторые классические разделы алгебры, как, например, учение о гомоморфизмах, о свободных системах и свободных объединениях, о прямых объединениях, а в последнее время и учение о радикале оказались перенесенными в общую теорию алгебраических систем. Это позволяет говорить об этой теории как о новом отделе алгебры.

Рассматривая характер алгебраической науки в целом, часто подчеркивают как отличительную ее особенность отсутствие или подчиненность понятия непрерывности, признавая тем самым алгебру наукой по преимуществу о дискретном. Такой взгляд, несомненно, отражает одну из важных объек-

тивных особенностей алгебры. В реальном мире прерывное и непрерывное находится в диалектическом единстве. Но чтобы познать действительность, иногда необходимо ее рассечь на части и изучать эти части порознь. Поэтому одностороннее внимание алгебры к дискретным соотношениям нельзя рассматривать как ее недостаток.

На примере теории групп видно, что отдельные алгебраические дисциплины дают не только средства для технических вычислений, но и язык для выражения глубоких законов природы. Однако, помимо непосредственного практического значения ряда разделов алгебры для физики, химии, кристаллографии и других наук, в самой математике алгебра занимает одно из важных мест. По словам замечательного советского алгебраиста Н. Г. Чеботарева, алгебра была колыбелью многих новых идей и понятий, возникших в математике, и в значительной степени оплодотворяла развитие таких разделов математики, которые служат уже непосредственной базой физических и технических наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров. Введение в теорию групп. Учпедгиз, 1952.
2. Б. Л. Ван дер Варден. Современная алгебра, т. I, II. Гостехиздат, 1947.
3. Н. Джекобсон. Теория колец. ИЛ, 1947.
4. А. Г. Курош. Теория групп. Гостехиздат, 1953.
5. Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. Гостехиздат, 1954.

ЗАМЕЧАНИЕ О ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ *



В работе [1] нами было показано, что всякая нильпотентная частично упорядоченная группа без элементов конечного порядка может быть доупорядочена, т. е. заданная группа может быть упорядочена и притом так, что любые ее два элемента, находившиеся в отношении $a < b$ в заданной частичной упорядоченности, останутся в этом отношении и при новой упорядоченности. Отсюда с помощью общего локального метода, впервые указанного в работах [2, 3], непосредственно вытекает возможность доупорядочения и любой локально нильпотентной частично упорядоченной группы без элементов конечного порядка.

При доказательстве первого из сформулированных утверждений в [1] было показано в качестве промежуточного результата, что всякая нильпотентная частично упорядоченная группа с конечным числом образующих обладает выпуклым центральным рядом, начальные факторы которого без кручения, а последние — периодические группы в случае, если исходная группа вообще имеет элементы конечного порядка.

Мы покажем, что справедливы следующие локальные теоремы для частично упорядоченных групп:

Т е о р е м а 1. *Если всякая подгруппа H с конечным числом образующих частично упорядоченной группы G обладает центральной системой $\{H_\alpha\}$ (см. [5]), состоящей из выпуклых подгрупп в H , то центральной системой, состоящей из выпуклых подгрупп, обладает и группа G .*

Т е о р е м а 2. *Если всякая подгруппа H с конечным числом образующих частично упорядоченной группы G обладает разрешимой системой выпуклых нормальных делителей (подгрупп) группы H , то тем же свойством обладает и сама группа G .*

Из сделанного выше замечания о частично упорядоченных нильпотентных группах с конечным числом образующих и теоремы 1 вытекает:

С л е д с т в и е. *Всякая частично упорядоченная локально нильпотентная группа обладает центральной системой выпуклых подгрупп, все факторы которой не имеют кручения в случае, когда группа не имеет элементов конечного порядка.*

Теорема о доупорядочиваемости получается из этого следствия непосредственно, так как известно [4], что группы с центральными системами выпуклых подгрупп доупорядочиваемы, если факторы не имеют кручения.

Теоремы 1, 2 являются обобщениями соответствующих локальных теорем абстрактной теории групп [5], доказательства которых легко переносятся и на рассматриваемый случай. Однако мы вместо этого воспользуемся общим локальным методом, изложенным нами в [3] и воспроизводимом здесь без всяких изменений. Согласно ему для доказательства теорем 1, 2 достаточ-

* Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1956, 10, 3—5.

но сформулировать свойства множества, существование которого доказывается, на языке узкого исчисления предикатов и проверить, что существует множество, удовлетворяющее любому конечному числу сформулированных требований. В качестве искомого множества будем рассматривать совокупность индексов $M = \{\alpha\}$ подгрупп G_α центральной или разрешимой систем. Для каждого элемента $g \in G$ вводим одноместный предикат $A_g(\alpha)$, истинность которого с содержательной точки зрения означает, что $g \in G_\alpha$. Рассматриваем теперь совокупность $S(G)$ следующих аксиом:

- 1) M упорядочено;
- 2) $(\alpha)(\beta) [\alpha \leq \beta \text{ и } A_g(\alpha) \rightarrow A_g(\beta)]$;
- 3) $(\alpha) [A_g(\alpha) \text{ и } A_h(\alpha) \rightarrow A_{gh^{-1}}(\alpha)]$;
- 4) $(\exists \alpha) A_g(\alpha)$;
- 5) $(\exists \alpha) \sim A_g(\alpha) \quad \{g \neq e\}$;
- 6) $(\alpha) [A_g(\alpha) \rightarrow A_h(\alpha)] \quad \{e < h < g\}$;
- 7) $(\exists \alpha) [(\sim A_g(\alpha) \text{ или } \sim A_h(\alpha)) \text{ и } A_{ghg^{-1}h^{-1}}(\alpha)] \quad \{g \neq e, h \neq e\}$;
- 8) $(\alpha) [A_g(\alpha) \rightarrow A_{hg^{-1}}(\alpha)]$;
- 9) $(\exists \alpha) [\sim A_g(\alpha) \text{ и } \sim A_h(\alpha) \text{ и } A_{ghg^{-1}h^{-1}}(\alpha)] \quad \{g \neq e, h \neq e\}$.

Для краткости аксиомы упорядоченности M в 1) явно не выписаны. Каждую из остальных аксиом нужно мыслить выписанной для всевозможных значений индексов, кроме аксиом 5) — 9), которые следует выписать для всевозможных индексов, удовлетворяющих условиям, указанным в фигурных скобках.

Пусть для заданной группы G найдена модель M , удовлетворяющая аксиомам 1) — 7). Обозначим через G_α совокупность тех $g \in G$, для которых предикат $A_g(\alpha)$ истинен. Из 3) следует, что G_α подгруппа, а из 6) следует, что G_α — выпуклая подгруппа. Аксиомы 2) гарантируют упорядоченность системы подгрупп G_α относительно включения. Пополнив систему $\{G_\alpha\}$ всевозможными суммами и пересечениями, легко обнаружим, что аксиомы 7) гарантируют разрешимость этой системы. Обратно, если группа G обладает разрешимой системой выпуклых подгрупп G_α , то, принимая в качестве множества M систему индексов этих подгрупп и полагая отношение $A_g(\alpha)$ истинным, если $g \in G_\alpha$, мы получим модель для системы 1) — 7). Аналогично убеждаемся, что аксиомы 1) — 8) дают модель для случая разрешимой системы инвариантных выпуклых подгрупп, а аксиомы 1) — 6), 9) — для центральной системы выпуклых подгрупп.

Чтобы доказать совместность системы аксиом, например 1) — 6), 9), для какой-либо группы G , удовлетворяющей условиям теоремы 1, берем конечную часть S^* этой системы, и пусть $h_1, \dots, h_m$ — те элементы группы G , которые участвуют в качестве индексов в аксиомах из S^* . Обозначаем через H подгруппу, порожденную элементами $h_1, \dots, h_m$, и рассматриваем те аксиомы, у которых в индексах участвуют только элементы из H . По условию H обладает центральной выпуклой системой и потому система аксиом $S^* \subset S(H)$ совместна. В силу локальной теоремы узкого исчисления предикатов из [3] ввиду совместности каждой конечной части S^* будет совместна и вся

система аксиом, отвечающая группе G , т. е. группа G обладает центральной системой выпуклых подгрупп.

Эти же рассуждения показывают истинность и теоремы 2. Добавляя к аксиомам 1)–9) еще аксиому

$$10) (\alpha) [A_{g^n}(\alpha) \rightarrow A_g(\alpha)],$$

мы тем же путем получим локальные теоремы для существования центральных (соответственно разрешимых) систем, все факторы которых не имеют кручения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. О доупорядочении групп.— Труды Мат. ин-та АН СССР, 1951, 38, 173—175.
2. А. И. Мальцев. Исследования по математической логике.— Мат. сб., 1936, 1, № 3, 323—335.
3. А. И. Мальцев. Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп.— Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1941, 1, № 1, 3—9.
4. А. А. Виноградов. Частично упорядоченные локально нильпотентные группы.— Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1953, 4, 3—18.
5. А. Г. Курош. Теория групп. М., 1953.



Около десяти лет назад А. А. Марков [13] построил теорию свободных топологических групп над вполне регулярными пространствами. В работах М. И. Граева [5, 6], Т. Накаяма [15], С. Какутани [8] доказательства основных результатов этой теории были значительно упрощены, а также был получен ряд новых теорем о свободных топологических группах, более полно вскрывающих их строение и в какой-то мере параллельных результатам теории абстрактных свободных групп. Однако известно, что теория свободных абстрактных групп, колец и других алгебраических образований находит свое наиболее естественное место в рамках общей теории алгебраических систем. Это обстоятельство, так же как и внутреннее развитие некоторых вопросов самой теории топологических групп, делало целесообразной попытку создания общей теории свободных топологизированных алгебраических систем. Основы такой теории и излагаются в настоящей работе.

Эта работа по содержанию примыкает, кроме указанных статей, также к работе [12]. Для облегчения чтения доказательства приведены полностью даже в случаях, когда они лишь по форме отличаются от доказательств соответствующих фактов теории топологических групп.

Под словом алгебра далее понимается универсальная алгебра в смысле Г. Биркгофа [2], т. е. произвольное множество элементов, снабженное конечной совокупностью определенных на нем однозначных операций, производимых над конечными системами элементов. В отличие от этих общих алгебр, обычные алгебры над полями будут называться линейными алгебрами. Алгебра называется топологической, если множество ее элементов есть топологическое пространство, а основные операции непрерывны в нем.

В § 1 излагается определение топологической алгебры с данным порождающим топологическим пространством и заданной системой определяющих соотношений и доказываются ее существование и единственность. Там же доказывается, что топологическая алгебра над топологическим пространством, заданная определяющими соотношениями, финитно порождается элементами указанного пространства.

Основным результатом § 2 является доказательство обобщенной теоремы Дика, из которой, в частности, видно, что классы алгебр с перестановочными конгруэнтностями занимают особое положение и в теории свободных топологических алгебр (ср. [12]). После этого определяются свободные топологические алгебры и свободные объединения их. Аналогичные понятия рассматривались Р. Сикорским [19].

В § 3, имеющем вспомогательный характер, напоминаются известные факты, связанные с понятием сходимости в хаусдорфовых пространствах, и обсуждается один способ задания топологии посредством предельных операций, играющий в дальнейшем существенную роль.

* Изв. АН СССР, сер. мат., 1957, 21, № 2, 171—198.

В теории свободных топологических алгебр важное значение имеет нахождение свободной топологии. Некоторый трансфинитный процесс для получения этой топологии рассмотрен в § 4. Там же более подробно изучены свойства начальной топологии, получаемой в этом трансфинитном процессе.

В § 5 теоремы Граева о задании свободной топологии группы над бикомпактным пространством доказываются для произвольных алгебр. Кроме того, в § 5 явно указывается свободная топология алгебр с локально компактным порождающим пространством. Последний результат является, по-видимому, новым и для топологических групп.

В § 6—8 рассматривается алгебраическая структура свободных топологических алгебр частных классов. Сначала в § 6 берутся классы с наиболее простыми определяющими тождествами и в этих классах явно указывается топология и алгебраическое строение свободных алгебр.

В § 7 показывается, как из общих результатов работы можно вывести основные факты теории свободных топологических групп, а также доказываются, что свободные нильпотентные топологические группы различных ступеней являются фактор-группами свободной топологической группы по соответствующим членам ее нижнего центрального ряда.

В § 8 устанавливается алгебраическое строение свободных топологических колец широкой системы классов, включающей классы неассоциативных колец, ассоциативных колец, колец Ли и т. п. Там же устанавливается алгебраическая структура свободных топологических колец Буля.

В заключение формулируются некоторые нерешенные вопросы.

§ 1. Определяющие соотношения

В дальнейшем, если не оговорено противное, все топологические пространства предполагаются хаусдорфовыми. В частности, топологической алгеброй называется хаусдорфово пространство, снабженное конечной системой непрерывных операций $\varphi_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ ($i = 1, \dots, s$), называемых основными операциями алгебры. Многочленом от букв $x, \dots, z$ называется имеющее смысл выражение, составленное из этих букв, скобок и символов основных операций алгебры. Алгебры с одним и тем же набором основных операций, все элементы которых удовлетворяют некоторой фиксированной системе $\mathfrak{S}$ тождеств вида $f = g$, где f, g — многочлены, называются принадлежащими одному и тому же примитивному классу $\mathfrak{S}$ (см. [12]).

Пусть заданы примитивный класс алгебр, характеризующийся набором тождеств $\mathfrak{S}$, и некоторое топологическое пространство X .

О п р е д е л е н и е. Топологическая алгебра A класса $\mathfrak{S}$ с заданным непрерывным отображением σ пространства X в A называется **определяемой в $\mathfrak{S}$ пространством X и соотношениями**

$$f_{\lambda}(x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_{m_{\lambda}}}) = g_{\lambda}(x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_{m_{\lambda}}}) \quad (x_{\lambda i} \in X),$$

где f_{λ}, g_{λ} — некоторые многочлены, если

F1) в A выполнены равенства: $f_{\lambda}(x_{\lambda_1}^{\sigma}, \dots, x_{\lambda_{m_{\lambda}}}^{\sigma}) = g_{\lambda}(x_{\lambda_1}^{\sigma}, \dots, x_{\lambda_{m_{\lambda}}}^{\sigma})$;

F2) A топологически порождается образами элементов X , т. е. в A нет замкнутой подалгебры, отличной от A и содержащей X^{σ} ;

F3) для каждого непрерывного отображения γ пространства X в произвольную топологическую алгебру C класса $\mathfrak{S}$, при котором удовлетворяются

соотношения:

$$f_{\lambda}(x_{\lambda 1}^{\gamma}, \dots, x_{\lambda m_{\lambda}}^{\gamma}) = g_{\lambda}(x_{\lambda 1}^{\gamma}, \dots, x_{\lambda m_{\lambda}}^{\gamma}),$$

существует непрерывный гомоморфизм α алгебры A в алгебру C , согласованный с отображениями σ, γ , т. е. такой, что $x^{\sigma\alpha} = x^{\gamma}$ для всех x из X .

Обычным образом теперь может быть доказана

Т е о р е м а 1. Для любого топологического пространства X , любого класса $\mathfrak{S}$ и произвольной системы многочленов f_{λ}, g_{λ} алгебра A со свойствами F1, F2, F3 существует и определяется этими свойствами однозначно с точностью до топологических изоморфизмов над образом в ней пространства X .

Начнем с единственности. Пусть алгебры A, B с отображениями σ, τ в них пространства X обладают свойствами F1, F2, F3. Согласно F3 найдутся гомоморфизм α алгебры A в B и гомоморфизм β алгебры B в A , для которых

$$x^{\sigma\alpha\beta} = x^{\tau\beta} = x^{\sigma}, \quad x^{\tau\beta\alpha} = x^{\sigma\alpha} = x^{\tau}.$$

Отсюда видно, что отображения α, β взаимно обратны, а потому и взаимно однозначны на множествах X^{σ}, X^{τ} . Обозначим через A^*, B^* подалгебры, порожденные финитно (алгебраически) элементами множеств X^{σ} и X^{τ} соответственно в алгебрах A, B . Пусть

$$a^{\alpha} = b, \quad a = f(x_1^{\sigma}, \dots, x_n^{\sigma}), \quad x_i \in X,$$

где f — некоторый многочлен. В силу гомоморфности отображения α , имеем

$$b = f(x_1^{\tau}, \dots, x_n^{\tau}),$$

откуда

$$b^{\beta} = f(x_1^{\tau\beta}, \dots, x_n^{\tau\beta}) = a,$$

т. е. отображения α, β взаимно обратны на A^* и B^* . Так как замыкание подалгебры есть подалгебра, то согласно F2 множества A^*, B^* плотны в A, B . Пользуясь непрерывностью α, β , отсюда легко выводим, что α и β взаимно обратны, а потому и взаимно однозначны на A и B . Следовательно, α изоморфно отображает A на B , причем образ какого-либо элемента X в A переходит в образ этого же элемента в B .

Существование алгебры A непосредственно следует из свойств прямых произведений топологических алгебр. Напомним соответствующие определения. Пусть A_{α} ($\alpha \in \Sigma$) — система топологических алгебр фиксированного класса $\mathfrak{S}$. Совокупность всех функций $h(\alpha)$, определенных на Σ со значениями в $\bigcup A_{\alpha}$, удовлетворяющими требованиям $h(\alpha) \in A_{\alpha}$, есть декартово произведение $H = \prod A_{\alpha}$. В H вводят тихоновскую топологию, объявляя открытыми декартовы произведения открытых подмножеств, выбранных в конечном числе перемножаемых пространств, на остальные пространства, а также произвольные объединения этих произведений.

Наконец, полагают по определению

$$\varphi_i(h_1, \dots, h_{n_i}) = h \quad (h_i, h \in H),$$

где

$$h(\alpha) = \varphi_i(h_1(\alpha), \dots, h_{n_i}(\alpha)), \quad \alpha \in \Sigma.$$

Тем самым множество H обращается в топологическую алгебру того же примитивного класса $\mathfrak{S}$, что и заданные алгебры A_α . Алгебра H далее и будет называться прямым топологическим произведением данных топологических алгебр.

Возвращаясь к доказательству существования, обозначим через $\mathfrak{m}$ мощность заданного пространства X и из совокупности всех топологически неизоморфных алгебр мощности $\leq 2^{2^{\mathfrak{m}+\aleph_0}}$ выберем все те алгебры A_α , которые удовлетворяют условиям F1, F2. Обозначим через σ_α то непрерывное отображение X в A_α , о котором идет речь в F1, F2. Отображения σ_α порождают естественное отображение σ пространства X в прямое произведение $H = \prod A_\alpha$, определяемое равенством

$$x^\sigma(\alpha) = x^{\sigma_\alpha} \quad (\alpha \in \Sigma).$$

Легко видеть, что это отображение также непрерывно. Подалгебра A , топологически порождаемая элементами X^σ в алгебре H , обладает свойствами F1, F2. Но A удовлетворяет и требованию F3. В самом деле, если B — какая-либо алгебра со свойствами F1, F2, то мощность ее не больше $2^{2^{\mathfrak{m}+\aleph_0}}$, так как B содержит в качестве плотного подмножества подалгебру B^* , порожденную алгебраически элементами X^τ и, следовательно, имеющую мощность $\leq \mathfrak{m} + \aleph_0$. Таким образом, среди сомножителей A_α имеется алгебра A_λ , изоморфная B над X . Проектирование $a \rightarrow a(\lambda)$ алгебры A на сомножитель A_λ является искомым непрерывным гомоморфизмом A на $A_\lambda = B$, согласованным с отображениями $X \rightarrow A$ и $X \rightarrow B$.

Теорема 2. *Алгебра A , задаваемая в каком-либо классе $\mathfrak{S}$ порождающим топологическим пространством X и некоторыми определяющими соотношениями, порождается алгебраически образами элементов X , т. е. каждый элемент A выражается в виде многочлена от образов элементов X .*

Для доказательства обозначим через A^* совокупность элементов A , выражающихся в виде конечных многочленов от образов элементов X . Оставляя в A^* топологию, которую она имеет, как подмножество топологического пространства A , обратим A^* в топологическую алгебру, причем пространство X непрерывно отображается в A^* с помощью того же отображения σ , что и в заданную алгебру A . В силу F3 найдется непрерывный гомоморфизм τ алгебры A в алгебру A^* , согласованный с отображениями $X \rightarrow A$, $X \rightarrow A^*$. Поскольку A^* алгебраически порождается образами элементов X , то τ будет отображением A на всю алгебру A^* , причем для $a \in A^*$ имеем $a^\tau = a$. Так как A^* плотно в A , то для каждого $a \in A$ найдется направленное множество $\{a_\lambda\}$ элементов A^* , сходящееся к a (см. § 3). Из непрерывности τ следует, что

$$a^\tau = \varprojlim \{a_\lambda^\tau\} = a,$$

откуда $A = A^*$.

Проблема явного описания топологической алгебры, задающей порождающим пространством X и определяющими соотношениями S в классе $\mathfrak{S}$, естественно, расчленяется на следующие части:

* Как сообщил мне А. А. Марков, используемая здесь теорема о том, что мощность хаусдорфова пространства H не превосходит $2^{2^{\aleph}}$, если оно содержит плотное подмножество A мощности $\aleph$, впервые доказана М. Я. Перельманом в не опубликованной до сих пор работе. Там же построены примеры, показывающие, что мощность $2^{2^{\aleph}}$ действительно достигается.

А) Изоморфна ли A абстрактной алгебре $\bar{A}$, заданной в классе $\mathfrak{S}$ теми же определяющими соотношениями S и порождающим множеством X , что и сама алгебра A ?

Б) Содержит ли A подпространство X топологически, т. е. является ли каноническое отображение σ пространства X в A гомеоморфизмом?

В) Указать в каком-то смысле явно топологию A .

Отметим, что положительный ответ на вопрос Б) в работах по теории свободных топологических групп [13, 5] был включен в качестве аксиомы в определение свободной топологической группы. Поэтому доказательство существования в указанных работах проводилось для вполне регулярных пространств X . В нашем определении такого требования нет. Поэтому соответствующие алгебры всегда существуют, но зато не всегда содержат X топологически.

Достаточные условия для положительного ответа на вопросы А), Б) мы сформулируем в виде следующих замечаний, непосредственно обобщающих известные результаты теории топологических групп.

З а м е ч а н и е 1. Топологическая алгебра A с определяющими соотношениями S и порождающим пространством X изоморфна абстрактной алгебре $\bar{A}$ с теми же соотношениями и порождающим множеством, если для каждого двух многочленов f, g от элементов X , имеющих различные значения в A , существует непрерывное отображение пространства X в подходящую топологическую алгебру B рассматриваемого примитивного класса такое, что в B выполняются все определяющие соотношения для образов элементов из X и $f \neq g$ в B .

З а м е ч а н и е 2. Для того чтобы алгебра A содержала топологически пространство X , достаточно, чтобы существовала такая система $\{\alpha\}$ непрерывных отображений пространства X в подходящие топологические алгебры A_α , сохраняющих определяющие соотношения, чтобы для каждой окрестности U произвольной точки $x \in X$ нашлась конечная система окрестностей $U_1, \dots, U_n$ точек $x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n}$, для которой пересечение $\bigcap U_i^{\alpha_i^{-1}}$ образов содержится в U . Если при этом X^α окажется замкнутым в каждой алгебре A_α , то X будет содержаться в A в качестве замкнутого подмножества.

Справедливость первого замечания непосредственно вытекает из определения алгебр с данными пространством X и определяющими соотношениями S .

Для доказательства второго замечания рассмотрим указанную выше конструкцию алгебры A с помощью прямого произведения H . Все алгебры A_α войдут в состав H в качестве сомножителей с отображениями α . Нужно убедиться только, что каноническое отображение X внутрь H при заданных условиях будет гомеоморфизмом. В случае, когда все A_α гомеоморфны, явное доказательство этого содержится в работе [18]. В общем случае доказательство такое же.

До сих пор рассматривались произвольные хаусдорфовы топологические пространства. Однако поскольку все рассуждения основывались лишь на свойствах прямых топологических произведений, то предшествующие определения и теоремы останутся в силе, если вместо хаусдорфовых пространств рассматривать какие-либо другие классы K пространств при условии, что эти классы обладают следующими свойствами (ср. [8]):

K_1) прямое произведение K -алгебр есть K -алгебра;

K_2) всякая подалгебра K -алгебры есть K -алгебра.

Таковыми классами являются, например, классы пространств регулярных, вполне регулярных (см. [1]), с функционально отделимыми парами точек и др. Более того, для построения класса с упомянутыми свойствами можно взять какой-нибудь набор топологических пространств и рассматривать все те пространства, которые могут быть получены из взятых с помощью операций K_1, K_2 . В частности, если в качестве исходных пространств взять пространства с дискретной топологией, то получаемые с помощью операций K_1, K_2 топологии составляют класс алгебраических топологий, изучавшихся в работе [7]. Топологические пространства этого класса регулярны и вполне разрывны в том смысле, что для любой конечной системы точек $x_1, \dots, x_n$ такого пространства X существует разбиение X на n попарно не пересекающихся замкнутых множеств, содержащих по одной из указанных точек.

Из замечаний 1, 2 теперь непосредственно следует, что для алгебр, порождаемых регулярным и вполне разрывным пространством X , проблема А) решается положительно при любых $\mathfrak{S}$ и S , а проблема Б) решается положительно при условии, что абстрактная алгебра $\tilde{A}$ содержит X .

Это утверждение справедливо как в классе K всех хаусдорфовых алгебр, так и в классе регулярных вполне разрывных алгебр. В дальнейшем, однако, всюду будут рассматриваться только алгебры, свободные в классе хаусдорфовых алгебр.

§ 2. Свободные топологические алгебры. Свободные объединения топологических алгебр

Топологическая алгебра A называется свободной топологической алгеброй над порождающим топологическим пространством X в примитивном классе $\mathfrak{S}$, если A определяется в $\mathfrak{S}$ только пространством X при пустом множестве S определяющих равенств. В абстрактном случае роль свободных алгебр подчеркивается тем обстоятельством, что всякая абстрактная алгебра класса $\mathfrak{S}$ с порождающим множеством X изоморфна фактор-алгебре свободной алгебры над X в $\mathfrak{S}$ по подходящей конгруэнтности. В топологическом случае можно утверждать лишь, что всякая топологическая алгебра класса $\mathfrak{S}$ над X будет непрерывным гомоморфным образом свободной топологической алгебры над X (см. ниже теорему 3). Для построения же топологической фактор-алгебры нужно, чтобы гомоморфизм был не только непрерывным, но и открытым (см. [12]). В качестве примера рассмотрим класс $\mathfrak{S}$ полугрупп, т.е. в алгебре с одной бинарной ассоциативной операцией умножения. Пусть X — какое-нибудь связное топологическое пространство, состоящее не из одной точки. Выберем в X фиксированную точку e и обозначим через B полугруппу с соотношениями $xy = e$ ($x, y \in X$), состоящую из точек пространства X , а через A — свободную топологическую полугруппу над X . Ясно, что B — топологическая полугруппа. Элементами A являются конечные последовательности $(a_1, \dots, a_m)$ точек X , умножающиеся по закону

$$(a_1, \dots, a_m)(a_{m+1}, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n),$$

причем окрестностью элемента $(a_1, \dots, a_n)$ в A (см. § 7) является совокупность последовательностей вида

$$(x_1, \dots, x_m), \quad x_i \in U_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

где U_i — произвольные фиксированные окрестности точек $a_1, \dots, a_m$ в X . Каноническое гомоморфное отображение $(a_1, \dots, a_m) \rightarrow a_1, \dots, a_m$ алгебры A на алгебру B является непрерывным, но не открытым, так как открытое

множество (X, X) переходит при этом в B в точку $XX = e$, не являющуюся открытым множеством.

Тем не менее существует широкая система классов $\mathfrak{S}$, для которых упомянутые канонические гомоморфизмы будут открытыми.

Т е о р е м а 3. Пусть A — свободная топологическая алгебра над топологическим пространством X с определяющими соотношениями S в классе с тождествами $\mathfrak{S}$, и пусть B — топологическая алгебра над пространством Y с определяющими соотношениями T в классе с тождествами $\mathfrak{Z}$. Предположим, далее, что задано непрерывное отображение τ пространства X на пространство Y такое, что каждое равенство из S , записанное для соответствующих элементов Y , содержится в T , и пусть каждое тождество из $\mathfrak{S}$ содержится в $\mathfrak{Z}$. Тогда отображение τ продолжаемо до непрерывного гомоморфизма τ^* алгебры A на B . Этот гомоморфизм будет заведомо открытым, если в классе $\mathfrak{S}$ все конгруэнтности перестановочны*; B содержит топологически Y и отображение τ пространства X на Y есть гомеоморфизм.

Возможность продолжения τ до непрерывного гомоморфизма τ^* ; следует из основного определения § 1, так как лишние сравнительно с $\mathfrak{S}$ тождества в $\mathfrak{Z}$ можно заменить дополнительной системой индивидуальных соотношений и включить ее в T .

Для доказательства открытости τ^* обозначим через θ отношение конгруэнтности на A , отвечающее гомоморфному отображению τ^* алгебры A на B . Поскольку гомоморфизм τ^* непрерывен и конгруэнтности на $\mathfrak{S}$ перестановочны, то согласно теоремам 10 и 11 работы [12] конгруэнтность θ будет непрерывна и полна. Поэтому мы можем рассмотреть топологическую фактор-алгебру A/θ с открытым непрерывным гомоморфизмом $A \rightarrow A/\theta$ и непрерывным взаимно однозначным гомоморфизмом $A/\theta \rightarrow B$ (см. [12]). По условию B содержит Y . Обозначив заданное каноническое отображение X в A через σ , будем иметь непрерывные отображения $X \rightarrow X^\sigma \rightarrow Y \rightarrow X$, из которых видно, что σ есть гомеоморфизм, т. е. что A содержит X . При отображении $A \rightarrow A/\theta$ различные элементы из X имеют различные образы в A/θ . Кроме того, это отображение непрерывно и открыто. Поэтому образ X_θ множества X в A/θ топологически содержится в A/θ . При отображении $Y \rightarrow X_\theta$ все определяющие соотношения из T выполняются для соответственных элементов X_θ . Поэтому отображение $Y \rightarrow X_\theta$ продолжаемо до непрерывного гомоморфизма φ алгебры B на A/θ . Ясно, что φ обратно для отображения $A/\theta \rightarrow B$ и потому φ — взаимно непрерывный изоморфизм между алгебрами A/θ и B , что и требовалось.

С л е д с т в и е. Всякая топологическая алгебра B , определяемая в примитивном классе $\mathfrak{S}$ с перестановочными конгруэнтностями, содержащимися в B , порождающим пространством X и системой T определяющих соотношений, топологически изоморфна фактор-алгебре свободной топологической алгебры A над X в классе $\mathfrak{S}$ по подходящей непрерывной и полной конгруэнтности.

Для доказательства достаточно в теореме 3 взять в качестве S пустое множество и положить $X = Y$, τ — тождественное отображение.

В качестве частного случая отметим еще, что каждая топологическая алгебра B , принадлежащая примитивному классу $\mathfrak{S}$ с перестановочными конгруэнтностями, является непрерывным и открытым гомоморфным образом свободной топологической алгебры A в классе $\mathfrak{S}$ над пространством B .

* Перестановочность конгруэнтностей в классе алгебр $\mathfrak{S}$ понимается здесь в смысле работы [12].

Это утверждение получается из приведенного выше следствия, если в нем в качестве X взять B , а в качестве T взять все соотношения между элементами B .

Введем несколько определений. Пусть топологическая алгебра A финитно порождается элементами некоторого своего подмножества X . Обозначим через S совокупность всех соотношений между элементами X в алгебре A и рассмотрим алгебру B с порождающим пространством X и определяющими соотношениями S . Согласно замечанию 2 алгебра B содержит топологически X и непрерывный гомоморфизм B на A , являющийся продолжением тождественного отображения X в X , будет алгебраическим изоморфизмом между B и A . Поэтому алгебру B можно считать той же алгеброй A , только снабженной другой топологией, которую будем называть свободной относительно X . Из основного определения § 1 вытекает, что тождественное отображение алгебры A со свободной топологией относительно X на алгебру A с любой другой топологией, совместимой с заданной топологией множества X , будет непрерывно. Это свойство характерно для свободной топологии.

Пусть X_α — топологические пространства попарно без общих точек. Свободной топологией их объединения $X = \bigcup X_\alpha$ называют топологию, при которой открытыми подмножествами X являются произвольные объединения открытых подмножеств объединяемых пространств.

Рассмотрим топологические алгебры A_α одного и того же класса $\mathfrak{S}$, не имеющие общих элементов, и предположим, что A_α, A_β имеют топологически изоморфные подалгебры $A_{\alpha\beta}, A_{\beta\alpha}$. Изоморфизм $A_{\alpha\beta}$ на $A_{\beta\alpha}$ обозначим через $\sigma_{\alpha\beta}$. Свободным топологическим объединением алгебр A с отождествленными подалгебрами $A_{\alpha\beta}, A_{\beta\alpha}$ будем называть топологическую алгебру, определяемую в классе $\mathfrak{S}$ пространством $\bigcup A_\alpha$ со свободной топологией и определяющими соотношениями $a^{\sigma_{\alpha\beta}} = a$ ($a \in A_{\alpha\beta}$).

В частном случае, когда подалгебры $A_{\alpha\beta}$ пусты, свободное объединение с отождествленными подалгебрами называется просто свободным объединением. Если пусто множество операций, то получается определение свободного объединения топологических пространств с отождествленными подпространствами.

Топологическое свободное объединение алгебр можно характеризовать также следующим образом: алгебра A тогда и только тогда является топологическим свободным объединением алгебр A_α в классе $\mathfrak{S}$, когда существуют непрерывные гомоморфизмы σ_α алгебр A_α в A со свойствами

- 1) A топологически порождается элементами $\bigcup A_\alpha^{\sigma_\alpha}$;
- 2) для каждого набора непрерывных гомоморфизмов τ_α алгебр A_α в какую-либо алгебру B рассматриваемого класса $\mathfrak{S}$ найдется непрерывный гомоморфизм τ алгебры A в B такой, что $a^{\sigma_\alpha \tau} = a^{\tau_\alpha}$ для $a \in A_\alpha$.

Из теоремы 2 непосредственно следует, что свободное топологическое объединение финитно порождается образами элементов объединяемых алгебр.

Легко указать пример, когда канонические отображения σ_α объединяемых алгебр в свободное объединение не будут изоморфизмами. В общем случае справедлива

Т е о р е м а 4. Если каждую из заданных топологических алгебр A_α класса $\mathfrak{S}$ можно топологически погрузить в топологическую алгебру C_α того же класса, содержащую одноэлементную подалгебру, то канонические отображения заданных алгебр в их свободное объединение будут топологическими изо-

морфизмами. Образы алгебр A_α в свободном объединении будут замкнутыми подалгебрами, если A_α замкнуты в C_α .

Действительно, пусть каждая из данных алгебр A_α погружена в топологическую алгебру C_α с одноэлементной подалгеброй $\{e_\alpha\}$. Составим топологическое прямое произведение $H = \prod C_\alpha$ и рассмотрим отображение φ_α алгебры C_α в H , определяемое условиями:

$$e^{\varphi_\alpha}(\lambda) = e_\lambda, \quad a^{\varphi_\alpha}(\alpha) = a \quad (\lambda \neq \alpha, a \in C_\alpha).$$

Ясно, что φ_α есть топологический изоморфизм A_α на замкнутую подалгебру $H_\alpha = C_\alpha^{\varphi_\alpha}$ в H . Согласно характеристичному свойству свободного объединения гомоморфизмы φ_α продолжаемы до непрерывного гомоморфизма всего свободного объединения в алгебру H . Так как C_α, H_α топологически изоморфны и A_α замкнуты в C_α , то и свободное объединение содержит A_α в качестве замкнутой подалгебры.

§ 3. L-операции

Параллелизм между теорией абстрактных алгебр и теорией топологических алгебр становится более отчетливым, если на топологические пространства смотреть как на дискретные алгебры с системой частичных операций предельного перехода. Трудность состоит лишь в том, что эти операции зависят от бесконечного числа переменных, и, в особенности, в том, что свойства их выражаются не в виде тождеств. Тем не менее сопоставление операторной точки зрения на топологические пространства с обычной представляет интерес и будет проведено кратко в настоящем параграфе.

Пусть A — какое-либо множество, Σ — вспомогательное множество индексов, частично упорядоченное так, что любые его два элемента имеют в Σ общий больший. Направлением $[a_\alpha]$ в A с носителем Σ называется произвольное отображение $\alpha \rightarrow a_\alpha$ множества Σ в A . Направление $[a_\alpha]$ в топологическом пространстве A называется сходящимся к точке a , символически $\lim [a_\alpha] = a$, если для каждой окрестности U точки a найдется такой индекс $\alpha \in \Sigma$, что все a_λ с $\lambda > \alpha$ содержатся в U . В хаусдорфовых пространствах каждое направление может сходить к не более, чем к одной точке. В T_0 -или T_1 -пространствах (см. [1]) могут существовать направления, сходящиеся к нескольким точкам. Множество F топологического пространства A тогда и только тогда замкнуто, когда все пределы направлений из элементов F принадлежат F (см. [2, стр. 14]).

Подмножество Σ' элементов частично упорядоченного множества Σ назовем его конфинальной частью, если для каждого $\alpha \in \Sigma$ в Σ' существует больший элемент α' .

В хаусдорфовых пространствах операции $\lim$ обладают следующими очевидными свойствами:

L1. Для каждого носителя Σ операция $\lim$ является однозначной частичной операцией.

L2. Если для всех $\alpha \in \Sigma$ имеем $a_\alpha = a$, то $\lim [a_\alpha] = a$.

L3. Если $\{\alpha_i\}$ — конфинальное множество из $\{\alpha\}$ и $\lim [a_\alpha]$ существует, то $\lim [a_{\alpha_i}]$ также существует и совпадает с $\lim [a_\alpha]$.

Уже упоминалось, что с алгебраической точки зрения взятие предела направления в топологическом пространстве можно рассматривать как частичную операцию с бесконечным числом аргументов, точнее, как систему

частичных операций, различающихся носителями. Условия L2, L3 формально имеют тот же самый вид, что и тождественные соотношения, связывающие частичные операции в примитивных классах. Поэтому мы обратим постановку вопроса и предположим, что в некотором множестве A некоторым направлениям $[a_\alpha]$ сопоставлено по определенному элементу $L[a_\alpha]$ из A и что так определенные операции удовлетворяют требованиям L1 — L3. В этом случае условимся A называть L -алгеброй. Подмножества из A , замкнутые относительно L -операций, т. е. подалгебры L -алгебры A , назовем L -замкнутыми. Из L3 следует, что объединение двух L -замкнутых множеств L -замкнуто, а из L2 следует, что каждая точка в отдельности есть L -замкнутое множество. Так как пересечение любой системы L -замкнутых множеств L -замкнуто, то L -замкнутые множества будут системой всех замкнутых множеств определенной топологии на A , которую будем называть L -топологией. Пользуясь L -топологией, можно определить понятие предела $\lim [a_\alpha]$ направления $[a_\alpha]$ в A .

Если операция L определена для направления $[a_\alpha]$, то $\lim [a_\alpha] = L[a_\alpha]$, где $\lim$ берется в смысле L -топологии.

В самом деле, пусть U — некоторая окрестность точки $a = L[a_\alpha]$ и F — дополнение U в A . Выберем из направления $[a_\alpha]$ те элементы a_{α_i} , которые содержатся в F . Если $\{\alpha_i\}$ конфинально в $\{\alpha\}$, то по аксиоме L3 выражение $L[a_{\alpha_i}]$ определено и равно a . Ввиду замкнутости F это дает $a \in F$, что противоречит условию $a \in U$. Таким образом, $\{\alpha_i\}$ не может быть конфинально в $\{\alpha\}$; поэтому найдется такое α , что для всех $\lambda > \alpha$ будет $a_\lambda \in U$, что и требовалось.

Теория абстрактных алгебр с порождающим множеством и определяющими соотношениями, хорошо известная для алгебр с частичными операциями с конечным числом аргументов, без труда переносится и на алгебры с частичными операциями от бесконечного числа аргументов. Поэтому для определения топологической алгебры с порождающим пространством X можно было бы попытаться заменить топологию на X системой L -операций и рассматривать алгебру, часть операций которой была бы финитна и часть инфинитна (новые L -операции). Однако при проведении этой программы возникает затруднение, состоящее в том, что аксиомы L1 — L3 не гарантируют хаусдорфовости L -топологии. Это затруднение было бы обойдено, если бы свойства операции предельного перехода в хаусдорфовых пространствах можно было полностью охарактеризовать аксиомами типа L1 — L3. Однако полная аксиоматика, указанная, например, Биркгофом [4], содержит аксиомы существенно других типов. Аксиоматика, данная Чогошвили [17] для других классов топологических пространств, также содержит аксиомы нежелательного вида. Поэтому в дальнейшем L -операции будут использоваться только как удобный способ задания топологии и как наводящее средство при определениях.

Далее нам понадобится еще следующее свойство L -топологий, устанавливающее аналогию между алгебраическим гомоморфизмом и непрерывностью.

Отображение σ топологического пространства X , топология в котором определяется L -операциями, в топологическое пространство Y , топология в котором также определяется L -операциями, заведомо непрерывно, если из каждого равенства вида $L[x_\alpha] = x$ в X следует равенство $L[x_\alpha^\sigma] = x^\sigma$ в пространстве Y .

Действительно, пусть F_1 — какое-нибудь замкнутое подмножество в Y и F — его полный прообраз в X . Если $[x_\alpha]$ — некоторое направление в F и

$L[x_\alpha] = x$, то по условию

$$L[x_\alpha^\sigma] = x^\sigma,$$

откуда $x^\sigma \in F_1$, $x \in F$, F замкнуто в X и, следовательно, σ непрерывно.

§ 4. Начальная топология алгебр

Пусть A — топологическая алгебра, финитно порождаемая элементами некоторого своего подмножества X . В § 2 была определена свободная топология алгебры A относительно X . Эту топологию независимо от заданной топологии в A можно получить из топологии пространства X следующим трансфинитным путем.

Множество U элементов A назовем X_0 -открытым, если для каждого многочлена f , в том числе $f(x) = x$, и для каждой системы $x_1, \dots, x_n$ элементов из X , для которой $f(x_1, \dots, x_n) \in U$, найдутся такие окрестности $U_1, \dots, U_n$ этих элементов в X , что $f(U_1, \dots, U_n) \subseteq U$. Очевидно, пересечение конечной системы и объединение произвольной системы X_0 -открытых множеств суть X_0 -открытые множества. Поэтому X_0 -открытые множества задают особую топологию на A , которую будем называть X_0 -топологией или начальной топологией A .

Далее, индукцией определяем X_λ -топологии A для трансфинитных индексов λ . Именно, пусть для некоторого трансфинита λ топология X_λ определена. Множество U из A назовем $X_{\lambda+1}$ -открытым, если для каждой основной операции $f(x_1, \dots, x_n)$ и каждых $a_1, \dots, a_n$ из A , удовлетворяющих условию $f(a_1, \dots, a_n) \in U$, найдутся такие X_λ -окрестности $U_1, \dots, U_n$ точек $a_1, \dots, a_n$ в A , что $f(U_1, \dots, U_n) \subseteq U$. Далее, если топологии X_λ определены для всех λ , меньших предельного α , то множество U называем X_α -открытым, если оно X_λ -открыто для всех $\lambda < \alpha$.

Называя топологизацию π_1 какого-нибудь множества A большей или более свободной, чем топологизация π_2 того же множества, если всякое π_2 -замкнутое множество из A является и π_1 -замкнутым (см. [1]), мы видим, что топологизации X_λ монотонно убывают с ростом λ и все содержат заданную топологию A и вообще любую допустимую топологизацию A , т. е. не меняющую топологии X и делающую непрерывными основные операции.

Пусть τ — наименьший трансфинит, для которого $X_\tau = X_{\tau+1}$. Тогда X_τ есть искомая топология алгебры A , свободная относительно X .

Действительно, из соотношения $X_\tau = X_{\tau+1}$ следует, что основные операции алгебры A в топологии X_τ непрерывны. Топология X_τ на X совпадает с первоначальной топологией и содержит всякую допустимую топологию A . Поэтому X_τ есть наибольшая из допустимых топологизаций A , что и требовалось доказать.

Топологии X_λ можно определить другим путем. Пусть A — снова топологическая алгебра, финитно порождаемая подпространством X . В абстрактную алгебру A вводим L_0 -операции, полагая

$$L_0[a_\alpha] = a \quad (a_\alpha \in A),$$

если существует такой многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ и такие направления $[x_{1\alpha}], \dots, [x_{n\alpha}]$ в X с общим носителем $\{\alpha\}$, что

$$f(x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}) = a_\alpha, \quad f(x_1, \dots, x_n) = a, \quad (1)$$

$$\lim [x_{i\alpha}] = x_i, \quad x_i \in X \quad (i = 1, \dots, n).$$

Операция $\lim$ берется здесь в смысле заданной топологии X . Ясно, что так определенные L_0 -операции удовлетворяют аксиомам $L1 - L3$ и потому определяют в A некоторую L_0 -топологию, которую мы условимся называть топологией L_0 . Для трансфинитов λ топологию L_λ определяем индуктивно. Зная λ -топологию, вводим $L_{\lambda+1}$ -операции в A , полагая $L_{\lambda+1}[a_\alpha] = a$, если существует такой многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ и такие направления $[a_{1\alpha}], \dots, [a_{n\alpha}]$ в A с общим носителем, что

$$f(a_{1\alpha}, \dots, a_{n\alpha}) = a_\alpha, \lim [a_{i\alpha}] = b_i, f(b_1, \dots, b_n) = a \\ (i = 1, \dots, n),$$

где $\lim$ берется в смысле L_λ -топологии. Определяемая в A этими операциями $L_{\lambda+1}$ -топология и будет искомой топологией $L_{\lambda+1}$. Если же α предельно и L_λ для $\lambda < \alpha$ известны, то замкнутыми множествами в L_α -топологии по определению будут те, которые замкнуты во всех L_λ -топологиях с $\lambda < \alpha$. Для каждого порядкового числа λ топология L_λ совпадает с топологией X_λ алгебры A .

Докажем сначала, что совпадают топологии L_0 и X_0 . Пусть U есть X_0 -открытое множество. По определению L_0 -незамкнутость $F = \text{доп } U$ означала бы, что для некоторых направлений $[x_{1\alpha}], \dots, [x_{n\alpha}]$ в X и подходящего многочлена f имеют место соотношения

$$\lim [x_{i\alpha}] = x_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2)$$

$$f(x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}) \in F, \quad f(x_1, \dots, x_n) \in U. \quad (3)$$

Ввиду X_0 -открытости U в X найдутся окрестности $U_1, \dots, U_n$ точек $x_1, \dots, x_n$, для которых $f(U_1, \dots, U_n) \subseteq U$. Но тогда из (2) следует, что для всех α , больших некоторого λ , имеем $x_{i\alpha} \in U_i$ ($i = 1, \dots, n$) и, значит, $f(x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}) \in U$ вопреки (3).

Пусть теперь F есть L_0 -замкнутое множество. Докажем, что $U = \text{доп } F$ является X_0 -открытым. Если неверно, что U есть X_0 -открытое, то найдется такой многочлен f и такие точки $x_1, \dots, x_n$ из X , что $f(x_1, \dots, x_n) \in U$ и для каждой системы окрестностей $U_1, \dots, U_n$ указанных точек в X совокупность $f(U_1, \dots, U_n)$ будет иметь непустое пересечение с F , а потому будут существовать такие $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$, для которых $f(u_1, \dots, u_n) \in F$. Обозначим через Σ совокупность всех систем $(U_1, \dots, U_n)$ окрестностей точек $x_1, \dots, x_n$. Эти системы упорядочим, полагая

$$(U_1, \dots, U_n) \leq (V_1, \dots, V_n),$$

если $U_1 \supseteq V_1, \dots, U_n \supseteq V_n$. Выбор элементов $u_1, \dots, u_n$ зависит от системы $\alpha = (U_1, \dots, U_n)$ и потому эти элементы обозначим через $u_{1\alpha}, \dots, u_{n\alpha}$. Легко видеть, что

$$\lim [u_{i\alpha}] = x_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

поэтому операция L для направления $[f(u_{1\alpha}, \dots, u_{n\alpha})]$ будет иметь значение $f(x_1, \dots, x_n)$. Поскольку все элементы направления входят в L_0 -замкнутое множество F , то $f(x_1, \dots, x_n) \in F$, что противоречит условию.

Доказательство совпадения L_λ с X_λ в общем случае проводится трансфинитной индукцией.

X_0 -топологию алгебры A можно еще особенно наглядно охарактеризовать как свободное объединение топологий особой последовательности замкнутых множеств в A . Для этого условимся длиной многочлена f от предметных переменных $x_1, \dots, x_n$ называть общее число участвующих в его записи

предметных переменных. Так, если f, g — основные бинарные операции, то многочлен $f(x, g(x, y))$ имеет длину 3. Пусть X — подмножество элементов некоторой алгебры A . Тогда через X^s будет далее обозначаться совокупность тех элементов A , которые можно представить в виде значений некоторых многочленов длины $\leq s$ от элементов X .

Теорема 5. Пусть A — абстрактная алгебра, порождаемая своим некоторым подмножеством X . Топологизируем каким-либо образом X и условимся направление $[a_\alpha]$ в A называть L_0 -сходящимся к $a \in A$, если для подходящих многочлена f и элементов $x_{i\alpha} \in X$ имеют место соотношения (1). Допустим, что так определенная L -операция однозначна и что в определенной с помощью нее L_0 -топологии алгебры A множества X^s ($s = 1, 2, \dots$) замкнуты. Множество F из A замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуты все пересечения $F \cap X^s$.

Необходимость условий очевидна. Докажем достаточность. Пусть пересечения $F \cap X^s$ замкнуты и пусть для некоторого направления $[a_\alpha]$ из F имеем $L_0[a_\alpha] = a$, т. е. для некоторого многочлена f и подходящих $x_{i\alpha} \in X$ выполнены равенства (1). Обозначая длину f через t , имеем

$$a_\alpha \in X^t \cap F,$$

откуда ввиду предположений замкнутости множества $X^t \cap F$ получаем

$$a \in X^t \cap F.$$

т. е. F замкнуто.

Теорема 6. Пусть A — абстрактная свободная алгебра со свободным порождающим множеством X в некотором примитивном классе $\mathfrak{S}$. Топологизируем каким-либо способом X и введем в A L_0 -операцию таким же путем, как в теореме 5. Тогда эта операция будет однозначной и в L_0 -топологии алгебры A все множества X^s будут замкнутыми.

Пусть, например,

$$L_0[a_\alpha] = a, \quad L_0[a_\alpha] = b$$

для некоторого направления $[a_\alpha]$ из A . Это значит, что для подходящих многочленов f, g и подходящих $x_{i\alpha} \in X$ имеем

$$a_\alpha = f(x_{1\alpha}, \dots, x_{m\alpha}), \quad \lim x_{i\alpha} = x_i, \quad f(x_1, \dots, x_m) = a, \quad (4)$$

$$a_\alpha = g(x_{m+1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}), \quad \lim x_{i\alpha} = x_i, \quad g(x_{m+1}, \dots, x_n) = b. \quad (5)$$

Рассмотрим такой номер α , чтобы для всех $i, j = 1, \dots, n$ из $x_i \neq x_j$ следовало $x_{i\alpha} \neq x_{j\alpha}$. Так как алгебра A — свободная, то все соотношения между порождающими элементами в ней являются тождествами. В частности, тождеством будет и равенство

$$f(x_{1\alpha}, \dots, x_{m\alpha}) = g(x_{m+1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}).$$

Поэтому в нем вместо элементов $x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}$ можно подставить $x_1, \dots, x_n$, так как при этом одинаковые элементы будут замещаться одинаковыми. В результате получим равенство $a = b$, доказывающее однозначность операции L_0 .

Чтобы доказать замкнутость X^s , предположим, что для некоторого направления $[a_\alpha]$ в X^s справедливы равенства (4), где длина многочлена f может быть и больше s . Условия $a_\alpha \in X^s$ означают, что для подходящих многочленов

g_α длины, не превосходящей s ,

$$a_\alpha = g_\alpha(x_{m+1\alpha}, \dots, x_{n_\alpha\alpha}) \quad (x_{j\alpha} \in X, n_\alpha \leq s). \quad (6)$$

Так как основных операций конечное число, то среди многочленов $g_\alpha(y_1, \dots, y_{n_\alpha})$, где $y_1, \dots, y_{n_\alpha}$ — вспомогательные буквы, существует лишь конечное число различных и, значит, существует такое конфинальное поднаправление $[a_{\alpha_\beta}]$, для которого все многочлены $g_{\alpha_\beta}(y_1, \dots, y_n)$ тождественны между собой. Пусть

$$g_{\alpha_\beta}(y_1, \dots, y_n) = g(y_1, \dots, y_n) \quad (n = n_{\alpha_\beta}).$$

Тогда равенства (4), (6) дают соотношения

$$f(x_{1\alpha_\beta}, \dots, x_{m\alpha_\beta}) = g(x_{m+1\alpha_\beta}, \dots, x_{n\alpha_\beta}), \quad (7)$$

являющиеся тождествами в A . Выбирая снова такое $\gamma = \alpha_\beta$, чтобы из $x_i \neq x_j$ следовало $x_{i\gamma} \neq x_{j\gamma}$ ($i, j = 1, \dots, m$), и заменяя в обеих частях тождества (7) аргументы, равные соответственно $x_{1\gamma}, \dots, x_{m\gamma}$, через $x_1, \dots, x_m$, получим соотношение вида

$$a = g(z_1, \dots, z_n) \quad (z_j \in X),$$

показывающее, что a содержится в X^s .

Т е о р е м а 7. Если свободная топологическая алгебра A с порождающим пространством X имеет X_0 -топологию, то подалгебра B , финитно порождаемая каким-либо замкнутым подпространством Y пространства X , замкнута в A и имеет Y_0 -топологию, являясь, таким образом, свободной топологической алгеброй над Y .

Действительно, всякое подмножество F элементов B , замкнутое в B в смысле X_0 -топологии, очевидно, замкнуто и в смысле Y_0 -топологии. Пусть, напротив, F замкнуто в Y_0 -топологии и для некоторого направления $[b_\alpha]$ в F имеем $L[b_\alpha] = c$, где операция L берется в смысле X_0 -топологии. Тогда имеем

$$b_\alpha = f(x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}), \quad \lim x_{i\alpha} = x_i, \quad f(x_1, \dots, x_n) = c \quad (x_i, x_{i\alpha} \in X)$$

и в то же время

$$b_\alpha = \varphi_\alpha(y_{1\alpha}, \dots, y_{m_\alpha\alpha}) \quad (y_{j\alpha} \in Y).$$

Выбираем такое конфинальное поднаправление $[b_\beta]$ из направления $[b_\alpha]$, чтобы для каждого i либо все элементы $x_{i\beta}$ входили в Y , либо ни один из них не входил в Y . Ввиду свободы A равенства

$$f(x_{1\beta}, \dots, x_{n\beta}) = \varphi_\beta(y_{1\beta}, \dots, y_{m_\beta\beta})$$

являются в A тождествами. Поэтому, не нарушая этих равенств, можно все элементы $x_{i\beta}$ в левой части, не содержащиеся в Y , заменить произвольным фиксированным элементом $y \in Y$. Но тогда тем же элементом y можно заменить соответствующие аргументы в левой части равенства $f(x_1, \dots, x_n) = c$, не меняя его правой части. После замены все аргументы левой части будут принадлежать Y , так как незамененные будут равны пределам направлений из Y , принадлежащим Y в силу замкнутости Y в X . Это показывает, что $c \in B$ и $c = L[b_\beta]$, где L берется в смысле Y_0 -топологии. Ввиду Y_0 -замкнутости F отсюда следует $c \in F$, т. е. множество F является X_0 -замкнутым.

§ 5. Алгебры с бикompактным порождающим пространством

Рассмотрим важные случаи, в которых свободная топология заведомо является L_0 -топологией.

Т е о р е м а 8. Пусть топологическая алгебра A финитно порождается элементами своего подмножества X , являющегося объединением цепочки $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$ вложенных друг в друга бикompактных подмножеств. Называя подмножество F из A ω -замкнутым, если замкнуты все пересечения вида $F \cap f(X_i, \dots, X_i)$, где $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольный многочлен, $i = 1, 2, \dots$, введем в A новую топологию. Эта ω -топология будет хаусдорфовой, а все основные операции алгебры A будут в ней непрерывными.

Действительно, поскольку X_i бикompактно, то множество $f(X_i, \dots, X_i)$ также бикompактно, а потому и замкнуто в A . Отсюда следует, что все замкнутые подмножества из A будут ω -замкнуты и, в частности, ω -топология будет хаусдорфовой.

Для доказательства ω -непрерывности основных операций A перенумеруем $f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$ все многочлены и положим

$$Y_m = f_1(X_m, \dots, X_m) \cup \dots \cup f_m(X_m, \dots, X_m) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Ясно, что все Y_m бикompактны, $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots$ и ω -замкнутость произвольного множества F равносильна замкнутости всех пересечений $F \cap Y_m$ ($m = 1, 2, \dots$).

Пусть для некоторого ω -открытого множества W какой-либо основной операции f и некоторых $a_1, \dots, a_n$ из A имеем $f(a_1, \dots, a_n) \in W$. Обозначим через p наименьшее число, для которого $a_1, \dots, a_n$ содержатся в Y_p , и будем строить индуктивно множества

$$U_m(a_1), \dots, U_m(a_n) \quad (m = p, p+1, \dots)$$

со следующими свойствами:

$$1) a_i \in U_m(a_i), \quad U_m(a_i) \subseteq Y_m, \quad U_m(a_i) \text{ открыто в } Y_m;$$

$$2) \overline{U_m(a_i)} \subseteq U_{m+1}(a_i);$$

$$3) f(\overline{U_m(a_1)}, \dots, \overline{U_m(a_n)}) \subseteq W,$$

где черта сверху означает операцию замыкания в заданной топологии A .

Вводя обозначения $W_m = W \cap Y_m$, будем для подходящего q иметь

$$f(Y_p, \dots, Y_p) \subseteq Y_q, \quad f(a_1, \dots, a_n) \in W_q.$$

Поскольку W_q открыто в Y_q , то найдется открытое в A множество V , для которого

$$V \cap Y_q = W_q.$$

Так как $f(a_1, \dots, a_n) \in V$ и в A операция f непрерывна, то найдутся окрестности $V_1, \dots, V_n$ элементов $a_1, \dots, a_n$ в A , для которых

$$f(V_1, \dots, V_n) \subseteq V.$$

Полагая по определению

$$V'_i = V_i \cap Y_p \quad (i = 1, \dots, n),$$

будем иметь

$$f(V'_1, \dots, V'_n) \subseteq V \cap Y_q \subseteq W.$$

Наконец, обозначив через $U_p(a_i)$ окрестность a_i в Y_p , замыкание которой содержится в V'_i , получим исходные множества $U_p(a_1), \dots, U_p(a_n)$, обладающие свойствами 1), 3).

Предположим, что нам уже известны $U_m(a_1), \dots, U_m(a_n)$ для $m \leq s$, обладающие свойствами 1)–3). Будем строить $U_{s+1}(a_i)$, $i = 1, \dots, n$. Обозначим через q целое, для которого

$$f(Y_{1+1}, \dots, Y_{s+1}) \subseteq Y_q,$$

и рассмотрим произвольную систему точек

$$a'_1 \in \overline{U_s(a_1)}, \dots, a'_n \in \overline{U_s(a_n)}.$$

Так как $f(a'_1, \dots, a'_n) \in W_q$, то найдутся открытое множество V , для которого $V \cap Y_q = W_q$, и такие окрестности $V_1, \dots, V_n$ точек $a'_1, \dots, a'_n$ в A , что

$$f(V_1, \dots, V_n) \subseteq V.$$

Полагая

$$V'_i = V_i \cap Y_{s+1},$$

будем иметь

$$f(V'_1, \dots, V'_n) \subseteq W,$$

где $V'_1, \dots, V'_n$ — открытые в Y_{s+1} . Окрестности $V'_1, \dots, V'_n$ зависят от выбора $a'_1, \dots, a'_n$. Фиксируя $a'_1, \dots, a'_{n-1}$ и меняя произвольно a'_n в $\overline{U_s(a_n)}$, видим, что $\overline{U_s(a_n)}$ будет покрыто окрестностями V'_n . Ввиду бикompактности $\overline{U_s(a_n)}$ найдется конечное число окрестностей среди V'_n , покрывающих $\overline{U_s(a_n)}$. Обозначим эти окрестности через $V'_{n1}, \dots, V'_{nr}$ и пусть $V'_{1i}, \dots, V'_{n-1,i}$ — соответствующие окрестности точек $a'_1, \dots, a'_{n-1}$ для V'_{ni} ($i = 1, \dots, r$). Полагая

$$V''_n = \bigcup V'_{ni}, \quad V''_\alpha = \bigcap V'_{\alpha i} \quad (i = 1, \dots, r; \alpha = 1, \dots, n-1),$$

видим, что для каждой системы точек

$$a'_1 \in \overline{U_s(a_1)}, \dots, a'_{n-1} \in \overline{U_s(a_{n-1})}$$

существуют множества $V''_1, \dots, V''_n$, открытые в Y_{s+1} , для которых

$$f(V''_1, \dots, V''_n) \subseteq W, \quad \overline{U_s(a_n)} \subseteq V''_n, \quad a'_\alpha \in V''_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, n-1).$$

Фиксируя $a'_1, \dots, a'_{n-2}$ и произвольно меняя a'_{n-1} в $\overline{U_s(a_{n-1})}$, получим систему открытых в Y_{s+1} множеств V''_{n-1} , покрывающих бикompактное множество $\overline{U_s(a_{n-1})}$. Выбирая из этих множеств конечную систему $V''_{n-11}, \dots, V''_{n-1t}$, покрывающую $\overline{U_s(a_{n-1})}$, обозначая через $V''_{1\alpha}, \dots, V''_{n-2\alpha}$ соответствующие окрестности точек $a'_1, \dots, a'_{n-2}$ в Y_{s+1} для $V''_{n-1\alpha}$ и полагая

$$V''_{n-1} = \bigcup V''_{n-1\alpha}, \quad V''_i = \bigcap V''_{i\alpha} \quad (i \neq n-1; \alpha = 1, \dots, t),$$

видим, что для каждой системы точек

$$a'_1 \in \overline{U_s(a_1)}, \dots, a'_{n-2} \in \overline{U_s(a_{n-2})}$$

существуют открытые в Y_{s+1} множества $V_1''', \dots, V_n'''$, для которых

$$f(V_1''', \dots, V_n''') \subseteq W, \quad \overline{U_s(a_\lambda)} \subseteq V_\lambda'', \quad a_i' \in V_i''' \quad (i = 1, \dots, n-2; \lambda = n-1, n).$$

Продолжая этот процесс, найдем открытые в Y_{s+1} множества $V_1^{(n+1)}, \dots, V_n^{(n+1)}$, содержащие соответственно $\overline{U_s(a_1)}, \dots, \overline{U_s(a_n)}$ и такие, что

$$f(V_1^{(n+1)}, \dots, V_n^{(n+1)}) \subseteq W. \quad (8)$$

Поскольку бикompактное пространство Y_{s+1} нормально, то найдутся открытые в Y_{s+1} множества $U_{s+1}(a_1), \dots, U_{s+1}(a_n)$, содержащие соответственно множества $\overline{U_s(a_i)}$ и такие, что

$$\overline{U_{s+1}(a_i)} \subseteq V_i^{(n+1)} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ввиду (8) множества $U_{s+1}(a_i)$ удовлетворяют требованиям 1)–3) и, следовательно, существование системы множеств $U_m(a_i)$ ($m = p, p+1, \dots$) со свойствами 1)–3) доказано.

Положим

$$U(a_i) = \bigcup_m U_m(a_i) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Из условий 2), 3) следует, что

$$f(U(a_1), \dots, U(a_n)) \subseteq W. \quad (9)$$

С другой стороны, имеем

$$U(a_i) \cap Y_s = \bigcup_m (U_m(a_i) \cap Y_s) = U_s(a_i) \cup (U_{s+1}(a_i) \cap Y_s) \cup \dots$$

Так как каждое слагаемое $U_{s+l}(a_i) \cap Y_s$, являясь пересечением Y_s с открытым в Y_{s+l} множеством $U_{s+l}(a_i)$, открыто в Y_s , то $U(a_i) \cap Y_s$ открыто в Y_s и $U(a_i)$ является ω -открытым. Поэтому из (9) следует, что операция f является непрерывной в ω -топологии.

Пусть, наконец, ω -топология на X совпадает с топологией X как подпространства заданной топологической алгебры A . Покажем, что в таком случае ω -топология совпадает с X_0 -топологией A . Поскольку X_0 -топология содержит всякую допустимую топологию A относительно X , то X_0 -топология содержит исходную топологию A и поэтому является хаусдорфовой. По условию в X_0 -топологии множества X_i , а вместе с ними и множества Y_i бикompактны, а потому и замкнуты. Вследствие этого всякое X_0 -замкнутое множество будет и ω -замкнутым, т. е. X_0 -топология содержится в ω -топологии. Обратное включение уже было установлено и потому X_0 -топология в рассматриваемом случае совпадает с ω -топологией.

С л е д с т в и е 1. Если топологическая алгебра A порождается финитно элементами своего бикompактного подпространства X , то свободной топологией A относительно X является ее X_0 -топология.

Для доказательства достаточно в теореме 8 положить $X = X_1 = X_2 = \dots$. Тогда можно считать, что $Y_i = X^i$, $i = 1, 2, \dots$. В результате ω -топология A будет совпадать с X_0 -топологией.

С л е д с т в и е 2. Если свободная топологическая алгебра A какого-либо примитивного класса $\mathfrak{S}$ над локально компактным со 2-й аксиомой счетности пространством X топологически содержит X и алгебраически свободна над X , то топология A является ее X_0 -топологией.

В самом деле, пусть $U_1, U_2, \dots$ есть открытый базис X , замыкания $\bar{U}_i$ множеств которого компактны. Положим

$$V_m = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m, \quad X_m = \bar{V}_m \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Все X_m бикомпактны, $X = \bigcup X_m$ и множество $F \subseteq X$ тогда и только тогда замкнуто в X , когда замкнуты все пересечения $F \cap X_m$ ($m = 1, 2, \dots$). Покажем, что

$$f(X_m, \dots, X_m) \cap F \subseteq X_m \cap F. \quad (10)$$

Действительно, в противном случае найдется элемент $x \in X$, для которого

$$x = f(x_1, \dots, x_n), \quad x \notin X_m, \quad x_1, \dots, x_n \in X_m. \quad (11)$$

Так как A алгебраически свободна над X , то соотношение (11) является тождеством и потому в него, не меняя правой части, можно вместо x подставить любой элемент X , т. е. X в этом случае состоит всего из одного элемента, что противоречит условию $x \notin X_m$. Соотношение (10) теперь показывает, что F является ω -замкнутым тогда и только тогда, когда F замкнуто в X .

Укажем еще одно предложение, непосредственно вытекающее из следствия 1.

Т е о р е м а 9. *Пространство топологической алгебры A , определяемой бикомпактным порождающим пространством X и произвольной системой определяющих соотношений, нормально.*

Согласно определению топология алгебры A есть свободная топология относительно канонического образа X^σ в ней пространства X . Но пространство X бикомпактно, поэтому и образ его X^σ также бикомпактен. Согласно следствию 1 топология алгебры A есть X_0^σ -топология. Это означает, что множество $F \subseteq A$ тогда и только тогда замкнуто, когда замкнуты пересечения $F \cap (X^\sigma)^m$ ($m = 1, 2, \dots$). Иными словами, это значит, что пространство A есть свободное объединение возрастающей цепочки топологических пространств $X^{\sigma 1} \subseteq X^{\sigma 2} \subseteq \dots$, из которых каждое замкнуто в последующем, причем все подпространства $X^{\sigma m}$ бикомпактны, а потому и нормальны. Однако хорошо известно (см. [5, стр. 302]), что свободное объединение возрастающей цепочки нормальных пространств нормально. Поэтому алгебра A нормальна.

§ 6. Простейшие свободные топологические алгебры

Тождество вида $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$ условимся называть однородным, если каждая из букв x_i участвует в записи каждого многочлена f, g один и только один раз. Примерами примитивных классов алгебр с однородными определяющими тождествами могут служить абсолютно свободный класс, для которого система тождеств пустая, класс полугрупп с одним тождеством $x(yz) = (xy)z$, класс коммутативных полугрупп с двумя тождествами $x(yz) = (xy)z$, $xy = yx$ и т. п. Легко видеть, что в свободной алгебре с однородными тождествами всякое тождество с повторяющимися аргументами может быть получено из однородного тождества соответствующим отождествлением аргументов.

Т е о р е м а 10. *Свободная топологическая алгебра A с однородными определяющими тождествами над топологическим пространством X является алгебраически свободной над X , и топология A есть X_0 -топология. Подалгебра B алгебры A , финитно порожденная элементами произвольного пространства Y из X , является топологической свободной алгеброй над Y .]*

Пусть A — абстрактная свободная алгебра над X . В соответствии с теоремой 6 вводим в A X_0 -топологию. Нужно доказать, что эта топология хаусдорфова и что основные операции алгебры A непрерывны в этой топологии. Докажем сначала, что множества вида $\varphi(U_1, \dots, U_m)$, где φ — какой-либо многочлен, $U_1, \dots, U_m$ — открытые подмножества пространства X , являются открытыми в X_0 -топологии. Для этого воспользуемся первоначальным определением X_0 -открытых множеств, указанным в § 4, и предположим, что $\psi(x_1, \dots, x_n) \in \varphi(U_1, \dots, U_m)$, откуда следует

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \quad (x_{n+i} \in U_i). \quad (12)$$

Согласно сделанному выше замечанию найдется такое однородное тождество

$$f(z_1, \dots, z_s) = g(z_1, \dots, z_s),$$

из которого тождество (12) можно получить путем подстановки вместо $z_1, \dots, z_s$ соответствующих элементов $x_1, \dots, x_n$. Пусть, например, x_i подставляется вместо z_{m_i} , $z_{m_i+1}, \dots, z_{m_{i+1}-1}$ и

$$x_{n+m_i+\lambda} = x_i \quad (i = 1, \dots, n; m_1 = 1; \lambda = 0, 1, \dots, m_{i+1} - m_i - 1).$$

Полагая

$$V_i = U_{m_i} \cap \dots \cap U_{m_{i+1}-1},$$

будем иметь $x_i \in V_i$, V_i — открытые в X и

$$\psi(V_1, \dots, V_n) \subset f(V_1, \dots, V_n) = g(V_1, \dots, V_n) \subset \varphi(U_1, \dots, U_m),$$

а это и означает, что $\varphi(U_1, \dots, U_m)$ является X_0 -открытым. Рассмотрим теперь какие-либо два различных элемента

$$a = \varphi(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m), \quad b = \psi(x_1, \dots, x_k, x_{m+1}, \dots, x_n)$$

из A , где $x_1, \dots, x_n$ различны, но $x_1, \dots, x_k$ могут и отсутствовать. Обозначим через $U_1, \dots, U_n$ попарно не пересекающиеся окрестности элементов $x_1, \dots, x_n$ в пространстве X . Тогда $P = \varphi(U_1, \dots, U_m)$ и $Q = \psi(U_1, \dots, U_n)$ будут непересекающимися окрестностями элементов a, b . Действительно, если P, Q имеют общий элемент c , то $c = \varphi(u_1, \dots, u_m)$ ($u_i \in U_i$) и $c = \psi(u_1, \dots, u_n)$, откуда получаем

$$\varphi(u_1, \dots, u_m) = \psi(u_1, \dots, u_n). \quad (13)$$

Алгебра A свободна, поэтому (13) — тождество в A и вместо $u_1, \dots, u_n$ можно подставить соответственно $x_1, \dots, x_n$. Полученное в результате этого равенство

$$\varphi(x, \dots, x_m) = \psi(x_1, \dots, x_n)$$

будет противоречить условию $a \neq b$. Следовательно, $P \cap Q = \emptyset$ и пространство A хаусдорфово. Наконец, пусть для некоторых $a_1, \dots, a_m$ из A и основной операции φ будет $a = \varphi(a_1, \dots, a_m)$ и пусть U — какое-либо X_0 -открытое подмножество, содержащее a . Полагая $a_i = f_i(x_{i1}, \dots, x_{in})$, будем иметь

$$a = \varphi(f_1, \dots, f_m) = F(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn}) \quad (x_{ij} \in X).$$

Из X_0 -открытости U следует, что для подходящих открытых в пространстве X множеств $U_{11}, \dots, U_{mn}$, содержащих соответственно точки $x_{11}, \dots$

$\dots, x_{mn}$, будем иметь $F(U_{11}, \dots, U_{mn}) \subset U$ или $\varphi(U_1, \dots, U_m) \subset U$, где множества $U_i = f_i(U_{i1}, \dots, U_{in})$ по доказанному являются окрестностями элементов $a_1, \dots, a_m$ в алгебре A . Таким образом, непрерывность операций доказана, а вместе с нею и первые два утверждения теоремы. Третье утверждение непосредственно вытекает из соотношения

$$f(U_1, \dots, U_n) \cap B = f(U_1 \cap Y, \dots, U_n \cap Y),$$

где f — произвольный многочлен, а $U_1, \dots, U_n$ — любые подмножества пространства X .

Более тонкий пример доставляют свободные топологические полурешетки, т. е. алгебры с одной бинарной операцией сложения и тремя определяющими тождествами:

$$x + x = x, \quad x + y = y + x, \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Алгебраически свободная полурешетка A с порождающим множеством X реализуется как совокупность всех непустых конечных подмножеств из X , в качестве операции сложения в которой принята обычная операция объединений подмножеств. Поэтому задача сводится к топологизации совокупности всех непустых конечных подмножеств топологического пространства X так, чтобы операция объединения подмножеств была непрерывной и чтобы топология A была согласована с топологией пространства X .

Одной из таких топологизаций является «обычная» топологизация, в которой окрестностями множества, состоящего из элементов $x_1, \dots, x_m$, являются совокупности объединений непустых конечных подмножеств каких-либо фиксированных окрестностей $U_1, \dots, U_m$ точек $x_1, \dots, x_m$ в пространстве X . В силу замечания 1 § 1 отсюда следует, что свободная топологическая полурешетка, порождаемая произвольным топологическим пространством X , содержит X и является алгебраически свободной над X .

Указанная «обычная» топология полурешетки в общем случае не будет ее свободной топологией. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить «обычную» топологию с X_0 -топологией. Действительно, в рассматриваемом случае всякий многочлен от $x_1, \dots, x_m$ имеет вид

$$k_1 x_1 + \dots + k_m x_m,$$

где

$$kx = x + x + \dots + x, \quad x_i \in X.$$

Поэтому согласно § 4 совокупность U из A тогда и только тогда X_0 -открыта в A , когда для каждого множества $u = \{x_1, \dots, x_m\}$, принадлежащего U , и каждого натурального k существуют такие окрестности $U_1, \dots, U_m$ точек $x_1, \dots, x_m$ в X , что любое конечное множество, содержащее не менее k точек из каждой окрестности U_i , принадлежит U .

Пусть X есть совокупность чисел $1, 2, \dots, n, \dots, \omega$ с ее естественной топологией. Пространство X бикompактно и потому свободной топологией полурешетки A будет ее X_0 -топология. Обозначим через U совокупность всех конечных подмножеств A , содержащих ω , и всех тех конечных подмножеств $\{x_1, \dots, x_m\}$, не содержащих ω , элементы которых удовлетворяют условию

$$x_1, \dots, x_m < 2^m.$$

Легко видеть, что U будет X_0 -открытой совокупностью, содержащей ω . В то же время U не содержит ни одной «обычной» окрестности точки ω в A .

§ 7. β -классы. Свободные топологические группы

Примитивный класс алгебр, характеризующийся набором тождеств $\mathfrak{S}$, условимся называть β -классом, если каждая свободная топологическая алгебра этого класса над произвольным бикомпактным пространством X содержит топологически X и является алгебраически свободной над X .

Свободная топологическая алгебра A β -класса, порождаемая вполне регулярным пространством X , содержит X в качестве замкнутого подмножества и является алгебраически свободной над X . Подалгебра B , порождаемая финитно в A элементами замкнутого подмножества $Y \subset X$, является замкнутой в A .

Для доказательства включим X в бикомпактное пространство Z и допустим, что $Y = Z \cap F$, где F — замкнутое подмножество из Z . По предположению свободная топологическая алгебра D над Z рассматриваемого класса содержит Z и алгебраически свободна над Z .

Обозначим через A_1, B_1, C подалгебры алгебры D , порождаемые финитно элементами соответственно множеств X, Y, F . Так как D алгебраически свободна над Z , то

$$A_1 \cap Z = X, \quad A_1 \cap C = B_1. \quad (14)$$

Но Z замкнуто в D и согласно теореме 7 и следствию 1 теоремы 8 подалгебра C замкнута в D . Поэтому из соотношений (14) следует, что множество X замкнуто в алгебре A_1 и B_1 есть замкнутая подалгебра алгебры A_1 . Кроме того, A_1 и B_1 являются алгебраически свободными соответственно над X и Y как подалгебры алгебраически свободной алгебры D (см. [11]). При переходе от построенной топологии алгебры A_1 к свободной топологии A_1 относительно X все замкнутые множества в A_1 останутся замкнутыми и в свободной топологии A_1 , что и требовалось доказать.

Гомоморфное отображение алгебры A в алгебру B называется представлением A в B . Система представлений ψ_i алгебры A в алгебрах B_i называется полной, если для каждых двух различных элементов алгебры A найдется представление ψ_i , при котором эти элементы имеют различные образы в B_i . Напомним еще, что топологическое пространство A называется линейно связным, если для каждых двух его точек a, b найдется непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в A , при котором 1 отобразится в b , а 0 — в a .

Л е м м а. Для того чтобы некоторый примитивный класс был β -классом, достаточно, чтобы абстрактные свободные алгебры этого класса с конечным числом порождающих элементов допускали полную систему представлений в топологических линейно связных алгебрах.

Действительно, пусть X — произвольное бикомпактное пространство, A — свободная топологическая алгебра над X рассматриваемого класса $\mathfrak{S}$. Возьмем какие-нибудь многочлены f, g от элементов $x_1, \dots, x_m$ из X , значения которых различны в абстрактной свободной алгебре S класса $\mathfrak{S}$ с порождающими $x_1, \dots, x_m$. Пусть ψ — представление алгебры S в подходящей линейно связной алгебре B , при котором $f^\psi \neq g^\psi$. Выберем в B вспомогательную точку b , отличную от $x_1^\psi, \dots, x_m^\psi$, и обозначим через ψ_i непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в B , переводящее числа 0, 1 соответственно в элементы b и x_i^ψ ($i = 1, \dots, m$). Отделяем теперь в пространстве X точки $x_1, \dots, x_m$ непересекающимися окрестностями $U_1, \dots, U_m$ и строим непрерывные функции $\varphi_i(x)$, отображающие X на отрезок $[0, 1]$ так, что дополнение U_i в X отображается в 0, а точка x_i — в 1. Полагая, далее, $\varphi(x) =$

$= \psi_i [\varphi_i(x)]$ для $x \in U_i$ и $\varphi(x) = b$ для $x \in \bigcup U_i$, получим непрерывное отображение X в алгебру B , переводящее точки $x_1, \dots, x_m$ соответственно в элементы $x_1^\psi, \dots, x_m^\psi$. Так как A топологически свободна над X , то отображение φ продолжаемо до гомоморфизма A в B . Но

$$f^\varphi = f(x_1^\psi, \dots, x_m^\psi) = f^\psi, \quad g^\varphi = g^\psi,$$

поэтому и в алгебре A будет $f \neq g$, т. е. A алгебраически свободна над X . Утверждение, что A топологически содержит X , является непосредственным следствием замечания 2 из § 1.

Переходя к приложениям, заметим прежде всего, что из доказанной леммы сразу вытекает центральный результат теории Маркова: класс групп является β -классом.

Действительно, хорошо известно, что группа всех неособенных матриц 2-го порядка над полем комплексных чисел является линейно связной и содержит свободные подгруппы со счетным числом порождающих. Согласно лемме этого достаточно, чтобы класс групп был β -классом.

Рассмотрим еще в качестве примера класс $\mathfrak{N}_s$ нильпотентных групп данной ступени s нильпотентности. Это означает, что рассматриваются группы, элементы которых удовлетворяют тождествам вида

$$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_{s+1} = e, \quad (15)$$

где $x \circ y = x^{-1}y^{-1}xy$ и в «произведении» (15) скобки можно расставить произвольно. Класс $\mathfrak{N}_1$ является, очевидно, просто классом абелевых групп.

Т е о р е м а 11. *Нильпотентные группы данной ступени нильпотентности образуют β -класс. Члены нижнего центрального ряда $G \supset G^{(2)} \supset G^{(3)} \supset \dots$ свободной топологической группы G над вполне регулярным пространством X замкнуты в G и фактор-группа $G/G^{(s+1)}$ изоморфна свободной нильпотентной топологической группе ступени s над X .*

В самом деле, хорошо известно, что свободные нильпотентные группы с конечным числом порождающих являются группами без кручения и потому включаемы в нильпотентные группы Ли, допускающие изоморфные представления матрицами [9]. Таким образом, свободные нильпотентные группы с конечным числом порождающих допускают изоморфное представление в надлежащей группе матриц. Согласно лемме отсюда следует, что нильпотентные группы данной ступени образуют β -класс. Второе утверждение теоремы 11 непосредственно вытекает из следствия теоремы 3, так как на группах конгруэнтности перестановочны и непрерывные полные конгруэнтности отвечают разбиениям на смежные классы по замкнутым нормальным делителям.

§ 8. Свободные топологические кольца

Мы будем рассматривать кольца необязательно ассоциативные. Кольцо R называется кольцом нулевой характеристики, если из равенства вида $tx = ty$, где t — положительное целое число, $x, y \in R$, следует $x = y$. Класс колец, элементы которых кроме кольцевых аксиом удовлетворяют еще некоторой фиксированной системе тождеств $\mathfrak{S}$, называется примитивным классом характеристики нуль, если характеристику нуль имеет свободное кольцо этого класса со счетным числом порождающих элементов, а следовательно, и всякое свободное кольцо класса $\mathfrak{S}$.

Т е о р е м а 12. *Каждый примитивный класс колец нулевой характеристики является β -классом.*

Пусть R — свободное кольцо данного класса с конечным числом порождающих элементов $x_1, \dots, x_m$. По условию R имеет характеристику нуль и потому согласно [10] все тождества, характеризующие данный класс, могут быть приведены к полилинейной форме. Сверх того, из равенства нулю характеристики R следует (см. [16]), что R можно погрузить в качестве подкольца в линейную алгебру над полем рациональных чисел. Это поле можно расширить до поля вещественных чисел и тем самым получить погружение кольца R в алгебру A над полем вещественных чисел. Ввиду полилинейности тождеств, определяющих R , все они будут иметь место и в алгебре A , которая будет, таким образом, свободной линейной алгеброй над полем вещественных чисел в классе $\mathfrak{S}$. Обозначим через I_n совокупность всех элементов A , имеющих степень, большую n относительно порождающих $x_1, \dots, x_m$. Согласно [10] I_n является идеалом в A . Алгебра вычетов A/I_n есть линейная алгебра конечной размерности над полем вещественных чисел и потому относительно ее естественной топологии является r -мерным евклидовым пространством. Таким образом, мы получили линейно связную топологическую алгебру A/I_n и, естественно, гомоморфное отображение ψ_n алгебры A , а вместе с нею и кольца R в A/I_n . Любые элементы кольца R , степень которых относительно порождающих не выше n , имеют различные образы в A/I_n . Поэтому представления ψ_n образуют полную систему. В силу леммы отсюда следует, что рассматриваемый класс колец является β -классом.

В качестве частного случая теоремы 12 получаем, что β -классами являются классы всех (неассоциативных) колец, всех ассоциативных колец, всех колец Ли, коммутативных колец и т. п.

Среди колец ненулевой характеристики важное значение имеют кольца Буля, т. е. ассоциативные кольца с единицей, в которых имеет место тождество $x^2 = x$. Из этого тождества, как известно (см. [2, стр. 217]), следует тождество $2x = 0$, показывающее, что кольца Буля имеют характеристику 2. Согласно теореме Стона, класс колец Буля рационально эквивалентен * классу алгебр Буля, т. е. алгебр с тремя операциями $+$, $\cdot$, $'$, являющихся полурешетками относительно сложения и умножения и связанных тождествами

$$\begin{aligned} x'' &= x, & x(y+z) &= xy+xz, & x+xy &= x, & (xy)' &= x' + y', \\ x+yy' &= x. \end{aligned}$$

Ввиду этого вместо свободных топологических колец Буля можно рассматривать свободные топологические алгебры Буля.

Класс алгебр Буля, а следовательно, и класс колец Буля являются β -классами.

В самом деле, из теории представлений алгебр Буля (см. [2, стр. 199]) известно, что всякая абстрактная алгебра Буля допускает полную систему гомоморфизмов на алгебру с двумя элементами 0, 1, содержащуюся в любой алгебре Буля. Поэтому для применения леммы достаточно указать хотя бы одну топологическую линейно связную алгебру Буля. Но такая алгебра $\mathfrak{B}$ хорошо известна. Элементами ее являются объединения конечного числа полусегментов вида $(a, b]$ ($0 \leq a < b \leq 1$), а также пустое множество. Опера-

* Рациональная эквивалентность означает, что в кольце Буля можно определить производные операции, относительно которых кольцо Буля становится алгеброй Буля и через которые первоначальные кольцевые операции могут быть снова выражены в качестве производных с аналогичными свойствами.

ций $+$, $\cdot$, $'$ в этой алгебре совпадают соответственно с объединением, пересечением и дополнением в полусегменте $(0, 1]$. Расстоянием $\rho(P, Q)$ между элементами P, Q алгебры $\mathfrak{B}$ называется выражение

$$\text{mes}(P \cup Q) - \text{mes}(P \cap Q).$$

Соотношения (см. [2, стр. 119])

$$\begin{aligned} \rho(P \cup Q, S \cup T) + \rho(P \cap Q, S \cap T) &\leq \rho(P, S) + \rho(Q, T), \\ \rho(P', S') &= \rho(P, S) \end{aligned}$$

показывают, что в топологии, определяемой указанной метрикой, алгебра $\mathfrak{B}$ становится топологической и, как легко проверить, линейно связной. Тем самым утверждение доказано.

Алгебра $\mathfrak{B}$ относительно кольцевого сложения, определяемого формулой

$$P \oplus Q = P'Q + PQ',$$

является абелевой группой, все элементы которой имеют порядок 2. Эта группа линейно связна и представляет собой простейший пример связных топологических периодических групп, общий прием конструирования которых был рассмотрен А. А. Марковым [14].

В заключение отметим несколько вопросов, решение которых, по-видимому, представляло бы интерес для развития теории свободных топологических алгебр.

В § 4 была построена трансфинитная последовательность топологий X_λ ($\lambda \leq \tau$). Спрашивается, любое ли трансфинитное τ фактически может встретиться при разных A и разных X ? В ряде случаев выше было установлено равенство $\tau = 0$. Если рассматриваются свободные топологические группы, а в качестве X берутся не вполне регулярные пространства, то $\tau \neq 0$, так как все подмножества группового пространства вполне регулярны. Какие значения может иметь τ для свободных групп над вполне регулярными пространствами?

Другая серия вопросов связана с алгебраической структурой свободных топологических алгебр. Будет ли свободная топологическая группа над регулярным пространством алгебраически свободной? Можно ли указать какие-либо необходимые чисто алгебраические признаки β -классов? Отметим также вопрос о явном указании свободной топологии, тесно связанный, конечно, с вопросом о возможных значениях τ , но к нему не сводящийся.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров. О понятии пространства в топологии.— Успехи мат. наук, 1948, 2, № 2, 5—57.
2. Г. Биркгоф. Теория структур. М., ИЛ, 1952.
3. G. Birkhoff. On the structure of abstract algebras.— Proc. Cambridge Philos. Soc. 1935, 31, 433—454.
4. G. Birkhoff. Moore — Smith convergence in general topology.— Ann. Math., 1937, 38, 39—56.
5. М. И. Граев. Свободные топологические группы.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1948, 12, 279—324.
6. М. И. Граев. О свободных произведениях топологических групп.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1950, 14, 343—354.
7. W. Härmisch. Über die Topologie in der Algebra.— Math. Z., 1954, 60, N 4, 458—487.

8. *Sh. Kakutani*. Free topological groups and infinite direct product topological groups.— Proc. Imper. Acad. Tokyo, 1944, 20, 595—598.
9. *А. И. Мальцев*. Об одном классе однородных пространств.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, 13, № 1, 9—32.
10. *А. И. Мальцев*. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями.— Мат. сб., 1950, 26, № 1, 19—33.
11. *А. И. Мальцев*. Об одном классе алгебраических систем.— Успехи мат. наук, 1953, 8, № 1, 165—171.
12. *А. И. Мальцев*. К общей теории алгебраических систем.— Мат. сб., 1954, 35, № 1, 3—20.
13. *А. А. Марков*. О свободных топологических группах.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1945, 9, 3—64.
14. *А. А. Марков*. О существовании периодических связных топологических групп.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1944, 8, 225—232.
15. *T. Nakayama*. Note on free topological groups.— Proc. Imper. Acad. Tokyo, 1943, 19, 471—475.
16. *Л. Я. Окунев*. Кольцо как алгебра относительно тела.— Мат. сб., 1933, 40, 410—424.
17. *Г. С. Чогошвили*. О пространствах сходимости.— Мат. сб., 1941, 9, № 2, 377—381.
18. *Н. А. Шанин*. О погружениях в степень топологического пространства.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1944, 8, 233—242.
19. *R. Sikorski*. Products of abstract algebras.— Fundam. math., 1952, 39, 211—228.



Слово *алгебра* далее употребляется в смысле *алгебраической системы*, т. е. в смысле произвольного множества A элементов, снабженного некоторой системой операций $\varphi_1, \dots, \varphi_s$, занумерованных в определенном порядке и называемых *основными операциями алгебры*. Алгебра A будет называться *финитно аппроксимируемой*, если для любых двух различных элементов a, b из A существует гомоморфизм σ алгебры A в конечную алгебру, при котором образы a^σ, b^σ элементов a, b различны.

Понятие финитной аппроксимируемости оказалось важным прежде всего в теории компактных вполне несвязных топологических групп (Л. С. Понтрягин [16]). С другой стороны, в работе автора [8] была доказана финитная аппроксимируемость матричных групп с конечным числом порождающих, а тем самым и произвольных свободных групп и свободных произведений финитно аппроксимируемых групп. Финитная аппроксимируемость свободных групп была позже независимо доказана К. Ивасавой [4]. Финитная аппроксимируемость разрешимых групп с условием максимальности для подгрупп установлена К. Гиршем [2]. Наконец, недавно К. Грюнберг [3] обнаружил финитную аппроксимируемость свободных разрешимых групп, значительного класса групп, аналогичных свободным разрешимым, а также определенных видов фактор-групп свободных произведений аппроксимируемых групп.

Рассматривая вместо гомоморфных отображений на конечные алгебры гомоморфизмы в алгебры какого-либо другого класса K , приходим к определению K -аппроксимируемости. Примером аппроксимационной теоремы может служить теорема Магнуса об аппроксимируемости свободной группы нильпотентными группами. Общий вопрос об аппроксимируемости свободных произведений групп нильпотентными группами и о приведении свободных алгебр нильпотентными алгебрами был рассмотрен в статьях [10, 12]. Некоторые замечания о K -аппроксимируемости групп для других классов K содержатся в упоминавшейся статье К. Грюнберга.

По аналогии с финитной аппроксимируемостью условимся говорить, что подалгебра B в алгебре A финитно отделима от элемента $a \in B$, если существует гомоморфизм τ алгебры A в некоторую конечную алгебру, при котором $a^\tau \in B$. Алгебра A , каждая подалгебра которой отделима от всех не входящих в нее элементов, будет называться *финитно отделимой алгеброй*. При достаточно общих предположениях легко показывается, что финитная отделимость является более сильным свойством, чем финитная аппроксимируемость. В настоящей статье подробно изучается строение разрешимых групп, обладающих свойством финитной отделимости. В частности, оказывается, что разрешимые группы с обрывом возрастающих цепочек подгрупп

* Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1958, 18, № 5, 49—60.

финитно отделимы, что усиливает цитированную выше теорему Гирша о финитной аппроксимируемости таких групп.

В п. 7 нами показывается, что в классах алгебр, обладающих свойством финитной отделимости, известная алгоритмическая задача о вхождении элемента в подалгебру имеет положительное решение. Тем самым доказывается существование алгоритма для решения вопроса о вхождении элемента в подгруппу для нильпотентных групп данной ступени нильпотентности.

В п. 1 указывается несколько новых случаев финитной аппроксимируемости групп и подгрупп, а в п. 6 свойство финитной отделимости истолковывается с точки зрения топологии, естественно появляющейся в финитно, аппроксимируемых алгебрах.

1. Выше были перечислены известные в литературе достаточные признаки финитной аппроксимируемости отдельных классов групп. Здесь мы добавим несколько замечаний по поводу задачи нахождения классов финитно аппроксимируемых групп и подгрупп.

Прежде всего условия аппроксимируемости абелевых групп можно формулировать следующим образом: *для финитной аппроксимируемости абелевой группы G необходимо и достаточно, чтобы G не содержало полных элементов, т. е. таких элементов $a \neq 1$, для которых уравнение $x^n = a$ разрешимо для любых натуральных n .*

В самом деле, если $x^n = a$ не разрешимо в G , то $a \in G^n$, где через G^n обозначена подгруппа, порожденная n -ми степенями всех элементов G . Все элементы фактор-группы G/G^n имеют ограниченные порядки, и потому G/G^n есть финитное прямое произведение циклических. Но прямое произведение циклических финитно аппроксимируемо. Поэтому найдется нормальный делитель N/G^n конечного индекса, для которого $a \in N$, т. е. G аппроксимируема.

Если же для некоторого $a \neq 1$ упомянутое уравнение разрешимо в G при любых натуральных n , то любой нормальный делитель конечного индекса в G содержит a и потому G не аппроксимируема.

Указанный признак необходим для аппроксимируемости любой группы. Однако пример, построенный далее в п. 4, показывает, что этот признак перестает быть достаточным даже для метабелевых групп*.

Довольно общие достаточные признаки финитной аппроксимируемости разрешимых групп конечного приведенного ранга будут указаны далее.

Не меняя почти рассуждений Ф. Холла, указанных в статье [3], приходим к следующей теореме:

Т е о р е м а 1. *Полупрямое произведение аппроксимируемой подгруппы на аппроксимируемый нормальный делитель с конечным числом порождающих является финитно аппроксимируемой группой.*

Напомним, что группа G называется полупрямым произведением подгруппы D на нормальный делитель H , если $G = DH$, $D \cap H = 1$. Отделимость элемента $a \in G$, $a \neq 1$ от 1 в случае $a \in H$ непосредственно следует из условий теоремы. Пусть $a \in H$. По условию в H найдется нормальный делитель M конечного индекса, не содержащий a . Обозначим через $f_\alpha(x_1, \dots, x_n) = 1$ всевозможные тождества, имеющие место в фактор-группе H/M , где n есть порядок H/M , и пусть N есть подгруппа в H , порожденная элементами вида $f_\alpha(h_1, \dots, h_n)$, где $h_1, \dots, h_n$ независимо пробегают всю группу H . Согласно Б. Нейману, N имеет конечный индекс в H . Сверх

* Т. е. для двуступенно нильпотентных групп.— *Прим. ред.*

того, N есть нормальный делитель первоначальной группы G , $N \subseteq M$, и потому $a \in N$. Рассмотрим фактор-группу $G = G/N$ и в ней образы D_1, H_1 соответственно подгрупп D, H . Имеем $G_1 = D_1 H_1$, $D \cap H = 1$, где H_1 — конечный нормальный делитель G_1 . Обозначим через R_1 совокупность элементов из D_1 , перестановочных с каждым элементом H_1 . Так как H_1 конечна, то R_1 есть в D_1 нормальный делитель конечного индекса. Поэтому конечный индекс в G_1 имеет подгруппа $R_1 H_1$. Поскольку $R_1 H_1 = H_1 R_1$, $R_1 \cap H_1 = 1$, то $R_1 H_1$ есть прямое произведение аппроксимируемых групп R_1, H_1 и потому само аппроксимируемо. Вместе с ним будет аппроксимируемо и его конечное расширение G_1 , что и требовалось.

Из теоремы 1 следует, например, финитная аппроксимируемость групп, имеющих конечный нормальный ряд, факторы которого являются конечными, бесконечными циклическими или свободными группами с конечным числом порождающих.

Т е о р е м а 2. *Коммутативные полугруппы с конечным числом порождающих элементов являются финитно аппроксимируемыми.*

Рассмотрим лиевую полугрупповую алгебру для заданной полугруппы, например над полем рациональных чисел. Согласно [9] эта алгебра допускает изоморфное представление матрицами. Поэтому изоморфно представимой матрицами над некоторым полем оказывается и первоначально заданная полугруппа. В [8] доказано, что всякая матричная группа с конечным числом порождающих финитно аппроксимируема. Те же рассуждения показывают, что финитно аппроксимируемыми являются и матричные полугруппы с конечным числом порождающих. Поэтому заданная полугруппа финитно аппроксимируема.

Наконец, рассмотрим какой-либо примитивный класс L неассоциативных колец, характеризующийся некоторой системой полилинейных тождеств. В работе [12] показано, что свободные линейные алгебры в классах, характеризующихся полилинейными тождествами, аппроксимируемы нильпотентными линейными алгебрами. Доказательство этого предложения годится и для колец. Поэтому L -свободные кольца являются нильпотентно аппроксимируемыми.

С другой стороны, в п. 5 будет показано, что все нильпотентные кольца, обладающие конечной системой порождающих, финитно аппроксимируемы. Мы пришли к выводу, что в классах колец, характеризующихся полилинейными тождествами, свободные кольца финитно аппроксимируемы.

В частности, финитно аппроксимируемыми являются свободные ассоциативные, свободные лиевые, свободные альтернативные кольца и т. д.

2. Пусть K — некоторый класс абстрактных алгебр. Алгебра A будет называться алгеброй с K -отделимыми подалгебрами, если для каждого $a \in A$ и каждой не содержащей a подалгебры B алгебры A существует гомоморфизм σ алгебры A в подходящую K -алгебру, при котором $a^\sigma \in B^\sigma$. Если K — совокупность всех конечных алгебр, то K -отделимость будет называться финитной отделимостью. В случае групп и колец K -отделимость влечет за собою K -аппроксимируемость.

Ясно, что все подалгебры алгебр с K -отделимыми подалгебрами сами будут с K -отделимыми подалгебрами. Немногим менее очевидно

Т е о р е м а 3. *Пусть класс K содержит гомоморфные образы подалгебр своих алгебр и алгебра A имеет K -отделимые подалгебры. Тогда если на A конгруэнтности перестановочны, то все гомоморфные образы A будут с K -отделимыми подалгебрами.*

Пусть задан гомоморфизм σ алгебры A на алгебру A_1 , пусть B_1 — некоторая подалгебра алгебры A_1 и $a_1 \in A_1$, $a_1 \in B_1$. Обозначим через B полный прообраз B_1 в A и пусть θ конгруэнтность на A , отвечающая гомоморфизму σ , $a^\sigma = a_1$. По условию на A найдется конгруэнтность η такая, что A/η будет изоморфна некоторой подалгебре K -алгебры и для любого $b \in B$ будем иметь $a\eta b$. Из условия перестановочности конгруэнтностей вытекает, что произведение $\eta\theta$ будет снова конгруэнтностью на A [1]. Отображение $A \rightarrow A/\eta\theta$ является гомоморфизмом в подходящую K -алгебру и в то же время $a^{\eta\theta}$ не принадлежит $B^{\eta\theta}$. Действительно, противное означало бы, что для некоторого $b \in B$ имеем $a(\eta\theta)b$, т. е. для некоторого $z \in A$ имеем $a\eta z \& z\theta b$. Поскольку B — полный прообраз алгебры B_1 , то из $z\theta b$, $b \in B$ следует $z \in B$ и сравнение $a\eta z$ теперь противоречит предположению относительно η .

Из теоремы 3 непосредственно следует, что если существуют простые нециклические группы, не содержащиеся в классе K , то свободные группы с достаточным числом свободных порождающих содержат K -неотделимые подгруппы. Действительно, всякая группа есть фактор-группа от свободной группы. Если бы свободные группы имели отделимые подгруппы, то и все фактор-группы их имели бы отделимые подгруппы.

С другой стороны, все подгруппы циклической группы финитно отделимы, и в то же время любая счетная абелева группа есть фактор-группа от прямого произведения счетного числа циклических групп. Среди счетных абелевых групп имеются группы, не имеющие нетривиальных подгрупп конечного индекса. Эти группы заведомо не являются группами с финитно отделимыми подгруппами. Поэтому *прямое произведение счетного числа групп с финитно отделимыми подгруппами может не быть группой с финитно отделимыми подгруппами*. Однако для прямых произведений *к о н е ч н о г о* числа групп положение более просто:

Т е о р е м а 4. *Если K — класс групп или колец, содержащий прямые произведения любых пар своих алгебр, то прямое произведение конечного числа алгебр с K -отделимыми подалгебрами будет алгеброй с K -отделимыми подалгебрами.*

Достаточно рассмотреть прямое произведение двух групп $A = F \times G$. Пусть B — некоторая подгруппа A ; C , D — канонические образы B соответственно в F , G , $B \cap F = M$ и $a \in A$, $a \in B$, $a = cd$, $c \in F$, $d \in G$. Если $a \in CD$, то $c \in C$ или $d \in D$, и для доказательства теоремы достаточно рассмотреть группы A/F , A/G . Поэтому предположим, что $a \in CD$. Пусть $c_0 d \in B$, $c_0 \in C$. По условию элемент cc_0^{-1} и подгруппа M , не содержащая его, отделимы в F . Это значит, что в F найдется нормальный делитель F_0 такой, что F/F_0 будет изоморфна подгруппе K -группы и $cc_0^{-1} \in F_0 M$. Покажем, что $a \in F_0 B$. Пусть, наоборот, $a = fc_1 d_1$, $f \in F_0$, $c_1 d_1 \in B$, откуда $d = d_1$, $c = fc_1$. Так как $c_1 d \in B$ и $c_0 d \in B$, то $c_1 c_0^{-1} \in B \cap F = M$. Следовательно, $cc_0^{-1} = fc_1 c_0^{-1} \in F_0 M$ вопреки выбору M . Итак, при каноническом отображении $A = F \times G$ на $F/F_0 \times G$ образ элемента a не входит в образ подгруппы B . Применяя еще раз указанные рассуждения к произведению $F/F_0 \times G$, получим, что образ a в $F/F_0 \times G/G_0$ не принадлежит образу подгруппы B в $F/F_0 \times G/G_0$, причем эта группа изоморфна подгруппе подходящей K -группы, что и требовалось. Для колец доказательство такое же.

3. Мы хотим теперь найти условия, при которых разрешимая группа имеет финитно отделимые подгруппы. Начнем с абелевых групп. Предваритель-

но заметим, что абелева группа тогда и только тогда является группой с финитно отделимыми подгруппами, когда все ее фактор-группы финитно аппроксимируемы. Необходимость этого следует из теоремы 3, а достаточность очевидна.

Для того, чтобы периодическая абелева группа имела финитно отделимые подгруппы, необходимо и достаточно, чтобы порядки элементов каждой прямой компоненты этой группы были ограничены.

Достаточность непосредственно следует из того, что группы указанного типа вместе со всеми своими фактор-группами разлагаются в прямые произведения циклических групп и, следовательно, финитно аппроксимируемы.

Для доказательства необходимости предположим, что абелева группа A содержит элементы $a_1, a_2, \dots$, имеющие соответственно порядки $p, p^2, \dots$. Подгруппа B , порожденная элементами $a_1, a_2, \dots$, счетна. Поэтому могут быть два случая: 1) в B есть элемент бесконечной высоты, т. е. элемент $b \neq 1$, для которого уравнение $x^{p^n} = b$ разрешимо при любом натуральном n ; 2) B разлагается в прямую сумму циклических групп, порядки которых не ограничены в совокупности. В первом случае B не является финитно аппроксимируемой, так как если C — подгруппа конечного индекса и $b \in C$, то группа B/C будет конечной p -группой, в которой $b \neq 1$ и уравнение $x^{p^n} = b$ разрешимо для всех n , что невозможно. Во втором случае подгруппу B можно гомоморфно отобразить на бесконечную квазициклическую p -группу P . Пусть $P \cong B/D$. Тогда A/D будет содержать бесконечную квазициклическую p -группу и потому не сможет быть финитно аппроксимируемой. Итак, в обоих случаях группа A не может быть группой с финитно отделимыми подгруппами.

Абелеву группу без кручения условимся называть ограниченной, если ранг ее конечен и в любой ее фактор-группе нет квазициклических подгрупп.

Легко видеть, что абелева группа без кручения ранга 1 тогда и только тогда ограниченная, когда характеристики ее (см. [5, стр. 194]) не содержат символа ∞ .

В общем случае абелева группа без кручения тогда и только тогда ограниченная, когда она изоморфна подгруппе прямого произведения ограниченных групп ранга 1.

Абелева группа без кручения A тогда и только тогда имеет финитно отделимые подгруппы, когда она ограниченная.

В самом деле, абелева группа бесконечного ранга содержит свободную абелеву подгруппу бесконечного ранга и потому не может быть группой с отделимыми подгруппами. Пусть A имеет ранг r и $a_1, \dots, a_r$ — какие-нибудь ее линейно независимые элементы. Тогда в аддитивной записи всякий элемент A может быть представлен в форме

$$a = \frac{m_1}{n_1} a_1 + \dots + \frac{m_r}{n_r} a_r \quad ((m_i, n_i) = 1; i = 1, \dots, r). \quad (1)$$

Если для всевозможных a знаменатель n_1 содержит некое простое p в сколь угодно высоких степенях, то фактор-группа от A по подгруппе N , порожденной $a_1, \dots, a_r$, содержит квазициклическую p -группу, и потому A/N не может быть финитно аппроксимируемой. Таким образом, если A с отделимыми подгруппами, то в формуле (1) знаменатели $n_1, \dots, n_r$ могут делиться только на ограниченные степени простых чисел, и, следовательно, A будет ограниченной.

Обратно, пусть A ограниченная. Из представления (1) легко вывести, что всякая фактор-группа A_1 от A будет иметь следующую структуру: периодическая часть $F \subset A_1$ будет иметь конечные примарные компоненты, а A_1/F будет ограниченной. С другой стороны, известно, что для любой абелевой группы A и любого ее элемента a фактор-группа A/M , где M — максимальная подгруппа, не содержащая a , является либо конечной, либо бесконечной квазициклической p -группой. Так как последнего случая для ограниченных групп быть не может, то A_1 будет финитно аппроксимируемой.

Т е о р е м а 5. *Абелева группа A тогда и только тогда имеет финитно отделимые подгруппы, когда фактор-группа A по ее периодической части F ограниченная и порядки элементов каждой примарной компоненты A ограничены в совокупности.*

Необходимость вытекает из предыдущих результатов, так как если A с отделимыми подгруппами, то тем же свойством должны обладать F и A/F .

С другой стороны, фактор-группы от групп, имеющих указанное в теореме 5 строение, имеют то же строение и потому не могут быть квазициклическими p -группами. В силу сделанного выше замечания это влечет за собой финитную аппроксимируемость всех фактор-групп, что и требовалось.

4. Рассмотрим следующий пример. Пусть группа G задается порождающими a_i, b_i, z ($i = 1, 2, \dots$) и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} a_i^2 &= b_i^2 = 1, & a_i b_i &= b_i a_i z, \\ a_i a_j &= a_j a_i, & a_i b_j &= b_j a_i, & b_i b_j &= b_j b_i \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Эта группа имеет коммутант $H = \{1, z\}$, совпадающий с центром G . Фактор-группа по центру есть финитная прямая сумма бесконечного числа циклических групп 2-го порядка. Таким образом, G/H и H — абелевы группы с финитно отделимыми подгруппами. Однако G не финитно аппроксимируема. Действительно, пусть N — нормальный делитель конечного индекса в G . Тогда для подходящих $i \neq j$ будет $a_i \equiv a_j \pmod{N}$ или $a_i a_j \in N$. Отсюда $b_i^{-1} a_i a_j b_i = a_i a_j z \in N$, $z \in N$, т. е. все нормальные делители конечного индекса содержат z и потому z финитно неотделим от единичной подгруппы.

Этот пример показывает, что при изучении условий, которые следует наложить на фактор-группы разрешимых групп, чтобы группы были с финитно отделимыми подгруппами, указанный выше необходимый и достаточный признак слишком широк. Поэтому мы вводим следующее определение: абелева группа G будет называться *ограниченной*, если все примарные компоненты ее периодической части F конечны, а фактор-группа G/F является ограниченной группой без кручения в указанном выше смысле.

Таким образом, новое определение ограниченности совпадает со старым для абелевых групп без кручения и налагает более стеснительные требования лишь на периодические части групп.

Подгруппы, фактор-группы и прямые произведения конечного числа ограниченных абелевых групп являются ограниченными абелевыми группами.

Утверждения относительно подгрупп и прямых произведений очевидны. Столь же непосредственно проверяется, что все истинные фактор-группы от ограниченной группы ранга 1 без кручения будут периодическими группами с циклическими примарными компонентами. Пусть теперь

A — ограниченная группа без кручения ранга r и B — ее нетривиальная подгруппа. Выберем в B линейно независимую максимальную систему элементов $a_1, \dots, a_s$ и дополним ее элементами $a_{s+1}, \dots, a_r$ до базиса в A . Все элементы A могут быть однозначно представлены линейными формами (1) от $a_1, \dots, a_r$ с рациональными коэффициентами. Пусть G_i — группа

форм $\frac{m_i}{n_i} a_i$, где коэффициенты берутся такими, какие встречаются в разложениях элементов из A . Ясно, что G_i ($i = 1, \dots, r$) — сгруппированные группы ранга 1 без кручения и A есть подгруппа прямой суммы $G = G_1 + \dots + G_r$. Обозначим через B_0 подгруппу, порожденную в B элементами $a_1, \dots, a_s$, и пусть $H = G_1 + \dots + G_s$. Тогда $A/B \subset G/B \cong H/B + A_1$, где $A_1 = G_{s+1} + \dots + G_r$, $H/B \cong H/B_0/B_0$, H/B_0 — периодическая ограниченная группа, и, следовательно, H/B — также периодическая ограниченная группа. Тем самым доказано, что фактор-группы от ограниченных групп без кручения являются ограниченными группами. Случай смешанных ограниченных групп легко приводится к случаю групп без кручения.

5. Разрешимую группу G будем называть *ограниченной*, если она обладает хотя бы одним конечным нормальным рядом с абелевыми ограниченными факторами.

Из теоремы Шрейера об уплотнениях нормальных рядов и предыдущих результатов непосредственно следует, что факторы любого разрешимого конечного нормального ряда разрешимой ограниченной группы являются ограниченными абелевыми группами. Отсюда, в свою очередь, следует, что подгруппы, фактор-группы и прямые произведения конечного числа ограниченных разрешимых групп являются ограниченными разрешимыми группами.

Поскольку ограниченная разрешимая группа обладает конечным нормальным рядом, факторы которого являются абелевыми группами конечного приведенного ранга, то всякая ограниченная разрешимая группа является A_1 -группой, по терминологии статьи [13]. Согласно [13] фактор-группа от разрешимой A_1 -группы G по ее максимальному периодическому нормальному делителю F есть A_4 -группа, т. е. G/F обладает конечным нормальным рядом, факторы которого являются абелевыми группами с конечными периодическими частями.

Напомним, что приведенным специальным рангом произвольной группы называется наименьшее число r , обладающее тем свойством, что любое конечное множество элементов группы G порождает подгруппу, имеющую r порождающих. Разрешимые A_4 -группы имеют конечный специальный ранг, и, таким образом, фактор-группа от ограниченной разрешимой группы по ее максимальному периодическому нормальному делителю имеет конечный специальный ранг.

Л е м м а 1. Пусть G^n означает подгруппу группы G , порожденную n -ми степенями всех элементов G . Если G — разрешимая ограниченная группа, то все фактор-группы G/G^n ($n = 1, 2, \dots$) конечны.

В самом деле, G/G^n есть ограниченная периодическая разрешимая группа, порядки всех элементов которой делят n . Отсюда следует, что факторы разрешимого нормального ряда для G/G^n имеют лишь конечное число примарных компонент и, значит, конечны, а вместе с ними конечна и сама группа G/G^n .

Л е м м а 2. Если G — нильпотентная группа с нижним центральным рядом длины n , то уравнение $x^m = a$ для любого $a \in G^{m^n}$ имеет решение (ср. [11]).

Пусть $G \supset G_1 \supset \dots \supset G_n = 1$ — нижний центральный ряд n -ступенно нильпотентной свободной группы со свободными порождающими $x_1, \dots, \dots, x_s$ и пусть для групп с меньшей длиной центрального ряда лемма справедлива. Тогда в G справедливо соотношение

$$x_1^{m^{n-1}} x_2^{m^{n-1}} \dots x_s^{m^{n-1}} = \pi_1^m(x_1, \dots, x_s) u, \quad (2)$$

где $\pi(x_1, \dots, x_s)$ — некоторое слово от $x_1, \dots, x_s$, а $u \in G_n$. Центральная подгруппа G_n порождается базисными коммутаторами $v_1, \dots, v_n$ веса n на буквах $x_1, \dots, x_s$ и потому $u = v_1^{\varepsilon_1} \dots v_i^{\varepsilon_i} \dots v_p^{\varepsilon_p}$ для некоторых целых чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$.

Подставляя в (2) вместо x_i выражение x_i^m , получим

$$\begin{aligned} x_1^{m^n} x_2^{m^n} \dots x_s^{m^n} &= \pi^m(x_1^m, \dots, x_s^m) v_1(x_1^m, \dots, x_s^m)^{\varepsilon_1} \dots v_p(x_1^m, \dots, x_s^m)^{\varepsilon_p} = \\ &= [\pi(x_1^m, \dots, x_s^m) v_1(x_1, \dots, x_s)^{\varepsilon_1 m^{n-1}} \dots v_p(x_1, \dots, x_s)^{\varepsilon_p m^{n-1}}]^m, \end{aligned}$$

Подстановка правомочна, так как в свободной нильпотентной группе любое соотношение между буквами $x_1, \dots, x_s$ является тождеством. Лемма доказана.

Л е м м а 3. *Все ограниченные разрешимые группы финитно аппроксимируемы.*

Для абелевых это доказано в п. 3. Поэтому применим индукцию, предполагая, что заданная группа G имеет разрешимый нормальный ряд $G \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset 1$ длины n и что для групп с меньшей длиной разрешимого ряда лемма верна.

Пусть a — произвольный не единичный элемент G . Если $a \in G_1$, то образ $\bar{a}$ элемента a в фактор-группе G/G_1 будет отличен от единицы. Так как G/G_1 абелева, то найдется нормальный делитель N/G_1 конечного индекса, не содержащий a , что и требовалось. Пусть $a \in G_1$. По условию в G_1 найдется нормальный делитель M конечного индекса s в G_1 , не содержащий a . Согласно лемме 1 подгруппа G_1^s будет иметь конечный индекс в G_1 , будет нормальным делителем в G и $G_1^s \subseteq M$. Пусть $H = G/G_1^s$, F и b — образы соответственно G_1 и a в H . Имеем: $b \neq 1$, $b \in F$, F — конечный нормальный делитель H и H/F абелева. Обозначим через T совокупность элементов H , перестановочных с каждым элементом F . Ввиду конечности F индекс T в H также конечен. Если $b \in T$, то T можно взять в качестве искомого нормального делителя. Пусть $b \notin T$; $T \cap F = T_0$. Группа T_0 является конечной центральной подгруппой в T и T/T_0 абелева. Таким образом, T является двуступенно нильпотентной группой. Пусть порядок коммутанта T' группы T есть m ($T' \leq T_0$). Тогда по лемме 2 из любого элемента подгруппы T^{m^2} извлекается корень m -й степени. Поэтому T^{m^2} — абелева группа. Следовательно, T^{m^2} финитно аппроксимируема и имеет конечный индекс в H . Отсюда следует, что и H — финитно аппроксимируемая группа. Лемма доказана.

Из леммы 3, в частности, следует, что каждая конечная подгруппа H ограниченной разрешимой группы G является финитно отделимой.

Действительно, пусть $a \in H$, $H = \{h_1, \dots, h_r\}$. Согласно лемме 3 в G найдутся нормальные делители N_i конечных индексов, для которых $ah_i^{-1} \in N_i$ ($i = 1, \dots, r$). Тогда $N = \bigcap N_i$ будет искомым нормальным делителем G конечного индекса, для которого $a \in HN$.

Теорема 6. *Все подгруппы ограниченных разрешимых групп финитно отделимы.*

Для абелевых групп теорема доказана в п. 3. Поэтому по индукции предположим, что заданная группа G имеет разрешимый нормальный ряд $G \supset \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset 1$ длины n и что для групп с более коротким разрешимым нормальным рядом теорема доказана.

Пусть B — подгруппа группы G , $a \in G$, $a \notin B$. Если $a \in BG_1$, то в абелевой группе G/BG_1 найдется подгруппа N/BG_1 конечного индекса, не содержащая a . Тогда нормальный делитель N может быть принят в качестве искомого отделяющего a от B .

Предположим, что $a \in BG_1$. Пусть $a = bh$, $b \in B$, $h \in G_1$, $T = B \cap G_1$. Так как $h \in T$ и G_1 имеет разрешимый нормальный ряд длины $n - 1$, то в G_1 найдется нормальный делитель конечного индекса M , для которого $h \in TM$. Обозначим через s индекс M в G_1 . Тогда фактор-группа G_1/G_1^s конечна, G_1^s — нормальный делитель в G и $h_1^s \in TG$. Если бы оказалось, что $a \in BG_1^s$, откуда $a = b_1h_1$ ($b_1 \in B$, $h_1 \in G_1^s$), то мы бы имели $bh = b_1h_1$, $b^{-1}b_1 = hh^{-1} \in B \cap G_1 = T$, $h \in TG_1^s$, что противоречит условию. Таким образом, $a \notin BG_1^s$.

Положим $G/G_1^s = H$, и пусть образы G_1 , B , a в H суть F , C , b соответственно. Имеем: F — конечный нормальный делитель в H , фактор-группа H/F абелева, $b \in C$. Группа H содержит нормальный делитель FC , внутри которого лежит подгруппа конечного индекса C . Пусть $N = (FC)^t$, где t — индекс C в FC . N является нормальным делителем H , содержащимся в C . Рассмотрим фактор-группу $H/N = H_1$, и пусть C_1 , b_1 — образы C , b в H_1 . Так как $b_1 \in C_1$ и C_1 конечная, то согласно следствию леммы 3 в H_1 найдется нормальный делитель конечного индекса N_1 , для которого $b_1 \in C_1N_1$. Мы построили цепочку гомоморфизмов $C \rightarrow H \rightarrow H_1 \rightarrow H_1/N_1$. Результирующий гомоморфизм этой цепочки является гомоморфизмом G на конечную группу H_1/N_1 , при котором образ элемента a не входит в образ подгруппы B , что и требовалось.

Пример абелевых групп, изученных в п. 3, показывает, что ограниченность разрешимых групп не является необходимым для финитной отделимости их подгрупп. Однако из приведенных выше рассуждений видно, что *ограниченность разрешимых групп не только достаточна, но и необходима для финитной отделимости подгрупп в случае групп без кручения.*

В самом деле, из отделимости всех подгрупп разрешимой группы G следует отделимость подгрупп в фактор-группах подгрупп G и, следовательно, отделимость подгрупп у факторов разрешимого нормального ряда G . Поэтому приведенные ранги этих факторов конечны и группа G должна быть A_1 -группой. Но A_1 -группа без кручения является A_4 -группой и потому рассматриваемая группа G является ограниченной.

Отметим еще, что *если аддитивная группа некоторого кольца R ограниченная, то R имеет отделимые подкольца.*

Действительно, выше показано, что в качестве отделяющих нормальных делителей можно брать подгруппы вида nR , которые в случае колец автоматически оказываются идеалами.

В частности, финитно отделимыми являются подкольца нильпотентных колец с конечным числом порождающих, так как аддитивные группы этих колец имеют конечное число порождающих.

6. Пусть A — произвольная алгебра и $S = \{\theta_\alpha\}$ — система конгруэнтностей на A . Предположим, что для любых двух конгруэнтностей $\theta_\alpha, \theta_\beta$ из S в S найдется конгруэнтность $\theta_\gamma \leq \theta_\alpha \cap \theta_\beta$, и пусть пересечение всех конгруэнтностей из S есть нуль. Следуя В. Хемишу [17], условимся смежные классы по конгруэнтностям из S , а также произвольные объединения смежных классов называть *S-открытыми множествами*. Из условий, наложенных на S , следует, что S -открытые множества определяют на A хаусдорфову топологию, в которой основные операции алгебры A непрерывны. Тем самым абстрактная алгебра A обращается в топологическую алгебру, топологию на которой будем называть *S-топологией*.

Пусть теперь заданы абстрактная алгебра A и некоторый класс однотипных алгебр K , содержащий прямые произведения пар своих алгебр. Каждый гомоморфизм A в любую K -алгебру определяет на A некоторую конгруэнтность. Пусть S — совокупность всех получаемых этим способом конгруэнтностей на A .

Если A является K -аппроксимируемой, то пересечение всех конгруэнтностей из S равно нулю, и мы можем говорить о S -топологии на A , которую будем называть также *K-топологией*.

Ясно, что всякая K -топология вполне несвязна (см. [17]) и что любой гомоморфизм алгебры A с ее K -топологией в произвольную K -алгебру, рассматриваемую в качестве топологической алгебры с дискретной топологией, является непрерывным и открытым.

Пусть алгебра A содержит подалгебру B и $a \in A, a \notin B$. Предположим, что при гомоморфизме σ алгебры A в некоторую K -алгебру $a^\sigma \in B^\sigma$. Тогда смежный класс $[a]$, содержащий a , по конгруэнтности θ , отвечающей σ , не пересекается с подалгеброй B . Так как $[a]$ множество открытое, то видим, что K -отделимость подалгебры B от a равносильна открытой отделимости элемента a от B . В частности, K -отделимость подалгебры B от всех элементов A , не входящих в B , оказывается равносильной замкнутости B в K -топологии. Следовательно, *алгебры с K -отделимыми подалгебрами — это те алгебры, все абстрактные подалгебры которых являются замкнутыми в K -топологии*. Условимся K -топологию называть *финитной*, если K есть класс всех конечных алгебр. Задачу, рассматривавшуюся в п. 5, теперь можно переформулировать как задачу исследования тех разрешимых групп, все подгруппы которых оказываются замкнутыми в финитной топологии.

7. Рассмотрим, наконец, связи между финитной аппроксимируемостью, финитной отделимостью и некоторыми алгоритмическими вопросами. Основной в этом направлении является работа Мак-Кинси [7].

Пусть K — класс абстрактных алгебр, основные операции которых обозначены символами $f_1, \dots, f_s$. Вместо них вводим предикатные символы $P_1, \dots, P_s$, считая $P_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ равносильным утверждению $x_{n_i} = f_i(x_1, \dots, x_{n_i-1})$. С помощью символов P_i и предметных переменных $x_1, x_2, \dots$ можно составлять формулы узкого исчисления предикатов (ср. [7, 14]). Согласно Мак-Кинси, система аксиом Σ называется *финитно редуцируемой* относительно класса алгебр K , если для каждой $\alpha \in \Sigma$, не имеющей места в какой-либо K -алгебре, найдется конечная K -алгебра, в которой α не будет иметь места.

Оказывается справедливой следующая теорема Мак-Кинси: пусть класс аксиом Σ редуцируем относительно конечно аксиоматизируемого класса

алгебр K . Тогда существует алгоритм, позволяющий распознать, верна или нет для всех K -алгебр любая фиксированная аксиома класса Σ [7].

Предположим, что класс алгебр K узко примитивен (см. [14]), и пусть A — алгебра этого класса, заданная конечным числом порождающих $a_1, \dots, a_n$ и определяющих равенств $h_1 = g_1, \dots, h_r = g_r$, где h_λ, g_λ — многочлены от $a_1, \dots, a_n$. Проблема равенства для K состоит в указании алгоритма для распознавания верности любого равенства вида $h = g$ в A , где h, g — многочлены. Так как верность указанного равенства в A равносильна верности условного равенства $h_1 = g_1 \& \dots \& h_r = g_r \rightarrow f = g$ во всех алгебрах класса K , то из теоремы Мак-Кинси следует (ср. А. В. Кузнецов [6]), что если все алгебры класса K финитно аппроксимируемы, то проблема равенства для алгебр класса K , заданных определяющими соотношениями, алгоритмически разрешима. Принимая во внимание теорему 2, видим, что проблема равенства слов, в частности, алгоритмически разрешима для коммутативных полугрупп. Другим способом этот же результат получен независимо В. А. Емеличевым и Г. С. Цейтиным.

Пусть теперь снова K — примитивный класс алгебр, A — алгебра этого класса, заданная конечным числом порождающих элементов и определяющих соотношений. Предположим, кроме того, что задано конечное число элементов A , представленных в виде многочленов $h, h_1, \dots, h_s$ от порождающих $a_1, \dots, a_n$ алгебры A . Требуется найти алгоритм для решения вопроса о том, входит или нет элемент h в подалгебру B , порожденную элементами $h_1, \dots, h_s$. Эту задачу будем называть задачей о вхождении элемента в подалгебру.

Если алгебра A примитивного класса K , заданная конечным числом порождающих и определяющих соотношений, финитно аппроксимируема и все подалгебры ее финитно отделимы, то задача о вхождении элемента в подалгебру для алгебры A алгоритмически разрешима.

Для доказательства, аналогично методу Мак-Кинси, располагаем в последовательность $A_1, A_2, \dots$ все конечные алгебры данного типа, в каждой из которых всевозможными способами выбрано столько элементов $a_i^m \in A_m$ ($i = 1, \dots, n$), сколько порождающих $a_1, \dots, a_n$ задано в алгебре A . Предполагая фиксированными многочлены $h, h_1, \dots, h_s$ от $a_1, \dots, a_n$, располагаем в последовательность $F_1, F_2, \dots$ все многочлены от $h_1, \dots, h_s$. Искомый алгоритм Φ описывается следующим образом: $(2m - 1)$ -й шаг состоит в том, что берут алгебру A_m и смотрят, являются ли $a_1^m, \dots, a_n^m$ порождающими A_m и выполнены ли для них определяющие соотношения A . Если нет, то переходят к следующему шагу Φ . Если да, то решают, входит ли элемент h ($a_1^m, \dots, a_n^m$) в подалгебру, порожденную в A_m элементами h_i ($a_1^m, \dots, a_n^m$). Если нет, то процесс останавливается, и в алгебре A элемент h не входит в подалгебру, порожденную элементами $h_1, \dots, h_s$. Если да, то переходят к шагу номера $2m$, состоящему в решении вопроса о том, имеет ли место в A равенство $h = F_m$. Алгоритм для этого указывается теоремой Мак-Кинси. Если $h = F_m$, то процесс обрывается и h входит в подалгебру, порожденную $h_1, \dots, h_s$. Если $h \neq F_m$, то переходят к следующему шагу. Финитная отделимость подалгебр A гарантирует, что процесс Φ оборвется.

Из теоремы 6 теперь следует, что задача о вхождении элемента в подалгебру алгоритмически разрешима для класса всех k -степенно нильпотентных групп.

8. Еще более общей является так называемая задача о пересечении подалгебр: в примитивном классе K задана алгебра A посредством порождающих и конечного числа определяющих равенств. Заданы также две системы многочленов $g_1, \dots, g_m$ и $h_1, \dots, h_n$ от порождающих A . Требуется найти порождающие для пересечения подалгебр, порожденных в A соответственно элементами $g_1, \dots, g_m$ и элементами $h_1, \dots, h_n$. Вместо нахождения порождающих можно ставить более частные вопросы о неединичности или непустоте пересечения. Автору неизвестно, можно ли задачу о пересечении связать при помощи метода Мак-Кинси с какой-либо «отделимостью». Однако, пользуясь методом нашей заметки [15], легко указать алгоритм для решения задачи о пересечении подгрупп в классе нильпотентных групп любой фиксированной ступени нильпотентности.

Более трудной представляется задача об изоморфизме групп фиксированной ступени нильпотентности, заданных определяющими соотношениями, хотя эта задача может быть связана со следующей финитной отделимостью.

Пусть алгебра A принадлежит квазипримитивному классу K , содержащему квазипримитивный подкласс L . Репликой A в L назовем алгебру B , порождающими которой служат все элементы A , а определяющими равенствами в классе L являются все равенства вида $a = f_v(a_1, \dots, a_n)$, имеющие место в A (f_v — символы основных операций из K). Класс L пусть называется локально конечным, если все его алгебры, имеющие конечное число порождающих, конечны.

Легко доказать, что в классе K проблема изоморфизма заведомо алгоритмически разрешима, если для каждой пары A_1, A_2 неизоморфных K -алгебр с конечным числом порождающих существует квазипримитивный локально конечный подкласс $L \subseteq K$, в котором реплики алгебр A_1, A_2 неизоморфны.

Автору неизвестно, обладает ли указанным свойством класс нильпотентных групп фиксированной ступени нильпотентности k ($k > 1$) *. Для абелевых групп это свойство справедливо [16, стр. 44].

Аналогично, положительно была бы решена алгоритмическая проблема сопряженности элементов в нильпотентных группах, если бы в каждой нильпотентной группе G с конечным числом порождающих для любой пары несопряженных элементов a, b существовал нормальный делитель N конечного индекса такой, что образы a, b в фактор-группе G/N были также несопряженными. Непосредственные вычисления показывают, что этим свойством заведомо обладают свободные метабелевы группы **.

* Нет, не обладает. В. Н. Ремесленников. Сопряженность подгрупп в нильпотентных группах. — Алгебра и логика, 1967, 6, № 2, 61—76. — Прим. ред.

** Это верно для любых конечно порожденных нильпотентных групп. N. Blackburn. Conjugacy in nilpotent groups. — Proc. Amer. Math. Soc., 1965, 16, 143—148; М. И. Каргаполов. Финитная аппроксимируемость сверхразрешимых групп относительно сопряженности. — Алгебра и логика, 1967, 6, № 1, 63—68. — Прим. ред.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Биркгоф. Теория структур. М., ИЛ, 1952.
2. К. А. Hirsch. On infinite soluble groups (IV).— J. London Math. Soc., 1952, 27, 81—85.
3. K. W. Gruenberg. Residual properties of infinite soluble groups.— Proc. London Math. Soc., 1957 3 (7), N 25, 29—62.
4. K. Iwasawa. Einige Sätze über freie Gruppen.— Proc. Acad. Tokyo, 1943, 19, 272—274.
5. А. Г. Курош. Теория групп. М., Гостехиздат, 1953.
6. А. В. Кузнецов. О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем.— Труды 3-го Всес. мат. съезда (Москва), 1956, 2, 145—146.
7. G. C. C. McKinsey. The decision problem for some classes of sentences without quantifiers.— J. Symbol. Log., 1943, 8, N 3, 61—76.
8. А. И. Мальцев. Об изоморфных представлениях бесконечных групп матрицами.— Мат. сб., 1940, 8, № 3, 405—422.
9. А. И. Мальцев. О представлениях бесконечных алгебр.— Мат. сб., 1943, 13, № 2—3, 263—285.
10. А. И. Мальцев. Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы.— Мат. сб., 1949, 25, № 3, 347—366.
11. А. И. Мальцев. Нильпотентные группы без кручения.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, 13, № 3, 202—212.
12. А. И. Мальцев. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями.— Мат. сб., 1950, 26, № 1, 19—34.
13. А. И. Мальцев. О некоторых классах бесконечных разрешимых групп.— Мат. сб., 1951, 28, № 3, 567—588.
14. А. И. Мальцев. Квазипримитивные классы абстрактных алгебр.— Докл. АН СССР, 1956, 108, № 2, 187—189.
15. А. И. Мальцев. Два замечания о нильпотентных группах.— Мат. сб., 1955, 37, № 3, 569—576.
16. Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. М., Гостехиздат, 1954.
17. W. Hamisch. Über die Topologie in der Algebra.— Math. Z., 1954, 60, N 4, 458—487.

О ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ*



В статье А. А. Виноградова [1] было опубликовано следующее утверждение: для того чтобы частично упорядоченная нильпотентная группа G была вложима в кардинальное произведение линейно упорядоченных групп, необходимо и достаточно, чтобы в G из $x^n \geq 1$ (n — положительное натуральное) следовало $x \geq 1$. Однако Е. П. Шимбирева [2] заметила, что доказательство А. А. Виноградова неполное и потому верность утверждения осталась под сомнением.

Ниже мы даем новое простое необходимое и достаточное условие для того, чтобы частично упорядоченная нильпотентная группа была изоморфна подгруппе кардинального произведения упорядоченных групп. С помощью этого условия легко доказывается справедливость указанного утверждения А. А. Виноградова для метабелевых групп. В заключение мы строим пример трехступенно нильпотентной частично упорядоченной группы, удовлетворяющей условию А. А. Виноградова и не включаемой в кардинальное произведение линейно упорядоченных групп. Таким образом, в общем случае упомянутое утверждение не справедливо.

1. Условия вложимости. Частичный порядок в группе будем отождествлять с полугруппой положительных элементов. Абстрактная группа G называется доупорядочиваемой, если каждый частичный порядок в ней пополняем до линейного порядка.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы в доупорядочиваемой группе G частичный порядок P был пересечением линейных порядков, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in G$*

$$P' \cap S(x) \neq \emptyset \rightarrow x \in P', \quad (1)$$

где $S(x)$ — минимальная инвариантная полугруппа, содержащая x , и $P' = P \cup \{1\}$.

Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Так как в G каждый частичный порядок пополняем до линейного порядка, то достаточно показать, что если для какого-либо элемента $x \in G$ имеем $x \neq 1$, $x \in P$, $x^{-1} \in P$, то в G найдется частичный порядок G , содержащий P и x . Рассмотрим полугруппу

$$Q = P \cup S(x) \cup S(x)P.$$

Так как $S(x)$ и P — полугруппы, инвариантные в G , то полугруппа Q также инвариантная. Очевидно, $x \in Q$. Остается показать, что Q не содержит 1. Пусть, напротив, $1 \in Q$. Из (1) следует, что $1 \in S(x)$. Поэтому $1 = S(x) \cdot p$, где $p \in P$ и

$$S(x) = x_1^{-1} x x_1 \dots x_n^{-1} x x_n.$$

* Алгебра и логика, 1962, 1, № 2, 5—9.

Следовательно, $p = s(x^{-1})$. Отсюда в силу (1) вытекает, что $x^{-1} \in P'$ в противоречии с предположением.

С л е д с т в и е. Для того чтобы в локально нильпотентной группе без кручения G частичный порядок P был пересечением линейных порядков, необходимо и достаточно, чтобы в G выполнялось условие (1).

Действительно, локально нильпотентные группы без кручения согласно [3] являются доупорядочиваемыми группами.

Т е о р е м а 2. Для того чтобы частично упорядоченная метабелева группа G была изоморфна подгруппе кардинального произведения линейно упорядоченных групп, необходимо и достаточно, чтобы G не имела кручения и чтобы для каждого $a \in G$ и каждого положительного целого n из $a^n \geq 1$ следовало $a \geq 1$.

Необходимость условий очевидна. Для доказательства достаточности применим теорему 1. Полугруппа $S(x)$ состоит из элементов вида

$$x_1^{-1} x x_1 \dots x_n^{-1} x x_n = x^n(x, x_1 \dots x_n) = x^n(x, g), \quad (2)$$

где $(x, g) = x^{-1} g^{-1} x g$.

Для некоторого $x \in G$ пусть $P' \cap S(x) \neq \emptyset$. Согласно (2) это значит, что для некоторого элемента g и подходящего положительного целого n имеем

$$x^n(x, g) \geq 1. \quad (3)$$

Так как коммутаторы (x, g) лежат в центре группы G , то, преобразуя неравенство (3) при помощи g^{-1} , получим

$$(g x g^{-1})^n(x, g) \geq 1$$

или

$$x^n(x, g)^{1-n} \geq 1. \quad (4)$$

Возводя обе части неравенства (3) в степень $n-1$ и перемножая почленно с неравенством (4), получим $x^n \geq 1$, откуда $x \geq 1$, т. е. $x \in P'$, что и требовалось.

2. Пример невложимой группы. Покажем теперь, что не каждая частично упорядоченная нильпотентная группа без кручения, в которой из $g^n \geq 1$ ($n > 0$) следует $g \geq 1$, вложима в кардинальное произведение упорядоченных групп.

Рассмотрим свободную трехступенно нильпотентную группу F со свободными образующими a, b . Положим

$$b^{-1} a b = a c, \quad (5)$$

$$b^{-1} c b = c d, \quad (6)$$

$$a^{-1} c a = c f. \quad (7)$$

Каждый элемент F однозначно записывается в виде

$$a^x b^y c^z d^u f^v \quad (x, y, z, u, v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

причем элементы d, f порождают центр F . Исходя из (5) — (7), легко устанавливаем соотношения:

$$b^{-n} a^p b^n = a^p c^{np} d^{p \frac{n(n-1)}{2}} f^{n \frac{p(p-1)}{2}}, \quad (8)$$

$$a^{-x} c^y a^x = c^y f^{xy}. \quad (9)$$

Обозначим через P совокупность элементов вида $a^p c^l d^m f^x$, где $p > 0$, $m \geq 0$, $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и

$$\frac{p}{2} - \sqrt{2mp} \leq l \leq \frac{p}{2} + \sqrt{2mp}. \quad (10)$$

Множество P является полугруппой. Действительно,

$$a^p c^l d^m f^x \cdot a^{p_1} c^{l_1} d^{m_1} f^{x_1} = a^{p+p_1} c^{l+l_1} d^{m+m_1} f^{x+x_1+l p_1}.$$

Из (10) и таких же неравенств для p_1, l_1, m_1 следует, что

$$\frac{p+p_1}{2} - \sqrt{2mp} - \sqrt{2m_1 p_1} \leq l + l_1 \leq \frac{p+p_1}{2} + \sqrt{2mp} + \sqrt{2m_1 p_1}.$$

Но $\sqrt{2mp} + \sqrt{2m_1 p_1} \leq \sqrt{2(m+m_1)(p+p_1)}$, поэтому

$$\frac{p+p_1}{2} - \sqrt{2(m+m_1)(p+p_1)} \leq l + l_1 \leq \frac{p+p_1}{2} + \sqrt{2(m+m_1)(p+p_1)}.$$

Полугруппа P инвариантна относительно внутренних автоморфизмов F . В самом деле, преобразование элемента $a^p c^l d^m f^x$ посредством элементов a, c меняет в силу (9) только показатель у f , а преобразование посредством d, f вообще ничего не меняет. Поэтому рассмотрим лишь преобразование при помощи b^n . Из (8) получаем

$$b^{-n} a^p c^l d^m f^x b^n = a^p c^{n p + l} d^{m + l n + \frac{p n(n-1)}{2}} f^{x + \frac{n p(p-1)}{2}}.$$

Надо показать, что

$$\left(n p + l - \frac{p}{2}\right)^2 \leq 2 p \left(m + l n + \frac{p n(n-1)}{2}\right) = 2 m p + 2 l n p + p^2 (n^2 - n).$$

Так как в силу (10) $(l - p/2)^2 \leq 2 m p$, то, действительно,

$$\left(n p + \left(l - \frac{p}{2}\right)\right)^2 \leq p^2 n^2 + 2 p n \left(l - \frac{p}{2}\right) + 2 m p = 2 m p + 2 l n p + p^2 (n^2 - n).$$

Наконец, так как

$$(a^p c^l d^m f^x)^{-1} = a^{-p} c^u d^v f^w,$$

то из условия $p > 0$ следует, что полугруппа P не содержит взаимно обратных элементов. Поэтому мы можем ввести в F частичный порядок, принимая P в качестве полугруппы положительных элементов.

Покажем, что для любого $g \in F$ из $g^n \geq 1$ ($n > 0$) следует $g \geq 1$. Действительно, если $g = a^x b^y c^z d^u f^v$, то $g^n = a^{n x} b^{n y} c^{n z} d^{n u} f^{n v}$ и условие $g^n \in P$ влечет $y = 0$, $g = a^x c^z d^u f^v$ и, значит,

$$g^n = a^{n x} c^{n z} d^{n u} f^{n v},$$

причем $(n z - n x/2)^2 \leq 2 n x \cdot n u$. Но тогда $(z - x/2)^2 \leq 2 x u$, а это означает, что g принадлежит P .

Для дальнейшего нам нужна еще

Л е м м а. В упорядоченной нильпотентной группе коммутатор $k = (a, g)$ положительного элемента a и произвольного элемента g несравненно меньше a , т. е. $k^s < a$ для $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Рассмотрим подгруппу H , порожденную элементами a, g . Эта подгруппа нильпотентна, линейно упорядочена и имеет конечное число образующих.

В силу основного результата статьи [3] H имеет выпуклый центральный ряд $H = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = E$ и для некоторого m имеем $a \in H_m$, $k \in H_m$. Если бы для некоторого s было $1 < a < k^s$, то из $k^s \in H_m$ и выпуклости H_m следовало бы $a \in H_m$, что невозможно.

Используя лемму, докажем, наконец, что частичный порядок P в группе F не может быть пересечением линейных порядков. В самом деле, из (5) имеем $c = (a, b)$ и $a \in P$. Поэтому в силу леммы элемент c должен быть меньше a в любом линейном порядке, содержащем P , т. е. элемент ac^{-1} входит в каждый линейный порядок, содержащий P , и, значит, ac^{-1} должен был бы входить в P , если бы P был пересечением линейных порядков. Но элемент ac^{-1} в P не входит, так как он не удовлетворяет условию (10). Поэтому P не есть пересечение линейных порядков, что и требовалось.

Отметим еще, что из доказательства леммы непосредственно вытекает следующее утверждение: если в частично упорядоченной нильпотентной группе без кручения положительный элемент a сравним с каким-либо своим коммутатором (a, g) , то этот коммутатор меньше a . Построенное выше частичное упорядочение группы G показывает, что коммутатор этот не всегда сравним с a .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Виноградов. К теории частично упорядоченных нильпотентных групп. — Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1954, 5, 61—64.
2. Е. П. Шимбирева. РЖ Математика, 1956. Реф. 5120.
3. А. И. Мальцев. О доупорядочении групп. — Труды Мат. ин-та АН СССР, 1951, 38, 173—175.

ОБ УРАВНЕНИИ $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ В СВОБОДНОЙ ГРУППЕ *



По аналогии с элементарной арифметикой отношение $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ между элементами $x_1, \dots, x_m$ группы G с фиксированными элементами $a_1, \dots, a_s$ условимся называть диофантовым отношением, если

$$\Phi(x_1, \dots, x_m) \Leftrightarrow (\exists y_1, \dots, y_t) (x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} y_{j_1}^{\alpha_{j_1}} a_{k_1}^{\alpha_{k_1}} \dots x_{i_t}^{\alpha_{i_t}} y_{j_t}^{\alpha_{j_t}} a_{k_t}^{\alpha_{k_t}} = 1),$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i = 0, \pm 1$.

По-видимому, весьма мало известно о том, какие отношения являются диофантовыми (или просто формульными) в случае, когда F есть свободная группа с выделенными свободными порождающими **. Цель настоящей заметки — показать, что отношение « x, y — свободные порождающие» в свободной группе с порождающими a, b является дизъюнкцией двух диофантовых отношений.

1. Мы начнем с исследования одного более простого уравнения.

Т е о р е м а 1. Если пара u, v элементов какой-либо группы удовлетворяет уравнению

$$uvu^{-1}v^{-1} = aba^{-1}b^{-1}, \tag{1}$$

то пары

$$\langle u, v \rangle U^m = \langle uv^m, v \rangle, \quad \langle u, v \rangle V^m = \langle u, vm^m \rangle \quad (m = 0, \pm 1, \dots)$$

также удовлетворяют уравнению (1).

В свободной группе со свободными порождающими $a, b, \dots$ все решения уравнения (1) могут быть получены из тривиального решения a, b конечным числом преобразований вида U^m и V^m .

Первое утверждение теоремы очевидно. Второе утверждение будем доказывать индукцией по сумме длин слов u, v , предполагая их несократимыми. Если $(\text{дл.} u + \text{дл.} v) = 2$, то $u = a, v = b$.

Пусть теперь u, v — какие-нибудь несократимые слова, удовлетворяющие уравнению (1), и $(\text{дл.} u + \text{дл.} v) > 2$. По индукции можно считать, что все решения с меньшей суммой длин получаются из тривиального решения конечным числом последовательных преобразований вида U^m, V^m .

Так как длина слова $uvu^{-1}v^{-1}$ больше 4, то оно должно быть сократимым. Рассмотрим следующие случаи:

1) Слово uv сократимо, и при полном его сокращении сокращается более половины слова v , т. е. $u = u_1p, v = p^{-1}v_1, \text{дл.} v < 2 \text{ дл.} p$, где слова $u_1p, p^{-1}v_1$ несократимы. Но тогда решение $\langle u_1v_1, v \rangle$ ввиду неравенства

$$\text{дл.}(u_1v_1) = \text{дл.} u - (2 \text{ дл.} p - \text{дл.} v) < \text{дл.} u$$

* Алгебра и логика, 1962, 1, № 5, 45—50.

** Диофантовы отношения — специальный случай позитивных отношений, исследованных позднее в работе Ю. И. Мерзляков. Позитивные формулы на свободных группах. — Алгебра и логика, 1966, 5, № 4, 25—42. — Прим. ред.

имеет меньшую сумму длин слов, а решение $\langle u, v \rangle$ получается из $\langle u_1v_1, v \rangle$ преобразованием U^{-1} .

2) Слово uv сократимо, и при полном его сокращении сокращается более половины слова u , т. е. $u = u_1p$, $v = p^{-1}v_1$, $\text{дл.} u < 2 \text{ дл.} p$, где слова u_1p и $p^{-1}v_1$ несократимые. Решение $\langle u, v \rangle$ получается преобразованием VU^{-1} из решения $\langle u_1v_1, u^{-1} \rangle$, которое ввиду соотношений

$$\text{дл.} \langle u_1v_1 \rangle = \text{дл.} v - (2 \text{ дл.} p - \text{дл.} u) < \text{дл.} v$$

снова имеет меньшую сумму длин слов.

3) Сократимо слово vu^{-1} или $u^{-1}v^{-1}$, и при полном сокращении сокращается более половины одного из сомножителей. Как и в случаях 1), 2), легко проверяется, что решение $\langle u, v \rangle$ снова получается преобразованиями типа U^m , V^m из решения с меньшей суммой длин слов.

4) Пусть для решения $\langle u, v \rangle$ ни один из случаев 1) — 3) места не имеет. Тогда при полном сокращении слова $uvu^{-1}v^{-1}$ ни одно из слов u , v , u^{-1} , v^{-1} не может сократиться целиком. В самом деле, для крайних слов u , v^{-1} это ясно, так как сокращается не более половины каждого из слов u , v , u^{-1} , v^{-1} . С другой стороны, если бы целиком сократился сомножитель v или сомножитель u^{-1} , то половина его сократилась бы слева и половина справа. Это значило бы (в случае сокращения слова v), что

$$u = u_1p, \quad v = p^{-1}q, \quad u^{-1} = q^{-1}u_2, \quad (2)$$

где $\text{дл.} p = \text{дл.} q$. Но тогда из несократимости представлений (2) и условия $u_1p = u_2^{-1}q$ следует, что $p = q$, т. е. $v = 1$, что невозможно.

Итак, после сокращения слова $uvu^{-1}v^{-1}$ ни один из его сомножителей целиком не сокращается и, значит, после сокращения от слов u , v , u^{-1} , v^{-1} остаются остатки a , b , a^{-1} , b^{-1} . Так как сокращается не более половины слов u , v , то должны иметь место разложения $u = ap$, $v = p^{-1}b$, где $\text{дл.} p = 1$. Однако тогда выражение $uvu^{-1}v^{-1}$ не равно $aba^{-1}b^{-1}$ и, следовательно, случай 4) невозможен.

2. Символом F далее обозначается свободная группа с фиксированными свободными порождающими a , b . Через F' будем обозначать коммутант группы F .

Произвольный элемент u из F допускает одну и только одну запись вида $a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} c$ ($c \in F'$; $\alpha_1, \alpha_2 = 0, \pm 1, \dots$). Упорядоченную пару $\langle u, v \rangle$ элементов группы F вида

$$u = a^{\alpha_{11}} b^{\alpha_{12}} c_1, \quad v = a^{\alpha_{21}} b^{\alpha_{22}} c_2 \quad (c_1, c_2 \in F')$$

условимся называть положительной, если $\det \|\alpha_{ij}\| > 0$, и отрицательной, если $\det \|\alpha_{ij}\| < 0$. В частности, если пара u, v порождает F , то $\det \|\alpha_{ij}\| = \pm 1$ и, значит, каждая пара порождающих либо положительна, либо отрицательна. Наконец, если пара $\langle u, v \rangle$ отрицательна, то пара $\langle v, u \rangle$ положительна, и наоборот.

Аutomорфизмы F будем рассматривать как правые операторы, и произведение $\varphi\psi$ автоморфизмов F определяем формулой

$$u \cdot \varphi\psi = u\varphi \cdot \psi.$$

Матрицей автоморфизма φ (символически $\|\varphi\|$) будем называть матрицу $\|\alpha_{ij}\|$, где

$$a\varphi = a^{\alpha_{11}} b^{\alpha_{12}} c_1, \quad b\varphi = a^{\alpha_{21}} b^{\alpha_{22}} c_2 \quad (c_1, c_2 \in F').$$

Автоморфизм φ назовем положительным, если $\det \|\alpha_{ij}\| = 1$, т. е. если пара порождающих $a\varphi, b\varphi$ положительна.

Так как для любых автоморфизмов φ, ψ справедлива формула $\|\varphi\psi\| = \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$, то положительные автоморфизмы составляют подгруппу в группе всех автоморфизмов F .

Согласно теореме Чанга [1], автоморфизм φ группы F тогда и только тогда внутренний, когда

$$a\varphi \equiv a, \quad b\varphi \equiv b \pmod{F'}.$$

Отсюда непосредственно следует

Т е о р е м а 2. Автоморфизмы C, D, A группы F , определяемые формулами

$$aC = ab, \quad bC = b; \quad aD = a, \quad bD = ba; \quad aA = a, \quad bA = a^{-1}ba, \quad (3)$$

являются порождающими группы положительных автоморфизмов F .

В самом деле, матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, отвечающие автоморфизмам C, D , порождают всю группу целочисленных матриц 2-го порядка, имеющих определитель 1. Поэтому для каждого положительного автоморфизма φ найдутся такие целые $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$, что

$$\|\varphi\| = \|C\|^{\alpha_1} \|D\|^{\beta_1} \dots \|C\|^{\alpha_n} \|D\|^{\beta_n}.$$

Автоморфизм $\varphi D^{-\beta_n} C^{-\alpha_n} \dots D^{-\beta_1} C^{-\alpha_1}$ имеет единичную матрицу и, значит, по теореме Чанга, является внутренним.

Группа внутренних автоморфизмов F порождается автоморфизмом A и автоморфизмом B , определяемым формулой

$$aB = b^{-1}ab, \quad bB = b.$$

Так как $B = CA^{-1}C^{-1}A$, то φ может быть выражен лишь через C, D, A .

3. С помощью теорем 1, 2 легко доказывается и основная

Т е о р е м а 3. Уравнение

$$zxux^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1} \quad (4)$$

разрешимо относительно z в свободной группе F со свободными порождающими a, b тогда и только тогда, когда x, y — положительная пара свободных порождающих F .

Пусть некоторые элементы x, y, z группы F связаны соотношением (4). Тогда $u = xzx^{-1}$ и $v = yzy^{-1}$ есть решение уравнения (1). Согласно теореме 1 пара u, v получается из пары a, b преобразованиями U^m, V^m . Так как эти преобразования переводят положительную пару порождающих в положительную пару, то пара u, v , а значит, и пара x, y суть положительные пары порождающих F .

Обратно, пусть x, y — какая-либо положительная порождающая пара. Обозначим через φ автоморфизм F , переводящий пару a, b в пару x, y . Согласно теореме 2 для подходящих $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$ имеем

$$\varphi = C^{\alpha_1} D^{\beta_1} \dots C^{\alpha_n} D^{\beta_n} \chi,$$

где χ — некоторый внутренний автоморфизм. Но

$$(aba^{-1}b^{-1})C = (aba^{-1}b^{-1})D = aba^{-1}b^{-1}$$

и потому

$$xyx^{-1}y^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})\varphi = (aba^{-1}b^{-1})\chi. \quad (5)$$

Пусть автоморфизм χ производится элементом z . Тогда из (5) получаем $xyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$.

С л е д с т в и е. В свободной группе F со свободными порождающими a, b формула

$$\Phi(x, y) \stackrel{\text{df}}{=} (\exists z)(xyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}) \vee (\exists z)(zyxy^{-1}x^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1})$$

истинна тогда и только тогда, когда элементы x, y порождают F .

Действительно, если элементы x, y порождают F , то либо пара x, y , либо пара y, x положительна, и потому формула Φ истинна. Обратное очевидно.

4. В связи с изложенным было бы интересно знать, является ли формульным отношение « $x_1, \dots, x_s$ — свободные порождающие группы» в свободной группе с s свободными порождающими $a_1, \dots, a_s$, а также существует ли для отношения $\Phi(x, y)$ в группе F формула, не содержащая индивидуальных предметных символов a, b .

Если вместо абсолютно свободных групп рассматривать свободные нильпотентные группы данной ступени, то первый вопрос решается весьма просто.

Пусть V_{sn} — свободная нильпотентная группа n -й ступени с s свободными порождающими. Известно, что члены нижнего центрального ряда $V_{sn}, V_{sn}^{(2)}, \dots, V_{sn}^{(n+1)}$ группы V_{sn} являются формульными (подгруппами). С другой стороны, элементы $x_1, \dots, x_s$ группы V_{sn} тогда и только тогда порождают группу V_{sn} , когда смежные классы $x_1V_{sn}^{(3)}, \dots, x_sV_{sn}^{(3)}$ являются порождающими свободной метабелевой группы $V = V_{sn}/V_{sn}^{(3)}$. Поэтому, имея формулу, характеризующую системы свободных порождающих в свободной метабелевой группе, стандартным путем получаем и формулу, характеризующую свободные порождающие в свободных нильпотентных группах высших ступеней.]

Итак, пусть V — свободная метабелева группа с s свободными порождающими и пусть $a_1, \dots, a_s$ — какая-нибудь система порождающих V . Докажем сначала, что в группе V формула

$$L(x) \stackrel{\text{df}}{=} (\forall y, v) (\exists w) (xy = yx \rightarrow (y, v) = (x, w))$$

истинна для тех и только тех элементов $x \in V$, которые могут быть представлены в виде

$$x = a_1^{\alpha_1} \dots a_s^{\alpha_s} z \quad ((\alpha_1, \dots, \alpha_s) = 1, z \in V^{(2)}).$$

В самом деле, пусть элемент x имеет этот вид и $xy = yx$. Подбираем целые числа α_{ij} ($i, j = 1, \dots, s$) так, чтобы $\alpha_{11} = \alpha_1, \dots, \alpha_{1n} = \alpha_n$ и $\det \|\alpha_{ij}\| = 1$. Тогда элементы $b_i = a_1^{\alpha_{i1}} \dots a_s^{\alpha_{is}}$ ($i = 1, \dots, s$) будут порождать V и потому найдется такой автоморфизм φ группы V , для которого $b_i\varphi = a_i$. Из условия $x\varphi \cdot y\varphi = y\varphi \cdot x\varphi$ теперь непосредственной проверкой получаем $y\varphi = a_1^m z$ или $y = x^m z_1$. Но в таком случае $(y, v) = (x^m, v) = (x, v^m)$ и, следовательно, формула $L(x)$ истинна.

Обратно, пусть для некоторого x формула $L(x)$ истинна. Так как $(a_1, a_2) \neq 1$, то $x \in V^{(2)}$, и потому x имеет вид

$$x = (a_1^{\alpha_1} \dots a_s^{\alpha_s})^m z \quad ((\alpha_1, \dots, \alpha_s) = 1, z \in V^{(2)}),$$

т. е. $x\varphi = a_1^m z_1$, где φ — указанный выше автоморфизм V . Так как вместе с формулой $L(x)$ формула $L(x\varphi)$ также истинна и $a_1 x\varphi = x\varphi a_1$, то для $v = a_2$ должен найтись элемент w , для которого $(a_1^m, w) = (a_1, a_2)$. Однако это невозможно, если $|m| > 1$. Действительно, мы имеем $(a_1, a_2) = (a_1, w)^m$, тогда как уравнение $(a_1, a_2) = u^m$ в свободной метабелевой группе при $|m| > 1$ решений не имеет.

Из приведенных рассуждений также следует, что если $L(x)$ истинно и $xy = yx$, то $y \equiv x^\alpha \pmod{V^{(2)}}$.

Т е о р е м а 4. В свободной метабелевой группе V с s свободными порождающими формула

$$L(x_1, \dots, x_s) \stackrel{\text{def}}{=} L(x_1) \& \dots \& L(x_s) \& (\forall u) (\exists y_1, \dots, y_s) (y_1 x_1 = x_1 y_1 \& \dots \\ \dots \& y_s x_s = x_s y_s \& u y_1 \dots y_s \in V^{(2)})^m$$

истинна тогда и только тогда, когда элементы $x_1, \dots, x_s$ порождают всю группу.

Формула $L(x_1, \dots, x_s)$, очевидно, истинна, если $x_1, \dots, x_s$ — свободные порождающие V . С другой стороны, если формула $L(x_1, \dots, x_s)$ истинна, то $L(x_i)$ истинна и из $x_i y_i = y_i x_i$ согласно сказанному выше следует, что $y_i \equiv x_i^\alpha$. Вторая часть формулы $L(x_1, \dots, x_s)$ поэтому утверждает, что каждый элемент $u \in V$ сравним по модулю $V^{(2)}$ с подходящим произведением степеней элементов $x_1, \dots, x_s$, и, следовательно, система $x_1, \dots, x_s$ порождает V .

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Chang. The automorphic group of the free group with two generators.— Mich. Math. J., 1960, 7, N 1, 79—81.
2. А. И. Мальцев. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями.— Мат. сб., 1950, 26, № 1, 19—33.

К ИСТОРИИ АЛГЕБРЫ В СССР ЗА ПЕРВЫЕ 25 ЛЕТ*



Алгебра — одна из наиболее подвижных частей математики, и нелегко сколько-нибудь точно отграничить ее от остальных разделов математики. Объем, содержание и даже характер алгебраических исследований претерпели особенно сильные изменения в последние два десятилетия. Еще до 50-х годов текущего столетия алгебра рассматривалась как одна из весьма абстрактных ветвей математики, вырабатывавших новые понятия и методы, проликавшие затем в более конкретные «прикладные» области математики и уже через посредство последних влиявшие на естествознание и технику. Начиная с 50-х годов положение стало существенно иным. В эти годы алгебра нашла новые непосредственные выходы в естествознание, по своему значению вполне сравнимые с выходами любой другой области математики, как «чистой», так и «прикладной». Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить роль теории групп в современной физике или роль методов общей теории алгебраических систем в решении задач синтеза и математического обеспечения больших вычислительных систем.

До середины XIX века алгебра чаще всего определялась как наука о решении алгебраических уравнений. Это определение стало явно несправедливым во второй половине XIX века, когда особенной высоты достигли исследования по теории групп, конечных и непрерывных, по теории полей алгебраических чисел и алгебраических функций, по гиперкомплексным числам. Вершиной алгебры в этот период считается теория Галуа, многие проблемы которой, возникшие в эти годы, надолго будут привлекать внимание исследователей. Из них наиболее ортодоксальные алгебраисты будут в течение десятилетий считать классическую проблематику теории Галуа «главной» в алгебре, и к проблемам этой области неизменно будет приписываться слово «знаменитая». Тем не менее в соответствии с общим духом времени в начале XX века начинается период перестройки алгебры на теоретико-множественном и аксиоматическом фундаменте. Возникают абстрактная теория полей, абстрактная теория групп, рядом с теорией групп Ли вырастает общая теория топологических групп и т. п. В 20-х годах все эти новые области алгебры получают даже наименование «современной алгебры». Крупнейшей фигурой в этот период был Давид Гильберт (1862—1943), нашедший правильные пути органического соединения общих теоретико-множественных концепций и классической математики XIX века. С переездом Гильберта в Геттинген Геттингенский университет вплоть до прихода к власти фашистов оставался одним из крупнейших центров мировой математической мысли. Связи между математиками Московского и Геттингенского университетов в 20-х и начале 30-х годов сыграли заметную положительную роль в развитии алгебры и соседних с нею областей науки.

* Алгебра и логика, 1971, 10, № 1, 103—118. (Статья датирована 9 июня 1967 г. Печатается по рукописи, хранящейся у Н. П. Мальцевой.) — *Прим. ред.*

С 30-х годов в алгебре все большее значение начинают приобретать структуры, связанные с математической логикой. Изучение их потребовало объединения методов математической логики и аксиоматической алгебры. В результате возникла обширная новая область математики — общая теория алгебраических систем, или теория моделей, пограничная между алгеброй и логикой и обладающая глубокими связями с самыми разнообразными математическими дисциплинами. Нам кажется, что расцвет общей теории алгебраических систем и ее многочисленных подразделений (строение формальных теорий, структура аксиоматизируемых классов, итеративные системы и классы автоматов) является в какой-то мере характерной чертой развития алгебры второй половины XX века. Столь же характерной чертой современной алгебры можно считать исключительный размах исследований по алгебраической геометрии, ныне обычно выделяемой из алгебры в особую науку, а также по теории категорий и гомологической алгебре и по теории таких классических объектов, как группы, кольца и решетки. С конца прошлого века алгебраические исследования, проводимые в нашей стране, начинают составлять существенную часть общего потока мировых алгебраических исследований. Более заметной эта часть стала в 30-е годы и в особенности в послевоенные годы — годы подлинного расцвета советской науки и культуры. Ниже мы попытаемся более подробно проследить процесс возникновения и развития основных советских алгебраических школ в первую четверть века существования Советского государства, а также кратко отметить некоторые из наиболее существенных открытий в области алгебры, сделанных в этот период.

1. Алгебра в России в предреволюционные годы. Обзор развития алгебры в СССР, написанный Н. Г. Чеботаревым и опубликованный в сборнике «Математика в СССР за 15 лет», начинается замечанием, что в нашей стране... «математики начали заниматься вопросами алгебры сравнительно недавно, значительно позже того, как в других областях — анализе, геометрии, даже теории чисел — они основали самостоятельные школы, проложившие в математике новые пути...». Действительно, в России до Октябрьской революции не было устойчивых алгебраических школ. Тем не менее в конце прошлого и начале нынешнего столетий в нашей стране был выполнен ряд первоклассных алгебраических исследований, оставивших большой след в истории математики. В первую очередь мы хотим здесь отметить замечательные работы Е. И. Золотарева, Е. С. Федорова, Ф. Э. Молина, а также Н. А. Васильева.

Егор Иванович Золотарев (1847—1878), профессор Петербургского университета и адъюнкт Академии наук, одновременно с Дедекиндом разработал теорию делимости в полях алгебраических чисел. В отличие от Дедекинда, положившего в основу своей теории понятие идеала, Е. И. Золотарев строил теорию делимости фактически на понятии нормирования. Оба эти понятия стали центральными в современной теории колец и полей. Ранняя смерть прервала эти важнейшие исследования Е. И. Золотарева.

Трудами Евграфа Степановича Федорова (1853—1919), выдающегося представителя математического естествознания указанного периода, начинается история русской, а затем и советской теории групп. Изучая кристаллические решетки, Е. С. Федоров пришел к мысли классифицировать их по группам симметрий. Для реализации этой идеи надо было предварительно изучить вообще группы симметрий, т. е. дискретные подгруппы группы изометрических преобразований трехмерного евклидова пространства. В клас-

сическом сочинении «Симметрия правильных систем фигур» (СПб, 1890) Е. С. Федоров дал вывод всех возможных 230 классов указанных подгрупп, обладающих конечной фундаментальной областью. По окончании работы выяснилось, что этой же задачей занимался немецкий математик А. Шенфлис (1891). Первоначально оба они допустили некоторые неточности в составлении таблиц этих «федоровских» групп, но обмен письмами позволил установить окончательную таблицу указанных 230 классов. Позже к тем же результатам пришел независимо английский математик Барлоу (1894).

Своеобразно сложилась жизнь третьего из упоминавшихся в начале этого раздела алгебраистов — Федора Эдуардовича Молина (1861—1944). Он родился в Риге и в 1883 г. кончил Дерптский университет с ученой степенью кандидата астрономии. С 1883 по 1885 г. Ф. Э. Молин работал в Лейпциге в семинаре Ф. Клейна, по совету которого начал заниматься линейными преобразованиями эллиптических функций. После возвращения в Дерптский университет Ф. Э. Молин был назначен доцентом и в последующие 6 лет выполнил исследования, давшие ему место в истории алгебры. В 1892 г. им публикуется статья «О системах высших комплексных чисел». Говоря на современном языке, в этой статье по аналогии с понятием простой группы Ф. Э. Молин определил простые алгебры над полем комплексных чисел, показал, что они суть алгебры матриц, и, наконец, обнаружил, что изучение произвольной алгебры над полем комплексных чисел приводится к случаю, когда фактор-алгебра по радикалу есть прямая сумма тел. В последовавших за этим мемуаром небольших заметках Ф. Э. Молин применяет указанные результаты к теории представлений конечных групп. Перекликавшиеся с исследованиями Фробениуса, Киллинга и Ли исследования Молина сразу получили международное признание, доставив ему золотую медаль Парижской Академии наук. В одном из писем Молину Г. Фробениус, в частности, говорит, что Молин «одним ударом дал почти полное решение наиболее важных вопросов в этой области». К сожалению, ни в Московском, ни в Петербургском университетах не нашлось в то время влиятельных лиц, которые смогли бы оценить эти работы Ф. Э. Молина, и, получив за них степень доктора, он должен был поехать ординарным профессором математики в только что тогда открытый Томский технологический институт. Здесь текущие заботы об организации преподавания, устройстве библиотеки и другие виды деятельности, жизненно необходимые для нового, отдаленного от столицы вуза, надолго отрывают его от потока живой международной математической жизни. В 1917 г. Ф. Э. Молин назначается профессором математики физико-математического факультета вновь открытого Томского университета, целиком погружается в организацию этого факультета и публикует время от времени заметки научно-методического характера. Долгое время Томск был культурной столицей Сибири, и в теперешнем расцвете сибирской математики есть и доля, принадлежащая Ф. Э. Молину.

Некоторые разделы современной алгебры посвящены изучению алгебраических структур, возникших в математической логике. Работы этого рода в России были начаты в Казанском университете, сохранявшем долгое время новаторские традиции Лобачевского. Здесь Платон Сергеевич Порецкий (1846—1907), в частности, прочитал в 1887/88 г. первый в нашей стране курс математической логики. Работы П. С. Порецкого были посвящены в основном алгебре логики, т. е. алгебрам Буля. Уже после смерти П. С. Порецкого Казанский университет снова стал родиной яркой новой идеи — идеи многозначных логик, выдвинутой Н. А. Васильевым.

Николай Александрович Васильев (1880—1940) родился в семье известного казанского математика А. В. Васильева, впоследствии избранного членом Государственного Совета и переехавшего в Петербург. 22 мая 1904 г. после сдачи госэкзаменов Н. А. Васильев получил степень лекаря с отличием, но уже в 1906 г. он держал экзамены в Историко-филологической испытательной комиссии Казанского университета, представив сочинение «Вопрос о падении Западной Римской Империи в историографической литературе и истории философии в связи с теорией истощения народов и человечества». В 1910 г. он был зачислен приват-доцентом по кафедре философии и получил разрешение читать на историческом факультете курс «Основные проблемы логики с их кратким историческим обзором». 12 января 1911 г. в газете «Казанский Телеграф» было помещено объявление: «Председатель физико-математического общества при Императорском университете просит гг. членов общества пожаловать на заседание, имеющее быть в четверг 13 января в 8 ч. вечера в аудитории 5 нового университетского пристроя. Предметом заседания послужат: 1) Доклад Н. А. Васильева — Неевклидова геометрия и неаристотелева логика. 2) Текущие дела».

По-видимому, доклад (пишет В. В. Морозов) носил характер сенсации, ибо если обычно на заседаниях Общества присутствовало 8—9 человек, то здесь было 20 членов Общества и 100 посторонних лиц. В протоколе заседания (Известия КФМО, 1911, 17, № 1) отмечается, что «доклад вызвал необыкновенно оживленные прения и обмен мнений как со стороны членов общества, так и со стороны посторонних лиц». Газета «Камско-Волжская речь» от 16, 19 и 22 января 1911 г. поместила весьма подробное изложение доклада Н. А. Васильева и последовавших прений. Вот некоторые выдержки из этого изложения, довольно правильно отражающие (не всегда точно разработанные) положения докладчика. Изыскания докладчика о частных суждениях «...подсказали ему сомнение вообще в абсолютной достоверности и необходимости для всякого мыслящего существа аристотелевой логики. И он решил подвергнуть проверке господствующие представления об аристотелевой логике, воспользовавшись для этого методом Лобачевского. Лобачевский отверг 5-й постулат Евклида ...и попробовал построить геометрию без этого постулата. Оказалось, что и без 5-го евклидова постулата возможна геометрия иная, чем геометрия евклидова, но столь же чуждая противоречий. Оказалось, таким образом, что евклидова геометрия является ... (лишь) одной из возможных геометрий, которые все имеют такие же, как и евклидова, права на признание их «истинности». Таким же образом Н. А. Васильев попробовал устранить один из аристотелевых законов, а именно закон противоречия, принимавшийся за логическую аксиому, оказалось, что возможны вполне стройные и замкнутые логические системы без этого закона, т. е. точно так же, что аристотелева логика является одной из возможных равно «истинных» логик...» Как в геометрии Лобачевского прямые могут быть пересекающиеся, расходящиеся, параллельные, так и в неаристотелевой логике «суждения» могут быть утвердительные, отрицательные, индифферентные.

Отсюда видно, что логика Васильева была вариантом трехзначной логики, хотя и без достаточно разработанной ее «алгебры». Это дает Н. А. Васильеву почетное место в истории науки в ряду основателей многозначных логик. Заметим, что почти одновременно с докладами Н. А. Васильева была опубликована знаменитая критика закона исключенного третьего Л. Е. Брoutersa (1908), проложившая пути для ряда новых математико-логических

концепций. Эта критика, по-видимому, была неизвестна Н. А. Васильеву, а работы Н. А. Васильева, в свою очередь, остались неизвестными Лукасевичу (*J. Lukasiewicz. O logice trojwartosciowe, Ruch Pilozoficzny*, 1920, 5, 170—171) и Посту (*E. Post, Intr. to general theory of elementary propositions, Amer. J. Math.*, 1921, 43, 183—185), когда они строили систематическую теорию алгебр многозначных логик.

Ряд крупных советских алгебраистов вышли из семинаров, проведенных в 1910—1912 гг. в Киевском университете профессором Дмитрием Александровичем Граве (1863—1939). Сам Д. А. Граве не внес в алгебру сколько-нибудь заметных новых идей; однако он был выдающимся популяризатором алгебры, умевшим увлечь своих студентов ее концепциями. Под влиянием Д. А. Граве в Киевском университете начинали свою деятельность Н. Г. Чеботарев (1894—1947), О. Ю. Шмидт (1891—1956), Б. Н. Делоне (р. 1890) и работающий ныне в Швейцарии А. Островский. Написанные с большой увлеченностью книги Д. А. Граве также способствовали распространению у нас алгебраических идей.

2. Первое послереволюционное 25-летие. Великая Октябрьская социалистическая революция произвела коренную перестройку системы образования и научно-исследовательской работы в нашей стране, приведшую, в частности, к быстрому росту математических наук и возникновению крупных советских математических школ. Естественно, что в первые годы наиболее быстро развивались те области математики, в которых к этому времени оказались крупные ученые, способные организовать исследовательскую работу в широких масштабах. Как уже отмечалось, советская алгебра не получила в наследство устойчивых или складывавшихся ко времени революции научных школ. Наиболее яркие алгебраисты начала и середины 20-х годов вышли из стен Киевского университета, но в нем не остались. Это на первых порах несколько задержало развитие алгебры в нашей стране. Тем не менее к началу 30-х годов в нашей стране было около десяти профессоров, занимавшихся алгебраическими проблемами, и среди них Н. Г. Чеботарев, О. Ю. Шмидт, А. К. Сушкевич, Б. Н. Делоне, М. Ф. Кравчук, Ф. Э. Молин и Д. А. Граве.

Николай Григорьевич Чеботарев (1894—1947) окончил в 1916 г. Киевский университет. Занимаясь теорией алгебраических чисел, Н. Г. Чеботарев в 1923 г. опубликовал выдающуюся работу о плотности простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок. Доказанная в этой работе теорема о плотности и примененный при ее доказательстве прием оказали существенное влияние на развитие теории алгебраических чисел в 20-х годах. После не вполне успешных попыток найти удовлетворительные условия для научной работы в Одессе и Москве Н. Г. Чеботарев в 1928 г. окончательно переходит на работу в Казанский университет, где ему удается не только выполнить ряд блестящих работ, но и создать одну из главных советских алгебраических школ. В 30—40-е годы Москва и Казань были главными нашими центрами, где велись основные работы по теории групп Ли. Большую известность получили теорема Адо о существовании точного линейного представления любой алгебры Ли над полем характеристик 0, теорема самого Н. Г. Чеботарева о максимальных разрешимых подалгебрах алгебр Ли и теоремы В. В. Морозова о максимальных неполупростых подалгебрах и централизаторе полупростой подалгебры, вошедшие во все современные учебники по теории групп Ли. Много внимания в школе Н. Г. Чеботарева было уделено вопросам о расположении корней полиномов и некоторых

типов трансцендентных чисел. Большой интерес вызывали также исследования Н. Г. Чеботарева по проблеме резольвент в различных ее постановках. Большое значение имели написанные Н. Г. Чеботаревым книги: «Основы теории Галуа», ч. I (1934), ч. 2 (1937), «Теория групп Ли» (1940).

3. Топологические группы. В отличие от школы Н. Г. Чеботарева, разрабатывавшей преимущественно классические направления алгебры, в Московском университете к концу 20-х годов начались широкие исследования по новым аксиоматическим областям алгебры. Это произошло вполне естественно, так как главная база для абстрактной алгебры — теория множеств и теоретико-множественная топология достигли в Московском университете в 20-х годах высокого развития, сделав его одним из главных мировых центров в указанных областях математики. Положительное влияние на проникновение в МГУ алгебраической проблематики оказал П. С. Александров, имевший в те годы тесные связи с Геттингенской математической школой. По-видимому, 1927 год можно считать годом официального рождения московской алгебраической школы. В этом году Л. С. Понтрягин, тогда 19-летний студент МГУ, написал свою первую работу «О законе двойственности Александера», где первостепенную роль уже играли абстрактные абелевы группы, а профессор О. Ю. Шмидт во время пребывания в Геттингене доказал теорему о прямых разложениях абстрактных групп с операторами, излагаемую ныне во всех учебниках по теории групп. В дальнейшем исследования Л. С. Понтрягина привели к созданию у нас школы по топологической алгебре, а деятельность О. Ю. Шмидта привела к возникновению обширной советской школы по абстрактным группам. Значительным событием в алгебраической жизни МГУ стал приезд Эмми Нетер, прочитавшей в 1929 г. курс лекций по теории колец. В начале 30-х годов Л. С. Понтрягин создал свою знаменитую теорию характеров абелевых групп, нашел строение компактных топологических групп и определил числа Бетти компактных групп Ли. Эти работы образуют одну из вершин всей мировой математики 30-х годов. Они были подытожены в монографии «Непрерывные группы» (1938), ставшей классическим руководством в этой области. В конце 30-х — начале 40-х годов непрерывными группами стали заниматься Ф. Р. Гантмахер, А. И. Мальцев, И. М. Гельфанд, и в послевоенное время эта область исследований заняла видное место среди разросшегося потока советских математических исследований.

4. Абстрактная теория групп. Как уже говорилось, основателем этого направления у нас является О. Ю. Шмидт (1891—1956). Отто Юльевич Шмидт окончил в 1913 г. Киевский университет, во время пребывания в котором заинтересовался общей теорией групп. В эти годы в теории групп происходил процесс перехода на аксиоматическую точку зрения, существенно обогатившую теорию групп. Одним из деятелей этого направления был немецкий математик Ремак, опубликовавший в 1911 г. теорему об однозначности разложения конечной группы в произведение далее неразложимых сомножителей. В 1912 и 1913 гг. О. Ю. Шмидт опубликовал два новых простых доказательства этой теоремы. В те же годы он пишет книгу «Абстрактная теория групп» (опубликована в 1916 г.), в течение ряда десятилетий остававшуюся единственным руководством на русском языке по теории групп. После революции О. Ю. Шмидт переезжает в Москву, и основной для него становится большая государственная деятельность (см. Отто Юльевич Шмидт. Жизнь и деятельность. М., 1959). Тем не менее в 1924 и 1926 гг. он печатает две работы по теории конечных групп, свидетель-

ствовавшие о возврате его к исследовательской деятельности. Весной 1927 г. О. Ю. Шмидт провел два месяца в Геттингене, где доказал свою упоминавшуюся выше теорему о прямых разложениях бесконечных групп, известную теперь под именем теоремы Крулля — Шмидта. В 1928/29 г. О. Ю. Шмидт начал читать в МГУ элементарный курс теории групп. Среди его слушателей, оказались С. А. Чунихин, А. А. Кулаков, В. К. Туркин и А. П. Дипман, к которым осенью 1929 г. присоединился аспирант П. С. Александрова, А. Г. Курош, только что переехавший из Смоленска в Москву. Весной 1930 г. начал работать семинар О. Ю. Шмидта по теории групп. Первыми его участниками были упомянутые выше слушатели курсов О. Ю. Шмидта. Проблематика семинара, как вспоминают его участники, почти полностью ограничивалась теорией абстрактных групп, причем одни из участников интересовались лишь конечными, а другие — бесконечными группами. Сам руководитель поддерживал оба направления и был, конечно, прав, хотя разделение на две школы — теории конечных и теории бесконечных групп в советской алгебре сохранилось до сих пор.

Внимание тех участников семинара Шмидта, которые занимались конечными группами, привлекали вопросы, связанные с гипотезой Бернсайда о непростоте конечных групп нечетного порядка. Эта гипотеза была доказана лишь в 1961 г. Томпсоном и Фейтом, и сейчас видно, что в начале 30-х годов просто не было еще технических средств для ее решения. Тем не менее различные «критерии непростоты», полученные кружком О. Ю. Шмидта, сыграли, несомненно, положительную роль в развитии теории групп. Особо следует отметить теорему А. А. Кулакова о числе подгрупп и работы С. А. Чунихина о группах с подгруппами данного вида, которые в последующее время привели его к ряду новых важных понятий и результатов теории конечных групп и возникновению целой школы, которую он основал в г. Гомеле.

Гораздо большее число наших алгебраистов занималось теорией бесконечных абстрактных групп. Исследования в этой области в какой-то мере стимулировались значением абстрактных групп в топологии (фундаментальные группы многообразий, группы гомологий) и в теории колец (абелевы группы с операторами). В обеих этих областях важное место принадлежало абелевым группам. Естественно поэтому, что и в теории абстрактных групп теория абелевых групп заняла видное место. Еще в 1921 г. появилась работа Прюфера, в которой была введена система инвариантов, характеризующих счетные периодические абелевы группы. В 1933 г. Ульм показал, что эта система полная. Работы Л. С. Понтрягина выявили важность изучения другого класса абелевых групп — групп без кручения. Теория этого класса оказалась сложной и привлекающей внимание вплоть до сегодняшнего дня. Основы ее были заложены в 1935—1936 гг. А. Г. Курошем и А. И. Мальцевым (опубликовано в 1937—1938 гг.). Аналогичные работы почти одновременно и независимо были выполнены и на Западе. В конце 30-х годов теорией абелевых групп стали заниматься Л. Я. Куликов, Е. С. Ляпин и ряд других математиков. Особенно значительный вклад в эту область внес Л. Я. Куликов, работы которого во многом определяют ее сегодняшнее лицо. В послевоенные годы теория абелевых групп оказалась тесно связанной с теорией модулей и гомологической алгеброй, где ведущее положение у нас заняли школы Л. А. Скорнякова и Д. К. Фаддеева.

В теории некоммутативных абстрактных групп после уже упоминавшейся теоремы Шмидта о прямых разложениях вторым крупным достижением у

нас стала теорема А. Г. Куроша (1933—1934 гг.) о подгруппах свободного произведения групп. Она является обобщением аналогичной теоремы Нильсона — Шрейера о подгруппах свободных групп, но доказывается независимо от последней и является ныне одной из фундаментальных теорем общей теории групп. Третьим (по времени появления) фундаментальным результатом, полученным у нас в этой области до войны, по-видимому, можно считать теорему ленинградского математика И. А. Грушко о порождающих свободного произведения групп (1939—1940 гг.), также входящую ныне во все сколько-нибудь полные учебники общей теории групп.

В середине 30-х годов и у нас в Москве, и за границей приобрела популярность идея о перенесении теорем теории конечных групп и теорем теории алгебр конечной размерности в общие теории групп и колец. Так как для любых групп и колец указанные теоремы обычно теряли силу, то искали по возможности более слабые условия (иногда называемые условиями типа конечности), при наложении которых теоремы оставались бы верными. Эта идея, в сущности, не была новой, так как она специфична для всего аксиоматического метода, но применительно к каждой из конкретных дисциплин реализуется по-разному. В конце 30-х годов С. Н. Черников пришел к мысли изучать группы, подчиненные двум условиям конечности: 1) локальной конечности (любое конечное множество элементов лежит внутри конечной подгруппы) и 2) условию обрыва убывающих цепочек подгрупп или нормальных подгрупп. В своей общей форме эта программа не завершена еще и до сих пор; но к 1940 г. С. Н. Черникову удалось построить содержательную теорию локально разрешимых групп с условием обрыва убывающих цепочек подгрупп и потому локально конечных.

В середине 30-х годов характер семинара О. Ю. Шмидта меняется: резко возрастает число его участников, заседания его из квартиры Шмидта переносятся в аудиторию МГУ, а главное, из семинара по теории групп он превращается в семинар по абстрактной алгебре, так как на его заседаниях теперь ставятся доклады не только по теории групп, но и по теории колец, полугрупп, решеток (структур) и т. п. Вместе с О. Ю. Шмидтом соруководителем семинара становится А. Г. Курош. Начиная с этого времени, почти на 15 лет семинар Куроша — Шмидта становится основным центром развития в СССР абстрактной алгебры, на заседаниях которого выступали почти все видные наши «абстрактные» алгебраисты тех лет. Не перечисляя здесь многих прекрасных теоретико-групповых результатов, полученных под влиянием этого семинара в 30-х годах, отметим лишь, что почти все они нашли отражение в книге А. Г. Куроша «Теория групп», написанной в конце 30-х годов и вышедшей в свет в 1944 г. во время Великой Отечественной войны.

5. Локальные методы. Зарождение общей теории алгебраических систем. Выше указывалось, что в 1939—1940 годах С. Н. Черникову удалось выяснить строение локально разрешимых групп с условием обрыва убывающих цепочек подгрупп. Пытаясь избавиться от условия обрыва, С. Н. Черников пришел к понятию разрешимой системы подгрупп и доказал, что каждая периодическая локально разрешимая группа обладает разрешимой системой. Исходя из совсем иного круга представлений, понятие разрешимой системы в несколько иной форме одновременно ввел А. И. Мальцев, доказавший существование разрешимых систем у любых (необязательно периодических) локально разрешимых групп. Он же ввел и аналогичное понятие центральной системы подгрупп и доказал соответ-

ствующую локальную теорему, из которой, в частности, вытекало существование центральной системы у локально свободных групп (см. Труды Ивановск. пед. ин-та, 1941, 1). В этой статье упомянутые локальные теоремы, а также ряд других были выведены из весьма общей «локальной теоремы математической логики», полученной А. И. Мальцевым еще в 1932—1933 годах (Мат. сб., 1936, 1) и теперь называемой обычно теоремой компактности или принципом локализации. В этой статье была также указана возможность применения методов «трансфинитной» математической логики в общей теории алгебраических систем, т. е. в теории множеств, снабженных произвольной системой операций и отношений. Сама идея построения теории общих алгебраических систем не была новой. Уже в 20-х годах было принято говорить, что алгеброй называется наука об алгебраических системах. Более того, в конце прошлого века была даже опубликована книга Уайтхеда по общей теории алгебраических систем. Однако конкретные алгебраические исследования вплоть до середины 30-х годов велись почти исключительно в рамках теории групп, колец и решеток (появившихся в конце прошлого века, но ставших объектом самостоятельной теории также лишь в 30-х годах). Лишь на базе развившейся математической логики, по-видимому, стала возможна большая общая теория алгебраических систем. Работы А. Тарского и Г. Биркгофа за границей и упомянутые работы в нашей стране можно, вероятно, считать исходными работами по общей теории алгебраических систем, настоящее широкое развитие которой началось уже только в 50-х годах нашего века.

6. Л и н е й н а я а л г е б р а. Первые работы в нашей стране по теории матриц были выполнены М. Ф. Кравчуком (Труды физ.-мат. отд. Укр. АН ССР, 1924). В 30-е годы он начал более детально исследовать старую задачу о нахождении максимальных коммутативных подалгебр алгебры матриц. Эти работы в конце 40-х годов были продолжены Д. А. Супруненко, получившим в этом направлении ряд фундаментальных результатов, и в 50-е годы создавшим целую минскую школу теории линейных групп. Исследования М. Г. Крейна и Ф. Р. Гантмахера по теории нормальных операторов в эрмитовом пространстве послужили одним из исходных пунктов в развитии функционального анализа.

После Е. С. Федорова к вопросу о классификации дискретных подгрупп группы движений евклидова пространства обратился у нас Б. Н. Делоне, давший вместе с сотрудниками новый вывод 230 федоровских классов и продвинувший дальше изучение свойств этих групп. Детальное изучение свойств этих важных групп и их представлений в послевоенное время продолжали Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеев с группой учеников.

Во второй половине 30-х годов А. И. Мальцев в Москве, В. Л. Нисневич в Минске и Д. И. Фукс-Рабинович в Ленинграде начали изучать строение произвольных линейных групп. Из результатов этих авторов упомянем здесь лишь теорему В. Л. Нисневича о линейной представимости свободного произведения подгрупп линейной группы, локальную теорему для линейных групп и рекурсивность линейных полугрупп с конечным числом порождающих (А. И. Мальцев). В. Л. Нисневич и Д. И. Фукс-Рабинович погибли во время Великой Отечественной войны, А. И. Мальцев в 40-х годах начал заниматься группами Ли, и систематическое изучение структуры линейных групп было продолжено в школе Д. А. Супруненко после окончания войны.

7. П о л я и к о л ь ц а. Теория полей и колец первоначально развивалась у нас как теория полей алгебраических чисел. Упомянутая выше тео-

рема Н. Г. Чеботарева и теорема О. Ю. Шмидта о прямых разложениях представляются нами главными конкретными достижениями советской алгебры 20-х годов. Теория полей алгебраических чисел очень тесно связана с классической теорией чисел, в области которой русская, а теперь советская школа занимала и занимает ведущее положение. После переезда в 1922 г. Б. Н. Делоне в Ленинград был опубликован ряд его известных работ по диофантовым уравнениям 3-й степени, содержащий и ряд геометро-алгебраических идей. В 1930—1940 гг. Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеев выполнили серию работ по созданной ими геометрии теории Галуа. Значительным событием в рассматриваемой области был выход в свет их совместной монографии «Теория иррациональностей 3-й степени» (1940). Большое место в это время в их исследованиях стала занимать так называемая обратная задача теории Галуа и примыкающие к ней постановки проблем. В послевоенные годы это направление стало разрабатываться помимо Ленинграда и в Москве, в школе И. Р. Шафаревича, где в конце 50-х годов началась большая работа и в области алгебраической геометрии.

В отличие от работ по алгебраическим числам, где проблематика была разработана еще на рубеже XIX и XX столетий, работа по общей теории колец началась у нас только в середине 30-х годов. По-видимому, первой по времени или одной из первых была работа А. И. Мальцева (1936—1937 гг.) о погружении колец без делителей нуля в (ассоциативные) кольца с делением, где были найдены необходимые условия для погружаемости и на их основе построен класс ассоциативных колец без делителей нуля, не допускающих вложения в тела. Тем самым была отрицательно решена известная в то время кольцевая «проблема Ван дер Вардена». Однако некоторые возникшие в связи с указанной работой проблемы о погружаемости колец в тела остаются и до сих пор не решенными. В частности, неизвестно, является ли класс погружаемых колец конечно аксиоматизируемым.

В конце 30-х годов А. И. Узков у нас и Асано в Японии, анализируя работу Брандта, показали, что ряд его результатов об идеалах коммутативных колец переносится и на классы ассоциативных колец, удовлетворяющих ряду условий. Эта работа открыла у нас уже в послевоенные годы большую серию по «перенесению» результатов одной области теории колец (и групп) в более широкие области. Другие идеи в теории колец возникли у нас уже во время Великой Отечественной войны, и мы здесь о них говорить не будем.

8. Полугруппы и другие системы. К середине 30-х годов относится и начало разработки у нас теории решеток (структур). Первые исследования в этом направлении были выполнены В. И. Гливенко и А. Г. Курошем. В послевоенные годы к проблематике теории структур обратились многие советские алгебраисты. Ряд интересных результатов был получен в связи с перенесением в теорию структур теоремы Жордана — Гельдера и теоремы Крулля — Шмидта. Обе линии были намечены уже в первых работах А. Г. Куроша.

Особо следует сказать о работах Антона Казимировича Сускевича (1889—1961) по теории полугрупп. Начиная с 1922 г. и до конца жизни, Сускевич почти исключительно занимался полугруппами, и он по праву может быть отнесен к числу основателей этой теперь быстро растущей области алгебры. В течение многих лет теория полугрупп как таковая вызывала несколько скептическое отношение алгебраистов, так как большинство ее результатов было получено перенесением аналогичных теорем теории групп и колец. В какой-то степени итог этому периоду первоначального накопления материала

подвела монография А. К. Сушкевича «Теория обобщенных групп» (Харьков — Киев, 1937). По-видимому, это была вообще первая монография в мировой литературе, посвященная специально теории полугрупп. В связи с общей задачей о погружении алгебр одного класса в алгебры более узких классов специальный интерес представляла задача о вложении полугрупп в группы. Эта задача была решена А. И. Мальцевым (1937—1940), нашедшим бесконечную систему квазитождеств, характеризующих класс вложимых полугрупп, и показавшим, что эта система не эквивалентна никакой конечной системе аксиом. Ряд явлений, обнаружившихся при исследовании указанного класса полугрупп, послужил образцом при построении в послевоенные годы общей теории квазимногообразий.

Расцвет общей теории полугрупп и в нашей стране, и за рубежом начался лишь в 50-е годы.

9. Заключение. Сделаем теперь несколько замечаний о кадрах алгебраистов и их географическом распределении. Как уже отмечалось, в первые послереволюционные годы алгебраистов в нашей стране было очень мало, тем не менее советская алгебра достигла больших успехов. Наиболее крупными активно работавшими советскими алгебраистами этого периода были Н. Г. Чеботарев и О. Ю. Шмидт, о вкладе которых уже говорилось выше. К началу 30-х годов постепенно складываются первые советские алгебраические школы, к этому времени у нас было около десяти профессоров по алгебре и среди них Н. Г. Чеботарев, О. Ю. Шмидт, Б. Н. Делоне, А. К. Сушкевич, М. Ф. Кравчук, Ф. Э. Молин, Д. А. Граве. Положение резко меняется в 30-х годах, и к началу Великой Отечественной войны к уже названным ученым присоединяется десяток новых молодых докторов математики, получивших эту степень за алгебраические исследования. Это были А. А. Кулаков, А. Г. Куроп, С. А. Чунихин, Ф. Р. Гантмахер, А. И. Мальцев (все москвичи), Д. К. Фаддеев (Ленинград), С. Н. Черников и П. Г. Конторович (Свердловск), И. Д. Адо и В. В. Морозов (Казань), а также Л. С. Понтрягин, М. Г. Крейн, И. М. Гельфанд и другие известные математики, работавшие в смежных с алгеброй областях.

Война нанесла огромный урон советской математике, в том числе и советской алгебре. Тем не менее весьма интенсивная работа в области алгебры и ее приложений продолжалась и во время войны, но особенно быстрыми темпами советская алгебра стала развиваться в последние десять лет, когда в науку пришло новое поколение исследователей. В настоящее время у нас плодотворно работает ряд больших алгебраических школ, самые крупные из которых находятся в Москве, Новосибирске, Ленинграде, Киеве, Минске, Свердловске, Кишиневе. Общее число докторов математики, занимающихся алгебраическими исследованиями, достигло у нас четырех-пяти десятков, вместе с которыми работают еще около 300 кандидатов наук; около трети из них сосредоточено в Москве. Уже отмечалось, что развитие алгебраических исследований в нашей стране в первые годы шло медленнее, чем в ряде других областей математики. Хотя последующие годы ознаменовались выдающимися достижениями советской алгебры, еще и сегодня доля советских публикаций, относящихся к алгебре, меньше соответствующей доли в мировой математической литературе. Учитывая, что в последние десятилетия алгебраические исследования тесно переплелись с исследованиями по математической логике и теории автоматов, важность которых очевидна, представляется несомненным, что в ближайшие годы и среди советских математических исследований алгебраические работы будут занимать видное место.



От редколлегии	3
Краткий очерк научной, педагогической и общественной деятельности академика А. И. Мальцева	5
О вложении алгебраических колец в тела	12
Абелевы группы конечного ранга без кручения	16
О включении ассоциативных систем в группы. I	39
О включении ассоциативных систем в группы. II	46
Об изоморфном представлении бесконечных групп мат- рицами	58
О локальных и полных топологических группах	74
Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп	78
Об односвязности нормальных делителей групп Ли . . .	84
Подгруппы групп Ли в целом	88
О разложении алгебры в прямую сумму радикала и полу- простой подалгебры	91
О линейных связных локально замкнутых группах	95
О представлении бесконечных алгебр	98
О полупростых подгруппах групп Ли	117
Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли	146
О разрешимых алгебрах Ли	155
К теории групп Ли в целом	177
Топологические разрешимые группы	201
Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова и Ю. М. Смирнова «Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов»	209
О включении групповых алгебр в алгебры с делением . .	211
О нормированных алгебрах Ли над полем рациональных чисел	214
О группах конечного ранга	218
Об одном классе однородных пространств	220
Нильпотентные группы без кручения	241

Об упорядоченных группах	252
Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы	261
Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями	279
О доупорядочении групп	292
О некоторых классах бесконечных разрешимых групп	294
Симметрические группоиды	314
Об одном представлении неассоциативных колец	328
Мультипликативные сравнения матриц	332
Нильпотентные полугруппы	335
Аналитические лупы	340
Два замечания о нильпотентных группах	346
Группы и другие алгебраические системы	352
Замечания о частично упорядоченных группах	422
Свободные топологические алгебры	425
О гомоморфизмах на конечные группы	450
О частично упорядоченных нильпотентных группах	463
Об уравнении $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе	467
К истории алгебры в СССР за первые 25 лет	472

АНАТОЛИЙ ИВАНОВИЧ МАЛЬЦЕВ

Избранные труды. Т. I

КЛАССИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Утверждено к печати

Институтом математики Сибирского отделения Академии наук СССР

Редактор издательства Н. Н. Бузина. Художник В. Г. Виноградов.
Художественный редактор В. А. Чернецов. Технический редактор П. С. Кашина.

Сдано в набор 14/I 1976 г. Подписано к печати 23/VI 1976 г.
Формат 70×100^{1/16}. Бумага № 2. Усл. печ. л. 39,61. Уч.-изд. л. 38,7
Тираж 4200. Т-09555. Тип. зак. 113. Цена 2 р. 93 к.

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва Г-99, Шубинский пер., 10