

А. И. МАЛЬЦЕВ

Избранные труды

ТОМ
II

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЛОГИКА
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
СИСТЕМ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1976

М а л ь ц е в А. И. Избранные труды Т. II. М., «Наука», 1976, 388 с.

Во второй том Избранных трудов академика А. И. Мальцева вошли работы по математической логике и теории алгебраических систем.

Издание рассчитано на математиков.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ — главный редактор,
П. С. АЛЕКСАНДРОВ, В. А. АНДРУНАКИЕВИЧ, Ю. Л. ЕРШОВ,
М. И. КАРГАПОЛОВ, А. Н. КОЛМОГОРОВ, А. И. КОСТРИКИН,
И. А. ЛАВРОВ—ответственный секретарь, В. Н. ЛАТЫШЕВ,
А. А. МАЛЬЦЕВ, В. В. МОРОЗОВ, С. М. НИКОЛЬСКИЙ,
Л. С. ПОНТЯГИН, Л. А. СКОРНЯКОВ, Д. М. СМИРНОВ,
С. Л. СОВОЛЕВ, А. И. СТАРОСТИН,
А. И. ШИРШОВ—зам. главного редактора**

ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ*



Предлагаемое исследование является обобщением двух теорем, одной — из исчисления высказываний, другой — узкого исчисления предикатов.

Первая теорема установлена Гёделем [1] и формулируется следующим образом:

Для непротиворечивости ** произвольной счетной системы формул исчисления высказываний достаточно, чтобы каждая конечная часть системы была непротиворечива.

В § 1 предлагаемой работы доказывается, что приведенная теорема справедлива не только для счетных систем, но вообще для систем любой мощности.

Вторая теорема в наиболее общей форме была получена Сколемом [2]. Он показал, что нельзя найти даже бесконечной системы формул узкого исчисления предикатов, которая полностью характеризовала бы натуральный ряд чисел.

В § 6 мы докажем следующее более общее утверждение:

Каждая бесконечная область *** любой системы формул узкого исчисления предикатов может быть расширена ****.

Отсюда следует, например, что система формул, которая обладает бесконечной областью, обладает также областями любой мощности, что каждое бесконечное алгебраическое тело имеет расширение и т. д.

Параграфы 2—5 предлагаемой работы посвящены изложению вспомогательных понятий и теорем. В частности, здесь передоказываются некоторые известные результаты Лёвенгейма, Сколема [3] и Гёделя [1].

§ 1. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ (вообще говоря, бесконечное) формул исчисления высказываний. Будем говорить, что множество $\mathfrak{M}$ непротиворечиво, если для всех элементарных высказываний, из которых построены отдельные формулы системы, можно подобрать значения «истина» и «ложь» так, чтобы все формулы из $\mathfrak{M}$ (по правилам исчисления высказываний) получили значение «истина».

Т е о р е м а. *Для того чтобы система $\mathfrak{M}$ формул была непротиворечива, необходимо и достаточно, чтобы каждая конечная подсистема $\mathfrak{M}$ была непротиворечива.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть мощность $\mathfrak{M}$ есть $\aleph_\alpha$. Так как для конечных $\mathfrak{M}$ теорема тривиальна, достаточно доказать, применяя индукцию, что из справедливости утверждения для всех систем мощности меньше чем $\aleph_\alpha$ следует его справедливость для системы $\mathfrak{M}$ мощности $\aleph_\alpha$.

Упорядочим формулы системы $\mathfrak{M}$ в трансфинитную последовательность наименьшего типа Ω_α :

$$\mathfrak{M} = \{A_1(a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^{n_1}), \dots, A_\omega(a_\omega^1, a_\omega^2, \dots, a_\omega^{n_\omega}), \dots\} \quad (1)$$

* Мат. сб., 1963, 1, № 3, 323—335 (перевод с нем.).

** Непротиворечивость бесконечной системы определяется, например, в § 1.

*** См., например, § 2.

**** См. сообщение о результате Тарского в [2].

(a_i^k являются элементарными высказываниями, из которых построена формула A_i). Рассмотрим всевозможные начальные отрезки последовательности $\mathfrak{M}$. Так как тип последовательности является наименьшим, то все отрезки имеют мощность меньше чем $\aleph_\alpha$ и, следовательно, непротиворечивы по предположению. Следовательно, можно для любого произвольного отрезка

$$\mathfrak{M}^\lambda = \{A_i \mid i < \lambda\}$$

подобрать для всех a_i^k значения «истина» и «ложь» так, чтобы все формулы из $\mathfrak{M}^\lambda$ были истинны.

Любое распределение значений «истина» и «ложь» для элементарных высказываний будем называть моделью. Таким образом, для любого отрезка $\mathfrak{M}^\lambda$ существует по крайней мере одна модель M^λ , для которой $\mathfrak{M}^\lambda$ истинно.

Рассмотрим теперь последовательность моделей

$$M^1, M^2, \dots, M^\omega, M^{\omega+1}, \dots, \quad (2)$$

которые соответствуют всевозможным начальным отрезкам последовательности $\mathfrak{M}$. Элементарные высказывания $a_1^1, \dots, a_1^{n_1}$ первого высказывания A_1 имеют для каждой модели M^λ свою систему значений. Так как для элементов $a_1^1, \dots, a_1^{n_1}$ имеется лишь конечное число различных систем значений, то существует такая система значений этих элементов, которая встречается у $\aleph_\alpha$ моделей. Теперь построим формулу A_1^* . Для этой цели припишем знак отрицания тем элементам, которые в выбранной системе значений имеют значение «ложь», и после этого свяжем эти высказывания и все оставшиеся элементы знаками $\&$. A_1^* будет иметь вид

$$A_1^* = b_1^1 \& b_1^2 \& \dots \& b_1^{n_1},$$

где b_1^k равно a_1^k или $\bar{a}_1^k$.

Рассмотрим последовательность $\mathfrak{M}_2$:

$$\mathfrak{M}_2 = \{A_1^*, A_2, A_3, \dots, A_\omega, \dots\}.$$

Каждый начальный отрезок $\mathfrak{M}_2^\lambda$ этой последовательности непротиворечив, так как мы можем в качестве искомой модели взять старую модель M^μ , для которой $\mu > \lambda$, и элементы $a_1^1, \dots, a_1^{n_1}$ обладают значениями, требуемыми формулой A_1^* . Рассматривая отрезки последовательности $\mathfrak{M}_2$ и их модели, мы можем аналогичным образом определить A_2^* и последовательность $\mathfrak{M}_3$:

$$\mathfrak{M}_3 = \{A_1^*, A_2^*, A_3, \dots, A_\omega, \dots\}.$$

Предположим, что мы уже построили последовательности $\mathfrak{M}_\alpha$ для всех $\alpha < \lambda$:

$$\mathfrak{M}_\alpha = \{A_i^* \mid i < \alpha\} \cup \{A_i \mid \alpha \leq i < \lambda\}$$

и при этом каждый начальный отрезок $\mathfrak{M}_\alpha^\mu$ непротиворечив. Пусть сначала $\lambda = \lambda' + 1$. Тогда

$$\mathfrak{M}_{\lambda'} = \{A_i^* \mid i < \lambda'\} \cup \{A_{\lambda'}, \dots\}.$$

Мы найдем $A_{\lambda'}^*$ и так же, как при определении $\mathfrak{M}_2$, получим, что непротиворечив каждый отрезок последовательности

$$\mathfrak{M}_\lambda = \{A_i^* \mid i < \lambda\} \cup \{A_{\lambda'}, A_{\lambda'+1}, \dots\}.$$

Пусть теперь λ — предельный ординал. Положим

$$\mathfrak{M}_\lambda = \{A_i^* \mid i < \lambda\} \cup \{A_\lambda, \dots\}.$$

Нужно доказать, что каждая конечная система высказываний из $\mathfrak{M}_\lambda$ непротиворечива. Возьмем произвольную конечную систему S высказываний из $\mathfrak{M}_\lambda$:

$$S = \{A_{\lambda_1}^*, A_{\lambda_2}^*, \dots, A_{\lambda_k}^*, A_{\lambda_{k+1}}, \dots, A_{\lambda_m}\}.$$

Так как λ предельный, то можно найти такой ординал μ , что $\lambda_1 < \mu$, $\lambda_2 < \mu$, $\dots$, $\lambda_k < \mu$ и $\mu < \lambda$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}_\mu$. Его отрезок $\mathfrak{M}_\mu^{\lambda_{m+1}}$ содержит все формулы системы S и в то же время непротиворечив, так как, по предположению, отрезки последовательностей $\mathfrak{M}_\alpha$ при $\alpha < \lambda$ непротиворечивы. Следовательно, S непротиворечиво, что и требовалось доказать.

Построим, наконец, множество $\mathfrak{M}^* = \{A_\lambda^* \mid \lambda < \Omega_\alpha\}$. Каждая конечная система высказываний A_λ^* непротиворечива, так как она входит в какой-нибудь отрезок $\mathfrak{M}_\mu$. Используя этот факт, очень легко построить модель M^* для множества $\mathfrak{M}^*$. В самом деле, формулы множества $\mathfrak{M}^*$ имеют вид

$$a_\lambda^1 \& \bar{a}_\lambda^2 \& \dots \& a_\lambda^{n_\lambda}.$$

При этом элемент a_λ^i ввиду конечной непротиворечивости может входить в различные формулы, причем либо во все без знака отрицания, либо во все со знаком отрицания. В первом случае мы придаем ему значение «истина», во втором — «ложь». Полученная таким образом модель M^* удовлетворяет каждой формуле A_λ^* и, следовательно, A_λ . Отсюда следует, что система $\mathfrak{M}$ непротиворечива.

§ 2. Как известно, каждое выражение узкого исчисления предикатов можно заменить эквивалентным ему выражением в нормальной форме, т. е. выражением вида

$$(x_1)(x_2) \dots (x_m)(Ey_1) \dots (Ey_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n),$$

где $\mathfrak{A}$ не содержит знаков (x) и (Ex) . В дальнейшем будем предполагать, что каждое исследуемое выражение уже приведено к нормальной форме.

Рассмотрим произвольную (вообще говоря, бесконечную) систему S выражений узкого исчисления предикатов и произвольное множество B с элементами любой природы. Исходя из системы S и множества B , можно построить другие множества, которые мы будем называть конфигурациями множества B . Все конфигурации являются подмножествами универсального множества U , которое строится следующим образом. Пусть

$$A_i(x), \bar{A}_i(x), B_j(x, y), \bar{B}_j(x, y), \dots$$

— элементарные предикаты системы S и их отрицания. Возьмем любой из этих предикатов и подставим в него вместо $(x, y, \dots, z)$ какую-либо комбинацию элементов множества B . Полученное выражение, построенное из предиката с пустыми местами, заполненными элементами множества B , и является по определению элементом универсального множества U . Подставляя в эти предикаты всевозможные комбинации элементов множества B , получим множество выражений указанного вида. Совокупность всех этих выражений составляет множество U .

Как уже сказано, все подмножества универсального множества U называются конфигурациями множества B . Чтобы отличать элементы множества B от элементов универсального множества, мы будем называть последние членами. Два члена множества U называются противоположными, если один из них есть формула, а другой — отрицание этой формулы, причем на соответствующих местах стоят одни и те же элементы множества B . Объединяя противоположные члены, мы разбиваем множество U на пары.

О п р е д е л е н и е. Конфигурация называется полной, если она содержит по крайней мере по одному члену из каждой пары множества U .

О п р е д е л е н и е. Конфигурация непротиворечива, если она не содержит противоположных элементов.

О п р е д е л е н и е. Множество B называется областью системы высказываний, если на этом множестве определены значения элементарных формул таким образом, что выполняются все высказывания рассматриваемой системы.

Чтобы судить, является ли множество B областью системы высказываний S , нужно сначала определить на B значения элементарных формул. Это мы всегда будем делать следующим образом: выбираем какую-либо непротиворечивую полную конфигурацию Q множества B и даем формулам значение «истина» при тех значениях переменных, с которыми они входят в эту конфигурацию. При остальных значениях переменных даем значение «ложь». В случае, когда полученная модель удовлетворяет системе S , множество B с конфигурацией Q является областью системы S . Обратно, если дана область системы S , мы получим соответствующую конфигурацию Q , собирая формулы с теми значениями аргументов, при которых они истинны.

Следует указать еще истолкование элементов универсального множества. Это истолкование лежит в основе всех дальнейших рассуждений. Будем рассматривать все члены универсального множества как различные неопределенные элементарные высказывания исчисления высказываний, причем смотрим на противоположные члены множества как на соответственно противоположные высказывания исчисления высказываний. Теперь мы можем построить из членов множества U различные высказывания исчисления высказываний, пусть $\mathfrak{A}$ одно из них. Рассмотрим связанное с $\mathfrak{A}$ выражение

$$(E)\mathfrak{A} = (Eb_i)(Eb_j) \dots \mathfrak{A},$$

где $b_i, b_j, \dots$ — всевозможные элементы множества B , входящие в те члены множества U , из которых составлено высказывание $\mathfrak{A}$. Выражение $(E)\mathfrak{A}$ является выражением узкого исчисления предикатов. В то же время $(E)\mathfrak{A}$ эквивалентно высказыванию $\mathfrak{A}$, так как вполне понятно, что из выполнимости одного из них следует выполнимость другого.

§ 3. До сих пор мы предполагали, что рассматриваемая система аксиом не содержит отношения тождества. Теперь рассмотрим более общий случай, когда система S содержит отношение тождества. При обобщении результатов предыдущих параграфов мы сталкиваемся с трудностями определения противоречивости конфигурации: например, по определению в § 2 конфигурация

$$A(a, b) \& \bar{A}(a, c) \& b \equiv c,$$

где a, b, c — различные элементы множества B , является непротиворечивой в то время, как при обычном толковании тождества ее следует считать противоречивой. Расширенное определение противоречивости конфигурации Q множества B , содержащее отношение тождества, можно получить следующим

образом: элементам множества B можно сопоставить элементы другого множества $\bar{B}$, причем должны выполняться следующие условия:

1. Каждому элементу множества B соответствует единственный элемент множества $\bar{B}$.

2. Элементам a и b множества B , которые в конфигурации Q связаны отношением $a \equiv b$, соответствует один и тот же элемент множества $\bar{B}$. Напротив, элементам, связанным отношением $a \not\equiv b$, соответствуют различные элементы множества $\bar{B}$.

Заменим далее во всех членах конфигурации Q элементы множества B соответствующими элементами множества $\bar{B}$. В результате получим конфигурацию $\tilde{Q}$ множества $\bar{B}$. Эта конфигурация содержит отношение тождества, однако с тем существенным ограничением, что в $\tilde{Q}$ не входят члены вида:

$$\bar{a} \equiv \bar{b},$$

если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ являются различными элементами множества $\bar{B}$. Вследствие этого для конфигурации $\tilde{Q}$ можно применить данное в предыдущих параграфах определение противоречивости. Отсюда получаем искомое определение противоречивости Q .

О п р е д е л е н и е. Конфигурация Q множества B , содержащая отношение тождества, называется непротиворечивой, если существует множество $\bar{B}$ и соответствующая конфигурация $\tilde{Q}$ непротиворечива в смысле § 2.

Если дана конфигурация Q , содержащая отношение тождества, то можно в двух смыслах говорить об ее непротиворечивости: 1) в смысле определения § 2 и 2) в смысле данного выше определения. В первом случае будем говорить, что конфигурация непротиворечива при относительно понимаемом отношении тождества, во втором — при абсолютно понимаемом тождестве. Непосредственно ясно, что конфигурация, непротиворечивая при абсолютно понимаемом отношении тождества, является также непротиворечивой и при относительно понимаемом тождестве. Обратное неверно, как показывает пример, данный в начале этого параграфа. Следующая лемма дает условия, при которых абсолютно и относительно понимаемые тождества эквивалентны.

Л е м м а. Если конфигурация Q непротиворечива при относительно понимаемом тождестве и, кроме того, удовлетворяет системе аксиом:

$$(x) [x \equiv x],$$

$$(x)(y) [x \equiv y \rightarrow y \equiv x],$$

$$(x)(y)(z) [x \equiv y \& x \equiv z \rightarrow y \equiv z],$$

$$(x)(y) [A(x) \& x \equiv y \rightarrow A(y)],$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(x)(y) \dots (z)(u)(v) \dots (w) [F(x, y, \dots, z) \& x \equiv u \&$$

$$\& y \equiv v \& \dots \& z \equiv w \rightarrow F(u, v, \dots, w)],$$

$$\dots \dots \dots$$

(I)

где $A(x), \dots, F(x, y, \dots, z)$ — всевозможные элементарные формулы рассматриваемой системы S , то можно утверждать, что Q непротиворечива и с абсолютной точки зрения.

Для доказательства мы разобьем множество B , к которому относится конфигурация Q , на классы, объединяя в один класс те элементы, которые связаны в конфигурации Q отношением тождества. Вследствие системы (I)

такое разбиение возможно и классы не содержат общих элементов. В качестве множества B возьмем множество этих классов; каждому элементу множества B соответствует тот класс множества B , в который этот элемент входит. Легко убедиться, что при этом будут выполняться все условия определения абсолютной непротиворечивости, следовательно, конфигурация Q непротиворечива при абсолютно понимаемом отношении тождества.

Из этой леммы следует теорема *:

Т е о р е м а. Пусть система S , записанная в символах узкого исчисления предикатов, содержит отношение тождества. Добавим к S соответствующую систему аксиом тождества (I) и заменим в системе $S + I$ отношение тождества каким-либо вспомогательным элементарным предикатом $\varphi(a, b)$. Новая система S' , которая не содержит больше отношения тождества, эквивалентна системе S .

Достаточно показать, что из непротиворечивости S' следует абсолютная непротиворечивость системы S , так как обратное очевидно. Пусть Q — непротиворечивая конфигурация множества B' , которая удовлетворяет системе S' . Обозначим через Q'' конфигурацию, которая получится, если во всех членах конфигурации Q' заменить предикат $\varphi(a, b)$ опять на отношение тождества $a \equiv b$. Конфигурация Q'' непротиворечива при относительно понимаемом тождестве и удовлетворяет системам I и S . Отсюда следует по лемме, что Q'' непротиворечива и при абсолютно понимаемом тождестве. Таким образом, существует непротиворечивая в абсолютном смысле конфигурация Q'' , которая удовлетворяет системе S , следовательно, система S непротиворечива, что требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. В дальнейшем при переходе от S к S' мы не будем заменять отношение тождества новым предикатом, а ограничимся замечанием, что система S' содержит релятивизованное тождество.

§ 4. Цель этого параграфа — для каждой системы высказываний S узкого исчисления предикатов построить соответствующую систему $\mathfrak{B}$ высказываний исчисления высказываний так, чтобы обе системы были эквивалентны.

Пусть сначала система S конечна. Тогда можно заменить ее высказыванием A вида

$$(\mathfrak{x}_1) \dots (\mathfrak{x}_m) (E y_1) \dots (E y_n) \mathfrak{A}.$$

Пусть далее B — бесконечное множество. В предположении, что выражение A непротиворечиво, мы выберем в дальнейшем из B подмножество B_ω и построим для B_ω непротиворечивую конфигурацию Q_ω , которая удовлетворяет высказыванию A .

Для этой цели возьмем какой-нибудь элемент b_0 из множества B и подставим его на место всех « x » в аксиоме A . Тогда аксиома A будет утверждать существование некоторых элементов $y_1, y_2, \dots, y_n$, которые связаны с b_0 соотношением

$$\mathfrak{A}(b_0, b_0, \dots, b_0, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

В качестве таких « y » выберем какие-либо n элементов множества B , отличных от b_0 . Пусть этими элементами являются $b_1, b_2, \dots, b_n$. Обозначим совокупность элементов $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ через B_1 , отношение

$$\mathfrak{A}(b_0, b_0, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots, b_n),$$

* Аналогичная теорема находится у Сколема [3] и Гёделя [1].

которому они удовлетворяют, — через $\mathfrak{B}_1$. Далее образуем из B_1 всевозможные комбинации (с повторениями) из m элементов и подставим каждую комбинацию на место « x » в аксиоме A . Для каждой такой подстановки аксиома утверждает существование n новых элементов, в качестве которых мы берем каждый раз какие-нибудь n элементов из оставшейся части множества B . Совокупность всех выбранных так элементов, включающую B_1 , обозначаем через B_2 . Элементы множества B_2 удовлетворяют системе соотношений вида

$$\mathfrak{A}(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_m}, b_{k_1}, b_{k_2}, \dots, b_{k_n}),$$

где $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_m}$ — произвольные элементы из B_1 , а $b_{k_1}, b_{k_2}, \dots, b_{k_n}$ — соответствующая группа новых элементов. Обозначим систему этих соотношений, включающую $\mathfrak{B}_1$, через $\mathfrak{B}_2$. Процесс, с помощью которого мы из B_1 и $\mathfrak{B}_1$ получили B_2 и $\mathfrak{B}_2$, можно применить к любому множеству элементов. Будем называть его процессом применения аксиомы A . Таким образом, мы получили множества B_2 , $\mathfrak{B}_2$ применением аксиомы A к множествам B_1 , $\mathfrak{B}_1$. Применяя снова аксиому A к множествам B_2 , $\mathfrak{B}_2$, получим множества B_3 , $\mathfrak{B}_3$ и т. д. При неограниченном повторении этого процесса получим два ряда множеств

$$B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$$

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n, \dots$$

Пусть

$$B_\omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n \cup \dots$$

$$\mathfrak{B}_\omega = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{B}_n \cup \dots$$

При применении аксиомы A к B_ω нам не потребуется новых элементов, так как соответствующие элементы, удовлетворяющие аксиоме A , должны находиться внутри B_ω .

Рассмотрим множество $\mathfrak{B}_\omega$; оно есть система соотношений вида:

$$\mathfrak{A}(b', b'', \dots, b^{(m)}, c', c'', \dots, c^{(n)}),$$

где $b', b'', \dots, b^{(m)}, c', c'', \dots, c^{(n)}$ — элементы множества B_ω . Каждое такое соотношение является высказыванием исчисления высказываний, составленным из элементарных предикатов аксиомы A , у которых пустые места заполнены элементами множества B_ω . Следовательно, можно, применяя определения § 2, сказать, что $\mathfrak{B}_\omega$ есть система таких высказываний исчисления высказываний, которые образованы из элементов универсального множества U_ω , соответствующего множеству B_ω . Если система высказываний $\mathfrak{B}_\omega$ непротиворечива, то существует непротиворечивая конфигурация Q_ω , которая выполняет $\mathfrak{B}_\omega$. Множество B_ω вместе с конфигурацией Q_ω дает нам в этом случае область аксиомы A . Это означает, что из непротиворечивости $\mathfrak{B}_\omega$ следует непротиворечивость высказывания A . Чтобы показать справедливость обратного утверждения, достаточно следующих замечаний:

Каждое высказывание из множества $\mathfrak{B}_\omega$ имеет вид

$$\mathfrak{A}(b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n).$$

Рассмотрим множество (E) $\mathfrak{B}_\omega$ высказываний вида

$$(Eb_1)(Eb_2) \dots (Eb_m)(Ec_1) \dots (Ec_n) \mathfrak{A}(b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n).$$

Все высказывания множества (Е) $\mathfrak{B}_\omega$ являются следствиями формулы A^* . Так как A предполагается непротиворечивым, то выполнимо каждое конечное подмножество высказываний системы (Е) $\mathfrak{B}_\omega$. Отсюда следует по § 2 выполнимость любого конечного множества высказываний системы $\mathfrak{B}_\omega$. Наконец, вследствие теоремы § 1 получаем непротиворечивость всей системы $\mathfrak{B}_\omega$, что и требовалось.

Мы доказали, таким образом, эквивалентность системы высказываний $\mathfrak{B}_\omega$ исчисления высказываний и выражения A узкого исчисления предикатов.

Если система S состоит из бесконечного числа выражений, то нужно вести итерационный процесс следующим образом. Снова выбираем элемент b_0 и применяем к нему по очереди все высказывания системы S . Каждое высказывание требует выбора некоторого числа элементов из B . Собирая эти элементы, получаем множество B_1 (b_0 включается в B_1). Аналогичным образом составляется множество высказываний $\mathfrak{B}_1$. После этого применяем к B_1 опять каждую аксиому системы S . Применение каждой аксиомы дает соответствующие множества B_2^i и $\mathfrak{B}_2^i$. Объединяя все B_2^i и $\mathfrak{B}_2^i$, получаем B_2 и $\mathfrak{B}_2$ и т. д. Действуя аналогично, получаем, наконец, множества B_ω и $\mathfrak{B}_\omega$. Все сказанное ранее по отношению к высказыванию A переносится без изменения на общий случай.

П р и м е ч а н и е. В случае конечной системы S множество B может быть выбрано счетным. В случае бесконечной системы S можно выбрать множество B той же мощности, что система S . Отсюда получается следующее обобщение теоремы Лёвенгейма:

В каждой области бесконечной системы S высказываний узкого исчисления предикатов существует подобласть, мощность которой не превосходит мощности S .

§ 5. Во многих случаях нужно начинать итерационный процесс не с одного элемента, а с множества элементов. Пусть, например, дано множество B_0 и конфигурация этого множества Q_0 , причем Q_0 не удовлетворяет рассматриваемой аксиоме A . Нужно исследовать, можно ли расширить множество B_0 и конфигурацию Q_0 так, чтобы новое множество B_ω стало областью аксиомы A .

Для решения этой задачи выбираем множество B , которое будет служить для отбора новых элементов, и, начиная с B_0 и Q_0 , последовательно применяем аксиому A . Как и прежде, получаем два ряда множеств

$$B_0, B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$$

$$Q_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n, \dots$$

Пусть

$$B_\omega = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$$

$$\mathfrak{B}_\omega = Q_0 \cup \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \cup \dots$$

Если система высказываний $\mathfrak{B}_\omega$ непротиворечива, то можно рассматривать B_ω как искомую область и задача получает положительное решение. Однако если система $\mathfrak{B}_\omega$ противоречива, то получается отрицательный ответ **.

Множества B_ω , $\mathfrak{B}_\omega$ и вообще весь итерационный процесс могут быть наглядно представлены с помощью конечных последовательностей различных

* Ср., например, [1], с. 354.

** Доказательство вполне аналогично доказательству в § 4.

порядков. Назовем элементы множества B_0 конечными последовательностями нулевого порядка. Совокупность вида

$$[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m; i],$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ — конечные последовательности нулевого порядка и i — натуральное число $\leq n$, назовем конечной последовательностью первого порядка. Вообще конечными последовательностями k -го порядка называем совокупности вида

$$[\sigma_1, [\sigma_2, \dots, [\sigma_m; i], \dots]]$$

где $\sigma_1, [\sigma_2, \dots, \sigma_m]$ — конечные последовательности порядка $\leq k - 1$. Те элементы множества B_0 , которые входят либо в данную конечную последовательность, либо в ее подпоследовательности, будем коротко называть основными элементами конечной последовательности. Ясно, что каждая последовательность содержит лишь конечное число основных элементов.

Перейдем теперь к построению итерационного процесса с помощью конечных последовательностей. При подстановке какой-нибудь комбинации $b_1, b_2, \dots, b_m$ элементов множества B_0 на место $x_1, x_2, \dots, x_m$ в аксиому A мы вместо того, чтобы выбирать новые элементы из множества B , будем обозначать их как конечные последовательности первого порядка:

$$[b_1, \dots, b_m; 1], [b_1, \dots, b_m; 2], \dots, [b_1, \dots, b_m; n].$$

Вообще при подстановке конечных последовательностей $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ порядка $\leq k$ на место $x_1, x_2, \dots, x_m$ будем обозначать новые элементы, существование которых утверждает аксиома, как конечные последовательности:

$$[\sigma_1, \dots, \sigma_m; 1], [\sigma_1, \dots, \sigma_m; 2], \dots, [\sigma_1, \dots, \sigma_m; n].$$

При этих обозначениях множество B_k будет совпадать с множеством всех конечных последовательностей порядка $\leq k$, множество B_ω будет совпадать со множеством всех конечных последовательностей, а система $\mathfrak{B}_\omega$ будет совокупностью высказываний вида

$$\mathfrak{A}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, [\sigma_1, \dots, \sigma_m; 1], \dots, [\sigma_1, \dots, \sigma_m; n]),$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ пробегают независимо одна от другой всевозможные конечные последовательности совокупности B_ω .

Если исследуемая аксиома имеет вид

$$(x)(Ey_1) \dots (Ey_n) \mathfrak{A}(x, y_1, \dots, y_n),$$

то можно ограничиться лишь простыми конечными последовательностями. По существу, если мы на место x подставим какой-нибудь элемент b_0 множества B_0 , то можно обозначить новые элементы через конечные последовательности

$$[b_0, 1], \dots, [b_0, n].$$

Если опять вместо x подставим эти конечные последовательности, то можем соответствующие новые элементы обозначить снова через простые конечные последовательности

$$[b_0, i, 1], [b_0, i, 2], \dots, [b_0, i, n]$$

и т. д. В этом случае система $\mathfrak{B}_\omega$ принимает следующий вид:

$$\mathfrak{B}_\omega = \{\mathfrak{A}(\sigma, [\sigma, 1], \dots, [\sigma, n])\},$$

где σ пробегает всевозможные конечные последовательности.

§ 6. Теорема. Пусть бесконечное множество B с конфигурацией Q является областью системы аксиом S , которая содержит отношение тождества. Тогда существует для системы S новая область B_ω с конфигурацией Q_ω , причем $B \subset B_\omega$ и $Q \subset Q_\omega$, т. е. каждая бесконечная область системы S обладает по крайней мере одним собственным расширением.

Прежде всего мы, используя результаты § 3, заменим конечную систему S на эквивалентную аксиому A :

$$(x_1) \dots (x_m)(Ey_1) \dots (Ey_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n),$$

которая содержит только релятивизованное тождество.

Пусть

$$Q' = Q \cup \{b_i \neq b_k \mid i \neq k\},$$

где b_i, b_k пробегает всевозможные элементы области B . Ясно, что конфигурация Q' удовлетворяет аксиоме A , так как она отличается от Q только указанием, что все элементы множества B различны. Обозначим через b_* какой-нибудь новый элемент, который не входит в множество B , и положим

$$B_0 = B \cup \{b_*\},$$

$$\mathfrak{B}_0 = Q' \cup \{b_* \neq b_i \mid b_i \in B\}.$$

Система $\mathfrak{B}_0$ есть конфигурация множества B_0 , которая, вообще говоря, уже не удовлетворяет аксиоме A . Покажем, что можно дополнить B_0 и $\mathfrak{B}_0$ таким образом, чтобы новое множество было областью аксиомы A . Отождествляя в новой области те элементы, которые связаны отношением тождества, получим область системы. Эта область будет шире старой, так как элемент b_* в силу соотношений

$$\{b_* \neq b_i \mid b_i \in B\}$$

не совпадает ни с одним из старых элементов.

Исходя из множеств B_0 и $\mathfrak{B}_0$, проведем итерационный процесс, как указано в предыдущем параграфе. Пусть

$$B_\omega = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n \cup \dots,$$

$$\mathfrak{B}_\omega = \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{B}_n \cup \dots$$

Если нам удастся установить, что система высказываний $\mathfrak{B}_\omega$ непротиворечива, то мы сможем найти конфигурацию Q_ω , которая удовлетворяет системе $\mathfrak{B}_\omega$, и таким образом показать, что B_ω с конфигурацией Q_ω является областью аксиомы A . Для этого согласно теореме из § 1 достаточно показать, что каждое конечное подмножество системы $\mathfrak{B}_\omega$ непротиворечиво.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное конечное множество высказываний системы $\mathfrak{B}_\omega$. Высказывания множества $\mathfrak{M}$ являются высказываниями исчисления высказываний, их элементарные высказывания являются элементарными предикатами аксиомы A . Пустые места этих предикатов заполнены конечными последовательностями из множества B_ω . Так как система $\mathfrak{M}$ конечна, то имеется лишь конечное число конечных последовательностей, которые участвуют в построении элементарных высказываний системы $\mathfrak{M}$. Рассмотрим совокупность всех этих конечных последовательностей, а также конечных последовательностей низших порядков, которые входят в данные. Обозначим эту совокупность через M . Ясно, что каждая конечная последовательность множества M построена снова из конечных последовательностей мно-

жества M и натуральных чисел. В частности, M содержит конечные последовательности нулевого порядка, т. е. элементы множества B_0 , и, кроме того, M конечно.

Отобразим множество M на некоторую часть области B следующим образом:

1. Элементы множества M , которые входят в область B , соответствуют сами себе.

2. Элемент b_* мы отображаем в элемент $\tilde{b}_*$ области B . Мы требуем только, чтобы $\tilde{b}_*$ не входил в M^* .

3. Пусть отображение определено для всех конечных последовательностей порядка $\leq k$. Возьмем конечные последовательности порядка $k + 1$:

$$[\sigma_1, \dots, \sigma_m; 1], [\sigma_1, \dots, \sigma_m; 2], \dots, [\sigma_1, \dots, \sigma_m; n].$$

Конечные последовательности $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ — k -го порядка, следовательно, они уже отображены в какие-то элементы области B . Пусть эти элементы соответственно

$$b_1, b_2, \dots, b_m.$$

Подставим в аксиоме A на место « x » элементы $b_1, b_2, \dots, b_m$. Так как B есть область аксиомы A , то среди элементов множества B найдутся такие элементы $c_1, c_2, \dots, c_n$, которые удовлетворяют соотношению

$$\mathfrak{A}(b_1, b_2, \dots, b_m, c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Считаем, что конечным последовательностям

$$[\sigma_1, \dots, \sigma_m; 1], [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m; 2], \dots, [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m; n]$$

соответствуют как раз элементы $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Покажем, что при этом отображении все высказывания системы $\mathfrak{M}$ будут выполнены, если мы заменим в них элементы множества M на соответствующие элементы области B . Действительно, система $\mathfrak{M}$ содержит либо высказывания вида $b_* \neq b_i$, где b_i входит в $M \cap B$, либо члены конфигурации Q' , либо высказывания вида

$$\mathfrak{A}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m; [\sigma_1, \dots, \sigma_m; 1], \dots, [\sigma_1, \dots, \sigma_m; n]).$$

Высказывания последнего типа переходят при отображении в

$$\mathfrak{A}(b_1, b_2, \dots, b_m, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

т. е. выполнены в силу 3.

Элементы конфигурации Q' содержат только элементы множества B и, следовательно, переходят сами в себя.

Наконец, высказывания вида $\tilde{b}_* \neq b_i$ переходят в $b_* \neq b_i$, т. е. выполнены в силу 2.

Таким образом, при замене элементов множества M их образами все высказывания совокупности $\mathfrak{M}$ выполняются. Вследствие этого непротиворечивость системы $\mathfrak{M}$ доказана, так как мы можем считать, что наши предикаты имеют те же значения, что для соответствующих элементов множества B .

В этом и в предыдущем параграфах мы для простоты предполагали, что система S конечна. В этом случае можно было заменить ее одним выражением

* Такой элемент существует, так как по предположению область B бесконечна.

А. Если система S бесконечна, то такая замена может не иметь места. Однако все рассуждения остаются в силе, если только сделаны следующие изменения:

а) итерационный процесс проводится в более общей форме, как указано в конце § 4;

б) при представлении новых элементов конечными последовательностями нужно, кроме того, указывать в новой конечной последовательности индекс примененной аксиомы.

В остальном рассуждения повторяются почти дословно.

Выражаю профессору А. Н. Колмогорову мою сердечную благодарность за многочисленные ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. Gödel*. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls.— *Monatsh. Math. und Phys.*, 1930, 37, 349—360.
2. *T. Skolem*. Über die Nicht-Charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslichen Zahlenvariablen.— *Fundam. Math.*, 1934, 23, 150—161.
3. *T. Skolem*. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen.— *Skr. vidensk.-akad. Oslo.*, I kl., 1920, N 4, 36.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ*



Известно, что многие теоремы теории прямых произведений, нормальных рядов и нильпотентных систем формулируются аналогично для групп и для колец. Рассматривая кольца как группы с операторами, удается часть этих параллельных результатов объединить в одной общей теории. Иногда для той же цели хорошо служит теория структур. Однако вместо того чтобы рассматривать кольца как группы, можно, наоборот, группы рассматривать как обобщенные кольца, в которых сложением служит групповая операция, а умножением — операция коммутирования. Поскольку коммутирование в общем случае неассоциативно и недистрибутивно, то получаемые указанным способом из групп системы с двумя действиями не являются обычными кольцами. Одна из первых попыток включить теорию групп в теорию обобщенных колец принадлежит П. К. Рашевскому [1], изучавшему обобщенные кольца с некоторыми дополнительными аксиомами, оказавшимися достаточными для перенесения в теорию обобщенных колец обычных теоретико-групповых теорем о нормальных рядах и прямых произведениях. С другой стороны, Мардош и Орэ [2] рассмотрели системы, являющиеся относительно сложения группой и обладающие операцией умножения, в общем случае никак не связанной со сложением. Эти системы пока оказались слишком общими, поскольку даже теория гомоморфных отображений для них значительно сложнее, чем для обычных групп или колец.

В настоящей заметке указываются аксиомы, налагаемые на системы с двумя бинарными операциями. Эти аксиомы заведомо выполняются как для обычных колец, так и для групп с аддитивно записываемой групповой операцией и операцией коммутирования в качестве действия умножения. В то же время эти аксиомы позволяют без всяких осложнений перевести в теорию подчиняющихся им алгебраических систем значительную часть теорем, имеющих аналогичные формулировки в теории групп и теории колец.

1. Квазиколеца. Пусть каждой упорядоченной паре элементов a, b непустого множества K поставлены в соответствие однозначно определенный элемент $c \in K$, называемый суммой, и однозначно определенный элемент $d \in K$, называемый произведением a и b . Предположим, сверх того, что относительно сложения K является группой, в общем случае некоммутативной. Одночленом от букв $x_1, \dots, x_n$ условимся называть формальное произведение вида $(\epsilon_1 x_{i_1})(\epsilon_2 x_{i_2}) \dots (\epsilon_m x_{i_m})$, где $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ — знаки $+$ или $-$, причем, кроме выписанных скобок, в произведении должны быть расставлены скобки, указывающие порядок перемножения сомножителей. Например, выражения $((-x)y)z$ и $(-x)(yz)$ будут различными одночленами степени 3 от x, y, z . Многочленом от букв $x_1, x_2, \dots, x_n$ условимся называть алгебраическую сумму конечного числа одночленов от этих букв.

О п р е д е л е н и е. Множество K с определенными на нем операциями сложения и умножения называется квазикольцом, если относительно сложе-

* Успехи мат. наук, 1953, 8, № 1, 165—171.

ния оно является группой и если для любых элементов x, y, z из K имеют место равенства:

1. $x + y = y + x + D_1(x, y)$;
2. $x(y + z) = xy + xz + D_2(x, y, z)$;
3. $(x + y)z = xz + yz + D_3(x, y, z)$;
4. $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,

где $D_1(x, y)$ — фиксированный многочлен от x, y , все члены которого содержат каждую из букв x, y , а $D_2(x, y, z), D_3(x, y, z)$ — фиксированные многочлены от x, y, z , каждый член которых содержит каждую из букв x, y, z .

Так как нуль можно представить в виде $xy - xy$ и $xyz - xyz$, то обычные кольца являются квазикольцами, для которых $D_1 = D_2 = D_3 = 0$. С другой стороны, называя основную операцию произвольной группы сложением и вводя новую операцию умножения посредством формулы $xy = -x - y + x + y$, обращаем группу в систему с двумя операциями. Вытекающие из групповых аксиом тождества

$$\begin{aligned}x + y &= y + x + xy, \\x(y + z) &= xy + xz + xz \cdot xy + xy \cdot z, \\(x + y)z &= xz + yz + xz \cdot y + (xz \cdot y) \cdot yz, \\x \cdot 0 &= 0 \cdot x = 0\end{aligned}$$

показывают, что получающаяся система есть квазикольцо. Поэтому всякую теорему теории квазиколец можно рассматривать как теорему и теории колец и теории групп. Простейшие примеры такого объединения содержания обеих теорий далее и указываются.

2. Идеалы и гомоморфизмы. Непустая совокупность I элементов квазикольца K называется его левым идеалом, если разность любых двух элементов из I и произведение любого элемента из K на любой элемент из I содержатся в I . Аналогично определяются правые и двусторонние идеалы. В частности, ясно, что пересечение любой системы двусторонних идеалов квазикольца есть снова его двусторонний идеал.

Элементы x, y квазикольца K называются сравнимыми по идеалу I , символически $x \equiv y (I)$, если $-x + y \in I$.

Сравнения по двусторонним идеалам являются конгруэнтностями на квазикольце K , т. е. для любых элементов x, y, z, u из K имеют место следующие утверждения: α) $x \equiv x$; β) если $x \equiv y$, то $y \equiv x$; γ) если $x \equiv y, y \equiv z$, то $x \equiv z$; δ) если $x \equiv z, y \equiv u$, то $x + y \equiv z + u, xy \equiv zu$.

Докажем последнее утверждение. Пусть $x \equiv z, y \equiv u$. Тогда $-x + z = a, -y + u = b$, где $a, b \in I$. Отсюда

$$z + u = x + a + y + b = x + y + D_1(a, y) + b.$$

Каждый член полинома $D_1(a, y)$ содержит множителем элемент идеала a , поэтому $D_1(a, y) \in I$ и, следовательно,

$$-(x + y) + z + u = D_1(a, y) + b \in I,$$

т. е. $x + y \equiv z + u$. При тех же предположениях имеем

$$\begin{aligned}zu &= (x + a)(y + b) = xy + xb + D_2(x, y, b) + a(y + b) + \\ &+ D_3(x, a, y + b).\end{aligned}$$

Так как все члены правой части, за исключением первого, содержатся в I , то $zu \equiv xu$, что и требовалось.

Совокупности сравнимых друг с другом элементов квазикольца K по двустороннему идеалу I образуют смежные классы K по I . Обозначая через $[a]$ смежный класс, содержащий элемент a , и полагая

$$[a] + [b] = [a + b], \quad [ab] = [a] \cdot [b],$$

обратим систему смежных классов в алгебраическую систему с двумя операциями. В силу свойств $\alpha) - \delta)$ эти операции однозначны, и система K/I относительно их является квазиколецом.

Однозначное отображение совокупности элементов квазикольца K на квазиколец L называется гомоморфизмом, если оно переводит сумму и произведение произвольных элементов из K в сумму и произведение соответствующих элементов из L . Так как гомоморфное отображение квазикольца K на квазиколец L является в то же время гомоморфным отображением аддитивной группы K на аддитивную группу L , то при квазиколецевом гомоморфизме нуль переходит в нуль, противоположные элементы переходят в противоположные и прообраз нуля из L в квазиколец K является нормальным делителем аддитивной группы K . Из аксиомы 4 следует, что прообраз нуля при квазиколецевом гомоморфизме есть двусторонний идеал. Отсюда обычным путем получаются следующие аналоги известных теорем о гомоморфных отображениях групп и колец:

1. Если квазиколец K гомоморфно отображено на квазиколец L , то полный прообраз нуля при этом отображении является двусторонним идеалом I в K и L изоморфно фактор-кольцу K/I . Если J — двусторонний идеал в K , содержащий I , и P — образ J в квазиколец L , то P — двусторонний идеал в L , причем $K/J \cong L/P$.

2. Пусть K_1 — произвольное подквазиколец квазикольца K , содержащего двусторонний идеал I . Тогда $K_1 \cap I$ есть двусторонний идеал в K_1 и $(K_1 + I)/I \cong K_1/(K_1 \cap I)$.

Эти теоремы позволяют без всяких изменений распространить на квазикольца обычные теоремы о нормальных композиционных рядах.

3. **Нильпотентность.** Одночлен $(\varepsilon_1 x_{i_1})(\varepsilon_2 x_{i_2}) \dots (\varepsilon_m x_{i_m})$ с определенным образом расставленными дополнительными скобками назовем правильным, если порядок скобок таков, что в ходе вычисления каждая операция состоит в умножении предыдущего результата на множитель вида $(\varepsilon_k x_{i_k})$. Например, правильными одночленами будут $(x(yz))u$, $x(y(zu))$, но не одночлен $(xy)(zu)$.

Обозначим через K^m совокупность всех тех элементов квазикольца K , которые могут быть представлены в виде алгебраической суммы правильных одночленов степени m от элементов K . Докажем, что совокупности K^m ($m = 1, 2, \dots$) являются двусторонними идеалами квазикольца K .

В самом деле, разность любых двух элементов из K^m в силу определения K^m принадлежит K^m . Пусть теперь $a \in K^m$, $x \in K$. Если элемент a может быть представлен как одночлен степени m от элементов K , то ax и xa принадлежат K^m по определению. По индукции допустим, что принадлежность ax и xa к K^m доказана, если a есть алгебраическая сумма не более n одночленов степени m , и пусть $a = s \pm c$, где c — одночлен, а s — сумма n одночленов степени m . Согласно аксиоме 2

$$xa = x(s + c) = xs + xc + D_2(x, s, c).$$

Поскольку каждый член многочлена $D_2(x, s, c)$ содержит множителем правильный одночлен s степени m , то все члены $D_2(x, s, c)$ представляются правильными одночленами степени $m + 1$. Это же справедливо и для $xs + xc$. Следовательно, $xa \in K^{m+1} \subset K^m$. Случай $a = s - c$ сводится к предыдущему, так как для любых x, y, z из K имеем

$$0 = x(y + (-y)) = xy + x(-y) + D_2(x, y, -y),$$

откуда

$$x(-y) = -(xy) - D_2(x, y, -y).$$

Аналогично

$$(-x)y = -(xy) - D_3(x, -x, y).$$

Из приведенных рассуждений следует также, что

$$xK^m \subset K^{m+1}, \quad K^m x \subset K^{m+1}.$$

Назовем квазикольцо K m -ступенно нильпотентным, если $K^{m+1} = 0$. Ввиду того что каждое произведение 2^m множителей можно представить в виде правильного произведения m множителей, в m -ступенно нильпотентном квазикольце любое произведение 2^m элементов равно нулю.

Аддитивная группа фактор-кольца K^n/K^{n+1} коммутативна, так как произведение любых двух его элементов равно нулю. Аналогично доказывается, что цепочка $K \supset K^2 \supset K^3 \supset \dots$ является убывающим центральным рядом аддитивной группы квазикольца K . Отсюда следует, в частности, что аддитивная группа нильпотентного квазикольца нильпотентна.

Пусть A, B — произвольные множества элементов квазикольца K . Через $A + B$ обозначим совокупность элементов вида $a + b$, где $a \in A, b \in B$. Если K_1 — подквазикольцо, а I — двусторонний идеал, то $K_1 + I$ будет также подквазикольцом.

Если K_1 — подквазикольцо нильпотентного квазикольца K и $K_1 + K^2 = K$, то $K_1 = K$ (ср. [3]). Из определения идеалов K^m следует, что $\bar{K} = K/K^{m+1}$ есть m -ступенно нильпотентное квазикольцо, причем

$$\bar{K}^i = K^i/K^{m+1} \quad (i = 1, \dots, m+1).$$

Это делает возможным доказать приведенное утверждение индукцией по степени нильпотентности K . Если $K^2 = 0$, то утверждение тривиально. Предположим, что утверждение верно для $(m-1)$ -ступенно нильпотентных квазикольцев, и пусть K — m -ступенно нильпотентное квазикольцо. Положив $\bar{K} = K/K^m$ и обозначая чертой сверху переход к образам при гомоморфизме $K \rightarrow \bar{K}$, будем иметь

$$\bar{K}_1 + \bar{K}^2 = \bar{K}, \quad \bar{K}^m = 0,$$

откуда в силу индукции $\bar{K}_1 = \bar{K}$, т. е. $K_1 + K^m = K$. Беря произвольные элементы x, y из K и представляя их в виде $x = x_1 + a, y = y_1 + b$ ($x_1, y_1 \in K_1; a, b \in K^m$), будем иметь

$$xy = (x_1 + a)(y_1 + b) = x_1y_1,$$

так как $xc = cx = 0$, если $c \in K^m$. Отсюда

$$K^2 \subset K_1 \text{ и } K \supset K_1 \supset K_1 + K^2 = K.$$

4. Автоморфизмы. Элементы $a_1, \dots, a_n, \dots$ квазикольца K называются порождающими для K , если всякое подквазикольцо, содержащее $a_1, \dots, \dots, a_n, \dots$, совпадает с K .

В дальнейшем предполагается, что многочлены D_1, D_2, D_3 произвольны, но для всех рассматриваемых квазикольцев одинаковы. Тогда имеет смысл говорить о свободных квазикольцах с данным числом порождающих элементов, о квазикольцах с данными порождающими элементами и данными тождественными и индивидуальными определяющими соотношениями. Квазикольца с данными порождающими элементами и лишь тождественными определяющими соотношениями назовем приведенно свободными.

Имеет место следующий аналог теоремы Б. Неймана [4]:

Фактор-кольцо K/K^2 приведенно свободного квазикольца K есть либо 0, либо прямая сумма циклических нуль-колец одной и той же характеристики.

Действительно, чтобы получить определяющие соотношения для K/K^2 , нужно к определяющим соотношениям для K присоединить тождественное соотношение $xy = 0$. Но тогда все соотношения для K/K^2 приведутся к тождествам вида $n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k = 0$, где $n_1, \dots, n_k$ — целые числа. Поскольку $x_1, \dots, x_k$ произвольны, то отсюда $n_ix_i = 0$ и, значит, все соотношения для K/K^2 равносильны тождествам $dx = 0$, $xy = 0$, где d — наибольший общий делитель чисел n_i , что и требовалось.

Изучение автоморфизмов приведенно свободных квазикольцев опирается на несколько вспомогательных утверждений, имеющих силу для произвольных алгебраических систем. В этом общем виде мы их и сформулируем.

Рассмотрим алгебраическую систему K с произвольным набором операций и некоторую систему Π тождественных соотношений, записываемых в терминах этих операций. Система порождающих элементов алгебры K называется Π -свободной, если тождественные соотношения Π являются полной системой определяющих соотношений для K в этой системе порождающих элементов. Алгебраическая система, имеющая хотя бы одну Π -свободную систему порождающих элементов, является приведенно свободной (Π -свободной) системой.

Если алгебраическая система K имеет конечную Π -свободную систему из n порождающих элементов и K не изоморфна никакой своей истинной фактор-системе, то любые n порождающих элементов системы K будут Π -свободными.

Доказательство этого предложения совпадает с доказательством аналогичного предложения об алгебрах в работе [3].

Если алгебраическая система K имеет в порождающих элементах $a_1, \dots, \dots, a_n, \dots$ тождественные определяющие соотношения Π , то подсистема L , порожденная лишь частью указанных элементов, имеет их своими Π -свободными порождающими элементами.

Отметим, наконец, еще следующее обстоятельство, доказанное Б. Нейманом для групп, но справедливое и для произвольных алгебраических систем:

Всякая конечная алгебраическая система есть гомоморфный образ подходящей конечной приведенно свободной системы.

Переходя к рассмотрению специально квазикольцев, заметим, что для нильпотентного ненулевого квазикольца всегда $K \neq K^2$. Таким образом, если K нильпотентно и Π -свободно, то аддитивная группа квазикольца K/K^2 распадается в прямую сумму циклических подгрупп одного и того же порядка d . Систему элементов нильпотентного Π -свободного квазикольца K условимся называть полной и независимой, если образы этих элементов в фактор-кольце

K/K^2 порождают циклические подгруппы одного и того же порядка, прямой суммой которых является K/K^2 .

Всякая полная независимая система элементов нильпотентного приведенно свободного квазикольца является его приведенно свободной порождающей системой и потому может быть переведена в любую другую полную независимую систему подходящим автоморфизмом квазикольца.

Доказательство, аналогичное доказательству такого же предложения об обыкновенных кольцах в работе [3], здесь может быть опущено. Обычным способом (см. [3]) устанавливаются также следующие предложения:

Если идеал I приведенно свободного нильпотентного квазикольца K содержится в K^2 или если характеристика K/K^2 есть число простое, то каждый автоморфизм фактор-квазикольца K/I индуцируется подходящим автоморфизмом K .

Для любых двух идеалов I_1, I_2 приведенно свободного нильпотентного квазикольца K , содержащихся в K^2 и обладающих изоморфными фактор-квазиколецми $K/I_1, K/I_2$, существует автоморфизм K , переводящий I_1 в I_2 .

В случае, когда характеристика K/K^2 является простым числом, предположение $I_1 \subset K^2, I_2 \subset K^2$ в условии последней теоремы может быть заменено требованием равномощности фактор-колец $(I_1 + K^2)/K^2$ и $(I_2 + K^2)/K^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. K. Rashevsky*. Un schéma unifiant la théorie des groupes abstraits avec la théorie des groupes infinitésimaux de Lie.— C. r. Acad. Sci. Paris, 1936, 202, 1012—1013.
2. *D. C. Murdoch, O. Ore*. On generalized rings.— Amer. J. Math., 1941, 63, N 1, 73—78.
3. *А. И. Мальцев*. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями.— Мат. сб., 1950, 26, № 1, 19—33.
4. *B. H. Neumann*. Identical relations in groups. I.— Math. Ann., 1937, 114, 506—525.

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ*



В теории алгебраических систем, наряду с изучением свойств отдельных конкретных систем, обычно изучаются зависимости между свойствами произвольной индивидуальной системы. Однако часто вместо отдельных систем приходится рассматривать классы систем. Поэтому представляет интерес также изучение зависимостей между свойствами, принадлежащими одновременно всем системам некоторого класса. Зависимости последнего вида и рассматриваются в настоящей статье. При этом в качестве классов систем берутся так называемые примитивные классы, т. е. совокупности алгебраических систем, имеющих одинаково называемые операции и удовлетворяющих некоторой фиксированной системе тождеств. Основными рассматриваемыми свойствами являются перестановочность конгруэнтностей, транзитивность группы трансляций и определяемость конгруэнтностей своими смежными классами. В § 1—2 устанавливается ряд зависимостей между этими свойствами. В остальных параграфах дается определение топологических алгебраических систем и ищутся по возможности более широкие классы их, для которых остаются справедливыми общие свойства, присущие топологическим группам.

Для удобства в статье приведены определения всех нужных для понимания результатов понятий. Необходимые факты, используемые в доказательствах, содержатся в монографиях Л. С. Понтрягина [4] и Г. Биркгофа [2].

§ 1. Трансляции. Производные системы

Отображение f , ставящее каждой последовательности $x_1, \dots, x_n$ из n элементов множества M в соответствие однозначно определенный элемент $f(x_1, \dots, x_n)$ того же множества, называется n -а р н о й о п е р а ц и е й, о п р е д е л е н н о й н а M . Если соответствующие значения $f(x_1, \dots, \dots, x_n)$ определены не для всех $x_1, \dots, x_n$, а лишь для некоторых, то такая операция называется ч а с т и ч н о й. Множество A , рассматриваемое вместе с совокупностью заданных на нем операций $f_\alpha(x_1, \dots, x_{n_\alpha})$, называется алгебраической с и с т е м о й, а операции f_α называются о с н о в н ы м и для этой системы. Если среди основных операций есть частичные, то система называется ч а с т и ч н о й.

При одновременном рассмотрении нескольких алгебраических систем между основными их операциями обычно считается установленным взаимно однозначное соответствие, при котором n -арные операции отвечают n -арным. Соответствующие операции называются о д н о и м е н н ы м и и обозначаются одинаково. Изоморфизм и гомоморфизм систем с одноименными основными операциями определяются обычным образом.

Выражения вида $f_\alpha(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, а также $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$, где $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ — буквы, а f_α — обозначения основных операций, называются п о л и н о -

* Мат. сб., 1954, 35, № 1, 3—20.

ма м и от $x_i, \dots, x_{i_n}$ первой степени. По индукции выражения вида $f_\alpha(u_1, \dots, u_n)$, где $u_1, \dots, u_n$ — полиномы не выше k -й степени от букв $x_1, \dots, x_p$ и хотя бы один из этих полиномов является полиномом k -й степени, называются полиномами $(k+1)$ -й степени от $x_1, \dots, x_p$.

Заменяя в полиноме некоторые буквы элементами рассматриваемой алгебраической системы, получим многочлен от оставшихся букв. Каждый многочлен от букв $x_1, \dots, x_p$ можно рассматривать как p -арную операцию, определенную на множестве элементов заданной алгебраической системы. Результатом операции $F(x_1, \dots, x_p)$, примененной к элементам $a_1, \dots, a_p$, называется элемент, получающийся в результате подстановки в многочлен F вместо букв соответственных элементов $a_1, \dots, a_p$ и выполнения внутри заданной алгебраической системы операций, указанных в записи многочлена. Операции, получаемые при помощи многочленов, называются **многочленными**, или **производными**. Если данная система частичная, то производные операции также могут оказаться **частичными**.

Преобразования множества элементов алгебраической системы, имеющие вид $x \rightarrow F(x) = xF$, где $F(x)$ — некоторый многочлен от x , называются **трансляциями** системы. Так как многочлен от многочлена есть многочлен, то произведение трансляций, определяемое обычной формулой $x \cdot ST = xS \cdot T = T(S(x))$, снова является трансляцией. Поэтому совокупность трансляций алгебраической системы образует полугруппу — полугруппу трансляций. К числу трансляций всегда относится и тождественное преобразование E . Трансляция T называется **обратимой**, если существует трансляция S , для которой $ST = TS = E$. Все обратимые трансляции составляют группу трансляций данной системы.

Трансляции вида $x \rightarrow f_\alpha(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$, где f_α — основная операция алгебраической системы A , называются ее **главными трансляциями**. Произведение конечного числа главных трансляций называется **элементарной трансляцией**. Элементарные трансляции образуют подполугруппу в полугруппе всех трансляций данной системы.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение, определенное на произвольном множестве M , называется **эквивалентностью** на M . Эквивалентность θ , определенная на M , называется **инвариантной** относительно преобразования T этого множества, если из $x \equiv y (\theta)$ следует $xT \equiv yT (\theta)$. Эквивалентность θ называется **согласованной** с операцией $f(x_1, \dots, x_n)$, если из $x_1 \equiv x'_1 (\theta), \dots, x_n \equiv x'_n (\theta)$ следует $f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(x'_1, \dots, x'_n) (\theta)$. Эквивалентность, согласованная со всеми основными операциями алгебраической системы, называется **конгруэнтностью** на этой системе.

Индукцией по степеням многочленов легко доказывается

Теорема 1. *Конгруэнтности инвариантны относительно всех трансляций системы. Для того чтобы эквивалентность была конгруэнтностью, достаточно, чтобы она была инвариантна относительно главных трансляций системы. Эквивалентность, согласованная с данными операциями, согласована и со всеми производными операциями.*

Имея алгебраическую систему A с данными основными операциями, можно образовать ряд многочисленных производных операций. Совокупность элементов A вместе с несколькими производными операциями, рассматриваемыми в качестве основных, будет новой алгебраической системой, называемой **производной** над данной. Теорема 1 утверждает, что все экви-

валентности на множестве A , являющиеся конгруэнтностями для первоначальной системы, являются конгруэнтностями и для всех производных систем.

Алгебраическая система с операцией умножения $\cdot$ и двумя операциями деления $/$, $\backslash$, элементы которой удовлетворяют тождествам

$$(xy)/y = x, \quad y \backslash (yx) = x, \quad x/y \cdot y = x, \quad y \cdot y \backslash x = x, \quad (1)$$

называется квазигруппой. Элемент e квазигруппы G называется ее правой единицей, если $x \cdot e = x$ для всех $x \in G$ (ср. [6]). Из (1) следует, что во всех квазигруппах имеют место тождества $x/(y \backslash x) = y$, $(x/y) \backslash x = y$, а в квазигруппе с правой единицей e , сверх того, тождества $x/e = x$, $x \backslash x = e$. Квазигруппа, содержащая элемент e , являющийся одновременно правой и левой единицей, называется лупой. Лупа с ассоциативным умножением является группой.

Лемма. Каждая квазигруппа содержит в качестве производной системы лупу с произвольным наперед заданным элементом e в качестве единицы.

Действительно, пусть e — произвольный элемент заданной квазигруппы G . Определим в G производные операции $\circ$, $/$, $\backslash$ посредством формул

$$\begin{aligned} x \circ y &= (x \cdot e \backslash e) / (y \backslash e), \\ x / y &= (x \cdot y \backslash e) / (e \backslash e), \\ y \backslash x &= e / (x \backslash (y \cdot e \backslash e)). \end{aligned}$$

Легко видеть, что для новых операций тождества (1) остаются верными. Сверх того,

$$x \circ e = e \circ x = x,$$

что и требовалось.

Теорема 2. Для того чтобы каждая алгебраическая система некоторого примитивного класса содержала производную систему, элементарные трансляции которой образуют транзитивную группу, необходимо и достаточно, чтобы каждая система класса среди своих производных систем содержала лупу.

Доказательство. Достаточность очевидна, так как элементарные трансляции всякой квазигруппы образуют транзитивную группу. Для доказательства необходимости рассмотрим в заданном примитивном классе свободную алгебраическую систему A со счетным множеством свободных порождающих $a_1, a_2, \dots$. Среди основных операций данной производной системы над A найдется неединичная операция $F(x_1, \dots, x_n)$. Вводим обозначение:

$$x \cdot y = F(x, y, a_3, \dots, a_n).$$

По условию трансляции L_a, R_a , определяемые формулами

$$xL_a = a \cdot x, \quad xR_a = x \cdot a \quad (a, x \in A),$$

должны иметь обратные L_a^{-1}, R_a^{-1} , т. е. для подходящих многочленов $P(x, a, a_3, \dots, a_n), Q(x, a, a_3, \dots, a_n)$ должны выполняться тождества

$$P(xL_a^{-1}, a, a_3, \dots, a_n) = P(x, a, a_3, \dots, a_n) L_a = x \quad (2)$$

и аналогичные тождества для Q . Вводя операции

$$a \backslash x = P(x, a, a_3, \dots, a_n), \quad x/a = Q(x, a, a_3, \dots, a_n),$$

можно придать тождествам (2) вид (1). Таким образом, относительно введенных трех операций множество A становится квазигруппой. Согласно лемме в этой квазигруппе существуют производные операции, относительно которых A является лупой.

Алгебраическую систему с двумя тернарными операциями xuz , $xtutz$, элементы которой удовлетворяют тождествам

$$(xyz) tutz = x, \quad (xtutz) uz = x, \quad xxz = z, \quad (3)$$

условимся называть б и т е р н а р н о й с и с т е м о й.

Заметим, что в битернарной системе имеет место тождество

$$xtutx = y, \quad (4)$$

так как из (3) следует $x = (xxu) t x u = u t x u$.

Тождества (3) показывают, что трансляции R_{ab} , S_{ab} , где

$$xR_{ab} = xab, \quad xS_{ab} = xtatb,$$

взаимно обратны, а из тождества (4) следует, что $aS_{ba} = b$ при любых a, b , т. е. что группа, порожденная трансляциями R_{ab} , S_{ab} , транзитивна.

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы были транзитивными группы обратимых трансляций всех систем некоторого примитивного класса, необходимо и достаточно, чтобы существовали производные тернарные операции, относительно которых системы рассматриваемого класса были бы битернарными.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность очевидна, так как группы обратимых трансляций битернарных систем транзитивны. Для доказательства необходимости снова рассмотрим свободную систему данного класса со счетным числом порождающих элементов $a_1, a_2, \dots$. Согласно условию существуют трансляция P , переводящая a_1 в a_2 , и обратная ей трансляция P^{-1} . Иначе говоря, существуют многочлены $P(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$, $Q(x, a_1, \dots, a_n)$, связанные тождествами

$$Q(P(x, a_1, \dots, a_n), a_1, \dots, a_n) = P(Q(x, a_1, \dots, a_n), a_1, \dots, a_n) = x. \quad (5)$$

При помощи новых операций, определяемых равенствами

$$xuz = P(x, y, z, a_3, \dots, a_n), \quad xtutz = Q(x, y, z, a_3, \dots, a_n),$$

тождества (5) можно переписать в виде первых двух тождеств (3), а условие $a_1P = a_2$ дает третье тождество (3).

Произведением бинарных отношений θ_1, θ_2 , определенных на множестве M , называется бинарное отношение $\theta_1\theta_2$, истинное для тех и только тех пар элементов x, y из M , для которых в M существует элемент z , для которого отношения $x\theta_1z$ и $z\theta_2y$ истинны. Отношения θ_1, θ_2 называются перестановочными, если $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$.

Т е о р е м а 4. *Для того чтобы все конгруэнтности на каждой алгебраической системе некоторого примитивного класса * были перестановочными, необходимо и достаточно, чтобы существовал многочлен $\psi(x, y, z)$, удовлетворяющий тождествам*

$$\psi(x, x, z) = z, \quad \psi(x, z, z) = x$$

на всех системах этого класса.

* Вместо примитивности класса достаточно требовать существования свободной (в рассматриваемом классе) системы ранга 3. — Прим. ред.

Доказательство. Достаточность очевидна, так как если многочлен $\psi(x, y, z)$ существует и для некоторых конгруэнтностей θ_1, θ_2 справедливы соотношения $a \equiv c(\theta_1)$, $c \equiv b(\theta_2)$, то

$$\psi(a, c, b) \equiv \psi(a, a, b)(\theta_1), \quad \psi(a, c, b) \equiv \psi(a, c, c)(\theta_2)$$

или

$$\psi(a, c, b) \equiv b(\theta_1), \quad \psi(a, c, b) \equiv a(\theta_2),$$

откуда $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$.

Для доказательства необходимости рассмотрим в данном примитивном классе свободную систему A с порождающими a, b, c . Если эти порождающие связать соотношением $a = c$, то система A перейдет в фактор-систему от A по соответствующей конгруэнтности θ_1 , а если связать соотношением $b = c$, то A перейдет в фактор-систему A/θ_2 . Из сравнений $a \equiv c(\theta_1)$, $b \equiv c(\theta_2)$ и перестановочности θ_1 с θ_2 вытекает существование в A элемента d , связанного сравнениями $a \equiv d(\theta_2)$, $b \equiv d(\theta_1)$. Пусть $d = \psi(a, c, b)$ — выражение элемента d через порождающие. В фактор-системе A/θ_1 имеем: $\psi(a, a, b) = b$. Но так как A/θ_1 — свободная система в данном классе с порождающими a, b (см. [3]), то $\psi(a, a, b) = b$ является тождеством во всех системах рассматриваемого класса. Аналогичным способом устанавливается и тождество $\psi(a, b, b) = a$.

В битернарной системе в качестве многочлена ψ можно взять

$$\psi(x, y, z) = (xya) \tau z a,$$

где a — какой-либо фиксированный элемент, и, следовательно, на битернарных системах все конгруэнтности перестановочны. Вспоминая теорему 3, видим, что конгруэнтности перестановочны вообще на всех классах систем с транзитивными группами обратимых трансляций. Перестановочными будут, в частности, конгруэнтности на квазигруппах.

§ 2. Нормальные комплексы и правильные конгруэнтности

Как известно, в классическом случае обыкновенных групп конгруэнтность однозначно определена, если известен один из ее смежных классов, и конгруэнтности взаимно однозначно соответствуют нормальным делителям. Аналогичное положение имеет место также в лупах. В связи с этим возник общий вопрос о характеристике более общих алгебраических систем, где имели бы место подобные факты.

Вместе с Е. С. Ляпиным назовем совокупность K элементов алгебраической системы A ее *нормальным комплексом*, если на A существует хотя бы одна конгруэнтность, для которой K является смежным классом. Нормальный комплекс K *правильный*, если он является смежным классом в точности одной конгруэнтности.

Теорема 5*. *Для того чтобы непересекающиеся совокупности $K_i, K_j, \dots$ элементов алгебраической системы A были смежными классами подходящей конгруэнтности θ на A , необходимо и достаточно, чтобы каждая*

* В другой форме эта теорема для полугрупп была доказана Е. С. Ляпиным [5]. Позже она была доказана В. В. Вагнером для однородных пространств с полугруппой преобразований. В приведенной в тексте форме она является простым соединением результатов Ляпина — Вагнера с теоремой 1.

транслированная совокупность $K_i T$ или целиком содержалась в одной из заданных, или не имела общих элементов ни с одной из заданных совокупностей.

Доказательство. Действительно, поскольку для любой конгруэнтности θ и любой трансляции T из $a \equiv b (\theta)$ следует $aT \equiv bT (\theta)$, то трансляция $K_i T$ смежного класса K_i состоит из конгруэнтных элементов и, следовательно, является или смежным классом, или же частью смежного класса, чем и доказывается необходимость условий теоремы.

Обратно, пусть заданы совокупности $K_i, K_j, \dots$, удовлетворяющие условиям теоремы. Для элементов a, b из A пишем $a \sim b (\theta)$, если или $a = b$, или a, b входят в некоторое K_j , или в некотором K_j найдутся такие u, v , что для подходящей трансляции T будет $a = uT, b = vT$. Элементы a, b назовем **сравнимыми по θ** , если в A найдется конечная цепочка элементов $x_1, \dots, x_n$, для которых $a \sim x_1, x_1 \sim x_2, \dots, x_n \sim b (\theta)$. Легко доказывается, что сравнения по θ являются конгруэнтностью на A . Покажем, что каждое множество K_i будет смежным классом относительно θ . Прежде всего для любых двух элементов a, b из K_i имеем $a \sim b$ и, следовательно, $a \equiv b (\theta)$. Пусть теперь $a \in K_i, b \equiv a (\theta)$. Остается доказать, что $b \in K_i$. Согласно определению в A найдется конечная цепочка элементов, связанных условиями $a \sim x_1 \sim \dots \sim x_n \sim b (\theta)$. Из $a \sim x_1, a \in K_i$ следует, что или $x_1 \in K_i$, или $a = uT, x_1 = vT (u, v \in K_i)$. В последнем случае $K_i T$ содержит элемент a , входящий в K_i . По условиям теоремы отсюда вытекает, что $K_i T \subset K_i$, т. е. что $x_1 \in K_i$. Применяя последовательно указанные рассуждения к парам $x_1 \sim x_2, \dots, x_n \sim b$, получим $b \in K_i$, что и требовалось.

Особый интерес представляют системы, в которых подобно группам или кольцам каждая совокупность может являться смежным классом не более одной конгруэнтности. Для характеристики этих систем введем одно вспомогательное понятие. Пусть S — любая совокупность элементов алгебраической системы A . Для элементов a, b из A условимся писать $a \sim b (\text{mod } S)$, если или $a = b$, или $a, b \in S$, или $a = uT, b = vT$, где $u, v \in S$, а T — некоторая трансляция. Элементы a, b назовем **сравнимыми mod S** , если для некоторых $x_1, \dots, x_n$ из A имеем: $a \sim x_1, x_1 \sim x_2, \dots, x_n \sim b (\text{mod } S)$. Легко видеть, что сравнение mod S является конгруэнтностью на A .

Теорема 6. Для того чтобы нормальный комплекс K был смежным классом лишь одной конгруэнтности, необходимо и достаточно, чтобы каждая пара элементов a, b из A , для которой при любой трансляции T утверждения $aT \in K$ и $bT \in K$ равносильны, была сравнимой mod K .

Доказательство. Конгруэнтность mod S минимальная среди всех тех, для которых элементы S сравнимы друг с другом. Поэтому из условий теоремы следует, что K — смежный класс mod K . Пусть θ — какая-либо другая конгруэнтность, для которой K также является смежным классом, и пусть a, b — произвольные элементы, для которых $a \equiv b (\theta), a \not\equiv b (\text{mod } K)$. Необходимость условий теоремы будет доказана, если для пары a, b утверждения $aT \in K, bT \in K$ окажутся равносильными для любой трансляции T . Но последнее очевидно, так как из $a \equiv b (\theta)$ следует $aT \equiv bT (\theta)$, и поскольку K — смежный класс для θ , то каждое из условий $aT \in K, bT \in K$ влечет за собой другое.

Для доказательства достаточности предположим, что существует пара элементов a, b , не сравнимых mod K и таких, что утверждения $aT \in K, bT \in K$ для них равносильны при любой трансляции T . Обозначим через σ сумму сравнений mod K и mod $\{a, b\}$. Конгруэнтность σ отлична от сравнений mod K , так как $a \not\equiv b (\text{mod } K), a \equiv b (\sigma)$. Покажем, что K — не только

смежный класс $\text{mod } K$, но и смежный класс для σ . Пусть $u \in K$, $u \equiv v (\sigma)$. Согласно определению суммы эквивалентностей последнее означает, что в A найдутся элементы $x_1, \dots, x_{2n}$, связанные соотношениями

$$u \equiv x_1 (\text{mod } K), \quad x_1 \equiv x_2 (\text{mod } \{a, b\}), \\ x_2 \equiv x_3 (\text{mod } K), \quad \dots, \quad x_{2n-1} \equiv x_{2n} (\text{mod } \{a, b\}), \quad x_{2n} \equiv v (\text{mod } K).$$

Из первого соотношения следует $x_1 \in K$. Второе соотношение означает, что в A имеются элементы $y_1, \dots, y_m$, для которых

$$x_1 \sim y_1, \quad y_1 \sim y_2, \quad \dots, \quad y_m \sim x_2 (\text{mod } \{a, b\}).$$

Таким образом, для некоторой трансляции T имеем: $x_1 = aT$, $y_1 = bT$ или $x_1 = bT$, $y_1 = aT$. Поскольку $x_1 \in K$ и по условию утверждения $aT \in K$, $bT \in K$ равносильны, то $y_1 \in K$. Продвигаясь далее аналогичным образом вдоль цепочки $x_1, y_1, \dots, y_m, x_2$, получим: $x_2 \in K$. Следовательно, из $x_1 \in K$, $x_1 \equiv x_2 (\text{mod } \{a, b\})$ следует $x_2 \in K$; далее будет следовать $x_3 \in K$ и т. д. Через конечное число шагов получим требуемое утверждение $v \in K$.

Назовем некоторую конгруэнтность правильной, если она однозначно определяется любым своим смежным классом. Наконец, будем говорить, что алгебраическая система A правильная, если все конгруэнтности на ней правильны. Соединяя теоремы 6 и 5, легко сформулировать необходимые и достаточные условия правильности системы. Однако эти условия слишком громоздки и желательно вместо них иметь хотя бы только необходимые или только достаточные, но более конкретные условия. Грубо, это можно сделать, например, следующим образом.

При нулевой конгруэнтности, т. е. конгруэнтности, совпадающей с тождеством, каждый смежный класс состоит из одного элемента. Поэтому, если какая-либо ненулевая конгруэнтность имеет одноэлементный смежный класс, то она не может быть правильной. Согласно теореме 6 система A допускает ненулевую конгруэнтность с одноэлементным смежным классом s только в том случае, когда существуют отличные от s элементы a, b , для которых при любой трансляции T утверждения $aT = s$ и $bT = s$ равносильны. Таким образом, для правильности алгебраической системы A необходимо, чтобы для любой тройки разных элементов a, b, c из A существовала трансляция T , для которой $aT = c$, $bT \neq c$ или $bT = c$, $aT \neq c$, в частности, необходимо, чтобы полугруппа трансляций была транзитивной.

Несколько усиливая требования, можно получить достаточный признак. Именно, если для каждой тройки различных элементов a, b, c алгебраической системы A существуют трансляции S, T , для которых $aST = a$, $bST = b$ и или $aS = c$, или $bS = c$, то все конгруэнтности на A правильны.

Действительно, пусть K — некоторый смежный класс и a, b — пара элементов, для которых условия $aT \in K$, $bT \in K$ равносильны для любой трансляции T . Согласно теореме 6 нужно показать лишь, что $a \equiv b (\text{mod } K)$. По условию для произвольного элемента $c \in K$ найдутся трансляции S, T , для которых $aST = a$, $bST = b$ и $aS = c$ или $bS = c$. Но если $aS \in K$, то $bS \in K$, $aS = bS (\text{mod } K)$, откуда $aST = bST (\text{mod } K)$, т. е. $a \equiv b (\text{mod } K)$.

Указанное достаточное условие выполняется тривиально, если группа обратимых трансляций транзитивна, так как в этом случае можно взять $T = S^{-1}$.

В приведенных выше формулировках говорится просто о трансляциях. Легко проверить, что утверждения останутся справедливыми, если в необходимых условиях под трансляциями понимать произвольные общие транс-

ляции, а в достаточных — под трансляциями понимать элементарные трансляции.

Допустим теперь, что указанный достаточный признак выполняется на каждой системе некоторого примитивного класса. Рассматривая свободную систему S этого класса со счетным числом порождающих $a, b, c, a_1, a_2, \dots$ и применяя признак к элементам a, b, c , мы, как и выше, приходим к выводу, что на системе S существуют две кватернарные производные операции $xyzt, xtutzt$, связанные тождествами

$$\begin{aligned} xyxz &= z, & xtutxt &= y, \\ (xuxz)tyxtz &= x. \end{aligned} \quad (6)$$

Называя алгебраическую систему с двумя кватернарными операциями, связанными тождествами (6), б и к в а т е р н а р н о й, мы видим, что все бикватернарные системы являются правильными системами.

Легко обнаружить, что на бикватернарных системах все конгруэнтности перестановочны.

Для этого полагаем

$$\psi(x, y, z) = (xuxx)tzxtx.$$

Из первых двух тождеств системы (6) следует

$$\psi(x, x, z) = (xxxx)tzxtx = z,$$

а из третьего тождества вытекает

$$\psi(x, z, z) = (xzxz)tzxtx = x,$$

что и требовалось.

Изложенное показывает, что между перестановочностью конгруэнтностей и правильностью систем имеется связь. Однако эти свойства, во всяком случае, не равносильны. Например, рассмотрим систему с тремя элементами a, b, c и одной тернарной операцией xyz , где $xyz = c$, если x, y, z различны, и $xxy = yxy = yxx = x$ — в остальных случаях. Разбиение $\{c\}, \{a, b\}$ дает конгруэнтность, имеющую такой же одноэлементный смежный класс $\{c\}$, как и конгруэнтность, совпадающая с равенством, и в то же время конгруэнтности на этой системе перестановочны.

§ 3. Топологические алгебраические системы

Как обычно (см. П. С. Александров [1]), под топологическим пространством будет пониматься множество элементов с выделенной совокупностью подмножеств, называемых открытыми и обладающих свойствами:

- а) пустое подмножество и само множество открыты;
- б) объединение любой совокупности и пересечение конечной совокупности открытых множеств суть открытые множества.

Топологическое пространство, в котором выполняется аксиома отделимости T_i ($i = 0, 1, 2$), будет называться топологическим T_i -пространством.

Частичная операция $f(x_1, \dots, x_n)$, определенная на топологическом пространстве A , называется *непрерывной*, если для каждой системы значений аргументов $x_1, \dots, x_n$, для которой $y = f(x_1, \dots, x_n)$ имеет смысл, для каждой окрестности V точки y существуют такие окрестности $U_1, \dots, U_n$ точек $x_1, \dots, x_n$, что для всех $x'_i \in U_i$ выражение $f(x'_1, \dots, x'_n)$

имеет смысл и $f(x'_1, \dots, x'_n) \in V$. В частности, обычная (всюду определенная) операция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется непрерывной, если для любой окрестности ∇ точки $y = f(x_1, \dots, x_n)$ существуют такие окрестности $U_1, \dots, U_n$ точек $x_1, \dots, x_n$, что $f(U_1, \dots, U_n) \subset \nabla$.

Частичная алгебраическая система, основное множество элементов которой является топологическим пространством, а основные операции непрерывны, называется *частичной топологической системой*. Частичная топологическая система со всюду определенными основными операциями называется *топологической алгебраической системой*.

Образование одной топологической алгебраической системы на другую будет называться *непрерывным изоморфизмом*, если оно непрерывно и является изоморфизмом в алгебраическом смысле. Аналогично определяются непрерывные гомоморфизмы и другие сходные понятия. *Примитивным классом топологических алгебраических систем* называется совокупность топологических алгебраических систем, составляющих примитивный класс в алгебраическом смысле.

Так как непрерывная функция от непрерывной функции является непрерывной функцией, то все многочленные операции будут непрерывными. Следовательно, все производные системы, принадлежащие данной топологической системе A , можно также рассматривать как топологические системы, определенные на пространстве A . Трансляции топологической системы являются непрерывными отображениями A в A , а обратимые трансляции представляют собою взаимно однозначные и взаимно непрерывные отображения A на A . В частности, если группа обратимых трансляций топологической системы транзитивна, то пространство системы топологически однородно. Например, топологически однородно пространство всякой топологической бигерной системы.

Более сильное требование транзитивности группы элементарных обратимых трансляций приводит к более интересному топологическому следствию, хорошо известному для топологических групп:

Теорема 7. *Если топологическая система A принадлежит примитивному классу, все системы которого содержат производные системы, элементарные трансляции которых образуют транзитивные группы, то пространство системы A регулярно.*

Доказательство. Пусть e — произвольный элемент системы A . Согласно теореме 2 среди производных операций A найдутся операции умножения и деления, относительно которых A будет квазигруппой с правой единицей e . Нужно доказать, что каждая окрестность U элемента e содержит окрестность e , замыкание которой содержится в U . Так как квазигрупповые операции непрерывны и $ee = e$, $e/e = e$, то найдется такая окрестность единицы V , для которой $VV \subset U$, $V/V \subset U$. Пусть $p \in \bar{V}$. Тогда pV — окрестность точки p и потому найдется элемент v , принадлежащий пересечению pV и V . Таким образом, для некоторого $w \in V$ имеем $pw = v$, откуда $p = v/w$, $p \in V/V \subset U$, т. е. $\bar{V} \subset U$.

Говорят, что алгебраическая система A порождается элементами некоторой совокупности P , если каждый элемент A может быть получен конечной цепочкой основных операций, исходя из элементов P . Элемент e алгебраической системы A будет называться *главным*, если он сам по себе образует подсистему этой системы, т. е. если $f_i(e, \dots, e) = e$ для каждой основной операции f_i системы A .

Теорема 8. Если топологическая система A обладает главным элементом e и порождается элементами некоторой связной окрестности U элемента e , то пространство A связно.

Доказательство. Пусть $A = F_1 \cup F_2$ — какое-либо разложение заданной системы на непересекающиеся замкнутые множества. Предполагая, что $e \in F_1$, докажем, что F_2 пусто. В самом деле, пусть $a \in F_2$ и $a = f(u_1, \dots, u_n)$ — выражение a в виде полинома от элементов $u_1, \dots, u_n$ окрестности U . Поскольку U связна, то связно и декартово произведение $V = U^{(n)} = U \times U \times \dots \times U$, причем операция $f(x_1, \dots, x_n) = y$ дает непрерывное отображение V в пространство A . Прообраз множества F_i в V обозначим через V_i ($i = 1, 2$). Так как V_1, V_2 без общих точек и замкнуты, а V связно, то одно из них должно быть пусто, вопреки тому что V_1 содержит $(e, \dots, e)$, а V_2 содержит $(u_1, \dots, u_n)$.

Теорема 9. Связная лупа G алгебраически порождается элементами любой окрестности единицы.

Доказательство. Обозначим через H подлупу, порожденную элементами какой-либо окрестности единицы U . Покажем, что H одновременно открыта и замкнута. Тогда множество $G - H$ будет замкнуто, а из разложения $G = H \cup G - H$ и связности G будет следовать, что $G - H$ пусто, т. е. что $G = H$.

Итак, пусть $a \in H$. Тогда aU — окрестность a , входящая в H , т. е. H открыта. Предположим, теперь, что a — предельная точка для H . Тогда aU будет содержать хотя бы одну точку h из H , т. е. для некоторого $u \in U$ будет $h = au$, откуда $a = h/u \in H$.

Сравнивая доказанную теорему с теоремой 2, приходим к следствию:

Если связная топологическая система A принадлежит примитивному классу, совокупности элементарных трансляций систем которого являются транзитивными группами, то A порождается элементами любого открытого множества U из A .

Действительно, для произвольного элемента e из U найдутся производные операции, относительно которых A будет лупой. По теореме 9 система A будет порождаться элементами U .

§ 4. Гомоморфизмы топологических систем

Отношение $\theta(x_1, \dots, x_n)$, определенное на топологическом пространстве, условимся называть *непрерывным*, если для каждой последовательности элементов $x_1, \dots, x_n$, не удовлетворяющей отношению θ , существует такая последовательность открытых множеств U_i , $x_i \in U_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), что для всех x'_i ($x'_i \in U_i$; $i = 1, 2, \dots, n$) отношение $\theta(x'_1, \dots, x'_n)$ не выполняется.

Для каждой эквивалентности θ , заданной на множестве M , и каждого его подмножества N θ -*пополнением* N называется совокупность элементов, эквивалентных хотя бы одному элементу из N . Эквивалентность θ , заданная на топологическом пространстве, называется *полной*, если θ -пополнения открытых множеств открыты.

Пусть M — топологическое пространство и θ — полная эквивалентность на нем. Обозначим через M/θ совокупность классов эквивалентных элементов, на которые разбивается M относительно θ . Называя образы открытых множеств из M при естественном отображении $M \rightarrow M/\theta$ открытыми множествами в M/θ , мы обратим M/θ также в топологическое пространство, причем

отображение $M \rightarrow M/\theta$ будет непрерывным и открытым. Обратно, если задано какое-либо открыто непрерывное отображение топологического пространства M на произвольное топологическое пространство M_1 , то, называя точки M , имеющие одинаковые образы в M_1 , эквивалентными, получим полную эквивалентность на M .

Таким образом, если не интересоваться выполнимостью в фактор-пространствах аксиом отделимости, то можно брать фактор-пространства по произвольным полным эквивалентностям. Дело меняется, как известно, если необходимо, чтобы в фактор-пространстве имела место та или иная аксиома отделимости. Для дальнейшего достаточен следующий признак:

Если θ — полная и непрерывная эквивалентность на топологическом пространстве M , то фактор-пространство M/θ удовлетворяет аксиоме T_2 .

Обратно, если дано открытое непрерывное отображение топологического пространства M на топологическое пространство N , удовлетворяющее аксиоме T_2 , то соответствующая эквивалентность θ на M полно непрерывна и естественное отображение $M/\theta \leftrightarrow N$ является гомеоморфизмом.

Для полноты приведем доказательство последнего утверждения. Пусть p, q — неэквивалентные точки из M . Их образы в N различны и потому могут быть разделены непересекающимися окрестностями U_1, V_1 . Прообразы U, V этих окрестностей содержат соответственно точки p, q , открыты в M , и никакая точка U не эквивалентна никакой точке V . Следовательно, θ непрерывна. Гомеоморфность M/θ и N вытекает из того, что открытые множества обоих пространств являются образами открытых множеств из M .

Пусть теперь A — топологическая алгебраическая система и θ — полная конгруэнтность на ней. Тогда, определяя обычным образом на A/θ основные операции системы A и внося в A/θ указанным образом топологию, получим снова топологическую алгебраическую систему, причем естественное отображение $A \rightarrow A/\theta$ будет открытым и непрерывным гомоморфным отображением. Из сказанного видно также, что если $A \rightarrow B$ есть открытое непрерывное гомоморфное отображение топологической алгебраической системы на систему с аксиомой T_2 , то соответствующая эквивалентность θ на A будет полной непрерывной конгруэнтностью, причем естественное отображение $A/\theta \rightarrow B$ будет топологическим изоморфизмом.

В дальнейшем все топологические системы предполагаются с аксиомой T_2 .

Т е о р е м а 10. *Если на всех системах примитивного класса конгруэнтности перестановочны, то на топологических системах этого класса все конгруэнтности — полные.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 4 в рассматриваемом классе существует многочлен $\psi(x, y, z)$, удовлетворяющий соотношениям $\psi(x, x, z) = z$, $\psi(x, z, z) = x$. Пусть θ — произвольная конгруэнтность, U — какое-либо открытое множество и U^* — его θ -замыкание. Нужно показать, что U^* — открытое. Если это неверно, то в U^* найдется точка a^* , любая окрестность которой содержит точку, не входящую в U^* . По условию в U найдется точка a , конгруэнтная a^* . Так как $a = \psi(a^*, a^*, a)$ и многочлен $\psi(x, a^*, a)$ является непрерывной функцией от x , то существует окрестность V^* точки a^* , для которой $U \supset \psi(V^*, a^*, a)$. В силу выбора a^* в окрестности V^* существует точка v , не входящая в U^* . Но тогда $\psi(v, a^*, a) \in U$ и в то же время из $a \equiv a^*$ следует

$$\psi(v, a^*, a) \equiv \psi(v, a, a) = v,$$

т. е. точка v принадлежит U^* в противоречии с выбором v .

В топологических T_1 -пространствах из непрерывности эквивалентности θ следует замкнутость всех смежных классов по θ . При некоторых условиях справедливо и обратное.

Т е о р е м а 11. *Если на всех системах примитивного класса конгруэнтности перестановочны, то на топологических системах этого класса те и только те конгруэнтности непрерывны, у которых смежные классы замкнуты.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\psi(x, y, z)$ — многочлен, удовлетворяющий тождествам $\psi(x, x, z) = z$, $\psi(x, z, z) = z$. Если $x \equiv y (\theta)$, то при любом a имеем: $\psi(a, x, y) \equiv \psi(a, x, x)$, т. е. при любом a имеет место сравнение $\psi(a, x, y) \equiv a$. Обратно, если для данных x, y при любом a имеем $\psi(a, x, y) \equiv a$, то, подставляя x вместо a , получим $y = \psi(x, x, y) \equiv x$. Пусть теперь $x \not\equiv y$. Тогда при подходящем a будем иметь $\psi(a, x, y) \not\equiv a$, т. е. точка $\psi(a, x, y) = w$ не входит в смежный класс, содержащий a . Поскольку этот класс замкнут, то с ним не будет пересекаться некоторая окрестность W точки w . Из непрерывности $\psi(a, x, y)$ вытекает существование окрестностей X, Y точек x, y , для которых $\psi(a, X, Y) \subset W$. Следовательно, для любых $x' \in X, y' \in Y$ имеем $\psi(a, x', y') \not\equiv a$, т. е. $x' \not\equiv y'$, что и требовалось.

Изложенное показывает, что при помощи конгруэнтностей можно рассматривать лишь открытые непрерывные гомоморфизмы. Что касается просто непрерывных гомоморфизмов, то для топологических групп хорошо известен случай, когда любой непрерывный гомоморфизм является открытым (см. [4], стр. 77). Не меняя сущности доказательства, легко убедиться в справедливости этого и для произвольных битернарных систем.

Т е о р е м а 12. *Пусть G и G_1 — две локально компактные топологические битернарные системы, удовлетворяющие второй аксиоме счетности. Всякое непрерывное гомоморфное отображение G на G_1 является открытым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя доказательству из [4], покажем сначала, что образ W_1 в G_1 произвольной области W из G содержит область. Выбираем такую область V , чтобы замыкание ее $\bar{V}$ было компактно и содержалось в W . Трансляции вида $xT_{ab} = xab$, $xS_{ab} = xadb$ взаимно обратны и потому являются гомеоморфными отображениями G на себя. Множество областей вида VT_{ab} покрывает все пространство, и в силу второй аксиомы счетности из этого покрытия можно выбрать счетное $VT_1, VT_2, \dots$, где T_i — подходящие трансляции. Обозначая образ $\bar{V}T_i$ в G_1 через F_i , видим, что F_i образуют счетное покрытие пространства G_1 замкнутыми множествами. По известному предположению отсюда следует, что хотя бы одно из множеств F_i содержит область. Если это множество есть F_α , то трансляция T_α^{-1} переведет $\bar{V}T_\alpha$ в $\bar{V}$, а F_α в F , и мы получим, что образ $\bar{V}$ и, тем более, образ W содержит область.

Пусть теперь U — произвольная область в G , U_1 — ее образ в G_1 и p_1 — произвольная точка из U_1 . Остается доказать, что найдется окрестность p_1 , содержащаяся в U_1 . Обозначим через p точку из U , переходящую в p_1 . Так как $ppp = p \in U$ и операция xuz непрерывна, то найдется такая окрестность V точки p , что $VVV \subset U$. По доказанному образ V в G_1 содержит некоторую область W_1 . Пусть q_1 — одна из точек W_1 и q — точка из V , отображающаяся в q_1 . Образ V_{qp} содержит область $W_1q_1p_1$, а так как $Vqp \subset VVV \subset U$, то $W_1q_1p_1 \subset U_1$. Но $W_1q_1p_1$ содержит точку $q_1q_1p_1 = p_1$, что и требовалось.

Всякий гомоморфизм основных алгебраических систем является в то же время гомоморфизмом и для соответствующих производных систем. Поэтому, сравнивая только что доказанную теорему с теоремой 3, приходим к следствию:

Если полугруппа производных трансляций каждой алгебраической системы данного примитивного класса содержит транзитивную группу, то всякое непрерывное гомоморфное отображение одной локально компактной системы этого класса со второй аксиомой счетности на другую, удовлетворяющую тем же требованиям, является открытым.

В частности, открытым является всякое непрерывное гомоморфное отображение одной локально компактной квазигруппы со второй аксиомой счетности на другую с теми же свойствами.

§ 5. Накрывающие гомоморфизмы

Открыто непрерывное отображение топологического пространства A на топологическое пространство A' называется **накрывающим**, если для каждой точки x из A существует такая окрестность $U \ni x$, что данное отображение является гомеоморфизмом, если рассматривать его только между U и ее образом в A' . Полная и непрерывная эквивалентность θ на топологическом пространстве A называется **дискретной**, если для каждой точки x из A существует окрестность, не содержащая ни одной пары различных эквивалентных точек. Отображение одного топологического пространства в другое тогда и только тогда накрывающее, когда соответствующая эквивалентность дискретна.

Топологическое регулярное T_2 -пространство со второй аксиомой счетности называется **линейно связным**, если любые две его точки могут быть соединены непрерывным путем. Пространство называется **локально линейно односвязным**, если для каждой окрестности U его произвольной точки x существует такая окрестность $V \ni x$, что любые два пути с общим началом и концом, целиком лежащие в V , могут быть непрерывно деформированы друг в друга внутри окрестности U .

Теорема 13. *Для каждой линейно связной локально линейно односвязной топологической системы A с выделенным главным элементом e существует односвязная гомоморфно накрывающая система $\tilde{A}$ с выделенным главным элементом, переходящим в e . Эта односвязная накрывающая система определяется однозначно с точностью до топологического изоморфизма и принадлежит к тому же примитивному классу, что и заданная система.*

Доказательство. Рассматриваем всевозможные пути в A , выходящие из e , и идентифицируем эквивалентные пути, имеющие данный конец. В совокупность путей вносится обычным образом топология. Тем самым совокупность классов эквивалентных путей делается топологическим пространством $\tilde{A}$. Ставя каждому пути из $\tilde{A}$ в соответствие его конец, получают накрывающее отображение односвязного пространства $\tilde{A}$ на заданное пространство A . Пусть $f_i(x_1, \dots, x_n)$ — одна из основных операций в A и $a_1(t), \dots, a_n(t)$ — пути в A , представляющие элементы $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$ из $\tilde{A}$. Тогда $f_i(a_1(t), \dots, a_n(t)) = a(t)$ будет также путем в A и будет, следовательно, представлять некоторый элемент $\tilde{a}$ из $\tilde{A}$. Полагая по определению $f_i(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$, мы превратим $\tilde{A}$ в алгебраическую систему. Поскольку непрерывные деформации путей $a_1(t), \dots, a_n(t)$ вызывают непрерывную деформацию пути $a(t)$, то результат операции $f_i(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$ не зависит от выбора путей, представляющих элементы $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$, и потому операции f_i в системе $\tilde{A}$ будут однозначными. Легко видеть, что они будут и непрерывны. Естественное отображение $\tilde{A}$ на A будет алгебраическим гомоморфизмом, так как концом пути $a(t)$ является элемент $f_i(a_1, \dots, a_n)$. Покажем, что если неко-

торое тождество $F(x_1, \dots, x_m) = H(x_1, \dots, x_m)$, где F и H — полиномы от $x_1, \dots, x_m$, имеет место в A , то оно имеет место и в $\bar{A}$. Для этого берем в A произвольные элементы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ и выбираем представляющие их пути $a_1(t), \dots, a_m(t)$ в A . Выражения $F(a_1(t), \dots, a_m(t))$ и $H(a_1(t), \dots, a_m(t))$ будут путями, представляющими $F(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ и $H(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ в A . Так как для каждого значения t в системе A имеем $F = H$, то пути $F(t)$ и $H(t)$ совпадают, т. е. $F(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = H(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$.

Пусть теперь $A' \rightarrow A$ — накрывающее гомоморфное отображение некоторой линейно односвязной системы A' на данную систему A , при котором в главный элемент e системы A отображается главный элемент e' системы A' . Как известно, для каждого пути $a(t)$ в системе A , выходящего из e , существует в системе A' единственный путь $a'(t)$, образом которого в A является путь $a(t)$. Ставя в соответствие элементу $a'(t)$ тот элемент $\bar{A}$, который представляется путем $a(t)$, получим взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение A' на $\bar{A}$. Остается доказать, что это соответствие является алгебраическим изоморфизмом между A' и $\bar{A}$. Пусть $a' = f_i(a'_1, \dots, a'_n)$, где $a'_1, \dots, a'_n$ — произвольные элементы системы A' . Соединяя e' путями $a'_1(t), \dots, a'_n(t)$ с указанными элементами, получим путь $a'(t) = f_i(a'_1(t), \dots, a'_n(t))$, соединяющий e' с a' . Обозначим через $a(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ соответственно образы элементов $a'(t), a'_1(t), \dots, a'_n(t)$ в системе A . Так как рассматриваемое отображение гомоморфно, то $a(t) = f_i(a_1(t), \dots, a_n(t))$. Но пути $a(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ представляют в A элементы $\bar{a}, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ системы $\bar{A}$, отвечающие элементам $a', a'_1, \dots, a'_n$. Соотношение $a(t) = f_i(a_1(t), \dots, a_n(t))$ означает, что $\bar{a} = f_i(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$. Следовательно, отображение A' на $\bar{A}$ гомоморфно, а так как оно взаимно однозначно, то и изоморфно.

Множество точек топологического пространства называется **д и с к р е т н ы м**, если каждая точка этого множества обладает окрестностью, не содержащей других точек множества.

В битарнарных системах, а следовательно, и во всех системах, содержащих битарнарные, для дискретности некоторой конгруэнтности θ необходимо и достаточно, чтобы был дискретным хотя бы один смежный класс, а потому и все смежные классы по θ .

Необходимость условия очевидным образом выполняется во всех системах, а не только в битарнарных. Пусть, наоборот, все смежные классы по конгруэнтности θ на битарнарной системе дискретны. Тогда для каждой точки a найдется окрестность U , не содержащая ни одной отличной от a и эквивалентной ей точки. Поскольку основная тернарная операция xuy непрерывна и $aaa = a$, то найдется такая окрестность V точки a , что $V \subset U$ и $VVa \subset U$. Пусть теперь x, y — эквивалентные точки, лежащие в V . Из $x \equiv y (\theta)$ вытекает $xua \equiv xxa = a$. Так как $xua \in U$, то по условию $xua = a$, откуда $x = y$.

В алгебраических системах с выделенным главным элементом e совокупность всех элементов, сравнимых с e по какой-либо конгруэнтности θ , называется **н о р м а л ь н ы м д е л и т е л е м**, отвечающим θ . Пусть система A имеет операцию умножения. Элемент a называется **а с с о ц и и р у ю щ и м** с элементами A , если $ax \cdot y = a \cdot xy$, $xa \cdot y = x \cdot ay$, $xy \cdot a = x \cdot ya$ для всех x, y из A . Элемент a **к о м м у т и р у е т** с элементами A , если $ax = xa$ для $x \in A$. Коммутирующие и ассоциирующие с A элементы называются **ц е н т р а л ь н ы м и**.

Т е о р е м а 14. *Все дискретные нормальные делители связной лупы лежат в ее центре.*

Доказательство. Пусть θ — дискретная конгруэнтность на связной лупе G и N — соответствующий нормальный делитель. Для любых $x \in G$, $a \in N$ имеем

$$a \equiv e, \quad e/x \cdot ax \equiv e, \quad e/x \cdot xa \equiv e (\theta),$$

т. е. $e/x \cdot ax \in N$, $e/x \cdot xa \in N$. Соответствия $x \rightarrow e/x \cdot ax$, $x \rightarrow e/x \cdot xa$ представляют собою непрерывные отображения связного пространства G в дискретное множество N и потому отображают G на один элемент, откуда

$$e/x \cdot ax = e/e \cdot ae = a, \quad e/x \cdot xa = e/e \cdot ea = a$$

и, следовательно, $ax = xa$.

Аналогично для любых x, y из G и любого $a \in N$ имеем

$$e/(xy) \cdot (xa) y \equiv e, \quad e/(xy) \cdot x (ay) \equiv e (\theta).$$

Принимая во внимание связность G и непрерывность отображений

$$(x, y) \rightarrow e/(xy) \cdot (xa) y, \quad (x, y) \rightarrow e/x y \cdot x (ay)$$

снова заключаем, что эти отображения являются отображениями на одну точку, т. е. для всех x, y имеем

$$e/(xy) \cdot (xa) y = a, \quad e/(xy) \cdot x (ay) = a,$$

откуда $(xa) y = x (ay)$.

Теорема 15. *Фундаментальная группа линейно связной топологической системы A , имеющей бинарную операцию с нейтральным элементом, коммутативна.*

Эта теорема является частным случаем более общей теоремы Хопфа о гомотопических группах пространств с непрерывной операцией. Мы укажем здесь ее краткое непосредственное доказательство.

Пусть заданная операция есть сложение и θ — нейтральный элемент, так что $\theta + x = x + \theta = x$. Рассмотрим замкнутые пути $a(t), b(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) в A , выходящие из θ . Сумма $c(t) = a(t) + b(t)$ будет снова замкнутым путем в A , выходящим из θ . Произведением путей $a(t), b(t)$ в фундаментальной группе называется путь, получающийся в результате прохождения сначала пути $a(t)$ и затем $b(t)$. Покажем, что $c(t) \sim ab \sim ba$. Для этого вводим функции x, y от параметров t, τ ($0 \leq \tau \leq 1; 0 \leq t \leq 1$), полагая

$$x = 2t, \quad y = 0 \quad (2t - \tau < 0),$$

$$x = (\tau + 2t - 2t\tau)/(2 - \tau), \quad y = (2t - \tau)/(2 - \tau) \quad (2t - \tau \geq 0).$$

Отображение $(t, \tau) \rightarrow a(x) + b(y)$ является непрерывным отображением квадрата $0 \leq t \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1$ в пространство A , причем для каждого фиксированного τ сумма $a(x) + b(y)$, рассматриваемая как функция от t , дает замкнутый путь, выходящий из θ . При $\tau = 0$ получаем путь $c(t)$, а при $\tau = 1$ имеем путь ab , т. е. $c \sim ab$. Рассматривая аналогичным образом отображение $(t, \tau) \rightarrow a(y) + b(x)$, получим, что $c \sim ba$.

Следствие. *Фундаментальные группы линейно связных систем, принадлежащих примитивным классам с перестановочными конгруэнтностями, являются абелевыми.*

Действительно, на таких системах существует многочлен $\psi(x, y, z)$, удовлетворяющий тождествам $\psi(x, z, z) = x, \psi(x, x, z) = z$. Беря произвольный элемент e системы и вводя операцию умножения формулой $x y =$

$=\psi(x, e, y)$, видим, что $ey = y$, $xe = x$, т. е. e — нейтральный элемент для этой операции. В силу теоремы 15 отсюда следует коммутативность фундаментальной группы.

Последнее рассуждение показывает, что на системах примитивного класса с перестановочными конгруэнтностями для каждого элемента e существует производная бинарная операция, для которой e является нейтральным элементом. Обратное утверждение, как легко видеть, также справедливо, что дает еще одну характеристику примитивных классов с перестановочными конгруэнтностями.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров. Комбинаторная топология. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
2. Г. Биркгоф. Теория структур. М., ИЛ, 1952.
3. А. И. Мальцев. Об одном классе алгебраических систем.— Успехи мат. наук, 1953, 8, № 1, 165—171.
4. Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. М.—Л., ГОНТИ, 1938.
5. Е. С. Ляпин. Нормальные комплексы ассоциативных систем.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1950, 14, № 2, 179—192.
6. T. Evans. On multiplicative system defined by generators and relations.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1951, 47, 637—649.
7. H. A. Thurston. Equivalences and mappings.— Proc. London Math. Soc., 1952, 2, N 6, 175—182.



Значительная часть алгебраических локальных теорем может быть выведена из следующей основной локальной теоремы: *для совместимости бесконечной системы формул узкого исчисления предикатов, допускающего отношение тождества и произвольное множество символов для индивидуальных объектов и предикатов, необходимо и достаточно, чтобы была совместна каждая подсистема данной системы.*

В этой форме локальная теорема была получена мною [1] в 1941 г. при помощи результатов работы [2]. Там же эта теорема была применена к решению некоторых в то время открытых вопросов теории групп. Результаты эти позже вошли в обзор [3] и монографию [4], где указано и происхождение их. Тем же методом пользовались автор [5] и А. А. Виноградов [6] в теории упорядоченных групп. Однако заметка [4] осталась малоизвестной, и несколько лет назад возможность применения локальных теорем математической логики к алгебре была переоткрыта рядом авторов [7], а приложения к теории упорядоченных групп и основная локальная теорема (но не локальные теоремы о группах разрешимого типа из [8]) были переоткрыты совсем недавно Б. Нейманом [8] и А. Робинсоном [9].

Для доказательства конкретных локальных теорем приходится обычно проводить вспомогательные построения. Целью настоящей заметки является указать несколько видов локальных теорем, конкретные применения которых не требуют этих вспомогательных построений. В качестве примера указана одна новая теорема об упорядоченных группах.

Пусть на некотором множестве A определены предикаты $O_1, O_2, \dots$ и пусть каждому из них $O_i(x_1, \dots, x_{v_i})$ поставлена в соответствие определенная формула $\mathfrak{M}_i(x_1, \dots, x_{v_i})$ узкого исчисления, свободными переменными которой являются $x_1, \dots, x_{v_i}$, а предикатные символы обозначены через $R_1, R_2, \dots$. Пусть на некотором множестве B определены предикаты $R_1, R_2, \dots$ и пусть задано отображение $x \rightarrow x^\sigma$ множества A на B . Мы скажем, что σ есть представление модели A в модели B типа $O_i \rightarrow \mathfrak{M}_i$, если $(x_1) \dots (x_{v_i}) [A \models O_i(x_1, \dots, x_{v_i}) \leftrightarrow B \models \mathfrak{M}_i(x_1^\sigma, \dots, x_{v_i}^\sigma)] (x_j \in A)$. Тип представления считаем заданным, а модель B и отображение σ искомыми.

Т е о р е м а 1. *Если каждая конечная подмодель фиксированной модели A допускает представление при помощи подмодели некоторой модели данного аксиоматизируемого класса, то и модель A допускает представление в этом классе.*

В качестве примера на применение теоремы 1 можно указать теорему об изоморфной представимости группы матрицами данного порядка, все подгруппы с конечным числом образующих которой представимы матрицами этого порядка. Доказательство теоремы 1 непосредственно вытекает из основной локальной теоремы.

Рассмотренные представления можно назвать прямыми, так как в них элементы представляются элементами. Можно построить представления, в которых элементы представляются предикатами.

Пусть снова $\langle A; O_1, O_2, \dots \rangle$ — некоторая модель. Каждому элементу $a \in A$ ставим в соответствие предикатный символ $R_a(x_1, \dots, x_{\mu_a})$ и каждому предикату $O_i(x_1, \dots, x_{\nu_i})$ ставим в соответствие формулу $\mathfrak{A}(R_{x_1}, \dots, R_{x_{\nu_i}})$ узкого исчисления, не содержащую свободных переменных, предикатными символами которой являются $R_{x_1}, \dots, R_{x_{\nu_i}}$ и может быть некоторые другие.

Мы скажем, что соответствие $a \rightarrow R_a$ есть предикатное представление модели A в модели $\langle B; R_{a_1}, R_{a_2}, \dots \rangle$ типа $O_i \rightarrow \mathfrak{A}_i$, если в B формула $\mathfrak{A}(R_{a_1}, \dots, R_{a_{\nu_i}})$ истинна тогда и только тогда, когда в модели A истинно отношение $O_i(a_1, \dots, a_{\nu_i})$. Легко видеть, что из основной локальной теоремы следует теорема 2.

Теорема 2. Если каждая конечная подмодель данной модели A допускает предикатное представление $O_i \rightarrow \mathfrak{A}_i$ в некоторой модели фиксированного аксиоматизируемого класса, то и сама модель A допускает представление $O_i \rightarrow \mathfrak{A}_i$ в некоторой модели того же класса.

Примером на эту теорему может служить теорема Стоуна о представимости бесконечных алгебр Буля. Предикаты R_a в данном случае следует взять одноместными, а отношениями $a = b + c$ и $a = b'$ в алгебре Буля A поставить в соответствие формулы $(x) [R_a(x) \leftrightarrow R_b(x) \vee R_c(x)]$ и $(x) [R_a(x) \leftrightarrow \neg R_b(x)]$. Представления нужно искать в классе, определяемом формулами

$$(\exists x) [(R_a(x) \& \neg R_b(x)) \vee (\neg R_a(x) \& R_b(x))] \quad (a \neq b).$$

В качестве второго примера рассмотрим так называемые алгебры отношений (relational algebras). Тарский [11] показал, что класс представимых алгебр отношений может быть определен некоторой системой тождеств, а потому обладает и локальным свойством. Это локальное свойство непосредственно вытекает и из теоремы 2. Предикаты R_a теперь берем бинарные и соотношениям $a = b'$, $a = b^U$, $a = b + c$, $a = b \cdot c$ в алгебре отношений A ставим в соответствие формулы

$$\begin{aligned} (x)(y) [R_a(x, y) \leftrightarrow \neg R_b(x, y)], \\ (x)(y) [R_a(x, y) \leftrightarrow R_b(y, x)], \\ (x)(y) [R_a(x, y) \leftrightarrow R_b(x, y) \vee R_c(x, y)], \\ (x)(y) [R_a(x, y) \leftrightarrow (\exists z) [R_b(x, z) \& R_c(z, y)]] \end{aligned}$$

Аналогичным образом теорема 2 может быть применена к выводу локального свойства для представимых проективных алгебр Эверетта и Улама [12] и вообще для всех предикатных алгебр.

Значительный интерес в алгебре представляют локальные теоремы, касающиеся расположения подгрупп, идеалов и других систем элементов. Для вывода таких теорем ни прямые, ни предикатные представления непосредственно непригодны. Поэтому целесообразно ввести еще один тип представлений.

Пусть на модели $\langle A; O_1, O_2, \dots \rangle$ нужно выделить некоторые классы элементов $p_1, p_2, \dots$, обладающие известными свойствами. Эти свойства разо-

бьем на два класса. К первому классу S_1 отнесем те свойства, которые выражают отношения классов $p_1, p_2, \dots$ между собой и которые мы будем предполагать записываемыми в узком исчислении с основными индивидуальными объектами $p_1, p_2, \dots$. Например, к этому классу принадлежат свойства быть упорядоченной системой, решеткой и т. п. Ко второму классу S_2 отнесем свойства, связывающие p_i с элементами A . Их мы предположим записываемыми в виде формул, кванторы которых частью относятся к $p_1, p_2, \dots$, а частью к элементам A , причем выражение $a \in p$ рассматриваем как предикат $\in (a, p)$. Будем считать, что построить модель для S_1 & S_2 над A значит найти дополнительное множество $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ и определить $\in (a, p)$ и предикаты из S_1 & S_2 так, чтобы все предложения из S_1 и S_2 стали истинными. Ясно, что для такой общей задачи локальная теорема места не имеет. Однако имеет место более специальная теорема 3.

Т е о р е м а 3. Пусть все выражения из S_2 указанной смешанной системы S_1 & S_2 не имеют кванторов существования, относящихся к элементам фиксированной модели A . Тогда, если каждая конечная система элементов из A содержится в подмодели $A_1 \subseteq A$, обладающей надмоделью для S_1 & S_2 , то надмоделью обладает и модель A .

Для доказательства вводим бесконечную систему одноместных предикатов $R_a(p)$ ($a \in A$) и в предложениях системы S_2 заменяем всюду выражения $\in (a, p)$ через $R_a(p)$. После этого по способу из [2] приводим предложения S_2 к нормальному виду, в котором кванторы всеобщности предшествуют кванторам существования. Так как среди кванторов существования не было относящихся к элементам модели A , то их не будет и в предложениях нормальной формы. Наконец, в последних предложениях выбрасываем кванторы всеобщности, относящиеся к элементам A , а вместо появившихся свободных переменных подставляем во всевозможных комбинациях элементы из A . В результате система S_1 & S_2 заменится эквивалентной системой обыкновенных предложений узкого исчисления, для которой локальная теорема верна.

В качестве примера приведем локальные теоремы из [1], согласно которым группа G имеет нормальную разрешимую (соответственно центральную) систему подгрупп, если такую систему имеет каждая подгруппа группы G , обладающая конечной системой образующих. Другим примером может служить теорема 4.

Т е о р е м а 4. Всякая частично упорядоченная локально нильпотентная группа без кручения обладает центральной системой, состоящей из выпуклых нормальных делителей.

Для групп с конечным числом образующих эта теорема содержится в [5], а распространение на общий случай дает теорема 3.

Отметим, что система S_1 & S_2 есть по существу система из расширенного исчисления предикатов, так как в ней могут встречаться предикаты предикатов и кванторы, относящиеся к предикатам. Указанный прием сводит ее к бесконечной системе предложений узкого исчисления над промежуточным множеством «обычных» предикатов. Локальная теорема для предложений 2-й ступени другого вида была указана Хенкиным [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп.— Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1941, 1, № 1, 3—9.
2. А. И. Мальцев. Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik.— Mat. сб., 1936, 1, № 3, 323—335.
3. А. Г. Курош, С. Н. Черников. Разрешимые и нильпотентные группы.— Успехи мат. наук, 1947, 2, № 3, 18—58.
4. А. Г. Курош. Теория групп. М., Гостехиздат, 1953.
5. А. И. Мальцев. О доупорядочении групп.— Труды Мат. ин-та АН СССР, 1951, 38, 173—175.
6. А. А. Виноградов. Частично упорядоченные локально нильпотентные группы.— Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1953, 4, № 3, 3—18.
7. L. Henkin. Some interconnections between modern algebra and mathematical logic.— Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 74, N 3, 410—427.
8. B. Neumann. An embedding theorem for algebraic systems.— Proc. London Math. Soc., 1954, 4, N 3, 138—153.
9. A. Robinson. Note on an embedding theorem for algebraic systems.— J. London Math. Soc., 1955, 30, N 2, 257—271.
10. A. Tarski. Contributions to the theory of models, I, II.— Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., A, 1954, 16, 572—581, 582—588.
11. A. Tarski. Contributions to the theory of models, III.— Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., A, 1955, 17, 58—64.
12. C. J. Everett, S. Ulam. Projective algebra, I.— Amer. J. Math., 1946, 68, N 1, 77—88.

КВАЗИПРИМИТИВНЫЕ КЛАССЫ АБСТРАКТНЫХ АЛГЕБР *



Абстрактной алгеброй называют последовательность $\langle A; f_1, f_2, \dots \rangle$, составленную из некоторого множества A и определенных на A операций $f_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ со значениями в A [1]. Далее предполагается, что каждая операция производится над конечным числом аргументов, а число операций может быть и бесконечным. Алгебры $\langle A; f_1, f_2, \dots \rangle$ и $\langle B; g_1, g_2, \dots \rangle$ **о д н и т и п н ы**, если они имеют одинаковое число операций и соответствующие операции зависят от одного числа аргументов. В дальнейшем под **к л а с с о м а л г е б р** всегда понимается совокупность однотипных алгебр, соответствующие операции которых обозначены одинаково. Алгебры предполагаются определенными лишь с точностью до изоморфизма, т. е. если какая-нибудь алгебра входит в рассматриваемый класс, то в этот класс должны входить и все изоморфные алгебры.

Класс алгебр, элементы которых удовлетворяют тождествам вида

$$(x_1) \dots (x_m) [\varphi(x_1, \dots, x_m) = \psi(x_1, \dots, x_m)], \quad (1)$$

где кванторы относятся к элементам алгебр, а φ, ψ — многочлены от $x_1, \dots, x_m$, полученные при помощи конечного числа суперпозиций основных операций, называется **п р и м и т и в н ы м**. Важным свойством примитивных классов является существование в них алгебр с заданными определяющими равенствами. Однако в литературе встречались и другие классы алгебр, например полугруппы с сокращениями, кольца характеристики нуль, внутри которых также оказалось возможным рассматривать алгебры с определяющими равенствами. В настоящей заметке изучаются общие свойства классов алгебр, внутри которых существуют алгебры с произвольными и произвольными конечными системами определяющих равенств.

Пусть K — произвольный класс алгебр. Рассмотрим систему S формальных равенств $\varphi_\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \psi_\lambda(\alpha_{s+1}, \dots, \alpha_t)$, где $\varphi_\lambda, \psi_\lambda$ — многочлены; α_i — элементы вспомогательного множества $\mathfrak{Z}$. Алгебра A класса K с порождающими элементами a_α , занумерованными при помощи элементов $\mathfrak{Z}$, называется **а л г е б р о й с о п р е д е л я ю щ и м и р а в е н с т в а м и** S в K , если для любой алгебры B из K и любого отображения $\alpha \rightarrow b_\alpha$ множества $\mathfrak{Z}$ в B , при котором в B выполняются равенства $\varphi_\lambda(b_{\alpha_1}, \dots, b_{\alpha_s}) = \psi_\lambda(b_{\alpha_{s+1}}, \dots, b_{\alpha_t})$ из S , существует гомоморфное отображение A в B , переводящее a_α в b_α ($\alpha \in \mathfrak{Z}$). При пустом множестве S алгебра A будет **с в о б о д н о й** в K в смысле Сикорского [2]. Очевидно, если алгебра A с определяющими равенствами S в K существует, то она определяется с точностью до изоморфизмов над $\mathfrak{Z}$.

Класс алгебр K назовем **ф и н и т н о с в о б о д н ы м**, если в нем существуют алгебры с любым конечным множеством определяющих равенств. Класс K назовем **с в о б о д н ы м**, если в нем существуют алгебры

* Докл. АН СССР, 1956, 108, № 2, 187—189.

с любым множеством определяющих равенств. В свободных классах каждая алгебра есть фактор-алгебра свободной алгебры. В финитно свободных то же имеет место для алгебр с конечным числом образующих.

Т е о р е м а 1*. *Класс алгебр K тогда и только тогда свободен, когда K содержит все подалгебры и прямые произведения своих алгебр.*

Докажем например, что свободный класс K обязательно содержит прямое произведение любых двух своих алгебр A, B . Рассмотрим алгебру C с образующими $\langle a, b \rangle$ ($a \in A, b \in B$), имеющую в K определяющие равенства

$$f_i(\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle) = \langle f_i(a_1, \dots, a_n), f_i(b_1, \dots, b_n) \rangle, \quad (2)$$

где f_i — основные операции класса K . Добавляя к равенствам (2) соотношения $\langle a, b \rangle = \langle a, b' \rangle$ (U), получим систему определяющих равенств для A , а добавляя к (2) соотношения $\langle a, b \rangle = \langle a', b \rangle$ (V), получим определяющие равенства для B . Если бы в C имело место равенство $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$, то оно имело бы место и в системе с равенствами (2) и (U), т. е. в A , откуда $a = c$. Аналогично получим $b = d$, откуда следует, что C есть прямое произведение A и B .

В работе Мак-Кинси [3] обнаружилось важное значение для теории алгебр не только тождеств вида (1), но и так называемых условных тождеств, имеющих вид

$$(x_1) \dots (x_m) [\varphi_1 = \psi_1 \& \dots \& \varphi_n = \psi_n \rightarrow \varphi_{n+1} = \psi_{n+1}], \quad (3)$$

где $\varphi_1, \psi_1, \dots, \varphi_{n+1}, \psi_{n+1}$ — многочлены от переменных $x_1, \dots, x_m$.

Класс алгебр, элементы которых удовлетворяют некоторой фиксированной системе условных тождеств, будем называть квазипрimitивными. Если число основных операций и условных тождеств, определяющих класс K , конечно, то K будет называться квазипрimitивным в узком смысле.

В примитивных классах вместе с некоторой алгеброй A тому же классу принадлежит и фактор-алгебра алгебры A по любой конгруэнтности на A . Чтобы фактор-алгебра A/θ алгебры A квазипрimitивного класса K принадлежала снова к K , необходимо и достаточно, чтобы конгруэнтность θ удовлетворяла требованиям

$$(x_1) \dots (x_m) [\varphi_1 \equiv \psi_1 \& \dots \& \varphi_n \equiv \psi_n \rightarrow \varphi_{n+1} \equiv \psi_{n+1} \pmod{\theta}],$$

соответствующим условным тождествам (3), определяющим класс K .

Так как подалгебры и прямые произведения алгебр квазипрimitивного класса принадлежат тому же классу [4], то квазипрimitивные классы свободны. Отсюда при помощи теоремы Биркгофа [1] непосредственно следует, что квазипрimitивный класс тогда и только тогда примитивен, когда все фактор-алгебры этого класса содержатся в нем.

Множество A с последовательностью определенных на нем предикатов называется моделью [5]. Обычным образом вместо операций можно брать соответствующие предикаты и рассматривать алгебры как модели. Условимся говорить, что класс алгебр K локально определен, если из того,

* Для корректности формулировок теорем 1 и 3 следует требовать дополнительно, чтобы рассматриваемый класс K алгебр содержал одноэлементную алгебру. Подробнее и для произвольных алгебраических систем с предикатами см. в кн.: А. И. Мальцев. Алгебраические системы. М., «Наука», 1970, гл. 5. — Прим. ред.

что каждая конечная подмодель произвольной фиксированной алгебры M изоморфна подмодели подходящей алгебры из K , следует, что M принадлежит классу K . В случае бесконечной системы основных операций в этом определении следует брать подмодели относительно произвольных конечных подсистем основных операций.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы класс алгебр K был квазипримитивным, необходимо и достаточно, чтобы он был финитно свободным и локально определимым.*

Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности обозначим через S какую-нибудь конечную совокупность формальных равенств $\varphi(x_1, \dots, x_s) = \psi(x_{s+1}, \dots, x_t)$, где φ, ψ — многочлены, а x_i — элементы некоторого фиксированного счетного множества. По условию в K есть алгебра A с определяющими равенствами S . Если в A окажется $x_i = x_j$, то пишем условное тождество $S \rightarrow x_i = x_j$. Пусть Σ — совокупность всех полученных таким способом условных тождеств. Из локальной определимости класса K теперь видно, что K вполне характеризуется условиями Σ .

Т е о р е м а 3*. *Для того чтобы класс алгебр K был квазипримитивным, необходимо и достаточно, чтобы он был локально определимым и чтобы прямые произведения алгебр K содержались в K .*

Доказательства требует лишь достаточность. Но из локальной определимости следует, что K содержит все подалгебры своих алгебр. В силу теорем 1, 2 отсюда вытекает квазипримитивность K .

Аналогично доказывается

Т е о р е м а 4. *Класс алгебр $\langle A; f_1, \dots, f_m \rangle$, изоморфно вложимых в алгебры $\langle A; f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n \rangle$ квазипримитивного класса с большим числом основных операций, сам квазипримитивен.*

Иллюстрацией могут служить полугруппы, вложимые в группы. Известно [6], что класс таких полугрупп определяется бесконечным числом условных тождеств, не равносильных никакому конечному числу условных тождеств. Отсюда, в частности, следует, что теорема 4 неверна для классов, квазипримитивных в узком смысле.

Однозначная функция f со значениями в A , определенная на части A , называется *частичной операцией на A* . Множество A с заданной на нем системой частичных операций называют *частичной алгеброй* [7]. Обращение σ одной частичной алгебры в другую того же типа называется *гомоморфизмом*, если из равенства $y = f_i(x_1, \dots, x_p)$ для элементов первой следует равенство $y^\sigma = f_i(x_1^\sigma, \dots, x_p^\sigma)$ во второй. Однозначный гомоморфизм частичной алгебры A в алгебру B называется *вложением A в B* . Мы скажем, что на частичной алгебре A выполняется условное тождество (3), если из существования для некоторых $x_1, \dots, x_m$ многочленов $\varphi_1, \psi_1, \dots, \varphi_n, \psi_n, \varphi_{n+1}$, существования аргументов ψ_{n+1} и выполнения равенств $\varphi_1 = \psi_1, \dots, \varphi_n = \psi_n$ следуют существование ψ_{n+1} и равенство $\varphi_{n+1} = \psi_{n+1}$. Вводя, как выше, понятие частичной алгебры, определяемой «существующими» многочленами и данными равенствами, легко убедиться, что такие алгебры существуют в квазипримитивных классах для любых наборов многочленов и равенств.

Т е о р е м а 5. *В квазипримитивных классах частичные алгебры, задающиеся конечным числом существующих многочленов и определяющих равенств,*

* См. примечание к теореме 1.— *Прим. ред.*

конечны. Существование алгоритма для распознавания вложимости конечных частичных алгебр квазипрimitивного класса K в обычные алгебры этого класса равносильно существованию алгоритма для решения проблемы тождества в обычных алгебрах класса K .

Для примитивных классов эта теорема доказана Эвансом [7]. Доказательство общего случая проводится тем же способом.

Имеет место также следующее обобщение теоремы 4:

Для изоморфной вложимости частичной алгебры A в обычную алгебру квазипрimitивного класса K необходимо и достаточно, чтобы на A выполнялись в слабом смысле все условные тождества, имеющие место на всех обычных алгебрах класса K .

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Birkhoff*. On the structures of abstract algebras.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1935, 31, 433—454.
2. *R. Sikorski*. Products of abstract algebras.— Fundam. Math., 1952, 39, 211—227.
3. *J. McKinsey*. The decision problem for some classes of sentences, without quotifies.— J. Symbol. Log., 1943, 8, 61—76.
4. *A. Horn*. On sentences which are true of direct unions of algebras.— J. Symbol. Log., 1951, 16, 14—21.
5. *A. Tarski*. Contributions to the theory of models, I, II, III.— Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1954, A57, 572—588; 1955, A58, 56—64.
6. *А. И. Мальцев*. О включении ассоциативных систем в группы.— Мат. сб., 1939, 6, № 2, 331—336.
7. *T. Evans*. Embeddability and the word problem. — J. London. Math. Soc., 1953, 28, 76—80.



Теорема Биркгофа [1] о разложимости любой абстрактной алгебры в подпрямое произведение далее неразложимых сомножителей относится к классу всех алгебр, хотя в некоторых случаях желательно иметь аналогичную теорему для более узких или для более широких классов. Например, при изучении колец без делителей нуля или колец, вложимых в тело, естественно рассматривать разложения в подпрямые произведения колец только тех же классов. Непосредственно теоремой Биркгофа такие случаи не охватываются, так как фактор-кольца от вложимых колец, например, могут не быть вложимыми. В настоящей заметке указывается довольно широкая система классов, внутри которых теорема, аналогичная теореме Биркгофа, заведомо имеет место. При этом оказалось целесообразным перейти от алгебр к моделям. Для некоторых частных классов моделей подпрямые разложения рассматривались Пиккертом [2], Фостером [3], Фуксом [4]. Терминология берется в соответствии с [5].

В дальнейшем будут рассматриваться только классы таких моделей, в которых среди основных отношений находится и отношение равенства $\equiv$. Класс однотипных моделей будет называться абстрактным, если вместе с некоторой моделью он содержит и все изоморфные ей.

Пусть $\langle A; P_1, P_2, \dots \rangle$ и $\langle B; P_1, P_2, \dots \rangle$ — две модели одинакового типа. Отношение σ на множествах A, B назовем гомоморфизмом модели A на B , если

$$a_1 \sigma b_1 \& \dots \& a_n \sigma b_n \& P_s(a_1, \dots, a_n) \rightarrow P_s(b_1, \dots, b_n) \quad (a_i \in A, b_i \in B; s = 1, 2, \dots; P_1 = \equiv).$$

Для понятия гомоморфизма существенно, какие именно отношения считаются основными. В частности, если вместо данных отношений основными считать их отрицания, то смысл гомоморфизма будет иной. Условимся абстрактный класс моделей называть *H-классом*, если он вместе с некоторой моделью содержит и все ей гомоморфные.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы аксиоматизируемый класс моделей был H-классом, необходимо и достаточно, чтобы он состоял из всех моделей, удовлетворяющих аксиомам вида*

$$(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n), \quad (1)$$

где Q_i — произвольные кванторы, а $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ — формула, составленная из выражений вида $P_s(x_{i_{n_1}}, \dots, x_{i_{n_s}})$ только при помощи операций $\&$, $\vee$.

Достаточность вытекает из рассуждений Хорна [6], а необходимость легко обнаруживается, если заменить аксиомы системами выражений исчисления высказываний и воспользоваться тем, что любое гомоморфное отображение подмодели продолжаемо до гомоморфного отображения всей модели. ведение не будет изоморфным $A(s, b)$.

Пусть $R(M)$ — совокупность всевозможных моделей некоторого фиксированного типа, определенных на множестве M . Для $M_1, M_2 \in R$ условимся писать $M_1 \leq M_2$, если тождественное отображение M на себя есть гомоморфное отображение модели M_1 на модель M_2 . Ясно, что отношение $\leq$ делает совокупность $R(M)$ структурно упорядоченной и тем самым полной решеткой. Рассмотрим отображение σ произвольного множества M на некоторую модель A . Полагая значение отношения $P_s(m_1, \dots, m_{n_s})(m_i \in M)$ равным значению $P_s(m_1^\sigma, \dots, m_{n_s}^\sigma)$, мы обратим M в модель M_σ . Если M было моделью, а σ — гомоморфизмом, то будем иметь $M \leq M_\sigma$.

Пусть $\langle A^\alpha, P_1, P_2, \dots \rangle$ — заданная система однотипных моделей. Обозначая через A декартово произведение множеств A^α и полагая отношение $P_s(a_1, \dots, a_{n_s})(a_i \in A)$ истинным тогда и только тогда, когда $P_s(a_1^\alpha, \dots, a_{n_s}^\alpha)$ истинно для всех α , мы обращаем A в модель, называемую прямым произведением моделей A^α [6]. Предположим, что заданы однозначные отображения σ_α некоторой фиксированной модели M на модели A^α . Отображения σ_α порождают естественное отображение σ множества M в A . Если σ — изоморфизм M на соответствующую подмодель из A , то будем говорить, что модель M разложена в подпрямое произведение моделей A^α по проектированиям σ_α . Пусть K — некоторый абстрактный класс моделей. Модель M назовем K -неразложимой, если в любом разложении M в подпрямое произведение моделей класса K одно из проектирований является изоморфизмом.

Т е о р е м а 2. *Абстрактный класс K моделей тогда и только тогда содержит всевозможные подпрямые произведения своих моделей, когда в решетке $R(M)$ всех моделей типа K , определенных на произвольном множестве M , совокупность $K(M)$ моделей класса K является полной нижней подполурешеткой в $R(M)$, т. е. когда $K(M)$ содержит произвольные произведения (в смысле произведений в $R(M)$) своих моделей.*

Действительно, если M_0 — подпрямое произведение моделей A^α класса K по проектированиям α множества M на A^α , то согласно сделанному замечанию модель A^α можно рассматривать как модель M_α на M_0 , и утверждение, что модель M_0 есть подпрямое произведение моделей A^α , оказывается равносильным утверждению, что M_0 есть решеточное произведение моделей M_α в соответствии с утверждением теоремы 2.

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы модель A класса K была подпрямым произведением K -неразложимых K -моделей, необходимо и достаточно, чтобы для каждого основного отношения P_s и каждой $a_1, \dots, a_{n_s}$ из A , обращающих в ложное утверждение $P_s(a_1, \dots, a_{n_s})$, существовали такие $b_1, \dots, b_{n_t}$ в A и такой предикат P_t , чтобы совокупность K -моделей из $R(A)$, обращающих в ложное утверждение $P_t(b_1, \dots, b_{n_t})$, имела хотя бы одну максимальную модель $A(s, b)$, в которой утверждение $P_s(a_1, \dots, a_{n_s})$ было ложным.*

Предположим, что условия максимальности выполнены. Обозначим через A_0 подпрямое произведение всех моделей $A(s, b)$, беря в качестве проектирований естественные отображения A на $A(s, b)$. Отображение A на A_0 является изоморфизмом, и следует проверить только K -неразложимость моделей $A(s, b)$. Но всякая K -модель $B \geq A(s, b)$ будет и K -моделью $\geq A$, содержащей $A(s, b)$. Ввиду максимальности $A(s, b)$ утверждение $P_s(b_1, \dots, b_{n_s})$ должно быть истинным в B , если $B \neq A(s, b)$. Иными словами, в любом подпрямом произведении истинно гомоморфных образов модели $A(s, b)$ утверждение $P_s(b_1, \dots, b_{n_s})$ будет истинным, а потому подпрямое произведение не будет изоморфным $A(s, b)$.

Пусть, наоборот, K -модель A есть подпрямое произведение K -неразложимых K -моделей A^α , содержащих A (т. е. $A \leq A^\alpha$), и пусть отношение $P_s(a_1, \dots, a_{n_s})$ ложно в A . Тогда оно ложно и в некоторой модели A^α . Если бы для каждого отношения $P_t(b_1, \dots, b_{n_t})$; ложного в A^α , существовала модель $A(s, b)$, большая A^α , в которой $P_t(b_1, \dots, b_{n_t})$ оставалось бы ложным, то A^α была бы подпрямым произведением моделей $A(s, b)$, вопреки предположенной неразложимости A^α . Поэтому найдется ложное в A^α утверждение $P_t(b_1, \dots, b_{n_t})$, являющееся истинным во всех истинных гомоморфных K -образах модели A^α , т. е. A^α будет максимальной K -моделью, в которой $P_t(b_1, \dots, b_{n_t})$ ложно.

Систему моделей назовем цепью, если из любых двух моделей системы одна содержится в другой. Из теоремы 3 и леммы Цорна вытекает

З а м е ч а н и е. K -модель M заведомо разложима в подпрямое произведение K -неразложимых K -моделей, если сумма K -моделей любой цепи из $R(M)$ есть снова K -модель.

При помощи этого замечания легко доказывается основная

Т е о р е м а 4. В любом классе K моделей, характеризуемом произвольной системой аксиом вида (1) и произвольной системой аксиом вида

$$(x_1) \dots (x_m) \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_m), \quad (2)$$

где $\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_m)$ составлено из предложений вида $P_s(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_s}})$ при помощи операций $\&$, $\vee$, $\neg$, каждая модель может быть разложена в подпрямое произведение K -неразложимых K -моделей.

Класс K может быть представлен как пересечение класса K_1 моделей, характеризующихся аксиомами вида (1), и класса K_2 моделей, характеризующихся аксиомами вида (2). По теореме 1 в классе K_1 сумма K_1 -моделей произвольной цепи Z из $R(M)$ есть K_1 -модель. В частности, K_1 -моделью будет сумма S K -моделей цепи Z . С другой стороны, если бы для некоторых $x_1, \dots, x_m$ из M выражение $\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_m)$ оказалось ложным в модели S , то в цепи Z нашлась бы K -модель M_0 , в которой $\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_m)$ было бы так же ложным, в противоречии с выполненностью в M_0 аксиомы (2). Поэтому сумма S принадлежит классу K_2 , откуда $S \in K$. Из замечания теперь следует, что в классе K теорема о разложимости имеет место.

В частности, теорема о разложимости справедлива для алгебр, удовлетворяющих произвольной системе универсальных аксиом вида (2). К таким классам, например, относятся классы колец, вложимых в тела, колец без делителей нуля, полугрупп, вложимых в группы, и т. п.

Другим примером, когда теорема о разложимости имеет место, может служить класс направленных множеств, характеризующийся аксиомами

$$(x)(y)(\exists z)(x < z \ \& \ y < z),$$

$$(x)(y)(z)((x \nless y \vee y \nless z \vee x < z) \ \& \ (x \nless y \vee y \nless x)).$$

Однако если в направленных множествах основными отношениями считать $\equiv$ и $\nless$, то всякая K -модель будет допускать собственное разложение в подпрямое произведение больших моделей и теорема о разложимости не будет иметь место в классе K . Действительно, пусть в направленном множестве M

имеем $a < b < c$. Множество M упорядочиваем способами M_1 и M_2 следующим образом: для элементов x, y в M_1 полагаем $x < y$ тогда и только тогда, когда в M выполнено $x < y$ и одновременно не выполнено $a \leq x < y \leq b$. Способ M_2 получается заменой в определении элементов a, b соответственно через b, c . Ясно, что при основном отношении $\leq$ упорядоченное множество M является подпрямым произведением M_1 и M_2 при тождественных отображениях M на M_1, M_2 в качестве проектирований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Биркгоф. Теория структур. М., ИЛ, 1952.
2. G. Pickert. Direkte Zerlegungen von algebraischen Strukturen.— Math. Z., 1953, 57, N 4, 395—404.
3. A. L. Foster. Generalized «Boolean» theory of universal algebras, I.— Math. Z., 1953, 58, N 3, 306—336.
4. L. Fuchs. On subdirect unions, I.— Acta math. Acad. sci. hung., 1952, 3, N 1—2, 103—120.
5. A. Tarski. Contributions to the theory of models, I, II.— Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1954, A57, 572—581, 582—588.
6. A. Horn. On sentences which are true of direct unions of algebras.— J. Symbol. Log., 1951, 16, N 1, 14—21.

О ПРОИЗВОДНЫХ ОПЕРАЦИЯХ И ПРЕДИКАТАХ *



Пусть A — алгебра с основными операциями $f_i(x_1, \dots, x_{m_i}), i = 1, 2, \dots$. Основным типом производных операций, определенных на A , являются термы или многочлены. Но операции f_i можно рассматривать и как предикаты $P_i(x_1, \dots, x_{m_i}, y)$, определенные на A и означающие, что $f_i(x_1, \dots, x_{m_i}) = y$. Каждая правильно образованная формула $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ узкого исчисления предикатов (УИП), составленная из предикатных символов P_i и содержащая свободные предметные переменные $x_1, \dots, x_n$, может рассматриваться как **п р о и з в о д н ы й** предикат на A . Может случиться, что $\mathfrak{A}$ будет представлять на A операцию в указанном выше смысле. Тем самым помимо образования термов возникает еще один способ для получения новых операций на A .

В п. 1 мы устанавливаем общий вид операций, получаемых с помощью формул УИП в классе алгебр, характеризующихся универсальными аксиомами. В п. 2 дается абстрактная характеристика предикатов, представимых конъюнкциями универсальных формул УИП, а в п. 3 полученные результаты применяются к нахождению общего вида производных операций, удовлетворяющих некоторым дополнительным требованиям.

1. Пусть для произвольной формулы $\mathfrak{A}$ УИП со свободными переменными $x_1, \dots, x_m, y$ символ $\Phi(\mathfrak{A})$ обозначает выражение

$$(x_1) \dots (x_m) (u) (v) (\exists y) [\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y) \& \& (\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, u) \& \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, v) \rightarrow u = v)].$$

Формулы вида $(y_1) \dots (y_p) \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$, где $\mathfrak{B}$ кванторов не содержит, будем называть **у н и в е р с а л ь н ы м и**, а формулы, не содержащие свободных переменных, будем называть **а к с и о м а м и**.

Т е о р е м а 1. Пусть $\mathfrak{K}$ — конъюнкция конечного или бесконечного числа универсальных аксиом, $\mathfrak{A}$ — формула УИП со свободными предметными переменными $x_1, \dots, x_m, y$, причем аксиомы из $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{A}$ содержат лишь предикатные символы $P_1, \dots, P_s$. Если выражение

$$\Phi(P_1) \& \dots \& \Phi(P_s) \& \mathfrak{R} \rightarrow \Phi(\mathfrak{A}) \tag{1}$$

является доказуемой формулой УИП, то найдутся такие формулы $\mathfrak{A}_j(x_1, \dots, x_m)$ и термы $g_j(x_1, \dots, x_m), j = 1, \dots, t$, составленные из символов операций f_i , отвечающих предикатам P_i , что формулы

$$\mathfrak{A}_1(x_1, \dots, x_m) \vee \dots \vee \mathfrak{A}_t(x_1, \dots, x_m), \tag{2}$$

$$\mathfrak{A}_i(x_1, \dots, x_m) \rightarrow [\mathfrak{A}_j(x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow g_i(x_1, \dots, x_m) = g_j(x_1, \dots, x_m)], \tag{3}$$

$$\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y) \leftrightarrow [(\mathfrak{A}_1(x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow y = g_1(x_1, \dots, x_m)) \& \dots \& (\mathfrak{A}_t \leftrightarrow y = g_t)] \tag{4}$$

* Докл. АН СССР, 1957, 116, № 1, 24—27.

будут следствиями аксиом

$$\mathfrak{S} = \{\Phi(P_1), \dots, \Phi(P_s), P_1(x_1, \dots, x_{m_i}, y) \leftrightarrow f_1(x_1, \dots, x_{m_i}) = y, \dots, P_s(x_1, \dots, x_{m_s}, y) \leftrightarrow f_s(x_1, \dots, x_{m_s}) = y, \mathfrak{F}\}.$$

Для доказательства обозначим через h_α всевозможные термы от переменных $x_1, \dots, x_m$ и рассмотрим систему предложений $\mathfrak{S}_1 = \{\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, h_\alpha), \mathfrak{S}\}$. Допустим, что эта система имеет некоторую модель A . Ввиду аксиом $\Phi(P_1), \dots, \Phi(P_s)$ модель A будет алгеброй с операциями $f_1, \dots, f_s$, отвечающими предикатам $P_1, \dots, P_s$. Подалгебра B , порожденная в A элементами $x_1, \dots, x_m$, будет, ввиду универсальности аксиом системы $\mathfrak{F}$, также моделью для $\mathfrak{S}_1$. Поскольку B удовлетворяет посылке выражения (1), то в B найдется элемент $y = h_\lambda$, для которого $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, h_\lambda)$ будет истинно, вопреки допущению. Из противоречивости $\mathfrak{S}_1$ вытекает противоречивость ее подходящей конечной части, т. е. из аксиом $\mathfrak{S}$ для подходящих термов $g_1 = h_{\alpha_1}, \dots, g_t = h_{\alpha_t}$ вытекает формула

$$\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y) \rightarrow y = g_1 \vee \dots \vee y = g_t. \quad (5)$$

Полагая теперь

$$\mathfrak{A}_i(x_1, \dots, x_m) = (z) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, z) \leftrightarrow z = g_i(x_1, \dots, x_m) \quad (i = 1, \dots, t),$$

получим (2), (3), (4). Действительно, пусть $x_1, \dots, x_m$ — произвольные элементы алгебры, удовлетворяющей аксиомам $\mathfrak{F}$. По условию найдется элемент y , для которого $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y)$ истинно. Из (5) следует, что $y = g_\lambda(x_1, \dots, x_m)$ для некоторого λ . Поэтому $\mathfrak{A}_\lambda(x_1, \dots, x_m)$ истинно, и (2) доказано. Пусть для некоторых $x_1, \dots, x_m, y$ выражение $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y)$ ложно. Тогда найдутся z, λ , для которых $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, z)$ истинно, $z = g_\lambda(x_1, \dots, x_m)$, $z \neq y$, а потому истинно и $\mathfrak{A}_\lambda(x_1, \dots, x_m)$. Тогда выражение $\mathfrak{A}_\lambda(x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow y = g_\lambda(x_1, \dots, x_m)$ ложно. Вместе с ним ложна и вся правая часть эквивалентности (4). Таким образом, из ложности левой части формулы (4) вытекает ложность ее правой части. Аналогично доказываются обратное утверждение и формула 3.

2. Пусть K — некоторый класс абстрактных моделей вида $\langle M; P_1, \dots, P_s \rangle$. Предположим, что на каждой модели класса K задан каким-либо способом, не обязательно формулой УИП и не обязательно единственным способом, еще предикат $P(x_1, \dots, x_n)$. В качестве примера можно взять предикат « x несравненно меньше y », имеющий смысл в каждой упорядоченной группе, хотя он и не может быть выражен формулой УИП. Назовем P и н-вариантным относительно перехода к K -подмоделям, если из истинности $P(x_1, \dots, x_n)$ в K -модели, содержащей $x_1, \dots, x_n$, следует истинность $P(x_1, \dots, x_n)$ во всякой ее K -подмодели, содержащей $x_1, \dots, x_n$. Аналогично, предикат P назовем инвариантным относительно перехода к K -надмоделям, если из истинности $P(x_1, \dots, x_n)$ в некоторой K -модели M следует истинность $P(x_1, \dots, x_n)$ во всякой K -модели, содержащей M в качестве своей подмодели. Предикат P будем называть формульным, если существует формула УИП $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$, для которой $P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ на каждой K -модели. Очевидно, инвариантность P относительно перехода к подмоделям равносильна инвариантности $\bar{P}$ относительно перехода к надмоделям. Формульный предикат, инвариантный относительно перехода к надмоделям, А. Робинсон [3] называет устойчивым на K .

Предикат $P(x_1, \dots, x_n)$, истинность или ложность которого определены не обязательно для всех $x_1, \dots, x_n$ из некоторого множества M , назовем *частичным предикатом на M* . Отображение σ множества M с частичным предикатом P в множество N с одноименным предикатом называется *P -гомоморфизмом*, если из истинности $P(x_1, \dots, x_n)$ в M следует определенность и истинность $P(x_1^\sigma, \dots, x_n^\sigma)$. Говорим, что множество M *P -вкладывается в N* отображением σ , если σ отображает M на M^σ однозначно и если из определенности $P(x_1, \dots, x_n)$ на M следует определенность $P(x_1^\sigma, \dots, x_n^\sigma)$ на N и его эквивалентность с $P(x_1, \dots, x_n)$.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы на классе K^* моделей с основными предикатами $P_1, \dots, P_s$, P имела место формула*

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \&(x_{n+1}) \dots (x_{p_\alpha}) \mathfrak{B}_\alpha(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{p_\alpha}), \quad (6)$$

в которой конъюнкция может быть бесконечной, а $\mathfrak{B}_\alpha$ — открытые формулы УИП, не содержащие знака P , необходимо и достаточно, чтобы класс K^* обладал следующими свойствами: если σ есть $(P_1, \dots, P_s)$ -изоморфизм некоторой $(P_1, \dots, P_s)$ -модели M , снабженной дополнительным частичным предикатом P , на подпадающую K^* -модель M^* и в то же время каждая конечная $(P_1, \dots, P_s, P)$ -подмодель частичной модели M вложима в некоторую K^* -модель, то σ есть P -гомоморфизм M на M^* .

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть на M^* имеет место формула (6) и для некоторых $a_1, \dots, a_n$ из M выражение $P(a_1, \dots, a_n)$ определено, а $P(a_1^\sigma, \dots, a_n^\sigma)$ ложно. Поскольку σ есть $(P_1, \dots, P_s)$ -изоморфизм, формулы $\mathfrak{B}_\alpha$ символа P не содержат, то на M выражение, стоящее в правой части эквивалентности (6), ложно. Поэтому найдутся такое λ и такие $a_{n+1}, \dots, a_p$ в M , что $\mathfrak{B}_\lambda(a_1, \dots, a_p)$ будет ложно. По условию подмодель M_λ , состоящая в M из элементов $a_1, \dots, a_p$, вкладывается в некоторую K^* -модель N , в которой для P имеет место выражение (6). Так как $\mathfrak{B}_\lambda(a_1, \dots, a_p)$ ложно, то $P(a_1, \dots, a_n)$ в N , а потому и в M также ложно.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Обозначим через $\mathfrak{A}_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ всевозможные универсальные формулы, не содержащие символа P , для которых в K^* выполнено соотношение

$$(x_1) \dots (x_n) [P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \mathfrak{A}_\lambda(x_1, \dots, x_n)]. \quad (7)$$

Допустим, что существует K^* -модель M^* , в которой выполнена система $\{\mathfrak{A}_\lambda(a_1, \dots, a_n), \bar{P}(a_1, \dots, a_n)\}$, где $a_1, \dots, a_n$ — индивидуальные константы. Пусть M есть та же модель M^* , но с измененным предикатом P : в M полагаем $P(a_1, \dots, a_n)$ истинным, а для остальных значений аргументов считаем P неопределенным. Тожественное отображение σM на M^* есть $(P_1, \dots, P_s)$ -изоморфизм. Если бы каждая конечная подмодель модели M была вложима в подходящую K^* -модель, то по условию отображение σ было бы гомоморфизмом, чего нет, так как в M выражение $P(a_1, \dots, a_n)$ истинно, а в M^* ложно. Поэтому найдется конечная подмодель M_0 модели M , не вложимая ни в какую K^* -модель. Пусть диаграмма [2] модели M_0 есть $P(a_1, \dots, a_n) \& R(a_1, \dots, a_n, \dots, a_q)$, где R — открытая формула, не содержащая символа P . В K^* имеем $P(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (a_{n+1}) \dots (a_q) \bar{R}$, т. е. для некоторого λ имеем

$$\mathfrak{A}_\lambda(x_1, \dots, x_n) = (a_{n+1}) \dots (a_q) \bar{R}(x_1, \dots, x_n, a_{n+1}, \dots, a_q). \quad (8)$$

Но в M^* имеем одновременно $\mathfrak{A}_\lambda(a_1, \dots, a_n)$ и $R(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_q)$, что противоречит (8). Это показывает, что модель M^* не существует, т. е. в K^* из $\& \mathfrak{A}_\lambda(a_1, \dots, a_n)$ вытекает $P(a_1, \dots, a_n)$, что вместе с (7) дает (6).

Беря в теореме 2 в качестве P 0-местный предикат и обозначая через L совокупность тех K^* -моделей, на которых предикат P истинен, приходим к теореме А. Тарского [4]: подкласс L моделей класса K тогда и только тогда выделяется из K системой универсальных аксиом, когда из вложимости любой конечной подмодели произвольной K -модели M в подходящую L -модель следует, что M есть L -модель.

Предполагая в теореме 2 предикат P формульным, получим в качестве следствия теорему А. Робинсона [3]: для того чтобы формульный предикат $\mathfrak{A}$ на аксиоматизируемом классе моделей K был эквивалентен универсальному формульному предикату, необходимо и достаточно, чтобы предикат $\mathfrak{A}$ был инвариантным относительно перехода к K -подмоделям.

3. Открытые формулы являются простейшими формульными предикатами, инвариантными относительно перехода к под- и надмоделям в любых классах K . Если класс K характеризуется универсальными аксиомами, то открытые формулы будут единственными формульными предикатами, обладающими указанными свойствами. Однако в классе алгебр это уже перестает быть справедливым, так как требуемой инвариантностью обладают все термы.

Теорема 3. Если в универсально аксиоматизируемом классе алгебр K формула $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ является предикатом, инвариантным относительно перехода к над- и подалгебрам, то $\mathfrak{A}$ эквивалентна в K открытой формуле, составленной из выражений вида $g = h$, где g, h — некоторые термы.

В силу второго следствия теоремы 2 для $\mathfrak{A}$ в классе K имеем представление $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow (y_1) \dots (y_p) \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — элементы произвольной K -алгебры A и B — подалгебра, порожденная в A элементами $a_1, \dots, a_n$. По условию значение $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n)$ в A совпадает с значением этого выражения в B , т. е. в K имеем

$$\& \mathfrak{B}(a_1, \dots, a_n, g_1^v, \dots, g_p^v) \rightarrow \mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n), \quad (9)$$

где конъюнкция берется по всевозможным наборам термов $g_1^v, \dots, g_p^v$. Поскольку формула (9) должна следовать из системы аксиом, определяющей K , то она должна иметь место уже для конъюнкции конечного числа членов, что и требовалось.

Предикат P , определенный на классе моделей K , назовем мультипликативно инвариантным, если $P(\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle)$ эквивалентно $P(a_1, \dots, a_n) \& P(b_1, \dots, b_n)$, где $\langle a_i, b_i \rangle$ — элементы прямого произведения K -моделей A, B ($a_i \in A, b_i \in B$), при условии, что $A \times B \in K$.

Теорема 4. В квазипримитивном классе [1] алгебр K формульный предикат $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y)$ является мультипликативно инвариантной операцией тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ представляется термом.

Согласно теореме 1 для $\mathfrak{A}$ имеет место формула (5). Если каждая из формул $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y) \rightarrow y = g_i(x_1, \dots, x_m)$ на K не выполняется, то существуют K -алгебры A_i , содержащие $a_1^i, \dots, a_m^i, b^i$, в которых $\mathfrak{A}(a_1^i, \dots, a_m^i, b^i)$ истинно и $b^i \neq g_i(a_1^i, \dots, a_m^i)$. Полагая $a_\alpha = \langle a_\alpha^1, \dots, a_\alpha^t \rangle$, в $A_1 \times \dots \times A_t$ получим $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_m, b)$ и $b \neq g_i(a_1, \dots, a_m)$, $i = 1, \dots, t$ в противоречии с (5).

Теорема 5. Для того чтобы производная операция, представляемая на квазипрimitивном классе алгебр K формулой $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y)$, была термом, необходимо и достаточно, чтобы она была гомоморфно инвариантной, т. е. чтобы для любого гомоморфизма σ K -алгебры A на произвольную K -алгебру B из истинности $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_m, a)$ в A следовала истинность $\mathfrak{A}(a_1^\sigma, \dots, a_m^\sigma, a^\sigma)$ в B .

Рассмотрим K -свободную алгебру A с свободными порождающими $a_1, \dots, a_m, \dots$ [1]. По условию найдется терм $g(a_1, \dots, a_m)$, для которого $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_m, g)$ истинно. Так как существует гомоморфизм A в любую K -алгебру B , в которой a_i^σ можно выбрать произвольно, то в любой K -алгебре $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_m, g)$ истинно, т. е. в K имеем $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_m, a) \leftrightarrow a = g(a_1, \dots, a_m)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Квазипрimitивные классы абстрактных алгебр.— Докл. АН СССР, 1956, 108, № 2, 187—189.
2. A. Robinson. A result on consistency and its application to the theory of definition.— Indagationes Math., 1967, 18, N 1, 47—58.
3. A. Robinson. Note on a problem of L. Henkin.— J. Symbol. Log., 1956, 21, N 1, 33—36.
4. A. Tarski. Contributions to the theory of models, I, II.— Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1954, A57, 572—588.

О КЛАССАХ МОДЕЛЕЙ С ОПЕРАЦИЕЙ ПОРОЖДЕНИЯ*



В теории алгебр существенную роль играет понятие порождающих элементов. Переноса это понятие в теорию моделей, естественно говорить, что совокупность элементов S некоторой модели M заданного класса K порождает в M ее K -подмодель N , если N есть пересечение всех K -подмоделей модели M , содержащих элементы S (терминологию см. [1, 2]). Так как понятие порождения будет употребляться и в другом смысле, то указанные порождения условимся называть *натуральными*. Соответственно этому класс моделей K будем называть *классом с натуральными порождениями*, если пересечение любой системы K -подмоделей произвольной K -модели M либо пусто, либо является K -подмоделью модели M . Ниже изучаются некоторые свойства классов моделей с натуральными порождениями, а также рассматривается другой вид порождений, естественно возникающий при изучении алгебр с частичными операциями.

Все рассматриваемые классы моделей будут предполагаться абстрактными. Число основных предикатов и индивидуальных символов в этих классах может быть и бесконечным, но каждый предикат предполагается зависящим от конечного числа аргументов. Класс моделей K условимся называть *псевдоаксиоматизируемым*, если он обладает следующими двумя свойствами: 1) если каждая конечная часть некоторой системы аксиом УИП, записанных с помощью предикатных и индивидуальных символов класса K , выполняется в подходящей K -модели, то и вся система выполняется в подходящей K -модели; 2) для каждого кардинального числа m существует такое кардинальное число $n(m)$, что во всякой K -модели, содержащей некоторую систему элементов S мощности m , существует K -подмодель мощности $n(m)$, содержащая элементы S . Согласно локальной теореме УИП, все аксиоматизируемые классы моделей являются псевдоаксиоматизируемыми. Рассмотренные Тарским [2] классы, составленные из моделей аксиоматизируемых классов, на которых часть предикатов выбрасывается (PC_{Δ} -классы в обозначениях Тарского), также псевдоаксиоматизируемы. В обоих названных случаях $m = n(m)$ для достаточно больших m . Совокупность всех упорядоченных множеств предельных мощностей может служить примером псевдоаксиоматизируемого класса, не допускающего аксиоматизации и не являющегося PC_{Δ} -классом.

1. Пусть K — псевдоаксиоматизируемый класс моделей с натуральными порождениями; A — произвольная K -модель с натуральными порождающими a_{α} , $\alpha \in \Gamma_1$, и пусть a_{λ} , $\lambda \in \Gamma_2$, — остальные элементы A . Обозначим через $D(a_{\alpha}, \dots, a_{\gamma}; a_{\lambda}, \dots, a_{\nu})$ диаграмму [3] подмодели C , образованной в A элементами $a_{\alpha}, \dots, a_{\gamma}, a_{\lambda}, \dots, a_{\nu}$, т. е. совокупность формул вида $P_i(a_i, \dots, a_k)$ или $\sim P_i(a_i, \dots, a_k)$, истинных в C , где P_i — основные предикатные символы класса K . С каждым элементом a_{λ} , $\lambda \in \Gamma_2$, сопоставим индивидуальные константы x_{λ} , y_{λ} , не входящие в множество основных конс-

* Докл. АН СССР, 1957, 116, № 5, 738—741.

тант класса K , и рассмотрим систему аксиом $\mathfrak{Z} = \{D(a_\alpha, \dots; x_\lambda, \dots), D(a_\alpha, \dots; y_\lambda, \dots), y_\xi \neq x_\mu\}$, где ξ — произвольный фиксированный индекс из Γ_2 , а μ пробегает Γ_2 . Если бы каждая конечная часть системы $\mathfrak{Z}$ выполнялась на подходящей K -модели, то нашлась бы K -модель M , в которой выполнялись бы все аксиомы из $\mathfrak{Z}$. Но тогда в M имелись бы две минимальные K -модели, содержащие элементы a_α , что невозможно. Поэтому найдутся конечные совокупности $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_t$, для которых в K будем иметь

$$D'_\xi(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_s}, x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_t}) \& D'_\xi(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_s}, y_{\lambda_1}, \dots, y_{\lambda_t}) \rightarrow \\ \rightarrow y_\xi = x_{\lambda_1} \vee \dots \vee y_\xi = x_{\lambda_t}, \quad (1)$$

где D'_ξ — подходящая конечная поддиаграмма $D(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_s}, a_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_t})$. В формуле (1) константы a_i, x_j, y_j не содержатся в множестве основных констант класса K . Поэтому выражение (1) можно понимать как универсальную аксиому с кванторами всеобщности по a_i, x_j, y_j .

Т е о р е м а 1. Пусть в псевдоаксиоматизируемом классе моделей K с натуральными порождениями K -модель A порождается элементами a_α . Если G — группа автоморфизмов A , оставляющих на месте каждый порождающий элемент A , то для любого $a \in A$ множество aG конечно.

Пусть в диаграмме $D(A)$ имеем $a = a_\xi$. В A выражение $D'_\xi(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_s}, a_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_t})$ истинно. Поэтому истинно и выражение $D'_\xi(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_s}, a_{\lambda_1}g, \dots, a_{\lambda_t}g)$ для любого $g \in G$. В силу (1) для фиксированных $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ при любом $g \in G$ имеем $ag = a_{\lambda_1} \vee \dots \vee ag = a_{\lambda_t}$, т. е. $aG \subseteq \{a_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_t}\}$.

В классе всех алгебр фиксированного типа имеет место более сильное равенство $aG = a$. Однако возможен для моделей и случай $aG \neq a$.

Он имеет место, например, для класса всех частично упорядоченных множеств, в которых каждый элемент имеет два и только два непосредственно больших.

2. Пусть K — псевдоаксиоматизируемый класс моделей; $\{a_\alpha\}$ — некоторое множество символов, отличных от индивидуальных символов класса K . Рассмотрим отображение $a_\alpha \rightarrow a_\alpha^\sigma$ указанного множества внутрь некоторой K -модели A_σ такое, что a_α^σ являются порождающими A_σ . Пусть D_σ — диаграмма модели A_σ и $D_{\sigma v}(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_p}, u_{\lambda_1}, \dots, u_{\lambda_q})$ — все ее конечные поддиаграммы, где a_α, u_λ — элементы из подмодели, отвечающей $D_{\sigma v}$. В A_σ имеют место аксиомы

$$(\exists x_1) \dots (\exists x_q) D_{\sigma v}(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_p}, x_1, \dots, x_q), \quad (2)$$

которые обозначим сокращенно через $E_{\sigma v}(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_p})$.

Л е м м а. Если в произвольной модели M (не обязательно из класса K) выполняются все аксиомы (1), рассматриваемые в качестве универсальных, и для множества $\{a_\alpha\}$ индивидуальных символов выполняются аксиомы (2), то M содержит подмодель, канонически изоморфную модели A_σ .

По условию M содержит элементы, обозначенные символами a_α , и для каждого ξ в M есть элементы $m_1^\xi, \dots, m_t^\xi$, для которых формула $D'_\xi(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_s}, m_1^\xi, \dots, m_t^\xi)$ истинна. С каждым элементом u_λ модели A_σ сопоставим новый символ v_λ и рассмотрим вспомогательную систему $\mathfrak{M}$, образованную аксиомами $D_{\sigma v}(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_s}, v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_t})$ при всевозможных v , а также аксиомами $v_\xi = m_1^\xi \vee \dots \vee v_\xi = m_t^\xi$ и диаграммой модели

M , причем элементы a_α в системе $\mathfrak{M}$ следует заменить соответствующими элементами модели M . Из справедливости в M аксиом (1), (2) следует, что каждая конечная часть системы $\mathfrak{M}$ совместна. Поэтому совместна и вся система $\mathfrak{M}$, утверждающая, что M содержит подмодель, изоморфную A_σ .

Лемма доказана. С помощью этой леммы может быть доказана следующая основная теорема

Т е о р е м а 2. *Всякий псевдоаксиоматизируемый класс K моделей с натуральными порождениями аксиоматизируем и притом аксиоматизируем с помощью только аксиом сколемского вида.*

Пусть $\mathfrak{S}$ — совокупность всех аксиом вида $(x_1) \dots (x_m)(\exists y_1) \dots (\exists y_n)\mathfrak{A}$, истинных на всех моделях класса K .

Нужно доказать, что каждая модель A , на которой истинны все аксиомы системы $\mathfrak{S}$, принадлежит K . Обозначим через a_α ($\alpha \in \Gamma$) все элементы A и с каждым a_α сопоставим новый символ c_α . Рассмотрим всевозможные отображения $c_\alpha \rightarrow c_\alpha^\sigma$ совокупности $\{c_\alpha\}$ в K -модели M_σ мощности $\aleph(m)$, где m — мощность A . Пусть D_σ — диаграмма подмодели A_σ , порожденной внутри M_σ элементами c_α^σ . При любом отображении $c_\alpha \rightarrow b_\alpha$ элементов c_α в произвольную K -модель B в B выполняется аксиома

$$\bigvee_{\sigma} \& E_{\sigma v_\sigma} (c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_p}) = \& \bigvee_{\sigma} E_{\sigma v_\sigma} (c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_p}), \quad (3)$$

а потому в K имеет место и каждая из аксиом $\bigvee_{\sigma} E_{\sigma v_\sigma} (c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_p})$, где v_σ — произвольная функция, осуществляющая выбор по одному члену из каждого члена первой дизъюнкции. Ввиду псевдоаксиоматизируемости K отсюда вытекает существование конечного множества $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$, для которого в K истинна аксиома $E_{\sigma_1 v_1}(c) \bigvee \dots \bigvee E_{\sigma_k v_k}(c)$, а значит, истинна и аксиома $(c_1) \dots (c_m)(E_{\sigma_1 v_1}(c) \bigvee \dots \bigvee E_{\sigma_k v_k}(c))$, имеющая сколемский вид. Но все сколемские аксиомы, выполняющиеся в K , принадлежат $\mathfrak{S}$ и потому истинны на A . Следовательно, на A истинна аксиома (3), а потому для некоторого σ на A должна выполняться аксиома $\& E_{\sigma v_\sigma} (c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_p})$. Аксиомы (1) выполняются на K и имеют сколемский вид. Поэтому (1) истинны на A . Согласно лемме отсюда следует, что модель A имеет подмодель, содержащую элементы a_α и изоморфную K -модели A_σ . Но элементы a_α исчерпывают всю модель A , которая оказывается, таким образом, изоморфной A_σ .

С л е д с т в и е. *Если в моделях аксиоматизируемого класса K непустые пересечения K -подмоделей суть K -подмодели, то всякая модель M , любое конечное множество элементов которой содержится в подходящей K -подмодели, является K -моделью.*

Это непосредственно вытекает из того, что K может быть охарактеризован аксиомами сколемского вида (ср. [4]).

3. Теорема 2 не содержит явного описания аксиом, при помощи которых можно задать классы с натуральными порождениями и только такие классы. Наиболее простой и достаточный признак можно сформулировать следующим образом. Аксиомой явно функционального типа назовем конъюнкцию следующих двух выражений:

$$(x_1) \dots (x_m)(\exists y_1) \dots (\exists y_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n),$$

$$\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \& \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n) \rightarrow y_1 = z_1 \& \dots \& y_n = z_n,$$

где $\mathfrak{A}(x, y)$ кванторов не содержит, $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Теорема 3. *Класс моделей K , характеризующийся аксиомами явно функционального вида и универсальными аксиомами, обладает натуральными порождениями. Автоморфизм K -модели, оставляющий на месте все элементы какой-нибудь порождающей системы, оставляет на месте все элементы модели.*

Доказательство такое же, как и в случае алгебр. По виду более общими, чем явно функциональные аксиомы, представляются конъюнкции выражений

$$(\mathfrak{x}_1)(\exists \mathfrak{y}_1)(\mathfrak{x}_2)(\exists \mathfrak{y}_2) \dots (\mathfrak{x}_k)(\exists \mathfrak{y}_k) \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_k), \quad (4)$$

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_k) \& \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_k) \rightarrow \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{z}_1 \& \dots \& \mathfrak{x}_k = \mathfrak{z}_k. \quad (5)$$

Однако, как легко убедиться, каждая такая конъюнкция равносильна явно функциональной аксиоме и нескольким универсальным аксиомам. Поэтому заключение теоремы 3 имеет силу и для классов, характеризующихся парами аксиом вида (4), (5).

4. Порождения, рассматриваемые в топологических алгебрах и алгебрах с частичными операциями, не всегда являются натуральными. В связи с этим введем следующие определения. Пусть рассматриваются модели, основные предикаты которых занумерованы элементами множества Π , и пусть π — некоторая часть Π . Подмодель N модели M рассматриваемого типа назовем π -замкнутой в M , если из истинности выражения $P_\alpha(x_1, \dots, x_{n_\alpha}, y)$ для $\alpha \in \pi$, $\{x_1, \dots, x_{n_\alpha}\} \subseteq N$, $y \in M$, следует $y \in N$. Легко видеть, что пересечение произвольной системы π -замкнутых подмоделей либо пусто, либо есть π -замкнутая подмодель. Пусть рассматривается класс моделей K . В этом классе подмодель N некоторой K -модели M назовем π -порождающей с элементами $\{a_\alpha\}$, если N есть наименьшая π -замкнутая K -подмодель модели M , содержащая элементы a_α . Класс K назовем π -классом с π -порождениями, если непустые пересечения π -замкнутых K -подмоделей в K -моделях являются K -подмоделями.

Теорема 4. *Если некоторая модель M удовлетворяет аксиоме вида $(Q_1 x_1) \dots (Q_m x_m) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m)$, где $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m)$ — открытая положительная формула, в которой предметные переменные, связанные в кванторной части знаками существования, встречаются только на последних местах элементарных членов $P_\alpha(x_1, \dots, x_l)$ и только для $\alpha \in \pi$, то указанная аксиома выполняется и на всякой π -замкнутой подмодели модели M .*

Отсюда, в частности, следует, что каждый класс моделей, допускающий аксиоматизацию посредством универсальных аксиом и аксиом вида, указанного в теореме 4, будет классом с π -порождениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Подпрямые произведения моделей. — Докл. АН СССР, 1956, 109, № 2, 264—266.
2. А. Тарскит. Contributions to the theory of models, I, II. — Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1954, A57, 572—581.
3. А. Робинсон. Complete theories. Amsterdam, 1956.
4. J. Los, R. Suszko. On the infinite sums of models. — Bull. Acad. polon. sci., 1955, 3, N 4, 201—202.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ В КАТЕГОРИЯХ *



Непосредственной целью настоящей заметки является перенесение теории определяющих соотношений в классы моделей. Однако основные структурные понятия теории моделей — подмодели, прямые произведения и некоторые другие — могут быть выражены через понятие гомоморфизма в смысле [1] и притом тем же способом, что и в общей теории категорий. Поэтому ниже определяющие соотношения вводятся и изучаются сразу в общих категориях. В конце указывается истолкование их для категорий моделей.

1. Согласно Эйленбергу и Мак-Лейну [2], к а т е г о р и е й K называется к л а с с элементов, в котором определены частичная бинарная операция умножения и предикат быть нейтральным элементом, подчиняющиеся аксиомам: 1) если ab, bc определены, то определены и равны $a \cdot bc$ и $ab \cdot c$; 2) если определено $a \cdot bc$ или $ab \cdot c$, то определено ab ; 3) если e — нейтральный элемент, то $e^2 = e$ и из определенности ea или ae следует соответственно $ea = a$ или $ae = a$; 4) для каждого $a \in K$ существуют нейтральные элементы e, e' такие, что $ea = ae' = a$. Нейтральные элементы K называются также о б ъ е к т а м и категории K . Если для объектов e, e' имеем $ea = ae' = a$, то a называется г о м о м о р ф и з м о м e в e' . Гомоморфизм a называется и з о м о р ф и з м о м, если существует в K гомоморфизм b , для которого ab и ba суть нейтральные элементы K . В этом случае объекты ab, ba называются изоморфными.

Согласно Мак-Лейну [3], объект $\mathfrak{A}$ категории K называется п р я м о й композицией системы объектов $\mathfrak{A}_\alpha$ ($\alpha \in \Gamma$), если существуют такие гомоморфизмы π_α объекта $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}_\alpha$, что для любой системы гомоморфизмов σ_α произвольного объекта $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}_\alpha$ найдется и только один гомоморфизм $\xi: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$, удовлетворяющий соотношениям $\sigma_\alpha = \xi \pi_\alpha$ ($\alpha \in \Gamma$). Двойственно этому объект $\mathfrak{A} \in K$ называется K -с в о б о д н о й композицией системы $\mathfrak{A}_\alpha$ ($\alpha \in \Gamma$), если существуют гомоморфизмы $\pi_\alpha: \mathfrak{A}_\alpha \rightarrow \mathfrak{A}$ такие, что для любой системы гомоморфизмов σ_α объектов $\mathfrak{A}_\alpha$ в произвольный K -объект $\mathfrak{B}$ найдется и только один гомоморфизм $\xi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, удовлетворяющий соотношениям $\sigma_\alpha = \pi_\alpha \xi$ ($\alpha \in \Gamma$). Прямые и свободные композиции могут не существовать, но если существуют, то определяются однозначно с точностью до изоморфизма.

Далее п о д к а т е г о р и е й L категории K будет называться подкласс класса объектов K вместе со всеми гомоморфизмами из K , принадлежащими всевозможным парам L -объектов. Смысл понятий изоморфизма, прямой и свободной композиции вообще изменится при переходе от K к L . Однако изоморфизм и прямая композиция будут далее употребляться в смысле основной категории, а свободная композиция будет рассматриваться в различных подкатегориях в смысле этих подкатегорий.

2. Далее нам будут нужны категории более частного вида, которые будут называться категориями структуризованных множеств, или просто ка-

* Докл. АН СССР, 1958, 119, № 6, 1095—1098.

тегориями структур. Аналогичные понятия рассмотрены Исбелом [4] и самим Мак-Лейном [3]. В основу кладется класс K объектов, называемых структурами (структуризованными множествами, пространствами). С каждой структурой $\mathfrak{A}$ предполагается сопоставленным однозначно определенное множество $\mu(\mathfrak{A})$ — основное множество структуры $\mathfrak{A}$. Сверх этого, задается некоторая система H однозначных отображений основных множеств структур в основные множества структур и требуется, чтобы тождественное отображение каждой структуры на себя входило в H и чтобы для отображения α структуры $\mathfrak{A}$ в структуру $\mathfrak{B}$ и отображения β структуры $\mathfrak{B}$ в структуру $\mathfrak{C}$ из $\alpha, \beta \in H$ следовало $\alpha\beta \in H$. Отображения из H называются гомоморфизмами. Мы будем считать тождественным и структуры с общим основным множеством, тождественное отображение которого на себя есть гомоморфизм первой структуры на вторую и второй на первую. Мы будем считать также, что на произвольном множестве A определена структура, если задано взаимно однозначное отображение A на основное множество некоторой структуры $\mathfrak{A}$ и сказано, что это отображение есть изоморфизм. Класс структур абстрактный, если он вместе с каждой структурой содержит и все ей изоморфные. Ниже рассматриваются лишь абстрактные классы структур. Совокупность H всех гомоморфизмов K -структур является категорией в изложенном смысле. Объекты этой категории будут отождествляться со структурами, тождественными отображениями которых они являются.

В категории структур K структура $\mathfrak{B}$ называется подструктурой структуры $\mathfrak{A}$, если: 1) $\mu(\mathfrak{B}) \subseteq \mu(\mathfrak{A})$; 2) любой гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в произвольную структуру $\mathfrak{C}$, рассматриваемый для $\mathfrak{B}$, есть гомоморфизм $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{C}$; 3) любое отображение структуры $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{B}$, являющееся гомоморфизмом $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{A}$, есть гомоморфизм $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{B}$. Подструктура $\mathfrak{B}$ однозначно определяется $\mu(\mathfrak{B})$ и $\mathfrak{A}$. Структура $\mathfrak{B}$ будет называться сильной подструктурой в $\mathfrak{A}$, если, кроме условий 1—3, имеем: 4) каждый гомоморфизм в $\mathfrak{B}$ есть гомоморфизм в $\mathfrak{A}$.

Прямая композиция $\mathfrak{A}$ системы структур $\mathfrak{A}_\alpha$ будет называться разделяющейся, если из $a\pi_\alpha = b\pi_\alpha$ для всех канонических гомоморфизмов π_α ($\alpha \in \Gamma$) следует $a = b$ ($a, b \in \mathfrak{A}$). Эта композиция будет называться полной, если для любых $a_\alpha \in \mathfrak{A}_\alpha$ в $\mathfrak{A}$ найдется элемент a такой, что $a_\alpha = a\pi_\alpha$ ($\alpha \in \Gamma$). Прямая композиция называется прямым произведением, если она разделяющаяся и полная. В этом случае элементы прямой композиции будут отождествляться с элементами декартова произведения основных множеств сомножителей.

Структуру $\mathfrak{A}$ категории K назовем единичной, если $\mathfrak{A}$ одноэлементна и отображение любой K -структуры в $\mathfrak{A}$ гомоморфизм. $\mathfrak{A}$ будет называться нуль-структурой, если $\mathfrak{A}$ одноэлементна и любое отображение $\mathfrak{A}$ в произвольную K -структуру есть гомоморфизм. Легко видеть, что если категория K содержит нуль-структуру, то всякая прямая композиция будет полной и разделяющейся. Также легко доказывается

Теорема 1. Пусть в категории K все подструктуры сильные и прямые композиции разделяющиеся, и пусть в каждой K -структуре $\mathfrak{A}_\alpha$ ($\alpha \in \Gamma$) выделена K -подструктура $\mathfrak{B}_\alpha$ и прямые композиции $\mathfrak{A} = \Pi \mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{B} = \Pi \mathfrak{B}_\alpha$ существуют. Тогда $\mathfrak{B}$ есть подструктура $\mathfrak{A}$.

Категорию L условимся называть мультипликативно замкнутой, если в ней существуют прямые композиции любых систем L -структур.

Теорема 2. Для того чтобы в мультипликативно замкнутой, содержащей единичную структуру категории K с сильными подструктурами и разделяющимися прямыми композициями все канонические гомоморфизмы K -структур в их K -свободные композиции были изоморфизмами на соответствующие подструктуры, необходимо и достаточно, чтобы каждая K -структура была изоморфно вложима в K -структуру с единичной подструктурой.

При рассмотрении категорий структур ниже всегда будет предполагаться выполненной следующая аксиома определенности: совокупность всех K -структур, определенных на любом фиксированном множестве, можно рассматривать как множество определенной мощности. Категорию структур K будем называть *ограниченной*, если для каждого кардинального числа m найдется такое кардинальное $n = n(m)$, что в каждой K -структуре любое множество элементов мощности $\leq m$ содержится в подходящей K -подструктуре мощности $\leq n$.

3. Пусть K_0^* — какая-либо (общая) категория, K, L — ее подкатегории и $K \supseteq L$. Репликой K -объекта $\mathfrak{A}$ в категории L (L -репликой $\mathfrak{A}$) будет называться L -объект $\mathfrak{B}$, для которого существует такой гомоморфизм $\pi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, что для любого гомоморфизма σ объекта $\mathfrak{A}$ в произвольный L -объект $\mathfrak{C}$ найдется один и только один гомоморфизм $\xi: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$, удовлетворяющий соотношению $\sigma = \pi\xi$. Гомоморфизмы π, ξ будут называться каноническими. Легко видеть, что если реплика существует, то она определяется с точностью до изоморфизма объектом $\mathfrak{A}$ и, в частности, L -реплика L -объекта всегда совпадает с самим объектом.

Теорема 3. Пусть $K \supseteq L \supseteq M$ — подкатегории и $\mathfrak{A}^L, \mathfrak{A}^M$ суть реплики K -объекта $\mathfrak{A}$ в L и M . Тогда $\mathfrak{A}^M$ есть M -реплика объекта $\mathfrak{A}^L$. Если $\mathfrak{A}$ есть K -свободная композиция K -объектов $\mathfrak{A}_\alpha$ ($\alpha \in \Gamma$) и L -реплики $\mathfrak{A}^L, \mathfrak{A}_\alpha^L$ этих объектов существуют, то $\mathfrak{A}^L$ есть L -свободная композиция системы $\mathfrak{A}_\alpha^L$.

Заметим, что если рассматриваются категории структур и $\mathfrak{B}$ есть L -реплика структуры $\mathfrak{A}$ с каноническим гомоморфизмом π , то в $\mathfrak{B}$ нет L -подструктуры, отличной от $\mathfrak{B}$ и содержащей $\mathfrak{A}^\pi$, т. е. $\mathfrak{B}$ порождается элементами $\mathfrak{A}^\pi$.

Совокупность элементов S структуры $\mathfrak{A}$ категории K будем называть *K -плотной* в $\mathfrak{A}$, если для любых гомоморфизмов η, σ структуры $\mathfrak{A}$ в произвольную K -структуру из « $a\eta = a\sigma$ для всех $a \in S$ » следует $\eta = \sigma$.

Легко видеть, что если π_α — канонические гомоморфизмы свободной композиции $\mathfrak{A}$ структур $\mathfrak{A}_\alpha$ ($\alpha \in \Gamma$), то совокупность $\bigcup \mathfrak{A}_\alpha^{\pi_\alpha}$ будет K -плотной в $\mathfrak{A}$. Далее, если в $\mathfrak{A}$ есть K -подструктура $\mathfrak{B}$, содержащая множество $\bigcup \mathfrak{A}_\beta^{\pi_\beta}$ ($\beta \in \Gamma_1 \subset \Gamma$) в качестве своей плотной системы, то $\mathfrak{B}$ будет K -свободной композицией структур $\mathfrak{A}_\beta$ ($\beta \in \Gamma_1$). Легко видеть, что канонический образ структуры в ее реплике является плотным множеством в последней.

Подкатегорию L в категории K назовем *R -полной*, если каждый K -объект имеет в L реплику. Из теоремы 3 видно, что R -полная подкатегория R -полной подкатегории будет R -полной.

Теорема 4. Если категория K мультипликативно замкнута, то всякая ее R -полная подкатегория мультипликативно замкнута. Если K содержит единичную структуру, то ее содержит и всякая R -полная подкатегория категории K .

Структуру $\mathfrak{A}$ категории K назовем *регулярной*, если для любого множества S элементов $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ существует подструктура, содержащая S

в качестве своего K -плотного множества. Категория K будет называться *регулярной*, если регулярны все ее структуры.

Теорема 5. *Если подкатегория L категории структур K содержит единичную структуру, мультипликативно замкнута, регулярна и ограничена, то L R -полна и всякая система L -структур имеет определенную L -свободную композицию.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы о существовании топологических алгебр с данными определяющими соотношениями и топологическим порождающим пространством [5].

4. Обозначим через K класс всех моделей фиксированного типа $\langle P_1, P_2, \dots \rangle$, где P_i — основные предикатные символы класса.

Согласно [4] однозначное отображение σ модели $\langle A; P_1, P_2, \dots \rangle$ в модель $\langle B; Q_1, Q_2, \dots \rangle$ называется гомоморфизмом, если для любых i и $a_1, a_2, \dots$ из A из истинности $P_i(a_1, a_2, \dots)$ следует истинность $Q_i(a_1\sigma, a_2\sigma, \dots)$.

Совокупность H всех таким образом определенных гомоморфизмов K -моделей удовлетворяет требованиям п. 1 и пара (K, H) является категорией структур — моделей данного типа. Легко проверяется, что при этом понятия подмодели и прямого произведения моделей совпадают с понятиями подструктуры и прямой композиции, единичной структурой является одноэлементная модель, на которой все основные предикаты истинны, а нуль-структурой является одноэлементная модель с ложными основными предикатами.

Пусть теперь заданы некоторый подкласс L класса моделей K , система A символов и система F формул вида $P_i(a_1, a_2, \dots)$, $a_\alpha \in A$. L -модель $\mathfrak{B}$ естественно назвать *моделью с порождающими A и определяющими соотношениями F в классе L* , если найдется отображение π системы A в $\mathfrak{B}$, обладающее свойствами: а) A^π L -плотно в $\mathfrak{B}$; б) выражения $P_i(a_1^\pi, a_2^\pi, \dots)$ истинны в $\mathfrak{B}$; в) для каждого отображения σ системы A в произвольную L -модель $\mathfrak{C}$ такого, что $P_i(a_1^\sigma, a_2^\sigma, \dots)$ истинны в $\mathfrak{C}$, существует гомоморфизм $\xi: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$, удовлетворяющий соотношению $\sigma = \pi\xi$.

Обозначая через $\mathfrak{A}$ модель с основным множеством A , на которой выражения из F истинны, а остальные выражения подобного вида ложны, видим, что модель $\mathfrak{B}$ с порождающими A и определяющими соотношениями F будет изоморфна реплике $\mathfrak{A}$ в L .

Можно также в качестве основного класса K взять совокупность всевозможных моделей данного типа, на основных множествах которых определены некоторые топологии, а в качестве H взять совокупность непрерывных отображений, являющихся одновременно гомоморфизмами в смысле теории моделей. Если теперь под L понимать совокупность топологических алгебр соответствующего типа, то условия теоремы 5 выполняются и L -реплика K -структуры $\mathfrak{A}$ будет топологической алгеброй, заданной в смысле [5] топологическим пространством $\mathfrak{A}$ и положительным описанием $\mathfrak{A}$ в вышеуказанном смысле.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Подпрямые произведения моделей.— Докл. АН СССР, 1956, 109, № 2, 264—266.
2. S. Eilenberg, S. MacLane. General theory of natural equivalences.— Trans. Amer. Math. Soc., 1945, 58, N 2, 231—294.
3. S. MacLane. Duality for groups.— Bull. Amer. Math. Soc., 1950, 56, N 6, 485—516.
4. J. R. Isbell. Some remarks concerning categories and supspaces.— Canad. J. Math., 1957, 9, N 4, 563—577.
5. А. И. Мальцев. Свободные топологические алгебры.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1957, 21, № 2, 171—198.

СТРУКТУРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АЛГЕБР *



Мак-Лейном [1] были найдены условия, каким должна удовлетворять общая категория, чтобы она была изоморфна категории всех абелевых полугрупп с нулем. В более специальной теории категорий с т р у к т у р е с т в е н н о наряду с общим изоморфизмом рассматривать и более специальный вид изоморфизма — структурную эквивалентность. Основной целью настоящей заметки является нахождение условий, каким должна удовлетворять категория структур, чтобы она была структурно эквивалентна подклассу класса алгебр фиксированного типа, мультипликативно замкнутому и содержащему подалгебры своих алгебр. Ниже всюду используются терминология и результаты заметки [2].

1. Пусть L — какая-либо подкатегория категории структур K в смысле [2] и $\mathfrak{A} \in K$. Систему элементов структуры $\mathfrak{A}$ назовем L -с в о б о д н о й, если любое отображение этой системы внутрь произвольной L -структуры $\mathfrak{B}$ можно продолжить до гомоморфизма $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Структура $\mathfrak{A}$ будет называться L -с в о б о д н о й, если $\mathfrak{A} \in L$ и если в $\mathfrak{A}$ существует L -плотная L -свободная система элементов. Отсюда следует, что L -свободные структуры, обладающие L -плотными L -свободными системами одинаковой мощности, изоморфны. Заметим также, что если L является регулярным, ограниченным, мультипликативно замкнутым классом структур, то в L существуют L -свободные структуры с L -плотными L -свободными системами произвольной мощности.

Подкатегорию L категории структур K условимся называть г о м о м о р ф ф н о з а м к н у т о й в K , если гомоморфный образ L -структуры в K -структуре есть L -подструктура последней. Будем говорить, что система элементов S структуры $\mathfrak{A}$ является L -порождающей системой для $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A}$ не содержит L -подструктур, содержащих S и отличных от $\mathfrak{A}$.

Далее всюду рассматриваются лишь категории структур с и л ь н ы м и п о д с т р у к т у р а м и, т. е. лишь те категории, в которых гомоморфизм в подструктуру является гомоморфизмом в структуру.

Т е о р е м а 1. Пусть категория структур L гомоморфно замкнута в себе и содержит L -свободные структуры произвольной мощности. Тогда категория L ограничена, регулярна, пересечение любой системы L -подструктур L -структуры либо пусто, либо есть L -подструктура, всякая порождающая система элементов L -структуры является в ней плотной и полный прообраз L -подструктуры L -структуры $\mathfrak{A}$ при гомоморфном отображении на $\mathfrak{A}$ L -структуры $\mathfrak{B}$ есть L -подструктура в $\mathfrak{B}$.

Структуру $\mathfrak{A}$ условимся называть L -свободно циклической, если $\mathfrak{A}$ обладает L -плотным L -свободным элементом и $\mathfrak{A} \in L$. Тогда, если категория L содержит L -свободно циклическую структуру, то всякая L -свободная структура будет L -свободной композицией L -свободно циклических.

* Докл. АН СССР, 1958, 120, № 1, 29—32.

Отметим следующие случаи, когда плотные системы являются порождающими. Совокупность элементов канонического образа K -структуры в ее L -реплике является L -порождающей в реплике. Если K -структура $\mathfrak{A}$ содержит L -свободную систему элементов S , то $\mathfrak{A}$ может содержать не более одной L -подструктуры, в которой S является L -плотной системой. Поэтому L -свободная структура L -порождается своей L -плотной L -свободной системой.

2. По аналогии с теорией групп систему $\{M_\alpha\}$ подмножеств некоторого множества назовем *локальной*, если любое конечное подмножество элементов из $\bigcup M_\alpha$ лежит в подходящем подмножестве M_β . Категорию структур K назовем *аддитивной*, если объединение любой локальной системы K -подструктур произвольной K -структуры является K -подструктурой. K -плотную систему S элементов некоторой структуры $\mathfrak{A}$ будем называть *K -финитарно плотной*, если любой элемент $\mathfrak{A}$ лежит в K -подструктуре, содержащей подходящую конечную часть S в качестве плотной системы.

Теорема 2. *Всякий гомоморфно замкнутый в себе класс структур K , содержащий K -свободные структуры с K -свободными K -финитарно плотными системами любой заданной мощности, является аддитивным. В регулярных аддитивных классах K K -свободные K -плотные системы элементов структур являются K -финитарно плотными.*

Из изоморфизма K -свободных структур с K -свободными K -плотными системами одинаковой мощности следует, что если существует K -свободная структура с K -свободной K -финитарно плотной системой мощности m , то всякая K -свободная K -плотная система мощности m будет финитарно плотной.

3. Предположим, что в категории структур L имеются L -свободные структуры с L -плотным L -свободным множеством, состоящим из любого фиксированного конечного числа элементов. Обозначим символом V_n L -свободную структуру, символами $v_{n\alpha}$ ($\alpha \in \Gamma_n$; $n = 1, 2, \dots$) ее элементы, из которых пусть $v_{n1}, \dots, v_{nn}$ образуют L -плотную L -свободную систему в V_n ($n = 1, 2, \dots$). Определим теперь на каждой L -структуре $\mathfrak{A}$ серию операций $\Phi_{n\alpha}(x_1, \dots, x_n)$ ($\alpha \in \Gamma_n$; $n = 1, 2, \dots$) следующим образом. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — последовательность элементов $\mathfrak{A}$. По условию найдется и только один гомоморфизм σ структуры V_n в $\mathfrak{A}$, для которого $v_{ni}^\sigma = a_i$ ($i = 1, \dots, n$). По определению полагаем $\Phi_{n\alpha}(a_1, \dots, a_n) = v_{n\alpha}^\sigma$. Отсюда видно, что если на одном и том же множестве M заданы две структуры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, то значение выражения $\Phi_{n\alpha}(a_1, \dots, a_n)$ ($a_1, \dots, a_n \in M$) в $\mathfrak{A}$ может быть иным, нежели в $\mathfrak{B}$. Однако из определения следует, что если $\mathfrak{B}$ есть L -подструктура $\mathfrak{A}$ и $a_1, \dots, a_n$ принадлежат $\mathfrak{B}$, то значение $\Phi_{n\alpha}(a_1, \dots, a_n)$ в $\mathfrak{A}$ и в $\mathfrak{B}$ одно и то же, т. е. операции Φ устойчивы относительно перехода к L -над- и L -подструктурам. Далее, операции $\Phi_{n\alpha}$ сохраняются при гомоморфизмах, т. е. если σ — гомоморфизм L -структуры $\mathfrak{A}$ в L -структуру $\mathfrak{B}$, то

$$(\Phi_{n\alpha}(a_1, \dots, a_n))^\sigma = \Phi_{n\alpha}(a_1^\sigma, \dots, a_n^\sigma)(a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}).$$

Отсюда следует, что Φ -операции инвариантны относительно перехода к прямым произведениям.

Теорема 3. *Пусть гомоморфно замкнутая в себе категория структур L содержит L -свободные структуры с L -финитарно плотными L -свободными системами любой мощности. При этих условиях подмножество $\mathfrak{B}$ эле-*

ментов L -структуры $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда является L -подструктурой в $\mathfrak{A}$, когда оно замкнуто относительно всех операций Φ .

Здесь Φ -замкнутость $\mathfrak{B}$ означает, что для всех $a_1, \dots, a_n$ из $\mathfrak{B}$ имеем $\Phi(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{B}$.

4. Категорию структур L будем называть категорией с д е л и м ы м и гомоморфизмами, если для любого гомоморфизма σ L -структуры $\mathfrak{A}$ на L -структуру $\mathfrak{B}$ и любого отображения f структуры $\mathfrak{B}$ в L -структуру $\mathfrak{C}$ из того, что σf есть гомоморфизм, следует, что f есть гомоморфизм. Легко видеть, что категории с делимыми гомоморфизмами является любой класс алгебр.

Т е о р е м а 4. Пусть категория L с делимыми гомоморфизмами содержит L -свободные структуры с L -финитарно плотными L -свободными системами любой мощности. Тогда всякое отображение L -структуры $\mathfrak{A}$ в L -структуру $\mathfrak{B}$, сохраняющее Φ -операции, является гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

Категории K_1 и K_2 называются изоморфными [4], если возможно установить взаимно однозначное соответствие ψ между элементами (гомоморфизмами) K_1 и K_2 , являющееся изоморфизмом при рассмотрении K_1 и K_2 в качестве частичных полугрупп. В случае категорий структур это означает, что из K_1 -структуры с одним основным множеством правило ψ должно позволять сконструировать K_2 -структуру, вообще говоря, с другим основным множеством и из каждого гомоморфизма K_1 -структур сконструировать гомоморфизм соответствующих K_2 -структур, обладающий надлежащими дополнительными свойствами. Для нас будет важным следующее более жесткое понятие структурной эквивалентности категорий. Категорию структур K_1 мы будем называть структурно эквивалентной категории структур K_2 , если задано правило ψ , позволяющее для каждой K_1 -структуры однозначно построить K_2 -структуру с тем же основным множеством, если при этом каждый гомоморфизм K_1 -структуры $\mathfrak{A}$ в K_1 -структуру $\mathfrak{B}$ будет гомоморфизмом $\mathfrak{A}^\psi$ в $\mathfrak{B}^\psi$ и если существует обратное правило с соответствующими свойствами. Из теоремы 4 теперь непосредственно получается такое следствие.

С л е д с т в и е. Каждая категория структур K с делимыми гомоморфизмами, содержащая K -свободные структуры с K -финитарно плотными K -свободными системами произвольной мощности, структурно эквивалентна некоторой подкатегории категории всех алгебр надлежащего типа.

Действительно, выше указано, как K -структуру обратить в алгебру типа $\{\Phi_{n\alpha}\}$. Обозначим через K_2 класс всех тех алгебр, которые этим способом можно получить из K -структур. Теорема 4 показывает, что соответствие между объектами K и K_2 взаимно однозначно и удовлетворяет условию совпадения гомоморфизмов.

5. Подкатеорию L категории структур K будем называть к в а з и с в о б о д н о й в K , если L содержит единичную структуру, мультипликативно замкнута в K и K -подструктуры L -структур являются L -структурами. Подкатеорию L будем называть с в о б о д н о й в K , если она квазисвободна и гомоморфно замкнута в K . Согласно теореме Биркгофа, всякая свободная подкатегория категории всех алгебр фиксированного типа есть класс алгебр, характеризуемый системой тождеств, т. е. примитивный класс в смысле [3]. Частным видом квазисвободных подкатегорий будут квазипрimitивные классы алгебр [3]. Если основная категория регулярна и ограничена, то всякая квазисвободная ее подкатегория будет R -полной. В частности, R -полным является всякий квазисвободный подкласс класса всех алгебр

фиксированного типа. Эти подклассы могут быть охарактеризованы и своими чисто структурными свойствами.

Т е о р е м а 5. *Для того чтобы категория структур K была структурно эквивалентна квазисвободному подклассу категории всех алгебр некоторого фиксированного типа, необходимо и достаточно, чтобы K содержала единичную структуру и была регулярной, ограниченной, аддитивной, мультипликативно и гомоморфно в себе замкнутой.*

Необходимость непосредственно следует из элементарных свойств алгебр. Достаточность вытекает из совокупности предыдущих теорем.

6. Класс L_1 алгебр с основными операциями $f_\alpha(x_1, \dots, x_{m(\alpha)})$ ($\alpha \in \Gamma_1$) называется рационально эквивалентным классу L_2 алгебр с основными операциями $g_\beta(x_1, \dots, x_{n(\beta)})$ ($\beta \in \Gamma_2$), если существуют такие L_2 -многочлены $F_\alpha(x_1, \dots, x_{m(\alpha)})$ и такие L_1 -многочлены $G_\beta(x_1, \dots, x_{n(\beta)})$ ($\alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2$), что каждая L_1 -алгебра, рассматриваемая относительно G -операций, есть L_2 -алгебра, каждая L_2 -алгебра относительно F -операций есть L_1 -алгебра и указанное соответствие инволютивно [5]. Рациональная эквивалентность вообще отличается от структурной эквивалентности, но может и совпадать с ней. Отметим простейший случай этого:

Т е о р е м а 6. *Если квазисвободные подклассы классов всех алгебр вообще различных фиксированных типов структурно эквивалентны, то они и рационально эквивалентны.*

Пусть заданные подклассы суть L_1, L_2 и пусть $f_\alpha(x_1, \dots, x_m)$ — одна из основных операций класса L_1 . Рассмотрим L_1 -свободную алгебру V с L_1 -свободными порождающими $v_1, \dots, v_m$. Из структурной эквивалентности L_1, L_2 следует, что V будет и L_2 -свободной структурой с L_2 -свободными порождающими $v_1, \dots, v_m$. Поэтому элемент $f_\alpha(v_1, \dots, v_m)$ алгебры V должен быть представлен в виде некоторого L_2 -многочлена $F_\alpha(v_1, \dots, v_m)$. Из равенства $f_\alpha(v_1, \dots, v_m) = F_\alpha(v_1, \dots, v_m)$ в V следует, что в L_1 имеет место тождество $f_\alpha(x_1, \dots, x_m) = F_\alpha(x_1, \dots, x_m)$. Аналогично получаем, что для каждой основной L_2 -операции $g_\beta(x_1, \dots, x_n)$ существует L_1 -многочлен $G_\beta(x_1, \dots, x_n)$, для которого в L_1 имеет место тождество $g_\beta(x_1, \dots, x_n) = G_\beta(x_1, \dots, x_n)$. Таким образом, классы L_1, L_2 рационально эквивалентны.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. MacLane. Duality for groups.— Bull. Amer. Math. Soc., 1950, 56, N 6, 485—516.
2. А. М. Мальцев. Определяющие соотношения в категориях.— Докл. АН СССР, 1958, 119, № 6, 1095—1098.
3. А. И. Мальцев. Квазипрimitивные классы абстрактных алгебр.— Докл. АН СССР, 1956, 108, № 2, 187—189.
4. S. Eilenberg. S. MacLane. General theory of natural equivalences.— Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 58, N 2, 231—294.
5. А. И. Мальцев. Свободные топологические алгебры.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1957, 21, № 2, 171—198.



В заметке [1] указана структурная характеристика квазисвободных классов алгебр. Используя этот результат, мы указываем ниже структурные характеристики универсально аксиоматизируемых классов моделей и квазипрimitивных классов алгебр. Тем самым решается одновременно и вопрос о чисто алгебраической внутренней характеристике квазипрimitивных классов алгебраических систем, оставленный открытым в [2]. В конце показывается, что с точностью до структурной эквивалентности единственными аксиоматизируемыми гомоморфно замкнутыми классами моделей, допускающими теорию определяющих соотношений в смысле [3], являются квазипрimitивные классы алгебраических систем.

Все рассматриваемые ниже категории структур будут предполагаться с сильными подструктурами, а прямые композиции будут в случае существования предполагаться совпадающими с прямыми произведениями [3].

1. Категорию структур K условимся называть категорией с финитарными гомоморфизмами, если, какова бы ни была локальная система K -подструктур $\mathfrak{A}_\alpha$, покрывающая K -структуру $\mathfrak{B}$, любое отображение структуры $\mathfrak{A}$ в K -структуру $\mathfrak{B}$, являющееся для каждой подструктуры $\mathfrak{A}_\alpha$ гомоморфизмом $\mathfrak{A}_\alpha$ в подходящую K -подструктуру структуры $\mathfrak{B}$, является гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. В соответствии с обычной теоретико-групповой терминологией K -структуру $\mathfrak{A}$ назовем локально конечной, если любое конечное множество элементов $\mathfrak{A}$ лежит в ее подходящей конечной K -подструктуре. Ясно, что все категории моделей имеют финитарные гомоморфизмы. Легко доказывается также следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Всякая категория структур K с финитарными гомоморфизмами и локально конечными структурами структурно эквивалентна подходящему классу моделей.*

Категорию структур K будем называть локально согласованной, если из того, что любая конечная подсистема произвольной системы K -структур $\mathfrak{S}$, определенных на подмножествах некоторого множества, вложима в K -структуру в качестве ее подструктур, следует, что и вся система $\mathfrak{S}$ вложима в подходящую K -структуру. Из этого определения, в частности, следует, что в локально согласованных категориях всякую возрастающую цепочку вложенных друг в друга K -структур можно вложить в объемлющую структуру. Локальная теорема узкого исчисления предикатов показывает, что все аксиоматизируемые категории моделей являются локально согласованными.

Напомним, что класс моделей K называется универсально аксиоматизируемым, если он может быть охарактеризован некоторой совокупностью универсальных аксиом вида $(x_1) \dots (x_n) \mathfrak{P} (x_1, \dots, x_n)$, где выражение $\mathfrak{P}$ кванторов не содержит.

* Докл. АН СССР, 1958, 120, № 2, 245—248.

Теорема 2. Для того чтобы категория K была структурно эквивалентна некоторому универсально аксиоматизируемому классу моделей, необходимо и достаточно, чтобы K была локально согласованной, имела финитарные гомоморфизмы и любое подмножество K -структуры было ее K -подструктурой.

Теорема 3. Если универсально аксиоматизируемый класс моделей с конечным множеством основных предикатов $P_1, \dots, P_k$, структурно эквивалентен классу моделей с основными предикатами $Q_1, \dots, Q_l$, то имеют место эквивалентности вида $P_i(x_1, \dots, x_{m_i}) \sim \Phi_i(x_1, \dots, x_{m_i})$, $Q_j(x_1, \dots, x_{n_j}) \sim \Psi_j(x_1, \dots, x_{n_j})$, где Φ_i, Ψ_j — открытые формулы с предикатами Q_j , соответственно P_i , и предикатом равенства.

В случае, когда число основных предикатов бесконечно, теорема 3 также верна, но только в качестве Φ_i, Ψ_j следует считать допустимыми и бесконечные выражения.

2. Модель $\mathfrak{A}$ с основными предикатами $P_1, P_2, \dots$ членностей $n_1, n_2, \dots$ называется алгебраической системой типа $\tau = \langle I; n_1, n_2, \dots \rangle$, где I — некоторая часть множества индексов предикатов, если предикаты P_i для $i \in I$ являются предикатами операций на $\mathfrak{A}$. Класс A_τ всех алгебраических систем типа τ есть класс ограниченный, мультипликативно и гомоморфно в себе замкнутый, регулярный и содержащий единичную модель. В [1] введены понятия квазисвободного и свободного подклассов категории структур K . Если K — категория моделей, то квазисвободные и свободные подклассы, выделяемые из K некоторой системой аксиом, т. е. аксиоматизируемые внутри K , будут называться соответственно квазипримитивными и примитивными в K . Квазипримитивные (примитивные) подклассы класса K будут просто называться квазипримитивными (примитивными) классами алгебраических систем данного типа. Из теорем Тарского — Лоса [4, 5] и Бинга [6] непосредственно следует, что подкласс L некоторого класса моделей K тогда и только тогда квазипримитивен в K , когда L может быть выделен из K аксиомами вида $(x_1) \dots (x_n)(R_1 \& \dots \& R_s \supset R_{s+1})$, где R_i суть выражения вида $P_\alpha(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$.

Пусть категория K : α) мультипликативно замкнута; β) содержит единичную структуру. Тогда пересечение любой системы квазисвободных (свободных) подклассов в K будет квазисвободным (свободным) подклассом. Поэтому для каждого класса K -структур T в K найдется наименьший квазисвободный (свободный) подкласс L , содержащий T . Класс L будем называть квазисвободным (свободным) замыканием T в K и будем писать $L = T^q$ ($L = T^f$). Легко видеть, что T^q состоит из всевозможных K -подструктур прямых произведений T -структур. Чтобы получить аналогичную характеристику T^f , наложим на K еще требования: γ) K в себе гомоморфно замкнута и δ) прообраз K -подструктуры произвольной K -структуры $\mathfrak{A}$ при гомоморфном отображении на $\mathfrak{A}$ любой K -структуры $\mathfrak{B}$ есть K -подструктура в $\mathfrak{B}$. Тогда свободное замыкание L^f квазисвободного подкласса L будет состоять из всевозможных K -структур, являющихся гомоморфными образами L -структур. Отсюда следует, что если K и T — аксиоматизируемые классы моделей, то T^q и T^f будут также аксиоматизируемыми. Далее, если категория структур K удовлетворяет условиям α) — δ) и регулярна, то всякая L^f -свободная структура будет принадлежать L , где L — квазисвободный подкласс в K . В частности, если L^f содержит свободные структуры с любым

числом L^f -свободных порождающих, то запас свободных структур не меняется при переходе от L к его свободному замыканию.

Т е о р е м а 4. Пусть регулярная категория K , удовлетворяющая α) — δ), содержит конечную структуру $\mathfrak{M}$. Тогда: 1) K -свободные структуры с различными конечными числами свободных порождающих неизоморфны; 2) в минимальных квазисвободном $\{\mathfrak{M}\}^q$ и свободном $\{\mathfrak{M}\}^f$ подклассах, содержащих $\mathfrak{M}$, каждая структура с конечным порождающим множеством конечна; 3) если число неизоморфных K -структур каждой конечной мощности конечно, то в $\{\mathfrak{M}\}^f$ содержится лишь конечное число неединичных минимальных квазисвободных и минимальных свободных подклассов.

Утверждения 1), 3) являются обобщениями теорем Фудзивара [7] и Скотта [8], доказанных ими для примитивных классов алгебр.

3. Пусть Γ — частично упорядоченное множество, любые два элемента которого имеют общий большой элемент. Предположим, что с каждым $\alpha \in \Gamma$ сопоставлен объект $\mathfrak{M}_\alpha$, категории K и с каждой парой $\langle \alpha, \beta \rangle$ ($\alpha, \beta \in \Gamma$, $\alpha < \beta$) сопоставлен гомоморфизм $\pi_{\alpha\beta}: \mathfrak{M}_\alpha \rightarrow \mathfrak{M}_\beta$ так, что из $\alpha < \gamma < \beta$ следует $\pi_{\alpha\beta} = \pi_{\alpha\gamma}\pi_{\gamma\beta}$. Говорят, что Γ и отображения $\alpha \rightarrow \mathfrak{M}_\alpha$, $\langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \pi_{\alpha\beta}$ составляют прямой спектр. Объект $\mathfrak{M}$ категории K с заданными гомоморфизмами $\pi_\alpha: \mathfrak{M}_\alpha \rightarrow \mathfrak{M}$ называется пределом спектра [9], если $\pi_\alpha = \pi_{\alpha\beta}\pi_\beta$ ($\alpha < \beta$) и если для любой системы гомоморфизмов σ_α объектов $\mathfrak{M}_\alpha$ в произвольный K -объект $\mathfrak{B}$, удовлетворяющих условиям $\sigma_\alpha = \pi_{\alpha\beta}\sigma_\beta$ ($\alpha < \beta$), найдется один и только один гомоморфизм $\xi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{B}$, для которого $\sigma_\alpha = \pi_\alpha\xi$ ($\alpha \in \Gamma$). В случае, когда K — категория структур, далее без дополнительных оговорок будет предполагаться, что Γ имеет наименьший элемент 0 и что отображения $\pi_{\alpha\beta}$ являются гомоморфизмами $\mathfrak{M}_\alpha$ на $\mathfrak{M}^\beta$. Тогда можно считать, что структуры $\mathfrak{M}_\alpha$ и $\mathfrak{M} = \lim \mathfrak{M}_\alpha$ заданы на $\mathfrak{M}_0$ с подходяще определенным отношением равенства (ср. [11]). Если K — категория всех моделей фиксированного типа, то для любого прямого спектра при указанных ограничениях предельная модель существует и конструкция ее описана в [11]. Там же показано, что если универсальная или положительная аксиома имеет место на всех моделях спектра, то она имеет место и на предельной модели. Поскольку все универсально аксиоматизируемые классы алгебраических систем характеризуются положительными и универсальными аксиомами, то каждый такой класс содержит пределы спектров своих систем [11]. Возможное обращение этого дает следующая теорема.

Т е о р е м а 5. Мультипликативно замкнутый класс алгебраических систем, содержащий все подсистемы своих систем, тогда и только тогда аксиоматизируем, когда он содержит пределы прямых спектров своих систем.

В частности, квазисвободный класс алгебраических систем тогда и только тогда квазипримитивен, когда он содержит пределы прямых спектров своих систем. Принимая во внимание теорему 5 из [1], получаем: для того чтобы категория структур K была структурно эквивалентна аксиоматизируемому классу алгебр, мультипликативно замкнутому и содержащему подалгебры своих алгебр, необходимо и достаточно, чтобы K была категорией с делимыми гомоморфизмами, мультипликативно и гомоморфно [в себе замкнутой, ограниченной, регулярной, аддитивной и чтобы в K существовали пределы прямых спектров указанного выше типа. Добавляя к этим условиям требование существования единичной структуры, получим структурную характеристику квазипримитивных классов алгебр.

Пусть K — произвольная категория структур и $\mathfrak{M} \in K$. Отношение эквивалентности θ , определенное на основном множестве $\mathfrak{M}$, назовем к о н г

руэнтностью на $\mathfrak{M}$ (ср. [10]), если θ принадлежит некоторому гомоморфизму $\mathfrak{M}$ на подходящую K -структуру. Эквивалентность θ условимся называть внешней конгруэнтностью, если для любых двух гомоморфизмов σ, ρ произвольной K -структуры $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{M}$ из соотношений $b_a^\sigma \equiv b_a^\rho (\theta)$ для некоторой порождающей системы элементов b_a структуры $\mathfrak{B}$ следует $b^\sigma \equiv b^\rho (\theta)$ для всех $b \in \mathfrak{B}$.

Очевидно, для того чтобы квазисвободный класс алгебр K был свободным, необходимо и достаточно, чтобы в K каждая внешняя конгруэнтность была конгруэнтностью.

Таким образом, чтобы получить внутреннюю структурную характеристику примитивных классов алгебр, достаточно к указанному выше набору структурных свойств, характеризующих квазисвободные классы алгебр, присоединить требование совпадения внешних конгруэнтностей с конгруэнтностями.

4. Класс моделей K назовем классом с локальной вложимостью, если из того, что каждая конечная подмодель произвольной модели $\mathfrak{M}$ изоморфно вложима в подходящую K -модель, следует вложимость самой модели $\mathfrak{M}$ в подходящую K -модель.

Лемма 1. Пусть класс моделей K с локальной вложимостью содержит K -свободные модели с любым конечным числом свободных плотных порождающих. Тогда для каждой операции Φ_{an} (см. [1]) на всех K -моделях справедлива формула

$$\Phi_{an}(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1} \infty (\exists x_{n+2}) \dots (\exists x_s) \mathfrak{M}_{an}(x_1, \dots, x_s), \quad (1)$$

где $\mathfrak{M}_{an}$ — подходящая конъюнкция членов вида $P_\alpha(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$.

Лемма 2. Если класс моделей K с локальной вложимостью в себе гомоморфно замкнут и содержит K -свободные модели с любым кардинальным числом K -финитарно плотных свободных элементов, то, добавляя Φ -операции к числу основных предикатов класса K , мы обратим его в универсально аксиоматизируемый класс алгебраических систем.

На основании этих лемм теперь может быть доказана

Теорема 6. Каждый R -полный в себе гомоморфно замкнутый аксиоматизируемый класс моделей K структурно эквивалентен квазипримитивному классу алгебраических систем.

Действительно, из R -полноты K следует [3], что в K существуют K -свободные модели с любым кардинальным числом свободных порождающих. Из гомоморфной замкнутости K следует [1] (теорема 1), что непустые пересечения K -подмоделей K -моделей суть K -подмодели. В силу основного результата заметки [12], это влечет за собою, ввиду аксиоматизируемости K , аддитивность K . Теорема 2 из [1] показывает, что свободные порождающие K -свободных моделей будут финитарно плотными. В силу леммы 2, наконец, заключаем, что обогащение K Φ -операциями, определенными по формулам (1), дает квазипримитивный класс алгебраических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Структурная характеристика некоторых классов алгебр.— Докл. АН СССР, 1958, 120, № 1, 29—32.
2. А. И. Мальцев. Квазипримитивные классы абстрактных алгебр.— Докл. АН СССР, 1956, 108, № 2, 187—189.
3. А. И. Мальцев. Определяющие соотношения в категориях.— Докл. АН СССР, 1958, 119, № 6, 1095—1098.
4. J. Łoś. On the extending of models, I.— Fund. Math., 1955, 42, N 1, 38—54.
5. A. Tarski. Contribution to the theory of models, I.— Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1954, A57, 572—581.
6. K. Bing. On arithmetical classes not closed under direct union.— Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, N 5, 836—846.
7. T. Fujiwara. Note on the isomorphism problem for free algebraic systems.— Proc. Japan Acad., 1955, 31, N 3, 135—136.
8. D. Scott. Equationally complete extensions of finite algebras.— Indagationes Math., 1956, 18, 35—38.
9. S. Eilenberg, S. MacLane. General theory of natural equivalences.— Trans. Amer. Math. Soc., 1945, 58, N 2, 231—294.
10. J. R. Isbell. Some remarks concerning categories and subspaces.— Canad. J. Math., 1957, 9, N 4, 563—577.
11. А. И. Мальцев. Подпрямые произведения моделей.— Докл. АН СССР, 1956, 109, № 2, 264—266.
12. А. И. Мальцев. О классах моделей с операцией порождения.— Докл. АН СССР, 1957, 116, № 5, 738—743.



Пусть K — класс всех моделей вида $\mathfrak{M} = \langle M, \{P_i\}, \{a_j\} \rangle$, удовлетворяющих некоторой системе аксиом узкого исчисления предикатов, где P_i, a_j — символы основных предикатов и индивидуальных элементов; M — основное множество модели $\mathfrak{M}$. Общее число символов P_i, a_j будет называться порядком, а мощность M — мощностью модели $\mathfrak{M}$. Модели, мощность которых не меньше их порядка и в то же время бесконечна, назовем правильными. Остальные модели будут называться малыми. Известно (см., например, [1]), что каждая правильная модель $\mathfrak{M}$ аксиоматизируемого класса K может быть изоморфно погружена в отличную от $\mathfrak{M}$ модель того же класса K , мощность которой будет равна любому наперед заданному кардинальному числу, не меньшему мощности $\mathfrak{M}$. В настоящей заметке рассматриваются особенности, которые могут встретиться при расширении малых моделей, и некоторые смежные вопросы.

1. Упомянутыми особенностями обладают, например, малые модели следующих двух классов:

А. Основными предикатами моделей класса K_1 являются одноместные предикаты $P_\alpha(x)$, индексами которых служат всевозможные последовательности вида $\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots \rangle$, $\alpha_i = 0, 1$. Класс K_1 образован моделями, удовлетворяющими аксиомам

$$(\exists x) P_\alpha(x), \quad (1)$$

$$(\exists x_1) \dots (\exists x_n) (x_1 \neq x_2 \ \& \ x_1 \neq x_3 \ \& \ \dots \ \& \ x_{n-1} \neq x_n) \rightarrow (x) (\bar{P}_\lambda(x) \vee \bar{P}_\mu(x)), \quad (2)$$

где $n = 2^m$, $m = 1, 2, \dots$; α, λ, μ — произвольные бесконечные последовательности указанного вида, для которых $[\lambda]_m \neq [\mu]_m$. Здесь и далее символом $[\lambda]_n$ обозначается начальный отрезок $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle$ последовательности $\lambda = \langle \lambda_1, \lambda_2, \dots \rangle$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — какая-либо бесконечная K_1 -модель. Согласно (1) в $\mathfrak{M}$ найдутся элементы x_α , для которых $P_\alpha(x_\alpha)$ истинно, а из (2) следует, что для $\alpha \neq \beta$ элементы x_α, x_β различны. Таким образом, каждая бесконечная K_1 -модель содержит подмодель мощности континуума. В то же время класс K_1 содержит конечную модель мощности 2^m для каждого $m = 1, 2, \dots$. Действительно, пусть M_m — совокупность всех последовательностей $\beta = \langle \beta_1, \dots, \beta_m \rangle$ ($\beta_i \neq 0, 1$) длины m . Полагая $P_\alpha(\beta) = \mathcal{I}$, если $\beta = [\alpha]_m$, и $P_\alpha(\beta) = \mathcal{L}$, если $\beta = [\alpha]_m$, мы обратим M_m в искомую K_1 -модель. Следовательно, класс K_1 содержит конечные модели со сколь угодно большим числом элементов, не содержит счетных моделей.

Б. Сигнатура класса K_2 состоит из индивидуальных элементов a_β и одноместных операций $f_\alpha(x)$, где α пробегает указанную выше совокупность бесконечных последовательностей, а $\beta = \langle \beta_1, \dots, \beta_m \rangle$ ($\beta_i = 0, 1$; $m = 1, 2, \dots$) — произвольная конечная последовательность. Класс K_2

* Докл. АН СССР, 1959, 127, № 2, 258—261.

определяется аксиомами

$$x \neq \gamma_1 \& \dots \& x \neq \gamma_s \rightarrow f_\lambda(x) \neq f_\mu(x) \quad ([\lambda]_m \neq [\mu]_m), \quad (3)$$

где $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ — совокупность всех последовательностей длины $< m$, $m = 1, 2, \dots$

Полагая $f_\alpha(a_\beta) = a_{[\alpha]_m}$, если длина β равна m , мы обратим совокупность элементов a_β в счетную модель $\mathfrak{A}$ класса K_2 . Пусть $\mathfrak{M}$ — какая-либо K_2 -модель, содержащая $\mathfrak{A}$ в качестве собственной подмодели, и пусть $x \in \mathfrak{M}$, $x \notin \mathfrak{A}$. В $\mathfrak{M}$ найдутся элементы $f_\alpha(x)$, и все они в силу (3) будут различны для различных α . Таким образом, все собственные расширения класса K_2 счетной K_2 -модели $\mathfrak{A}$ имеют мощность, не меньшую мощности континуума.

2. Примеры А, Б показывают, что по меньшей мере для счетных и конечных моделей границы, указываемые следующей теоремой, не могут быть понижены.

Теорема 1. Если аксиоматизируемый класс K содержит модель $\mathfrak{M}$ бесконечной мощности m , то $\mathfrak{M}$ обладает истинным K -расширением мощности $m^\aleph_0$. Если в K содержатся модели мощностей $m_1 < m_2 < \dots$, то в K содержится и модель мощности n , удовлетворяющей условию $m_1 + m_2 + \dots \lesssim n \lesssim m_1 m_2 \dots$

Для доказательства сначала избавляемся от индивидуальных символов a_j в сигнатуре класса, если они там есть, вводя вместо них предикатные символы $A_j(x)$ и добавив аксиомы

$$(\exists x) A_j(x) \& (x)(y) (A_j(x) \& A_j(y) \rightarrow x = y)$$

к таблице аксиом, определяющих класс K , и соответственно переписав эту таблицу в новых терминах. Согласно второй ε -теореме [2] при доказательстве можно ограничиться рассмотрением случая, когда сигнатура K состоит из операций $f_i(x_1, \dots, x_{m_i})$ и предикатов P_j , а все аксиомы, определяющие K , имеют вид $(x_1) \dots (x_{p_j}) \mathfrak{P}_j(x_1, \dots, x_{p_j})$, где $\mathfrak{P}_j$ кванторов не содержит, но может содержать функторы. Пусть $\mathfrak{M}$ — заданная K -модель бесконечной мощности m . Вводим новый символ x и называем его символом 1-го порядка. Символами 0-го порядка называем элементы $\mathfrak{M}$, а символами $(k+1)$ -го порядка для $k \geq 1$ называем последовательности вида $\langle c_1, \dots, c_{m_i}, f_i \rangle$, где $c_1, \dots, c_{m_i}$ — символы порядков $\leq k$, из которых хотя бы один имеет порядок k . Пусть C — совокупность всех указанных символов всевозможных порядков. Обозначим через $\mathfrak{E}$ совокупность выражений (аксиом), получаемых способами а) — г).

а) Для элементов $c \in \mathfrak{M}$ пишем $x \neq c$ и все формулы вида $c \neq c'$, $P_j(c_1, \dots, c_{n_j})$, $\bar{P}_j(c_1, \dots, c_{n_j})$, $f_i(c_1, \dots, c_{m_i}) = c$, истинные в $\mathfrak{M}$; б) для символов порядка ≥ 1 пишем равенства $f_i(c_1, \dots, c_{m_i}) = \langle c_1, \dots, c_{m_i}, f_i \rangle$; в) для произвольных $c_1, \dots, c_{p_j}$ из C пишем формулы $\mathfrak{P}_j(c_1, \dots, c_{p_j})$; г) фиксируем в $\mathfrak{M}$ бесконечную последовательность различных элементов $b_1, b_2, \dots$ и полагаем $c(b_n) = c$ для $c \in \mathfrak{M}$, $x(b_n) = b_n$; $\langle c_1, \dots, c_{m_i}, f_i \rangle(b_n) = f_i(c_1(b_n), \dots, c_{m_i}(b_n))$ для символов более высоких порядков. В качестве аксиом пишем равенства $c = c'$ для всех тех $c, c' \in C$, для которых $c(b_n) = c'(b_n)$ при $n = 1, 2, \dots$

Система $\mathfrak{E}$ аксиом а) — г) совместна. Действительно, если $\mathfrak{E}_0$ — какая-либо конечная часть $\mathfrak{E}$, то в записи аксиом из $\mathfrak{E}_0$ будет участвовать лишь конечное число символов из C , а потому будет участвовать лишь конечное

множество M_0 элементов из $\mathfrak{M}$. Пусть $b_n \in M_0$. Подставляя в аксиомы из $\mathfrak{C}_0$ вместо элементов $c \in C$ их n -е значения $c(b_n)$, легко убедимся, что при такой замене все аксиомы из $\mathfrak{C}_0$ будут истинны в $\mathfrak{M}$. Следовательно, любая конечная часть $\mathfrak{C}$ выполнима; поэтому выполнима вся система $\mathfrak{C}$, и, значит, множество C можно обратить в модель $\mathfrak{M}$. Из аксиом а) — г) видно, что $\mathfrak{M}$ принадлежит классу K и является истинным расширением модели $\mathfrak{M}$. Для подсчета мощности $\mathfrak{M}$ достаточно заметить, что каждому $c \in C$ отвечает последовательность $c(b_1), c(b_2), \dots$ элементов из $\mathfrak{M}$, причем различным элементам C отвечают различные последовательности. Поэтому мощность $\mathfrak{M}$ не выше $\aleph_0$.

Для доказательства второго утверждения теоремы обозначим через $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots$ заданную последовательность K -моделей, имеющих мощности $\aleph_1, \aleph_2, \dots$, и пусть S — множество мощности $\aleph_1 + \aleph_2 + \dots$. Строим взаимно однозначное отображение φ_i множества $\mathfrak{M}_i$ в S так, чтобы $\varphi_i(\mathfrak{M}_i) \subseteq \subseteq \varphi_{i+1}(\mathfrak{M}_{i+1})$, $\bigcup \varphi_i(\mathfrak{M}_i) = S$. Элементы S называем символами 0-го порядка; символом $(k+1)$ -го порядка называем последовательность $\langle c_1, \dots, c_{m_i}, f_i \rangle$, где $c_1, \dots, c_{m_i}$ — символы порядков $\leq k$, среди которых есть символ порядка k . Пусть C — совокупность всех этих символов. Полагаем $c(n) = \varphi_n^{-1}(c)$, если $c \in \varphi_n(\mathfrak{M}_n)$, и полагаем $\langle c_1, \dots, c_{m_i}, f_i \rangle(n) = f_i(c_1(n), \dots, c_{m_i}(n))$ для символов более высоких порядков. Как и выше, элементы C связываем аксиомами: 1) $c \neq c'$ для различных c, c' из S ; 2) $f_i(c_1, \dots, c_{m_i}) = \langle c_1, \dots, c_{m_i}, f_i \rangle$; 3) $c = c'$ ($c, c' \in C$), если $c(n) = c'(n)$ для всех n , начиная с некоторого; 4) $\mathfrak{P}_v(c_1, \dots, c_{p_v})$. Аналогично изложенному выше легко убеждаемся, что система 1) — 4) совместна, и потому C можно обратить в K -модель. Легко видеть, что мощность этой модели удовлетворяет доказываемой теореме.

3. Класс моделей K , сигнатура которого состоит из функций и предикатов и который характеризуется универсальными аксиомами, обладает тем свойством, что объединение возрастающей цепочки вложенных друг в друга K -моделей есть K -модель. Пользуясь теоремой 1 и обобщенной гипотезой континуума, отсюда легко вывести, что каждая бесконечная K -модель $\mathfrak{M}$ допускает K -расширение любой наперед заданной мощности, большей мощности $\mathfrak{M}$.

Упомянутая вторая ε -теорема показывает, что это утверждение верно для любого аксиоматизируемого класса.

4. Пусть K — какой-либо класс моделей; α, β — кардинальные числа. Символами $K_\alpha, K_\beta, K_\alpha^\alpha$ обозначим классы K -моделей, мощность $\aleph$ которых удовлетворяет соответственно соотношениям $\alpha \leq \aleph, \aleph \leq \beta, \alpha \leq \aleph \leq \beta$.

Т е о р е м а 2. Пусть K, L — однотипные аксиоматизируемые классы моделей и для некоторого бесконечного кардинального α имеем $K_\alpha^\alpha \subset L$. Тогда $K_{\aleph_0} \subset L$, если α не меньше порядка K , и $K_{\aleph_0}^\alpha \subset L$ в остальных случаях.

Эта теорема содержит в себе теорему о полноте Вюота [3] и доказывается аналогично последней. Докажем, например, второе утверждение. Пусть $\mathfrak{K}$ — совокупность аксиом, определяющих класс K , и $\mathfrak{A}$ — произвольная из аксиом, определяющих класс L . Нужно показать, что $\mathfrak{A}$ истинна на всякой бесконечной K -модели мощности $\leq \alpha$. Пусть, напротив, на бесконечной K -модели $\mathfrak{M}$ мощности $\aleph \leq \alpha$ выполняется $\bar{\mathfrak{A}}$. Система $\{\mathfrak{K}, \bar{\mathfrak{A}}\}$, имея бесконечную модель $\mathfrak{M}$ мощности $\aleph$, должна иметь согласно п. 3 и модель $\mathfrak{N}$ мощности α . Тогда $\mathfrak{N} \in K_\alpha^\alpha$, и, следовательно, $\mathfrak{N} \in L$, т. е. на $\mathfrak{N}$ выполняются одновремен-

но аксиомы $\mathfrak{A}$ и $\bar{\mathfrak{A}}$, что невозможно. Поскольку результат п. 3 установлен с помощью гипотезы континуума, то и второе утверждение теоремы 2 доказано лишь в предположении истинности расширенной гипотезы континуума.

5. В статье [4] введено понятие проективного класса. Для моделей с одним основным множеством оно равносильно следующему. Пусть K — аксиоматизируемый класс моделей, сигнатура которых образована предикатами P_i , Q_j и одночленным предикатом $R(x)$. Берем произвольную K -модель $\mathfrak{M}$ и рассматриваем ее подмодель $\mathfrak{M}_0$, образованную теми элементами $\mathfrak{M}$, для которых $R(x)$ истинно. При этом на $\mathfrak{M}_0$ рассматриваем лишь предикаты P_i , не включая в сигнатуру $\mathfrak{M}_0$ предикатов Q_j . Класс всех $\mathfrak{M}_0$, получающихся указанным способом из K -моделей, называется проективным. Можно показать, что теорема 1 и сформулированное в п. 3 ее следствие остаются верными и для проективных классов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik. — Mat. сб., 1936, 1, № 3, 323—335.
2. D. Hilbert, P. Bernays. Grundlagen der mathematik, Bd. 2. Berlin, 1939.
3. P. L. Vaught. Application of the Löwenheim — Skolem — Tarski theorem to problems of completeness and decidability. — Indagationes Math., 1954, 16, N 5, 467—487.
4. А. И. Мальцев. Модельные соответствия. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1959, 23, № 3, 313—336.



При изучении свойств классов моделей приходится, помимо свойств индивидуальных моделей, выражающихся, обычно через отношения между элементами фиксированной модели, рассматривать отношения между моделями в целом, такие, например, как отношения «модель $\mathfrak{M}$ есть гомоморфный образ модели $\mathfrak{N}$ », «модель $\mathfrak{M}$ изоморфна подмодели модели $\mathfrak{N}$ », « $\mathfrak{M}$ есть прямое произведение $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ » и т. д. Основной целью настоящей статьи является выделение тех отношений или соответствий между моделями, которые наиболее тесно связаны с узким исчислением предикатов, и изучение основных свойств таких соответствий. Соответствия этого типа вводятся в § 1 под названием проективных. Основные их свойства изучаются в § 2.

В § 3 рассматриваются соответствия и классы моделей более сложного типа, для записи которых необходим аппарат расширенного исчисления предикатов. Для этих классов доказывается внутренняя локальная теорема, являющаяся центральным результатом работы. В конце работы доказывается элементарная аксиоматизируемость классов RN -, RI -, Z -групп и показывается, что локальные теоремы как для этих групп, так и для более сложных верхних классов $\overline{RN}$ -, $\overline{RI}$ -, $\overline{Z}$ -, $\tilde{N}$ -групп и свободно доупорядочиваемых групп являются частными случаями упомянутой внутренней локальной теоремы. Локальная теорема для свободно упорядочиваемых групп является, по-видимому, новой. Комбинируя свойства $\overline{RN}$, $\overline{RI}$ и т. д. с требованиями выпуклости подгрупп, можно получить тем же способом ряд новых локальных теорем и для частично упорядоченных групп **.

В теории моделей обычно рассматриваются предикаты, определенные на одном основном множестве. При изучении модельных соответствий оказалось необходимым систематически рассматривать предикаты и модели с несколькими основными множествами. В формулах, относящихся к таким многоосновным моделям, предметные кванторы приходится считать специализированными по основным множествам. Обычный процесс «унифицирования» переменных позволяет в основном свести изучение многоосновных моделей к изучению одноосновных, и этот прием используется в § 2 для вывода свойств модельных соответствий из известных свойств классов обычных моделей.

По аналогии с предметными специализированными кванторами можно ввести и специализированные предикатные кванторы, если понимать выражения $(\forall_{\mathfrak{M}} P)$, $(\exists_{\mathfrak{M}} P)$ как символы высказываний: «для каждого предиката P , обладающего свойством $\mathfrak{M}$ », «существует предикат P , обладающий свойством $\mathfrak{M}$, такой, что». Именно использование специализированных предикатных кванторов позволило найти формулировку для основной внутренней локальной теоремы.

* Изв. АН СССР, сер. мат., 1959, 23, № 3, 313—336.

** Другое изложение и дальнейшие примеры см. в кн.: М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. Основы теории групп. М., «Наука», 1972. См. также: С. Р. Коголовский. Обобщенно квазиуниверсальные классы моделей. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1965, 29, № 6, 1273—1282. — *Прим. ред.*

Аксиоматика предикатного исчисления с многоосновными предикатами изучалась А. Шмидтом [16, 17]. Однако для единства терминологии и удобства чтения в § 1 настоящей работы дается краткая сводка необходимых понятий и результатов.

Некоторые идеи и результаты настоящей работы были опубликованы в заметке [12].

§ 1. Многоосновные модели

1.1. Многоосновные предикаты. Пусть задана система множеств M_α ($\alpha \in A$), не обязательно различных, но непустых. Будем говорить, что на указанной системе задан n -членный предикат $P(x_1, \dots, x_n)$ рода $\langle i_1, \dots, i_n \rangle$ ($i_k \in A$, $k = 1, \dots, n$), если каждой последовательности $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ($a_k \in M_{i_k}$, $k = 1, \dots, n$) поставлено в соответствие I (истина) или L (ложь). Задать предикат рода 0 означает задать одно из двух значений I или L . К числу основных предикатов далее будут относиться и отношения равенства. Все они будут обозначаться одним символом, хотя этот символ может связывать элементы различных пар основных множеств M_i , M_j .

При записи формул род предметных переменных будет либо оговариваться особо, либо будет отмечаться верхними индексами. Так, x^i , y^i суть предметные символы для элементов множества M_i , $P^{i_1 \dots i_n}$, $Q^{i_1 \dots i_n}$ — предикатные символы для предикатов рода $\langle i_1, \dots, i_n \rangle$.

Все кванторные символы будут предполагаться специализированными в том смысле, что выражения (x^i) , $(\exists x^i)$, $(\forall P^i)$ будут означать: «для каждого x^i из M_i », «в M_i существует такой элемент x^i , что», «для каждого предиката P^i рода $\langle i \rangle$ ». Например, аксиома

$$(x^i)(\exists y^i)(x^i = y^i)$$

равносильна соотношению

$$M_i \subseteq M_j.$$

Более обще, если x — предметное или предикатное переменное, σ — некоторое свойство, то символы $(\forall x \sigma)$, $(\exists x \sigma)$ означают соответственно: «для каждого x , обладающего свойством σ », «существует x со свойством σ такой, что».

Обычные определения формул (правильно образованных) исчисления предикатов естественно обобщаются на случай многоосновных предикатов и специализированных кванторов. Важно, что все обычные тождественно истинные формулы и обычные эквивалентности остаются верными и для многоосновного случая.

Вполне упорядоченная система множеств M_α ($\alpha \in A$) с заданной на ней вполне упорядоченной системой многоосновных предикатов $P_\gamma(x_1, \dots, x_{n_\gamma})$ и фиксированных элементов a_δ ($\gamma \in \Gamma$, $\delta \in \Delta$) будет называться многоосновной моделью. Типом такой модели будет называться последовательность номеров множеств, родов предикатов и фиксированных элементов. Множества M_α , предикаты P_γ и элементы a_δ называются основными множествами, предикатами и элементами модели.

Отношения изоморфизма и гомоморфизма для многоосновных моделей будут употребляться в том же смысле, что и для одноосновных. Понятие под модели требуется несколько обобщить.

Пусть M_α ($\alpha \in A$) — основные множества многоосновной модели $\mathfrak{M}$ и B — некоторое подмножество из A . Тогда B -подмоделью $\mathfrak{M}'$ модели $\mathfrak{M}$ будет называться система подмножеств $M'_\alpha \subseteq M_\alpha$ ($\alpha \in B$), $M'_\alpha = M_\alpha$ ($\alpha \notin B$) с теми же предикатами и фиксированными элементами, что и в $\mathfrak{M}$. Таким образом, предполагается, что фиксированные элементы $\mathfrak{M}$, если они вообще есть, должны принадлежать $\mathfrak{M}'$. В случае $B = A$ $\mathfrak{M}'$ называется просто подмоделью $\mathfrak{M}$.

Классом моделей будет называться система однотипных моделей, содержащая вместе с каждой своей моделью и все ей изоморфные. Символы M_α , P_γ , a_δ будут употребляться как общие обозначения основных множеств, предикатов и элементов моделей класса.

Формула, не содержащая других свободных переменных, кроме символов P_γ , a_δ , и не содержащая этих символов в качестве связанных переменных, будет называться аксиомой, или замкнутой формулой. Все формулы будут предполагаться приведенными к предваренной (пренексной) форме, и когда будет говориться о кванторах, то будут иметься в виду кванторы пренексной формы, если не оговорено противное.

Формулы, содержащие лишь универсальные предметные кванторы, будут называться универсальными.

Подкласс L класса моделей K называется аксиоматизируемым (элементарным) внутри K , если существует такая, вообще бесконечная, система аксиом $\mathfrak{L}$ узкого исчисления предикатов (УИП), что L состоит из тех и только тех моделей класса K , которые удовлетворяют всем аксиомам рассматриваемой системы. Если все аксиомы системы $\mathfrak{L}$ можно выбрать универсальными, то L называется универсально аксиоматизируемым подклассом в K .

А. Тарским [18] и Ю. Лосем [5] получены простые характеристики универсально аксиоматизируемых подклассов. Чтобы представить их в нужной для нас форме, введем следующее определение (см. [15]).

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель с основными множествами M_α , предикатами P_γ и фиксированными элементами a_δ . Описанием $O(\mathfrak{M})$ модели $\mathfrak{M}$ называется совокупность всех формул вида $P_\gamma(c_1, \dots, c_n)$, $\neg P_\gamma(c_1, \dots, c_n)$, $a_\delta = c$, $a_\delta \neq c$, истинных в $\mathfrak{M}$, где $c, c_1, \dots, c_n$ пробегают всю модель $\mathfrak{M}$. В случае многоосновной модели к этому должны быть еще присоединены все истинные соотношения вида $c \in M_\alpha$.

Фиксируя некоторую конечную совокупность предикатов $P_{\gamma_1}, \dots, P_{\gamma_s}$ и соединяя знаком $\&$ члены из $O(\mathfrak{M})$, относящиеся к выбранным предикатам, мы получим финитное частичное описание $O_f(\mathfrak{M})$ или $(P_{\gamma_1}, \dots, P_{\gamma_s})$ -описание $\mathfrak{M}$. Говорят, что описание $O_f(\mathfrak{M})$ реализуемо в модели $\mathfrak{N}$, если в модели $\mathfrak{N}$ выполняется аксиома

$$(\exists c_1) \dots (\exists c_t) O_f(\mathfrak{M}),$$

где $c_1, \dots, c_t$ — элементы из $\mathfrak{M}$, встречающиеся в $O_f(\mathfrak{M})$.

Теорема 1 (ср. Тарский [18], Лось [5]). Для того чтобы подкласс K^* класса многоосновных моделей K , тип которого не содержит фиксированных элементов, был универсально аксиоматизируем в K , необходимо и достаточно, чтобы классу K^* принадлежала каждая K -модель, в которой каждое финитное частичное описание любой конечной подмодели реализуемо в подходящей K^* -модели.

Необходимость непосредственно следует из основной локальной теоремы (см. ниже п. 2.2). Для полноты докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{U}$ — совокупность всех универсальных аксиом, имеющих место на всех K^* -моделях, и пусть все они выполняются на K -модели $\mathfrak{M}$. Требуется доказать, что $\mathfrak{M} \in K^*$. Пусть это не так. Тогда найдется финитное описание $O_f(c_1, \dots, c_n)$ конечной системы элементов $c_1, \dots, c_n$ модели $\mathfrak{M}$, не реализуемое ни в какой K^* -модели. Это значит, что во всех K^* -моделях выполнена универсальная аксиома

$$(c_1) \dots (c_n) \overline{O_f(c_1, \dots, c_n)},$$

которая, таким образом, должна принадлежать $\mathfrak{U}$ и потому иметь место на $\mathfrak{M}$. Но на $\mathfrak{M}$ выполняется отрицание этой аксиомы, что является противоречием, доказывающим теорему.

1.2. Аксиоматизируемые и проективные соответствия. Рассмотрим два класса моделей K и L , основные множества и предикаты которых обозначим соответственно через M_α , P_γ ($\alpha \in A$, $\gamma \in \Gamma$) и N_β , Q_δ ($\beta \in B$, $\delta \in \Delta$). Мы скажем, что между моделями классов K , L установлено соответствие σ , если каждой паре моделей $\mathfrak{M} \in K$, $\mathfrak{N} \in L$ поставлено в соответствие одно из значений I или L . При этом будет предполагаться, что если $\mathfrak{M}\sigma\mathfrak{N} = I$ и $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ соответственно изоморфны $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$, то $\mathfrak{M}_1\sigma\mathfrak{N}_1 = I$.

Соответствие σ будет называться аксиоматизируемым (элементарным), если истинность отношения $\mathfrak{M}\sigma\mathfrak{N}$ равносильна выполнимости на $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ фиксированной совокупности $\mathfrak{S}$ аксиом УИП, конструируемой следующим образом. Берется некоторое множество новых предикатных символов $S_\lambda^{i_1 \dots i_k}$ ($i_1, \dots, i_k \in A \cup B$, $\lambda \in \Lambda$) и пишется система аксиом УИП, содержащих лишь предикатные символы вида P_γ , Q_δ , S_λ . При этом выполнимость системы $\mathfrak{S}$ на $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ означает, что на множествах M_α , N_β ($\alpha \in A$, $\beta \in B$) можно так определить предикаты S_λ , что при заданных предикатах из $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ на множествах M_α , N_β все аксиомы из $\mathfrak{S}$ будут истинными.

Если число аксиом в $\mathfrak{S}$ конечно, то выполнимость $\mathfrak{S}$ на $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ равносильна истинности подходящей аксиомы 2-й ступени вида

$$(\exists S_{\gamma_1}) \dots (\exists S_{\gamma_k}) \mathfrak{A}(P, Q, S).$$

Поэтому аксиоматизируемые соответствия этого частного вида можно было бы назвать $\exists$ -соответствиями и по аналогии определить, $\forall$, $\exists\forall$, $\forall\exists$ и т. д. соответствия. К одному частному случаю мы вернемся в § 3, а сейчас определим еще один класс соответствий, содержащий в себе класс аксиоматизируемых соответствий и столь же удобный для изучения, как и этот последний класс.

По определению соответствие σ между моделями классов K , L будет называться проективным, если истинность отношения $\mathfrak{M}\sigma\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{M} \in K$, $\mathfrak{N} \in L$) равносильна выполнимости на $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ фиксированной системы аксиом $\mathfrak{S}$ следующего строения. Берутся вспомогательное множество индексов C и множество предикатных символов вида $S_\lambda^{i_1 \dots i_k}$ ($i_1, \dots, i_k \in A \cup B \cup C$, $\lambda \in \Lambda$) и пишутся аксиомы УИП, содержащие лишь предикатные переменные P_γ , Q_δ , S_λ . Система $\mathfrak{S}$ называется выполнимой на $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, если можно найти такие непустые множества T_μ ($\mu \in C$) и на множествах M_α , N_β , T_μ так определить предикаты S_λ , что все аксиомы из $\mathfrak{S}$ окажутся истинными.

Введенные понятия аксиоматизируемого и проективного соответствий между моделями двух классов очевидным и однозначным образом переносятся и на случай соответствия $\sigma (\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_s)$ между моделями s классов $K_1, \dots, K_s$.

Из определений этих соответствий непосредственно вытекают два следствия.

С л е д с т в и е 1. Дизъюнкция конечного и конъюнкция любого числа аксиоматизируемых (проективных) отношений между моделями заданных классов $K_1, \dots, K_s$ являются снова аксиоматизируемыми (проективными) отношениями.

С л е д с т в и е 2. Если $\sigma (\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_s)$ — проективное отношение между моделями классов $K_1, \dots, K_s$, из которых класс K_s аксиоматизируем, то отношение

$$\tau (\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{s-1}) = (\exists \mathfrak{M}_s) \sigma (\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_s)$$

также проективное.

Формулировка следствия 2 имеет смысл при $s > 2$. При $s = 2$ выражение

$$(E\mathfrak{M}_2)\sigma (\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = \tau (\mathfrak{M}_1)$$

будет давать свойство τ модели $\mathfrak{M}_1$, которое мы также будем называть *проективным*, а совокупность моделей класса K_1 , обладающих этим свойством, будем называть *проективным подклассом* в K_1 . Иными словами, подкласс K^* моделей класса K называется *проективным* в K , если он состоит из тех и только тех K -моделей, которые находятся в фиксированном проективном отношении хотя бы с одной моделью заданного аксиоматизируемого класса.

Из следствия 1 вытекает, что объединение конечного и пересечение любого числа проективных подклассов заданного класса моделей являются снова проективными подклассами этого класса.

Если основной класс моделей K состоит из всех моделей заданного типа, то его проективные (аксиоматизируемые) подклассы называются просто проективными (аксиоматизируемыми) классами моделей.

Легко видеть, что проективные подклассы проективных классов моделей являются проективными классами. Аналогично, совокупность K_1^{**} моделей проективного класса K_1^* , находящихся в каком-либо проективном соответствии σ к моделям проективного класса K_2^* , является проективным классом.

В самом деле, пусть K_1, K_2 — классы всех моделей типа K_1^*, K_2^* ; $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ — системы аксиом, определяющие проективные соответствия ρ_1, ρ_2 между моделями классов K_1, K_2 и моделями вспомогательных аксиоматизируемых классов L_1, L_2 , характеризуемых системами аксиом $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$. При этом пусть K_i^* есть совокупность K_i^* -моделей, связанных K_i^* -соответствием с какими-либо $\mathfrak{L}_i$ -моделями ($i = 1, 2$). Обозначим через $\mathfrak{S}$ систему аксиом, определяющую проективное соответствие σ . Каждая из систем аксиом $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{S}$ содержит символы вспомогательных предикатов $S_\lambda^{i_1} \dots^{i_k}$. Вводим для них в каждой из указанных систем различные символы и рассматриваем проективное соответствие τ между моделями классов K_1, K_2 , определяемое системой аксиом $\mathfrak{T} = \{\mathfrak{S}, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2\}$. Непосредственно видно, что класс K_1^{**} состоит из K_1 -моделей, у которых имеются τ — соответствующие K_2 -модели.

1.3. Некоторые примеры. Пусть K, L — классы одноосновных моделей. Вводим вспомогательный предикат $S(x, y)$ ($x \in \mathfrak{M}, y \in \mathfrak{N}$), который рас-

смаатриваем как отношение, устанавливающее соответствие между элементами основных множеств моделей $\mathfrak{M} \in K$, $\mathfrak{N} \in L$. Системой аксиом УИП $\mathfrak{S}$, записываемых с помощью предикатного символа S и основных предикатных символов классов K , L , задаем некоторое свойство соответствия S . Модели $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ находятся в $\mathfrak{S}$ -соответствии, если между элементами $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ можно установить соответствие S , обладающее свойством $\mathfrak{S}$.

К этому простейшему типу модельных соответствий принадлежат, например, отношения «модель $\mathfrak{M}$ изоморфна модели $\mathfrak{N}$ », «модель $\mathfrak{M}$ есть гомоморфный (сильно гомоморфный) образ модели $\mathfrak{N}$ », «модель $\mathfrak{M}$ изоморфна некоторой подмодели модели $\mathfrak{N}$ », «модель $\mathfrak{M}$ есть гомоморфный образ некоторой подмодели модели $\mathfrak{N}$ » и т. д.

Отсюда следует, например, что *совокупность всех фактор-моделей моделей аксиоматизируемого класса есть проективный класс*.

В изложенной схеме вместо отношения S между элементами двух моделей можно рассматривать отношение между элементами нескольких моделей и получить, в частности, отношение «модель $\mathfrak{M}$ есть прямое произведение моделей $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n$ ».

Рассмотрим более сложный пример. Ф и н и т н о п о л н ы м п о д п р я м ы м п р о и з в е д е н и е м одноосновных однотипных моделей $\mathfrak{M}_\alpha$ ($\alpha \in A$) условимся называть такую подмодель $\mathfrak{M}$ прямого произведения этих моделей, которая для любого конечного набора различных индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ из A и произвольного выбора элементов $y_i \in \mathfrak{M}_{\alpha_i}$ ($i = 1, \dots, m$) содержит элемент x , имеющий $y_1, \dots, y_m$ своими проекциями номеров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Покажем, что *свойство модели $\mathfrak{M}$ быть финитно полным подпрямым произведением системы моделей фиксированного аксиоматизируемого класса K является проективным*.

Пусть $P_i(z_1, \dots, z_{n_i})$ ($i \in \Gamma$) — основные предикатные символы класса K и $\mathfrak{K}$ — совокупность аксиом, определяющая этот класс. Рассматриваем следующие три класса моделей:

К л а с с K_1 . Предикатов нет. Элементы модели — $\alpha, \alpha_1, \dots$

К л а с с K_2 . Основные предикаты — $Q_i(x_1, \dots, x_{n_i})$, элементы — $x, x_1, \dots$

К л а с с K_3 . Основные предикаты — $R_i(y_1, \dots, y_{n_i})$, элементы — $y, y_1, \dots$

Вводим вспомогательный предикат $S(\alpha, x, y)$, читающийся « y есть проекция номера α элемента x », и обозначаем символом $\mathfrak{S}$ совокупность всех следующих аксиом (кванторы всеобщности, относящиеся ко всей формуле, для краткости опускаем):

$$1. (\exists y) S(\alpha, x, y);$$

$$2. S(\alpha, x, y) \& S(\bar{\alpha}, x, y_1) \rightarrow y = y_1;$$

$$3. (\alpha) (\exists y) (S(\bar{\alpha}, x, y) \& S(\alpha, x_1, y)) \rightarrow x = x_1;$$

$$4. Q_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \leftrightarrow (\alpha) (y_1) \dots (y_{n_i}) (S(\bar{\alpha}, x_1, y_1) \& \dots \& S(\alpha, x_{n_i}, y_{n_i}) \rightarrow R_i(y_1, \dots, y_{n_i}));$$

$$5. T(\alpha, y) \leftrightarrow (\exists x) S(\alpha, x, y);$$

$$6. \alpha_1 \neq \alpha_2 \& \alpha_1 \neq \bar{\alpha}_3 \& \dots \& \alpha_{m-1} \neq \bar{\alpha}_m \& T(\alpha_1, y_1) \& \dots \& T(\bar{\alpha}_m, y_m) \rightarrow (\exists x) (S(\alpha_1, x, y_1) \& \dots \& S(\bar{\alpha}_m, x, y_m)) \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

7. Записываем в виде аксиом УИП, что каждая аксиома из $\mathfrak{A}$ имеет место на совокупности T_α всех тех элементов u , для которых $T(\alpha, u)$ истинно. Эти аксиомы пишем с кванторами всеобщности по α путем специализации кванторов в аксиомах $\mathfrak{A}$ и замены в них символов P_i символами R_i .

Ясно, что если для некоторой модели $\mathfrak{M} \in K_2$ можно найти модели $A \in K_1$, $\mathfrak{N} \in K_3$, так, что на A , $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ будут удовлетворяться аксиомы 1—7, то $\mathfrak{M}$ будет финитно полным подпрямым произведением моделей T_α , принадлежащих ввиду аксиомы 7 классу K , что и требовалось установить.

Если из аксиом 1—7 выбросить аксиому 6, то выполнимость оставшейся системы для моделей A , $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ будет означать, что $\mathfrak{M}$ есть подмодель прямого произведения K -моделей. Поэтому *свойство модели быть подмоделью прямого произведения моделей проективного класса K является проективным*.

Аналогичным путем можно было бы доказать проективность свойств группы быть RI -, RN - или Z -группой, а также быть частично упорядоченной и содержать RN -, RI - или Z -систему выпуклых подгрупп. Фактически именно это доказано в работах [9, 11]. Однако ниже в § 3 будет доказано более сильное утверждение о простой аксиоматизируемости всех указанных свойств групп.

§ 2. Основные свойства проективных соответствий

2.1. Отношения равенства. Унифицирование кванторов. Пусть K — класс многоосновных моделей с основными множествами M_α , $\alpha \in A$, и основными предикатами P_γ ($\gamma \in \Gamma$), характеризующийся системой аксиом УИП $\mathfrak{S}$. Как уже упоминалось, в записях аксиом из $\mathfrak{S}$ вместе с основными предикатными символами P_γ могут встречаться и знаки равенства. Хорошо известный прием релятивизации равенств позволяет свести рассмотрение систем с (абсолютным) равенством к изучению систем с предикатом эквивалентности (см. [3, 8]). В случае многоосновных моделей релятивизация равенств может иногда производиться раздельно следующим образом.

Предположим, что множество A номеров основных множеств можно разбить на взаимно не пересекающиеся непустые части $A_0, A_1, \dots, A_t$ так, что в $\mathfrak{S}$ не будет встречаться знак равенства, связывающий элементы множеств, номера которых принадлежат различным частям A_i, A_j . Вводим в рассмотрение новые отношения $\theta_1, \dots, \theta_t$, полагая $x\theta_i y$ определенным для всех $x, y \in U_i$, где

$$U_i = \bigcup M_\alpha \ (\alpha \in A_i), \quad i = 1, 2, \dots, t.$$

Связываем новые и старые отношения аксиомами:

$$x\theta_i x, x\theta_i y \rightarrow y\theta_i x, x\theta_i y \ \& \ y\theta_i z \rightarrow x\theta_i z, \quad (1)$$

$$x_1\theta_{i_1}y_1 \ \& \ \dots \ \& \ x_n\theta_{i_n}y_n \ \& \ P_\gamma(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P_\gamma(y_1, \dots, y_n), \quad (2)$$

где символы $\theta_i, \theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_n}$ принимают всевозможные значения из системы $=, \theta_1, \dots, \theta_t$, а переменные x, y, z, x_k, y_k берутся всевозможных родов, согласующихся с родами предикатов $P_\gamma, \theta_i, \theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_n}$. Наконец, в каждой аксиоме из $\mathfrak{S}$ каждое выражение вида $x = y$ ($x, y \in U_i$) заменяем выражением $x\theta_i y$ и систему полученных таким образом новых аксиом, пополненную аксиомами (1) и (2), обозначим через $\mathfrak{S}_\theta$. Класс моделей с основными множествами M_α ($\alpha \in A$) и основными предикатами P_γ ($\gamma \in \Gamma$), $\theta_1, \dots, \theta_t$, на кото-

рых выполняются аксиомы $\mathfrak{S}_\theta$, обозначим через K_θ . Аксиомы из $\mathfrak{S}_\theta$ содержат знак $=$, но лишь для элементов множеств M_α ($\alpha \in A_0$), тогда как знаки равенств, связывающих элементы остальных множеств, в $\mathfrak{S}_\theta$ отсутствуют и заменены знаками эквивалентностей различных родов.

Каждая $\mathfrak{S}$ -модель $\mathfrak{M}$ тривиальным образом обращается в $\mathfrak{S}_\theta$ -модель, если по определению положить отношения $x\theta_i y$ равносильными равенствам $x = y$.

Обратно, пусть $\mathfrak{M}_\theta$ — некоторая $\mathfrak{S}_\theta$ -модель. В силу (1) отношение θ_i является эквивалентностью на U_i и потому U_i распадается на смежные классы $[x]$, $x \in U_i$ по θ_i . Обозначим через M_α/θ_i ($\alpha \in A_i$) совокупность тех смежных классов из U_i/θ_i , представители которых содержатся в M_α , и положим

$$P_\gamma([x_1], \dots, [x_n]) = P_\gamma(x_1, \dots, x_n). \quad (3)$$

Аксиома (2) гарантирует, что формулами (3) предикаты P_γ на системе множеств M_α/θ_i определяются однозначно. Тем самым из каждой $\mathfrak{S}_\theta$ -модели $\mathfrak{M}_\theta$ получается определенная модель $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\theta/\theta$. Как и в одноосновном случае (3), легко убедиться, что $\mathfrak{M}$ удовлетворяет аксиомам $\mathfrak{S}$.

В дальнейшем нам понадобится следующее замечание. Предположим, что в $\mathfrak{S}$ нет знаков равенства, связывающих элемент из M_α с каким-либо другим элементом, и допустим, что в некоторой $\mathfrak{S}$ -модели $\mathfrak{M}$ на множестве M_α удалось каким-то образом определить эквивалентность θ , удовлетворяющую на $\mathfrak{M}$ аксиомам (1), (2). Из вышеизложенного видно, что тогда аксиомы $\mathfrak{S}$ будут выполняться и на фактор-модели $\mathfrak{M}/\theta$, определенной указанным выше способом на основных множествах M_β ($\beta \neq \alpha$).

Более того, фактор-модель $\mathfrak{M}/\theta$ можно просто рассматривать и как подмодель в $\mathfrak{M}$. Для этого из каждого смежного класса M_α/θ выберем по представителю и обозначим совокупность этих представителей через M_α . Пусть $\mathfrak{M}'$ есть подмодель модели $\mathfrak{M}$, имеющая основные множества M'_α и $M'_\beta = M_\beta$ для $\beta \neq \alpha$. Формула (3) показывает, что отображение

$$x \rightarrow [x] \quad (x \in M'_\alpha), \quad x \rightarrow x \quad (x \in M_\beta, \beta \neq \alpha)$$

является изоморфизмом между $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}'/\theta$:

Уже упоминалось, что рассмотрение аксиоматизируемых классов многоосновных моделей естественно приводится к рассмотрению классов одноосновных моделей путем процесса унифицирования кванторов, состоящего в следующем (см. [16]).

Пусть заданный класс K многоосновных моделей имеет основные множества M_α ($\alpha \in A$) и основные предикаты P_γ ($\gamma \in \Gamma$). Обозначим через K^* класс моделей с одним основным множеством M и предикатными символами V_α , P_γ^* ($\alpha \in A$, $\gamma \in \Gamma$). Предикаты V_α одноместные, а символы P_γ^* того же типа, что и P_γ , лишь аргументы P_γ^* относятся все к одному множеству M . Каждой формуле УИП $\mathfrak{A}$ типа K ставим в соответствие формулу $\mathfrak{A}^*$ типа K^* следующим путем:

1. Если $\mathfrak{A}$ кванторов не содержит, то $\mathfrak{A}^*$ получается из $\mathfrak{A}$ заменой символов P_γ символами P_γ^* .
2. Если $\mathfrak{A} = (\exists x^a) \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}^* = (\exists x)(V_\alpha(x) \& \mathfrak{A}_1^*)$.
3. Если $\mathfrak{A} = (x^a) \mathfrak{A}_1$, то $\mathfrak{A}^* = (x)(V_\alpha(x) \rightarrow \mathfrak{A}_1^*)$.

Имея модель $\mathfrak{M}$ типа K , удовлетворяющую аксиоме $\mathfrak{A}$, полагаем $M = \bigcup M_\alpha$, $V_\alpha(x)$ равносильно $x \in M_\alpha$ и

$$P_\gamma^*(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} P_\gamma(x_1, \dots, x_n), \\ \perp, \text{ если } P_\gamma(x_1, \dots, x_n) \text{ не определено.} \end{cases} \quad (4)$$

В результате получим одноосновную модель $\mathfrak{M}^*$, удовлетворяющую аксиоме $\mathfrak{A}^*$. Обратно, если $\mathfrak{M}^*$ есть K^* -модель, удовлетворяющая аксиоме $\mathfrak{A}^*$, то, обозначая через M_α совокупность элементов $x \in M$, для которых $V_\alpha(x) = \perp$, и определяя P_γ соотношением (4), получим K -модель $\mathfrak{M}$, удовлетворяющую аксиоме $\mathfrak{A}$. Чтобы соответствие между K -моделями и K^* -моделями было строго однозначным, нужно еще потребовать, чтобы в $\mathfrak{M}^*$ не было «лишних» элементов. Если число основных множеств конечно, например $A = \{1, 2, \dots, r\}$, то для этого достаточно в определение класса K^* ввести аксиому

$$(x)(V_1(x) \vee V_2(x) \vee \dots \vee V_r(x)),$$

гарантирующую истинность равенства $M = \bigcup M_\alpha$ в модели $\mathfrak{M}$, получающейся указанным выше образом из модели $\mathfrak{M}^*$.

Процесс специализации (или релятивизации) (см. [14, 15]) кванторов употребляется в случае, когда нужно записать, что некоторая аксиома $\mathfrak{A}$ с общими кванторами выполняется, если каждое связанное переменное x_i меняется в подмножестве M_i , определяемом формулой $\mathfrak{B}_i(x)$, содержащей одно свободное переменное x . Для этого достаточно рассматривать аксиому $\mathfrak{A}$ как аксиому со специализированными кванторами. Затем, унифицируя кванторы в $\mathfrak{A}$, мы получим формулу $\mathfrak{A}^*$. Заменяя в $\mathfrak{A}^*$ выражения $V_i(x)$ через $\mathfrak{B}_i(x)$, найдем желаемую формулу.

2.2. Внешняя локальная теорема. Для случая одноосновных моделей хорошо известна следующая

Основная локальная теорема (см. [8, 9]). *Если совместна каждая конечная подсистема некоторой бесконечной системы $\mathfrak{A}$ аксиом УИП, то совместна и вся система $\mathfrak{A}$.*

При этом аксиомы из $\mathfrak{A}$ могут содержать знак равенства, а также любое число (конечное или бесконечное) индивидуальных предикатных и предметных символов.

Допустим теперь, что заданная система аксиом $\mathfrak{A}$ является многоосновной. Совместность ее означает существование многоосновной модели, на которой все аксиомы из $\mathfrak{A}$ истинны. Применяя процесс унифицирования переменных, построим для $\mathfrak{A}$ соответствующую одноосновную систему $\mathfrak{A}^*$. Из совместности каждой конечной подсистемы системы $\mathfrak{A}$ следует совместность каждой конечной подсистемы из $\mathfrak{A}^*$, а потому и существование модели $\mathfrak{M}^*$ для $\mathfrak{A}^*$. Переходя, как указано в п. 2.1, от модели $\mathfrak{M}^*$ к модели $\mathfrak{M}$, мы видим, что система $\mathfrak{A}$ совместна. Таким образом, сформулированная выше *основная локальная теорема справедлива и для систем многоосновных аксиом.*

Отсюда непосредственно вытекает

Теорема 2 (внешняя локальная теорема для проективных соответствий). *Пусть задано проективное соответствие σ между (многоосновными) моделями проективных классов $K_1, \dots, K_s$, и пусть $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_s$ — модели этих классов. Если финитные частичные описания любых конечных подмоделей $\mathfrak{M}'_1, \dots, \mathfrak{M}'_s$ моделей $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_s$ реализуемы в подходящих моделях $\mathfrak{N}'_i \in K_i$ ($i = 1, \dots, s$), связанных σ -соответствием, то модели $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_s$*

вложимы в качестве подмоделей в модели $\mathfrak{M}_1 \in K_1, \dots, \mathfrak{M}_s \in K_s$, связанные σ -соответствием.

Совокупности аксиом, определяющие классы $K_1, \dots, K_s$ и соответствие σ обозначим соответственно через $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_s, \mathfrak{A}_0$. Мы можем предполагать, что вспомогательные предикатные и индивидуальные предметные переменные в различных системах имеют различные обозначения. Пусть $O(\mathfrak{M}_1), \dots, O(\mathfrak{M}_s)$ — описания заданных моделей и

$$\mathfrak{S} = \{O(\mathfrak{M}_1), \dots, O(\mathfrak{M}_s), \mathfrak{A}_0, \dots, \mathfrak{A}_s\}.$$

Совокупность $\mathfrak{S}$ рассматриваем как систему аксиом, определяющую класс многоосновных моделей. Каждая конечная часть $\mathfrak{S}$ содержит только конечные части систем $O(\mathfrak{M}_1), \dots, O(\mathfrak{M}_s)$, содержащиеся в подходящих финитных частичных описаниях соответствующих конечных подмоделей моделей $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_s$, а потому совместна. В силу основной локальной теоремы отсюда следует совместность и всей системы $\mathfrak{S}$. Если $\mathfrak{M}$ — модель для $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_s$ — ее K_1 -, $\dots$, K_s -проекции, то $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}$ ($i = 1, \dots, s$), ибо $\mathfrak{S}$ содержит описания моделей $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_s$. Кроме того, модели $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_s$ находятся в σ -соответствии.

Из теоремы 2 при $s = 1$ получаем

С л е д с т в и е 1. *Если каждое финитное частичное описание произвольной конечной подмодели некоторой модели $\mathfrak{M}$ реализуемо внутри подходящей модели фиксированного проективного класса K , то модель $\mathfrak{M}$ изоморфна подмодели подходящей K -модели.*

Согласно [13] класс моделей K называется п с е в д о а к с и о м а т и з и р у е м ы м, если из реализуемости в подходящей K -модели каждой конечной подсистемы произвольной системы $\mathfrak{S}$ аксиом УИП вытекает реализуемость внутри подходящей K -модели системы $\mathfrak{S}$. Повторяя рассуждения, употребленные в доказательстве теоремы 2, легко получить более сильное

З а м е ч а н и е. *Каждый проективный класс моделей является псевдоаксиоматизируемым.*

В качестве примера на применение теоремы 2 рассмотрим сильные гомоморфизмы. Выше упоминалось, что отношение «модель $\mathfrak{M}$ есть сильно гомоморфный образ модели $\mathfrak{N}$ » является проективным. Поэтому если каждая конечная подмодель некоторой модели $\mathfrak{M}$ является сильно гомоморфным образом подмодели подходящей модели фиксированного проективного класса K , то и сама модель $\mathfrak{M}$ является сильно гомоморфным образом подмодели подходящей K -модели.

Согласно [9, 11] совокупности RN -, RI - и Z -групп являются проективными классами (см. п. 3.3). Известно также, что подгруппы групп указанных классов принадлежат тем же классам. Поэтому из следствия 1 получаем такую внешнюю локальную теорему:

Если каждая конечная совокупность A элементов некоторой группы G , рассматриваемая как частичная группа, вложима в подходящую T -группу ($T = RN, RI, Z$), то G есть T -группа.

Напомним, что обычная (внутренняя) локальная теорема для указанных групп формулируется следующим образом:

Если каждая подгруппа с конечным числом порождающих некоторой группы G является T -группой, то и G является T -группой (см. [9, 4]).

Сравнивая эти теоремы, мы видим, что первая из них более сильная. Действительно, структура частичной группы A не определяет структуры подгруп-

пы H , порожденной элементами A в G , и из вложимости A в T -группу вообще не следует вложимость в T -группу подгруппы H .

Наконец, упомянем еще

С л е д с т в и е 2. Пусть проективный класс K является подклассом аксиоматизируемого класса моделей K_0 и K_0 -подмодели K -моделей являются K -моделями. Тогда класс K универсально аксиоматизируем в K_0 .

Для доказательства достаточно сравнить теоремы 2 и 1.

Из следствия 2 и проективности классов RN -, RI -, Z -групп следует простота аксиоматизируемости этих классов. Этот факт будет получен непосредственно в п. 3.3.

2.3. Ограниченность и расширяемость соответствий. Применяя, как выше, процесс унифицирования кванторов, из известной теоремы Левенгейма — Сколема и теоремы о расширяемости бесконечных моделей (см. [8]) легко получить соответствующие теоремы для многоосновных моделей, а из них и теоремы для соответствий и проективных классов.

Т е о р е м а 3 (ограниченности). Для каждого проективного соответствия σ между моделями фиксированных проективных классов $K_1, \dots, K_s$ существует бесконечное кардинальное число $m = m(\sigma)$ такое, что если $M_1 \in K_1, \dots, M_s \in K_s$ — модели, находящиеся в соответствии σ , $M_1, \dots, M_s$ — некоторые совокупности их элементов, мощности которых не превосходят какого-нибудь кардинального числа $n \geq m$, то в $M_1, \dots, M_s$ найдутся подмодели $N_i \in K_i$, находящиеся в σ -соответствии, содержащие соответственно совокупности $M_1, \dots, M_s$ и мощности которых также не превосходят n .

Пусть $\mathcal{S}$ — система аксиом УИП, определяющая соответствие σ . Мы включим в $\mathcal{S}$ и системы аксиом, определяющие классы $K_1, \dots, K_s$. Пусть $\mathcal{M}$ — многоосновная $\mathcal{S}$ -модель, проекциями которой являются модели $M_1, \dots, M_s$. Унифицируя в $\mathcal{S}$ переменные, мы получим системы аксиом $\mathcal{S}^*$, а из модели $\mathcal{M}$ получим $\mathcal{S}^*$ -модель $\mathcal{M}^*$. Положим

$$m = \aleph_0 + m_1,$$

где m_1 — мощность $\mathcal{S}^*$. Ясно, что число m , вычисленное для $\mathcal{S}$, будет тем же, что и для $\mathcal{S}^*$. Модель $\mathcal{M}^*$ содержит множество

$$\mathcal{A} = M_1 \cup \dots \cup M_s,$$

мощность которого не превосходит n . Согласно классической теореме Левенгейма — Сколема в $\mathcal{M}^*$, найдется содержащая $\mathcal{A}$ $\mathcal{S}^*$ -подмодель $\mathcal{N}^*$, мощность которой не превышает n . Возвращаясь от $\mathcal{M}^*$ к $\mathcal{M}$, мы получим из $\mathcal{M}^*$ $\mathcal{S}$ -подмодель $\mathcal{N}$, проекции которой $N_1, \dots, N_s$ удовлетворяют всем требованиям доказываемой теоремы.

При $s = 1$ получаем

С л е д с т в и е. Для каждого проективного класса K существует такая бесконечная мощность m , что если мощность подмножества $\mathcal{A}$ некоторой K -модели M не выше $n \geq m$, то в M существует K -подмодель мощности не выше n , содержащая $\mathcal{A}$.

Для аксиоматизируемых классов число m , вообще говоря, совпадает с числом основных предикатов класса. В случае проективных классов для нахождения m существенны не только основные, но и вспомогательные предикаты. Например, класс K_m всех множеств, мощность которых не меньше $m \geq \aleph_1$, является проективным. Согласно доказательству теоремы для ха-

характеристики K_m необходимо не менее m предикатов, хотя сам класс K_m основных предикатов не имеет.

Т е о р е м а 4 (расширяемости). Пусть σ — проективное соответствие между моделями проективных одноосновных классов $K_1, \dots, K_s$ и κ — кардинальное число, указанное в теореме ограниченности. Тогда для любых находящихся в σ -соответствии бесконечных моделей $\mathfrak{M}_1 \in K_1, \dots, \mathfrak{M}_s \in K_s$ существуют связанные σ -соответствием модели $\mathfrak{N}_1 \in K_1, \dots, \mathfrak{N}_s \in K_s$, мощности которых равны κ и такие, что $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{M}_i \neq \mathfrak{N}_i$, если мощность $\mathfrak{M}_i$ не выше κ ($i = 1, \dots, s$).

Если для каждого натурального t существуют связанные σ -соответствием модели $\mathfrak{M}_1^{(t)} \in K_1, \dots, \mathfrak{M}_s^{(t)} \in K_s$, среди которых каждая из моделей $\mathfrak{M}_1^{(t)}, \dots, \mathfrak{M}_t^{(t)}$ (t фиксировано, $t \leq s$) имеет не менее t элементов, то в классах $K_1, \dots, K_s$ найдутся связанные σ -соответствием модели $\mathfrak{N}_1 \in K_1, \dots, \mathfrak{N}_s \in K_s$, из которых $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_t$ будут бесконечными.

В соответствии с работой [8] обозначим через $\mathfrak{S}$ систему аксиом, определяющую соответствие σ и включающую аксиомы, характеризующие классы $K_1, \dots, K_s$. Пусть $O(\mathfrak{M}_i)$ — описание $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{A}_i = \{a_{i\alpha}\}$ ($\alpha \in A$, $i = 1, \dots, s$) — совокупности символов мощности κ . Эти символы полагаем отличными от всех символов, встречающихся в $\mathfrak{S}$ и в $O(\mathfrak{M}_i)$. Обозначаем через $\mathfrak{R}_i$ систему всевозможных формул вида $a_{i\alpha} = a_{i\beta}$, $a_{i\alpha} \neq c_i$, где $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in A$, $c_i \in \mathfrak{M}_i$, и рассматриваем систему аксиом

$$\mathfrak{Z} = \{\mathfrak{S}, O(\mathfrak{M}_{i_1}), \dots, O(\mathfrak{M}_{i_p}), \mathfrak{R}_{i_1}, \dots, \mathfrak{R}_{i_p}\},$$

в которой $i_1, \dots, i_p$ — номера тех $\mathfrak{M}_i$, мощность которых не выше κ . Любая конечная часть $\mathfrak{Z}_f \subseteq \mathfrak{Z}$ содержит лишь конечное число символов $a_{i\alpha}$, c_i и символов из $\mathfrak{S}$ и поэтому $\mathfrak{Z}_f$ можно реализовать в $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_s$, взяв в качестве $a_{i\alpha}$ произвольные различные элементы этих моделей, отличающиеся от тех, обозначения которых явно содержатся в $\mathfrak{Z}_f$. В силу основной локальной теоремы, отсюда следует существование модели $\mathfrak{U}$ у системы $\mathfrak{Z}$. Проекция $\mathfrak{U}_{i_1}, \dots, \mathfrak{U}_{i_p}$ модели $\mathfrak{U}$ содержат соответственно множества $\mathfrak{A}_{i_k} \cup \mathfrak{M}_{i_k}$ ($k = 1, \dots, p$), имеющие мощность κ . Согласно теореме Левенгейма — Сколема, в $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_s$ найдутся связанные σ -соответствием подмодели $\mathfrak{N}_1 \in K_1, \dots, \mathfrak{N}_s \in K_s$ мощности не выше κ , среди которых $\mathfrak{N}_{i_1}, \dots, \mathfrak{N}_{i_p}$ будут содержать множества $\mathfrak{A}_{i_1}, \dots, \mathfrak{A}_{i_p}$ и, следовательно, будут иметь мощность κ , что и требовалось доказать.

Доказательство второй части теоремы такое же, только в качестве $\mathfrak{Z}$ следует взять совокупность формул $a_{i\alpha} \neq a_{i\beta}$, где $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n, \dots$

При $s = 1$ доказанная теорема переходит в

С л е д с т в и е. Для каждой бесконечной модели $\mathfrak{M}$ проективного одноосновного класса K существует содержащая $\mathfrak{M}$ в качестве подмодели и отличная от нее K -модель $\mathfrak{N}$ любой наперед заданной мощности κ , не меньшей мощности $\mathfrak{M}$ и удовлетворяющей условию $\kappa \geq m$, где m — фиксированное для класса K кардинальное число, упоминающееся в теореме ограниченности.

Если класс K для любого натурального n содержит модель $\mathfrak{M}_n$, число элементов которой больше n , то K содержит и бесконечные модели.

Теорема расширяемости и ее следствие сформулированы лишь для одноосновных классов. Аналогичные утверждения верны и для многоосновных классов, только там вместо мощности модели приходится говорить о мощностях основных множеств модели.

§ 3. Квазиуниверсальные подклассы

3.1. Устойчивость. Рассмотрим какую-нибудь многоосновную формулу пренексного вида 2-й ступени

$$\mathfrak{A} = (Q_1 a_1) \dots (Q_m a_m) \mathfrak{B}(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n), \quad (1)$$

где $a_1, \dots, a_n$ — предикатные и предметные переменные фиксированных родов, относящиеся к основным множествам M_α ($\alpha \in A$) (ср. п. 1.1). Может случиться, что в этой формуле все кванторы по предметным переменным, принадлежащим множествам M_β ($\beta \in B \subseteq A$), будут кванторами всеобщности. В таком случае мы будем говорить, что $\mathfrak{A}$ имеет В-универсальный вид. При этом упомянутые универсальные кванторы в формуле $\mathfrak{A}$ не обязательно должны идти подряд: они могут чередоваться как с кванторами существования и всеобщности по предметным переменным других родов, так и с различными предикатными кванторами.

Т е о р е м а 5 (ср. [12, 18]). *Если многоосновная аксиома $\mathfrak{A}$ исчисления 2-й ступени имеет В-универсальный вид и выполняется на какой-либо модели $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{A}$ выполняется и на каждой В-подмодели (см. п. 1.1) модели $\mathfrak{M}$.*

Для доказательства потребуется несколько новых понятий. Пусть задан некоторый класс K многоосновных моделей с основными множествами M_α ($\alpha \in A$) и основными предикатами $P_\gamma = P_\gamma^{i_1 \dots i_k}$ ($\gamma \in \Gamma$, $i_p = i_p$ ($\gamma \in A$, $k = k(\gamma)$)). Мы скажем, что на K -моделях задано отношение (предикат) 2-й ступени $Z(x_1, \dots, x_m, X_1, \dots, X_n)$, где $x_1, \dots, x_m$ — предметные, $X_1, \dots, X_n$ — предикатные переменные 1-й ступени фиксированных родов $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \rho_1, \dots, \rho_n$, если на каждой K -модели $\mathfrak{M}$ каждой последовательности ее элементов $x_1, \dots, x_m$ и каждой последовательности определенных на $\mathfrak{M}$ предикатов $X_1, \dots, X_n$ родов $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \rho_1, \dots, \rho_n$ поставлено в соответствие одно из значений I, L .

Отношение Z будет называться **ф о р м у л ь н ы м** на K , если найдется формула исчисления 2-й ступени $\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_m, X_1, \dots, X_n)$, значение которой на каждой K -модели $\mathfrak{M}$ для каждой системы значений $x_1, \dots, x_m, X_1, \dots, X_n$ на $\mathfrak{M}$ совпадает со значением $Z(x_1, \dots, x_m, X_1, \dots, X_n)$. Формула $\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_m, X_1, \dots, X_n)$, кроме свободных переменных x_i, X_j , может содержать и ряд связанных предметных и предикатных переменных, а также индивидуальные предикатные символы класса K .

Отношение Z будет называться **В-у с т о й ч и в ы м** ($B \subseteq A$) на K , если из истинности $Z(x_1, \dots, x_m, X_1, \dots, X_n)$ в какой-либо K -модели $\mathfrak{M}$ с основными множествами M_α ($\alpha \in A$) для каких-либо ее элементов $x_1, \dots, x_m$ и определенных на $\mathfrak{M}$ предикатов $X_1, \dots, X_n$ вытекает истинность $Z(x_1, \dots, x_m, X_1^0, \dots, X_n^0)$ в каждой В-подмодели $\mathfrak{M}'$ модели $\mathfrak{M}$ при условии, что $\mathfrak{M}'$ содержит $x_1, \dots, x_m$, а $X_1^0, \dots, X_n^0$ — предикаты, определенные на $\mathfrak{M}'$, но значения которых совпадают со значениями $X_1, \dots, X_n$.

Непосредственно из определения понятия подмодели вытекает, что устойчивыми являются все основные предикаты рассматриваемого класса K , а также их отрицания. Устойчивыми являются также конъюнкции и дизъюнкции устойчивых отношений. Поэтому всякое отношение Z , определенное на K формулой, не содержащей никаких кванторов, будет устойчивым (А-устойчивым) на K .

Легко также проверить, что если отношение $Z(x_1, \dots, x_m, X_1, \dots, X_n)$ в классе K В-устойчиво, то В-устойчивы на K и отношения, определяемые

на K -моделях формулами

$$(X_i)Z, (\exists X_i)Z, (x_j)Z, (\exists x_k)Z,$$

где $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, а род x_k не входит в B .

В самом деле, пусть на модели $\mathfrak{M} \in K$ заданы элементы $x_1, \dots, x_m$ и предикаты $X_1, \dots, X_{n-1}$, так что истинна формула

$$Y(x_1, \dots, x_m, X_1, \dots, X_{n-1}) = (X)Z(x_1, \dots, x_m, X_{n-1}, X).$$

Это значит, что для любого предиката X на $\mathfrak{M}$ истинно выражение

$$Z(x_1, \dots, x_m, X_1, \dots, X_{n-1}, X),$$

а потому на $\mathfrak{M}'$ истинно

$$Z(x_1, \dots, x_m, X_1^0, \dots, X_{n-1}^0, X^0).$$

Если X пробегает всю совокупность предикатов рода X на $\mathfrak{M}$, то X^0 пробежит множество всех предикатов фиксированного рода, определенных на $\mathfrak{M}'$. Поэтому на $\mathfrak{M}'$ истинна формула

$$Y(x_1, \dots, x_m, X_1^0, \dots, X_{n-1}^0)$$

и, таким образом, отношение Y устойчиво.

Рассмотрим еще последний случай. Пусть при заданных $x_1, \dots, x_{m-1}$, $X_1, \dots, X_n$ на $\mathfrak{M}$ истинна формула

$$Y(x_1, \dots, x_{m-1}, X_1, \dots, X_n) = (\exists x)Z(x_1, \dots, x_{m-1}, x, X_1, \dots, X_n).$$

Это значит, что для некоторого $x \in \mathfrak{M}$ будет истинным выражение

$$Z(x_1, \dots, x_{m-1}, x, X_1, \dots, X_n).$$

Так как род x не входит в B , то x принадлежит любой B -подмодели $\mathfrak{M}'$. Но Z устойчиво, поэтому

$$Z(x_1, \dots, x_{m-1}, x, X_1^0, \dots, X_n^0) = I,$$

т. е. на $\mathfrak{M}'$ истинно выражение

$$Y(x_1, \dots, x_{m-1}, X_1^0, \dots, X_n^0),$$

что и требовалось доказать. Пропущенные 2-й и 3-й случаи рассматриваются аналогично.

Из сделанных замечаний доказываемая теорема вытекает непосредственно. Действительно, пусть аксиома $\mathfrak{A}$ имеет вид (1). Формула $\mathfrak{B}$, как не имеющая кванторов, устойчива. По условию среди присоединяемых кванторов $(Q_m, a_m), \dots, (Q_1, a_1)$ кванторы вида $(\exists x)$, где род x принадлежит B , отсутствуют. Поэтому аксиома $\mathfrak{A}$ является устойчивой формулой, что равносильно утверждению теоремы.

3.2. Внутренняя локальная теорема. Рассмотрим произвольный класс K моделей с основными множествами M_α ($\alpha \in A$) и основными предикатами P_γ ($\gamma \in \Gamma$). Так же как и при определении проективных подклассов, вводим в рассмотрение дополнительные множества предметов N_β ($\beta \in B$) и определенные на M_α , N_β предикаты Q_δ ($\delta \in \Delta$), вообще смешанного типа, т. е. часть аргументов их будет пробегать некоторые из множеств M_α , а часть аргументов будет пробегать множества N_β . Пусть R_λ ($\lambda \in \Lambda$) — еще одна

система вспомогательных предикатных переменных, которые будут обозначать некоторые предикаты, определенные на множествах M_α ($\alpha \in A$).

Рассмотрим системы аксиом $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_\lambda$, $\mathfrak{S}$ следующего вида:

1. $\mathfrak{K}$ — система аксиом УИП с основными множествами M_α , N_β ($\alpha \in A$, $\beta \in B$) и основными предикатами P_γ , Q_δ ($\gamma \in \Gamma$, $\delta \in \Delta$). Кванторы по элементам множеств M_α универсальные, кванторы по элементам N_β могут быть обоих родов.

2. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ система $\mathfrak{K}_\lambda$ состоит из аксиом УИП с основными множествами M_α ($\alpha \in A$) и основными предикатами P_γ ($\gamma \in \Gamma$) и R_λ . Все кванторы универсальные.

3. $\mathfrak{S}$ — система аксиом 2-й ступени с основными множествами M_α , N_β . Свободных предметных переменных (как и выше) в $\mathfrak{S}$ нет; свободные предикатные переменные принадлежат системам $\{P_\gamma\}$, $\{Q_\delta\}$, все связанные предикатные переменные принадлежат системе $\{R_\lambda\}$. Кванторы по переменным, относящимся к множествам M_α , предполагаются универсальными, остальные кванторы произвольные.

Кванторы вида (R_λ) , $(\exists R_\lambda)$ в аксиомах из $\mathfrak{S}$ предполагаются с п е ц и а л и з и р о в а н н ы м и — относящимися к совокупности всех предикатов рода R_λ , определенных на $\{M_\alpha\}$ и удовлетворяющих системе аксиом $\mathfrak{K}_\lambda$.

В аксиомах всех трех видов могут содержаться и знаки равенства, но связывающие лишь предметные символы. Множества основных предикатных символов и аксиом в каждой группе могут быть бесконечными.

Обозначим через $\mathfrak{L}$ объединение систем аксиом $\mathfrak{K}$, $\langle \mathfrak{K}_\lambda \rangle$, $\mathfrak{S}$ и условимся говорить, что модель $\mathfrak{M}$ с основными множествами M_α ($\alpha \in A$) и основными предикатами P_γ ($\gamma \in \Gamma$) удовлетворяет системе $\mathfrak{L}$, если существуют такие дополнительные множества N_β ($\beta \in B$) и на системе $\{M_\alpha\} \cup \{N_\beta\}$ так возможно определить дополнительные предикаты Q_δ ($\delta \in \Delta$), чтобы на получившейся расширенной и обогащенной модели $\langle \{M_\alpha\}, \{N_\beta\}, \{P_\gamma\}, \{Q_\delta\} \rangle$ выполнялись все аксиомы из $\mathfrak{L}$.

Класс всех моделей L , удовлетворяющих какой-либо фиксированной системе аксиом $\mathfrak{L}$ указанного вида, будем называть к в а з и у н и в е р с а л ь н ы м, поскольку во всех аксиомах из $\mathfrak{L}$ кванторы по элементам $\mathfrak{M}$ являются универсальными.

Аналогично, подкласс L некоторого класса моделей K будет называться к в а з и у н и в е р с а л ь н ы м подклассом в K , если L есть пересечение K с подходящим квазиуниверсальным классом L_0 , т. е. если L состоит из всех тех K -моделей, которые дополнительно удовлетворяют некоторой квазиуниверсальной системе аксиом.

Чтобы получить более ясное представление о квазиуниверсальных классах, рассмотрим несколько примеров.

Докажем, что *каждый класс моделей, допускающий аксиоматизацию посредством аксиом сколемского вида*

$$(x_1) \dots (x_m) (\exists y_1) \dots (\exists y_n) \mathfrak{R}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n), \quad (2)$$

является квазиуниверсальным.

Именно, покажем, что каждая аксиома (2) равносильна следующей паре квазиуниверсальных аксиом 2-й ступени:

$$(x_1) \dots (x_m) (y_1) \dots (y_n) (\mathfrak{R}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \rightarrow R(x_1, \dots, x_n)), \quad (3)$$

$$(R)(x_1) \dots (x_m) R(x_1, \dots, x_m), \quad (4)$$

где квантор (R) , как указывалось, специализированный, означающий: «для всех R , удовлетворяющих аксиоме (3)».

В самом деле, если аксиома (2) истинна на некоторой модели $\mathfrak{M}$ и предикат R на $\mathfrak{M}$ удовлетворяет аксиоме (3), то аксиома

$$(x_1) \dots (x_m) R(x_1, \dots, x_m)$$

на $\mathfrak{M}$, очевидно, истинна. Пусть аксиома (2) ложна. Тогда в $\mathfrak{M}$ существуют элементы $x'_1, \dots, x'_m$, для которых $\mathfrak{R}(x'_1, \dots, x'_m, y_1, \dots, y_n)$ ложно при всех $y_1, \dots, y_n$ из $\mathfrak{M}$. Берем предикат $R(x_1, \dots, x_m)$, ложный в точке $x'_1, \dots, x'_m$ и истинный в остальных точках. Он удовлетворяет аксиоме (3) и не удовлетворяет условию $(x_1) \dots (x_m) R(x_1, \dots, x_m)$, что и требовалось показать.

В качестве второго примера рассмотрим какой-либо (одноосновной) класс алгебр K с основными операциями $f_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ ($i = 1, \dots, s$). Добавляем аксиомы:

$$xRx \& (xRy \rightarrow yRx) \& (xRy \& yRz \rightarrow xRz), \quad (5)$$

$$x_1Ry_1 \& \dots \& x_nRy_n \& u = f_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \& v = f_i(y_1, \dots, y_{n_i}) \rightarrow uRv, \quad (6)$$

$$(R)(x)(y)(u)(v)(xRy \rightarrow (uRv \rightarrow u = v)), \quad (7)$$

из которых аксиомы (5), (6) означают, что R есть отношение конгруэнтности, а аксиома (7) утверждает, что каждая неединичная конгруэнтность является нулевой, совпадающей с отношением равенства. Таким образом, аксиомы (5), (6), (7) равносильны утверждению, что алгебра (гомоморфно) простая, и, следовательно, *подкласс (гомоморфно) простых алгебр в каждом классе алгебр K является квазиуниверсальным*.

Аналогичным образом, рассматривая вместо (5), (6), (7) аксиомы

$$R(x_1) \& \dots \& R(x_{n_i}) \& u = f_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \rightarrow R(u),$$

$$(\bar{R})(x)(y)(z)(R(x) \& R(y) \& x \neq y \rightarrow R(z)),$$

приходим к выводу, что *совокупность алгебр, не имеющих неоднородных истинных подалгебр, является квазиуниверсальным подклассом класса алгебр*.

В частности, отсюда следует, что квазиуниверсальными будут подклассы всех простых полей и подкласс всех конечных групп простых порядков. Ни тот, ни другой подклассы не будут проективными, так как для любого натурального n и тот и другой содержат модели, число элементов которых больше n , и в то же время оба класса не содержат несчетных моделей и потому не удовлетворяют теореме расширения для проективных классов (п. 2.3).

Поскольку простые абелевы группы образуют непроективный класс, то не будет проективным и класс всех простых групп.

Отсюда видно, что квазиуниверсальные подклассы аксиоматизируемых классов моделей глубоко отличаются от аксиоматизируемых и проективных. Квазиуниверсальный подкласс может состоять даже из одной бесконечной модели, как, например, класс простых полей нулевой характеристики. Тем не менее имеет место следующая основная

Т е о р е м а 6 (внутренняя локальная теорема). *Если модель имеет локальную систему подмоделей, принадлежащих квазиуниверсальному классу L , то $\mathfrak{M}$ также принадлежит L . В частности, объединение возрастающей цепочки моделей квазиуниверсального класса L есть модель того же класса.*

Доказательство будет проведено методом «опредмечивания» предикатов, состоящим в том, что предикаты различных ступеней и типов начинают рассматриваться как элементы новых дополнительных основных множеств, после чего аксиомы высших ступеней переписываются в виде многоосновных аксиом УИП.

Итак, пусть $\mathfrak{M}$ — модель с основными множествами M_α ($\alpha \in A$) и основными предикатами P_γ ($\gamma \in \Gamma$), обладающая локальной системой подмоделей $\mathfrak{M}_\sigma$ ($\sigma \in \Sigma$), удовлетворяющих квазиуниверсальной системе аксиом $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{K}, \{\mathfrak{K}_\lambda\}, \mathfrak{E}\}$ описанного выше строения. Каждому предикату $R_\lambda^{(u)}$, определенному на $\{M_\alpha\}$ и удовлетворяющему на $\mathfrak{M}$ требованиям $\mathfrak{K}_\lambda$, сопоставляем новый символ $r_\lambda^{(u)}$ и совокупность всех $r_\lambda^{(u)}$ обозначаем через U_λ . На множествах $\{M_\alpha\}$, $\{U_\lambda\}$ определяем новые предикаты E_λ следующим образом: если

$$R_\lambda = R_\lambda(x_1, \dots, x_p) \quad (x_i \in M_{\alpha_i}),$$

то

$$E_\lambda = E_\lambda(r_\lambda, x_1, \dots, x_p) \quad (r_\lambda \in U_\lambda, x_i \in M_{\alpha_i})$$

и по определению считаем

$$E_\lambda(r_\lambda, x_1, \dots, x_p) = R_\lambda(x_1, \dots, x_p) (x_i \in M_{\alpha_i}, p = p(\lambda)). \quad (8)$$

В результате из $\mathfrak{M}$ возникает модель

$$\mathfrak{M}^* = \langle \{M_\alpha\}, \{U_\lambda\}, \{P_\gamma\}, \{E_\lambda\} \rangle$$

с большим числом основных множеств и предикатов. Обозначим через $\mathfrak{K}_\lambda^*$ систему аксиом, получающихся из аксиом $\mathfrak{K}_\lambda$ заменой в них выражений $R_\lambda(x_1, \dots, x_p)$ выражением $E_\lambda(r_\lambda, x_1, \dots, x_p)$. Соответственно через $\mathfrak{E}^*$ обозначим систему аксиом, получающихся из аксиом $\mathfrak{E}$ указанной заменой $R_\lambda(x_1, \dots, x_p)$ на $E_\lambda(r_\lambda, x_1, \dots, x_p)$ и заменой кванторов (R_λ) , $(\exists R_\lambda)$ кванторами (r_λ) и $(\exists r_\lambda)$. Аксиомы $\mathfrak{K}_\lambda^*$, $\mathfrak{E}^*$ будут рассматриваться как аксиомы УИП с основными множествами $\{M_\alpha\}$, $\{U_\lambda\}$, основными предикатами P_γ , E_λ и специализированными кванторами, причем во всех аксиомах $\mathfrak{K}_\lambda$ предметное переменное r_λ предполагается связанным начальным квантором всеобщности, относящимся ко всей аксиоме.

Из построения $\mathfrak{M}$ и формулы (8) видно, что не все аксиомы системы $\mathfrak{K}_\lambda^*$ заведомо истинны. Более того, если удастся еще построить множества N_β ($\beta \in B$) и на системе $\{M_\alpha, N_\beta\}$ определить предикаты Q_δ так, чтобы на $\{M_\alpha, U_\lambda, N_\beta\}$ выполнялась система $\mathfrak{L}^* = \{\mathfrak{K}, \{\mathfrak{K}_\lambda^*\}, \mathfrak{E}^*\}$, то тогда на $\mathfrak{M}$ заведомо будет выполняться система $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ будет принадлежать классу K .

Обозначим через $O(\mathfrak{M}^*)$ описание модели $\mathfrak{M}^*$ и рассмотрим систему аксиом

$$\mathfrak{L}^* = \{O(\mathfrak{M}^*), \mathfrak{K}, \{\mathfrak{K}_\lambda^*\}, \mathfrak{E}^*\}.$$

Покажем, что эта система совместна. Согласно локальной теореме УИП для этого достаточно доказать совместность каждой конечной части $\mathfrak{L}_f^*$ системы $\mathfrak{L}^*$. Система $\mathfrak{L}_f^*$ содержит лишь конечную систему T членов из $O(\mathfrak{M}^*)$ и потому в записи формул, принадлежащих T , участвуют лишь конечная совокупность элементов $a_1, \dots, a_m$ из $\bigcup M_\alpha$ и конечная совокупность эле-

ментов $r_{\lambda_1}^1, \dots, r_{\lambda_n}^n$ из $\bigcup U_{\lambda}$. По условию $a_1, \dots, a_m$ принадлежат некоторой подмодели $\mathfrak{M}_{\sigma}$ из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющей аксиомам $\mathfrak{L}$.

Составляем указанным выше способом из $\mathfrak{M}_{\sigma}$ модель $\mathfrak{M}_{\sigma}^*$ и пусть $O(\mathfrak{M}_{\sigma}^*)$ — описание $\mathfrak{M}_{\sigma}^*$. По условию предикаты $R_{\lambda_1}^1, \dots, R_{\lambda_n}^n$, отвечающие элементам $r_{\lambda_1}^1, \dots, r_{\lambda_n}^n$, удовлетворяют на $\mathfrak{M}$ системам аксиом $\mathfrak{R}_{\lambda_1}, \dots, \mathfrak{R}_{\lambda_n}$. Обозначим через $R_{\lambda_i}^{i_0}$ предикат, определенный на $\mathfrak{M}_{\sigma}$ и совпадающий на $\mathfrak{M}$ с предикатом $R_{\lambda_i}^i$. Поскольку аксиомы $\mathfrak{R}_{\lambda_i}$ универсальные, то предикат $R_{\lambda_i}^{i_0}$ удовлетворяет аксиомам $\mathfrak{R}_{\lambda_i}$ на $\mathfrak{M}_{\sigma}$. Поэтому в множестве $U_{\lambda_i}^{\sigma}$, построенном для $\mathfrak{M}_{\sigma}$, найдется элемент $r_{\lambda_i}^{i_0}$ такой, что

$$E_{\lambda_i}(r_{\lambda_i}^{i_0}, x_1, \dots, x_p) = E_{\lambda_i}(r_{\lambda_i}^i, x_1, \dots, x_p) (x_1, \dots, x_p \in \mathfrak{M}_{\sigma}). \quad (9)$$

Обозначим через T^* совокупность формул, которые получаются, если в формулах из T символы $r_{\lambda_1}^1, \dots, r_{\lambda_n}^n$ заменить соответственно символами $r_{\lambda_1}^{i_0}, \dots, r_{\lambda_n}^{n_0}$. Убедимся, что T^* входит в $O(\mathfrak{M}_{\sigma}^*)$, т. е. что каждая формула из T при указанной замене переходит в формулу, истинную на $\mathfrak{M}_{\sigma}^*$. В самом деле, формулы из T имеют вид,

$$P_{\gamma}^{\varepsilon}(a_{i_1}, \dots, a_{i_s}), \quad a_i = a_j, \quad a_i \neq a_j, \\ E_{\lambda_i}^{\varepsilon}(r_{\lambda_i}^{(i)}, a_{k_1}, \dots, a_{k_p}) \quad (\varepsilon = \pm 1, \quad P^1 = P, \quad P^{-1} = \bar{P}). \quad (10)$$

Так как по условию знак равенства в аксиомах $\mathfrak{L}$ предикатных переменных не связывает, то и в описания $\mathfrak{M}^*$ и $\mathfrak{M}_{\sigma}^*$ мы не включаем члены вида $r_{\lambda} = r_{\mu}$, $r_{\lambda} \neq r_{\mu}$ и соответственно $r_{\lambda}^0 = r_{\mu}^0$, $r_{\lambda}^0 \neq r_{\mu}^0$. Члены же T , имеющие вид (10), при замене $r_{\lambda_i}^i$ на $r_{\lambda_i}^{i_0}$ остаются истинными в силу (9).

Итак, система T является частью системы

$$\mathfrak{L}_{\sigma}^* = \{T, \mathfrak{R}, \{\mathfrak{R}_{\lambda}^*\}, \mathfrak{S}^*\},$$

а система $\mathfrak{L}_{\sigma}^*$ выполняется на $\mathfrak{M}_{\sigma}^*$, если для символов $r_{\lambda_1}^1, \dots, r_{\lambda_n}^n$ взять значения $r_{\lambda_1}^{i_0}, \dots, r_{\lambda_n}^{n_0}$ из $\mathfrak{M}_{\sigma}^*$. Следовательно, каждая система $\mathfrak{L}_{\sigma}^*$ совместна и потому вся система $\mathfrak{L}^*$ имеет некоторую модель $\mathfrak{M}^*$, основные множества которой пусть будут $M'_{\alpha}, N_{\beta}, U'_{\lambda}$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\lambda \in \Lambda$. Так как $\mathfrak{L}^*$ содержит описание модели $\mathfrak{M}^*$, то $M'_{\alpha} \supseteq M_{\alpha}$, $U'_{\lambda} \supseteq U_{\lambda}$ и $\mathfrak{M}^*$ есть подмодель $\{M'_{\alpha}, U'_{\lambda}\}$ -проекция модели $\mathfrak{M}^*$.

Во всех аксиомах системы $\mathfrak{L}^*$ кванторы, относящиеся к элементам $\{M'_{\alpha}\}$, универсальные. Поэтому подмодель $\mathfrak{M}^*$ модели $\mathfrak{M}^*$, имеющая основные множества $M_{\alpha}, N_{\beta}, U'_{\lambda}$, также удовлетворяет системе $\mathfrak{L}^*$.

На каждом множестве U'_{λ} вводим отношение эквивалентности θ_{λ} , полагая $r_{\lambda}\theta_{\lambda}r'_{\lambda} = I$, если

$$E_{\lambda}(r_{\lambda}, x_1, \dots, x_p) = E_{\lambda}(r'_{\lambda}, x_1, \dots, x_p) \quad (r_{\lambda}, r'_{\lambda} \in U'_{\lambda})$$

для всех $x_1, \dots, x_p$ из $\bigcup M_{\alpha}$. В аксиомах $\mathfrak{L}^*$ элементы U'_{λ} знаком равенства не связаны и в качестве аргументов они встречаются только у предикатного

символа E_λ . Поэтому θ_λ можно рассматривать как релятивизированное равенство в смысле предыдущего пункта и из модели $\mathfrak{M}_1^*$ получить модель $\mathfrak{M}_1^*/\theta$ с основными множествами M_α , N_β , U_λ/θ_λ , на которой все еще выполняется система аксиом $\mathfrak{S}^*$.

Замечаем теперь, что для каждого фиксированного $r'_\lambda \in U'_\lambda$ выражение $E_\lambda(r'_\lambda, x_1, \dots, x_p)$ является предикатом, определенным на $\mathfrak{M}$ и в силу аксиом $\mathfrak{M}_\lambda^*$ удовлетворяющим аксиомам $\mathfrak{M}_\lambda$ на $\mathfrak{M}$. Но все такие предикаты уже были представлены элементами U_λ при конструировании этого множества. Следовательно, для каждого $r'_\lambda \in U'_\lambda$ найдется эквивалентный ему элемент $r_\lambda \in U_\lambda$ и потому модель $\mathfrak{M}_1^*/\theta$ в силу п. 3.1 будет изоморфна подмодели $\mathfrak{M}_0^*$ модели $\mathfrak{M}_1^*$, имеющей основные множества M_α , N_β , U_λ . Таким образом, на $\mathfrak{M}_0^*$ выполняются аксиомы $\mathfrak{S}^*$. Модель $\mathfrak{M}_0^*$ получается из $\mathfrak{M}_0^*$ отбрасыванием предикатов Q_β и множеств N_β , т. е. $\mathfrak{M}_0^*$ является искомой моделью, и теорема доказана.

Лишь по форме является более общим, чем теорема 6, ее

С л е д с т в и е. *Если модель $\mathfrak{M}$ какого-нибудь класса K обладает локальной системой подмоделей, принадлежащих квазиуниверсальному подклассу L класса K , то $\mathfrak{M}$ принадлежит L .*

Действительно, согласно определению $L = K \cap L_0$, где L_0 — некоторый квазиуниверсальный класс. Модель $\mathfrak{M}$ обладает локальной системой L -, а потому и L_0 -подмоделей. Из теоремы 6 следует, что $\mathfrak{M} \in L_0$. По условию $\mathfrak{M} \in K$, а потому $\mathfrak{M} \in L$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 7. *Если квазиуниверсальный класс моделей L описывается системой аксиом $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{R}, \{\mathfrak{M}_\lambda\} \mathfrak{S}\}$, в которой аксиомы $\mathfrak{M}_\lambda$ отсутствуют или приводятся к всегда истинным формулам, то L является универсально аксиоматизируемым.*

Согласно теореме 5 каждая подмодель L -модели есть L -модель. Поэтому чтобы применить теорему 1, остается доказать лишь внешнюю локальную теорему для L : *если каждое финитное частичное описание произвольной конечной подмодели некоторой модели $\mathfrak{M}$ реализуемо внутри подходящей L -модели, то $\mathfrak{M}$ есть L -модель.*

Для доказательства этого утверждения обозначим через $\{\mathfrak{M}_\sigma\}$ систему тех L -моделей, внутри которых могут быть реализованы финитные частичные описания всевозможных конечных подмоделей модели $\mathfrak{M}$. Далее дословно повторяем доказательство теоремы 6. Отличие состоит лишь в том, что теперь $\mathfrak{M}_\sigma$ вообще не являются подмоделями модели $\mathfrak{M}$. Но условие, что $\mathfrak{M}_\sigma$ есть подмодель модели $\mathfrak{M}$, было использовано в доказательстве теоремы 6 лишь для того, чтобы найти в $U_{\lambda_i}^\sigma$ предикаты $R_{\lambda_i}^{\sigma_0}$, связывающие элементы $a_1, \dots, a_m$ таким же образом, каким они связаны предикатами $R_{\lambda_i}^{\sigma_0}$ в $\mathfrak{M}$, и в то же время связанные в $\mathfrak{M}_\sigma$ условиями $\mathfrak{M}_{\lambda_i}$ ($i = 1, \dots, n$). Если последних условий нет, то в качестве $R_{\lambda_i}^{\sigma_0}$ можно взять произвольные предикаты на $\mathfrak{M}_\sigma$, имеющие на совокупности $\{a_1, \dots, a_m\}$ значения, совпадающие со значениями предикатов $R_{\lambda_i}^{\sigma_0}$ на указанной совокупности. Тем самым внешнюю локальную теорему для L , а вместе с нею и теорему 7 можно считать доказанными.

Главный частный случай теоремы 7, когда система $\mathfrak{S}$ не содержит аксиом $\mathfrak{R}$ и аксиомы $\mathfrak{S}$ не содержат кванторов по элементам дополнительных множеств N_β , был известен ранее (см. [7, 8]). В сущности, теорема 7 утверж-

дает возможность элиминации из системы $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{S}$ связанных предикатов R_i , вспомогательных предикатов Q_s и элементов N_β в смысле Аккермана [1].

3.3. Приложения. Понятие разрешимости группы сильно ветвится при переходе от конечных групп к бесконечным группам и вместо единого класса конечных разрешимых групп естественно возникают классы RN -, RI -, Z -групп, а также $\overline{RN}$ -, $\overline{RI}$ -, $\overline{Z}$ -, $\overline{N}$ -групп и некоторые другие классы (см. [9, 4, 11]). Для всех указанных классов групп известны локальные теоремы. Для «нижних» классов RN -, RI -, Z -групп, а также для упорядочиваемых групп эти теоремы были впервые получены автором [9, 10] с помощью основной локальной теоремы УИП. Доказательства локальных теорем для $\overline{RI}$ - и $\overline{Z}$ -групп были получены автором, а для $\overline{N}$ -групп — Бэрм [2], но уже с помощью некоторых специфически групповых методов. Мы теперь покажем, что локальные теоремы для всех «верхних» классов $\overline{RN}$ -, $\overline{RI}$ -, $\overline{Z}$ -, $\overline{N}$ -групп являются частными случаями доказанной выше внутренней локальной теоремы, а известные в н у т р е н н и е локальные теоремы для «нижних» классов RN -, RI -, Z -групп могут быть заменены более сильными в н е ш н и м и локальными теоремами.

Упорядоченная по включению система $\{M_\alpha\}$ подмножеств множества M называется п о л н о й, если она содержит пересечения и объединения любой совокупности своих членов и содержит M . Для каждой полной упорядоченной системы $S = \{M_\alpha\}$ подмножеств M вводим на M бинарный предикат $R_s = R$, полагая $xRy = I$, если среди множеств системы M существует такое, которое содержит x и не содержит y . Ясно, что R удовлетворяет аксиомам:

$$\alpha) x\bar{R}x,$$

$$\beta) xRy \ \& \ yRz \rightarrow xRz,$$

$$\gamma) xRz \ \& \ y\bar{R}z \rightarrow xRy.$$

Обозначая через Ry совокупность всех тех $x \in M$, для которых $xRy = I$, легко убеждаемся в том, что

$$Ry = \bigcup_{\alpha \in M_\alpha} M_\alpha, \quad M_\alpha = \bigcap_{y \in M_\alpha} Ry \quad (M_\alpha \neq M),$$

т. е. что $Ry \in S$ и что каждое $M_\alpha \neq M$ представимо в виде пересечения подходящей системы множеств Ry .

Обратно, пусть на M задан какой-либо бинарный предикат R , удовлетворяющий требованиям $\alpha) - \gamma)$. Система множеств вида Ry будет упорядоченной по включению. Пополним эту систему множеством M и объединениями и пересечениями любых совокупностей ее членов и обозначим пополненную систему символом S . Тогда из $\alpha) - \gamma)$ легко следует, что $R_s = R$ и, таким образом, *полные упорядоченные системы подмножеств и предикаты со свойствами $\alpha) - \gamma)$ находятся во взаимно однозначном соответствии.*

Заметим, что система S_1 есть уплотнение системы S , т. е. $S_1 \supseteq S$, тогда и только тогда, когда соответственные предикаты R_1, R связаны аксиомой $xSy \rightarrow xS_1y$.

Если множество G есть группа и мы хотим рассматривать полные упорядоченные системы подгрупп, содержащие единичную подгруппу, то к условиям $\alpha) - \gamma)$ добавляем аксиомы:

$$\delta) xRz \ \& \ yRz \rightarrow xy^{-1}Rz,$$

$$\epsilon) x \neq xx^{-1} \rightarrow xx^{-1}Rx.$$

Аксиома

$$\kappa) xRy \rightarrow y^{-1}xyRy,$$

очевидно, равносильна требованию, чтобы в любой паре соседних подгрупп системы меньшая подгруппа была нормальным делителем в большей (н о р - м а л ь н о с т ь системы).

Аксиома

$$\lambda) x \neq xx^{-1} \& x\bar{R}y \& y\bar{R}x \rightarrow xyx^{-1}y^{-1}Rx$$

равносильна требованию, чтобы фактор-группа любых двух соседних подгрупп системы была абелевой; аксиома

$$\mu) xRy \rightarrow z^{-1}xzRy$$

равносильна требованию, чтобы все подгруппы системы были инвариантны в G (и н в а р и а н т н о с т ь системы), а аксиома

$$\nu) xx^{-1} \neq x \rightarrow xyx^{-1}y^{-1}Rx$$

равносильна требованию, чтобы подгруппы системы были нормальными делителями в G и чтобы фактор-группа G_β/G_α любых двух соседних подгрупп системы лежала в центре G/G_α (ц е н т р а л ь н о с т ь системы).

До сих пор мы имели дело с предикатами, а не с операциями. Поэтому дальше мы будем предполагать все аксиомы $\alpha) - \nu)$ записанными в предикатной форме. Например, если $P(x, y, z)$ и $Q(x, y)$ означают $xy = z$, $y = x^{-1}$, то аксиома $\epsilon)$ в предикатной записи будет иметь вид:

$$Q(x, y) \& P(x, y, z) \& x \neq z \rightarrow zRx.$$

Для дальнейшего важно, что как аксиомы $\alpha) - \nu)$, так и их предикатные записи содержат только кванторы всеобщности.

Свойство группы G быть RN -, RI -, Z -группой может быть выражено соответственно аксиомами:

$$(\exists R)(x)(y)(z)((\alpha) \& (\beta) \& (\gamma) \& (\delta) \& (\epsilon) \& (\lambda)); \quad (RN)$$

$$(\exists R)(x)(y)(z)((\alpha) \& (\beta) \& (\gamma) \& (\delta) \& (\epsilon) \& (\lambda) \& (\mu)); \quad (RI)$$

$$(\exists R)(x)(y)(z)((\alpha) \& (\beta) \& (\gamma) \& (\delta) \& (\epsilon) \& (\nu)), \quad (Z)$$

где квантор $(\exists R)$ не специализирован, а $(\alpha), \dots, (\nu)$ означают выражения из $\alpha), \dots, \nu)$.

Вид аксиом (RN) , (RI) , (Z) удовлетворяет условиям теоремы 7 и потому имеет место

Т е о р е м а 8. RN -, RI - и Z -группы образуют универсально аксиоматизируемые подклассы класса групп и потому для них справедлива внешняя локальная теорема.

Переходя к рассмотрению $\overline{RN}$ -, $\overline{RI}$ -, $\overline{Z}$ -, $\overline{N}$ -групп, обозначим через $\mathfrak{S}_1(R)$, $\mathfrak{S}_2(R)$, $\mathfrak{S}_3(R)$ матрицы (бескванторные части) выражений (RN) , (RI) , (Z) . Положим еще

$$\mathfrak{S}(R) = (\alpha) \& (\beta) \& (\gamma) \& (\delta) \& (\epsilon) \& (\kappa),$$

$$\mathfrak{T}(R) = (\alpha) \& (\beta) \& (\gamma) \& (\delta) \& (\epsilon) \& (\lambda).$$

Тогда свойство группы быть $\overline{RN}$ -, $\overline{RI}$ - или $\overline{Z}$ -группой может быть выражено соответственно аксиомами:

$$(\forall \epsilon R)(\exists \epsilon_1 R_1)(u)(v)(uRv \rightarrow uR_1v),$$

$$(\forall \mathfrak{z} R)(\exists \epsilon_1 R_1)(u)(v)(uRv \rightarrow uR_1v),$$

$$(\forall \mathfrak{z} R)(\exists \epsilon_1 R_1)(u)(v)(uRv \rightarrow uR_1v).$$

Мы видим, что эти аксиомы имеют форму, указанную в определении квазиуниверсальных подклассов. Таким образом, $\overline{RN}$ -, $\overline{RI}$ -, $\overline{Z}$ -группы образуют квазиуниверсальные подклассы класса групп. Согласно теореме 6 отсюда вытекает, что для указанных классов групп имеет место внутренняя локальная теорема.

Для записи определения $\tilde{N}$ -группы надо уметь охарактеризовать R -предикаты, отвечающие системам вида $1 \subseteq G_1 \subseteq G$, где G_1 — какая-нибудь подгруппа группы G . Для этого достаточно, очевидно, к аксиомам $\alpha) — \epsilon)$ добавить условие

$$\pi) x \neq xx^{-1} \ \& \ xRy \rightarrow y\bar{R}z.$$

Обозначив конъюнкцию формул $\alpha) — \epsilon)$, $\pi)$ через $\mathfrak{A}$, мы сможем представить определение $\tilde{N}$ -группы в виде аксиомы

$$(\forall \mathfrak{A} R)(\exists \epsilon_1 R_1)(u)(v)(uRv \rightarrow uR_1v).$$

Эта аксиома снова имеет вид, указанный в определении квазиуниверсальных подклассов. Следовательно, $\tilde{N}$ -группы образуют квазиуниверсальный подкласс в классе групп и потому для них имеет место внутренняя локальная теорема.

Аналогичные утверждения имеют силу для класса групп, допускающих линейное упорядочение (упорядочиваемые группы), и для класса групп, любое частичное упорядочение которых может быть продолжено до линейного упорядочения (свободно упорядочиваемые группы) (ср. [10]).

Пусть $\mathfrak{A}(R)$ есть

$$xRx \ \& \ (xRy \ \& \ yRz \rightarrow xRz) \ \& \ (xRy \ \& \ yRx \rightarrow x = y) \ \& \ (xRy \rightarrow uxvRu yv),$$

а $\mathfrak{B}(R)$ есть конъюнкция $\mathfrak{A}(R)$ и формулы

$$xRy \vee yRx.$$

Тогда свойство группы быть упорядочиваемой можно выразить аксиомой

$$(\exists R)(x)(y)(z)(u)(v) \mathfrak{B}(R),$$

а свойство быть свободно упорядочиваемой можно представить в форме

$$(\forall \mathfrak{A} R)(\exists \mathfrak{B} R_1)(x)(y)(xRy \rightarrow xR_1y).$$

Как и выше, отсюда следует, что упорядочиваемые группы образуют универсально аксиоматизируемый подкласс класса групп, а свободно упорядочиваемые группы образуют квазиуниверсальный подкласс. Первое утверждение было доказано Лосем [6], указавшим в явной форме универсальные аксиомы, характеризующие упорядочиваемые группы. Из второго утверждения вытекает

С л е д с т в и е. Для подкласса свободно упорядочиваемых групп справедлива внутренняя локальная теорема.

Это следствие является, по-видимому, новым. Частный случай его был указан Лосем [7], показавшим, что объединение возрастающей цепочки вложенных друг в друга свободно упорядочиваемых групп есть свободно упорядочиваемая группа.

Изложенное указывает на родство, существующее между классами RN -, RI - и т. д. групп и группами, упорядочиваемыми и свободно упорядочиваемыми. Это родство можно было бы еще более подчеркнуть, если вместо предиката R рассматривать его отрицание. Действительно, полагая $P = \bar{R}$, можно аксиомы α), β), γ) представить в виде

$$xPx, \quad xPy \ \& \ yPz \rightarrow xPz, \quad xPy \vee yPx,$$

и предикат P будет определять квазиупорядоченность, а группы типов RN , RI , Z будут квазиупорядочиваемыми, удовлетворяющими различным дополнительным требованиям, налагаемым на квазипорядок.

Переноса понятия RN -, $\bar{RN}$ - и т. д. групп на упорядоченные и частично упорядоченные группы, естественно требовать, чтобы участвующие в определениях полные системы подгрупп состояли из выпуклых подгрупп. Предшествующие рассуждения показывают, что получающиеся этим путем классы групп будут снова универсально и соответственно квазиуниверсально аксиоматизируемыми. В частности, этим путем из общей внутренней локальной теоремы можно получить ряд новых конкретных локальных теорем для групп (ср. [11]).

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Ackermann. Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik.— Math. Ann., 1934, 110, N 3, 390—413.
2. R. Baer. Nilpotent groups and their generalizations.— Trans. Amer. Math. Soc., 1940, 47, 393—434.
3. Д. Гильберт, В. Аккерман. Основы теоретической логики. М., ИЛ, 1947.
4. А. Г. Курош, С. Н. Черников. Разрешимые и нильпотентные группы.— Успехи мат. наук, 1947, 2, № 3, 18—59.
5. J. Los. On the existence of linear order in a group.— Bull. Acad. polon. sci., Ser. sci. math., astron. et phys., 1954, 2, N 1, 21—23.
6. J. Los. On the extending of models, I.— Fundam. Math., 1955, 42, N 1, 38—54.
7. J. Los. Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres.— In: Mathematical Interpretations of Formal Systems. Amsterdam, 1955, 98—113.
8. А. И. Мальцев. Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik.— Mat. сб., 1936, 1, № 3, 323—335.
9. А. И. Мальцев. Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп.— Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1941, 1, 3—9.
10. А. И. Мальцев. О доупорядочении групп.— Труды Мат. ин-та АН СССР, 1951, 38, 173—175.
11. А. И. Мальцев. Замечание о частично упорядоченных группах.— Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1956, 10, 3—5.
12. А. И. Мальцев. О представлениях моделей.— Докл. АН СССР, 1956, 108, № 1, 27—29.
13. А. И. Мальцев. О классах моделей с операцией порождения.— Докл. АН СССР, 1957, 116, № 5, 738—741.
14. A. Mostowski. On direct powers of theories.— J. Symbol. Log., 1952, 17, N 1, 1—31.
15. A. Robinson. Complete theories. Amsterdam, 1956.
16. A. Schmidt. Über deductive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen.— Math. Ann., 1938, 115, 485—506.
17. A. Schmidt. Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortiger Theorien mittels der üblichen einsortigen Prädikatenlogik.— Math. Ann., 1951, 123, 187—200.
18. A. Tarski. Contributions to the theory of models, II.— Proc. Koninkl. nederl. acad. wet., 1954, A57, 581—588.



В работе [5] было введено понятие аксиоматизируемого соответствия между моделями фиксированных классов. Параграф 1 настоящей статьи посвящен рассмотрению тех модельных соответствий, которые могут быть заданы формулами узкого исчисления предикатов (формулами УИП), не содержащими дополнительных предикатных символов. Рассмотрение это основывается на одной элементарной лемме о приведении формул УИП с разделяющимися переменными. В качестве иллюстрации выводятся результаты С. Фефермана [8] о формулах, истинных на прямых произведениях конечного числа моделей.

В § 2 изучаются произведения бесконечного числа моделей. В этом параграфе вводится новое понятие регулярного произведения моделей, более общее, чем понятие прямого произведения. Опираясь на идею разделяющихся переменных, использованную в § 1, и на теорему Г. Бемана [1] о нормальной форме формул с одночленными предикатными символами, для каждой замкнутой формулы УИП $\mathfrak{P}$, относящейся к регулярному произведению моделей $\prod \mathfrak{M}_\alpha$, удается построить эквивалентное $\mathfrak{P}$ выражение $\mathfrak{A}$, составленное с помощью операций $\&$, $\vee$, $\neg$ из конечного числа высказываний $\mathfrak{Q}$ вида: «среди сомножителей существуют такие модели $\mathfrak{M}_{\alpha_1}, \dots, \mathfrak{M}_{\alpha_m}$, на которых соответственно истинны формулы $\mathfrak{P}_{\beta_1}, \dots, \mathfrak{P}_{\beta_m}$, причем $\alpha_{i_1} \neq \alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{i_p} \neq \alpha_{j_p}$, где $\mathfrak{P}_{\beta_1}, \dots, \mathfrak{P}_{\beta_m}$ — эффективно конструируемые замкнутые формулы УИП». Таким образом, чтобы иметь возможность судить об истинности или ложности произвольно заданной формулы УИП $\mathfrak{P}$ на регулярном произведении, достаточно (в общем случае и необходимо) уметь решать вопрос об истинности или ложности лишь формул указанного вида, относящихся в основном к сомножителям. Это — основной результат работы **.

Предполагая число сомножителей в регулярном (правильном в смысле § 2) произведении $\prod \mathfrak{M}_\alpha$ бесконечным, а все сомножители — изоморфными одной и той же модели $\mathfrak{M}_0$, мы видим непосредственно, что указанные выше выражения $\mathfrak{Q}$ приводятся к высказываниям вида: «на $\mathfrak{M}_0$ имеет место формула $\mathfrak{P}_{\beta_1} \& \dots \& \mathfrak{P}_{\beta_m}$ ». Следовательно, в случае регулярной степени $\prod \mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}_0^{\aleph}$ вопрос об истинности фиксированной формулы УИП $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{M}_0^{\aleph}$ сводится к вопросу об истинности подходящей эффективно конструируемой формулы УИП на $\mathfrak{M}_0$. Для случая прямых степеней это доказано А. Мостовским [1].

Предположим, что в правильном регулярном произведении $\mathfrak{M} = \prod \mathfrak{M}_\alpha$ сомножители разбиты на классы изоморфных между собою моделей, что

* Изв. АН СССР, сер. мат., 1959, 23, № 4, 489—502.

** Еще более общее понятие произведения, оказавшееся и более удобным, введено Феферманом и Воотом (см. об этом в кн.: А. И. Мальцев. Алгебраические системы. М., «Наука», 1970). — Прим. ред.

каждый класс содержит бесконечное число моделей и что совокупность $\mathfrak{M}_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$) является системой представителей указанных классов. Тогда каждое упомянутое выше выражение $\mathfrak{D}$ приводится к конъюнкции выражений вида: «среди моделей $\mathfrak{M}_\gamma$ существует модель, на которой истинна формула $\mathfrak{P}_\beta$ ». Отрицание этого выражения имеет вид: «на каждой модели $\mathfrak{M}_\gamma$ истинно выражение $\mathfrak{P}_\beta$ ». Следовательно, мы будем иметь алгоритм для распознавания истинных и ложных формул УИП на $\Pi\mathfrak{M}_\alpha$, если существует алгоритм, распознающий истинность и ложность формул УИП одновременно на всех $\mathfrak{M}_\gamma$. Для случая прямых произведений этот результат сформулирован Р. Воотом [8].

Помимо большей общности результатов § 2 сравнительно с соответствующими результатами А. Мостовского и Р. Воота, доказательства в § 2 кажутся более простыми, чем у А. Мостовского, в основном благодаря использованию преобразования Г. Бемана. Сравнить методы § 2 с методами Р. Воота автор не мог, так как упоминавшиеся результаты Р. Воота опубликованы пока без доказательств.

§ 1. Расслаивающиеся соответствия

1.1. Пусть K_1, K_2 — заданные классы моделей с основными предикатами P_γ ($\gamma \in \Gamma$) и Q_δ ($\delta \in \Delta$). Основные множества моделей этих классов условимся обозначать соответственно через M, N . Введем новые предикатные символы R_λ ($\lambda \in \Lambda$) вообще смешанного характера, т. е. часть аргументов каждого R_λ будет пробегать множество M , а часть может пробегать множество N . Обозначим через $\mathfrak{S}$ некоторую систему замкнутых формул (аксиом) узкого исчисления предикатов (УИП), записанных с помощью предикатных символов $P_\gamma, Q_\delta, R_\lambda$. Эти аксиомы могут содержать знак равенства. Все предметные переменные в них, а также кванторы будут предполагаться специализированными. Таким образом, если предметное переменное x будет первого рода, то квантор $(\exists x)$ будет означать высказывание: «в множестве M существует такой элемент x , что...» (ср. [5]). Модели $\mathfrak{M} \in K_1, \mathfrak{N} \in K_2$ называются связанными $\mathfrak{S}$ -соответствием, если на M, N возможно определить предикаты R_λ так, что все аксиомы $\mathfrak{S}$ будут истинными.

Соответствия, определяемые указанным способом, называются аксиоматизируемыми. Аналогично определяются аксиоматизируемые соответствия между моделями любого числа классов (см. [5]).

Хотя в приведенных определениях классы K_1, K_2 могли быть произвольными, при рассмотрении аксиоматизируемых соответствий предполагается, что K_1 и K_2 — классы в с е х моделей данного типа. Если же K_1, K_2 — аксиоматизируемые классы, то системы аксиом, характеризующие K_1, K_2 , включаются в систему $\mathfrak{S}$ и тем самым дело сводится к основному случаю классов «всех» моделей. Заметим еще, что индивидуальные символы не предполагаются в аксиомах. Вместо них в случае необходимости можно ввести новые одноместные предикаты, поскольку число предикатных символов не ограничивается и может быть бесконечным.

К числу простейших соответствий можно отнести соответствия, которые допускают аксиоматизацию посредством системы $\mathfrak{S}$ аксиом, не содержащих вспомогательных смешанных предикатов R_λ и, таким образом, записываемых с помощью лишь основных символов рассматриваемых классов. Эти соответствия условимся называть *р а с с л а и в а ю щ и м и с я*. Некоторым оправданием такому названию может служить

Теорема 1. Каждое расслаивающееся соответствие между моделями классов $K_1, \dots, K_s$ может быть охарактеризовано системой аксиом вида

$$\mathfrak{A}_1^{(\mu)} \vee \mathfrak{A}_2^{(\mu)} \vee \dots \vee \mathfrak{A}_s^{(\mu)} \quad (\mu \in M),$$

где $\mathfrak{A}_i^{(\mu)}$ — аксиома, записанная в терминах класса K_i ($i = 1, \dots, s$).

Эта теорема непосредственно вытекает из следующей чисто комбинаторной леммы.

Лемма. Пусть в формуле УИП

$$\mathfrak{B} = (Q_1 x_1) \dots (Q_m x_m) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$$

($Q_i = \forall, \exists$, $\mathfrak{A}$ кванторов не содержит) множество всех предметных переменных $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$, встречающихся в записи $\mathfrak{A}$, удалось разбить на непересекающиеся классы $I_1, \dots, I_s$ так, что никакой член вида $P(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ или $x_i = x_j$ из $\mathfrak{A}$ не содержит переменных разных классов. Тогда регулярным процессом можно найти такие формулы $\mathfrak{B}_{ij}$, что формула $\mathfrak{B}$ будет эквивалентна выражению

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_{11} \vee \dots \vee \mathfrak{B}_{1k_1} \& \dots \& \mathfrak{B}_{p1} \vee \dots \vee \mathfrak{B}_{pk_p},$$

причем все предметные переменные каждой формулы $\mathfrak{B}_{ij}$ принадлежат одному из указанных классов, а префикс $\mathfrak{B}_{ij}$ является подпрефиксом префикса $\mathfrak{B}$.

Процесс приведения $\mathfrak{B}$ к виду $\mathfrak{C}$ в основном совпадает с процессом, известным в теории формул с одинарными предикатами (см. [1]), и мы лишь для полноты изложения приводим доказательство.

Если $\mathfrak{B}$ кванторов не имеет, то утверждение леммы очевидно, так как в качестве $\mathfrak{B}_{ij}$ в этом случае можно взять члены $P(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), x_i = x_j$ или их отрицания. Далее пользуемся индукцией по числу кванторов в $\mathfrak{B}$. Пусть для $m-1$ кванторов лемма верна. Тогда для формулы

$$(Q_2 x_2) \dots (Q_m x_m) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$$

найдется эквивалентная ей формула вида $\mathfrak{C}$ и, значит, будем иметь эквивалентность

$$\mathfrak{B} \sim (Q_1 x_1) (\mathfrak{B}_{11} \vee \dots \vee \mathfrak{B}_{1k_1} \& \dots \& \mathfrak{B}_{p1} \vee \dots \vee \mathfrak{B}_{pk_p}).$$

Допустим, что $Q_1 = \forall$. Тогда

$$\mathfrak{B} \sim (x_1) (\mathfrak{B}_{11} \vee \dots \vee \mathfrak{B}_{1k_1} \& \dots \& (x_1) \mathfrak{B}_{p1} \vee \dots \vee \mathfrak{B}_{pk_p}).$$

Объединяя в $\mathfrak{B}_{i_1} \vee \dots \vee \mathfrak{B}_{i_{k_i}}$ сомножители с предметными переменными того же, что и x_1 , класса в один член, например в $\mathfrak{B}_{i_1}$, мы сможем переписать $\mathfrak{B}$ в требуемой форме:

$$\mathfrak{B} \sim (x_1) \mathfrak{B}_{11} \vee \dots \vee \mathfrak{B}_{1k_1} \& \dots \& (x_1) \mathfrak{B}_{p1} \vee \dots \vee \mathfrak{B}_{pk_p}.$$

Если в $\mathfrak{B}$ имеем $Q_1 = \exists$, то $\mathfrak{C}$ переписываем в дизъюнктивной нормальной форме и затем поступаем двойственно вышеизложенному.

Таким образом, лемма доказана, а вместе с нею доказана и теорема 1, так как в каждой аксиоме из системы, характеризующей соответствие, предметные переменные, относящиеся к классу K_i , встречаются в качестве аргументов только у предикатов этого же класса K_i и не сталкиваются с предметными переменными, относящимися к другим классам K_j .

1.2. Класс моделей K называется минимальным, если он аксиоматизируем и не содержит никакого отличного от K аксиоматизируемого подкласса. Очевидно, минимальные классы — это те классы, которые могут быть охарактеризованы *полной* системой аксиом УИП. Каждая модель содержится в одном и только одном минимальном классе. В качестве системы аксиом, характеризующих этот класс, можно взять совокупность всех аксиом, истинных на заданной модели.

Пусть σ — какое-нибудь соответствие между моделями классов K_1, K_2 . Тогда каждому подклассу $L_1 \subseteq K_1$ будет отвечать определенный подкласс $L_1\sigma$ в K_2 , состоящий из всех тех K_2 -моделей, которые находятся в σ -соответствии хотя бы с одной моделью из L_1 . Класс K_1 , как и любой класс, расслаивается на минимальные аксиоматизируемые подклассы, которым в K_2 отвечают подклассы, вообще говоря, сложной природы.

Если соответствие σ между моделями классов K_1, K_2 расслаивающееся, то каждому минимальному подклассу $L_m \subseteq K_1$ в K_2 отвечает аксиоматизируемый класс $L_m\sigma$, причем $L_m\sigma = \mathfrak{M}\sigma$ для $\mathfrak{M} \in L_m$.

В самом деле, пусть σ и L_m задаются соответственно системами аксиом $\{\mathfrak{M}_1^\mu \vee \mathfrak{M}_2^\mu\}$ и $\mathfrak{E} = \{\mathfrak{E}^\nu\}$. Ввиду полноты системы $\mathfrak{E}$ для каждого μ из $\mathfrak{E}$ следует либо $\mathfrak{M}_1^\mu$, либо $\neg \mathfrak{M}_1^\mu$. Класс $L_m\sigma$ характеризуется системой тех аксиом $\mathfrak{M}_2^\mu$, для которых $\mathfrak{E} \rightarrow \neg \mathfrak{M}_1^\mu$. Ввиду минимальности L_m произвольная аксиома $\mathfrak{M}_1^\mu$ тогда и только тогда истинна на $\mathfrak{M} \in L_m$, когда $\mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{M}_1^\mu$, откуда

$$L_m\sigma = \mathfrak{M}\sigma.$$

По аналогии с понятием псевдоаксиоматизируемых классов моделей (см. [6]) условимся говорить, что модельное соответствие σ псевдоаксиоматизируемо, если для любой системы $\mathfrak{Z}$ аксиом УИП, записываемых с помощью предикатных символов основных классов и вспомогательных предикатных символов, связывающих элементы основных множеств моделей рассматриваемых классов, из того, что для каждой конечной части $\mathfrak{Z}_0$ системы $\mathfrak{Z}$ существуют модели, удовлетворяющие $\mathfrak{Z}_0$ и связанные соответствием σ , следует существование моделей, удовлетворяющих $\mathfrak{Z}$ и связанных соответствием σ .

Аналогичным образом можно ввести понятие псевдорасслаивающегося и псевдопроективного соответствий. Для этого следует в качестве аксиом системы $\mathfrak{Z}$ допускать лишь аксиомы, записываемые с помощью предикатных символов одних основных классов или же с помощью смешанных предикатных символов, связывающих элементы основных множеств моделей заданных классов с элементами вспомогательных множеств (см. [5]).

Из основной локальной теоремы УИП (см. [5]) непосредственно следует, что *каждое проективное соответствие является псевдопроективным*.

Заметим, что из псевдопроективности следует псевдоаксиоматизируемость, а из псевдоаксиоматизируемости следует псевдорасслаиваемость соответствия.

Т е о р е м а 2. *Соответствие σ между моделями классов K_1, K_2 тогда и только тогда расслаивающееся, когда оно псевдорасслаивающееся и всякой модели произвольного минимального подкласса из K_1 отвечает в K_2 один и тот же аксиоматизируемый подкласс.*

Необходимость условий установлена выше. Докажем достаточность. По условию соответствие σ описывается связями вида

$$\{\mathfrak{E}_\lambda\} \rightarrow \mathfrak{Z},$$

где $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$ — полная система аксиом типа K_1 . Из псевдорасслаиваемости σ следует, что для каждой связи указанного вида должна существовать и связь вида

$$\mathfrak{C}_\lambda \& \dots \& \mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{B},$$

где $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_p$ — подходящее конечное подмножество из $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$. Полагая

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_1 \& \dots \& \mathfrak{C}_p,$$

мы видим, что σ характеризуется аксиомами

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B},$$

имеющими расслоенный вид.

1.3. В качестве примера приведем задачу, рассмотренную С. Феферманом (см. [8]), о редукции формул, относящихся к прямому произведению конечного числа моделей, к формулам, относящимся к сомножителям.

Пусть $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ — заданные однотипные модели с основными множествами M_1, M_2 и основными предикатами $P_\alpha^{(1)}$ и $P_\alpha^{(2)}$ ($\alpha \in A$). Прямым произведением моделей $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ называется модель $\mathfrak{M}$, основным множеством которой служит множество пар $\langle a_1, a_2 \rangle$ ($a_1 \in M_1, a_2 \in M_2$), а основные предикаты определяются формулами

$$P_\alpha(\langle a_1, a_2 \rangle, \dots, \langle c_1, c_2 \rangle) = P_\alpha^{(1)}(a_1, \dots, c_1) \& P_\alpha^{(2)}(a_2, \dots, c_2). \quad (1)$$

Пусть

$$(Q_1 x_1) \dots (Q_m x_m) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m)$$

— формула УИП, относящаяся к $\mathfrak{M}$. Заменяя в этой формуле выражение

$$P_\alpha(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$$

выражением

$$P_\alpha^{(1)}(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_p}^1) \& P_\alpha^{(2)}(x_{i_1}^2, \dots, x_{i_p}^2)$$

и каждый квантор $(Q_i x_i)$ — парой кванторов $(Q_i x_i^1) (Q_i x_i^2)$, получим новую формулу $\mathfrak{B}$ со специализированными переменными, часть которых относится к множеству M_1 , а часть — к множеству M_2 . Это разбиение переменных удовлетворяет условиям леммы и потому формула $\mathfrak{B}$ указанным в п. 1.1 процессом приводится к виду

$$\mathfrak{B}_1^1 \vee \mathfrak{B}_1^2 \& \dots \& \mathfrak{B}_s^1 \vee \mathfrak{B}_s^2,$$

где $\mathfrak{B}_1^1, \dots, \mathfrak{B}_s^1$ — формулы, относящиеся к первому сомножителю, а $\mathfrak{B}_1^2, \dots, \mathfrak{B}_s^2$ — формулы, относящиеся ко второму сомножителю.

Мы рассмотрели случай, когда модели $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ имеют по одному основному множеству. Если эти модели многоосновные (см. [5]), то их прямое произведение можно определять существенно различными способами. Пусть, например, $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ определены на парах множеств M_1, N_1 и M_2, N_2 . Тогда прямым произведением $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ естественно назвать модель с основными множествами $M_1 \times M_2$ и $N_1 \times N_2$, предикаты на которых определяются по формулам (1). Для этих произведений сказанное выше имеет силу без всяких изменений.

Предположим теперь, что первое основное множество у моделей $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ общее: $M_1 = M_2 = M$. Тогда модель $\mathfrak{M}$ с основными множествами $M, N_1 \times N_2$ и предикатами P_α , определяемыми снова по формулам (1), естественно назвать прямым произведением моделей $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ над множеством M . Прямые произведения этого вида встречаются, например, при изучении групп и колец с фиксированной областью операторов.

На прямые произведения над фиксированными множествами указанные выше преобразования непосредственно не переносятся. Однако теорема А. Хорна [2], указывающая достаточный признак для того, чтобы аксиома, выполняющаяся на каждом сомножителе, была истинной и на прямом произведении, остается справедливой для обоих видов прямых произведений. Ясно, что при этом следует требовать, чтобы в аксиоме не встречался знак равенства, связывающий элементы фиксированного основного множества с элементами остальных основных множеств. В частности, теорема Хорна остается верной для аксиом расширенного исчисления 2-й ступени, содержащих лишь квантор существования по предикатным переменным и пренексной форме.

§ 2. Регулярные произведения

2.1. Переходя к рассмотрению прямых произведений бесконечного числа моделей, обобщим само понятие прямого произведения. Для простоты далее предполагается, что все рассматриваемые модели одноосновные.

Пусть задана некоторая система моделей

$$\mathfrak{M}_\alpha = \langle M_\alpha; \{P_\gamma^\alpha\} \rangle \quad (\alpha \in A, \gamma \in \Gamma_\alpha).$$

Мы не будем требовать ни однотипности этих моделей, ни различия $\mathfrak{M}_\alpha, \mathfrak{M}_\beta$ при $\alpha \neq \beta$. Предположим, что для каждого $\alpha \in A$ задана система формул УИП

$$\mathfrak{A}_\lambda^{\alpha*}(x_1, \dots, x_{m_\lambda}) = (Q_1 y_1) \dots (Q_{p_\lambda} y_{p_\lambda}) \mathfrak{A}_\lambda^{\alpha*}(x_1, \dots, x_{m_\lambda}, y_1, \dots, y_{p_\lambda})$$

$$(Q = \exists, \forall; \lambda \in \Lambda), \quad (2)$$

где $\mathfrak{A}_\lambda^{\alpha*}$ — открытая формула со свободными предметными переменными $x_1, \dots, x_{m_\lambda}, y_1, \dots, y_{p_\lambda}$, все предикатные переменные которой принадлежат системе $\{P_\gamma^\alpha\}$. Формулы (2) могут содержать знак равенства.

Введем предикатные символы

$$S_\lambda(\bar{\alpha}, x_1, \dots, x_{m_\lambda}),$$

в которых α пробегает множество A , а $x_1, \dots, x_{m_\lambda}$ пробегают декартово произведение $M = \prod M_\alpha$ основных множеств заданных моделей. Далее $S_\lambda(\bar{\alpha}, x_1, \dots, x_{m_\lambda})$ рассматриваются как символы предикатов, определенных на паре множеств A, M формулами

$$S_\lambda(\bar{\alpha}, x_1, \dots, x_{m_\lambda}) = \mathfrak{A}_\lambda^\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_{m_\lambda}^\alpha), \quad (3)$$

где x^α обозначает проекцию $x \in M$ в множестве M_α , а значение правой части равенства (3) вычисляется в модели $\mathfrak{M}_\alpha$ согласно формуле (2).

С помощью символов S_λ определяем на M новую систему предикатов посредством равенств

$$P_\gamma(x_1, \dots, x_{n_\gamma}) = (Q_1 \bar{\alpha}_1) \dots (Q_{q_\gamma} \bar{\alpha}_{q_\gamma}) \mathfrak{R}_\gamma(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_{q_\gamma}, x_1, \dots, x_{n_\gamma}) \quad (\gamma \in \Gamma). \quad (4)$$

Здесь $\mathfrak{N}_\lambda$ — открытая формула УИП с предикатными символами S_λ и, возможно, отношениями равенства, связывающими некоторые из переменных $\alpha_1, \dots, \alpha_{q_\gamma}$. Кванторы в (4) специализированные, относящиеся к множеству A .

Модель $\mathfrak{M}$ с основным множеством M и основными предикатами P_γ , определенными на M равенствами (4), будет называться **регулярным произведением** моделей $\mathfrak{M}_\alpha$. Формулы (3), (4) определяют тип регулярного произведения. Ясно, что если задано регулярное произведение моделей $\mathfrak{M}_\alpha$ ($\alpha \in A$), то можно говорить и о регулярном произведении (того же типа) моделей $\mathfrak{M}_\beta$ ($\beta \in B$), где B — произвольное подмножество множества A .

Основным типом регулярных произведений можно считать тот тип, когда все модели $\mathfrak{M}_\alpha$ однотипы, $\Gamma = \Gamma_\alpha$, $n_\gamma = m_\gamma$ и формулы (3) приводятся к виду

$$S_\lambda(\alpha, x_1, \dots, x_{m_\lambda}) = \mathfrak{N}_\lambda^\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_{m_\lambda}^\alpha) = P_\lambda^\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_{m_\lambda}^\alpha).$$

Регулярные произведения этого типа условимся называть **правильными**. Варьируя формулы (4), мы получим различные типы правильных произведений. Например, полагая

$$P_\gamma(x_1, \dots, x_{m_\gamma}) = (\alpha) S_\gamma(\alpha, x_1, \dots, x_{m_\lambda}),$$

получим обыкновенное прямое произведение моделей. Полагая

$$P_\gamma(x_1, \dots, x_{m_\gamma}) = (\alpha)(\beta)(\alpha \neq \beta \rightarrow S_\gamma(\alpha, x_1, \dots, x_{m_\lambda}) \vee S_\gamma(\beta, x_1, \dots, x_{m_\lambda}))$$

или

$$P_\gamma(x_1, \dots, x_{m_\gamma}) = (\alpha)(\beta)(\delta)(\alpha = \beta \vee \alpha = \delta \vee \beta = \delta \vee S_\gamma(\alpha) \vee S_\gamma(\beta) \vee S_\gamma(\delta)),$$

получим правильные произведения иных типов.

Из последних примеров видно, что правильные произведения не обязаны быть ассоциативными, даже если они коммутативны. Кроме того, правильное произведение алгебр может и не быть алгеброй.

Теорема 3. *Существует финитный процесс, позволяющий для каждой формулы вида*

$$\mathfrak{P}(x_1, \dots, x_m) = (Q_{m+1}x_{m+1}) \dots (Q_n x_n) \mathfrak{P}^*(x_1, \dots, x_n) \quad (Q_i = \forall, \exists),$$

где $\mathfrak{P}^*$ — открытая формула УИП со свободными предметными переменными $x_1, \dots, x_n$ и предикатными символами P_γ , и для каждой системы формул

$$(Q_1 \tilde{\alpha}_1) \dots (Q_{q_\gamma} \tilde{\alpha}_{q_\gamma}) \mathfrak{N}_\gamma(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{q_\gamma}, x_1, \dots, x_{n_\gamma}),$$

где $\mathfrak{N}_\gamma$ — открытая формула с предикатными символами S_λ ($\alpha, x_1, \dots, x_{m_\lambda}$), построить формулу

$$\mathfrak{Q}(x_1, \dots, x_m) = (Q_1 \tilde{\alpha}_1) \dots (Q_r \tilde{\alpha}_r) \mathfrak{Q}^*(\alpha_1, \dots, \tilde{\alpha}_r, x_1, \dots, x_m)$$

с предикатными символами T_σ ($\alpha, x_1, \dots, x_{m_\sigma}$) ($\mathfrak{Q}^*$ — открытая) и формулы $\mathfrak{B}_\sigma(x_1, \dots, x_{m_\sigma})$ со свободными предметными переменными $x_1, \dots, x_{m_\sigma}$ и предикатными символами $S_\lambda^{(1)}(x_1, \dots, x_{m_\lambda})$, обладающие следующими свойствами. Пусть каждому $\alpha \in A$ поставлены в соответствие некоторая модель $\mathfrak{M}_\alpha$ и заданные на ней формулы $\mathfrak{N}_\lambda^\alpha(x_1, \dots, x_{m_\lambda})$. Обозначим через $\mathfrak{M}$

регулярное произведение моделей $\mathfrak{M}_\alpha$, определяемое соотношениями (3), (4). Тогда на $\mathfrak{M}$ будем иметь:

$$\mathfrak{P}(x_1, \dots, x_m) \in \mathfrak{L}(x_1, \dots, x_m)$$

при условии, что переменные α_i пробегают A , предикаты $S_\lambda^{(1)}$ определены на $\mathfrak{M}_\alpha$ формулами

$$S_\lambda^{(1)}(x_1, \dots, x_{m_\lambda}) = \mathfrak{M}_\lambda^\alpha(x, \dots, x_{m_\lambda}),$$

а предикаты $T_\sigma(\alpha, x_1, \dots, x_{m_\sigma})$ определены на паре $A, \mathfrak{M}$ формулами

$$T_\sigma(\alpha, x_1, \dots, x_{m_\sigma}) = \mathfrak{B}_\sigma(x_1^\alpha, \dots, x_{m_\sigma}^\alpha), \quad (5)$$

где x^α есть проекция x в $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\sigma$ рассматривается в $\mathfrak{M}_\alpha$.

Доказательство проводим индукцией по числу кванторов в формуле $\mathfrak{P}$. Если в $\mathfrak{P}$ кванторов нет, то, подставляя в $\mathfrak{P}$ вместо P_γ их выражения из (4) и вынося кванторы по элементам A в начало, получим требуемую формулу $\mathfrak{Q}$ со значениями

$$T_\sigma = S_\sigma, \quad \mathfrak{B}_\sigma = \mathfrak{M}_\sigma.$$

Пусть теперь теорема 3 справедлива для формул, число кванторов которых меньше, чем у $\mathfrak{P}$. Тогда финитным процессом мы найдем формулы $\mathfrak{B}_\sigma^\alpha$, T_σ и $\mathfrak{Q}^*$, имеющие указанное в теореме 3 строение и такие, что на $\mathfrak{M}$

$$(Q_{m+2}x_{m+2}) \dots (Q_n x_n) \mathfrak{P}^* \in (Q_1 \alpha_1) \dots (Q_r \alpha_r) \mathfrak{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, x_1, \dots, x_{m+1})$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{P}(x_1, \dots, x_m) \in (Q_{m+1} x_{m+1}) Q(\alpha_1) \dots (Q_r \alpha_r) \mathfrak{Q}^*(\alpha_1, \dots, \alpha_r, x_1, \dots, x_{m+1}).$$

Нам остается лишь преобразовать правую часть этой эквивалентности. Для определенности предположим, что $Q_{m+1} = \forall$. В случае $Q_{m+1} = \exists$ достаточно будет пользоваться двойственными формулами. Согласно условию $\mathfrak{Q}^*$ выражается с помощью операций $\neg$, $\vee$, $\&$ через формулы вида $\alpha^i = \alpha_j$ и $T_\sigma(\alpha_i, x_j, \dots, x_{j+m_\sigma})$. Считая $x_1, \dots, x_{m+1}$ произвольными параметрами, мы можем рассматривать выражение

$$(Q_1 \alpha_1) \dots (Q_r \alpha_r) \mathfrak{Q}^*(\alpha_1, \dots, \alpha_r, x_1, \dots, x_{m+1})$$

как формулу с одинарными предикатами $T_\sigma(\alpha) = T_\sigma(\alpha, x_1, \dots)$ и знаком равенства. Поэтому при помощи известных преобразований Бемана (см. [1, стр. 44]) мы сможем найти эквивалентную ей конъюнкцию формул вида

$$(\alpha_1) \dots (\alpha_u) (\alpha_{i_1} = \alpha_{j_1} \vee \dots \vee \alpha_{i_p} = \alpha_{j_p} \vee T_{\sigma_1}^{\varepsilon_1}(\alpha_1) \vee \dots \vee T_{\sigma_v}^{\varepsilon_v}(\alpha_v) \vee \\ \vee (\mathfrak{B}_{\beta_1}) X_1(\beta_1) \vee \dots \vee (\mathfrak{B}_{\beta_w}) X_w(\beta_w)),$$

где

$$X_i(\beta_i) = T_{\sigma_{i_1}}^{\varepsilon_{i_1}}(\beta_i) \& \dots \& T_{\sigma_{i_q}}^{\varepsilon_{i_q}}(\beta_i) \quad (\varepsilon = \pm 1; \quad T^1 = T, \quad T^{-1} = \bar{T}).$$

Полагая

$$X(\beta) = X_1(\beta) \vee \dots \vee X_w(\beta)$$

и пользуясь перестановочностью универсальных кванторов (x_{m+1}) и (α_i) , мы сведем первоначальную формулу Φ к конъюнкции формул вида

$$(\alpha_1) \dots (\alpha_u) [\alpha_{i_1} = \tilde{\alpha}_{j_1} \vee \dots \vee \tilde{\alpha}_{i_p} = \alpha_{j_p} \vee \\ \vee (x_{m+1})(T_{\sigma_1}^{\epsilon_1}(\tilde{\alpha}_1) \vee \dots \vee T_{\sigma_v}^{\epsilon_v}(\tilde{\alpha}_v) \vee (\exists \beta) X(\beta))]$$

и нам останется лишь надлежащим образом преобразовать выражения вида

$$\Phi_1(x_1, \dots, x_m) = (x_{m+1})(T_{\sigma_1}^{\epsilon_1}(\tilde{\alpha}_1) \vee \dots \vee T_{\sigma_v}^{\epsilon_v}(\alpha_v) \vee (\exists \beta) X(\beta)),$$

которые можно переписать в форме

$$(x_{m+1}) [Y_1(\tilde{\alpha}_1) \vee \dots \vee Y_v(\tilde{\alpha}_v) \vee (\exists \beta) (\beta \neq \alpha_1 \& \dots \& \beta \neq \alpha_v \& X(\beta))],$$

где

$$Y_i(\tilde{\alpha}_i) = T_{\sigma_i}^{\epsilon_i}(\alpha_i) \vee X(\tilde{\alpha}_i) \quad (i = 1, \dots, v).$$

По условию формулы $Y_i(\alpha)$, $X(\alpha)$ выражаются с помощью операций $\neg$, $\vee$, $\&$ через $T_\sigma(\alpha, x_{i_1}, \dots)$, а последние на $\mathfrak{M}$ равносильны формулам $\mathfrak{B}_\sigma^\alpha(x_{i_1}, \dots)$.

Обозначим через $Y_i^\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_{m+1}^\alpha)$ и $X^\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_{m+1}^\alpha)$ формулы, которые получатся, если в $Y_i(\alpha)$ и $X(\alpha)$ выражения $T_\sigma(\alpha)$ заменить соответствующими выражениями $\mathfrak{B}_\sigma^\alpha$. На $\mathfrak{M}$ имеет место эквивалентность

$$\Phi(x_1, \dots, x_m) \sim (x_{m+1}) [Y_1^{\alpha_1}(x_1^\alpha, \dots, x_{m+1}^\alpha) \vee \dots \vee Y_v^{\alpha_v}(x_1^\alpha, \dots, x_{m+1}^\alpha) \vee \\ \vee (\exists \beta) (\beta \neq \alpha_1 \& \dots \& \beta \neq \alpha_v \& X^\alpha)]. \quad (6)$$

Здесь квантор (x_{m+1}) можно заменить бесконечной совокупностью кванторов (x_{m+1}^α) (α пробегает A), так как условие, что элемент x пробегает декартово произведение M , равносильно условию, что проекции его x^α независимо друг от друга пробегают каждая свое множество M_α . Член с квантором $(\exists \beta)$ можно представить в виде бесконечной дизъюнкции

$$\bigvee_{\beta \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_v\}} X^\beta(x_1^\beta, \dots, x_{m+1}^\beta).$$

Отсюда ясно, что

$$\Phi_1(x_1, \dots, x_{m+1}) \sim (x_{m+1}) (Y_1^{\alpha_1} \vee \dots \vee Y_v^{\alpha_v}) \vee \\ \vee (\exists \beta) [\beta \neq \alpha_1 \& \dots \& \beta \neq \alpha_v \& (x_{m+1}^\beta) X^\beta(x_1^\beta, \dots, x_{m+1}^\beta)].$$

Вводя формулу

$$\mathfrak{G}_x^\beta(x_1^\beta, \dots, x_m^\beta) = (x^\beta) X^\beta(x_1^\beta, \dots, x_m^\beta, x^\beta)$$

и соответствующий ей на паре A , $\mathfrak{M}$ предикат

$$U_x(\beta, x_1, \dots, x_m) = \mathfrak{G}_x^\beta(x_1^\beta, \dots, x_m^\beta),$$

мы сможем второй член дизъюнкции (6) переписать в окончательном виде:

$$(\exists \beta) (\beta \neq \alpha_1 \& \dots \& \beta \neq \alpha_v \& U_x(\beta, x_1, \dots, x_m)).$$

Теперь остается аналогично преобразовать выражение

$$(x_{m+1}) (Y_1^{\alpha_1}(x_1^{\alpha_1}, \dots, x_{m+1}^{\alpha_1}) \vee \dots \vee Y_v^{\alpha_v}(x_1^{\alpha_v}, \dots, x_{m+1}^{\alpha_v})). \quad (7)$$

Если бы было известно, что $\alpha_i \neq \alpha_j$ ($i \neq j$; $i, j = 1, \dots, v$), то согласно изложенному выше выражение (6) было бы эквивалентно формуле

$$(x_{m+1}^{\alpha_1}) Y_1^{\alpha_1}(x_1^{\alpha_1}, \dots, x_{m+1}^{\alpha_1}) \vee \dots \vee (x_{m+1}^{\alpha_v}) Y_v^{\alpha_v}(x_1^{\alpha_v}, \dots, x_{m+1}^{\alpha_v})$$

и редукция была бы закончена. Чтобы свести дело к этому случаю, поступают следующим образом.

Пусть τ — какое-нибудь разбиение множества $I = \{1, \dots, v\}$ на попарно не пересекающиеся непустые подмножества $I_1, \dots, I_h$. Обозначим через $\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_v)$ конъюнкцию всех выражений $\alpha_j = \alpha_k$ для j, k , входящих в один и тот же класс, и выражений $\alpha_j \neq \alpha_k$ для j, k , взятых из разных классов $I_1, \dots, I_h$. Так как дизъюнкция формул $\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_v)$, составленных для всевозможных разбиений τ , тождественно истинна, то формула (7) эквивалентна дизъюнкции формул

$$\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_v) \& (x_{m+1})(Y_1^{\alpha_1} \vee \dots \vee Y_v^{\alpha_v}). \quad (8)$$

Пусть $\tau = \{I_1, \dots, I_h\}$, $I_j = \{a_{1j}, \dots, a_{qj}\}$. Полагая

$$Z_j^{\alpha}(x_1^{\alpha}, \dots, x_{m+1}^{\alpha}) = Y_{a_{1j}}^{\alpha} \vee \dots \vee Y_{a_{qj}}^{\alpha} \quad (q = q_j),$$

мы сможем формулу (8) переписать в виде

$$\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_v) \& (x_{m+1})(Z_1^{\alpha_{a_{11}}} \vee \dots \vee Z_h^{\alpha_{a_{1h}}}).$$

Если среди $\alpha_{a_{11}}, \dots, \alpha_{a_{1h}}$ есть совпадающие, то первый член этой формулы, а вместе с ним и вся формула ложны. Поэтому преобразование второго члена формулы можно вести в предположении, что $\alpha_{a_{11}}, \dots, \alpha_{a_{1h}}$ различны. Согласно предыдущему в этом случае второй член эквивалентен выражению

$$(x_{m+1}^{\beta_1}) Z_1^{\beta_1}(x_1^{\beta_1}, \dots, x_{m+1}^{\beta_1}) \vee \dots \vee (x_{m+1}^{\beta_h}) Z_h^{\beta_h}(x_1^{\beta_h}, \dots, x_{m+1}^{\beta_h}) \quad (\beta_i = \alpha_{a_{1i}}).$$

Вводя формулы

$$\mathbb{G}_{\mu+i}^{\beta}(x_1^{\beta}, \dots, x_m^{\beta}) = (x_{m+1}^{\beta}) Z_i^{\beta}(x_1^{\beta}, \dots, x_m^{\beta}, x_{m+1}^{\beta}) \quad (i = 1, \dots, h)$$

и соответствующие им на A , $\mathfrak{M}$ предикаты

$$U_{\mu+i}(\beta, x_1, \dots, x_m) = \mathbb{G}_{\mu+i}^{\beta}(x_1^{\beta}, \dots, x_m^{\beta}),$$

мы сможем переписать выражение (8) в окончательном виде:

$$\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_v) \& U_{\mu+1}(\alpha_{a_{11}}, x_1, \dots, x_m) \vee \dots \vee U_{\mu+h}(\alpha_{a_{1h}}, x_1, \dots, x_m).$$

Итак, проведя все указанные редукции, мы из формулы $\wp$ получим эквивалентную ей на $\mathfrak{M}$ формулу вида

$$(Q_1 \alpha_1) \dots (Q_t \alpha_t) \mathfrak{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_t, x_1, \dots, x_m),$$

где $\mathfrak{D}_0$ записывается с помощью операций $\neg$, $\vee$, $\&$ через выражения вида $\alpha_i = \alpha_j$, $U_{\nu}(\alpha_j, x_j, \dots, x_{j_p})$. На множествах A , $\mathfrak{M}$ предикаты U_{ν} связаны зависимостями

$$U_{\nu}(\alpha, x_1, \dots, x_p) = \mathbb{G}_{\nu}^{\alpha}(x_1^{\alpha}, \dots, x_p^{\alpha}),$$

где $\mathbb{G}_{\nu}^{\alpha}$ выражаются через $\mathbb{G}_{\sigma}^{\alpha}$, а следовательно, и через $\mathfrak{A}_{\lambda}^{\alpha}$, что и требовалось доказать.

2.2. Рассмотрим ряд следствий, вытекающих из теоремы 3. Прежде всего исследуем более подробно тот случай, когда заданная формула $\mathfrak{P}$ является замкнутой.

С л е д с т в и е 1. Пусть в условиях теоремы 3 формула $\mathfrak{P}$ является замкнутой. Тогда соответствующая формула

$$\mathfrak{Q} = (Q_1\check{\alpha}_1) \dots (Q_r\check{\alpha}_r) \mathfrak{Q}^*(\check{\alpha}_1, \dots, \check{\alpha}_r)$$

замкнута и содержит лишь одночленные предикатные символы $T_i(\alpha)$, помимо знака равенства. Для каждого отображения $\alpha \rightarrow \mathfrak{M}_\alpha$ ($\alpha \in A$) и каждой системы формул $\mathfrak{M}_\alpha^\alpha$ соотношения (5) делают $T_\alpha(\alpha)$ одночленными предикатами на A и тем самым обращают A в модель $\mathfrak{M}(A) = \langle A, T_1, \dots, T_s \rangle$. Если отображение $\alpha \rightarrow \mathfrak{M}_\alpha$ рассматривать для части $B \subseteq A$, то соответствующая модель $\mathfrak{M}(B)$ будет подмоделью модели $\mathfrak{M}(A)$, а эквивалентность

$$\mathfrak{P} \sim (Q_1\check{\alpha}_1) \dots (Q_r\check{\alpha}_r) \mathfrak{Q}^*(\check{\alpha}_1, \dots, \check{\alpha}_r)$$

будет иметь место и для регулярного произведения $\Pi \mathfrak{M}_\beta$ ($\beta \in B$) в том смысле, что левая часть вычисляется в $\mathfrak{M}$, а правая — в $\mathfrak{M}(B)$.

Действительно, согласно теореме 3 значения $T_\alpha(\alpha)$ для каждого фиксированного α однозначно определяются моделью $\mathfrak{M}_\alpha$ и заданными на ней формулами $\mathfrak{M}_\alpha^\alpha$ и не зависят от $\mathfrak{M}_\beta$ для $\beta \neq \alpha$. А это и значит, что $\mathfrak{M}(B)$ будет подмоделью $\mathfrak{M}(A)$. Последнее утверждение следствия непосредственно содержится в теореме 3.

Условимся систему подмножеств $\{A_i\}$ произвольного множества A называть локальной системой в A , если каждое конечное множество элементов A содержится в подходящем подмножестве, принадлежащем данной системе.

С л е д с т в и е 2. Пусть заданы регулярное произведение $\mathfrak{M}$ моделей $\mathfrak{M}_\alpha$ ($\alpha \in A$) и локальная система $\{A_i\}$ подмножества A . Если какая-нибудь замкнутая формула УИП истинна на каждом произведении $\Pi \mathfrak{M}_\beta$ ($\beta \in A_i$), то она истинна и на $\mathfrak{M}$.

В самом деле, для заданной замкнутой формулы $\mathfrak{P}$ строим соответствующую формулу $\mathfrak{Q}$ с предикатными переменными $T_\alpha(\alpha)$ и модель $\mathfrak{M}(A)$. Согласно Г. Беману [1] формула $\mathfrak{Q}$ как формула с одночленными предикатами эквивалентна формуле сколемского вида

$$(\alpha_1) \dots (\alpha_n) (\exists \check{\alpha}_{n+1}) \dots (\exists \check{\alpha}_p) \mathfrak{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_p). \quad (9)$$

По условию эта формула истинна на каждой подмодели $\mathfrak{M}(A_i)$ модели $\mathfrak{P}(A)$, причем подмодели $\mathfrak{M}(A_i)$ образуют локальную систему в $\mathfrak{P}(A)$. Отсюда следует, что формула (9) истинна на $\mathfrak{M}(A)$ и, значит, формула $\mathfrak{P}$ истинна на $\mathfrak{M}$.

Из следствия 2 известным путем приходим к утверждению:

Пусть K — аксиоматизируемый класс моделей, $\mathfrak{M}$ — регулярное произведение моделей $\mathfrak{M}_\alpha$ ($\alpha \in A$) и $\{A_i\}$ — локальная система подмножеств в A . Если каждое произведение $\Pi \mathfrak{M}_\beta$ ($\beta \in A_i$) принадлежит K , то K принадлежит и произведение $\mathfrak{M}$.

В частности, если аксиоматизируемый класс моделей K содержит правильные произведения фиксированного типа любых конечных систем своих моделей, то K содержит и правильные произведения любых бесконечных систем своих моделей.

Как уже упоминалось, все эти следствия для случая, когда регулярные произведения являются прямыми, указаны Р. Воотом [8]. В качестве проблем они были сформулированы Ю. Лосем [4].

Для иллюстрации рассмотрим пример из теории RN -, RI -, Z -групп (определения см. в работе [3]). В статье [5] показано, что классы этих групп аксиоматизируемы. Кроме того, известно, что прямое произведение двух групп какого-нибудь из указанных классов есть группа того же класса. Из приведенных выше утверждений об аксиоматизируемых классах непосредственно получаем, что *полное прямое произведение любого числа RN -, RI -или Z -групп есть группа того же типа.*

Это обстоятельство явно, по-видимому, не отмечалось, хотя теоретико-групповое доказательство его также не представляет трудности.

2.3. Теорема 3 позволяет без дополнительных вычислений распространить теорему А. Мостовского [7] о разрешимости прямых степеней разрешимых моделей на регулярные степени разрешимых моделей и, частично, на регулярные произведения.

Пусть задана замкнутая формула УИП $\mathfrak{P}$, истинность или ложность которой нам требуется установить на регулярном произведении $\mathfrak{M}$ моделей $\mathfrak{M}_\alpha$ ($\alpha \in A$). Согласно следствию 1 теоремы 3 мы можем найти формулу Ω с одинарными предикатными символами $T_\sigma(\alpha)$, в определенном смысле эквивалентную $\mathfrak{P}$. На основании упоминавшейся теоремы Бемана [1] формула Ω может быть приведена к дизъюнкции формул вида

$$(\exists \alpha_1) \dots (\exists \alpha_n) (\tilde{\alpha}_{i_1} \neq \tilde{\alpha}_{j_1} \& \dots \& \alpha_{i_k} \neq \alpha_{j_k} \& T_{\sigma_1}^{\varepsilon_1}(\alpha_1) \& \dots \& T_{\sigma_v}^{\varepsilon_v}(\tilde{\alpha}_v)) \& (\exists) U(\alpha), \quad (10)$$

где $U(\alpha)$ — конъюнкция формул, имеющих вид

$$T_{k_1}^{\eta_1}(\alpha) \vee \dots \vee T_{k_p}^{\eta_p}(\alpha) \quad (\varepsilon_i, \eta_j = \pm 1).$$

Для простоты предположим, что рассматриваемое регулярное произведение правильное. Тогда для каждого $T_\sigma(\alpha)$ мы сможем написать замкнутую формулу $\mathfrak{B}_\sigma$ ($\sigma = 1, \dots, s$) такую, что значение $T_\sigma(\alpha)$ совпадает со значением формулы $\mathfrak{B}_\sigma$ в модели $\mathfrak{M}_\alpha$. Из вида формул (10) непосредственно получается

Т е о р е м а 4. Пусть $\mathfrak{M}$ — правильное произведение моделей $\mathfrak{M}_\alpha$ ($\alpha \in A$) с предикатами R_γ^α , заданное некоторой системой формул (4). Тогда для каждой замкнутой формулы УИП $\mathfrak{P}$ с предикатными символами R_γ финитным процессом может быть построена конечная система формул $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_t$ таких, что истинность $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{M}$ будет равносильна истинности финитно конструируемой формулы, составленной лишь с помощью операций $\&$, $\vee$, $\neg$ из высказываний вида (i): «среди сомножителей существуют такие модели $\mathfrak{M}_{\alpha_1}, \dots, \mathfrak{M}_{\alpha_m}$, на которых соответственно истинны формулы $\mathfrak{P}_{\beta_1}, \dots, \mathfrak{P}_{\beta_m}$ и, сверх того, $\alpha_{i_1} \neq \alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{i_p} \neq \alpha_{j_p}$ ».

В самом деле, согласно (10) истинность $\mathfrak{P}$ равносильна истинности подходящей финитно конструируемой формулы, составленной из высказываний вида (i) и высказываний вида (ii): «во всех сомножителях формула $\mathfrak{P}_\beta$ истинна». Так как теперь, помимо операций $\&$, $\vee$, допускается и операция отрицания, то вместо высказываний вида (ii) можно брать их отрицания, имеющие вид (i).

Из теоремы 4 вытекает такое уточнение следствия теоремы 3:

При заданном типе (4) правильных произведений для каждой формулы УИП $\mathfrak{P}$ можно найти такое натуральное n , что если $\mathfrak{P}$ истинна на произведении любых n моделей из произвольной заданной системы моделей $\mathfrak{M}_\alpha$ ($\alpha \in A$), то $\mathfrak{P}$ будет истинной и на произведении всей этой системы моделей.

Модель $\mathfrak{M}$ называется разрешимой, если существует регулярный алгоритм, позволяющий для каждой замкнутой формулы УИП φ решить вопрос об истинности или ложности φ на $\mathfrak{M}$. Из теоремы 4 непосредственно получаем

С л е д с т в и е. *Любая правильная степень разрешимой модели разрешима.*

Действительно, если все перемножаемые модели изоморфны некоторой фиксированной модели $\mathfrak{M}_0$, то указанные в теореме 4 высказывания вида (i) приводятся к высказываниям вида: «формулы $\varphi_{\beta_1}, \dots, \varphi_{\beta_m}$ истинны на $\mathfrak{M}_0$, и перемножается не менее k моделей». По условию все такие высказывания разрешимы и, следовательно, разрешима и рассматриваемая степень модели $\mathfrak{M}_0$.

Во введении было указано также, как с помощью теоремы 4 можно получить и случай Р. Воота, когда в рассматриваемом произведении $\Pi \mathfrak{M}_\alpha$ для каждого сомножителя имеется бесконечное число ему изоморфных других сомножителей.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Ackermann. Solvable cases of the decision problem. Amsterdam, 1954.
2. A. Horn. On sentences which are true of direct unions of algebras.— J. Symbol. Log., 1951, 16, N 1, 14—21.
3. А. Г. Курош, С. Н. Черников. Разрешимые и нильпотентные группы.— Успехи мат. наук, 1947, 2, № 3, 18—59.
4. J. Los. On the extending of models.— Fundam. Math., 1955, 42, N 1, 38—54.
5. А. И. Мальцев. Модельные соответствия.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1959, 23, № 3, 313—336.
6. А. И. Мальцев. О классах моделей с операцией порождения.— Докл. АН СССР, 1957, 116, № 5, 738—741.
7. A. Mostowski. On direct powers of theories.— J. Symbol. Log., 1952, 17, N 1, 1—31.
8. R. L. Vaught. On sentences holding in direct products of relational systems.— Proc. Internat. Congr. Math., Amsterdam, 1954, 2, 409—410.

О НЕРАЗРЕШИМОСТИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ НЕКОТОРЫХ ПОЛЕЙ *



Пусть K — какой-либо класс моделей с основными предикатными символами $P_\alpha (x_1, \dots, x_{s_\alpha})$ ($\alpha \in A$) и индивидуальными предметными символами a_β ($\beta \in B$).

Отношение $P (x_1, \dots, x_s)$, определенное каким угодно способом на каждой K -модели, называется формульным или арифметическим на K , если существует формула $\mathfrak{P} (x_1, \dots, x_s)$ узкого исчисления предикатов со свободными переменными $x_1, \dots, x_s$, содержащая в качестве внелогических констант лишь символы P_α, a_β и такая, что на каждой K -модели $\mathfrak{M}$ выражение $\mathfrak{P} (x_1, \dots, x_s)$ истинно для тех и только тех значений $x_1, \dots, x_s$ из $\mathfrak{M}$, для которых истинно $P (x_1, \dots, x_s)$.

Элементарной теорией класса K называется совокупность всех замкнутых формул узкого исчисления предикатов, имеющих сигнатуру класса K и истинных на всех K -моделях. Элементарная теория K называется рекурсивно разрешимой, если существует алгоритм для решения вопроса, истинна или ложна произвольно заданная формула указанного вида на всех K -моделях.

В случае, когда K есть класс полей, основными предикатами считаются отношения быть суммой и быть произведением двух элементов. Если в элементарной теории индивидуального поля характеристики нуль свойство принадлежать простому подполю является формульным, то элементарная теория такого поля алгоритмически неразрешима (см. [3]).

В 1949 г. Ю. Робинсон [1] показала, что в поле рациональных чисел свойство числа быть натуральным является формульным. В только что появившейся работе [2] Ю. Робинсон распространила этот результат на все алгебраические поля конечной степени. Тем самым ею доказана рекурсивная неразрешимость элементарных теорий этих полей.

Гипотетически можно предполагать, что неразрешимыми элементарными теориями обладают также поля рациональных функций от одной или нескольких независимых переменных, а также поля формальных степенных рядов, по меньшей мере над полями с неразрешимыми теориями. В настоящей работе доказывается вторая из этих гипотез при некотором дополнительном ограничении, наложенном на основное поле. Что касается первой гипотезы, то мы здесь показываем лишь, что неразрешимой теорией обладает поле рациональных функций от одной переменной с коэффициентами из действительно замкнутого поля. Эти результаты получены с помощью самых элементарных алгебраических факторов, что может представлять методический интерес, поскольку упомянутые выше теоремы Ю. Робинсон доказаны с помощью довольно тонких теорем теории алгебраических чисел, выходящих за рамки обычных университетских курсов общей алгебры.

* Сиб. мат. ж., 1960, 1, № 1, 71—77.

1. Поле рациональных функций. Пусть K — действительно замкнутое поле. Отношение порядка $x \leq y$ определяется в K формулой

$$(\exists u)(u^2 = y - x)$$

и потому далее поле K будет рассматриваться как упорядоченное.

Обозначим через $K(x)$ поле рациональных функций от переменного x с коэффициентами из K , а через $K[x]$ — кольцо многочленов от x с коэффициентами из K . Нам понадобится следующая известная

Л е м м а 1. Если в кольце $K[x]$ ненулевые многочлены u, v, w удовлетворяют соотношению

$$u^4 + v^4 = w^4,$$

то u есть константа.

Отсюда непосредственно следует

Л е м м а 2. В поле $K(x)$ свойство элемента быть константой формульное, а именно:

$$\text{Con } u \leftrightarrow (\exists v)(1 + u^4 = v^4). \quad (1)$$

Поэтому отношение $\text{Pos } u$, определяемое в $K(x)$ формулой

$$\text{Pos } u \leftrightarrow \text{Con } u \ \& \ u \neq 0 \ \& \ (\exists v) \ (u = v^2), \quad (2)$$

означает, что u — положительная константа из $K(x)$.

Элемент $u \in K(x)$ будем называть функцией, не имеющей действительных полюсов, если он представим в виде частного двух многочленов из $K[x]$, из которых делитель в K корней не имеет. Совокупность всех функций из $K(x)$, не имеющих действительных полюсов, обозначим через $\mathfrak{K}$. Очевидно, $\mathfrak{K}$ есть подкольцо в $K(x)$. Формулы (1), (2), определяющие понятие положительной константы, остаются справедливыми и внутри $\mathfrak{K}$. Введем в $\mathfrak{K}$ отношение делимости:

$$u \mid v \leftrightarrow (\exists w)(v = uw).$$

Символом $\text{Nat } \alpha$ обозначаем утверждение, что элемент $\alpha \in \mathfrak{K}$ является натуральным, т. е. что α есть положительное кратное единицы в $\mathfrak{K}$.

Л е м м а 3. Отношение $\text{Nat } \alpha$ является формульным в $\mathfrak{K}$, а именно, $\text{Nat } \alpha$ определяется формулой *

$$\text{Pos } \alpha \ \& \ (u)(v) \{u + 1 \mid v \ \& \ (w)(\text{Pos } w \ \& \ u + w \mid v \rightarrow u + w + 1 \mid v) \rightarrow u + \alpha \mid v\}. \quad (3)$$

В самом деле, если элемент α натуральный, то выражение (3) истинно в силу обычного принципа полной индукции, который формулой (3), собственно, и выражается для отношения делимости на $u + \alpha$. Остается показать, что выражение (3) ложно для α не натурального. Иначе говоря, нужно показать, что для каждой положительной не натуральной константы $\alpha \in \mathfrak{K}$ в $\mathfrak{K}$ существуют элементы u, v , для которых

$$u + 1 \mid v \ \& \ u + \alpha \nmid v \ \& \ (w) (\text{Pos } w \ \& \ u + w \mid v \rightarrow u + w + 1 \mid v). \quad (4)$$

* Как отметил А. Тарский, эта формула $\varphi(\alpha)$ определяет $\text{Nat } \alpha$ только в случае архимедовости поля K . Для произвольного поля нужно взять формулу $\varphi^*(\alpha) = \varphi(\alpha) \ \& \ (\exists v)(z)(\text{Pos } z \rightarrow (v + z \mid w \leftrightarrow \varphi(z) \ \& \ z \leq \alpha))$. — Прим. ред.

Покажем, что элементы

$$u = x^2 - \alpha - 1, \quad v = (x^2 - \alpha)(x^2 - \alpha + 1) \dots (x^2 - \alpha + [\alpha])$$

удовлетворяют условию (4). Истинность выражений $u + 1 \mid v$ и $u + \alpha \nmid v$ очевидна. Пусть w — некоторая положительная константа, для которой $u + w \mid v$. Возможны два случая:

1) $w > \alpha$. Функция $u + w + 1 = x^2 - (w - \alpha)$ вещественных корней не имеет и потому $u + w + 1 \nmid v$.

2) $w \leq \alpha$. Условие $u + w \mid v$ требует, чтобы корни $\pm \sqrt{\alpha + 1 - w}$ многочлена $u + w$ были корнями v , т. е. чтобы $w = k + 1$, где k — целое рациональное, $0 \leq k \leq [\alpha]$. Поскольку $w \leq \alpha$, то $k \leq [\alpha]$ и, следовательно, корни многочлена $u + w + 1$, равные $\pm \sqrt{\alpha - w}$, все еще будут корнями v , т. е. $u + w + 1$ будет делителем v . Итак, элементы u, v удовлетворяют требованию (4) и лемма 3 доказана.

Т е о р е м а 1. В поле $K(x)$ свойство быть натуральным числом является формульным.

Ввиду леммы 3 достаточно показать, что в $K(x)$ является формульным свойство не иметь вещественных полюсов. Для этого нам понадобится хорошо известная

Л е м м а 4. Пусть $f(x) \in K(x)$. Тогда и только тогда $f(x) \geq 0$ для всех значений x из K , когда $f(x) = u^2 + v^2$, $u, v \in K(x)$.

Иначе говоря, условие « $f(x) \geq 0$ для всех значений x из K » возможно в $K(x)$ определить формулой

$$(\exists u)(\exists v)(f(x) = u^2 + v^2). \quad (5)$$

Для полноты изложения приведем краткое доказательство этой леммы. Функцию $f(x)$, очевидно, можно представить в виде $A(x) \cdot g(x)/w^2$, где $A(x)$ разлагается на линейные множители, а $g(x)$ действительных корней не имеет и потому есть произведение множителей вида $(x - \alpha)^2 + \beta^2$. Так как для всех значений x из K $A(x) \geq 0$, то каждый корень $A(x)$ имеет четную кратность и потому

$$A(x) = z^2, \quad z \in K[x].$$

С другой стороны, применяя несколько раз преобразование

$$(a^2 + b^2)(c^2 - d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2,$$

мы сможем представить $g(x)$ в виде $u^2 + v^2$, после чего $f(x)$ приобретет требуемый вид:

$$f(x) = (uz/w)^2 + (vz/w)^2.$$

Обозначим через $R(f)$ предикат, определяемый формулой (5), и введем следующие формульные предикаты:

$$S(v) \leftarrow \rightarrow (\exists u)(\text{Pos } u \ \& \ R(u - v^2)),$$

$$T(v) \leftarrow \rightarrow S(v) \ \& \ (u) (\text{Con } u \rightarrow \neg S(v/x - u)),$$

$$P(v) \leftarrow \rightarrow v \neq 0 \ \& \ T(v) \vee T(v^{-1}),$$

$$Q(v) \leftarrow \rightarrow (\exists u)(\exists w)(S(u) \ \& \ P(w) \ \& \ v = uw).$$

Истинность $S(v)$ равносильна ограниченности v , т. е. равносильна утверждению, что v не имеет вещественных полюсов и степень v не выше 0.

Истинность $T(v)$ равносильна утверждению, что v не имеет ни полюсов, ни нулей и степень v не положительна. Поэтому истинность $P(v)$ означает, что v не имеет ни полюсов, ни нулей. Наконец, истинность $Q(v)$ равносильна утверждению, что v не имеет вещественных полюсов. Таким образом, свойство не иметь вещественных полюсов оказывается формульным, что и требовалось доказать.

Заметим, что в формуле для $T(v)$ явно содержится символ x . Поэтому теорема 1 доказана в предположении, что основными понятиями теории поля $K(x)$ (сигнатурой теории $K(x)$) являются операции сложения, умножения и индивидуальный предметный символ x для основного трансцендентного элемента $K(x)$.

Как известно [2], из того, что понятие натурального числа в поле или кольце формульное, вытекает рекурсивная неразрешимость элементарной теории такого кольца. При этом индивидуальные предметные символы в сигнатуре теории несущественны и их можно опускать*. Таким образом, из теоремы 1 вытекает

С л е д с т в и е. *Элементарная теория поля $K(x)$, сигнатура которой состоит лишь из f и x , рекурсивно неразрешима.*

2. Поля формальных рядов. Пусть K — некоторое поле и x — буква, не являющаяся его элементом. Символом $K\{x\}$ обозначим поле формальных рядов вида

$$u = u_k x^k + u_{k+1} x^{k+1} + u_{k+2} x^{k+2} + \dots \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, u_i \in K, u_k \neq 0) \quad (6)$$

относительно обычных операций сложения и умножения. Далее, полагаем $K_1 = K\{x_1\}$, $K_2 = K_1\{x_2\}$ и т. д.

Введем предикат $S_n(u)$ формулой

$$S_n(u) \leftrightarrow (\exists v)(1 + u^n = v^n) \quad (n > 0).$$

Характеристику поля K пока предположим равной нулю, и число k в разложении (6) элемента $u \in K_m = K\{x_1, \dots, x_m\}$ относительно K_{m-1} условимся называть порядком u (относительно K_{m-1}).

Если порядок u положителен, то обычная биномиальная формула

$$(1 + u^n)^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} u^n + \frac{n-1}{2! n^2} u^{2n} + \dots \quad (7)$$

показывает, что в этом случае утверждение $S_n(u)$ истинно. Аналогично если u имеет разложение вида (6), где $k = -l$, $l > 0$, $x = x_m$, $u_i \in K_{m-1}$

* Теорема 1, доказанная в настоящей статье, утверждает, что в поле вещественных рациональных функций $K(x)$ от независимого переменного x свойство элемента поля быть натуральным числом является формульным, если в качестве сигнатурных знаков берутся $+$, $\times$ и символ x . Однако если в доказательстве этой теоремы сделать незначительные изменения, то получится более сильное утверждение, что в указанном поле $K(x)$ свойство элемента быть натуральным числом является формульным и тогда, когда в качестве сигнатурных знаков берутся лишь $+$ и $\times$. Для этого в лемме 3 под $\mathfrak{A}$ достаточно понимать кольцо всех ограниченных функций, а в процессе доказательства леммы в качестве u, v , удовлетворяющих условию 4, взять $u = (x^2 + (\alpha + 1)^{-1})^{-1} - \alpha - 1$; $v = (u + 1)(u + 2) \dots (u + 1 + [\alpha])$. Так как предикат $S(f)$, означающий ограниченность функции f , определяется без символа x , то формулы для $T(v)$, $P(v)$, $Q(v)$ становятся излишними и на этом заканчивается доказательство усиленного утверждения.

В связи с изложенным отпадает надобность в ссылке на несущественность предметных символов, в статье не доказанной (см. А. И. Мальцев. Письмо в редакцию. — Сиб. мат. ж., 1961, 2, № 4, 639). — Прим. ред.

($i = k, k + 1, \dots$), то, полагая

$$(u_k^{-1} x^l u)^n = 1 + u^*, \quad u_k^{-1} x^l v = w, \quad (u_k^{-1} x^l)^n + (1 + u^*)^n = 1 + z,$$

мы заменим уравнение

$$1 + u^n = v^n$$

эквивалентным уравнением

$$1 + z = w^n.$$

Так как порядок z положителен, то формула

$$w = 1 + \frac{1}{n} z + \frac{n-1}{2! n^2} z^2 + \dots \quad (8)$$

дает решение последнего уравнения и потому выражение $S_n(u)$ снова истинно.

Наконец, если порядок u есть 0, то

$$u = u_0 - u_1 x_m - u_2 x_m^2 - \dots \quad (u_i \in K_{m-1}).$$

Из уравнения $1 - u^n = v^n$ теперь следует, что

$$v = v_0 - v_1 x_m - \dots, \quad 1 - u_0^n = v_0^n, \quad (v_i \in K_{m-1}).$$

Тем самым, вопрос об истинности $S_n(u)$ в поле K_m свелся к вопросу об истинности $S_n(u_0)$ в поле K_{m-1} .

Применяя эти рассуждения последовательно к полям $K_{m-1}, \dots, K_1$, мы получим, наконец, что $S_n(u)$ тогда и только тогда ложно в K_m , когда имеют место следующие разложения:

$$\begin{aligned} u &= u_0 - u_1 x_m - \dots, \\ u_0 &= u_0^{(1)} - u_1^{(1)} x_{m-1} - \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_0^{(m-2)} &= u_0^{(m-1)} - u_1^{(m-1)} x_1 - \dots, \\ S_n(u_0^{(m-1)}) &\text{ ложно в } K, \end{aligned} \quad (10)$$

где $u_i^{(j)} \in K_{m-j-1}$.

Допустим теперь, что поле K удовлетворяет следующему требованию: существуют такие натуральные $r > 0, n > 0$, что любой элемент $\alpha \in K$ допускает запись вида $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$, где для каждого α_i уравнение $1 + \alpha_i^n = \beta_i^n$ не имеет решений в K .

Так как для любых $u, v \in K_m$, имеющих вид (9),

$$(u + v)_0^{(j)} = u_0^{(j)} - v_0^{(j)}, \quad (w)_0^{(j)} = u_0^{(j)} v_0^{(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, m-1), \quad (11)$$

то из указанного требования вытекает, что предикат $R(u)$, определяемый в K_m формулой

$$R(u) \leftrightarrow (\exists u_1) \dots (\exists u_r) (\neg S_n(u_1) \& \dots \& \neg S_n(u_r) \& u = u_1 + \dots + u_r),$$

истинен для тех и только тех $u \in K_m$, которые допускают запись вида (9) (без дополнительного условия (10)).

Принимая во внимание равенства (11), мы видим, что совокупность элементов K_m , для которых $R(u)$ истинно, является подкольцом в K_m . Это подкольцо мы обозначим через $\mathfrak{K}$.

Элементы K_m , принадлежащие $\mathfrak{K}$ и имеющие в $\mathfrak{K}$ обратный, характеризуются в K_m предикатом

$$Q(u) \leftrightarrow R(u) \ \& \ (\exists v)(R(v) \ \& \ uv = 1).$$

Из равенства (11) видно, что u обратим в $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда u допускает разложение вида (9), в котором $u_0^{(m-1)} \neq 0$. Поэтому предикат $\neg Q(u) \ \& \ R(u)$ характеризует в $\mathfrak{K}$ элементы вида (9), у которых постоянный член $u_0^{(m-1)}$ обращается в 0. Такие элементы образуют в $\mathfrak{K}$ идеал, который обозначим через $\mathfrak{A}$. Элементы u, v кольца $\mathfrak{K}$ в силу (11) сравнимы $\text{mod } \mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые постоянные члены. Следовательно, фактор-кольцо $\mathfrak{K} / \mathfrak{A}$ изоморфно полю K .

До сих пор предполагалось, что поле K имеет характеристику 0. Это нам было нужно для того, чтобы имели смысл биномиальные разложения (7), (8). Однако, записав биномиальное разложение в виде

$$(1 + w)^{1/n} = 1 + \frac{1}{n}w + \frac{a_2}{n^2}w^2 + \frac{a_3}{n^3}w^3 + \dots,$$

легко убедиться что коэффициенты $a_2, a_3, \dots$ в нем целые и потому оно годится и для полей простой характеристики $p > 0$, лишь бы p было взаимно просто с n .

Пусть поле K имеет простую характеристику p и в нем для подходящих натуральных n, r каждый элемент α представим в виде $\alpha_1 + \dots + \alpha_r$, где уравнения $1 + \alpha_i^n = \beta_i^n$ неразрешимы в K . Если $n = p^f n_0$, $(n_0, p) = 1$, то уравнение

$$1 + \alpha_i^n = \beta_i^n$$

эквивалентно уравнению

$$1 + \alpha_i^{n_0} = \beta_i^{n_0}.$$

Поэтому, взяв вместо n число n_0 , мы приведем дело к случаю, когда p и n взаимно просты, т. е. к случаю, когда все наши рассуждения остаются справедливыми. Отсюда непосредственно следует

Т е о р е м а 2. Пусть поле K имеет неразрешимую элементарную теорию и любой его элемент α представим в виде $\alpha_1 + \dots + \alpha_r$, где каждое из уравнений

$$1 + \alpha_i^n = \beta_i^n \quad (i = 1, \dots, r)$$

неразрешимо в K , причем n, r — наперед заданные натуральные числа. Тогда элементарные теории полей степенных рядов $K_m = K\{x_1, \dots, x_m\}$ ($m = 1, 2, \dots$) будут также рекурсивно неразрешимы.

Действительно, пусть, напротив, элементарная теория поля K_m оказалась бы рекурсивно разрешимой. Тогда кольцо $\mathfrak{K}$, как формульно определенное в K_m , также имело бы разрешимую теорию. Идеал $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{K}$ определяется формульным предикатом. Поэтому вместе с $\mathfrak{K}$ разрешимую теорию имело бы и фактор-кольцо $\mathfrak{K}/\mathfrak{A}$, т. е. поле K , что противоречит предположению.

Условия теоремы 2, наложенные на поле K , заведомо выполняются для поля рациональных чисел и для поля рациональных функций от одной переменной с формально действительными коэффициентами. В самом деле,

оба поля имеют рекурсивно неразрешимые теории *. В первом из них уравнение $1 + u^4 = v^4$ не имеет решения для любого $u \neq 0$, а во втором — то же уравнение неразрешимо для любого непостоянного u . Поэтому и в первом, и во втором поле каждый элемент может быть представлен в виде $\alpha_1 + \alpha_2$, где α_1, α_2 — элементы, для которых уравнения

$$1 + \alpha_1^4 = \beta_1^4, \quad 1 + \alpha_2^4 = \beta_2^4$$

неразрешимы. Таким образом, мы получили

С л е д с т в и е. *Элементарные теории полей $K\{x_1, \dots, x_m\}$, $m = 1, 2, \dots$, где K — поле рациональных чисел или поле рациональных функций с действительными коэффициентами, рекурсивно неразрешимы.*

В теореме 2 запас полей $K\{x_1, \dots, x_m\}$ можно пополнить следующим путем. Рассмотрим произвольную систему переменных x_α , индексы которых линейно упорядочим. Поля вида

$$K\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_s}\} \quad (\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_s) \quad (12)$$

образуют локальную систему в том смысле, что любые два из них лежат в подходящем третьем поле той же системы. Поэтому можно говорить об объединении всех полей вида (12). Это объединение будет полем, которое мы обозначим через K_N , где N — указанная выше линейно упорядоченная совокупность индексов переменных x_α . Каждый элемент u из поля K_N принадлежит некоторому его подполю $K' = K\{x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_m}\}$, причем из разрешимости уравнения $1 + u^n = v^n$ в K_N следует, что $v \in K'$. Поэтому рассуждения, приведшие нас к теореме 2, остаются верными и для любого поля вида K_N . В частности, если основное поле K есть поле рациональных чисел или поле рациональных функций одного переменного с формально действительными коэффициентами, то элементарная теория поля рядов K_N рекурсивно неразрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Robinson. Definability and decision problem in arithmetic.— J. Symbol. Log., 1949, 14, N 2, 98—114.
2. J. Robinson. The undecidability of algebraic rings and fields.— Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, N 6, 950—957.
3. A. Tarski, A. Mostowski, R. M. Robinson. Undecidable theories. Amsterdam, 1953.

* Это — верное утверждение. Однако доказательство неразрешимости теории поля рациональных функций над формально действительным полем было дано только в 1964 г. Р. Робинсоном. По-видимому, здесь вместо «формально действительными» нужно «действительно замкнутыми». — Прим. ред.

ОБ ОДНОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ КОЛЬЦАМИ И ГРУППАМИ*



Пусть K_1, K_2 — два класса моделей. Как обычно, под элементарной теорией $T(K_i)$ класса K_i будем понимать совокупность всех формул узкого исчисления предикатов, имеющих сигнатуру K_i и истинных на всех K_i -моделях [1]. Будем говорить, что K_1 синтаксически содержится в K_2 , если существует алгоритм, позволяющий для каждой формулы $\mathfrak{A}$ сигнатуры K_1 построить некоторую формулу сигнатуры K_2 так, что истинность первой формулы на всех K_1 -моделях влечет истинность второй на всех K_2 -моделях. Классы K_1, K_2 синтаксически эквиваленты, если каждый из них синтаксически содержится в другом.

В случае синтаксической эквивалентности каждая элементарная проблема (т. е. формулируемая в узком исчислении предикатов), относящаяся к одному классу, может быть преобразована в равносильную элементарную проблему, относящуюся к другому классу. Известным примером может служить соответствие между ассоциативными телами и проективными геометриями. В настоящей заметке с указанной точки зрения исследуется одно соответствие между классом всех (не обязательно ассоциативных) колец с единицей и некоторым классом метабелевых групп с двумя фиксированными элементами. Для довольно значительного класса колец это соответствие будет синтаксической эквивалентностью. В сравнительно большом числе случаев установлена алгоритмическая неразрешимость элементарных теорий колец [2]. Указанное соответствие позволяет отсюда получить ряд классов метабелевых групп с неразрешимыми теориями. Среди них находятся, например, класс всех метабелевых групп, свободные метабелевы группы ранга больше 1 и класс метабелевых групп с тождеством $x^p = 1$, где p — простое нечетное число. Простые дополнительные рассуждения достаточны, чтобы из упомянутых результатов вывести неразрешимость теорий некоммутативных свободных нильпотентных групп любого класса нильпотентности.

Основные результаты настоящей заметки были доложены на Втором алгебраическом colloquium в Москве в апреле 1959 г. Краткое сообщение о них опубликовано в [3].

1. Прямое отображение. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное, вообще говоря, неассоциативное кольцо. В множество $\chi(\mathfrak{X})$ троек (a, b, c) элементов $\mathfrak{X}$ вводим операцию умножения формулой

$$(a, b, c)(x, y, z) = (a + x, b + y, bx + c + z). \quad (1)$$

Легко проверяется, что эта операция ассоциативна, тройка $(0, 0, 0)$ является для нее нейтральным элементом и

$$(a, b, c)^{-1} = (-a, -b, ba - c). \quad (2)$$

Таким образом, $\chi(\mathfrak{X})$ относительно указанной операции является группой. Из формулы (1) следует, что тройки вида $(0, 0, c)$ являются центральными

элементами в группе $\chi(\mathfrak{K})$, а из формулы

$$(a, b, c)(x, y, z)(a, b, c)^{-1}(x, y, z)^{-1} = (0, 0, bx - ya) \quad (3)$$

вытекает, что группа $\chi(\mathfrak{K})$ метабелева при любом $\mathfrak{K}$.

Рассмотрим теперь какую-либо замкнутую формулу узкого исчисления предикатов

$$\mathfrak{A} = (Q_1 x_1) \dots (Q_m x_m) \mathfrak{A}_0(x_1, \dots, x_m) \quad (Q_i = \forall, \exists), \quad (4)$$

открытая часть $\mathfrak{A}_0$ которой содержит лишь один внелогический символ — знак умножения. Требование, чтобы на $\chi(\mathfrak{K})$ была истинна формула $\mathfrak{A}$, равносильно некоторому требованию, наложенному на кольцо $\mathfrak{K}$. Это последнее требование можно снова записать в виде формулы $\chi(\mathfrak{A})$ узкого исчисления предикатов. Для этого достаточно в $\mathfrak{A}$ каждый квантор $(Q_i x_i)$ заменить тройкой кванторов $(Q_i x'_i)(Q_i x''_i)(Q_i x'''_i)$, а каждое выражение $x_i x_j = x_k$ заменить формулой

$$x'_i + x'_j = x'_k \ \& \ x''_i + x''_j = x''_k \ \& \ x'''_i + x'''_j = x'''_k.$$

Поэтому отображение $\mathfrak{A} \rightarrow \chi(\mathfrak{A})$ является синтаксическим вложением $\chi(\mathfrak{K})$ в $\mathfrak{K}$. В частности, если какой-либо заданный класс колец R имеет разрешимую элементарную теорию, то разрешимую элементарную теорию будет иметь и соответствующий класс групп $\chi(R)$.

2. Группы с выделенными элементами. Далее предполагается, что все рассматриваемые кольца $\mathfrak{K}$ имеют единицу: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$. Тогда в соответствующей группе естественно выделяются элементы

$$a_1 = (1, 0, 0), \quad a_2 = (0, 1, 0) \quad (5)$$

и $\chi(\mathfrak{K})$ мы будем рассматривать не просто как группу, а как несколько более сложный объект — группу с парой выделенных элементов, за которыми закрепляем индивидуальные наименования a_1, a_2 . Этот объект иногда для краткости будем называть *обогащенной группой*. С точки зрения теории моделей обогащенная группа есть алгебраическая система типа $\langle \cdot, a_1, a_2 \rangle$, состоящая из основного множества, основной операции и основных индивидуальных элементов a_1, a_2 . В соответствии с общей теорией моделей (ср. [4]) обогащенные группы $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1$ называются *изоморфными*, если найдется обычный групповой изоморфизм $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}_1$, переводящий пару выделенных элементов a_1, a_2 группы $\mathfrak{G}$ в пару a'_1, a'_2 выделенных элементов $\mathfrak{G}_1$. Отсюда видно, что, выделяя в какой-либо группе различные пары элементов, можно получить и неизоморфные обогащенные группы.

Аналогично определяются гомоморфизмы и прямые (декартовы) произведения обогащенных групп. Подгруппами обогащенной группы $\mathfrak{G}$ называются ее обычные подгруппы, содержащие выделенные элементы a_1, a_2 в качестве своих собственных выделенных элементов.

Кольца $\mathfrak{K}$ в дальнейшем также будут рассматриваться как кольца с выделенным элементом — единицей. Это означает, что в качестве подколец будут рассматриваться лишь подкольца, содержащие единицу кольца, и т. п.

Отображение χ , определенное в п. 1, будет теперь рассматриваться как отображение, ставящее в соответствие каждому кольцу $\mathfrak{K}$ с выделенной единицей 1 обогащенную группу $\chi(\mathfrak{K})$ с выделенными элементами $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0)$. Эти элементы a_1, a_2 и группы $\mathfrak{G} = \chi(\mathfrak{K})$ обладают следующими свойствами:

A1. Группа $\mathfrak{G}$ метабелева; иначе говоря, элементы $\mathfrak{G}$ удовлетворяют тождеству $xux^{-1}y^{-1}z = zxyx^{-1}y^{-1}$.

A2. Совокупности $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ элементов $\mathfrak{G}$, перестановочных соответственно с a_1 и a_2 , являются абелевыми подгруппами $\mathfrak{G}$.

A3. Пересечение $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ есть центр $\mathfrak{Z}$ группы $\mathfrak{G}$.

A4. Для каждой пары элементов z_1, z_2 центра $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{G}$ существует элемент x , удовлетворяющий соотношениям

$$a_1 x a_1^{-1} x^{-1} = z_1, \quad a_2 x a_2^{-1} x^{-1} = z_2. \quad (6)$$

A5. Существуют гомоморфизмы $f_1(z), f_2(z)$ центра $\mathfrak{Z}$ соответственно в $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ такие, что $f_1(c) = a_1, f_2(c) = a_2^{-1}$ и

$$a_2 f_1(z) a_2^{-1} f_1(z)^{-1} = a_1 f_2(z) a_1^{-1} f_2(z)^{-1} = z,$$

где $c = a_2 a_1 a_2^{-1} a_1^{-1}$.

В самом деле, непосредственные вычисления показывают, что $\mathfrak{G}_1$ состоит из всех троек вида $(\alpha, 0, \gamma)$, $\mathfrak{G}_2$ состоит из всех троек вида $(0, \beta, \gamma)$, а центр $\mathfrak{Z}$ группы $\mathfrak{G}$ образован тройками $(0, 0, \gamma)$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{K})$. Если $z_1 = (0, 0, \gamma_1)$, $z_2 = (0, 0, \gamma_2)$, то $x = (-\gamma_2, -\gamma_1, 0)$ есть решение системы (6). В качестве искомых гомоморфизмов можно взять $f_1(z) = (\gamma, 0, 0)$, $f_2(z) = (0, -\gamma, 0)$, где $z = (0, 0, \gamma)$.

3. Обратное отображение. Класс всех обогащенных групп, удовлетворяющих условиям A1—A4, обозначим через G_4 . Так как эти условия легко записываются в виде формул узкого исчисления предикатов, то G_4 является финитно аксиоматизируемым классом. Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая G_4 -группа с групповой операцией $\cdot$ и выделенными элементами a_1, a_2 . Для элементов z_1, z_2 центра $\mathfrak{Z}$ группы $\mathfrak{G}$ вводим новые операции $+$ и $\times$, полагая

$$z_1 + z_2 = z_1 z_2, \quad (7)$$

$$z_1 \times z_2 = x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1}, \quad (8)$$

где x_1, x_2 — элементы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющие условиям

$$x_1 a_2 = a_2 x_1, \quad x_2 a_1 = a_1 x_2, \quad a_i x_i a_i^{-1} x_i^{-1} = z_i \quad (i = 1, 2). \quad (9)$$

Покажем, что $\mathfrak{Z}$ относительно операций $+$, $\times$ является кольцом с единицей $c = a_2 a_1 a_2^{-1} a_1^{-1}$. Действительно, согласно условию A4 элементы x_1, x_2 , удовлетворяющие требованиям (9), существуют. Пусть

$$a_i y_i a_i^{-1} y_i^{-1} = z_i \quad (i = 1, 2; y_1 \in \mathfrak{G}_2, y_2 \in \mathfrak{G}_1)$$

— какое-либо другое решение для (9). Из $a_i y_i a_i^{-1} y_i^{-1} = a_i x_i a_i^{-1} x_i^{-1}$ следует $x_i^{-1} y_i a_i = a_i x_i^{-1} y_i$, т. е. элемент $x_i^{-1} y_i$ перестановочен с a_1, a_2 , и потому в силу A3 $x_i^{-1} y_i \in \mathfrak{Z}$. Но тогда $y_2 y_1 y_2^{-1} y_1^{-1} = x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1}$. Таким образом, операция $\times$ всегда выполнима и однозначна.

Сложение в $\mathfrak{Z}$ совпадает с групповым умножением, и потому $\mathfrak{Z}$ относительно сложения является абелевой группой. Для доказательства соотношений дистрибутивности

$$(u + v) \times w = u \times w + v \times w, \quad w \times (u + v) = w \times u + w \times v \quad (10)$$

положим

$$u = a_1 x a_1^{-1} x^{-1}, \quad v = a_1 y a_1^{-1} y^{-1}, \quad w = a_2 t a_2^{-1} t^{-1} \quad (x, y \in \mathfrak{G}_2; \quad t \in \mathfrak{G}_1).$$

В силу A2 элементы x, y перестановочны и потому

$$a_1 (xy) a_1^{-1} (xy)^{-1} = a_1 x a_1^{-1} x^{-1} \cdot a_1 y a_1^{-1} y^{-1} = u + v,$$

откуда

$$(u + v) \times w = txyt^{-1}y^{-1}x^{-1} = txt^{-1}x^{-1} \cdot tyt^{-1}y^{-1} = u \times w + v \times w.$$

Аналогично устанавливается и второе соотношение (10). Наконец, прямые вычисления легко проверяются и соотношения $c \times z = z \times c = z$.

Отображение, ставящее каждой обогащенной G_4 -группе $\mathfrak{G}$ в соответствие определенное указанным образом кольцо $\mathfrak{Z}$, будет обозначаться символом ψ .

Если $\mathfrak{B} = (Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) \mathfrak{B}_0(x_1, \dots, x_n)$ — какая-либо замкнутая формула элементарной теории колец с единицей, то символом $\psi(\mathfrak{B})$ условимся обозначать формулу элементарной теории групп, которая получается из $\mathfrak{B}$ заменой кванторов $(Q_i x_i)$ специализированными кванторами $(Q_i^* x_i)$, символа 1 в $\mathfrak{B}$ — выражением $a_2 a_1 \cdot a_2^{-1} a_1^{-1}$, каждой подформулы $x_i + x_j$ — подформулой $x_i x_j$ и каждой подформулы $x_i \times x_j = x_k$ — выражением

$$(\exists u)(\exists v)(x_k = uvu^{-1}v^{-1} \& ua_1 = a_1 u \& va_2 = a_2 v \& x_i = a_1 v a_1^{-1} v^{-1} \& x_j = a_2 u a_2^{-1} u^{-1}).$$

Предикат $\zeta(x)$ в кванторах Q_i^* определяется формулой

$$\zeta(x) = (u)(xu = ux).$$

Ясно, что $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда истинна на кольце $\psi(\mathfrak{G})$, когда $\psi(\mathfrak{B})$ истинна на группе $\mathfrak{G}$, и потому элементарная теория кольца $\psi(\mathfrak{G})$ содержит синтаксически в элементарной теории обогащенной группы $\mathfrak{G}$. Отсюда следует, в частности, что если элементарная теория кольца $\psi(\mathfrak{G})$ неразрешима, то неразрешима и элементарная теория группы $\mathfrak{G}$.

Например, пусть $\mathfrak{G}$ — свободная метабелева группа со свободными порождающими a_1, a_2 , рассматриваемыми в качестве выделенных элементов $\mathfrak{G}$. Тогда каждый элемент $\mathfrak{G}$ однозначно представим в виде $a_1^k a_2^m c^n$ ($c = a_2 a_1 a_2^{-1} a_1^{-1}$) и перемножение происходит по закону

$$a_1^k a_2^m c^n \cdot a_1^x a_2^y c^z = a_1^{k+x} a_2^{m+y} c^{mx+n+z} \quad (k, m, \dots, z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Отсюда видно, что условия A1—A4 для $\mathfrak{G}$ выполнены и $\psi(\mathfrak{G})$ есть обычное кольцо целых чисел. Согласно теореме Черча [1], элементарная теория кольца целых чисел неразрешима. Поэтому неразрешима и элементарная теория свободной метабелевой группы с двумя свободными образующими.

4. Взаимность отображений χ, ψ . Из предыдущих результатов следует, что для любого кольца $\mathfrak{K}$ с единицей

$$\psi(\chi(\mathfrak{K})) = \mathfrak{K}, \quad (11)$$

где равенство понимается в смысле изоморфизма. Для соответствующих синтаксических преобразований также имеем эквивалентность

$$\chi(\psi(\mathfrak{B})) \leftrightarrow \mathfrak{B}, \quad (12)$$

где $\mathfrak{B}$ — произвольная замкнутая формула элементарной теории колец с единицей, относящаяся к произвольному кольцу $\mathfrak{K}$.

Мы покажем теперь, что для G_4 -групп с условием A5 имеют место и дополнительные соотношения]

$$\chi(\psi(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}, \quad \psi(\chi(\mathfrak{A})) \leftrightarrow \mathfrak{A}, \quad (13)$$

где $\mathfrak{G}$ — любая группа с условиями A1—A5 и $\mathfrak{A}$ — произвольная замкнутая формула узкого исчисления предикатов для $\mathfrak{G}$.

Действительно, введем в центр $\mathfrak{Z}$ группы $\mathfrak{G}$ операции $+$, $\times$ по формулам (7), (8) и для кольца $\mathfrak{Z}$ построим группу $\mathfrak{H} = \chi(\mathfrak{Z})$, образованную тройками элементов $\mathfrak{Z}$. Нам нужно найти изоморфизм $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{G}$.

По условию существуют гомоморфизмы f_1, f_2 центра $\mathfrak{Z}$ в подгруппы $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ группы $\mathfrak{G}$, обладающие свойствами A5. Каждой тройке $h = (h_1, h_2, h_3)$ из $\mathfrak{H}$ ставим в соответствие элемент $\tau(h) = f_1(h_1) f_2(h_2)^{-1} h_3$ группы $\mathfrak{G}$.

Отображение τ есть гомоморфизм $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$. В самом деле, пусть $h = (h_1, h_2, h_3)$ и $k = (k_1, k_2, k_3)$ — произвольные элементы $\mathfrak{H}$. Согласно (1) и (7)

$$\tau(hk) = f_1(h_1 k_1) f_2(k_2^{-1} h_2^{-1})(h_2 \times k_1) h_3 k_3,$$

откуда

$$\tau(hk) \tau(k)^{-1} = f_1(h_1 k_1) f_2(h_2^{-1}) f_1(k_1^{-1})(h_2 \times k_1) h_3. \quad (14)$$

Из соотношений

$$a_1 f_2(h_2) a_1^{-1} f_2(h_2)^{-1} = h_2, \quad a_2 f_1(k_1) a_2^{-1} f_1(k_1)^{-1} = k_1$$

в силу (8) и (9) получаем

$$h_2 \times k_1 = f_1(k_1) f_2(h_2) f_1(k_1^{-1}) f_2(h_2^{-1}).$$

Поэтому (14) можно переписать в виде

$$\tau(hk) \tau(k)^{-1} = f_1(h_1 k_1) f_1(k_1^{-1}) f_2(h_2^{-1}) h_3 = f_1(h_1) f_2(h_2^{-1}) h_3,$$

откуда $\tau(hk) = \tau(h) \tau(k)$.

В группе $\mathfrak{H}$ выделенными элементами являются $a_1 = (e, e, e)$, $a_2 = (e, e, e)$, где e — единица $\mathfrak{G}$. Согласно A5

$$\tau(a_1^*) = f_1(e) f_2(e) e = a_1, \quad \tau(a_2^*) = f_1(e) f_2(e^{-1}) e = a_2.$$

Таким образом, τ является обогащенным гомоморфизмом $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$.

Найдем ядро τ . Пусть $\tau(h) = e$, где $h = (h_1, h_2, h_3)$. Тогда $f_1(h_1) = f_2(h_2) h_3^{-1} \in \mathfrak{Z}$ и в силу A5

$$h_1 = a_2 f_1(h_1) a_2^{-1} f_1(h_1)^{-1} = e.$$

Аналогично получим: $h_2 = e$, $h_3 = e$, т. е. h есть единица $\mathfrak{H}$ и ядро τ — единичное.

Остается показать, что τ отображает $\mathfrak{H}$ на всю группу $\mathfrak{G}$. Пусть $g \in \mathfrak{G}$. Положим

$$a_i g a_i^{-1} g^{-1} = g_i, \quad f_1(g_2) = h_1, \quad f_2(g_1) = h_2, \quad h_1^{-1} g h_2^{-1} = g_3 \quad (i = 1, 2). \quad (15)$$

Если удастся показать, что g_3 — центральный в $\mathfrak{G}$, то тем самым будет доказано, что тройка (g_2, g_1, g_3) отображением τ переводится в g и, следовательно, что τ отображает $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{G}$.

В силу A5₁ имеем $a_2 h_1 a_2^{-1} h_1^{-1} = g_2$. Сравнивая с (15), получим $h_1^{-1} g a_2 = a_2 h_1^{-1} g$, откуда $h_1^{-1} g \in \mathfrak{G}_2$ (и, следовательно, $g_3 = h_1^{-1} g \cdot h_2^{-1} \in \mathfrak{G}_2$). Так как в метабелевых группах имеет место тождество $uvu^{-1} \cdot v^{-1} = v^{-1} \cdot uvu^{-1}$, то из $a_1 h_2 a_1^{-1} h_2^{-1} = g_1$, $a_1 g a_1^{-1} g^{-1} = g_1$ получаем $a_1^{-1} h_2^{-1} a_1 h_2 = a_1^{-1} g^{-1} a_1 g$, откуда $g h_2^{-1} \cdot a_1 = a_1 \cdot g h_2^{-1}$, т. е. $g h_2^{-1} \in \mathfrak{G}_1$ и, следовательно, $g_3 = h_1^{-1} g h_2^{-1} \in \mathfrak{G}_1$. Итак $g_3 \in \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$ и потому, в силу A2, $g_3 \in \mathfrak{Z}$, что и требовалось. Нами доказана

Т е о р е м а 1. *Отображение χ является взаимно однозначным отображением класса R всех колец с единицей на класс G_5 всех обогащенных метабелевых групп, удовлетворяющих требованиям A2—A5. При этом, если на каком-либо кольце $\mathfrak{R} \in R$ истинна замкнутая формула узкого исчисления предикатов $\mathfrak{B}$, то на группе $\chi(\mathfrak{R})$ истинна формула $\psi(\mathfrak{B})$, и, обратно, если на группе $\mathfrak{G} \in G_5$ истинна какая-либо замкнутая формула узкого исчисления предикатов $\mathfrak{A}$, то на соответствующем кольце $\psi(\mathfrak{G})$ истинна формула $\chi(\mathfrak{A})$.*

Из условий A1 — A5, определяющих класс G_5 , условие A5 сложнее остальных. В следующих пунктах будет указано несколько более узких классов групп, оставляющих в силе теорему 1 и допускающих простую характеристику.

5. Некоторые частные случаи. Говорят, что кольцо $\mathfrak{R}$ имеет характеристику p , если $px = 0$ и из $ax = 0$ следует $p \mid a \vee x = 0$. Кольцо $\mathfrak{R}$ называется r -кольцом, если аддитивная группа его — полная и без кручения. Под p -группами будем подразумевать группы с тождеством $x^p = e$.

Т е о р е м а 2. *Для любого простого нечетного p отображение χ является взаимно однозначным соответствием между кольцами характеристики p с единицей и метабелевыми обогащенными p -группами, удовлетворяющими условиям A2—A4.*

Пусть $\mathfrak{R}$ — кольцо характеристики p с единицей 1, $\mathfrak{G} = \chi(\mathfrak{R})$ — соответствующая группа, $g = (g_1, g_2, g_3)$ — элемент $\mathfrak{G}$. Тогда

$$g^p = (pg_1, pg_2, \frac{1}{2}p(p-1)g_2g_1 + pg_3) = e,$$

т. е. $\mathfrak{G}$ — p -группа. Обратное очевидно. Остается доказать лишь, что каждая p -группа $\mathfrak{G}$ с условиями A1—A4 удовлетворяет условию A5. Соответствие

$$x \rightarrow a_2 x a_2^{-1} x^{-1} \quad (x \in \mathfrak{G}_1) \quad (16)$$

представляет собою гомоморфизм $\mathfrak{G}_1$ на центр $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{G}$. Но $\mathfrak{Z}$ есть абелева p -группа, и потому ее можно рассматривать как линейное пространство над простым полем P характеристики p . Выбираем в $\mathfrak{Z}$ базис $\{z_\alpha\}$ над P , и пусть u_α — какой-либо прообраз z_α в $\mathfrak{G}_1$ относительно отображения (16). Очевидно, можно предполагать, что $z_0 = c = a_2 a_1 a_2^{-1} a_1^{-1}$ и $u_0 = a_1$. Если теперь $z = \sum n_\alpha z_\alpha$ ($n_\alpha \in P$) — какой-либо элемент $\mathfrak{Z}$, то полагаем по определению $f_1(z) = \sum n_\alpha u_\alpha$. Аналогично строим и $f_2(z)$. Так как $a_2 u_\alpha a_2^{-1} u_\alpha^{-1} = z_\alpha$, то

$$a_2 f_1(z) a_2^{-1} f_1(z)^{-1} = a_2 \prod u_\alpha^{n_\alpha} a_2^{-1} \prod u_0^{-n_\alpha} = \prod z_\alpha^{n_\alpha} = z$$

и аналогично $a_1 f_2(z) a_1^{-1} f_2(z)^{-1} = z$, что и требовалось.

Применением аналогичных рассуждений к случаю, когда $\mathfrak{K}$ есть γ -кольцо, а $\mathfrak{G}$ — полная метабелева группа без кручения, получается и

Т е о р е м а 3. *Отображение χ является взаимно однозначным соответствием между γ -кольцами с единицей и обогащенными полными метабелевыми группами без кручения, обладающими свойствами A2—A4.*

Из доказательств теорем 2, 3 видно, что при изучении соответствий χ , ψ естественнее рассматривать не просто кольца, а алгебры над некоторым полем P характеристики $p \neq 2$. Но тогда вместо групп нужно рассматривать метабелевы группы над полем P , т. е. группы, для элементов которых, кроме групповой операции, еще определена операция возведения в степень $\alpha \in P$, удовлетворяющая известным условиям:

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \quad x^\alpha y^\beta = y^\beta x^\alpha (x^{-1}y^{-1}xy)^{\alpha\beta}.$$

При конструировании группы $\chi(\mathfrak{K})$ в п. 1 следует добавить лишь условие

$$(x, y, z)^\alpha = (ax, ay, {}^{1/2}\alpha(\alpha - 1)yx + \alpha z), \quad (17)$$

а при конструировании в п. 3 кольца $\psi(\mathfrak{G})$ следует добавить равенство $z^\alpha = \alpha z$. Все остальные рассуждения остаются в силе, и в результате получается

Т е о р е м а 4. *Отображение χ , определенное условиями п.1 и (17), является взаимно однозначным соответствием между алгебрами с единицей над фиксированным полем P характеристики $p \neq 2$ и обогащенными метабелевыми группами над P , удовлетворяющими требованиям A2—A4.*

Наконец, еще отметим, что кольцо $\psi(\mathfrak{G})$, построенное для обладающей свойствами A1—A4 группы $\mathfrak{G}$, не имеет делителей нуля, если в $\mathfrak{G}$ из $x_1 \in \mathfrak{G}_1$, $x_2 \in \mathfrak{G}_2$, $x_1 x_2 = x_2 x_1$ следует $x_1 \in \mathfrak{Z}$ или $x_2 \in \mathfrak{Z}$. Аналогично, если для любого $g \in \mathfrak{G}_1$, $g \notin \mathfrak{Z}$ каждый элемент $z \in \mathfrak{Z}$ представим в виде $z = gxg^{-1}x^{-1}$ ($x \in \mathfrak{G}_2$), то $\psi(\mathfrak{G})$ является телом.

6. Редукция и интерпретация класса моделей. Здесь мы напомним определения некоторых понятий, частью уже использованных в предыдущих пунктах. Для формальных теорий они систематически изложены в [1]. Мы их введем в качестве понятий теории классов алгебраических систем.

Пусть K — класс моделей, сигнатура которого состоит из индивидуальных предметных символов a_i и предикатных символов $P_j^{n_j}$, где n_j указывает членность символа. Индексы i, j предполагаются пробегающими или весь натуральный ряд, или его конечный начальный отрезок. Что касается индексов n_j , то в случае бесконечности множества предикатных символов требуется, чтобы n_j являлся общерекурсивной функцией от j . При этих предположениях все формулы узкого исчисления предикатов сигнатуры K можно естественным образом занумеровать. Говорят, что класс K или что элементарная теория $T(K)$ класса K рекурсивно разрешима, если совокупность номеров S всех истинных на K формул узкого исчисления предикатов является рекурсивным множеством натуральных чисел. В противном случае элементарная теория $T(K)$ называется рекурсивно неразрешимой. Класс K и его элементарная теория называются существенно неразрешимыми, если рекурсивно неразрешим каждый непустой подкласс K [1].

В соответствии с [4] класс K_2 назовем обогащенным подклассом класса моделей K_1 , если сигнатура K_1 содержится в сигнатуре K_2 и каждая K_2 -модель является K_1 -моделью. Обогащенный подкласс K_2 класса K_1 назовем существенно обогащенным под-

классом, если сигнатура K_2 получается из сигнатуры K_1 добавлением лишь некоторой совокупности индивидуальных предметных символов и если каждая K_1 -модель является K_2 -моделью при любых значениях новых символов в K_1 -модели.

Класс K_2 называется конечно аксиоматизируемым обогащенным подклассом класса K_1 , если существует формула узкого исчисления предикатов $\mathfrak{A}$ сигнатуры K_2 такая, что K_2 состоит из тех и только тех обогащений K_1 -моделей, на которых $\mathfrak{A}$ истинна.

Обеднением класса K_1 называется класс всех тех моделей, которые получаются из K -моделей, если на них не рассматривать некоторых фиксированных предикатов и индивидуальных элементов из сигнатуры K_1 .

Наконец, пусть на каждой модели класса K определен одноместный предикат $\rho(x)$, истинный хотя бы для одного элемента модели. Тогда ρ -редукцией класса K называется класс подмоделей K -моделей, состоящих из всех тех элементов моделей, для которых ρ истинен.

Интерпретировать теорию класса моделей K_2 в теории класса K_1 это значит каждому предикатному символу $P_j^{n_j}$ из сигнатуры K_2 поставить в соответствие некоторую формулу $\mathfrak{P}_j(x_1, \dots, x_{n_j})$ сигнатуры K_1 , каждому индивидуальному предметному символу a_i из K_2 поставить в соответствие определенную формулу $\rho_i(x)$ из K_1 и выделить одноместный формульный предикат $\rho(x)$ в K_1 так, чтобы в K_1 были истинны формулы

$$(\exists x) \rho(x) \ \& \ (\exists^{\rho} x) \rho_i(x) \ \& \ (\forall^{\rho} x) (\forall^{\rho} y) (\rho_i(x) \ \& \ \rho_i(y) \rightarrow x = y)$$

и чтобы каждая истинная формула $\mathfrak{A} \in T(K_2)$ переходила в истинную формулу из $T(K_1)$, если в $\mathfrak{A}$ все кванторы заменить на одноименные ρ -специализированные кванторы, выражения $P_j^{n_j}(x, \dots, z)$ заменить формулами $\mathfrak{P}_j(x, \dots, z)$ и полученное в результате этого выражение $\mathfrak{A}^*(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_k})$, если оно будет содержать предметные символы $a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_k}$, заменить формулой $\mathfrak{A}^{**} = (\exists u_1) \dots (\exists u_k) (\mathfrak{A}^*(u_1, \dots, u_k) \ \& \ \rho_1(u_1) \ \& \dots \ \& \ \rho_k(u_k))$.

Если при указанном преобразовании конечная формула истинна только в случае истинности начальной формулы, то интерпретация называется точной.

С точки зрения теории классов моделей это значит, что аксиоматизируемый класс K_2 тогда и только тогда точно интерпретируем в аксиоматизируемом классе K_1 , когда K_2 есть арифметическое замыкание непустого обеднения подкласса редукции формульного обогащения K_1 . Интерпретация K_2 в K_1 — точная, если K_2 — обедненная редукция формульного обогащения K_1 .

Отсюда непосредственно видно, что если элементарная теория класса K_2 неразрешима и K_2 точно интерпретируем в K_1 , то элементарная теория K_1 также неразрешима. Если конечно аксиоматизируемый класс K_2 существенно неразрешим и интерпретируем в некотором классе K_1 , то теория класса K_1 неразрешима и в K_1 найдется конечно аксиоматизируемый внутри K_1 подкласс с существенно неразрешимой теорией (ср. [1]).

7. Неразрешимость теорий некоторых классов метабелевых групп. Пусть $\mathfrak{G}$ — какая-нибудь обогащенная метабелева группа, удовлетворяющая условиям A2—A4, и $\mathfrak{K} = \psi(\mathfrak{G})$ — соответствующее кольцо с единицей. Тогда формулы (7), (8) определяют точную интерпретацию $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{G}$ с выделяющим

предикатом $\rho(x) = (u)(xi = ix)$. Эти же формулы дают и интерпретацию любого класса колец с единицей R в классе соответствующих групп $G = \chi(R)$. Беря в качестве R любой конечно аксиоматизируемый существенно неразрешимый класс колец с единицей и рассматривая любой класс G групп с выделенными элементами, содержащий $\chi(R)$, получим, что G неразрешим и что в G существует конечно аксиоматизируемый существенно неразрешимый подкласс.

Чтобы избавиться от выделенных элементов, достаточно воспользоваться следующим замечанием [1]:

Если класс моделей K с выделенными элементами $a_1, \dots, a_m$ характеризуется аксиомой $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_m)$, то класс K^* без выделенных упомянутых элементов, характеризующийся аксиомой $(\exists a_1) \dots (\exists a_m) \mathfrak{A}(a_1, \dots, a_m)$, синтаксически эквивалентен K .

Действительно, $\mathfrak{B}(a_1, \dots, a_m) \in T(K)$ тогда и только тогда, когда $(a_1) \dots (a_m) (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \in T(K^*)$.

С л е д с т в и е. *Класс всех метабелевых групп M содержит существенно неразрешимый конечно аксиоматизируемый подкласс, а потому как M , так и всякий его надкласс неразрешимы.*

Р. Робинсон [2] указал интерпретацию I конечной системы аксиом Q с существенно неразрешимой теорией в кольце всех многочленов от одной переменной с коэффициентами из простого поля характеристики p . Обозначая через R_p класс всех колец характеристики p и рассматривая I как интерпретацию Q в части R_p , видим, что R_p содержит конечно аксиоматизируемый подкласс с существенно неразрешимой теорией.

Согласно п. 5 классу колец характеристики p при $p \neq 2$ отвечает класс метабелевых p -групп. Следовательно, класс G^p всех групп с тождеством $x^p = e$ содержит конечно аксиоматизируемый существенно неразрешимый подкласс, и потому элементарная теория G^p неразрешима.

Группа с порождающими a_m, b_m, c_m и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} b_n a_m &= a_m b_n c_{m+n}, & a_m^p &= b_m^p = c_m^p = 1, \\ a_m c_n &= c_n a_m, & b_m c_n &= c_n b_m \quad (m, n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

отвечает кольцу многочленов от одного переменного над простым полем характеристики p и потому при $p > 2$ имеет также неразрешимую теорию.

8. Нильпотентные группы. Неразрешимость теории свободной метабелевой группы с двумя порождающими была установлена в п. 3. Естественно, справедлива и более общая

Т е о р е м а 5. *Элементарная теория свободной метабелевой группы $\mathfrak{G}_n$ с n свободными порождающими при $n \geq 2$ неразрешима.*

Пусть $a_1, \dots, a_n$ — свободные порождающие $\mathfrak{G}_n$. Вводим предикат

$$\rho(x) = (\exists y)(a_1 y = y a_1 \ \& \ x = a_2^{-1} y^{-1} a_2 y \ \& \ x a_1 = a_1 x).$$

Так как из $a_1 y = y a_1$ следует, что y имеет вид $a_1^m z$, где z — центральный в $\mathfrak{G}_n$. то предикат $\rho(x)$ истинен лишь для элементов вида $(a_2^{-1} a_1^{-1} a_2 a_1)^m$, т. е. ρ выделяет из $\mathfrak{G}_n$ центр $\mathfrak{Z}$ свободной подгруппы с порождающими a_1, a_2 . Вводя в $\mathfrak{Z}$ операции сложения и умножения формулами (7), (8), получим интерпретацию в $\mathfrak{G}_n$ кольца целых чисел. Поэтому теория $\mathfrak{G}_n$ неразрешима.

Теорему 5 можно распространить и на свободные k -ступенно нильпотентные группы, если воспользоваться следующим замечанием.

Пусть K — класс моделей и $\sigma(x, y)$ — формульный предикат на K , рефлексивный, симметричный и транзитивный. Для каждой K -модели $\mathfrak{M}$ образуем ее фактор-модель $\mathfrak{M}/\sigma$ и класс всех этих фактор-моделей обозначим через K_σ . Тогда если теория класса K разрешима, то разрешима и теория класса K_σ .

Для доказательства достаточно заметить, что каждую замкнутую формулу узкого исчисления предикатов, относящуюся к $\mathfrak{M}/\sigma$, легко преобразовать в равносильную ей замкнутую формулу узкого исчисления предикатов, относящуюся к $\mathfrak{M}$.

Т е о р е м а 6. *Элементарная теория свободной k -степенно нильпотентной группы с n свободными порождающими при $n \geq 2$, $k \geq 2$ неразрешима.*

Для $k = 2$ теорема 6 совпадает с теоремой 5. Поэтому пусть для $k = s - 1$ теорема 6 истинна и пусть $\mathfrak{G}$ — свободная s -степенно нильпотентная группа с n свободными порождающими. Рассмотрим предикат

$$\sigma(x, y) = (\exists z)((u)(zu = uz) \& (x = yz)).$$

Фактор-модель $\mathfrak{G}/\sigma$ будет фактор-группой от $\mathfrak{G}$ по ее центру, т. е. будет свободной $(s - 1)$ -степенно нильпотентной группой с n свободными порождающими. По предположению элементарная теория $\mathfrak{G}/\sigma$ неразрешима. В силу приведенного выше замечания это влечет за собой и неразрешимость элементарной теории самой группы $\mathfrak{G}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Tarski, A. Mostowski, R. M. Robinson. Undecidable theories, Amsterdam, 1953.
2. R. M. Robinson. Undecidable rings.— Trans. Amer. Math. Soc., 1951, 70, 137—159.
3. А. И. Мальцев. Об одном соответствии между кольцами и группами.— Успехи мат. наук, 1959, 14, № 5, 208—209.
4. А. И. Мальцев. Модельные соответствия.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1959, 23, № 3, 313—336.



Группы, изоморфные фактор-группе $F/F^{(n)}$ свободной группы F по ее n -му коммутанту $F^{(n)}$, называются свободными n -ступенно разрешимыми группами. Ниже выводятся некоторые свойства этих групп и на основе их далее показывается, что элементарные теории свободных n -ступенно разрешимых некоммутативных групп являются рекурсивно неразрешимыми в смысле Тарского [1].

1. Ауслендер и Линдон [2] доказали, что если фактор-группа F/A свободной группы F по какому-либо ее нормальному делителю A бесконечна, то центр фактор-группы $F/[A, A]$ тривиален. Пользуясь этим результатом, легко устанавливается

Т е о р е м а 1. Пусть A — такой нормальный делитель свободной группы F , что F/A не имеет кручения. Тогда любые коммутирующие элементы u, v группы $F_0 = F/[A, A]$ или содержатся в $A_0 = A/[A, A]$, или являются степенями одного и того же элемента F_0 .

Рассматривая вместо F ее подгруппу, порожденную u, v, A , сводим дело к случаю, когда фактор-группа F/A абелева с двумя порождающими u, v . Теперь возможны случаи: 1) $F/A = 1$; 2) F/A — свободная абелева со свободными порождающими u, v ; 3) F/A — свободная циклическая. В первом случае $u, v \in A_0$, что и требовалось. Во втором случае обозначим через a, b порождающие вспомогательной метабелевой группы H . Так как F свободная, то найдется гомоморфизм α группы F в H , при котором $u^\alpha = a, v^\alpha = b$. Так как α отображает A в $[H, H]$ (= центр H), то $[a, b] = [u, v]^\alpha = 1$, что противоречит некоммутативности H . Наконец, в третьем случае, обозначая через cA порождающий элемент группы F/A , будем в F_0 иметь $u = c^k a_1, v = c^l a_2, a_1, a_2 \in A$. Пусть $kl \neq 0, s = k/(k, l), t = l/(k, l)$. Тогда $u^t = v^s a, a \in A$, где a коммутирует с u в F_0 . Но это значит, что a является центральным элементом в группе $\{u, A\}/[A, A]$. Поскольку $\{u, A\}$ свободна и индекс A в ней бесконечен, то в силу упомянутого результата Ауслендера — Линдона $a \in [A, A]$ и, следовательно, $u^t = v^s$ в F_0 . Пусть $sx + ty = 1, w = u^x v^y$, тогда $u = w^s, v = w^t$, что и требовалось. Аналогичные рассуждения показывают, что случай $kl = 0, u, v \in A$ невозможен.

Для свободной группы F все факторы $F/F^{(i)}$ кручения не имеют. Поэтому, полагая в теореме 1 $A = F^{(n-1)}$, получаем, в частности, что любые два коммутирующих элемента свободной разрешимой группы или принадлежат последнему неединичному коммутанту этой группы, или являются степенями одного и того же элемента ее.

В свою очередь отсюда непосредственно вытекает, что если некоторый элемент свободной разрешимой группы коммутирует со всеми своими сопряженными, то он принадлежит последнему неединичному коммутанту группы.

Согласно Конторовичу [3], группа называется R -группой, если для ее элементов из $x^m = y^m$ ($m \neq 0$) следует $x = y$.

Пусть $x, y \in F$, $x^m \equiv y^m \pmod{A'}$. Тогда $x^m \equiv y^m \pmod{A}$, откуда по предположению имеем $x \equiv y \pmod{A}$, т. е. $y = xa$ ($a \in A$) и $(xa)^m \equiv x^m \pmod{A'}$. Так как из $(xa)^m = x^m$ следует $a^{x^m-1} \dots a^{xa} = 1$, где $a^x = x^{-1}ax$, а отсюда преобразованием с помощью x получаем $a^{x^m} \dots a^{x^2 a^x} = 1$ и, следовательно, $a^{x^m} = a$, то в F_0 имеем $x^m a = ax^m$. Это значит, что a лежит в центре группы $\{x^m, A\}/[A, A]$. Группа $\{x^m, A\}$ свободная, а $\{x^m, A\}/A'$ без кручения. В силу упомянутой теоремы Ауслендера — Линдона имеем $a \in A'$, т. е. $y = x$ в F_0 .

Для одноступенно разрешимых (абелевых) свободных групп утверждение очевидно. По индукции предполагаем, что утверждение верно для n -ступенно разрешимых свободных групп. Пусть F — свободная группа. Тогда $F^{(n)}$ — нормальный делитель F , фактор-группа по которому $F/F^{(n)}$ в силу индукции есть R -группа. По теореме 2 заключаем, что $(n+1)$ -ступенно разрешимая свободная группа $F/F^{(n+1)}$ является R -группой.

При рассмотрении классов групп предполагается, что сигнатура состоит из знаков умножения и обращения. Если же идет речь о группах или классах групп с фиксированными элементами, то это означает, что символы указанных фиксированных элементов включаются в сигнатуру соответствующей группы или класса групп.

В самом деле, если G — свободная n -ступенно разрешимая группа, то согласно теореме 1 имеем

$$\begin{aligned} x \in G^{(n-1)} &\leftrightarrow (\forall y) (x \cdot y^{-1}xy = y^{-1}xy \cdot x), \\ x \in G^{(n-2)} &\leftrightarrow (\forall y) (xy^{-1}xy \cdot x^{-1}y^{-1}x^{-1}y \in G^{(n-1)}), \\ &\dots\dots\dots \\ x \in G' &\leftrightarrow (\forall y) (xy^{-1}xy \cdot x^{-1}y^{-1}x^{-1}y \in G^n). \end{aligned} \tag{1}$$

З а м е ч а н и е. Коммутант не является элементарным понятием в любом аксиоматизируемом классе K групп, среди фактор-групп которого имеются свободные метабелевы группы с произвольно большим конечным числом свободных порождающих.

$$\mathfrak{P}_m(x) \leftrightarrow (\exists y_1 \dots y_m z_1 \dots z_m)(x = [y_1, z_1] \dots [y_m, z_m]) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Обозначим через $\mathfrak{S}$ систему замкнутых формул узкого исчисления предикатов, характеризующую класс K , и допустим, что понятие коммутанта в K определяется некоторой формулой $\mathfrak{P}(x)$. Тогда бесконечная система $\{\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{P}}(c), \mathfrak{P}(c)\}$ (c — индивидуальный предметный символ) будет противоречивой, и потому согласно локальной теореме противоречивой будет некоторая конечная подсистема указанной системы. Это значит, что в K будет иметь место импликация $(\forall x)(\mathfrak{P}(x) \rightarrow \mathfrak{P}_s(x))$, где $\bar{\mathfrak{P}}_s(c)$ — формула с наибольшим индексом среди формул $\mathfrak{P}_m(c)$, входящих в упомянутую подсистему. Иными словами, в K -группах все элементы коммутанта должны быть представимы в виде произведения s коммутаторов. Пусть H — свободная метабелева группа с $4s$ свободными порождающими и G — группа класса K , фактор-группой которой H является. Непосредственными подсчетами легко убедиться, что каждый элемент коммутанта H есть произведение $4s - 1$ коммутаторов, но что в H существуют элементы, которые не могут быть представлены в виде произведения s коммутаторов. Поэтому и в G есть элементы коммутанта, не представимые в виде произведения s коммутаторов. Таким образом, в G формула $\mathfrak{P}(x) \rightarrow \mathfrak{P}_s(x)$ места не имеет, и тем самым замечание доказано.

Легко указать бесконечное множество аксиоматизируемых классов групп, в которых понятие коммутанта элементарно. Таким, например, будут классы K_m , где K_m характеризуется аксиомой

$$(\forall x)(\mathfrak{P}_{m-1}(x) \rightarrow \mathfrak{P}_m(x)).$$

В классе K_m коммутант характеризуется формулой $\mathfrak{P}_m(x)$. Как упоминалось, все метабелевы группы с $m - 1$ порождающими принадлежат K_m , а свободные метабелевы с достаточно большим числом свободных порождающих в K_m не входят. Поэтому среди классов K_m бесконечно много различных.

Элементарные подгруппы групп классов, сигнатура которых не содержит индивидуальных предметных символов, являются характеристическими подгруппами, и нахождение их кажется интересным не только для тех или иных аксиоматизируемых классов, но и для наиболее важных индивидуальных групп.

3. Пусть K — класс моделей сигнатуры S . Обозначим через $\mathcal{E}(S)$ совокупность всех замкнутых формул узкого исчисления предикатов, сигнатура которых содержится в S , и через $\mathcal{E}(K)$ — совокупность тех формул из $\mathcal{E}(S)$, которые истинны на каждой модели класса K . $\mathcal{E}(K)$ называется элементарной теорией класса K . Элементарная теория класса K называется (рекурсивно) разрешимой, если существует алгоритм, позволяющий для каждой заданной формулы из $\mathcal{E}(S)$ решить вопрос о ее принадлежности к $\mathcal{E}(K)$.

Т е о р е м а 3. *Элементарная теория свободной n -ступенно разрешимой группы с фиксированными свободными порождающими $a_1, \dots, a_t$ при $n \geq 2$, $t \geq 2$ неразрешима.*

Слова «фиксированные свободные порождающие» означают, что сигнатура группы предполагается состоящей из символа умножения и индивидуальных предметных символов $a_1, \dots, a_t$. Для краткости далее вместо a_1, a_2 пишем a, b . Вводим теперь предикаты

$$Z(x) \leftrightarrow xa = ax,$$

$$T(x, y) \leftrightarrow xa = ax \ \& \ yb = by \ \& \ xy^{-1} \in G',$$

где вместо $xy^{-1} \in G'$ следует мыслить соответствующую формулу (1.) На основании теоремы 1 в группе G имеем

$$Z(x) \leftrightarrow (\exists m)(x = a^m),$$

$$T(x, y) \leftrightarrow (\exists m)(x = a^m \& y = b^m).$$

Наконец, вводим в G новые операции $+$, $*$ формулами

$$z = x + y \leftrightarrow z = xy,$$

$$z = x * y \leftrightarrow (\exists uv)(uxb = xbu \& T(y, v) \& uv^{-1}z^{-1} \in G'). \quad (2)$$

Если теперь ограничиться элементами из $Z(x)$, т. е. элементами вида a^m , то получим $a^s + u^t = a^{s+t}$, $a^s * a^t = a^{st}$. Действительно, первое непосредственно следует из (2), а из $x = a^s$, $y = a^t$, $z = a^r$, $uxb = xbu$, $T(y, v)$ получаем $u = (a^s b)^k$, $v = b^t$, что вместе с соотношением $uv^{-1}z^{-1} \in G'$ дает $k = t$, $r = st$. Таким образом, элементарная теория чисел оказывается слабо интерпретированной в элементарной теории групп G с фиксированными элементами a, b . Элементарная теория арифметики целых чисел в силу теоремы Черча неразрешима. Поэтому неразрешима и элементарная теория группы G .

Из слабой интерпретируемости арифметики целых чисел в элементарной теории группы G обычным образом получаем (см. [4]), что неразрешимой будет элементарная теория G и без фиксированных a, b , а также, что существуют конечно аксиоматизируемые классы n -ступенно разрешимых групп для каждого $n = 2, 3, \dots$ с существенно неразрешимыми теориями.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Tarski, A. Mostowski, R. Robinson. Undecidable theories. Amsterdam, 1953.
2. M. Auslander, R. C. Lyndon. Commutator subgroups of free groups. Amer. J. Math., 1955, 77, N 4, 929—931.
3. П. Г. Конторович. Группы с базисом расщепления, III.— Мат. сб., 1948, 22, № 1, 79—100.



Введение

Понятие алгебраической системы — одно из наиболее общих центральных понятий современной алгебры. Важнейшим его частным случаем является понятие алгебры как системы, состоящей из произвольного множества A и конечной последовательности определенных на A операций f_i ($x_1, \dots, \dots, x_{r_i}$) ($i = 1, \dots, l$). Поэтому при рассмотрении вопросов общей алгебры, связанных с идеями конструктивности, естественно встает вопрос: какую алгебру следует считать конструктивной? Ответ более или менее однозначный — алгебра $\mathfrak{A}$ конструктивна, если ее основное множество A состоит из конструктивных элементов и конструктивно задано, а основные операции f_i также являются конструктивными. Однако здесь скрывается некоторая неопределенность. Как известно, понятие конструктивности необходимо уточнить, а это уточнение можно производить весьма различными способами, начиная с классических уточнений Гёделя — Черча — Клини и кончая более новыми А. А. Маркова [10], А. Н. Колмогорова [3] и рядом других. Соответственно этому и понятие конструктивной алгебры допускает ряд возможных уточнений.

Конструктивные алгебраические системы встречались в ряде работ, в том числе в работах А. Мостовского [11, 12], А. В. Кузнецова [4, 5] и особенно в статье А. Фройлиха и Д. Шепердсона [1]. В первых из них в качестве множества A рассматривались множества натуральных чисел, а в последней в качестве элементов A брались слова в произвольном конечном алфавите.

Другой подход к этой же проблеме наметился в работах А. Н. Колмогорова, В. А. Успенского [22, 23], Х. Райса [18] и Х. Роджерса [21]. Известна важная роль частично рекурсивных функций и их стандартной (гёделевской) нумерации в теории алгоритмов. А. Н. Колмогоров, по-видимому, первый отметил, что гёделевская нумерация, лежащая в основе теории вычислимых операций, вовсе не единственная, годящаяся для построения этой теории, и что было бы интересным изучить в каком-то смысле все нумерации совокупности частично рекурсивных функций, обладающие указанным свойством. Эта программа с различными оттенками и осуществлялась в указанных статьях и среди них особенно отчетливо в работе Роджерса.

В настоящем обзоре мы попытались объединить оба подхода, введя понятие нумерованной алгебры.

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется нумерованной, если задано отображение α некоторого множества натуральных чисел D_α на основное множество A алгебры $\mathfrak{A}$. Отображение α называется нумерацией $\mathfrak{A}$. Оно может и не быть взаимно однозначным. Функция $F_i(x_1, \dots, x_{r_i})$, определенная на натуральном ряде, называется представляющей операцию f_i алгебры $\mathfrak{A}$ в нумерации α , если

$$f_i(\alpha x_1, \dots, \alpha x_{r_i}) = \alpha F_i(x_1, \dots, x_{r_i}) \quad (x_1, \dots, x_{r_i} \in D_\alpha),$$

* Успехи мат. наук, 1961, 16, № 3, 3—60.

т. е. если, зная номера $x_1, \dots, x_{r_i}$ некоторых элементов $\mathfrak{A}$, можно найти при помощи F_1 один из номеров результата операции f_i , произведенной над заданными элементами.

Нумерация α может рассматриваться как род координации алгебры $\mathfrak{A}$. Понятие нумерованной алгебры при этом становится в каком-то смысле аналогом понятий аналитического многообразия, группы Ли и т. п. Эта аналогия в некоторой степени влияла на выбор рассматривающихся в настоящей статье задач. Однако своеобразие положения в теории нумерованных алгебр видно хотя бы уже из того, что основной концепцией этой теории служит не понятие изоморфизма нумерованных алгебр, а понятие их рекурсивной эквивалентности, что уже было отмечено в работе А. Фройлиха и Д. Шепердсона [4] по поводу теории полей.

На основании характера множества D_α , разбиения этого множества на классы, отвечающие отображению α , и характера функций F_i , представляющих в нумерации α основные операции алгебры $\mathfrak{A}$, в § 3 вводятся различные варианты понятия конструктивности нумерованной алгебры. Так как конструктивность определяется для нумерованных алгебр, то возникает необходимость доказывать инвариантность конструктивности при некоторых перенумерациях алгебры, при гомоморфизмах и т. д. Часть этих вопросов может быть сформулирована не только для алгебр, но и для произвольных нумерованных множеств. Поэтому оказалось целесообразным предварительно рассмотреть общие нумерованные множества, что и выполнено в § 2. В частности, здесь показано, что ряд теорем, доказанных Д. Майхилом [14], А. А. Мучником [13] и Х. Роджерсом [21] о сводимостях множеств и нумерациях частично рекурсивных функций, на самом деле может быть доказан и для нумераций произвольных множеств.

В § 4 изучаются конструктивные нумерации алгебр с конечным числом порождающих и алгебр с конечным числом определяющих соотношений. Мы ограничиваемся только установлением общих фактов, касающихся изоморфизма или эквивалентности возможных конструктивных нумераций указанных алгебр. Здесь же даны доказательства в новых формулировках теорем А. В. Кузнецова, Д. Мак-Кинси и одной новой теоремы о существовании конструктивных нумераций у алгебр, удовлетворяющих некоторым дополнительным требованиям.

В § 1 изложены общеизвестные понятия общей теории алгебр, и включен он только в целях унификации терминологии.

Как уже говорилось, цель данной части обзора — разработка системы понятий, необходимых для общей теории конструктивных алгебр, и только очень ограниченное число конкретных результатов по специальным вопросам вошло в эту часть. Автор надеется этот недостаток восполнить во второй части настоящего обзора, где должны быть, по возможности, систематизированы результаты алгоритмического и конструктивного характера, относящиеся к группам, полям, кольцам и различного рода дедуктивным алгебрам.

Настоящий обзор является расширенным изложением доклада, прочитанного автором 20.9.1960 г. на 3-м Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре в Свердловске. Отдельные результаты этого обзора докладывались в июне 1960 г. на заседании Ивановского математического общества и в лекциях, прочитанных в октябре в г. Алма-Ате в Казахском университете.

§ 1. Алгебраические системы

1.1. Функции, операции, предикаты. Пусть A, B — два произвольных непустых множества. Закон f , при помощи которого каждой упорядоченной последовательности n элементов $a_1, \dots, a_n$ множества A ставится в соответствие однозначно определенный элемент $f(a_1, \dots, a_n)$ множества B , называется n -арной или n -местной функцией, определенной на A со значениями в B . Если определенные элементы B ставятся в соответствие не обязательно каждой n -ке $(a_1, \dots, a_n)$ элементов A , а, быть может, лишь некоторым, то функция называется частичной. Совокупность тех n -к, для которых частичная функция определена, называется областью существования или областью определения функции f .

Частичные функции называются равными только тогда, когда они имеют одну и ту же область существования и когда их значения равны в каждой n -ке, входящей в область существования.

Частичная n -местная функция f , определенная на множестве A , значения которой принадлежат тому же множеству A , называется n -местной частичной операцией на A . Всюду определенная частичная операция называется просто операцией на A . n -местная функция $P(x_1, \dots, x_n)$, определенная на множестве A , значения которой принадлежат особому множеству с элементами I и L , называется n -местным предикатом на A . Если для некоторых $a_1, \dots, a_n$ из A имеем $P(a_1, \dots, a_n) = I$, то говорят, что предикат P истинен для $a_1, \dots, a_n$, или что элементы $a_1, \dots, a_n$ находятся в отношении P . Если же $P(a_1, \dots, a_n) = L$, то говорят, что предикат P ложен для $a_1, \dots, a_n$.

По формальным соображениям иногда удобно рассматривать и 0-местные функции и предикаты, понимая под ними просто индивидуальные элементы области значений.

Множество A вместе с какими-либо заданными конечной последовательностью $a_1, \dots, a_k$ его элементов и конечными последовательностями определенных на нем операций $f_1, \dots, f_l$, частичных операций $g_1, \dots, g_m$ и предикатов $P_1, \dots, P_n$ называется алгебраической системой.

Последовательность

$$\langle 0, \dots, 0, r_1, \dots, r_l; (s_1, \dots, s_m), [t_1, \dots, t_n] \rangle,$$

где r_i — число мест операции f_i , s_j — число мест частичной операции g_j , t_l — число мест предиката P_l ($i, j, l = 1, 2, \dots$), называется типом указанной алгебраической системы. Множество A называется основным множеством системы, элементы $a_1, \dots, a_k$ — выделенными индивидуальными элементами ее, а f_i, g_j, P_l — основными операциями и основными предикатами системы.

Алгебраическая система, не имеющая основных предикатов, называется частичной алгеброй. Если же система не имеет ни основных предикатов, ни основных частичных операций, то она называется алгеброй. Наконец, алгебраическая система, не имеющая ни основных операций, ни основных частичных операций, называется моделью.

Алгебраические системы, имеющие одинаковый тип, будут называться однотипными. Произвольная совокупность однотипных систем будет называться классом систем. Символом

$$\mathfrak{A} = \langle A; a_1, \dots, a_k; f_1, \dots, f_l; g_1, \dots, g_m; P_1, \dots, P_n \rangle \quad (1)$$

будет обозначаться алгебраическая система $\mathfrak{A}$ с основным множеством A , выделенными элементами $a_1, \dots, a_k$, основными операциями $f_1, \dots, f_l$, частичными операциями $g_1, \dots, g_m$ и предикатами $P_1, \dots, P_n$.

Пусть

$$\mathfrak{B} = \langle B; b_1, \dots, b_k; f'_1, \dots, f'_l; g'_1, \dots, g'_m; P'_1, \dots, P'_n \rangle$$

— какая-либо другая алгебраическая система, однотипная с системой $\mathfrak{A}$. Однозначное отображение множества A в множество B называется отображением системы $\mathfrak{A}$ в систему $\mathfrak{B}$. Отображение φ системы $\mathfrak{A}$ в систему $\mathfrak{B}$ называется гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. $\varphi a_i = b_i \quad (i = 1, \dots, k);$
2. $\varphi f_i(x_1, \dots, x_{r_i}) = f'_i(\varphi x_1, \dots, \varphi x_{r_i}) \quad (i = 1, \dots, l; x_1, \dots, x_{r_i} \in A);$
3. $x = g_j(x_1, \dots, x_{s_j}) \Rightarrow \varphi x = g'_j(\varphi x_1, \dots, \varphi x_{s_j})$
 $(j = 1, \dots, m; x_1, \dots, x_{s_j} \in A);$
4. $P_l(x_1, \dots, x_{l_l}) = P'_l(\varphi x_1, \dots, \varphi x_{l_l}) \quad (l = 1, \dots, n; x_1, \dots, x_{l_l} \in A),$

где символ $\Rightarrow$ обозначает «влечет». Взаимно однозначный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, для которого обратное отображение является гомоморфизмом $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{A}$, называется изоморфизмом $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Заметим, что при определении понятия гомоморфизма двух систем соответствующими считаются те операции и предикаты, которые занимают одно и то же «место» в стандартном обозначении (1) алгебраических систем. Например, пусть D — множество всех натуральных чисел $0, 1, 2, \dots$, а $+$, $\times$ — символы, обозначающие обычные арифметические операции сложения и умножения чисел. Рассмотрим алгебры

$$\mathfrak{A} = \langle D; +; \times \rangle, \quad \mathfrak{B} = \langle D; \times, + \rangle.$$

Эти алгебры не изоморфны, так как если бы отображение φ было изоморфизмом $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, то в силу условия (2) мы имели бы для всех натуральных значений x, y

$$\varphi(x \times y) = \varphi x + \varphi y, \quad \varphi 0 = \varphi(0 \times y) = \varphi 0 + \varphi y$$

и, следовательно, для любого y

$$\varphi y = 0,$$

что противоречит взаимной однозначности отображения φ .

1.2. Порождающие совокупности. Термы. Пусть на множестве A определена некоторая частичная операция $h(x_1, \dots, x_s)$. Подмножество $M \subseteq A$ называется замкнутым относительно h , если для каждой последовательности $u_1, \dots, u_s$ элементов M из определенности $h(u_1, \dots, u_s)$ следует, что $h(u_1, \dots, u_s) \in M$. Множество M называется замкнутым относительно системы частичных операций, если M замкнуто относительно каждой из этих операций.

Из этих определений непосредственно следует, что пересечение любой системы подмножеств M_α , замкнутых относительно данных частичных операций, будет либо пустым подмножеством, либо подмножеством, замкнутым относительно указанных операций.

Пусть M — некоторая система элементов множества A и $g_1, \dots, g_m$ — частичные операции на A . Обозначим через N пересечение всех подмножеств множества A , замкнутых относительно операций $g_1, \dots, g_m$ и содержащих все элементы системы M . N есть наименьшее из замкнутых подмножеств, содержащих систему M . Это множество N называется множеством, порожденным системой M при помощи операций $g_1, \dots, g_m$. Система M называется порождающей системой, а элементы M называются порождающими элементами множества N .

Для более отчетливого описания строения множества N целесообразно воспользоваться понятием терма, определяемого следующим образом.

Рассмотрим некоторую конечную совокупность значков $h_1, \dots$, каждому из которых поставлено в соответствие определенное натуральное число. Значки эти будут называться функциональными или операторными символами, а соответствующие им натуральные числа будут называться их «арностями» или «членностями». Пусть задана еще некоторая совокупность символов, отличных от указанных выше. Эти символы будут называться предметными символами, или предметными переменными.

Термами называются особые конечные последовательности фундаментальных, предметных и вспомогательных символов $(\cdot)$ и $\cdot$. Строение термов определяется следующей индуктивной схемой:

а) последовательность, состоящая из одного члена, являющегося предметным символом, есть терм;

б) если $a_1, \dots, a_{n_i}$ — какие-нибудь термы и h_i — n_i -арный функциональный символ, то последовательность $h_i(a_1, \dots, a_{n_i})$ есть также терм.

Пример 1. Пусть заданы одинарный функциональный символ h и предметный символ a . Тогда термами будут последовательности $a, h(a), h(h(a)), \dots$

Пример 2. Пусть f, g — бинарные функциональные символы, a, b — предметные символы. Тогда термами будут последовательности $f(a, a), g(a, b), f(a, g(a, b)), \dots$

Термы часто записывают в сокращенной форме, применяя так называемую операторную запись. Именно, вместо $g(a, b)$ и $h(a, b, c), \dots$ пишут $(a)g(b), (a)h(b)h(c), \dots$, где g, h — функциональные символы, a, b, c — некоторые термы. В частности, термы, указанные в примерах 1, 2, в операторной записи примут вид $a, ha, hha, \dots$ и соответственно $afa, agb, af(agb), \dots$

Теперь вводим понятие значения терма при заданных значениях предметных и функциональных символов в заданном основном множестве A . По определению задать значения предметных символов — это значит каждому символу сопоставить определенный элемент множества A , который и будет называться значением указанного символа. Указать значение n -арного функционального символа f — это значит сопоставить с ним какую-либо конкретную n -арную операцию f^0 , определенную на множестве A . Иногда наряду с функциональными символами рассматривают и символы частичных функций. Определение терма при этом остается прежним, но в качестве значения частично функционального символа допускается любая частичная операция соответствующей «арности», определенная на множестве A .

Если основное множество и значения предметных и функциональных символов заданы, то понятие значения терма определяется индуктивно следующей схемой:

а) если терм α состоит из предметного символа x , то значением термина α называется значение символа x ;

б) если терм α имеет вид $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где f — n -арный функциональный символ и значения термов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ уже определены и равны соответственно $\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0$, то значением термина α будет значение функции f^0 в точке $\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0$, где f^0 — значение функционального символа f . Если f — частичная операция и значение ее в точке $\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0$ не определено, то значение термина α считается неопределенным. Значение термина $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ считается неопределенным и тогда, когда не определено значение хотя бы одного из термов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Пример 3. Пусть Γ — совокупность рациональных чисел, $+$, $-$, $\times$ — функциональные, $:$ — частично функциональный бинарные символы, в качестве значений которых мы возьмем обычные арифметические операции сложения, вычитания, умножения и деления чисел. Тогда при $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$ терм $x + (y : z)$ будет иметь значение $1/2$, а значения термов $(xy) : x$, $(z + y) : x$ будут неопределенными.

Допустим теперь, что в некотором терме α , содержащем функциональные символы $f_1, \dots, f_s$ и предметные символы $a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_n$, значения функциональных символов и значения предметных символов $a_1, \dots, a_m$ заданы, а значения предметных символов $x_1, \dots, x_n$ не фиксированы. Тогда для каждой системы значений символов $x_1, \dots, x_n$ терм α будет иметь определенное значение (или будет неопределенным), и потому мы можем считать значение термина α n -членной функцией от переменных $x_1, \dots, x_n$. Сам терм α целесообразно считать записью указанной функции. Таким образом, имея некоторое число операций, заданных на множестве A , мы можем получить бесконечное множество новых операций, записываемых в виде термов. Эти новые операции иногда называются термальными, иногда многочленными операциями.

Вернемся к рассмотрению порождающих элементов. Пусть на множестве A определены частичные операции $g_1, \dots, g_m$ и пусть M — какая-либо система элементов из A . Обозначим через N множество, порожденное системой M при помощи указанных операций. Рассмотрим термы, записи которых содержат лишь символы функций $g_1, \dots, g_m$ и символы элементов из M . Легко проверяется, что значения всех таких термов принадлежат N . Также легко проверяется, что совокупность значений всевозможных термов указанного вида является множеством, замкнутым относительно операций $g_1, \dots, g_m$ и, значит, содержащим в себе N . Следовательно, множество N , порожденное системой элементов M при помощи операций $g_1, \dots, g_m$, является совокупностью значений всевозможных термов, записываемых при помощи символов функций $g_1, \dots, g_m$ и символов элементов системы M .

Рассмотрим произвольную алгебраическую систему

$$\mathfrak{A} = \langle A; a_1, \dots, a_k; f_1, \dots, f_l; g_1, \dots, g_m; P_1, \dots, P_n \rangle.$$

Пусть A_0 — подмножество основного множества A , замкнутое относительно операций $f_1, \dots, f_l$ и содержащее все выделенные элементы $a_1, \dots, a_k$. Обозначим через $f_1', \dots, f_l', P_1', \dots, P_n'$ операции и предикаты тех же «арностей», что и соответственные операции $f_1, \dots, f_l$ и предикаты $P_1, \dots, P_n$, но определенные лишь на множестве A_0 . Значения f_i', P_j' на A_0 будем предполагать совпадающими со значениями f_i, P_j на этом множестве. Кроме того, для каждой частичной операции g_i введем частичную операцию g_i'

на A_0 . Значение $g'_i(x_1, \dots, x_{s_i})$ для $x_1, \dots, x_{s_i} \in A_0$ будем считать определенным и равным значению $g_i(x_1, \dots, x_{s_i})$, если последнее определено и принадлежит A_0 . В остальных случаях $g'_i(x_1, \dots, x_{s_i})$ считаем неопределенным. При этих условиях алгебраическая система

$$\mathfrak{A}_0 = \langle A_0; a_1, \dots, a_k; f'_1, \dots, f'_l; g'_1, \dots, g'_m; P'_1, \dots, P'_n \rangle$$

называется подсистемой алгебраической системы $\mathfrak{A}$.

Отсюда видно, что каждое замкнутое относительно основных операций подмножество множества A , содержащее выделенные элементы, является основным множеством однозначно определенной подсистемы, причем все подсистемы системы $\mathfrak{A}$ имеют тот же тип, что и сама система $\mathfrak{A}$. Если множество A_0 замкнуто не только относительно операций $f_1, \dots, f_l$, но и относительно всех частичных операций $g_1, \dots, g_m$, то соответствующая подсистема $\mathfrak{A}_0$ называется замкнутой подсистемой.

Совокупность M некоторых элементов множества A называется системой порождающих алгебры $\mathfrak{A}$, если элементы M вместе с выделенными элементами $a_1, \dots, a_k$ порождают все основное множество A с помощью операций $f_1, \dots, f_l$ и $g_1, \dots, g_m$. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется конечно порожденной, если у нее существует конечная система порождающих элементов.

При рассмотрении алгебраических систем фиксированного типа $\langle 0, \dots, 0, r_1, \dots, r_l, (s_1, \dots, s_m), [t_1, \dots, t_n] \rangle$ обычно вводят предметные символы, функциональные символы, частично функциональные символы и предикатные символы, имеющие указанное в записи типа число мест. Система всех этих символов называется сигнатурой алгебраической системы. Если теперь задана какая-либо алгебраическая система $\mathfrak{A}$ фиксированного типа, то значениями символов сигнатуры на этой системе считаются соответственные выделенные элементы, операции и предикаты алгебраической системы. Таким образом, сигнатурные символы являются общими обозначениями выделенных элементов, операций и предикатов на всех алгебраических системах заданного типа. Значения сигнатурных символов на каждой системе фиксированы, но эти значения меняются при переходе от одной системы к другой.

Пусть K — класс каких-либо алгебраических систем данной сигнатуры τ . Тогда τ -термом или просто термом будем называть терм, все функциональные знаки которого принадлежат τ . Если терм α содержит предметные символы $x_1, \dots, x_q$, то его более подробно обозначают через $\alpha(x_1, \dots, x_q)$. Предметные символы, входящие в сигнатуру τ , в каждой системе сигнатуры τ имеют фиксированные значения и потому называются индивидуальными предметными символами. Остальные предметные символы называются предметными переменными. Значения их можно выбирать произвольно в каждой системе.

Индукцией по длине термов легко доказывается следующее предложение: если φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры τ в алгебраическую систему $\mathfrak{B}$ той же сигнатуры и $\alpha(x_1, \dots, x_q)$ — произвольный терм сигнатуры τ , то значения этого терма в $\mathfrak{A}$ и в $\mathfrak{B}$ связаны равенством

$$\varphi \alpha(x_1, \dots, x_q) = \alpha(\varphi x_1, \dots, \varphi x_q) \quad (3)$$

для произвольных значений $x_1, \dots, x_q$ из $\mathfrak{A}$!

Пусть M — система порождающих алгебраической системы $\mathfrak{A}$. Тогда каждый элемент $\mathfrak{A}$ есть значение подходящего терма вида $\alpha(x_1, \dots, x_q)$, где $x_1, \dots, x_q \in M$. Равенство (3) показывает, что образ каждого элемента $\mathfrak{A}$

при гомоморфизме определен однозначно, если известны образы элементов порождающей системы M .

1.3. Прimitives и квазипрimitives классы. Рассмотрим какой-либо класс алгебраических систем некоторой фиксированной сигнатуры τ . Пусть $a(x_1, \dots, x_n)$, $b(x_1, \dots, x_n)$ — два терма, содержащие предметные переменные $x_1, \dots, x_n$. Остальные символы, входящие в запись этих термов, пусть принадлежат τ . Говорят, что на алгебраической системе $\mathfrak{A}$ сигнатуры τ выполняется тождество

$$a(x_1, \dots, x_n) = b(x_1, \dots, x_n),$$

если значение левого терма совпадает со значением правого для любых значений переменных $x_1, \dots, x_n$ в $\mathfrak{A}$. При этом если среди основных операций системы $\mathfrak{A}$ есть частичные и если при некоторых значениях $x_1, \dots, x_n$ один из термов a или b имеет определенное значение, то требуется, чтобы другой терм также имел определенное значение, равное значению первого терма. Иногда вместо указанной выше записи $a = b$ для тождеств употребляется также запись $a \simeq b$ (см. Клини [2]).

Непосредственным обобщением понятия тождества является понятие условного тождества, определяемое следующим образом. Пусть τ — сигнатура рассматриваемых алгебраических систем и пусть $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$, a, b — какие-либо термы, содержащие, кроме сигнатурных символов, еще, быть может, предметные переменные $x_1, \dots, x_n$. Условным тождеством называется соотношение вида

$$a_1 = b_1 \& \dots \& a_p = b_p \Rightarrow a = b, \quad (4)$$

где $\&$ обозначает союз «и».

Говорят, что условное тождество (4) выполняется на алгебраической системе $\mathfrak{A}$, если для каждого значения переменных $x_1, \dots, x_n \in A$, для которых истинны равенства

$$a_i(x_1, \dots, x_n) = b_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, p),$$

равенство $a(x_1, \dots, x_n) = b(x_1, \dots, x_n)$ также истинно. Если в сигнатуре τ имеются частично функциональные знаки, то, как и выше, равенство $a_i = b_i$ считается выполненным, либо когда обе части его определены и имеют совпадающие значения, либо когда обе части не определены.

Класс K алгебраических систем заданной сигнатуры τ называется примитивным, если он состоит из всех систем сигнатуры τ , на которых выполняется некоторая фиксированная совокупность $\mathfrak{S}$ тождеств. Если K состоит из всех систем сигнатуры τ , на которых выполняются тождества фиксированной конечной совокупности $\mathfrak{S}$, то K называется финитно примитивным.

Аналогично класс всех алгебраических систем данной сигнатуры, на которых выполняется некоторая фиксированная система условных тождеств, называется квазипрimitives классом [7]. Если эта совокупность условных тождеств конечна, то класс K называется финитно квазипрimitives.

Пример 4. Группоидом называется алгебра с одной основной бинарной операцией. Полугруппой называется группоид, на котором выполнено тождество

$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z, \quad (5)$$

где $\times$ — символ основной операции.

Полугруппой с единицей называется алгебра, сигнатура которой состоит из предметного символа e и функционального бинарного символа, причем на алгебре должны выполняться тождества (5) и тождества

$$x \times e = x, \quad e \times x = x.$$

Полугруппой с левым сокращением называется полугруппа, на которой выполнено условное тождество

$$x \times y = x \times z \Rightarrow y = z.$$

Если на полугруппе выполнено условное тождество

$$y \times x = z \times x \Rightarrow y = z,$$

то полугруппа называется полугруппой с правым сокращением.

Полугруппа с левым и правым сокращениями называется двусторонне сократимой полугруппой.

Из этих определений видно, что группоиды, полугруппы, полугруппы с единицей составляют примитивные классы, а полугруппы с левым, правым или двусторонним сокращением образуют квазипримитивные классы.

Пример 5. Группой называется алгебра с двумя операциями — бинарной и одинарной, на которой выполняются тождества (5) и

$$x^{-1} \times (x \times y) = (y \times x) \times x^{-1} = y, \quad (6)$$

где $\times$ — символ бинарной, $^{-1}$ — символ одинарной операции.

Следовательно, группы составляют финитно примитивный класс.

Абелевы группы характеризуются тождествами (5), (6) и тождеством $x \times y = y \times x$. Поэтому класс абелевых групп также финитно примитивен.

Пример 6. Кольцом называется алгебра с двумя бинарными операциями и одной одинарной операцией при условии, что элементы алгебры удовлетворяют тождествам

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad (-x) + (x + y) = y,$$

$$x + y = y + x, \quad x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z),$$

где $+$, $\times$, $-$ — соответственно символы 1-й, 2-й, 3-й операций. Кольцо ассоциативно, если на нем выполнено тождество (5). Отсюда видно, что кольца и ассоциативные кольца снова образуют финитно примитивные классы.

Заметим еще, что поскольку каждое тождество $a = b$ можно записать и в виде условного тождества $x = x \Rightarrow a = b$, то каждый примитивный класс является одновременно и квазипримитивным классом.

Легко обнаруживается, что примитивные классы вместе с некоторой алгеброй содержат и все ее гомоморфные образы. Однако гомоморфный образ полугруппы с левым сокращением может не быть полугруппой с левым сокращением. Поэтому класс полугрупп с левым сокращением может служить примером финитно квазипримитивного класса, не являющегося примитивным.

1.4. Определяющие соотношения. Обозначим через K класс всех алгебр, сигнатура которых состоит из символов $a_1, \dots, a_k$ выделенных элементов и функциональных символов $f_1, \dots, f_l$ соответственно r_1 -арного, $\dots$, r_l -арного. Фиксируем какую-нибудь совокупность $\mathcal{E}$ условных тождеств, функциональные символы которых принадлежат сигнатуре τ . Пусть

K_0 — класс всех тех алгебр сигнатуры τ , которые порождаются своими выделенными элементами $a_1, \dots, a_k$ и на которых выполняются все условные тождества совокупности $\mathfrak{S}$. Класс K_0 неквазипримитивный, так как требование, чтобы все алгебры порождались выделенными элементами, не может быть записано в виде условного тождества.

Рассмотрим какие-либо две алгебры

$$\mathfrak{A} = \langle A; a_1, \dots, a_k; f_1, \dots, f_l \rangle, \quad \mathfrak{B} = \langle B; b_1, \dots, b_k; g_1, \dots, g_l \rangle$$

класса K_0 . Если существует гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, то при нем согласно п. 1.1 элементы $a_1, \dots, a_k$ должны переходить соответственно в элементы $b_1, \dots, b_k$. Но элементы $a_1, \dots, a_k$ порождают алгебру $\mathfrak{A}$. Поэтому, зная образы элементов $a_1, \dots, a_k$, мы знаем и весь гомоморфизм. Иначе говоря, существует не более одного гомоморфизма произвольной K_0 -алгебры на любую другую K_0 -алгебру.

Легко доказывается [7], что, какова бы ни была совокупность $\mathfrak{S}$ условных тождеств, в классе K_0 существует одна и с точностью до изоморфизма только одна алгебра, допускающая гомоморфное отображение на любую другую алгебру класса K_0 . Эта алгебра называется алгеброй, имеющей порождающие элементы $a_1, \dots, a_k$ и определяющие соотношения $\mathfrak{S}$.

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется конечно определенной условными тождествами, если она изоморфна алгебре, имеющей конечную систему порождающих элементов и конечную систему определяющих условных тождеств. Если определяющие соотношения являются не условными тождествами, а просто тождествами, то алгебра будет называться конечно определенной тождествами. В дальнейшем, если не оговорено явно противное, всегда под конечно определенными алгебрами понимаются алгебры, конечно определенные условными тождествами.

Определяющие соотношения обычно используются следующим образом: 1) при помощи совокупности $\mathfrak{S}$ некоторых условных тождеств фиксируют квазипримитивный класс алгебр K ; 2) к сигнатуре K добавляют систему новых индивидуальных символов $c_1, \dots, c_r$ и задают систему условных тождеств $\mathfrak{S}_1$, в записи которых совсем не встречается предметных переменных и, значит, встречаются лишь символы выделенных элементов класса K и дополнительные индивидуальные символы $c_1, \dots, c_r$. Такие условные тождества мы будем называть индивидуальными соотношениями.

Говорят, что алгебра $\mathfrak{A}$ задана порождающими элементами $c_1, \dots, c_r$ и определяющими соотношениями (индивидуальными) $\mathfrak{S}_1$ внутри квазипримитивного класса K , если $\mathfrak{A}$ имеет порождающие элементы $a_1, \dots, a_k$, $c_1, \dots, c_r$ и определяющие соотношения в этих элементах, состоящие из совокупности $\mathfrak{S}_1$ и совокупности $\mathfrak{S}$ условных тождеств, определяющих класс K .

Пусть внутри некоторого квазипримитивного класса K задана алгебра $\mathfrak{A}$ порождающими $c_1, \dots, c_r$ и совокупностью определяющих соотношений $\mathfrak{S}_1$ и алгебра $\mathfrak{B}$ порождающими элементами $d_1, \dots, d_q$ и определяющими соотношениями $\mathfrak{S}_2$. Допустим, что среди символов $c_1, \dots, c_r, d_1, \dots, d_q$ нет одинаковых. Тогда алгебра $\mathfrak{C}$, заданная внутри K порождающими элементами $c_1, \dots, c_r, d_1, \dots, d_q$ и системой определяющих соотношений, получающейся объединением совокупностей $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$, называется свободной композицией (свободным произведением) алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ внутри класса K . Если алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ соответственно изоморфны алгебрам $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, то $\mathfrak{C}_1$ также называется свободной композицией $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{B}_1$ внутри K .

Аналогично определяется и свободная композиция произвольной системы алгебр внутри K . Легко доказывается, что свободная композиция алгебр определяется с точностью до изоморфизма однозначно.

Пример 7. Пусть K — класс всех алгебр, сигнатура которого состоит лишь из функциональных знаков $f_1, \dots, f_l$. Алгебра $\mathfrak{A}$ указанной сигнатуры, имеющая порождающие $c_1, \dots, c_p$ и пустое множество определяющих соотношений в этих порождающих, называется абсолютно свободной алгеброй со свободными порождающими $c_1, \dots, c_p$. Конкретно эту алгебру можно представить следующим образом. Пусть A — множество всех термов сигнатуры $f_1, \dots, f_l, c_1, \dots, c_p$. На A определяем операции $f_1^0, \dots, f_l^0$, полагая

$$f_i^0(a_1, \dots, a_{r_i}) = f_i(a_1, \dots, a_{r_i}),$$

где $a_1, \dots, a_{r_i}$ — какие-либо термы. Алгебра $\langle A; f_1^0, \dots, f_l^0 \rangle$ и есть абсолютно свободная алгебра данной сигнатуры со свободными порождающими $c_1, \dots, c_p$. При этом операции $f_1^0, \dots, f_l^0$ и термы $c_1, \dots, c_p$ будут значениями сигнатурных символов $f_1, \dots, f_l$ и символов порождающих элементов $c_1, \dots, c_p$.

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется локально абсолютно свободной, если любая конечная совокупность элементов $\mathfrak{A}$ порождает абсолютно свободную подалгебру.

Легко доказывается, что каждая абсолютно свободная алгебра является локально абсолютно свободной и, более того, что любая подалгебра абсолютно свободной алгебры абсолютно свободна.

Также легко доказывается, что алгебра $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда локально абсолютно свободна, когда для любых x_α, y_β из $\mathfrak{A}$ имеют место соотношения

$$f_i(x_1, \dots, x_{r_i}) \neq f_j(y_1, \dots, y_{r_j}) \quad (i \neq j; i, j = 1, \dots, l),$$

$$f_i(x_1, \dots, x_{r_i}) = f_i(y_1, \dots, y_{r_i}) \rightarrow x_1 = y_1 \& \dots \& x_{r_i} = y_{r_i} \quad (i = 1, \dots, l).$$

В частности, группоид $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда локально абсолютно свободен, когда на нем выполнено условное тождество

$$xy = uv \rightarrow x = u \& y = v. \quad (7)$$

Это показывает, что класс всех локально свободных группоидов является квазипримитивным классом.

Легко построить примеры локально свободных группоидов, не являющихся свободными. Такими являются, например, «полные» локальные свободные группоиды, удовлетворяющие, помимо требования (7), еще условию, что каждый элемент разлагается в произведение двух других элементов.

1.5. Алгебры рекурсивных функций. Вводим следующие постоянные обозначения:

D — совокупность всех натуральных чисел $0, 1, 2, \dots$;

Φ — совокупность всех одноместных функций, определенных на D со значениями в D ;

Φ_c — совокупность всех одноместных частичных функций, определенных на D со значениями в D .

Рассмотрим следующие четыре операции, определенные на Φ_c :

а. *Сложение функций.* Пусть заданы $f, g \in \Phi_c$. Определяем функцию h , полагая $h(x) = f(x) + g(x)$, если $f(x)$ и $g(x)$ определены, и считая $h(x)$ неопределенной, если хотя бы одно из выражений $f(x), g(x)$ не определено. Функция h называется суммой функций f и g , символически: $h = f + g$.

б. *Суперпозиция функций.* Для функций $f, g \in \Phi_q$ определяем новую функцию h , полагая $h(x) = f(g(x))$, если $g(x)$ и $f(g(x))$ определены, и считая $h(x)$ неопределенной для остальных значений $x \in D$. Функция h называется суперпозицией функций f, g , символически: $h = f * g$.

в. *Итерирование функции.* Для заданной функции $f \in \Phi_q$ определяем новую функцию h , полагая $h(0) = 0$ и $h(n+1) = f(h(n))$, если $h(n)$ и $f(h(n))$ определены. Если же $h(n)$ или $f(h(n))$ не определены, то $h(x)$ для $x > n$ будет неопределенной. Функцию h будем называть итерацией функции f и обозначать через ιf или f^* .

г. *Обращение функции.* Для каждой функции $f \in \Phi_q$ вводим новую функцию f^{-1} , полагая $f^{-1}(a) = b$, если значения $f(x)$ для $x \leq b$ определены и $f(b) = a$, $f(x) \neq a$ для $x < b$. В противном случае $f^{-1}(a)$ считается неопределенной.

На множестве Φ_q все четыре операции $+$, $*$, ι , $^{-1}$ являются всюду определенными. Операция обращения на множестве Φ будет только частичной, так как обращение всюду определенной функции может оказаться функцией, не всюду определенной. Алгебры

$$\mathfrak{K}^* = \langle \Phi; \lambda, \kappa; +, *, \iota \rangle,$$

$$\mathfrak{K} = \langle \Phi_q; \lambda, \kappa; +, *, ^{-1} \rangle$$

и частичная алгебра

$$\mathfrak{K}^0 = \langle \Phi; \lambda, \kappa; +, *, ^{-1} \rangle,$$

где выделенными элементами служат функции

$$\lambda(x) = x + 1, \quad \kappa(x) = x - [\sqrt{x}]^2$$

($[y]$ — наибольшее целое, не превосходящее y), имеют фундаментальное значение в теории вычислимых функций.

Обозначим через $\Phi_{\text{пр}}$ совокупность функций, порождаемую функциями λ, κ при помощи операций $+$, $*$, ι , через $\Phi_{\text{ор}}$ — совокупность, порождаемую функциями λ, κ при помощи операций $+$, $*$, $^{-1}$ внутри алгебры $\mathfrak{K}^0$, и через $\Phi_{\text{чр}}$ — совокупность, порождаемую функциями λ, κ с помощью операций $+$, $*$, $^{-1}$ внутри алгебры $\mathfrak{K}$. Функции из совокупности $\Phi_{\text{пр}}$ называются примитивно рекурсивными, из совокупности $\Phi_{\text{ор}}$ — общерекурсивными и из совокупности $\Phi_{\text{чр}}$ — частично рекурсивными.

Согласно теоремам Р. Робинсона [20] и Ю. Робинсон [19], эти определения примитивно рекурсивных, общерекурсивных и частично рекурсивных функций равносильны их обычным определениям при помощи операций примитивной рекурсии и μ -операции, приведенных, например, в статье А. Н. Колмогорова и В. А. Успенского [3].

Из той же теоремы Ю. Робинсон видно, что операция итерирования функции является термальной в алгебре $\mathfrak{K}^0$. Поэтому все примитивно рекурсивные функции являются и общерекурсивными. С другой стороны, из представления Клини для частично рекурсивных функций следует, что $\Phi_{\text{ор}} = \Phi_{\text{чр}} \cap \Phi$, т. е. что каждая всюду определенная частично рекурсивная функция является общерекурсивной.

Алгебры

$$\mathfrak{K}_{\text{пр}} = \langle \Phi_{\text{пр}}; +, *, \iota \rangle,$$

$$\mathfrak{K}_{\text{чр}} = \langle \Phi_{\text{чр}}; +, *, ^{-1} \rangle$$

и частичная алгебра

$$\mathfrak{A}_{\text{ор}} = \langle \Phi_{\text{ор}}; +, *, ^{-1} \rangle$$

будут называться соответственно алгебрами примитивно рекурсивных, частично рекурсивных и общерекурсивных функций. Все эти 3 алгебры конечно порожденные. Далее будет показано (см. п. 4.2), что ни первая, ни вторая алгебры не являются конечно определенными. Третья алгебра частичная, а для частичных алгебр понятие конечной определенности нами выше вообще не вводилось.

Пусть $f \in \Phi_{\text{чр}}$. Подалгебра $\mathfrak{A}_f$ алгебры $\mathfrak{A}$, порожденная функцией f (вместе с выделенными функциями λ, κ), называется степенью неразрешимости функции f . Если $\mathfrak{A}_f = \mathfrak{A}_g$, то функции f и g имеют одинаковую степень неразрешимости. Если $\mathfrak{A}_f \subseteq \mathfrak{A}_g$ и $\mathfrak{A}_f \neq \mathfrak{A}_g$, то степень неразрешимости f меньше степени неразрешимости g . Если $\mathfrak{A}_f \not\subseteq \mathfrak{A}_g$ и $\mathfrak{A}_g \not\subseteq \mathfrak{A}_f$, то f и g имеют несравнимые степени неразрешимости. В частности, все частично рекурсивные функции имеют одну и ту же степень неразрешимости, равную $\mathfrak{A}_{\text{чр}}$ и наименьшую среди всех степеней неразрешимости.

Многие определения и теоремы дальше будут иметь одинаковые формулировки для примитивно рекурсивных, общерекурсивных и частично рекурсивных функций. Поэтому для краткости мы введем особый символ $\mathbf{R}$, значениями которого будут прилагательные «примитивно рекурсивный», «общерекурсивный» и «частично рекурсивный», сокращенно $\mathbf{R} = \text{пр, ор, чр}$.

Частичная n -местная функция $f(x_1, \dots, x_n)$, определенная на $\mathbf{D}$ со значениями в $\mathbf{D}$, называется $\mathbf{R}$ -функцией, если для любых одноместных $\mathbf{R}$ -функций $h_1(x), \dots, h_n(x)$ терм $f(h_1(x), \dots, h_n(x))$ представляет также $\mathbf{R}$ -функцию.

Этому определению можно придать более удобный вид. Рассмотрим последовательность

$$\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \dots \text{ всех пар}$$

натуральных чисел. Обозначим через $v(x, y)$ номер пары $\langle x, y \rangle$ в указанной последовательности, причем нумерацию начинаем с номера 0, так что $v(0, 0) = 0$, $v(0, 1) = 1$ и т. д. Через $l(n)$ и $r(n)$ обозначим соответственно левый и правый члены пары номера n . Таким образом,

$$v(l(n), r(n)) = n, \quad l(v(x, y)) = x, \quad r(v(x, y)) = y.$$

Для функций v, l, r легко выводятся формула [16]

$$v(x, y) = 1/2 ((x + y)^2 + 3x + y)$$

и аналогичные формулы для $l(x)$ и $r(x)$. Из них следует, в частности, что функции v, l и r являются примитивно рекурсивными.

По индукции определяем теперь серию функций $v_n(x_1, \dots, x_n)$ ($n = 2, 3, \dots$), полагая

$$v_2(x_1, x_2) = v(x_1, x_2)$$

и

$$v_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = v(x_1, v_n(x_2, \dots, x_{n+1})).$$

Число $v_n(x_1, \dots, x_n)$ будет далее называться стандартным номером n -ки $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$. При $v_n(x_1, \dots, x_n) = y$ имеем:

$$\begin{aligned} x_1 &= l(y) &= l_1^n(y), \\ x_2 &= l(r(y)) &= l_2^n(y), \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= l(r(\dots r(y))) &= l_n^n(y). \end{aligned}$$

Следовательно, функция $l_i^n(y)$, выражающая через y i -й член n -ки номера y , снова является примитивно рекурсивной.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — какая-либо n -местная $\mathbf{R}$ -функция. Тогда одночленная функция

$$f^\pi(x) = f(l_1^n(x), \dots, l_n^n(x)) \quad (8)$$

также является $\mathbf{R}$ -функцией ($\mathbf{R} = \text{пр, ор, чр.}$). Обратно, из (8) имеем

$$f(x_1, \dots, x_n) = f^\pi(v_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Поэтому, ставя функции f^π в соответствие функцию f , вычисленную по формуле (8), мы получаем одно-однозначное отображение множества Φ всех одноместных $\mathbf{R}$ -функций на класс Φ^n всех n -местных $\mathbf{R}$ -функций.

Пусть M — подмножество множества натуральных чисел. Функция $\chi_M(x)$, равная 1 в точках M и равная 0 вне M , называется характеристической функцией M . Множество M называется примитивно рекурсивным или общерекурсивным, если его характеристическая функция соответственно примитивно рекурсивна или общерекурсивна. Множество M называется рекурсивно перечислимым, если оно пусто или является совокупностью значений подходящей одноместной примитивно рекурсивной функции. Рекурсивно перечислимые множества далее иногда будут называться частично рекурсивными. Таким образом, будет иметь понятный смысл выражение $\mathbf{R}$ -множество. В частности, легко доказывается [2], что M тогда и только тогда $\mathbf{R}$ -множество, когда оно есть совокупность решений уравнения $f(x) = 0$, левая часть которого есть подходящая $\mathbf{R}$ -функция ($\mathbf{R} = \text{пр, ор, чр.}$).

В дальнейшем будут встречаться функции $\div$, sg , $\overline{\text{sg}}$, ex , определяемые следующим образом (см. [2, 16]):

$$\begin{aligned} x \div y &= \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geq y, \\ 0 & , \text{ если } x < y; \end{cases} \\ \overline{\text{sg}} x &= 1 \div x, \quad \text{sg } x = 1 - \overline{\text{sg}} x. \end{aligned}$$

Через p_n обозначают $(n + 1)$ -е простое число, так что $p_0 = 2$, $p_1 = 3$ и т. д. Если $n = p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ есть разложение числа n на простые множители, то по определению пишут $\text{ex}(i, n) = \alpha_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Для определенности полагают еще $\text{ex}(i, 0) = 0$.

Все перечисленные функции, равно как и обычные арифметические функции xy , $\left[\frac{x}{y}\right]$ ($\left[\frac{x}{0}\right] = x$), $\lceil \sqrt{x} \rceil$, — примитивно рекурсивны.)

§ 2. Нумерованные множества

2.1. Отображения нумерованных множеств. Пусть A — произвольное непустое конечное или счетное множество. Нумерацией α множества A называется однозначное отображение некоторого подмножества D_α совокупности $D = \{0, 1, 2, \dots\}$ всех натуральных чисел на A . Подмножество D_α называется номерным множеством нумерации α . Если $n \in D_\alpha$ и $\alpha n = a$, то n называется α -номером элемента a .

С каждой нумерацией α естественно связывается отношение эквивалентности θ_α , определенное на множестве D_α следующим образом: числа m, n из D_α называются находящимися в отношении θ_α , если $\alpha m = \alpha n$, т. е. если они оба суть номера одного и того же элемента $a \in A$ относительно θ_α ; множество D_α расслаивается на смежные классы, совокупность которых обозначается через D_α/θ_α . Нумерация α естественным образом порождает одно-однозначное отображение D_α/θ_α на A , называемое каноническим отображением.

Нумерация α называется однозначной, если отображение D_α на A взаимно однозначно, т. е. если каждый элемент A имеет лишь один номер. Если

$$D_\alpha = D,$$

то α называется простой нумерацией.

Множество A , рассматриваемое вместе с какой-либо его нумерацией, называется нумерованным множеством.

Подмножество E числового множества D_α называется $\mathbf{R}$ -подмножеством D_α ($\mathbf{R} = \text{пр, ор, чр}$), если

$$E = D_\alpha \cap M,$$

где M есть $\mathbf{R}$ -множество в обычном абсолютном смысле [3]. Подмножество C нумерованного множества A с нумерацией α называется его $\mathbf{R}$ -подмножеством, если $\mathbf{R}$ -подмножеством в D_α является совокупность всех α -номеров элементов C .

Нумерация α множества A легко преобразуется в нумерацию $\alpha^{(n)}$ всех n -к $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ элементов A . Именно, пусть $D_\alpha^{(n)}$ есть совокупность стандартных номеров n -к $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, где $x_1, \dots, x_n \in D_\alpha$. Тогда для $x_1, \dots, x_n \in D_\alpha$ по определению полагаем

$$\alpha^{(n)} \vee (x_1, \dots, x_n) = \langle \alpha x_1, \dots, \alpha x_n \rangle.$$

Совокупность M некоторых n -к элементов множества A будет называться $\mathbf{R}$ -множеством, если $\mathbf{R}$ -подмножеством множества $D_\alpha^{(n)}$ является совокупность всех $\alpha^{(n)}$ -номеров n -к из M .

Предикат $P(a_1, \dots, a_n)$, определенный на нумерованном множестве A , будет называться $\mathbf{R}$ -предикатом на A , если $\mathbf{R}$ -множеством является совокупность тех n -к $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ элементов A , на которых P истинен.

Нумерацию α множества A условимся называть позитивной, если ее номерное множество D_α и соответствующая эквивалентность θ_α рекурсивно перечислимы. Нумерация α будет называться негативной, если рекурсивно перечислимы D_α и отрицание $\sim \theta_\alpha$ отношения θ_α . Нумерацию α назовем разрешимой, если отношение θ_α общерекурсивно. Указанные 3 типа нумераций: позитивные, негативные и разрешимые — обычно встречаются в наиболее важных конкретных случаях.

Согласно Посту [17], если числовое множество и его дополнение одновременно рекурсивно перечислимы, то они оба общерекурсивны. Отсюда вытекает, что если простая нумерация одновременно позитивна и негативна, то она разрешима.

Отображение φ множества A с нумерацией α в множество B с нумерацией β назовем **R-отображением**, если существует **R-функция** $f(x)$, отображающая D_α в D_β и удовлетворяющая соотношению

$$\varphi(\alpha n) = \beta f(n) \quad (n \in D_\alpha). \quad (9)$$

Одно-однозначное **R-отображение** A на B будет называться **R-мономорфизмом** A на B . **R-мономорфизм** A на B будет называться **R-эквивалентностью** A на B , если обратное отображение B на A есть также **R-мономорфизм**.

Нумерованное множество A **R-мономорфно** множеству B , если существует **R-мономорфизм** A на B . A **R-эквивалентно** B , если существует **R-эквивалентность** A на B .

Одно-однозначное отображение φ множества A с нумерацией α на множество B с нумерацией β назовем **R-униморфизмом**, если существует **R-функция** $f(x)$, одно-однозначно отображающая D_α на D_β и удовлетворяющая соотношению (9). **R-униморфизм** A на B , у которого обратное отображение есть **R-униморфизм** B на A , называется **R-изоморфизмом** A на B .

Нумерованное множество A будет называться **R-униморфным** множеством B , если существует **R-униморфизм** A на B . Множество A **R-изоморфно** B , если существует **R-изоморфизм** A на B .

Ясно, что каждый **R-униморфизм** есть в то же время и **R-мономорфизм**, и потому каждый **R-изоморфизм** является и **R-эквивалентностью**. В частности, из **R-изоморфизма** множеств заведомо следует их **R-эквивалентность**. Кроме того, отношения **R-изоморфизма** и **R-эквивалентности** рефлексивны, симметричны и транзитивны.

Отношения **R-мономорфизма** и **R-униморфизма** рефлексивны, транзитивны, но, в общем случае, не симметричны. Поэтому, в общем случае, упомянутые отношения слабее, чем соответственные отношения **R-эквивалентности** и **R-изоморфизма**. Однако существуют важные случаи, когда отношения униморфизма и мономорфизма оказываются равносильными изоморфизму и соответственно эквивалентности. Такие случаи указывает

Т е о р е м а 2.1.1. Пусть A, B — нумерованные множества с нумерациями α и β . Если номерное множество D_α рекурсивно перечислимо, то каждый чр-униморфизм A на B является чр-изоморфизмом A на B , причем из чр-изоморфизма A и B следует рекурсивная перечислимость D_β .

Если же рекурсивно перечислимо D_α и абсолютно рекурсивно перечислима эквивалентность θ_β , то каждый чр-мономорфизм A на B является чр-эквивалентностью.

Для доказательства первого утверждения теоремы обозначим через $f(x)$ чр-функцию, одно-однозначно отображающую D_α на D_β и удовлетворяющую соотношению (9). По предположению D_α совпадает с множеством всех значений подходящей примитивно рекурсивной функции $h(x)$. Следовательно, D_β есть совокупность значений ор-функции $f(h(x))$, и потому D_β рекурсивно перечислимо. Чр-функция

$$f^{-1}(x) = h(\mu z (x = f(h(z))))$$

одно-однозначно отображает D_β на D_α и удовлетворяет соотношению (9), записанному в соответствующем виде. Поэтому A чр-изоморфно B .

Переходя к доказательству последнего утверждения теоремы, обозначим через $\xi(n)$, $\eta(n)$ и $h(x)$ такие примитивно рекурсивные функции, что D_α есть совокупность всех значений функции $h(x)$, а совокупность пар $\langle \xi(n), \eta(n) \rangle$ ($n = 0, 1, \dots$) есть множество всех пар чисел, связанных с эквивалентностью θ_β .

Пусть $f(x)$ — чр-функция, реализующая заданный мономорфизм A на B . Из условий теоремы следует, что для каждого $x \in D_\beta$ найдутся числа $y \in D_\beta$ и $z \in D_\alpha$, удовлетворяющие условию

$$x \theta_\beta y \ \& \ f(z) = y.$$

Поэтому чр-функция

$$F(x) = h(r(\mu z(|x - \xi(l(z))| + |\eta(l(z)) - f(h(r(z)))| = 0))),$$

где $l(x)$, $r(x)$ — функции из п. 1.5, связанные с нумерацией пар, определена для $x \in D_\beta$, однозначно отображает D_β в D_α и связана с обратным мономорфизмом B на A соотношением (9), что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 2.1.2. Если множество A с нумерацией α , обладающей общерекурсивным номерным множеством D_α , чр-униморфно (чр-мономорфно) нумерованному множеству B , то A является и ор-униморфным (ор-мономорфным) множеству B .

По условию существует чр-функция $f(x)$, одно-однозначно отображающая D_α на D_β и удовлетворяющая соотношению (9). Так как D_α — рекурсивное множество, то функция

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in D_\alpha, \\ 0, & \text{если } x \notin D_\alpha, \end{cases}$$

общерекурсивная, одно-однозначно отображающая D_α на D_β и удовлетворяющая соотношению (9). Аналогично рассматривается и случай мономорфизмов.

Из теорем 2.1.1 и 2.1.2 следует, что отношение ор-униморфизма равносильно отношению ор-изоморфизма на классе нумерованных множеств с общерекурсивными номерными множествами.

Т е о р е м а 2.1.3. Пусть φ есть R -отображение множества A с нумерацией α в множество B с нумерацией β и пусть N — какое-либо R -подмножество в B . Тогда полный прообраз M подмножества N в множество A будет также R -подмножеством.

Обозначим через $f(x)$ R -функцию, отвечающую отображению φ . По условию N есть R -подмножество в B . Это значит, что для подходящей R -функции $\chi(x)$ множество всех решений уравнения $\chi(x) = 1$, лежащих в D_β , будет совокупностью всех β -номеров элементов N . Но в таком случае, как легко убедиться, множество всех решений уравнения $\chi(f(x)) = 1$, лежащих в D_α , будет совпадать с совокупностью всех α -номеров всех элементов прообраза M множества N . Так как $\chi(f(x))$ есть R -функция, то M есть R -подмножество в A .

Данное выше определение понятия R -предиката мы хотим теперь распространить на произвольные функции с числовыми значениями и на произвольные операции, определенные на нумерованных множествах.

Пусть $g(a_1, \dots, a_n)$ — функция с натуральными числовыми значениями, определенная на множестве A с нумерацией α . Эта функция будет называться R -функцией на A , если существует обычная R -функция $G(x_1, \dots$

$\dots, x_n)$, заведомо определенная для $x_1, \dots, x_n \in D_\alpha$ и удовлетворяющая условию

$$g(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = G(x_1, \dots, x_n). \quad (10)$$

Сравнивая это определение с соответствующим определением $\mathbf{R}$ -предикатов, видим, что при $\mathbf{R} = \text{пр}$, ор предикат P тогда и только тогда есть $\mathbf{R}$ -предикат на A , когда его характеристическая функция есть $\mathbf{R}$ -функция на A .

Для $\mathbf{R} = \text{чр}$ имеет место измененное условие: предикат P тогда и только тогда рекурсивно перечислим на A , когда частично рекурсивной является функция, равная 1 в точках истинности P и неопределенная во всех остальных точках.

Согласно п. 1.1 частичная функция $h(a_1, \dots, a_n)$, определенная на множестве A со значениями в этом же множестве, называется частичной операцией на A . Если множество A с нумерацией α , то $h(a_1, \dots, a_n)$ называется $\mathbf{R}$ -операцией на A , если существует $\mathbf{R}$ -функция $H(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющая соотношению

$$h(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha H(x_1, \dots, x_n),$$

где для каждого $x_1, \dots, x_n \in D_\alpha$ из определенности левой части следует определенность правой, и если множество n -к, на которых h определена, есть $\mathbf{R}$ -множество.

Т е о р е м а 2.1.4. Если числовая функция $g(a_1, \dots, a_n)$ или предикат $P(a_1, \dots, a_n)$, определенные на множестве A с нумерацией α , при $\mathbf{R}$ -монотоморфизме φ множества A на множество B с нумерацией β переходят соответственно в $\mathbf{R}$ -функцию $g_1(b_1, \dots, b_n)$ или $\mathbf{R}$ -предикат P_1 на B , то функция g и соответственно предикат P являются также $\mathbf{R}$ -функцией или $\mathbf{R}$ -предикатом.

Действительно, условие, что g переходит при монотоморфизме φ в функцию g_1 , означает, что

$$g(a_1, \dots, a_n) = g_1(\varphi a_1, \dots, \varphi a_n).$$

Пусть $G_1(x_1, \dots, x_n)$ — числовая $\mathbf{R}$ -функция, определенная для $x_1, \dots, x_n \in D_\beta$ и удовлетворяющая условию $g_1(\beta x_1, \dots, \beta x_n) = G_1(x_1, \dots, x_n)$, и пусть $f(x)$ есть $\mathbf{R}$ -функция, осуществляющая монотоморфизм φ . Тогда

$$G(x_1, \dots, x_n) = G_1(f(x_1), \dots, f(x_n))$$

будет $\mathbf{R}$ -функцией, определенной для $x_1, \dots, x_n \in D_\alpha$ и удовлетворяющей соотношению (10).

Рассмотрение предикатов сводится к рассмотрению множеств точек истинности их, и потому утверждение теоремы 2.1.4 относительно предикатов сводится к утверждению теоремы 2.1.3.

Т е о р е м а 2.1.5. Числовые $\mathbf{R}$ -функции, $\mathbf{R}$ -предикаты и частичные $\mathbf{R}$ -операции, определенные на нумерованном множестве A , при $\mathbf{R}$ -эквивалентном отображении A на B переходят соответственно в $\mathbf{R}$ -функции, $\mathbf{R}$ -предикаты и частичные $\mathbf{R}$ -операции на B .

Справедливость утверждения относительно числовых функций и предикатов непосредственно следует из предыдущей теоремы. Поэтому рассмотрим случай, когда на A задана частичная операция $h(a_1, \dots, a_n)$.

Пусть $\mathbf{R}$ -функция $f(x)$ осуществляет монотоморфизм φ A на B и $\mathbf{R}$ -функция $g(x)$ осуществляет обратный монотоморфизм φ^{-1} . Обозначим через $H(x_1, \dots$

$\dots, x_n)$ $\mathbf{R}$ -функцию, отвечающую операции h на A . Возьмем какие-нибудь числа $x_1, \dots, x_n$ из D_β . Требуется найти какой-либо номер элемента $h_1(\beta x_1, \dots, \beta x_n)$, где h_1 — операция, в которую переходит h при отображении φ . Поступаем так: числа $g(x_1), \dots, g(x_n)$ суть номера соответственных элементов $\varphi^{-1}(\beta x_1), \dots, \varphi^{-1}(\beta x_n)$ в A и потому $f(H(g(x_1), \dots, g(x_n)))$ — один из номеров элемента $h_1(\beta x_1, \dots, \beta x_n)$. Следовательно, функция

$$H_1(x_1, \dots, x_n) = f(H(g(x_1), \dots, g(x_n)))$$

отвечает операции h_1 в B . Являясь суперпозицией $\mathbf{R}$ -функций, H_1 сама $\mathbf{R}$ -функция.

С л е д с т в и е. При $\mathbf{R}$ -изоморфизмах позитивно или негативно нумерованное множество переходит снова с позитивно или соответственно негативно нумерованное множество. Если множества A, B имеют рекурсивно перечислимые номерные множества, множество A позитивно или негативно и A $\mathbf{R}$ -эквивалентно B , то B также позитивно или соответственно негативно.

Действительно, позитивность или негативность нумерованного множества означает, что его номерное множество рекурсивно перечислимо и что отношение равенства или соответственно неравенства двух элементов этого множества является на нем рекурсивно перечислимым предикатом. Поэтому оба утверждения рассматриваемого следствия непосредственно вытекают из теорем 2.4.1 и 2.4.5.

2.2. Унивалентная сводимость нумераций. Мы сравнивали пока нумерации α, β , вообще говоря, различных множеств A, B . Теперь более детально будут изучены нумерации одного и того же множества A .

Как и в предшествующем пункте, символом $\mathbf{R}$ будем обозначать произвольное из выражений «примитивно рекурсивная», «общерекурсивная», «частично рекурсивная».

Пусть α, β — какие-то нумерации множества A . Говорят, что частичная функция $f(x)$ сводит нумерацию α к нумерации β , если $f(x)$ определена для всех $x \in D_\alpha$, для каждого $x \in D_\alpha$ имеем $f(x) \in D_\beta$ и если $\alpha x = \beta f(x)$ ($x \in D_\alpha$), т. е. если для каждого α -номера x произвольного элемента αx совокупности A $f(x)$ будет β -номером того же элемента.

Нумерация α будет называться $\mathbf{R}$ -мульти-сводимой или, короче, $\mathbf{R}$ -сводимой к нумерации β (символически $\alpha \leq_{Rm} \beta$), если существует $\mathbf{R}$ -функция, сводящая α к β .

Нумерация α будет называться $\mathbf{R}$ -односводимой к β (символически $\alpha \leq_R \beta$), если существует $\mathbf{R}$ -функция, унивалентная на D_α и сводящая α к β .

Наконец, нумерация α будет называться $\mathbf{R}$ -униморфной нумерации β (символически $\alpha \leq_{R1} \beta$), если существует $\mathbf{R}$ -функция, сводящая α к β и одно-однозначно отображающая D_α на все D_β .

Ясно, что каждое из отношений $\leq_{Rm} \leq_{R1} \leq_R$ рефлексивно и транзитивно и что для каждого значения $\mathbf{R}$ эти отношения связаны импликациями

$$\alpha \leq_R \beta \Rightarrow \alpha \leq_{R1} \beta \Rightarrow \alpha \leq_{Rm} \beta.$$

Если D_α — рекурсивное множество и нумерация α сводится к нумерации β частично рекурсивной функцией $f(x)$, то функция

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in D_\alpha, \\ 0, & \text{если } x \in \overline{D_\alpha}, \end{cases}$$

будет рекурсивной функцией, сводящей α к β . Поэтому при рекурсивном номерном множестве D_α частично рекурсивная мульти- или односводимость α к β равносильна рекурсивной мульти- или соответственно односводимости α к β . Однако при произвольных D_α, D_β все введенные выше сводимости не равносильны друг другу. Приведем лишь пример, показывающий, что частично рекурсивная мультисводимость вообще отличается от общерекурсивной мультисводимости.

П р и м е р 8. Известно, что существуют частично рекурсивные функции, которые нельзя доопределить до рекурсивных функций [2]. Пусть $F(x)$ — одна из таких функций. Обозначим через D_α область определенности $F(x)$ и пусть A — совокупность значений, принимаемых $F(x)$ на D_α . Число $x \in D_\alpha$ условимся называть α -номером числа $F(x) \in A$, а β -номером числа $y \in A$ назовем само это число y . Таким образом, $\alpha x = F(x)$ и $D_\beta = A$. Допустим, что какая-нибудь функция $f(x)$ сводит нумерацию α к нумерации β . Условие переписывается теперь в виде $F(x) = f(x)$ ($x \in D_\alpha$), означаящем, что $f(x)$ — некоторое доопределение функции $F(x)$. Поскольку общерекурсивных доопределений $F(x)$ не имеет, что нумерация α рекурсивно несводима к β , хотя α мультисводима к β частично рекурсивной функцией $F(x)$ и множество D_α как область существования частично рекурсивной функции $F(x)$ является рекурсивно перечислимым.

Нумерация α произвольного множества A выше была названа простой, если номерное множество D_α есть множество всех натуральных чисел. Следующая очевидная теорема показывает, что при довольно широких предположениях изучение произвольных нумераций можно сводить к изучению простых нумераций.

Т е о р е м а 2.2.1. Для каждой нумерации α множества A с бесконечным рекурсивно перечислимым номерным множеством D_α существует простая нумерация β того же множества, общерекурсивно униморфная нумерации α .

Известно, что каждое непустое рекурсивно перечислимое множество есть совокупность всех значений подходящей унивалентной рекурсивной функции [2]. Поэтому можно считать, что

$$D_\alpha = \{h(0), h(1), h(2), \dots\},$$

где $h(x)$ — рекурсивная унивалентная функция. Нумерацию β множества A определяем формулой

$$\beta x = \alpha h(x) \quad (x = 0, 1, 2, \dots).$$

Нумерация β простая, а рекурсивная функция $h(x)$ униморфно сводит β к α .

Вернемся снова к рассмотрению произвольных нумераций α, β какого-либо непустого множества A . Нумерацию α будем называть R -мультисводимой к β , а β R -мультисводима к α . Нумерацию α условимся называть R -одноэквивалентной β (символически $\alpha \equiv_{R1} \beta$), если α R -односводима к β , а β R -односводима к α . Наконец, нумерация α будет называться R -изоморфной нумерации β (символически $\alpha \equiv_R \beta$), если α R -униморфна β , а β R -униморфна α .

Все эти определения можно короче представить одной схемой:

$$\alpha \equiv_{R1} \beta \Leftrightarrow \alpha \leq_{R1} \beta \text{ \& } \beta \leq_{R1} \alpha \quad (i = m, 1, 0; R0 = R).$$

Введенные таким способом отношения мультиэквивалентности, одноэквивалентности и изоморфизма, очевидно, рефлексивны, транзитивны и симметричны.

Сравнивая понятия униморфизма и изоморфизма нумераций одного и того же множества A с введенными в предшествующем пункте понятиями униморфизма и изоморфизма различных нумерованных множеств, непосредственно видим, что униморфизм (изоморфизм) нумераций α, β означает, что униморфизмом (изоморфизмом) является тождественное отображение A с нумерацией α на A с нумерацией β . Поэтому из результатов п. 2.1, в частности, следует, что R -униморфизм нумерации α множества A , имеющей рекурсивно перечислимое номерное множество D_α , на какую-либо другую нумерацию β множества A влечет за собою R -изоморфизм этих нумераций.

Напомним, что нумерации, имеющие в качестве номерного множества совокупность всех натуральных чисел, называются простыми. Теперь, обобщая одну теорему Майхила [14], относящуюся к теории сводимости проблем, приходим к следующему предложению.

Т е о р е м а 2.2.2. *R -одноэквивалентность простых нумераций α, β равносильна их R -изоморфизму.*

Уже отмечалось, что R -изоморфизм нумераций влечет их R -одноэквивалентность. Для доказательства обратного утверждения условимся, следуя Майхилу, называть финитным соответствием каждую конечную последовательность:

$$\langle x_0, {}^{\alpha}y_0 \rangle, \langle x_1, {}^{\alpha}y_1 \rangle, \dots, \langle x_k, {}^{\alpha}y_k \rangle \quad (11)$$

пар натуральных чисел, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} x_i &= x_j \Leftrightarrow {}^{\alpha}y_i = {}^{\alpha}y_j, \\ {}^{\alpha}x_i &= {}^{\beta}y_i \quad (i, j = 0, 1, \dots, k). \end{aligned}$$

Номером финитного соответствия (11) назовем число

$$n = \prod_{i=0}^k p_i^{1+v(x_i, {}^{\alpha}y_i)}, \quad (12)$$

где $p_0 = 2, p_1 = 3, \dots$ — последовательные простые числа, а $v(x, y)$ — стандартный номер пары $\langle x, y \rangle$, вычисляемый согласно п. 1.5.

По предположению существует R -функция $f(x)$, однозначно сводящая α к β , и R -функция $g(x)$, однозначно сводящая β к α . С помощью функций f, g мы хотим теперь построить R -функции $S(m, n)$ и $T(m, n)$, значения которых были бы равны номерам финитных соответствий

$$\langle x_0, {}^{\alpha}y_0 \rangle, \dots, \langle x_k, {}^{\alpha}y_k \rangle, \langle m, {}^{\alpha}y_{k+1} \rangle \quad (13)$$

и соответственно

$$\langle x_0, {}^{\alpha}y_0 \rangle, \dots, \langle x_k, {}^{\alpha}y_k \rangle, \langle x_{k+1}, m \rangle,$$

где n — номер соответствия (11), m — произвольное число, а x_{k+1}, y_{k+1} — подходящие числа, зависящие от m и n . Укажем сначала построение функции $S(m, n)$.

Пусть заданы число m и соответствие (11), номер которого n .

а. Если $m \in \{x_0, \dots, x_k\}$ и i — наименьшее, удовлетворяющее условию $x_i = m$, то полагаем $y_{k+1} = y_i$.

б. Если $m \in \{x_0, \dots, x_k\}$ и $f(m) \in \{y_0, \dots, y_k\}$, то полагаем $y_{k+1} = f(m)$.

в. Если $m \in \{x_0, \dots, x_k\}$, но $f(m) \in \{y_0, \dots, y_k\}$, то берем наименьшее i_1 , для которого $f(m) = y_{i_1}$, и рассматриваем $f(x_{i_1})$. Если $f(x_{i_1}) \in \{y_0, \dots, y_k\}$ и i_2 — наименьшее, удовлетворяющее условию $f(x_{i_1}) = y_{i_2}$, то рассматриваем $f(x_{i_2})$ и т. д. Докажем, что числа $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots$ попарно различны и, следовательно, что найдется число s , не большее $k + 1$, для которого $f(x_{i_s}) \in \{y_0, \dots, y_k\}$. В самом деле, пусть для некоторого u числа $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_u}$ попарно различны и пусть $f(x_{i_u}) = y_{i_{u+1}}$. Если бы оказалось, что $y_{i_{u+1}} = y_{i_v}$ ($1 \leq v \leq u$), то мы бы имели $f(x_{i_u}) = f(x_{i_{v-1}})$, откуда ввиду унивалентности f получаем $x_{i_u} = x_{i_{v-1}}$ и $y_{i_u} = y_{i_{v-1}}$ вопреки предположению.

Итак, для подходящего $s \leq k + 1$ будем иметь

$$f(m) = y_{i_1}, \quad f(x_{i_1}) = y_{i_2}, \quad \dots, \quad f(x_{i_{s-1}}) = y_{i_s}, \quad f(x_{i_s}) \in \{y_0, \dots, y_k\}. \quad (14)$$

В этом случае полагаем $y_{k+1} = f(x_{i_s})$.

Легко видеть, что во всех случаях последовательность (13) будет конечным соответствием.

Тем самым функция $S(m, n)$ определена. Меняя ролями $f, x_0, \dots, x_k$ и $g, y_0, \dots, y_k$, легко определяем аналогичным образом и функцию $T(m, n)$. Остается доказать, что S и T суть R-функции. Для этого введем следующие вспомогательные функции:

$$\varphi(n) = \mu z (\overline{\text{sg}} \text{ rest}(n, p_z) = 0),$$

$$\psi(i, n) = l(\text{ex}(i, n) \div 1) + n \overline{\text{sg}} \text{ ex}(i, n),$$

$$\psi'(i, n) = r(\text{ex}(i, n) \div 1) + n \overline{\text{sg}} \text{ ex}(i, n).$$

Очевидно, если n — номер соответствия (14), то $\varphi(n) = k + 1$ и

$$\psi(i, n) = \begin{cases} x_i, & \text{если } i < k + 1, \\ n, & \text{если } i \geq k + 1; \end{cases} \quad \psi'(i, n) = \begin{cases} y_i, & \text{если } i < k + 1, \\ n, & \text{если } i \geq k + 1. \end{cases}$$

Положим еще

$$\chi(m, n) = \mu z \left((\varphi(n) \div z) \prod_{i=0}^z |m - \psi(i, n)| = 0 \right),$$

$$\chi'(m, n) = \mu z \left((\varphi(n) \div z) \prod_{i=0}^z |m - \psi'(i, n)| = 0 \right).$$

Так как

$$m \in \{x_0, \dots, x_k\} \Leftrightarrow \prod_{i=0}^k |m - x_i| = 0,$$

то

$$\chi(m, n) = \begin{cases} i, & \text{если } m \in \{x_0, \dots, x_{i-1}\}, \quad m = x_i, \quad i < k + 1, \\ k + 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\chi'(m, n) = \begin{cases} i, & \text{если } m \in \{y_0, \dots, y_{i-1}\}, \quad m = y_i, \quad i < k + 1, \\ k + 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Наконец, полагаем

$$\theta(n, x, 0) = \chi'(x, n); \quad \theta(n, x, s+1) = \chi'(f(\psi(\theta(n, x, s), n)), n).$$

Теперь легко видеть, что в случае «в» при выполнении условий (14) имеем $\theta(n, f(m), 0) = i_1, \dots, \theta(n, f(m), s-1) = i_s, \quad \theta(n, f(m), s) = k+1$ и, следовательно,

$$s = s(m, n) = \sum_{i=0}^k \prod_{j=0}^i \operatorname{sg} |\theta(n, f(m), j) - (k+1)|.$$

При помощи указанных вспомогательных функций определение функции $S(m, n)$ можно выразить следующей схемой:

$$S(m, n) = \begin{cases} nP_{\varphi(n)}^{\operatorname{ex}(\chi(m, n), n)}, & \text{если } \chi(m, n) < \varphi(n), \\ nP_{\varphi(n)}^{1+\nu(m, f(m))}, & \text{если } \chi(m, n) \geq \varphi(n) \text{ и } \chi'(f(m), n) \geq \varphi(n), \\ nP_{\varphi(n)}^{1+\nu(m, f(\psi(\theta(n, f(m), s-1), n)))} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из формул, определяющих функции $\varphi, \psi, \chi, \chi'$, видно, что эти функции примитивно рекурсивны. Что касается функций θ и $S(m, n)$, то они примитивно рекурсивны или общерекурсивны в зависимости от того, примитивно рекурсивна или общерекурсивна функция $f(x)$. Поэтому из указанной схемы для $S(m, n)$ видно, что если $f(x)$ есть **R**-функция (**R** = пр, ор), то $S(m, n)$ также **R**-функция.

Аналогично доказывается и то, что если $g(x)$ есть **R**-функция, то $T(m, n)$ также **R**-функция.

Итак, функция $S(m, n)$ позволяет любое финитное соответствие (11) пополнить парой $\langle m, y_{k+1} \rangle$, содержащей в качестве левого элемента произвольно заданное число m , а функция $T(m, n)$ позволяет финитное соответствие (11) пополнить парой $\langle x_{k+1}, m \rangle$, содержащей m в качестве правого элемента. Берем теперь в качестве начального соответствия соответствие, состоящее всего из одной пары $\langle 0, f(0) \rangle$, а затем постепенно, применяя поочередно функции S и T , расширяем его до отображения D на D .

Для более точного описания этого расширения введем функцию $\eta(n)$, равную номеру n -го расширения начального соответствия, полагая по определению

$$\eta(0) = P_0^{1+\nu(0, f(0))}, \\ \eta(n+1) = \begin{cases} T(n/2, \eta(n)), & \text{если } n \text{ четно,} \\ S((n+1)/2, \eta(n)), & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Таким образом, функция $\eta(n)$ возникает посредством примитивной рекурсии из **R**-функции

$$S\left(\left[\frac{n+1}{2}\right], z\right) \left(n - 2\left[\frac{n}{2}\right]\right) + T\left(\left[\frac{n}{2}\right], z\right) \left|n - 2\left[\frac{n}{2}\right] - 1\right|$$

и потому сама является **R**-функцией.

Рассмотрим, наконец, функцию $y = h(x)$, значение которой при значении x , равном левому числу какой-либо пары финитного соответствия номера $\eta(n)$, равно правому числу той же пары. Пусть $x = h^{-1}(y)$ — обратная функция.

Согласно схеме последняя пара финитного соответствия, имеющего номер $\eta(2x)$, имеет вид (x, y_{k+1}) , причем

$$y_{k+1} = r(\text{ex}(2x, \eta(2x)) - 1),$$

где $r(n)$, $l(n)$ — соответственно правый и левый элементы пары стандартного номера n . Отсюда

$$y = h(x) = r(\text{ex}(2x, \eta(2x)) - 1)$$

и, следовательно, $h(x)$ есть $\mathbf{R}$ -функция.

Аналогичным образом для $h^{-1}(y)$ получаем формулу

$$x = h^{-1}(y) = l(\text{ex}(\varphi(\eta(2y + 1)), \eta(2y + 1)) - 1),$$

показывающую, что h^{-1} также $\mathbf{R}$ -функция.

Таким образом, функция $h(x)$ сводит $\mathbf{R}$ -униморфно α к β , а функция h^{-1} сводит $\mathbf{R}$ -униморфно β к α и, значит, α и β $\mathbf{R}$ -изоморфны.

Следующий очевидный пример показывает, что теорема 2.2.2, вообще говоря, теряет силу для непростых нумераций.

Пример 9. Пусть множество A состоит лишь из одного элемента, D_α — совокупность всех четных чисел, D_β — какое-нибудь множество, содержащее все четные числа и не являющееся рекурсивно перечислимым. Функция x однозначно сводит α к β , а функция $2x$ однозначно сводит β к α . Однако α не может быть частично рекурсивно изоморфной β , поскольку совокупность значений частично рекурсивной функции для всех четных значений аргумента есть множество непременно рекурсивно перечислимое.

Чтобы короче сформулировать обобщение теоремы 2.2.2 на случай непростых нумераций, условимся под символом $\mathbf{R}'$ понимать одно из свойств: «общерекурсивная» или «частично рекурсивная» для функций и соответственно «рекурсивное» или «рекурсивно перечислимое» для множеств.

С л е д с т в и е. Если нумерации α , β некоторого множества A $\mathbf{R}'$ -одноэквивалентны и номерные множества D_α , D_β являются $\mathbf{R}'$ -множествами, то α $\mathbf{R}'$ -изоморфна β .

Действительно, согласно теореме 1.2.1 найдутся простая нумерация α' , $\mathbf{R}'$ -униморфная α , и простая нумерация β' , $\mathbf{R}'$ -униморфная β . Так как D_α , D_β рекурсивно перечислимы, то из $\mathbf{R}'$ -униморфизма нумераций α' , α и β' , β вытекает, что они $\mathbf{R}'$ -изоморфны. Таким образом,

$$\alpha' \equiv_{\mathbf{R}'} \alpha \equiv_{\mathbf{R}'} \beta \equiv_{\mathbf{R}'} \beta'$$

и, значит, $\alpha' \equiv_{\mathbf{R}'} \beta'$. В силу теоремы 2.2.2 отсюда следует, что $\alpha' \equiv_{\mathbf{R}'} \beta'$ и потому $\alpha \equiv_{\mathbf{R}'} \beta$.

2.3. Эквивалентность нумераций. Согласно п. 2.2 нумерация α множества A называется $\mathbf{R}$ -эквивалентной нумерации β , если существуют $\mathbf{R}$ -функция, сводящая α к β , и $\mathbf{R}$ -функция, сводящая β к α , т. е. если по заданному α -номеру произвольного $a \in A$ можно $\mathbf{R}$ -процессом найти некоторый β -номер a и по заданному β -номеру $b \in A$ вообще другим $\mathbf{R}$ -процессом найти α -номер b . Отсюда видно, что если мы интересуемся не только свойствами множества A , но и свойствами его нумерации, то «одинаковыми» следует считать изоморфные нумерации. Если же нас интересуют свойства самого множества A , а нумерации его рассматриваются лишь как вспомогательные средства, то «одинаковыми» естественно считать эквивалентные нумерации. Поэтому обычно важно знать, не является ли какая-нибудь сложная нуме-

рация рассматриваемого множества A эквивалентной некоторой менее сложной, например простой или даже однозначной простой, нумерации A . Ясно, что при этом особую роль должны играть, с одной стороны, нумерации, эквивалентные однозначным простым нумерациям, а с другой стороны, «устойчивые» нумерации, которые изоморфны любым эквивалентным им нумерациям. Такие нумерации теперь и будут рассмотрены. Как и выше, символом R' будет обозначаться произвольное из свойств ор или чр.

Т е о р е м а 2.3.1. *Для того чтобы нумерация α множества A была R' -эквивалентна простой однозначной нумерации, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

а) *номерное множество D_α содержит чр-множество M , имеющее непустое пересечение с каждым смежным классом D_α/θ_α , и число смежных классов D_α/θ_α бесконечно;*

б) *существует R -функция $L(x, y)$, характеристическая для θ_α , т. е. удовлетворяющая требованию*

$$x, y \in D_\alpha \Rightarrow (\theta_\alpha(x, y) \Rightarrow L(x, y) = 1) \ \& \ (\bar{\theta}_\alpha(x, y) \Rightarrow L(x, y) = 0). \quad (15)$$

В самом деле, пусть α R' -эквивалентна простой однозначной нумерации β . Обозначим через f, g R' -функции, сводящие соответственно α к β и β к α . Тогда множество $M = \{g(0), g(1), \dots\}$ удовлетворяет требованию а) и функция $L(x, y) = sg |f(x) - f(y)|$ удовлетворяет требованию б).

Обратно, пусть D_α содержит множество M , имеющее хотя бы один элемент в каждом классе из D_α/θ_α , и пусть M есть совокупность всех значений подходящей примитивно рекурсивной функции $\varphi(n)$. Вводим вспомогательную функцию $\psi(n)$ посредством условий

$$\psi(0) = 0,$$

$$\psi(n+1) = \mu z \left(\sum_{i=0}^n L(\varphi(\psi(i)), \varphi(z)) = 0 \right).$$

Так как по предположению множество D_α/θ_α бесконечно, то $\psi(n)$ — общерекурсивная функция, причем

$$L(\varphi(\psi(i)), \varphi(\psi(n+1))) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (16)$$

Строим теперь простую нумерацию β множества A , полагая $\beta n = \alpha \varphi(\psi(n))$. Из (16) следует, что нумерация β однозначная. Функция $g(x) = \varphi(\psi(x))$, очевидно, сводит β к α , а функция

$$f(x) = \mu z (\psi(z) = \mu y (L(x, \varphi(y)) = 1))$$

сводит α к β , что и требовалось доказать.

Если рассматриваются нумерации только с рекурсивно перечислимыми номерными множествами, то условие а) выполняется автоматически и остается лишь условие б). В частности, *простая нумерация α тогда и только тогда рекурсивно эквивалентна простой однозначной нумерации, когда отношение θ_α рекурсивно.*

С другой стороны, если нумерация α однозначна, то в качестве $L(x, y)$ можно взять $\bar{sg} |x - y|$ и из теоремы 2.3.1 непосредственно вытекает, что однозначная нумерация α тогда и только тогда R' -эквивалентна простой однозначной нумерации, когда номерное множество D_α рекурсивно перечислимо.

Отсюда в свою очередь следует, что условия теоремы 2.3.1 остаются необходимыми и достаточными и для того, чтобы нумерация α была R' -эквивалентна однозначной нумерации с рекурсивно перечислимым номерным множеством.

Теперь мы рассмотрим более подробно условия, при которых из R' -мультисводимости нумерации α к нумерации β вытекает R' -односводимость α к β .

Для того чтобы какая-нибудь нумерация α множества A была односводима к нумерации β этого множества, очевидно, необходимо, чтобы число различных α -номеров произвольного элемента множества было не больше числа его различных β -номеров.

Требуя, чтобы это условие выполнялось эффективно, приходим к следующим простейшим достаточным условиям.

Т е о р е м а 2.3.2. Пусть номерное множество D_α нумерации α есть R' -множество и α сводится R' -функцией $f(x)$ к нумерации β . Пусть, далее, существует такая R' -функция $Q(x, y)$, что $Q(f(x), y)$ определено и $\beta Q(f(x), y) = \beta f(x)$ для всех $x \in D_\alpha$, $y \in D$ и число различных значений, принимаемых выражением $Q(f(x), y)$ при заданном значении x , не меньше числа различных α -номеров элемента αx . Тогда α R' -односводима к β .

Функцию $g(x)$, однозначно сводящую α к β , строим следующим эффективным процессом. По условию множество D_α рекурсивно перечислимо и потому является совокупностью значений подходящей унивальной общерекурсивной функции $\varphi(n)$. Вводим обозначения $a_i = \varphi(i)$ ($i = 0, 1, \dots$) и по определению полагаем $g(a_0) = f(a_0)$. Далее применяем рекурсию. Пусть числа $b_i = g(a_i)$ уже определены для $i = 0, 1, \dots, n$. Если $f(a_{n+1})$ отлично от $b_0, b_1, \dots, b_n$, то полагаем $g(a_{n+1}) = f(a_{n+1})$. Если же $f(a_{n+1}) = b_m$, $0 \leq m \leq n$, то ищем такое минимальное s , чтобы $Q(b_m, s)$ было отлично от $b_0, b_1, \dots, b_n$, и полагаем $g(a_{n+1}) = Q(b_m, s)$. Так как число различных значений выражения $Q(b_m, y)$ не меньше числа α -номеров элемента αa_{n+1} , то требуемое значение s найдется.

Построенная функция $g(x)$, очевидно, однозначно сводит α к β . Так как указан алгоритм для вычисления значений $g(x)$ и $g(x)$ определена на R' -множестве, то $g(x)$ в силу тезиса Черча — Клини R' -функция.

Нумерацию α множества A условимся называть нумерацией с бесконечными классами, если каждый элемент из A имеет бесконечно много различных α -номеров.

Будем говорить, что нумерация α имеет R' -бесконечные классы, если существует R' -функция $Q(x, y)$, определенная для $x \in D_\alpha$, $y \in D$ и для каждого $x \in D_\alpha$ при $y = 0, 1, 2, \dots$, принимающая бесконечное число различных значений, причем $\alpha Q(x, y) = \alpha x$ для $x \in D_\alpha$, $y \in D$.

Из теоремы 2.3.2 теперь непосредственно получаем

С л е д с т в и е 1. Пусть номерное множество D_α нумерации α является R' -множеством и α R' -мультисводима к нумерации β , имеющей R' -бесконечные классы. Тогда α R' -односводима к β .

Применяя это следствие дважды и принимая во внимание теорему 2.2.2, получаем

С л е д с т в и е 2. Пусть нумерации α, β имеют R' -бесконечные классы и их номерные множества D_α, D_β являются R' -множествами. Тогда из R' -эквивалентности α и β следует R' -изоморфизм этих нумераций.

Напомним, что нумерация α называется позитивной, если ее номерное множество D_α и отношение эквивалентности θ_α рекурсивно перечислимы.

З а м е ч а н и е. Каждая позитивная нумерация с бесконечными классами имеет чр-бесконечные классы.

Действительно, рекурсивная перечислимость θ_α означает, что существует частично рекурсивная функция $\bar{L}(x, y)$, определенная для $x, y \in D_\alpha$ и удовлетворяющая условию (15). Представим множество D_α в виде совокупности значений подходящей пр-функции $\varphi(n)$. Тогда функция

$$Q(x, y) = \varphi(y) \bar{L}(x, \varphi(y)) + x \bar{s} \bar{g} \bar{L}(x, \varphi(y))$$

будет обладать всеми свойствами, требующимися в определении нумераций с чр-бесконечными классами.

Из этого замечания и следствий 1, 2 непосредственно получаем

С л е д с т в и е 3. Если номерное множество нумерации α рекурсивно перечислимо и α чр-сводится к позитивной нумерации β с бесконечными классами, то α чр-односводится к β . В частности, если позитивные нумерации α , β имеют бесконечные классы и α чр-эквивалентна β , то α чр-изоморфна β .

Выше указано несколько случаев, в которых из эквивалентности каких-либо нумераций α , β следует их изоморфизм. При этом условия, накладывавшиеся на нумерации, были симметричны в целом относительно α и β . Мы хотим теперь так усилить условия, налагающиеся на α , чтобы можно было значительно ослабить условия, налагающиеся на β , и чтобы при этом из эквивалентности все еще следовал изоморфизм нумераций.

Вводим определение: нумерацию α называем **R-устойчивой**, если D_α есть R-множество и если из того, что α R-эквивалентна какой-либо нумерации β , у которой D_β есть R-множество, вытекает, что α R-изоморфна β .

Придавая R значения чр, пр, получаем три вида устойчивости. Первые два из них заведомо связаны соотношением: чр-устойчивая нумерация с общерекурсивным номерным множеством ор-устойчива.

Следующая простая теорема показывает, что устойчивые нумерации всегда довольно сложные.

Т е о р е м а 2.3.3. Никакой смежный класс R' -устойчивой (R' -чр, ор) нумерации не может быть ор-множеством.

Обозначим через D_β совокупность чисел D_α , умноженных на 2, и введем новую нумерацию β , полагая $\beta n = \alpha\left(\frac{n}{2}\right)$, $n \in D_\beta$. Допустим, что вопреки утверждению теоремы 2.3.3 совокупность $\alpha^{-1}a$ всех α -номеров некоторого элемента $a \in A$ является ор-множеством. Тогда класс $\beta^{-1}a$ также является ор-множеством. Рассмотрим случай, когда $\beta^{-1}a$ содержит более одного элемента. Обозначим через s какой-либо фиксированный элемент из $\beta^{-1}a$ и пусть $D_\gamma = (D_\beta \setminus \beta^{-1}a) \cup \{s\}$. Вводим нумерацию γ , полагая $\gamma n = \beta n$ ($n \in D_\gamma$). Функция $f(x) = x$ сводит γ к β , а ор-функция

$$q(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \beta^{-1}(a), \\ s, & \text{если } x \in \beta^{-1}(a) \end{cases}$$

сводит β к γ . Таким образом, β и γ ор-эквивалентны. В силу того что α изоморфна β , нумерация β R' -устойчива. Так как D_γ есть R' -множество и γ R' -эквивалентна β , то γ должна быть R' -изоморфна β . Однако это невозможно, поскольку элемент a имеет только один γ -номер и имеет больше одного β -номера. Полученное противоречие доказывает теорему для случая, когда рассматриваемый смежный класс $\beta^{-1}(a)$ имеет больше одного элемента. Если $\beta^{-1}(a)$ состоит только из одного числа, то в приведенных рассужде-

ниях следует положить $D_\gamma = D_\beta \cup \{1\}$, $\gamma 1 = a$, $\gamma n = \beta n$ ($n \in D_\beta$) и доказательство сохранит силу и для этого случая.

Чтобы сформулировать условия, достаточные для устойчивости нумерации, введем новое понятие полноты нумерации. Именно, нумерацию α некоторого множества A назовем полной, если выполнены следующие условия:

а) в D_α выделены два числа e , e' , являющиеся номерами различных элементов A ;

б) существует регулярный процесс, позволяющий для каждой общерекурсивной функции $h(x)$ находить число $m \in D_\alpha$ такое, что $h(m) \in D_\alpha$ и $\alpha h(m) = \alpha m$.

Более точно условие б) означает, что существует общерекурсивная функция $\varphi(x)$ такая, что $\alpha h(\varphi(n)) = \alpha \varphi(n)$, где n — номер h в смысле Клини [2].

Всякая полная нумерация является простой. Действительно, берем в качестве функции $h(x)$ постоянную функцию, равную какому-нибудь числу s . Тогда согласно условию б) должно найтись число m , для которого $h(m) \in D_\alpha$, откуда $s \in D_\alpha$.

Типичным примером полной нумерации, давшим повод к введению понятия полноты нумерации, является клиниевская нумерация множества всех одноместных частично рекурсивных функций. Действительно, обозначим через e один из номеров функции x , а через e' один из номеров, например, функции $x + 1$. Согласно теореме рекурсии (Клини [2]) для каждой частично рекурсивной тернарной функции $F(a, x, y)$ найдется такая примитивно рекурсивная функция $\varphi(a)$, что будет иметь место тождество $F(a, \varphi(a), y) = U(\varphi(a), y)$, где $U(x, y)$ — универсальная функция Клини такая, что n есть клиниевский номер функции $U(n, x)$.

Пусть n — клиниевский номер какой-нибудь заданной чр-функции $h(x) = U(n, x)$. Вводим функцию

$$F(a, x, y) = U(U(a, x), y).$$

Согласно указанной теореме рекурсии существует пр-функция $\varphi(x)$, для которой $U(U(a, \varphi(a)), y) = U(\varphi(a), y)$. Полагая $\varphi(n) = m$, имеем $U(m, y) = U(U(n, m), y)$, т. е. $\gamma m = \gamma h(m)$, где γ — клиниевская нумерация.

Теперь с помощью простого перевода рассуждений Роджерса [21] на язык нумераций легко доказывается

Т е о р е м а 2.3.4. Пусть α — произвольная полная нумерация. Тогда А) α имеет ор-бесконечные смежные классы; Б) если α ор-сводима с какой-нибудь нумерацией β , то α ор-односводима к β ; В) α — R' -устойчивая нумерация ($R' = \text{ор}, \text{чр}$).

Пусть ор-функция $f(x)$ сводит α к β . Согласно теореме 2.3.2 для доказательства свойства Б) достаточно построить функцию $Q(x, y)$, обладающую описанными в указанной теореме свойствами. Для краткости будет указан лишь регулярный процесс для вычисления значений функций $Q(x, y)$.

Строим сначала вспомогательную функцию $S(x, y)$, удовлетворяющую требованиям

$$\alpha S(x, y) = \alpha x; \quad f(S(x, y)) \neq f(S(x, z)) \quad (y \neq z). \quad (17)$$

Полагаем по определению $S(x, 0) = x$ и далее по индукции допускаем, что для некоторого r значения $S(x, 0), \dots, S(x, r)$ найдены и что требования (17) для $y, z = 0, \dots, r$ выполнены. Вводим одноместные частично

рекурсивные функции

$$h_1(t) = \begin{cases} x, & \text{если } f(t) \in \{f(S(x, 0)), \dots, f(S(x, r))\}, \\ e & \text{в противоположном случае;} \end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} e', & \text{если } f(t) \in \{f(S(x, 0)), \dots, f(S(x, r))\}, \\ e & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Теперь, зная клиниевский номер функции $f(x)$ и числа $S(x, 0), \dots, S(x, r)$, находим клиниевские номера n_1, n_2 функций h_1, h_2 и с помощью Φ вычисляем $m_1 = \Phi(n_1), m_2 = \Phi(n_2)$, где Φ — общерекурсивная функция, упоминающаяся в определении полноты нумерации.

Если $f(m_1) \in \{f(S(x, 0)), \dots, f(S(x, r))\}$, то полагаем $S(x, r+1) = m_1$. Из соотношения $\alpha h_1(m_1) = \alpha m_1$ имеем $\alpha m_1 = \alpha x$ и потому $S(x, r+1)$ удовлетворяет требованиям (17).

Если $f(m_1) \notin \{f(S(x, 0)), \dots, f(S(x, r))\}$, то полагаем $S(x, r+1) = m_2$. Из соотношения $f(m_1) = f(S(x, i))$ следует, что $\alpha m_1 = \alpha S(x, i)$ ($0 \leq i \leq r$) и, значит, $\alpha m_1 = \alpha x$. Если бы теперь оказалось, что $f(m_2) = f(S(x, j))$ для некоторого $j, 0 \leq j \leq r$, то мы бы имели равенства $\alpha e' = \alpha m_2 = \alpha x$, противоречащие условиям $\alpha x = \alpha e, \alpha e \neq \alpha e'$. Таким образом, $f(m_2) \notin \{f(S(x, 0)), \dots, f(S(x, r))\}$, причем $\alpha m_2 = \alpha e = \alpha x$. Следовательно, и в рассматриваемом втором случае выбранное для $S(x, r+1)$ значение удовлетворяет требованию (17).

Функция $S(x, y)$ построена. Из регулярности процесса построения функции $S(x, y)$ следует ее общерекурсивность.

Так как $\alpha S(x, y) = \alpha x$ и $S(x, y) \neq S(x, z)$ для $y \neq z$, то нумерация α имеет ор-бесконечные классы. С другой стороны, функция $Q(x, y) = f(S(x, y))$ удовлетворяет требованиям теоремы 2.3.2 и потому α R' -односводима к β . Наконец, если не только α к β , но и β R' -сводима к α и D_β есть R' -множество, то из R' -бесконечности смежных классов нумерации α следует R' -односводимость β к α , а отсюда в силу следствия теоремы 2.2.2 вытекает, что α R' -изоморфна β . Тем самым все утверждения теоремы 2.3.4 доказаны.

Выше было установлено, что обычная гёделевская нумерация множества одноместных частично рекурсивных функций полная. Поэтому в качестве частного случая теоремы 2.3.4 имеем

С л е д с т в и е (теорема Роджерса [21]). *Каждая нумерация совокупности одноместных частично рекурсивных функций, имеющая рекурсивно перечислимое номерное множество и χ -эквивалентная гёделевской нумерации, χ -изоморфна гёделевской нумерации.*

Каждой одноместной частично рекурсивной функции $f_n(x)$ отвечает рекурсивно перечислимое множество ω_n , являющееся совокупностью всех значений функции $f_n(x)$. Если n — гёделевский номер функции $f_n(x)$, то n называется гёделевским номером множества ω_n . Из полноты гёделевской нумерации частично рекурсивных функций очевидным образом вытекает полнота соответствующей гёделевской нумерации рекурсивно перечислимых множеств. Поэтому указанная теорема Роджерса справедлива и для гёделевской нумерации рекурсивно перечислимых множеств.

Нижеследующая теорема была доказана Х. Райсом [18] для гёделевской нумерации рекурсивно перечислимых множеств и после передоказана В. А. Успенским [22] для нумерации частично рекурсивных функций.

Теорема 2.3.5. Каждое множество A , имеющее полную нумерацию α , содержит лишь два общерекурсивных относительно α подмножества: само множество A и пустое подмножество $\emptyset$.

Иначе говоря, любое непустое и отличное от D множество M натуральных чисел заведомо не рекурсивно, если оно вместе с номером произвольного элемента $a \in A$ содержит все номера этого элемента.

Допустим, напротив, что указанное множество M рекурсивно. Тогда его дополнение M' также рекурсивно. Из бесконечности смежных классов полных нумераций следует, что M и M' бесконечны. Пусть M есть совокупность значений унивалантной общерекурсивной функции $g(x)$, а M' — совокупность значений унивалантной общерекурсивной функции $h(x)$. Определим функцию $f(x)$ условиями

$$\varphi(x) = \mu i (|x - g(i)| \cdot |x - h(i)| = 0),$$

$$f(x) = g(\varphi(x)) \overline{\text{sg}} |x - h(\varphi(x))| + h(\varphi(x)) \overline{\text{sg}} |x - g(\varphi(x))|.$$

Функция $f(x)$ общерекурсивная и для любого t имеем $\alpha f(t) \neq \alpha t$ вопреки предположенной полноте нумерации α .

Теореме 2.3.5, очевидно, можно придать следующую форму: *каждый общерекурсивный одноместный предикат, определенный на множестве с полной нумерацией, является постоянным*.

В определении полноты нумерации требуется не только разрешимость уравнения $\alpha f(t) = \alpha t$ для каждой общерекурсивной функции f , но и существование алгоритма для нахождения решения. Если требовать только существование решения, то нумерацию можно называть формально полной. В доказательстве теоремы 2.3.5 используется только такая формальная полнота, и потому теорема справедлива для любых формально полных нумераций.

Говорят (Пост [17]), что всюду определенная функция $f(x)$ сводит множество натуральных чисел M к множеству N , если для каждого натурального x

$$x \in M \Leftrightarrow f(x) \in N.$$

Множество M называется сводимым к N , если существует ор-функция, сводящая M к N . Если M сводимо к N , а N к M , то говорят, что M рекурсивно эквивалентно N . Наконец, M называется рекурсивно изоморфным N , если существует ор-функция $f(x)$, взаимно однозначно отображающая натуральный ряд на себя и переводящая M в N .

Чтобы установить связи этих понятий с соответствующими понятиями теории нумераций, рассмотрим фиксированное двухэлементное множество A , элементы которого условно обозначим I и L . Каждому множеству M ставим в соответствие нумерацию α множества A , полагая

$$\alpha n = \begin{cases} I, & \text{если } n \in M, \\ L, & \text{если } n \notin M. \end{cases}$$

Ясно, что понятия рекурсивной сводимости, эквивалентности и изоморфизма множеств означают то же самое, что и понятия общерекурсивной сводимости, эквивалентности и изоморфизма соответствующих нумераций множества $\{I, L\}$. Поэтому каждую теорему о нумерациях можно в качестве частного случая сформулировать и как теорему о сводимости или рекурсивном изоморфизме множеств. Например, из теоремы 2.2.2 этим способом получается известная

Т е о р е м а 2.3.6 (Майхил [14]). *Если множества M и N рекурсивно одностоводимы друг к другу, то они рекурсивно изоморфны.*

Далее, временно условимся говорить, что множество M эффективно бесконечно, если M содержит бесконечное рекурсивно перечислимое подмножество. Нумерация, отвечающая множеству M , очевидно, тогда и только тогда имеет ор-бесконечные классы, когда M и его дополнение M' эффективно бесконечны. Из следствия 2 теоремы 2.3.2 теперь выводим, что *если эффективно бесконечные множества с эффективно бесконечными дополнениями рекурсивно эквивалентны, то они рекурсивно изоморфны.*

Согласно А. А. Мучнику [13], система числовых множеств $\langle M_1, \dots, M_k \rangle$ называется сводимой к системе $\langle N_1, \dots, N_k \rangle$, если существует такая ор-функция $f(x)$, что

$$x_i \in M_i \Leftrightarrow f(x) \in N_i \quad (i = 1, \dots, k).$$

Аналогично определяются понятия односводимости, рекурсивной эквивалентности и рекурсивного изоморфизма систем множеств.

Вводим вспомогательное множество A_k , элементы которого обозначим символами $I_0, I_1, \dots, I_k$. Каждой системе попарно не пересекающихся множеств $\langle M_1, \dots, M_k \rangle$ ставим в соответствие простую нумерацию α множества A_k , определяемую условиями

$$\alpha n = \begin{cases} I_i, & \text{если } n \in M_i (i = 1, \dots, k), \\ I_0, & \text{если } n \notin M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k. \end{cases}$$

Ясно, что рекурсивные сводимость, эквивалентность, изоморфизм систем множеств при таком определении будут равносильны рекурсивным сводимости, эквивалентности и изоморфизму соответствующих нумераций множества A_k при условии, что множество $D \setminus \bigcup M_i$ не пусто. Системы, удовлетворяющие последнему условию, назовем обычными. Для необычных систем в качестве множества A_k достаточно брать систему $\{I_1, \dots, I_k\}$. Из теоремы 2.2.2, примененной к нумерациям системы A_k , непосредственно получается

Т е о р е м а 2.3.7. *Рекурсивно одноэквивалентные системы непересекающихся множеств рекурсивно изоморфны.*

Это — небольшое усиление теоремы 1 из цитированной статьи А. А. Мучника.

Ясно, что и теорему 2.2.2 в ее общей формулировке можно понимать как теорему об изоморфизме произвольных, конечных и бесконечных систем множеств.

§ 3. Нумерованные алгебры

3.1. R-нумерации алгебраических систем. Пусть задана некоторая алгебраическая система (см. п. 1.4):

$$\mathfrak{A} = \langle A; a_1, \dots, a_k; f_1, \dots, f_l; g_1, \dots, g_m; P_1, \dots, P_n \rangle,$$

где $a_1, \dots, a_k$ — выделенные элементы, $f_1, \dots, f_l$ — операции, $g_1, \dots, g_m$ — частичные операции и $P_1, \dots, P_n$ — предикаты, определенные на основном множестве A . Присоединяя к $\mathfrak{A}$ еще какую-нибудь нумерацию α множества A , получим более сложный объект, который будем называть нумерованной алгебраической системой. Обычные, ненумерованные алгебраи-

ческие системы условимся иногда называть абстрактными алгебраическими системами. Введенные в п. 1.1 гомоморфизмы и изоморфизмы алгебраических систем также иногда будем называть абстрактными, чтобы отличить их от определяемых ниже изоморфизмов и гомоморфизмов, связанных с нумерациями систем.

Нумерацию α системы $\mathfrak{A}$ условимся называть **R**-нумерацией; если все основные операции и предикаты системы $\mathfrak{A}$ будут соответственно **R**-операциями и **R**-предикатами на основном множестве A , рассматриваемом с нумерацией α .

Понятия **R**-отображения, **R**-мономорфизма, **R**-эквивалентности и т. д., введенные в п. 2.1 для нумерованных множеств, мы распространим теперь на нумерованные алгебраические системы следующим образом.

Рассмотрим какие-либо две однотипные нумерованные алгебраические системы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, основные множества которых A , B пусть имеют нумерации α и β . Гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, являющийся в смысле п. 2.1 **R**-отображением A в B , будем называть **R**-гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

Абстрактный изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, являющийся **R**-гомоморфизмом, будет называться **R**-мономорфизмом $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. Абстрактный изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, являющийся **R**-эквивалентным отображением множества A на множество B , будет называться **R**-эквивалентностью системы $\mathfrak{A}$ на систему $\mathfrak{B}$. Аналогично этому **R**-униморфизмом и **R**-изоморфизмом системы $\mathfrak{A}$ на систему $\mathfrak{B}$ будет называться абстрактный изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, являющийся соответственно **R**-униморфизмом или **R**-изоморфизмом множества A на множество B .

Алгебраические системы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ называются **R**-эквивалентными, если существует **R**-эквивалентное отображение $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. Системы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ будут называться **R**-изоморфными, если существует **R**-изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

R-эквивалентность и **R**-изоморфизм систем — центральные понятия теории нумерованных алгебраических систем. О значении этих понятий можно повторить то же, что было сказано в п. 2.1 относительно соответствующих понятий для нумерованных множеств. Именно, если интересоваться только чисто алгебраическими свойствами нумерованных систем, «одинаковыми» следует считать эквивалентные системы. Если же интересоваться не только чисто алгебраическими свойствами нумерованных систем, но и свойствами их нумераций, то «одинаковыми» следует считать изоморфные системы.

Определения мономорфизма, эквивалентности и других аналогичных понятий для алгебраических систем выбраны так, что все теоремы п. 2.1, относящиеся к нумерованным множествам, остаются в силе и для нумерованных алгебраических систем. В частности, из теоремы 2.1.5 непосредственно вытекает такая

Т е о р е м а 3.1.1. *Если нумерованная алгебраическая система $\mathfrak{A}$, имеющая **R**-нумерацию, **R**-эквивалентна нумерованной алгебраической системе $\mathfrak{B}$, то нумерация $\mathfrak{B}$ является также **R**-нумерацией.*

По аналогии с позитивно и негативно нумерованными множествами нумерованную алгебраическую систему $\mathfrak{A}$ назовем позитивно или негативно нумерованной, если ее нумерация является позитивной, соответственно негативной α -нумерацией основного множества A .

Из следствия теоремы 2.1.5, указанного в п. 2.1, непосредственно получается, что если из двух α -эквивалентных алгебраических систем, имеющих рекурсивно перечислимые номерные множества, одна является позитивной или негативной, то другая система также будет позитивной или соответственно негативной.

Далее, если нумерованная алгебраическая система позитивна или негативна, то каждая α -изоморфная ей система также будет позитивной или соответственно негативной.

Чтобы иметь возможность непосредственно пользоваться результатами п. 2.2 и п. 2.3 при изучении нумерованных алгебраических систем, введем еще одно понятие.

Пусть задан абстрактный изоморфизм φ алгебраической системы $\mathfrak{A}$ с нумерацией α на какую-нибудь алгебраическую систему $\mathfrak{B}$. Определяем теперь нумерацию β системы $\mathfrak{B}$, полагая $D_\beta = D_\alpha$ и

$$\beta n = \varphi \alpha n \quad (n \in D_\beta), \quad (18)$$

т. е. полагая

$$\beta = \varphi \alpha.$$

Нумерацию β будем называть нумерацией α , перенесенной при помощи φ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Формула (18) показывает, что отображение φ относительно нумераций α и β является примитивно рекурсивным изоморфизмом системы $\mathfrak{A}_\alpha$ на систему $\mathfrak{B}_\beta$.

Для краткости введем символ Q , который будет принимать значения: моно, экви, уни и изо. Таким образом, выражение Q -морфно будет означать для нумерованных множеств (для нумераций): мономорфно (сводимы), эквивалентно (эквивалентны), униморфно (односводимы), изоморфно (изоморфны).

Пусть теперь нам задан некоторый абстрактный изоморфизм φ алгебраической системы $\mathfrak{B}$ с нумерацией β' на какую-то алгебраическую систему $\mathfrak{A}$ с нумерацией α . Переносим нумерацию β' при помощи φ из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$, получим новую нумерацию

$$\beta = \varphi \beta'$$

системы $\mathfrak{A}$. Таким образом, абстрактная алгебраическая система $\mathfrak{A}$ может рассматриваться в двух аспектах: как алгебраическая система $\mathfrak{A}_\alpha$ с нумерацией α и как алгебраическая система $\mathfrak{A}_\beta$ с нумерацией β . Легко видеть, что изоморфизм φ тогда и только тогда есть RQ -морфизм $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{A}$, когда нумерация β множества A RQ -морфна нумерации α множества A .

Отсюда непосредственно вытекает такое следствие. Пусть $\mathfrak{A}_\alpha$ — некоторая абстрактная алгебраическая система $\mathfrak{A}$, взятая с какой-то нумерацией α , $\mathfrak{A}_\beta$ — та же система $\mathfrak{A}$, но взятая с иной нумерацией β . Система $\mathfrak{A}_\alpha$ тогда и только тогда RQ -морфна системе $\mathfrak{A}_\beta$, когда нумерация $\varphi \alpha$ основного множества A RQ -морфна нумерации β , где φ — подходящий абстрактный автоморфизм системы $\mathfrak{A}$.

Это следствие можно представить в виде иного утверждения, которое мы для удобства ссылок сформулируем в качестве теоремы.

Т е о р е м а 3.1.2. Пусть заданы автоморфизм φ некоторой абстрактной алгебраической системы $\mathfrak{A}$ и какая-либо ее нумерация α . Переносим α при помощи φ , получим новую нумерацию $\varphi \alpha$ системы $\mathfrak{A}$. Для того чтобы система $\mathfrak{A}_{\varphi \alpha}$ была RQ -морфна системе $\mathfrak{A}_\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы автоморфизм φ был RQ -морфизмом системы $\mathfrak{A}_\alpha$ на себя.

Эта теорема и предшествующие ей замечания позволяют сделать некоторый обзор всех алгебраических систем, которые можно получить из данной абстрактной системы, вводя в нее различные нумерации.

Рассмотрим какую-нибудь нумерацию α системы $\mathfrak{A}$. Как найти все те нумерации β системы $\mathfrak{A}$, чтобы $\mathfrak{A}_\beta$ была R -эквивалентна $\mathfrak{A}_\alpha$?

Ответ следующий. Обозначим через E_α множество всех нумераций множества A , R -эквивалентных α , и пусть N_α — совокупность всех тех нумераций $\mathfrak{A}$, которые получаются из нумераций, принадлежащих совокупности E_α , путем переноса их всевозможными автоморфизмами $\mathfrak{A}$. Тогда N_α и будет множеством всех тех нумераций β , при которых $\mathfrak{A}_\beta R$ -эквивалентна $\mathfrak{A}_\alpha$.

Множество N_α распадается на классы R -эквивалентных нумераций. Теорема 3.1.2 позволяет добавить несколько подробностей относительно этих классов. Именно, пусть $\mathfrak{G}$ — группа всех абстрактных автоморфизмов $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{G}_\alpha$ — совокупность автоморфизмов $\mathfrak{A}$, являющихся R -эквивалентными отображениями $\mathfrak{A}_\alpha$ на себя. Подгруппа $\mathfrak{G}_\alpha$ инвариантна в $\mathfrak{G}$ и классы R -эквивалентных нумераций, на которые распадается N_α , взаимно однозначно соответствуют смежным классам $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{G}_\alpha$.

Аналогичные утверждения можно сделать и относительно нумераций системы $\mathfrak{A}$, делающих из $\mathfrak{A}$ R -изоморфные алгебраические системы.

Пример 10. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра с основным множеством

$$A = \{a_0, a_1, \dots\} \quad (a_i \neq a_j \text{ для } i \neq j)$$

и операцией умножения $*$

$$a_m * a_n = a_n \quad (m, n = 0, 1, \dots).$$

Очевидно, $\mathfrak{A}$ — полугруппа, причем любое одно-однозначное отображение A на себя есть автоморфизм $\mathfrak{A}$. Отсюда следует, что любые две простые одно-однозначные нумерации A обращают $\mathfrak{A}$ в примитивно рекурсивно изоморфные нумерованные полугруппы.

Рассмотрим теперь какую-нибудь функцию $\varphi(x)$, не являющуюся общерекурсивной и одно-однозначно отображающую натуральный ряд на себя. Вводим простые нумерации α , β полугруппы $\mathfrak{A}$, полагая

$$\alpha n = a_n, \quad \beta n = a_{\varphi(n)} \quad (n \in D).$$

Нумерации α , β не являются чр -эквивалентными, хотя полугруппы $\mathfrak{A}_\alpha$ и $\mathfrak{A}_\beta$ пр -изоморфны.

Нумерованная алгебраическая система $\mathfrak{A}$ имеет вполне определенную структуру, если заданы номерное множество D_α , эквивалентность θ_α и функции, реализующие основные операции и предикаты системы в координатной форме. В зависимости от того, являются ли эти множество, эквивалентность, предикаты и операции частично обще- или примитивно рекурсивными, естественно выделить следующие классы нумерованных алгебраических систем.

а. Нумерованная алгебраическая система называется **позитивной** (негативной), если ее нумерация частично рекурсивна и позитивна (негативна).

Из замечаний, приведенных в конце п. 2.1, следует, что нумерованная алгебраическая система, чр -изоморфная позитивной или негативной системе, сама позитивна или соответственно негативна. Далее, если алгебраическая система с рекурсивно перечислимым номерным множеством чр -эквивалентна позитивной (негативной) системе, то она сама позитивна (негативна).

Из теоремы 2.2.1 вытекает также, что каждая позитивная (негативная) алгебраическая система чр -изоморфна позитивной (негативной) алгебраической системе с простой нумерацией.

б. Нумерованная алгебраическая система будет называться **общерекурсивной**, если ее номерное множество D_α рекурсивно перечислимо, а эквивалентность θ_α , основные операции и предикаты общерекурсивны.

Из теоремы 3.1.1 следует, что если одна из двух ор-эквивалентных алгебраических систем, обладающих рекурсивно перечислимыми номерными множествами, является общерекурсивной, то другая система также общерекурсивна.

Из той же теоремы 3.1.1 и теоремы 2.1.1 вытекает, что каждая алгебраическая система, общерекурсивно изоморфная общерекурсивной системе, сама является общерекурсивной.

в. Нумерованную алгебраическую систему $\mathfrak{A}$ условимся называть конструктивной, если ее нумерация α , номерное множество D_α и эквивалентность θ_α общерекурсивны.

Снова из теоремы 3.1.1 следует, что если одна из двух ор-эквивалентных алгебраических систем с общерекурсивными номерными множествами является конструктивной, то другая также конструктивна. Кроме того, согласно теореме 2.1.2 чр-изоморфизм и чр-эквивалентность одной конструктивной системы на другую являются вместе с тем и ор-изоморфизмом и соответственно ор-эквивалентностью.

Т е о р е м а 3.1.3. *Каждая бесконечная конструктивная алгебраическая система ор-изоморфна конструктивной алгебраической системе с простой нумерацией и ор-эквивалентна подходящей конструктивной алгебраической системе с однозначной простой нумерацией.*

Каждая бесконечная конструктивная алгебраическая система с однозначной нумерацией ор-изоморфна конструктивной алгебраической системе с однозначной простой нумерацией.

Пусть D_α — номерное множество системы $\mathfrak{A}$. По предположению эквивалентность θ_α общерекурсивна и число классов D_α/θ_α бесконечно. В силу теоремы 2.3.1 нумерация α ор-эквивалентна подходящей простой однозначной нумерации γ множества A . Поэтому система $\mathfrak{A}_\alpha$ ор-эквивалентна конструктивной системе $\mathfrak{A}_\gamma$, имеющей требуемую простую однозначную нумерацию.

Остается проверить первое и третье утверждения теоремы. Для этого обозначим через $\varphi(x)$ унивалентную ор-функцию, совокупность значений которой равна D_α , и введем нумерацию β системы $\mathfrak{A}$, полагая

$$\beta x = \alpha \varphi(x) \quad (x \in D).$$

Теперь, полагая

$$\psi(x) = \begin{cases} \mu y (\varphi(y) = x), & \text{если } x \in D_\alpha, \\ 0, & \text{если } x \notin D_\alpha, \end{cases}$$

получим ор-функцию, дающую обратное отображение D_α на D . Таким образом, нумерации α и β ор-изоморфны и, значит, по сделанному выше замечанию алгебра $\mathfrak{A}_\alpha$ ор-изоморфна $\mathfrak{A}_\beta$ и потому $\mathfrak{A}_\beta$ конструктивна. Если нумерация α однозначна, то, очевидно, нумерация β также однозначна, что и требовалось.

Из доказанной теоремы, в частности, вытекает, что с точностью до общерекурсивной эквивалентности все бесконечные конструктивные алгебраические системы исчерпываются системами, у которых основное множество состоит из всех натуральных чисел, основными операциями служат общерекурсивные функции; частичными операциями служат частично рекурсивные функции с рекурсивной областью определенности, а основными предикатами служат предикаты, определенные на натуральном ряде, характеристические функции которых общерекурсивны.

г. Наконец, нумерованную алгебраическую систему условимся называть примитивно рекурсивной, если она имеет однозначную примитивно рекурсивную нумерацию, номерное множество которой также примитивно рекурсивно.

Согласно теореме 3.1.1, если одна из двух пр-эквивалентных алгебраических систем, имеющих простые нумерации с примитивно рекурсивными номерными множествами, является примитивно рекурсивной, то вторая система также примитивно рекурсивна.

Из определения «г» видно, что с точностью до пр-изоморфизма каждую примитивно рекурсивную алгебраическую систему можно мыслить как систему, имеющую примитивно рекурсивное основное множество, основные операции и предикаты которой являются примитивно рекурсивными функциями и предикатами, определенными на указанном числовом множестве.

3.2. Подсистемы. Рассмотрим произвольную нумерованную алгебраическую систему $\mathfrak{A}$ с нумерацией α . Пусть $\mathfrak{B}$ — абстрактная подсистема в $\mathfrak{A}$ с основным множеством B . Обозначая через D_β совокупность всех α -номеров элементов B и вводя нумерацию

$$\beta n = \alpha n \quad (n \in D_\beta),$$

мы обратим $\mathfrak{B}$ в нумерованную алгебраическую систему, которая будет называться нумерованной подсистемой системы $\mathfrak{A}$. Так как все функции, представляющие в координатной форме основные операции и предикаты системы $\mathfrak{A}$, будут одновременно представлять основные операции и предикаты подсистемы $\mathfrak{B}$ в нумерации β , то если α есть $\mathbf{R}$ -нумерация системы $\mathfrak{A}$, то β будет $\mathbf{R}$ -нумерацией подсистемы $\mathfrak{B}$ ($\mathbf{R} = \text{чр, ор, пр}$).

Подсистему $\mathfrak{B}$ системы $\mathfrak{A}$ будем называть $\mathbf{R}$ -подсистемой, если основное множество B подсистемы $\mathfrak{B}$ есть $\mathbf{R}$ -подмножество множества A с нумерацией α .

Отметим, что согласно терминологии, принятой в предыдущем и данном пунктах, $\mathbf{R}$ -подсистема нумерованной системы может и не быть $\mathbf{R}$ -системой. Например, пусть номерное множество D_α не содержит бесконечных абсолютных чр-подмножеств, но пересечение D_α с подходящим ор-множеством пусть бесконечно. Определяя на D_α уже упоминавшееся умножение

$$xy = y,$$

мы обратим D_α в полугруппу. Тогда $C \cap D_\alpha$ будет ор-подсистемой в D_α , но не будет ор-системой в смысле п. 3.1, б, так как номерное множество $C \cap D_\alpha$ этой системы не рекурсивно перечислимо.

Однако легко проверить, что пр-подсистема пр-системы есть пр-система, ор-подсистема конструктивной или общерекурсивной системы конструктивна или соответственно общерекурсивна и что рекурсивно перечислимые подсистемы позитивных (негативных) систем суть позитивные (негативные) системы.

Отметим еще, что каждая общерекурсивная нумерованная система чр-изоморфна конструктивной системе.

В самом деле, номерное множество D_α системы $\mathfrak{A}$ по условию рекурсивно перечислимо. Согласно теореме 2.2.1 существует простая нумерация β основного множества A системы $\mathfrak{A}$, ор-униморфная нумерации α . Пусть $\mathfrak{A}_\beta$ — система $\mathfrak{A}$, взятая с нумерацией β . Поскольку основные операции и предикаты системы $\mathfrak{A}_\beta$, в том числе и отношение равенства, переходят при упоминутым униморфизме в ор-операции и ор-предикаты на $\mathfrak{A}_\alpha$, то такими же согласно теореме 2.1.4 эти операции и отношения будут и на $\mathfrak{A}_\beta$, что и требовалось доказать.

Теорема 3.2.1. Пусть M — абсолютное рекурсивно перечислимое подмножество номерного множества D_α алгебраической системы $\mathfrak{A}$, имеющей α -нумерацию α . Подсистема $\mathfrak{M}$, порожденная в $\mathfrak{A}$ элементами множества αM , есть α -образ подходящего абсолютно рекурсивно перечислимого подмножества T номерного множества D_α .

Пусть $f_1, \dots, f_p$ — последовательность всех (как всюду определенных, так и частичных) основных операций системы $\mathfrak{A}$. По условию существуют частично рекурсивные функции $F_1, \dots, F_p$, удовлетворяющие условию

$$\alpha F_i(x_1, \dots, x_{n_i}) = f_i(\alpha x_1, \dots, \alpha x_{n_i}) \quad (x_1, \dots, x_{n_i} \in D_\alpha, \quad i = 1, \dots, p),$$

где из определенности одной части равенства следует определенность другой части. Обозначим через $F_0(x)$ ор-функцию, совокупность значений которой равна M . Рассмотрим теперь все термы, составленные из предметных символов $F_0(0), F_0(1), \dots$ и функциональных символов $F_1, \dots, F_p$.

Стандартной нумерацией указанных термов назовем следующую нумерацию, обычно называемую также гёделевской нумерацией. Номером терма $F_0(n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) называем число 2^n . Далее нумерация ведется по индукции. Пусть термы $a_1, \dots, a_{n_i}$ уже получили некоторые номера $Na_1, \dots, Na_{n_i}$. Тогда для терма $F_i(a_1, \dots, a_{n_i})$ по определению полагают

$$NF_i(a_1, \dots, a_{n_i}) = 2^{i+1} p_1^{Na_1} \dots p_{n_i}^{Na_{n_i}} \quad (p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 7, \dots). \quad (19)$$

Поскольку каждый предметный символ и каждый функциональный символ у нас имеют вполне определенные значения, то каждый терм также либо имеет определенное значение, либо значение его не определено. Последний случай может иметь место, так как среди функций F_i могут быть частичные. Вводим функцию $H(n)$, полагая $H(n)$ равным значению терма номера n .

По предположению все функции F_i частично рекурсивны и, значит, существуют регулярные процессы для вычисления значений каждой функции F_i . Но тогда существует и регулярный процесс для вычисления значений каждого терма по его номеру. Это значит, что функция $H(x)$ частично рекурсивна и потому совокупность всех ее значений есть примитивно рекурсивное множество. Это множество мы обозначим через T . Остается лишь проверить, что αT есть искомая подсистема системы $\mathfrak{A}$, порожденная множеством αM . Но это очевидно, так как из равенства (19) следует, что значение каждого из рассмотренных термов равно значению соответствующего терма, составленного из символов основных операций f_i и символов элементов $\alpha F_0(n)$ порождающего множества.

В доказанной теореме утверждается, что порожденная подсистема $\mathfrak{M}$ есть α -образ рекурсивно перечислимого подмножества номерного множества. Это еще не дает права утверждать, что $\mathfrak{M}$ — рекурсивно перечислимая подалгебра, так как последнее означает, что рекурсивно перечислимо множество всех номеров элементов $\mathfrak{M}$, а не только тех, которые получаются при помощи термов. Однако следующее простое замечание показывает, что в большинстве важных случаев рекурсивная перечислимость $\mathfrak{M}$ имеет место и в смысле первоначального определения.

З а м е ч а н и е 1. Если множество A имеет позитивную нумерацию α , то α -образ каждого рекурсивно перечислимого подмножества M номерного множества D_α есть рекурсивно перечислимое подмножество A .

Нам надо установить рекурсивную перечислимость совокупности N всех α -номеров элементов множества αM . По условию множество всех пар

θ_α -эквивалентных чисел из D_α можно представить в виде $\langle \varphi(t), \psi(t) \rangle$ ($t = 0, 1, \dots$), где $\varphi(t), \psi(t)$ — примитивно рекурсивные функции. Пусть M есть совокупность значений примитивно рекурсивной функции $\chi(t)$. Тогда N будет совокупностью тех значений x , для которых система $x = \varphi(u), \psi(u) = \chi(v)$ имеет решение $\langle x, u, v \rangle$. Следовательно, N рекурсивно перечислимо.

Объединяя замечание 1 и теорему 3.2.1, получаем такое

С л е д с т в и е. Если алгебраическая система $\mathfrak{M}$ с нумерацией α позитивна, то α -образ каждого рекурсивно перечислимого подмножества номерного множества системы D_α порождает рекурсивно перечислимую подсистему в $\mathfrak{M}$.

Выше указывалось, что каждая рекурсивно перечислимая подсистема общерекурсивной системы $\mathfrak{M}$ α -изоморфна общерекурсивной системе. Поэтому подсистемы общерекурсивных систем, порожденные рекурсивно перечислимыми подмножествами, частично рекурсивно изоморфны общерекурсивным системам.

П р и м е р 11. Термальные подсистемы. Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебраическая система с основными операциями $f_1, \dots, f_q$, среди которых некоторые могут быть частичными. Рассмотрим вспомогательную систему символов $x_1, x_2, \dots$ и обозначим через T множество некоторых термов, образованных из предметных символов $x_1, x_2, \dots$ и функциональных символов $f_1, \dots, f_q$. Совокупность значений, которые принимают термы из T , когда переменные $x_1, x_2, \dots$ независимо друг от друга пробегает все основное множество A системы $\mathfrak{M}$, обозначим через U . Подсистема $\mathfrak{M}$ системы $\mathfrak{M}$, порожденная в $\mathfrak{M}$ элементами совокупности U , называется термальной (вербальной) подсистемой, определяемой в $\mathfrak{M}$ термами множества T .

Если переменные $x_1, x_2, \dots$ заставить пробегать не все основное множество A , а только его часть B , и совокупность значений термов из T , которые они будут принимать при таком процессе, обозначить через V , то подсистема $\mathfrak{M}$ системы $\mathfrak{M}$, порожденная элементами V , будет называться термальной подсистемой, определяемой термами из T при переменных, пробегающих B .

Выше было введено понятие стандартной нумерации термов. Это понятие мы распространим и на термы множества T . Для этого условимся число 3^i называть номером терма x_i , а далее будем следовать указанному выше индуктивному правилу (19).

Множество термов T условимся называть рекурсивно перечислимым, если рекурсивно перечислимо множество номеров термов из T . Теперь, повторяя дословно изложенные выше рассуждения, приходим к следующему обобщению теоремы 3.2.1.

З а м е ч а н и е 2. Пусть M — абсолютное рекурсивно перечислимое подмножество номерного множества D_α алгебраической системы $\mathfrak{M}$, имеющей α -нумерацию α , и пусть T — рекурсивно перечислимое множество термов, составленных из переменных $x_1, x_2, \dots$ и функциональных знаков системы $\mathfrak{M}$. Тогда термальная подсистема $\mathfrak{M}$, определяемая термами из T при переменных, пробегающих множество αM , есть α -образ подходящего абсолютно рекурсивно перечислимого подмножества номерного множества.

В частности, термальная подсистема позитивной алгебраической системы, определяемая рекурсивно перечислимым множеством термов, является снова позитивной системой.

Отметим также следующий еще более частный случай: термальная подсистема общерекурсивной системы, определяемая рекурсивно перечислимым множеством термов, α -изоморфна общерекурсивной системе.

Как известно, термальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, определяемая термом $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$, называется первым коммутантом группы $\mathfrak{G}$; термальная подгруппа, определяемая термом $((x_1, x_2), (x_3, x_4))$, называется вторым коммутантом группы и т. д. С другой стороны, термальная подгруппа, определяемая термом $((x_1, x_2), x_3)$, есть второй член нижнего центрального ряда группы $\mathfrak{G}$, термальная подгруппа, определяемая термом $((x_1, x_2), x_3), x_4$, есть третий член нижнего центрального ряда и т. п. Аналогичные понятия вводятся также в теории колец.

Согласно указанной выше теореме и относящимся к ней замечаниям последовательные коммутанты и члены нижнего центрального ряда общерекурсивной нумерованной группы являются также общерекурсивными группами.

3.3. Гомоморфизмы и конгруэнтности. Начиная с этого места далее рассматриваются не общие алгебраические системы, а лишь алгебры. Как уже говорилось, однозначное отображение φ основного множества A алгебры $\mathfrak{A}$ на основное множество B однотипной алгебры $\mathfrak{B}$ называется гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, если имеют место соотношения

$$\varphi f_i(u_1, \dots, u_{n_i}) = g_i(\varphi u_1, \dots, \varphi u_{n_i})(u_1, \dots, u_{n_i} \in A), \quad (20)$$

где f_i и g_i — основные операции указанных алгебр. Конгруэнтностью, отвечающей гомоморфизму φ , называется отношение σ , определенное на множестве A условием

$$u\sigma v \Leftrightarrow \varphi u = \varphi v \quad (u, v \in A). \quad (21)$$

Известно, что отношение σ рефлексивно, симметрично и транзитивно и что, кроме того, оно удовлетворяет требованию

$$u_1\sigma v_1 \& \dots \& u_{n_i}\sigma v_{n_i} \Rightarrow f_i(u_1, \dots, u_{n_i})\sigma f_i(v_1, \dots, v_{n_i}) \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (22)$$

Обратно, каждое бинарное отношение σ на A , рефлексивное, симметричное, транзитивное и удовлетворяющее требованию (22), называется конгруэнтностью на $\mathfrak{A}$.

Зная какую-нибудь конгруэнтность σ на $\mathfrak{A}$, мы можем разбить A на классы элементов, находящихся между собой в отношении σ , и совокупность A/σ всех этих смежных классов обратить в алгебру, полагая

$$f_i^*([u_1], \dots, [u_{n_i}]) = [f_i(u_1, \dots, u_{n_i})] \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (23)$$

где через $[u]$ обозначен класс, содержащий элемент $u \in A$. Из условий (22) следует, что определенные формулами (23) операции f_i^* на A/σ однозначны и что отображение $\varphi: u \rightarrow [u]$ алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}/\sigma$ является гомоморфизмом, имеющим σ своей конгруэнтностью. Отображение φ называется каноническим гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}/\sigma$.

Пусть теперь алгебра $\mathfrak{A}$ нумерованная, имеющая нумерацию α . Определяя нумерацию α^* фактор-алгебры $\mathfrak{A}/\sigma$ формулой

$$\alpha^*n = [\alpha n] \quad (n \in D_\alpha),$$

мы обращаем фактор-алгебру $\mathfrak{A}/\sigma$ в нумерованную алгебру. Если $F_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ — функции, выражающие в координатной форме основные операции $f_i(u_1, \dots, u_{n_i})$ алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. удовлетворяющие соотношениям

$$f_i(\alpha x_1, \dots, \alpha x_{n_i}) = \alpha F_i(x_1, \dots, x_{n_i}),$$

то эти же функции будут выражать в нумерации α^* основные операции фактор-алгебры $\mathfrak{A}/\sigma$. Следовательно, если α есть $\mathbf{R}$ -нумерация ($\mathbf{R} = \text{пр, ор, чр}$) алгебры $\mathfrak{A}$, то α^* есть $\mathbf{R}$ -нумерация фактор-алгебры $\mathfrak{A}/\sigma$.

Отношение эквивалентности θ_{α^*} , отвечающее нумерации α^* фактор-алгебры $\mathfrak{A}/\sigma$, представляется совокупностью пар $\langle x, y \rangle$ чисел из D_{α} , для которых $\alpha^*x = \alpha^*y$, т. е. $[\alpha x] = [\alpha y]$ или $(\alpha x) \sigma (\alpha y)$. Иначе говоря, отношение θ_{α^*} представляется совокупностью тех же пар чисел, что и отношение σ на A . Поэтому θ_{α^*} есть $\mathbf{R}$ -отношение тогда и только тогда, когда $\mathbf{R}$ -отношением на A является конгруэнтность σ .

Вернемся теперь к общей схеме. Пусть φ есть $\mathbf{R}$ -гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ с нумерацией α на некоторую алгебру $\mathfrak{B}$ с нумерацией β . Обозначим через σ соответствующую конгруэнтность на $\mathfrak{A}$. Отображение φ индуцирует абстрактный изоморфизм

$$\varphi^* : [u] \rightarrow \varphi u \quad (u \in A)$$

фактор-алгебры $\mathfrak{A}/\sigma$ на алгебру $\mathfrak{B}$. Функция $H(x)$, представляющая φ в координатной форме, т. е. удовлетворяющая соотношению $\varphi(\alpha n) = \beta H(n)$, представляет, очевидно, и отображение φ^* . Поэтому изоморфизм φ^* есть $\mathbf{R}$ -мономорфизм $\mathfrak{A}/\sigma$ на $\mathfrak{B}$. Тем самым нами установлена следующая

Т е о р е м а 3.3.1. *Каноническая нумерация α^* фактор-алгебры $\mathfrak{A}/\sigma$ от алгебры $\mathfrak{A}$ с $\mathbf{R}$ -нумерацией α по конгруэнтности σ есть $\mathbf{R}$ -нумерация, имеющая то же номерное множество, что и нумерация α . Эквивалентность θ_{α^*} на $\mathfrak{A}/\sigma$ тогда и только тогда есть $\mathbf{R}$ -отношение, когда $\mathbf{R}$ -отношением на $\mathfrak{A}$ является конгруэнтность σ . Если φ есть $\mathbf{R}$ -гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на нумерованную алгебру $\mathfrak{B}$, то канонический изоморфизм $\mathfrak{A}/\sigma$ на $\mathfrak{B}$ есть $\mathbf{R}$ -мономорфизм.*

Отметим, в частности, что фактор-алгебры позитивных (негативных) алгебр по позитивным (негативным) конгруэнтностям сами позитивны (негативны). Далее, фактор-алгебра конструктивной (общерекурсивной) алгебры тогда и только тогда конструктивна (общерекурсивна), когда соответствующая конгруэнтность общерекурсивна.

Из второй половины теоремы 2.1.1 теперь непосредственно получается

Т е о р е м а 3.3.2. *Пусть алгебра $\mathfrak{A}$, имеющая рекурсивно перечислимое номерное множество, чр-гомоморфно отображена на алгебру $\mathfrak{B}$ с позитивной нумерацией. Тогда соответствующий канонический мономорфизм фактор-алгебры на $\mathfrak{B}$ является частично рекурсивной эквивалентностью.*

Из этой теоремы и приведенных выше замечаний вытекает важное

С л е д с т в и е. *Каждая позитивная алгебра, являющаяся чр-гомоморфным образом позитивной алгебры $\mathfrak{A}$, чр-эквивалентна фактор-алгебре алгебры $\mathfrak{A}$ по подходящей чр-конгруэнтности.*

Аналогичные утверждения в силу тех же теорем 2.1.1 и 3.1.1 справедливы и для конструктивных алгебр. А именно, если конструктивная алгебра $\mathfrak{A}$ отображена ор-гомоморфно на конструктивную алгебру $\mathfrak{B}$, то соответствующий канонический мономорфизм $\mathfrak{A}/\sigma$ на $\mathfrak{B}$ является ор-эквивалентностью, а конгруэнтность σ общерекурсивна на $\mathfrak{A}$.

Это показывает, что совокупность всех конструктивных ор-гомоморфных образов заданной конструктивной алгебры с точностью до ор-эквивалентности исчерпывается фактор-алгебрами алгебры по ее различным ор-конгруэнтностям.

Выше рассмотрено задание гомоморфизмов посредством конгруэнтностей. Конгруэнтность на алгебре $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как совокупность пар

элементов алгебры $\mathfrak{A}$, конгруэнтных друг другу. Однако в общей теории алгебр обычно исследуют также возможность определять гомоморфизмы посредством подмножеств просто элементов алгебры, а не их пар. Ниже указывается один общий род алгебр, в которых такое определение реализуется по наиболее простой схеме.

Пусть K — какой-либо класс алгебраических систем вида (18) (из п. 3.1). Рассмотрим произвольный терм $\alpha(x_1, \dots, x_s)$, составленный из индивидуальных предметных символов $a_1, \dots, a_k$, предметных переменных $x_1, \dots, x_s$ и функциональных переменных $f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_m$. Пусть $\mathfrak{A}$ — какая-либо фиксированная алгебраическая система класса K . Тогда «значения» символов $a_1, \dots, a_k$ и $f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_m$ в терме $\alpha(x_1, \dots, x_s)$ будут фиксированными и каждым по произволу указываемым значениями переменных x_i в α будет отвечать значение терма α . Таким образом, терм α будет определять s -местную операцию на каждой системе класса K . Операции, определяемые на $\mathfrak{A}$ термами, называются термальными или многочленными операциями.

Наряду с термальными операциями далее будет нужно рассматривать операции немного более общего вида, которые будут называться квазитермальными. Именно, пусть $P_1, \dots, P_n$ — основные предикатные символы класса K ; $x_1, \dots, x_s$ — предметные переменные. Элементарными формулами назовем выражения вида $P_i(a_1, \dots, a_r)$ и $\alpha = \beta$, где $a_1, \dots, a_r, \alpha, \beta$ — термы, составленные из символов $x_1, \dots, x_s, a_1, \dots, a_k, f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_m$.

Выражение, составленное из элементарных формул с помощью конъюнкций, дизъюнкций и отрицаний по обычным правилам, будет называться открытой формулой, а выражение, составленное из элементарных формул только с помощью конъюнкций и дизъюнкций, будет называться положительной открытой формулой. Наконец, формула вида

$$(\exists y_1) \dots (\exists y_l) \mathfrak{F}(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_l), \quad (24)$$

где $\mathfrak{F}(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_l)$ — открытая формула с предметными переменными $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_l$, будет называться $\exists$ -формулой. Если $\mathfrak{f}$ — положительная открытая формула, то формула (24) будет называться положительной $\exists$ -формулой.

Для каждого значения переменных $x_1, \dots, x_s$ из основного множества алгебраической системы $\mathfrak{A}$ формула (24) будет иметь одно из значений: истинно, ложно, неопределенно (в случае, если среди основных операций системы $\mathfrak{A}$ есть частичные операции). Поэтому каждая $\exists$ -формула представляет определенный предикат (возможно, частично) на системе $\mathfrak{A}$. Эти предикаты назовем $\exists$ -предикатами.

Обозначим через $P(x_1, \dots, x_s)$ предикат, представляемый формулой (24). Допустим теперь, что в любой алгебраической системе $\mathfrak{A}$ класса K для каждого значения $x_1, \dots, x_{s-1}$ существует не более одного значения для x_s , при котором предикат $P(x_1, \dots, x_s)$ будет истинен. Тогда, обозначая указанное значение x_s через $F(x_1, \dots, x_{s-1})$, получим новую операцию на $\mathfrak{A}$. Эта операция, вообще говоря, будет частичной операцией, но может оказаться, что она будет и всюду определенной.

Операция $G(x_1, \dots, x_{s-1})$, определенная каким-нибудь способом на каждой системе $\mathfrak{A}$ класса K , называется открытой, положительной, $\exists$ -операцией, если $G(x_1, \dots, x_{s-1})$ равна операции, получаемой указанным способом из формулы, являющейся соответственно открытой, положительной, $\exists$ -форму-

лой. В частности, открытые и положительные операции называются квази-термальными на K . Характеристика их указана в [9].

Положительные $\exists$ -предикаты и $\exists$ -операции обладают следующим свойством устойчивости относительно гомоморфизмов: для любого гомоморфизма φ алгебраической системы $\mathfrak{A}$ класса K в алгебраическую систему $\mathfrak{B}$ того же класса K и любых положительных на K $\exists$ -предиката $P(x_1, \dots, x_s)$ и $\exists$ -операции $F(x_1, \dots, x_{s-1})$ для любых $x_1, \dots, x_s$ из $\mathfrak{A}$ имеем

$$\begin{aligned} P(x_1, \dots, x_s) &\Rightarrow P(\varphi x_1, \dots, \varphi x_s), \\ \varphi F(x_1, \dots, x_{s-1}) &= F(\varphi x_1, \dots, \varphi x_{s-1}), \end{aligned} \quad (25)$$

причем в равенстве (25) из определенности левой части следует определенность правой.

Доказательство легко проводится индукцией по длине формулы $\exists$.

В общей теории алгебраических систем важную роль играют предикаты и операции, представляемые формулами, имеющими не только вид (24), но и более общий вид $(Q_1 y_1) \dots (Q_i y_i) \exists(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_i)$, где $Q_1, \dots, Q_i$ — кванторы существования и всеобщности, идущие в произвольном порядке. Нижеследующая теорема фиксирует особую роль $\exists$ -предикатов и $\exists$ -операций в теории конструктивных систем.

Т е о р е м а 3.3.3. Пусть алгебраическая система $\mathfrak{A}$ имеет $\mathbf{R}$ -нумерацию с рекурсивно перечислимым номерным множеством. Тогда а) каждый открытый предикат и каждая термальная операция на $\mathfrak{A}$ будут соответственно $\mathbf{R}$ -предикатом и $\mathbf{R}$ -операцией ($\mathbf{R} = \text{пр, ор, чр}$); б) каждая всюду определенная на $\mathfrak{A}$ $\exists$ -операция будет общерекурсивной в случае $\mathbf{R} = \text{ор}$; в) каждый $\exists$ -предикат и каждая частичная $\exists$ -операция на $\mathfrak{A}$ будут частично рекурсивными.

Все утверждения этой теоремы непосредственно вытекают из общеизвестных свойств $\mathbf{R}$ -функций (см. [2]), и доказательства их мы опустим.

Т е о р е м а 3.3.4. Пусть на классе K алгебр существует положительная $\exists$ -операция $\circ$, всюду определенная на каждой алгебре класса K и удовлетворяющая соотношениям

$$x \circ x = y \circ y, \quad (26)$$

$$x \circ y = x \circ x \Rightarrow x = y \quad (27)$$

для всех x, y из $\mathfrak{A}$. Тогда а) каждая конгруэнтность σ на $\mathfrak{A}$ однозначно определяется своим смежным классом, содержащим элемент $e = x \circ x$; б) конгруэнтность σ тогда и только тогда является $\mathbf{R}'$ -отношением на нумерованной алгебре $\mathfrak{A}$, имеющей $\mathbf{R}'$ -нумерацию α с рекурсивно перечислимым номерным множеством, когда $\mathbf{R}'$ -множеством является смежный класс, содержащий элемент e ($\mathbf{R}' = \text{ор, чр}$); в) если операция $\circ$ примитивно рекурсивна, то примитивная рекурсивность конгруэнтности σ равносильна примитивной рекурсивности смежного класса, содержащего элемент e .

Обозначим через φ канонический гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на фактор-алгебру $\mathfrak{A}/\sigma$. Так как операция $\circ$ положительна, то она гомоморфно устойчива, т. е. $\varphi(a \circ b) = \varphi a \circ \varphi b$ для $a, b \in \mathfrak{A}$. Но $a \sigma b \Leftrightarrow \varphi a = \varphi b$ и, значит, в силу (26) и (27)

$$a \sigma b \Rightarrow \varphi a \circ \varphi b = \varphi a \circ \varphi a \Rightarrow \varphi(a \circ b) = \varphi(a \circ a) \Rightarrow (a \circ b) \sigma e.$$

Обратно,

$$(a \circ b) \sigma e \Rightarrow \varphi a \circ \varphi b = \varphi a \circ \varphi a \Rightarrow \varphi a = \varphi b.$$

Таким образом, обозначая через $[e]$ смежный класс по σ , содержащий элемент e , имеем

$$a\sigma b \Leftrightarrow a \circ b \in [e].$$

Тем самым утверждение а) доказано.

Чтобы доказать утверждение б), обозначим через $d(x, y)$ R' -функцию, представляющую операцию $\circ$ в нумерации α . В силу теоремы 3.3.3 такая функция заведомо существует. Пусть функция $E(x)$ представляет множество $[e]$ в нумерации α . Это значит, что $\alpha x \in [e] \Leftrightarrow E(x) = 1$ для $x \in D_\alpha$. Но тогда функция $E(d(x, y))$ будет представлять отношение σ в нумерации α . Поэтому если класс $[e]$ есть R' -множество, то σ есть R' -отношение. Обратно, если функция $S(x, y)$ представляет отношение σ в нумерации α , то одноместная функция $S(x, n)$, где n — какой-либо номер элемента e представляет множество $[e]$ и, значит, если σ есть R' -отношение, то $[e]$ есть R' -множество. Эти же рассуждения годятся и для доказательств утверждения в).

В качестве частного случая теоремы 3.3.4 получаем: *на группе (кольце) с R -нумерацией конгруэнтность тогда и только тогда есть R -конгруэнтность, когда соответствующий нормальный делитель (идеал) есть R -множество.*

§ 4. Конечно порожденные алгебры

4.1. Общие конечно порожденные алгебры. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра с основными операциями $f_i(u_1, \dots, u_{n_i})$ ($i = 1, \dots, s$). Согласно п. 1.2 алгебра $\mathfrak{A}$ называется конечно порожденной, если существует конечная система $a_1, \dots, a_k$ элементов $\mathfrak{A}$, порождающая всю алгебру $\mathfrak{A}$. Считая $a_1, \dots, a_k$ выделенными элементами алгебры $\mathfrak{A}$ и внося символы $a_1, \dots, a_k$ в сигнатуру алгебры $\mathfrak{A}$, мы обратим $\mathfrak{A}$ в алгебру типа $\langle 0, \dots, 0, n_1, \dots, n_s \rangle = \tau$ (см. п. 1.4). Условие, что $\mathfrak{A}$ порождается элементами $a_1, \dots, a_s$, теперь будет означать, что $\mathfrak{A}$ не имеет подалгебр типа τ , отличных от $\mathfrak{a}$, т. е. что $\mathfrak{A}$ есть минимальная алгебра типа τ .

Обозначим через T совокупность всевозможных термов, составленных из предметных символов $a_1, \dots, a_k$ и функциональных символов $f_1, \dots, f_s$. Пусть $a_1, \dots, a_{n_i}$ — некоторые термы из T . Рассматривая терм $f_i(a_1, \dots, a_{n_i})$ как результат операции f_i , выполненной над термами $a_1, \dots, a_{n_i}$, мы обратим T в алгебру $\mathfrak{Z}$ типа τ . Согласно п. 1.4 $\mathfrak{Z}$ есть свободная алгебра со свободными порождающими $a_1, \dots, a_k$ в классе всех алгебр типа τ .

Вводим в T нумерацию, называя номером терма a_i число 3^i и полагая далее по индукции

$$Nf_i(a_1, \dots, a_{n_i}) = 2^i p_1^{N a_1} \dots p_{n_i}^{N a_{n_i}}, \quad (28)$$

если номера термов a_j уже известны.

Определенную таким образом нумерацию алгебры $\mathfrak{Z}$ мы будем называть стандартной нумерацией алгебры $\mathfrak{Z}$ и обозначать ее символом γ^* . Номерное множество D_γ этой нумерации отлично от D . Однако легко проверяется, что оно примитивно рекурсивно.

Из соотношения (28) видим, что операция f_i в нумерации γ^* представляется функцией

$$F_i(x_1, \dots, x_{n_i}) = 2^i p_1^{x_1} \dots p_{n_i}^{x_{n_i}} \quad (i = 1, \dots, s).$$

Поскольку функции $F_1, \dots, F_s$ примитивно рекурсивны, то и нумерация γ^* примитивно рекурсивна. Кроме того, γ^* является однозначной нумерацией и, значит, алгебра $\mathfrak{Z}$ вообще примитивно рекурсивна в смысле п. 3.2.

Обозначим через φ отображение $\mathfrak{Z}$ на $\mathfrak{A}$, при котором терму $a \in \mathfrak{Z}$ отвечает значение этого термина в $\mathfrak{A}$. С помощью отображения φ переносим нумерацию γ^* на алгебру $\mathfrak{A}$, полагая

$$\gamma n = \varphi(\gamma^* n) \quad (n \in D_\gamma).$$

Отображение φ есть гомоморфизм $\mathfrak{Z}$ на $\mathfrak{A}$ и потому функции F_i , представляющие основные операции алгебры $\mathfrak{Z}$ в нумерации γ^* , будут представлять и основные операции алгебры $\mathfrak{A}$ в нумерации γ . Таким образом, γ является примитивно рекурсивной нумерацией $\mathfrak{A}$. Эту нумерацию мы будем далее называть стандартной нумерацией алгебры $\mathfrak{A}$.

Пусть σ — конгруэнтность на $\mathfrak{Z}$, отвечающая гомоморфизму φ . Согласно вышеуказанным определениям канонический изоморфизм $\mathfrak{Z}/\sigma$ на $\mathfrak{A}$ обладает тем свойством, что соответствующие элементы алгебр $\mathfrak{Z}/\sigma$ и $\mathfrak{A}$ имеют одинаковые номера.

Наряду со стандартной нумерацией иногда бывает удобно пользоваться еще одной нумерацией алгебры $\mathfrak{A}$, строящейся следующим образом. При соединим к числу основных операций алгебры $\mathfrak{A}$ еще одну новую операцию $f_{s+1}(u) = u$. Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ алгебру $\mathfrak{A}$, обогащенную этой операцией, и пусть $\mathfrak{Z}_0$ — соответствующая свободная алгебра. Так как основное множество у алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_0$ одно и то же, то стандартная нумерация алгебры $\mathfrak{A}_0$ будет одновременно и нумерацией алгебры $\mathfrak{A}$. Эту нумерацию мы будем обозначать δ и называть расширенной стандартной нумерацией.

Стандартная нумерация может быть однозначной в случае, когда $\mathfrak{A}$ — свободная алгебра. Напротив, расширенная стандартная нумерация всегда имеет бесконечные классы номеров. Действительно, если x — δ -номер какого-нибудь элемента $a \in \mathfrak{A}$, то число $2^{s+1}p_1^x$ будет δ -номером элемента $f_{s+1}(a)$, т. е. того же самого элемента a . Функция $2^{s+1}p_1^x$ примитивно рекурсивная, поэтому примитивно рекурсивна и функция $Q(x, y)$, определяемая схемой

$$Q(x, 0) = x, \quad Q(x, n+1) = 2^{s+1}p_1^{Q(x, n)}.$$

Согласно сказанному, если x — δ -номер какого-либо элемента $a \in \mathfrak{A}$, то числа $Q(x, 0), Q(x, 1), \dots$ будут δ -номерами того же элемента a и, значит, нумерация δ есть нумерация с пр-бесконечными классами в смысле п. 2.2.

Функции F_i , представляющие основные операции $\mathfrak{A}$ и нумерации γ , очевидно, представляют их и в нумерации δ . Поэтому расширенная стандартная нумерация примитивно рекурсивна. Нетрудно убедиться и в том, что вообще расширенная стандартная нумерация пр-эквивалентна стандартной нумерации. Это непосредственно вытекает из следующей теоремы.

Т е о р е м а 4.1.1. *Стандартная и расширенная стандартная нумерации произвольной конечно порожденной алгебры $\mathfrak{A}$ R-сводимы к любой R-нумерации α алгебры $\mathfrak{A}$ ($R = pr, op, ch$).*

Пусть R-функции $G_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ ($i = 1, \dots, s$) представляют в нумерации α основные функции алгебры $\mathfrak{A}$ и пусть $m_1, \dots, m_k$ — α -номера порождающих элементов $a_1, \dots, a_k$. Определяем функцию $f(x)$ следующей схемой:

$$f(x) = \begin{cases} G_i(f(ex(1, x)), \dots, f(ex(n_i, x))), & \text{если } ex(0, x) = i \quad (i = 1, \dots, s), \\ m_i, & \text{если } x = 3^i \quad (i = 1, \dots, k), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (29)$$

Так как эта схема есть схема возвратной рекурсии, приводящейся обычным образом (см. [16]) к примитивной рекурсии, и заданные функции G_i , $\text{ex}(i, x)$ суть R -функции, то функция $f(x)$ будет также R -функцией. Остается показать, что $f(x)$ сводит нумерации γ и δ к нумерации α , т. е. что

$$\gamma x = \alpha f(x) \quad (x \in D_\gamma), \quad \delta x = \alpha f(x) \quad (x \in D_\delta). \quad (30)$$

Так как каждый γ -номер произвольного элемента $\mathfrak{A}$ является в то же время его δ -номером, то из соотношений (30) достаточно доказать лишь второе. Доказательство ведем индукцией по x . Наименьшее число в D_δ есть 3; это δ -номер элемента a_1 . Согласно схеме (29) имеем $f(3) = m_1$ и потому $a_1 = \delta(3) = \alpha f(3)$.

Пусть теперь $y \in D_\delta$ и для всех x , входящих в D_δ и меньших y , соотношение (30) справедливо. Если $y = 3^i$, то по схеме (29) находим, что $f(y) = m_i$ и, значит, $a_i = \delta y = \alpha f(y)$. Если же $\text{ex}(0, y) = i$, $1 \leq i \leq s$, то $\text{ex}(1, y), \dots, \text{ex}(n_i, y)$ будут числами из D_δ , меньшими y , и потому в силу индуктивного предположения

$$\delta \text{ex}(j, y) = \alpha f(\text{ex}(j, y)) \quad (j = 1, \dots, n_i).$$

С другой стороны, из схемы (29) в рассматриваемом случае находим, что

$$f(y) = G_i(f(\text{ex}(1, y)), \dots, f(\text{ex}(n_i, y)))$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha f(y) &= f_i(\alpha f(\text{ex}(1, y)), \dots, \alpha f(\text{ex}(n_i, y))) = \\ &= f_i(\delta \text{ex}(1, y), \dots, \delta \text{ex}(n_i, y)) = \delta y, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема дает повод ввести следующее определение: нумерация α произвольной алгебраической системы $\mathfrak{A}$ называется R -гёделевской ее нумерацией, если α есть R -нумерация $\mathfrak{A}$, R -сводимая к любой R -нумерации $\mathfrak{A}$.

Теорема 4.1.1 утверждает, что стандартная и расширенная стандартная нумерации конечно порожденной алгебры являются пр-гёделевскими нумерациями этой алгебры.

Из указанного выше определения непосредственно следует, что все R -гёделевские нумерации алгебраической системы R -эквивалентны между собой.

Из теоремы 4.1.1 и следствия 2 теоремы 2.3.2 также непосредственно вытекает

С л е д с т в и е. Каждая R' -гёделевская нумерация с R' -бесконечными классами конечно порожденной алгебры R' -изоморфна расширенной стандартной нумерации этой алгебры ($R' = \text{ор}, \text{чр}$).

Важнейшими характеристиками каждой нумерации α служат тип ее номерного множества D_α и тип отношения эквивалентности θ_α на D_α , порождаемого нумерацией α . Номерные множества D_γ и D_δ стандартных нумераций конечно порожденных алгебр имеют простое строение — они примитивно рекурсивны. Что же касается соответствующих эквивалентностей θ_γ , θ_δ , то они могут быть рекурсивными всех трех типов пр, ор, чр, а также могут и не быть рекурсивно перечислимыми. Какой из этих случаев имеет место — зависит от внутреннего строения алгебры. Именно, имеет место

Т е о р е м а 4.1.2. Если конечно порожденная алгебра $\mathfrak{A}$ допускает хотя бы одну позитивную нумерацию α , т. е. чр-нумерацию, у которой D_α и θ_α

рекурсивно перечислимы, то класс α -рёделевских нумераций $\mathfrak{A}$ совпадает с классом позитивных нумераций алгебры $\mathfrak{A}$. Если конечно порожденная алгебра $\mathfrak{A}$ допускает хотя бы одну ор-нумерацию α , у которой D_α и θ_α общерекурсивны, то класс всех нумераций $\mathfrak{A}$ с этими свойствами совпадает с классом всех ор-рёделевских нумераций $\mathfrak{A}$.

В самом деле, пусть α — α -нумерация $\mathfrak{A}$, имеющая рекурсивно перечислимые D_α и θ_α . Так как δ α -сводима к α , то в силу теоремы 2.1.1 нумерация δ α -эквивалентна α и, в частности, эквивалентность θ_δ рекурсивно перечислима. Тем самым первое утверждение теоремы 4.1.2 доказано.

Если теперь α имеет общерекурсивные D_α и θ_α , то в силу теоремы 2.1.2 из уже доказанной α -эквивалентности α и δ следует их ор-эквивалентность. В силу теоремы 2.1.5 отсюда, в свою очередь, вытекает, что эквивалентность θ_δ общерекурсивна. Тем самым доказано и второе утверждение теоремы 4.1.2.

Теорема 4.1.2 показывает, что все конструктивные нумерации алгебры $\mathfrak{A}$ с конечным числом порождающих ор-эквивалентны, и если такие нумерации существуют у $\mathfrak{A}$, то такой конструктивной нумерацией заведомо является стандартная нумерация $\mathfrak{A}$.

Далее, принимая во внимание следствие теоремы 4.1.1, видим, что если конечно порожденная алгебра $\mathfrak{A}$ обладает хотя бы одной конструктивной нумерацией, то она обладает и конструктивными нумерациями с бесконечными классами, причем все такие нумерации ор-изоморфны расширенной стандартной нумерации $\mathfrak{A}$.

Каждый элемент конечно порожденной алгебры $\mathfrak{A}$ представим в виде значения некоторого терма указанного выше вида. Проблемой тождества (проблемой равенства) для алгебры $\mathfrak{A}$ называется проблема существования алгоритма, позволяющего по записи двух термов узнать, равны или нет значения этих термов в $\mathfrak{A}$. Так как по записи терма эффективно находится его стандартный номер и по стандартному номеру эффективно восстанавливается запись терма, то проблема тождества для алгебры $\mathfrak{A}$ равносильна проблеме существования алгоритма для решения вопроса, являются ли произвольно заданные числа x, y γ -номерами одного и того же элемента $\mathfrak{A}$, т. е. являются ли числа x, y θ_γ -эквивалентными. Но существование алгоритма для решения вопроса θ_γ -эквивалентности чисел равносильно общерекурсивности θ_γ . Поэтому алгебры с разрешимой проблемой тождества — это алгебры, обладающие конструктивными нумерациями. Такие алгебры было бы естественно назвать конструктивизируемыми алгебрами по аналогии с топологизируемыми или упорядочиваемыми группами. Однако для краткости конструктивизируемые конечно порожденные алгебры можно просто называть конструктивными, поскольку все конструктивные нумерации таких алгебр рекурсивно эквивалентны.

Примером неконструктивной конечно порожденной алгебры может служить алгебра $\mathfrak{A}_{\text{чр}}$ всех одноместных частично рекурсивных функций, определенная в п. 1.5. Действительно, легко непосредственно убедиться, что стандартная нумерация $\mathfrak{A}_{\text{чр}}$ α -эквивалентна ее клиниевской нумерации. Но клиниевская нумерация согласно п. 2.3 полная и устойчивая. Отношение эквивалентности θ устойчивой нумерации не рекурсивно перечислимо, значит, алгебра $\mathfrak{A}_{\text{чр}}$ неконструктивна.

Из свойств устойчивых нумераций вытекает, что все ор-рёделевские нумерации $\mathfrak{A}_{\text{чр}}$ не только ор-эквивалентны, но даже ор-изоморфны.

4.2. Конечно определенные алгебры. В п. 1.4 было введено понятие алгебры, определенной заданной системой условных тождеств и заданной систе-

мой порождающих. Алгебра, определенная конечными системами условных тождеств и порождающих элементов, будет называться конечно определенной алгеброй.

Т е о р е м а 4.2.1. *Отношение эквивалентности θ_γ , отвечающее стандартной нумерации γ произвольной конечно определенной алгебры $\mathfrak{A}$, рекурсивно перечислимо и, таким образом, все ch -гёделевские нумерации конечно определенных алгебр позитивны.*

Пусть $a_1, \dots, a_k$ — символы порождающих элементов и пусть

$$c_1 = c_2 \& \dots \& c_{2r-1} = c_{2r} \Rightarrow c_{2r+1} = c_{2r+2} \quad c = c(x_1, \dots, x_n) \quad (31)$$

— i -е из последовательности условных тождеств, определяющих алгебру $\mathfrak{A}$. Обозначим символом Θ совокупность пар θ_γ -эквивалентных чисел, где γ — стандартная нумерация алгебры $\mathfrak{A}$, являющаяся одновременно и стандартной нумерацией всех термов, образованных из предметных символов $a_1, \dots, a_k$ и символов основных операций $\mathfrak{A}$. Совокупность всех таких термов была обозначена в п. 4.1. символом T .

Берем теперь какой-либо терм $c_s(x_1, \dots, x_n)$ из числа термов, участвующих в записи условного тождества (31), и подставляем в него вместо переменных $x_1, \dots, x_n$ произвольные термы $a_1, \dots, a_n$ из T . В результате получим терм $c_s(a_1, \dots, a_n)$ из T . Если стандартные номера термов $a_1, \dots, a_n$ суть $x_1, \dots, x_n$, то стандартный номер терма $c_s(a_1, \dots, a_n)$ будет определенной функцией h_s от $x_1, \dots, x_n$. Из теоремы 4.1.1 видно, что $h_s(x_1, \dots, x_n)$ — примитивно рекурсивная функция.

В терминах совокупности Θ условное тождество (31) теперь будет равносильно следующему утверждению:

а) если пары $\langle h_{2s-1}(x_1, \dots, x_n), h_{2s}(x_1, \dots, x_n) \rangle (s = 1, \dots, r)$ принадлежат Θ , то пара $\langle h_{2r+1}(x_1, \dots, x_n), h_{2r+2}(x_1, \dots, x_n) \rangle$ также принадлежит Θ .

Аналогично рефлексивность, симметричность и транзитивность эквивалентности θ_γ равносильны утверждениям:

- б) если $\langle x, y \rangle \in \Theta$, то $\langle y, x \rangle \in \Theta$;
- в) если $\langle x, y \rangle \in \Theta$ и $\langle y, z \rangle \in \Theta$, то $\langle x, z \rangle \in \Theta$;
- г) если $\langle x, x \rangle \in \Theta$, то $\langle x + 1, x + 1 \rangle \in \Theta$;
- д) $\langle 0, 0 \rangle \in \Theta$.

Наименьшим множеством пар, удовлетворяющим требованиям а) — д), очевидно, является множество Θ , пополненное всеми парами вида $\langle x, x \rangle$. Пусть Θ_0 есть совокупность стандартных номеров всех пар, входящих в Θ и номеров пар $\langle x, x \rangle$. Соответственно а) — д) вводим функции H_i, G_1, G_2, G_3 , полагая

$$H_i(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_r) = \begin{cases} v(h_{2r+1}(l(y_1), \dots, l(y_n)), h_{2r+2}(l(y_1), \dots, l(y_n))), \\ \text{если } z_s = v(h_{2s-1}(l(y_1), \dots, l(y_n)), h_{2s}(l(y_1), \dots, \\ \dots, l(y_n))) \quad (s = 1, \dots, r), \\ 0 \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$G_1(x) = v(r(x), l(x));$$

$$G_2(y, z) = \begin{cases} v(l(y), r(z)), & \text{если } r(y) = l(z), \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$G_3(y) = \begin{cases} v(l(y) + 1, l(y) + 1), & \text{если } l(y) = r(y), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Функции H_i, G_1, G_2, G_3 здесь определены так, что если значениями их аргументов являются номера каких-либо пар из Θ , то значением самой функции будет номер пары из Θ , получаемой из данных пар по соответствующему из правил а) — д). Рассмотрим на минуту алгебру $\mathfrak{E}$ с основным множеством D и основными операциями H_i, G_1, G_2, G_3 . Подмножество Θ_0 в алгебре $\mathfrak{E}$ будет наименьшим, содержащим 0 и замкнутым относительно указанных операций, т. е. будет подалгеброй в $\mathfrak{E}$, порожденной числом $0 = v(0, 0)$. На основании теоремы 3.2.1 отсюда заключаем, что множество Θ_0 , а вместе с ним и множество Θ рекурсивно перечислимы. Теорема 4.2.1 доказана.

Эту теорему легко обобщить и на случай алгебр, определяемых бесконечными системами условных тождеств. А именно, пусть задана какая-либо ор-функция $n(i)$. Рассматриваем три бесконечные последовательности символов: последовательность индивидуальных предметных символов $a_1, a_2, \dots$, последовательность предметных переменных $x_1, x_2, \dots$ и последовательность функциональных символов $f_1, f_2, \dots$, членности которых (т. е. число аргументов) равны соответственно $n(1), n(2), \dots$. Совокупность U всех термов, составленных из символов указанных последовательностей, нумеруем, приписывая, например, термам a_i и x_i номера $3^i, 5^i$ и полагая

$$Nf_i(b_1, \dots, b_{n(i)}) = 2^i p_1^{Nb_1} \dots p_{n(i)}^{Nb_{n(i)}}$$

для термов большей длины. При помощи этой нумерации U нумеруем всевозможные условные тождества, называя номером условного тождества (30) число

$$w = \prod_{s=1}^{2r+2} p_s^{Nc_s(x_1, \dots, x_n)}.$$

Теперь, повторяя почти дословно доказательство теоремы 4.2.1, получаем, что *стандартная нумерация алгебры, заданной рекурсивно перечислимой системой условных тождеств, имеет рекурсивно перечислимую эквивалентность.*

Путем непосредственного обращения отсюда получается такое

С л е д с т в и е. *Если стандартная нумерация γ конечно порожденной алгебры имеет эквивалентность θ_γ , не являющуюся рекурсивно перечислимым отношением, то алгебра не может быть конечно или рекурсивно определенной.*

В частности, отсюда вытекает, что не будет конечно определенной алгебра $\mathfrak{A}$ одноместных частично рекурсивных функций из п. 1.5.

С другой стороны, группа Новикова [15], имеющая конечное число определяющих соотношений и неразрешимую рекурсивно проблему тождества, может служить примером конечно определенной алгебры, не имеющей конструктивных нумераций.

В общем случае не существует алгоритма, позволяющего по виду определяющих тождеств судить о конструктивности соответствующей алгебры (см. [15]). Точная формулировка и доказательство этого будут даны позже. А здесь мы приведем только два простых условия, при выполнении которых конечно определенная алгебра заведомо является конструктивной.

Среди конгруэнтностей произвольной алгебры $\mathfrak{A}$ всегда есть две тривиальные конгруэнтности: нулевая конгруэнтность, при которой все различные элементы $\mathfrak{A}$ не конгруэнтны друг другу, и единичная конгруэнт-

ность, при которой все элементы $\mathfrak{A}$ конгруэнтны между собой. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется простой, если она не имеет нетривиальных конгруэнтностей.

Т е о р е м а 4.2.2 (А. В. Кузнецов [4]). *Каждая простая конечно определенная алгебра конструктивна.*

Если заданная алгебра $\mathfrak{A}$ одноэлементная, то доказывать нечего. Поэтому пусть известно, что алгебра $\mathfrak{A}$ неоднородная. Пусть $a_1, \dots, a_k$ — порождающие этой алгебры. Согласно теореме 4.2.1 мы можем эффективно найти примитивно рекурсивные функции $g(n), h(n)$ такие, что совокупность всех пар γ -эквивалентных чисел будет совпадать с совокупностью членов последовательности

$$\langle g(0), h(0) \rangle, \langle g(1), h(1) \rangle, \dots \quad (32)$$

Возьмем теперь какие-либо термы a, b номеров m, n и спросим себя, равны или нет значения их в $\mathfrak{A}$, т. е. входит или нет пара $\langle m, n \rangle$ в указанную последовательность? Для решения этого вопроса присоединим соотношение $a = b$ к числу определяющих соотношений и обозначим через $\mathfrak{B}$ алгебру с этой расширенной системой соотношений. Ищем пр-функции $g_1(x), h_1(x)$ такие, чтобы отношение эквивалентности θ_{γ_1} , отвечающее стандартной нумерации новой алгебры, состояло из пар

$$\langle g_1(0), h_1(0) \rangle, \langle g_1(1), h_1(1) \rangle, \dots \quad (33)$$

Если $a = b$ в $\mathfrak{A}$, то в последовательности (32) должна встретиться пара $\langle m, n \rangle$. Если же $a \neq b$ в $\mathfrak{A}$, то алгебра $\mathfrak{B}$ должна быть единичной, так как $\mathfrak{B}$ есть гомоморфный образ $\mathfrak{A}$. Поэтому в последовательности (33) должны встретиться пары $\langle 3, 3^2 \rangle, \langle 3, 3^3 \rangle, \dots, \langle 3, 3^k \rangle$. Просматривая поочередно пары из 1-й и 2-й последовательности, мы через конечное число шагов либо найдем пару $\langle m, n \rangle$ в первой последовательности и тогда $a = b$ в $\mathfrak{A}$, либо найдем все пары $\langle 3, 3^2 \rangle, \dots, \langle 3, 3^k \rangle$ во второй последовательности и тогда $a \neq b$ в $\mathfrak{A}$. Таким образом, проблема тождества в $\mathfrak{A}$ алгоритмически разрешима и, значит, $\mathfrak{A}$ конструктивна.

Изложенное рассуждение, очевидно, имеет силу и для алгебр, определяемых рекурсивно перечислимой системой определяющих соотношений.

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра с позитивной нумерацией α . По условию D_α можно представить как совокупность всех значений, принимаемых подходящей пр-функцией $h(x)$. Наряду с алгеброй $\mathfrak{A}$ рассмотрим абсолютно свободную алгебру $\mathfrak{B}$ с индивидуальными предметными символами $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ и теми же функциональными символами f_i , что и у алгебры $\mathfrak{A}$. Каждому терму $a \in \mathfrak{B}$ ставим в соответствие его α -номер следующим путем: терму a_n ставим в соответствие α -номер $h(n)$; если термы $a_1, \dots, a_{n_i}$ имеют α -номера $x_1, \dots, x_{n_i}$, то терму $f_i(a_1, \dots, a_{n_i})$ ставим в соответствие α -номер $F_i(x_1, \dots, x_{n_i})$, где F_i — функция, представляющая операцию f_i алгебры $\mathfrak{A}$ в нумерации α .

Все пары термов из $\mathfrak{B}$ располагаем стандартным образом в последовательность

$$\langle b_0, c_0 \rangle, \langle b_1, c_1 \rangle, \dots, \langle b_n, c_n \rangle, \dots$$

Пусть последовательность пар их α -номеров есть

$$\langle b_0, c_0 \rangle, \langle b_1, c_1 \rangle, \dots, \langle b_n, c_n \rangle, \dots$$

По условию эквивалентность θ_α рекурсивно! перечислима и потому пары

α -эквивалентных чисел эффективно располагаются в последовательность

$$\langle d_0, e_0 \rangle, \quad \langle d_1, e_1 \rangle, \dots, \langle d_n, e_n \rangle, \dots$$

Теперь строим последовательность равенств вида $a_i = a'_i$ следующим образом:

1. Сравниваем пары $\langle b_0, c_0 \rangle$ и $\langle d_0, e_0 \rangle$. Если эти пары совпадают, то полагаем $a_0 = b_0$, $a'_0 = c_0$; если не совпадают, то полагаем $a_0 = b_0$, $a'_0 = b_0$.

2. Сравниваем последовательность $\langle b_0, c_0 \rangle$, $\langle b_1, c_1 \rangle$ и последовательность $\langle d_0, e_0 \rangle$, $\langle d_1, e_1 \rangle$. Если пара $\langle b_0, c_0 \rangle$ находится во второй последовательности, то полагаем $a_1 = b_0$, $a'_1 = c_0$; если нет, то полагаем $a_1 = b_0$, $a'_1 = b_0$. Далее рассматриваем пару $\langle b_1, c_1 \rangle$. Если она входит во вторую последовательность, то полагаем $a_2 = b_1$, $a'_2 = c_1$; если не входит, то полагаем $a_2 = b_1$, $a'_2 = b_1$.

3. Берем отрезки длины 3: $\langle b_0, c_0 \rangle$, $\langle b_1, c_1 \rangle$, $\langle b_2, c_2 \rangle$ и $\langle d_0, e_0 \rangle$, $\langle d_1, e_1 \rangle$, $\langle d_2, e_2 \rangle$. Если пара $\langle b_0, c_0 \rangle$ встречается во втором отрезке, то полагаем $a_3 = b_0$, $a'_3 = c_0$; если нет, то $a_3 = b_0$, $a'_3 = b_0$. Затем то же самое проделываем с парой $\langle b_1, c_1 \rangle$ и т. д. В результате мы построим эффективно последовательность формальных равенств

$$a_0 = a'_0, a_1 = a'_1, \dots, a_n = a'_n, \dots \quad (34)$$

Пусть $\mathfrak{E}$ — алгебра с порождающими $a_0, a_1, \dots$ и определяющими соотношениями (34). Обозначим через φ отображение $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ (α — номер a , $a \in \mathfrak{B}$). Это отображение есть абстрактный гомоморфизм $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{A}$, причем совокупность пар $\langle a_i, a'_i \rangle$ представляет собою конгруэнтность σ на $\mathfrak{B}$, отвечающую гомоморфизму φ . Ясно, что $\mathfrak{E}$ это и есть фактор-алгебра $\mathfrak{B}/\sigma$. Легко видеть, что канонический изоморфизм $\mathfrak{B}/\sigma$ на $\mathfrak{A}$ является α -х-омоморфизмом алгебры $\mathfrak{B}/\sigma$, взятой со стандартной нумерацией, на алгебру $\mathfrak{A}$ с нумерацией α . Тем самым доказана следующая

Т е о р е м а 4.2.3. *Каждая позитивная нумерованная алгебра есть α -х-омоморфный образ стандартно нумерованной алгебры, заданной рекурсивно перечислимой системой определяющих соотношений. Стандартная нумерация каждой простой позитивной нумерованной алгебры является конструктивной.*

Число элементов фактор-алгебры $\mathfrak{A}/\sigma$ называется индексом конгруэнтности σ на алгебре $\mathfrak{A}$. В каком-то смысле родственными простым алгебрам являются бесконечные алгебры, все неединичные конгруэнтности на которых имеют конечный индекс.

Т е о р е м а 4.2.4 *Стандартная нумерация каждой конечно порожденной позитивной бесконечной алгебры $\mathfrak{A}$, все конгруэнтности на которой имеют конечный индекс, является конструктивной.*

Пусть $a_1, \dots, a_k$ — порождающие алгебры $\mathfrak{A}$. Согласно предыдущей теореме алгебра $\mathfrak{A}$ может рассматриваться как заданная рекурсивно перечислимой последовательностью определяющих соотношений (34).

Рассмотрим произвольные термы a, b . Если $a = b$ в $\mathfrak{A}$, то в последовательности (34) должно встретиться равенство $a = b$. Если $a \neq b$ в $\mathfrak{A}$, то, присоединяя соотношение $a = b$ к системе (4), мы должны по предположению получить систему соотношений, определяющую некоторую конечную алгебру $\mathfrak{B}$. Все равенства между термами, имеющие место в $\mathfrak{B}$, располагаются в рекурсивно перечислимую последовательность

$$b_0 = b'_0, \dots, b_n = b'_n, \dots, \quad (35)$$

аналогичную последовательности (34).

Как обычно, назовем высотой терма a_i число 0. Если высоты термов $p_1, \dots, p_{r_i}$ уже определены и максимальная из этих высот равна s , то высотой терма $f_i(p_1, \dots, p_{r_i})$ назовем число $s + 1$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_n$ совокупность всевозможных равенств вида $p = q$, где терм p имеет высоту n , а терм q имеет меньшую высоту. Часть совокупности $\mathfrak{D}_n$ назовем полной, если каждый терм высоты n является левой частью хотя бы одного из равенств, входящих в эту часть. Пусть $\mathfrak{D}_n^1, \dots, \mathfrak{D}_n^{v_n}$ — всевозможные полные части $\mathfrak{D}_n$.

Ясно, что если в некоторой алгебре $\mathfrak{C}$ истинны все равенства какой-нибудь полной части $\mathfrak{D}_n$, то $\mathfrak{C}$ конечна. С другой стороны, если алгебра $\mathfrak{C}$ конечна, то найдется такое n , что все равенства подходящей полной части $\mathfrak{D}_n^i$ будут истинны в $\mathfrak{C}$.

Возвращаясь теперь к термам a, b , рассмотрим процесс $\mathfrak{P}$, n -й шаг которого состоит в следующем: берем n членов последовательности (34) и смотрим, нет ли среди них равенства $a = b$. Если есть, то процесс обрывается и в $\mathfrak{A}$ имеем $a = b$. Если указанного равенства нет, то берем n членов последовательности (35) и смотрим, не содержатся ли среди них все равенства какой-нибудь полной части $\mathfrak{D}_m^i$ ($m = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, v_m$). Если содержатся, то алгебра $\mathfrak{B}$ конечная и, значит, в $\mathfrak{A}$ имеет место соотношение $a \neq b$. Если ни одна из указанных полных частей в отрезок $b_0 = b'_0, \dots, b_n = b'_n$ не входит, то переходим к следующему $(n + 1)$ -му шагу процесса $\mathfrak{P}$.

Условия, наложенные на алгебру $\mathfrak{A}$, таковы, что процесс $\mathfrak{P}$ непременно оборвется на некотором шаге и тем самым даст ответ на вопрос, равны или нет термы a, b в алгебре $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим еще один признак конструктивности алгебр. Пусть рассматривается какой-нибудь класс алгебр K . Алгебра $\mathfrak{A}$, не обязательно принадлежащая K , называется аппроксимируемой K -алгебрами, если для каждой пары a, b различных элементов $\mathfrak{A}$ существует гомоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}$ в одну из алгебр класса K , при котором $\varphi a \neq \varphi b$.

Т е о р е м а 4.2.5. (ср. Мак-Кинси [6]). *Пусть алгебра $\mathfrak{A}$, заданная конечной системой порождающих $a_1, \dots, a_k$ и конечной системой $\mathfrak{S}$ условных тождеств, аппроксимируема конечными алгебрами, удовлетворяющими соотношениям $\mathfrak{S}$. Тогда $\mathfrak{A}$ конструктивна.*

Чтобы узнать, выполнено ли в алгебре равенство $a = b$, где a и b — произвольно заданные термы, достаточно воспользоваться разрешающим процессом, n -й шаг которого состоит в следующем. Предварительно располагаем все полные части $\mathfrak{D}_n^i$ в последовательность

$$\mathfrak{D}_1^1, \dots, \mathfrak{D}_1^{v_1}, \mathfrak{D}_2^1, \dots, \mathfrak{D}_2^{v_2}, \dots \quad (36)$$

Теперь к системе соотношений $\mathfrak{S}$ присоединяем все равенства из n -й системы $\mathfrak{D}_n^i$ последовательности (36) и рассматриваем алгебру $\mathfrak{B}_n$, определяемую соотношениями $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}_n^i$ и порождающими $a_1, \dots, a_k$. Выше уже говорилось, что алгебра $\mathfrak{B}_n$ заведомо конечна, причем число ее различных элементов не превосходит эффективно вычисляемой границы, зависящей лишь от числа основных операций, их членностей и числа k порождающих. Но в таком случае мы, очевидно, можем решить, имеет или нет место в $\mathfrak{B}_n$ равенство $a = b$. Если оно в $\mathfrak{B}_n$ места не имеет, то в $\mathfrak{A}$ и подавно будет иметь место неравенство $a \neq b$ и на этом процесс будет считаться оборвавшимся.

Если в $\mathfrak{B}_n$ будет иметь место равенство $a = b$, то рассматриваем равенство $a_n = a'_n$ из (34). Если оно совпадает с $a = b$, то это значит, что в $\mathfrak{A}$ имеет место $a = b$ и процесс на этом обрывается. Если $a_n = a'_n$ не совпадает с $a = b$, то переходим к $(n + 1)$ -му шагу процесса.

По условию либо $a = b$ в $\mathfrak{A}$, либо $a \neq b$ в подходящей конечной алгебре $\mathfrak{B}_n$. Таким образом, процесс через конечное число шагов обрывается и вопрос о равенстве $a = b$ разрешается.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Frohlich, J. C. Shepherdson. Effective procedures in field theories.— Philos. Trans London Roy. Soc., 1956, 248, N 950, 407—432.
2. С. К. Клини. Введение в метаматематику. М., ИЛ, 1957.
3. А. Н. Колмогоров, В. А. Успенский. К определению алгоритма.— Успехи мат. наук, 1958, 13, № 4, 3—28.
4. А. В. Кузнецов. О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем.— Труды III Всес. матем. съезда, 1956, 2, М., 145—146.
5. А. В. Кузнецов. Алгоритмы как операции в алгебраических системах.— Успехи мат. наук, 1958, 13, № 3, 240—241.
6. J. G. G. McKinsey. The decision problem for some classes of sentences without quantifiers.— J. Symbol. Log., 1945, 8, N 3, 61—76.
7. А. И. Мальцев. Квазипрimitive классы абстрактных алгебр.— Докл. АН СССР, 1956, 108, № 2, 187—189.
8. А. И. Мальцев. О гомоморфизмах на конечные группы.— Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1958, 18, 49—60.
9. А. И. Мальцев. Структурная характеристика некоторых классов алгебр.— Докл. АН СССР, 1958, 120, № 1, 29—32.
10. А. А. Марков. Теория алгоритмов.— Труды Мат. ин-та АН СССР, 1954, 42, 1—375.
11. A. Mostowski. On models of axiomatic systems.— Fundam. Math., 1952, 39, 133—158.
12. A. Mostowski. On a system of axioms which has no recursively enumerable arithmetic model.— Fundam. Math., 1953, 40, 56—61.
13. А. А. Мучник. Изоморфизм систем рекурсивно перечислимых множеств с эффективными свойствами.— Труды Моск. мат. о-ва, 1958, 7, 407—412.
14. J. Myhill. Creative sets.— Z. math. Log. und Grundl. Math., 1955, 1, 97—108.
15. П. С. Новиков. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп.— Труды Мат. ин-та АН СССР, 1955, 44, 1—143.
16. Р. Петер. Рекурсивные функции. М., ИЛ, 1954.
17. E. Post. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems.— Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 5, 284—316.
18. H. Rice. Classes of recursively enumerable sets and their decision problems.— Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 74, 358—366.
19. J. Robinson. General recursive functions.— Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 1, 703—718.
20. R. M. Robinson. Primitive recursive functions.— Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 925—942.
21. H. Rogers. Godel numerings of partial recursive functions.— J. Symbol. Log., 1958, 23, N 3, 331—341.
22. В. А. Успенский. Системы перечислимых множеств и их нумерации.— Докл. АН СССР, 1955, 105, № 6, 1155—1158.
23. В. А. Успенский. О вычислимых операциях.— Докл. АН СССР, 1955, 103, № 5, 773—776.

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП *



В связи с изучением элементарных теорий различных классов алгебр естественно возник вопрос об алгоритмической разрешимости элементарной теории класса всех конечных групп. Вопрос этот в качестве открытой проблемы упомянут в известной книге А. Тарского, А. Мостовского и Р. Робинсона [1]. В настоящей заметке доказывается, что элементарная теория класса всех конечных групп неразрешима. В процессе доказательства и в качестве следствий устанавливается неразрешимость элементарных теорий некоторых других классов конечных групп, а также некоторых классов колец и полу-групп **.

1. Пусть K — произвольное фиксированное поле. Обозначим через $\mathfrak{K}$ класс всех (неассоциативных) колец, являющихся алгебрами конечной размерности над K . Ф о р м у л а м и будем называть формулы узкого исчисления предикатов единственными внелогическими символами которых будут символ равенства элементов и символ умножения. Формулу $ax = x \ \& \ x^2 = x \ \& \ x \neq 0$ сокращенно будем обозначать через (a, x) . Индивидуальные предметные символы a, b будут играть далее особую роль. Формула $\mathfrak{A}(a, b)$ с индивидуальными предметными символами a, b будет называться н о р м а л ь н о й, если $\mathfrak{A}$ есть конъюнкция некоторой формулы $\mathfrak{A}_1$ с теми же индивидуальными предметными символами формул

- a1. $(x)(y)(x \neq y \ \& \ (a, x) \ \& \ (a, y) \rightarrow xy = x \vee yx = y \ \& \ xy \neq 0 \vee \vee yx = 0)$,
- a2. $(x)(y)(z)((a, x) \ \& \ (a, y) \ \& \ (a, z) \ \& \ xy \neq 0 \ \& \ yz \neq 0 \rightarrow xz \rightarrow \neq 0)$,
- a3. $a^2 = 0 \ \& \ (x)((a, x) \rightarrow xa = 0)$,
- a4. $ab = 0 \ \& \ (x)(y)((a, x) \ \& \ (b, y) \rightarrow xy = 0) \ \& \ ba = a$

и формул $b1, b2, b3$, получающихся из $a1, a2, a3$ заменой символа a символом b . Кольцо $R \in \mathfrak{K}$ будем называть $\mathfrak{A}$ -к о л ь ц о м, если в нем выделены элементы a, b , для которых $\mathfrak{A}(a, b)$ является истинным предложением в R , т. е. если в R истинна замкнутая формула $(\exists a)(\exists b) \mathfrak{A}(a, b)$. Элемент x $\mathfrak{A}$ -кольца R будет называться a -э л е м е н т о м, если формула (a, x) истинна.

Модифицируя основное определение из [2], будем говорить, что формула $\mathfrak{A}$ п р е д с т а в л я е т ф у н к ц и ю $f(m)$ в классе $\mathfrak{K}$, если выполнены следующие условия: 1) формула $\mathfrak{A}$ нормальна; 2) в любом $\mathfrak{A}$ -кольце из класса $\mathfrak{K}$, содержащем m a -элементов, имеется ровно $f(m)$ b -элементов ($m = 0$,

* Докл. АН СССР, 1961, 138, № 4, 771—774.

** О дальнейших результатах в этом направлении см. в работе: Ю. Л. Ершов, И. А. Лавров, А. Д. Тайманов, М. А. Тайцлин. Элементарные теории. — Успехи мат. наук, 1965, 20, № 4, 37—108. — Прим. ред.

1, 2, ...); 3) для каждого $m = 0, 1, 2, \dots$ в $\mathfrak{K}$ существует $\mathfrak{A}$ -кольцо, имеющее m a -элементов.

Т е о р е м а 1. Для каждой нормально заданной общерекурсивной функции $f(m)$ может быть эффективно построена формула $\mathfrak{A}$, представляющая эту функцию в классе $\mathfrak{K}$.

В силу теоремы Дж. Робинсон [3], теорема 1 будет доказана, если будут построены формулы, представляющие функции

$$\lambda(m) = m + 1, \quad \rho(m) = m - [\sqrt{m}]^2,$$

и будет указан эффективный способ построения формул, представляющих функции $g(x) + h(x)$, $g(h(x))$, $g^{-1}(x)$, при условии, что заданы формулы, представляющие функции $g(x)$, $h(x)$. Мы построим здесь лишь формулы для функций $m + 1$ и $g^{-1}(x)$, так как остальные строятся аналогично.

Обозначим через $\mathfrak{A}(a, b, c)$ конъюнкцию формул $a1 - a4$, $b1 - b3$ и формул

$$(x)((a, x) \rightarrow (b, cx)); \quad (1)$$

$$(x)(y)((a, x) \& (a, y) \& cx = cy \rightarrow x = y); \quad (2)$$

$$(\exists z)[(b, z) \& (x)((a, x) \rightarrow cx \neq z) \& (y)(y \neq z \& (b, y) \rightarrow \rightarrow (\exists x)((a, x) \& y = cx))]. \quad (3)$$

Формула $(\exists c)\mathfrak{A}$ представляет функцию $m + 1$. Действительно, пусть в каком-либо кольце $R \in \mathfrak{K}$ существуют элементы a, b, c , обладающие свойствами (1), (2), (3). Согласно (3) множество b -элементов R состоит из элемента z , определяемого требованием (3), и всех a -элементов, умноженных на c . Так как в силу (2) умножение различных a -элементов на c дает различные b -элементы, то число b -элементов в R на 1 больше числа a -элементов.

Чтобы построить $\mathfrak{A}$ -кольцо, имеющее заданное число m a -элементов, берем алгебру над K с базисом $a, b, c, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{m+1}$ и вводим для базисных элементов соотношения $ba = a$, $ax_i = x_i = x_i x_j$; $cx_i = y_i$; $by_i = y_i = y_i y_j$ ($i \leq j$; $i, j = 1, 2, \dots$). Все остальные парные произведения базисных элементов полагаем равными 0. Ясно, что полученная алгебра будет $\mathfrak{A}$ -кольцом, в котором a -элементами будут $x_1, \dots, x_m$.

2. Пусть некоторая функция $g(m)$ представляется формулой $\mathfrak{A}(a, b)$ и пусть уравнение $g(x) = m$ разрешимо для каждого $m = 0, 1, 2, \dots$. По определению символом $g^{-1}(m)$ обозначается наименьшее решение указанного уравнения. Вводим формулу $\mathfrak{A}(a, b; p)$, выражающую следующие требования: а) совокупность R_p элементов x , удовлетворяющих условию $px = x$, есть подкольцо; б) элементы a, b принадлежат R_p ; в) в R_p формула $\mathfrak{A}(a, b)$ истинна. Иначе говоря, $\mathfrak{A}(a, b; p)$ есть конъюнкция формулы

$$(x)(y)(px = x \& py = y \rightarrow p(xy) = xy) \& pa = a \& pb = b$$

и релятивизации формулы $\mathfrak{A}(a, b)$ для множества элементов x , удовлетворяющих условию $px = x$.

Обозначаем через $\mathfrak{B}(a, b, a', b', p)$ конъюнкцию формулы $\mathfrak{A}(a', b'; p)$ и формулы

$$(x)\{px = x \& (a', x) \rightarrow (\exists uvde)[\mathfrak{A}(u, v; d) \& \quad (4)$$

$$\& (y)((a', y) \& py = y \& yx = y \& y \neq x \rightarrow d \cdot ey = ey \& (u, ey)) \& \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& \& (y) (z) ((a', y) \& py = y \& pz = z \& (a', z) \& y \neq z \rightarrow ey \neq ez) \& \quad (6) \\
& \& (y) ((u, y) \& dy = y \rightarrow (\exists z) (pz = z \& (a', z) \& xz = 0 \& y = ez)) \& \quad (7) \\
& \& ((\exists f) (y) (y') (py = y \& (b', y) \& (b', y') \& py' = y' \& fy = fy' \rightarrow \\
& \rightarrow y = y' \& d \cdot fy = fy \& (v, fy) \& (\exists z) (dz = z \& (v, z) \& fy \cdot z \neq fy)) \vee \quad (8) \\
& \vee (\exists f) (y) (y') (dy = y \& (v, y) \& (v, y') \& dy' = y' \& fy = fy' \rightarrow y = y' \& \\
& \& p \cdot fy = fy \& (b', fy) \& (\exists z) (pz = z \& (b', z) \& fy \cdot z \neq fy))) \& \\
& \& (x) ((a, x) \leftrightarrow px = x \& (b', x)) \& (x) ((b, x) \leftrightarrow px = x \& (a', x))] \}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Формула $\mathfrak{B}(a, b, a', b'; p)$ вместе с формулами $a1 - a4$, $b1 - b3$ определяет функцию $g^{-1}(m)$. Действительно, пусть в кольце $R \subseteq \mathfrak{K}$ нашлись элементы a, b, a', b', p такие, что в R истинна формула $\mathfrak{B}$ и число a -элементов в R равно m . Формула $\mathfrak{A}(a', b')$ истинна в R_p и R_p есть подкольцо, множество b' -элементов которого совпадает с множеством a -элементов кольца R , а множество a' -элементов R_p в силу (9) совпадает с множеством b -элементов R . Поэтому $m = g(n)$, где n — число b -элементов в R . В силу $a1 - a3$ a' -элементы R_p можно обозначить символами $x_1, \dots, x_n$ так, что для них будут справедливы соотношения $x_i x_j = x_i x_i = x_i$, $x_j x_i = 0$ ($i < j$). Согласно (4) для каждого x_i , $1 \leq i \leq n$ в R найдутся элементы u, v, d, e такие, что совокупность R_d будет $\mathfrak{A}$ -подкольцом с выделенными элементами u, v . Условия (5) — (8) гарантируют, что число u -элементов в R_d равно $i - 1$, а число v -элементов в R_d отлично от m , т. е. что $g(i - 1) \neq m$.

Итак, если в каком-либо $\mathfrak{B}$ -кольце R число a -элементов равно m и число b -элементов равно n , то $g(n) = m$ и одновременно $g(i) \neq m$ для $0 \leq i < n$, т. е. $n = g^{-1}(m)$.

Остается проверить 3). Пусть задано m . Положим $n = g^{-1}(m)$. По условию для каждого $i = 0, 1, \dots$ существует $\mathfrak{A}$ -кольцо R_i с выделенными элементами a_i, b_i , имеющее i a_i -элементов $x_{i1}, \dots, x_{ii}$ и $g(i)$ b_i -элементов $y_{i1}, \dots, y_{ig(i)}$, связанных соотношениями

$$\begin{aligned}
a_i x_{i\alpha} &= x_{i\alpha} x_{i\beta} = x_{i\alpha} x_{i\alpha} = x_{i\alpha}, & x_{i\beta} x_{i\alpha} &= 0, & b_i y_{i\alpha} &= y_{i\alpha} y_{i\beta} = \\
&= y_{i\alpha} y_{i\alpha} = y_{i\alpha}, & y_{i\beta} y_{i\alpha} &= 0, & a_i b_i &= a_i^2 = b_i^2 = 0, & b_i a_i &= a_i \quad (\alpha < \beta).
\end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что a_i -элементы, b_i -элементы и a_i, b_i в совокупности линейно независимы. Поэтому их можно дополнить подходящими элементами $z_{i1}, \dots, z_{ia_i}$ до базиса R_i . Предполагая алгебры R_i не имеющими общих элементов, строим формально новую алгебру R . Базис R образуют базисные элементы всех R_i и новые элементы d_i, e_i, f_i, a, b ($i = 1, \dots, n$). Умножение базисных элементов, принадлежащих R_i , производим по правилам R_i и полагаем $d_i x = x$ ($x \in R_i$), $e_i x_{nj} = x_{ij}$ ($i > j$), $ba = a$, $ax_{ni} = x_{ni}$, $by_{ni} = y_{ni}$, $fx_{nj} = y_{ij}$ для $g(i) > m$, $fy_{ij} = x_{nj}$ для $g(i) < m$. Остальные произведения считаем равными 0. Алгебра R удовлетворяет требованиям $a1 - a4$, $b1 - b3$ и $\mathfrak{B}(a, b, a', b', p)$ при $a' = a_n, b' = b_n, p = d_n$. Тем самым теорема 1 доказана.

3. Из теоремы 1 легко получается

С л е д с т в и е. Для каждой нормально заданной общерекурсивной функции $f(m)$ может быть эффективно построена формула $\mathfrak{B}(a, b)$, представляющая эту функцию в классе $\mathfrak{K}_1$ алгебр конечной размерности над K и обладающих единицей.

Пусть $\mathfrak{A}(a, b)$ — формула, представляющая $f(m)$ в $\mathfrak{R}$, и пусть R — $\mathfrak{A}$ -кольцо из $\mathfrak{R}$, имеющее m a -элементов. Обозначаем через $\mathfrak{B}(a', b', a, b, p)$ конъюнкцию формул $a'1 - a'4$, $b'1 - b'3$, формулы $\mathfrak{A}(a, b; p)$ и формулы

$$(x)((a', x) \leftrightarrow px = x \& (a, x)) \& (x)((b', x) \leftrightarrow px = x \& (b, x)).$$

Формула $\mathfrak{B}(a', b', a, b, p)$ с выделенными элементами a', b' представляет функцию $f(m)$ в классе $\mathfrak{R}_1$. Действительно, свойствами 1), 2) $\mathfrak{B}$ заведомо обладает. С другой стороны, присоединяя к базису R новые элементы a', b', p, e и полагая $eu = ue = pu = u$, $up = 0$ для $u \in R$, $a'x = x$, $b'y = y$, если x — a -элемент и y — b -элемент R , $b'a' = a'^2 = b'^2 = 0$, получим $\mathfrak{B}$ -кольцо, имеющее m a' -элементов и обладающее единицей e .

4. Из теоремы 1 и указанного следствия обычным путем получается

Т е о р е м а 2. *Класс $\mathfrak{R}$ всех колец, являющихся алгебрами конечной размерности над произвольным фиксированным полем K , и класс $\mathfrak{R}_1$ всех $\mathfrak{R}$ -колец, имеющих единицу, имеют неразрешимые элементарные теории.*

Для доказательства достаточно взять общерекурсивную функцию $f(m)$ с нерекурсивным множеством значений и построить представляющую ее в $\mathfrak{R}_1$ формулу $\mathfrak{A}(a, b)$. Тогда ложность формулы

$$\mathfrak{A}(a, b) \& (\exists x_1 \dots x_n) \left(\bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j \& (b, x_i)) \& (y)((b, y) \rightarrow \bigvee_i y = x_i) \right),$$

в каждом $\mathfrak{R}_1$ -кольце будет равносильна неразрешимости уравнения $f(x) = n$.

С л е д с т в и е. *Элементарные теории класса всех конечных колец с тождеством $px = 0$ (p — фиксированное простое) и класса всех конечных колец неразрешимы.*

Первое утверждение получается из теоремы 2 в том случае, когда K есть простое поле характеристики p , а второе вытекает из первого, так как $\mathfrak{R}_0$ есть конечно аксиоматизируемый подкласс в $\mathfrak{R}$.

5. В статье [4] установлено соответствие между кольцами с единицей и метабелевыми группами особого конечно аксиоматизируемого класса. При этом соответствии классу колец с единицей простой нечетной характеристики p отвечает конечно аксиоматизируемый подкласс класса всех метабелевых групп с тождеством $x^p = 1$. Там же указан эффективный способ, позволяющий для каждой замкнутой формулы, относящейся к кольцам с единицей, получить формулу для групп такую, что истинность первой формулы на кольце равносильна истинности второй формулы на соответствующей группе. Так как конечные кольца при этом переходят в конечные группы, то из следствия теоремы 2 непосредственно получается

Т е о р е м а 3. *Элементарная теория класса всех конечных метабелевых групп с тождеством $x^p = 1$ (p — нечетное простое) неразрешима.*

Указанный в этой теореме класс групп является конечно аксиоматизируемым подклассом класса всех конечных групп, класса всех конечных метабелевых групп, класса всех конечных полугрупп и т. п. Поэтому элементарные теории всех упомянутых классов неразрешимы.

Пусть $\mathfrak{G}$ — метабелево кольцо Ли нечетной простой характеристики p . Определяя в $\mathfrak{G}$ новую операцию умножения формулой $xy = x + y + \frac{1}{2}[y, x]$, обратим $\mathfrak{G}$ в метабелеву p -группу, причем имеем $[xy] = xyx^{-1}y^{-1}$, $x + y = xy[yx]^{1/2}$. Обратно, вводя в произвольную метабелеву p -группу

операции $[xy]$ и $x + y$ посредством указанных формул, получим метабелево кольцо Ли характеристики p . Поэтому элементарная теория конечных метабелевых колец Ли нечетной простой характеристики p эквивалентна элементарной теории конечных метабелевых p -групп и вместе с последней неразрешима.

Метабелево кольцо Ли является и ассоциативным. Отсюда следует, что элементарные теории класса конечных двухступенно нильпотентных колец и класса всех конечных ассоциативных колец неразрешимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Tarski, A. Mostowski, H. Robinson. Undecidable theories. Amsterdam, 1963.
2. Б. А. Трахтенброт. Невозможность алгоритма для проблемы разрешимости на конечных классах. — Докл. АН СССР, 1950, 70, № 4, 569—572.
3. J. Robinson. General recursive functions. — Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, N 1, 703—718.
4. А. И. Мальцев. Об одном соответствии между кольцами и группами. — Мат. сб., 1960, 50, № 3, 257—266.

ЭФФЕКТИВНАЯ НЕОТДЕЛИМОСТЬ МНОЖЕСТВА ТОЖДЕСТВЕННО ИСТИННЫХ И МНОЖЕСТВА КОНЕЧНО ОПРОВЕРЖИМЫХ ФОРМУЛ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ*



Пусть K — некоторый класс моделей сигнатуры σ . Формулы узкого исчисления предикатов, внелогические константы которых содержатся в σ , будут называться K -формулами. Замкнутая K -формула $\mathfrak{A}$ называется тождественно истинной на K , если она истинна на всех моделях K . $\mathfrak{A}$ называется конечно опровержимой на K , если $\mathfrak{A}$ ложна на некоторой конечной модели из K . Если $\mathfrak{A}$ истинна на всех конечных K -моделях, то говорят, что $\mathfrak{A}$ конечно истинна на K . Через $T(K)$, $F(K)$ обозначим соответственно совокупность всех тождественно истинных формул и совокупность конечно опровержимых на K K -формул. В заметке [1] было показано, что $F(K)$ — рекурсивное множество, если K — класс всех групп или всех ассоциативных колец, лиевых колец и т. п. С помощью результатов этой же заметки ниже доказываются более сильные предложения о том, что совокупности $T(K)$ и $F(K)$ эффективно неотделимы, если K — один из указанных выше классов групп или колец. Отсюда, в частности, непосредственно следует теорема Б. А. Трахтенброта [2] о рекурсивной неотделимости тождественно истинных и конечно опровержимых формул узкого исчисления предикатов.

1. Через L обозначим класс всех алгебр над некоторым фиксированным простым полем Γ простой характеристики p . Как и в [2], мы сначала укажем регулярный процесс, с помощью которого из каждой замкнутой L -формулы $\mathfrak{A}$ можно построить новую L -формулу $\mathfrak{A}^{[n]}$, выполнимость которой будет равносильна истинности $\mathfrak{A}$ на всех алгебрах, содержащих менее n элементов.

Обозначим через (q, x) формулу $qx = x \ \& \ x^2 = x \ \& \ x \neq 0$ и через $[c, x]$ формулу $cx = x \ \& \ xc = x \ \& \ x^2 = 0$. Элементы x , для которых формула (q, x) истинна, будем называть q -элементами. Совокупность тех x , для которых $[c, x]$ истинна, будет обозначаться через $\mathfrak{X}_c$ и называться пространством, принадлежащим c . Совокупность тех x , для которых $px = x$, будет обозначаться через $\mathfrak{X}_p$. Обозначим еще через $\mathfrak{D}(a)$ конъюнкцию формул $a1$ и $a2$ из [1]. Пусть теперь $U(p, q)$ есть конъюнкция формул

$$\begin{aligned} & (xy) ((q, x) \ \& \ [x, y] \rightarrow py = y) \ \& \ (xy) (px = x \ \& \ py = y \rightarrow xy = 0); \\ & (xy) [(q, x) \ \& \ (q, y) \ \& \ x \neq y \rightarrow (\exists u) ([x, u] \vee [y, u]) \ \& \ (\neg [x, u] \vee \neg [y, u])]; \\ & (x) (\exists y) [px = x \rightarrow (q, y) \ \& \ (u) ([y, u] \leftrightarrow u = x \vee u = 2x \vee \dots \vee u = px)]; \\ & (xy) (\exists z) [(q, x) \ \& \ (q, y) \rightarrow (q, z) \ \& \ (u) ([z, u] \leftrightarrow (\exists vw) ([x, v] \ \& \ [y, w] \ \& \ u = v + w))]. \end{aligned}$$

Истинность $U(p, q)$ в некоторой алгебре $\mathfrak{X} \in L$, содержащей элементы p, q , означает, что: 1) пространство, принадлежащее любому q -элементу, содержится в $\mathfrak{X}_p$; 2) пространства, принадлежащие различным q -элементам, различны; 3) каждое нульмерное или одномерное подпространство пространства

* Докл. АН СССР, 1961, 139, № 4, 802—805.

$\mathfrak{K}_p$ принадлежит некоторому q -элементу; 4) произведение любых элементов из $\mathfrak{K}_p$ равно нулю. Из $U(p, q)$ следует, что пространство, принадлежащее q -элементу, является линейным подпространством в $\mathfrak{K}_p$ и что каждое конечномерное подпространство из $\mathfrak{K}_p$ принадлежит некоторому q -элементу.

2. Легко подсчитывается, что число различных алгебр, которые можно построить путем введения различными способами операции умножения в данное линейное n -мерное пространство над Γ , равно π^n . Пусть $t = F(n)$ — число различных линейных подпространств такого пространства и пусть $n = G(t)$ — обратная функция, которую для определенности полагаем равной 0, если t не принадлежит совокупности значений F . Из явной формулы для $F(n)$ видно, что $F(n)$ и $G(t)$ — примитивно рекурсивные функции. Поэтому примитивно рекурсивной будет и функция $S(t) = \pi^{G(t)}$. По способу, изложенному в [1], строим формулу $\mathfrak{S}(a, b)$, обладающую следующими свойствами: 1) если в какой-либо алгебре $\mathfrak{K}$ выделены элементы a, b , удовлетворяющие $\mathfrak{S}(a, b)$, и если число a -элементов в $\mathfrak{K}$ равно t , то число b -элементов в $\mathfrak{K}$ равно $S(t)$; 2) для каждого t существует конечная алгебра $\mathfrak{K}$ с единицей, имеющая элементы a, b со свойством $\mathfrak{S}(a, b)$, число a -элементов в которой равно t .

3. Обозначим через $V(c, q, g, a, b)$ формулу

$$\begin{aligned} & \mathfrak{S}_g(a, b) \& (xy) (gx = x \& gy = y \rightarrow g \cdot xy = xy) \& \\ & \& (\exists y) \{ (y) [(q, y) \& \mathfrak{K}_y^* \subseteq \mathfrak{K}_c^* \rightarrow g \cdot zy = zy \& (a, zy)] \& \\ & \& (x) [(a, x) \& gx = x \rightarrow (\exists y) ((q, y) \& \mathfrak{K}_y^* \subseteq \mathfrak{K}_c^* \& x = zy)] \& \\ & \& (xy) [(q, x) \& \mathfrak{K}_x^* \subseteq \mathfrak{K}_c^* \& (q, y) \& \mathfrak{K}_y^* \subseteq \mathfrak{K}_c^* \& zx = zy \rightarrow x = y] \}, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{S}_g(a, b)$ означает релятивизацию формулы $\mathfrak{S}(a, b)$ на множество $\mathfrak{K}_g$, а $\mathfrak{K}_y^* \subseteq \mathfrak{K}_c^*$ означает формулу $([y, u] \rightarrow [c, u])$.

Допустим, что в алгебре $\mathfrak{K}$ выделены элементы p, c, q, g, a, b , для которых $U(p, q) \& V(c, q, g, a, b)$ истинно. Тогда пространство $\mathfrak{K}_g$ будет подалгеброй, содержащей элементы a, b , обладающие внутри $\mathfrak{K}_g$ свойством $\mathfrak{S}(a, b)$. При этом число a -элементов в $\mathfrak{K}_g$ будет равно числу q -элементов y , у которых $\mathfrak{K}_y^*$ содержится в $\mathfrak{K}_c^*$, и, значит, число b -элементов в $\mathfrak{K}_g$ равно π^r , где r — размерность $\mathfrak{K}_c^*$.

Обозначим еще через $W(c, g, b)$ конъюнкцию формул

$$\begin{aligned} & (xyz) [gx = x \& (b, x) \& [c, y] \& [c, z] \rightarrow (xy = xz \rightarrow y = z)] \& \\ & \& (\exists u) ([c, u] \& xy \cdot xz = xu)]; \\ & (xy) [gx = x \& (b, x) \& gy = y \& (b, y) \& x \neq y \rightarrow (\exists uvw_1) ([c, u] \& \\ & \& [c, v] \& [c, w] \& [c, w_1] \& xu \cdot xv = xw \& yu \cdot yv = yw_1 \& w \neq w_1)]. \end{aligned}$$

Истинность формулы $W(c, g, b)$ в алгебре $\mathfrak{K}$, содержащей выделенные элементы c, g, b , означает, что для любого фиксированного b -элемента x подалгебры $\mathfrak{K}_g$ элементы вида xu ($u \in \mathfrak{K}_c^*$) образуют подалгебру $\mathfrak{K}_c^x$, изоморфную особой алгебре, которая получится, если в линейное пространство $\mathfrak{K}_c^*$ ввести операцию умножения $\otimes$ посредством условия $y \otimes z = u \leftrightarrow xy \cdot xz = xu$.

Допустим, что в $\mathfrak{K}$ выполнены аксиомы $U, V, W(p, g, b)$, и пусть размерность $\mathfrak{K}_p$ равна n . Тогда число b -элементов x будет равно π^n , т. е. будет рав-

но числу всех возможных умножений на $\mathfrak{K}_p$. Поэтому среди подалгебр $\mathfrak{K}_p^*$ найдутся подалгебры, изоморфные любой наперед заданной алгебре размерности n .

4. Пусть $\mathfrak{A}$ — какая-либо замкнутая формула узкого исчисления предикатов, относящаяся к кольцам. Обозначим через $\mathfrak{A}(c, x)$ релятивизацию $\mathfrak{A}$ относительно $\mathfrak{K}_c^*$, т. е. относительно множества элементов u со свойством

$$P(u, c, x) \stackrel{\text{df}}{=} (\exists y)([c, y] \& u = xy).$$

Положим еще

$$E(c, x) \stackrel{\text{df}}{=} (\exists e)(P(e, c, x) \& (u)(P(u, c, x) \rightarrow ue = u \& eu = u)),$$

$$Q(p, n) \stackrel{\text{df}}{=} (\exists x_1 \dots x_n)(px_1 = x_1 \& \dots \& px_n = x_n \& \bigwedge a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \neq 0),$$

где конъюнкция $\bigwedge$ распространяется на всевозможные комбинации чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, отличные от комбинации $0, \dots, 0$ ($\alpha = 0, 1, \dots, \pi - 1$). Истинность $Q(p, n)$ означает, что $\mathfrak{K}_p$ имеет размерность, не меньшую n .

Вводим, наконец, обозначения

$$R(p, q) \stackrel{\text{df}}{=} U(p, q) \& \mathfrak{D}(q) \& (c)((q, c) \rightarrow (\exists gab) X(c, q, g, a, b)),$$

$$\mathfrak{A}(q) \stackrel{\text{df}}{=} (cgabx)((q, c) \& X(c, q, g, a, b) \& gx = x \& (b, x) \& E(c, x) \rightarrow \mathfrak{A}(c, x)),$$

где $X(c, q, g, a, b)$ есть конъюнкция формул $V(c, q, g, a, b)$, $W(c, g, b)$.

Л е м м а 1. Если формула $\mathfrak{A}$ истинна на всех алгебрах с единицей, размерность которых меньше n , то формула

$$Q(p, n) \& R(p, q) \rightarrow \mathfrak{A}(q)$$

истинна на всех алгебрах.

Действительно, пусть в некоторой алгебре $\mathfrak{K}$ выделены элементы p, q, c, g, a, b, x со свойствами $\neg Q(p, n)$, $R(p, q)$, (q, c) , $X(c, q, g, a, b)$, $gx = x$, (b, x) , $E(c, x)$. Тогда алгебра $\mathfrak{K}_c^*$ будет иметь размерность, равную размерности $\mathfrak{K}_c^*$, т. е. будет иметь размерность, меньшую n . Кроме того, $\mathfrak{K}_c^*$ будет иметь единицу, и, значит, $\mathfrak{A}(c, x)$ будет истинной формулой.

Л е м м а 2. Если $\mathfrak{A}$ ложна на некоторой алгебре конечной размерности n , имеющей единицу, то формула

$$Q(p, n) \& R(p, q) \rightarrow \neg \mathfrak{A}(q)$$

истинна на всех алгебрах.

Пусть в произвольной алгебре $\mathfrak{K}$ выделены элементы p, q так, что $Q(p, n)$ и $R(p, q)$ истинны. Тогда в $\mathfrak{K}_p$ найдется n -мерное подпространство, которое будет принадлежать некоторому q -элементу c . Поэтому в $\mathfrak{K}$ найдутся g, a, b , для которых $\mathfrak{K}_g$ будет подалгеброй, содержащей a, b и имеющей π^n b -элементов. Сдвигая $\mathfrak{K}_c^*$ при помощи этих b -элементов, получим π^n подалгебр $\mathfrak{K}_c^*$, среди которых найдется и подалгебра с единицей, в которой формула $\mathfrak{A}$ ложна. Таким образом, в $\mathfrak{K}$ формула $\neg \mathfrak{A}(q)$ истинна.

Л е м м а 3. Если относящиеся к кольцам с единицей замкнутая формула $\mathfrak{A}$ конечно опровержима, а замкнутая формула $\mathfrak{B}$ конечно истинна, то формула

$$(pq) [R(p, q) \rightarrow (\mathfrak{A}(q) \rightarrow \mathfrak{B}(q))] \quad (1)$$

истинна на всех алгебрах.

Пусть $\mathfrak{A}$ ложна в некоторой n -мерной алгебре с единицей. Тогда согласно леммам 1 и 2 формулы

$$\neg [Q(p, n) \& R(p, q) \rightarrow \mathfrak{B}(q)], \quad Q(p, n) \& R(p, q) \rightarrow \mathfrak{A}(q)$$

истинны на всех алгебрах и, следовательно, на всех алгебрах истинна формула (1).

Л е м м а 4. Если формула $\mathfrak{B}$ ложна в подходящей конечной алгебре с единицей, а формула $\mathfrak{A}$ истинна во всех конечных алгебрах с единицей, то формула (1) на подходящей конечной алгебре с единицей ложна.

Для доказательства этой леммы надо, зная n -мерную алгебру $\mathfrak{A}$ с единицей, на которой $\mathfrak{B}$ ложна, построить конечномерную алгебру с элементами p, q , на которой $R(p, q)$ и $\mathfrak{A}(q)$ были бы истинны, а $\mathfrak{B}(q)$ ложна. Построение такой алгебры аналогично построению, указанному в [1]. Ввиду некоторой громоздкости мы его здесь опустим.

5. Пусть A^1, A^2 — произвольные непересекающиеся рекурсивно перечислимые множества натуральных чисел. В [1] указан эффективный способ, позволяющий по номерам Поста — Клини множеств A^1, A^2 построить последовательности формул $\mathfrak{A}_j^\lambda$ ($\lambda = 1, 2; j = 0, 1, 2, \dots$), относящихся к кольцам и таких, что тогда и только тогда $m \in A^\lambda$, когда $\mathfrak{A}_m^\lambda$ ложна на некоторой конечной алгебре с единицей. Рассмотрим последовательность формул

$$\Phi_m \stackrel{\text{df}}{=} (pq) [R(p, q) \rightarrow (\mathfrak{A}_m^1(q) \rightarrow \mathfrak{A}_m^2(q))].$$

Согласно леммам 3, 4, если $m \in A^1$, то Φ_m тождественно истинна, если же $m \in A^2$, то Φ_m конечно опровержима в классе алгебр с единицей. Иными словами, любая пара непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств A^1, A^2 рекурсивно сводится к паре множеств $T(L), F(L)$. Беря в качестве A^1, A^2 эффективно неотделимую пару или же пользуясь теоремой Мучника [3], непосредственно заключаем, что пара $T(L), F(L)$ также эффективно неотделима. Тем самым доказана

Т е о р е м а 1. Множество тождественно истинных формул и множество конечно опровержимых формул на классе всех колец простой характеристики с единицей эффективно неотделимы.

Используя, как и в [1], соответствие между кольцами и группами, приходим к выводу, что вместе с теоремой 1 справедлива также

Т е о р е м а 2. Множества формул, тождественно истинных и конечно опровержимых на классе всех метабелевых групп с тождеством $x^p = 1$, а также на классе всех колец характеристики $p = 3, 5, \dots$ с тождествами $xu = -ux, x \cdot yz = xy \cdot z = 0$, эффективно неотделимы.

Из теоремы 2 следует, что указанные множества формул эффективно неотделимы также для класса всех групп, класса всех ассоциативных колец, класса всех лиевых колец и т. п. *

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Неразрешимость элементарной теории конечных групп. — Докл. АН СССР, 1961, 138, № 4, 771—774.
2. Б. А. Трахтенброт. О рекурсивной отделимости. — Докл. АН СССР, 1953, 88, № 6, 953—956.
3. А. А. Мучник. Изоморфизм систем рекурсивно перечислимых множеств с эффективными свойствами. — Труды Моск. мат. о-ва, 1958, 7, 407—412.

* Более простое доказательство теорем 1 и 2, а также усиления этих теорем см. в статье: Ю. Л. Ершов, И. А. Лавров, А. Д. Тайманов, М. А. Тайцлин. Элементарные теории. — Успехи мат. наук, 1965, 20, № 4, 37—108. — Прим. ред.

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП*



Элементарными свойствами группы, поля или вообще какой-нибудь алгебраической системы $\mathfrak{G}$ называются такие свойства $\mathfrak{G}$, которые можно выразить на языке узкого исчисления предикатов (УИП), принимая в качестве исходных основные операции и отношения системы $\mathfrak{G}$. Соответственно этому к области «элементарной» теории групп можно отнести следующие вопросы:

1) какие из теоретико-групповых понятий, определяемых обычно при помощи неограниченных логических средств (например, при помощи исчисления предикатов высших ступеней), допускают определения на языке УИП;

2) какова алгоритмическая структура тех или иных совокупностей элементарных предложений;

3) при каких условиях неизоморфные группы будут тем не менее обладать одинаковыми «элементарными» свойствами и т. п.

В настоящем сообщении вопросы указанного характера рассматриваются для следующих линейных групп:

$GL(n, K)$ — мультипликативная группа всех неособенных матриц порядка n над полем K (общая линейная группа);

$SL(n, K)$ — мультипликативная группа матриц порядка n над K , имеющих определитель 1 (специальная линейная группа);

$PG(n, K)$ — фактор-группа по центру от группы $GL(n, K)$ (проективная группа);

$PS(n, K)$ — фактор-группа по центру от $SL(n, K)$ (специальная проективная группа).

Во всем дальнейшем предполагается, что поле K имеет характеристику 0, хотя при некоторых оговорках основные результаты можно распространить и на поля простой характеристики. Символом $A_1 \dot{+} \dots \dot{+} A_s$ будет обозначаться прямая (кронекерова) сумма матриц $A_1, \dots, A_s$, таким образом,

$$A \dot{+} B = \begin{Bmatrix} A & \\ & B \end{Bmatrix}.$$

Символы E , E_n будут обозначать соответственно единичную и единичную порядка n матрицы. Обобщенной клеткой Жордана будет называться клеточная матрица вида

$$C = \begin{Bmatrix} AE & & \\ & AE & \\ & & \ddots \\ & & & A \end{Bmatrix},$$

* В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск, Изд-во АН СССР, 1961, с. 110—132.

где матрица A имеет неприводимый над K характеристический многочлен. Число диагональных клеток A матрицы C будет называться индексом C , а порядок A — степенью клетки C .

Таким образом, порядок клетки Жордана равен произведению ее индекса на степень. Характеристический многочлен матрицы A будет называться корневым многочленом клетки C .

Известно (см., например, [1], с. 131), что каждую матрицу M порядка n над K можно представить в виде $U^{-1}AU$, где $U \in GL(n, K)$, а матрица A имеет форму

$$A = (A_1^{(1)} \dot{+} \dots \dot{+} A_{k_1}^{(1)}) \dot{+} \dots \dot{+} (A_1^{(s)} \dot{+} \dots \dot{+} A_{k_s}^{(s)}), \quad (1)$$

Здесь $A_1^{(i)}, \dots, A_{k_i}^{(i)}$ — клетки Жордана, построенные над одной и той же матрицей $A^{(i)}$, причем характеристические многочлены матриц $A^{(1)}, \dots, A^{(s)}$ различны и неприводимы над K . Пусть m_j^i — индекс $A_j^{(i)}$ и n^i — порядок основной матрицы $A^{(i)}$. Последовательность

$$\chi = \{(m_1^1, n^1) \dots (m_{k_1}^1, n^1)\} \dots \{(m_1^s, n^s) \dots (m_{k_s}^s, n^s)\}$$

будет называться характеристикой Сегре матрицы $M = U^{-1}AU$. Известно ([1], стр. 131), что характеристика Сегре M над данным полем K определяется однозначно с точностью до порядка расположения пар внутри квадратных скобок и расположения систем, отмеченных квадратными скобками в строке χ .

Символом K^* далее постоянно будет обозначаться алгебраическое замыкание поля K . Каждая матрица M над K является в то же время и матрицей с элементами из K^* . Однако характеристики Сегре матрицы M над K и над K^* будут в общем случае различны. Так как неприводимыми над K^* являются лишь многочлены 1-й степени, то характеристика Сегре над K^* всегда состоит из пар вида $(m, 1)$ и в записи характеристики над K^* можно для краткости вместо пар $(m, 1)$ писать просто их первые члены. Характеристика Сегре над K^* называется абсолютной характеристикой Сегре матрицы M . Чтобы из характеристики Сегре над K получить абсолютную характеристику той же матрицы, достаточно все пары заменить их первыми членами и каждую квадратную скобку переписать столько раз, сколько единиц было во втором члене всех пар, находившихся внутри скобки. Например, если $\chi = \{(2, 2)\} [(1, 1)]$, то $\chi^* = \{[2] [2] [1]\}$.

Матрица A называется формой Жордана матрицы M над K . Характеристика Сегре учитывает, в известном смысле, лишь арифметические характеристики формы Жордана.

Основным элементарно групповым отношением называется отношение $P(x, y, z)$, равносильное соотношению $xy = z$. Основными элементарно кольцевыми отношениями называются отношения $S(x, y, z)$ и $P(x, y, z)$, равносильные соответственно равенствам $x + y = z$ и $xy = z$.

Формула $\mathfrak{A}$ узкого исчисления предикатов с равенством (см. [2]) будет называться элементарно групповой, если $\mathfrak{A}$ не содержит предикатных символов, отличных от P . Аналогично определяются элементарно кольцевые формулы.

Элементарно групповая формула $\mathfrak{A}$, содержащая свободные предметные переменные, будет называться элементарно групповым отношением. Если $\mathfrak{A}$ свободных предметных переменных не содержит, то $\mathfrak{A}$ будет называться элементарно групповым предложением.

В § 1 настоящего сообщения указывается способ, при помощи которого для каждой из групп $GL(n, K)$ и $SL(n, K)$ и любой наперед заданной характеристики Сегре χ можно построить элементарно групповую формулу $\mathfrak{A}(x)$, истинную в данной группе для тех и только тех матриц x , которые имеют характеристику Сегре χ . Таким образом, в каждой из указанных групп характеристика Сегре элемента группы может быть определена внутри самой группы и притом элементарно, на языке УИП.

С помощью результатов § 1 в § 2 устанавливается, что группы $\mathfrak{G}(m, K)$ и $\mathfrak{G}(n, K)$ ($n \geq 3$, $\mathfrak{G} = GL, SL, PG, PS$) тогда и только тогда неразличимы по своим элементарным свойствам (т. е. имеют один и тот же «арифметический тип», по другой терминологии), когда $m = n$ и поля K, L элементарно неразличимы. В заключение доказывается, что для каждой из указанных групп множество элементарных предложений, истинных на группе, рекурсивно эквивалентно множеству элементарно кольцевых предложений, истинных на соответствующем поле K .

§ 1. Элементарность характеристики Сегре

1.1. Элементарность свойства быть диагонализируемой матрицей. Известно, что центры групп $GL(n, K)$ и $SL(n, K)$ состоят из скалярных матриц (ср. [3]). Поэтому формула

$$(X) (XM = MX)$$

дает элементарную характеристику скалярных матриц в указанных группах, т. е. матриц, имеющих характеристику Сегре вида $\{(1, 1) \dots (1, 1)\}$.

Несколько сложнее доказывается

Л е м м а 1. В каждой из групп $GL(n, K)$, $SL(n, K)$ формула

$$\text{Cm}(M) \stackrel{\text{df}}{=} (X)(Y)(XM = MX \& YM = MY \rightarrow XY = YX)$$

истинна для тех и только тех матриц M , которые имеют характеристику Сегре вида $\{(m_1, n_1) \dots (m_s, n_s)\}$, т. е. которые приводятся к жордановой форме, имеющей лишь по одной клетке Жордана для каждого корневого члена*.

Действительно, пусть матрица M имеет указанную в лемме характеристику и пусть X, Y — матрицы, перестановочные с M . Приводим в поле K^* матрицу M к нормальной жордановой форме A при помощи матрицы U : $A = U^{-1}MU$. Полагаем $X_0 = U^{-1}XU$, $Y_0 = U^{-1}YU$. Из перестановочности X_0 и Y_0 с матрицей A вытекает непосредственно (см. [1], стр. 146), что $X_0Y_0 = Y_0X_0$ и, значит, $XY = YX$.

Обратно, пусть характеристика матрицы M имеет вид, отличный от указанного в лемме. Приводим в поле K матрицу M к обобщенной жордановой форме (1). По условию среди клеток $A_j^{(i)}$ найдутся хотя бы две клетки с одним и тем же корневым многочленом. Пусть это будут клетки $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(1)}$. Рассмотрим матрицы

$$X = X_1 + E_i, \quad Y = Y_1 + E_i,$$

* Т. е. для каждого неприводимого множителя характеристического многочлена матрицы M .

где X_1 и Y_1 — матрицы с неопределенными буквенными элементами, имеющие порядок, равный порядку матрицы

$$B = A_1^{(1)} \dot{+} A_2^{(1)},$$

а порядок t единичной матрицы E_t выбран так, чтобы порядок X был равен порядку A . Представляя матрицы X_1, Y_1 в клеточной форме, подобной клеточному представлению матрицы B , и переписывая соотношения

$$BX_1 = X_1B, \quad BY_1 = Y_1B \quad (2)$$

в виде линейных соотношений между клетками матриц X_1, Y_1 , легко найти для упомянутых клеток значения, равные E или 0 и при этом такие, что определители матриц X_1, Y_1 будут равны 1 , матрицы X_1, Y_1 будут удовлетворять соотношениям (2) и в то же время X_1^m и Y_1^m не будут перестановочны при любом положительном натуральном значении m . Вычисления эти совершенно аналогичны вычислениям, производимым на стр. 146 в [1], и мы их здесь опустим. Укажем лишь, например, что если

$$B = A^{(1)} \dot{+} A^{(1)},$$

то в качестве X_1 и Y_1 можно взять матрицы

$$X_1 = \begin{vmatrix} E & E \\ & E \end{vmatrix}, \quad Y_1 = \begin{vmatrix} E & \\ E & E \end{vmatrix}.$$

Тем самым лемма 1 доказана.

Укажем теперь формулу, описывающую матрицы, приводящиеся в K^* к диагональному виду с различными диагональными элементами. В поле K это — матрицы, имеющие характеристику Сегре вида $\{[(1, n_1)], \dots, [(1, n_s)]\}$.

Л е м м а 2. В каждой из групп $GL(n, K)$, $SL(n, K)$ формула

$$\text{Dd}_r(M) \stackrel{\text{df}}{=} \text{Cm } M \& (X) (X^{-1}MX \cdot M = M \cdot X^{-1}MX \rightarrow MX^{r!} = X^{r!}M)$$

истинна при $r = n$, если матрица M в поле K^* приводится к диагональному виду с различными диагональными элементами. Если формула $\text{Dd}_r(M)$ истинна для какого-нибудь положительного значения r , то матрица M приводится в K^* к диагональному виду с различными диагональными элементами.

Допустим, что M имеет указанную в лемме характеристику. Приведем M в поле K^* к диагональному виду и пусть $X^{-1}MX \cdot M = M \cdot X^{-1}MX$. Тогда $X^{-1}MX$ будет снова диагональной матрицей, имеющей на диагонали те же элементы, что и матрица M , но расположенные, может быть, в ином порядке. Отсюда следует, что в каждой строке и каждом столбце X имеется лишь по одному ненулевому элементу, т. е. что X — **м о н о м и а л ь н а я** матрица. Поэтому матрица $X^{n!}$ диагональна и $X^{n!}M = MX^{n!}$.

Для доказательства второго утверждения леммы достаточно для произвольной матрицы $M \in GL(n, K)$, удовлетворяющей условию $\text{Cm } M$, но не приводящейся к диагональной форме в K^* , построить матрицу $X \in SL(n, K)$, никакая положительная степень которой не коммутирует с M и которая, вместе с тем, удовлетворяет! условию $X^{-1}MX \cdot M = M \cdot X^{-1}MX$.

Приводим M в K к жордановой форме (1). Так как M недиагонализируема в K^* , то среди клеток A найдется клетка неединичного индекса.

Пусть это будет клетка

$$A_1^{(1)} = \begin{vmatrix} A_1 E_m & & \\ & A_1 & \\ & & \ddots \\ & & & A_1 \end{vmatrix}$$

и пусть i — ее индекс. Полагая

$$X_1 = \lambda^{1-i} (\lambda^{2i-2} E_m + \lambda^{2i-4} E_m + \dots + E_m),$$

будем иметь

$$X_1^t A_1^{(1)} X_1^{-t} = \begin{vmatrix} A_1 \lambda^{2t} E_m & & \\ & A_1 & \\ & & \ddots \\ & & & A_1 \end{vmatrix} \quad (t = 1, 2, \dots)$$

и, следовательно,

$$X^{-1} A X \cdot A = A \cdot X^{-1} A X, \quad X^t A \neq A X^t, \quad |X| = 1,$$

где $X = X_1 + E_q$, E_q — единичная матрица надлежащего порядка.

Л е м м а 3. В каждой из групп $GL(n, K)$, $SL(n, K)$ формула

$$D_n(M) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists X) (Dd_n(X) \& MX = XM)$$

истинна для тех и только тех матриц M , которые в K^* приводимы к диагональной форме.

Пусть $D_n(M)$ истинна. Приводя X в K^* к диагональной форме, мы одновременно приведем к диагональному виду и M , так как матрицы, коммутирующие с диагональной матрицей, имеющей различные диагональные элементы, диагональны.

Обратно, пусть M диагонализуема в K^* . Тогда в поле K жорданова форма для M будет иметь вид

$$A = (A_1 + \dots + A_1) + \dots + (A_s + \dots + A_s),$$

где $A_1, \dots, A_s$ — матрицы с различными неприводимыми в K характеристическими многочленами. Матрица A заведомо перестановочна с матрицей

$$X = (\alpha_1^1 A_1 + \dots + \alpha_{k_1}^1 A_1) + \dots + (\alpha_s^s A_s + \dots + \alpha_{k_s}^s A_s).$$

Ясно, что числа α_j^i можно выбрать в K так, чтобы определитель X был равен 1 и чтобы одновременно все характеристические корни матрицы X были простыми.

1.2. Элементарность характеристик диагоналируемых матриц. Рассмотрим какие-нибудь диагональные матрицы

$$M = \mu_1 e_{11} + \dots + \mu_n e_{nn}, \quad N = \nu_1 e_{11} + \dots + \nu_n e_{nn}$$

с элементами из K^* . Условимся писать $M \times N$, если для каждого $i, j = 1, \dots, n$ из $\mu_i \neq \mu_j$ следует $\nu_i \neq \nu_j$, т. е. если матрица M , в известном смысле, более гладкая, нежели N .

Л е м м а 4. В каждой из групп $GL(n, K)$, $SL(n, K)$ формула

$$M \leqslant N \stackrel{\text{df}}{=} D(M) \& D(N) \& (X)(XN = NX \rightarrow XM = MX)$$

истинна для тех и только тех матриц M, N , которые в поле K^* одновременно приводимы к диагональным матрицам A, B , связанным соотношением $A \propto B$.

Если M, N приводимы совместно к диагональным матрицам A, B , связанным соотношением $A \propto B$, то формула $M \leqslant N$, очевидно, истинна. Обратно, пусть для некоторых M, N формула $M \geqslant N$ истинна. Из условия $D(N)$ вытекает, что N в поле K приводится к виду

$$B = (B_1 \dot{+} \dots \dot{+} B_1) \dot{+} \dots \dot{+} (B_s \dot{+} \dots \dot{+} B_s),$$

где матрицы $B_1, \dots, B_s$ имеют различные неприводимые над K характеристические многочлены. Из $MN = NM$ следует, что одновременно с N матрица M приведется к форме

$$A = A^{(1)} \dot{+} \dots \dot{+} A^{(s)},$$

где $A^{(i)}$ обозначает клеточную матрицу, разбитую на клетки подобно матрице

$$B^{(i)} = B_i \dot{+} \dots \dot{+} B_i \quad (i = 1, \dots, s).$$

В силу соотношения $A \leqslant B$, любая матрица $X^{(i)}$, перестановочная с $B^{(i)}$, должна быть перестановочна с $A^{(i)}$. Беря в качестве $X^{(i)}$ различные клеточные матрицы, составленные из единичных и нулевых клеток и в силу этого уже перестановочные с $B^{(i)}$, легко приходим к заключению, что $A^{(i)}$ должна иметь вид

$$A^{(i)} = A_i \dot{+} \dots \dot{+} A_i \quad (A_i B_i = B_i A_i).$$

Приводя теперь матрицы $B_1, \dots, B_s$ в поле K^* к диагональному виду, мы одновременно приведем к диагональному виду и матрицы $A_1, \dots, A_s$. Так как характеристические числа матриц $B_1, \dots, B_s$ различны, то после указанного приведения матрицы A и B заведомо будут находиться в отношении $A \propto B$.

Из леммы 4, в частности, видно, что если матрицы M, N допускают приведение в K^* к диагональным матрицам A, B , связанным соотношением $A \propto B$, то при любом другом приведении M, N к диагональным матрицам A^*, B^* последние также будут находиться в отношении $\propto$.

Обозначим через $\mathfrak{D}$ множество всех диагональных матриц группы $GL(n, K)$ или, соответственно, группы $SL(n, K)$. Отношение $\propto$ на $\mathfrak{D}$ рефлексивно и транзитивно. Вводим на $\mathfrak{D}$ отношение эквивалентности θ , полагая

$$A \theta B \stackrel{\text{df}}{=} A \propto B \& B \propto A.$$

Фактор-множество $\mathfrak{D}/\theta$ есть множество классов эквивалентных в смысле θ матриц, и отношение $\propto$ на $\mathfrak{D}/\theta$ является частичным (структурным) упорядочением. Класс матриц, эквивалентных матрице $A = \alpha_1 e_{11} + \dots + \alpha_n e_{nn}$, вполне определяется разбиением множества $\Gamma = \{1, 2, \dots, n\}$ на подмножества $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$, образованные номерами равных между собою диагональных элементов матрицы A . Например, если $A = e_{11} + 2e_{22} + e_{33} + 3e_{44}$, то $\Gamma_1 = [1, 3]$, $\Gamma_2 = [2]$, $\Gamma_3 = [4]$. При этом если диагональные матрицы A, B связаны условием $\propto$ и δ_1, δ_2 — отвечающие им разбиения множества Γ , то разбиение δ_2 является подразбиением разбиения δ_1 , символически $\delta_1 \leqslant \delta_2$.

Иными словами, решетка $\mathfrak{D}/\theta$ изоморфна решетке всех разбиений множества Γ .

Связь между разбиением δ , отвечающим какой-нибудь диагональной матрице A , и характеристикой Сегре χ матрицы A видна из следующего примера. Пусть $A = e_{11} + 7e_{22} + e_{33} - e_{44} + 7e_{55}$, тогда $\delta = \{[1, 3] [2, 5] [4]\}$. Заменяя в записи разбиения δ все числа единицами, получим выражение $\chi = \{[1, 1] [1, 1] [1]\}$, являющееся как раз характеристикой Сегре для A .

Операция восстановления разбиения по известной характеристике Сегре неоднозначна. Например, разбиения $\delta_1 = \{[1, 3] [2, 5] [4]\}$, $\delta_2 = \{[1, 2] [3, 4] [5]\}$ имеют одну и ту же характеристику $\chi = \{[1, 1] [1, 1] [1]\}$. Однако очевидно, что все разбиения, имеющие одну и ту же характеристику, переводятся друг в друга подходящими автоморфизмами решетки $\mathfrak{D}/\theta$. Легко доказывается и обратное утверждение, что переводимые друг в друга автоморфизмами решетки $\mathfrak{D}/\theta$ разбиения имеют одну и ту же характеристику Сегре.

Перенумеруем в каком-либо порядке все разбиения, принадлежащие решетке $\mathfrak{D}/\theta$, и пусть символы $\delta_1, \dots, \delta_r$ служат обозначениями соответствующих разбиений. Обозначим через $\mathfrak{D}_n(\delta_1, \dots, \delta_r)$ конъюнкцию всех формул вида $\delta_i \leq \delta_j$ и $\delta_i \not\leq \delta_j$, истинных в $\mathfrak{D}/\theta$.

Согласно сказанному, если для некоторых $i_1, \dots, i_r$ формула $\mathfrak{D}_n(\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_r})$ истинна в $\mathfrak{D}/\theta$, то отображение $\delta_\alpha \rightarrow \delta_{i_\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, n$) есть автоморфизм $\mathfrak{D}/\theta$ и элементы δ_α и δ_{i_α} имеют одинаковые характеристики. Отсюда следует, что если δ_i имеет характеристику χ , то формула

$$\mathfrak{D}_\chi(x_i) \stackrel{\text{df}}{=} (\exists x_1) \dots (\exists x_{i-1}) (\exists x_{i+1}) \dots (\exists x_r) \mathfrak{D}(x_1, \dots, x_r)$$

в решетке $\mathfrak{D}/\theta$ истинна для тех и только тех элементов x_i из $\mathfrak{D}/\theta$, характеристика которых равна χ .

Т е о р е м а 1. В каждой из групп $GL(n, K)$, $SL(n, K)$, где $n \geq 3$, формула

$$\mathfrak{P}_\chi(x_i) \stackrel{\text{df}}{=} (\exists x_1) \dots (\exists x_{i-1}) (\exists x_{i+1}) \dots \\ \dots (\exists x_r) (\mathfrak{D}_n(x_1, \dots, x_r) \& \bigwedge_\lambda \mathfrak{D}_n(x_\lambda) \& \bigwedge_{\lambda, \mu} x_\lambda x_\mu = x_\mu x_\lambda)$$

истинна для тех и только тех матриц $x_i = X_i$, которые в поле K приводятся к диагональной форме, имеющей характеристику χ .

Пусть $X_i = U^{-1}AU$, где A имеет характеристику χ и $A \in \mathfrak{D}$. Выбирая в $\mathfrak{D}$ для каждой характеристики одну матрицу A_j , получим набор диагональных матриц $A_1, \dots, A_r$, содержащий матрицу $A = A_i$ и удовлетворяющий отношению $\mathfrak{D}_n(A_1, \dots, A_r)$. Но тогда матрицы

$$X_j = U^{-1}A_jU \quad (j = 1, \dots, r)$$

будут удовлетворять отношению

$$\mathfrak{D}_n(X_1, \dots, X_r) \& \bigwedge_\lambda \mathfrak{D}_n(X_\lambda) \& \bigwedge_{\lambda, \mu} X_\lambda X_\mu = X_\mu X_\lambda$$

и, значит, формула $\mathfrak{P}_\chi(X_i)$ будет истинна.

Обратно, предположим, что для некоторой матрицы X_i формула $\mathfrak{P}_\chi(X_i)$ истинна. Следовательно, матрица X_i принадлежит семейству $X_1, \dots, X_r$ перестановочных и диагонализированных в K^* матриц, удовлетворяющих описанию $\mathfrak{D}_n(X_1, \dots, X_r)$ решетки всех диагональных матриц над K^* . Но решетка диагональных матриц над K^* и решетка диагональных матриц

над K изоморфны. Поэтому для каждого разбиения δ множества Γ среди матриц $X_1, \dots, X_r$ найдется матрица, отвечающая разбиению δ . Рассмотрим разбиения $\{[1] [2, \dots, n]\}, \dots, \{[n] [1, \dots, n-1]\}$ и пусть $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$ — матрицы, отвечающие этим разбиениям и, следовательно, имеющие только два характеристических различных числа. Одно из этих чисел является простым корнем характеристического многочлена, а другой корень в силу условия $n \geq 3$ будет иметь высшую кратность. Так как элементы матрицы X_{i_α} и коэффициенты ее характеристического многочлена принадлежат полю K , то и оба корня этого многочлена принадлежат K . Следовательно, матрицы $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$ совместно приводимы к диагональной форме не только в поле K^* , но и в поле K . Однако если матрицы $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$ имеют диагональный вид, то любая матрица, перестановочная с каждой из матриц $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$, будет также диагональной. Итак, матрицы $X_1, \dots, X_r$ одновременно приводимы в поле K к диагональному виду. Среди этих матриц находится и матрица X_i . В силу приведенного выше замечания характеристика X_i не может отличаться от χ .

Выше была построена формула $D_n(M)$, характеризующая матрицы, приводимые к диагональной форме в поле K^* . Теперь мы построили формулы $\mathfrak{P}_\chi(M)$, характеризующие для каждой диагональной характеристики χ те матрицы, которые приводятся к диагональному виду характеристики χ в основном поле K . Беря дизъюнкцию формул $\mathfrak{P}_\chi(M)$ для всевозможных диагональных характеристик χ , получим, очевидно, формулу $\mathfrak{P}(M)$, истинную для тех и только тех M , которые приводятся к диагональному виду в поле K .

При помощи формул $\mathfrak{P}_\chi(M)$ легко доказывается и следующая

Т е о р е м а 2. Для каждого n существует элементарно групповая замкнутая формула $\mathfrak{D}_n$, истинная в группах $GL(n, K)$, $SL(n, K)$ и ложная в группах $GL(m, K)$, $SL(m, K)$ для $m \neq n$.

Действительно, рассмотрим формулу

$$\mathfrak{D}_n \stackrel{\text{df}}{=} (\exists x_1) \dots (\exists x_r) (\bigwedge_{\lambda} D_n(x_\lambda) \& \bigwedge_{\lambda, \mu} x_\lambda x_\mu = x_\mu x_\lambda \& \mathfrak{D}_n(x_1, \dots, x_r)).$$

Эта формула истинна, как мы видели, в группах $GL(n, K)$, $SL(n, K)$. В группах $GL(m, K)$, $SL(m, K)$ при $m < n$ формула $\mathfrak{D}_n$ не может быть истинна, так как решетка разбиений множества $\{1, 2, \dots, m\}$ содержит меньше элементов, чем решетка разбиений множества $\{1, 2, \dots, n\}$, а формула $D_n(X)$ характеризует диагонализированные в K^* матрицы не только в группах $GL(n, K)$, $SL(n, K)$, но и в группах $GL(m, K)$, $SL(m, K)$ для $m < n$. Поэтому, полагая

$$\mathfrak{D}_n \stackrel{\text{df}}{=} \mathfrak{D}_n^* \& \mathfrak{D}_{n+1}^*,$$

мы получим формулу с требуемыми в теореме 2 свойствами.

Изложенные рассуждения неприменимы к группам $GL(2, K)$, $SL(2, K)$. Эти группы будут ниже рассмотрены особо.

1.3. Элементарность характеристики Сегре в общем случае. Рассмотрим формулу

$$\mathfrak{C}_1(B, A) \stackrel{\text{df}}{=} \mathfrak{P}(B) \& BA = AB \& (X)(XA = AX \rightarrow XB = BX) \& \\ \& (Y)[\mathfrak{P}(Y) \& YA = AY \& (X)(XA = AX \rightarrow XY = YX) \rightarrow Y \leq B].$$

Чтобы выяснить строение матрицы B , находящейся в отношении $\mathfrak{C}_1$ к какой-либо заданной матрице A , приведем A к жордановой форме (1) в поле K и положим для краткости]

$$A^{(i)} = A_1^{(i)} \dot{+} \dots \dot{+} A_{k_i}^{(i)} \quad (i = 1, \dots, s),$$

так что $A = A^{(1)} \dot{+} \dots \dot{+} A^{(s)}$. Пусть Y — произвольная диагонализируемая в K матрица, перестановочная со всеми матрицами, перестановочными с A . По известной теореме (см. [1], стр. 147) Y может быть представлена в виде $\varphi(A)$, где φ — подходящий многочлен. Следовательно,

$$Y = (Y_1^{(1)} \dot{+} \dots \dot{+} Y_{k_1}^{(1)}) \dot{+} \dots \dot{+} (Y_1^{(s)} \dot{+} \dots \dot{+} Y_{k_s}^{(s)}) \quad (Y_j^{(i)} = \varphi(A_j^{(i)})).$$

По условию $Y_j^{(i)}$ диагонализируема в K и перестановочна с $A_j^{(i)}$. Отсюда следует, что $Y_j^{(i)}$ скалярная матрица, так как в противном случае $A_j^{(i)}$ в поле K распадалась бы на более мелкие клетки, что невозможно. Итак, $\varphi(A_j^{(i)}) = \beta_j^i E_j^i$ и, следовательно, $\varphi(A_i) = \beta_i^i E_i$, где A_i — элементарная клетка Жордана, над которой построены все клетки $A_1^{(i)}, \dots, A_{k_i}^{(i)}$. Отсюда $\beta_1^i = \dots = \beta_{k_i}^i$. Поэтому Y имеет вид

$$Y = \beta_1 E^{(1)} \dot{+} \dots \dot{+} \beta_s E^{(s)}. \quad (3)$$

Матрицы B , удовлетворяющие отношению $\mathfrak{C}_1(B, A)$, наименее гладкие среди матриц Y , т. е. это те матрицы Y , у которых все числа $\beta_1, \dots, \beta_s$ различны.

Рассмотрим теперь формулу

$$\mathfrak{C}_2(C, A) \stackrel{\text{df}}{=} \mathfrak{P}(C) \& CA = AC \& (X) \mathfrak{P}(X) \& XA = AX \& XC = CX \rightarrow X \leqslant C.$$

Пусть C, A — какие-нибудь матрицы, для которых эта формула истинна, и, следовательно, C диагонализируема в K . Приводим C в K к виду

$$C = \gamma_1 E_1 \dot{+} \dots \dot{+} \gamma_t E_t,$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ — различные числа из K . Из перестановочности A с C следует, что A тогда будет иметь вид

$$A = A_1 \dot{+} \dots \dot{+} A_t.$$

Покажем, что $A_1, \dots, A_t$ не могут распадаться на более мелкие клетки в K . Действительно, если бы оказалось, что $A_1 = A'_1 \dot{+} A''_1$, то матрица

$$X = \gamma'_1 E'_1 \dot{+} \gamma''_1 E''_1 \dot{+} \gamma_2 E_2 \dot{+} \dots \dot{+} \gamma_t E_t$$

была бы перестановочной с A, C и менее гладкой, чем C , вопреки отношению $\mathfrak{C}_2$. Таким образом, для каждой матриц A, B, C , находящихся в отношениях $\mathfrak{C}_1(B, A), \mathfrak{C}_2(C, A)$, существует такое приведение матрицы A к форме Жордана (1), при котором B примет вид (3), а C приведет к виду

$$C = (\gamma_1^1 E_1^1 \dot{+} \dots \dot{+} \gamma_{k_1}^1 E_{k_1}^1) \dot{+} \dots \dot{+} (\gamma_1^s E_1^s \dot{+} \dots \dot{+} \gamma_{k_s}^s E_{k_s}^s). \quad (4)$$

Рассмотрим, наконец, еще формулу

$$\mathfrak{C}_3(D, A) \stackrel{\text{df}}{=} D_n(D) \& DA + AD \& (X) (D_n(X) \& XA = AX \& XD = DX \rightarrow X \leqslant D),$$

отличающуюся от формулы $\mathfrak{C}_2(D, A)$ только тем, что условие диагонализруемости $\mathfrak{P}$ в K заменено условием D_n диагонализруемости в поле K^* .

Пусть A — данная матрица и B, C, D — какие-либо матрицы рассматриваемой группы, находящиеся в отношениях $\mathfrak{C}_1(B, A), \mathfrak{C}_2(C, A), \mathfrak{C}_3(C, D), BC = CB, CD = DC$. Приведем матрицу D в поле K к виду

$$D = (D_1 \dot{+} \dots \dot{+} D_1) \dot{+} \dots \dot{+} (D_s \dot{+} \dots \dot{+} D_s),$$

где $D_1, \dots, D_s$ — матрицы с различными неприводимыми в K характеристическими многочленами. Из перестановочности C и D и остальных условий следует, что C будет иметь вид (4), а матрицы B и A будут соответственно иметь вид (3) и (1).

Выше были построены формулы $\mathfrak{P}_\chi(X)$ для значений χ , равных характеристикам Сегре диагонализруемых в K матриц. Теперь покажем, как строить формулы $\mathfrak{P}_\chi(X)$ для χ , равных характеристикам недиагонализруемых в K матриц. Пусть A — матрица характеристики

$$\chi = \{(m_1^1, n^1) \dots (m_{k_1}^1, n^1)\} \dots \{(m_s^s, n^s) \dots (m_{k_s}^s, n^s)\}$$

и B, C, D — какие-нибудь коммутирующие между собой матрицы, находящиеся в отношениях $\mathfrak{C}_1(B, A), \mathfrak{C}_2(C, A), \mathfrak{C}_3(D, A)$. Из приведенных выше соображений следует, что в поле K^* матрицы B, C приводимы соответственно к виду (3) и (4), а матрица D одновременно к виду

$$D = \sum_i \sum_j \sum_k \lambda_{jk}^i E_{jk}^i,$$

где все коэффициенты $\beta_i^k, \gamma_j^i, \lambda_{jk}^i$ различны. Матрицам B, C, D пусть отвечают разбиения $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ совокупности $\{1, 2, \dots, n\}$ и пусть $\delta_4, \dots, \delta_r$ — остальные разбиения этой совокупности. В соответствии со сказанным выше обозначим через $\mathfrak{D}_n(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_r)$ описание решетки этих разбиений. В качестве искомой формулы $\mathfrak{P}_\chi$ теперь можно принять

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_\chi(A) &\stackrel{\text{df}}{=} (\exists x_1) \dots (\exists x_r) \mathfrak{C}_1(x_1, A) \& \mathfrak{C}_2(x_2, A) \& \mathfrak{C}_3(x_3, A) \& \bigwedge_i D_n(x_i) \& \\ &\& \bigwedge_{i,j} x_i x_j = x_j x_i \& \mathfrak{D}_n(x_1, \dots, x_r)). \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, формулы $\mathfrak{P}_\chi(X)$ в группах $SL(2, K), GL(2, K)$ приходится строить специальным образом. Для χ здесь возможны следующие значения:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \{(1, 1) (1, 1)\}, \quad \chi_2 = \{(1, 2)\}, \quad \chi_3 = \{(1, 1) [(1, 1)]\}, \\ \chi_4 &= \{(2, 1)\}. \end{aligned}$$

χ_1 характеризует скалярные матрицы, и потому можно положить

$$\mathfrak{P}_{\chi_1}(A) \stackrel{\text{df}}{=} (X)(AX = XA).$$

Матрицы характеристик χ_2 и χ_3 — это матрицы, приводящиеся в K^* к диагональному виду с различными диагональными элементами. Согласно лемме 2 такие матрицы описываются формулой $Dd_2(A)$. Следовательно, для остающейся характеристики χ_4 можно положить

$$\mathfrak{P}_{\chi_4}(A) \stackrel{\text{df}}{=} \neg \mathfrak{P}_{\chi_1}(A) \& \neg Dd_2(A).$$

Покажем, наконец, что матрицы характеристики χ_3 описываются формулой

$$\mathfrak{P}_{\chi_3}(A) \stackrel{\text{df}}{=} Dd_2(A) \& (\exists X) \mathfrak{P}_{\chi_4}(X) \& AXA^{-1} \cdot X = X \cdot AXA^{-1},$$

а матрицы характеристики χ_2 описываются, следовательно, формулой

$$\mathfrak{P}_{\chi_2}(A) \stackrel{\text{df}}{=} Dd_2(A) \& \neg \mathfrak{P}_{\chi_3}(A).$$

В самом деле, пусть формула $\mathfrak{P}_{\chi_3}(A)$ истинна и X удовлетворяет условиям $\mathfrak{P}_{\chi_4}(X)$, $AXA^{-1} \cdot X = X \cdot AXA^{-1}$. Приводим X в K к форме $\begin{bmatrix} \xi & 1 \\ & \xi \end{bmatrix}$. Тогда из условия $AXA^{-1} \cdot X = X \cdot AXA^{-1}$ следует, что A — треугольная матрица и потому приводящаяся к диагональной форме уже в поле K , что и требовалось.

1.4. Проективные группы. Проективные группы $PG(n, K)$ и $PS(n, K)$ являются фактор-группами линейных групп $GL(n, K)$ и $SL(n, K)$ по их центрам. Центры эти состоят соответственно из всех скалярных матриц αE ($\alpha \neq 0$, $\alpha \in K$) и всех скалярных матриц αE , для которых $\alpha^n = 1$. Элементами проективных групп, таким образом, служат классы элементов соответствующих линейных групп, и элементы линейных групп можно рассматривать как представителей элементов проективных групп. При этом матрицы A , B представляют один и тот же элемент проективной группы тогда и только тогда, когда они связаны отношением

$$(\exists X) (A = BX \& (Y) (XY = YX)) \quad (5)$$

в соответствующей линейной группе. Формулу (5) можно переписать в виде $(\exists \alpha) (A = \alpha B)$, где квантор $\exists \alpha$ ограниченный, относящийся ко всем ненулевым элементам поля K в случае группы $GL(n, K)$ и к множеству корней уравнения $\alpha^n = 1$, лежащих в K , если рассматривается группа $SL(n, K)$.

Пусть $\mathfrak{A}(X, Y)$ — какая-нибудь элементарно групповая формула. Заменяя в этой формуле каждое равенство $A = B$ формулой (5), получим новую элементарно групповую формулу, которую будем обозначать $\mathfrak{A}^*(X, Y)$. Рассмотрим произвольные матрицы X, Y из $GL(n, K)$ и обозначим через $[X]$, $[Y]$ совокупности матриц вида αX , αY ($\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$). Классы $[X]$, $[Y]$ будут элементами проективной группы $PG(n, K)$. Ясно, что формула $\mathfrak{A}([X], [Y])$ тогда и только тогда истинна в $PG(n, K)$, когда в группе $GL(n, K)$ истинна формула $\mathfrak{A}^*(X, Y)$. То же самое справедливо и для групп $PS(n, K)$, $SL(n, K)$.

Как уже говорилось, элементы проективных групп можно рассматривать как классы матриц, отличающихся ненулевым скалярным множителем. Но матрицы X и αX ($\alpha \neq 0$) имеют одинаковую характеристику Сегре. Поэтому имеет смысл говорить о характеристике Сегре и элементов проективных групп.

Мы хотим теперь показать, что характеристика Сегре является элементарным понятием и в проективных группах. Для этого нам будут нужны следующие два замечания.

З а м е ч а н и е 1. Пусть A, B — квадратные матрицы над K , порядки которых равны соответственно m и n , и пусть X — прямоугольная матрица над K , имеющая m строк и n столбцов. Тогда, если характеристические многочлены матриц A, B взаимно просты и $AX = XB$, то $X = 0$.

Действительно, из $AX = XB$ следует $A^i X = XB^i$ ($i = 1, 2, \dots$) и потому для произвольного многочлена $\varphi(\lambda)$ имеем $\varphi(A)X = X\varphi(B)$.

Для характеристических многочленов $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ матриц A , B подбираем такие многочлены $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, чтобы $pf + qg = 1$. Так как $f(A) = 0$, $g(B) = 0$, то

$$X = [p(A)f(A) + q(A)g(A)]X = q(A)Xg(B) = 0.$$

Клеточная матрица называется клеточно мономиальной, если в каждой ее строке и каждом столбце имеется лишь по одной ненулевой клетке.

З а м е ч а н и е 2. Если $A = A_1 \dot{+} \dots \dot{+} A_s$ — клеточно диагональная матрица, характеристические многочлены $f_i(\lambda)$ диагональных клеток A_i которой попарно взаимно просты, и если матрица $B = X^{-1}AX$ имеет аналогичный клеточно диагональный вид $B_1 \dot{+} \dots \dot{+} B_s$, причем характеристический многочлен произвольной клетки B_i совпадает с характеристическим многочленом соответствующей клетки A_{ν_i} , то X — клеточно мономиальная, а $X^{s!}$ — клеточно диагональная матрица.

Пусть $X = \|X_{ij}\|$ ($i, j = 1, \dots, s$). Условие $AX = XB$ дает

$$A_i X_{ij} = X_{ij} B_j. \quad (6)$$

Рассмотрим подстановки

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & \dots & s \\ \nu_1 & \dots & \nu_s \end{pmatrix}, \quad \nu^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & s \\ \mu_1 & \dots & \mu_s \end{pmatrix}.$$

В силу замечания 1 из (6) следует, что $X_{ij} = 0$, если $j \neq \mu_i$ или $i \neq \nu_j$, т. е. матрица X — клеточно мономиальная. Но тогда для любой клеточно диагональной матрицы $C = C_1 \dot{+} \dots \dot{+} C_s$ имеем $X^{-1}CX = C'_1 \dot{+} \dots \dot{+} C'_s$, причем если характеристический многочлен C_i равен $h_i(\lambda)$ ($i = 1, \dots, s$), то характеристический многочлен матрицы C'_i равен $h_{\nu_i}(\lambda)$. Это можно истолковать так, что преобразование клеточно диагональной матрицы C посредством X вызывает перестановку ν характеристических многочленов диагональных клеток. Поэтому матрица X^m будет вызывать перестановку ν^m . Так как $\nu^{s!} = 1$, то $X^{s!}$ не будет передвигать характеристических многочленов и потому будет просто клеточно диагональной матрицей.

Теперь легко доказывается следующий аналог леммы 1.

Л е м м а 1а. В каждой из групп $PG(n, K)$, $PS(n, K)$ формула

$$PC(a) \stackrel{\text{def}}{=} (x)(y)(ax = xa \ \& \ ay = ya \rightarrow x^{n!}y^{n!} = y^{n!}x^{n!})$$

тогда и только тогда истинна, когда A имеет в K характеристику Сегре вида $\{[(m_1, n_1)] \dots [(m_s, n_s)]\}$.

В самом деле, пусть a представляется матрицей A , имеющей указанную в лемме характеристику Сегре. Формула $PC(a)$ в соответствующей линейной группе равносильна формуле

$$(\bar{X})(Y)(\alpha)(\beta)(\exists \gamma)(AX = \alpha XA \ \& \ AY = \beta YA \rightarrow X^{n!}Y^{n!} = \gamma Y^{n!}X^{n!}).$$

Предположим, что для некоторых X, Y имеем $AX = \alpha XA$, $AY = \beta YA$ ($\alpha, \beta \in K$). Приводим в K матрицу A к жордановой форме

$$A = A_1 \dot{+} \dots \dot{+} A_s.$$

В силу замечания 2 матрицы $X^{s!}$, $Y^{s!}$ имеют вид

$$X^{s!} = X_1 \dot{+} \dots \dot{+} X_s, \quad Y^{s!} = Y_1 \dot{+} \dots \dot{+} Y_s,$$

причем

$$A_i X_i = \alpha^{s!} X_i A_i, \quad A_i Y_i = \alpha^{s!} Y_i A_i.$$

Сравнивая определители левых и правых частей этих равенств, получаем, что $\alpha^{p_i s!} = \beta^{p_i s!} = 1$, где p_i — порядок A_i . Из соотношения $X_i^{-1} A_i X_i = \alpha^{s!} A_i$ теперь получаем

$$X_i^{-p_i} A_i X_i^{p_i} = \alpha^{s! p_i} A_i = A_i, \quad Y_i^{-p_i} A_i Y_i^{p_i} = A_i.$$

Таким образом, матрицы $X_i^{p_i}$ и $Y_i^{p_i}$ перестановочны с жордановой клеткой A_i и потому перестановочны между собой. Следовательно, $X^{n!} Y^{n!} = Y^{n!} X^{n!}$.

Предположим теперь, напротив, что матрица A приводится к жордановой форме, не имеющей вида, указанного в лемме 1а, и потому содержащей какие-то две клетки, отвечающие одному и тому же корневому многочлену. В п. 1.1 для матрицы A , имеющей такую форму, построены матрицы X , Y из $SL(n, K)$, коммутирующие с A и не коммутирующие друг с другом. Легко проверить, что не только сами матрицы X , Y не коммутируют, но что $X^t Y^t \neq \gamma Y^t X^t$ для $t = 1, 2, \dots$ и любого $\gamma \in K$. Тем самым лемма 1а доказана полностью.

Л е м м а 2а. В каждой из групп $PG(n, K)$, $PS(n, K)$ формула

$$PDd_n(a) \stackrel{\text{df}}{=} PC(a^n) \& (x)(x^{-1}ax \cdot a = a \cdot x^{-1}ax \rightarrow ax^{n!} = x^{n!}a)$$

истинна для тех и только тех элементов a , у которых a^n в K имеют характеристику Сегре вида $\{(1, n_1), \dots, (1, n_s)\}$, т. е. приводятся в K^* к диагональному виду с различными диагональными элементами.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $a^n = [A^n]$ имеет указанную в лемме характеристику и, значит, A приводится в K^* к виду $A = \alpha_1 e_{11} + \dots + \alpha_n e_{nn}$, где $\alpha_i^n \neq \alpha_j^n$ для $i \neq j$. Рассмотрим произвольную матрицу X , удовлетворяющую требованию $X^{-1}AX \cdot A = \alpha A \cdot X^{-1}AX$. Беря определители от обеих частей, получим $\alpha^n = 1$. Так как $(X^{-1}AX)^n = \alpha^n A (X^{-1}AX)^n$, то $X^{-1}AX \cdot A = A \cdot X^{-1}AX$. Следовательно, матрица $X^{-1}AX$ диагональная, с различными диагональными элементами. В силу замечания 2 отсюда вытекает, что матрица $X^{n!}$ также диагональная и, значит, $X^{n!}A = AX^{n!}$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если $PC(A^n)$ истинно и характеристика матрицы A не имеет вида, указанного в лемме, то A в поле K приводится к форме $A = A_1 + A'_1$, где A_1 — клетка Жордана с индексом, большим 1. Как легко видеть, матрица X , построенная в процессе доказательства леммы 2, удовлетворяет условиям $X^{-1}AX \cdot A = A \cdot X^{-1}AX$, $AX^t \neq X^tA$. Поэтому для такой матрицы A формула $PDd_n(A)$ ложна, что и требовалось.

Л е м м а 2а. В каждой из групп $PG(n, K)$, $PS(n, K)$ формула

$$PD_n(a) \stackrel{\text{df}}{=} (\exists x)(PDd_n(x) \& ax = xa)$$

истинна для тех и только тех элементов, которые в поле K^* приводятся к диагональному виду.

Истинность формулы $PD_n([A])$ для диагонализующихся в K^* элементов непосредственно вытекает из доказательства леммы 3. Поэтому допустим, что для некоторой матрицы A формула $PD_n([A])$ истинна, т. е. что существует матрица X , у которой X^n приводится в поле K^* к диагональному виду с различными диагональными элементами и для которой $AX = \alpha XA$. Из последнего равенства заключаем, что $\alpha^n = 1$, $AX^n = \alpha^n X^n A = X^n A$ и, следовательно, что A диагонализуема в K^* .

Рассуждения п. 1.2 и 1.3 переносятся на проективные группы почти дословно, и в результате получается

Т е о р е м а 3. В каждой из групп $GL(n, K)$, $SL(n, K)$, $PG(n, K)$, $PS(n, K)$ для каждой характеристики Сегре χ существует элементарно групповая формула $\mathfrak{F}_\chi(A)$, истинная для тех и только тех элементов группы A , которые имеют в поле K характеристику χ . Вид формулы $\mathfrak{F}_\chi(A)$ не зависит от свойств поля K .

Для каждой группы $\mathfrak{D}(n, K)$ ($\mathfrak{D} = GL, SL, PG, PS$) существует формула $\mathfrak{D}_n$, истинная в $\mathfrak{D}(n, K)$ и ложная в группах $\mathfrak{D}(m, K)$ при $m \neq n$. Вид формулы $\mathfrak{D}_n$ также не зависит от свойств поля K .

Вопросы о том, какие из линейных и проективных групп обладают одинаковыми элементарно групповыми свойствами и какие нет, будут рассмотрены ниже.

§ 2. Узкофункциональный (арифметический) тип линейных и проективных групп

Говорят, что классы групп имеют один и тот же узкофункциональный, или арифметический, тип, если каждое элементарно групповое предложение, истинное на всех группах одного класса, истинно и на всех группах другого класса.

Подгруппа $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ называется элементарной, если существует такая элементарно групповая формула $\mathfrak{A}(X)$, что $\mathfrak{H}$ состоит из всех тех элементов $X \in \mathfrak{G}$, для которых формула $\mathfrak{A}(X)$ истинна в $\mathfrak{G}$. Подгруппа или произвольное подмножество $\mathfrak{H}$ элементов группы $\mathfrak{G}$ называется элементарным относительно элементов $A_1, \dots, A_m$ группы $\mathfrak{G}$, если существует элементарно групповая формула $\mathfrak{A}(X, A_1, \dots, A_m)$, истинная для тех и только тех $X \in \mathfrak{G}$, которые содержатся в $\mathfrak{H}$.

Используя результаты § 1, мы хотим теперь указать условия, при которых линейные и проективные группы имеют один и тот же узкофункциональный тип. Попутно будет установлена относительная элементарность некоторых подгрупп указанных групп.

2.1. Относительная элементарность некоторых подгрупп. Имеет место

Л е м м а 1. Коммутант группы $GL(n, K)$ совпадает с группой $SL(n, K)$ и является элементарной подгруппой $GL(n, K)^*$.

Утверждение о совпадении коммутанта $GL(n, K)$ с $SL(n, K)$ хорошо известно (см. [3]). Из обычного доказательства этого утверждения легко усматривается более сильное свойство коммутанта $GL(n, K)$, а именно, что каждый его элемент, т. е. каждая матрица из $SL(n, K)$, может быть представлена в виде произведения фиксированного числа $\sigma(n)$ коммутаторов

* Здесь, как и всюду в данной работе, предполагается, что поле K имеет характеристику 0. Однако лемма 1 справедлива и для полей любой характеристики, за единственным исключением: $n = 2$, а K имеет только два элемента [3].

элементов группы $GL(n, K)$. Поэтому истинность формулы

$$(\exists X_1)(\exists Y_1) \dots (\exists X_\sigma)(\exists Y_\sigma)(A = X_1^{-1}Y_1^{-1}X_1Y_1 \cdot \dots \cdot X_\sigma^{-1}Y_\sigma^{-1}X_\sigmaY_\sigma)$$

в группе $GL(n, K)$ равносильна принадлежности матрицы A коммутанту группы $GL(n, K)$. Таким образом, $SL(n, K)$ является элементарной подгруппой в $GL(n, K)$.

Мы хотим теперь найти в $GL(n, K)$ и других рассматриваемых группах относительно элементарные подгруппы, изоморфные $GL(2, K)$.

Пусть $\mathfrak{G}$ — одна из групп $GL(n, K)$, $SL(n+1, K)$, где $n \geq 3$. Рассмотрим элементарно групповую формулу $\mathfrak{P}_\chi(4)$, характеризующую в $\mathfrak{G}$ матрицы A , имеющие характеристику Сегре $\chi = \{[(1)(1)(1)][(4)] \dots [(1)]\}$, т. е. матрицы, приводимые в K к диагональному виду и имеющие один тройной и остальные (если они есть) простые корни. Положим

$$A = \alpha_1(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + \alpha_4 e_{44} + \dots + \alpha_n e_{nn} \quad (i \neq j \rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j). \quad (7)$$

Совокупность $\mathfrak{H}$ матриц группы $\mathfrak{G}$, перестановочных с A , есть подгруппа $\mathfrak{G}$, образованная матрицами вида $H + D$, где $H \in GL(3, K)$, а D — диагональная матрица, произвольная для $\mathfrak{G} = GL(n, K)$ и удовлетворяющая условию $|D| = |H|^{-1}$ в случае, когда $\mathfrak{G} = SL(n+1, K)$. Отсюда следует, что в обоих случаях коммутант $\mathfrak{H}$ состоит из матриц вида

$$H + (e_{44} + \dots + e_{nn}) \quad (H \in SL(3, K))$$

и потому этот коммутант изоморфен группе $SL(3, K)$. Тем самым доказана

Л е м м а 2. В каждой из групп $GL(n, K)$, $SL(n, K)$ ($n \geq 3$) существует формула $\mathfrak{A}(X, A)$, обладающая тем свойством, что для каждой матрицы A , обладающей свойством $\mathfrak{P}_\chi(A)$, совокупность матриц X , для которых $\mathfrak{A}(X, A)$ истинна, является подгруппой, изоморфной группе $SL(3, K)$.

Действительно, в группах $GL(n, K)$, $SL(n+1, K)$ ($n \geq 3$) в качестве $\mathfrak{A}(X, A)$ можно взять формулу

$$(\exists X_1)(\exists Y_1) \dots (\exists X_\sigma)(\exists Y_\sigma) \left(\bigwedge_i (AX_i = X_i A \ \& \ AY_i = Y_i A) \ \& \ X = \prod_i X_i^{-1} Y_i^{-1} X_i Y_i \right),$$

а в группе $SL(3, K)$ можно положить $\mathfrak{A}(X, A) \stackrel{\text{df}}{=} (X = X)$.

Рассмотрим теперь в группе $SL(3, K)$ матрицу B вида

$$B = \alpha(e_{11} + e_{22}) + \beta e_{33} \quad (\alpha \neq \beta, \alpha^2 \beta = 1). \quad (8)$$

Матрицы T из $SL(3, K)$, перестановочные с B , имеют вид

$$T = T_1 + \lambda e_{33} \quad (T_1 \in GL(2, K), \lambda = |T_1|^{-1}). \quad (9)$$

Так как коэффициент λ однозначно определяется матрицей T_1 , в качестве которой можно брать произвольную матрицу из $GL(2, K)$, то совокупность всех T есть подгруппа, изоморфная группе $GL(2, K)$. Соединяя этот результат с леммой 2, видим, что имеет место

Л е м м а 3. Для каждой из групп $GL(n, K)$, $SL(n, K)$ ($n \geq 3$) существуют формулы $\mathfrak{R}(A, B)$, $\mathfrak{Z}(X, A, B)$, обладающие следующим свойством: каковы бы ни были элементы A, B рассматриваемой группы, находящейся в отношении $\mathfrak{R}(A, B)$, совокупность элементов X , находящихся в отношении $\mathfrak{Z}(X, A, B)$ к элементам A, B , есть подгруппа рассматриваемой группы, изоморфная группе $GL(2, K)$.

¶ Действительно, если рассматривается группа — $GL(2, K)$, то в качестве формул $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{Z}$ можно взять любые тождественно истинные формулы. Если же рассматривается одна из групп $GL(n, K)$, $SL(n, K)$ ($n \geq 3$), то в качестве $\mathfrak{K}(A, B)$ берем формулу $\mathfrak{P}_X(A) \& \mathfrak{A}(B, A)$. Чтобы построить $\mathfrak{Z}(X, A, B)$, обозначим через $\mathfrak{P}_0(B)$ формулу, характеризующую в группе $SL(3, K)$ матрицы, имеющие в K характеристику Сегре $\{(1,1) (1,1) [(1,1)]\}$. Тогда релятивизация формулы $\mathfrak{P}_0(B) \& XB = BX$ на множество элементов Y , находящихся в отношении $\mathfrak{A}(Y, A)$, может быть принята в качестве формулы $\mathfrak{Z}(X, A, B)$.

Л е м м а 4. Для каждой из проективных групп $PG(n, K)$, $PS(n+1, K)$ ($n \geq 2$) существуют формулы $\mathfrak{K}(A, B)$, $\mathfrak{Z}(X, A, B)$, обладающие следующим свойством: каковы бы ни были элементы группы A, B , находящиеся в отношении $\mathfrak{K}(A, B)$, совокупность элементов X , удовлетворяющих отношению $\mathfrak{Z}(X, A, B)$, образует подгруппу, изоморфную фактор-группе $GL(2, K)/\mathfrak{Z}$, где $\mathfrak{Z}$ состоит из матриц вида αE , $\alpha^3 = 1$.

Рассуждая, как и выше, рассматриваем формулу $\mathfrak{P}_X(A)$, истинную для тех и только тех элементов группы, которые представляются матрицами, приводящимися в K к диагональному виду (7). Пусть A — одна из матриц этого вида. Берем в рассматриваемой проективной группе $\mathfrak{G}$ подгруппу $\mathfrak{Z}$ элементов, перестановочных с A . Группа $\mathfrak{Z}$ есть фактор-группа от группы $\mathfrak{Z}_0$ матриц H , удовлетворяющих условию

$$AH = \lambda HA \quad (\lambda \in K) \quad (10)$$

по подгруппе $\mathfrak{Z}_0$ всех скалярных матриц αE ($\alpha \neq 0$, $\alpha \in K$). Из условия (10) видно, что матрицы A и λA должны иметь одни и те же характеристические числа. Таким образом, умножая характеристические числа матрицы A на число λ , мы должны получить те же самые числа. Но среди характеристических чисел A есть лишь одно непростое. При умножении на λ оно должно перейти в себя и потому $\lambda = 1$. Итак, $\mathfrak{Z}_0$ есть просто централизатор матрицы A в соответствующей линейной группе, рассмотренной выше. Обозначая через $\mathfrak{Z}'$ коммутант группы $\mathfrak{Z}$, видим, что

$$\mathfrak{Z}' \cong \mathfrak{Z}'_0/\mathfrak{Z}'_0 \cap \mathfrak{Z}_0 \cong SL(3, K)/\mathfrak{Z}_1 \cong PS(3, K),$$

где $\mathfrak{Z}_1$ — совокупность всех скалярных матриц в $SL(3, K)$.

Строим теперь формулу $\mathfrak{P}_0(a)$, истинную в $PS(3, K)$ для тех и только тех B ($a = [B]$), которые приводятся в K к виду (8). Пусть $a = [B]$ — один из элементов этого вида и пусть $\mathfrak{Z}$ — подгруппа группы $PS(3, K)$, образованная элементами, перестановочными с a . Подгруппа $\mathfrak{Z}$ есть фактор-группа от группы $\mathfrak{Z}_0$ матриц T вида (9) по центру $SL(3, K)$ и, значит, изоморфна фактор-группе $GL(2, K)/\mathfrak{Z}$, где $\mathfrak{Z}$ образована матрицами вида αE_2 , $\alpha^3 = 1$. Для окончания доказательства леммы 4 теперь достаточно повторить дословно указанные выше рассуждения.

2.2. Группа $GL(2, K)/\mathfrak{Z}$. Леммы 3 и 4 показывают, что в каждой из групп $GL(n, K)$, $SL(n+1, K)$, $PG(n, K)$, $PS(n+1, K)$, $n \geq 2$, имеется относительно элементарная подгруппа, изоморфная группе $GL(2, K)/\mathfrak{Z}$, где $\mathfrak{Z}$ — центральная подгруппа, равная единице в случае групп $GL(n, K)$, $SL(n+1, K)$, состоящая из матриц αE , $\alpha^3 = 1$ в случае групп $PG(n, K)$, $PS(n+1, K)$ и являющаяся совокупностью всех скалярных матриц αE , $\alpha \neq 0$ для групп $PG(2, K)$. Чтобы не рассматривать все эти случаи порознь, обозначим через $\mathfrak{Z}$ произвольную центральную подгруппу группы $GL(2, K)$ и пусть $\mathfrak{G}$ обозначает фактор-группу $GL(2, K)/\mathfrak{Z}$.

Л е м м а 5. *Существуют элементарно групповые формулы $\mathfrak{U}(A)$, $\mathfrak{B}(X, A)$, $\mathfrak{C}(X, Y, Z)$, $\mathfrak{P}(X, Y, Z)$, обладающие следующим свойством: в каждой группе $\mathfrak{G} = GL(2, K)/\mathfrak{Z}$ для каждого элемента A , удовлетворяющего требованию $\mathfrak{U}(A)$, совокупность $\mathfrak{C}$ элементов X , находящихся в отношении $\mathfrak{B}(X, A)$, образует поле, изоморфное K , относительно операций $\oplus$, $\otimes$, определенных в $\mathfrak{R}$ формулами*

$$X \oplus Y = Z \stackrel{\text{df}}{=} \mathfrak{C}(X, Y, Z), \quad (11)$$

$$X \otimes Y = Z \stackrel{\text{df}}{=} \mathfrak{P}(X, Y, Z). \quad (12)$$

Докажем сначала, что в группе $\mathfrak{G}$ формула

$$\mathfrak{F}(a) \stackrel{\text{df}}{=} (\exists x)(x^{-1}ax \cdot a = a \cdot x^{-1}ax \ \& \ a^2x^2 \neq x^2a^2)$$

истинна для тех и только тех элементов, a , которые представляются матрицами, приводимыми в K к виду $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ & \alpha \end{vmatrix}$, $\alpha \neq 0$.

Элемент a тогда и только тогда удовлетворяет отношению $\mathfrak{F}(a)$ в $\mathfrak{G}$, когда соответствующая матрица A удовлетворяет в $GL(2, K)$ формуле

$$\mathfrak{F}^\pi(A) \stackrel{\text{df}}{=} (\exists X)(\exists \alpha)(\exists \beta)(X^{-1}AX \cdot A = \alpha A \cdot X^{-1}AX \ \& \ A^2X^2 \neq \beta X^2A^2) (\alpha, \beta \in \mathfrak{Z}).$$

Если A приводится к виду $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ & \alpha \end{vmatrix}$, то формула $\mathfrak{F}^\pi(A)$ заведомо истинная, так как в качестве X достаточно взять матрицу $2e_{11} + e_{22}$.

Обратно, пусть A не приводима к указанному виду. Тогда A либо скалярна, что в силу условия $A^2X^2 \neq X^2A^2$ невозможно, либо A приводится в K^* к виду $A = \lambda e_{11} + \mu e_{22}$ ($\lambda \neq \mu$). Последнее также невозможно, поскольку из $X^{-1}AX \cdot A = A \cdot X^{-1}AX \cdot \alpha$, переходя к определителям, получаем $\alpha = \pm 1$, и, значит, матрица X либо диагональна, либо имеет вид $\sigma e_{12} + \tau e_{21}$. В обоих случаях $X^2A^2 = A^2X^2$.

Теперь докажем более тонкое утверждение, что в группе $\mathfrak{G}$ формула

$$\mathfrak{F}_1(a) \stackrel{\text{df}}{=} (\exists x)(\exists y)(\exists z) \mathfrak{F}(x) \ \& \ y^{-1}xy \cdot x = x \cdot y^{-1}xy \ \& \ z^{-1}xz \cdot x = x \cdot z^{-1}xz \ \& \ a = y^{-1}z^{-1}yz$$

истинна для тех и только тех элементов a , которые представляются матрицами, приводимыми в K к виду $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ & \alpha \end{vmatrix}$, где $\alpha \in \mathfrak{Z}$, $\beta \in K$.

Истинность $\mathfrak{F}_1(a)$ в группе $\mathfrak{G}$ равносильна истинности в $GL(2, K)$ формулы

$$\mathfrak{F}_1^\pi(A) \stackrel{\text{df}}{=} (\exists X)(\exists Y)(\exists Z)(\exists \alpha \exists \gamma) [\mathfrak{F}^\pi(X) \ \& \ Y^{-1}XY \cdot X = \alpha X \cdot Y^{-1}XY \ \& \ Z^{-1}XZ \cdot X = \beta X \cdot Z^{-1}XZ \ \& \ A = \gamma Y^{-1}Z^{-1}YZ] (\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{Z}),$$

где A — матрица, представляющая элемент a .

Допустим, что для некоторой матрицы A формула $\mathfrak{F}_1^\pi(A)$ истинна и, следовательно, существуют матрицы X, Y, Z с указанными в формуле свойствами. Так как $\mathfrak{F}^\pi(X)$ истинна, то матрицу X можно считать имеющей вид $\begin{vmatrix} \xi & \xi \\ & \xi \end{vmatrix}$. Условие $Y^{-1}XY \cdot X = \alpha XY^{-1}XY$ дает $Y = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ & \eta_3 \end{vmatrix}$. Аналогично убе-

ждаемся, что Z должна иметь вид $\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ & \xi_3 \end{vmatrix}$ и, следовательно,

$$A = \begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ & \gamma \end{vmatrix} \quad (\gamma \in \mathfrak{Z}, \delta \in K). \quad (13)$$

Обратное утверждение, что матрицы A вида (13) удовлетворяют требованию $\mathfrak{F}_1^\pi(A)$, проверяется непосредственно.

Вводим, наконец, формулы

$$\mathfrak{S}(x, y, z) \stackrel{\text{df}}{=} xy = z,$$

$$\mathfrak{P}(x, y, z) \stackrel{\text{df}}{=} (x = e \vee y = e \& z = e) \vee [x \neq e \& y \neq e \& (\exists u)(\exists v)(x = u^{-1}au \& y = v^{-1}av \& z = v^{-1}u^{-1}a\dot{u}v)]$$

и полагаем

$$\mathfrak{U}(a) \stackrel{\text{df}}{=} \mathfrak{F}(a) \& \mathfrak{F}_1(a),$$

$$\mathfrak{B}(x, a) \stackrel{\text{df}}{=} \mathfrak{F}_1(a) \& ax = xa.$$

Пусть для $a \in \mathfrak{G}$ формула $\mathfrak{U}(a)$ истинна. Будем считать матрицу A , представляющую элемент a , приведенной к виду $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ & \alpha \end{vmatrix}$. Каждая матрица X , представляющая элемент x , находящийся в отношении $\mathfrak{B}(x, a)$, имеет вид $\lambda \begin{vmatrix} 1 & \xi \\ & 1 \end{vmatrix} (\lambda \in \mathfrak{Z})$. Ставя каждому числу $\xi \in K$ в соответствие элемент $x(\xi)$, представляющийся указанной матрицей, получим взаимно однозначное отображение поля K на совокупность $\mathfrak{K}$ элементов, находящихся к a в отношении $\mathfrak{B}(x, a)$.

Из формулы $\mathfrak{S}(x, y, z)$ теперь непосредственно получаем, что $x(\xi) \oplus \oplus x(\eta) = x(\xi + \eta)$. Далее, если $x(\xi) \neq e$, $x(\eta) \neq e$, то $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ и из условий

$$U^{-1}AU = \lambda_1 \begin{vmatrix} 1 & \xi \\ & 1 \end{vmatrix}, \quad V^{-1}AV = \lambda_2 \begin{vmatrix} 1 & \eta \\ & 1 \end{vmatrix}, \quad Z = \lambda V^{-1}U^{-1}AUV$$

получаем

$$U = \mu_1 \begin{vmatrix} 1 & u \\ & \xi \end{vmatrix}, \quad V = \mu_2 \begin{vmatrix} 1 & v \\ & \eta \end{vmatrix}, \quad Z = \mu \begin{vmatrix} 1 & \xi\eta \\ & 1 \end{vmatrix},$$

т. е. $x(\xi) \otimes x(\eta) = x(\xi\eta)$, и, следовательно, совокупность $\mathfrak{K}$ относительно операций $\oplus$, $\otimes$ является полем, изоморфным полю K .

2.3. Основные теоремы. При помощи доказанных результатов теперь легко доказываются и основные теоремы, сформулированные во введении. Для удобства мы сначала соединим результаты лемм 3, 4, 5.

Л е м м а 6. Для каждой из групп $GL(n, K)$, $PG(n, K)$, $SL(n+1, K)$, $PS(n+1, K)$ ($n \geq 2$) существуют элементарно групповые формулы $\mathfrak{R}(a, b)$, $\mathfrak{Z}(x, a, b)$, $\mathfrak{S}(x, y, z)$, $\mathfrak{P}(x, y, z, a)$, обладающие следующим свойством: для любых элементов a, b рассматриваемой группы, находящихся в отношении $\mathfrak{R}(a, b)$, совокупность $\mathfrak{K}$ элементов x , удовлетворяющих требованию $\mathfrak{Z}(x, a, b)$, является относительно операций $\oplus$, $\otimes$, определяемых формулами (11), (12), полем, изоморфным полю K .

В качестве формул $\mathfrak{A}(a, b)$, $\mathfrak{Z}(x, a, b)$ мы возьмем формулы, построенные в леммах 3, 4 для каждой из рассматриваемых групп, а формулы $\mathfrak{S}(x, y, z)$, $\mathfrak{P}(x, y, z)$ с требуемыми свойствами построены в лемме 5.

Т е о р е м а 4. Для каждой группы $GL(n, K)$, $PG(n, K)$, $SL(n+1, K)$, $PS(n+1, K)$ ($n \geq 2$) множество элементарно групповых предложений, истинных на рассматриваемой группе, рекурсивно эквивалентно множеству элементарно кольцевых предложений, истинных на поле K .

Это означает [4], что существует алгоритм, перерабатывающий каждое элементарно групповое предложение в элементарно кольцевое предложение, причем предложения, истинные на группе, перерабатываются в предложения, истинные на K , и, наоборот, существует алгоритм, перерабатывающий элементарно кольцевые формулы в элементарно групповые формулы и при этом формулы, истинные на поле K , перерабатывающий в формулы, истинные на рассматриваемой группе.

В самом деле, пусть рассматриваются группа $\mathfrak{G}(n, K)$ ($\mathfrak{G} = CL, PG$) ($n \geq 2$), SL, PS ($n \geq 3$) и какое-нибудь элементарно групповое предложение

$$\mathfrak{A} = (Q_1 x_1) \dots (Q_r x_r) \mathfrak{Z}(x_1, \dots, x_r) (Q_i = \exists, \forall).$$

Истинность $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{G}(n, K)$, очевидно, равносильна истинности на K предложения $\mathfrak{A}_K$, получающегося из $\mathfrak{A}$ следующим хорошо известным процессом:

а) в формуле $\mathfrak{Z}(x_1, \dots, x_r)$ отношения вида $x_i = x_j$ и $x_i = x_j x_k$ заменяем соответственно формулами

$$\bigwedge_{\lambda, \mu} (x_{i\lambda\mu} = x_{j\lambda\mu}) \text{ и } \bigwedge_{\lambda, \mu} (x_{i\lambda\mu} = x_{j\lambda 1} x_{k1\mu} + \dots + x_{j\lambda n} x_{kn\mu}).$$

б) если формула $\mathfrak{Z}_{i+1} = (Q_{i+1} x_{i+1}) \dots (Q_r x_r) \mathfrak{Z}$ преобразовывается в формулу $\mathfrak{S}_{i+1}$, то формула $\mathfrak{Z}_i = (\forall x_i) \mathfrak{Z}_{i+1}$ преобразовывается в формулу

$$(x_{i11}) (x_{i12}) \dots (x_{inn}) (\det \|x_{i\lambda\mu}\| \neq 0 \rightarrow \mathfrak{S}_{i+1}), \quad (14)$$

а формула $\mathfrak{Z}_i = (\exists x_i) \mathfrak{Z}_{i+1}$ преобразовывается в формулу

$$(\exists x_{i11}) (\exists x_{i12}) \dots (\exists x_{inn}) (\det \|x_{i\lambda\mu}\| \neq 0 \& \mathfrak{S}_{i+1}). \quad (15)$$

Если рассматривается предложение $\mathfrak{A}$ и специальная линейная группа $SL(n, K)$, то в формулах (14) и (15) вместо неравенства $\det \|x_{i\lambda\mu}\| \neq 0$ следует записать равенство $\det \|x_{i\lambda\mu}\| = 1$. Наконец, если рассматриваются проективные группы $PG(n, K)$ или $PS(n, K)$, то выше уже был указан способ, позволяющий для каждого элементарно группового предложения $\mathfrak{A}$ построить новое элементарно групповое предложение $\mathfrak{A}^*$, истинное на группе $GL(n, K)$ или $SL(n, K)$ тогда и только тогда, когда на соответствующей проективной или специальной проективной группе истинно предложение $\mathfrak{A}$. Способ же преобразования формул, относящихся к группам $GL(n, K)$ и $SL(n, K)$, в формулы, относящиеся к полю K , был указан выше.

Таким образом, переход от элементарно групповых формул к элементарно кольцевым формулам, относящимся к полю K , совершенно прямой и не зависит от предыдущих рассмотрений. Обратный переход от формул, относящихся к полю K , к формулам, относящимся к линейным или проективным группам, более сложен и существенно опирается на построения предыдущих пунктов.

Итак, пусть задано какое-либо элементарно кольцевое предложение

$$\mathfrak{S} = (Q_1 x_1) \dots (Q_i x_i) \mathfrak{D}(x_1, \dots, x_i)$$

и мы хотим знать, истинно ли оно на базисном поле K группы $\mathfrak{G}$, где $\mathfrak{G}$ одна из указанных в доказываемой теореме групп. Рассмотрим формулы $\mathfrak{K}(a, b)$, $\mathfrak{L}(x, a, b)$, $\mathfrak{S}(x, y, z)$, $\mathfrak{P}(x, y, z)$, построенные в лемме 6 и относящиеся к группе $\mathfrak{G}$. Заменяя в формуле $\mathfrak{D}(x_1, \dots, x_t)$ кольцевые отношения $x + y = z$ и $xy = z$ формульными отношениями $\mathfrak{S}(x, y, z)$, $\mathfrak{P}(x, y, z)$ и произведя ограничение кванторов во всей формуле $\mathfrak{C}$ на множество тех x , которые удовлетворяют отношению $\mathfrak{L}(x, a, b)$, получим в результате элементарно групповую формулу $\mathfrak{C}_{\mathfrak{D}}(a, b)$. Эта формула утверждает то же самое, что и формула $\mathfrak{C}$, но лишь для множества $\mathfrak{K}$. Если элементы a, b выбраны в группе $\mathfrak{G}$ так, что истинна формула $\mathfrak{K}(a, b)$, то множество $\mathfrak{K}$ с отношениями $\mathfrak{S}(x, y, z)$, $\mathfrak{P}(x, y, z)$ будет полем, изоморфным полю K . Поэтому истинность формулы $\mathfrak{C}$ на K равносильна истинности формулы

$$(\exists a)(\exists b)(\mathfrak{K}(a, b) \& \mathfrak{C}_{\mathfrak{D}}(a, b))$$

на группе $\mathfrak{G}$, что и требовалось.

С л е д с т в и е. Для каждой из групп $GL(n, K)$, $PG(n, K)$, $SL(n+1, K)$, $PS(n+1, K)$ ($n \geq 2$) совокупность элементарно групповых предложений, истинных на группе, является нерекурсивным множеством, если нерекурсивно соответствующее множество для поля K .

Иными словами, если элементарная теория поля K неразрешима, то неразрешимы и элементарные теории каждой из указанных групп. В частности, неразрешимы элементарные теории всех указанных линейных и проективных групп над полем рациональных чисел.

Т е о р е м а 5. Для того чтобы группы $\mathfrak{G}(m, K_1)$ и $\mathfrak{G}(n, K_2)$ ($\mathfrak{G} = GL, PG, SL, PS$, $m \geq n \geq 3$) имели один и тот же узкофункциональный (арифметический) тип, необходимо и достаточно, чтобы $m = n$ и чтобы один и тот же узкофункциональный тип имел поля K_1 и K_2 .

Д о с т а т о ч н о с т ь условий очевидна. Действительно, каждое элементарно групповое предложение $\mathfrak{A}$, относящееся к группам $\mathfrak{G}(n, K_1)$ и $\mathfrak{G}(n, K_2)$, можно указанным выше способом преобразовать в элементарно кольцевую формулу $\mathfrak{A}_K$, относящуюся соответственно к полям K_1 и K_2 . Вид формулы $\mathfrak{A}_K$ не зависит от базисного поля. Таким образом, истинность $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{G}(n, K_1)$ равносильна истинности $\mathfrak{A}_K$ на K_1 . Истинность же $\mathfrak{A}_K$ на K_1 равносильна истинности $\mathfrak{A}_K$ на K_2 в силу одинаковости узкофункциональных типов K_1 и K_2 . Поэтому истинность $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{G}(n, K_1)$ равносильна истинности $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{G}(n, K_2)$, и, следовательно, $\mathfrak{G}(n, K_1)$ и $\mathfrak{G}(n, K_2)$ имеют одинаковые узкофункциональные типы.

Н е о б х о д и м о с т ь условия $m = n$ вытекает из теоремы 3. Наконец, необходимость совпадения узкофункциональных типов K_1 и K_2 вытекает из того, что каждое элементарно кольцевое предложение $\mathfrak{C}$, относящееся к K_1 или K_2 , можно преобразовать в элементарно групповое предложение $\mathfrak{C}_{\mathfrak{D}}$, относящееся соответственно к группе $\mathfrak{G}(n, K_1)$ или $\mathfrak{G}(n, K_2)$ и равносильное первоначальному. Так как вид предложения $\mathfrak{C}_{\mathfrak{D}}$ одинаков для групп $\mathfrak{G}_{\mathfrak{D}}(n, K_1)$ и $\mathfrak{G}_{\mathfrak{D}}(n, K_2)$ и истинность $\mathfrak{C}_{\mathfrak{D}}$ на $\mathfrak{G}(n, K_1)$ равносильна истинности $\mathfrak{C}_{\mathfrak{D}}$ на $\mathfrak{G}(n, K_2)$, то истинность $\mathfrak{C}$ на K_1 равносильна истинности $\mathfrak{C}$ на K_2 .

Теорема 5 позволяет сравнивать узкофункциональные типы групп внутри каждой из четырех серий GL, SL, PG, PS . Что касается групп, принадлежащих различным сериям, то ясно, что узкофункциональные типы групп серии GL отличны от типов групп остальных трех серий. Совпадение или различие типов групп последних трех серий в общем случае зависят от свойств поля K .

2.4. Дополнительные замечания. В предшествующих пунктах были рассмотрены серии общих линейных и проективных групп, начиная с порядка $n = 2$, и остальные две серии специальных групп, начиная с порядка $n = 3$. Таким образом, из рассмотрения выпали группы $SL(2, K)$ и $PS(2, K)$. Верна ли теорема 4 для этих исключительных групп для произвольных полей характеристики 0, нам осталось неясным. Однако теорема 4 остается заведомо справедливой и для упомянутых исключительных групп, если базисное поле K почти евклидово, т. е. если существует такое натуральное t , что для любого $\alpha \in K$ или α , или $-\alpha$ есть сумма t квадратов элементов K .

К почти евклидовым полям, например, принадлежат поле рациональных чисел, конечные алгебраические расширения его, поля комплексных и вещественных чисел и т. п. Для всех этих полей элементарные теории $SL(2, K)$, $PS(2, K)$ и K , следовательно, рекурсивно эквивалентны.

Если вместо поля K рассматривать кольцо R с единицей и под $GL(n, R)$ понимать группу матриц над R , определитель которых обратим в R , и соответственно определить остальные группы $SL(n, R)$, $PG(n, R)$, $PS(n, R)$, то при естественных ограничениях теоремы 4 и 5 легко распространяются и на такие группы над кольцами, но в предположении, что $n \geq 3$. Группы $SL(2, R)$ и $PS(2, R)$ представляют особый интерес над кольцом целых рациональных чисел.

В § 1 было показано, что ряд важных подгрупп и систем элементов линейных групп является относительно элементарным. По-видимому, этим свойством обладают многие подгруппы вообще всех компактных простых групп Ли, например их простые подгруппы. Аналогичные вопросы естественно поставить также относительно простых алгебр Ли.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Основы линейной алгебры. М., Гостехиздат, 1956.
2. П. С. Новиков. Элементы математической логики. М., Физматгиз, 1959.
3. В. Л. Van der Waerden. Gruppen von linearen Transformationen. Berlin, 1935.
4. А. И. Мальцев. Конструктивные алгебры, I.— Успехи мат. наук, 1961, 16, № 3, 3—60.

АКСИОМАТИЗИРУЕМЫЕ КЛАССЫ ЛОКАЛЬНО СВОБОДНЫХ АЛГЕБР НЕКОТОРЫХ ТИПОВ*



В заметке [1] сформулирована теорема об алгоритмической разрешимости элементарных теорий конечно аксиоматизируемых подклассов класса локально абсолютно свободных алгебр и дана схема разрешающего алгоритма. Ниже эта теорема распространяется на классы локально свободных алгебр с условием симметричности основных операций, дается подробное описание соответствующего разрешающего алгоритма, более простого, чем в заметке [1], и указываются некоторые новые свойства упомянутых алгебр.

1. Локально S -свободные алгебры. Пусть $\sigma = (\varphi_1, \dots, \varphi_s)$ — совокупность символов, каждому из которых поставлено в соответствие определенное натуральное число n_i , называемое ч л е н н о с т ь ю символа φ_i . Задать алгебру сигнатуры σ — это значит задать непустое множество A «элементов» алгебры и каждому символу φ_i поставить в соответствие конкретную n_i -членную операцию φ_i^0 , определенную на A со значениями в A . Алгебра $\mathfrak{A}$ с основным множеством A и основными операциями $\varphi_1^0, \dots, \varphi_s^0$ будет обозначаться через $\langle A; \varphi_1^0, \dots, \varphi_s^0 \rangle$ или, короче, через $\langle A; \varphi_1, \dots, \varphi_s \rangle$.

Формула $\mathfrak{F}(x_1, \dots, x_n)$ узкого исчисления предикатов с равенством называется формулой сигнатуры σ , если она не содержит символов, отличных от логических знаков $\&, \vee, \rightarrow, \neg, =, \exists, \forall, (,)$, предметных переменных и функциональных знаков из σ . Если формула $\mathfrak{F}$ замкнутая, то на каждой конкретной алгебре сигнатуры σ она истинна или ложна. Если $\mathfrak{F}$ содержит свободные предметные переменные $x_1, \dots, x_n$, то на каждой алгебре $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ формула $\mathfrak{F}(x_1, \dots, x_n)$ истинна или ложна для каждого набора значений $x_1, \dots, x_n$ в $\mathfrak{A}$ и, таким образом, $\mathfrak{F}(x_1, \dots, x_n)$ представляет n -членный предикат на $\mathfrak{A}$.

Классом алгебр называется произвольная совокупность алгебр одной и той же сигнатуры. Класс K алгебр сигнатуры σ называется аксиоматизируемым, если существует такая система формул $\mathfrak{S}$ узкого исчисления предикатов сигнатуры σ , что алгебра сигнатуры σ тогда и только тогда принадлежит классу K , когда на ней истинны все формулы системы $\mathfrak{S}$. Класс K называется конечно аксиоматизируемым, если существует конечная система формул $\mathfrak{S}$, обладающая описанными свойствами.

Пусть некоторый класс алгебр K обладает следующими свойствами: а) вместе с каждой своей алгеброй K содержит и все ей изоморфные (абстрактность K); б) K содержит все подалгебры любой своей алгебры (универсальность K); в) K содержит прямые (декартовы) произведения любых систем алгебр из K (мультипликативная замкнутость K). Тогда в K естественным образом (см., например, [2, 3]) определяются понятия алгебры, заданной определяющими соотношениями, и свободной алгебры с данной системой свободных порождающих. Алгебры, входящие в класс K и свободные в этом классе, называются K -свободными.

* Сиб. мат. ж., 1962, 3, № 5, 729—743.

Алгебра называется локально **К**-свободной, если каждая ее подалгебра, порожденная конечным числом элементов, является **К**-свободной. Ясно, что локально **К**-свободные алгебры существуют тогда, когда каждая подалгебра с конечным числом порождающих **К**-свободной алгебры является **К**-свободной. В этом случае, очевидно, все **К**-свободные алгебры будут локально **К**-свободными.

В случае, когда **К** является классом всех алгебр сигнатуры σ , **К**-свободные алгебры называются абсолютно свободными. Абсолютно свободную алгебру с данным (конечным или бесконечным) числом свободных порождающих $a_1, a_2, \dots$ обычно представляют в следующей форме.

Рассмотрим некоторое множество символов $\{a_1, a_2, \dots\}$, которые назовем терминами длины 1. Далее, пусть уже определено, какие последовательности символов a_λ, φ_i , скобок и запятых называются терминами длины j для $j = 1, 2, \dots, m$. Если $a_1, \dots, a_{n_i}$ — термины длины соответственно $v_1, \dots, v_{n_i}$ и φ_i — символ основной операции от n_i переменных, то последовательность $\varphi_i(a_1, \dots, a_{n_i})$ по определению называется термом длины $v_1 + \dots + v_{n_i} + 1$ сигнатуры σ от тех переменных a_λ , которые встречаются в записи термина.

Обозначим через A совокупность всех термов от переменных a_λ сигнатуры σ . На множестве A определяем алгебру $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ , ставя символу φ_i в соответствие операцию φ_i^0 , определенную условием

$$\varphi_i^0(a_1, \dots, a_{n_i}) = \varphi_i(a_1, \dots, a_{n_i})(a_1, \dots, a_{n_i} \in A).$$

Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \varphi_1^0, \dots, \varphi_s^0 \rangle$ и есть абсолютно свободная алгебра сигнатуры σ с свободными порождающими $a_1, a_2, \dots$. Все изоморфные $\mathfrak{A}$ алгебры по определению также абсолютно свободны.

В дальнейшем, как обычно, вместо обозначений φ_i^0 будут употребляться соответственные сигнатурные символы φ_i .

Алгебры, сигнатура которых состоит лишь из одного символа бинарной операции, называются группоидами. В качестве символа для группоидной операции далее будет употребляться точка и вместо $a \cdot b$ будет писаться ab . В частности, согласно сказанному свободный группоид с порождающими a, b можно представить себе как множество слов вида $a, b, ab, (ab)a, a(ba), \dots$, умножение которых ведется по правилу $a \cdot ba = a(ba)$, $ab \cdot a = (ab)a$ и т. п.

Из конструкции абсолютно свободной алгебры сигнатуры $\sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$ непосредственно видно, что в этой алгебре выполняются следующие предложения:

$$\alpha) \varphi_i(x_1, \dots, x_{n_i}) = \varphi_i(y_1, \dots, y_{n_i}) \rightarrow x_1 = y_1 \& \dots \& x_{n_i} = y_{n_i} \quad (i = 1, \dots, s),$$

$$\beta) \varphi_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \neq \varphi_j(y_1, \dots, y_{n_j}) \quad (i \neq j; i, j = 1, \dots, s),$$

$$\gamma) \neg f(x, x_1, \dots, x_m) \neq x,$$

где $f(x, x_1, \dots, x_m)$ — произвольный терм от переменных $x, x_1, \dots, x_m$, фактически содержащий символ x . Ясно, что эти же формулы истинны и в любой локально абсолютно свободной алгебре. Однако имеет место и обратное утверждение.

Теорема 1. Для того чтобы алгебра сигнатуры $\sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$ была локально абсолютно свободной, необходимо и достаточно, чтобы в ней были истинны формулы $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$.

Необходимость этих условий, как отмечалось, очевидна. Поэтому докажем лишь их достаточность. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ удовлетворяет условиям α), β), γ). Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{B}$, порожденную в $\mathfrak{A}$ каким-либо конечным множеством $a_1, \dots, a_n$ ее элементов. Из системы $a_1, \dots, a_n$ последовательно выбросим те элементы, которые представимы в виде термов от остальных элементов.

Пусть $a_1, \dots, a_r$ — оставшаяся редуцированная система порождающих для $\mathfrak{B}$. Надо доказать, что равенство $f(a_1, \dots, a_r) = g(a_1, \dots, a_r)$, где f, g — термы, возможно в $\mathfrak{B}$ лишь тогда, когда f и g будут графически совпадающими термами. Будем вести индукцию по минимальной длине n терма из пары f, g . Для $n = 1$ соотношение $f = g$ имеет вид $a_i = h(a_1, \dots, a_r)$. Ввиду редуцированности системы $a_1, \dots, a_r$ терм $h(a_1, \dots, a_r)$ не может не содержать явно a_i , а вследствие условия γ) терм $h(a_1, \dots, a_r)$ не может явно содержать a_i . Таким образом, соотношение $a_i = h$ невозможно, если h отличен от a_i . Для $n > 1$ соотношение $f = g$ распадается в силу α), β) на соотношения с меньшим n и теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 следует, что класс всех локально абсолютно свободных алгебр аксиоматизируем.

Покажем, что этот класс не может быть конечно аксиоматизируемым. Рассмотрим, например, группоид $\mathfrak{G}$ с порождающими a, b и одним определяющим отношением

$$a = ((aa) \dots) a \quad (n + 1 \text{ раз})$$

в классе всех группоидов. В $\mathfrak{G}$ аксиома α), очевидно, выполнена, а аксиома β) бессодержательна. Кроме того, в $\mathfrak{G}$ выполнены все соотношения $x \neq f(x; x_1, \dots, x_m)$, у которых длина f меньше n , а соотношение $x \neq ((xx_1) \dots) x_n$ не выполнено. Поэтому система α), β), γ) не эквивалентна никакой конечной системе предложений узкого исчисления предикатов. Те же рассуждения годятся и для алгебр любой другой непустой сигнатуры.

2. Упорядоченные группоиды. Группоид $\mathfrak{G}$ назовем упорядоченным (частично упорядоченным), если между его элементами введено отношение линейной (частичной) упорядоченности $\leq$, удовлетворяющее аксиоме

$$\delta) \quad x \leq y \rightarrow ix \leq iy \text{ и } xi \leq yi.$$

Если отношение порядка на упорядоченном группоиде $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию

$$\epsilon) \quad x \leq xy \text{ и } x \leq yx,$$

то $\mathfrak{G}$ назовем строго упорядоченным.

Группоид $\mathfrak{G}$ назовем строго упорядочиваемым, если на нем можно определить отношение строгого порядка.

Т е о р е м а 2. *Локально абсолютно свободные группоиды и только они являются строго упорядочиваемыми группоидами, удовлетворяющими аксиоме*

$$\kappa) \quad xy = uv \rightarrow x = u \text{ и } y = v.$$

Покажем сначала, что строго упорядочиваем каждый абсолютно свободный группоид $\mathfrak{G}$. Пусть $a_1, a_2, \dots$ — свободные порождающие $\mathfrak{G}$. Упорядочиваем произвольно множество этих порождающих. Все элементы $\mathfrak{G}$ однозначно представляются в виде термов от $a_1, a_2, \dots$. Полагаем $f < g$, если

терм f короче терма g . Если длины термов f, g одинаковы, термы меньшей длины уже упорядочены и $f = ab, g = cd$, то полагаем $f < g$, если $a < c$ или $a = c, b < d$. Ясно, что это упорядочивание удовлетворяет условиям $\delta), \epsilon)$.

Свойство строгой упорядочиваемости является квазиуниверсальным в смысле статьи [4]. Выше показано, что локально абсолютно свободный группоид локально строго упорядочиваем. В силу внутренней локальной теоремы из [4], следует, что каждый локально абсолютно свободный группоид строго упорядочиваем.

Таким образом, необходимость условий в теореме 2 установлена. Достаточность очевидна, так как в строго упорядоченном группоиде для каждого терма f , содержащего x , имеем $x < f$, т. е. аксиомы $\gamma)$ в таких группоидах заведомо выполнены.

Класс строго упорядоченных группоидов конечно аксиоматизируем. Теорема 2 показывает, что, добавляя еще одну аксиому $\kappa)$, мы получим конечно аксиоматизируемый класс упорядоченных группоидов, проекцией которого является бесконечно аксиоматизируемый класс локально абсолютно свободных группоидов.

Теорема 2 очевидным образом переносится и на алгебры произвольной сигнатуры, если для них надлежащим образом определить понятие сильной упорядочиваемости.

3. S-алгебры. По аналогии с коммутативными группоидами, в которых операция умножения подчиняется тождеству $xy = yx$, можно ввести понятие алгебры сигнатуры с условиями симметрии основных операций. Пусть $S_1, \dots, S_s$ — какие-либо подгруппы групп перестановок соответственно множеств $\{1, \dots, n_1\}, \dots, \{1, \dots, n_s\}$. Мы скажем, что алгебра $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ есть алгебра с условиями симметрии $S = \langle S_1, \dots, S_s \rangle$ или, короче, S-алгебра, если в $\mathfrak{A}$ выполнены тождества

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_{n_i}) = \varphi_i(x_{1\theta}, \dots, x_{n_i\theta}) \quad (\theta \in S_i). \quad (1)$$

Так как класс всех S-алгебр задается тождествами, то в нем естественным образом определяются свободные алгебры, которые далее будут называться S-свободными. Алгебра, все конечно порожденные подалгебры которой S-свободны, будет называться, как указывалось, локально S-свободной.

S-свободная алгебра со свободными порождающими $a_1, a_2, \dots$ явно может быть определена следующим путем. Пусть A — совокупность всех термов сигнатуры σ от переменных $a_1, a_2, \dots$. Если $\varphi_i(a_1, \dots, a_{n_i})$ — подтерм какого-либо терма b , то, заменив $\varphi_i(a_1, \dots, a_{n_i})$ внутри b термом $\varphi_i(a_{1\theta}, \dots, a_{n_i\theta})$, где $\theta \in S_i$, получим новый терм b^* , который будем называть термом, полученным из b элементарным преобразованием. Два терма называются эквивалентными, если один из них можно получить из другого цепочкой элементарных преобразований. Обозначая через $[b]$ класс термов, эквивалентных терму b , и полагая по определению

$$\varphi_i([b_1], \dots, [b_{n_i}]) = [\varphi_i(b_1, \dots, b_{n_i})], \quad (2)$$

мы получим S-алгебру, элементами которой являются классы эквивалентных термов, а основными операциями являются операции φ_i , определенные формулами (2). Это и будет свободная S-алгебра со свободными порождающими $[a_1], [a_2], \dots$. Иными словами, элементами S-свободной алгебры со свободными порождающими $a_1, a_2, \dots$ можно считать всевозможные термы от $a_1, a_2, \dots$; операции φ_i над этими термами производятся так же, как и в

абсолютно свободных алгебрах, но термы, получающиеся друг из друга элементарными преобразованиями, считаются представляющими равные элементы алгебры.

Из изложенного видно, что аксиомы β), γ), указанные выше для локально абсолютно свободных алгебр, истинны и для любых локально S -свободных алгебр. Что касается аксиом α), то они на локально S -свободных алгебрах в общем случае не выполняются. На локально S -свободных алгебрах выполняются аксиомы

$$\alpha S) \varphi_i(x_1, \dots, x_{n_i}) = \varphi_i(y_1, \dots, y_{n_i}) \rightarrow \bigvee_{\theta \in S_i} (x_1 = y_{1\theta} \& \dots \& x_{n_i} = y_{n_i\theta}).$$

Непосредственным обобщением теоремы 1 получается

Т е о р е м а 1 S . *Для того чтобы алгебра $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ была локально S -свободной, необходимо и достаточно, чтобы на $\mathfrak{A}$ выполнялись аксиомы αS), (1), β), γ).*

Аналогичным путем распространяется на локально S -свободные алгебры и теорема 2. Для этого в формулировке теоремы 2 достаточно заменить условие κ) условиями αS) и (1).

В дальнейшем всюду, где не оговорено явно противное, вместо «локально S -свободные алгебры» будет говориться просто «локально свободные алгебры».

4. Специальные формулы. Введем следующие постоянные обозначения:

$$N_i(a) \stackrel{\text{df}}{=} (\forall x_1 \dots x_{n_i}) (a \neq \varphi_i(x_1, \dots, x_{n_i})) \quad (i = 1, \dots, s),$$

$$N_p(a) \stackrel{\text{df}}{=} N_{i_1}(a) \& \dots \& N_{i_k}(a) \quad (p = \{i_1, \dots, i_k\}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq s),$$

$$E_p^m \stackrel{\text{df}}{=} (\exists y_1 \dots y_m) (N_p(y_1) \& \dots \& N_p(y_m) \& \bigwedge_{i \neq j} y_i \neq y_j) \quad (m = 2, 3, \dots),$$

$$E_p^1 \stackrel{\text{df}}{=} (\exists y) N_p(y),$$

$$D_p^m \stackrel{\text{df}}{=} \neg E_p^m, \quad (m = 1, 2, \dots),$$

где символ $\stackrel{\text{df}}{=}$ означает, что находящееся от него слева выражение является обозначением для формулы, находящейся справа. Знаки $\bigwedge$, $\bigvee$ — символы конъюнкции и дизъюнкции нескольких членов.

Элемент $a \in \mathfrak{A}$, для которого в алгебре $\mathfrak{A}$ истинна формула $N_p(a)$, назовем p -неразложимым. Истинность в $\mathfrak{A}$ формулы E_p^m означает, что $\mathfrak{A}$ содержит по меньшей мере m различных p -неразложимых элементов, а истинность в $\mathfrak{A}$ формулы D_p^m означает, что p -неразложимых элементов в $\mathfrak{A}$ меньше m . В частности, истинность в $\mathfrak{A}$ формулы D_p^1 означает, что в $\mathfrak{A}$ каждый элемент p -разложим.

Пусть $\mathfrak{A}$ — локально свободная алгебра и $p \neq \{1, 2, \dots, s\}$, $i \in p$, $1 \leq i \leq s$. Любой терм вида $\varphi_i(a_1, \dots, a_{n_i})$ представляет собой p -неразложимый элемент в $\mathfrak{A}$. Так как элементов, представляющихся термами указанного вида, в $\mathfrak{A}$ бесконечно много, то все выражения E_p^m в $\mathfrak{A}$ истинны, а все выражения D_p^m ложны при указанных значениях p .

Аналогично, в локально свободной алгебре $\mathfrak{A}$ формула вида $N_p(f)$, где f — терм длины больше 1, истинна, если $f = \varphi_i(a_1, \dots, a_{n_i})$, $i \in p$, и ложна, если $i \notin p$.

Для формул E_p^m, D_p^m при $p = \{1, \dots, s\}$ введем сокращенные обозначения E^m и D^m . Условимся также под I и L понимать формулы $E^1 \vee D^1$ и $E^1 \& D^1$. Наконец, специальными формулами условимся называть формулы вида

$$\begin{aligned} \wp(x_1, \dots, x_n) = & (\exists y_1 \dots y_m) (\bigwedge_{i=1}^p x_{\alpha_i} = f_i \& \bigwedge x_{\beta_j} = g_j \& \bigwedge y_{\gamma_k} \neq \\ & \neq h_k \& \bigwedge N_{\delta_l}(y_{\varepsilon_l})), \end{aligned} \quad (3)$$

где f_i, g_j, h_k — термы от некоторых из переменных $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$, переменные $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_p}$ не входят в термы f_i, g_j, h_k ; переменные $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots$ не входят в множество $\{x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_p}\}$; индексы γ_k, ε_l принимают значения из множества $1, \dots, m, \delta_l \in \{1, \dots, s\}$.

Наряду со специальными формулами (3), фактически содержащими свободные предметные переменные $x_1, \dots, x_n$, мы будем называть специальными и формулы вида (3), не содержащие свободных предметных переменных, т. е. формулы вида

$$(\exists y_1 \dots y_m) (\bigwedge y_{\gamma_k} \neq h_k \& \bigwedge N_{\delta_l}(y_{\varepsilon_l})). \quad (4)$$

Условимся символами $(\forall y \in T)$ и $(\exists y \in T)$ записывать ограниченные кванторы по множеству T , т. е. выражения «для каждого элемента y из множества T » и «существует такой элемент y в множестве T , что». Если множество T есть совокупность элементов x , для которых истинна формула $T(x)$, то для любой формулы $\mathfrak{S}(y)$ имеем

$$(\forall y \in T) \mathfrak{S}(y) \leftrightarrow (A y) (T(y) \rightarrow \mathfrak{S}(y)),$$

$$(\exists y \in T) \mathfrak{S}(y) \leftrightarrow (\exists y) (T(y) \& \mathfrak{S}(y)).$$

Сформулируем теперь в виде лемм несколько замечаний, которые будут полезны в дальнейшем.

Л е м м а 1. Пусть $f(x_1, \dots, x_p)$ — терм от $x_1, \dots, x_p$, имеющий длину d и содержащий явно переменное x_1 . Тогда в каждой локально свободной алгебре уравнение $a = f(x_1, \dots, x_p)$ при заданном a будет разрешимо относительно $x_2, \dots, x_p$ не более чем при n^d значениях для x_1 , где $n = \max(n_1, \dots, n_s)$.

Действительно, пусть уравнение $a = f$ имеет вид $a = \varphi_i(x_1, \dots, x_{n_i})$. Если $x_1^0, \dots, x_{n_i}^0$ — одно из его решений, то согласно аксиоме αS любое другое имеет вид $x_1 = x_1^0, \dots, x_{n_i} = x_{n_i}^0$ и, значит, для x_1 возможны лишь значения $x_1^0, \dots, x_{n_i}^0$, число которых не превышает n . Пусть теперь терм f имеет вид $\varphi_i(a_1, \dots, a_{n_i})$, где термы $a_1, \dots, a_{n_i}$ меньшей длины, для которых утверждение леммы по индукции можно считать верным, и пусть x_1 содержится явно в a_j . По доказанному уравнение $a = f$ для a_j дает не более n значений $a_1, \dots, a_n$. Каждое из уравнений $a_j = a_k$ даст не более n^{d-1} значений для x_1 и потому для x_1 всего будет не более n^d значений.

Л е м м а 2. Пусть $f_1, \dots, f_r$ — термы от $y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_t$, d — максимум длин этих термов и $n = \max(n_1, \dots, n_s)$. В локально свободной алгебре $\mathfrak{A}$ фиксируем какие-либо множества элементов $T_1, \dots, T_m$ и рассмотрим формулу

$$(\forall y_1 \in T_1) \dots (\forall y_m \in T_m) (y_{\alpha_1} = f_1 \vee \dots \vee y_{\alpha_r} = f_r) \quad (\alpha_j = 1, \dots, t), \quad (5)$$

в которой ни один из термов f_i не совпадает с y_{α_i} и каждая подформула $y_{\alpha_i} = f_i$ содержит явно хотя бы одно из связанных переменных $y_1, \dots, y_m$. Если каждое из множеств $T_1, \dots, T_m$ содержит более rn^d элементов, то формула (5) на $\mathfrak{A}$ эквивалентна $\perp$. В частности, формула (5) эквивалентна $\perp$, если в ней все кванторы неограниченные.

Доказательство индукцией по числу кванторов в (5). При $m = 1$ формула (5) может быть представлена в виде

$$(\forall y_1 \in T_1)(y_{\alpha_1} = f_1 \vee \dots \vee y_{\alpha_r} = f_r \vee y_1 = f_{p+1} \vee \dots \vee y_1 = f_r), \quad (6)$$

где каждый из термов $f_1, \dots, f_r$ явно зависит от y_1 . Фиксируем в $\mathfrak{A}$ какие-либо значения для $y_2, \dots, y_t$. Согласно лемме 1 каждое из уравнений $y_{\alpha_i} = f_i$, $y_1 = f_{p+j}$ может иметь не более n^d решений для y_1 , а потому дизъюнкция $y_{\alpha_1} = f_1 \vee \dots \vee y_1 = f_r$ будет истинной не более чем при rn^d различных значениях y_1 . По условию множество T_1 содержит более rn^d элементов. Поэтому формула (6) ложна.

Рассмотрим теперь формулу (5) при условии $m \geq 2$ и допустим, что лемма 3 справедлива для меньших m . Если в формуле (5) каждый член $y_{\alpha_i} = f_i$ содержит явно одно из переменных $y_2, \dots, y_m$, то согласно индукции уже формула

$$(\forall y_2 \in T_2) \dots (\forall y_m \in T_m)(y_{\alpha_1} = f_1 \vee \dots \vee y_{\alpha_r} = f_r)$$

ложна, а вместе с нею ложна и формула (5). В противном случае формулу (5) представляем в виде

$$(\forall y_1 \in T_1)(y_{\beta_1} = f_{\gamma_1} \vee \dots \vee y_{\beta_t} = f_{\gamma_t} \vee (\forall y_2 \in T_2) \dots \dots (\forall y_m \in T_m)(y_{\delta_1} = f_{\epsilon_1} \vee \dots \vee y_{\delta_u} = f_{\epsilon_u})),$$

где члены $y_{\beta} = f_{\gamma}$ не зависят от $y_2, \dots, y_m$, а $y_{\delta_i} = f_{\epsilon_i}$ — остальные члены в формуле (5), каждый из которых зависит явно хотя бы от одного из переменных $y_2, \dots, y_m$. Подформула

$$(\forall y_2 \in T_2) \dots (\forall y_m \in T_m)(y_{\delta_1} = f_{\epsilon_1} \vee \dots \vee y_{\delta_u} = f_{\epsilon_u}) \quad (7)$$

удовлетворяет условиям леммы и содержит меньше кванторов, чем (5). Поэтому формула (7) эквивалентна $\perp$, а формула (5) эквивалентна выражению

$$(\forall y_1 \in T_1)(y_{\beta_1} = f_{\gamma_1} \vee \dots \vee y_{\beta_t} = f_{\gamma_t}),$$

ложность которого уже доказана выше.

5. Стандартные формулы. Формулы, образованные из выражений D^m , E^m , $N_i(x_\alpha)$ и специальных формул вида (3) при помощи лишь связок $\&$, $\vee$, условимся называть стандартными или формулами стандартного вида. В частности, стандартные замкнутые формулы — это формулы, образованные при помощи связок $\&$, $\vee$ из выражений вида (4), D^m , E^m .

Т е о р е м а 3. Существует алгоритм Ω , позволяющий для каждой формулы $\mathfrak{F}(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры σ построить стандартную формулу $\mathfrak{F}_\Omega(x_1, \dots, x_n)$ той же сигнатуры, эквивалентную формуле $\mathfrak{F}(x_1, \dots, x_n)$ на классе всех локально S -свободных алгебр сигнатуры σ .

Алгоритм Ω будет называться также процессом приведения формул к стандартному виду. Сначала мы опишем процесс приведения к стандартному виду формул, имеющих некоторый частный вид, который будет назы-

ваться Е-видом. Затем будет описан процесс приведения к стандартной форме отрицаний формул Е-вида. Чередуя оба процесса позволит приводить к стандартному виду произвольные формулы сигнатуры σ .

Формулой Е-вида, или, короче, Е-формулой, будем называть формулу, построенную лишь с помощью знаков $\&$, $\vee$ и кванторов существования из выражений вида $f = g$, $f \neq g$, $N_i(x_\lambda)$, D^m , E^m , где f, g — некоторые термы. В частности, Е-формулами будут все бескванторные формулы, построенные из термов, и все стандартные формулы.

Процесс приведения к стандартному виду произвольной Е-формулы $\mathfrak{F}(x_1, \dots, x_n)$ состоит в следующем. Вынося из $\mathfrak{F}$ все кванторы, получим формулу вида $(\exists y_1 \dots y_m) \mathfrak{F}_0(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, где $\mathfrak{F}_0$ образована из выражений вида $f = g$, $f \neq g$, $N_i(x_\alpha)$, $N_i(y_\beta)$, D^k , E^k с помощью лишь знаков $\&$ и $\vee$. Записывая $\mathfrak{F}_0$ в дизъюнктивной форме и распределяя кванторы по правилу $(\exists y)(A \vee B) \leftrightarrow (\exists y)A \vee (\exists y)B$, видим, что дело сводится к приведению формул типа $(\exists y_1 \dots y_m) \mathfrak{G}$, где $\mathfrak{G}$ — конъюнкция членов вида $f = g$, $f \neq g$, $N_i(x_\alpha)$, $N_i(y_\alpha)$, D^k , E^k . Некоторые из этих членов могут не зависеть от $y_1, \dots, y_m$. Конъюнкция их пусть будет $\mathfrak{G}_0$, а конъюнкция остальных пусть будет $\mathfrak{G}$. Представляя формулу $(\exists y_1 \dots y_m) \mathfrak{G}$ в виде $\mathfrak{G}_0 \& (\exists y_1, \dots, y_m) \mathfrak{G}_1$, мы можем далее преобразовывать лишь выражение $(\exists y_1 \dots y_m) \mathfrak{G}_1$.

Если среди членов конъюнкции $\mathfrak{G}_1$ есть выражение вида $f = g$, причем термы f, g неединичной длины, то оно имеет вид

$$\varphi_i(a_1, \dots, a_{n_i}) = \varphi_j(b_1, \dots, b_{n_j}). \quad (8)$$

В случае $i \neq j$ формула (8) на локально абсолютно свободных алгебрах эквивалентна L . Если же $i = j$, то формула (8) эквивалентна конъюнкции $a_1 = b_1 \& \dots \& a_{n_i} = b_{n_i}$, составленной из более коротких термов.

Пусть теперь в $\mathfrak{G}_1$ существует член вида $x_\alpha = f$. Если терм f содержит переменное x_α , то указанный член, а вместе с ним и вся формула $(\exists y_1 \dots y_m) \mathfrak{G}_1$ эквивалентны L . Если же терм f не содержит x_α , то заменяем во всех членах конъюнкции $\mathfrak{G}_1$, отличных от члена $x_\alpha = f$, переменное x_α термом f .

Аналогично, если $\mathfrak{G}$ содержит член $y_\beta = h$ и y_β входит в h , то такой член заменяем L или отбрасываем, смотря по тому, отличен терм h от y_β или совпадает с y_β .

Допустим теперь, что $\mathfrak{G}_1$ содержит член вида $y_\beta = h$, где терм h не содержит y_β . Заменяя во всех иных членах $\mathfrak{G}$ переменное y_β термом h , мы приведем формулу $(\exists y_1 \dots y_m) \mathfrak{G}_1$ после перенумерации связанных переменных к виду $(\exists y_1 \dots y_{m-1}) ((\exists y_m) (y_m = h \& \mathfrak{G}_2))$, эквивалентному формуле $(\exists y_1 \dots y_{m-1}) \mathfrak{G}_2$, вообще не содержащей переменного y_m . Если в $\mathfrak{G}_1$ входил член вида $N_i(y_\beta)$, то после подстановки этот член перейдет в выражение более сложного типа $N_i(h)$, но, пользуясь замечанием из п. 4, мы можем заменить такой член или символом I , или символом L .

Наконец, если в $\mathfrak{G}_1$ окажется член вида $\varphi_i(a_1, \dots, a_{n_i}) \neq \varphi_j(b_1, \dots, b_{n_j})$, то при $i \neq j$ мы заменим его символом L , а при $i = j$ этот член можно будет заменить выражением $\bigwedge (a_1 \neq b_{10} \vee \dots \vee a_{n_i} \neq b_{n_{i0}})$, составленным из более коротких термов. В последнем случае после замены новую формулу $\mathfrak{G}$ приводим к дизъюнктивному виду, распределяем кванторы и продолжаем производить описанные «элементарные» преобразования. Так как в результате каждого элементарного преобразования либо уменьшаются длины термов, либо уменьшается число членов, либо возникают

члены, далее не участвующие в преобразованиях, то через конечное число шагов процесс остановится и все выражение примет стандартный вид.

6. Приведение отрицаний стандартных формул. Стандартные формулы образуются из выражений вида D^m , E^m и специальных выражений вида (3) с помощью связок $\&$, $\vee$. Так как отрицания формул D^m , E^m эквивалентны формулам E^m и D^m , то отрицания стандартных формул непосредственно преобразуются в формулы, составленные с помощью связок $\&$, $\vee$ из тех же выражений D^m , E^m и отрицаний формул вида (3). Поэтому общий вопрос о приведении к стандартному виду отрицаний стандартных формул сводится к вопросу о приведении к стандартному виду отрицаний формул (3), т. е. к приведению формул

$$(\forall y_1 \dots y_m)(\forall x_{\alpha_i} \neq f_i \vee \forall x_{\beta_j} = g_j \vee \forall y_{\gamma_k} = h_k \vee \forall \neg N_{\delta_l}(y_{\varepsilon_l})). \quad (9)$$

В п. 5 был указан процесс приведения к стандартной форме **Е**-формул. Поэтому, вместо того чтобы непосредственно приводить формулу (9) к стандартной форме, достаточно выразить ее лишь через **Е**-формулы.

Среди термов $f_1, f_2, \dots$ в формуле (9) пусть терм f_i самый длинный. Если длина f_i отлична от 1, то f_i имеет вид $\varphi_r(a_1, \dots, a_{n_r})$. Обозначая через $\mathfrak{B}$ дизъюнкцию всех членов подкванторной части формулы (9), отличных от члена $x_{\alpha_i} \neq f_i$, мы можем представить (9) в эквивалентной форме

$$N_r(x_{\alpha_i}) \vee (\exists z_1 \dots z_{n_r})(x_{\alpha_i} = \varphi_r(z_1, \dots, z_{n_r}) \& (\forall y_1 \dots y_m)(\varphi_r(z_1, \dots, z_{n_r}) \neq \varphi_r(a_1, \dots, a_{n_r}) \vee \mathfrak{B}))$$

и потому дело сводится к приведению к **Е**-виду подформулы

$$(\forall y_1 \dots y_m)(\varphi_r(z_1, \dots, z_{n_r}) \neq \varphi_r(a_1, \dots, a_{n_r}) \vee \mathfrak{B}),$$

эквивалентной в силу αS) конъюнкции всех формул вида

$$(\forall y_1 \dots y_m)(z_{1\theta} \neq a_1 \vee \dots \vee z_{n_r\theta} \neq a_{n_r} \vee \mathfrak{B})(\theta \in S_r). \quad (10)$$

Новые формулы (10) получаются из формул (9) заменой члена $x_{\alpha_i} \neq f_i$ членами $z \neq a$, у которых терм имеет меньшую длину. Поэтому, продолжая по указанному способу приведение новых членов, мы через конечное число шагов выразим формулу (9) через формулы того же вида, но в которых либо совсем не будет неравенств, либо будут неравенства лишь формы $x_\alpha \neq y_\beta$. В последнем случае формула будет иметь вид

$$(\forall y_1 \dots y_m)(x_{\lambda_1} \neq y_1 \vee \dots \vee x_{\lambda_{i_1}} \neq y_1 \vee \dots \vee x_{\nu_1} \neq y_p \vee \dots \vee x_{\nu_{i_p}} \neq y_p \vee \mathfrak{E}(x; y_1, \dots, y_m)),$$

очевидно, эквивалентный выражению

$$x_{\lambda_1} \neq x_{\lambda_2} \vee \dots \vee x_{\lambda_1} \neq x_{\lambda_{i_1}} \vee \dots \vee x_{\nu_1} \neq x_{\nu_2} \vee \dots \vee x_{\nu_1} \neq x_{\nu_p} \vee \vee (\forall y_{p+1} \dots y_m) \mathfrak{E}(x; x_{\lambda_1}, \dots, x_{\nu_1}, y_{p+1}, \dots, y_m).$$

Следовательно, остается лишь указать способ преобразования формул, имеющих вид

$$(\forall y_1 \dots y_m)(\forall x_{\beta_j} = g_j \vee \forall y_{\gamma_k} = h_k \vee \forall \neg N_{\delta_l}(y_{\varepsilon_l})). \quad (11)$$

Здесь все подформулы, не содержащие явно ни одного из связанных переменных, можно вынести за кванторы и потому можно предполагать, что таких подформул в (11) нет. Аналогично, если формула (11) содержит члены вида $x_\beta = x_\beta$ или $y_\gamma = y_\gamma$, то она эквивалентна $\mathcal{I}$. Поэтому можно считать, что таких членов в (11) также нет. Если при выполнении указанных условий в формуле (11) нет и членов вида $\neg N_\delta(y_\varepsilon)$, то согласно лемме 2 такая формула эквивалентна $\mathcal{L}$. Наконец, если в формуле (11) нет ни членов вида $x_\beta = g$, ни членов вида $y_\gamma = h$, то формула (11) приводится к дизъюнкции выражений вида $(\forall y) \neg N_p(y)$, $p = \{p_1, \dots, p_k\}$, т. е. или к $\mathcal{L}$, или к D^1 (см. п. 4).

Допустим теперь, что формула (11) содержит как члены вида $\neg N_\delta(y_\varepsilon)$, так и члены иного вида, среди которых, однако, нет ни членов вида $x_\beta = x_\beta$, $y_\gamma = y_\gamma$, ни членов, не зависящих от переменных $y_1, \dots, y_m$. Обозначая через $y_1, \dots, y_t$ те из переменных $y_1, \dots, y_m$, которые фактически встречаются в членах $\neg N_\delta(y_\varepsilon)$, и обозначая свободные переменные x_α через y_λ с достаточно большими индексами, мы можем переписать выражение (11) в виде

$$(\forall y_1 \dots y_t)(\wedge N_{\delta_i}(y_{\varepsilon_i}) \rightarrow (\forall y_{t+1} \dots y_m)(\forall y_{\gamma_k} = h_k)). \quad (12)$$

Подформулу $(\forall y_{t+1} \dots y_m) \forall y_{\gamma_k} = h_k$ представим в виде

$$\forall (y_{\gamma_u} = h_u) \vee (\forall y_{t+1} \dots y_m)(\forall y_{\gamma_v} = h_v),$$

где $y_{\gamma_u} = h_u$ — члены, в которых не встречаются переменные $y_{t+1}, \dots, y_m$.

Согласно лемме 2 выражение $(\forall y_{t+1} \dots y_m) \forall y_{\gamma_v} = h_v$ эквивалентно $\mathcal{L}$ и потому формула (12) эквивалентна выражению

$$(\forall y_1 \dots y_t)(\wedge N_{\delta_i}(y_{\varepsilon_i}) \rightarrow \forall y_{\gamma_k} = h_k). \quad (13)$$

Объединяя в этом выражении члены $N_\delta(y_\varepsilon)$, содержащие одно и то же переменное y_ε , и перенумеровывая подходящим образом связанные переменные, мы можем представить (13) в виде

$$(\forall y_1 \dots y_t)(N_{p_1}(y_1) \& \dots \& N_{p_t}(y_t) \rightarrow \forall y_{\gamma_k} = h_k). \quad (14)$$

Пусть T_i есть совокупность тех элементов y алгебры, для которых $N_{p_i}(y)$ истинна ($i = 1, \dots, t$). Тогда (14) можно переписать в виде

$$\mathfrak{F} \stackrel{\text{def}}{=} (\forall y_1 \in T_1) \dots (\forall y_t \in T_t)(y_{\gamma_1} = h_1 \vee \dots \vee y_{\gamma_r} = h_r).$$

Согласно лемме 2 формула $\mathfrak{F}$ эквивалентна $\mathcal{L}$, если в каждом из множеств $T_1, \dots, T_t$ содержится более rn^d элементов. Поэтому

$$\mathfrak{F} \leftrightarrow (D_{p_1}^{p+1} \& \mathfrak{F}) \vee \dots \vee (D_{p_t}^{p+1} \& \mathfrak{F}) \quad (p = rn^d).$$

Заменяя здесь каждое выражение D_p^{p+1} эквивалентной формулой

$$D_p^1 \vee (D_p^2 \& E_p^1) \vee \dots \vee (D_p^{p+1} \& E_p^p)$$

и замечая, что истинность $D_{p_i}^1$ равносильна пустоте T_i , получим

$$\mathfrak{F} \leftrightarrow \vee_{ij} (D_{p_i}^{j+1} \& E_{p_i}^j \& \mathfrak{F}) \quad (i = 1, \dots, t; j = 1, \dots, p). \quad (15)$$

Рассмотрим подробно какой-либо член, например $D_{p_1}^{j+1} \& E_{p_1}^j \& \mathfrak{F}$, дизъюнкция (15). Истинность этого члена эквивалентна утверждению, что множество T_1 состоит точно из j элементов и что выражение

$$\mathfrak{G}(y_1) \stackrel{\text{df}}{=} (\forall y_2 \in T_2) \dots (\forall y_t \in T_t) (y_{y_1} = h_1 \vee \dots \vee y_{y_r} = h_r)$$

истинно для $y_1 = w_1, \dots, w_j$, где $w_1, \dots, w_j$ — различные элементы T_1 . Поэтому рассматриваемый член эквивалентен формуле

$$D_{p_1}^{j+1} \& (\exists w_1 \dots w_j) (N_{p_1}(w_1) \& \dots \& N_{p_1}(w_j) \& \bigwedge_{\lambda \neq 1} w_\lambda \neq w_{\lambda} \& \mathfrak{G}(w_1) \& \dots \& \mathfrak{G}(w_j)).$$

Подформулы $\mathfrak{G}(w_\lambda)$ здесь имеют такую же структуру, как и формула $\mathfrak{F}$, но с меньшим числом кванторов. Применяя к этим подформулам снова изложенные преобразования, мы придем, в конце концов, к Е-формулам.

7. Приведение замкнутых формул. Алгоритм, описанный в п. 5 и 6, позволяет для каждой формулы $\mathfrak{F}$ сигнатуры σ построить формулу, эквивалентную $\mathfrak{F}$ на классе всех локально S-свободных алгебр и составленную при помощи связок $\&$, $\vee$ из выражений D^m , E^m и специальных выражений вида (3), имеющих более сложную структуру. Для формул $\mathfrak{F}$ без свободных переменных имеет место более сильная

Т е о р е м а 4. *Существует алгоритм, позволяющий для каждой замкнутой формулы $\mathfrak{F}$ сигнатуры σ построить эквивалентную ей на классе всех локально S-свободных алгебр сигнатуры σ формулу $\mathfrak{F}^*$, составленную при помощи связок $\&$, $\vee$ лишь из выражений D^m , E^m ($m = 1, 2, \dots$).*

В самом деле, посредством алгоритма, указанного в теореме 3, мы сможем найти формулу $\mathfrak{G}$, эквивалентную $\mathfrak{F}$ на классе всех абсолютно свободных алгебр и составленную с помощью связок $\&$, $\vee$ из формул вида D^m , E^m и выражений вида (3). Так как свободных переменных нет, то выражения вида (3), входящие в состав $\mathfrak{G}$, будут иметь вид

$$(\exists y_1 \dots y_m) (\bigwedge_{\alpha, \beta} y_\alpha \neq h_{\alpha\beta} \& N_{p_1}(y_1) \& \dots \& N_{p_r}(y_r)), \quad (16)$$

где $h_{\alpha\beta}$ — некоторые термы от $y_1, \dots, y_m$. Остается лишь найти выражение для (16) через стандартные части вида D^m и E^m .

Допустим, что какой-нибудь из наборов $p_1, \dots, p_r$, например набор p_1 , отличен от полного набора $\{1, 2, \dots, s\}$. Пусть p_1 не содержит i , $1 \leq i \leq s$. Покажем, что в таком случае формула (16) будет эквивалентна более короткой формуле

$$(\exists y_2 \dots y_m) (\bigwedge_{\gamma, \delta} y_\gamma \neq h_{\gamma\delta} \& N_{p_2}(y_2) \& \dots \& N_{p_r}(y_r)), \quad (17)$$

полученной из (16) вычеркиванием квантора $(\forall y_1)$ и всех членов, содержащих явно y_1 . Действительно, ясно, что формула (17) есть следствие формулы (16). С другой стороны, допустим, что формула (17) истинна и пусть $y_2, \dots, y_m$ — те элементы локально свободной алгебры, существование которых утверждается выражением (17). Полагая

$$z_1 = y_1, \quad z_{n+1} = \Phi_i(z_n, \dots, z_n) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

мы видим, что каждый элемент z_n удовлетворяет условию $N_{p_1}(z_n)$. Рассмотрим неравенства $y_\lambda \neq h_{\lambda\mu}$, содержащиеся в формуле (16) и выброшенные при переходе к (17). Так как каждое из них содержит явно y_1 , то дизъюнк-

ция $Vy_\lambda = h_{\lambda\mu}$ согласно лемме 2 при заданных $y_2, \dots, y_m$ имеет конечное число решений для y_1 и потому найдутся такие n , что при $y_1 = z_n$ все неравенства $y_\lambda = h_{\lambda\mu}$ удовлетворятся. Следовательно, система элементов $y_1 = z_n, y_2, \dots, y_m$ будет искомой системой, удовлетворяющей формуле (16).

Если в формуле (17) снова найдется член $N_q(y)$, у которого $q \neq \{1, \dots, s\}$, то формулу (17) можно сократить и т. д. В результате получится формула вида

$$(\exists y_1 \dots y_m) (\bigwedge y_\alpha \neq h_{\alpha\beta} \& N_p(y_1) \& \dots \& N_p(y_m)), \quad (18)$$

где $p = \{1, \dots, s\}$. Но из $N_p(y)$ следует $y \neq \varphi_i(u_1, \dots, u_{n_i})$ для любых $i, u_1, \dots, u_{n_i}$. Поэтому в формуле (18) можно вычеркнуть все неравенства, правая часть которых имеет неединичную длину. В результате получится формула вида

$$(\exists y_1 \dots y_m) (\bigwedge y_i \neq y_j \& N_p(y_1) \& \dots \& N_p(y_m)),$$

равносильная, очевидно, подходящей формуле E^t ($t \leq m$), что и требовалось.

Две алгебры сигнатуры σ называются арифметически эквивалентными, если каждая замкнутая формула сигнатуры σ , истинная на одной алгебре, истинна и на другой. Чтобы знать, какие из формул D^m, E^m истинны на алгебре и какие ложны, достаточно знать, сколько неразложимых элементов содержит алгебра. Поэтому из теоремы 4 непосредственно получаем такое

С л е д с т в и е. *Для арифметической эквивалентности локально S-свободных алгебр необходимо и достаточно, чтобы либо число неразложимых элементов в каждой алгебре было бесконечным, либо алгебры имели одно и то же конечное число неразложимых элементов, либо алгебры вовсе не имели неразложимых элементов.*

В качестве примера неизоморфных арифметически эквивалентных алгебр укажем группоид $\mathfrak{A}$ с порождающими $a_1, a_2, \dots$ и определяющими соотношениями

$$a_n = a_{n+1}a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и группоид $\mathfrak{B}$ с порождающими $b_1, b_2, \dots$ и определяющими соотношениями

$$b_n = (b_{n+1}b_{n+1})b_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Оба группоиды локально абсолютно свободны и не имеют неразложимых элементов и потому арифметически эквивалентны. В то же время они неизоморфны; так, в $\mathfrak{A}$ есть элемент a_1 , из которого можно последовательно неограниченное число раз извлекать «квадратный корень», а во втором группоиде такого элемента нет.

Аналогично пусть $\mathfrak{F}$ — абсолютно свободный группоид со счетным числом свободных порождающих, а $\mathfrak{G}$ — произвольный локально свободный группоид. Аксиомы α), β), γ), определяющие локально абсолютно свободные алгебры, имеют хорновский вид. Поэтому прямое произведение любой системы локально абсолютно свободных алгебр есть локально абсолютно свободная алгебра. В частности, прямое произведение $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ есть локально абсолютно свободный группоид. Так как $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ имеет, как и группоид $\mathfrak{F}$, счетное число неразложимых элементов, то $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ арифметически эквивалентно $\mathfrak{F}$.

Пусть K — произвольная система алгебр сигнатуры σ . Элементарной теорией системы K называется совокупность всех тех замкнутых формул сиг-

натуры σ , которые истинны на каждой алгебре системы $\mathbf{K}$. Мы не будем различать элементарную теорию $\mathbf{T}(\mathbf{K})$ системы $\mathbf{K}$ и совокупность $\nu(\mathbf{T})$ гёделевских номеров всех формул из $\mathbf{T}(\mathbf{K})$. В частности, условимся говорить, что элементарная теория $\mathbf{T}$ рекурсивна или примитивно рекурсивна, если рекурсивно или соответственно примитивно рекурсивно множество $\nu(\mathbf{T})$.

Положительное натуральное число n назовем спектральным для класса $\mathbf{K}$, если в $\mathbf{K}$ существует алгебра, имеющая в точности $n - 1$ неразложимых элементов. Число 0 называется спектральным для $\mathbf{K}$, если в $\mathbf{K}$ существует алгебра, имеющая бесконечно много неразложимых элементов. Совокупность всех спектральных чисел для $\mathbf{K}$ назовем спектром $\mathbf{K}$ и обозначим его через $\mathbf{U}(\mathbf{K})$.

Введем еще обозначение: $\mathbf{C}^n \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{E}^n \& \mathbf{D}^{n+1}$. Формула $\mathbf{C}^n$ тогда и только тогда истинна на алгебре $\mathfrak{A}$, когда $\mathfrak{A}$ содержит точно n неразложимых элементов. Отсюда следует, что

$$n! + 1 \in \mathbf{U}(\mathbf{K}) \leftrightarrow \neg \mathbf{C}^n \in \mathbf{T}(\mathbf{K}). \quad (19)$$

Согласно теореме 4 для каждой замкнутой формулы $\mathfrak{F}$ алгоритмически строится эквивалентная на классе локально свободных алгебр формула $\mathfrak{P}$, являющаяся дизъюнкцией формул вида $\mathbf{D}^m, \mathbf{E}^m$. Но

$$\mathbf{E}^m \& \mathbf{D}^{m+n+1} \leftrightarrow \mathbf{C}^m \vee \mathbf{C}_1^{m+1} \vee \dots \vee \mathbf{C}^{m+n};$$

поэтому каждую формулу $\mathfrak{P}$ можно на указанном классе привести к виду

$$\mathbf{C}^{m_1} \vee \mathbf{C}^{m_2} \vee \dots \vee \mathbf{C}^{m_r} \vee \mathbf{E}^{m_r} \quad (0 \leq m_1 < \dots < m_r) \quad (20)$$

или одному из видов

$$\mathbf{C}^{m_1} \vee \dots \vee \mathbf{C}^{m_r}, \text{ Л, И} \quad (0 \leq m_1 < \dots < m_r). \quad (21)$$

Отсюда следует, что каждый конечно аксиоматизируемый подкласс* класса локально свободных алгебр имеет спектр одного из видов

$$\emptyset, \{n_1, \dots, n_k\}, \{0, n_1, \dots, n_k, n_k + 1, \dots\} \quad (1 \leq n_1 < \dots < n_k).$$

а спектр (бесконечно) аксиоматизируемого подкласса может быть произвольным конечным множеством и произвольным содержащим 0 бесконечным множеством натуральных чисел.

Т е о р е м а 5. Пусть $\mathbf{K}$ — произвольный аксиоматизируемый класс локально $\mathcal{S}$ -свободных алгебр. Элементарная теория $\mathbf{T}$ класса $\mathbf{K}$ тогда и только тогда примитивно рекурсивна или рекурсивна, когда спектр $\mathbf{U}$ класса $\mathbf{K}$ соответственно примитивно рекурсивен или рекурсивен. В частности, элементарные теории любого конечно аксиоматизируемого подкласса локально $\mathcal{S}$ -свободных алгебр, а также любой $\mathcal{S}$ -свободной алгебры примитивно рекурсивны.

Утверждения теоремы 5 относительно рекурсивности непосредственно следуют из теоремы 4. Аналогично, если $\mathbf{T}(\mathbf{K})$ примитивно рекурсивна, то из соотношения (19) непосредственно следует примитивная рекурсивность $\mathbf{U}(\mathbf{K})$. Допустим теперь, что примитивно рекурсивен спектр $\mathbf{U}(\mathbf{K})$. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная замкнутая формула сигнатуры σ и $n = \nu(\mathfrak{F})$ — ее

* Конечная аксиоматизируемость подкласса $\mathbf{K}$ внутри класса $\mathbf{L}$ означает, что $\mathbf{K}$ состоит из тех алгебр класса $\mathbf{L}$, которые удовлетворяют некоторой конечной системе формул. Это не влечет еще финитной аксиоматизируемости $\mathbf{K}$ как самостоятельного класса.

гёделевский номер. Алгоритм приведения $\mathfrak{F}$ к каноническому виду (20), (21) распадается на элементарные шаги, преобразующие формулу номера t в формулу номера $\tau(t)$. Из описания этих шагов видно, что $\tau(t)$ будет примитивно рекурсивной функцией. С другой стороны, нетрудно указать такую примитивно рекурсивную функцию $\rho(n)$, что для приведения формулы номера n к каноническому виду (20), (21) достаточно $\rho(n)$ шагов. Обозначим через $\chi(n)$ характеристическую функцию множества формул канонического вида, равную 1 на номерах канонических формул и равную 0 для остальных значений n . Введем еще функцию $\pi(k, n)$, полагая

$$\pi(0, n) = n; \quad \pi(k+1, n) = \tau(\pi(k, n)).$$

Ясно, что функции χ и π примитивно рекурсивны. Но вместе с χ , π примитивно рекурсивной будет и функция

$$\sigma(n) \stackrel{\text{дт}}{=} \pi(\mu x (\chi(\pi(x, n)) = 1 \& x \leq \rho(n)), n),$$

значение которой $\sigma(n)$ равно номеру канонической формулы, эквивалентной формуле номера n .

Числа $r, m_1, \dots, m_r$ в формулах (20), (21) являются примитивно рекурсивными функциями номера l канонической формулы $\mathfrak{P}$. Условие $\mathfrak{P} \in \mathbf{T}(\mathbf{K})$ равносильно соотношению $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{U}(\mathfrak{P})$, которое можно переписать в виде

$$x \in \mathbf{U}(\mathbf{K}) \& x \leq m_r + 1 \rightarrow x = m_1 + 1 \vee \dots \vee x = m_r + 1.$$

Поэтому характеристическая функция $\chi_0(n)$ совокупности канонических формул, истинных на $\mathbf{K}$, примитивно рекурсивна. Но тогда и характеристическая функция $\chi_0(\sigma(n))$ совокупности всех замкнутых формул, истинных на $\mathbf{K}$, будет примитивно рекурсивна, что и требовалось.

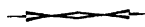
Аналогичным образом легко устанавливается, что элементарная теория аксиоматизируемого класса локально S-свободных алгебр тогда и только тогда рекурсивно перечислима, когда рекурсивно перечислимо дополнение спектра указанного класса.

Отметим, наконец, что, хотя существуют рекурсивно аксиоматизируемые классы локально свободных алгебр, имеющие неразрешимые теории, ни один из классов локально свободных алгебр не может иметь существенно неразрешимой теории, так как в каждом классе есть подкласс с конечным спектром, теория которого разрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Об элементарных теориях локально свободных универсальных алгебр.— Докл. АН СССР, 1961, 138, № 5, 1009—1012.
2. Г. Биркгоф. Теория структур. М., ИЛ, 1952.
3. А. И. Мальцев. Квазипримитивные классы абстрактных алгебр.— Докл. АН СССР, 1956, 108, № 2, 187—189.
4. А. И. Мальцев. Модельные соответствия.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1959, 23, № 3, 313—336.

СТРОГО РОДСТВЕННЫЕ МОДЕЛИ И РЕКУРСИВНО СОВЕРШЕННЫЕ АЛГЕБРЫ*



Настоящая заметка возникла в связи со следующим вопросом А. Мостовского, сформулированным в книге [1] на стр. 84. Рассматривается арифметика $S = \langle \{0, 1, 2, \dots\}, +, \times \rangle$ и спрашивается, можно ли на натуральном ряде определить бинарную операцию $*$ и фиксировать натуральные числа $a_1, \dots, a_p$ так, чтобы одновременно выполнялись условия: 1) натуральный ряд должен быть группой относительно операции $*$; 2) отношение $x * y = z$ должно быть представимо формулой узкого исчисления предикатов на S ; 3) отношения $x + y = z$ и $x \times y = z$ должны быть представимы формулами узкого исчисления предикатов на группе $\langle \{0, 1, 2, \dots\}, *, a_1, \dots, a_p \rangle$ с выделенными элементами $a_1, \dots, a_p$. Ниже указывается решение общей задачи, родственной упомянутой задаче А. Мостовского. Из этого решения в качестве сопутствующего результата вытекает и положительный ответ на вопрос А. Мостовского.

1. Строгая родственность моделей. Пусть K_1, K_2 — произвольные классы моделей сигнатуры соответственно $\sigma_1 = \{P_1, \dots, P_s, a_1, \dots, a_p\}$ и $\sigma_2 = \{Q_1, \dots, Q_t, b_1, \dots, b_q\}$. Через $\mathfrak{F}_i$ ($i = 1, 2$) обозначим совокупность всех формул узкого исчисления предикатов, имеющих сигнатуру σ_i . Через $\mathfrak{Z}(K_i)$ обозначим подмножество тех замкнутых формул из $\mathfrak{F}_i$, которые истинны на каждой модели класса K_i . Пусть $\mathfrak{N}(x)$ — некоторая формула из $\mathfrak{F}_2$, содержащая лишь одно свободное предметное переменное x . Задать гомоморфизм множества $\mathfrak{F}_1$ в $\mathfrak{F}_2$ это значит с каждым предикатным символом $P_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ сопоставить определенную формулу $\mathfrak{P}_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ из $\mathfrak{F}_2$, а с каждым индивидуальным предметным символом a_j сопоставить некоторую формулу $\mathfrak{A}_j(x)$ из $\mathfrak{F}_2$ с одной свободной предметной переменной x . Если $\mathfrak{H}$ — формула из $\mathfrak{F}_1$, то через $\mathfrak{H}^\varphi$ будем обозначать формулу из $\mathfrak{F}_2$, полученную из $\mathfrak{H}$ путем следующих преобразований: 1) вместо $P_i(a_1 \dots a_{n_i})$ в $\mathfrak{H}$ всюду пишем $\mathfrak{P}_i(a_1, \dots, a_{n_i})$; 2) кванторы в $\mathfrak{H}$ ограничиваем на множество $\mathfrak{N}$ тех элементов x , для которых $\mathfrak{N}(x)$ истинно; 3) если в полученной после преобразований 1), 2) формуле $\mathfrak{H}_1$ есть индивидуальные знаки $a_1, \dots, a_p$, то вместо $\mathfrak{H}_1$ пишем формулу $(\mathfrak{A}a_1 \dots a_p)(\mathfrak{H}_1 \& \mathfrak{A}(a_1) \& \dots \& \mathfrak{A}(a_p))$, которая и будет искомой формулой $\mathfrak{H}^\varphi$.

Гомоморфизм $\varphi: \mathfrak{F}_1 \rightarrow \mathfrak{F}_2$ называется **относительной $\mathfrak{N}$ -интерпретацией K_1 в K_2** (см. [1]), если $\mathfrak{Z}(K_1)^\varphi \subseteq \mathfrak{Z}(K_2)$. Относительная $\mathfrak{N}$ -интерпретация называется просто интерпретацией, если $\mathfrak{N}(x)$ тождественно истинно на K_2 .

Классы моделей K_1, K_2 называются **родственными**, если существуют интерпретация $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$ и интерпретация $\psi: K_2 \rightarrow K_1$ такие, что

$$(\mathfrak{H}^{\varphi\psi} \leftrightarrow \mathfrak{H}) \in \mathfrak{Z}(K_1), \quad (\mathfrak{G}^{\psi\varphi} \leftrightarrow \mathfrak{G}) \in \mathfrak{Z}(K_2) \quad (\mathfrak{H} \in \mathfrak{F}_1, \mathfrak{G} \in \mathfrak{F}_2); \quad (1)$$

$$(x = a_j \leftrightarrow \mathfrak{A}_j(x)^\psi) \in \mathfrak{Z}(K_1) \quad (x = b_j \leftrightarrow \mathfrak{B}_j(x)^\varphi) \in \mathfrak{Z}(K_2). \quad (2)$$

Пусть φ — $\mathfrak{K}$ -интерпретация K_1 в K_2 , $\mathfrak{K} = \langle N; Q_1, \dots, Q_t, b_1, \dots, b_q \rangle$, — некоторая K_2 -модель. Модель $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{K}; \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_s, \mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_r \rangle$, где $\mathfrak{K}$ — совокупность тех элементов из N , для которых $\mathfrak{K}(x)$ истинно, условимся обозначать через $\mathfrak{M}^\varphi$. $\mathfrak{K}$ -интерпретацию φ условимся называть *и з о м о р ф н о й*, если для каждой модели $\mathfrak{M}$ из K_1 в K_2 существует модель $\mathfrak{M}$ такая, что $\mathfrak{M}^\varphi$ изоморфна $\mathfrak{M}$. Классы K_1 и K_2 будут называться *с т р о г о р о д с т в е н н ы м и*, если найдутся изоморфные интерпретация φK_1 в K_2 и интерпретация ψK_2 в K_1 , удовлетворяющие условиям (1), (2).

Изложенные понятия будут применяться далее к случаю, когда K_1 и K_2 содержат лишь по одной модели.

2. Рекурсивно совершенные алгебры. Взаимно однозначное отображение α некоторого множества натуральных чисел D_α на основное множество M модели $\mathfrak{M} = \langle M; P_1, \dots, P_s, a_1, \dots, a_r \rangle$ называется *н у м е р а ц и е й* $\mathfrak{M}$. Нумерация α называется *р е к у р с и в н о й* [2], если D_α рекурсивно и все предикаты $P_1, \dots, P_s$ при α обращаются в рекурсивные отношения на D_α . Модель $\mathfrak{M}$ условимся называть *р е к у р с и в н о у с т о й ч и в о й*, если все ее рекурсивные нумерации рекурсивно эквивалентны нумерации α . В [2] показано, что каждая рекурсивно нумерованная конечно порожденная алгебра рекурсивно устойчива. Однако рекурсивной устойчивостью может обладать и алгебра, не имеющая конечного числа порождающих.

Т е о р е м а 1. Каждое поле K , являющееся конечным расширением поля рациональных чисел, каждая группа $SL(n, K)$ над таким полем K при $n \geq 2$, а также группа $RSL(n, K)$ всех треугольных матриц из $SL(n, K)$ и любая полная нильпотентная группа конечного ранга без кручения являются рекурсивно нумеруемыми рекурсивно устойчивыми алгебрами.

Доказательство легко проводится непосредственно для полей K и нильпотентных групп. Основные этапы доказательства для групп $SL(n, K)$ и $RSL(n, K)$ указаны ниже в п. 3.

Рекурсивно нумерованная рекурсивно устойчивая модель или алгебра называется *р е к у р с и в н о с о в е р ш е н н о й*, если она бесконечна и каждый рекурсивный предикат, определенный на этой модели, представим формулой узкого исчисления предикатов. Теорема Гёделя [1] показывает, что арифметика S является рекурсивно совершенной алгеброй. Из определения также непосредственно следует

Т е о р е м а 2. Любые две рекурсивно совершенные модели строго родственны друг другу.

Относительную $\mathfrak{K}$ -интерпретацию φ модели $\mathfrak{M} = \langle M; P_1, \dots, P_s, a_1, \dots, a_r \rangle$ в модели $\mathfrak{N} = \langle N; Q_1, \dots, Q_t, b_1, \dots, b_q \rangle$, имеющей рекурсивную нумерацию β , назовем *р е к у р с и в н о й*, если отношения $P_i^\varphi = \mathfrak{P}_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ ($i = 1, \dots, s$) и $\mathfrak{K}(x)$ рекурсивны в нумерации β .

Т е о р е м а 3. Пусть существует относительная изоморфная и рекурсивная интерпретация φ рекурсивно совершенной модели $\mathfrak{M} = \langle M; P_1, \dots, P_s \rangle$ в рекурсивно нумерованной модели $\mathfrak{N} = \langle N; Q_1, \dots, Q_t, b_1, \dots, b_q \rangle$ и пусть существует формула 1-й степени $\mathfrak{U}(x; x_1, \dots, x_r)$, представляющая одно-однозначное рекурсивное отображение некоторого множества $\mathfrak{S}$ последовательностей $\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ элементов из $\mathfrak{N}$ на всю модель $\mathfrak{M}$. Тогда модель $\mathfrak{N}$ строго родственна $\mathfrak{M}$. Если, сверх того, модель $\mathfrak{N}$ рекурсивно устойчива, то она и совершенна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $P_i^\varphi = \mathfrak{P}_i$ ($i = 1, \dots, s$). Модель $\mathfrak{M}_0 = \langle \mathfrak{K}; \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_s \rangle$ рекурсивна и абстрактно изоморфна совершенной мо-

дели $\mathfrak{M}$. Поэтому модель $\mathfrak{M}_0$ также совершенная. Множество $\mathfrak{S}$ рекурсивно перечислимое. Поэтому существует рекурсивное на $\mathfrak{N}$ отношение $\mathfrak{B}(x; x_1, \dots, x_r)$, одно-однозначно отображающее $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{S}$. Так как модель $\mathfrak{M}_0$ совершенная, то отношение $\mathfrak{B}$ представимо на $\mathfrak{N}$ формулой узкого исчисления предикатов. Но тогда формула

$$\mathfrak{B}(x, y) \stackrel{\text{df}}{=} (\exists x_1, \dots, x_r) (\bigwedge_{\lambda} \mathfrak{N}(x_{\lambda}) \& \mathfrak{B}(x; x_1, \dots, x_r) \& \mathfrak{U}(y; x_1, \dots, x_r)) (\& \mathfrak{N}(x))$$

представляет одно-однозначное рекурсивное отображение $\mathfrak{N}$ на N . Полагая по определению

$$P_i^{\psi} \stackrel{\text{df}}{=} P'_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \stackrel{\text{df}}{=} (\exists y_1 \dots y_{n_i}) (\mathfrak{B}(y_1, x_1) \& \dots \& \mathfrak{B}(y_{n_i}, x_{n_i}) \& \mathfrak{P}_i(y_1, \dots, y_{n_i})),$$

видим, что ψ есть изоморфная и рекурсивная интерпретация $\mathfrak{M}$ на модели $\mathfrak{N}$. Поэтому модель $\mathfrak{M}_1 = \langle N; P'_1, \dots, P'_s \rangle$ совершенная. На модели $\mathfrak{M}_1$ определены рекурсивные предикаты Q_j . В силу совершенности $\mathfrak{M}_1$ предикаты Q_j формульно выражаются через P'_i .

Итак, модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ строго родственные и, сверх того, на $\mathfrak{N}$ любое рекурсивное отношение формульно представимо. Поэтому если известно, что $\mathfrak{N}$ рекурсивно устойчива, то она будет и рекурсивно совершенной.

С л е д с т в и е. *Кольцо целых рациональных чисел, а также любое конечное расширение поля рациональных чисел, не имеющее нетривиальных автоморфизмов, являются рекурсивно совершенными алгебрами.*

Действительно, если $\mathbf{K}$ — конечное расширение поля рациональных чисел и θ — примитивный элемент $\mathbf{K}$, то, согласно Ю. Робинсон [3], существует формула $\mathfrak{N}(x)$, выделяющая в $\mathbf{K}$ рациональные числа, а формула

$$\mathfrak{U}(x; x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{df}}{=} (\exists \theta) (x = x_1 + x_2\theta + \dots + x_n\theta^{n-1} \& f(\theta) = 0)$$

дает одно-однозначное отображение $\mathfrak{N}$ на множество систем $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ рациональных чисел (f — неприводимый многочлен, корнем которого является θ и n — степень f).

3. Линейные группы. Согласно замечанию А. Мостовского [1], группы автоморфизмов строго родственных моделей изоморфны. Рекурсивно совершенные алгебры не имеют нетождественных автоморфизмов, а все бесконечные группы имеют. Поэтому рекурсивно совершенными могут быть группы лишь, самое меньшее, с двумя выделенными элементами, и такие группы, как показывает следующая теорема, действительно существуют.

Т е о р е м а 4. *Группы $SL(n, \mathbf{K})$ и $RSL(n, \mathbf{K})$ над рекурсивно совершенным полем $\mathbf{K}$ с выделенными матрицами A, B являются рекурсивно совершенными при $n \geq 3$.*

Здесь $SL(n, \mathbf{K})$ — группа матриц порядка n с единичным определителем с элементами из $\mathbf{K}$; $RSL(n, \mathbf{K})$ — группа всех треугольных матриц из $SL(n, \mathbf{K})$; A — клетка Жордана с единицами по диагонали; B — транспонированная клетка для A в случае групп $SL(n, \mathbf{K})$ и B — произвольная диагональная матрица «общего» вида из $SL(n, \mathbf{K})$ в случае, когда рассматриваются группы $RSL(n, \mathbf{K})$.

Мы укажем общий ход доказательства для групп $RSL(3, \mathbf{K})$ и $SL(3, \mathbf{K})$ при условии, что характеристика $\mathbf{K}$ не равна 3. Сходные рассуждения имеют силу и для матричных групп более высокого порядка. Рекурсивная нумерация поля $\mathbf{K}$ индуцирует естественным образом рекурсивную нумерацию группы $SL(3, \mathbf{K})$, которую мы далее и будем иметь в виду.

Сначала рассмотрим группу $RSL(3, K)$ с фиксированными матрицами $A = e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{12} + e_{23}$ и $B = b_1 e_{11} + b_2 e_{22} + b_3 e_{33}$, где $b_1 b_2^{-1} \neq b_2 b_3^{-1}$. Полагая

$$\mathfrak{R}(X) \stackrel{\text{df}}{=} (\exists Y)(AY = YA \ \& \ YBAB^{-1} = BAB^{-1}Y \ \& \ Y^3 = X),$$

$$\mathfrak{R}_1(X) \stackrel{\text{df}}{=} X^2 = E \ \& \ X \neq E \ \& \ XB = BX,$$

$$\mathfrak{R}_2(X) \stackrel{\text{df}}{=} (EY)(\mathfrak{R}_1(Y) \ \& \ X = A^{-1}YA^{-1}Y) \ \& \ \mathfrak{R}(X),$$

видим, что $\mathfrak{R}$ состоит из матриц вида $E + ae_{13}$, а $\mathfrak{R}_2$ содержит лишь матрицу $E + e_{13}$, где $E = e_{11} + e_{22} + e_{33}$. Полагая теперь (см. [4])

$$Z = X \oplus Y \stackrel{\text{df}}{=} Z = XY,$$

$$\begin{aligned} Z = X \circ Y &\stackrel{\text{df}}{=} (\exists UVW)(UB = BU \ \& \ VB = BV \ \& \ \mathfrak{R}_2(W) \ \& \ UW = \\ &= XU \ \& \ VW = YV \ \& \ UVW = ZUV) \vee (X = E \vee Y = E) \ \& \ Z = E, \end{aligned}$$

получим рекурсивную $\mathfrak{R}$ -интерпретацию K в $RSL(3, K)$ с изоморфизмом $a \rightarrow E + ae_{13}$ поля K на поле $\langle \mathfrak{R}; \oplus, \circ \rangle$.

Используя некоторые частные свойства треугольных матриц, нетрудно построить формулу $\mathfrak{U}(X; X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{12}, X_{13}, X_{23})$, истинную лишь для матриц вида $X_{ij} = E + a_{ij}e_{ij}$, $X = \sum a_{ij}e_{ij}$ ($i \leq j$, $\prod a_{ii} = 1$) и, следовательно, одно-однозначно отображающую группу $RSL(3, K)$ на совокупность последовательностей $\langle X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{12}, X_{13}, X_{23} \rangle$ элементов множества $\mathfrak{R}$.

Чтобы удовлетворить условиям теоремы 3 и тем самым доказать совершенность группы $RSL(3, K)$, остается доказать лишь рекурсивную устойчивость этой группы. Рекурсивная нумерация поля K индуцирует естественную рекурсивную нумерацию α группы $RSL(3, K)$. Пусть β — какая-либо другая рекурсивная нумерация этой группы. Из вида формулы $\mathfrak{R}(x)$ и формул для $\oplus$ и $\circ$ легко заключаем, что множество $\mathfrak{R}$ и операции $\oplus, \circ$ рекурсивны в любой рекурсивной нумерации $RSL(3, K)$. Так как модель $\langle \mathfrak{R}; \oplus, \circ \rangle$ рекурсивно совершенная, то нумерация α и β на ней рекурсивно эквивалентны, т. е. существует алгоритм $\mathcal{A}$, позволяющий по номеру какого-либо элемента $\mathfrak{R}$ в одной из нумераций α, β найти его номер в другой нумерации. Из конструкции упомянутой выше формулы $\mathfrak{U}$ можно извлечь алгоритм $\mathcal{B}$ для нахождения номера матрицы X по номерам ее «координатных» матриц X_{ij} ($i \leq j$) в любой рекурсивной нумерации рассматриваемой группы. Теперь, зная α -номер какой-либо матрицы X этой группы, находим α -номера матриц X_{ij} с помощью алгоритма $\mathcal{B}$. Пользуясь алгоритмом $\mathcal{A}$, находим β -номера матриц X_{ij} и с помощью алгоритма $\mathcal{B}$ находим β -номер X . Таким образом, рекурсивная совершенность группы $RSL(3, K)$ с выделенными элементами A, B доказана.

Рассмотрим теперь группу $SL(3, K)$ с выделенными матрицами $A = E + e_{12} + e_{23}$ и $A' = E + e_{21} + e_{32}$. Формулы

$$\mathfrak{P}(X) \stackrel{\text{df}}{=} XAX^{-1}A = AXAX^{-1}, \quad \mathfrak{P}'(X) \stackrel{\text{df}}{=} XA'X^{-1}A' = A'XA'X^{-1}$$

выделяют в $SL(3, K)$ соответственно подгруппу верхних треугольных матриц G_1 и подгруппу G_2 нижних треугольных матриц, диагональ которых удовлетворяет некоторому условию. Формула $\mathfrak{P}(X) \ \& \ \mathfrak{P}'(X) \ \& \ X^6 A \neq AX^6$

выделяет в $SL(3, \mathbf{K})$ совокупность диагональных матриц вида $xe_{11} + axe_{22} + a^2xe_{33}$, где $a^6 \neq 1$, $x^3a^3 = 1$. Любую матрицу, перестановочную с матрицей указанного вида, но не имеющую этого вида и отличную от E , можно принять в качестве матрицы B для построения в группах G_1 и G_2 с помощью матриц A , A' «координатизирующих» формул $\mathfrak{U}_1(X; X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{12}, X_{13}, X_{23})$ и $\mathfrak{U}_2(X; X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{21}, X_{31}, X_{32})$. Наконец, пользуясь тем, что каждая матрица из $SL(3, \mathbf{K})$ представима в виде $Y_1Y_2Y_3Y_4Y_5$ ($Y_1, Y_3, Y_5 \in G_1; Y_4, Y_2 \in G_2$), и зная формулы $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$, легко построить координатирующую формулу для самой группы $SL(3, \mathbf{K})$. Рекурсивная устойчивость $SL(3, \mathbf{K})$ легко получается из рекурсивной устойчивости подгрупп G_1 и G_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Tarski, A. Mostowski, R. Robinson*. Undecidable theories. Amsterdam, 1953.
2. *А. И. Мальцев*. Конструктивные алгебры, I.— Успехи мат. наук, 1961, 16, № 3, 3—60.
3. *J. Robinson*. The undecidability of algebraic rings and fields.— Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, N 6, 950—957.
4. *А. И. Мальцев*. Об элементарных свойствах линейных групп.— В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск, 1961, с. 110—132.



Придерживаясь терминологии обзора [1], конструктивной (или рекурсивной) группой далее будем называть группу G , снабженную однозначным отображением α некоторого рекурсивного множества D_α натуральных чисел на G , при условии, что существуют рекурсивные функции $\theta(x, y)$, $f(x, y)$, обладающие свойствами:

$$\theta(x, y) = 1 \leftrightarrow \alpha x = \alpha y, \quad \alpha f(x, y) = \alpha x \cdot \alpha y \quad (x, y \in D_\alpha).$$

Отображение α , обладающее всеми перечисленными свойствами, называется конструктивной нумерацией группы G . Группы, конструктивные нумерации которых существуют, называются конструктивными или вычислимыми. Естественно возникает общая задача: определить, какие конструктивные нумерации допускают те или иные абстрактно заданные группы, какие из подгрупп той или иной конструктивной группы являются ее рекурсивными или рекурсивно перечислимыми подгруппами и т. п. Ниже указываются некоторые исходные результаты этого направления для случая абелевых групп.

1. Из замечаний обзора [1] следует, что при доказательстве «положительных» частей следующих ниже теорем можно предполагать, что элементами конструктивной группы являются натуральные числа, а групповой операцией является общерекурсивная двуместная функция. Примеры конструктивных групп будут даваться в виде групп с определяющими соотношениями. При этом если порождающими группы служат символы $x_1, x_2, \dots$, то элементом номера n будет всегда предполагаться элемент $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$, где $n_1, n_2, \dots, n_k$ — последовательность целых чисел номера n в стандартной нумерации (см. [1]).

Т е о р е м а 1. *Периодическая часть конструктивной группы рекурсивно перечислима. Существуют конструктивные абелевы группы, периодическая часть которых не является рекурсивной.*

Алгоритм для перечисления периодической части строится очевидным образом. В качестве конструктивной группы с нерекурсивной периодической частью можно взять абелеву группу с порождающими $x_1, x_2, \dots$ и определяющими соотношениями

$$x_{\lambda(n)}^n = 1 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $\lambda(n)$ — разнзначная общерекурсивная функция, совокупность значений которой нерекурсивна.

Если G — группа, то через $\Pi(G)$ обозначаем совокупность тех простых p , для которых в G существует элемент порядка p . p -примарной компонентой G называется совокупность элементов $G_{(p)}$, включая единицу G , порядок которых имеет вид p^s ($s = 1, 2, \dots$).

* Докл. АН СССР, 1961, 146, № 5, 1009—1012.

Теорема 2. Все примарные компоненты конструктивной периодической группы G рекурсивны; множество $\Pi(G)$ рекурсивно перечислимо. Для каждого рекурсивно перечислимого множества Π простых чисел существует периодическая абелева конструктивная группа G , для которой $\Pi = \Pi(G)$.

Пусть $G_1, G_2, \dots$ — некоторая последовательность нумерованных групп и пусть α_n — нумерация G_n с номерным множеством D_n . Ставя натуральному числу n в соответствие элемент $\alpha_{n_1} \cdot \alpha_{n_2} \cdot \dots \cdot \alpha_{n_k}$ прямой суммы $G = G_1 + G_2 + \dots$, где $n_1, \dots, n_k$ — набор натуральных чисел, имеющий стандартный номер n , получим нумерацию группы G , которую будем называть стандартной.

Если характеристическая функция $\chi(n, x)$ множества D_n , а также функции $\theta_n(x, y)$ и $f_n(x, y)$ для группы G_n будут общерекурсивными функциями от x, y, n , то стандартно нумерованная прямая сумма $G_1 + G_2 + \dots$ будет конструктивной группой. В частности, если G — конструктивная периодическая абелева группа и $\Pi(G) = \{p_{v(1)}, p_{v(2)}, \dots\}$, где $v(i)$ — разнозначная рекурсивная функция, то G конструктивно эквивалентна прямой сумме своих примарных подгрупп $G_{p_{v(1)}}, G_{p_{v(2)}}, \dots$, взятой со стандартной нумерацией.

2. Нумерации α и β какой-нибудь алгебры назовем автоэквивалентными, если существует абстрактный автоморфизм σ алгебры $\mathcal{A}$ такой, что нумерации $\sigma\alpha$ и β рекурсивно эквивалентны. Алгебру $\mathcal{A}$ будем называть автоустойчивой, если все ее конструктивные нумерации автоэквивалентны. Алгебры, все конструктивные нумерации которых рекурсивно эквивалентны, в заметке [2] названы рекурсивно устойчивыми. Из рекурсивной устойчивости, очевидно, вытекает автоустойчивость, но не наоборот. Конструктивно эквивалентных нумераций у каждой абстрактно заданной алгебры не более счетного множества. Автоморфизмы переводят конструктивные нумерации в конструктивные. Поэтому алгебра с несчетной группой автоморфизмов не может быть рекурсивно устойчивой.

Абелева группа A_{pn} с порождающими a_{ij} и определяющими соотношениями $a_{ij}^{p_{i+1}} = a_{ij}$ (p простое, $i = 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots$; $a_{i0} = 1$) называется полной p -примитивной абелевой группой ранга n . Стандартная нумерация ее конструктивна. Группа автоморфизмов A_{pn} несчетная, и потому A_{pn} не является рекурсивно устойчивой. В то же время легко доказать, что A_{pn} любого конечного n является автоустойчивой группой.

Известно, что полные абелевы группы конечного ранга без кручения вычислимы и рекурсивно устойчивы [2]. Полная абелева группа R_∞ без кручения счетного ранга является прямой суммой группы 1-го ранга и потому допускает конструктивные нумерации. Группа автоморфизмов R_∞ несчетная, и потому R_∞ не является рекурсивно устойчивой.

Конструктивную абелеву группу G назовем группой с алгоритмом линейной зависимости, если существует алгоритм, позволяющий для любой системы натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_k$ сказать, являются ли или нет линейно зависимыми в G элементы с номерами $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Теорема 3. Для того чтобы конструктивная абелева группа без кручения счетного ранга обладала алгоритмом линейной зависимости, необходимо и достаточно, чтобы она имела рекурсивно перечислимый базис. Конструктивная нумерация α группы R_∞ тогда и только тогда автоэквивалентна конструктивной нумерации β группы R_∞ , обладающей рекурсивно перечислимым базисом, когда α также обладает рекурсивно перечислимым ба-

зисом. Существуют конструктивные нумерации R_∞ , при которых не существует рекурсивно перечислимого базиса в R_∞ .

Чтобы построить пример конструктивной полной абелевой группы без кручения, не имеющей алгоритма линейной зависимости, обозначим через R_∞ аддитивную группу линейных форм от переменных $x_1, x_2, \dots$ с рациональными коэффициентами и стандартной нумерацией этих форм. Пусть $\nu(n)$ — рекурсивная разнзначная функция, совокупность значений которой нерекурсивна. Подпространство H , порожденное в R_∞ формами $ix_{2\nu(i)} - x_{2\nu(i)+1}$ ($i = 0, 2, \dots$), как легко видеть, рекурсивно. Поэтому нумерация R_∞ является конструктивной нумерацией фактор-группы R_∞/H . Алгоритма линейной зависимости в R_∞/H нет, так как вопрос о линейной зависимости x_{2n} и x_{2n+1} в R_∞/H равносильен вопросу о вхождении числа n в множество значений функции $\nu(i)$, который по предположению алгоритмически не решается.

Из теоремы 3, в частности, следует, что абелева полная группа без кручения счетного ранга вычислима, но автоустойчивой не является.

Указанная нумерация группы R_∞/H дает отрицательный ответ также на вопрос о существовании алгоритма, позволяющего в каждой конструктивной абелевой группе ранга 2 без кручения находить пару базисных элементов. Более точно: пусть $U(n, x, y)$ — универсальная частично рекурсивная функция Клини, при различных значениях n дающая всевозможные двуместные частично рекурсивные функции. Спрашивается, существуют ли общие рекурсивные функции $\varphi(n), \psi(n)$ такие, что если при некотором n функция $U(n, x, y)$ будет групповой операцией на множестве натуральных чисел, обращающей это множество в полную абелеву группу без кручения ранга 2, то числа $\varphi(n), \psi(n)$ будут линейно независимыми элементами этой группы? Из теоремы 3 вытекает отрицательный ответ на этот вопрос.

3. Пусть G — конструктивная абелева группа без кручения ранга r с заданными базисными элементами $g_1, \dots, g_r$. Находя для каждого $g \in G$ целые числа $m, m_1, \dots, m_r$ такие, что $mg = m_1g_1 + \dots + m_rg_r$, и ставя в соответствие элементу g линейную форму $\frac{m_1}{m}x_1 + \frac{m_2}{m}x_2 + \dots + \frac{m_r}{m}x_r$ от независимых переменных $x_1, \dots, x_r$, получим рекурсивное отображение G в группу линейных форм R_r . Поэтому каждая конструктивная абелева группа без кручения ранга r рекурсивно эквивалентна подходящей рекурсивно перечислимой подгруппе группы R_r , содержащей единичные формы $1, x_1, \dots, x_r$. То же самое справедливо и для группы R_∞ с естественной нумерацией и конструктивных абелевых групп G без кручения с рекурсивно перечислимым базисом.

Мы хотим теперь более детально рассмотреть подгруппы группы R_1 . Пусть G — подгруппа группы R_1 , содержащая число 1. Через $D(G)$ обозначим совокупность пар (i, n) натуральных чисел, для которых $p_i^{-n} \in G$, где p_i — i -е простое.

Л е м м а. Подгруппа $G \subseteq R_1$ тогда и только тогда рекурсивна или рекурсивно перечислима, когда рекурсивным или соответственно рекурсивно перечислимым является множество $D(G)$.

В теории групп обычно подгруппы из R_1 , содержащие 1, описываются при помощи характеристик, т. е. последовательностей вида $\alpha(G) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$, где каждое α_i есть или натуральное число, или символ ∞ . Переход от $D(G)$ к $\alpha(G)$ совершается по правилу: $\alpha_i = n$, если $p_i^{-n} \in G$, $p_i^{-n-1} \notin G$, и $\alpha_i = \infty$, если $p_i^{-n} \in G$ для $n = 1, 2, \dots$

Введем частичную функцию $\alpha(x)$, полагая $\alpha(i)$ неопределенной, если $\alpha_i = \infty$, и полагая $\alpha(i) = \alpha_i$ для остальных значений i . Функцию $\alpha(x)$, так же как и последовательность α , далее будем называть характеристикой подгруппы G . Связь между $D(G)$ и соответствующей характеристикой $\alpha(x)$ выражается формулой

$$\alpha(i) = \mu x ((i, x) \in D(G)) - 1,$$

из которой легко следует

Т е о р е м а 4. *Подгруппа G тогда и только тогда рекурсивна, когда ее характеристика представима в виде*

$$\alpha(i) = \mu x (f(i, x) = 0),$$

где $f(i, x)$ — подходящая общерекурсивная функция.

Подгруппа G тогда и только тогда рекурсивно перечислима, когда ее характеристика представима в виде

$$\alpha(i) = \mu x (f(i, x) = \text{неопределенная}),$$

где $f(i, x)$ — подходящая частично рекурсивная функция.

Число n назовем обыкновенной точкой подгруппы G , если $\alpha_n \neq \infty$.

Совокупность обыкновенных точек рекурсивной подгруппы является рекурсивно перечислимым множеством. Каждое рекурсивно перечислимое множество натуральных чисел есть совокупность обыкновенных точек подходящей рекурсивной подгруппы.

Действительно, если $f(x)$ — какая-либо рекурсивная функция, то подгруппа G с характеристикой

$$\alpha(i) = \mu x (f(x) = i)$$

является в силу теоремы 4 рекурсивной и имеет своим множеством обыкновенных точек совокупность значений функции f .

З а м е ч а н и е. Пусть $\alpha(x)$ — характеристика некоторой подгруппы G группы R_1 . Совокупность $\alpha^{(n)}$ тех x , для которых $\alpha(x) \geq n$ или $\alpha(x)$ неопределенно, является рекурсивной у рекурсивной G и рекурсивно перечислимой у рекурсивно перечислимой G .

В качестве примера рассмотрим подгруппу G с характеристикой $\alpha(i) = \mu x (U(i, x) \text{ — неопределенная})$, где $U(i, x)$ — универсальная функция Клини. Совокупностью $\alpha^{(n)}$ здесь служит совокупность номеров тех функций, которые определены в точках $0, 1, \dots, n-1$. По теореме Райса $\alpha^{(n)}$ не может быть рекурсивной. В силу теоремы 4 и замечания G — нерекурсивная рекурсивно перечислимая подгруппа в R_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Конструктивные алгебры, I. — Успехи мат. наук, 1961, 16, № 3, 3—60.
2. А. И. Мальцев. Строго родственные модели и рекурсивно совершенные алгебры. — Докл. АН СССР, 1962, 145, № 2, 276—279.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КЛАССОВ МОДЕЛЕЙ *

Введение

Теория моделей, часто называемая также теорией алгебраических систем, является дисциплиной, пограничной между абстрактной алгеброй и математической логикой. В течение пятилетия, протекшего со времени предыдущего Всесоюзного математического съезда, появилось много важных работ по теории моделей, благодаря которым сегодня можно уже с уверенностью говорить о теории моделей как о развитой самостоятельной дисциплине. В настоящем докладе будет сделана попытка очертить современную проблематику некоторых разделов теории классов моделей и сделать обзор основных результатов по этим разделам, опубликованных преимущественно в последние годы. Сводка более ранних результатов содержится в известном обзоре А. Мостовского [51].

§ 1. Основные понятия

1.1. Алгебры и модели

Под n -членной (n -арной) операцией на множестве M понимается функция от n аргументов, определенная на множестве M , значения которой принадлежат этому же множеству. Под n -местным (n -арным или n -членным) предикатом на M понимается n -арная функция, определенная на M , значения которой принадлежат особому двухэлементному множеству. Элементы последнего множества называются истиной и ложью и обозначаются I и L . Если P — n -членный предикат на M , $a_1, \dots, a_n \in M$ и $P(a_1, \dots, a_n) = I$, то говорят, что элементы $a_1, \dots, a_n$ находятся в отношении P .

Отношения « a делит b », « a взаимно просто с b » могут служить примерами бинарных предикатов, определенных на множестве натуральных чисел. Отношение «точка A лежит между точкой B и точкой C » может служить примером тернарного предиката, определенного на множестве точек прямой.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — операция, определенная на множестве M . Вводим на M предикат $F(x_1, \dots, x_n, x)$, полагая по определению

$$F(x_1, \dots, x_n, x) = \begin{cases} I, & \text{если } f(x_1, \dots, x_n) = x, \\ L, & \text{если } f(x_1, \dots, x_n) \neq x. \end{cases} \quad (1)$$

Предикат F называется предикатом, отвечающим операции f . Зная F , мы знаем f , и потому изучение операций можно рассматривать как изучение предикатов определенного частного вида.

Множество M , снабженное конечной системой операций $f_1, \dots, f_s$, расположенных в определенном порядке, называется алгеброй. Множество M , снабженное конечной последовательностью предикатов $P_1, \dots, P_s$, называется моделью. Множество M , операции $f_1, \dots, f_s$ и предикаты $P_1, \dots, P_s$

* IV Всес. матем. съезд. Ленинград, 1963. Труды, т. 1, с. 169—198.

называются соответственно основным множеством, операциями и предикатами заданной алгебры или модели. Более подробно указанные алгебра и модель обозначаются следующим образом:

$$\langle M; f_1, \dots, f_s \rangle, \quad \langle M; P_1, \dots, P_s \rangle. \quad (2)$$

Так, например, выражение $\langle \{0, 1, 2, \dots\}; + \rangle$ означает алгебру, основным множеством которой служит совокупность всех натуральных чисел, а единственной основной операцией является сложение чисел. Аналогично выражение $\langle \{0, 1, 2, \dots\}; \leq, | \rangle$ обозначает модель с тем же основным множеством, основными предикатами которой являются отношение порядка $\leq$ и отношение делимости $|$.

Если n_i — членность операции f_i или соответственно предиката P_i в (2), то последовательность $\langle n_1, \dots, n_s \rangle$ называется типом соответствующей алгебры или модели. Например, тип группоиды есть $\langle 2 \rangle$, тип структуры (решетки) $\langle 2, 2 \rangle$, тип алгебры Буля $\langle 2, 2, 1 \rangle$ и т. п.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle M; f_1, \dots, f_s \rangle$ — некоторая алгебра. Обозначим через $F_i(x_1, \dots, x_{n_i}, x)$ предикат, отвечающий f_i , т. е. определенный по схеме (1). Модель $\mathfrak{M} = \langle M; F_1, \dots, F_s \rangle$ называется моделью, отвечающей алгебре $\mathfrak{A}$ или представляющей эту алгебру. Так как модель $\mathfrak{M}$ вполне определяет представляемую ею алгебру, то теорию алгебр можно рассматривать как теорию моделей специального вида. Например, кольцо $\langle \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}; +, \times \rangle$ можно рассматривать и как алгебру типа $\langle 2, 2 \rangle$, и как модель $\langle \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}; S, P \rangle$ типа $\langle 3, 3 \rangle$, где S и P — предикаты, представляющие сложение и умножение.

Гомоморфизмом модели $\mathfrak{M} = \langle M; P_1, \dots, P_s \rangle$ в однотипную модель $\mathfrak{M}' = \langle M'; P_1, \dots, P_s \rangle$ называется отображение φ множества M в множество M' такое, что для любых $x_1, \dots, x_{n_i}$ из M из истинности $P_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ следует истинность $P_i(x_1\varphi, \dots, x_{n_i}\varphi)$ ($i = 1, \dots, s$). Если, сверх того, отображение φ взаимно однозначно и обратное отображение φ^{-1} — также гомоморфизм, то φ называется изоморфизмом $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}'$. Модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ называются изоморфными, если существует изоморфизм $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}'$.

Гомоморфизм φ модели $\mathfrak{M}$ в модель $\mathfrak{M}'$ называется сильным, если из истинности $P_i(x_1\varphi, \dots, x_{n_i}\varphi)$ следует существование таких $y_1, \dots, y_{n_i}$ в M , что $y_1\varphi = x_1\varphi, \dots, y_{n_i}\varphi = x_{n_i}\varphi$ и $P_i(y_1, \dots, y_{n_i})$ истинно.

Для алгебр понятия гомоморфизма и изоморфизма определяются обычным образом, причем обычные и сильные гомоморфизмы для алгебр означают одно и то же. Легко видеть также, что отображение алгебры в однотипную ей алгебру тогда и только тогда гомоморфизм, когда это отображение есть гомоморфизм для отвечающих указанным алгебрам моделей.

1.2. Классы моделей

Произвольная система однотипных моделей называется классом моделей. Типом класса называется тип входящих в него моделей. Среди классов моделей данного типа существует наибольший — система всех моделей этого типа. Остальные классы являются подклассами этого класса*.

* Если рассматривать систему всех моделей данного типа как множество, то возникают известные противоречия типа множества всех множеств. Поэтому при рассмотрении классов моделей либо заранее каким-то образом ограничивают эти классы, либо придерживаются какой-нибудь аксиоматики теории множеств и т. п.

Класс моделей называется абстрактным, если он вместе с любой своей моделью содержит и все ей изоморфные. Далее почти всегда будут рассматриваться лишь абстрактные классы моделей.

При изучении общих свойств моделей фиксированного класса K обычно вводят особые символы, обозначающие соответственно 1-й, 2-й и т. д. предикаты на произвольной модели класса K . Совокупность этих символов при условии, что указаны их членности, называется сигнатурой класса K . Таким образом, чтобы задать модель данной сигнатуры, надо указать некоторое множество M и каждому сигнатурному знаку поставить в соответствие предикат надлежащей членности, определенный на M . Этот конкретный предикат на M называется значением предикатного символа в получающейся таким образом модели с основным множеством M .

Понятия алгебры и модели можно обобщать в разных направлениях. Прежде всего, часто приходится рассматривать модели и алгебры, у которых, кроме основных предикатов и операций, существенную роль играют некоторые выделенные элементы. Символические обозначения этих элементов включаются в сигнатуру соответствующей модели или алгебры, а в записи типа обозначаются нулями. Например, задать алгебру типа $\langle 2, 0, 0 \rangle$ значит задать основное множество M , на нем определить бинарную операцию и фиксировать пару элементов.

Иногда встречаются множества, на которых одновременно заданы операции, предикаты и выделены особые элементы. Такие образования принято называть алгебраическими системами. Модели и алгебры — частные виды алгебраических систем. Однако заменяя в алгебраической системе все операции отвечающими им предикатами, получим модель, изучение которой дает и свойства первоначальной алгебраической системы.

До сих пор рассматривались лишь системы, на которых были заданы конечные совокупности операций, предикатов и элементов, причем операции и предикаты имели лишь конечное число аргументов. Отказываться от условий конечности можно в двух направлениях:

1) можно допускать бесконечные системы основных предикатов, операций и выделенных элементов, но при этом требовать, чтобы операции и предикаты были с конечными числами аргументов;

2) можно допускать операции и предикаты с бесконечным числом аргументов. Хотя существуют работы, относящиеся и ко второму направлению, мы далее будем заниматься лишь системами, все операции и предикаты которых зависят от конечного числа переменных. При этом системы с бесконечным числом предикатов и выделенных элементов встречаются так часто, что далее под словом «модель» будет пониматься обычно модель с произвольным кардинальным числом предикатов и выделенных элементов. Мощность множества сигнатурных знаков называется порядком модели, а мощность основного множества модели называется просто мощностью модели.

В развитии общей теории алгебраических систем в настоящее время наметились следующие четыре направления:

А. Общая теория алгебр. По духу и проблематике эта дисциплина наиболее близка к классической алгебре, например к общей теории групп. Гомоморфизмы и их ядра, определяющие соотношения, прямые и свободные разложения были и пока остаются здесь главными объектами изучения.

Б. Теория классов моделей. Характерной чертой этой теории является то, что изучение свойств классов моделей и алгебр ведется

здесь в связи с типом логического языка, на котором определяются исследуемые классы. Поэтому в теории классов моделей приблизительно равноценные роли играют абстрактная алгебра, на языке которой формулируются общие свойства классов моделей, и математическая логика с ее формальными языками, на которых задаются классы моделей.

В. Э л е м е н т а р н ы е т е о р и и. Пусть с помощью произвольных логических средств задан некоторый класс моделей K_* , который может состоять и из одной индивидуальной модели. Исходя из основных предикатов класса K , можно при помощи тех или иных логических средств определить на моделях класса K ряд новых предикатов. Спрашивается, какие из них могут быть определены и на языке узкого исчисления предикатов, являющемся основным классическим логическим языком? В частности, каковы те свойства класса K , которые могут быть записаны на языке узкого исчисления; какие модели не различимы на этом языке? Существует ли алгоритм, распознающий по записи на указанном языке те свойства моделей, которыми обладают все модели данного класса? Эти и аналогичные вопросы являются основными для так называемых элементарных теорий классов моделей. Общее изложение некоторых из упомянутых вопросов содержится в книге А. Тарского, А. Мостовского и Р. Робинсона [66]. Более детально элементарная теория колец рассмотрена Р. Робинсоном [61], элементарная теория полей рассматривалась Дж. Робинсон [59, 60] и автором [44], элементарная теория групп изучалась В. Шмелевой [83] и автором [42, 43, 45] и т. д.*

Г. К о н с т р у к т и в н ы е а л г е б р ы и м о д е л и. Это направление тесно связано с теорией алгоритмов и рекурсивных функций. В приведенном выше определении модели и алгебры говорится о произвольном основном множестве, произвольных основных предикатах и операциях. Если слова «произвольный» в этих определениях заменить словами «конструктивный» и надлежащим образом уточнить понятие конструктивности, то получатся определения конструктивных моделей и алгебр. Теория таких образований находится сегодня еще в стадии становления. Первоначальная сводка основных понятий и результатов содержится в обзоре автора [46], где указана и соответствующая литература**.

Далее мы будем рассматривать почти исключительно лишь вопросы, относящиеся ко второму из указанных направлений, т. е. к теории классов моделей.

1.3. Язык 1-й степени

Как уже говорилось, основным формальным языком теории моделей является язык узкого исчисления предикатов с равенством, сокращенно обозначаемый далее через УИП. Язык этот подробно описывается во всех руководствах по математической логике (Д. Гильберт и В. Аккерман [86], П. С. Новиков [53]). Его алфавит состоит из: 1) предметных переменных $x, y, z, a, b, x_1, x_2, \dots$, значениями которых служат элементы основного множества; 2) предикатных переменных $P, R, S, T, P_1, P_2, \dots$ различных «членностей», значениями которых служат определенные на основном множестве

* Обзор работ по элементарным теориям, выполненных до 1963 г., см. Ю. Л. Ершов, И. А. Лавров, А. Л. Тайманов, М. А. Тайцлин. Элементарные теории. — Успехи мат. наук, 1965, 10, № 4, 37—108. — Прим. ред.

** Обзор работ по теории нумераций содержится в кн.: Ю. Л. Ершов. Теория нумераций. Новосибирск, НГУ, т. 1, 1969; т. 2, 1973. — Прим. ред.

предикаты соответствующих членностей; 3) логические символы $\&$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $=$, $\forall$, $\exists$, содержательно истолковываемые соответственно как: и, или, не, влечет, равно, для каждого значения, существует такое значение..., что 4) вспомогательных символов — скобок и запятых. Конечные последовательности алфавитных символов, образованные по определенным правилам, называются формулами УИП.

В теории классов моделей формулы УИП интерпретируются следующим образом. Пусть K — какой-нибудь класс моделей, сигнатура σ которого состоит из предикатных символов $P_1, P_2, \dots$ и предметных символов $a_1, a_2, \dots$. Рассмотрим формулу УИП $\mathfrak{A}$, все предикатные символы которой содержатся в σ и в которой нет связанных предметных переменных, содержащихся в σ . Часть свободных предметных переменных формулы $\mathfrak{A}$ может входить в σ . Пусть этими переменными являются $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$. Остальные свободные предметные формулы $\mathfrak{A}$ пусть будут $x_1, \dots, x_n$. Наконец, пусть предикатными переменными, встречающимися в формуле $\mathfrak{A}$, будут $P_{j_1}, \dots, P_{j_l}$. Чтобы указать все это, пишут кратко

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n) = \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n; a_{i_1}, \dots, a_{i_k}; P_{j_1}, \dots, P_{j_l}).$$

Выберем теперь какую-нибудь модель сигнатуры σ

$$\mathfrak{M} = \langle M; P_1, P_2, \dots, a_1, a_2, \dots \rangle.$$

В этой модели символы $P_{j_1}, \dots, P_{j_l}$ и $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ обозначают какие-то вполне определенные предикаты и элементы. Если дополнительно еще указать в множестве M значения для $x_1, \dots, x_n$, то формула $\mathfrak{A}$ при содержательном ее истолковании обратится в некоторое высказывание о модели $\mathfrak{M}$ и элементах $x_1, \dots, x_n$, которое будет истинным или ложным. Тем самым каждому набору n элементов $x_1, \dots, x_n$ модели $\mathfrak{M}$ поставлено в соответствие одно из значений I, L и, значит, получен n -членный предикат на $\mathfrak{M}$. Этот предикат называется предикатом, определенным формулой $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$. Предикаты, которые могут быть определены формулами УИП, называются формульными на $\mathfrak{M}$ или, соответственно, на классе K .

Формула $\mathfrak{A}$, не содержащая свободных предметных переменных, называется закрытой. Такая формула на каждой модели, сигнатура которой содержит сигнатуру формулы, либо истинна, либо ложна и потому может рассматриваться как утверждение о свойствах модели. Утверждения этого вида будут далее называться аксиомами.

Язык УИП обладает инвариантностью относительно изоморфизмов моделей и потому приспособлен для выражения абстрактных свойств моделей.

Более подробно это означает следующее. Пусть $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ — две модели одной и той же сигнатуры σ , φ — изоморфизм $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ — какая-нибудь формула УИП, сигнатура которой содержится в σ и которая содержит свободные предметные переменные $x_1, \dots, x_n$. Тогда формулы $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ и $\mathfrak{A}(x_1\varphi, \dots, x_n\varphi)$ либо одновременно истинны, либо одновременно ложны для любых значений $x_1, \dots, x_n$ в $\mathfrak{M}$. В частности, если закрытая формула УИП истинна на какой-либо модели $\mathfrak{M}$, то она истинна и на всех моделях, изоморфных $\mathfrak{M}$.

Наконец, напомним, что формулы вида $(x_1) \dots (x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$, где $\mathfrak{A}$ кванторов не содержит, называются универсальными, или $\forall$ -формулами. Формулы вида

$$(x_1) \dots (x_m) (\exists y_1) \dots (\exists y_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$

называются сколемскими, или $\forall\exists$ -формулами. Формулы вида

$$(x_1) \dots (x_m) (\exists y_1) \dots (\exists y_n) (z_1) \dots (z_p) \mathfrak{A} (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p)$$

называются $\forall\exists\forall$ -формулами и т. д.

§ 2. Аксиоматизируемые классы моделей

2.1. Общие свойства

Класс моделей K произвольной (вообще бесконечной) сигнатуры σ называется аксиоматизируемым (или арифметическим, по А. Тарскому [631]), если характеристические свойства его моделей могут быть описаны на языке УИП, т. е. если существует такая вообще бесконечная система $\mathfrak{S}$ замкнутых формул УИП сигнатуры σ , что K содержит те и только те модели сигнатуры σ , на которых все формулы $\mathfrak{S}$ истинны. Формулы $\mathfrak{S}$ называются аксиомами, определяющими класс K .

Класс моделей K называется конечно аксиоматизируемым, если он имеет конечную сигнатуру и может быть задан конечной системой аксиом. Класс моделей конечной сигнатуры называется рекурсивно аксиоматизируемым, если он может быть задан рекурсивным множеством аксиом.

Выше отмечалось, что каждый класс алгебр можно рассматривать и как класс моделей, если вместо основных операций ввести соответствующие предикаты. Имея это в виду, легко заметить, что многие важные классы алгебр являются аксиоматизируемыми. Например, конечно аксиоматизируемыми являются классы всех групп, всех колец, всех решеток (структур), всех полей и т. д. Классы всех групп без кручения, всех полей характеристики 0, всех алгебраически замкнутых полей и многие другие рекурсивно аксиоматизируемы, хотя и не являются конечно аксиоматизируемыми.

Пусть задана некоторая модель $\mathfrak{M} = \langle M; P_1, P_2, \dots \rangle$, сигнатура которой может быть и бесконечной. Рассмотрим произвольное непустое подмножество M' множества M , и пусть $P_1, P_2, \dots$ — предикаты, определенные на M , значения которых на M' совпадают со значениями предикатов $P_1, P_2, \dots$. Модель $\mathfrak{M}' = \langle M'; P'_1, P'_2, \dots \rangle$ называется подмоделью модели $\mathfrak{M}$. Так как подмодель $\mathfrak{M}'$ однозначно определяется заданием в M подмножества M' , то вместо «подмодель $\langle M, P_1, P_2, \dots \rangle$ » говорят кратко «подмодель M' модели M ».

Если K — какой-нибудь класс моделей сигнатуры σ и $\mathfrak{M}$ — некоторая модель сигнатуры σ , то подмодели модели $\mathfrak{M}$, принадлежащие K , называются K -подмоделями $\mathfrak{M}$. Например, пусть K — класс групп. Тогда подмодели какой-нибудь группы $\mathfrak{G}$ вообще не будут подгруппами $\mathfrak{G}$. Подгруппами $\mathfrak{G}$ будут лишь ее K -подмодели.

Исторически первой общей теоремой об аксиоматизируемых классах моделей явилась классическая

Т е о р е м а (Левенгейма — Сколема). Пусть K — аксиоматизируемый класс моделей, сигнатура которого имеет мощность q , и пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая K -модель. Тогда каждое множество элементов $\mathfrak{M}$, имеющее мощность m , содержится внутри подходящей K -подмодели модели $\mathfrak{M}$ мощности не выше $m + q + \aleph$.

Частные случаи этой теоремы: 1) каждое конечное или счетное множество элементов модели аксиоматизируемого класса K конечной сигнатуры лежит внутри конечной или счетной K -подмодели этой модели; 2) каждая модель

аксиоматизируемого класса K конечной сигнатуры содержит конечную или счетную K -подмодель.

Второй случай был доказан впервые Л. Левенгеймом [29]. В общем виде теорема была доказана Т. Сколемом [62].

Итак, согласно теореме Левенгейма — Сколема в каждом непустом аксиоматизируемом классе моделей, сигнатура которого имеет бесконечную мощность $\mathfrak{q}$, содержится модель мощности не выше $\mathfrak{q}$, а в каждом непустом аксиоматизируемом классе моделей конечной сигнатуры имеется конечная или счетная модель. Возникает вопрос: существуют ли в аксиоматизируемых классах модели наивысшей мощности? В общем случае отрицательный ответ на этот вопрос дает

Т е о р е м а (о расширении моделей, А. И. Мальцев [31]). *Если $\mathfrak{M}$ — бесконечная модель аксиоматизируемого класса K , то в K найдется модель, мощность которой превосходит любое наперед заданное кардинальное число и которая содержит $\mathfrak{M}$ в качестве своей подмодели. Если в аксиоматизируемом классе K содержатся модели со сколь угодно большим конечным числом элементов, то в K содержатся и бесконечные модели.*

Хотя в статье [31] была указана более слабая формулировка этой теоремы, приведенное там доказательство дает теорему расширения в полном объеме. Доказательство основывается на следующем важном свойстве аксиоматизируемых классов:

Т е о р е м а (локальная теорема УИП (теорема компактности) К. Гёдель [85], А. И. Мальцев [31, 32]). *Пусть задана какая-либо бесконечная система аксиоматизируемых классов моделей фиксированной сигнатуры. Если пересечение каждой конечной подсистемы классов этой системы непусто, то пересечение всех классов системы также непусто.*

Для случая конечной сигнатуры эта теорема непосредственно вытекает из теоремы полноты К. Гёделя. В общем случае доказательство опирается на аксиому выбора. Е. Лосем [84] показано, что из локальной теоремы обратно можно вывести аксиому выбора*.

2.2. Малые модели

В теореме о расширениях ничего не говорится о том, расширения каких именно мощностей существуют у заданной бесконечной модели. Чтобы получить ответ на этот вопрос, условимся называть модель $\mathfrak{M}$ правильной, если она бесконечна и ее мощность не меньше мощности сигнатуры $\mathfrak{M}$. В противном случае $\mathfrak{M}$ будем называть малой моделью [41]. Из теоремы о расширениях и теоремы Левенгейма — Сколема непосредственно следует, что каждая правильная модель $\mathfrak{M}$ аксиоматизируемого класса K допускает погружение в отличную от $\mathfrak{M}$ модель того же класса K , мощность которой равна любому наперед заданному кардинальному числу, не меньшему мощности модели $\mathfrak{M}$.

При расширении малых моделей могут встретиться особенности. Так, в упомянутой заметке [41] построены аксиоматизируемые классы K_1 и K_2 континуальной сигнатуры, обладающие следующими свойствами: а) класс K_1

* Кроме первоначального доказательства локальной теоремы в [31], основанного на так называемых описаниях моделей и приведении аксиом к сколемской форме, в настоящее время опубликовано много других доказательств, основанных на существенно иных идеях (см. например, [48, 55, 77], а также А. И. Мальцев. Алгебраические системы. М., «Наука», 1970). — Прим. ред.

содержит конечные модели со сколь угодно большим числом элементов, и в то же время все бесконечные K_1 -модели имеют мощность, большую или равную мощности континуума; б) в классе K_2 существует счетная модель, все отличные от которой ее K_2 -расширения имеют мощность, не меньшую мощности континуума. Тем не менее имеет место

Т е о р е м а (см. [41]). *Если аксиоматизируемый класс K содержит модель $\mathfrak{M}$ бесконечной мощности $\mathfrak{m}$, то $\mathfrak{M}$ обладает истинным K -расширением мощности $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$. Если в K содержатся модели мощностей $\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \dots$, то в K содержится модель мощности, лежащей между $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \dots$ и $\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2 \cdot \dots$.*

Если воспользоваться обобщенной гипотезой континуума, то можно доказать также [41], что каждая бесконечная модель $\mathfrak{M}$ аксиоматизируемого класса K допускает K -расширение любой наперед заданной мощности, большей мощности $\mathfrak{M}^*$.

Те же вопросы независимо рассматривал М. О. Рабин [94]. Алгебру $\mathfrak{A} = \langle A; f_1, f_2, \dots \rangle$ он называл полной, если для любой конечноместной операции f , определенной на A , среди основных операций f_α алгебры $\mathfrak{A}$ существует такая, которая равна f . Аналогично определяется и понятие полной модели. При помощи техники ультрапроизведений (см. ниже § 4) М. О. Рабин доказывает утверждения, аналогичные некоторым из сформулированных выше результатов о малых моделях, а также доказывает следующее основное предложение:

Т е о р е м а (Рабин [94]). *Пусть справедлива обобщенная гипотеза континуума. Если мощность $\mathfrak{m}$ полной модели $\mathfrak{M}$ меньше первого слабо недостижимого кардинального числа и $\mathfrak{m}^{\aleph_0} > \mathfrak{m}$, то $\mathfrak{M}$ не имеет истинных расширений мощности $\mathfrak{m}$, арифметически эквивалентных $\mathfrak{M}$.*

Какие из приведенных утверждений равносильны гипотезе континуума и какие можно доказать без помощи этой гипотезы, остается, по-видимому, открытым вопросом.

2.3. Полнота и категоричность

Класс моделей K называется категоричным, если все его модели изоморфны, т. е. если с точностью до изоморфизма K состоит лишь из одной модели. Класс K называется полным, если его модели неразличимы друг от друга на языке УИП. Последнее означает, что если какая-либо закрытая формула УИП, сигнатура которой содержится в сигнатуре K , истинна на одной модели класса K , то она истинна и на любой другой модели K .

С теоретико-множественной точки зрения полные аксиоматизируемые классы сигнатуры σ — это минимальные среди аксиоматизируемых классов данной сигнатуры, а полные неаксиоматизируемые классы — это части полных аксиоматизируемых классов. Например, пусть $\mathfrak{M}$ — какая-нибудь модель сигнатуры σ . Обозначим через $\mathfrak{S}$ совокупность всех закрытых формул УИП сигнатуры σ , истинных на $\mathfrak{M}$. Тогда класс K моделей сигнатуры σ , на которых истинны все аксиомы из $\mathfrak{S}$, будет полным аксиоматизируемым классом, содержащим модель $\mathfrak{M}$.

Система аксиом данной сигнатуры σ называется полной, соответственно категоричной, если полон, соответственно категоричен, класс моделей сигнатуры σ , определяемый указанной системой аксиом.

* Требование обобщенной гипотезы континуума может быть опущено. — Прим. ред.

Теорема о расширении моделей показывает, что ни один категоричный класс, состоящий из бесконечных моделей, не может быть аксиоматизируемым.

Поэтому представляется весьма интересным понятие категоричности в данной мощности, введенное Е. Лосем [87]. Именно, согласно Е. Лосю, класс моделей K называется категоричным в мощности m , если изоморфны между собою все модели K , имеющие данную мощность m .

Например, известно, что

- а) все счетные линейно упорядоченные в себе плотные неограниченные множества изоморфны;
- б) все алгебраически замкнутые поля данной характеристики, имеющие одну и ту же несчетную мощность, изоморфны.

Отсюда видно, что класс линейно упорядоченных плотных неограниченных множеств категоричен в счетной мощности (и не категоричен в любой несчетной мощности), а классы алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики категоричны в любой несчетной мощности (и не категоричны в счетной мощности).

Пусть K — некоторый класс моделей и α, β — кардинальные числа. Символами $K_\alpha, K_\beta, K_\alpha^\beta$ обозначим классы K -моделей, мощность m которых удовлетворяет соответственно соотношениям $\alpha \leq m, m \leq \beta, \alpha \leq m \leq \beta$. Тогда имеет место

Т е о р е м а 1 (А. И. Мальцев [41]). *Если для аксиоматизируемых одно-типных классов K, L для некоторого кардинального числа α истинно соотношение $K_\alpha^\alpha \subseteq L$, то $K_{\aleph_0}^\alpha \subseteq L$, если α не меньше мощности сигнатуры K , и $K_{\aleph_0}^\alpha \subseteq L$ в остальных случаях.*

Второе из этих утверждений доказано с использованием расширенной гипотезы континуума.

Допустим теперь, что аксиоматизируемый класс K категоричен в бесконечной мощности α , большей или равной мощности сигнатуры K . Обозначим через $\mathfrak{M}$ K -модель мощности α , и пусть L — аксиоматизируемый полный класс, содержащий $\mathfrak{M}$. Пусть, кроме того, все модели K бесконечны. Тогда согласно теореме 1 $K \subseteq L$ и, значит, в силу минимальности L имеем $K = L$. Тем самым получена

Т е о р е м а 2 (Р. Воот [57]). *Если все модели аксиоматизируемого класса K бесконечны и K категоричен в бесконечной мощности, не меньшей мощности сигнатуры K , то K — полный класс.*

По аналогии с понятием категоричности в данной мощности можно ввести и понятие полноты класса в данной мощности. Из приведенного выше доказательства теоремы Воота видно, что в формулировке этой теоремы условие категоричности в мощности можно заменить более слабым условием полноты в мощности.

Класс моделей K конечной сигнатуры σ называется рекурсивно разрешимым, если существует алгоритм, позволяющий для каждой закрытой формулы УИП сигнатуры σ узнать, истинна или нет эта формула на каждой модели класса K . Важную связь между полнотой и рекурсивной разрешимостью дает очевидная

Т е о р е м а 3. *Каждый рекурсивно аксиоматизируемый полный класс моделей рекурсивно разрешим.*

Из теорем 2, 3, в частности, непосредственно вытекает рекурсивная разрешимость классов, указанных в примерах а), б).

А. Эрэнфойхт и А. Мостовский [82] показали, что в каждом аксиоматизируемом классе моделей, содержащем бесконечные модели, найдутся модели, группа автоморфизмов которых имеет сколь угодно большую мощность. С помощью результатов этой статьи А. Эрэнфойхт [81] нашел ряд свойств аксиоматизируемых классов моделей, категоричных в мощности вида 2^m ($m \geq \aleph_0$). В частности, он доказал, что в таких классах не может быть формульным никакое отношение порядка.

2.4. Теоретико-множественная характеристика аксиоматизируемых классов

В связи с общими свойствами аксиоматизируемых классов моделей, изложенными в п. 2.1, естественно возникла задача о нахождении необходимых и достаточных признаков, характеризующих аксиоматизируемые классы. Так как язык, на котором надо формулировать эти признаки, не указывается, то задача может допускать различные решения. Так, Е. Лось [25] охарактеризовал аксиоматизируемые классы на языке булевых алгебр. И. Мыцельский [52] указал характеристику аксиоматизируемых классов на языке функций. Однако эти работы пока полностью не опубликованы, и содержание их мы излагать не будем.

В 1959 г. появилась важная статья С. Чжана [79], в которой дана прозрачная характеристика на языке отображений тех классов моделей, которые могут быть описаны аксиомами сколемского вида. Обобщив надлежащим образом определения С. Чжана, А. Д. Тайманов [68, 69] решил и общую задачу, найдя теоретико-множественные характеристики аксиоматизируемых, конечно аксиоматизируемых и других аксиоматизируемых классов моделей. При этом в качестве простых следствий получились известные теоремы Лоса — Тарского, Лоса — Сушко, А. Робинсона о характеристиках $\forall$ - и $\forall\exists$ -классов. Ниже кратко излагаются упомянутые результаты А. Д. Тайманова*.

Другие характеристики изложены в § 4. Пусть $\mathfrak{M}_1$ — некоторая подмодель модели $\mathfrak{M}$. n -расширением $\mathfrak{M}_1$ внутри $\mathfrak{M}$ называется всякая подмодель $\mathfrak{M}_2$ модели $\mathfrak{M}$, получающаяся присоединением к $\mathfrak{M}_1$ не более n каких-нибудь элементов $\mathfrak{M}$. Будем говорить также, что $\mathfrak{M}_1$ есть n_1 -подмодель, если $\mathfrak{M}_1$ содержит не более n_1 элементов (или пустая в случае $n_1 = 0$).

Рассмотрим какие-нибудь однотипные модели $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, и пусть $\mathfrak{M}_1$ — некоторая n_1 — подмодель модели $\mathfrak{M}$. Изоморфное отображение φ_1 модели $\mathfrak{M}_1$ в модель $\mathfrak{N}$ называется (n_1, n_2) -отображением, если любое n_2 -расширение $\mathfrak{N}_2$ подмодели $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}_1^{\varphi_1}$ можно отобразить в $\mathfrak{M}$ при помощи изоморфизма φ_2 , совпадающего с φ_1^{-1} на $\mathfrak{N}_1$.

Аналогично указанный изоморфизм φ_1 называется (n_1, n_2, n_3) -отображением $\mathfrak{M}_1$ в $\mathfrak{N}$, если для каждого n_2 -расширения $\mathfrak{N}_2$ подмодели $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}_1^{\varphi_1}$ найдется такой изоморфизм ψ_2 модели $\mathfrak{N}_2$ в $\mathfrak{M}$, совпадающий с φ_1^{-1} на $\mathfrak{N}_1$, что для каждого n_3 -расширения $\mathfrak{M}_3$ подмодели $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{N}_2^{\psi_2}$ найдется изоморфизм φ_3 модели $\mathfrak{M}_3$ в $\mathfrak{N}$, совпадающий с ψ_2^{-1} на $\mathfrak{M}_2$. Таким же образом определяется и понятие $(n_1, n_2, \dots, n_l)$ -отображения n_1 -подмодели $\mathfrak{M}_1$ модели $\mathfrak{M}$ в модель $\mathfrak{N}$.

* См. также R. Fraisse. Sur les classifications des systèmes de relations. — Publ. sci. Univ. Alger, 1, 1954, N 1. — Прим. ред.

Если для заданной подмодели $\mathfrak{M}_1$ модели $\mathfrak{M}$ существует $(n_1, n_2, \dots, n_l)$ -отображение $\mathfrak{M}_1$ в модель $\mathfrak{N}$, то пишут

$$\mathfrak{M} \leq (\mathfrak{M}_1; n_1, \dots, n_l) \mathfrak{N} \quad (1)$$

и говорят, что $\mathfrak{M}_1$ из $\mathfrak{M}$ $(n_1, \dots, n_l)$ -отобразима в $\mathfrak{N}$.

Если отношение (1) имеет место для любой n_1 -подмодели $\mathfrak{M}_1$ модели $\mathfrak{M}$, то пишут

$$\mathfrak{M} \leq (n_1, \dots, n_l) \mathfrak{N} \quad (2)$$

и говорят, что $\mathfrak{M}$ $(n_1, \dots, n_l)$ -вложима в $\mathfrak{N}$.

В частности, из приведенных определений вытекает, что при $n_1 = 0$ отношение (2) равносильно отношению $\mathfrak{N} \leq (n_2, \dots, n_l) \mathfrak{M}$.

Модели $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ называются $(n_1, \dots, n_l)$ -эквивалентными, если каждая из них $(n_1, \dots, n_l)$ -вложима в другую.

Напомним еще, что модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ называются арифметически эквивалентными (УИП-неразличимыми), если каждая закрытая формула УИП, сигнатура которой входит в сигнатуру $\mathfrak{M}$, истинная на одной из моделей $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, является истинной и на другой.

Т е о р е м а 1 (А. Д. Тайманов [70]). Для того чтобы модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ одинаковой сигнатуры были арифметически эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы они были $(n_1, \dots, n_l)$ -эквивалентными для любого кортежа $(n_1, \dots, n_l)$ ($l = 1, 2, \dots$).

Для того чтобы сформулировать условия А. Д. Тайманова для аксиоматизируемости классов моделей, условимся аксиомы вида

$$(\forall x_{11} \dots x_{1n_1}) (\exists x_{21} \dots x_{2n_2}) \dots (Q x_{l1} \dots x_{ln_l}) \mathfrak{A}(x_{11}, \dots, x_{1n_1}),$$

$$(\exists x_{21} \dots x_{2n_2}) \dots (Q x_{l1} \dots x_{ln_l}) \mathfrak{A}(x_{11}, \dots, x_{1n_1}),$$

($Q = \forall, \exists$)

называть соответственно $(n_1, \dots, n_l)$ -аксиомой и $(0, n_2, \dots, n_l)$ -аксиомой и говорить, что первая аксиома принадлежит кортежу $(n_1, \dots, n_l)$, а вторая принадлежит кортежу $(0, n_2, \dots, n_l)$. Число l называют длиной кортежа.

Т е о р е м а 2 (А. Д. Тайманов [70]). Абстрактный класс моделей K конечной сигнатуры тогда и только тогда описываем $\forall \exists \forall \dots Q$ -аксиомами

(соответственно $\exists \forall \exists \dots Q$ -аксиомами), когда из того, что произвольная модель

$\mathfrak{M}$ сигнатуры K для любого кортежа $(n_1, \dots, n_l)$ $(n_1, \dots, n_l)$ -вложима $[(0, n_1, \dots, n_l)$ -вложима] в подходящую K -модель следует, что $\mathfrak{M}$ принадлежит K .

Т е о р е м а 3 (А. Д. Тайманов [68]). Абстрактный класс моделей K тогда и только тогда аксиоматизируем, когда из того, что произвольная модель $\mathfrak{M}$ для любого кортежа $(n_1, \dots, n_l)$ $(n_1, \dots, n_l)$ -вложима в подходящую K -модель, вытекает, что $\mathfrak{M}$ принадлежит K .

Т е о р е м а 4 (А. Д. Тайманов [70]). Абстрактный класс моделей конечной сигнатуры K тогда и только тогда описывается одной $(n_1, \dots, n_l)$ -аксиомой $[(0, n_1, \dots, n_l)$ -аксиомой], когда существует такой кортеж $(n_1, \dots, n_l)$, что каждая модель $\mathfrak{M}$ заданной сигнатуры, $(n_1, \dots, n_l)$ -вложимая $[(0, n_1, \dots, n_l)$ -вложимая] в подходящую K -модель, принадлежит классу K .

Для кортежей вида (n_1, n_2) указанные выше определения и теоремы были получены С. Чжаном [79]. Для кортежей длины 1 теоремы 2 и 4 образуются в теореме А. Тарского [63] и соответственно Р. Воота [88], указывающие характеристику классов, описываемых V-аксиомами или, соответственно, одной V-аксиомой.

Условия аксиоматизируемости С. Чжана и А. Д. Тайманова имеют форму условий замкнутости класса K : из «родственности» данной модели $\mathfrak{M}$ моделям класса K вытекает принадлежность $\mathfrak{M}$ классу K . Развивая эту старую идею, С. Р. Когаловский [18] придал условиям А. Д. Тайманова «топологический» вид и на этом пути нашел ряд других все более тонких «топологических» свойств аксиоматизируемых классов, в том числе и необходимых и достаточных.

2.5. Категории моделей

В п. 1.1 было определено понятие гомоморфного отображения одной модели на произвольную модель той же сигнатуры. Поэтому каждый класс моделей K заданной сигнатуры можно рассматривать с более общей точки зрения как систему множеств $\mathfrak{S}$ (основных множеств моделей) и систему $\mathfrak{F}$ отображений некоторых из заданных множеств в некоторые множества той же системы (гомоморфизмы моделей). Система $\mathfrak{F}$, очевидно, удовлетворяет следующим требованиям:

а) тождественное отображение каждого множества из $\mathfrak{S}$ на себя принадлежит $\mathfrak{F}$;

б) для любых φ, ψ из $\mathfrak{F}$, если φ — отображение M_1 в M_2 и ψ — отображение M_2 в M_3 , то $\varphi\psi$ есть отображение M_1 в M_3 , принадлежащее $\mathfrak{F}$.

Пара $\langle \mathfrak{S}, \mathfrak{F} \rangle$, составленная из системы множеств $\mathfrak{S}$ и системы отображений $\mathfrak{F}$, удовлетворяющих условиям а), б), называется категорией множеств или конкретной категорией. Ряд обычных алгебраических понятий, таких, например, как понятие изоморфизма, понятия свободного и прямого произведений и т. п., может быть определен в произвольных категориях. Поэтому естественной казалась задача выделить те свойства классов моделей, которые могут быть выражены в чисто категорийных терминах при условии, что рассматривается категория моделей в указанном выше смысле. Так, в заметке [36] ставится вопрос: в каких классах моделей возможно определить понятие порождающих элементов так, чтобы оно обладало обычными свойствами? Оказалось, что ответ на этот вопрос целесообразно дать именно в виде условий, налагаемых на категорию моделей этого класса.

В заметках [36, 38] изучаются те свойства отдельных классов алгебр и моделей, которые могут быть выражены на категорийном языке. В ряде случаев оказывается возможным дать полную категорийную характеристику классов алгебр и классов моделей. Например, в [37] на этом пути охарактеризованы категории квазипримитивных классов алгебр, категории универсально аксиоматизируемых классов моделей и некоторые другие конкретные категории*.

Начатое в упомянутых заметках [36—38] исследование категорийных свойств классов моделей было продолжено С. Р. Когаловским [18, 20] и Дж. Исбелом [13—15]. В частности, С. Р. Когаловскому [20] удалось найти кате-

* Это значит, что L состоит из тех и только тех подмоделей, на которых истинны указанные аксиомы.

горийную характеристику универсально аксиоматизируемых классов алгебр. Изменяя само понятие категории класса моделей, он же нашел категорийные характеристики и общих аксиоматизируемых классов моделей.

В работах Дж. Исбела [13—15] рассматриваются общие категории классов алгебр и моделей и для этих новых категорий решаются задачи, в известном смысле аналогичные описанным выше.

Ввиду того что исследования по категориям опираются на большую систему специальных понятий, которые в дальнейших частях доклада нигде не потребуются, мы не будем здесь приводить формулировок даже основных результатов о категориях моделей, ограничившись только упоминанием о существовании этой ветви теории классов моделей.

§ 3. Некоторые специальные аксиоматизируемые классы

Пусть V — какое-нибудь свойство классов моделей. Как и выше, мы будем говорить, что аксиома $\mathfrak{A}$ обладает свойством V , если этим свойством обладает класс моделей, определяемый аксиомой $\mathfrak{A}$. Иногда случается, что аксиомы, имеющие данное простое внешнее строение W , заведомо обладают свойством V . Тогда естественно встают следующие вопросы: а) для каждой ли аксиомы, обладающей свойством V , существует равносильная ей аксиома, имеющая строение W ? б) каждый ли аксиоматизируемый класс моделей, обладающий свойством V , допускает описание при помощи аксиом, имеющих строение W ? в) каким требованиям структурного типа должен удовлетворять класс K , обладающий свойством V , чтобы этот класс был аксиоматизируемым и притом аксиомами данного строения W ?

Например, возьмем в качестве V такое свойство: «все подмодели моделей класса K принадлежат классу K ». Тогда упомянутые в п. 2.4 теоремы А. Тарского и Р. Воота будут как раз ответами на вопросы а), б), в) применительно к рассматриваемому случаю. Ниже излагаются решения вопросов а), б), в) для некоторых других свойств V .

3.1. Гомоморфно замкнутые классы

Класс моделей K называется гомоморфно замкнутым, если он вместе с каждой своей моделью $\mathfrak{M}$ содержит и каждую модель, являющуюся гомоморфным образом $\mathfrak{M}$. Аналогично если L подкласс класса моделей K , то L называется гомоморфно замкнутым внутри (или относительно K), если каждая K -модель, являющаяся гомоморфным образом L -модели, содержится в L .

Пусть $\mathfrak{A}$ — формула УИП, имеющая предваренную конъюнктивную форму. Говорят, что предикатный символ P имеет позитивное (негативное) вхождение в $\mathfrak{A}$, если в $\mathfrak{A}$ встречается выражение вида $P(x_1, \dots, x_k)$ (соответственно вида $\neg P(x_1, \dots, x_k)$), где $x_1, \dots, x_k$ — предметные символы.

Формула $\mathfrak{A}$ называется позитивной в символах $P_1, \dots, P_l$, если ни один из этих символов не имеет негативных вхождений в $\mathfrak{A}$.

Давно было замечено (Е. Марчевский [47]), что все позитивные аксиомы гомоморфно замкнуты, и, следовательно, если подкласс L характеризуется внутри K позитивными аксиомами, то L гомоморфно замкнут внутри K . В 1955 г. Е. Лось [25] сообщил без доказательства, что каждый аксиоматизируемый гомоморфно замкнутый подкласс класса алгебр аксиоматизируем с помощью позитивных аксиом. Независимо от Е. Лося в 1957 г. докладчик

[34] анонсировал, что каждый аксиоматизируемый гомоморфно замкнутый класс моделей аксиоматизируем посредством позитивных аксиом. В 1959 г. Р. Линдон вместе с подробным доказательством была опубликована общая

Т е о р е м а 1 (Р. Линдон [23]). *Каждый аксиоматизируемый и гомоморфно замкнутый подкласс аксиоматизируемого класса моделей аксиоматизируем внутри этого класса с помощью одних позитивных аксиом.*

Основным средством для доказательства этой теоремы явилась следующая важная

Т е о р е м а (интерполяционная теорема УИП, Р. Линдон [22]). *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — закрытые формулы УИП, которые могут содержать наряду с предикатными символами и символы операций, и пусть $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ — тождественно истинная формула УИП. Тогда существует закрытая формула $\mathfrak{C}$ такая, что: 1) формулы $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B}$ тождественно истинны; 2) каждый предикатный символ, входящий в $\mathfrak{C}$ позитивно, позитивно входит и в $\mathfrak{A}$, и в $\mathfrak{B}$; 3) каждый предикатный символ, входящий в $\mathfrak{C}$ негативно, негативно входит и в $\mathfrak{A}$, и в $\mathfrak{B}$ (все формулы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ предполагаются имеющими предваренную конъюнктивную форму)*.*

Если в формулировке интерполяционной теоремы вычеркнуть слова «позитивный» и «негативный», то получится формулировка теоремы В. Крейга [17], уточнением которой и является интерполяционная теорема.

В п. 1.1 одновременно с понятием гомоморфизма было введено понятие сильного гомоморфизма. Там же упоминалось, что внутри класса алгебр слабые и сильные гомоморфизмы совпадают. В связи с этим было бы интересно найти ответ на

В о п р о с 1. Нельзя ли указать строение тех аксиом, которые описывают классы моделей, внутри которых каждый гомоморфизм сильный?

В о п р о с 2. В теореме 1 условие аксиоматизируемости подкласса L в классе K заведомо не необходимо. Как его следует ослабить, чтобы теорема все еще оставалась верной и, в частности, для сильных гомоморфизмов?

3.2. Универсальные и сколемские подклассы

В п. 2.4 упоминалась теорема А. Тарского о характеристике классов, допускающих описание посредством универсальных аксиом. При переходе от классов к подклассам получается более общая

Т е о р е м а 1 (Е. Лось [26], А. Тарский [64]). *Подкласс L класса моделей K конечной сигнатуры тогда и только тогда может быть охарактеризован внутри K системой универсальных аксиом, когда выполнены следующие два условия: 1) каждая K -подмодель произвольной L -модели есть L -модель; 2) если каждая конечная подмодель некоторой K -модели $\mathfrak{M}$ изоморфно вложима в подходящую L -модель, то $\mathfrak{M}$ также вложима в подходящую L -модель.*

В цитированной работе [26] Е. Лось указал интересное приложение теоремы 1 к следующему важному алгебраическому вопросу: даны два однотипных класса алгебр K_1 и K_2 , требуется охарактеризовать класс L тех K_1 -алгебр, которые изоморфно вложимы в K_2 -алгебры. Из теоремы 1 непосредственно следует, что в случае, когда исходные классы K_1 и K_2 аксиоматизируемы, класс L заведомо является универсально аксиоматизируемым. Например, до сих пор явно не установлены условия вложимости ассоциативных

* См. реф.: М. А. Taitzlin. J. Symbol. Log., 1960, 25, N 3, 273—274.— Прим. ред.

колец в тела. Тем не менее эти условия заведомо можно представить в виде некоторой системы универсальных высказываний *.

Е. Лось и Р. Сушко [28] рассмотрели также несколько более общую задачу, названную ими проблемой совместной вложимости. Пусть даны алгебры $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$, принадлежащие аксиоматизируемому классу K . При каких условиях существует алгебра $\mathfrak{M}$, содержащая подалгебры, изоморфные $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$? Оказалось, что такое совместное расширение $\mathfrak{M}$ существует тогда и только тогда, когда из выполнимости аксиомы вида

$$(x_1) \dots (x_m) (y_1) \dots (y_n) (\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m) \vee \mathfrak{B}(y_1, \dots, y_n))$$

на классе K вытекает или выполнимость аксиомы $(x_1) \dots (x_m) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m)$, или выполнимость аксиомы $(y_1) \dots (y_n) \mathfrak{B}(y_1, \dots, y_n)$ одновременно на $\mathfrak{M}_1$ и на $\mathfrak{M}_2$.

Аналогичные условия найдены этими авторами и для существования совместного расширения любой системы алгебр заданного аксиоматизируемого класса.

Очевидно, что объединение возрастающей цепочки групп есть группа, возрастающей цепочки колец есть кольцо и т. д. Спрашивается, для каких классов K -моделей верно, что объединение возрастающей цепочки K -моделей есть K -модель? На языке УИП аналогичный вопрос можно сформулировать так: для каких аксиом $\mathfrak{A}$ верно, что из истинности $\mathfrak{A}$ на каждой модели возрастающей цепочки $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \subseteq \dots$ вытекает истинность $\mathfrak{A}$ на модели $\bigcup \mathfrak{M}_i$? Ответ на эти вопросы дает

Теорема 2 (Е. Лось и Р. Сушко [27]). *Аксиоматизируемый класс моделей K тогда и только тогда описывается аксиомами сколемского вида (т. е. $\forall\exists$ -аксиомами), когда объединение каждой возрастающей цепочки K -моделей является K -моделью.*

На подклассы аксиоматизируемых классов моделей эта теорема была перенесена А. Робинсоном в следующей форме:

Теорема 3 (А. Робинсон [58]). *Подкласс L аксиоматизируемого класса моделей K тогда и только тогда может быть охарактеризован внутри K аксиомами сколемского вида, когда L аксиоматизируем и в то же время из принадлежности K объединения любой возрастающей цепочки L -моделей вытекает, что это объединение есть L -модель.*

Теорема 3 была обобщена на случай аксиом произвольного $\forall\exists\forall \dots Q$ -типа ($Q = \forall, \exists$) Д. А. Захаровым и Х. Кейслером. Мы изложим результат в формулировке Д. А. Захарова [11].

Пусть $\mathfrak{N}$ — подмодель некоторой модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_1$ в свою очередь — подмодель модели $\mathfrak{N}$. В соответствии с определениями п. 2.4 пишем

$$\mathfrak{N} \leq (\mathfrak{N}_1; n_1, \dots, n_l) \mathfrak{N}, \quad (1)$$

если тождественное отображение $\mathfrak{N}_1$ в $\mathfrak{N}$ есть $(n_1, \dots, n_l)$ -отображение пары $\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}$. Если условие (1) выполняется для каждой n_l -подмодели $\mathfrak{N}_1$ модели $\mathfrak{N}$, то пишут

$$\mathfrak{N} \leq (n_1, \dots, n_l) \mathfrak{N}. \quad (2)$$

Наконец, говорят, что $\mathfrak{N}$ есть l -подмодель модели $\mathfrak{M}$, если условие (2) выполняется для каждого кортежа $(n_1, \dots, n_l)$ данной длины l . Тогда пишут $\mathfrak{N} \leq_l \mathfrak{M}$.

* Проблема решена (см., например, P. Cohn. Free rings and their relations. Acad. Press, 1971, p. 280—287). — Прим. ред.

Теорема 4. (Д. А. Захаров [11]). *Аксиоматизируемый подкласс L аксиоматизируемого класса моделей K тогда и только тогда может быть охарактеризован внутри K аксиомами типа $\forall\exists\forall \dots Q$ ($l+1$ символов, $Q = \forall, \exists$), когда для любой возрастающей цепочки L -моделей, связанных условиями $\mathfrak{M}_1 \leq \mathfrak{M}_2 \leq \dots, \bigcup \mathfrak{M}_n \in K$, следует, что $\bigcup \mathfrak{M}_n \in L$.*

Отношение $\mathfrak{M}_1 \leq \mathfrak{M}_2$ равносильно утверждению, что $\mathfrak{M}_1$ есть подмодель модели $\mathfrak{M}_2$ в обычном смысле слова. Поэтому, полагая в теореме Д. А. Захарова $l = 1$, получим снова теорему 3.

Еще более широкие обобщения теоремы 3 в различных направлениях получил Д. А. Тайманов [69].

3.3. Прямые произведения моделей

Пусть каждому элементу α некоторого множества A поставлена в соответствие определенная модель $\mathfrak{M}_\alpha = \langle M_\alpha; P_1, P_2, \dots \rangle$ фиксированной сигнатуры $\sigma = \langle P_1, P_2, \dots \rangle$. Обозначим через M прямое (декартово) произведение множеств M_α , т. е. совокупность всех функций f , определенных на A и таких, что $f(\alpha) \in M_\alpha$. На M определяем предикат P_i , полагая выражение $P_i(f_1, \dots, f_n)$ истинным тогда и только тогда, когда $P_i(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))$ истинно для каждого $\alpha \in A$. Модель $\mathfrak{M} = \langle M; P_1, P_2, \dots \rangle$ с определенными так предикатами P_i называется декартовым произведением системы моделей $\mathfrak{M}_\alpha$ с нумерующим множеством A . Всякая модель, изоморфная $\mathfrak{M}$, называется прямым произведением моделей $\mathfrak{M}_\alpha$.

Если модели $\mathfrak{M}_\alpha$ — алгебры, то модель $\mathfrak{M}$ будет также алгеброй, изоморфной обычному «полному» прямому произведению алгебр $\mathfrak{M}_\alpha$.

Благодаря важной роли, которую играют прямые произведения в теории групп и в других алгебраических дисциплинах, в последнее десятилетие появилось довольно много работ, посвященных изучению прямых произведений моделей. Так, в 1951 г. была опубликована статья А. Хорна [78], в которой было отмечено, что если аксиома вида

$$(Qx_1) \dots (Qx_n) (\bigwedge_i \bar{A}_{i1} \vee \dots \vee \bar{A}_{i\lambda_i} \vee A_i \wedge \bigwedge_j \bar{B}_{j1} \vee \dots \vee \bar{B}_{j\mu_j}) (Q = \exists, \forall), \quad (1)$$

где $A_{i\lambda}, A_i, B_{j\mu}$ — атомарные формулы вида $P_k(x_i, x_j, \dots, x_l)$, ($Q = \exists, \forall$), истинна на некоторых моделях $\mathfrak{M}_\alpha$ сигнатуры σ , то эта же аксиома истинна и на прямом произведении моделей $\mathfrak{M}_\alpha$. В настоящее время формулы вида (1) принято называть хорновскими.

Условимся произвольную формулу называть мультипликативно замкнутой, если она обладает упомянутым выше свойством, т. е. если из того, что формула истинна на некоторых моделях $\mathfrak{M}_\alpha$, следует, что она истинна и на прямом произведении моделей $\mathfrak{M}_\alpha$.

В работе А. Хорна было доказано, что если какая-нибудь универсальная формула мультипликативно замкнута, то она эквивалентна универсальной формуле хорновского вида. В связи с этим возник естественный вопрос: не будет ли всякая мультипликативно замкнутая формула эквивалентной аксиоме хорновского вида?

Справедливость этого предположения для позитивных аксиом и аксиом некоторых других видов была доказана К. Бингом [3]. Недавно то же было доказано К. Адделем [2] для аксиом, не содержащих никаких предикатных символов, кроме знака равенства. Однако А. Морел и С. Чжан [80] нашли один необходимый признак для эквивалентности какой-нибудь формулы

формуле хорновского вида и с помощью него построили пример мультипликативно замкнутой формулы, не эквивалентной никакой хорновской формуле. В этой же статье А. Морел и С. Чжан поставили задачу о нахождении необходимых и достаточных условий для того, чтобы некоторая формула была эквивалентна формуле хорновского вида. С другой стороны, Р. Линдон [21] одновременно была высказана гипотеза о том, что мультипликативно замкнутые формулы сколемского вида эквивалентны аксиомам хорновского вида. Там же Р. Линдон утверждал, что мультипликативно замкнутые $\exists$ -формулы эквивалентны хорновским формулам. В 1959—1960 гг. А. Д. Тайманов [71] нашел необходимые и достаточные условия для эквивалентности формулы формуле хорновского вида, решив тем самым проблему А. Морел и С. Чжана. При помощи этих условий А. Д. Тайманов показал, что формула

$$(\exists x_1 x_2 x_3) (P_1(x_1) \& P_2(x_2) \& \neg P_3(x_3) \& P_1(x_3) \vee P_2(x_3)), \quad (2)$$

будучи мультипликативно замкнутой, тем не менее к хорновскому виду не приводится *. Так как формула (2) экзистенциальная, то тем самым была опровергнута гипотеза Р. Линдона.

Некоторые другие результаты о мультипликативно замкнутых классах моделей будут указаны ниже по ходу дела, а здесь упомянем лишь работу А. Обершельна [54], относящуюся к мультипликативно замкнутым формулам.

Особое направление в теории мультипликативно замкнутых классов моделей было начато работой А. Мостовского [49], в которой было показано, что любая прямая степень рекурсивно разрешимой модели рекурсивно разрешима. Из результатов А. Мостовского вытекало также, что если аксиоматизируемый класс моделей содержит конечные прямые степени своих моделей, то он содержит и любые бесконечные прямые степени своих моделей. Это дало повод Е. Лосю [25] высказать следующую гипотезу:

Каждый аксиоматизируемый класс моделей, содержащий все конечные прямые произведения своих моделей, содержит и любые бесконечные прямые произведения своих моделей.

Гипотеза эта была доказана Р. Воотом [8]. В совместной работе С. Фефермана и Воота [75] изложено подробное доказательство гипотезы Е. Лося и даны обобщения ее, а также упоминавшейся выше теоремы А. Мостовского на произведения моделей, отличные от прямых.

Независимо от работы С. Фефермана и Р. Воота докладчиком была опубликована заметка [40], в которой прямые произведения обобщаются в ином направлении и указываются канонические формы для формул УИП, относящихся к произведениям, выраженные через формулы, относящиеся к сомножителям. В качестве частных случаев отсюда снова получают упоминавшиеся результаты А. Мостовского и Р. Воота.

3.4. Подпрямые произведения

Пусть $\mathfrak{M}_\alpha$ ($\alpha \in A$) — система моделей фиксированной сигнатуры $\sigma = \langle P_1, P_2, \dots \rangle$, и пусть $\mathfrak{M}$ — декартово произведение моделей $\mathfrak{M}_\alpha$. Допустим еще, что заданы однозначные отображения φ_α какой-то модели $\mathfrak{N}$ сигнатуры

* Данная формула приводима к хорновскому виду (см. P. G. Hinman, J. Symbol. Log., 1965, 30, № 3, 253—254; А. Д. Тайманов. Исправления к работе «О классах моделей, замкнутых относительно прямого произведения». — Изв. АН СССР, сер. мат., 1966, 30, № 1, 257). Полное решение вопроса о гипотезе Линдона см. F. Golvin. Horn sentences. — Ann. Math. Log., 1970, 1, № 4, 389—422. — Прим. ред.

от модели $\mathfrak{M}_\alpha$. Отображения φ_α порождают естественное отображение φ модели $\mathfrak{M}$ в модель $\mathfrak{M}$. Если φ — изоморфизм $\mathfrak{M}$ на некоторую подмодель из $\mathfrak{M}$, то говорят, что модель $\mathfrak{M}$ разложена в подпрямое произведение моделей $\mathfrak{M}_\alpha$ с проектированиями φ_α .

Пусть K — некоторый абстрактный класс моделей. Модель $\mathfrak{M}$ называется подпрямой неразложимой в K , если в любом разложении $\mathfrak{M}$ в подпрямое произведение моделей класса K хотя бы одно из проектирований является изоморфизмом.

Г. Биркгофом [4] было доказано, что каждая алгебра произвольной сигнатуры σ разложима в подпрямое произведение алгебр, далее подпрямой неразложимых в классе всех алгебр сигнатуры σ . Ясно, что аналогичная теорема справедлива и для любого гомоморфно замкнутого класса алгебр. В заметке [34] найдены условия, которым должен удовлетворять класс моделей K , чтобы каждая K -модель была подпрямым произведением K -моделей, подпрямой неразложимых в K . В качестве следствия отсюда получается, что если класс моделей K описываем универсальными и позитивными аксиомами, то любая K -модель есть подпрямое произведение K -моделей, подпрямой неразложимых в K .

По аналогии с мультипликативно замкнутыми классами класс моделей K будем называть подпрямой замкнутой, если подпрямое произведение любой системы K -моделей принадлежит K . Естественно возникает вопрос: аксиомами какого специального строения описываемы подпрямой замкнутые аксиоматизируемые классы моделей? В отличие от аналогичного вопроса для мультипликативно замкнутых классов вопрос о подпрямой замкнутых классах оказался более простым. Полное его решение дает

Т е о р е м а (Р. Линдон [24]). *Аксиоматизируемый класс моделей тогда и только тогда подпрямой замкнут, когда он допускает описание аксиомами вида*

$$(x_1) \dots (x_n) (\mathfrak{A} (x_1, \dots, x_n) \rightarrow P_i (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n})),$$

где $\mathfrak{A}$ — позитивная формула, а P — основной предикатный символ.

Введем еще одно понятие. Подкласс L класса моделей K будет называться подпрямой замкнутой в K , если каждая K -модель, разлагающаяся в подпрямое произведение L -моделей, является L -моделью. Указанная выше теорема о характеристике подпрямой замкнутых аксиоматизируемых классов переносится без изменений и на подпрямой замкнутые подклассы аксиоматизируемых классов моделей (Р. Линдон [24]).

3.5. Конвексные и квазиаксиоматизируемые классы

Пересечение любой системы подгрупп произвольной группы является снова подгруппой, и, следовательно, если G — класс групп, то пересечение любой системы G -подмоделей произвольной G -модели есть снова G -модель. То же самое верно, если G — класс всех колец, всех полей и т. д. Исходя из этих примеров, А. Робинсон [56] предложил называть класс моделей K конвексным, если пересечение любой системы K -подмоделей произвольной K -модели либо пусто, либо является K -моделью. В цитированной работе А. Робинсона показано, что любой аксиоматизируемый конвексный класс моделей аксиоматизируем посредством аксиом сколемского вида. С. Чжан усилил этот результат, доказав, что справедлива

Т е о р е м а 1 (С. Чжан [79]). *Если в каждой модели аксиоматизируемого класса K пересечение любых двух K -подмоделей либо пусто, либо является K -подмоделью, то класс K аксиоматизируем посредством сколемских аксиом.*

Результат А. Робинсона был усилен в другом направлении в заметке [35], где условие аксиоматизируемости класса K заменено более слабым требованием его квазиаксиоматизируемости. Ниже дается более подробная формулировка этого требования.

Произвольный класс моделей K условимся называть компактным, если для любой системы $\mathfrak{S}$ аксиоматизируемых внутри K подклассов класса K из условия, что пересечение каждой конечной подсистемы системы $\mathfrak{S}$ непусто, вытекает, что и пересечение всех подклассов системы $\mathfrak{S}$ непусто.

Класс моделей K будет называться локально ограниченным (ср. п. 2.2), если для каждого кардинального числа $\mathfrak{m}$ существует кардинальное число $\mathfrak{n} = F(\mathfrak{m})$, обладающее следующим свойством: в каждой K -модели каждое множество элементов мощности не выше $\mathfrak{m}$ содержится в подходящей ее подмодели мощности не выше $\mathfrak{n}$.

Класс моделей K называется квазиаксиоматизируемым, если он одновременно компактен и локально ограничен.

Теоремы компактности и Левенгейма — Сколема из п. 2.1 показывают, что каждый аксиоматизируемый класс моделей заведомо компактен и локально ограничен. Однако легко строятся квазиаксиоматизируемые классы, не аксиоматизируемые в обычном смысле. Поэтому понятие квазиаксиоматизируемости можно рассматривать как непосредственное обобщение понятия аксиоматизируемости класса моделей.

Т е о р е м а 2 (А. И. Мальцев [35]). *Каждый абстрактный конвексный квазиаксиоматизируемый класс моделей аксиоматизируем посредством аксиом сколемского вида.*

Недавно С. Р. Когаловский заметил, что условие компактности класса моделей можно использовать и в задаче о характеристике аксиоматизируемых классов. Условимся говорить, что класс моделей арифметически замкнут, если вместе с каждой своей моделью он содержит и все арифметически эквивалентные ей модели (п. 2.3). Из теорем А. Д. Тайманова (п. 2.4) легко выводится

Т е о р е м а 3 (С. Р. Когаловский [19]). *Каждый компактный арифметически замкнутый класс моделей аксиоматизируем.*

Эту теорему легко представить и в несколько более общей форме. Условимся говорить, что подкласс L класса моделей K арифметически замкнут в K , если каждая K -модель, арифметически эквивалентная L -модели, есть L -модель. Из теоремы 3 теперь непосредственно следует, что подкласс L тогда и только тогда аксиоматизируем в компактном классе K , когда L компактен и арифметически замкнут в K . Условие компактности K можно заменить здесь надлежаще определенным условием компактности L внутри K .

§ 4. Ультрапроизведения

В самые последние годы большое значение в теории моделей приобрели так называемые ультрапроизведения моделей, являющиеся непосредственным обобщением прямых произведений. Начало этому направлению было заложено в работах Е. Лося [25]. Дальнейшее развитие теории ультрапроизведений получила в работах А. Тарского и некоторых других исследователей и в особенности в работах С. Кочина [93] и Х. Кислера [96]. Техника ультрапроиз-

ведений позволила получить заново и единообразным методом почти все изложенные выше результаты и получить ряд новых сильных теорем.

4.1. Основные определения

Система D непустых подмножеств множества I называется фильтром над I , если выполнены условия:

- а) пересечение любых двух подмножеств из D принадлежит D ;
- б) если $A \in D$ и $A \subseteq B \subseteq I$, то $B \in D$.

Фильтр D над I называется главным, если существует такое $A \in D$, что $D = \{x \mid A \subseteq x \subseteq I\}$.

Каждый фильтр над конечным множеством является главным. С другой стороны, если пересечение всех множеств какого-либо фильтра пусто, то фильтр заведомо не главный.

Фильтр D над I называется ультрафильтром, если для любого $A \subseteq I$ либо A , либо $I - A$ содержится в D .

С помощью аксиомы выбора легко доказывается, что каждая система F подмножеств произвольного множества I может быть пополнена до ультрафильтра над I , если пересечение любого конечного числа множеств из F непустое.

Пусть теперь каждому элементу i множества I поставлена в соответствие некоторая модель $\mathfrak{M}_i = \langle M_i; P_{i1}, P_{i2}, \dots \rangle$ фиксированного типа, и пусть D какой-либо фильтр над I .

В декартово произведение $M = \prod_{i \in I} M_i$ множеств M_i вводим эквивалентность $\equiv_D$, полагая

$$x \equiv_D y \leftrightarrow \{i \mid x_i = y_i\} \in D \quad (x, y \in M).$$

Через M/D обозначим фактор-множество и на нем определяем новую модель

$$\mathfrak{M} = \{M/D; P_1, P_2, \dots\} = \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i/D,$$

полагая

$$P_\lambda(x^1, \dots, x^{n_\lambda}) \leftrightarrow \{i \mid P_\lambda(x_i^1, \dots, x_i^{n_\lambda}) = I\} \in D. \quad (1)$$

Модель $\mathfrak{M}$ называется редуцированным произведением системы моделей $\mathfrak{M}_i$ ($i \in I$) относительно фильтра D .

Из этого определения вытекает, что если фильтр D главный, порожденный множеством A , то редуцированное произведение $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i/D$ изоморфно декартову произведению $\prod_{i \in A} \mathfrak{M}_i$. Существенно новым является случай, когда D — ультрафильтр.

Редуцированное произведение моделей относительно ультрафильтра называется ультрапроизведением. Значение ультрапроизведений определяется следующим их основным свойством:

Т е о р е м а 1 (ср. [93]). Пусть заданы

а) некоторая формула $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры $\sigma = \{P_1, P_2, \dots\}$ со свободными предметными переменными $x_1, \dots, x_n$;

б) ультрафильтр D над множеством I ;

в) система моделей $\mathfrak{M}_i = \langle M_i; P_{i1}, P_{i2}, \dots \rangle$ сигнатуры σ и система элементов $a^1, \dots, a^n$ в декартовом произведении $\prod M_i$.

Обозначим через $a_i^1, \dots, a_i^n$ проекции $a^1, \dots, a^n$ в множестве M_i . Формула $\mathfrak{A}(a^1/D, \dots, a^n/D)$

тогда и только тогда истинна в ультрапроизведении $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i/D$, когда совокупность номеров тех моделей $\mathfrak{M}_i$, в которых истинна формула $\mathfrak{A}(a_i^1, \dots, a_i^n)$, принадлежит D .

Доказательство этой теоремы проводится непосредственно индукцией по числу кванторов в формуле $\mathfrak{A}$ в предваренном виде (см., например, [93]).

Из теоремы 1 следует, что каждый аксиоматизируемый класс K моделей замкнут относительно ультрапроизведений и что

$$\prod \mathfrak{M}_i/D \in K \leftrightarrow \{i \mid \mathfrak{M}_i \in K\} \in D.$$

Если в редуцированном произведении $\prod \mathfrak{M}_i/D$ все модели $\mathfrak{M}_i$ совпадают с одной и той же моделью $\mathfrak{M}$, то редуцированное произведение называется редуцированной степенью $\mathfrak{M}$ относительно D и обозначается $\mathfrak{M}^I/D$. Редуцированные степени относительно ультрафильтров называются ультрастепенями.

Ставя в соответствие элементу a из $\mathfrak{M}$ элемент $b \in \mathfrak{M}^I$, все проекции которого совпадают с a , получим каноническое вложение модели $\mathfrak{M}$ в редуцированную степень $\mathfrak{M}^I/D$.

Согласно сказанному выше отображение φ некоторой модели $\mathfrak{M}$ в модель $\mathfrak{N}$ той же сигнатуры называется элементарным вложением $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$, если для каждой формулы $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ со свободными предметными переменными $x_1, \dots, x_n$, имеющей сигнатуру модели $\mathfrak{M}$, истинность $\mathfrak{A}(a^1, \dots, a^n)$ в $\mathfrak{M}$ влечет истинность формулы $\mathfrak{A}(a^1\varphi, \dots, a^n\varphi)$ в $\mathfrak{N}$ для произвольных $a^1, \dots, a^n$ из $\mathfrak{M}$.

Теорема 1 показывает, что каноническое отображение $\mathfrak{M}$ в ультрастепень $\mathfrak{M}^I/D$ является элементарным вложением. Таким образом, каждую ультрастепень модели $\mathfrak{M}$ можно рассматривать как элементарное расширение модели $\mathfrak{M}$, лежащее в любом аксиоматизируемом классе моделей, содержащем $\mathfrak{M}$.

Если ультрафильтр D главный, то он порождается некоторым одноэлементным множеством $\{i\}$. В этом случае каноническое вложение $\mathfrak{M}$ в ультрастепень $\mathfrak{M}^I/D$ будет просто изоморфизм $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}^I/D$. Если же фильтр D не главный и $\mathfrak{M}$ бесконечна, то вложение $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}^I/D$ заведомо не будет одно-однозначным отображением $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}^I/D$. Поэтому, беря в качестве I любое бесконечное множество, а в качестве D любой неглавный ультрафильтр над I , получим нетривиальное расширение модели $\mathfrak{M}$ тех же аксиоматизируемых классов, что и модель $\mathfrak{M}$. Тем самым получено новое доказательство теоремы о расширении моделей из п. 2.1.

С помощью ультрастепеней оказывается возможным перекинуть естественный алгебраический мост от понятий изоморфизма и изоморфного вложения моделей к понятиям элементарной эквивалентности и элементарного вложения моделей. Пусть $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1$ — однотипные модели. Отображение $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}_1$ называется степенным вложением $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}_1$, если найдутся такие ультрафильтры $\langle I, D \rangle, \langle I_1, D_1 \rangle$, для которых существует изоморфизм φ модели $\mathfrak{M}^I/D$ на модель $\mathfrak{M}_1^{I_1}/D_1$, удовлетворяющий диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}^I/D & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{M}_1^{I_1}/D_1 \\ j \uparrow & & \uparrow k \\ \mathfrak{M} & \rightarrow & \mathfrak{M}_1, \end{array}$$

где j, k — канонические вложения.

Из теоремы 1 следует, что каждое степенное вложение элементарно. При помощи обобщенной гипотезы континуума Кислер [96] доказал справедливость и обратного утверждения.

Аналогичным образом устанавливается и следующая несколько более общая

Т е о р е м а 2 (Кислер [96]). *Если подходящие ультрастепени моделей $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ изоморфны, то модели $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ элементарно эквивалентны. Если верна обобщенная гипотеза континуума, то верно и обратное: из элементарной эквивалентности моделей $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ следует изоморфизм подходящих ультрастепеней этих моделей над одним и тем же фильтром **.

Указанное выше утверждение о степенных вложениях получается из теоремы 2 простым внесением в сигнатуру всех элементов модели $\mathfrak{M}$.

Без помощи гипотезы континуума легко устанавливается

Т е о р е м а 3 (Фрейн [95]). *Для того чтобы модели $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ были элементарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой ультрафильтр $\langle I, D \rangle$, для которого существует элементарное вложение $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}^I/D$.*

Достаточность следует из теоремы 1. Для доказательства (см. [93]) необходимости расположим все элементы модели $\mathfrak{N}$ в трансфинитную цепочку $b = \langle b_0, b_1, \dots \rangle$. С каждым b_α сопоставим символ x_α и обозначим через T множество всех элементарных формул, все свободные предметные переменные которых содержатся в множестве символов x_α . Пусть запись $\mathfrak{N} \models \rho(b)$, где $\rho \in T$, означает, что формула ρ будет истинной в $\mathfrak{N}$, если в ρ все свободные предметные переменные заменить соответствующими элементами из $\mathfrak{N}$. Положим $I = \{\rho \mid \rho \in T \text{ и } \mathfrak{N} \models \rho(b)\}$. Если $\rho \in I$ и $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}$ — свободные переменные, встречающиеся в ρ , то формула $(\exists x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) \rho$ истинна в $\mathfrak{N}$, а значит, истинна и в $\mathfrak{M}$, т. е. в $\mathfrak{M}$ найдутся такие элементы $a_\rho = \langle a_{\rho\alpha_1}, \dots, a_{\rho\alpha_n} \rangle$, что $\mathfrak{M} \models \rho(a_\rho)$.

Для $\rho \in T$ полагаем $\mathfrak{Z}_\rho = (\rho' \mid \mathfrak{M} \models \rho'(a_\rho))$ и пусть $\mathfrak{Z} = \{\mathfrak{Z}_\rho \mid \rho \in T\}$. Так как пересечение любого конечного числа множеств из системы $\mathfrak{Z}$ непусто, то найдется ультрафильтр $\langle I, D \rangle$, содержащий $\mathfrak{Z}$. Отображение $\varphi: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}^I/D$, определяемое условием $\varphi(b_\alpha) = f_\alpha/D$, $f_\alpha(\rho) = a_{\rho\alpha}$ для всех α , является, как легко видеть, искомым элементарным вложением.

4.2. Прямые пределы и ультрапределы

Направленной системой $\{\mathfrak{M}, j\}$ моделей над направленным множеством I называется отображение, которое каждому $\alpha \in I$ ставит в соответствие модель $\mathfrak{M}_\alpha$ и каждой направленной паре $\alpha \leq \beta$ элементов I ставит в соответствие гомоморфизм $j_\alpha^\beta: \mathfrak{M}_\alpha \rightarrow \mathfrak{M}_\beta$, так что гомоморфизмы j_α^α суть тождественные отображения $\mathfrak{M}_\alpha$ на $\mathfrak{M}_\alpha$ и для $\alpha < \beta < \gamma$ имеем $j_\beta^\gamma j_\alpha^\beta = j_\alpha^\gamma$.

Прямым пределом системы $\{\mathfrak{M}, j\}$ называется модель $\mathfrak{M}_\infty$ того же типа, что и модели $\mathfrak{M}_\alpha$, определяемая следующим путем. Обозначим через M совокупность всех пар вида $\langle \alpha, a_\alpha \rangle$, $a_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$. Пары $\langle \alpha, a_\alpha \rangle$, $\langle \beta, b_\beta \rangle$ называются эквивалентными, если существует $\gamma > \alpha$, $\gamma > \beta$, для которого $j_\alpha^\gamma a_\alpha = j_\beta^\gamma b_\beta$. Классы эквивалентных пар образуют основное множество конструируемой

* Без предположения гипотезы континуума эта теорема доказана (см. S. Shelach. Every two elementary equivalent models have isomorphic ultrapowers).— Israel J. Math., 1971, 10, N 4, 224—234.— Прим. ред.

модели $\mathfrak{M}_\infty$. Основное отношение $P_s(a, b, \dots, c)$ называется истинным в $\mathfrak{M}_\infty$, если существует такое α , что $a \equiv \langle \alpha, a_\alpha \rangle, \dots, c \equiv \langle \alpha, c_\alpha \rangle$ и $P_s^\alpha(a_\alpha, b_\alpha, \dots, c_\alpha)$ истинно в $\mathfrak{M}_\alpha$.

Отображение $j^\alpha: \mathfrak{M}_\alpha \rightarrow \mathfrak{M}_\infty$, определяемое соотношением $j^\alpha a_\alpha = |\langle \alpha, a_\alpha \rangle|$, где $|\langle \alpha, a_\alpha \rangle|$ — смежный класс из $\mathfrak{M}_\infty$, содержащий пару $\langle \alpha, a_\alpha \rangle$, называется проектированием $\mathfrak{M}_\alpha$ в $\mathfrak{M}_\infty$.

Если все отображения j^α являются изоморфизмами, то проектирования j^α , очевидно, также являются изоморфными вложениями. Однако справедлива и более тонкая

Т е о р е м а 1 [67]. *Если в направленной системе $\{\mathfrak{M}, j\}$ каждый гомоморфизм j^α есть элементарное вложение, то каждое проектирование $\mathfrak{M}_\alpha$ есть элементарное вложение модели $\mathfrak{M}_\alpha$ в предельную модель $\mathfrak{M}_\infty$.*

Пусть теперь заданы некоторая последовательность (типа ω) ультрафильтров $\langle I_0, D_0 \rangle, \langle I_1, D_1 \rangle \dots$ и некоторая модель $\mathfrak{M}$. Как упоминалось выше, существует последовательность натуральных вложений

$$\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}^{I_0}/D_0 = \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_1^{I_1}/D_1 = \mathfrak{M}_2 \rightarrow \mathfrak{M}_2^{I_2}/D_2 = \mathfrak{M}_3 \rightarrow \dots \quad (\tau)$$

Прямой предел $\mathfrak{M}_\tau$ этой последовательности будет моделью, однотипной с моделью $\mathfrak{M}$ и называемой ультрапределом. Проектирование $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}_\tau$ будет согласно теореме 1 арифметическим вложением $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}_\tau$.

Алгебраическая характеристика элементарно эквивалентных моделей Кислера (п. 4.1, теорема 2) была дана в предположении истинности обобщенной гипотезы континуума. Без помощи гипотезы континуума доказывается аналогичная

Т е о р е м а 2 (Кочин [93]). *Для того чтобы модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ были элементарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность ультрафильтров (τ) , для которой соответствующие ультрапределы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ изоморфны.*

Класс моделей K называется модельно полным (А. Робинсон [57]), если из того, что какая-либо K -модель $\mathfrak{M}$ есть подмодель K -модели $\mathfrak{N}$, следует, что $\mathfrak{M}$ элементарно вложена в $\mathfrak{N}$.

Т е о р е м а 3 (Кочин [93]). *Пусть класс моделей K замкнут относительно изоморфизмов и ультрастепеней. Класс K тогда и только тогда модельно полон, когда для каждой пары K -моделей $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ существует ультрафильтр $\langle I, D \rangle$ и вложение $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}^I/D$, для которого индуцированное вложение $\mathfrak{M}^I$ в $\mathfrak{M}^I/D$ является каноническим вложением $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}^I/D$.*

4.3. Условия аксиоматизируемости классов.

Элементарные отношения

Условия аксиоматизируемости класса моделей были выше указаны в терминах кортежных отображений. Кочиним и Кислером получены условия аксиоматизируемости, выраженные в терминах ультрапроизведений и имеющие более алгебраическую форму. Мы ограничимся формулировкой лишь нескольких наиболее принципиальных результатов.

Без гипотезы континуума доказана

Т е о р е м а 1 (Кочин [93]). *Для аксиоматизируемости класса моделей K необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:*

- K замкнут относительно взятия ультрапроизведений;*
- K и его дополнение K' замкнуты относительно ультрапределов;*

в) K замкнут относительно изоморфизмов.

При помощи обобщенной гипотезы континуума доказана более сильная
Т е о р е м а 2 (Кислер [96]). *Аксиоматизируемость класса K эквивалентна каждому из следующих двух утверждений:*

а) $K = \text{Prod}(K)$ и $K' = \text{Pow}(K')$;

б) для некоторого $L \subseteq K$ имеем $K = \{\mathfrak{M}/\text{Pow}(\mathfrak{M}) \cap \text{Prod}(L) \neq \emptyset\}$.

Здесь через $\text{Prod}(K)$ обозначен класс моделей, каждая из которых изоморфна подходящему ультрапроизведению K -моделей. Если $\text{Prod}(K) = K$, то K условимся далее называть ультразамкнутым. Аналогично через $\text{Pow}(K)$ обозначен класс всевозможных ультрастепеней K -моделей и моделей, им изоморфных.

Условия конечной аксиоматизируемости K формулируются еще проще.

Т е о р е м а 3 (Кочин [93]). *Класс K конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда K и K' замкнуты относительно ультрапроизведений, ультрастепеней и изоморфизмов.*

С помощью обобщенной гипотезы континуума доказана более сильная

Т е о р е м а 4 (Кислер [96]). *Для конечной аксиоматизируемости класса K необходимо и достаточно, чтобы K и K' были ультразамкнутыми.*

С использованием гипотезы континуума Кислером доказаны также два следующих признака отделимости:

Т е о р е м а 5. *Если $K = \text{Prod}(K)$, $L = \text{Pow}(L)$, $K \cap L = \emptyset$, то существует такой аксиоматизируемый класс $K_1 \supseteq K$, что $K_1 \cap L = \emptyset$.*

Если же $K = \text{Prod}(K)$, $L = \text{Prod}(L)$, $K \cap L = \emptyset$, то существует конечно аксиоматизируемый класс $K_1 \supseteq K$, такой что $K_1 \cap L = \emptyset$.

Непосредственной специализацией второй части этой теоремы получается теорема Крейга (см. п. 3.1).

В заключение рассмотрим еще вопрос об элементарности отношений, заданных на моделях. Пусть K — класс моделей сигнатуры $\sigma = \langle P_1, P_2, \dots \rangle$, и пусть дана некоторая формула $\mathfrak{Q}(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры σ со свободными переменными $x_1, \dots, x_n$. Тогда на каждой модели $\mathfrak{M} \in K$ формула $\mathfrak{Q}(x_1, \dots, x_n)$ определяет n -членное отношение $Q_{\mathfrak{M}}(x_1, \dots, x_n)$, которое называется элементарным или формульным. Обратим теперь вопрос. Пусть на каждой модели $\mathfrak{M} \in K$ задано какое-то n -членное отношение $Q(x_1, \dots, x_n)$ (например, при помощи формулы исчисления 2-й ступени). Спрашивается, каким условиям алгебраического характера должно удовлетворять отношение $Q(x_1, \dots, x_n)$ для того, чтобы существовала такая формула $\mathfrak{Q}(x_1, \dots, x_n)$ 1-й ступени, чтобы для каждой модели $\mathfrak{M} \in K$ и любых $a_1, \dots, a_n$ из $\mathfrak{M}$

$$Q(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow \mathfrak{Q}(a_1, \dots, a_n).$$

Ответ на этот вопрос дает

Т е о р е м а 6 (Бет [92]). *Пусть K^* — аксиоматизируемый класс моделей сигнатуры $\sigma^* = \{Q, P_1, P_2, \dots\}$, где Q — n -членный предикатный символ. Для того чтобы существовала формула $\mathfrak{Q}(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры $\sigma = \{P_1, P_2, \dots\}$, такая что на каждой K^* -модели*

$$(\forall x_1, \dots, x_n) (Q(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \mathfrak{Q}(x_1, \dots, x_n)),$$

необходимо и достаточно, чтобы на каждой модели $\mathfrak{M} = \langle M; P_1, P_2, \dots \rangle$ можно было определить новый предикат $Q(x_1, \dots, x_n)$ не более чем одним способом так, чтобы обогащенная модель $\mathfrak{M}^* = \langle M; Q, P_1, P_2, \dots \rangle$ был K^* -моделью.

Эта теорема Бета с помощью техники ультрапроизведений была обобщена Кочиным, результат которого мы теперь и сформулируем.

Т е о р е м а 7 (Кочин [93]). *Отношение $Q(x_1, \dots, x_n)$, определенное каким-либо способом на каждой модели аксиоматизируемого класса K , сигнатура которого не содержит символа Q , тогда и только тогда элементарно на K , когда выполнены одновременно следующие условия:*

а) обогащение ультрапроизведения K -моделей равно ультрапроизведению обогащенных сомножителей;

б) обогащение ультрапредела K -модели равно ультрапределу обогащенной модели;

в) если K -модели изоморфны, то изоморфны и обогащенные модели.

Упомянем еще, что Кислером [96] в терминах ультрапределов и редуцированных произведений получены условия хорновской аксиоматизируемости (см. п. 3.3), а также получены теоремы о существовании универсальных и однородных моделей.

§ 5. Некоторые классы моделей 2-й степени

5.1. Аксиомы 2-й степени

Вопросы, рассматривавшиеся в предыдущих разделах, были непосредственно связаны лишь с узким исчислением предикатов, т. е. с формальным языком 1-й степени. Следующим по важности формальным языком является язык исчисления предикатов 2-й степени. Формулы в этом языке состояются из тех же логических символов $\&$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$, предметных и предикатных переменных, что и в узком исчислении. Отличие состоит лишь в том, что в формулах 2-й степени кванторные символы $\forall$, $\exists$ могут связывать не только предметные переменные, но и предикатные переменные. Оценка (истинность — ложность) формулы 2-й степени на модели, сигнатура которой содержит все свободные предикатные и предметные символы, содержащиеся в записи рассматриваемой формулы, определяется так же, как и в исчислении 1-й степени (см. [86]). Например, истинность формулы

$$(R) ((\exists z) R(z) \rightarrow (\exists x)(y)(R(x) \& (R(y) \rightarrow x \leq y)))$$

на линейно упорядоченном множестве означает, что это множество вполне упорядочено (каждое непустое подмножество содержит наименьший элемент).

Класс моделей, на которых истинна какая-либо фиксированная аксиома 2-й степени естественно называть классом 2-й степени. Если аксиома 2-й степени не содержит ни предметных, ни предикатных свободных переменных, то истинность или ложность ее зависят лишь от мощности основного множества. Поэтому классы 2-й степени могут состоять из абстрактных множеств некоторых мощностей, и набор этих мощностей, называемый спектром аксиомы, будет вполне характеризовать такие классы.

Простейшие результаты о спектрах классов 2-й степени были уже довольно давно получены А. А. Зыковым [12]. Именно им доказано, что существуют алгоритмы, позволяющие

1) для каждой формулы 2-й степени построить эквивалентную формулу, имеющую вид

$$(Q_1 T_1) \dots (Q_m T_m) (Q_{m+1} x_1) \dots (Q_{m+n} x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n; T_1, \dots, T_m; y_1, \dots, y_s; P_1, \dots, P_t),$$

где T_i, P_j — предикатные, x_k, y_l — предметные переменные, $\langle P_1, \dots, P_i; y_1, \dots, y_s \rangle$ — сигнатура рассматриваемого класса моделей, $Q_i = \forall, \exists$;
 2) для каждой закрытой формулы $\mathfrak{A}$ 2-й ступени построить такую закрытую формулу 2-й ступени $\mathfrak{B}$ вида

$$(\exists S)(R)(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) \mathfrak{C}(x_1, \dots, x_n; S, R) \quad (Q_i = \forall, \exists), \quad (1)$$

что спектр $\mathfrak{C}$ формулы $\mathfrak{A}$ будет однозначно отображаться на спектр $\mathfrak{B}$ функций

$$m + m^l + 2^{m^l} = n \quad (m \in \mathfrak{C}; n \in \mathfrak{B})$$

(S — двухместный, R — одноместный предикатные символы, l — число мест самого многоместного встречающегося в формуле $\mathfrak{A}$ предикатного символа).

Однако вопрос о том, какие совокупности кардинальных чисел могут являться спектрами формул вида (1), остается открытым. Ясно, что вопрос этот тесно связан с аксиоматикой теории множеств, но подробно он до сих пор не изучен.

Язык исчисления предикатов 2-й ступени весьма сильный. Многие важные математические понятия непосредственно записываются на этом языке. Поэтому детальная разработка теории языка 2-й ступени представляется одной из центральных задач теории моделей. В настоящее время более или менее систематически изучены лишь частные виды языка 2-й ступени, получающиеся при наложении на предикатные кванторы тех или иных ограничений. Некоторые из результатов, полученных в этих направлениях, будут ниже кратко описаны.

5.2. Проективные классы

По определению класс моделей K конечной сигнатуры $\langle P_1, \dots, P_s \rangle$ называется финитно проективным, если он состоит из всех моделей, удовлетворяющих некоторой фиксированной аксиоме 2-й ступени, имеющей вид

$$(\exists T_1) \dots (\exists T_m) (Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n, P_1, \dots, P_s, T_1, \dots, T_m) \\ (Q_i = \forall, \exists), \quad (1)$$

где $P_1, \dots, T_m$ — предикатные, $x_1, \dots, x_n$ — предметные переменные.

Рассмотрим вспомогательный класс моделей K_0 сигнатуры $\langle T_1, \dots, T_m, P_1, \dots, P_s \rangle$, определяемый аксиомой 1-й ступени:

$$(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n, P_1, \dots, P_s, T_1, \dots, T_m). \quad (2)$$

Сравнивая аксиомы (1) и (2), видим, что произвольная модель $\langle M; P_1, \dots, P_s \rangle$ тогда и только тогда принадлежит классу K , когда на M можно так определить дополнительные предикаты $T_1, \dots, T_m$, чтобы обогащенная модель $\langle M; P_1, \dots, P_s, T_1, \dots, T_m \rangle$ принадлежала классу K_0 . Модель $\langle M; P_1, \dots, P_s \rangle$ называют $\langle P_1, \dots, P_s \rangle$ -проекцией модели $\langle M; P_1, \dots, P_s, T_1, \dots, T_m \rangle$, и потому класс K состоит из $\langle P_1, \dots, P_s \rangle$ -проекций моделей класса K_0 . Иначе говоря, финитно проективные классы — это проекции конечно аксиоматизируемых классов. Проекции произвольных аксиоматизируемых классов естественно называть (общими) проективными классами. Совокупности финитно проективных и общепроjektивных классов моделей А. Тарский [64] предложил обозначать символами РАС и РАС $_{\Delta}$.

В качестве примера рассмотрим класс K колец, сигнатуру которых будем считать состоящей из предиката сложения $S(x, y, z)$ и предиката умножения $P(x, y, z)$, эквивалентных соответственно равенствам $x + y = z$ и $xy = z$. Обозначим через G P -проекцию класса K . Класс G проективный, состоящий из трех полугрупп, которые изоморфны мультипликативным полугруппам ассоциативных колец. Недавно С. Р. Когаловский [19] показал, что класс G неаксиоматизируемый.

Значительная часть свойств аксиоматизируемых классов моделей присуща и проективным классам. Формулировать явно эти свойства мы здесь не будем, так как все они присущи редукционным классам, к описанию которых мы теперь переходим.

5.3. Редукционные классы

До сих пор мы рассматривали модели с одним основным множеством. Однако иногда целесообразно рассматривать модели с двумя и большим числом основных множеств. Например, в системе аксиом геометрии Евклида — Гильберта имеется три основных множества: множество точек, множество прямых и множество плоскостей. В аксиоматике теории множеств в качестве основных обычно берут множество «элементов» и множество «множеств» и т. п.

Переходя к общему случаю, мы ради краткости далее будем предполагать, что рассматриваемые модели имеют два основных множества. Из них одно будем называть первым, а другое — вторым множеством. Формулы соответствующего двухсортного исчисления предикатов имеют тот же вид, что и формулы обычного односортного узкого исчисления предикатов. Различие состоит в том, что в двухсортном исчислении предметные переменные разделяются на два «сорта»: значениями переменных 1-го сорта служат элементы 1-го основного множества, а значениями переменных 2-го сорта служат элементы 2-го основного множества. Основные предикаты двухсортных моделей определены на паре множеств и в соответствии с сортом своих аргументов могут быть разных типов. Предикаты и предикатные переменные, все пустые места которых предназначены предметным переменным 1-го сорта, условимся называть предикатами 1-го типа. Предикаты, все пустые места которых предназначены для предметных переменных 2-го сорта, будем называть предикатами второго типа. Остальные предикаты условимся называть предикатами смешанного типа. Таким образом, предикаты 1-го и 2-го типа — это обычные одноосновные предикаты, и лишь смешанные предикаты являются существенно многоосновными.

Кванторы в многосортном исчислении предикатов истолковываются как ограниченные кванторы, относящиеся к соответствующим основным множествам.

Наконец, аналогичным образом строятся и истолковываются и формулы многосортного исчисления предикатов 2-й степени.

Класс двухсортных моделей называется конечно аксиоматизируемым, если он состоит из всех моделей данной сигнатуры, удовлетворяющих некоторой фиксированной (конечной) системе аксиом двухсортного узкого исчисления предикатов.

Обозначим теперь через K^* какой-либо аксиоматизируемый или конечно аксиоматизируемый класс двухсортных моделей, и пусть сигнатура K^* состоит из предикатных символов $P_1, \dots, P_s$ 1-го типа, предикатных символов $R_1, \dots, R_s$ 2-го типа и смешанных предикатных символов $S_1, \dots, S_r$. Каж-

дая модель $\mathfrak{M}$ класса K^* имеет два основных множества M_1, M_2 . Рассматривая в $\mathfrak{M}$ лишь множество M_1 и сохраняя на нем только предикаты $P_1, \dots, P_s$, получим одноосновную модель $\langle M_1; P_1, \dots, P_s \rangle$, которую назовем редукцией модели $\mathfrak{M}$ по первому основному множеству.

О п р е д е л е н и е. Класс K обычных односортовых моделей называется (финитно) редукционным классом, если K совпадает с редукцией какого-либо двухсортового (конечно) аксиоматизируемого класса [39].

В этом определении редукционные классы односортовых моделей определяются при помощи двухсортовых моделей. Чтобы найти определение односортовых редукционных классов на языке односортовых моделей, рассмотрим какую-либо односортовую модель $\mathfrak{M} = \langle M; P_1, \dots, P_s, R \rangle$, сигнатура которой, помимо предикатных символов $P_1, \dots, P_s$, содержит еще специально выделенный одноместный предикатный символ R . Обозначим через M_R совокупность тех элементов множества M , на которых R истинен. Модель $\langle M_R; P_1, \dots, P_s \rangle$ условимся называть R -редукцией модели $\mathfrak{M}$. Теперь легко доказывается

Т е о р е м а 1. *Класс K односортовых моделей сигнатуры $\langle P_1, \dots, P_s \rangle$ тогда и только тогда (финитно) редукционный, когда K является $\langle P_1, \dots, P_s \rangle$ -проекцией R -редукции подходящего (конечно) аксиоматизируемого класса, сигнатура которого содержит символы $P_1, \dots, P_s, R$.*

Эта теорема и дает искомую характеристику редукционных классов односортовых моделей в рамках теории односортовых моделей.

Из теоремы 1 непосредственно следует, что все (финитно) проективные классы содержатся среди (финитно) редукционных классов односортовых моделей. Верны ли обратные утверждения, докладчик не знает. Однако редукционные классы обладают и такими свойствами, верность которых для проективных классов находится под сомнением. Так, легко доказываются следующие свойства редукционных классов [39]:

а) пересечение любой (конечной) системы (финитно) редукционных классов есть (финитно) редукционный класс;

б) объединение конечного числа (финитно) редукционных классов есть (финитно) редукционный класс;

в) редукционные классы являются квазиаксиоматизируемыми в смысле п. 3.5;

г) для каждого редукционного класса моделей K существует такое кардинальное число $\aleph$, что каждое множество элементов мощности $\leq \aleph$ произвольной K -модели лежит внутри подходящей K -подмодели этой модели мощности не выше $\aleph + \aleph$ (теорема Левенгейма — Сколема для редукционных классов);

д) для каждого редукционного класса K существует такое кардинальное число $\aleph$, что каждая бесконечная модель мощности $\aleph$ может быть расширена до модели, имеющей любую наперед заданную мощность, не меньшую $\aleph + \aleph$;

ж) система всевозможных прямых произведений моделей редукционного класса есть редукционный класс;

з) система всех гомоморфных образов и система всех сильно гомоморфных образов моделей (финитно) редукционного класса являются (финитно) редукционными классами;

и) система всех моделей, допускающих гомоморфное или сильно гомоморфное отображение на какую-либо модель заданного (финитно) редукционного класса, являются (финитно) редукционными классами.

Свойства а) — д) присущи и проективным классам. Что касается свойства з), то верность его для проективных классов, по-видимому, пока остается под сомнением *.

Поскольку вопрос о совпадении редукционных и проективных классов остается открытым, может представлять интерес

Т е о р е м а 2. Если все модели финитно редукционного класса K бесконечны, то K является финитно проективным классом.

Для полноты приведем доказательство этой теоремы. Пусть класс K есть $\langle P_1, \dots, P_s \rangle$ -проекция R -редукции класса L моделей сигнатуры $\langle P_1, \dots, P_s, P_{s+1}, \dots, P_t, R \rangle$, характеризуемого аксиомами $\mathfrak{A}_\alpha(P, R)$. Пусть $\mathfrak{M} \in K$, и пусть $\mathfrak{N}$ — та L -модель, проекцией R -редукции которой $\mathfrak{M}$ является. Согласно теореме Левенгейма — Сколема в $\mathfrak{N}$ найдется L -подмодель $\mathfrak{N}_1$, содержащая $\mathfrak{M}$, мощность которой равна мощности $\mathfrak{M}$. Таким образом, каждая K -модель $\mathfrak{M}$ есть проекция R -редукции L -модели той же мощности, что и $\mathfrak{M}$. Следовательно, существует предикат $S(x, y)$, определенный на $\mathfrak{N}_1$ и осуществляющий одно-однозначное отображение $\mathfrak{N}_1$ на $\mathfrak{M}$, а потому удовлетворяющий аксиомам

$$(x)(y)(z)((S(x, z) \& S(y, z) \rightarrow x = y) \& (S(x, y) \& S(x, z) \rightarrow y = z \& R(y))),$$

$$(x)(\exists y)(S(x, y) \& R(y)) \& (y)(\exists x)(R(y) \rightarrow S(x, y)).$$

Конъюнкцию этих аксиом обозначим через $\mathfrak{B}(S, R)$. Перенося предикаты $P_1, \dots, P_t, R, S$, с помощью отображения S из множества $\mathfrak{N}_1$ на множество $\mathfrak{M}$ получим новые предикаты $P_1^*, \dots, P_t^*, R^*, S^*$, причем модель $\mathfrak{M}^* = \langle M; P_1^*, \dots, P_t^*, R^* \rangle$ будет изоморфна модели $\mathfrak{N}_1$, и, следовательно, на $\mathfrak{M}^*$ будут истинны аксиомы

$$\mathfrak{A}_\alpha^{\text{df}} = \mathfrak{A}_\alpha(P_1^*, \dots, P_t^*, R^*), \quad \mathfrak{B}^{\text{df}} = \mathfrak{B}(S^*, R^*).$$

По определению имеем для $x_1, \dots, x_{n_i} \in \mathfrak{M}$

$$P_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \leftrightarrow (\exists y_1 \dots y_{n_i})(S^*(x_1, y_1) \& \dots \& S^*(x_{n_i}, y_{n_i}) \& P_i^*(y_1, \dots, y_{n_i})). \quad (1)$$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ систему всех аксиом $\mathfrak{A}_\alpha^*, \mathfrak{B}^*$ (4) для $i = 1, \dots, s$ и рассмотрим класс $\mathfrak{E}$ моделей, определяемый системой аксиом $\mathfrak{A}$. Приведенные выше рассуждения показывают, что на каждой K -модели $\mathfrak{M}$ можно так определить предикаты $R^*, S^*, P_1^*, \dots, P_t^*$, чтобы на обогащенной модели выполнялись аксиомы $\mathfrak{A}$. Иначе говоря, каждая K -модель есть проекция подходящей $\mathfrak{E}$ -модели. Обратно, пусть $\mathfrak{M}$ есть $\langle P_1, \dots, P_s \rangle$ -проекция некоторой $\mathfrak{E}$ -модели $\mathfrak{M}_1$. Обозначая через $\mathfrak{M}_2 \langle P_1^*, \dots, P_s^*, R^* \rangle$ -проекцию $\mathfrak{M}_1$, видим, что $\mathfrak{M}_2$ есть L -модель. Из формул $\mathfrak{B}^*$ и (1) следует, что эта редукция изоморфна модели $\mathfrak{M}$, т. е. $\langle P_1, \dots, P_s \rangle$ -проекция каждой $\mathfrak{E}$ -модели есть K -модель. Следовательно, класс K как проекция аксиоматизируемого класса $\mathfrak{E}$ является проективным классом.

* Решение системы см. *М. Makkai*. On PC-classes in the theory of models. — Magyar tud. akad. Mat. és. fiz. oszt. közl., 1964, 9, 159—194; 1965, 9, 601—602. — *Прим. ред.*

5.4. Квазиуниверсальные классы

Пусть на классе моделей K задан некоторый частичный одноместный предикат $A(\mathfrak{M})$. Говорят, что предикат A обладает локальным свойством, если имеет место следующее предложение: пусть задана модель $\mathfrak{M} \in K$ и система $\{\mathfrak{M}_\lambda\}$ ее подмоделей, так что каждое конечное множество элементов $\mathfrak{M}$ содержится внутри подходящей модели $\mathfrak{M}_\lambda$. Тогда если предикат A определен на $\mathfrak{M}$ и на каждой модели $\mathfrak{M}_\lambda$ предикат A истинен, то A истинен и на $\mathfrak{M}$.

Например, пусть K — класс всех групп и A — свойство группы быть абелевой n -ступенно разрешимой или n -ступенно нильпотентной (n — фиксированное натуральное число). Тогда легко доказывается, что в каждом из этих случаев A обладает локальным свойством, которое обычно формулируется в более слабой форме: если каждое конечное множество элементов группы $\mathfrak{Q}$ порождает внутри $\mathfrak{Q}$ подгруппу, обладающую свойством A , то $\mathfrak{Q}$ сама обладает свойством A .

Вопрос о том, является ли некоторое свойство групп A локальным *, нередко возникает в теории бесконечных групп, и решение его иногда бывает довольно трудным. В заметке [32] был указан способ сведения проблемы локальности свойства к локальной теореме УИП, и при помощи его была доказана локальность свойства группы иметь центральную систему подгрупп и локальность некоторых других свойств. Это было, по-видимому, первым случаем применения теории моделей к решению конкретных проблем, возникших в областях математики, непосредственно не связанных с исчислением предикатов.

Непосредственным следствием упомянутой теоремы компактности является и

Т е о р е м а (Хенкин [76]). *Если каждая конечная подмодель некоторой модели $\mathfrak{M}$ вложима в модель аксиоматизируемого класса K , то и сама $\mathfrak{M}$ вложима в подходящую модель класса K .*

Эта теорема была обобщена А. Д. Таймановым [69] на n -вложения, описанные выше (п. 2.4).

В большинстве интересных конкретных локальных теорем, например теоретико-групповых, речь идет о свойствах, непосредственно записываемых не в исчислении 1-й ступени, а в исчислении предикатов 2-й ступени. Поэтому представляется важным описать, по возможности, более широкий класс формул 2-й ступени, выражающий предикаты, обладающие локальным свойством. Требуется лишь, чтобы описание это было формальным (синтаксическим) и чтобы формулы этого класса давали возможность доказывать интересные теоремы в конкретных теориях. Один класс таких формул, названных квазиуниверсальными, построен докладчиком в статье [39]. Формулы эти конструируются следующим образом.

Обозначим через $P_1, \dots, P_s$ сигнатуру рассматриваемых моделей и введем дополнительно систему предикатных символов $R_1, \dots, R_t$ каких-нибудь членностей. Рассмотрим систему $\mathfrak{A}$, состоящую из формул

$$(x_1) \dots (x_{n_i}) \mathfrak{A}_i(x_1, \dots, x_{n_i}; P_1, \dots, P_s, R_i) \quad (i = 1, \dots, t) \quad (1)$$

и формулы

$$(Q_1 R_1)(\forall x_1, \dots, x_{m_1}) \dots (Q_t R_t)(\forall x_{m_{i-1}+1} \dots x_{m_i}) \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_{m_i}; P_1, \dots, P_s, R_1, \dots, R_t), \quad (2)$$

* Т. е. обладает ли предикат A локальным свойством в классе всех групп?

где $Q_\lambda = \exists, \forall, \mathfrak{A}_i$ — открытые бескванторные формулы 1-й степени, составленные из указанных в скобках предикатных и предметных переменных, а $\mathfrak{B}(x_1, \dots, R_i)$ — формула 1-й степени, составленная из указанных символов и не содержащая кванторов. В формулах (1), (2) может встречаться и знак равенства, но связывать он должен лишь предметные символы.

Мы скажем, что на модели $\mathfrak{M} = \langle M; P_1, \dots, P_s \rangle$ выполняется квазиуниверсальная система аксиом (1), (2), если на $\mathfrak{M}$ истинна формула (2) при условии, что встречающиеся в ней кванторы по $R_1, \dots, R_t$ понимаются как ограниченные кванторы по совокупностям всех предикатов на M , удовлетворяющих соответственным аксиомам (1).

В случае, когда условия (1) тавтологичны или их нет, выполнимость квазиуниверсальной системы (1), (2) равносильна истинности на $\mathfrak{M}$ выражения (2) как обычной формулы 2-й степени. В общем случае выполнимость на $\mathfrak{M}$ квазиуниверсальной системы (1), (2) равносильна истинности на $\mathfrak{M}$ формулы 2-й степени, имеющей в пренексной форме кванторы существования по предметным переменным. Так, например, квазиуниверсальная система

$$(x) \mathfrak{A}(x; P; R),$$

$$(R) (y) \mathfrak{B}(y; P, R)$$

равносильна формуле

$$(R) (\exists x) (y) (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}).$$

Поэтому на квазиуниверсальные системы можно смотреть как на формулы 2-й степени особой структуры.

Т е о р е м а (внутренняя локальная теорема для квазиуниверсальных классов [39]). *Все свойства моделей, которые можно выразить квазиуниверсальными системами формул, обладают локальным свойством.*

Эта теорема верна и в общем случае, т. е. для любых бесконечных систем формул вида (1) и (2), относящихся к многоосновным моделям.

В качестве конкретного примера рассмотрим класс K -групп. Двучленные предикаты R , определенные на группе и удовлетворяющие аксиоме

$$(x) (y) (z) (u) (v) ((xRy \ \& \ yRx \rightarrow x = y) \ \& \ (xRy \ \& \ yRz \rightarrow xRz \ \& \ uxvRu yv)),$$

называются частичными упорядочениями группы, а предикаты S , удовлетворяющие аксиоме

$$(x) (y) (z) (u) (v) ((xSy \ \& \ ySx \rightarrow x = y) \ \& \ xSy \vee ySx \ \& \ (xSy \ \& \ ySz \rightarrow xSz \ \& \ uxvSu yv)),$$

называются линейными упорядочениями группы. Группа G называется доупорядочиваемой (SO -группой), если на ней истинна формула

$$(\forall R) (\exists S) (x) (y) (xRy \rightarrow xSy),$$

где кванторы $\forall R, \exists S$ — ограниченные, относящиеся соответственно к частичным и линейным упорядочениям G . Отсюда видно, что свойство доупорядочиваемости группы является квазиуниверсальным и, значит, локальным.

Ряд других теоретико-групповых теорем, получаемых непосредственным применением внутренней локальной теоремы, указан в статье [39]. Локальная теорема Мак-Лейна [30] также почти непосредственно вытекает из внутренней локальной теоремы.

Класс моделей K естественно назвать квазиуниверсальным, если он состоит из всех моделей некоторого аксиоматизируемого класса K_0 , обладающих фиксированным квазиуниверсальным свойством. В цитированной статье [39] указан ряд примеров, показывающих, что свойства квазиуниверсальных классов принципиально отличаются от свойств аксиоматизируемых или редукционных классов. Например, оказалось, что квазиуниверсальный класс может состоять лишь из одной бесконечной модели, квазиуниверсальными являются классы всех простых групп, всех простых колец и т. п. Более детальное изучение квазиуниверсальных классов не производилось и представляется интересным *.

5.5. Формулы с кванторами по одноместным предикатам

Как уже говорилось, о классах моделей, определяемых формулами 2-й степени общего вида, мало что известно. Можно было бы надеяться упростить задачу, ограничившись рассмотрением тех классов моделей, которые характеризуются формулами 2-й степени, содержащими предикатные кванторы лишь по одноместным предикатным символам. Формулы этого вида условимся называть монарно кванторными. Однако теорема А. А. Зыкова из п. 4.1 показывает, что проблема спектра для классов моделей с одним бинарным предикатом S , характеризующихся монарно кванторной аксиомой вида

$$(R) (Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) \mathfrak{A} (x_1, \dots, x_n; R, S) (Q_i = \forall, \exists),$$

имеет такую же степень общности, как и проблема спектра для произвольных аксиом 2-й степени.

Существенно более элементарен случай классов моделей, имеющих лишь монарные (одноместные) основные предикаты и характеризующихся монарно кванторными аксиомами. Классическая теорема Бемана (ср. [1]) показывает, что каждый такой класс либо пуст, т. е. соответствующая аксиома противоречива, либо содержит конечную модель, число элементов которой не превосходит границы, эффективно выражаемой через длину соответствующей аксиомы.

В связи с теорией автоматов в последнее время большой интерес вызвали монарно кванторные формулы, относящиеся к модели

$$\mathfrak{G} = \langle \{0, 1, 2, \dots\}, S \rangle,$$

где S — бинарный предикат, выражающий отношение непосредственного следствия: $S(x, y) \Leftrightarrow x + 1 = y$. Лишь недавно Дж. Бюхи [7] удалось показать, что множество монарно кванторных формул, истинных на $\mathfrak{G}$, алгоритмически разрешимо. Отношение монарно кванторной теории модели $\mathfrak{G}$ к теории автоматов подробно рассмотрено в работах С. Клини, А. Черча [89], Б. А. Трахтенброта [72—74] и других авторов.

Большой интерес представляет язык слабых монарно кванторных формул. Для описания этого языка условимся одночленным предикат, определенный на каком-либо множестве M , называть финитарным на M , если он истинен лишь на конечном подмножестве множества M . Формула 2-й степени назы-

* См. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. Основы теории групп. М., «Наука», 1972, с. 220. — Прим. ред.

вается слабо монарно кванторной, если все ее предикатные кванторы относятся к одноместным и притом финитарным предикатам. Например, формула

$$(\forall R) ((\exists x) R(x) \rightarrow (\exists y) (R(y) \& (z) (R(z) \rightarrow y \leq z)))$$

в слабо монарно кванторном языке содержательно истолковывается как предложение: каждое непустое конечное подмножество R основного множества S предикатом $\leq$ имеет «наименьший» элемент.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $\mathfrak{S}$ — система аксиом УИП, описывающая класс линейно упорядоченных групп с групповой операцией и отношением порядка $\leq$. Тогда система $\mathfrak{S}$ и слабо монарно кванторная аксиома

$$(x)(y) 1 < y < x \rightarrow (\exists R) (\exists z) (R(z) \& R(1) \& x \leq z \& \mathfrak{B}(y, R)),$$

где $\mathfrak{B}(y, R)$ означает формулу

$$(u)(v) (R(u) \& R(v) \& (w) (R(w) \rightarrow w \leq u \vee v \leq w) \& u \neq v \rightarrow v = uv),$$

совместно описывают класс архимедовски упорядоченных групп.

Как известно, в классе архимедовски упорядоченных групп существует максимальная группа — аддитивная группа вещественных чисел, не содержащаяся в качестве упорядоченной подгруппы ни в какой большей архимедовски упорядоченной группе.

Наконец, в качестве третьего примера рассмотрим класс линейно упорядоченных множеств, удовлетворяющих слабо монарно кванторной аксиоме

$$(\exists a) (x) (a \leq x) \& (x) (\exists y) (x \leq y \& x \neq y) \& (x) (\exists R) (y) (y \leq x \rightarrow R(y)).$$

Ясно, что этот класс состоит из множеств, изоморфных множеству всех натуральных чисел.

Условимся временно класс моделей называть слабо монарно кванторным, если он может быть описан на слабо монарно кванторном языке. Приведенные выше второй и третий примеры показывают, что слабо монарно кванторные классы могут содержать максимальные модели континуальной мощности, но могут и просто быть категоричными. Тем не менее для них справедлив следующий аналог теоремы Левенгейма — Сколема:

Т е о р е м а (А. Тарский [65]). *В каждой модели слабо монарно кванторного класса K , имеющей бесконечную несчетную мощность, существуют K -подмодели любой меньшей бесконечной мощности.*

В частности, из этой теоремы следует, что каждый категоричный слабо монарно кванторный класс состоит из счетной модели.

Более детально свойства слабо монарно кванторных классов пока, по-видимому, не изучены. В статье И. Бюхи [6] указывается ряд конкретных моделей, слабо монарно кванторные теории которых изучались как в связи с автоматной проблематикой, так и вследствие их чисто математического интереса *.

* См. также *M. Rabin. Weakly definable relations and special automata.* — In: *Mathematical logic and foundation of set theory.* Amsterdam, 1970. — *Прим. ред.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Ackermann.* Solvable cases of the decision problem. Amsterdam, 1954.
2. *K. J. Appel.* Horn sentences in identity theory.— *J. Symbol. Log.*, 1959, 24, N 4, 306—310.
3. *K. Bing.* On arithmetical classes not closed under direct unions.— *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1955, 6, N 5, 836—846.
4. *G. Birkhoff.* Subdirect unions in universal algebras.— *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1944, 50, 764—768.
5. *Г. Биркгоф.* Теория структур. М., ИЛ, 1952.
6. *J. B. Buchi.* Weak second-order arithmetic and finite automata.— *Z. math. Log. und Grundle. Math.*, 1960, 6, N 1, 66—92.
7. *J. B. Buchi.* On a problem of Tarski.— *Notices Amer. Math. Soc.*, 1960, 7, 570—572.
8. *R. L. Vaught.* On sentences holding in direct products of relational systems.— *Proc. Internat. Congr. Math.*, Amsterdam, 1954, 2, 409—410.
9. *В. М. Глушков.* Некоторые проблемы синтеза цифровых автоматов.— *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.*, 1961, 1, № 3, 371—411.
10. *В. М. Глушков.* Абстрактная теория автоматов.— *Успехи мат. наук*, 1961, 16, № 5, 3—62.
11. *Д. А. Захаров.* К теореме Лося — Сушко.— *Успехи мат. наук*, 1961, 16, № 2, 200—201.
12. *А. А. Зыков.* Проблема спектра в расширенном исчислении предикатов.— *Изв. АН СССР, сер. мат.*, 1953, 17, 63—76.
13. *J. R. Isbell.* Adequate subcategories, III.— *J. Math.*, 1960, 4, 541—552.
14. *J. R. Isbell.* Two set-theoretic theorems in categories. Preprint. 1961.
15. *J. R. Isbell.* Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras. Preprint, 1961.
16. *А. Г. Курош, А. Х. Лившиц, Е. Г. Шульгейфер.* Основы теории категорий.— *Успехи мат. наук*, 1960, 15, № 6, 3—52.
17. *W. Craig.* Linear reasoning. A new form of the Herbrand — Gent theorem.— *J. Symbol. Log.*, 1957, 22, N 3, 250—268.
18. *С. Р. Коголовский.* Об одном общем методе получения структурных характеристик аксиоматизируемых классов.— *Докл. АН СССР*, 1961, 136, № 6, 1291—1294.
19. *С. Р. Коголовский.* О мультипликативных полугруппах колец.— *Докл. АН СССР*, 1961, 140, № 5, 1005—1007.
20. *С. Р. Коголовский.* Универсальные классы моделей.— *Докл. АН СССР*, 1959, 124, № 2, 260—263.
21. *R. C. Lindon.* Properties preserved under algebraic constructions.— *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1959, 65, N 5, 287—299.
22. *R. C. Lindon.* An interpolation theorem in the predicate calculus.— *Pacif. J. Math.*, 1959, 9, N 1, 129—142.
23. *R. C. Lindon.* Properties preserved under homomorphisms.— *Pacif. J. Math.*, 1959, 9, N 1, 143—154.
24. *R. C. Lindon.* Properties preserved under subdirect unions.— *Pacif. J. Math.*, 1959, 9, N 1, 155—164.
25. *J. Los.* Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres.— In: *Mathematical interpretations of formal systems.* Amsterdam, 1955.
26. *J. Los.* On the extending of models, I.— *Fundam. Math.*, 1955, 42, 38—54.
27. *J. Los, R. Suszko.* On the infinite sums of models.— *Bull. Acad. polon. sci.*, 1955, 3, N 4, 201—202.
28. *L. Los, R. Suszko.* On the extending of models, II.— *Fundam. math.*, 1955, 42, N 2, 343—347.
29. *L. Löwenheim.* Über Möglichkeiten im Relativkalkül.— *Math. Ann.*, 1915, 76, 447—470.
30. *D. H. McLaine.* Local theorems in universal algebras.— *J. London Math. Soc.*, 1959, 34, N 2, 177—184.
31. *А. И. Мальцев.* Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik.— *Мат. сб.*, 1936, 1, № 3, 323—335.
32. *А. И. Мальцев.* Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп.— *Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та*, 1941, 1, № 1, 3—9.
33. *А. И. Мальцев.* О включении ассоциативных систем в группы, II.— *Мат. сб.*, 1940, 8, № 2, 251—263.
34. *А. И. Мальцев.* Подпрямые произведения моделей.— *Докл. АН СССР*, 1956, 109, № 2, 264—266.

35. А. И. Мальцев. О классах моделей с операцией порождения.— Докл. АН СССР, 1957, 116, № 5, 738—741.
36. А. И. Мальцев. Определяющие соотношения в категориях.— Докл. АН СССР, 1958, 119, № 6, 1095—1098.
37. А. И. Мальцев. Структурная характеристика некоторых классов алгебр.— Докл. АН СССР, 1958, 120, № 1, 29—32.
38. А. И. Мальцев. О некоторых классах моделей.— Докл. АН СССР, 1958, 120, № 2, 245—248.
39. А. И. Мальцев. Модельные соответствия.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1959, 23, № 3, 313—336.
40. А. И. Мальцев. Регулярные произведения моделей.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1959, 23, № 4, 489—502.
41. А. И. Мальцев. О малых моделях.— Докл. АН СССР, 1959, 127, № 2, 258—261.
42. А. И. Мальцев. Об одном соответствии между кольцами и группами.— Мат. сб., 1960, 50, № 3, 257—266.
43. А. И. Мальцев. О свободных разрешимых группах.— Докл. АН СССР, 1960, 130, № 3, 495—498.
44. А. И. Мальцев. О неразрешимости элементарных теорий некоторых полей.— Сиб. мат. ж., 1960, 1, № 1, 71—77.
45. А. И. Мальцев. Неразрешимость элементарной теории конечных групп.— Докл. АН СССР, 1961, 138, № 4, 771—774.
46. А. И. Мальцев. Конструктивные алгебры, I.— Успехи мат. наук, 1961, 16, № 3, 3—60.
47. A. Marczewski. Sur les congruences et les propriétés positive d'algèbres abstraites.— Colloq. Math., 1951, 2, 220—228.
48. A. Morel, D. S. Scott, A. Tarski. Reduces products and the compactness theorem.— Notices Amer. Math. Soc., 1958, 5, 674.
49. A. Mostowski. On direct powers of theories.— J. Symbol. Log., 1952, 17, N 1, f—31.
50. A. Mostowski. Concerning a problem of H. Scholz.— Z. math. Log. und Grundl. Math., 1956, 2, 210—214.
51. А. Мостовский. Современное состояние исследований по основаниям математики.— Успехи мат. наук, 1954, 9, № 3, 3—38.
52. J. Mycielski. A characterization of arithmetical classes.— Bull. Acad. polon. sci., cl. 3, 1957, 5, N 11, 1025—1027.
53. П. С. Новиков. Элементы математической логики. М., Физматгиз, 1959.
54. A. Oberschelp. Über die Axiome produkt — abgeschlossener arithmetischer Klassen.— Z. math. Log. und Grundl. Math., 1958, 4, 95.
55. H. Rasiowa, R. Sikorski. A proof of the completeness theorem of Gödel.— Fundam. Math., 1950, 37, 193—200.
56. A. Robinson. On the metamathematics of algebra. Amsterdam, 1951.
57. A. Robinson. Complete theories. Amsterdam, 1956.
58. A. Robinson. Obstructions to arithmetical extension and the theorem of Los and Suszko.— Indagationes Math., 1939, 21, N 5, 489—495.
59. J. Robinson. Definability and decision problem in arithmetic.— J. Symbol. Log., 1949, 14, N 2, 98—114.
60. J. Robinson. The undecidability of algebraic rings and fields.— Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, N 6, 950—957.
61. R. M. Robinson. Undecidable rings.— Trans. Amer. Math. Soc., 1951, 70, N 1, 137—159.
62. T. Skolem. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen.— Skr. vidensk.-akad. Oslo, I kl., 1920, N 4, 36.
63. A. Tarski. Contributions to the theory of models, I, II.— Proc. Koninkl. nederl. acad. wet., 1954, A57, 571—588.
64. A. Tarski. Contributions to the theory of models, III.— Proc. Koninkl. nederl. acad. wet., 1955, A58, 58—64.
65. A. Tarski. An extension of the Löwenheim — Skolem theorem to a second-order logic.— Abstrs, Short commun Internat. Congr. Math. Edinburgh, 1958, 10.
66. A. Tarski, A. Mostowski, R. M. Robinson. Undecidable theories. Amsterdam, 1953.
67. A. Tarski, R. Vaught. Arithmetical extensions of relational systems.— Composit. Math., 1957, 18, N 2, 81—102.
68. А. Д. Тайманов. Характеристика аксиоматизируемых классов моделей, I.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1961, 25, № 4, 601—620.

69. А. Д. Тайманов. Характеристика аксиоматизируемых классов моделей, II.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1961, 25, 755—764.
70. А. Д. Тайманов. Характеристика конечно аксиоматизируемых классов моделей.— Сиб. мат., ж, 1961, 2, № 5, 759—766.
71. А. Д. Тайманов. О классе моделей, замкнутом относительно прямого произведения.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1960, 24, 493—510.
72. Б. А. Трахтенброт. Синтез логических сетей, операторы которых описаны средствами исчисления предикатов.— Докл. АН СССР, 1958, 118, № 4, 646—649.
73. Б. А. Трахтенброт. Некоторые построения в логике одноместных предикатов.— Докл. АН СССР, 1961, 138, № 2, 320—321.
74. Б. А. Трахтенброт. Конечные автоматы и логика одноместных предикатов.— Сиб. мат. ж., 1962, 3, 103—131.
75. S. Feferman, R. Vaught. The first order properties of products of algebraic systems.— Fundam. Math., 1959, 47, N 1, 57—103.
76. L. Henkin. Some interconnections between modern algebra and mathematical logic.— Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 74, 410—427.
77. L. Henkin. The completeness of the first order functional calculus.— J. Symbol. Log., 1949, 14, 159.
78. A. Horn. On sentences which are true of direct unions of algebras.— J. Symbol. Log., 1951, 16, N 1, 14—21.
79. C. C. Chang. On unions of chains of models.— Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 40, N 1, 120—127.
80. C. C. Chang, A. Morel. On closure under direct products.— J. Symbol. Log., 1958, 23, 149.
81. A. Ehrenfeucht. On theories categorical in power.— Fundam. Math., 1957, 44, N 2, 241—248.
82. A. Ehrenfeucht, A. Mostowski. Models of axiomatic theories admitting automorphisms.— Fundam. Math., 1956, 43, N 1, 50—68.
83. W. Szmielew. Elementary properties of Abelian groups.— Fundam. Math., 1955, 41, N 2, 203—271.
84. J. Los, C. Ryll-Nardzewski. Effectiveness of the representation theory for Boolean algebras.— Fundam. Math., 1954, 41, N 1, 49—56.
85. K. Gödel. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalkül.— Monatsh. Math., 1936, 37, 349—360.
86. Д. Гильберт, В. Аккерман. Основы теоретической логики. М., ИЛ, 1947.
87. J. Los. On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems.— Colloq. Math., 1954, 3, 58—62.
88. R. L. Vaught. Remarks on universal classes of relational systems.— Proc. Koninkl. nederl. acad. wet., 1954, 57, 589—591.
89. A. Church. Application of recursive arithmetic in the theory of computers and automata. Advanced theory of the logical design of digital computers. Univ. Michigan 1958, June.
90. H. J. Keisler. Theory of models with generalized formulas.— J. Symbol. Log., 1960, 25, N 1, 1—26.
91. L. Henkin. On a theorem of Vaught.— Indagationes Math., 1955, 17, 326—328.
92. E. Beth. On Padoa's method in theory of definition.— Indagationes Math., 1953, 56, 330—339.
93. S. Kochen. Ultraproducts in the theory of models.— Ann. Math., 1961, 74, N 2, 221—261.
94. M. O. Rabin. Arithmetical extensions with prescribed cardinality.— Indagationes Math., 1959, 21, N 4, 439—446.
95. T. E. Fraïssé, D. S. Scott. Model-theoretical properties of reduced products.— Notices Amer. Math. Soc., 1958, 5, 675.
96. H. J. Keisler. Ultraproducts and elementary classes.— Indagationes Math., 1961, 23, N 5, 477—495.

ПОЛНО НУМЕРОВАННЫЕ МНОЖЕСТВА *



Фундаментальным фактом теории алгоритмов является существование частично рекурсивной функции (ч.р.ф.) двух переменных $U(n, x)$, из которой при различных фиксированных значениях первой переменной n получаются все одноместные ч.р.ф. Называя число n номером функции $U_n(x) = U(n, x)$, получаем нумерацию системы всех одноместных ч.р.ф., порожденную универсальной функцией $U(n, x)$. Называя n номером совокупности всех значений функции $U_n(x)$, получим соответствующую нумерацию системы всех рекурсивно перечислимых множеств. Специализируя особым образом функцию U , получают нумерации Клини и Поста [1] функций и множеств, имеющие ряд важных специальных свойств.

Однако подобного рода нумерации можно строить не только для систем всех ч.р.ф. или рекурсивно перечислимых множеств (р.п.м.), но и для некоторых частей этих систем. При этом на первый план выдвигаются те нумерации, в которых для каждого заданного номера n существует алгоритм, позволяющий вычислять значения функции номера n или числа соответствующего множества номера n . В связи с изложенным, А. Н. Колмогоровым (см. [3]) была выдвинута программа систематического изучения свойств вычислимых нумераций семейств функций и множеств. Эта программа в своей существенной части была выполнена В. А. Успенским в работах [3—5].

Тем не менее начавшееся примерно в те же годы изучение конструктивных алгебр убедительно показало, что интерес представляют не только нумерации систем функций, но и нумерации произвольных множеств объектов. Исходя из этой более общей точки зрения, начала общей теории нумерованных совокупностей были изложены в 1-й части настоящего обзора [1]. Среди ряда других понятий там было введено понятие полной нумерации произвольной совокупности объектов, в какой-то мере обобщающее понятие нумерации Клини. В данной статье вводится новое определение полной нумерации, отличное от прежнего. Полно нумерованные множества в новом смысле будут полно нумерованными и в старом смысле. Однако теория полных нумераций в новом смысле оказывается более законченной. В частности, теория полно нумерованных множеств в новом смысле позволяет объединить многие важные результаты Майхила [8], Роджерса [10], Мучника [2] и Шмудляна [9], казавшиеся до сих пор не связанными друг с другом. Изложение этой теории занимает п. 1—5 данной статьи.

В п. 6 описывается структура семейств ч.р.ф., совокупность всех клиниевских номеров которых является р.п.м. Источником для этой части явилась работа Райса [6], в которой аналогичная задача была впервые рассмотрена и в сущности, полностью решена для постовской нумерации ч.р.м. Задача для клиниевской нумерации ч.р.ф. имеет специфические особенности

* Алгебра и логика, 1963, 2, № 2, 4—29.

и была решена В. А. Успенским [3]. Наше изложение параллельно изложению Райса [6].

В качестве дополнения в п. 7—8 разобраны некоторые примеры нумераций семейств объектов.

Хотя материал настоящей статьи связан с содержанием обзора [1], изложение настоящей статьи не предполагает от читателя знакомства с указанным обзором.

1. Полные нумерации. Нумерацией λ совокупности некоторых объектов $\mathfrak{M}$ называется однозначное отображение какого-либо подмножества N_1 множества N натуральных чисел $0, 1, \dots$ на $\mathfrak{M}$. Если $\lambda n = a$ ($n \in N_\lambda$, $a \in \mathfrak{M}$), то n называется λ -номером объекта a . Совокупность N_λ называется номерным множеством нумерации λ . Совокупность $\mathfrak{M}$, заданная вместе с какой-либо своей нумерацией λ , называется нумерованным множеством. Нумерация λ называется простой, если $N_\lambda = N$. Ниже будут рассматриваться почти всегда лишь простые нумерации.

О с н о в н о е о п р е д е л е н и е. Простая нумерация λ называется полной, если в совокупности $\mathfrak{M}$ существует особый элемент o , такой, что для каждой частично рекурсивной функции $f(x)$ существует общерекурсивная функция $g(x)$, удовлетворяющая условию:

$$\lambda g(x) = \begin{cases} \lambda f(x), & \text{если } f(x) \text{ определено,} \\ o & \text{для остальных } x. \end{cases} \quad (1)$$

Основным примером полной нумерации может служить нумерация Клини всех одноместных частично рекурсивных функций. Получается она следующим образом. Величина

$$C(m, n) = {}^{1/2}((m+n)^2 + 3m + n)$$

называется канторовским номером пары $\langle m, n \rangle$. Через $l(x)$ и $r(x)$ обозначаем числа, удовлетворяющие соотношению $C(l(x), r(x)) = x$.

Легко видеть, что функция

$$[m, n] = C(l(m), C(r(m), n))$$

также осуществляет одно-однозначную нумерацию всех пар натуральных чисел. Пусть

$$[x_1, x_2, \dots, x_s] = [[x_1, x_2], x_3, \dots, x_s] \quad (s = 3, 4, \dots).$$

Если

$$[x_1, \dots, x_s] = n,$$

то полагаем

$$x_i = [n]_{si} \quad (i = 1, \dots, s).$$

Пусть теперь $U(n, x)$ — какая-либо ч.р.ф. от переменных n, x , универсальная для всех одноместных ч. р. ф. от x . Положим

$$K_n^{(1)}(x) = K^{(1)}(n, x) = U(l(n), C(r(n), x)),$$

$$K^{(s+1)}(x_0, x_1, \dots, x_{s+1}) = K^{(s)}([x_0, x_1], x_2, \dots, x'_{s+1}) \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Простые рассуждения показывают, что $K^{(s)}(n, x_1, \dots, x_s)$ является универсальной функцией с параметром n для системы всех частично рекурсив-

ных функций от $x_1, \dots, x_s$. Функции $K^{(s)}$ называются универсальными функциями Клини.

Ставя натуральному числу n в соответствие s -местную функцию $K^{(s)}(n, x_1, \dots, x_s)$ от переменных $x_1, \dots, x_s$, получаем нумерацию Клини $\kappa^{(s)}$ множества всех частично рекурсивных функций от s переменных. Нумерацию $\kappa^{(1)}$ одноместных функций сокращенно обозначим через κ . Нигде не определенную функцию в нумерации $\kappa^{(s)}$ обозначим через o .

Через ω_n обозначим совокупность всех значений функции $K_{n,1}^{(1)}$. Отображение $\omega : n \rightarrow \omega_n$ будет называться нумерацией Поста совокупности всех рекурсивно перечислимых множеств. Символом o в нумерации ω обозначим пустое множество.

Пусть $\langle \mathfrak{M}, \lambda \rangle$ — какое-нибудь нумерованное множество. Если A — множество натуральных чисел, то символом λA будем обозначать семейство тех объектов множества $\mathfrak{M}$, хотя бы один из номеров которых находится в A . Если $\mathfrak{Z}$ — семейство элементов из $\mathfrak{M}$, то через $\lambda^{-1} \mathfrak{Z}$ будем обозначать совокупность всех номеров всех объектов из $\mathfrak{Z}$. Штрих обозначает дополнение множества (в N или, соответственно, в $\mathfrak{M}$). Например, $\omega^{-1}o$ есть совокупность всех постовских номеров пустого множества, а $\kappa^{-1}o$ есть совокупность всех клиниевских номеров всех функций с непустой областью определения.

Т е о р е м а 1.1. *Нумерации Клини $\kappa^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots$) и нумерация Поста ω являются полными нумерациями, у которых множества $\kappa^{(s)-1}o'$ и $\omega^{-1}o'$ рекурсивно перечислимы.*

Мы докажем полноту лишь нумерации κ , так как полнота остальных нумераций является непосредственным следствием полноты κ .

Пусть $f(x)$ — какая-либо частично рекурсивная функция. Ищем такое число a , чтобы для всех значений x, t было

$$K(f(x), t) = K(a, x, t) = K([a, x], t).$$

Но это и значит, что общерекурсивная функция (о. р. ф.) $g(x) = [a, x]$ удовлетворяет условиям (1). Утверждения о рекурсивной перечислимости множеств $\omega^{-1}o'$ и $\kappa^{-1}o'$ вполне очевидны.

Т е о р е м а 1.2. *Для каждой полной нумерации λ существует общерекурсивная функция $p_n(x_1, \dots, x_n)$ такая, что для каждой ч. р. ф. $h(x_1, \dots, x_n)$ найдется число a , для которого при любых $x_2, \dots, x_n$*

$$\lambda p_n(a, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \lambda h(a, x_2, \dots, x_n), & \text{если } h(a, x_2, \dots, x_n) \text{ определено,} \\ o & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

Для доказательства рассмотрим функцию

$$f(x) = K([x]_{n_1}, \dots, [x]_{n_m}),$$

где $[x]_{n_i}$ — указанные выше функции. Согласно определению найдется о.р.ф. $g(x)$, связанная с $f(x)$ условием (1). Следовательно, для любых $x_1, \dots, x_n$ имеем

$$\lambda g([x_1, \dots, x_n]) = \begin{cases} \lambda K(x_1, \dots, x_n), & \text{если } K(x_1, \dots, x_n) \text{ определено,} \\ o & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как $K^{(n)}$ — универсальная функция, то при некотором c имеем

$$h([x_1, x_1], x_2, \dots, x_n) = K(c, x_1, \dots, x_n) = K([c, x_1], x_2, \dots, x_n).$$

Полагая теперь $p_n(x_1, \dots, x_n) = g([x_1, \dots, x_n])$, $a = [c, c]$, получаем (2).

Т е о р е м а 1.3. Если λ — полная нумерация, то для каждой ч.р.ф. $u(x_1, \dots, x_n)$ найдется такая о.р.ф. $g(x_2, \dots, x_n)$, что для всех значений переменных $x_2, \dots, x_n$

$$\begin{aligned} \lambda g(x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \begin{cases} \lambda u(g(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n), & \text{если } u(g(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \text{ определено,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

Пусть $h(x_1, \dots, x_n) = u(p_n(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$, где $p_n(x_1, \dots, x_n)$ — функция, указанная в теореме 1.2. Согласно этой теореме найдется такое число a , что

$$\lambda p_n(a, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \lambda h(a, x_2, \dots, x_n), & \text{если это выражение определено,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, в качестве функции $g(x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющей условию (3), можно взять $p_n(a, x_2, \dots, x_n)$.

Из теоремы 1.3 непосредственно вытекает, что каждая полная нумерация λ неединичного множества $\mathfrak{M}$ является полной и в смысле статьи [1].

Действительно, нумерация λ полна в смысле (1), если существует такая о.р.ф. $\varphi(x)$, что

$$\lambda K(n, \varphi(n)) = \lambda \varphi(n)$$

для всех тех значений n , для которых функция $K(n, x)$ есть всюду определенная функция от x . Применяя теорему 1.3 к функции $U(x_1, x_2) = K(x_2, x_1)$, видим, что в качестве φ может быть взята функция $g(x)$.

2. Изоморфизм. Фактор-нумерации. При сравнении друг с другом двух нумераций приходится различать два случая, когда: а) сравниваются нумерации двух разных множеств и б) сравниваются между собой нумерации одного и того же множества (см. [1]). Рассмотрим отдельно оба случая.

Пусть λ_1, λ_2 — две простые нумерации одного и того же множества $\mathfrak{M}$. Нумерация λ_1 называется о.р.-сводимой к нумерации λ_2 , если существует о.р.ф. $f(n)$ такая, что

$$\lambda_1 n = \lambda_2 f(n). \quad (4)$$

Если λ_1 о.р.-сводима к λ_2 и λ_2 о.р.-сводима к λ_1 , то λ_1 и λ_2 называются о.р.-эквивалентными. Нумерации λ_1, λ_2 называются рекурсивно изоморфными, если существует о.р.ф. $f(x)$, осуществляющая одно-однозначное отображение натурального ряда на себя и такая, что выполнено условие (4).

Так как всякая полная нумерация полна и в смысле [1], то из теоремы 2.3.4 статьи [1] вытекает

Т е о р е м а 2.1. Если простая нумерация λ_1 множества $\mathfrak{M}$ эквивалентна некоторой полной нумерации λ_2 того же множества, то λ_1 и λ_2 рекурсивно изоморфны.

Пусть теперь λ_1 и λ_2 — простые нумерации соответственно множеств $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$, вообще различных. Нумерации λ_1 и λ_2 называются свободно изоморфными, если существует общерекурсивная функция $f(x)$, осуществляющая одно-однозначное отображение натурального ряда на себя и такая, что для любых натуральных m и n

$$\lambda_1 m = \lambda_1 n \Leftrightarrow \lambda_2 f(m) = \lambda_2 f(n).$$

Аналогично нумерация λ_2 называется гомоморфным образом нумерации λ_1 , если существует общерекурсивная функция $f(x)$, отображающая одно-однозначно натуральный ряд на себя и такая, что для любых натуральных m и n

$$\lambda_1 m = \lambda_1 n \Rightarrow \lambda_2 f(m) = \lambda_2 f(n).$$

Пусть λ — нумерация произвольного множества $\mathfrak{M}$ и σ — некоторая эквивалентность на $\mathfrak{M}$. Обозначая через $[a]_\sigma$ совокупность тех элементов $\mathfrak{M}$, которые сравнимы по σ с a и полагая

$$\lambda_\sigma n = [\lambda n]_\sigma,$$

получаем нумерацию совокупности $\mathfrak{M}/\sigma$ всех смежных классов. Нумерация λ_σ будет называться фактор-нумерацией λ/σ от нумерации λ по σ . Ясно, что все фактор-нумерации от λ являются гомоморфными образами нумерации λ .

Т е о р е м а 2.2. *Гомоморфные образы полной нумерации являются полными нумерациями.*

Действительно, если нумерация λ_0 множества $\mathfrak{M}_0$ есть гомоморфный образ полной нумерации λ множества $\mathfrak{M}$ с особым элементом o и a — некоторый λ -номер o , то, полагая $\sigma = \lambda_0 f(a)$, видим, что о.р.ф. $p_2(x_1, x_2)$, удовлетворяющая для λ условиям теоремы 1.2 из п. 1, удовлетворяет требованиям этой теоремы и для нумерации λ_0 и, следовательно, λ_0 — полная нумерация.

В качестве примера можно взять нумерации Клини κ и Поста ω , определенные выше. Так как $K_m^{(1)} = K_n^{(1)} \Rightarrow \omega_m = \omega_n$, то ω есть гомоморфный образ нумерации κ .

3. Перечислимые семейства элементов. Пусть λ — простая нумерация некоторого множества $\mathfrak{M}$. Подмножества $\mathfrak{M}$ условимся называть семействами (объектов $\mathfrak{M}$). Понятие рекурсивной перечислимости можно определить для семейств следующими тремя основными способами:

а) семейство $\sigma \subseteq \mathfrak{M}$ называется слабо перечислимым, если σ есть λ -образ некоторого рекурсивно перечислимого множества чисел $A \subseteq N$;

б) семейство σ называется сильно перечислимым, если σ есть одно-однозначный λ -образ подходящего рекурсивно перечислимого множества чисел A , т. е. если $\lambda A = \sigma$ и из $m, n \in A, m \neq n$ следует $\lambda m \neq \lambda n$;

в) семейство σ называется вполне перечислимым (вполне креативным, вполне рекурсивным и т. п.), если таковым является множество всех номеров всех элементов σ .

Т е о р е м а 3.1 (см. [1]). *Множество $\mathfrak{M}$ с полной нумерацией λ не имеет непустых и отличных от $\mathfrak{M}$ вполне рекурсивных семейств.*

Пусть, напротив, непустое и отличное от $\mathfrak{M}$ семейство σ вполне рекурсивно, т. е. рекурсивно числовое множество $\lambda^{-1}\sigma$. Тогда дополнение его $\lambda^{-1}\sigma'$ также рекурсивно. Пусть $a \in \lambda^{-1}\sigma, b \in \lambda^{-1}\sigma'$. Строим рекурсивную функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} b, & x \in \lambda^{-1}\sigma, \\ a, & x \in \lambda^{-1}\sigma'. \end{cases}$$

Согласно теореме 1.3 найдется о.р.ф. $g(x)$, для которой

$$\lambda g(x) = \lambda f(g(x), x). \quad (5)$$

Если $g(0) \in \lambda^{-1}\sigma$, то $f(g(0), 0) = b$ и, следовательно, $\lambda g(0) \in \sigma, \lambda f(g(0), 0) = \lambda b \in \sigma'$, что противоречит (5). Предположение $g(0) \in \lambda^{-1}\sigma'$ аналогичным путем также ведет к противоречию.

Т е о р е м а 3.2. Если вполне перечислимое семейство σ объектов полно нумерованного множества $\mathfrak{M}$ содержит особый элемент o , то $\sigma = \mathfrak{M}$.

Пусть, напротив, $\sigma \neq \mathfrak{M}$ и $\lambda b \in \sigma'$. Вводим функцию:

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \in \lambda^{-1}\sigma, \\ \text{не определена,} & \text{если } x \in \lambda^{-1}\sigma'. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ частично рекурсивная. В силу полноты нумерации найдется о. р. ф. $g(x)$ такая, что

$$\lambda g(x) = \begin{cases} \lambda b, & x \in \lambda^{-1}\sigma, \\ o, & x \in \lambda^{-1}\sigma'. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$x \in \lambda^{-1}\sigma' \Leftrightarrow g(x) \in \lambda^{-1}\sigma,$$

т. е. множество $\lambda^{-1}\sigma'$ m -сводимо к рекурсивно перечислимому множеству $\lambda^{-1}\sigma$ и, значит, множество $\lambda^{-1}\sigma'$ рекурсивно перечисливо. Так как взаимно дополнительные множества рекурсивно перечислимы, то они оба рекурсивны. Это значит, что σ и σ' вполне рекурсивны, вопреки теореме 3.1.

Т е о р е м а 3.3. Каждое нетривиальное (т. е. отличное от $\emptyset$ и $\mathfrak{M}$) вполне перечислимое семейство σ объектов множества $\mathfrak{M}$ с полной нумерацией λ является вполне креативным.

Пусть $\lambda^{-1}\sigma$ есть совокупность всех значений о.р.ф. $F(x)$ и пусть A — какое-нибудь креативное множество чисел. Введем вспомогательную функцию:

$$f(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если } x \in A, \\ \text{не определена,} & \text{если } x \in \bar{A}. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ — частично рекурсивная, и потому найдется о.р.ф. $g(x)$, для которой

$$\lambda g(x) = \begin{cases} \lambda F(x), & \text{если } x \in A, \\ o, & \text{если } x \in \bar{A}. \end{cases} \quad (6)$$

Согласно теореме 3.2 $o \in \sigma$. Поэтому из (6) следует

$$x \in A \Leftrightarrow g(x) \in \lambda^{-1}\sigma,$$

т. е. креативное множество A m -сводимо к р.п. множеству $\lambda^{-1}\sigma$ и, значит, множество $\lambda^{-1}\sigma$ также креативно.

Т е о р е м а 3.4. Пусть в множестве $\mathfrak{M}$ с полной нумерацией λ семейство σ' всех неособых элементов вполне перечисливо. Тогда каждое отличное от $\mathfrak{M}$ семейство элементов σ , содержащее o , является вполне продуктивным.

Введем частично рекурсивную функцию:

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \in \lambda^{-1}\sigma', \\ \text{не определена,} & \text{если } x \in \lambda^{-1}o, \end{cases}$$

где $\lambda b \in \sigma'$. Тогда найдется о.р.ф. $g(x)$, для которой

$$\lambda g(x) = \begin{cases} \lambda b, & \text{если } x \in \lambda^{-1}\sigma', \\ o, & \text{если } x \in \lambda^{-1}o, \end{cases}$$

и, значит,

$$x \in \lambda^{-1}o \Leftrightarrow g(x) \in \lambda^{-1}\sigma. \quad (7)$$

Согласно теореме 3.3 множество $\lambda^{-1}o$ продуктивно. Поэтому из (7) вытекает, что множество $\lambda^{-1}\sigma$ также продуктивно.

4. Полно нумерованные множества, у которых каждое семейство неособенных элементов вполне перечислимое. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество с полной нумерацией λ , обладающее указанным в заголовке этого пункта свойством. Так как совокупность всех р.п. числовых множеств счетная, а совокупность всех подмножеств бесконечного множества несчетная, то множество $\mathfrak{M}$ конечное, причем совокупность номеров каждого его неособенного элемента рекурсивно перечислима.

Пусть $\mathfrak{M} = \{o, m_0, m_1, \dots, m_s\}$. Положим

$$M_i = \lambda^{-1}m_i, \quad i = 0, 1, \dots, s.$$

Систему множеств $M_0, M_1, \dots, M_s$ назовем системой, ассоциированной с нумерацией λ .

Обратно, пусть задана система $M_0, M_1, \dots, M_s$ каких-то непустых, попарно не пересекающихся множеств чисел, не исчерпывающих в совокупности всех натуральных чисел. Вводим нумерацию λ вспомогательной системы символов $\{o, m_0, \dots, m_s\} = \mathfrak{M}$, полагая по определению

$$\lambda_n = m_i \Leftrightarrow n \in M_i \quad (i = 0, 1, \dots, s),$$

где $m_0 = o$, $M_0 = N - M_0 - \dots - M_s$. Нумерацию λ назовем ассоциированной с системой множеств $M_0, \dots, M_s$ (ср. [1]).

Напомним еще следующие общеизвестные определения [2]: система множеств $A_0, A_1, \dots, A_s$ называется m -сводимой к системе множеств $B_0, B_1, \dots, B_s$, если существует о.р.ф. $g(x)$, для которой

$$x \in A_i \Leftrightarrow g(x) \in B_i \quad (i = 0, 1, \dots, s).$$

Система $U_0, U_1, \dots, U_s$ непустых, попарно не пересекающихся рекурсивно перечислимых множеств называется универсальной, если к этой системе m -сводима любая система из $s + 1$ непустых попарно не пересекающихся рекурсивно перечислимых множеств.

Системы множеств $A_0, \dots, A_s$ и $B_0, \dots, B_s$ называются m -эквивалентными, если каждая из них m -сводима к другой. Эти системы называются рекурсивно изоморфными, если одна из них m -сводима к другой с помощью о.р.ф. $g(x)$, осуществляющей взаимно однозначное отображение натурального ряда на себя.

Т е о р е м а 4.1. Если λ — полная нумерация конечного множества $\mathfrak{M} = \{o, m_0, \dots, m_s\}$, каждый неособенный элемент которого вполне перечислим, то ассоциированная система множеств $M_i = \lambda^{-1}m_i$ ($i = 0, \dots, s$) является m -универсальной. Обратно, если $M_0, M_1, \dots, M_s$ — какая-нибудь m -универсальная система множеств, то ассоциированная нумерация полная и ее каждый неособенный элемент вполне перечислим.

Действительно, пусть λ — полная нумерация множества $\mathfrak{M} = \{o, m_0, \dots, m_s\}$ с вполне перечислимыми неособенными элементами. Тогда множества системы $M_0, \dots, M_s$ рекурсивно перечислимы и не пересекаются попарно. Пусть $A_0, \dots, A_s$ — какая-либо другая система попарно не пере-

секающихся рекурсивно перечислимых множеств. Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \begin{cases} a_i, & \text{если } x \in A_i, \\ \text{не определена} & \text{для остальных } x, \end{cases}$$

где $a_0, \dots, a_s$ — какие-нибудь фиксированные числа из множеств $M_0, M_1, \dots, M_s$. Так как $f(x)$ частично рекурсивная, то найдется о.р.ф. $g(x)$, для которой

$$\lambda g(x) = \begin{cases} \lambda a_i, & \text{если } x \in A_i, \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Следовательно, функция $g(x)$ m -сводит систему $A_0, \dots, A_s$ к системе $M_0, \dots, M_s$ и потому последняя система является m -универсальной.

Обратно, пусть $M_0, \dots, M_s$ — m -универсальная система множеств и λ — ассоциированная нумерация вспомогательной совокупности $\mathfrak{M} = \{0, m_0, \dots, m_s\}$. Пусть $f(x)$ — произвольная частично рекурсивная функция. Положим

$$A_i = \{x \mid f(x) \in M_i\} \quad (i = 0, \dots, s).$$

Рекурсивно перечислимые множества $A_0, \dots, A_s$ попарно не пересекаются. Поэтому найдется о.р.ф. $g(x)$, m -сводящая систему $A_0, \dots, A_s$ к системе $M_0, \dots, M_s$ и потому удовлетворяющая условию полноты (4), что и требовалось.

Сопоставление определений понятий m -эквивалентности и рекурсивного изоморфизма для систем множеств и для ассоциированных нумераций непосредственно показывает, что системы множеств $A_0, \dots, A_s$ и $M_0, \dots, M_s$ тогда и только тогда m -эквивалентны (соответственно рекурсивно изоморфны), когда m -эквивалентны (рекурсивно изоморфны) ассоциированные нумерации вспомогательной совокупности $\mathfrak{M} = \{0, m_0, \dots, m_s\}$ (ср. [1]). Теперь, сравнивая теорему 2.1 с теоремой 4.1 и замечая, что все m -универсальные системы из фиксированного числа $s + 1$ множеств m -эквивалентны, приходим к важному предложению:

С л е д с т в и е. *Все m -универсальные системы, состоящие из фиксированного числа $s + 1$ множеств, рекурсивно изоморфны друг другу* (Майхил [8], А. А. Мучник [2]).

Рассмотрим несколько примеров полных нумераций конечных множеств.

П р и м е р 1. В постовской нумерации ω назовем σ -эквивалентными все непустые р.п. множества. Нумерация ω/σ есть полная нумерация двухэлементной совокупности $\{0, o'\}$, где 0 — пустое множество и o' — система всех непустых р.п. множеств. В этой нумерации элемент o' вполне перечислим и, значит, множество $\omega^{-1}o'$ (совокупность всех постовских номеров непустых р. п. м.) является m -универсальным множеством.

П р и м е р 2. Рассмотрим снова постовскую нумерацию ω совокупности Ω всех р.п. множеств. Разобьем Ω на три класса: класс 0 , состоящий лишь из пустого множества, класс m_0 всех р.п. множеств, равных N , класс m_1 всех остальных р.п. множеств.

Пусть σ — эквивалентность на Ω , отвечающая этому разбиению Ω на классы. Нумерация ω/σ совокупности Ω/σ полная. Семейство o' в этой нумерации вполне перечислимое, а неособенные элементы m_0, m_1 вполне перечислимыми не являются.

Из теоремы 4.1 непосредственно вытекает следующее обобщение теоремы 3.3:

Т е о р е м а 4.2. Пусть λ — полная нумерация некоторой совокупности $\mathfrak{M}$ и $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s$ — какая-либо система попарно не пересекающихся вполне перечислимых непустых семейств объектов из $\mathfrak{M}$. Тогда система множеств чисел $\lambda^{-1}\sigma_0, \lambda^{-1}\sigma_1, \dots, \lambda^{-1}\sigma_s$ является m -универсальной системой.

В самом деле, пусть σ_0 — семейство всех объектов из $\mathfrak{M}$, не вошедших в $\sigma_0, \dots, \sigma_s$. Обозначим через σ эквивалентность на M , отвечающую разбиению $\sigma_0, \sigma_0, \dots, \sigma_s$, и рассмотрим нумерацию $\lambda/\sigma = \lambda_0$ конечной совокупности $\mathfrak{M}_0 = \{\sigma_0, \sigma_0, \dots, \sigma_s\}$. Эта нумерация полная. Так как $\lambda_0^{-1}\sigma_i = \lambda^{-1}\sigma_i$ ($i = 0, \dots, s$), то все неособенные элементы $\mathfrak{M}_0$ вполне перечислимы и, значит, по теореме 4.1 система множеств $\lambda^{-1}\sigma_0, \dots, \lambda^{-1}\sigma_s$ m -универсальная.

Теорема 4.2 дает возможность очень просто строить m -универсальные системы. Например, рассмотрим нумерацию Клини κ . Обозначим через σ_i семейство всех частично рекурсивных функций, принимающих в точке 0 значение i ($i = 0, 1, \dots, s$). Семейства σ_i вполне перечислимы в κ (см. п. 6) и не пересекаются попарно. Поэтому множества $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s$ образуют m -универсальную систему.

Известно, что m -универсальные пары множеств являются эффективно неотделимыми [9]. Поэтому, например, множества клиниевских номеров всех функций семейств σ_0 и σ_1 являются эффективно неотделимыми.

5. Универсальные серии множеств. Результаты п. 4 относительно m -универсальных систем, состоящих из фиксированного конечного числа множеств, очевидным путем распространяются и на бесконечные системы множеств. Именно, с каждой бесконечной последовательностью множеств

$$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots \quad (8)$$

связываем предикат $A(i, x)$, полагая по определению

$$A(i, x) \Leftrightarrow x \in A_i.$$

Последовательность (8) будем называть серией, если предикат $A(i, x)$ рекурсивно перечислим и если множества последовательности (8) попарно не имеют общих элементов.

Последовательность $A(i, x)$ назовем m -сводимой к последовательности $B(i, x)$, если существует о.р.ф. $g(x)$ такая, что

$$A(i, x) \Leftrightarrow B(i, g(x)).$$

Взаимно m -сводимые друг к другу последовательности $A(i, x)$ и $B(i, x)$ будем называть m -эквивалентными, а последовательность $A(i, x)$, сводимую к последовательности $B(i, x)$ с помощью о.р.ф. $g(x)$, осуществляющей однозначное отображение натурального ряда на себя, назовем m -изоморфной $B(i, x)$.

Серия $U(i, x)$ будет называться m -универсальной, если к ней m -сводится любая серия $A(i, x)$ *.

Полную нумерацию λ совокупности объектов $\mathfrak{M}$ назовем серийной, если все неособенные объекты $\mathfrak{M}$ можно так расположить в простую последова-

* [Понятия универсальных и креативных последовательностей были введены Кливом (J. P. Cleave. Creative functions.— Z. math. Logik und Grundl. Math., 1961, 7, N 3, 205—212), распространившим на них основные результаты Мучника — Шмудляна о креативных парах множеств. В частности, Кливом получена (иным путем) теорема 5.2.

тельность $m_0, m_1, \dots (m_i \neq m_j \text{ для } i \neq j)$, что последовательность множеств $\lambda^{-1}m_0, \lambda^{-1}m_1, \dots, \lambda^{-1}m_r, \dots$ (9)

будет связана с серийным предикатом $M(i, x)$ (т. е. (9) будет серией). Имеет место следующий аналог теоремы 4.1:

Т е о р е м а 5.1. *Серия $M(i, x)$, связанная с серийно полной нумерацией λ , является m -универсальной. Обратно, пусть дана некоторая m -универсальная серия $M(i, x)$. Тогда нумерация λ вспомогательной совокупности $\mathfrak{M} = \{o, m_0, m_1, \dots\}$, определенная условиями*

$$\lambda n = m_i \Leftrightarrow M(i, n), \quad (10)$$

является серийно полной нумерацией.

Докажем, например, первое утверждение. Пусть дана произвольная серия $A(i, x)$. Пусть $i = \alpha_M(t)$, $x = \beta_M(t)$ — параметрическое представление $M(i, x)$ с помощью о.р.ф. $\alpha_M(t)$ и $\beta_M(t)$. Полагаем

$$\begin{aligned} i(x) &= \alpha_A(\min_t (\beta_A(t) = x)), \\ f(x) &= \beta_M(\min_t (\alpha_M(t) = i(x))) \end{aligned}$$

и рассматриваем о.р.ф. $g(x)$, для которой выполнено условие (1). Из (1), (10) следует, что

$$A(i, x) \Leftrightarrow M(i, g(x)),$$

т. е. что серия $A(i, x)$ m -сводима к $M(i, n)$. Аналогично доказывается и второе утверждение теоремы.

Т е о р е м а 5.2. *Все m -универсальные серии m -изоморфны друг другу.*

Пусть $M_1(i, x)$ и $M_2(i, x)$ m -универсальные серии. Берем вспомогательное множество $\mathfrak{M} = \{o, m_0, m_1, \dots\}$ и строим при помощи формулы (10) две его нумерации λ_1, λ_2 , отвечающие сериям $M_1(i, x)$ и $M_2(i, x)$. Из m -сводимости серий M_1, M_2 друг к другу следует m -эквивалентность нумераций λ_1 и λ_2 . Так как эти нумерации полные, то согласно теореме 2.1 эти нумерации изоморфны и, следовательно, серии M_1 и M_2 также m -изоморфны.

Аналогом для теоремы 4.2 служит

Т е о р е м а 5.3. *Пусть λ — полная нумерация совокупности $\mathfrak{M}$ и пусть в $\mathfrak{M}$ существует последовательность $\sigma_0, \sigma_1, \dots$ попарно не пересекающихся непустых семейств объектов $\mathfrak{M}$, такая, что предикат $A(i, x)$, определенный условиями*

$$A(i, x) \Leftrightarrow \lambda x \in \sigma_i,$$

является рекурсивно перечислимым. Тогда серия $A(i, x)$ является m -универсальной.

Эта теорема выводится из теоремы 5.1 тем же способом, каким теорема 4.2 выводится из теоремы 4.1.

В качестве примера рассмотрим снова нумерацию Клини κ . Семейства σ_m всех частично рекурсивных функций, принимающих в точке 0 значение m , образуют при $m = 0, 1, 2, \dots$, как легко видеть, серию, удовлетворяющую условиям теоремы 5.3. Поэтому серия множеств $\kappa^{-1}\sigma_0, \kappa^{-1}\sigma_1, \dots$ является m -универсальной.

6. Вполне перечислимые семейства частично рекурсивных функций. Ниже мы хотим построить систему полных нумераций, имеющих весьма естественный вид, и доказать, что эти нумерации не являются изоморфными.

Для этого нам будет нужно знать структуру вполне перечислимых семейств частично рекурсивных функций в нумерации Клини. Вполне перечислимые семейства рекурсивно перечислимых множеств в нумерации Поста были найдены Райсом [6]. Аналогичный результат для ч.р. функций был получен В. А. Успенским [3]. В работах В. А. Успенского условия теорем и доказательства выражены в топологических терминах. Необходимые нам результаты относительно вполне перечислимых множеств функций мы изложим здесь, следуя рассуждениям Райса [6], так как некоторые попутные уточнения для нас также будут представлять интерес.

Функция $f(x)$ называется продолжением или расширением частичной функции $h(x)$, если в каждой точке x , в которой определено $h(x)$, выражение $f(x)$ также определено и равно $h(x)$. Частичная функция $h(x)$ называется конечным ограничением функции $f(x)$, если $f(x)$ есть расширение функции $h(x)$ и $h(x)$ имеет конечную область определенности. В частности, нигде не определенная функция o есть конечное ограничение любой функции $f(x)$.

Гёделевским номером (γ -номером) функции $h(x)$, определенной на непустом конечном множестве $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, назовем число $p_0^{a_0} p_1^{f(a_0)} \dots p_{2n}^{a_n} p_{2n+1}^{f(a_n)}$, где p_i — i -е простое, $a_0 < a_1 < \dots < a_n$. Гёделевским номером нигде не определенной функции условимся считать 0. Функции с конечными областями определения назовем конечно определенными.

Повторением рассуждений Райса [6] непосредственно получается

Т е о р е м а 6.1. Пусть σ — семейство конечно определенных функций, гёделевские номера которых образуют р.п. множество. Тогда множество всех клиниевских номеров всех расширений функций из σ будет также рекурсивно перечислимым.

Аналогичным образом непосредственно получается и

Т е о р е м а 6.2. Множество A гёделевских номеров всех конечно определенных функций, содержащихся в κ -вполне перечислимом семействе ч.р. функций, является рекурсивно перечислимым.

В самом деле, пусть $f_n(x)$ — конечно определенная функция, гёделевский номер которой есть n . Так как $f_n(x)$ является частично рекурсивной функцией от переменных n, x , то при подходящем фиксированном a имеем

$$f_n(x) = K(a, n, x) = K([a, n], x).$$

Поэтому

$$A = [[a, N] \cap \kappa^{-1}\sigma]_{22}$$

и, значит, A — рекурсивно перечислимое множество.

Т е о р е м а 6.3. Пусть $h(x)$ — ч.р.ф., имеющая рекурсивную область определенности, $f(x)$ — ч.р.ф., отличная от $h(x)$, являющаяся расширением $h(x)$. Тогда каждое множество чисел A , содержащее все клиниевские номера h и не содержащее ни одного номера f , является продуктивным.

По определению $\kappa^{-1}a$ есть совокупность всех κ -номеров нигде не определенной функции. Обозначим через $\chi(x)$ функцию, равную 0 вне $\kappa^{-1}a$ и не определенную внутри $\kappa^{-1}a$. Так как $\kappa^{-1}a'$ рекурсивно перечислимое, то функция $\chi(x)$ частично рекурсивная. Без ограничения общности можно предполагать, что $0 \in \kappa^{-1}a$. Обозначим через $\varphi(x)$ функцию, равную 0 в области определенности h и равную 1 вне этой области. Ищем такое a , чтобы для любых n, x

$$\chi(n\varphi(x)) + f(x) = K(a, n, x) = K([a, n], x).$$

Если $n \in \kappa^{-1}o$, то $\chi(n\phi(x))$ определено лишь в области определенности h и потому $K([a, n], x) = h(x)$, т. е.

$$n \in \kappa^{-1}o \Rightarrow [a, n] \in \kappa^{-1}h \subseteq A. \quad (11)$$

Если же $n \in \kappa^{-1}o$, то $\chi(n\phi(x))$ определена всюду и потому $K([a, n], x) = f(x)$, т. е.

$$n \in \kappa^{-1}o \Rightarrow [a, n] \in A. \quad (12)$$

Множество $\kappa^{-1}o$ продуктивно. Согласно (11) и (12) множество $\kappa^{-1}o$ m -сводится к A . Поэтому A продуктивно.

Несколько более громоздко доказываемся

Теорема 6.4. *Множество A натуральных чисел заведомо продуктивно, если оно содержит все κ -номера какой-либо ч.р.ф. $f(x)$ и не содержит ни одного κ -номера никакого конечного ограничения функции $f(x)$.*

Сначала введем особую вспомогательную нумерацию λ одноместных частично рекурсивных функций, называя число n λ -номером функции

$$\lambda n(x) = K(n, x, x) + \sum_{t=0}^n o \cdot K(n, t, x) = \mathfrak{K}K_n^{(2)}(x). \quad (13)$$

Из формулы (13) видно, что выражение $\lambda(x)$ является частично рекурсивной функцией от n, x , и потому для подходящего фиксированного a имеем

$$\lambda n(x) = K([a, n], x).$$

Следовательно, если n есть λ -номер, то $[a, n]$ κ -номер той же функции и, значит, λ -нумерация m -сводима к κ -нумерации. Обратно. ищем такое b , чтобы для всех n, x, y

$$K(n, x) = K(b, n, y, x).$$

Тогда из формулы (13) заключаем, что если n есть κ -номер функции f , то $[b, n]$ будет ее λ -номером. Следовательно, нумерации κ и λ m -эквивалентны и в силу теоремы 2.1 эти нумерации рекурсивно изоморфны. При одно-однозначных отображениях натурального ряда на себя продуктивные множества чисел переходят в продуктивные множества. Поэтому вместо того, чтобы доказать теорему 6.4 для κ -нумерации, достаточно доказать ее для λ -нумерации.

Заметим еще раз, что λ -номером n функции $f(x)$ называется κ -номер двухместной функции $K_n^{(2)} = K(n, x, y)$, из которой функция $f(x)$ получается оператором $\mathfrak{K}$, определенным формулой (13). Таким образом, если требуется найти какой-либо новый λ -номер m функции f , имеющей λ -номер n , то для этого достаточно построить двухместную функцию $h(x, y)$ такую, что $h \neq K_n^{(2)}$, $\mathfrak{K}h = f$, и найти произвольный κ -номер функции h . Этим приемом мы и воспользуемся при доказательстве продуктивности множества A , указанного в теореме 6.4 (для λ -нумераций).

Итак, пусть дано некоторое z , для которого $\omega_z \subseteq A$, где

$$\omega_z = \{u_0, u_1, \dots\}, \quad u_i = K(z, i).$$

Обозначим через p какой-либо λ -номер f , так что $f = \mathfrak{K}K_p^{(2)}$, $K_p^{(2)} = K(p, x, y)$. Мы хотим указать регулярный процесс для построения функции $F(x, y)$, отличной от $K_{u_i}^{(2)}$, $K_p^{(2)}$ и такой, что $\mathfrak{K}F = f$. Обозначая через $g(z)$ κ -номер этого процесса, т. е. κ -номер функции F , мы будем иметь требуемое

соотношение

$$g(z) \in A - \omega_z.$$

Пусть $a(n), b(n)$ — о. р. ф. такие, что пары последовательности

$$\langle a_0, b_0 \rangle, \langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle, \dots, (a_n = a(n), b_n = b(n)) \quad (14)$$

образуют область определенности функции $K(p, x, y)$. В процессе построения функции $F(x, y)$, которая будет определена также на множестве (14), будет строиться вспомогательная последовательность $\langle c_0, d_0 \rangle, \langle c_1, d_1 \rangle, \dots$ такая, что функция $K(u_n, x, y)$ будет заведомо определена на паре $\langle c_n, d_n \rangle$. Сам процесс построения $F(x, y)$ будет разбит на шаги $A_0, B_0, A_1, B_1, \dots$. При этом на шаге A_n будет определяться выражение $F(a_n, b_n)$, а на шаге B_n будет определяться пара $\langle c_n, d_n \rangle$.

Шаг A_0 . Полагаем

$$F(a_0, b_0) = \begin{cases} K(p, a_0, b_0), & \text{если } a_0 = b_0, \\ K(p, a_0, b_0) + 1, & \text{если } a_0 \neq b_0. \end{cases}$$

Шаг A_{n+1} . По условию предполагается, что значения $F(a_i, b_i)$ для $0 \leq i \leq n$ уже определены, определены также пары $\langle c_0, d_0 \rangle, \dots, \langle c_n, d_n \rangle$ и значения $K(u_i, c_i, d_i)$.

Рассмотрим ряд случаев:

- а. $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle = \langle a_i, b_i \rangle$, где $i \leq n$. Тогда $F(a_{n+1}, b_{n+1})$ уже определено.
- б. Пара $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle$ новая, т. е. отличная от пар $\langle a_0, b_0 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle$, но $a_{n+1} = b_{n+1}$. Тогда полагаем $F(a_{n+1}, b_{n+1}) = K(p, a_{n+1}, b_{n+1})$.
- в. Пара $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle$ новая и $a_{n+1} \neq b_{n+1}$. Тогда полагаем $F(a_{n+1}, b_{n+1})$ равным наименьшему числу, не входящему в множество значений $K(u_i, c_i, d_i)$ для тех i , $0 \leq i \leq n$, для которых $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle = \langle c_i, d_i \rangle$. Если таких i нет, то полагаем, например, $F(a_{n+1}, b_{n+1}) = 0$.

Шаг B_n . Пару $\langle c_n, d_n \rangle$ ищем такую, чтобы она входила в область определенности функции $K(u_n, x, y)$ и чтобы для нее выполнялось хотя бы одно из следующих условий:

- г) $c_n \neq d_n$ и $\langle c_n, d_n \rangle \in \{\langle a_0, b_0 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle\}$;
- д) $c_n = d_n$, $K(p, c_n, d_n)$ определено и $K(p, c_n, d_n) \neq K(u_n, c_n, d_n)$.

Пара $\langle c_n, d_n \rangle$, удовлетворяющая указанным требованиям, заведомо существует. Действительно, противное означало бы, что функция $K(u_n, x, y)$ определена лишь на конечном числе недиагональных пар, содержащихся в последовательности $\langle a_0, b_0 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle$, и что значения $K(u_n, x, y)$ в диагональных парах $\langle x, x \rangle$ совпадают с $K(p, x, x)$, если $K(p, x, x)$ определено. Но отсюда следовало бы, что одноместная функция $\mathfrak{K}_{u_n}^{(2)}$ является конечным ограничением f , причем λ -номер $\mathfrak{K}_{u_n}^{(2)}$, равный u_n , содержится в A . Это противоречит требованиям, наложенным на A .

Итак, пара $\langle c_n, d_n \rangle$, удовлетворяющая указанным требованиям, существует. Чтобы найти ее, достаточно пересматривать по порядку совместно пары из области определенности функций $K_p^{(2)}$ и $K_{u_n}^{(2)}$.

Функция $F(x, y)$ построена. Она отлична от каждой функции $K_{u_n}^{(2)}$. Действительно, если $c_n = d_n$, то $F(c_n, d_n) = K(p, c_n, d_n) \neq K(u_n, c_n, d_n)$. Если $\langle c_n, d_n \rangle$ не входит в область определения $K(p, x, y)$, то $F(c_n, d_n)$ также не определено. Однако $K(u_n, c_n, d_n)$ определено, и потому $F \neq K_{u_n}^{(2)}$.

Наконец, если $K(p, c_n, d_n)$ определено, то значение $F(c_n, d_n)$ будет определяться тогда, когда пара $\langle c_n, d_n \rangle$ уже будет находиться в записанной последовательности, и потому $F(c_n, d_n)$ будет иметь значение, отличное от $K(u_n, c_n, d_n)$.

Из доказанных четырех теорем непосредственно вытекает основное

С л е д с т в и е 6.1. Семейство ч. р. ф. тогда и только тогда κ - вполне перечислимо, когда оно состоит из всевозможных расширений конечно определенных функций, совокупность гёделевских номеров которых образует рекурсивно перечислимое множество.

Как уже говорилось, следствие 6.1 содержится в более общих результатах В. А. Успенского, который любезно сообщил следующий простой путь вывода указанного следствия. На топологическом языке следствие 6.1 означает, что семейство ч. р. ф. тогда и только тогда вполне перечислимо, когда оно эффективно открыто, т. е. оно является суммой перечислимого числа обобщенных бэровских интервалов (см. [3] и § 10 из [4]). В такой форме следствие непосредственно вытекает из теоремы 2 заметки [3] (так как клиниевская нумерация потенциально вычислима) и теоремы 5 той же заметки (так как система всех ч. р. ф. ω -сепарабельна и ее клиниевская нумерация является накрывающей).

7. Проективные семейства функций. Вычислимые нумерации. Если рассматриваемое семейство объектов $\mathfrak{Z}$ состоит из одноместных ч. р. ф., то среди нумераций $\mathfrak{Z}$ естественно выделяются так называемые вычислимые (А. Н. Колмогоров — В. А. Успенский) нумерации. Именно, говорят, что простая нумерация τ семейства $\mathfrak{Z}$ является вычислимой, если значение функции из $\mathfrak{Z}$, имеющей номер n , в точке x является ч. р. ф. от переменных n, x , т. е. если $\mathfrak{Z}$ обладает универсальной ч. р. ф. $T(n, x)$, осуществляющей нумерацию $\mathfrak{Z}$. Не каждое семейство функций обладает нумерацией (ср. п. 9). Семейства функций, обладающие хотя бы одной вычислимой нумерацией, называются вычислимыми.

Пусть $\mathfrak{Z}$ — вычисляемое семейство ч. р. ф. и $T(n, x)$ — какая-либо его вычислимая простая нумерация. Ищем такое число c , чтобы для всех n, x было $T(n, x) = K(c, n, x) = K([c, n], x)$.

Отсюда следует, что всякое вычисляемое семейство функций является κ -образом рекурсивного множества $[c, N]$, т. е. является слабо κ -перечислимым в смысле п. 3. Обратное также очевидно.

Простая вычислимая нумерация τ семейства $\mathfrak{Z}$ называется главной (ср. [3]), если к т о р.-сводима любая другая простая вычислимая нумерация $\mathfrak{Z}$. Так как согласно этому определению все главные нумерации $\mathfrak{Z}$ о. р.-эквивалентны друг другу, то из теоремы 2.1 непосредственно вытекает

Т е о р е м а 7.1. Если семейство функций обладает хотя бы одной полной главной нумерацией, то все его главные нумерации полные и изоморфные.

Не входя в дальнейшие подробности, мы хотим теперь указать некоторое число конкретных семейств функций, допускающих полные главные нумерации.

Пусть P — какой-либо вычисляемый оператор, отображающий систему $\mathfrak{X}$ всех одноместных ч. р. ф. на ее некоторую часть $\mathfrak{Z}$. Оператор P будем называть проективным, если $P^2 = P$. С проективным оператором P свяжем нумерацию π его совокупности значений $\mathfrak{Z}$, полагая по определению

$$\pi n = PK_n^{(1)} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Так как оператор P вычисляемый, то для некоторого r имеем: $PK_n^{(1)} = K_{[r, n]}^{(1)}$.

Следовательно, функция $T(n, x) = K([p, n], x)$ является универсальной для нумерации π и потому π — вычислимая нумерация.

Ч. р. ф. $f(x)$ и $g(x)$ условимся называть P -эквивалентными, если $Pf = Pg$. Из $P^2 = P$ следует, что $f \equiv Pf$. Поэтому в каждом классе $[f]_P$ содержится в точности одна функция из $\mathfrak{S}$, и полученное таким образом взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{S}$ и фактор-системой $\mathfrak{K}/P$ является рекурсивным изоморфизмом, если эти системы рассматривать вместе со своими нумерациями π и κ/P . Но фактор-нумерации от полных нумераций полные (см. п. 2), поэтому нумерация π — полная.

Пусть $T_1(n, x)$ — универсальная функция для какой-либо другой простой вычислимой нумерации π_1 . Ищем такое число c , чтобы

$$T_1(n, x) = K([c, n], x).$$

Если n есть π_1 -номер какой-либо функции f из $\mathfrak{S}$, то из

$$f = Pf = PK_{[c, n]}^{(1)}$$

следует, что $[c, n]$ есть π -номер f и, значит, нумерация π является главной.

Семейство функций условимся называть проективным, если оно есть образ системы всех одноместных ч. р. ф. относительно некоторого проективного оператора. Из приведенных рассуждений вытекает

Т е о р е м а 7.2. *Каждое проективное семейство функций обладает полными главными нумерациями. Если проективное семейство $\mathfrak{S}$ содержится в проективном семействе $\mathfrak{S}_1$, то главная нумерация π семейства $\mathfrak{S}$ изоморфна некоторой фактор-нумерации от главной нумерации π_1 семейства $\mathfrak{S}_1$.*

Понятия вычислимой и главной нумераций естественно было бы распространить и на произвольные нумерованные семейства объектов назовем следующим путем. Нумерацию λ_1 семейства объектов $\mathfrak{M}$ с нумерацией λ назовем вычислимой относительно нумерации λ (или подчиненной нумерации λ), если λ_1 t -сводима к λ . Нумерация $\lambda_1\lambda$ -нумерованной системы $\mathfrak{M}$ называется главной, если каждая простая λ -вычислимая нумерация $\mathfrak{M}$ является t -сводимой к λ_1 . Иными словами, главными нумерациями $\mathfrak{M}$ являются все простые нумерации этой системы, t -эквивалентные основной нумерации λ . Поэтому если основная нумерация $\mathfrak{M}$ полная, то все главные нумерации системы изоморфны между собой.

Однако легко привести пример полной нумерации даже двухэлементной системы, которая имеет полные вычислимые нумерации, не изоморфные основной. Например, разобьем все ч. р. ф. на два класса: класс $\mathfrak{K}_0$ всех функций, принимающих лишь значение 0 и обладающих непустой областью определенности, и класс $\mathfrak{K}'_0$ всех остальных функций. Обозначим это разбиение символом ρ . С другой стороны, пусть σ есть разбиение всех ч. р. функций на нигде не определенную функцию o и класс o' всех остальных функций. Нумерации κ/ρ и κ/σ двухэлементного множества полные, и нумерация κ/σ t -сводима к κ/ρ . В то же время κ/ρ не изоморфна κ/σ , так как совокупность всех κ -номеров ни класса $\mathfrak{K}_0$, ни класса $\mathfrak{K}'_0$ не является рекурсивно перечислимой, а множество номеров класса o' рекурсивно перечислимо.

Тем не менее легко заметить, что справедлива

Т е о р е м а 7.3. *Каждая полная нумерация конечной системы объектов, имеющая вполне перечислимые неособенные объекты, а также каждая серийно полная нумерация обладают следующим свойством: каждая t -сводимая к ним полная нумерация является главной.*

Эта теорема является непосредственным следствием теорем 4.1 и 5.1. Пусть, например, серия $M(i, x)$ порождает полную нумерацию λ системы $\mathfrak{M} = \{o, m_0, m_1, \dots\}$ и нумерация λ_1 системы $\mathfrak{M}$ о. р.-сводима при помощи функции $g(x)$ и нумерации λ . Тогда нумерация λ_1 будет также серийной, связанной с серией $M(i, g(x))$. По условию нумерация λ_1 полная. В силу теоремы 5.1 отсюда следует m -универсальность серии $M(i, g(x))$, а в силу теоремы 5.2 это влечет изоморфизм нумераций λ и λ_1 .

Возвращаясь к проективным операторам, введем следующие определения: проективный оператор P назовем направленно проективным, если из того, что функция $f(x)$ есть расширение функции $g(x)$, следует, что Pf есть расширение Pg . Совокупность всех значений направленно проективного оператора назовем направленно проективным семейством ч. р. ф.

Пусть π — главная нумерация какого-нибудь направленно проективного семейства одноместных ч. р. ф. $\mathfrak{F}$. Так как каждый κ -номер произвольной функции f из $\mathfrak{F}$ является и ее π -номером, то из направленности оператора проектирования на $\mathfrak{F}$ непосредственно заключаем, что теоремы 6.3 и 6.4 о продуктивности множеств номеров остаются в силе и для π -номеров функций из $\mathfrak{F}$.

С другой стороны, теорема 6.1 очевидным путем переносится на любые вычислимые нумерации вычислимых семейств функций, а теорема 6.2 непосредственно переносится на главные нумерации любых проективных семейств функций.

Из всех этих замечаний, как и в п. 6, получаем основное

С л е д с т в и е 7.1. Пусть π — главная нумерация направленного проективного семейства $\mathfrak{F}$. Подсемейство $\sigma \subseteq \mathfrak{F}$ тогда и только тогда π -полно перечислимо, когда оно состоит из всевозможных $\mathfrak{F}$ -расширений конечно определенных $\mathfrak{F}$ -функций, совокупность гёделевских номеров которых является рекурсивно перечислимым множеством.

Мы хотим теперь более подробно рассмотреть серию простейших направленно проективных семейств функций.

Пусть A — некоторое непустое рекурсивно перечислимое множество чисел. Обозначим через $\mathfrak{F}_A$ семейство тех ч. р. ф., все значения которых принадлежат A . Для краткости положим

$$\mathfrak{F}_{\{0, 1, \dots, n\}} = \mathfrak{F}_n.$$

Вводим функции $\varphi_n(x)$ и $\varphi_N(x)$, полагая по определению $\varphi_N(x) = x$ и

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x \leq n, \\ n, & \text{если } n < x. \end{cases}$$

Операторы P_n , определенные формулами

$$P_n f = \varphi_n(f) \quad (n = N, 0, 1, \dots),$$

являются направленно проективными, причем $P_n \mathfrak{M} = \mathfrak{F}_n$. Обозначим через κ_n главную нумерацию $\mathfrak{F}_n$, связанную указанным выше способом с оператором P_n .

Следующие изоморфизмы очевидны:

1. Если A — конечное множество, содержащее n чисел, то главная нумерация семейства $\mathfrak{F}_A$ изоморфна нумерации κ_n семейства $\mathfrak{F}_n$.

2. Нумерация κ_0 семейства $\mathfrak{F}_0$ изоморфна нумерации ω системы всех рекурсивно перечислимых множеств.

3. Если A — бесконечное рекурсивное множество, то главная нумерация семейства $\mathfrak{Z}_A$ изоморфна клиниевской нумерации κ .

4. Нумерация κ_m изоморфна фактор-нумерации от κ_n для $m < n$.

С л е д с т в и е 7. 1. описывает строение всех вполне перечислимых подсемейств $\mathfrak{Z}_n$, взятых с их главными нумерациями. Пользуясь этим строением, в п. 8 мы покажем, что нумерации $\kappa, \kappa_0, \kappa_1, \dots$ неизоморфны.

8. **Квазиупорядочение объектов.** Пусть $\mathfrak{M}$ — совокупность, имеющая полную нумерацию λ . Обозначим через Σ систему всех вполне перечислимых семейств объектов $\mathfrak{M}$. Изучение структуры Σ можно производить либо на топологическом языке, вводя при помощи Σ подходящую топологию на $\mathfrak{M}$, что близко идеям В. А. Успенского [3, 4], либо на языке частично упорядоченных множеств, вводя в $\mathfrak{M}$ надлежащий порядок. Этим последним способом мы сейчас и воспользуемся.

Объект a из Σ условимся называть подчиненным объекту $b \in \mathfrak{M}$ (символически $a \leq b$), если каждое вполне перечислимое семейство из Σ , содержащее a , содержит и b . Отсюда непосредственно следует, что для каждого a, b, c из $\mathfrak{M}$ имеем $o \leq a$ и из $a \leq b, b \leq c$ следует $a \leq c$, т. е. что $\leq$ есть отношение частичного квазиупорядка с наименьшим элементом o .

Из указанного определения также непосредственно вытекает, что из изоморфизма нумерованных множеств $\langle \mathfrak{M}; \lambda \rangle$ и $\langle \mathfrak{N}; \nu \rangle$ следует изоморфизм моделей $\langle \mathfrak{M}; \leq \rangle$ и $\langle \mathfrak{N}; \leq \rangle$.

В каждой нумерации κ_s семейства $\mathfrak{Z}_s$ всех частично рекурсивных функций с областью значений $0, 1, \dots, s$ отношение $f \leq g$ означает (в силу следствия 7.1), что функция g есть расширение функции f . Поэтому для нумераций κ_s отношение $\leq$ является отношением частичного порядка. Более того, пусть f, g — какие-либо функции из $\mathfrak{Z}_s$. Тогда функция, график которой равен пересечению графиков f и g , будет наибольшим объектом, подчиненным f и g , т. е. $\mathfrak{Z}_s$ будет нижней полуструктурой относительно $\leq$.

Как уже отмечалось, особый элемент o будет наименьшим в полуструктуре $\mathfrak{Z}_s$. Из следствия 7.1 видно, что частичные функции, определенные лишь в одной точке, будут атомами в $\mathfrak{Z}_s$, а все общерекурсивные функции, содержащиеся в $\mathfrak{Z}_s$, будут максимальными объектами полуструктуры $\mathfrak{Z}_s$.

Атомы f_0 и g_0 назовем изотопными, если $f_0 = g_0$ или если у них нет общего кратного в $\mathfrak{M}$. Объекты f и g назовем изотопными, если для каждого атома f_0 , подчиненного f , существует атом g_0 , изотопный f_0 и подчиненный g , и наоборот. Из смысла отношения $\leq$ в $\mathfrak{Z}_s$ следует, что изотопные объекты — это функции, имеющие одну и ту же область определения. Поэтому в нумерации κ_s все атомы распадаются на классы изотопных друг другу, причем каждый из этих классов содержит одно и то же число объектов, равное $s + 1$. Так как у изоморфных нумерованных множеств классы изотопных атомов должны содержать равное число элементов, то из изложенного следует, что нумерации последовательности $\kappa, \kappa_0, \kappa_1, \dots$ попарно неизоморфны.

9. **Внутренние продуктивные семейства.** В п. 3 было введено абстрактное понятие слабо перечислимого семейства объектов совокупности $\mathfrak{M}$ с нумерацией λ . С другой стороны, в п. 7 было введено понятие вычислимого семейства одноместных ч. р. ф. Сравнивая определения обоих понятий, непосредственно видим, что вычислимые семейства ч. р. ф. это и есть слабо перечислимые семейства ч. р. ф. относительно нумерации Клини κ .

Ясно, что каждое вполне перечислимое семейство является слабо перечислимым. Райс [7] нашел условия, при которых дополнение вполне перечислимого семейства является слабо перечислимым.

Т е о р е м а 9.1. В каждой из нумераций серии $\kappa, \kappa_0, \kappa_1, \dots$ дополнение σ' вполне перечислимого семейства функций σ тогда и только тогда слабо перечислимо, когда σ' есть семейство всех расширений совокупности конечно определенных функций, множество гёделевских номеров которых рекурсивно.

Райс доказал эту теорему для нумерации Поста ω . Однако его рассуждения остаются верными и для остальных нумераций, упомянутых в теореме. Ввиду сравнительной простоты рассуждений мы их не воспроизводим.

Согласно определению семейство σ объектов нумерованной совокупности $\langle \mathfrak{M}, \lambda \rangle$ называется слабо перечислимым, если $\sigma = \lambda A$, где A — некоторое непустое рекурсивно перечислимое множество натуральных чисел. Семейство σ естественно назвать слабо рекурсивным, если его можно представить в виде $\sigma = \lambda A$, где A — подходящее непустое рекурсивное множество. Однако имеет место.

Т е о р е м а 9.2. В полно нумерованных совокупностях каждое слабо перечислимое семейство является слабо рекурсивным.

В статье [1] доказано, что для каждого полно нумерованного множества $\langle \mathfrak{M}, \lambda \rangle$ существует общерекурсивная функция $h(x, y)$ такая, что $\lambda h(x, y) = \lambda x$, а численные значения $h(x, y)$ при любом фиксированном x и различных значениях y различны. Пусть $\sigma = \lambda A$, где A — совокупность значений о. р. ф. $f(n)$. Определяем новую функцию $g(x)$, полагая $g(0) = f(0)$ и

$$g(n+1) = h(f(n+1), \min_t (h(f(n+1), t) > g(n))).$$

Так как $\lambda g(n) = \lambda f(n)$, то $\sigma = \lambda B$, где B — множество всех значений, принимаемых функцией g . Но функция g общерекурсивная и монотонно возрастающая. Поэтому множество B рекурсивное.

Введем еще одно определение: семейство σ объектов нумерованной совокупности $\langle \mathfrak{M}, \lambda \rangle$ назовем внутренне продуктивным, если существует общерекурсивная функция $g(n)$ такая, что для каждого n имеем

$$\omega_n \neq \emptyset \ \& \ \lambda \omega_n \subseteq \sigma \Rightarrow \lambda g(n) \in \sigma \ \& \ \lambda g(n) \in \lambda \omega_n.$$

Из этого определения непосредственно вытекают такие следствия:

а) никакое внутренне продуктивное семейство не может быть слабо перечислимым;

б) каждое внутренне продуктивное семейство содержит сильно перечислимое (см. п. 3) бесконечное подсемейство объектов.

Обычный канторовский диагональный метод позволяет непосредственно обнаружить продуктивность ряда простых семейств функций в нумерациях κ_s ($s = \infty, 0, 1, \dots$).

Т е о р е м а 9.3. В каждой из нумераций κ_s является внутренне продуктивным каждое семейство σ , состоящее из функций с бесконечной областью определенности, при условии, что σ содержит все частичные характеристические функции всех бесконечных рекурсивных множеств.

Напомним, что частичной характеристической функцией множества A называется функция, равная 0 на A и не определенная вне A .

Для доказательства теоремы 9.3 обозначим через $h(n)$ частично рекурсивную функцию, обладающую следующими свойствами:

α) если $\omega_n \neq \emptyset$, то $h(n)$ определено и $\kappa_s \omega_n = \kappa_s \omega_{h(n)}$;

β) если $h(n)$ определено, то $K(h(n), t)$ определена для всех t .

Пусть для некоторого n $\omega_n = \emptyset$ и $\kappa_s \omega_n \subseteq \sigma$. Полагая $K(K(h(n), t), x) = F_t^n(x)$, ищем последовательно точки определенности $a_0 < b_0$ для функции $F_0^n(x)$, точки определенности a_1, b_1 функции $F_1^n(x)$, подчиненные условию

$a_0 < a_1 < b_1$, точки определенности a_2, b_2 функции $F_2^n(x)$, подчиненные условию $b_1 < a_2 < b_2$, и т. д. Множество $A^n = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ является рекурсивным и бесконечным. Обозначим через $G^n(x)$ функцию, равную 0 в точках $x \in A^n$ и не определенную вне A^n .

Так как $G^n(x)$ есть частично рекурсивная функция от n и x , то при некотором a будем иметь $G^n(x) = K(a, n, x)$. Функция $g(n) = [a, n]$ удовлетворяет условиям продуктивности σ .

В самом деле, согласно условию α), имеем $\kappa_s \omega_n = \kappa_s \omega_{h(n)}$. Семейство $\kappa_s \omega_{h(n)}$ состоит из функций $F_0^n(x), F_1^n(x), \dots$. Но $\kappa_s g(n) = G^n \neq F_i^n$, так как в точке b_i функция F_i^n определена, а G^n нет. В то же время G^n входит в σ , так как она определена на бесконечном рекурсивном множестве и равна на нем 0. Следовательно, $\kappa_s g(n) \in \sigma - \kappa_s \omega_n$, что и требовалось.

Аналогичным образом доказывается и

Т е о р е м а 9.4. В каждой из нумераций $\kappa, \kappa_0, \kappa_1, \dots$ является внутренне продуктивным каждое семейство σ , состоящее из частично рекурсивных функций с бесконечной областью определенности, при условии, что σ содержит все общерекурсивные функции, принимающие значения 0 и 1 (или любые другие два фиксированных значения).

Пусть h, F_i^n, a_i, b_i обозначают то же, что и выше, и лишь функцию G^n мы теперь определим иначе, а именно, по определению полагаем:

$$G^n(0) = \dots = G^n(a_0) = \overline{sg} F_0^n(a_0),$$

$$G^n(a_0 + 1) = \dots = G^n(a_1) = \overline{sg} F^n(a_1),$$

$$\dots \dots \dots$$

Функция G^n в точке a_i отлична от F_i^n и потому $G^n \notin \kappa_s \omega_n$. Однако $G^n \in \sigma$, так как G^n общерекурсивна и принимает лишь значения 0, 1.

Понятие внутренней продуктивности семейства рекурсивно перечислимых множеств впервые было введено в статье Деккера и Майхила [11], где доказана внутренняя продуктивность многих важных семейств рекурсивно перечислимых множеств. Ряд результатов, связанных с нумерацией Клини и вопросам, рассмотренным в п. 6.9, содержится у Шапиро [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Конструктивные алгебры, I.— Усп. мат. наук, 1961, 16, № 3, 3—60.
2. А. А. Мучник. Изоморфизм систем рекурсивно перечислимых множеств с эффективными свойствами.— Труды Моск. мат. о-ва, 1958, 7, 407—412.
3. В. А. Успенский. Системы перечислимых множеств и их нумерации.— Докл. АН СССР, 1955, 105, № 6, 1155—1158.
4. В. А. Успенский. К теореме о равномерной непрерывности.— Успехи мат. наук, 1957, 12, № 1, 99—142.
5. В. А. Успенский. Несколько замечаний о перечислимых множествах.— Z. math. Log. und Grundl. Math., 1957, 3, N 2, 157—170.
6. H. G. Rice. Classes of recursively enumerable sets and their decision problems.— Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 74, N 2, 358—366.
7. H. G. Rice. On completely recursively enumerable classes and their key arrays.— J. Symbol. Log., 1956, 21, N 3, 304—308.
8. J. Myhill. Creative sets.— Z. math. Log. und Grundl. Math., 1955, 1, N 2, 97—108.
9. R. M. Smullyan. Theory of formal systems. Princeton, 1960.
10. H. Rogers. Gödel numberings of partial recursive functions.— J. Symbol. Log., 1958, 23, N 3, 331—341.
11. J. C. Dekker, J. Myhill. On classes of recursively enumerable sets.— Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 89, N 1, 25—59.
12. N. Shapiro. Degrees of computability.— Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, N 2, 281—299.

К ТЕОРИИ ВЫЧИСЛИМЫХ СЕМЕЙСТВ ОБЪЕКТОВ*



В течение последних десяти лет разными авторами были введены понятия главной нумерации (В. А. Успенский [5]), полной нумерации (А. И. Мальцев [2, 3]), стандартной и специальной нумераций (А. Х. Лахлан [1]) и ряд других. Цель этой статьи — выяснить основные связи между указанными понятиями. При выполнении этой программы пришлось ввести несколько новых типов нумераций: нормальные и субнормальные нумерации, субспециальные нумерации, эффективно главные нумерации и т. п.

В качестве типичных результатов упомянем следующее: вычислимое семейство множеств тогда и только тогда обладает вычислимой полной нумерацией, когда оно содержит наименьшее множество. Главные нумерации таких семейств изоморфны. Понятие эффективно главной нумерации равносильно понятию нормальной нумерации. Семейство множеств тогда и только тогда субспециально, когда оно ω -плотное и τ -замкнутое в смысле Успенского [5].

В отличие от статей [5, 2] в данной статье под нумерацией α совокупности $\mathfrak{M}$ некоторых объектов всегда понимается однозначное отображение $\alpha: N \rightarrow \mathfrak{M}$ множества N всех натуральных чисел на совокупность $\mathfrak{M}$. Число n называется номером объекта αn . Подсовокупности совокупности $\mathfrak{M}$ будут называться семействами объектов.

Хотя главный интерес представляет случай, когда основная совокупность $\mathfrak{M}$ есть совокупность всех рекурсивно перечислимых множеств (р. п. м.) натуральных чисел, а нумерация α является нумерацией Поста π (см. [3]), тем не менее там, где это будет казаться целесообразным, определения и теоремы мы будем формулировать для случая совокупности $\mathfrak{M}$ произвольных объектов и произвольной ее нумерации α . Такая точка зрения особенно удобна в том случае, когда изучаются подсемейства какого-либо специального семейства $\mathfrak{M}$ р. п. м., например семейства всех частично рекурсивных функций (ч. р. ф.).

§ 1. Главные и полные нумерации

Пусть α — какая-нибудь нумерация произвольной совокупности $\mathfrak{M}$ объектов. Нумерация β семейства объектов $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ называется сводимой к нумерации α , если существует общерекурсивная функция (о. р. ф.) $f(x)$, для которой

$$\beta n = \alpha f(n) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Нумерации семейства $\mathfrak{B}$, сводимые к нумерации α , называются α -вычислимыми. Семейство $\mathfrak{B}$ называется α -вычислимым, если оно обладает хотя бы одной α -вычислимой нумерацией. Если совокупность $\mathfrak{M}$ и нумерация α заранее фиксированы, то вместо α -вычислимая будем говорить просто вычис-

* Алгебра и логика, 1964, 3, № 4, 5—31.

лимая. В частности, если $\mathfrak{M}$ — совокупность всех р.п.м., то в качестве основной нумерации будет всегда браться нумерация Поста π (см. [3]).

Нумерации α, α_1 одной и той же совокупности $\mathfrak{M}$ называются эквивалентными, если каждая из них сводима к другой. Они называются изоморфными, если одна из них сводима к другой при помощи о. р. ф. $f(x)$, осуществляющей одно-однозначное отображение натурального ряда на себя.

Нумерация β семейства $\mathfrak{X}$ объектов совокупности $\mathfrak{M}$ с нумерацией α называется α -главной, если нумерация β α -вычислима и каждая α -вычислимая нумерация семейства $\mathfrak{X}$ сводится к β .

Т е о р е м а 1. Пусть совокупности $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ имеют соответственно нумерации γ, β, α , причем нумерация β α -главная, а нумерация γ α -вычислимая. Тогда нумерация γ β -вычислима.

Пусть f, g — о.р. функции, сводящие γ, β к α , в частности, $\mathfrak{C} = \{\alpha f(m)\}$, $\mathfrak{X} = \{\alpha g(m)\}$. Вводим о.р.ф. $h(x)$, полагая

$$h(2m) = f(m), \quad h(2m+1) = g(m).$$

Из $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{X}$ следует $\mathfrak{X} = \{\alpha h(n)\}$. Поэтому отображение $v: \gamma n = \alpha h(n)$ является α -вычислимой нумерацией семейства $\mathfrak{X}$. Нумерация v должна сводиться к α -главной нумерации β некоторой о. р. функцией $\varphi(x)$. Таким образом, $\alpha h(n) = \beta \varphi(n)$, откуда

$$\gamma n = \alpha f(n) = \beta \varphi(2n)$$

и, значит, нумерация γ β -вычислима.

Если в теореме 1 требование, чтобы нумерация β была α -главной, заменить условием, чтобы β была α -вычислимой, то утверждение теоремы может оказаться и неверным.

Согласно [3] нумерация α совокупности $\mathfrak{M}$ называется полной нумерацией с особым объектом $o \in \mathfrak{M}$, если для каждой частично рекурсивной функции (ч. р. ф.) $f(n)$ существует такая о. р. ф. $g(n)$, что

$$\alpha g(n) = \begin{cases} \alpha f(n), & \text{если } f(n) \text{ определено,} \\ o, & \text{если } f(n) \text{ не определено.} \end{cases}$$

Т е о р е м а 2. Пусть основная нумерация α совокупности $\mathfrak{M}$ полная относительно особого объекта $o \in \mathfrak{M}$. Тогда каждая вычислимая нумерация β произвольного вычислимого семейства $\mathfrak{S}$, содержащего особый элемент o , сводится к подходящей вычислимой нумерации β_* семейства $\mathfrak{S}$, полной относительно объекта o .

Покажем, что требуемыми свойствами обладает нумерация β_* , определенная формулой:

$$\beta_* n = \begin{cases} \beta K(n, 0), & \text{если } K(n, 0) \text{ определено,} \\ o, & \text{если } K(n, 0) \text{ не определено,} \end{cases}$$

где $K(n, x)$ — функция Клини (см. [3]).

а. Нумерация β_* α -вычислимая. По условию существует о. р. ф. $f(n)$, для которой $\beta n = \alpha f(n)$. Так как нумерация α полная, то для ч. р. ф. $f(K(n, 0))$ должна существовать о. р. ф. $g(n)$, удовлетворяющая соотношению

$$\alpha g(n) = \begin{cases} \alpha f(K(n, 0)) \\ o \end{cases} = \begin{cases} \beta K(n, 0) \\ o \end{cases} = \beta_* n$$

и, следовательно, сводящая нумерацию β_* к нумерации α .

б. Нумерация β сводится к нумерации β_* . Ищем такое число a , чтобы имело место тождество (см. [3]): $n = K(a, n, x) = K([a, n], x)$.

Имеем

$$\beta n = \beta K([a, n], 0) = \beta_* [a, n],$$

т. е. о.р.ф. $[a, n]$ сводит β к β_* .

в. Нумерация β_* полная относительно o . Обозначим через κ нумерацию Клини совокупности всех ч.р.ф., определяемую соотношением $\kappa n = K(n, x)$. Эта нумерация полная относительно нигде не определенной функции Λ . Имеем

$$\kappa t = \kappa n \Rightarrow K(t, 0) = K(n, 0) \Rightarrow \beta_* t = \beta_* n,$$

$$\kappa n = \Lambda \Leftrightarrow K(n, 0) \text{ не определено } \Leftrightarrow \beta_* n = o.$$

Иначе говоря, нумерация β_* есть гомоморфный образ полной нумерации κ и потому β_* — полная нумерация [3].

Теорема 2 доказана. Из нее непосредственно вытекает основное

С л е д с т в и е 1. Пусть нумерация α совокупности $\mathfrak{M}$ полная относительно объекта o . Тогда все α -главные нумерации произвольного семейства $\mathfrak{S}$, содержащего o , полные относительно o и изоморфные между собой.

Пусть β — какая-нибудь главная нумерация семейства $\mathfrak{S}$. Согласно теореме 2 β сводится к некоторой вычислимой полной нумерации β_* . Из вычислимости β_* следует, что β_* сводится к β и потому нумерация β эквивалентна полной нумерации β_* . Согласно обобщенной теореме Роджерса [2, 3], каждая нумерация, эквивалентная полной, полна и ей изоморфна. Таким образом, нумерация β полная. Из определения главных нумераций следует, что все главные нумерации одного и того же семейства эквивалентны друг другу. Так как главные нумерации полные, то из обобщенной теоремы Роджерса заключаем, что они изоморфные.

§ 2. α -порядок и α -топология

Для того чтобы охарактеризовать семейства, допускающие вычислимую полную нумерацию, мы наложим некоторые ограничения на строение множества вполне перечислимых семейств.

Согласно [3] семейство $\mathfrak{S}$ объектов совокупности $\mathfrak{M}$ с нумерацией α называется α -вполне перечислимым (α -в.п.), если множество $\alpha^{-1} \mathfrak{S}$ всех α -номеров всех объектов из $\mathfrak{S}$ рекурсивно перечислимое. Из этого определения непосредственно следует, что каждое α -в.п. семейство α -вычислимо и что объединение и пересечение конечного числа α -в.п. семейств являются α -в.п. семействами. Имеет место также следующая очевидная

Л е м м а 1. Пересечение α -в.п. семейства $\mathfrak{S}$ с произвольным семейством $\mathfrak{B}$, обладающим α -вычислимой нумерацией β , является β -в.п. подсемейством в семействе $\mathfrak{B}$.

Действительно, пусть $\beta n = \alpha f(n)$, где $f(n)$ — подходящая о.р.ф. Тогда

$$n \in \beta^{-1}(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{B}) \Leftrightarrow f(n) \in \alpha^{-1}(\mathfrak{S})$$

и, следовательно, множество $\beta^{-1}(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{B})$ рекурсивно перечислимое.

С л е д с т в и е. Если нумерация α' совокупности $\mathfrak{M}$ сводится к ее нумерации α , то каждое α -в.п. семейство является и α' -вполне перечислимым. В частности, эквивалентные нумерации обладают одним и тем же множеством вполне перечислимых семейств.

Инвариантность множества всех вполне перечислимых систем относительно перехода к эквивалентным нумерациям позволяет рассматривать структуру указанного множества в качестве характеристики заданной нумерации семейства. При помощи этого множества наиболее естественно ввести в совокупность $\mathfrak{M}$ топологию [4] и псевдопорядок [3].

По определению α -открытыми семействами объектов совокупности $\mathfrak{M}$ с нумерацией α называются произвольные объединения α -в. п. семейств.

Объект $b \in \mathfrak{M}$ называем α -надобъектом объекта $a \in \mathfrak{M}$ (символически $a \leq_{\alpha} b$), если для каждого α -в. п. семейства $\mathfrak{S}$

$$a \in \mathfrak{S} \Rightarrow b \in \mathfrak{S}.$$

Отношение $\leq_{\alpha}$ транзитивно и рефлексивно, но, вообще говоря, не антисимметрично. Ясно, что условие антисимметричности

$$a \leq_{\alpha} b \ \& \ b \leq_{\alpha} a \Rightarrow a = b$$

равносильно требованию, чтобы $\mathfrak{M}$ относительно α -топологии было T_0 -пространством. При выполнении этого требования $\mathfrak{M}$ становится частично упорядоченной совокупностью. Из леммы 1 непосредственно вытекает

С л е д с т в и е. Пусть семейство $\mathfrak{B}$ имеет α -вычислимую нумерацию β . Тогда для любых объектов a, b из семейства $\mathfrak{B}$ имеем

$$a \leq_{\beta} b \Rightarrow a \leq_{\alpha} b. \quad (1)$$

В частности, если основная совокупность $\mathfrak{M}$ относительно α -топологии есть T_0 -пространство, то каждое семейство $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$, обладающее α -вычислимой нумерацией β , является T_0 -пространством относительно β -топологии.

Например, совокупность всех рекурсивно перечислимых множеств относительно нумерации Поста образует T_0 -пространство. Поэтому T_0 -пространствами являются и все семейства множеств, имеющие вычислимые нумерации.

Л е м м а 2. Пусть $\mathfrak{M}$ — совокупность с произвольной нумерацией α . Если семейство $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ имеет α -вычислимую нумерацию β , полную относительно объекта $a \in \mathfrak{B}$, то a является α -наименьшим объектом в $\mathfrak{B}$.

В [3] доказано, что совокупность, имеющая полную нумерацию, не имеет в. п. семейств, содержащих особый объект и отличных от всей совокупности. Таким образом, в $\mathfrak{B}$ особый объект a является β -наименьшим. В силу (1) этот объект является и α -наименьшим.

Нумерацию α совокупности $\mathfrak{M}$ назовем верхней, если для каждого $a \in \mathfrak{M}$ существует о. р. ф. $g(n)$ такая, что

$$\alpha g(n) = a \vee \alpha n, \quad (2)$$

где $a \vee \alpha n$ есть наименьший среди общих α -надобъектов объектов a и αn .

Л е м м а 3. Пусть нумерация α основной совокупности верхняя и полная относительно какого-то объекта o . Тогда совокупность $\mathfrak{B}$ всех α -надобъектов произвольно заданного объекта a обладает α -главной нумерацией, полной относительно объекта a .

Вводим нумерацию β системы $\mathfrak{B}$, полагая

$$\beta n = a \vee \alpha n.$$

Из формулы (2) вытекает, что нумерация β α -вычислимая. С другой стороны, для любых m, n имеем

$$\alpha m = \alpha n \Rightarrow \beta m = \beta n,$$

$$\alpha m = o \Rightarrow \beta m = a,$$

т. е. β есть гомоморфный образ α . Так как α полная относительно σ , то β полная относительно α .

Остается показать, что нумерация β α -главная. Пусть семейство $\mathfrak{B}$ имеет нумерацию γ , для которой $\gamma n = \alpha f(n)$, где $f(n)$ — некоторая о. р. ф. Из $\alpha \leq \alpha \gamma n$ следует

$$\gamma n = \alpha \vee \gamma n = \alpha \vee \alpha f(n) = \beta f(n),$$

что и требовалось.

Из лемм 2, 3 теперь непосредственно следует

Т е о р е м а 3. Пусть нумерация α основной совокупности $\mathfrak{M}$ верхняя и полная относительно некоторого объекта. Для того чтобы семейство $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{M}$, имело вычислимую нумерацию, полную относительно какого-то объекта $\alpha \in \mathfrak{S}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{S}$ имело α -наименьший объект α .

Необходимость условий дает лемма 2. Обратно, пусть $\mathfrak{S}$ содержит объект α , α -наименьший в $\mathfrak{S}$. Согласно лемме 3 совокупность $\mathfrak{B}$ всех α -надобъектов для α обладает главной нумерацией β , полной относительно объекта α . Согласно теореме 1 система $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{B}$, являясь α -вычислимой, будет и β -вычислимой. Но $\mathfrak{S}$ содержит особый объект α β -нумерованной системы $\mathfrak{B}$ и потому согласно теореме 2 $\mathfrak{S}$ обладает β -вычислимой нумерацией, полной относительно объекта α .

В качестве примера рассмотрим нумерацию Поста π совокупности всех р. п. м. Эта нумерация верхняя и полная относительно пустого множества $\emptyset$. Для любых р.п.м. b , c отношение $b \leq_\pi c$ равносильно включению $\mathfrak{B} \subseteq c$. Согласно теореме 3 имеем: *вычислимое семейство р.п.м. тогда и только тогда обладает вычислимой полной нумерацией, когда среди его множеств есть наименьшее.*

Отметим еще, что лемма 3 теряет свою силу, если в ее условиях опустить требование, чтобы нумерация α была верхней. Действительно, пусть $\mathfrak{M}$ — совокупность всех одноместных ч.р.ф. и α — нумерация Клини κ (см. [3]). Отношение $b \leq_\kappa c$ теперь означает, что функция c есть продолжение частичной функции b . Рассмотрим ч. р. ф. a , которая не может быть доопределена до о.р.ф., и пусть $\mathfrak{B}$ — совокупность всех ч.р.ф., являющихся продолжениями частичной функции a . Семейство $\mathfrak{B}$ невычислимо. В самом деле, пусть, напротив, $\mathfrak{B}$ имеет вычислимую нумерацию β . Обозначая через $B(n, x)$ функцию β -номера n , видим, что $B(n, x)$ есть ч.р.ф. от переменных n, x . Область определенности B рекурсивно перечислима, и потому ее можно расположить в рекурсивную последовательность

$$\langle n_0, x_0 \rangle, \langle n_1, x_1 \rangle, \dots \quad (3)$$

Пусть x — произвольно заданное число. Так как в $\mathfrak{B}$ заведомо найдутся функции, определенные в точке x , то в последовательности (3) найдется первая пара $\langle n_i, x_i \rangle$, у которой $x_i = x$. Вводим функцию $\varphi(x)$, полагая $\varphi(x) = B(n_i, x)$. Функция $\varphi(x)$ общерекурсивная и совпадающая с α в области определенности α , что противоречит недоопределяемости α .

§ 3. Нормальные и субнормальные нумерации

Нумерация β семейства объектов $\mathfrak{B}$ некоторой совокупности $\mathfrak{M}$ с нумерацией α называется α -субнормальной, если β α -вычислима и существует такая ч. р. ф. $g(n)$, что

$$\alpha n \in \mathfrak{B} \Rightarrow g(n) \text{ определено и } \alpha n = \beta g(n). \quad (4)$$

Нумерация β называется α -нормальной, если β α -вычислима и существует о.р.ф. $g(n)$, обладающая свойством (4).

Соответственно этому семейство $\mathfrak{B}$ называется α -субнормальным (α -нормальным), если существует α -субнормальная (α -нормальная) нумерация $\mathfrak{B}$.

Теорема 4. Для α -субнормальных (нормальных) семейств понятие α -главной нумерации равносильно понятию α -субнормальной (нормальной) нумерации.

Доказательство удобно разбить на две очевидные леммы.

Лемма 4. Каждая α -субнормальная нумерация β семейства $\mathfrak{B}$ является α -главной.

По условию существуют о.р.ф. $f(n)$ и ч.р.ф. $g(n)$, для которых выполнены условие

$$\beta n = \alpha f(n) \quad (5)$$

и условие (4). Пусть γ — какая-нибудь α -вычислимая нумерация семейства $\mathfrak{B}$ и $h(n)$ — соответствующая сводящая о.р.ф. такая, что

$$\gamma n = \alpha h(n). \quad (6)$$

Из (4) — (6) имеем

$$\gamma n = \beta g(h(n)),$$

причем $g(h(n))$ определена всюду. Таким образом, нумерация γ сводима к β , что и требовалось.

Лемма 5. Каждая нумерация γ произвольного семейства $\mathfrak{B}$, эквивалентная некоторой α -субнормальной (нормальной) нумерации β этого семейства, сама является α -субнормальной (α -нормальной).

Так как γ сводится к β , то нумерация γ α -вычислима. По условию существуют функции g, f , удовлетворяющие соотношениям (4), (5), и о.р.ф. $p(n)$, удовлетворяющая соотношению $\beta n = \gamma p(n)$. Отсюда получаем $\alpha n \in \mathfrak{B} \Rightarrow \alpha n = \beta g(n) = \gamma p(g(n))$ и $p(g(n))$ определено. Следовательно, нумерация γ α -субнормальна (α -нормальна).

Докажем теорему 4. Согласно лемме 4 каждая α -субнормальная нумерация является α -главной. Обратно, пусть γ есть α -главная нумерация α -субнормального (α -нормального) семейства $\mathfrak{B}$ и, следовательно, существует некоторая α -субнормальная (α -нормальная) нумерация β этого семейства. В силу леммы 4 нумерация β α -главная и потому β эквивалентна γ . В силу леммы 5 отсюда вытекает, что нумерация γ α -субнормальная (α -нормальная).

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ — семейства объектов, имеющие соответственно нумерации γ, β, α . Тогда:

а) если γ субнормальна (нормальна) относительно α и β субнормальна (нормальна) относительно α , то γ субнормальна (нормальна) относительно β ;

б) если γ субнормальна (нормальна) относительно β и β субнормальна (нормальна) относительно α , то γ субнормальна (нормальна) относительно α .

Проверим утверждение а) для субнормальных нумераций. По условию существуют о.р.ф. f, h , удовлетворяющие соотношениям (5), (6), ч.р.ф. $g(n)$, удовлетворяющая соотношению (4), и ч.р.ф. $K(n)$, удовлетворяющая соотношению

$$\alpha n \in \mathfrak{C} \Rightarrow k(n) \text{ определено и } \alpha n = \gamma k(n). \quad (7)$$

Согласно теореме 4 нумерация β α -главная и потому согласно теореме 1 нумерация γ β -вычислима. С другой стороны, из (5) и (7) получаем

$$\beta n \in \mathfrak{E} \Rightarrow \beta n = \alpha f(n) = \gamma k(f(n)),$$

что и требовалось. Остальные утверждения проверяются аналогично.

Нумерация Поста совокупности всех р. п. м. удовлетворяет двум условиям: она полна относительно пустого множества $o = \emptyset$ и совокупность всех непустых р. п. м. вполне перечислима в этой нумерации. Легко видеть, что при этих условиях нормальные и субнормальные семейства отличаются друг от друга лишь содержанием особого объекта o .

Т е о р е м а 6. Пусть основная нумерация α совокупности $\mathfrak{M}$ полна относительно объекта o . Тогда

а) каждое содержащее o α -субнормальное семейство $\mathfrak{B}$ α -нормально;

б) если совокупность всех неособенных объектов из $\mathfrak{M}$ α -вполне перечислима, то, добавляя объект o к произвольному α -субнормальному семейству $\mathfrak{B}$, получим α -нормальное семейство $\mathfrak{B}_1$.

Докажем а). По условию существует ч. р. ф. $g(n)$, удовлетворяющая требованию (4). Вводим новую нумерацию γ семейства $\mathfrak{B}$, полагая

$$\gamma n = \begin{cases} \beta g(n), & \text{если } g(n) \text{ определено,} \\ o, & \text{если } g(n) \text{ не определено.} \end{cases} \quad (8)$$

Так как семейство $\mathfrak{B}$ вычислимо, то для подходящей о. р. ф. $f(n)$ имеем $\beta n = \alpha f(n)$ и, следовательно,

$$\gamma n = \begin{cases} \alpha f(g(n)), & \text{если } f(g(n)) \text{ определено,} \\ o, & \text{если } f(g(n)) \text{ не определено.} \end{cases}$$

Из полноты нумерации α следует, что для подходящей о.р.ф. $h(n)$

$$\alpha h(n) = \begin{cases} \alpha f(g(n)), & \text{если } f(g(n)) \text{ определено,} \\ o, & \text{если } f(g(n)) \text{ не определено.} \end{cases}$$

Таким образом, для любых n имеем $\alpha h(n) = \gamma n$. Поэтому нумерация γ α -вычислима. Из (8) получаем

$$\alpha n \in \mathfrak{B} \Rightarrow \alpha n = \gamma n,$$

что и требовалось.

Переходя к доказательству утверждения б), обозначим через A совокупность всех α -номеров всех неособенных объектов из $\mathfrak{M}$. Пусть $f(n)$ — о. р. ф., для которой $\beta n = \alpha f(n)$, $g(n)$ — ч. р. ф., удовлетворяющая требованию (4). Совокупность A является рекурсивно перечислимой. Поэтому функция

$$g_1(n) = \begin{cases} g(n), & \text{если } n \in A, \\ \text{неопределенность,} & \text{если } n \notin A, \end{cases}$$

частично рекурсивная. Вводим нумерацию γ семейства $\mathfrak{B}_1$, полагая

$$\gamma n = \begin{cases} \beta g_1(n), & \text{если } g_1(n) \text{ определено,} \\ o, & \text{если } g_1(n) \text{ не определено.} \end{cases}$$

Как и выше, легко проверяем, что нумерация γ α -вычислима. С другой стороны, из определения $g_1(x)$ и соотношения (4) следует

$$\begin{aligned} o \neq \alpha n \in \mathfrak{B} &\Rightarrow \alpha n = \beta g(n) \ \& \ n \in A \Rightarrow \alpha n = \gamma n, \\ o \neq \alpha n &\Rightarrow n \notin A \Rightarrow g_1(n) \text{ не определено} \Rightarrow \gamma n = o, \end{aligned}$$

т. е.

$$\alpha n \in \mathfrak{B}_1 \Rightarrow \alpha n = \gamma n$$

для любых n , что и требовалось.

Т е о р е м а 7. Пусть совокупность объектов $\mathfrak{M}$ имеет нумерацию α и содержит такой объект a , что совокупность $\mathfrak{M} - \{a\}$ α - вполне перечислимая. Если некоторое α -нормальное семейство $\mathfrak{B}$ содержит a , то семейство $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B} - \{a\}$ α -субнормальное.

Обозначим через β какую-нибудь α -нормальную нумерацию $\mathfrak{B}$, и пусть f, g — о. р. ф., для которых

$$\beta n = \alpha f(n), \quad \alpha n \in \mathfrak{B} \Rightarrow \alpha n = \beta g(n).$$

Пусть A — р.п.м. всех α -номеров всех объектов из $\mathfrak{M} - \{a\}$. Тогда множество A_0 всех тех чисел n , которые удовлетворяют соотношению $f(n) \in A$, является рекурсивно перечислимым и потому совпадает с множеством значений подходящей о.р.ф. $\varphi(t)$. Отображение γ , определяемое формулой

$$\gamma n = \alpha f(\varphi(n)),$$

является α -вычислимой нумерацией семейства $\mathfrak{B}_0$. Покажем, что нумерация γ является α -субнормальной. Вводя ч.р.ф.

$$g_1(n) = \min_t (\varphi(t) = g(n)),$$

получим

$$\alpha n \in \mathfrak{B}_0 \Rightarrow \alpha n = \alpha f(g(n)) \text{ и } f(g(n)) \in A,$$

$f(g(n)) \in A \Rightarrow g(n) \in A_0 \Rightarrow g_1(n)$ определено и $g(n) \approx \varphi(g_1(n))$. Следовательно,

$$\alpha n \in \mathfrak{B}_0 \Rightarrow \alpha n = \alpha f(\varphi(g_1(n))) = \gamma g_1(n).$$

Отметим такое следствие теоремы 7: если нормальное семейство $\mathfrak{B}$ р.п.м. содержит наименьшее множество a , являющееся рекурсивным, то семейство $\mathfrak{B} - \{a\}$ субнормально.

§ 4. Эффективно главные нумерации

Число n условимся называть (постовским) номером семейства $\mathfrak{B}$ объектов α -нумерованной совокупности $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{B} = \alpha(\pi n)$, где π — обычная нумерация Поста р.п.м. Это же число n будем называть номером (частичной) нумерации γ семейства $\mathfrak{B}$, определяемой формулой $\gamma x = \alpha K(n, x)$, где $K(n, x)$ — функция Клини. Если $K(n, x)$ определена для всех x , то γ является α -вычислимой нумерацией семейства $\mathfrak{B}$.

Вычислимая нумерация β семейства $\mathfrak{B}$ называется α -эффективно главной, если существует ч.р.ф. $\omega(x)$, позволяющая по номеру n произвольной α -вычислимой нумерации γ семейства $\mathfrak{B}$ находить номер $\omega(n)$ о.р.ф., сводящей γ к β , т. е. если существует ч.р.ф. $\omega(x)$, удовлетворяющая требованию

$\alpha n = \mathfrak{B}$, и $K(n, x)$ всюду определена $\Rightarrow \alpha K(n, t) = \beta K(\omega(n), t)$, где $\pi\pi$ — совокупность всех значений функции $K(n, x)$.

Т е о р е м а 8. *Понятия α -субнормальной нумерации и α -эффективно главной нумерации равносильны.*

Пусть β — α -эффективно главная нумерация семейства $\mathfrak{B}$ и $\omega(n)$ — соответствующая ч. р. ф., позволяющая по номеру n вычислимой нумерации γ семейства $\mathfrak{B}$ находить номер $\omega(n)$ функции, сводящей γ к β . Пусть о.р.ф. $f(x)$ удовлетворяет условию $\beta x = \alpha f(x)$. Рассмотрим произвольное число n . Присоединяя объект αn к семейству $\mathfrak{B}$, получим новое семейство $\mathfrak{C}$, для которого строим вычислимую нумерацию γ , полагая $\gamma x = \alpha F(n, x)$, где

$$F(n, 0) = n, \quad F(n, x+1) = f(x).$$

Функция $F(n, x)$ от переменных n, x общерекурсивная, и потому для подходящего числа a имеем

$$F(n, x) = K([a, n], x).$$

Пусть $\alpha n \in \mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ и $[a, n]$ — номер вычислимой нумерации $\gamma x = \alpha K([a, n], x)$ семейства $\mathfrak{B}$. Поэтому $\alpha K([a, n], x) = \beta K(\omega([a, n]), x)$ и, следовательно,

$$\alpha n = \alpha K([a, n], 0) = \beta K(\omega([a, n]), 0).$$

Вводя частично рекурсивную функцию $g(n) = K(\omega([a, n]), 0)$, будем иметь

$$\alpha n \in \mathfrak{B} \Rightarrow \alpha n = \beta g(n) \text{ и } g(n) \text{ определено.} \quad (9)$$

Обратно, пусть заданы о.р.ф. $f(x)$, для которой $\beta x = \alpha f(x)$, и ч.р.ф. $g(x)$, удовлетворяющая соотношению (9).

Рассмотрим какую-нибудь вычислимую нумерацию γ : $\gamma x = \alpha K(n, x)$ семейства $\mathfrak{B}$. Так как $\alpha K(n, x) \in \mathfrak{B}$, то из (9) следует

$$\alpha K(n, x) = \beta g(K(n, x)) = \beta K([b, n], x),$$

где b — подходящее фиксированное число. Отсюда видно, что в качестве сводящей функции $\omega(n)$ можно взять функцию $[b, n]$.

§ 5. Стандартные семейства и предполные нумерации

В статье [2] введено следующее понятие полной нумерации: нумерация α называется полной, если существует такая о.р.ф. $\varphi(x)$, что

$$\alpha K(n, \varphi(n)) = \alpha \varphi(n) \quad (10)$$

для всех тех n , для которых функция $K(n, x)$ всюду определенная. Иначе говоря, нумерация α полная, если существует алгоритм, позволяющий по клиньевскому номеру n произвольной о.р.ф. $g(x) = K(n, x)$ находить решение x (неподвижную точку преобразования g) уравнения

$$\alpha g(x) = \alpha x.$$

Для того чтобы не смешивать это понятие полноты с введенным выше понятием полноты относительно фиксированного объекта, мы будем называть предполными нумерациями нумерации, полные в смысле [2].

Каждая нумерация, полная относительно некоторого объекта, является предполной [3]. В каких случаях верно обратное утверждение, неизвестно *. В [2] показано (обобщенная теорема Роджерса), что эквивалентные предполные нумерации изоморфны.

Т е о р е м а 9. Пусть нумерация α совокупности $\mathfrak{M}$ предполная. Тогда каждая α -нормальная нумерация β произвольного α -нормального семейства $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ предполная и все α -нормальные нумерации $\mathfrak{B}$ изоморфны друг другу.

В частности, все главные нумерации произвольного нормального семейства р.п.м. предполные и между собой изоморфные.

Пусть f, g, φ — о.р. функции, удовлетворяющие соответственно условию $\beta x = \alpha f(x)$ и требованиям (9), (10), и пусть n — число, для которого функция $K(n, x)$ всюду определена. Ищем число a , для которого

$$f(K(n, g(x))) = K(a, n, x) = K([a, n], x)$$

тождественно относительно n, x . Из (9), (10) получаем

$$\beta K(n, g(\varphi([a, n]))) = \alpha f(K(n, g(\varphi([a, n])))) = \alpha K([a, n], \varphi([a, n])) = \\ = \alpha \varphi([a, n]) = \beta g(\varphi([a, n])).$$

Таким образом, $g(\varphi([a, n]))$ есть искомая неподвижная точка для преобразования $K(n, x)$ в нумерации β и потому нумерация β предполная.

Согласно теореме 4 все α -нормальные нумерации $\mathfrak{B}$ α -главные и потому друг другу эквивалентные. В силу обобщенной теоремы Роджерса эквивалентные предполные нумерации изоморфны, и, следовательно, все α -нормальные нумерации $\mathfrak{B}$ изоморфны.

В соответствии с определением А. Лахлана [1] нумерацию β семейства $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ условимся называть α -стандартной, если нумерация β α -вычислимая и

$$\alpha n \in \mathfrak{B} \Rightarrow \beta n = \alpha n.$$

Семейство, допускающее α -стандартную нумерацию, называется α -стандартным.

Ясно, что каждая стандартная нумерация нормальна и потому каждое α -стандартное семейство α -нормальное. Последнее утверждение допускает обращение:

Т е о р е м а 10. Каждая α -нормальная нумерация β произвольного α -нормального семейства $\mathfrak{B}$ эквивалентна подходящей α -стандартной нумерации семейства $\mathfrak{B}$, и, следовательно, понятия α -нормального и α -стандартного семейства равносильны.

Пусть f, g — о.р.ф. такие, что для всех

$$\beta n = \alpha f(n), \quad \alpha n \in \mathfrak{B} \Rightarrow \alpha n = \beta g(n).$$

Вводим новую нумерацию γ семейства $\mathfrak{B}$, полагая $\gamma n = \beta g(n)$. Из $\gamma n = \beta g(n) = \alpha f(g(n))$ следует, что нумерация γ α -вычислимая. Кроме того,

$$\alpha n \in \mathfrak{B} \Rightarrow \alpha n = \beta g(n) = \gamma n.$$

Таким образом, нумерация γ α -стандартная. Согласно теореме 4 нормальные нумерации β, γ эквивалентны.

* Имеется пример предполной нумерации, не являющейся полной (см., например, Ю. Л. Ершов. Теория нумераций. Новосибирск, НГУ, 1969). — Прим. ред.

С л е д с т в и е. Если основная нумерация α предполная, то каждая α -нормальная нумерация β изоморфна подходящей α -стандартной нумерации.

Согласно теореме 10 нумерация β эквивалентна α -стандартной нумерации γ . Согласно теореме 9 обе эти нумерации изоморфны.

Заметим, что нумерация, изоморфная α -стандартной нумерации, не обязана быть α -стандартной, но, конечно, будет α_1 -стандартной для подходящей нумерации α_1 , изоморфной α .

Т е о р е м а 11. Если β — предполная главная нумерация семейства р.п.м. $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ — β -субнормальное семейство и

$$\beta h(0) \subseteq \beta h(1) \subseteq \dots, \quad \bigcup h(i) \in \mathfrak{B}, \quad \beta h(i) \in \mathfrak{C},$$

где $h(i)$ — некоторая о.р.ф., то $\bigcup h(i) \in \mathfrak{C}$.

Частный случай этой теоремы, когда $\mathfrak{B}$ — совокупность всех р.п.м., а $\mathfrak{C}$ — некоторое нормальное семейство, доказан А. Лахланом. Его доказательство почти без изменений переносится и на теорему 11. Для полноты изложения мы приведем доказательство теоремы 11.

Введем обозначения: $\beta h(i) = T_i$, $\bigcup T_i = T$. Следуя Лахлану, находим строго перечислимые семейства конечных множеств T_{ij} , S_{ij} такие, чтобы

$$T_{ij} \subseteq T_{ij+1}, \quad \bigcup T_{ij} = T_i, \quad S_{ij} \subseteq S_{ij+1}, \quad \bigcup S_{ij} = \gamma g(i),$$

где γ есть β -субнормальная нумерация $\mathfrak{C}$ и $g \vdash$ ч.р.ф., для которой $\beta n \in \mathfrak{C} \Rightarrow \beta n = \gamma g(n)$. Полагаем

$$U_x = \bigcup_{i \leq x} T_{ix} \quad (\bigcup U_x = T).$$

Тогда множества

$$R_i = T_0 \cup \bigcup T_x (x > 0 \ \& \ \exists y (U_y \supseteq S_{ix} \ \& \ U_{x-1} \subseteq S_{iy})) \quad (11)$$

будут образовывать вычислимую последовательность р.п.м., содержащихся в $\mathfrak{B}$. Так как нумерация β главная, то согласно теореме 1 найдется о.р.ф. $r(n)$, для которой $R_i = \beta r(i)$. Нумерация β предполная. Поэтому найдется число e , удовлетворяющее равенству

$$R_e = \beta r(e) = \beta e.$$

Рассмотрим множество $\gamma g(e)$. С самого начала мы можем предполагать, что $T_0 \neq \emptyset$, $T_{ij} \neq \emptyset$. Если $g(e)$ не определено, то $\gamma g(e) = S_{ej} = \emptyset$, в формуле (11) членов T_x нет и $R_e = T_0$. Но из $\beta e = T_0 \in \mathfrak{C}$ следует, что $g(e)$ определено. Итак, $g(e)$ определено.

Если $\gamma g(e) = T$, то $T \in \mathfrak{C}$ и все доказано. Если $\gamma g(e) \neq T$, то найдется число p , для которого $p \in \gamma g(e)$, $p \notin T$ или $p \notin \gamma g(e)$, $p \in T$. В первом случае для больших x ни при каких y не выполняется соотношение $U_y \supseteq S_{ex}$, а во втором случае для больших x ни при каких y не выполняется соотношение $U_{x-1} \supseteq S_{ey}$. Поэтому в формуле (11) для R_e имеется лишь конечное число членов T_x и, следовательно, $R_e = T_n$. Если для всех m $T_m = T_{m+1}$, то $T = T_m \in \mathfrak{C}$ и теорема доказана. В противном случае должно существовать n , для которого $R_e = T_n$, $T_n \neq T_{n+1}$. Из соотношений $\beta e = T_n \in \mathfrak{C}$ следует, что $T_n = \gamma g(e)$. Поэтому для больших y имеем

$$U_y \supseteq T_{ny} \supseteq S_{e\ n+1}, \quad U_n \subseteq S_{ey}.$$

Следовательно, член T_x , $x = n+1$ должен входить в представление R_e по формуле (11) и потому $R_e \supseteq T_{n+1}$, что противоречит условию $R_e = T_n \neq T_{n+1}$. Это противоречие и доказывает теорему 11.

Теорема 12. Если совокупность произвольных объектов $\mathfrak{B}$, имеющая предполную нумерацию β , является объединением конечного числа β -в. п. семейств $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_s$, то хотя бы одно из этих семейств совпадает с $\mathfrak{B}$.

Доказательство, очевидно, достаточно провести для случая $s = 2$.

Пусть

$$\beta^{-1}\mathfrak{B}_1 = \{\varphi_1(0), \varphi_1(1), \dots, \varphi_1(n), \dots\},$$

$$\beta^{-1}\mathfrak{B}_2 = \{\varphi_2(0), \varphi_2(1), \dots, \varphi_2(n), \dots\},$$

где φ_1, φ_2 — подходящие о.р.ф. Обозначим через B_1 совокупность тех чисел, которые появляются в первой строке ранее, чем во второй, и пусть B_2 — совокупность тех чисел, которые появляются во второй строке не позже, чем в первой. Так как $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}$, то $B_1 \cup B_2 = N$. Множества B_1, B_2 рекурсивно перечислимые, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ и потому они рекурсивны. Пусть $\mathfrak{B}_1 \neq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_2 \neq \mathfrak{B}$. Тогда найдутся числа a, b такие, что $\beta a \in \mathfrak{B}_1$, $\beta a \notin \mathfrak{B}_2$, $\beta b \in \mathfrak{B}_2$, $\beta b \notin \mathfrak{B}_1$. Рассмотрим о.р.ф.

$$g(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \in B_1, \\ a, & \text{если } x \in B_2. \end{cases}$$

Так как нумерация β предполная, то должна существовать неподвижная точка e , для которой $\beta g(e) = \beta e$. Если $e \in B_1 \subseteq \beta^{-1}\mathfrak{B}_1$, то $\beta e \in \mathfrak{B}_1$, $g(e) = b$. Из $\beta g(e) = \beta e$ получаем, что $\beta b \in \mathfrak{B}_1$ в противоречии с условием $\beta b \notin \mathfrak{B}_1$. Аналогично опровергается и предположение $e \in B_2$.

С л е д с т в и е. Если семейство р.п.м. $\mathfrak{B}$ допускает вычислимую предполную нумерацию β и содержит минимальное множество a , являющееся рекурсивным, то это множество наименьшее в $\mathfrak{B}$.

Действительно, в противном случае в $\mathfrak{B}$ нашлось бы множество b , не содержащее a . Семейство $\mathfrak{B}_1$ тех множеств из $\mathfrak{B}$, которые содержат хотя бы одну точку из a , и семейство тех множеств из $\mathfrak{B}$, которые содержат хотя бы одну точку из $N - a$, являются β -в. п. семействами, отличными от $\mathfrak{B}$, объединение которых совпадает с $\mathfrak{B}$, что противоречит теореме 12.

Для стандартных нумераций семейств р.п.м. теорема 12 и ее следствие в несколько иной форме были доказаны А. Лахланом [1]. Следствие представляет интерес, так как не известно, всякое ли стандартное семейство имеет наименьшее множество и даже всякое ли семейство р.п.м., допускающее вычислимую предполную нумерацию, содержит наименьшее множество *.

В качестве простого примера нормального семейства р.п.м. можно взять семейство $\mathfrak{B}_A$ всех рекурсивно перечислимых надмножеств произвольного р.п.м. A . Пусть $A = \pi a$, $S(m, n)$ — о.р.ф., для которой $\pi S(m, n) = \pi m \cup \pi n$. Тогда отображение $\beta: \beta n = \pi S(a, n)$ является вычислимой нумерацией семейства $\mathfrak{B}_A$. Эта нумерация стандартная, поскольку

$$\pi n \in \mathfrak{B}_A \Rightarrow \beta n = \pi a \cup \pi n = \pi n.$$

Более сложным примером может служить семейство $\mathfrak{S}$, состоящее из пустого множества и всех множеств вида $\pi^{-1}\mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ произвольное в.п. семейство р.п.м. Нормальность семейства $\mathfrak{S}$ легко устанавливается, если воспользоваться теоремой о строении в.п. семейств р.п.м. (см. § 7).

* Имеются примеры предполных нумераций, не имеющих наименьших множеств (см., например, А. Н. Lachlan. On the indexing of classes of recursively enumerable sets. — J. Symbol. Log., 1966, 31, N 1, 10—22). — Прим. ред.‡

§ 6. Специальные и субспециальные нумерации

Нумерация β семейства объектов $\mathfrak{B}$ некоторой совокупности объектов $\mathfrak{M}$, имеющей нумерацию α , будет называться α -субспециальной, если она α -вычислима и существует ч.р.ф. $g(x)$, удовлетворяющая условиям

$$\alpha x \in \mathfrak{B} \Rightarrow g(x) \text{ определено и } \alpha x = \beta g(x), \quad (12)$$

$$g(x) \text{ определено} \Rightarrow \beta g(x) \leq_{\alpha} \alpha x. \quad (13)$$

Первое из этих условий означает, что нумерация β α -субнормальна.

Если существует о.р.ф. $g(x)$, удовлетворяющая условиям (12), (13), то нумерация β будет называться α -специальной. Условие (12) показывает, что каждая специальная нумерация нормальна.

Семейство объектов $\mathfrak{B}$ будет называться α -субспециальным (α -специальным), если существует α -субспециальная (α -специальная) нумерация $\mathfrak{B}$.

Допустим, что совокупность $\mathfrak{M}$ содержит α -минимальный объект o и $\alpha a = o$. Тогда из (13) следует, что если $\mathfrak{B}$ — α -специальное семейство, то $\beta g(a) = o$ и потому $o \in \mathfrak{B}$. В частности, каждое специальное семейство р.п.м. содержит пустое множество.

Нумерацию β семейства $\mathfrak{B}$ условимся называть α -специальной стандартной нумерацией, если β α -стандартна и для всех n

$$\beta n \leq_{\alpha} \alpha n.$$

З а м е ч а н и е. Если основная нумерация α полна, то каждая α -специальная нумерация произвольного α -специального семейства $\mathfrak{B}$ изоморфна подходящей специальной стандартной нумерации γ семейства $\mathfrak{B}$.

Как и в § 5, вводим нумерацию $\gamma: \gamma n = \beta g(n)$. Соотношения (12), (13) обращаются соответственно в условия

$$\alpha x \in \mathfrak{B} \Rightarrow \alpha x = \gamma x, \quad \gamma x \leq_{\alpha} \alpha x,$$

показывающие, что γ есть α -специально стандартная нумерация $\mathfrak{B}$. Согласно теореме 9 нормальные нумерации β , γ изоморфны.

Согласно А. Лахлану [1], семейство $\mathfrak{B}$ р.п.м. называется специальным, если оно допускает специальную стандартную нумерацию. Приведенное выше замечание показывает, что понятия специального семейства и семейства, специального по Лахлану, равносильны.

Нижеследующие теоремы почти дословно повторяют соответствующие теоремы 5, 6 и 7 из предыдущего параграфа.

Т е о р е м а 13. Пусть $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{B}$ — совокупности объектов, имеющие соответственно нумерации α , γ , β . Тогда

а) если γ α -(суб)специальная и β γ -(суб)специальная, то β α -(суб)специальная;

б) если β γ -вычислимая и α -(суб)специальная, γ α -вычислимая и для любых объектов a , b из $\mathfrak{C}$ условие $a \leq_{\alpha} b$ влечет $a \leq_{\gamma} b$, то нумерация β γ -(суб)специальная.

Докажем б). По условию существуют ч.р.ф. $g(x)$ и о.р.ф. $f(x)$, для которых выполнены условия (12), (13) и соотношение $\gamma n = \alpha f(n)$. Отсюда получаем

$$\gamma n \in \mathfrak{B} \Rightarrow \alpha f(n) \in \mathfrak{B} \Rightarrow \alpha f(n) = \beta g(f(n))$$

или

$$\gamma n \in \mathfrak{B} \Rightarrow g(f(n)) \text{ определено и } \gamma n = \beta g(f(n)).$$

Кроме того, имеем

$$g(f(n)) \text{ определено} \Rightarrow \beta g(f(n)) \leqslant \alpha f(n) = \gamma n,$$

откуда по предположению следует, что

$$g(f(n)) \text{ определено} \Rightarrow \beta g(f(n)) \leqslant \gamma n.$$

Таким образом, нумерация β γ -(суб)специальна.

Т е о р е м а 14. Если основная нумерация α совокупности $\mathfrak{M}$ полна относительно объекта o , то, добавляя o к произвольному α -субспециальному семейству $\mathfrak{B}$, получим α -специальное семейство $\mathfrak{B}_1$. В частности, при указанной полноте α , α -субспециальное семейство тогда и только тогда α -специально, когда оно содержит o .

Пусть β — α -субспециальная нумерация $\mathfrak{B}$. Из полноты α следует, что нумерация γ семейства $\mathfrak{B}_1$, определенная формулой

$$\gamma n = \begin{cases} \beta g(n), & \text{если } g(n) \text{ определено,} \\ o, & \text{если } g(n) \text{ не определено,} \end{cases}$$

является α -вычислимой. Из (12), (13) следует, что γ является специальной стандартной нумерацией.

Т е о р е м а 15. Пусть совокупность объектов $\mathfrak{M}$, имеющая некоторую нумерацию α , содержит такой объект a , что совокупность $\mathfrak{M} - \{a\}$ α -вполне перечислима. Если α -субспециальная совокупность $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ содержит a , то семейство $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B} - \{a\}$ также α -субспециальное.

Пусть β — α -субспециальная нумерация $\mathfrak{B}$ и g — ч.р.ф., f — о.р.ф., удовлетворяющие требованиям (12), (13) и соотношению $\beta n = \alpha f(n)$. Пусть γ — нумерация семейства $\mathfrak{B}_0$ и φ , g_1 — функции, построенные в процессе доказательства теоремы 7. Имеем

$$g_1(n) \text{ определено} \Rightarrow \gamma g_1(n) = \alpha f(\varphi(g_1(n))) = \beta g(n) \subseteq \alpha n$$

и, следовательно, нумерация γ α -субспециальна.

Так как нумерация Поста π совокупности всех р. п. м. полна и семейство всех непустых р. п. м. является вполне перечислимым, то из предыдущих теорем непосредственно получаем

С л е д с т в и е. Каждое специальное семейство р. п. м. содержит пустое множество. Каждое не специальное субспециальное семейство р. п. м. получается из соответствующего специального семейства отбрасыванием пустого множества.

Мы хотим теперь изложить основную теорему А. Лахлана о строении специальных классов р. п. м. и указать некоторые ее связи с результатами В. А. Успенского.

Нумерация σ семейства γ конечных множеств называется строго вычислимой, если σ вычислима и функция

$$S(n) = \text{мощность } \sigma(n)$$

общерекурсивна. Семейство конечных множеств, допускающее строго вычислимую нумерацию, называется строго перечислимым.

Т е о р е м а 16. Для того чтобы семейство р. п. м. было субспециальным, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало с совокупностью всех р. п. м.,

являющихся пределами монотонных последовательностей множеств подходящего строго перечеислимого семейства конечных множеств.

А. Лахланом [1] доказано, что семейство р. п. м. тогда и только тогда специально, когда оно совпадает с совокупностью всех р. п. м., являющихся пределами монотонных последовательностей множеств подходящего строго перечеислимого семейства конечных множеств, содержащего пустое множество. Отбрасывая в этой формулировке условие о пустом множестве, получаем ввиду теорем 14, 15 теорему 16.

В § 7 нам будет нужно несколько более общее предложение, которое мы теперь и сформулируем. Согласно В. А. Успенскому [4], семейство р. п. м. $\mathfrak{X}$ называется ω -плотным, если совокупность всех принадлежащих ему конечных множеств строго перечеислима и каждая конечная часть любого множества B из $\mathfrak{X}$ содержится в подходящем конечном множестве, принадлежащем $\mathfrak{X}$ и содержащемся в B .

Теорема 17. Если β — главная нумерация ω -плотного семейства р. п. м. $\mathfrak{X}$ и подсемейство $\mathfrak{C}$ обладает β -субспециальной нумерацией γ , то семейство $\mathfrak{C}$ ω -плотно.

Мы приведем подробное доказательство этой теоремы, хотя оно и совпадает почти полностью с доказательством Лахлана упомянутой выше более частной теоремы.

По условию существуют о. р. ф. $h(n)$ и ч. р. ф. $g(n)$ такие, что $\{\beta h(n)\}$ ($n = 0, 1, \dots$) — строго перечеислимая последовательность всех конечных множеств из $\mathfrak{X}$ и

$$\begin{aligned} \beta n \in \mathfrak{C} &\Rightarrow g(n) \text{ определено и } \beta n = \gamma g(n), \\ g(n) \text{ определено} &\Rightarrow \gamma g(n) \subseteq \beta n. \end{aligned} \quad (14)$$

Покажем сначала, что совокупность всех конечных множеств, принадлежащих $\mathfrak{C}$, строго перечеислима. Так как все конечные множества из $\mathfrak{C}$ содержатся в последовательности $\{\beta h(n)\}$, то нам надо найти лишь те значения n , для которых $\beta h(n) \in \mathfrak{C}$. Из (14) видим, что

$$\begin{aligned} \beta h(n) \in \mathfrak{C} &\Leftrightarrow g(h(n)) \text{ определено и} \\ \gamma g(h(n)) = \beta h(n) &\Leftrightarrow g(h(n)) \text{ определено и } \beta(h(n)) \subseteq \gamma g(h(n)). \end{aligned}$$

Поскольку множества $\beta h(n)$ даны эффективно, то совокупность значений n , удовлетворяющих условиям: $g(h(n))$ определено и $\beta h(n) \subseteq \gamma g(h(n))$, заведомо рекурсивно перечеислимая.

Остается показать, что каждое конечное подмножество U произвольного множества $B \in \mathfrak{C}$ содержится в подходящем конечном множестве V , $V \in \mathfrak{C}$, $V \subseteq B$. Допускаем, что это ложно. Пусть U — фиксированное конечное подмножество некоторого $B \in \mathfrak{C}$, для которого не существует V , удовлетворяющего указанным требованиям. Так как $B \in \mathfrak{X}$, то найдется такая о. р. ф. $p(n)$, что

$$U \subseteq B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots; \quad \bigcup B_i = B \quad (B_i = \beta h(p(i))).$$

Пусть $t(n)$ — о. р. ф., совокупность значений которой нерекурсивная. Положим

$$\begin{aligned} T_i &= \{t(0), t(1), \dots, t(i)\}, \quad \bigcup T_i = T, \\ R_i &= B_0 \cup \bigcup_{i \in T_j} B_j. \end{aligned}$$

Имеем

$$i \notin T \Rightarrow R_i = B, \quad i \in T \Rightarrow R_i = B_m.$$

Таким образом, все множества семейства $\{R_i\}$ принадлежат $\mathfrak{B}$. Ясно, что нумерация $i \rightarrow R_i$ вычислима. В силу теоремы 1 эта нумерация должна быть β -вычислимой, т. е. для подходящей о. р. ф. $s(i)$ имеем $R_i = \beta s(i)$.

Из соотношений

$$\begin{aligned} i \notin T \Rightarrow \beta s(i) = B = \gamma s(i) &\Rightarrow U \subseteq \gamma s(i), \\ i \in T \Rightarrow \beta s(i) = B_m \supseteq \gamma s(i) &\Rightarrow U \not\subseteq \gamma s(i) \end{aligned}$$

следует, что

$$i \notin T \Leftrightarrow U \subseteq \gamma s(i).$$

Но совокупность значений i , удовлетворяющих соотношению $U \subseteq \gamma s(i)$, заведомо рекурсивно перечислима, что противоречит предположенной нерекурсивности множества T .

Разумеется, теорема 17 была бы прямым следствием теоремы 16, если бы было показано, что каждая главная нумерация ω -плотного семейства эффективно главная. Если же это предположение неверное, то могло бы представлять некоторый интерес следующее обобщение теоремы 16:

Пусть β — предполная главная нумерация ω -плотного семейства р.п.м. $\mathfrak{B}$. Подсеме́йство $\mathfrak{C}$ этого семейства тогда и только тогда β -субспециально, когда оно состоит из множеств некоторого строго вычислимого семейства F конечных множеств и всех множеств семейства $\mathfrak{B}$, являющихся пределами возрастающих последовательностей конечных множеств семейства F .

Необходимость этих условий непосредственно следует из теорем 11 и 17, а достаточность доказывается так же, как и в соответствующей теореме Лахлана [1].

В цитированной статье В. А. Успенского [4] наряду с понятием ω -плотности рассматривается еще условие τ -замкнутости. Легко видеть, что для ω -плотных семейств τ -замкнутость равносильна замкнутости относительно взятия предела вычислимой последовательности возрастающих р. п. м. и поэтому теорема 16 допускает следующую формулировку: семейство р. п. м. тогда и только тогда субспециально, когда оно ω -плотно и τ -замкнуто.

§ 7. Вполне перечислимые семейства

Пусть совокупность $\mathfrak{M}$ имеет нумерацию α и $\mathfrak{B}$ — семейство объектов из $\mathfrak{M}$, имеющее α -вычислимую нумерацию β . Согласно замечанию из § 2 все подсемейства вида $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — произвольное α -в. п. семейство, являются β -в. п. подсемействами в $\mathfrak{B}$. Их называют α -продолжаемыми β -в. п. семействами. Нумерации β , у которых все β -в. п. семейства α -продолжаемы, представляют особый интерес. Например, для таких нумераций β -топология семейства $\mathfrak{B}$ совпадает с топологией, индуцируемой на $\mathfrak{B}$ основной α -топологией. Один тип этих нумераций описан В. А. Успенским (см. [5, теорема 5]). Мы хотим показать, что эта теорема непосредственно следует из результатов, содержащихся в § 5 и 6.

Согласно Успенскому, вычислимая нумерация β семейства $\mathfrak{B}$ р. п. м. называется эффективно открытой, если каждое β -в. п. подсемейство $\mathfrak{C}$

состоит из всевозможных принадлежащих $\mathfrak{B}$ надмножеств подходящей строго перечислимой системы конечных множеств, принадлежащих семейству $\mathfrak{B}$.

Ясно, что каждое подсемейство $\mathfrak{C}$ этого вида является π -продолжаемым. Таким образом, эффективно открытые нумерации принадлежат к упомянутому классу нумераций с продолжаемыми вполне перечислимыми семействами, но, конечно, не исчерпывают этот класс.

Т е о р е м а 18. Пусть нумерация α основной совокупности $\mathfrak{M}$ верхняя и полная, нумерация β семейства $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ α -главная и a, b — объекты из $\mathfrak{B}$, связанные соотношением $a <_{\alpha} b$. Тогда каждое числовое множество A , удовлетворяющее условиям

$$\beta^{-1} a \subseteq A, \quad A \cap \beta^{-1} b = \emptyset, \quad (15)$$

является продуктивным.

Рассмотрим какое-нибудь креативное множество T . Согласно лемме 3 из § 2 совокупность $\mathfrak{M}$ всех α -надобъектов объекта b обладает α -главной нумерацией γ , полной относительно a . Пусть b — один из γ -номеров объекта b . Обозначим через $t(x)$ функцию, равную b на T и неопределенную вне T . Ввиду полноты нумерации γ найдется о.р.ф. $g(x)$, для которой

$$\gamma g(x) = \begin{cases} \gamma t(x) = b, & \text{если } x \in T, \\ a, & \text{если } x \notin T. \end{cases}$$

Следовательно, отображение $v : \gamma n = \gamma g(n)$ является α -вычислимой нумерацией семейства $\mathfrak{C}$, состоящего лишь из объектов a, b . Семейство $\mathfrak{C}$ содержится в семействе $\mathfrak{B}$, имеющем главную нумерацию β . Поэтому согласно теореме 1 нумерация v β -вычислима, т. е. для подходящей о.р.ф. $f(n)$ имеем $\gamma g(n) = \beta f(n)$. Из (15) теперь следует

$$\begin{aligned} x \in T &\Rightarrow \beta f(x) = b \Rightarrow f(x) \in \beta^{-1}b \Rightarrow f(x) \notin A, \\ x \in T' &\Rightarrow \beta f(x) = a \Rightarrow f(x) \in A, \end{aligned}$$

или $x \in T' \Leftrightarrow f(x) \in A$. Таким образом, продуктивное множество T' сводится к A и потому A продуктивно.

С л е д с т в и е. Пусть нумерация α совокупности $\mathfrak{M}$ верхняя и полная, нумерация β семейства $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ α -главная. Тогда, если какое-нибудь β -в. н. семейство $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ содержит некоторый объект a , то $\mathfrak{C}$ содержит и все α -надобъекты объекта a , принадлежащие $\mathfrak{B}$.

Действительно, в противном случае существовал бы объект $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $a <_{\alpha} b$, $b \notin \mathfrak{C}$. Тогда множество $A = \beta^{-1}\mathfrak{C}$ удовлетворяло бы условиям (17) и потому было бы продуктивным, что противоречит предположенной рекурсивной перечислимости A .

Т е о р е м а 19. Какова бы ни была нумерация β совокупности $\mathfrak{B}$, каждое β -в. н. семейство $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ является β -субспециальным.

По условию множество $\beta^{-1}\mathfrak{C}$ рекурсивно перечисливо и потому является совокупностью всех значений некоторой о.р.ф. $f(x)$. Отображение $\gamma : \gamma n = \beta f(n)$ есть вычислимая нумерация $\mathfrak{C}$. Покажем, что она субспециальна относительно ч.р.ф. $g(n)$, определенной формулой

$$g(n) = \min_x (f(x) = n).$$

Действительно

$$\beta n \in \mathfrak{C} \Rightarrow n \in \beta^{-1}\mathfrak{C} \Rightarrow g(n) \text{ определено и } n = f(g(n)) \Rightarrow \beta n = \gamma g(n), \\ g(n) \text{ определено} \Rightarrow \beta n = \beta f(g(n)) = \gamma g(n),$$

что и требовалось.

Т е о р е м а 20 (В. А. Успенский [5]). *Главная нумерация β произвольного ω -плотного семейства р. п. м. $\mathfrak{B}$ является эффективно открытой.*

Пусть $\mathfrak{C}$ — какое-либо β -в. п. семейство р. п. м. Согласно теореме 19 семейство $\mathfrak{C}$ β -субспециально. Применяя теорему 17, видим, что семейство $\mathfrak{C}$ ω -плотное.

Итак, совокупность $\mathfrak{C}_{\text{fin}}$ всех конечных множеств, принадлежащих $\mathfrak{C}$, строго перечислима и каждое множество, принадлежащее $\mathfrak{C}$, содержит хотя бы одно подмножество, принадлежащее $\mathfrak{C}_{\text{fin}}$. Но по теореме 18 каждое множество, входящее в $\mathfrak{B}$ и содержащее хотя бы одно множество из $\mathfrak{C}$, принадлежит $\mathfrak{C}$. Следовательно, $\mathfrak{C}$ есть совокупность всех тех надмножеств множеств из $\mathfrak{C}_{\text{fin}}$, которые входят в $\mathfrak{B}$, что и требовалось.

В заключение укажем один класс нормальных семейств р. п. м., связанных с β -вполне перечислимыми семействами.

Т е о р е м а 21. *Пусть семейство р.п.м. $\mathfrak{B}$ имеет вычислимую нумерацию β , $h(x)$ — о.р.ф. и $\delta n = \beta h(n)$ ($n = 0, 1, \dots$) — строго вычислимая последовательность конечных множеств из $\mathfrak{B}$. Обозначим через $\gamma_{\mathfrak{C}}$ семейство всех р. п. м., имеющих вид $\beta^{-1}\mathfrak{C}$, где либо $\mathfrak{C}$ пусто, либо существует такая о. р. функция $p(x)$, что $\mathfrak{C}$ состоит из всех тех множеств семейства $\mathfrak{B}$, которые содержат хотя бы одно из множеств серии $\delta p(n)$. Тогда семейство γ_{δ} нормально.*

В самом деле, обозначим через σ_n совокупность β -номеров всех тех множеств семейства $\mathfrak{B}$, которые содержат хотя бы одно множество вида δx , $x \in \pi n$. Если $\pi n = \emptyset$, то полагаем $\sigma n = \emptyset$. Ясно, что σ является вычислимой нумерацией семейства γ_{δ} и что

$$\pi n \subseteq \pi m \Rightarrow \sigma n \subseteq \sigma m. \quad (16)$$

Далее, имеем $\pi n = \beta^{-1}\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — семейство всех $\mathfrak{B}$ -надмножеств множеств $\delta(\pi n)$. В частности,

$$\delta(\pi n) \subseteq \mathfrak{C}. \quad (17)$$

Обозначим через πc_n совокупность всех x , для которых $\delta x \in \mathfrak{C}$. Из (17) видим, что $\pi c_n \supseteq \pi n$. Поэтому в силу (16) $\sigma c_n \supseteq \sigma_n$. С другой стороны, каждое δx ($x \in \pi c_n$) содержит некоторое δy ($y \in \pi n$) и потому $\sigma c_n \subseteq \sigma_n$. Таким образом,

$$\sigma c_n = \sigma_n. \quad (18)$$

Так как

$$x \in \pi c_n \Leftrightarrow \beta h(x) \in \mathfrak{C} \Leftrightarrow h(x) \in \beta^{-1}\mathfrak{C} \Leftrightarrow x \in h^{-1}\sigma_n,$$

то $\pi c_n = h^{-1}\sigma_n$. Поэтому для любого m найдется такое n , что

$$\pi m \in \gamma_{\delta} \Rightarrow \pi m = \sigma_n \Rightarrow \pi c_n = h^{-1}\pi m. \quad (19)$$

Обозначая через $g(m)$ о. р. функцию, для которой $h^{-1}\pi m = \pi g(m)$, из (19)

получим $\pi c_n = \pi g(m)$. Поэтому в формуле (18) в качестве c_n можно взять $g(m)$ и, следовательно, для любого m

$$\pi m \in \gamma_s \Rightarrow \pi m = \sigma g(m),$$

т. е. нумерация σ нормальна.

Из теорем 20, 21 непосредственно вытекает упоминавшаяся в конце § 5 нормальность семейства множеств вида $\pi^{-1} \mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — либо пустое, либо в. п. семейство р. п. м.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Lachlan. Standard classes of recursively enumerable sets.— Z. Math. Log. und Grundle. Math., 1964, 10, N 1, 23—42.
2. А. И. Мальцев. Конструктивные алгебры, I.— Успехи мат. наук, 1961, 16, № 3, 3—60.
3. А. И. Мальцев. Полно нумерованные множества.— Алгебра и логика, 1963, 2, № 2, 4—29.
4. В. А. Успенский. О вычислимых операциях.— Докл. АН СССР, 1955, 103, № 5, 773—776.
5. В. А. Успенский. Системы перечислимых множеств и их нумерации.— Докл. АН СССР 1955, 105, № 6, 1155—1158.

ПОЗИТИВНЫЕ И НЕГАТИВНЫЕ НУМЕРАЦИИ*



Нумерацией β совокупности некоторых объектов $\mathfrak{B}$ называется однозначное отображение множества N всех натуральных чисел на $\mathfrak{B}$. Нумерационной эквивалентностью θ_β называется бинарное отношение на N , определенное формулой $x\theta_\beta y \Leftrightarrow \beta x = \beta y$. Если нумерация β изоморфна (терминологию см. в [1]) некоторой вычислимой нумерации подходящего семейства рекурсивно перечислимых множеств (р.п.м.), то существует общерекурсивная функция (о.р.ф.) $F(x, y, u, v)$, для которой $\beta x = \beta y \Leftrightarrow \forall u \exists v (F(x, y, u, v) = 0)$. Таким образом, нумерационные эквивалентности вычислимых нумераций семейств р.п.м. имеют класс $\forall \exists$ по классификации Клини. Ниже рассматриваются более детально свойства нумераций класса I , у которых эквивалентность θ имеет или вид $\beta x = \beta y \Leftrightarrow \exists u (F(x, y, u) = 0)$, или вид $\beta x = \beta y \Leftrightarrow \forall u (F(x, y, u) = 0)$, где $F(x, y, u)$ — подходящая о.р.ф. В первом случае совокупность пар $\langle x, y \rangle$, для которых $\beta x = \beta y$, рекурсивно перечислима и нумерация β называется **п о з и т и в н о й**. Во втором случае нумерация β называется **н е г а т и в н о й**. При негативной нумерации рекурсивно перечислимой оказывается совокупность пар $\langle x, y \rangle$, для которых $\beta x \neq \beta y$. Нумерация β **р а з р е ш и м а я**, если она одновременно позитивная и негативная.

1. Пусть совокупность $\mathfrak{A}$ имеет некоторую нумерацию α . Нумерация β подсовокупности $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ называется α -**в ы ч и с л и м о й**, если $\beta n = \alpha f(n)$ для подходящей о.р.ф. f . Нумерация β совокупности $\mathfrak{B}$ называется **у н и ф о р м и з и р у е м о й**, если существует **о д н о - о д н о з н а ч н а я** β -вычислимая нумерация $\mathfrak{B}$. Подсовокупность $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ называется α -**у н и ф о р м н о й**, если существует α -вычислимая одно-однозначная нумерация $\mathfrak{B}$. Семейство $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ называется α -**и з о л и р о в а н н ы м**, если α -вычислимые нумерации $\mathfrak{B}$ существуют и все они эквивалентны друг другу (т. е. вычислимы относительно друг друга). Если основная совокупность — совокупность всех р.п.м. и α — обычная постовская (= гёделевская) нумерация π , то вместо π -вычислимая, π -униформная, π -изолированная будем говорить вычислимая, униформная и т. д.

Т е о р е м а 1. *Если основная нумерация α совокупности объектов $\mathfrak{A}$ позитивна (негативна), то каждая α -вычислимая нумерация β произвольной подсовокупности $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ также позитивна (негативна). Если α позитивна и подсовокупность $\mathfrak{B}$ α -вычислимая (т. е. обладает хотя бы одной α -вычислимой нумерацией), то $\mathfrak{B}$ является α -изолированной.*

Первое утверждение непосредственно следует из определений. Докажем второе. По предположению совокупность θ пар $\langle x, y \rangle$, для которых $\alpha x = \alpha y$, может быть расположена в рекурсивную последовательность $\langle x_0, y_0 \rangle, \langle x_1, y_1 \rangle, \dots$. Пусть β, γ — произвольные α -вычислимые нумерации $\mathfrak{B}$ и $\beta n = \alpha f(n)$, $\gamma n = \alpha g(n)$, где f, g — подходящие о.р.ф. Для заданного n в последовательности $\langle x_0, y_0 \rangle, \langle x_1, y_1 \rangle, \dots$ ищем пару вида $\langle f(n), g(x) \rangle$ и полагаем $x = h(n)$. Тогда $\beta n = \gamma h(n)$.

* Докл. АН СССР, 1965, 160, № 2, 278—280.

С л е д с т в и е. Униформизируемые позитивные нумерации разрешимы.

Действительно, пусть α — позитивная, β — α -вычислимая одно-однозначная нумерации совокупности $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. Согласно предыдущей теореме α и β эквивалентны. Но β разрешима, поэтому и α разрешима.

2. Семейство р.п.м. $\mathfrak{B}$ назовем **ф и н и т н о р а з д е л я ю щ и м с я**, если существует такая строго перечислимая последовательность конечных множеств $a_0, a_1, \dots$, что каждое из множеств семейства $\mathfrak{B}$ содержит хотя бы одно из указанных конечных множеств и каждое из этих конечных множеств содержится не более чем в одном из множеств семейства $\mathfrak{B}$. Например, если семейство $\mathfrak{B}$ есть **р а з б и е н и е** (т. е. множества $\mathfrak{B}$ непустые, попарно не пересекающиеся и в объединении дающие N), то $\mathfrak{B}$ финитно разделяется последовательностью $\{0\}, \{1\}, \dots$.

Т е о р е м а 2. Каждая позитивная нумерация α произвольной совокупности объектов изоморфна вычислимой нумерации соответствующего разбиения N / θ_α . Каждое финитно разделяющееся семейство р.п.м. $\mathfrak{B}$, обладающее вычислимой нумерацией β , является изолированным позитивным семейством.

Пусть $[a] = (x \mid \alpha x = \alpha a)$. По условию для подходящей о.р.ф. $F(a, x, y)$ имеем $\alpha x = \alpha a \Leftrightarrow \exists y (F(a, x, y) = 0)$. Следовательно, $[a]$ есть область определенности ч.р.ф. $\Phi(a, x) = \mu_y (F(a, x, y) = 0)$ и потому отображение $\alpha_1 : a \rightarrow [a]$ является вычислимой нумерацией разбиения N / θ_α . Так как $\alpha a = \alpha b \Leftrightarrow \alpha_1 a = \alpha_1 b$, то нумерации α, α_1 изоморфны.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим строго перечислимую последовательность конечных множеств $a_0, a_1, \dots$, финитно разделяющую $\mathfrak{B}$. Пусть β — произвольная вычислимая нумерация $\mathfrak{B}$. Беря произвольное n и вычисляя постепенно элементы множеств $\pi n, \beta_j, a_i$ ($i, j = 0, 1, \dots$), ищем такие i, j , чтобы $a_i \subseteq \pi n, a_i \subseteq \beta_j$. Обозначим через $g(n)$ первое j , встретившееся в этом процессе и удовлетворяющее указанным условиям. Ясно, что $g(n)$ есть ч.р.ф. и что $\pi n \in \mathfrak{B} \Rightarrow g(n)$ определено и $\pi n = \beta g(n)$.

Это означает, что произвольная вычислимая нумерация β семейства $\mathfrak{B}$ субнормальная [1]. Но все субнормальные нумерации эквивалентные, и потому семейство $\mathfrak{B}$ изолированное. Остается показать, что нумерация β позитивная. Вычисляя постепенно элементы множеств $\beta j, a_i$ ($i, j = 0, 1, \dots$) и отмечая те пары $\langle a, b \rangle$, для которых в какой-нибудь момент будет $a_i \subseteq \beta a$ и $a_i \subseteq \beta b$, перечислим все пары, для которых $\beta a = \beta b$, что и требовалось.

Из теоремы 2 следует, что если какое-нибудь финитно разделяющееся семейство допускает вычислимую неразрешимую нумерацию, то оно не униформно. Простейший пример такого семейства строится следующим образом. Пусть A — нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество чисел: $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$. Строим множества $A_0, A_1, \dots$, внося в каждое A_i на n -м шаге число i , а в множества A_{2a_n} и A_{2a_n+1} внося числа $2a_n$ и $2a_n + 1$. Тогда $\alpha : i \rightarrow A_i$ является вычислимой позитивной нумерацией разбиения $\{A_0, A_1, \dots\}$. Эта нумерация **н е р а з р е ш и м а**, так как $A_{2i} = A_{2i+1} \Leftrightarrow i \in A$.

Полагая $\beta n = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n$, получим вычислимую нумерацию $n \in \beta$ в а о щ е й последовательности конечных множеств: $\beta 0 \subseteq \beta 1 \subseteq \dots, \cup \beta n = N$. Нумерация β изоморфна α и потому позитивна и неразрешима. Согласно следствию теоремы 1 нумерация β не униформизируемая. В то же время из рассуждений Фридберга [2] вытекает (см. [3]), что каждое вычислимое семейство р.п.м., содержащее строго перечислимую последовательность возрастающих конечных множеств, допускает одно-однозначную вы-

числимую нумерацию. Поэтому семейство βN заведомо обладает одно-однозначной вычислимой нумерацией и служит примером равномерного семейства, допускающего неуниформизируемую позитивную вычислимую нумерацию.

3. Пусть β — вычислимая нумерация некоторого семейства о.р.ф. одного переменного. Это значит, что для подходящей о.р.ф. $U(n, x)$ имеем тождество $(\beta n)(x) = U(n, x)$. Вычисляя последовательно $U(0, 0)$, $U(0, 1)$, $U(1, 0)$, ... и отмечая те пары $\langle a, b \rangle$, для которых для некоторого x будет $U(a, x) \neq U(b, x)$, мы перечислим вообще все пары $\langle a, b \rangle$, для которых $\beta a \neq \beta b$. Поэтому все вычислимые нумерации семейств общерекурсивных функций не г а т и в н ы. Обычная нумерация семейства всех п.р.ф. [3] может служить типичным примером неразрешимой негативной нумерации.

Т е о р е м а 3. Каждая негативная нумерация α произвольного семейства объектов изоморфна подходящей вычислимой нумерации подходящего семейства общерекурсивных функций, принимающих лишь значения 0, 1.

По условию совокупность $\bigcap \theta$ всех пар $\langle a, b \rangle$, удовлетворяющих соотношению $\alpha a \neq \alpha b$, можно расположить в рекурсивную последовательность $\bigcap \theta = \{\langle a_0, b_0 \rangle, \langle a_1, b_1 \rangle, \dots\}$. Строим функцию $U(n, x)$ и вспомогательные множества S_{i0}^m , S_{i1}^m посредством следующего алгоритма. Для произвольного m полагаем $U(a_m, m) = 0$, $U(b_m, m) = 1$, $S_{00}^m = \{a_m\}$, $S_{01}^m = \{b_m\}$. Пусть для некоторого s конечные множества S_{s0}^m , S_{s1}^m уже построены так, что $i \in S_{s0}^m \Rightarrow U(i, m) = 0$ и $i \in S_{s1}^m \Rightarrow U(i, m) = 1$, причем если $i \in S_{s0}^m$, $j \in S_{s1}^m$, то $\langle i, j \rangle \in \bigcap \theta$. Пусть x — наименьшее натуральное, не содержащееся в $S_{s0}^m \cup S_{s1}^m$. Берем какую-нибудь пару $\langle a, b \rangle$, где $a \in S_{s0}^m$, $b \in S_{s1}^m$. Так как $\alpha a \neq \alpha b$, то $\alpha a \neq \alpha x$ или $\alpha b \neq \alpha x$ и, следовательно, перебирая пары в последовательности $\bigcap \theta$, мы найдем в этой последовательности или пару вида $\langle a, x \rangle$, или пару вида $\langle b, x \rangle$. Выделим для каждой пары $\langle a, b \rangle$, $a \in S_{s0}^m$, $b \in S_{s1}^m$ пару $\langle u_{ab}, x \rangle \in \bigcap \theta$, $u_{ab} = a, b$. Среди выделенных пар непременно встретятся или все пары вида $\langle a, x \rangle$, $a \in S_{s0}^m$, или все пары вида $\langle b, x \rangle$, $b \in S_{s1}^m$. В первом случае полагаем $U(x, m) = 1$, $S_{s+1,1}^m = S_{s1}^m \cup \{x\}$, $S_{s+1,0}^m = S_{s0}^m$, а во втором $U(x, m) = 0$, $S_{s+1,0}^m = S_{s0}^m \cup \{x\}$, $S_{s+1,1}^m = S_{s1}^m$. Индуктивные предположения при этом сохраняются и функция $U(x, m)$ построена. Ясно, что $\alpha a = \alpha b \Leftrightarrow \forall x (U(a, x) = U(b, x))$ и потому вычислимая нумерация $n \rightarrow U(n, x)$ изоморфна нумерации α .

Среди различных нумераций семейства обычно интересными бывают предполные [3]. Однако для негативных нумераций имеет место.

З а м е ч а н и е. Никакая негативная нумерация α совокупности $\mathfrak{A}$, состоящей более чем из одного объекта, не может быть предполной.

В самом деле, пусть a, b — различные объекты из $\mathfrak{A}$. Совокупность всех α -номеров всех объектов, отличных от a , рекурсивно перечислима. Аналогично рекурсивно перечислимой является и совокупность всех α -номеров всех объектов, отличных от b . Иными словами, семейства $\mathfrak{A} - a$ и $\mathfrak{A} - b$ α -вполне перечислимые. Они отличны от $\mathfrak{A}$ и объединение их совпадает с $\mathfrak{A}$, а этого согласно [1] для предполных нумераций быть не может.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. К теории вычислимых семейств объектов. — Алгебра и логика, 1964, 3, № 4, 5—31.
2. R. M. Friedberg. Three theorems on recursive functions: I. Decomposition; II. Maximal sets; III. Enumeration without duplication. — J. Symbol. Log., 1958, 23, N 3, 309—316.
3. А. И. Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., «Наука», 1965.

ИТЕРАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ И МНОГООБРАЗИЯ ПОСТА*



Обозначим через $P_A^{(m)}$ совокупность всех m -местных функций, определенных на непустом множестве A со значениями в этом же множестве. Пусть $P_A = \bigcup P_A^{(m)}$. Следующие операции над функциями из P_A можно считать в каком-то смысле самыми «элементарными».

Рассмотрим некоторый терм $\alpha(x_1, \dots, x_n; F_1, \dots, F_s)$, записанный с помощью предметных символов $x_1, \dots, x_n$ и функциональных символов $F_1, \dots, F_s$, имеющих какие-то «местности» или «арности» $m_1, \dots, m_s$. Подставляя в этот терм вместо символов $F_1, \dots, F_s$ символы $f_1, \dots, f_s$ некоторых конкретных функций из P_A , имеющих арности $m_1, \dots, m_s$, получим запись конкретной функции

$$f(x_1, \dots, x_n) = \alpha(x_1, \dots, x_n; f_1, \dots, f_s)$$

из P_A . Функция f называется результатом термальной операции α , произведенной над функциями $f_1, \dots, f_s$. Например, пусть A — совокупность натуральных чисел и

$$\alpha = F_1(x_2, F_2(x_1, F_1(x_1, x_3))).$$

Тогда результатом операции α , произведенной над обычными арифметическими функциями $+$, $\cdot$, будет функция

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_1 \cdot (x_1 + x_3).$$

Алгебра, элементами которой являются функции из P_A , а основными (сигнатурными) операциями служат всевозможные термальные операции, называется алгеброй $|A|$ -значной логики, где через $|A|$ обозначена мощность множества A .

В настоящее время благодаря главным образом фундаментальным работам Э. Поста довольно хорошо известны свойства алгебры двузначной логики, которая обычно и называется алгеброй логики. Благодаря внутреннему интересу и связям с многозначными логиками и теорией автоматов в последние годы появилось много работ, посвященных алгебрам k -значных логик ($k \geq 2$) (см. С. В. Яблонский [1], Ю. И. Янов и А. А. Мучник [2], А. Саломая [5] и указанную в них литературу).

С другой стороны, параллельно теории алгебр логик возникла и стала весьма разветвленной дисциплиной теория алгебр Буля. Первый аналог алгебры Буля для случая алгебры k -значной логики был введен Э. Постом. Основы теории этих алгебр Поста были созданы Розенблумом [7] в 1942 г. Сравнительно недавно (1960) более удобное понятие решетки Поста и теория представлений этих решеток были даны Эпштейном [6]. Классы алгебр Поста и решеток Поста термально эквивалентны и на разных

* Алгебра и логика, 1966, 5, № 2, 5—24.

языках определяют один и тот же объект, отвечающий алгебре k -значной логики.

По-видимому, до сих пор в печати не появлялось работ, изучающих более детально связи между алгебрами логик и решетками (или алгебрами) Поста. Основная цель настоящей заметки — изложить на обычном алгебраическом языке связи между указанными важными концепциями, в частности, описать теорию представлений алгебр логик на основе теории представлений решеток Поста и с ее помощью дать полную классификацию подалгебр алгебры l -значной логики, изоморфных алгебре k -значной логики.

Так как термальных операций бесконечно много, то алгебры логик имеют бесконечную сигнатуру. Кроме того, термальные операции применимы только к таким наборам функций, которые имеют фиксированные местности. Поэтому алгебры логик приходится рассматривать либо как алгебры с частичными операциями, либо как градуированные алгебры, что вносит нежелательные осложнения в их теорию. С целью придать стандартный алгебраический облик теории алгебр логик были сделаны предложения (см., например, Кон [4], Витлок [8]) — рассматривать в качестве сигнатурных операций лишь некоторые из термальных операций. В отличие от упомянутых авторов мы предлагаем рассматривать в качестве сигнатурных операций или 5 операций $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, *$, определение которых указано ниже, или 4 операции $\zeta, \tau, \Delta, *$. Через них легко выражаются все термальные операции и, главное, эти операции играют фундаментальную роль в современной теории автоматов. Вероятно, это предложение не новое, так как с ним связан, как нам кажется, ряд удобств, начиная с чисто терминологических.

Уже говорилось что с алгеброй k -значной логики были связаны два многообразия: многообразие алгебр Поста порядка k , введенное Розенблумом, и многообразие решеток Поста порядка k (наш термин), введенное Эпстейном. Используя способ, которым были получены эти многообразия, можно получить из алгебры k -значных логик (в том числе, и бесконечно многозначных) серию других многообразий, которые мы предлагаем называть *многообразиями Поста*. Все они термально (или «рационально», см. [3]) эквивалентны друг другу и потому представляют собой с алгебраической точки зрения единый объект.

1. Итеративные алгебры. Операции $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, *$ над функциями из P_A определяем тождествами:

$$(\zeta f)(x_1, \dots, x_m) = f(x_2, \dots, x_m, x_1),$$

$$(\tau f)(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_m),$$

$$(\Delta f)(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}),$$

$$(\nabla f)(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m+1}) = f(x_2, x_3, \dots, x_{m+1}),$$

$$(f * g)(x_1, x_2, \dots, x_{k+m-1}) = f(g(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}, \dots, x_{k+m-1}),$$

где f, g — произвольные m -местная и k -местная функции из P_A . Если функция f одноместная, то по определению полагаем

$$\zeta f = \tau f = \Delta f = f.$$

Алгебры

$$\mathfrak{P}_A = \langle P_A; \zeta, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle,$$

$$\mathfrak{P}_A^* = \langle P_A; \zeta, \tau, \Delta, * \rangle$$

условимся называть соответственно итеративной алгеброй и предытеративной алгеброй над множеством A^* . Мощность множества A будем называть порядком этих алгебр. Мощности самих алгебр $\mathfrak{P}_A$, $\mathfrak{P}_A^*$ всегда бесконечны и равны, очевидно, $2^{|A|}$, если A бесконечно.

Ясно, что произвольная функция $f \in P_A$ тогда и только тогда представима в виде какого-то собственного (т. е. отличного от просто предметного символа x_i) термина $\alpha(x_1, \dots, x_n; f_1, \dots, f_s)$, где $f_1, \dots, f_s \in P_A$, когда f можно получить из $f_1, \dots, f_s$ посредством операций $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, *$. Например,

$f(g_1(x), \dots, g_m(x)) = \Delta^{m-1}((\zeta \dots (\zeta((\zeta f) * g_m)) * \dots) * g_1)(x)$ ($g_1, \dots, g_m$ — одноместные).

Селекторными функциями на A называются функции

$$e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i \quad (i \leq n; i, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Функция $e_1^1(x) = e(x) = x$ называется также единичной функцией на A . Совокупность всех селекторных функций является подалгеброй алгебр $\mathfrak{P}_A$, $\mathfrak{P}_A^*$. Соотношения

$$\Delta e_2^2 = e, \quad e_2^2 * e_n^n = e_{n+1}^{n+1}, \quad \zeta^i e_n^n = e_{n-i}^n$$

показывают, что функция e_2^2 является элементом, порождающим всю упомянутую подалгебру.

Из равенства $\nabla f = f * e_2^2$ видно, что каждую термальную функцию $\alpha(x_1, \dots, x_n; f_1, \dots, f_s)$ (включая и несобственные термины вида x_i) можно получить из функций $f_1, \dots, f_s$ и селекторной функции e_2^2 с помощью лишь операций $\zeta, \tau, \Delta, *$ предытеративной алгебры. Поэтому, если интересоваться лишь такими подалгебрами алгебры $\mathfrak{P}_A$, которые содержат селекторные функции, то вместо итеративной алгебры $\mathfrak{P}_A$ можно рассматривать предытеративную алгебру $\mathfrak{P}_A^*$.

2. Итеративные алгебры частичных функций. Обозначим через $Q_A^{(m)}$ совокупность всех частичных m -местных функций на A со значениями в A и положим $Q_A = \bigcup Q_A^{(m)}$. Таким образом,

$$P_A^{(m)} \subset Q_A^{(m)}, \quad P_A \subset Q_A.$$

Операции $\zeta, \tau, \Delta, *$ над частичными функциями f, g мы определяем теми же формулами, что и над всюду определенными функциями. При этом значение функции $f * g$ считается определенным тогда и только тогда, когда определены значения $g(x_1, \dots, x_k)$ и

$$f(g(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}, \dots, x_{k+m-1}).$$

Алгебра

$$\mathfrak{Q}_A^* = \langle Q_A; \zeta, \tau, \Delta, * \rangle$$

будет называться предытеративной алгеброй частичных функций над множеством A .

* Если множество A конечно и содержит k элементов, то алгебры $\mathfrak{P}_A$ и $\mathfrak{P}_A^*$ обозначаются также через $\mathfrak{P}_k$ и $\mathfrak{P}_k^*$ соответственно. — Прим. ред.

Чтобы установить связь между алгебрами вида $\mathfrak{P}_A^*$ и $\mathfrak{Q}_A$, фиксируем произвольный элемент $\omega \in A$. Функцию $f \in P_A^{(n)}$ назовем ω -функцией,^{*} если

$$x_1 = \omega \vee \dots \vee x_n = \omega \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = \omega.$$

Легко видеть, что совокупность всех ω -функций из P_A образует подалгебру в алгебре $\mathfrak{P}_A$. Эту подалгебру мы будем обозначать через $\mathfrak{U}_A^\omega$ (или $\mathfrak{U}_A$) и называть с п е ц и а л ь н о й подалгеброй *. Пусть $A_\omega = A \setminus \{\omega\}$. Каждой частичной функции $f \in Q_{A_\omega}$ ставим в соответствие ту функцию $\bar{f} \in \mathfrak{U}_A$, значения которой совпадают со значениями функции f в области определенности f и равны ω в области неопределенности f .

Легко проверяется, что отображение $f \rightarrow \bar{f}$ ($f \in Q_{A_\omega}$) является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{Q}_{A_\omega}$ на специальную подалгебру $\mathfrak{U}_A$ и, таким образом, задача изучения структуры алгебры $\mathfrak{Q}_{A_\omega}$ становится частным случаем задачи изучения структуры подалгебр предытеративной алгебры $\mathfrak{P}_A^*$.

Если $A = \{0, 1, \dots, n-1\}$, то в качестве ω будем всегда выбирать число $n-1$ и алгебры $\mathfrak{P}_A^*$, $\mathfrak{U}_A^\omega$, $\mathfrak{Q}_A$ будем обозначать через $\mathfrak{P}_n^*$, $\mathfrak{U}_n$, $\mathfrak{Q}_n$. В частности, алгебры $\mathfrak{U}_n$, $\mathfrak{Q}_{n-1}$ изоморфны.

3. Конгруэнтности на $\mathfrak{P}_A^*$ и $\mathfrak{Q}_A$. На алгебре $\mathfrak{P}_A^*$ и всех ее подалгебрах, как и на любой алгебре, имеются две тривиальные конгруэнтности κ_0, κ_1 , где κ_0 совпадает с отношением равенства, а κ_1 с тождественно истинным отношением. Помимо конгруэнтностей κ_0, κ_1 , на любой подалгебре алгебры $\mathfrak{P}_A^*$ существует еще одна конгруэнтность, которую мы обозначим через κ_a и назовем арностью **. Фактор-алгебра $\mathfrak{P}_A^*/\kappa_a$, очевидно, изоморфна алгебре $\mathfrak{P}_1^*$.

Введем еще отношение κ_ω , полагая $f \equiv g$ (κ_ω) тогда и только тогда, когда $f = g$ или же f, g — постоянные функции, равные ω , имеющие различные арности. Легко проверяется, что κ_ω является конгруэнтностью на подалгебре $\mathfrak{U}_A^\omega$.

Наконец, если множество A состоит лишь из двух элементов a, ω , то все функции из $\mathfrak{U}_A^\omega$ разбиваем на два класса. К первому относим все постоянные функции $t_a^{(n)}$, равные тождественно ω , а ко второму — все остальные. Это разбиение отвечает эквивалентности κ_2 на $\mathfrak{U}_A^\omega$, которая является и конгруэнтностью на $\mathfrak{U}_A^\omega$.

Т е о р е м а 1. *На произвольной подалгебре $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{P}_A^*$, содержащей специальную подалгебру $\mathfrak{U}_A^\omega$ и отличной от $\mathfrak{U}_A^\omega$, никаких иных конгруэнтностей помимо $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_a$ не существует. Если $|A| > 3$, то на $\mathfrak{U}_A^\omega$ существуют лишь конгруэнтности $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_a, \kappa_\omega$. На алгебре $\mathfrak{U}_2^\omega$ существуют 5 конгруэнтностей: $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_a, \kappa_\omega, \kappa_2$.*

Доказательство разобьем на части.

* Если множество A конечно и содержит k элементов, то $\mathfrak{U}_A^\omega$ обозначается также через $\mathfrak{U}_k^\omega$. — Прим. ред.

** Для некоторых подалгебр алгебры $\mathfrak{P}_A^*$ конгруэнтности κ_a и κ_0 совпадают. — Прим. ред.

а. Если для какой-то конгруэнтности κ на подалгебре $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{P}_A^*$ ($\mathfrak{U}_A^\omega \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}_A^*$) в $\mathfrak{B}$ существуют две разные функции f_1, f_2 , сравнимые по κ и имеющие одинаковые аргументы, то любые функции из $\mathfrak{B}$, имеющие одинаковые аргументы, сравнимы по κ .

По условию в множестве A существуют такие элементы $a, \dots, c, u_1, u_2$, что $u_1 \neq u_2$ и

$$f_i(a, \dots, c) = u_i \quad (i = 1, 2).$$

Ясно, что функции $q_u, t_u^\omega, e^\omega$ ($u \in A$), определенные условиями

$$q_u(x) = \begin{cases} u, & x = u, \\ \omega, & x \neq u; \end{cases} \quad t_u^\omega(x) = \begin{cases} u, & x \neq \omega, \\ \omega, & x = \omega; \end{cases} \quad e^\omega(x, y) = \begin{cases} y, & x \neq \omega, \\ \omega, & x = \omega, \end{cases}$$

принадлежат $\mathfrak{U}_A^\omega$ и, следовательно, принадлежат $\mathfrak{B}$.

Из двух различных элементов u_1, u_2 хотя бы один отличен от ω . Будем предполагать, что $u_1 \neq \omega$. Мы хотим сначала доказать, что $t_{u_1}^\omega \equiv t_\omega^\omega(\kappa)$. Для этого придется рассмотреть два случая.

1-й с л у ч а й: в $\mathfrak{B}$ существует функция h , для которой $h(\omega, \dots, \omega) \neq \omega$. Пусть $h(\omega, \dots, \omega) = p \neq \omega$.

Тогда постоянная функция

$$t_p(x) = h(t_\omega^\omega(x), \dots, t_\omega^\omega(x))$$

принадлежит $\mathfrak{B}$, а вместе с нею подалгебре $\mathfrak{B}$ будет принадлежать и любая постоянная функция $t_u(x) = t_u^\omega(t_p(x))$.

Из $f_1 \equiv f_2(\kappa)$ вытекает, что функции

$$t_{u_i}(x) = f_i(t_a(x), \dots, t_c(x)) \quad (i = 1, 2)$$

κ -конгруэнтны. Из $t_{u_1} \equiv t_{u_2}$ следует $q_{u_1} * t_{u_1} \equiv q_{u_1} * t_{u_2}(\kappa)$, т. е. $t_{u_1} \equiv t_\omega(\kappa)$, откуда

$$e^\omega(x, t_{u_1}(x)) \equiv e^\omega(x, t_\omega(x))(\kappa) \quad \text{или} \quad t_{u_1}^\omega \equiv t_\omega(\kappa).$$

2-й с л у ч а й: для любой $h \in \mathfrak{B}$ $h(\omega, \dots, \omega) = \omega$. Из $f_1 \equiv f_2(\kappa)$ теперь вытекает, что κ -конгруэнтны функции

$$f_i(t_a^\omega(x), \dots, t_c^\omega(x)) = t_{u_i}^\omega(x) \quad (i = 1, 2).$$

Из $t_{u_1}^\omega \equiv t_{u_2}^\omega(\kappa)$ получаем $q_{u_1} * t_{u_1}^\omega \equiv q_{u_1} * t_{u_2}^\omega(\kappa)$, т. е.

$$t_{u_1}^\omega \equiv t_\omega^\omega(\kappa).$$

Итак, в обоих случаях $t_{u_1}^\omega \equiv t_\omega^\omega(\kappa)$, поэтому функции

$$e^\omega(t_{u_1}^\omega(x), x) = x \quad \text{и} \quad e^\omega(t_\omega^\omega(x), x) = t_\omega^\omega(x)$$

κ -конгруэнтны.

Следовательно, для произвольной k -местной функции $f \in \mathfrak{B}$ имеем $e * f \equiv t_\omega^\omega * f(\kappa)$, т. е. $f \equiv t_\omega^{(k)}(\kappa)$, где $t_\omega^{(k)}$ — постоянная k -местная функция, значения которой равны ω .

б. Если для какой-то конгруэнтности κ на алгебре $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{U}_A^\omega \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}_A^*$) существуют сравнимые по κ функции $f, g \in \mathfrak{B}$, имеющие различные

арности m, n ($m < n$), то все постоянные ω -функции $t_\omega^{(k)}$ сравнимы между собой по κ .

Из $f \equiv g(\kappa)$ следует $t_\omega^{(1)} * f \equiv t_\omega^{(1)} * g(\kappa)$, т. е. $t_\omega^{(m)} \equiv t_\omega^{(n)}(\kappa)$. Отсюда $\Delta^{n-2} t_\omega^{(m)} \equiv \Delta^{n-2} t_\omega^{(n)}(\kappa)$, т. е. $t_\omega^{(1)} \equiv t_\omega^{(2)}(\kappa)$. Отсюда далее получаем $e^\omega * t_\omega^{(1)} \equiv e^\omega * t_\omega^{(2)}(\kappa)$, т. е. $t_\omega^{(2)} \equiv t_\omega^{(3)}(\kappa)$, и т. д.

в. Если для какой-то конгруэнтности κ на алгебре $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{U}_A^\omega \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}_A^*$) существуют сравнимые по κ функции $f, g \in \mathfrak{B}$, имеющие различные арности m, n и $f \neq t_\omega^{(m)}$, причем $|A| \geq 3$ или $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{U}_A^\omega$, то $\kappa = \kappa_1$.

Если при указанных условиях $g = t_\omega^{(m)}$, то в силу «б» будем иметь $t_\omega^{(m)} \equiv t_\omega^{(n)} \equiv f(\kappa)$ и в силу а, б получим $\kappa = \kappa_1$.

Таким образом, можно предполагать, что $f \neq t_\omega^{(m)}, g \neq t_\omega^{(n)}$ и $m < n$. Обозначим через $a, \dots, c, p \in A$ те элементы, для которых $f(a, \dots, c) = p \neq \omega$. Из $f \equiv g$ вытекает, что функции

$$r = \Delta^{n-2}(\dots(\zeta((\zeta f) * t_\omega^{(n)})) * \dots * t_\omega^{(m)}),$$

$$s = \Delta^{n-2}(\dots(\zeta((\zeta g) * t_\omega^{(n)})) * \dots * t_\omega^{(m)})$$

сравнимы по κ , причем $r(p) = p$. Из $r \equiv s(\kappa)$ следует

$$\Delta(e^\omega * r) \equiv \Delta(e^\omega * s)(\kappa),$$

т. е. $e \equiv e^\omega * v(\kappa)$, где e — единичная и v — одноместная функции. Если $v = t_\omega^{(1)}$, то $e^\omega * v = t_\omega^{(2)}$ и мы приходим к рассмотренному выше случаю. Пусть $v \neq t_\omega^{(1)}$. Из $\tau e = e$, $\tau e \equiv \tau(e^\omega * v)(\kappa)$ получаем $e^\omega * v \equiv \tau(e^\omega * v)(\kappa)$. Если $e^\omega * v \neq \tau(e^\omega * v)$, то, применяя результаты «а», «б», снова получаем, что $\kappa = \kappa_1$. Поэтому можно предположить, что

$$e^\omega(v(x)y) = e^\omega(v(y), x). \quad (1)$$

Так как $e = \Delta e \equiv \Delta(e^\omega * v)(\kappa)$, то можно предположить также, что $x = e^\omega(v(x), x)$ и, следовательно, $x \neq \omega \rightarrow v(x) \neq \omega$. Подставляя $x = a \neq \omega$ в (1), получим

$$y = a \quad (y \neq \omega),$$

что в случае $|A| \geq 3$ невозможно.

Поэтому полагаем $|A| = 2$, $A = \{\omega, a\}$ и $\mathfrak{U}_2^\omega \neq \mathfrak{B}$. Пусть $f \in \mathfrak{B}$, $f \notin \mathfrak{U}_2^\omega$. Переставляя при помощи операций ζ, τ аргументы f и применяя, если надо, операцию Δ , получим из f бинарную функцию $g \in \mathfrak{B}$, для которой $g(\omega, a) = a$ или $g(\omega, \omega) = a$.

Обратимся к функции $v(x)$ в тождестве (1). Если $v(\omega) = a$, то, полагая в (1) $x = \omega$, получим $y = \omega$ для $y = a, \omega$, что невозможно. Поэтому $v(\omega) = \omega$, $v(a) = a$ ($v \neq t_\omega^{(1)}$), т. е. $v = e$ и сравнение $e \equiv e^\omega * v(\kappa)$ обращается в $e \equiv e^\omega(\kappa)$, откуда $g = g * e \equiv g * e^\omega(\kappa)$ и $\zeta^2 g \equiv \zeta^2(g * e^\omega)(\kappa)$. Поскольку $\zeta^2 g = g$, то $g * e^\omega \equiv \zeta^2(g * e^\omega)(\kappa)$. Если

$$g * e^\omega \neq \zeta^2(g * e^\omega),$$

то в силу а, б получаем $\kappa = \kappa_1$. Поэтому можно предполагать, что $g * e^\omega = \zeta^2 (g * e^\omega)$, т. е.

$$g(e^\omega(x, y), z) = g(e^\omega(z, x), y).$$

Отсюда при $x = z = \omega$, $y = a$ получаем $g(\omega, \omega) = a$, и потому постоянная функция $t_a^{(1)} = g(t_\omega, t_\omega)$ принадлежит $\mathfrak{B}$. Из сравнения $e \equiv e^\omega$ вытекает, что

$$t_a^{(1)} = e * t_a \equiv e^\omega * t_a = e_2^2(\kappa).$$

Из $t_a^{(1)} = t_a^{(1)}$ теперь получаем $e_2^2 \equiv te_2^2(\kappa)$, т. е. $e_2^2 \equiv e_1^2(\kappa)$. Так как $e_2^2 \neq e_1^2$, то в силу а, б $\kappa = \kappa_1$.

г. Если $\mathfrak{B} \not\subseteq \mathfrak{U}_A^\omega$, то κ_ω не является конгруэнтностью на $\mathfrak{B}$.

Действительно, если $g(\omega, a) \neq \omega$ и $t_\omega^{(1)} \equiv t_\omega^{(2)}(\kappa)$, то $g * t_\omega^{(1)} \equiv g * t_\omega^{(2)}(\kappa)$, причем $g * t_\omega^{(1)} \neq t_\omega^{(2)}$. Поэтому $\kappa \neq \kappa_\omega$.

Объединяя а — г, получим теорему 1.

4. Автоморфизмы. Обозначим через φ произвольное одно-однозначное отображение A на себя. Для произвольной функции $f \in P_A$ определяем функцию f^α соотношением:

$$f^\alpha(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 \varphi^{-1}, \dots, x_n \varphi^{-1}) \varphi. \quad (2)$$

Легко проверяется, что отображение $\alpha: f \rightarrow f^\alpha$ есть автоморфизм алгебры $\mathfrak{P}_A$. Соотношение (2) можно переписать в обычной форме

$$f(x_1, \dots, x_n) \varphi = f^\alpha(x_1 \varphi, \dots, x_n \varphi). \quad (3)$$

В частности, если $\omega \in A$, $\omega \varphi = \omega$, то отображение α является автоморфизмом итеративной алгебры частичных функций $\mathfrak{U}_A^\omega$. Автоморфизмы вида (3) подалгебр алгебры $\mathfrak{P}_A$, инвариантных относительно отображения α , называются внутренними автоморфизмами этих подалгебр.

Теорема 2. Пусть $\omega \in A$, $\mathfrak{U}_A$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{P}_A$, образованная всеми ω -функциями из P_A , и $\mathfrak{A}$ — какая-нибудь подалгебра алгебры $\mathfrak{P}_A$, содержащая $\mathfrak{U}_A$. Тогда все автоморфизмы $\mathfrak{A}$ внутренние. В частности, внутренними являются все автоморфизмы полной итеративной алгебры $\mathfrak{P}_A$ и все автоморфизмы предитеративной алгебры $\mathfrak{Q}_A^*$ частичных функций.

Для каждого автоморфизма α алгебры $\mathfrak{A}$ нам надо построить взаимно однозначное отображение φ A на себя, удовлетворяющее условию (2). Так как при изоморфизмах арность функций не меняется, то α является автоморфизмом полугруппы $\mathfrak{A}^{(1)}$ всех одноместных функций из $\mathfrak{A}$ относительно операции $*$, содержащей в себе полугруппу $\mathfrak{U}_A^{(1)}$ отображений A в себя, оставляющих неподвижной точку ω . Обычные рассуждения показывают, что α является внутренним автоморфизмом $\mathfrak{A}^{(1)}$ в указанном выше смысле. Для полноты проведем доказательство.

Обозначим через t_a постоянную одноместную функцию, всюду равную a , и через u_{pa} — функцию, определенную условиями:

$$u_{pa}(p) = p, \quad u_{pa}(x) = a \quad (x \neq p).$$

Теперь сделаем несколько замечаний.

А. Если для некоторой функции $f \in P_A$ для всех $g \in \mathcal{U}_A$ (и тем более для всех $g \in \mathcal{A}$) $f * g = f$, то f постоянная.

Действительно, пусть $c \neq \omega$, $x \in A$. Берем функцию $g \in \mathcal{U}_A$, для которой $g(\omega) = \omega$, $g(c) = x$. Тогда из $f * g = f$ имеем $f(x) = f(c)$.

В частности, так как $t_\omega \in \mathcal{U}_A$ и из $t_\omega * g = t_\omega$ следует

$$t_\omega^\alpha * g^\alpha = t_\omega^\alpha,$$

то функция t_ω^α постоянная и потому $t_\omega^\alpha = t_\omega^*$ для некоторого $\omega^* \in A$.

Б. $f * t_a = t_a * f \Leftrightarrow f(a) = a$. Поэтому $\mathcal{U}_A^\alpha = \mathcal{U}_A^{\omega^*}$, где $\mathcal{U}_A^{\omega^*}$ — совокупность всех ω^* -функций из $\mathcal{P}_A$.

В. Если f обратима и принадлежит $\mathcal{U}_A^p$, то $u_{pa} * f = u_{pa}$. Если для всех обратимых f из $\mathcal{U}_A^p$ имеем $g * f = g$, то $g = u_{pa}$ для подходящего a . Доказательство очевидно.

Так как обратимые функции при автоморфизме переходят в обратимые, то из Б, В вытекает, что $u_{\omega a}^\alpha = u_{\omega^* a^*}$ для подходящего a^* .

Итак, для каждого $a \in A$ существует такое a^* , что $u_{\omega a}^\alpha = u_{\omega^* a^*}$. Обозначим отображение $a \rightarrow a^*$ через φ . Это отображение взаимно однозначное, так как автоморфизм α^{-1} должен переводить a^* в a .

Отображение φ порождает внутренний автоморфизм α_φ алгебры $\mathcal{P}_A$. Вместо автоморфизма α рассмотрим изоморфизм $\beta = \alpha \alpha_\varphi^{-1}$ алгебры $\mathcal{A}$ на подалгебру $\mathcal{A}^\beta$. Нам надо доказать, что изоморфизм β оставляет неподвижными все функции из $\mathcal{A}$.

Из построения изоморфизма β видно, что $u_{\omega a}^\beta = u_{\omega a}$. Пусть $f \in \mathcal{U}_A^{(1)}$. Из равенства $f * u_{\omega a} = u_{\omega f(a)}$ получаем $f^\beta * u_{\omega a} = u_{\omega f(a)}$, т. е. $f^\beta(a) = f(a)$ ($a \in A$) и, следовательно,

$$f^\beta = f \quad (f \in \mathcal{U}_A^{(1)}).$$

Пусть теперь $f(\omega) = a \neq \omega$, $f \in \mathcal{A}^{(1)}$. Тогда $t_a = f * t_\omega \in \mathcal{A}$. Для произвольного $c \in A$ строим функцию $g: g(a) = c$, $g(x) = x$ ($x \neq a$). Так как $g(\omega) = \omega$, то $g \in \mathcal{U}_A$, $t_c = g * t_a \in \mathcal{A}$, т. е. в рассматриваемом случае подалгебра $\mathcal{A}$ содержит все постоянные функции.

Покажем, что $t_c^\beta = t_c$. Введем функцию $h \in \mathcal{U}_A^{(1)}$, полагая $h(c) = h(\omega) = \omega$ и $h(x) = x$ ($x \neq c$). Так как $h * t_c = t_\omega$, то $h^\beta * t_c^\beta = t_\omega$, т. е. $h * t_c^\beta = t_\omega$. Выше показано, что $t_c^\beta = t_d$ для подходящего $d \in A$. Условие $h * t_c^\beta = t_\omega$ дает $h(d) = \omega$ и, следовательно, $d = \omega$ или $d = c$. Первое невозможно, так как $t_\omega^\beta = t_\omega$. Поэтому $t_c^\beta = t_c$.

Возвратимся к функции f . Для любого $c \in A$ имеем $f * t_c = t_{f(c)}$, откуда $f^\beta * t_c = t_{f(c)}$ и потому $f^\beta(c) = f(c)$, $f^\beta = f$.

Итак, все автоморфизмы полугруппы $\mathcal{A}^{(1)}$ внутренние. Остается лишь показать, что отображение β оставляет неподвижными и все многоместные функции из $\mathcal{A}$.

Пусть F — произвольная бинарная функция из $\mathcal{A}$. Для любой $f \in \mathcal{A}^{(1)}$ имеем $\Delta(F * f) \in \mathcal{A}^{(1)}$, и потому

$$\Delta(F * f) = (\Delta(F * f))^\beta = \Delta(F^\beta * f),$$

т. е.

$$F(f(x), x) = F^\beta(f(x), x). \quad (4)$$

Если $a, b \in A$, $a \neq \omega$, то в $\mathfrak{U}_A^{(1)}$ лежит функция g :

$$g(a) = b, \quad g(x) = x \quad (x \neq a).$$

Подставляя ее в (4) вместо f , будем иметь

$$F(b, a) = F^\beta(b, a) \quad (a \neq \omega). \quad (5)$$

Переставляя у F при помощи операции τ аргументы, получим

$$F(a, b) = F^\beta(a, b) \quad (a \neq \omega). \quad (6)$$

Наконец, из $(\Delta F)^\beta = \Delta F$ имеем

$$F(x, x) = F^\beta(x, x) \quad (x \in A). \quad (7)$$

Соотношения (5) — (7) дают $F = F^\beta$.

Этим же способом получаем требуемое соотношение $F = F^\beta$ для функции F любой аргности.

5. Представления итеративных алгебр. Представлением алгебры $\mathfrak{P}_A$ в алгебре $\mathfrak{P}_B$ называется гомоморфизм $\mathfrak{P}_A$ в $\mathfrak{P}_B$. Согласно п. 3 гомоморфизмы $\mathfrak{P}_A$, не являющиеся изоморфизмами, тривиальны и потому изучение представлений $\mathfrak{P}_A$ равносильно изучению изоморфизмов $\mathfrak{P}_A$ в $\mathfrak{P}_B$. Мы укажем здесь некоторые очевидные изоморфизмы, которые назовем стандартными. Далее будет показано, что произвольный изоморфизм $\mathfrak{P}_A$ в $\mathfrak{P}_B$ приводится к комбинации стандартных.

Пусть задано вложение $\alpha: A \rightarrow B$. Положим $C = A^\alpha$. Предположим, кроме того, что задана какая-то проекция $\beta: B \rightarrow C$, т. е. отображение B на C , оставляющее все элементы C неподвижными. Каждой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из $\mathfrak{P}_A$ ставим в соответствие n -арную функцию $f_{\alpha\beta}$, определенную следующими формулами:

$$f_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) = f(x_1, \dots, x_n)^\alpha \quad (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha \in C),$$

$$f_{\alpha\beta}(y_1, \dots, y_n) = f_\alpha(y_1^\beta, \dots, y_n^\beta) \quad (y_1, \dots, y_n \in B).$$

Отображение $f \rightarrow f_\alpha$ есть каноническое отображение $\mathfrak{P}_A$ на $\mathfrak{P}_C$, индуцированное наложением $\alpha: A \rightarrow C$. Для каждой функции $g(z_1, \dots, z_n)$ из $\mathfrak{P}_C$ функция

$$g_\beta(y_1, \dots, y_n) = g(y_1^\beta, \dots, y_n^\beta)$$

называется проекционным продолжением функции g на множестве B . Очевидная проверка показывает, что при проекционном продолжении операции $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, *$ остаются инвариантными и потому отображение $f \rightarrow f_{\alpha\beta}$ является изоморфизмом $\mathfrak{P}_A$ на подалгебру алгебры $\mathfrak{P}_B$, образованную указанными продолжениями функций f_α .

Изоморфизмы вида $f \rightarrow f_{\alpha\beta}$ будем называть проекционными. Если α есть наложение A на B , то β — тождественное отображение B на B и изоморфизм $f \rightarrow f_{\alpha\beta}$ есть канонический изоморфизм $\mathfrak{P}_A$ на $\mathfrak{P}_B$. Теорема 2 показывает, что никаких других изоморфизмов $\mathfrak{P}_A$ на $\mathfrak{P}_B$ нет.

Допустим теперь, что задано семейство представлений

$$\beta_i: \mathfrak{P}_A \rightarrow \mathfrak{P}_{B_i} \quad (i \in I).$$

Образуем декартово произведение $B = \prod B_i$ ($i \in I$). Произвольной n -арной функции $f \in \mathfrak{P}_A$ в каждом множителе B_i отвечает n -арная функция f^{β_i} . Обозначим через f^α n -арную функцию, определенную на B , проекцией которой в B_i является функция f^{β_i} ($i \in I$). Непосредственная проверка показывает, что отображение α , определяемое формулой

$$\tilde{\alpha}: f \rightarrow f^\alpha \quad (f \in \mathfrak{P}_A), \quad (8)$$

является представлением $\mathfrak{P}_A$ в $\mathfrak{P}_B$.

Если все представления β_i совпадают с фиксированным представлением, то формула (8) дает представление $\alpha = \beta^I: \mathfrak{P}_A \rightarrow \mathfrak{P}_{B^I}$, называемое декартовой степенью представления β . В частности, возводя в различные степени единичное (тождественное) представление $\varepsilon: \mathfrak{P}_A \rightarrow \mathfrak{P}_A$, получим набор степенных представлений

$$\varepsilon^n: \mathfrak{P}_A \rightarrow \mathfrak{P}_{A^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (9)$$

Пусть множество A содержит конечное число s элементов. Тогда множество A^n содержит s^n элементов и представления (9) в каждой алгебре $\mathfrak{P}_B$, где $|B| = s^n$, фиксируют определенные итеративные подалгебры, изоморфные алгебре $\mathfrak{P}_s$.

Условимся представление $\alpha: \mathfrak{P}_A^* \rightarrow \mathfrak{P}_B^*$ называть селекторным, если функция $e_2^2(x, y) = y$ отображается в селекторную же функцию e_2^2 , определенную на B . Так как из функции e_2^2 при помощи операций $\zeta, \tau, \Delta, *$ можно получить все селекторные функции e_i^m ($i \leq m, i, m = 1, 2, \dots$), то при селекторных отображениях селекторные функции из $\mathfrak{P}_A^*$ переходят в соответствующие селекторные функции из $\mathfrak{P}_B^*$. Если рассматриваются не предытеративные алгебры $\mathfrak{P}_A^*, \mathfrak{P}_B^*$, а итеративные алгебры $\mathfrak{P}_A, \mathfrak{P}_B$, включающие операцию ∇ , то для селекторности представления, очевидно, достаточно, чтобы единичная функция $e(x) = x$ из $\mathfrak{P}_A$ переходила в единичную функцию из $\mathfrak{P}_B$.

Из определения декартова произведения видно, что декартово произведение селекторных представлений является селекторным представлением. В частности, все степенные представления алгебры $\mathfrak{P}_A$ являются селекторными.

6. Постовские многообразия. Задача нахождения представлений алгебры $\mathfrak{P}_A$ легко связывается с теорией особых многообразий, которые мы назовем многообразиями Поста и определим следующим образом. Выберем в множестве P_A какую-нибудь систему функций

$$f_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \quad (i \in I), \quad (10)$$

с каждым символом i сопоставим n_i -арный функциональный знак F_i и рассмотрим алгебру

$$\mathfrak{A} = \langle A; \Omega \rangle \quad (\Omega = \{F_i: i \in I\}),$$

в которой символ F_i имеет значение f_i . Минимальное многообразие сигнатуры Ω , порожденное алгеброй $\mathfrak{A}$, обозначим через $\hat{\mathfrak{A}}$. Если из функций f_i, e_2^2 при помощи операций $\zeta, \tau, \Delta, *$ можно получить любую функцию из P_A , т. е. если совокупность e_2^2, f_i ($i \in I$) — порождающая в алгебре $\mathfrak{P}_A^*$, то многообразие $\hat{\mathfrak{A}}$ называется постовским многообразием, отвечающим порождающей совокупности f_i . Мощность множества A называется поряд-

к о м постовского многообразия $\mathfrak{M}$. Хотя каждой мощности $\mathfrak{M} = |A|$ отвечает много различных постовских многообразий, зависящих от выбора порождающих f_i , все постовские многообразия одного и того же порядка рационально эквивалентны. Это означает, что главные операции одного многообразия можно термально выразить через главные операции другого при помощи формул, не зависящих от выбора конкретных алгебр многообразий (см. [3]).

Первый конкретный вид постовских многообразий конечного ранга был изучен Розенблумом в 1942 г. [7]. Алгебры этих многообразий были названы Розенблумом алгебрами Поста. Их определение может быть представлено в следующей форме. Алгебрами Поста порядка n ($n \geq 2$) называются алгебры многообразия $\mathfrak{R}_n$, где

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_n &= \langle \{0, 1, \dots, n-1\}, \vee, ' \rangle, \\ x \vee y &= \min(x, y), \\ a' &= a + 1 \quad (a = 0, 1, \dots, n-2), \\ (n-1)' &= 0.\end{aligned}$$

Розенблум доказал, что многообразие $\mathfrak{R}_n$ любого фиксированного конечного порядка n конечно аксиоматизируемое (т. е. определяется конечным числом тождеств). Отсюда следует, что все постовские многообразия конечного порядка конечно аксиоматизируемые. Далее, Розенблумом показано, что мощность каждой конечной алгебры Поста конечного ранга порядка n имеет вид n^k и что все конечные алгебры Поста, имеющие одинаковую мощность, изоморфны. Из этого следует, что каждая конечная алгебра Поста изоморфна декартовой степени порождающей алгебры $\mathfrak{R}_n$.

Другой тип многообразий Поста конечного порядка был определен Эпштейном (1960 [6]). Согласно Эпштейну, решетками Поста порядка n называются алгебры минимального многообразия, порожденного алгеброй

$$\mathfrak{L}_n = \langle \{0, 1, \dots, n-1\}; \vee, \wedge, C_0, C_1, \dots, C_{n-1} \rangle,$$

где

$$\begin{aligned}x \vee y &= \max(x, y), \quad x \wedge y = \min(x, y); \\ C_i(i) &= n-1, \quad C_i(x) = 0 \quad (x \neq i).\end{aligned}$$

Эпштейном показано, что многообразие $\mathfrak{L}_n$ характеризуется следующей простой системой аксиом:

L1. Решетки Поста относительно операций $\vee, \wedge$ являются дистрибутивными решетками с нулем 0 и единицей u .

$$L2. C_0(x) \vee C_1(x) \vee \dots \vee C_{n-1}(x) = u, \quad C_i(x) \wedge C_j(x) = 0 \quad (i \neq j).$$

L3. В каждой решетке Поста порядка n существуют элементы $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$ такие, что

- а) $e_{i-1} \wedge e_i = e_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n-1);$
- б) $x \wedge e_1 = 0 \rightarrow x = 0;$
- в) $x \vee e_{i-1} = e_i \rightarrow x = e_i \quad (i = 1, \dots, n-1);$
- г) $x = (e_1 \wedge C_1(x)) \vee (e_2 \wedge C_2(x)) \vee \dots \vee (e_{n-1} \wedge C_{n-1}(x)).$

Пусть задано некоторое множество S . Одноместные функции $f(x)$ из S в множество $\{0, 1, \dots, n-1\}$ назовем n -значными. Для любых n -значных функций f, g вводим функции $f \vee g, f \wedge g, C_i(f)$, полагая по определению:

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)), (f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x)), \quad (11)$$

$$C_i(f)(x) = \begin{cases} n-1, & f(x) = i, \\ 0, & f(x) \neq i. \end{cases}$$

Тогда оказывается справедливой следующая основная

Т е о р е м а (Эпштейн [6]). *Каждая решетка Поста порядка n изоморфна алгебре всех непрерывных n -значных функций на подходящем вполне несвязном компактном хаусдорфовом пространстве S , основные операции которой*

$$\vee, \wedge, C_0, \dots, C_{n-1}$$

определяются формулами (11).

Для конечных постовских решеток отсюда снова получается, что все такие решетки изоморфны декартовым степеням базисной решетки Поста $\mathfrak{L}_n$.

7. Селекторные представления предытеративных алгебр. Теорему о представлениях решеток Поста легко превратить в теорему о представлениях предытеративных алгебр конечного порядка. В самом деле, пусть задана какая-то решетка Поста

$$L = \langle B; \bigvee, \bigwedge, \bar{C}_0, \dots, \bar{C}_{n-1} \rangle.$$

Между функциями из P_n , определенными на основном множестве $A = \{0, 1, \dots, n-1\}$ производящей решетки Поста $\mathfrak{L}_n$, и функциями из P_B определяем отношение α , полагая

$$\Phi(\bigvee, \bigwedge, C_0, \dots, C_{n-1}, e_2^2) \alpha \Phi(\bigvee, \bigwedge, \bar{C}_0, \dots, \bar{C}_{n-1}, \bar{e}_2^2), \quad (12)$$

где Φ — какой-нибудь терм, образованный из указанных знаков функций с помощью операторных символов $\zeta, \tau, \Delta, *$, причем $e_2^2, \bar{e}_2^2$ — упоминавшие выше селекторные функции.

Так как из функций $\bigvee, \bigwedge, C_0, \dots, C_{n-1}$ с помощью операций $\zeta, \tau, \Delta, *$ можно получить любую функцию из P_n , то отношение α определяет (быть может, многозначное) отображение P_n в P_B . Покажем, что на самом деле отображение α однозначное.

Путь для некоторых термов Φ, Ψ

$$\Phi(\bigvee, \bigwedge, C_0, \dots, C_{n-1}, e_2^2) = \Psi(\bigvee, \bigwedge, C_0, \dots, C_{n-1}, e_2^2). \quad (13)$$

Это равенство означает, что в постовской решетке $\mathfrak{L}_n$ имеет место тождество:

$$\Phi(\bigvee, \bigwedge, C_0, \dots, C_{n-1}, e_2^2)(x_1, \dots, x_s) = \Psi(\bigvee, \dots, e_2^2)(x_1, \dots, x_s),$$

где s — арность функций, представляемых термами Φ, Ψ . Но тогда на любой алгебре многообразия $\mathfrak{L}_n$ должно быть истинным соответствующее тождество, т. е. из (13) следует

$$\Phi(\bigvee, \bigwedge, \bar{C}_0, \dots, \bar{C}_{n-1}, \bar{e}_2^2) = \Psi(\bigvee, \bigwedge, \bar{C}_0, \dots, \bar{C}_{n-1}, \bar{e}_2^2).$$

Из определения (12) видно, что отображение α сохраняет операции $\zeta, \tau, \Delta, \vee, *$ и потому является итеративным изоморфизмом $\mathfrak{P}_n$ в $\mathfrak{P}_B$.

Обратно, пусть задан какой-нибудь селекторный изоморфизм предытеративной алгебры $\mathfrak{P}_n^*$ в некоторую алгебру $\mathfrak{P}_B^*$. Среди функций, образующих алгебру $\mathfrak{P}_n^*$, находятся и функции

$$\bigvee, \bigwedge, C_0, \dots, C_{n-1}, e_2^2.$$

В алгебре $\mathfrak{P}_B^*$ им отвечают какие-то функции $\overline{\bigvee}, \overline{\bigwedge}, \overline{C}_0, \dots, \overline{C}_{n-1}, \overline{e}_2^2$, причем для любого терма Φ

$$\Phi(\bigvee, \bigwedge, C_0, \dots, C_{n-1}, e_2^2) = \Phi(\overline{\bigvee}, \overline{\bigwedge}, \overline{C}_0, \dots, \overline{C}_{n-1}, \overline{e}_2^2). \quad (14)$$

Любое тождество, истинное в решетке $\mathfrak{L}_n$, можно представить в виде (13). Но тогда в силу (14) соответствующее тождество будет истинно в алгебре

$$\mathfrak{L}_1 = \langle B; \overline{\bigvee}, \overline{\bigwedge}, \overline{C}_0, \dots, \overline{C}_{n-1}, \overline{e}_2^2 \rangle,$$

и потому эта алгебра будет решеткой Поста.

Ясно, что в приведенных рассуждениях вместо многообразия решеток Поста порядка n можно взять любое многообразие Поста порядка n . Конечность n также несущественна. Итак, справедлива

Т е о р е м а 4. *Выберем в $\mathfrak{P}_A$ произвольную порождающую систему f_i ($i \in I$), и пусть $\mathfrak{A}$ — минимальное многообразие, порожденное алгеброй*

$$\mathfrak{A} = \langle A; \{f_i : i \in I\} \rangle.$$

Отображение $\alpha: \mathfrak{P}_A^* \rightarrow \mathfrak{P}_B^*$ тогда и только тогда селекторный изоморфизм $\mathfrak{P}_A^*$ в $\mathfrak{P}_B^*$, когда алгебра

$$\mathfrak{B} = \langle B; \{f_i^\alpha : i \in I\} \rangle$$

принадлежит многообразию $\mathfrak{A}$.

Неселекторные изоморфизмы сводятся к селекторным следующим путем.

Т е о р е м а 5. *Пусть α — произвольный изоморфизм $\mathfrak{P}_A^*$ в $\mathfrak{P}_B^*$, e — единичная функция в $\mathfrak{P}_A$, e^α — ее образ в $\mathfrak{P}_B^*$, C — совокупность значений e^α на B , $\bar{f}$ — ограничение функции f^α ($f \in \mathfrak{P}_A^*, f^\alpha \in \mathfrak{P}_B^*$) на C . Тогда отображение $\beta: f \rightarrow \bar{f}$ является селекторным изоморфизмом $\mathfrak{P}_A^*$ в $\mathfrak{P}_C^*$, отображение $e^\alpha: x \rightarrow e^\alpha(x)$ есть проектирование B на C и первоначальный изоморфизм α есть проекционное e^α -продолжение изоморфизма β .*

В самом деле, так как $e * e = e$ в $\mathfrak{P}_A^*$, то $e^\alpha * e^\alpha = e^\alpha$ и потому из $c \in C$ следует $c = e^\alpha(x)$, $e^\alpha(c) = e^\alpha(e^\alpha(x)) = e^\alpha(x) = c$, т. е. отображение $x \rightarrow e^\alpha(x)$ является проектированием B на C .

Аналогично, из $f = e * f$ следует, что $f^\alpha = e^\alpha * f^\alpha$, т. е. значения любой функции f^α ($f \in \mathfrak{P}_A^*$) принадлежат совокупности C . Поэтому отображение $\beta: f \rightarrow \bar{f}$ является гомоморфизмом $\mathfrak{P}_A^*$ в $\mathfrak{P}_C^*$. Из $f(x_1, \dots, x_n) = f(e(x_1), \dots, e(x_n))$ ($x_i \in A$) вытекает

$$f^\alpha(y_1, \dots, y_n) = \bar{f}^\alpha(e^\alpha(y_1), \dots, e^\alpha(y_n)), \quad (y_1, \dots, y_n \in B),$$

и поэтому α есть e^α -продолжение гомоморфизма β . Наконец, соотношения

$$\bar{e}_2^2(e^\alpha(x), e^\alpha(y)) = e_2^{2\alpha}(e^\alpha(x), e^\alpha(y)) = e^\alpha(y) \quad (x, y \in B)$$

показывают, что гомоморфизм β селекторный.

Из теоремы 1 видно, что если S содержит более одного элемента, то гомоморфизм β является изоморфизмом. Если же S состоит из одного элемента, а множество A имеет не менее двух элементов, то β , а вместе с ним и α будут истинными гомоморфизмами (т. е. неизоморфизмами), что противоречит условиям доказываемой теоремы.

8. Подалгебры. Теоремы 3—5 позволяют дать полное описание всех подалгебр алгебры $\mathfrak{P}_s$, изоморфных алгебре $\mathfrak{P}_n$ ($n < s$; n, s — конечные). Условимся говорить, что функция h , принадлежащая какой-то подалгебре $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathfrak{P}_s$, является *единицей подалгебры $\mathfrak{A}$* , если $\Delta h = h$ (т. е. h — одноместная) и $f * h = h * f = f$ для каждой $f \in \mathfrak{A}$. Ясно, что каждая подалгебра может содержать не более одной единицы и если единичная функция принадлежит подалгебре, то она и является ее единицей.

Рангом одноместной функции $h \in \mathfrak{P}_B$ называют мощность множества $h(B)$. Рангом подалгебры $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}_B$, имеющей единицу, называется ранг этой единицы.

Подалгебры $\mathfrak{P}_B$ называются сопряженными, если они переводятся друг в друга подходящими автоморфизмами $\mathfrak{P}_B$. Подалгебры алгебры $\mathfrak{P}_B$ назовем *проективно сопряженными*, если они являются проективными продолжениями сопряженных подалгебр.

Теорема 6. *Все подалгебры алгебры $\mathfrak{P}_s$, изоморфные $\mathfrak{P}_n$, имеют ранги вида*

$$n^k \quad (k = 1, 2, \dots; n^k \leq s);$$

для каждого числа вида $n^k \leq s$ в $\mathfrak{P}_s$ существует и с точностью до проективной сопряженности лишь одна подалгебра, изоморфная $\mathfrak{P}_n$ и имеющая ранг n^k .

В частности, если $n^k = s$, то $\mathfrak{P}_s$ имеет и с точностью до сопряженности лишь одну подалгебру, изоморфную $\mathfrak{P}_n$ и содержащую единичную функцию из $\mathfrak{P}_s$.

Пусть $n \leq n^k \leq s$. Берем в $B = \{0, 1, \dots, s-1\}$ произвольное подмножество D , содержащее n^k элементов, и переносим на D структуру решетки Поста $\mathfrak{L}_n^k$, где $\mathfrak{L}_n$ — порождающая решетка Эпштейна из п. 7. В результате получим решетку Поста:

$$\mathfrak{L} = \langle D; \bigvee, \bigwedge, \bar{c}_0, \dots, \bar{c}_{n-1} \rangle.$$

В силу теоремы 4 эта решетка порождает изоморфизм $\beta: \mathfrak{P}_n \rightarrow \mathfrak{P}_D$. Берем какое-нибудь проектирование δ множества B на D и продолжаем отображение β до изоморфизма $\alpha: \mathfrak{P}_n \rightarrow \mathfrak{P}_B$. Образ $\mathfrak{P}_n$ при изоморфизме α и является искомой подалгеброй ранга n^k , изоморфной $\mathfrak{P}_n$.

Пусть теперь $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ — какие-то подалгебры одного и того же ранга r , изоморфные $\mathfrak{P}_n$. Обозначим через δ_1, δ_2 их единицы и положим $\delta_1(B) = D_1, \delta_2(B) = D_2$. Согласно теореме 5 заданные изоморфизмы $\alpha_i: \mathfrak{P}_n \rightarrow \mathfrak{U}_i$ ($i = 1, 2$) являются соответственно δ_1 - и δ_2 -продолжениями селекторных изоморфизмов:

$$\beta_i: \mathfrak{P}_n \rightarrow \mathfrak{P}_{D_i} \quad (i = 1, 2).$$

Рассмотрим соответствующие решетки Поста:

$$\mathfrak{L}_{ni} = \langle D_i; \bigvee_i, \bigwedge_i, c_{0i}, \dots, c_{n-1i} \rangle \quad (i = 1, 2).$$

Их мощности одинаковы. Поэтому в силу теоремы Розенблума — Эпштейна обе они изоморфны подходящей декартовой степени $\mathfrak{L}_n^k$ производящей решет-

ки $\mathfrak{L}_n$. Следовательно, мощности множеств D_1 и D_2 равны n^k и существует наложение $\varphi: D_1 \rightarrow D_2$, порождающее наложение $\mathfrak{L}_{n_1}$ на $\mathfrak{L}_{n_2}$. Наложение φ продолжаем каким-либо способом до автоналожения $\psi: B \rightarrow B$. Преобразование ψ порождает автоморфизм α_ψ алгебры $\mathfrak{P}_B$. Ясно, что автоморфизм α_ψ переведет алгебру $\mathfrak{M}_1$ в такую алгебру, которая будет проективным расширением алгебры $\mathfrak{P}_A^{\beta_2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Яблонский. Функциональные построения в k -значной логике. — Труды Мат. ин-та АН СССР, 1958, 51, 5—142.
2. Ю. И. Янов, А. А. Мучник. О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. — Докл. АН СССР, 1959, 127, № 1, 44—46.
3. А. И. Мальцев. Структурная характеристика некоторых классов алгебр. — Докл. АН СССР, 1958, 120, № 1, 29—32.
4. P. M. Cohn. Universal algebra. N. Y., 1965.
5. A. Salomaa. On basic groups for the set of functions over a finite domain. — Ann. Acad. Sci. Fennicae, 1963, A1, № 338, 1—15.
6. G. Epstein. The lattice theory of Post algebras. — Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 95, N 2, 300—317.
7. P. C. Rosenbloom. Post algebras. I. Postulates and general theory. — Amer. J. Math., 1942, 64, N 2, 167—188.
8. H. J. Whitlock. A composition algebra for multiplace functions. — Math. Ann., 1964, 157, N 2, 167—178.

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ*



По-видимому, до сих пор в литературе рассматривались лишь многообразия (примитивные классы) и квазимногообразия (квазипримитивные классы) алгебр (см. [1, 2]). Ниже в § 1 указываются естественные определения многообразий и квазимногообразий алгебраических систем, сигнатура которых может содержать, помимо функциональных, также и предикатные символы. Все обычные свойства многообразий и квазимногообразий алгебр при этом без изменений переносятся и на многообразия и квазимногообразия алгебраических систем произвольной сигнатуры за исключением теории вполне характеристических конгруэнций, в которой вместо конгруэнций приходится рассматривать вполне характеристические фактор-системы.

В § 2 при помощи фильтрованных произведений для квазимногообразий устанавливаются структурные характеристики и формулы, в какой-то мере аналогичные известным в теории многообразий алгебр.

§ 1. Тожества и квазитожества

Пусть Ω — совокупность предикатных и функциональных символов, имеющих конечные фиксированные аргументности. Через Ω_f и Ω_p обозначим соответственно функциональную и предикатную части Ω . Отношение равенства в Ω не включается. Если предикат P , либо сигнатурный, т. е. принадлежащий Ω , либо совпадает с равенством, то пишем $P \in \{\Omega, =\}$. Формулы вида:

$$P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_s(x_1, \dots, x_n)), \quad (1)$$

$$P_1(f_1^{(1)}, \dots, f_s^{(1)}) \& \dots \& P_k(f_1^{(k)}, \dots, f_s^{(k)}) \rightarrow P(f_1, \dots, f_s), \quad (2)$$

$$(P, P_1, \dots, P_k \in \{\Omega, =\}),$$

где $x_1, \dots, x_n$ — предметные переменные, $f_i, f_i^{(j)}$ — термы сигнатуры Ω (Ω — слова [2]) от $x_1, \dots, x_n$, называются тождествами и соответственно квазитожествами сигнатуры Ω . Тожество (1) или квазитожество (2) называется истинным в алгебраической системе $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω , если указанные формулы истинны в $\mathfrak{A}$ при любых значениях переменных $x_1, \dots, x_n$ в $\mathfrak{A}$.

Произвольная непустая совокупность $\mathfrak{K}$ систем фиксированной сигнатуры Ω будет называться классом сигнатуры Ω , если вместе с произвольной системой $\mathfrak{K}$ содержит и все ей изоморфные.

Для любого класса $\mathfrak{K}$ систем сигнатуры Ω через $I\mathfrak{K}$ и $Q\mathfrak{K}$ будут обозначаться совокупности всех тождеств и квазитожеств сигнатуры Ω , истинных во всех системах класса $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{K}$ -системах). Аналогично, если $\mathfrak{S}$ — какая-нибудь совокупность тождеств или квазитожеств сигнатуры Ω , то через $K\mathfrak{S}$

* Алгебра и логика, 1966, 5, № 3, 3—9.

будет обозначаться класс всех систем сигнатуры Ω , в которых истинна каждая формула из $\mathfrak{S}$.

Класс $\mathfrak{K}$ называется многообразием (квазимногообразием), если существует такая совокупность $\mathfrak{S}$ тождеств (квазитождеств), что $\mathfrak{K} = K\mathfrak{S}$. Иначе говоря, класс $\mathfrak{K}$ — многообразие, если $\mathfrak{K} = KI\mathfrak{K}$, и класс $\mathfrak{K}$ — квазимногообразие, если $\mathfrak{K} = KQ\mathfrak{K}$.

Для любого класса систем $\mathfrak{K}$ сигнатуры Ω через $S\mathfrak{K}$, $P\mathfrak{K}$, $\Phi\mathfrak{K}$, $H\mathfrak{K}$ обозначается соответственно класс всех подсистем $\mathfrak{K}$ -систем, декартовых произведений $\mathfrak{K}$ -систем, произвольных фильтрованных произведений $\mathfrak{K}$ -систем, гомоморфных образов $\mathfrak{K}$ -систем.

Согласно теореме Биркгофа, класс $\mathfrak{K}$ алгебр тогда и только тогда многообразие, когда одновременно выполнены условия:

- а) $S\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$ (наследственность класса $\mathfrak{K}$);
- б) $P\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$ ($\mathfrak{K}$ мультипликативно замкнут);
- в) $H\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$ ($\mathfrak{K}$ гомоморфно замкнут).

Эти же условия необходимы и достаточны для того, чтобы был многообразием класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем.

Пусть $\mathfrak{K}$ — какой-нибудь класс систем сигнатуры Ω и $\mathfrak{M}$ произвольная система сигнатуры Ω , не обязательно содержащаяся в $\mathfrak{K}$. Некоторая совокупность M элементов $\mathfrak{M}$ называется $\mathfrak{K}$ -независимой, если произвольное отображение $\alpha: M \rightarrow \mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — произвольная $\mathfrak{K}$ -система, продолжаемо до гомоморфизма $\alpha: \bar{M} \rightarrow \mathfrak{C}$, где $\bar{M}$ — подсистема, порожденная в $\mathfrak{M}$ совокупностью M . Из этого определения непосредственно вытекает (ср. [2])

С л е д с т в и е 1. Если совокупность M $\mathfrak{K}$ -независима, то $M HSP\mathfrak{K}$ -независима.

Совокупность $M \subseteq \mathfrak{M}$ называется $\mathfrak{K}$ -свободным базисом системы $\mathfrak{M}$, если M порождает $\mathfrak{M}$ и M $\mathfrak{K}$ -независима. Система $\mathfrak{M}$ называется свободной системой ранга n в классе $\mathfrak{K}$, если $\mathfrak{M} \in \mathfrak{K}$ и $\mathfrak{M}$ имеет какой-то $\mathfrak{K}$ -свободный базис мощности n . Система $\mathfrak{M}$ называется (в себе) свободной системой ранга n , если она имеет $\mathfrak{K}$ -свободный базис мощности n .

Система $\mathfrak{M}$ называется единичной, если она состоит лишь из одного элемента a и все формулы $P(a, \dots, a)$ ($P \in \Omega$) в ней истинны. Класс $\mathfrak{K}$ называется единичным, если он состоит лишь из одной единичной системы (с точностью до изоморфизма). Класс $\mathfrak{K}$ называется тотальным, если он содержит все системы фиксированной сигнатуры. Все многообразия данной сигнатуры Ω образуют решеточно упорядоченное множество относительно теоретико-множественного отношения включения многообразий. Единичный и тотальный классы являются наименьшим и наибольшим элементами в указанной решетке многообразий.

Легко проверяется, что в каждом неединичном многообразии систем существуют свободные системы любого наперед заданного ранга *.

Для любого класса систем $\mathfrak{K}$ совокупность $KI\mathfrak{K}$ является наименьшим многообразием, содержащим $\mathfrak{K}$. Из теоремы Биркгофа легко вытекает формула

$$KI\mathfrak{K} = HSP\mathfrak{K}.$$

* В действительности это утверждение справедливо лишь для алгебр, т. е. для систем, сигнатура которых не содержит предикатных символов. Для существования свободных систем любого ранга в многообразии алгебраических систем с предикатами нужно требовать, чтобы это многообразие было невырожденным, т. е. не удовлетворяло тождеству $x = y$. — Прим. ред.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \Omega \rangle$ — какая-нибудь система сигнатуры Ω . Обозначим через A/σ произвольное разбиение A на смежные классы по некоторой эквиваленции σ . Система вида $\mathfrak{A}_\sigma = \langle A/\sigma; \Omega \rangle$ называется фактор-системой для $\mathfrak{A}$, если каноническое отображение $a \rightarrow a\sigma$ ($a\sigma$ есть смежный класс, содержащий элемент a) является гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}_\sigma$. Заметим, что одной и той же эквиваленции может отвечать много различных фактор-систем. Совокупность всех фактор-систем для $\mathfrak{A}$ частично упорядочивается (см. [1]): по определению полагаем $\mathfrak{A}_\sigma \leq \mathfrak{A}_\theta$, если каноническое отображение $a\sigma \rightarrow a\theta$ есть гомоморфизм $\mathfrak{A}_\sigma$ на $\mathfrak{A}_\theta$ и $a\sigma \subseteq a\theta$.

Фактор-систему $\mathfrak{A}/\sigma$ назовем вполне характеристической, если для любого эндоморфизма $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ имеем

$$P(a_1\sigma, \dots, a_n\sigma) \Rightarrow P(a_1\varphi\sigma, \dots, a_n\varphi\sigma) \quad (P \in \{\Omega, =\}; a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}).$$

Вместо теоремы о соответствии между многообразиями алгебр и вполне характеристическими конгруэнциями получаем для систем следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}_\omega$ — свободная система счетного ранга в многообразии $\mathfrak{K}$. Тогда отображение

$$\mathfrak{F}_\omega/\sigma \rightarrow KI(\mathfrak{F}_\omega/\sigma)$$

является антиизоморфизмом решетки всех вполне характеристических фактор-систем системы $\mathfrak{F}_\omega$ на решетку всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{K}$.

Если $\mathfrak{K}$ — многообразие алгебр, то фактор-системы однозначно соответствуют конгруэнциям и теорема 2 обращается в упомянутую известную теорему о вполне характеристических конгруэнциях.

§ 2. Квазимногообразия систем

Сигнатура Ω алгебраической системы $\mathfrak{A}$ состоит в общем случае из функциональной части Ω_f и предикатной части Ω_p . Каждой сигнатурной функции $F(x_1, \dots, x_m)$ ($F \in \Omega_f$) ставится в соответствие предикат $F^*(x_1, \dots, x_m, x)$, истинный тогда и только тогда, когда $F(x_1, \dots, x_m) = x$. Пусть

$$\Omega^* = \Omega_p \cup \{F^* : F \in \Omega_f\}.$$

Модель $\mathfrak{A}^* = \langle A; \Omega^* \rangle$, полученная указанным образом из системы $\mathfrak{A} = \langle A; \Omega \rangle$, называется моделью, отвечающей системе $\mathfrak{A}$, или просто моделью системы $\mathfrak{A}$. Подмодели модели $\mathfrak{A}^*$ называются подмоделями системы $\mathfrak{A}$. Ω_1 -обеднением системы $\mathfrak{A} = \langle A; \Omega \rangle$ ($\Omega_1 \subseteq \Omega$) называется система $\mathfrak{B} = \langle A; \Omega_1 \rangle$, в которой сигнатурные знаки из Ω_1 имеют те же значения на A , что и в системе $\mathfrak{A}$. Если сигнатура Ω_1 конечная, то обеднение называется финитным.

Из теорем Тарского — Лося и Хорна легко выводится следующая

Теорема 3. Класс систем тогда и только тогда есть квазимногообразие, когда совместно выполнены условия:

- а) класс $\mathfrak{K}$ содержит единичную систему;
- б) $\mathfrak{K}$ мультипликативно замкнут;
- в) если каждое финитное обеднение каждой конечной подмодели какой-нибудь системы $\mathfrak{A}$ вложимо в подходящую $\mathfrak{K}$ -систему, то $\mathfrak{A}$ принадлежит $\mathfrak{K}$.

Изменяя подходящим образом теорему 1.15 из статьи [4] и пользуясь обычными свойствами фильтрованных произведений, можно в теореме 3 изба-

виться от не совсем «алгебраического» условия в) и показать, что имеет место

Теорема 4. Для того чтобы класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем был квазимногообразием, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

- а) $\mathfrak{K}$ содержит любое фильтрованное произведение своих систем;
- б) $\mathfrak{K}$ наследствен;
- в) $\mathfrak{K}$ содержит единичную систему.

Для любого класса систем $\mathfrak{K}$ класс $KQ\mathfrak{K}$ называется квазипрimitивным замыканием $\mathfrak{K}$, или квазимногообразием, порожденным $\mathfrak{K}$ -системами. Из теоремы 4 обычным путем получается

С л е д с т в и е 5. Для любого класса $\mathfrak{K}$

$$KQ\mathfrak{K} = S\Phi\mathfrak{K}_e, \quad (3)$$

где через $\mathfrak{K}_e$ обозначается класс, получаемый из $\mathfrak{K}$ присоединением единичной системы.

Пусть заданы класс $\mathfrak{K}$ систем сигнатуры Ω и произвольная система $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω , не обязательно содержащаяся в $\mathfrak{K}$. Эпиморфизм $\alpha: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$ называется $\mathfrak{K}$ -м о р ф и з м о м, если $\mathfrak{C} \in \mathfrak{K}$ и для любого гомоморфизма $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M} \in \mathfrak{K}$) существует гомоморфизм $\xi: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{M}$, для которого $\varphi = \alpha\xi$. Система $\mathfrak{C}$ и гомоморфизм α , удовлетворяющие указанным условиям, определены с точностью до эквивалентности. $\mathfrak{C}$ называется $\mathfrak{K}$ -репликой $\mathfrak{A}$ (см. [3]). Класс $\mathfrak{K}$ называется р е п л и ч н о п о л н ы м, если для каждой системы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{K}$ существует реплика $\mathfrak{C}$. Легко убедиться [3], что класс $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда реплично полный, когда он наследственный, мультипликативно замкнутый и содержит единичную систему. Отсюда следует, что для любого класса $\mathfrak{K}$ класс $S\Pi\mathfrak{K}_e$ является наименьшим содержащим $\mathfrak{K}$ реплично полным классом.

Отметим, что каждый аксиоматизируемый реплично полный класс является квазимногообразием. Если класс $\mathfrak{K}$ аксиоматизируем, то репличное и квазипрimitивное замыкания $\mathfrak{K}$ совпадают, т. е.

$$S\Phi\mathfrak{K}_e = S\Pi\mathfrak{K}_e.$$

Обычная теория определяющих соотношений имеет место в реплично полных классах и только в них [3]. В частности, среди аксиоматизируемых классов систем полной теорией определяющих соотношений обладают квазимногообразия и только они. Каждая частичная алгебра сигнатуры Ω может быть рассматриваема как Ω^* -модель, и многообразия частичных алгебр этим путем обращаются в квазимногообразия соответствующих систем. Тем самым теория определяющих соотношений для частичных алгебр становится частным случаем теории определяющих соотношений в квазимногообразиях алгебраических систем.

Для любой последовательности $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ алгебраических систем $\mathfrak{A}_i$ сигнатуры Ω и любого класса $\mathfrak{K}$ систем той же сигнатуры $\mathfrak{K}$ -к о м п о з и ц и е й с и с т е м $\mathfrak{A}_i$ называется любая $\mathfrak{K}$ -система $\mathfrak{A}$, для которой существует последовательность гомоморфизмов $\alpha_i : \mathfrak{A}_i \rightarrow \mathfrak{A}$, обладающая свойствами:

- а) $\mathfrak{A}$ порождается совокупностью $\bigcup \mathfrak{A}_i^{\alpha_i}$;
- б) для любой последовательности гомоморфизмов вида

$$\gamma_i : \mathfrak{A}_i \rightarrow \mathfrak{C} \quad (\mathfrak{C} \in \mathfrak{K}),$$

где $\mathfrak{C}$ порождается совокупностью $\mathfrak{I} \cup \mathfrak{M}_i^i$, существует гомоморфизм $\xi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{C}$, для которого $\gamma_i = \alpha_i \xi$.

Композиция систем $\mathfrak{M}_i$ называется *инъективной*, если принадлежащие ей гомоморфизмы α_i являются изоморфизмами.

Согласно Лосю, совокупность систем $\mathfrak{M}_i$ ($i \in I$) называется *совместно вложимой* в $\mathfrak{K}$ -систему, если существует совокупность вложений $\mathfrak{M}_i \rightarrow \mathfrak{M}$ в подходящую $\mathfrak{K}$ -систему $\mathfrak{M}$. Из теоремы компактности вытекает, что если класс $\mathfrak{K}$ аксиоматизируемый и любая пара $\mathfrak{K}$ -систем $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2]$ совместно вложима в $\mathfrak{K}$ -систему, то любая совокупность $\mathfrak{K}$ -систем совместно вложима в $\mathfrak{K}$ -систему. Отсюда в свою очередь получается

С л е д с т в и е 6. *Для произвольного квазимногообразия $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда все $\mathfrak{K}$ -композиции $\mathfrak{K}$ -систем инъективны, когда любая пара $\mathfrak{K}$ -систем вложима в $\mathfrak{K}$ -систему.*

Из формулы (3) и следствия 6 получается

Т е о р е м а 7. *Квазимногообразие $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда порождается одной системой, когда любая пара $\mathfrak{K}$ -систем вложима в $\mathfrak{K}$ -систему.*

Действительно, если условие вложимости выполнено, то для каждого квазитождества $\mathcal{A} \notin Q\mathfrak{K}$ рассматриваем $\mathfrak{K}$ -систему $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$, в которой $\mathcal{A}$ ложно. Из следствия 6 вытекает, что совокупность систем $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ вложима в подходящую $\mathfrak{K}$ -систему $\mathfrak{M}$, которая, очевидно, и будет порождать $\mathfrak{K}$. Для доказательства обратного утверждения достаточно воспользоваться формулой (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Квазипрimitивные классы абстрактных алгебр.— Докл. АН СССР, 1956, 108, № 2, 187—189.
2. P. Cohn. Universal algebra. N. Y., 1965.
3. А. И. Мальцев. Определяющие соотношения в категориях.— Докл. АН СССР, 1958, 119, № 6, 1095—1098.
4. T. Erazune, A. C. Morel, D. S. Scott. Reduced direct products.— Fundam. Math., 1962, 51, N 3, 195—228.

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ КВАЗИГРУПП*



Цель этой заметки — построить многообразие L коммутативных луп, определенное конечной системой тождеств от одного переменного и такое, что задача о распознавании истинности произвольно заданного тождества от одного переменного на каждой лупе многообразия L является алгоритмически неразрешимой. Это значит, что в многообразии L свободная лупа с одним порождающим элементом неконструктивна.

В § 1 напоминаются некоторые общеизвестные определения и факты. В § 2 строится вспомогательное многообразие алгебр с двумя унарными операциями, имеющее нерекурсивную свободную алгебру. При помощи этого многообразия в § 4 строится многообразие луп и многообразие коммутативных луп, в которых нерекурсивны свободные лупы с одним порождающим. В § 3 доказывается вспомогательная лемма о доопределении частичных луп.

§ 1. Проблема тождественных соотношений

Пусть $F_1, \dots, F_s$ — произвольная конечная система символов, каждому из которых поставлено в соответствие некоторое натуральное число, называемое *арностью* соответствующего символа. Задать алгебру сигнатуры $\sigma = \{F_1, \dots, F_s\}$ — значит задать некоторое множество A и каждому символу F_i поставить в соответствие какую-то n_i -арную операцию f_i , определенную на A , со значениями в A , где n_i есть арность символа F_i . Операция f_i называется значением функционального символа F_i в алгебре A . Классом алгебр называется произвольная система алгебр заданной сигнатуры.

Понятие *терма* сигнатуры $\{F_1, \dots, F_s\}$ от некоторых предметных переменных $x_1, \dots, x_m$ определяется индуктивно:

- выражения вида $x_1, \dots, x_m$ по определению называются терминами;
- если $a_1, \dots, a_{n_i}$ — термы, то выражение $F_i(a_1, \dots, a_{n_i})$ также терм.

Задать значение предметной переменной x_j в алгебре $A \Rightarrow$ значит символу x_j поставить в соответствие какой-то элемент алгебры A . Если α — терм сигнатуры σ от переменных $x_1, \dots, x_m$ и значения всех этих переменных в алгебре A сигнатуры σ заданы, то, производя над значениями $x_1, \dots, x_m$ в алгебре A все те операции, которые указаны в записи термина α , получим элемент A , называемый *значением термина α* при заданных значениях переменных $x_1, \dots, x_m$.

Выражение вида $\alpha = \beta$, где α, β — термы заданной сигнатуры σ от переменных $x_1, \dots, x_m$, называется *тождеством* (или тождественным соотношением) сигнатуры σ ранга m . Тождество $\alpha = \beta$ истинно на алгебре A , если для любых значений $x_1, \dots, x_m$ в A значения α и β равны. Тождество $\alpha = \beta$ истинно на классе K алгебр, если оно истинно на каждой алгебре класса K (K -алгебре).

* Мат. сб., 1966, 69, № 1, 3—12.

Через $I_m(K)$ условимся обозначать совокупность всех тождеств от $x_1, \dots, x_m$, истинных на классе K . Объединение всех $I_m(K)$ обозначим через $I(K)$. Так как тождества — это слова в алфавите $x, F_1, \dots, F_s, =, , , (,)$ (x_i кодируем словом $xx \dots x$), то можно ставить вопрос о том, является ли для данного класса K совокупность $I(K)$ (или совокупности $I_m(K)$) рекурсивной (рекурсивными). Этот вопрос называется проблемой тождественных соотношений на классе K . Ясно, что из нерекурсивности $I_m(K)$ для какого-нибудь m следует нерекурсивность $I(K)$ и всех $I_n(K)$ для $n \geq m$.

Для каждого класса K и каждой совокупности символов $a_1, \dots, a_m$ может быть построена особая алгебра, называемая свободной алгеброй ранга m (или алгеброй со свободными порождающими $a_1, \dots, a_m$) для класса K . Построение это осуществляется следующим образом. Пусть $\sigma = \{F_1, \dots, F_s\}$ — сигнатура K . Обозначим через $\mathfrak{A}_m$ совокупность всех термов сигнатуры σ от переменных $a_1, \dots, a_m$. Термы a, b из $\mathfrak{A}_m$ назовем эквивалентными, если соотношение

$$a(x_1, \dots, x_m) = b(x_1, \dots, x_m)$$

является тождеством, истинным на классе K . Обозначим через $\mathfrak{F}_m$ множество классов эквивалентных термов и на $\mathfrak{F}_m$ определим операции $f_1, \dots, f_s$ формулами

$$f_i([a_1], \dots, [a_{n_i}]) = [F(a_1, \dots, a_{n_i})],$$

где $[a_j]$ — класс термов, эквивалентных терму a_j . Алгебра $\mathfrak{F}_m$ с основным множеством $\mathfrak{F}_m$ и операциями $f_1, \dots, f_s$ и называется свободной для K алгеброй ранга m с порождающими $a_1, \dots, a_m$. Из построения алгебры $\mathfrak{F}_m$ видно, что проблема эквивалентности слов в $\mathfrak{F}_m$ равносильна проблеме тождественных соотношений ранга m на классе K .

Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторая система тождеств данной сигнатуры σ и K — какой-нибудь класс алгебр сигнатуры σ . Через $K(\mathfrak{S})$ обозначается система всех тех K -алгебр, на которых истинны все тождества из $\mathfrak{S}$. Класс алгебр K_1 называется многообразием K -алгебр, если $K_1 = K(\mathfrak{S})$ для подходящей системы тождеств $\mathfrak{S}$. Класс K_1 называется конечно определенным многообразием K -алгебр, если $K_1 = K(\mathfrak{S})$, где $\mathfrak{S}$ — некоторая конечная система тождеств. Класс K_1 называется многообразием ранга m K -алгебр, если $K_1 = K(\mathfrak{S})$, где $\mathfrak{S}$ — система тождеств, каждое из которых является тождеством не более чем от m переменных. Наконец, если K — класс всех алгебр данной сигнатуры; то многообразие K -алгебр называется абсолютным многообразием или просто многообразием алгебр (данной сигнатуры). Абсолютными конечно определенными многообразиями являются, например, классы групп, абелевых групп, колец, ассоциативных колец, левых колец, решеток, полугрупп и т. п. Алгебры, свободные для многообразий, принадлежат соответствующим многообразиям. Во всех перечисленных многообразиях (групп, коммутативных групп, колец и т. п.) свободные алгебры конструктивны, т. е. имеют алгоритмически разрешимую проблему равенства слов. По-видимому, в литературе не встречались конечно определенные абсолютные многообразия алгебр с неразрешимой проблемой равенства слов в свободных алгебрах. Ниже будут построены конечно определенные абсолютные многообразия ранга 1 алгебр простейших сигнатур, для которых неразрешима проблема тождества слов в свободных алгебрах ранга 1.

§ 2. Алгебры с унарными операциями

В известном смысле простейшими являются алгебры, сигнатура которых состоит лишь из одной унарной операции $F(x)$. Согласно Эренфойхту, класс всех алгебр этой сигнатуры имеет разрешимую элементарную теорию и потому проблема тождественных соотношений для любого конечно аксиоматизируемого класса алгебр с одной унарной операцией разрешима. В частности, тривиально разрешима проблема тождественных соотношений для любого конечно определенного многообразия алгебр с одной унарной операцией.

Для алгебр с двумя унарными операциями положение коренным образом меняется.

Т е о р е м а 1. *Существует конечно определенное многообразие ранга 1 алгебр с двумя унарными операциями, для которого проблема тождественных соотношений от одного переменного алгоритмически неразрешима.*

Согласно теореме Поста — Маркова (см. [1]), существует полугруппа $\mathfrak{C}$, заданная подходящей системой порождающих элементов $c_1, \dots, c_r$ и определяющих соотношений

$$a_i = b_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1)$$

где a_i, b_i — некоторые слова в алфавите $c_1, \dots, c_r$, для которой проблема эквивалентности слов алгоритмически неразрешима. Пусть a_1, a_2 — новые символы. В соотношения (1) вместо букв c_k подставляем соответственные слова

$$c_k = a_1 a_2 a_1^{k+1} a_2^{k+1} \quad (k = 1, \dots, r). \quad (2)$$

После этой подстановки соотношения (1) перейдут в соотношения, имеющие вид

$$a_{\alpha(i,1)} a_{\alpha(i,2)} \dots a_{\alpha(i,p_i)} = a_{\beta(i,1)} \dots a_{\beta(i,q_i)}, \quad (3)$$

где $\alpha(i, j), \beta(i, j) = 1, 2, i = 1, \dots, n$. Соотношения (3) определяют полугруппу $\mathfrak{P}$ с порождающими a_1, a_2 . Ясно, что формулы (2) определяют изоморфное вложение полугруппы $\mathfrak{C}$ в полугруппу $\mathfrak{P}$ (см. [2]). Так как проблема эквивалентности слов в полугруппе $\mathfrak{C}$ алгоритмически неразрешима, то проблема эквивалентности слов в полугруппе $\mathfrak{P}$ также алгоритмически неразрешима.

Рассмотрим теперь класс алгебр с двумя унарными основными операциями A_1 и A_2 . Каждому определяющему соотношению (3) ставим в соответствие тождество

$$A_{\alpha(i,1)} (A_{\alpha(i,2)} \dots (A_{\alpha(i,p_i)}(x)) \dots) = A_{\beta(i,1)} (\dots (A_{\beta(i,q_i)}(x)) \dots) \quad (4)$$

от переменной x сигнатуры A_1, A_2 . Обозначим через $\mathfrak{M}$ многообразие тех алгебр сигнатуры A_1, A_2 , на которых истинны все тождества (4).

Произвольное тождественное соотношение ранга 1 в сигнатуре A_1, A_2 имеет либо вид

$$A_{\alpha_1} (A_{\alpha_2} \dots (A_{\alpha_p}(x)) \dots) = A_{\beta_1} (\dots (A_{\beta_q}(x)) \dots), \quad (5)$$

либо вид

$$A_{\alpha_1} (A_{\alpha_2} \dots (A_{\alpha_p}(x)) \dots) = x.$$

Легко убедиться, что тождество (5) истинно на многообразии $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда в полугруппе $\mathfrak{P}$ истинно равенство

$$a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \dots a_{\alpha_p} = a_{\beta_1} a_{\beta_2} \dots a_{\beta_q}. \quad (6)$$

В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная алгебра из $\mathfrak{M}$. Каждая унарная операция, определенная на $\mathfrak{A}$, — отображение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$. Все отображения $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ составляют полугруппу относительно обычного умножения отображений. В этой полугруппе рассмотрим подполугруппу $\mathfrak{P}^*$, порожденную отображениями A_1 и A_2 . Тождества (4) означают, что в полугруппе $\mathfrak{P}^*$ элементы A_1, A_2 связаны соотношениями (3). Если равенство (6) истинно в полугруппе $\mathfrak{P}$, то оно истинно в каждой полугруппе, в которой элементы a_1, a_2 связаны соотношениями (3). Поэтому в полугруппе $\mathfrak{P}^*$ истинно равенство

$$A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \dots A_{\alpha_p} = A_{\beta_1} A_{\beta_2} \dots A_{\beta_q},$$

равносильное тождеству (5). Таким образом, из (6) следует (5).

Обратно, пусть (5) истинно на многообразии $\mathfrak{M}$. К полугруппе $\mathfrak{P}$ присоединяем внешнюю единицу e , т. е. полагаем $e \notin \mathfrak{P}$, $ee = e$ и $ex = xe = x$ для $x \in \mathfrak{P}$. Новую полугруппу $\mathfrak{P} \cup \{e\}$ обозначим через $\mathfrak{P}_e$. На $\mathfrak{P}_e$ определим операции A_1, A_2 , полагая

$$A_1 x = a_1 x, \quad A_2 x = a_2 x. \quad (7)$$

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}_e$ с основным множеством $\mathfrak{P}_e$ и операциями A_1, A_2 . Из соотношения (3) вытекает, что на $\mathfrak{A}_e$ истинны тождества (4), и поэтому $\mathfrak{A}_e$ принадлежит $\mathfrak{M}$. Согласно предположению на многообразии $\mathfrak{M}$, а следовательно, и на алгебре $\mathfrak{A}_e$ истинно тождество (5). Полагая в нем $x = e$ и пользуясь (7), получим равенство (6), что и требовалось.

Итак, на многообразии $\mathfrak{M}$, определенном конечным числом тождеств ранга 1, проблема тождественных соотношений первого ранга алгоритмически неразрешима, и теорема 1 доказана. Однако многообразие $\mathfrak{M}$ обладает еще одним свойством, которое нам будет нужно в дальнейшем.

Л е м м а. Пусть $\mathfrak{M}$ — построенное выше многообразие алгебр с основными операциями A_1, A_2 , удовлетворяющих тождествам (4). Обозначим через $\mathfrak{M}_0$ класс бесконечных алгебр из $\mathfrak{M}$, в которых существует такой элемент 0, что для любых элементов x, y

$$\alpha) \quad A_2^{i+1} x = x \leftrightarrow x = 0,$$

$$\beta) \quad A_1 A_2^i x = x \leftrightarrow x = 0,$$

$$\gamma) \quad A_1 x = A_2 y \leftrightarrow x = y = 0 \quad (i = 0, 1, \dots),$$

$$\delta) \quad A_2 x = A_2 y \leftrightarrow x = y,$$

$$\epsilon) \quad A_1 A_2^{i+1} x = A_1 x \leftrightarrow x = 0.$$

Тогда каждое тождество вида (5), истинное на всех $\mathfrak{M}_0$ -алгебрах, будет истинно на всех $\mathfrak{M}$ -алгебрах, и потому проблема тождественных соотношений на классе $\mathfrak{M}_0$ алгоритмически неразрешима.

Пусть тождество (5) истинно на каждой алгебре класса $\mathfrak{M}_0$. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}_e$, построенную в процессе доказательства теоремы 1. Присоединим к ней новый элемент 0 и положим $A_1 0 = A_2 0 = 0$. Расширенную алгебру обозначим через $\mathfrak{A}_0$. Для $x = 0$ соотношения (4) тривиально истинны. Поэтому тождества (4) истинны на $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_0 \in \mathfrak{M}$. Покажем, что алгебра $\mathfrak{A}_0$ обладает свойствами $\alpha) - \epsilon)$.

Элементами алгебры $\mathfrak{A}_0$ являются 0, e и элементы полугруппы $\mathfrak{P}$, представляющиеся непустыми словами в алфавите a_1, a_2 . При этом два слова эквивалентны, т. е. представляют один и тот же элемент $\mathfrak{P}$, тогда и только

тогда, когда одно из них может быть переведено в другое элементарными преобразованиями, отвечающими определяющим соотношениям (3). Условимся слово в алфавите a_1, a_2 называть *регулярным*, если оно (графически) распадается в композицию слов вида $a_1 a_2 a_1^{k+1} a_2^{k+1}$ ($k > 0$). Особенность соотношений (3) состоит в том, что их левые и правые части являются регулярными словами. Отсюда, в частности, следует, что регулярное слово может быть эквивалентно лишь регулярному слову. Более того, каждая буква произвольного слова может входить не более чем в одно подслово вида $a_1 a_2 a_1^{k+1} a_2^{k+1}$. Поэтому произвольное слово в алфавите a_1, a_2 однозначно распадается в композицию своих максимальных регулярных кусков, соединенных нерегулярными отрезками, не содержащими подслов вида $a_1 a_2 a_1^{k+1} a_2^{k+1}$. В процессе элементарных преобразований меняются лишь максимальные регулярные куски, а упомянутые нерегулярные отрезки не меняются.

Проверим свойство γ). Пусть $A_1 x = A_2 y$ и $x \neq 0$ или $y \neq 0$. Тогда $x \neq 0$, $y \neq 0$ и потому $a_1 x = a_2 y$. При элементарных преобразованиях начальная буква слова не меняется. Поэтому эквивалентность $a_1 x = a_2 y$ невозможна и $x = y = 0$.

Пусть $A_2 x = A_2 y$. Если $x = 0$ или $y = 0$, то $x = y = 0$. Если же $x \neq 0$, $y \neq 0$, то в $\mathfrak{P}_e$ имеем $a_2 x = a_2 y$. Но буква a_2 , стоящая в начале слова, в элементарных преобразованиях участия принимать не может. Поэтому $x = y$ и свойство δ) истинно. Наконец, если $A_1 x = A_1 A_2 x$, $x \neq 0$, то $a_1 x = a_1 a_2 x$ в $\mathfrak{P}_e$. Левые и правые части определяющих соотношений (3) являются словами, длина которых четна. Отсюда следует, что разность длин эквивалентных слов есть число четное. Разность длин слов $a_1 x$ и $a_1 a_2 x$ равна единице, и потому эквивалентность $a_1 x = a_1 a_2 x$ в полугруппе $\mathfrak{P}_e$ невозможна. Аналогичным образом проверяются и остальные свойства.

Итак, алгебра $\mathfrak{M}_0$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_0$, и потому на $\mathfrak{M}_0$ истинно тождество (5). Полагая в нем $x = e$, получим равенство (6), из которого, как показано выше, следует, что тождество (5) истинно на каждой алгебре многообразия $\mathfrak{M}$.

§ 3. Частичные квазигруппы

Алгебра Q с одной бинарной операцией $\circ$ называется *квазигруппой*, если для любых a, x, y из Q имеют место законы сокращения

$$a \circ x = a \circ y \rightarrow x = y, \quad (8)$$

$$x \circ a = y \circ a \rightarrow x = y \quad (9)$$

и для каждого a, b из Q в Q разрешимы уравнения

$$a \circ x = b, \quad y \circ a = b.$$

Элемент 0 квазигруппы Q называется ее нулем, если

$$x \circ 0 = 0 \circ x = x \quad (x \in Q). \quad (10)$$

Множество Q , содержащее фиксированный элемент 0 и снабженное *частичной* бинарной операцией $\circ$, называется *частичной квазигруппой с нулем* 0 относительно операции $\circ$, если в Q для всех x определены и равны x произведения $x \circ 0, 0 \circ x$ и в Q имеют место законы сокращения (8), (9) при условии, что все входящие в них произведения определены в Q .

Квазигруппа с операцией $\circ$ называется коммутативной, если на ней истинно тождество $x \circ y = y \circ x$. Частичная квазигруппа называется коммутативной, если в ней из определенности $x \circ y$ вытекают определенность $y \circ x$ и равенство $x \circ y = y \circ x$.

Теорема 2. Пусть Q_0 — счетная коммутативная частичная квазигруппа с нулем 0, удовлетворяющая условиям

i) для каждого $a \neq 0$ конечна совокупность тех x , для которых определено $a \circ x$ или $x \circ a$;

ii) для каждого $r \in Q_0$ существует бесконечно много таких $p \in Q_0$, что уравнение $p \circ x = r$ неразрешимо в Q_0 .

Тогда операцию $\circ$ можно доопределить до всюду определенной операции на Q_0 так, что Q_0 относительно новой операции будет коммутативной квазигруппой с нулем 0.

Без ограничения общности можно считать, что элементами Q_0 являются натуральные числа и что число 0 — нулевой элемент Q_0 . Всевозможные пары натуральных чисел располагаем каким-нибудь образом в последовательность, например в следующую последовательность:

$$(0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (1,1), \dots \quad (11)$$

Пусть M_0 — множество тех пар (x, y) , для которых произведение $x \circ y$ определено в частичной квазигруппе Q_0 . Далее мы будем отдельными шагами расширять множество M_0 , доопределяя надлежащим образом операцию $\circ$ и следя за тем, чтобы множество Q_0 с доопределенной операцией оставалось частичной коммутативной квазигруппой, удовлетворяющей требованиям i), ii).

Итак, пусть после n -го шага мы получили множество пар M_n , для которых произведение $\circ$ определено, и пусть продолженная частичная коммутативная квазигруппа Q_n с областью определенности M_n удовлетворяет требованиям i), ii). Берем в последовательности (11) первую пару (a, b) , не входящую в M_n . Из коммутативности Q_n и свойств нулевого элемента следует, что $(b, a) \notin M_n, a \neq 0, b \neq 0$. Согласно i) совокупность тех x в Q_n , для которых определено $a \circ x$ или $x \circ a$, конечна. Поэтому найдется число c , отличное от всех значений, принимаемых произведениями $a \circ x, x \circ b$ в Q_n . Полагая $a \circ b = b \circ a = c$, мы расширим операцию $\circ$ и получим частичную коммутативную квазигруппу Q_n^* с областью определенности $M_n^* = M_n \cup \{(a, b), (b, a)\}$. Ясно, что условия i), ii) для Q_n^* выполняются.

Теперь в последовательности (11) ищем первую пару (p, r) , для которой уравнение $p \circ x = r$ неразрешимо в Q_n^* . В силу i), ii) существует такой элемент q , что уравнение $q \circ x = r$ неразрешимо и $p \circ q$ не определено в Q_n^* . Расширяем операцию $\circ$, полагая $p \circ q = q \circ p = r$. Новую частичную квазигруппу с областью определенности $M_{n+1} = M_n^* \cup \{(p, q), (q, p)\}$ обозначим через Q_{n+1} . Условия i), ii) в Q_{n+1} , очевидно, выполняются.

Мы получили последовательность частичных квазигрупп $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$, определенных на множестве натуральных чисел, с постепенно расширяющейся операцией $\circ$. Предельная алгебра Q будет искомой коммутативной квазигруппой.

Заметим, что теорема 2 верна и для произвольных (некоммутативных) квазигрупп. Ее легко обобщить и на несчетный случай.

§ 4. Многообразие квазигрупп

В § 2 были рассмотрены алгебры с двумя унарными операциями. Вместе с ними в каком-то смысле простейшими будут и алгебры с одной бинарной операцией, т. е. группоиды. Положение для группоидов оказывается таким же, как и для алгебр с двумя унарными операциями.

Т е о р е м а 3. *Существует конечно определенное многообразие ранга 1 группоидов $\mathfrak{G}$ такое, что проблема тождественных соотношений ранга 1 алгоритмически неразрешима на любом классе группоидов, содержащемся в $\mathfrak{G}$ и содержащем совокупность $\mathfrak{G}_0$ всех бесконечных коммутативных квазигрупп с нулем, принадлежащих $\mathfrak{G}$.*

Рассмотрим систему тождеств (4), упоминающуюся в лемме из § 2. В каждом тождестве (4) выражения вида $A_2(z)$, $A_1(z)$ последовательно заменяем термами сигнатуры $\circ$ с помощью формул

$$A_2(z) = z \circ z, \quad (12)$$

$$A_1(z) = (z \circ z) \circ z. \quad (13)$$

Например, выражение $A_2(A_1(x))$ при таком преобразовании перейдет в терм

$$((x \circ x) \circ x) \circ ((x \circ x) \circ x). \quad (14)$$

В результате из тождеств (4) получим тождества вида

$$G_i(x) = H_i(x), \quad (15)$$

где G_i , H_i — термы от переменной x сигнатуры $\circ$. Обозначим через $\mathfrak{G}$ многообразие группоидов, удовлетворяющих тождествам (15), и через $\mathfrak{G}_0$ — класс всех коммутативных квазигрупп с нулем, содержащихся в $\mathfrak{G}$.

Возьмем произвольное тождество вида (5). Преобразуя его указанным способом, получим тождество вида

$$F(x) = G(x). \quad (16)$$

Для доказательства теоремы 4 достаточно показать, что 1) из истинности тождества (16) на классе $\mathfrak{G}_0$ следует истинность тождества (5) на классе $\mathfrak{M}_0$ алгебр с операциями A_1 , A_2 и 2) из истинности (5) на классе $\mathfrak{M}_0$ вытекает истинность тождества (16) на многообразии $\mathfrak{G}$.

Начнем со второго утверждения. Пусть тождество (5) истинно на классе $\mathfrak{M}_0$ (из леммы § 2). Тогда оно согласно этой лемме истинно и на многообразии $\mathfrak{M}$, определенном тождествами (4). Возьмем произвольный группоид G из многообразия $\mathfrak{G}$. Определив на G новые операции A_1 , A_2 по формулам (12), (13), мы обратим G в алгебру сигнатуры A_1 , A_2 . Так как на группоиде G истинны тождества (15), то на алгебре G истинны тождества (4), т. е. алгебра G принадлежит многообразию $\mathfrak{M}$, и потому на алгебре G истинно тождество (5), означавшее в силу формул (12), (13), что на группоиде G истинно тождество (16).

Первое утверждение доказывается несколько сложнее. Пусть тождество (16) истинно на классе $\mathfrak{G}_0$, и пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная алгебра класса $\mathfrak{M}_0$, удовлетворяющая требованиям а) — е) леммы из § 2. В частности, $\mathfrak{A}$ содержит элемент 0, удовлетворяющий перечисленным требованиям. На совокупности элементов алгебры $\mathfrak{A}$ определяем частичную операцию $\circ$ с помощью формул (12), (13) и соглашений

$$z \circ (z \circ z) = A_1 z, \quad (17)$$

$$0 \circ z = z \circ 0 = z. \quad (18)$$

Из свойств $\alpha) - \varepsilon)$ вытекает, что формулы (12), (13), (17), (18) не противоречат друг другу. В самом деле, формула (12) определяет произведение для диагональных пар (z, z) и для этих пар находится в согласии с формулой (18), так как $A_2 0 = 0$. Пара $(z \circ z, z)$ может быть диагональной только в том случае, когда $z \circ z = z$, т. е. когда $A_2 z = z$. Согласно свойству $\alpha)$ отсюда следует, что $z = 0$, а согласно свойству $\beta)$ следует, что $A_1 0 = 0$. Наконец, пара вида $(z \circ z, z)$ не может быть при $z \neq 0$ парой $(0, z)$ в силу того же свойства $\alpha)$. Итак, на множестве элементов алгебры $\mathfrak{A}$ с помощью формул (12), (13), (17), (18) определяется некоторый частичный группоид, который мы обозначим через Q_0 . Этот частичный группоид коммутативен и содержит нулевой элемент 0. Проверим закон сокращения. Пусть для некоторых a, x, y имеем $a \circ x = a \circ y$ в Q_0 . Если $a = 0$, то $x = y$. Поэтому далее предполагаем $a \neq 0$. Произведение $a \circ x$ определено в Q_0 только в следующих четырех случаях:

$$x = 0, \quad x = a, \quad x = a \circ a, \quad a = x \circ x.$$

Аналогично, произведение $a \circ y$ определено также лишь в случаях

$$y = 0, \quad y = a, \quad y = a \circ a, \quad a = y \circ y. \quad (19)$$

Надо просмотреть всевозможные комбинации этих случаев. Если $x = 0$, то в трех последних случаях в (19) соответственно получим

$$a = a \circ a = A_2 a, \quad a = A_1 a, \quad a = A_1 y = A_2 y,$$

т. е. в силу свойств $\alpha) - \gamma)$ $y = a = 0$. Аналогично и во всех остальных случаях получим $x = y$. Таким образом, Q_0 — частичная коммутативная квазигруппа с нулем 0.

Легко проверяется, что Q_0 удовлетворяет и требованиям $i), ii)$ теоремы 2. Действительно, пусть $a \in Q_0$, $a \neq 0$. Тогда произведение $a \circ y$ будет определено только в случаях (19). Но уравнение $y \circ y = A_2 y = a$ в силу $\delta)$ имеет не более одного решения. Поэтому существует не более четырех значений для y , при которых $a \circ y$ определено в Q_0 , и свойство $i)$ истинно для Q_0 .

С другой стороны, пусть задан произвольный элемент $r \in Q_0$. Если $r = 0$, то уравнение $p \circ x = r$ неразрешимо в Q_0 для любого $p \neq 0$. Пусть $r \neq 0$. Рассмотрим элементы $A_2 r, A_2^2 r, \dots$. Согласно $\alpha)$ все эти элементы различны. Уравнение $(A_2^{i+1} r) \circ y = r$ может иметь решение y лишь в случаях (19). Но в этих случаях соответственно получаем

$$A_2^{i+1} r = r, \quad A_2^{i+2} r = r, \quad A_2 y = A_2^{i+1} r \rightarrow y = A_2^i r, \quad A_1 A_2^i r = r,$$

откуда в силу $\alpha), \beta)$ получаем, что $r = 0$.

Итак, частичная коммутативная квазигруппа Q_0 удовлетворяет требованиям теоремы 2, и потому ее можно доопределить до коммутативной квазигруппы Q с нулевым элементом 0. На алгебре $\mathfrak{A}$ выполняются тождества (4). Поэтому в силу соотношений (12), (13) на квазигруппе Q удовлетворяются тождества (15), т. е. $Q \in \mathfrak{G}_0$, и, следовательно, на Q истинно тождество (16). В силу тех же соотношений (12), (13) это означает, что на алгебре $\mathfrak{A}$ истинно тождество (5), что и требовалось.

Л у п о й (примитивной лупой) называется алгебра с операцией умножения и операциями деления $/, \backslash$, связанными тождествами

$$(xy) / y = y \backslash (yx) = y (y \backslash x) = (x / y) y = x, \quad x \backslash x = y / y.$$

Лупа, удовлетворяющая тождеству $xu = ux$, называется коммутативной.

Каждая лупа относительно операции умножения является квазигруппой с нулевым элементом. Обратно, на каждой квазигруппе с нулевым элементом можно так доопределить операции деления, чтобы она обратилась в лупу. Поэтому из теоремы 4 непосредственно вытекает

С л е д с т в и е. Существует конечно определенное многообразие ранга 1 луп L такое, что проблема истинности тождеств ранга 1 алгоритмически неразрешима на любом классе луп, содержащемся в L и содержащем все коммутативные лупы из L .

В частности, проблема истинности тождеств ранга 1 алгоритмически неразрешима на многообразии всех коммутативных луп, содержащихся в L .

Помимо известного вопроса об алгоритмической разрешимости проблемы тождественных соотношений на любом конечно определенном многообразии групп, интересно было бы решить вопрос о существовании конечно определенного многообразия луп, конечные лупы которого составляют класс с алгоритмически неразрешимой проблемой тождественных соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Марков. Теория алгоритмов.— Труды Мат. ин-та АН СССР, 1954, 42, 3—376.
2. М. Hall. The word problem for semi-groups with two generators.— J. Symbol. Log., 1949, 14, 115—119.

ОБ ОДНОМ УСИЛЕНИИ ТЕОРЕМ СЛУПЕЦКОГО И ЯБЛОНСКОГО*



Рассмотрим алгебру Поста (см. [1])

$$P_k = \langle P_k; \zeta, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle$$

конечного ранга k , где P_k — совокупность всех одноместных, двухместных и т. д. функций, определенных на множестве $N_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ со значениями в этом же множестве. Если $A \subseteq P_k$, то через A^n будем обозначать совокупность всех n -местных функций, содержащихся в A , а через $A^{(i)}$ — совокупность всех функций из A , принимающих не более i различных значений. Совокупность P_k^1 относительно операции подстановки $*$ является полугруппой, а совокупности

$$P_k^{1(1)} \subset P_k^{1(2)} \subset \dots \subset P_k^{1(k-1)} \subset P_k^{1(k)} = P_k^1$$

являются подполугруппами полугруппы P_k^1 . Произвольную подполугруппу G из P_k^1 назовем m раз транзитивной, если для любых попарно различных $a_1, \dots, a_m$ из N_k и произвольных, не обязательно различных $d_1, \dots, d_m$ из N_k в полугруппе G существует такая функция α , что

$$\alpha(a_i) = d_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Ясно, что каждая полугруппа $P_k^{1(m)}$ ($1 \leq m \leq k$) является m раз транзитивной подполугруппой в P_k^1 . Полугруппа P_k^1 k раз транзитивна, и других k раз транзитивных подполугрупп в P_k^1 нет. Полугруппа $P_k^{1(k-1)}$ $k-1$ раз транзитивна, но при $k \geq 3$ в $P_k^{1(k-1)}$ есть и другие $k-1$ раз транзитивные подполугруппы. Например, обозначим через T_k^i совокупность тех $f \in P_k^1$, для которых

$$\begin{aligned} f(i) &= f(0) \vee f(i) = f(1) \vee \dots \vee f(i) = f(i-1) \vee f(i) = \\ &= f(i+1) \vee \dots \vee f(i) = f(k-1). \end{aligned}$$

Ясно, что T_k^i есть $k-1$ раз транзитивная подполугруппа в $P_k^{1(k-1)}$, отличная от $P_k^{1(k-1)}$ и не содержащая в себе $P_k^{1(k-2)}$. Аналогично и внутри каждой другой полугруппы $P_k^{1(s)}$ при $s \geq 2$ существуют истинные s раз транзитивные подполугруппы. Простые подсчеты показывают, что полугруппами T_3^0, T_1^1, T_3^2 исчерпываются все 2 раза транзитивные подполугруппы полугруппы $P_3^{1(2^3)}$.

Функция $g(x_1, \dots, x_n)$ называется существенно одноместной, если для подходящих $i \in \{1, \dots, n\}$ и $f \in P_k^1$

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(x_i) \quad (x_1, \dots, x_n = 0, \dots, k-1).$$

В противном случае функция g называется существенно m -местной. Существенно m -местная функция из P_k , принимающая всевозможные зна-

* Алгебра и логика, 1967, 6, № 3, 61—74.

чения $0, 1, \dots, k-1$, называется существенной функцией, или функцией Слупецкого. Согласно Слупецкому, если при $k \geq 3$ какая-нибудь подалгебра A алгебры P_k содержит P_k^1 и хотя бы одну существенную функцию, то $A = P_k$. С. В. Яблонский [2] усилил эту теорему, показав, что в теореме Слупецкого вместо $P_k^1 \subseteq A$ достаточно требовать $P_k^{1(k-1)} \subseteq A$. Ниже доказывается несколько более сильное утверждение, из которого, в частности, следует, что в формулировке теоремы Яблонского условие $P_k^{1(k-1)} \subseteq A$ можно еще ослабить, заменив его требованием $G \subseteq A$, где G — произвольная $k-1$ раз транзитивная подполугруппа полугруппы $P_k^{1(k-1)}$. Указываемое ниже доказательство этого утверждения не сложнее первоначального доказательства Яблонского и является небольшой его модификацией.

Далее нам потребуются несколько известных лемм. Для полноты изложения мы приводим их вместе с доказательствами.

1. Подполугруппы. Покажем, что истинна

Л е м м а 1. Если $2 \leq p < k$ и G — p раз транзитивная подполугруппа полугруппы P_k^1 , то полугруппа

$$G^{p-1} = G \cap P_k^{1(p-1)}$$

$p-1$ раз транзитивна.

Каждую функцию $f \in P_k^1$ можно записать в виде подстановки

$$f = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_r \\ c_1 & \dots & c_r \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $c_1, \dots, c_r$ — различные числа из N_k , а $\{A_1, \dots, A_r\}$ — какое-то разбиение множества N_k на непересекающиеся непустые подмножества; r — это ранг подстановки f , причем ранг произведения подстановок не превосходит ранга любого сомножителя. По условию G содержит подстановку

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p-1 & p & \dots & k-1 \\ 0 & 1 & \dots & p-1 & d_p & \dots & d_{k-1} \end{pmatrix},$$

ранг которой $\geq p$. Покажем, что G содержит подстановку, ранг которой точно равен $p-1$. Из подстановок, содержащихся в G и имеющих ранг $\geq p$, выберем ту, ранг которой наименьший. Пусть это будет подстановка (1). Так как полугруппа G p раз транзитивна, то в G найдется подстановка вида

$$g = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_p & \dots \\ c_2 & c_2 & \dots & c_p & \dots \end{pmatrix}.$$

Но тогда принадлежащая G подстановка

$$gf = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p & \dots \\ c_2 & c_2 & \dots & c_p & \dots \end{pmatrix}$$

будет иметь ранг, меньший r , но не меньший $p-1$, и потому равный $p-1$. Пусть $b_i \in A_1 \cup A_2$, $b_i \in A_{i+1}$ ($i \geq 2$). Берем произвольные различные числа $a_1, \dots, a_{p-1}$ и не обязательно различные числа $d_1, \dots, d_{p-1}$ из N_k . По условию G содержит подстановки вида

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{p-1} & \dots \\ b_1 & \dots & b_{p-1} & \dots \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} c_2 & \dots & c_p & \dots \\ d_1 & \dots & d_{p-1} & \dots \end{pmatrix}.$$

Подстановка $\beta g f \alpha$ принадлежит G , имеет ранг $p - 1$ и потому входит в $G^{(p-1)}$. Кроме того, $\beta g f \alpha$ переводит числа $a_1, \dots, a_{p-1}$ соответственно в числа $d_1, \dots, d_{p-1}$. Поэтому полугруппа $G^{(p-1)}$ ($p - 1$) раз транзитивна.

Из леммы 1 при $p = 2$ получаем, что каждая 2 раза транзитивная подполугруппа полугруппы P_k^1 содержит все постоянные функции.

Вместе с Е. Ю. Захаровой [3] введем обозначения:

R_k^i — совокупность всех подстановок из $P_k^{1(k-2)}$ и подстановок из $P_k^{1(k-1)}$, принимающих значение i ($i = 0, 1, \dots, k - 1$);

R_k^{ij} — совокупность всех подстановок из $P_k^{1(k-2)}$ и тех подстановок из $P_k^{1(k-1)}$, которые принимают значения i и j или переводят i и j в одно и то же число ($i \neq j$; $i, j = 0, 1, \dots, k - 1$).

Л е м м а 2. Полугруппы R_k^i, R_k^{ij} являются максимальными в системе $k - 1$ раз транзитивных подполугрупп полугруппы $P_k^{1(k-1)}$.

Рассмотрим R_k^0 . Пусть G — какая-нибудь большая полугруппа: $R_k^0 \subset G \subseteq P_k^{1(k-1)}$. Тогда в G должна найтись подстановка вида

$$\alpha = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_{k-1} & b_k \\ 1 & \dots & k-1 & u \end{pmatrix} \quad (1 \leq u \leq k-1, b_k \neq 0).$$

Покажем, что G $k - 1$ раз транзитивна. Пусть $a_1, \dots, a_{k-1}$ — различные и $d_1, \dots, d_{k-1}$ — произвольные числа из N_k . Надо убедиться, что при подходящем x подстановка

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ d_1 & \dots & d_{k-1} & x \end{pmatrix} \quad (2)$$

будет принадлежать G . Если $0 \in \{d_1, \dots, d_{k-1}\}$ или $d_i = d_j$ ($i \neq j$), то ξ содержится в R_k^0 при $x = 0$. Поэтому можно считать, что ξ имеет вид

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & \dots & k-1 & x \end{pmatrix}.$$

Так как из $0 \in \{b_1, \dots, b_{k-1}\}$ следует, что

$$\beta = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ b_1 & \dots & b_{k-1} & b_1 \end{pmatrix} \in R_k^0,$$

то в качестве ξ можно взять подстановку

$$\tilde{\alpha}\beta = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & \dots & k-1 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Рассмотрим теперь полугруппу R_k^{01} . Пусть снова G — полугруппа, содержащая R_k^{01} строго внутри себя, и пусть $\alpha \in G \setminus R_k^{01}$. Поэтому α имеет вид

$$\alpha = \begin{pmatrix} b'_1 & \dots & b'_{k-1} & b'_k \\ c_1 & \dots & c_{k-1} & c_i \end{pmatrix} \quad (1 \leq i \leq k-1),$$

где $c_1, \dots, c_{k-1}$ — попарно различные числа из N_k и $\{0, 1\} \not\subseteq \{c_1, \dots, c_{k-1}\}$. Если $0 \notin \{c_1, \dots, c_{k-1}\}$, то α будет иметь вид

$$\alpha = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_{k-1} & b_k \\ 1 & \dots & k-1 & i \end{pmatrix} \quad (1 \leq i \leq k-1). \quad (3)$$

В этой формуле можно считать $b_k \neq 0, 1$, и потому

$$\{0, 1\} \subseteq \{b_1, \dots, b_{k-1}\}. \quad (4)$$

Действительно, по условию $\alpha 0 \neq \alpha 1$ и, следовательно, $\{b_j, b_k\} \neq \{0, 1\}$. Если бы в (3) было $b_k \in \{0, 1\}$, то $b_i \neq 0, 1$ и, переставляя столбцы $\begin{pmatrix} b_i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_k \\ i \end{pmatrix}$, мы пришли бы к соотношению (4).

Заметим еще, что из

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k-1 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & k-1 \end{pmatrix} \in R_k^{01}$$

вытекает

$$\Phi \alpha = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{k-1} & b_k \\ 0 & 2 & \dots & b_{k-1} & j \end{pmatrix} \in G.$$

Покажем теперь, что любая подстановка ξ вида (2) при подходящем x содержится в G . Действительно, если $a_k = 0$, $a_i = 1$ или $a_k = 0$, $a_i = 0$, то $\xi \in R_k^{01}$ при $x = d_i$. Аналогично, если

$$\{0, 1\} \subseteq \{d_1, \dots, d_{k-1}\}$$

или $d_i = d_j$ ($i \neq j$), то снова $\xi \in R_k^{01}$ (при $x = d_i$ во втором случае). Поэтому можно предполагать, что в формуле (2)

$$\{0, 1\} \subseteq \{a_1, \dots, a_{k-1}\},$$

числа $d_1, \dots, d_{k-1}$ попарно различны и либо $0 \notin \{d_1, \dots, d_{k-1}\}$, либо $1 \notin \{d_1, \dots, d_{k-1}\}$. Рассмотрим первый случай. Перепишем ξ в виде

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & \dots & k-1 & x \end{pmatrix}.$$

Из (4) следует, что

$$\beta = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ b_1 & \dots & b_{k-1} & b_1 \end{pmatrix} \in R_k^{01}$$

и потому в качестве ξ можно взять подстановку

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & \dots & k-1 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

В случае $1 \in \{d_1, \dots, d_{k-1}\}$ рассуждаем аналогично, заменяя подстановку α определенной выше подстановкой $\Phi\alpha$.

2. Существенные тройки значений. Пусть f — m -местная функция. Условимся вместо

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, b_{i+1}, \dots, b_m)$$

писать $f(a, x_i, b)$, где $a = (a_1, \dots, a_{i-1})$, $b = (b_{i+1}, \dots, b_m)$. Совокупность u, v, w трех различных чисел будем называть **существенной**

тройкой значений функции f , если для подходящих $i, a, b, \alpha, \beta, c, d$

$$f(a, a, b) = u, \quad f(a, b, b) = v, \quad f(c, a, d) = w.$$

Л е м м а (С. В. Яблонский [2], А. Саломаа [4]). Каждая существенно многоместная функция f , принимающая более двух значений, обладает по меньшей мере одной существенной тройкой значений. Каждая функция, обладающая существенной тройкой значений, существенно многоместна и любое ее значение входит в подходящую существенную тройку значений.

Первое утверждение есть модификация так называемой леммы Яблонского, а второе принадлежит Саломаа. Мы укажем здесь краткое доказательство этих утверждений.

Пусть f — существенно многоместная функция, принимающая более двух значений, и v_1 — какое-то значение f . Для краткости предположим, что f существенно зависит от первого (и какого-то другого) аргумента. Покажем сначала, что или найдутся такие $v_2 \neq v_1, x, y, \xi, \eta, i, j$, что

$$f(x, \xi) = v_i, \quad f(y, \xi) = v_j, \quad f(x, \eta) \neq v_i \quad (\{i, j\} = \{1, 2\}), \quad (1)$$

или v_1 входит в некоторую существенную тройку значений f .

По условию для некоторых a, α $f(a, \alpha) = v_1$. Далее могут быть лишь случаи А, В, каждый из которых мы разобьем на 2 подслучая.

С л у ч а й А. Существует такое b , что $f(b, \alpha) \neq v_1$.

П о д с л у ч а й 1. Существует такое β , что $f(a, \beta) \neq v_1$. Тогда, полагая $v_2 = f(b, \alpha)$, видим, что

$$f(a, \alpha) = v_1, \quad f(b, \alpha) = v_2, \quad f(a, \beta) \neq v_1,$$

и утверждение (1) истинно.

П о д с л у ч а й 2. Для любого ξ $f(a, \xi) = v_1$. Так как f существенно многоместна, то для подходящих b, β, c имеем $f(b, \beta) \neq f(b, c)$. Пусть $f(b, \beta) \neq v_1$. Тогда, полагая $v_2 = f(b, \beta)$, имеем

$$f(b, \beta) = v_2, \quad f(a, \beta) = v_1, \quad f(b, c) \neq v_2$$

и утверждение (1) снова истинно.

С л у ч а й В. Для любого x $f(x, \alpha) = v_1$. Так как 1-й аргумент существенный, то для подходящих b, c, m имеем

$$f(b, m) \neq f(c, m)$$

и мы можем положить, что $v_2 = f(b, m) \neq v_1$.

П о д с л у ч а й 1. $f(c, m) \neq v_1$. Тогда соотношения

$$f(b, m) = v_2, \quad f(c, m) = v_3, \quad f(b, \alpha) = v_1$$

показывают, что тройка (v_2, v_3, v_1) существенная.

П о д с л у ч а й 2. $f(c, m) = v_1$. Соотношения

$$f(b, m) = v_2, \quad f(c, m) = v_1, \quad f(b, \alpha) = v_1 \neq v_2$$

показывают, что утверждение (1) истинно.

Итак, пусть соотношения (1) истинны для каких-то v_2, x, y, ξ, η . Если для некоторого ξ имеем $f(x, \xi) \notin \{v_1, v_2\}$, то, полагая $v_3 = f(x, \xi)$, придем

к соотношениям

$$f(x, \mathfrak{x}) = v_i, \quad f(y, \mathfrak{x}) = v_j, \quad f(x, \mathfrak{z}) = v_3,$$

показывающим, что тройка (v_i, v_j, v_3) существенная.

Остается рассмотреть положение, при котором для любого $\mathfrak{z}$

$$f(x, \mathfrak{z}) \in \{v_1, v_2\}. \quad (2)$$

По условию для подходящих $d, \mathfrak{d}$ имеем $f(d, \mathfrak{d}) \notin \{v_1, v_2\}$. Ввиду (1) и (2) теперь возможны лишь случаи: а) $f(x, \mathfrak{d}) = v_i, f(x, \mathfrak{y}) = v_j$ и б) $f(x, \mathfrak{d}) = v_j, f(x, \mathfrak{y}) = v_j$. В случае а) имеем соотношения:

$$f(x, \mathfrak{d}) = v_i, \quad f(d, \mathfrak{d}) = v_3, \quad f(x, \mathfrak{y}) = v_j,$$

а в случае б) — соотношения

$$f(x, \mathfrak{d}) = v_j, \quad f(d, \mathfrak{d}) = v_3, \quad f(x, \mathfrak{x}) = v_i,$$

из которых видно, что тройка (v_i, v_3, v_j) и соответственно тройка (v_j, v_3, v_i) существенные для функции f .

3. Условия полноты. Перейдем к доказательству основного утверждения:

Т е о р е м а. Пусть некоторая подалгебра A алгебры P_k удовлетворяет одному из следующих трех условий:

1) A содержит некоторую p раз транзитивную подполугруппу G полугруппы $P_k^{1(p)}$, $p \geq 4$ и A содержит функцию f , принимающую любое значение из $p+1$ -элементного множества $V = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$, заключающего в себе хотя бы одну существенную тройку значений f ;

2) A содержит p раз транзитивную подполугруппу G полугруппы $P_k^{1(p)}$, $p = 3$ и A содержит функцию f , принимающую все значения из множества $V = \{v_0, \dots, v_p\}$, содержащего существенную тройку значений функции f ;

3) A содержит p раз транзитивную подполугруппу G из $P_k^{1(p)}$, $p = 2$ и A содержит существенно многоместную функцию f , принимающую только 3 значения, каждое из которых принадлежит множеству $V = \{v_0, v_1, v_2\}$.

Тогда подалгебра A содержит все функции из P_k , все значения которых содержатся в множестве V , а также все функции из P_k , принимающие не более p различных значений.

Согласно лемме 1 из п. 1 подполугруппа G содержит постоянные функции. Поэтому и алгебра A содержит все постоянные функции от любого числа переменных.

Для краткости будем предполагать, что f существенно зависит от первого аргумента и что тройка ее значений (v_0, v_1, v_2) является существенной. Условимся далее элементы $v_0, \dots, v_p$ обозначать числами $0, 1, \dots, p$. Существенность тройки значений $(0, 1, 2)$ означает, что для подходящих a_1, a, b_1, b

$$f(a_1, a) = 0, \quad f(b_1, a) = 1, \quad f(a_1, b) = 2. \quad (1)$$

По условию также при подходящих c_{i1}, c_i

$$f(c_{i1}, c_i) = i \quad (i = 3, \dots, p). \quad (2)$$

Перепишав соотношения (1), (2) в развернутом виде, получим

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, \dots, a_m) &= 0, \\ f(b_1, a_2, \dots, a_m) &= 1, \\ f(a_1, b_2, \dots, b_m) &= 2, \\ f(c_{31}, c_{32}, \dots, c_{3m}) &= 3, \\ . &\dots\dots\dots \\ f(c_{p1}, c_{p2}, \dots, c_{pm}) &= p. \end{aligned} \tag{3}$$

Хорошо известно, что если к функции $\neg$ присоединить любую функцию $h(x, y)$ из P_2 , которая в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ принимает трижды одно из значений 0, 1 и один раз другое, то получится система, порождающая всю алгебру P_2 . Поэтому для доказательства утверждения А) достаточно найти в G такую функцию φ , чтобы функция $\varphi(g(x, y))$ в указанных четырех точках принимала 3 раза одно и 1 раз другое из значений 0, 1. Ясно, что функцию φ придется подбирать с учетом значения $g(1, 1)$, отсутствующего в таблице (5), и значения p .

1-й случай: $p \geq 4$. Пусть $g(1, 1) \notin \{0, 1, 2\}$. Так как полугруппа G 4 раза транзитивна, то найдется такая функция $\varphi \in G$, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(g(1, 1)) = 1$, и функция $\varphi(g(x, y))$ будет удовлетворять указанным выше требованиям. Если $g(1, 1) \in \{0, 1, 2\}$, то в качестве φ берем ту функцию из G , для которой

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi(b) = \varphi(g(1, 1)) = 1.$$

где $\{a, b, g(1, 1)\} = \{0, 1, 2\}$.

2-й случай: $p = 3$. По условию G содержится в $P_k^{1(3)}$ и 3 раза транзитивна. Поэтому в G найдется подстановка φ ранга 3, для которой $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$. Так как φ принимает только 3 значения, то $\varphi(g(1, 1)) \in \{0, 1, 2\}$. Берем теперь функцию $\psi \in G$, для которой $\psi(a) = 0$, $\psi(b) = \psi(\varphi(g(1, 1))) = 1$, где $\{a, b, \varphi(g(1, 1))\} = \{0, 1, 2\}$. Тогда функция $\psi(\varphi(g(x, y)))$ будет удовлетворять указанным требованиям.

3-й случай: $p = 2$. По предположению в этом случае f , а значит, и g принимают точно три значения, и потому

$$g(1, 1) \in \{0, 1, 2\}.$$

Пусть a, b — различные числа из множества 0, 1, 2, отличные от $g(1, 1)$. По условию в G найдется подстановка φ ранга 2, для которой $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$. Тогда $\varphi(g(1, 1)) \in \{0, 1\}$ и при любом из этих значений функция $\varphi(g(x, y))$ удовлетворяет высказанному выше требованию. Утверждение А) доказано.

Обозначим через P_{ki} совокупность тех функций из P_k , значения которых принадлежат совокупности $\{0, 1, \dots, i-1\}$. Докажем теперь утверждение

$$\text{Б) } A \supseteq P_{k2}.$$

В самом деле, из $A^\lambda \supseteq P_2$ следует, что в A существует функция $l(x_0, \dots, x_{k-1})$, удовлетворяющая требованию

$$l(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = x_0 x_1 \dots x_{k-1} \quad (x_0, \dots, x_{k-1} = 0, 1).$$

С другой стороны, из леммы 1 (п. 1) вытекает, что полугруппа $G \cap P_k^{1(2)}$ 2 раза транзитивна и потому в ней должны существовать функции χ_{ij} ($i \neq j$; $i, j = 0, 1, \dots, k-1$), для которых

$$\chi_{ij}(i) = 1, \quad \chi_{ij}(j) = 0, \quad \chi_{ij}(x) \in \{0, 1\} \quad (x = 0, 1, \dots, k-1).$$

Полагая

$$\chi_i(x) = l(\chi_{i0}(x), \dots, \chi_{ik-1}(x)) \quad (i = 0, 1, \dots, k-1),$$

видим, что $\chi_i \in A$ и

$$\chi_i(i) = 1, \quad \chi_i(x) = 0 \quad (x \neq i; \quad x = 0, 1, \dots, k-1).$$

С л е д с т в и е 1. Если подалгебра A алгебры P_k при $k \geq 5$ содержит существенную функцию и какую-то $k - 1$ раз транзитивную подполугруппу полугруппы P_k^1 , то $A = P_k$.

Если подалгебра A алгебры P_k при $k = 3, 4$ содержит существенную функцию и какую-то $k - 1$ раз транзитивную подполугруппу полугруппы $P_k^{1(k-1)}$, то $A = P_k$.

Действительно, при $p = k - 1$ множество V содержит вообще все значения существенной функции f и среди них, согласно лемме Яблонского, должны находиться и существенные тройки значений.

С л е д с т в и е 2. Если подалгебра A алгебры P_k при $k \geq 6$ содержит существенную функцию и какую-то $k - 2$ раза транзитивную подполугруппу полугруппы P_k , то $A \supseteq P_k^{(k-2)}$. Если подалгебра A алгебры P_5 содержит существенную функцию и 3 раза транзитивную подполугруппу полугруппы $P_5^{1(3)}$, то A содержит $P_5^{(3)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев. Итеративные алгебры и многообразия Поста.— Алгебра и логика, 1966, 5, № 2, 5—24.
2. С. В. Яблонский. Функциональные построения в k -значной логике.— Труды Мат. ин-та АН СССР, 1958, 51, 5—142.
3. Е. Ю. Захарова. Критерий полноты систем функций из P_k .— Проблемы кибернетики, 1967, 18, 5—10.
4. A. Salomaa. On essential variables of functions, especially in the algebra of logic.— Ann. Acad. Sci. Fennicae, 1963, A1, N 339, 1—11.

ОБ УМНОЖЕНИИ КЛАССОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ *



Классом алгебраических систем сигнатуры Ω будет называться произвольная (возможно, и пустая) совокупность систем сигнатуры Ω , содержащая вместе с каждой своей системой и все ей изоморфные. Пусть $\mathfrak{M}$ — совокупность некоторых подклассов данного класса $\mathfrak{K}$ алгебраических систем. Совокупность $\mathfrak{M}$ является частично упорядоченным множеством (ч.у.м.) относительно обычного отношения включения. Во многих важных случаях ч.у.м. $\mathfrak{M}$ является полным и решеточным, и потому в этих случаях можно говорить о решетке $\mathfrak{M}$. Однако структура этой решетки оказывается, как правило, сложной и редко допускающей явное описание.

Если $\mathfrak{K}$ — класс всех групп и $\mathfrak{M}$ — совокупность всех его подмногообразий, то в $\mathfrak{M}$, помимо упомянутых решеточных операций, Х. Нейман ввела еще операцию умножения многообразий, относительно которой совокупность $\mathfrak{M}$ оказалась $(1-31)$ свободной полугруппой с нулем и единицей. Таким образом, хотя строение решетки $\mathfrak{M}$ остается пока неизвестным, строение полугруппы $\mathfrak{M}$ (кроме ее мощности) ** оказалось вполне выясненным.

По аналогии с умножением многообразий групп в настоящей заметке дается определение произведения любых двух подклассов $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ произвольного фиксированного класса систем $\mathfrak{K}$. Это произведение зависит от выбора основного класса $\mathfrak{K}$ и для случая, когда $\mathfrak{K}$ — многообразие всех групп и $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ — его подмногообразия, оно совпадает с произведением $\mathfrak{UV}$ в смысле Х. Неймана. В данной заметке изучаются лишь общие свойства произведений классов систем. Краткое сообщение об основных результатах было сделано автором в докладе на Московском международном конгрессе математиков (1966).

1. Основное определение. Пусть A — алгебраическая система какого-то фиксированного класса $\mathfrak{K}$ и A/θ — произвольная фактор-система от A . Элементами A/θ являются смежные классы $a\theta$ ($a \in A$), каждый из которых мы будем рассматривать как подмодель модели A . Некоторые из этих подмоделей могут оказаться подсистемами A , принадлежащими классу $\mathfrak{K}$, но некоторые подмодели могут не быть подсистемами или, будучи подсистемами, не будут принадлежать классу $\mathfrak{K}$. Для любых подклассов $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ класса $\mathfrak{K}$ вводим понятие их $\mathfrak{K}$ -произведения $\mathfrak{U}_{\mathfrak{K}}\mathfrak{V}$, полагая по определению

$$A \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{K}}\mathfrak{V} \Leftrightarrow A \in \mathfrak{K} \ \& \ (\exists \theta) (A/\theta \in \mathfrak{V} \ \& \ (\forall a \in A) (a\theta \in \mathfrak{K} \rightarrow a\theta \in \mathfrak{U})). \quad (1)$$

* Сиб. мат. ж., 1967, 8, № 2, 346—365.

** А. Ю. Ольшевский доказал, что полугруппа многообразий групп имеет мощность континуума (см. А. Ю. Ольшевский. О проблеме конечного базиса тождеств в группах. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1970, 34, № 2, 376—384). См. также С. И. Адян. Бесконечные непроектируемые системы групповых тождеств. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1970, 34, № 4, 715—734; М. R. Vaughan-Lee. Uncountably many varieties of groups. — Bull. London Math. Soc., 1970, 2, N 6, 280—286. — Прим. ред.

Например, если для некоторых классов $\mathfrak{K}, \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{K}$ на какой-то $\mathfrak{K}$ -системе A существует фактор-система A/θ , принадлежащая $\mathfrak{B}$, ни один смежный класс которой не является $\mathfrak{K}$ -системой, то согласно (1) для любого подкласса $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{K}$ имеем $A \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B}$.

Отметим несколько следствий основного определения (1).

Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольный класс систем, Ω — его сигнатура, $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1$ — какие-нибудь подклассы класса $\mathfrak{K}$.

С л е д с т в и е 1. Операция $\mathfrak{K}$ -умножения подклассов согласована с отношением включения, т. е.

$$\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A} \text{ \& } \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}_1 \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{A} \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B}. \quad (2)$$

Доказательство очевидно.

Напомним, что подкласс $\mathfrak{L}$ класса систем $\mathfrak{K}$ называется наследственным в $\mathfrak{K}$, если каждая $\mathfrak{K}$ -подсистема произвольной $\mathfrak{L}$ -системы является $\mathfrak{L}$ -системой. Класс $\mathfrak{K}$, наследственный в тотальном классе $\mathbf{K}\Omega$ всех систем данной сигнатуры Ω , называется абсолютно наследственным или просто наследственным.

Ясно, что отношение наследственности транзитивно: если $\mathfrak{A}$ — наследственный подкласс класса $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}$ — наследственный подкласс класса $\mathfrak{K}$, то $\mathfrak{A}$ наследственный в $\mathfrak{K}$. В частности, каждый наследственный подкласс абсолютно наследственного класса является абсолютно наследственным.

Отметим одно очевидное свойство абсолютно наследственных классов. Пусть $\mathfrak{K}$ — абсолютно наследственный класс, $A \in \mathfrak{K}$ и A/θ — какая-нибудь фактор-система от A . Тогда если какой-нибудь смежный класс $a\theta$ содержит некоторую $\mathfrak{K}$ -подсистему B системы A , то $a\theta \in \mathfrak{K}$.

В самом деле, пусть $b \in B$, $x_1, \dots, x_n \in a\theta$, $F^{(n)} \in \Omega$. Так как B — подсистема в A , то $F(b, \dots, b) \in B$ и, следовательно,

$$F(x_1, \dots, x_n) \theta = F(b, \dots, b) \theta = a\theta,$$

т. е. $a\theta$ есть подсистема в A . Из наследственности $\mathfrak{K}$ теперь заключаем, что $a\theta \in \mathfrak{K}$.

С л е д с т в и е 2. Если $\mathfrak{L}$ — наследственный подкласс класса систем $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{L}$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{L}$, то

$$\mathfrak{A} \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B} = (\mathfrak{A} \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B}) \cap \mathfrak{L}. \quad (3)$$

В самом деле, пусть $A \in \mathfrak{A} \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B}$ и A/θ — какая-то фактор-система, удовлетворяющая условиям (1). Тогда $A \in \mathfrak{K}$, $A/\theta \in \mathfrak{B}$ и для любого $a \in A$ ввиду наследственности $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{K}$ имеем

$$a\theta \in \mathfrak{K} \rightarrow a\theta \in \mathfrak{K} \text{ \& } a\theta \subseteq A \in \mathfrak{L} \rightarrow a\theta \in \mathfrak{L} \rightarrow a\theta \in \mathfrak{A},$$

т. е.

$$\mathfrak{A} \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B} \subseteq (\mathfrak{A} \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B}) \cap \mathfrak{L}.$$

Обратное включение

$$(\mathfrak{A} \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B}) \cap \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{A} \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B}$$

справедливо, очевидно, для произвольных (не обязательно наследственных) подклассов $\mathfrak{L}$ и потому для наследственных $\mathfrak{L}$ истинно равенство (3).

Через E_Ω или E далее будет обозначаться единичная система сигнатуры Ω , т. е. одноэлементная система, на которой все сигнатурные отношения истинны.

С л е д с т в и е 3. Для любого $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}$

$$\mathfrak{A} \circ_{\mathfrak{K}} E = \mathfrak{A}. \quad (4)$$

Для любого наследственного подкласса $\mathfrak{A}$ класса $\mathfrak{K}$

$$E \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{A}. \quad (5)$$

Для доказательства достаточно заметить, что каждая система A среди своих фактор-систем содержит A и E .

Пусть E_0 — совокупность всех одноэлементных $\mathfrak{K}$ -систем. Аналогично убеждаемся, что для любого $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{K}$

$$E_0 \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{B}. \quad (6)$$

В частности, из (2) и (4), (6) получаем

$$E \in \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}, \quad (7)$$

$$E_0 \subseteq \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{A} \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{B}. \quad (8)$$

Легко видеть, что в (6) знак включения в общем случае нельзя заменить знаком равенства. Пусть, например, $\mathfrak{K}$ — класс всех полугрупп, $\mathfrak{B}$ — класс всех коммутативных полугрупп, A — полугруппа пар (a, b) ($a, b = 1, 2, 3, \dots$), перемножаемых по формуле

$$(a, b)(c, d) = (a + c, a + bc + d),$$

и G — аддитивная полугруппа положительных чисел. При гомоморфизме $\theta: (a, b) \rightarrow a$ ни один из смежных классов A/θ не является полугруппой и в то же время $A/\theta \cong G \in \mathfrak{B}$. Следовательно, $A \in E \circ \mathfrak{B}$, $A \notin \mathfrak{B}$.

Пусть A — произвольная алгебраическая система и A/σ , A/θ — какие-либо ее фактор-системы. По определению $A/\sigma \leq A/\theta$, если отображение $a\theta \rightarrow a\sigma$ ($a \in A$) есть гомоморфизм A/θ на A/σ (ср. [5]). Тем самым совокупность всех фактор-систем данной системы обращается в частично упорядоченное множество. Фактор-система A/θ называется $\mathfrak{A}$ -репликой системы A , если A/θ является наибольшей среди всех фактор-систем от A , содержащихся в классе $\mathfrak{A}$.

С л е д с т в и е 4. Если $\mathfrak{K}$ -система A имеет $\mathfrak{B}$ -реплику A/ρ и $\mathfrak{A}$ — наследственный подкласс абсолютно наследственного класса $\mathfrak{K}$, то $A \in \mathfrak{A} \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $a\rho \in \mathfrak{K} \Rightarrow a\rho \in \mathfrak{A}$.

Надо лишь проверить, что

$$A \in \mathfrak{A} \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B} \Rightarrow a\rho \in \mathfrak{K} \rightarrow a\rho \in \mathfrak{A}.$$

Пусть A/θ — фактор-система, удовлетворяющая условию (1), и для некоторого $a \in A$ имеем $a\rho \in \mathfrak{K}$. Так как $a\rho \subseteq a\theta$ и $a\rho$ есть подсистема в A , то $a\theta$ — также подсистема в A . По условию класс $\mathfrak{K}$ вместе с системой A содержит и все ее подсистемы. Таким образом, $a\theta \in \mathfrak{K}$ и потому $a\theta \in \mathfrak{A}$. Но класс $\mathfrak{A}$ наследственный в $\mathfrak{K}$. Поэтому $a\rho \in \mathfrak{A}$, т. е. из $a\rho \in \mathfrak{K}$ вытекает $a\rho \in \mathfrak{A}$, что и требовалось.

Теорема 1. В наследственном классе $\mathfrak{K}$ произведение любых двух наследственных подклассов $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}$ есть наследственный подкласс.

Пусть $A \in \mathfrak{M} \circ \mathfrak{B}$, A/θ — фактор-система, удовлетворяющая требованиям (1), и $A_1 \subseteq A$, $A_1 \in \mathfrak{K}$. Обозначим через A_1/θ_1 соответствующую фактор-систему от A_1 , являющуюся подсистемой в A/θ .

Так как класс $\mathfrak{B}$ абсолютно наследственный и A_1/θ_1 есть подсистема $\mathfrak{B}$ -системы A/θ , то $A_1/\theta_1 \in \mathfrak{B}$. Пусть для некоторого $a_1 \in A_1$ смежный класс $a_1\theta_1$ есть $\mathfrak{K}$ -система. Так как $a_1\theta_1 \subseteq a_1\theta$, то $a_1\theta$ — подсистема системы A . Из наследственности $\mathfrak{K}$ вытекает, что $a_1\theta \in \mathfrak{K}$ и потому $a_1\theta \in \mathfrak{M}$. Поскольку класс $\mathfrak{M}$ наследственный и $a_1\theta_1$ есть подсистема $\mathfrak{M}$ -системы $a_1\theta$, то $a_1\theta_1 \in \mathfrak{M}$ и потому $A_1 \in \mathfrak{M} \circ \mathfrak{B}$. Таким образом,

$$A \in \mathfrak{M} \circ \mathfrak{B} \ \& \ A_1 \subseteq A \ \& \ A_1 \in \mathfrak{K} \Rightarrow A_1 \in \mathfrak{M} \circ \mathfrak{B}$$

и потому класс $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{B}$ наследственный.

Через $\mathfrak{F} = \langle I; F \rangle$ условимся обозначать фильтр над I , т. е. совокупность F некоторых подмножеств множества I , обладающую свойствами: а) $\emptyset \notin F$; б) $A \in F \ \& \ A \subseteq B \Rightarrow B \in F$; в) $A \in F \ \& \ B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$.

Если $\mathfrak{F}$ состоит только из одного множества I , то фильтр называется декартовым. Фильтр $\mathfrak{F}$ называется ультрафильтром, если для любого подмножества $A \subseteq I$ или $A \in \mathfrak{F}$, или дополнение A принадлежит $\mathfrak{F}$. Через $\prod_{i \in I} A_i/\mathfrak{F}$

будем обозначать $\mathfrak{F}$ -произведение (фильтрованное по $\mathfrak{F}$ произведение) серии $\{A_i; i \in I\}$ алгебраических систем A_i .

Класс $\mathfrak{K}$ систем называется $\mathfrak{F}$ -замкнутым, если $\mathfrak{F}$ -произведение любых $\mathfrak{K}$ -систем принадлежит $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{K}$ называется мультипликативно замкнутым, если каждое декартово произведение любых $\mathfrak{K}$ -систем принадлежит $\mathfrak{K}$. Класс $\mathfrak{K}$ называется ультразамкнутым, если любое ультрапроизведение $\mathfrak{K}$ -систем принадлежит $\mathfrak{K}$. Подкласс $\mathfrak{M}$ класса $\mathfrak{K}$ называется $\mathfrak{F}$ -замкнутым в $\mathfrak{K}$, если каждая $\mathfrak{K}$ -система, изоморфная $\mathfrak{F}$ -произведению $\mathfrak{M}$ -систем, принадлежит $\mathfrak{M}$. Аналогично определяются понятия мультипликативной замкнутости и ультразамкнутости $\mathfrak{M}$ в классе $\mathfrak{K}$.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}$ — подклассы наследственного класса алгебраических систем $\mathfrak{K}$, причем класс $\mathfrak{M}$ мультипликативно замкнут в $\mathfrak{K}$, а класс $\mathfrak{B}$ (абсолютно) мультипликативно замкнут. Тогда подкласс $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$ мультипликативно замкнут в $\mathfrak{K}$.

В частности, в наследственном мультипликативно замкнутом классе систем $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{K}$ -произведение любых двух мультипликативно замкнутых подклассов является мультипликативно замкнутым подклассом.

Пусть $A \in \mathfrak{K}$, $A = \Pi A_i$ ($i \in I$) и $A_i \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$. Для подходящих фактор-систем A_i/θ_i имеем

$$A_i/\theta_i \in \mathfrak{B}, \quad a_i\theta_i \in \mathfrak{K} \Rightarrow a_i\theta_i \in \mathfrak{M}. \quad (9)$$

Рассмотрим канонический гомоморфизм $A \rightarrow \Pi A_i/\theta_i$ и обозначим через A/θ соответствующую фактор-систему. Так как

$$A/\theta \cong \Pi A_i/\theta_i, \quad A_i/\theta_i \in \mathfrak{B}$$

и класс $\mathfrak{B}$ мультипликативно замкнут, то $A/\theta \in \mathfrak{B}$. Обозначая через a_i проекцию в A_i произвольного элемента $a \in A$, имеем

$$a\theta \cong \Pi a_i\theta_i, \quad (10)$$

где $a\theta$, $a_i\theta_i$ рассматриваются как подмодели (реляционные подструктуры) моделей A , A_i . Пусть $a\theta \in \mathfrak{K}$ и, следовательно, $a\theta$ — алгебраическая система. Тогда все ее проекции $a_i\theta_i$ также являются алгебраическими системами. Так как класс $\mathfrak{K}$ абсолютно наследственный и $a_i\theta_i$ — подсистема $\mathfrak{K}$ -системы A_i , то $a_i\theta_i \in \mathfrak{K}$ и потому в силу (9) $a_i\theta_i \in \mathfrak{M}$. Из разложения (10) и мультипликативной замкнутости $\mathfrak{M}$ в классе $\mathfrak{K}$ получаем $a\theta \in \mathfrak{M}$, т. е. $A \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}$ — подклассы наследственного класса алгебраических систем $\mathfrak{K}$, сигнатура которого содержит лишь конечное число функциональных символов, $\mathfrak{F} = \langle I, F \rangle$ — произвольный ультрафильтр. Тогда, если $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{F}$ -замкнут внутри $\mathfrak{K}$ и $E \in \mathfrak{M}$, а класс $\mathfrak{B}$ (абсолютно) $\mathfrak{F}$ -замкнут, то подкласс $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$ $\mathfrak{F}$ -замкнут внутри $\mathfrak{K}$.

Пусть $A \in \mathfrak{K}$, $A = \Pi A_i / \mathfrak{F}$, $A_i \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$, а A_i / θ_i — фактор-системы, удовлетворяющие условиям (9). Как и выше, рассматриваем канонический гомоморфизм $A \rightarrow \Pi (A_i / \theta_i) / \mathfrak{F}$ и обозначаем через A / θ соответствующую фактор-систему. Обозначая через a_i декартову проекцию $a \in A$ в сомножителе A_i , будем иметь

$$a\theta \simeq \Pi (a_i\theta_i) / \mathfrak{F}.$$

Так как сигнатура Ω содержит лишь конечное число функциональных знаков, то условие, что модель $a\theta$ является алгебраической системой сигнатуры Ω , можно записать в виде закрытой формулы $\mathcal{A}$ исчисления 1-й степени. Условие, что формула $\mathcal{A}$ истинна в модели M , будем записывать в виде $M \models \mathcal{A}$. Так как $\mathfrak{F}$ — ультрафильтр, то

$$a\theta \models \mathcal{A} \Leftrightarrow \{i : a_i\theta_i \models \mathcal{A}\} \in \mathfrak{F}.$$

Пусть $I_0 = \{i : a_i\theta_i \models \mathcal{A}\}$ и $\mathfrak{F}_0 = \{U \cap I_0 : U \in \mathfrak{F}\}$. Тогда

$$\prod_{i \in I} (a_i\theta_i) / \mathfrak{F} \simeq \prod_{j \in I_0} (a_j\theta_j) / \mathfrak{F}_0.$$

Полагая

$$B_j = a_j\theta_j \quad (j \in I_0), \quad B_i = E \quad (i \in I \setminus I_0),$$

будем иметь

$$a\theta \simeq \left[\prod_{j \in I_0} (a_j\theta_j) / \mathfrak{F}_0 \right] \simeq \prod_{i \in I} B_i / \mathfrak{F}. \quad (11)$$

Каждый сомножитель $B_j = a_j\theta_j$ есть подсистема $\mathfrak{K}$ -системы A_j и потому $B_j \in \mathfrak{K}$. Из (9) получаем $B_j \in \mathfrak{M}$. Подкласс $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{F}$ -замкнут в $\mathfrak{K}$ и потому в силу (11) имеем $a\theta \in \mathfrak{M}$. Таким образом, $a\theta \in \mathfrak{K} \rightarrow a\theta \in \mathfrak{M}$, что и требовалось.

В изложенном рассуждении условие $E \in \mathfrak{M}$ было нужно, чтобы воспользоваться импликацией

$$\left[\prod_{j \in I_0} (a_j\theta_j) / \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{K} \right] \Rightarrow \prod_{j \in I_0} (a_j\theta_j) / \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{M}.$$

Но фильтр $\mathfrak{F}_0$ является ультрафильтром и потому импликация будет заведомо истинной, если класс $\mathfrak{M}$ ультразамкнут. Следовательно, если подкласс $\mathfrak{M}$ ультразамкнут в наследственном классе $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{B}$ — его абсолютно ультра-

замкнутый подкласс и сигнатура $\mathfrak{K}$ содержит конечное число функциональных символов, то класс $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$ ультразамкнут в $\mathfrak{K}$.

Класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем называется реплично полным, если он наследственный, мультипликативно замкнутый и содержит единичную систему. Из теорем 1—3 непосредственно получаем

С л е д с т в и е. Если класс $\mathfrak{K}$ реплично полный, то $\mathfrak{K}$ -произведение любых его реплично полных подклассов реплично полно. Если сигнатура наследственного ультразамкнутого класса $\mathfrak{K}$ содержит лишь конечное число функциональных символов, то $\mathfrak{K}$ -произведение любых ультразамкнутых подклассов класса $\mathfrak{K}$ ультразамкнуто.

Заметим, что это следствие не позволяет еще говорить о группоиде всех реплично полных подклассов какого-либо фиксированного реплично полного класса, так как реплично полный класс может не быть множеством, имеющим определенную мощность (за исключением тривиальных случаев). Однако этот недостаток легко устранить, рассматривая не «все подклассы» класса $\mathfrak{K}$, а лишь подклассы, подчиняющиеся подходящим более сильным условиям, например, типа аксиоматизируемости или мощностных ограничений.

2. Произведения аксиоматизируемых классов. Пусть Γ — какой-нибудь класс закрытых формул узкого исчисления предикатов (исчисления 1-й степени с равенством и функторами; УИП). В частности, Γ может быть классом $\mathcal{I}$ всех тождеств, классом $\mathcal{Q}$ всех квазитожеств, классом $\mathcal{V}$ всех общностных формул (см. [5]). Если $\mathcal{M}$ — какое-то множество формул вида Γ , имеющих заданную сигнатуру Ω , то через $K_{\Omega}\mathcal{M} = \mathbf{K}\mathcal{M}$ обозначаем класс тех систем сигнатуры Ω , в которых истинны все формулы из $\mathcal{M}$. Обратно, если задан некоторый класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем сигнатуры Ω , то через $\Gamma\mathfrak{K}$ обозначаем множество формул вида Γ , имеющих сигнатуру Ω и истинных на каждой системе из $\mathfrak{K}$. Множество $\Gamma\mathfrak{K}$ называется Γ -теорией класса $\mathfrak{K}$. Совокупность всех замкнутых формул УИП будем обозначать через $\mathcal{E}$.

Подкласс $\mathfrak{L}$ класса $\mathfrak{K}$ называется Γ -подклассом в $\mathfrak{K}$, если $\mathfrak{L} = \mathfrak{K} \cap \Gamma\mathfrak{K}$.

Класс $\mathfrak{K}$ называется (абсолютным) Γ -классом (или Γ -аксиоматизируемым), если $\mathfrak{K} = \Gamma\mathfrak{K}$. $\mathcal{E}$ -аксиоматизируемые классы (подклассы) называются просто аксиоматизируемыми. $\mathcal{I}$ -классы называются м н о г о о б р а з и я м и, $\mathcal{Q}$ - и $\mathcal{V}$ -классы называются соответственно к в а з и м н о г о о б р а з и я м и и о б щ н о с т н ы м и к л а с с а м и (универсальными классами или универсалами).

Для любого вида Γ пересечение любого семейства Γ -подклассов данного класса $\mathfrak{K}$ является Γ -подклассом в $\mathfrak{K}$. Поэтому множество всех Γ -подклассов любого класса алгебраических систем $\mathfrak{K}$ можно рассматривать как полную решетку относительно обычного отношения включения классов. Эту решетку будем обозначать через $L_{\Gamma}\mathfrak{K}$. Так как $\mathfrak{K}$ -произведение двух Γ -подклассов не обязательно будет Γ -подклассом, то множество всех Γ -подклассов класса $\mathfrak{K}$ относительно операции $\mathfrak{K}$ -умножения будет частичным группоидом и лишь для специальных $\mathfrak{K}$, Γ оно будет обычным группоидом с всюду определенной операцией умножения. Этот группоид обозначим через $G_{\Gamma}\mathfrak{K}$.

Покажем, что совокупность всех подмногообразий заданного многообразия может не быть (тотальным) группоидом. Пусть $\mathfrak{K}$ — многообразие всех полугрупп с (сигнатурной) единицей e и $\mathfrak{A}$ — подмногообразие всех коммутативных полугрупп в $\mathfrak{K}$. Ясно, что $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}\mathfrak{A}$. Например, пусть A_5 —

мультипликативная полугруппа всех четных перестановок чисел $1, \dots, 5$, т. е. полугруппа знакопеременной группы 5-й степени. Факторами A_5 являются лишь A_5 и E . Но $A_5 \notin \mathfrak{A}$, поэтому $A_5 \notin \mathfrak{A} \circ \mathfrak{A}$.

С другой стороны, пусть F — свободная в $\mathfrak{K}$ полугруппа со свободными порождающими a, b . Фактор-полугруппа F/σ по конгруэнции σ , определенной соотношением

$$a^{m_1} b^{n_1} \dots a^{m_k} b^{n_k} \sigma a^{p_1} b^{q_1} \dots a^{p_l} b^{q_l} \Leftrightarrow m_1 + \dots + m_k = p_1 + \dots + p_l,$$

является абелевой полугруппой с одним порождающим $a\sigma$, а потому $F/\sigma \in \mathfrak{A}$. Так как единица e является сигнатурным элементом в $\mathfrak{K}$, то лишь те смежные классы $x\sigma$ принадлежат $\mathfrak{K}$, которые содержат e . Но таких классов лишь один: $e\sigma = \{e, b, b^2, \dots\}$, и он является коммутативной полугруппой. Поэтому $F \in \mathfrak{A} \circ \mathfrak{A}$.

Если бы класс $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A}$ был подмногообразием, то все фактор-полугруппы от F принадлежали бы $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A}$. Однако рассмотренная выше полугруппа A_5 имеет порождающую систему из двух элементов; поэтому A_5 изоморфна фактор-полугруппе от F и тем не менее не принадлежит $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A}$.

Нижеследующие теоремы показывают, что в отличие от многообразий квазимногообразия и общностные классы ведут себя более регулярно.

Т е о р е м а 4. Пусть $\mathfrak{K}$ — общностный класс, сигнатура которого содержит лишь конечное число функторов. Тогда $\mathfrak{K}$ -произведение любых двух общностных подклассов $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ класса $\mathfrak{K}$ будет общностным подклассом, т. е. частичный группоид $G_{\mathfrak{K}}\mathfrak{K}$ будет просто группоидом.

Действительно, поскольку классы $\mathfrak{K}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ общностные, то они наследственные и ультразамкнутые. Тогда класс $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$ согласно теореме 1 будет наследственным и согласно теореме 3 будет ультразамкнутым. Из наследственности и ультразамкнутости произвольного класса вытекает, что этот класс общностный (ср. [5]).

Т е о р е м а 5. Для каждого квазимногообразия $\mathfrak{K}$, сигнатура которого содержит лишь конечное число функциональных символов, частичный группоид $G_{\mathfrak{K}}\mathfrak{K}$ подквазимногообразий $\mathfrak{K}$ является группоидом.

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — подквазимногообразия в $\mathfrak{K}$. Согласно предыдущей теореме класс $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$ общностный, а согласно теореме 2 класс $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$ мультипликативно замкнут и содержит единичную систему. Все общностные, мультипликативно замкнутые классы, содержащие единичную систему, являются квазимногообразиями (ср. [5]), и потому $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$ — квазимногообразие.

Приведенные доказательства теорем 4, 5 основываются на свойствах ультрафильтров. Однако эти теоремы легко доказать, не пользуясь ультрафильтрами. Пусть $\mathfrak{K}$ — какой-нибудь класс алгебраических систем сигнатуры Ω и $\Omega_1 \subseteq \Omega$. Рассматривая системы класса $\mathfrak{K}$ как системы сигнатуры Ω_1 , получим класс $\mathfrak{K}_{\Omega_1}$ систем сигнатуры Ω_1 , называющийся Ω_1 -проекцией (или Ω_1 -редукцией) класса $\mathfrak{K}$. Проекции аксиоматизируемых классов называются проективными классами.

Т е о р е м а 6. Если $\mathfrak{K}$ — конечно аксиоматизируемый класс моделей, то $\mathfrak{K}$ -произведение любых аксиоматизируемых подклассов $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ класса $\mathfrak{K}$ является проективным классом моделей.

По условию сигнатура Ω рассматриваемых классов моделей состоит лишь из предикатных символов P_{α} надлежащих арностей n_{α} . Каждому символу P_{α} ставим в соответствие новый предикатный символ P_{α}^* той же арности, что и символ P_{α} , и совокупность всех этих новых символов обозначаем через

Ω^* . Вводим еще дополнительный бинарный предикатный символ θ и обозначаем через $\mathcal{A}_h$ совокупность следующих аксиом:

$$\begin{aligned} & x\theta x \ \& \ (x\theta y \rightarrow y\theta x) \ \& \ (x\theta y \ \& \ y\theta z \rightarrow x\theta z), \ P_\alpha(x_1, \dots, x_{n_\alpha}) \rightarrow P_\alpha^*(x_1, \dots, x_{n_\alpha}), \\ & P_\alpha^*(x_1, \dots, x_{n_\alpha}) \ \& \ x_1\theta y_1 \ \& \ \dots \ \& \ x_{n_\alpha}\theta y_{n_\alpha} \rightarrow P^*(y_1, \dots, y_{n_\alpha}). \end{aligned}$$

Аксиомы $\mathcal{A}_h$ выражают, что если $A = \langle A; \Omega, \Omega^*, \theta \rangle$ — какая-нибудь модель, удовлетворяющая системе $\mathcal{A}_h$, то Ω^* -проекция A является θ -фактор-системой от Ω -проекции A .

Согласно предположению класс $\mathfrak{K}$ характеризуется какой-то одной аксиомой $\mathcal{A}$, а классы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ характеризуются какими-то, вообще говоря, бесконечными системами аксиом $\mathcal{A}_{\mathfrak{A}}$ и $\mathcal{A}_{\mathfrak{B}}$. Обозначим через $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{A}_{\mathfrak{B}}^*$ совокупности аксиом, получающихся из аксиом $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_{\mathfrak{B}}$ заменой в них символов P_α соответственно символами P_α^* и θ . Обозначим через $\mathcal{A}_x$ релятивизацию (ограничение) аксиомы $\mathcal{A}$ на множество $\{y: y\theta x\}$ и рассмотрим объединение Γ аксиом $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$, совокупностей $\mathcal{A}_h$, $\mathcal{A}_{\mathfrak{B}}$ и всех аксиом

$$(\forall x)(\mathcal{A}_x \rightarrow \mathcal{C}_x) \ (\mathcal{C} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{A}}).$$

Из смысла всех этих аксиом вытекает, что произвольная модель $A = \langle A; \Omega, \Omega^*, \theta \rangle$ тогда и только тогда удовлетворяет системе Γ , когда Ω -проекция A принадлежит классу $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}\mathfrak{B}$. Таким образом, этот класс есть проекция аксиоматизируемого класса $\mathbf{K}\Gamma$ и теорема 6 доказана.

С л е д с т в и е. Пусть $\mathfrak{K}$ — общностиный класс алгебраических систем, сигнатура которого Ω содержит лишь конечное число функторов. Тогда $\mathfrak{K}$ -произведение любых аксиоматизируемых подклассов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ класса $\mathfrak{K}$ является проективным классом систем.

Рассмотрим тотальный класс $\mathbf{K}\Omega$ всех алгебраических систем сигнатуры Ω . Согласно формуле (1)

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B} = (\mathfrak{A}_{\mathbf{K}\Omega} \mathfrak{B}) \cap \mathfrak{K}.$$

Пересечение аксиоматизируемого класса и проективного класса есть проективный класс. Поэтому достаточно обнаружить лишь проективность класса $\mathfrak{A}_{\mathbf{K}\Omega}\mathfrak{B}$. Каждую алгебраическую систему заданной сигнатуры Ω можно рассматривать как модель, удовлетворяющую аксиомам

$$\exists y P_\alpha(x_1, \dots, x_{n_\alpha-1}, y), P_\alpha(x_1, \dots, y) \ \& \ P_\alpha(x_1, \dots, z) \rightarrow y = z, \quad (12)$$

утверждающим, что предикат P_α отвечает функтору из Ω . Так как множество функторов в Ω конечно, то и отвечающие им аксиомы (12) образуют лишь конечное множество, т. е. класс $\mathbf{K}\Omega$, рассматриваемый как класс моделей, является конечно аксиоматизируемым. Применяя теорему 6, получаем, что класс $\mathfrak{A}_{\mathbf{K}\Omega}\mathfrak{B}$ является проективным, что и требовалось.

Из следствия 4 (п. 1) в свою очередь непосредственно выводится теорема 4, а вместе с ней и теорема 5. В самом деле, согласно этому следствию из условий теоремы 4 вытекает, что класс $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$ проективный. Согласно теореме 1 (п. 1) класс $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$ наследственный. В то же время известно, что наследственные проективные классы систем являются общностиными.

Покажем, что в теореме 6 утверждение проективности, вообще говоря, нельзя заменить утверждением аксиоматизируемости. Рассмотрим класс $\mathfrak{K}$ алгебр, сигнатура которого состоит из двух унарных функторов f, g и

который определяется тождествами

$$fgx = gfx = x. \quad (13)$$

Пусть a — произвольный элемент какой-нибудь $\mathfrak{A}$ -алгебры A . Вводя обозначения $a^{(0)} = a$ и

$$a^{(n)} = f^n x = f \dots f x, \quad a^{(-n)} = g^n x \quad (n = 1, 2, \dots),$$

будем в силу аксиом (13) иметь

$$x^{(i)} = y^{(j)} \Leftrightarrow x = y^{(j-i)} \quad (i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Назовем элементы $a, b \in A$ принадлежащими к одному «циклу», если $a = b^{(i)}$ для некоторого i . Ясно, что алгебра A распадается на непересекающиеся циклы, каждый из которых является подалгеброй алгебры A .

Обозначим через $\mathfrak{A}$ класс $\mathfrak{A}$ -алгебр, удовлетворяющих аксиомам

$$(\exists x)(x^{(1)} = x), \quad (14)$$

$$(\exists x)(x^{(1)} \neq x), \quad (15)$$

$$x^{(1)} = x \& y^{(1)} = y \rightarrow x = y, \quad (16)$$

$$x^{(i)} = x \rightarrow x^{(1)} = x \quad (i = 2, 3, \dots), \quad (17)$$

т. е. распадающихся на один одноэлементный цикл и некоторое непустое множество бесконечных циклов.

Легко видеть, что произвольные $\mathfrak{A}$ -алгебры A, B тогда и только тогда изоморфны, когда для каждого $n = 1, 2, \dots$, ω мощность множества n -элементных циклов у алгебр A, B одна и та же, и, следовательно, любые две $\mathfrak{A}$ -алгебры, имеющие равные несчетные мощности, изоморфны. Так как, сверх этого, все $\mathfrak{A}$ -алгебры бесконечны, то по признаку Вюота $\mathfrak{A}$ является минимальным аксиоматизируемым классом. В частности, если окажется, что

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}, \quad (18)$$

то класс $\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$ будет заведомо неаксиоматизируемым.

Докажем (18). Пусть $A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$ и θ — та конгруэнция, для которой

$$A/\theta \in \mathfrak{A}, \quad a\theta \in \mathfrak{A} \Rightarrow a\theta \in \mathfrak{A}. \quad (19)$$

Согласно (14) в A/θ существует одноэлементный цикл $x\theta = (x\theta)^{(1)} = x^{(1)}\theta$. Это показывает, что смежный класс $x\theta$ является подалгеброй в A и потому в силу (19) $x\theta \in \mathfrak{A}$. Следовательно, в $x\theta$, а потому и в A существует одноэлементный цикл $e = e^{(1)}$. Если бы в A существовал еще какой-то конечноэлементный цикл $\{a, a^{(1)}, \dots, a^{(m)}\}$, то совокупность $a\theta, a^{(1)}\theta, \dots, a^{(m)}\theta$ была бы конечной подалгеброй в A/θ . Из $A/\theta \in \mathfrak{A}$ следует, что в A/θ есть лишь одна конечноэлементная подалгебра $e\theta$ и потому $\{a, a^{(1)}, \dots, a^{(m)}\} \subseteq e\theta \in \mathfrak{A}$, откуда $a = e$. Итак, алгебра A содержит лишь один конечный цикл, а именно e . С другой стороны, из $A/\theta \in \mathfrak{A}$ следует, что алгебра A бесконечна. Поэтому $A \in \mathfrak{A}$, и первое из условий (18) доказано.

Рассмотрим теперь алгебру C , распадающуюся на одноэлементный цикл e и бесконечный цикл $\{\dots, a^{(-1)}, a, a^{(1)}, \dots\}$. Пусть θ — произвольная конгруэнция, для которой $C/\theta \in \mathfrak{A}$. Если для некоторых i, j ($i \neq j$) окажется $a^{(i)}\theta a^{(j)}$ или $a^{(i)}\theta e$, то алгебра C будет конечной в противоречии с ус-

ловием $C/\theta \in \mathfrak{A}$. Поэтому конгруэнция θ является равенством и $e = e\theta \in \mathfrak{R}$, $e\theta \notin \mathfrak{A}$, откуда $C \notin \mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}\mathfrak{A}$.

Итак, оба условия (18) выполнены и класс $\mathfrak{A}$ может служить примером аксиоматизируемого подкласса конечно аксиоматизируемого многообразия $\mathfrak{R}$, для которого класс $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}\mathfrak{A}$ неаксиоматизируем.

Покажем еще, что $\mathfrak{R}$ -произведение конечно аксиоматизируемых подмногообразий из $\mathfrak{R}$, являясь по теореме 5 квазимногообразием, может не быть конечно аксиоматизируемым. Обозначим через $\mathfrak{A}$ многообразие $\mathfrak{R}$ -алгебр, удовлетворяющих тождеству $x^{(2)} = x$, и рассмотрим произведение $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2$. Пусть $A \in \mathfrak{A}^2$ и θ — конгруэнция на A , удовлетворяющая условиям (19). Предположим, что для некоторых $a \in A$, $m > 0$ имеет место равенство $a^{(2m+1)} = a$.

Так как $a\theta^{(2)} = a\theta$, то

$$a^{(2)}\theta a, \quad a^{(2m)}\theta a, \quad a = a^{(2m)(1)}\theta a^{(1)}, \quad a\theta \in \mathfrak{R}.$$

Отсюда ввиду (19) получаем

$$a^{(2)} = a, \quad a^{(2m)} = a, \quad a = a^{(1)},$$

т. е. в классе $\mathfrak{A}^2$ истинны квазитожества

$$x^{(2m+1)} = x \rightarrow x^{(1)} = x. \quad (20)$$

Обратно, допустим, что на какой-то $\mathfrak{R}$ -алгебре A истинны все квазитожества (20) и, следовательно, алгебра A распадается на некоторые (возможно, и пустые) множества одноэлементных циклов $\{a_\alpha\}$, циклов $\{b_\beta, b_\beta^{(1)}, \dots, b_\beta^{(2m_\beta-1)}\}$ четного порядка и бесконечных циклов $\{c_\gamma, c_\gamma^{(1)}, c_\gamma^{(2)}, \dots\}$. Вводим на A бинарное отношение θ , полагая по определению

$$b_\beta^{(1)}\theta b_\beta^{(i+2m)}, \quad c_\gamma^{(i)}\theta c_\gamma^{(i+2m)} \quad (i, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Ясно, что θ — конгруэнция на A и $A/\theta \in \mathfrak{R}$. Так как для любого $x \in A$ имеем

$$x\theta \in \mathfrak{R} \Rightarrow x\theta x^{(1)} \Rightarrow (\exists \alpha)(x = a_\alpha) \Rightarrow x^{(2)} = x,$$

то $A \in \mathfrak{A}^2$.

Итак, класс $\mathfrak{A}$ характеризуется в $\mathfrak{R}$ бесконечной системой квазитожеств (20). Эта система не эквивалентна никакой своей конечной части, так как для любого $n > 0$ $\mathfrak{R}$ -алгебра, состоящая из одного цикла длины $2n + 1$, удовлетворяет квазитожествам (20), у которых $m < n$, и не удовлетворяет квазитожеству (20) при $m = n$.

3. Умножение в некоторых специальных классах систем. В связи с изучением свойств частичных группоидов $G_{\Gamma}\mathfrak{R}$ естественно возникает круг вопросов вида: для каких Γ и $\mathfrak{R}$ частичный группоид $G_{\Gamma}\mathfrak{R}$ обладает теми или иными заданными свойствами, например, является группоидом ассоциативным, коммутативным и т. п. Выше указаны простые условия, накладываемые на класс $\mathfrak{R}$, при выполнении которых $G_{\vee}\mathfrak{R}$ и $G_{\wedge}\mathfrak{R}$ являются группоидами. Теперь мы укажем сначала условия, при которых $G_{\mathcal{Z}}\mathfrak{R}$ является группоидом, а затем условия, при которых $G_{\Gamma}\mathfrak{R}$ ассоциативен.

Элемент a называется идемпотентом относительно операции $f(x_1, \dots, x_n)$ (f -идемпотентом), если $f(a, \dots, a) = a$. Элемент a алгебраической системы A называется идемпотентом этой системы, если он идемпотентен относительно каждой сигнатурной операции на A . В частности, если сигна-

тура содержит 0-арные операции, то идемпотент A должен совпадать со значениями этих операций.

Полярной операцией (опорной операцией) на системе A называется термальная унарная операция, все значения которой одинаковы и являются идемпотентом A . Значение полярной операции (поляры) системы A называется полярным (опорным) элементом A или полюсом A . Полярной класса $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{K}$ -полярной) называется унарный терм, представляющий в каждой $\mathfrak{K}$ -системе полярную операцию. Класс $\mathfrak{K}$ называется поляризованным, если он обладает хотя бы одной полярной. Ясно, что каждый полюс системы A образует ее одноэлементную подсистему и каждая подсистема системы A содержит все ее полюсы. Поэтому каждая система может иметь не более одного полюса. Если $t(x)$ — полярная класса $\mathfrak{K}$, то значение ее в каждой $\mathfrak{K}$ -системе A является некоторым идемпотентом p_A этой системы. Очевидно, отображение $A \rightarrow p_A$ обладает следующим свойством: для любого гомоморфизма φ $\mathfrak{K}$ -системы A в $\mathfrak{K}$ -систему B

$$\varphi(p_A) = p_B. \quad (21)$$

Покажем, что если класс $\mathfrak{K}$ содержит $\mathfrak{K}$ -свободную систему F ранга 1 и каждой $\mathfrak{K}$ -системе A можно поставить в соответствие некоторый ее идемпотент p_A так, что выполняется условие (21), то класс $\mathfrak{K}$ поляризованный.

В самом деле, пусть v — свободный порождающий элемент F . Тогда $p_F = t(v)$, где t — какой-то терм. Пусть $A \in \mathfrak{K}$, $a \in A$. По условию существует гомоморфизм $\varphi: F \rightarrow A$, $v^\varphi = a$. Из (21) следует, что $\varphi(p_F) = t(a)$ и потому p_A есть значение полярной t в системе A .

Сделаем еще одно очевидное замечание. Пусть система A имеет полюс p и θ — некоторая конгруэнция на A . Тогда из смежных классов A/θ класс $p\theta$ и только он один является подсистемой системы A . В частности, если $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ — подклассы поляризованного класса $\mathfrak{K}$, то $A \in \mathfrak{U}_\mathfrak{K} \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда для подходящей конгруэнции θ на A имеем $A/\theta \in \mathfrak{B}$, $p\theta \in \mathfrak{U}$, где p — полюс A .

Многообразия луп и групп поляризованные. Полюсами групп и луп являются их единичные элементы. Многообразие всех неассоциативных колец в сигнатуре $-, \cdot$ имеет поляр $x - x = 0$. Напротив, многообразия всех решеток и всех полугрупп поляр не имеют.

Теорема 7. Если $\mathfrak{K}$ — поляризованное многообразие алгебр и на всех $\mathfrak{K}$ -алгебрах конгруэнции перестановочны, то $\mathfrak{K}$ -произведение любых двух $\mathfrak{K}$ -подмногообразий $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ является многообразием.

Таким образом, в указанном случае частичный группоид $G_\mathfrak{K} \mathfrak{K}$ является просто группоидом с единицей E и нулем $\bar{E}$.

Действительно, согласно теоремам 1, 2 класс $\mathfrak{U}_\mathfrak{K} \mathfrak{B}$ наследственный и мультипликативно замкнутый. В силу теоремы Биркгофа, остается лишь доказать, что упомянутый класс содержит все фактор-алгебры любой своей алгебры A . Пусть θ — та конгруэнция на A , которая удовлетворяет требованиям

$$A/\theta \in \mathfrak{B}, \quad a\theta \in \mathfrak{K} \Rightarrow a\theta \in \mathfrak{U}.$$

Рассмотрим произвольную фактор-алгебру A/α . Из соотношений

$$A/\alpha/\alpha\theta \cong A/\theta/\alpha\theta \in \mathfrak{B}, \\ (p\alpha\theta)/\alpha \cong (p\theta)/\alpha \cap \theta \in \mathfrak{U}$$

и сделанного выше замечания непосредственно видим, что $A/\alpha \in \mathfrak{U} \circ \mathfrak{B}$.

Известно, что на всех группах, кольцах, лупах конгруэнции перестановочны и все эти алгебры поляризованные. Поэтому для любого многообразия групп, колец или луп $\mathfrak{K}$ частичный группоид $G_{\mathfrak{K}}$ является группоидом, но, как правило, неассоциативным. Чтобы сформулировать достаточные условия его ассоциативности, введем несколько определений.

Конгруэнция σ на какой-то алгебре A называется *вербальной* (к в а з и в е р б а л ь н о й), если существует такое многообразие (квази-многообразие) $\mathfrak{K}$, что σ является наименьшей среди конгруэнций на A , фактор-алгебры по которым принадлежат классу $\mathfrak{K}$.

Фактор-система A/θ и соответствующая конгруэнция θ называются *характеристическими* (вполне характеристическими), если для каждого автоморфизма (эндоморфизма) $\varphi: A \rightarrow A$ и каждого $P \in \{\Omega, =\}$

$$P(x_1\theta, \dots, x_n\theta) \Rightarrow P(x_1\varphi\theta, \dots, x_n\varphi\theta) \quad (x_1, \dots, x_n \in A)^*.$$

Фактор-система $A/\theta \in \mathfrak{K}$ и соответствующая конгруэнция θ называются *вербальными* (квазивербальными) в классе $\mathfrak{K}$, если существует такое многообразие (квазимногообразие) $\mathfrak{M}$, что A/θ есть $\mathfrak{M}$ -реплика системы A .

Пусть $\mathfrak{K}$ — фиксированный класс алгебраических систем, $A \in \mathfrak{K}$ и A/θ — какая-нибудь фактор-система, принадлежащая $\mathfrak{K}$. На каждом смежном классе $a_m\theta$, являющемся $\mathfrak{K}$ -системой, задаем какой-нибудь фактор $a_m\theta/\beta_m \in \mathfrak{K}$. Совокупность всех этих факторов $\{a_m\theta/\beta_m: m \in M\}$ назовем *частичным $\mathfrak{K}$ -подфактором* фактор-системы A/θ . Частичный подфактор назовем *характеристическим*, если он состоит из характеристических факторов. Частичный подфактор назовем *вербальным* (к в а з и в е р б а л ь н ы м), если все его факторы являются $\mathfrak{M}$ -репликами для подходящего многообразия (квазимногообразия) $\mathfrak{M}$.

Частичный подфактор $\{a_m\theta/\beta_m: m \in M\}$ называется *$\mathfrak{K}$ -продолжаемым*, если все его факторы совместно продолжаемы до подходящего фактора $A/\beta \in \mathfrak{K}$ ($\beta \supseteq \theta$), т. е. если

$$x\beta = x\beta_m \quad (x \in a_m\theta)$$

и каноническое отображение $x\beta \rightarrow x\beta_m$ ($x \in a_m\theta$) есть изоморфизм $a_m\theta/\beta$ на $a_m\theta/\beta_m$.

Система $A \in \mathfrak{K}$ называется в классе $\mathfrak{K}$ *трансхарактеристической* (вполне трансхарактеристической), если каждый ее характеристический (вполне характеристический) частичный $\mathfrak{K}$ -подфактор характеристического (вполне характеристического) $\mathfrak{K}$ -фактора $\mathfrak{K}$ -продолжаем.

Аналогично система $A \in \mathfrak{K}$ называется в классе $\mathfrak{K}$ *трансвербальной* (трансквазивербальной), если каждый ее вербальный (квазивербальный) частичный подфактор произвольного вербального (квазивербального) фактора $\mathfrak{K}$ -продолжаем.

Класс $\mathfrak{K}$ называется *трансвербальным* (трансквазивербальным, трансхарактеристическим), если каждая $\mathfrak{K}$ -система трансвербальна (трансквазивербальна, трансхарактеристична) в $\mathfrak{K}$.

Так как для любой фактор-системы A/θ вербальность $\Rightarrow$ квазивербальность $\Rightarrow$ характеристичность, то для любого класса $\mathfrak{K}$ и любой $A \in \mathfrak{K}$ трансхарактеристичность $\Rightarrow$ трансквазивербальность $\Rightarrow$ трансвербальность.

Подкласс $\mathfrak{L}$ называется *гомоморфно замкнутым* в классе $\mathfrak{K}$, если для любой фактор-системы A/θ системы A имеем $A \in \mathfrak{L} \ \& \ A/\theta \in \mathfrak{K} \rightarrow A/\theta \in \mathfrak{L}$.

* Достаточно требовать выполнимость условия $(x, y) \in \theta \Rightarrow (x\varphi, y\varphi) \in \theta$. — Прим. ред.

Из приведенных определений следует, что каждый гомоморфно замкнутый подкласс трансвербального класса является трансвербальным.

Пусть система A имеет полюс p , $\mathfrak{K}$ — некоторый класс систем, содержащий A . Подсистема C системы A называется $\mathfrak{K}$ -нормальной, если существует фактор-система A/γ , принадлежащая классу $\mathfrak{K}$, для которой $p\gamma = C$. Нормальные системы, отвечающие вербальным (квазивербальным, характеристическим) фактор-системам, называются вербальными (квазивербальными, характеристическими). Так как среди всех смежных классов A/γ только класс $p\gamma$ является подсистемой, то в наследственном классе $\mathfrak{K}$ поляризованная система A тогда и только тогда является трансвербальной (трансквазивербальной, трансхарактеристической), когда вербальная (квазивербальная, характеристическая) подсистема вербальной (квазивербальной, характеристической) подсистемы системы A является $\mathfrak{K}$ -нормальной в A .

Характеристическая подгруппа нормального делителя каждой группы является нормальным делителем группы. Поэтому многообразие групп трансхарактеристическое, а следовательно, и трансвербальное.

Ясно, что многообразие всех ассоциативных колец не является трансвербальным. Пусть, например, $\mathfrak{K}_6$ — многообразие всех ассоциативных колец, удовлетворяющих тождеству $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = 0$, и $\mathfrak{A}$ — многообразие коммутативных ассоциативных колец. Обозначим через A $\mathfrak{K}$ -свободное кольцо с порождающими a_1, a_2 . $\mathfrak{A}$ -вербальный идеал S в A состоит из целочисленных линейных комбинаций членов вида $a(a_1a_2 - a_2a_1)^f$, где a, f — одночлены. $\mathfrak{A}$ -вербальный идеал в кольце S состоит из элементов, допускающих запись вида

$$(m + n)\vartheta a_i\vartheta - ma_i\vartheta^2 - n\vartheta^2a_i \quad (i = 1, 2; \vartheta = a_1a_2 - a_2a_1; \\ m, n = 0, \pm 1),$$

которые не образуют идеала в A .

Т е о р е м а 8. В наследственном трансвербальном (трансквазивербальном) классе алгебраических систем $\mathfrak{K}$ для любого его наследственного подкласса $\mathfrak{A}$ и любых абсолютных подмногообразий (подквазимногообразий) $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ выполняется условие ассоциативности

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}.$$

Прежде всего легко заметить, что в любом наследственном классе систем $\mathfrak{K}$ для любых его подклассов $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ истинно включение

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}.$$

Действительно, пусть $A \in \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ и, следовательно, $A \in \mathfrak{K}$ и для подходящей фактор-системы A/θ имеем $A/\theta \in \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ и

$$a\theta \in \mathfrak{K} \Rightarrow a\theta \in \mathfrak{A}. \quad (22)$$

Условие $A/\theta \in \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ означает, что $A/\theta \in \mathfrak{K}$ и для некоторой фактор-системы $A/\theta/\sigma = A/\sigma$ имеем $A/\sigma \in \mathfrak{C}$ и

$$a\sigma/\theta \in \mathfrak{K} \Rightarrow a\sigma/\theta \in \mathfrak{B}. \quad (23)$$

Пусть $a\sigma \in \mathfrak{K}$. Надо показать, что отсюда следует $a\sigma \in \mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Так как $a\sigma$ — подсистема в A , то ее образ $a\sigma/\theta$ в системе A/θ является подсистемой системы A/θ . Поскольку $A/\theta \in \mathfrak{K}$ и класс $\mathfrak{K}$ наследственный, то $a\sigma/\theta \in \mathfrak{K}$. В силу (23) отсюда получаем $a\sigma/\theta \in \mathfrak{B}$, что в силу (22) дает $a\sigma \in \mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Доказательство обратного включения

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}$$

будет основано на жестких условиях теоремы 8. Пусть $A \in \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}$ и A/γ — $\mathfrak{C}$ -реплика системы A . Так как класс $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ наследственный и $A \in \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}$, то в силу п. 1

$$a_m \gamma \in \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \quad (m \in M), \quad (24)$$

где через $a_m \gamma$ обозначены смежные классы из A/γ , являющиеся $\mathfrak{B}$ -подсистемами системы A . Обозначим через $a_m \gamma / \beta_m$ $\mathfrak{B}$ -реплику системы $a_m \gamma$. Из условия (24) и наследственности класса $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ следует, что

$$x\beta_m \in \mathfrak{B} \Rightarrow x\beta_m \in \mathfrak{A} \quad (x \in a_m \gamma). \quad (25)$$

Так как класс $\mathfrak{B}$ и фактор-система A/γ вербальные (квазивербальные), $\mathfrak{B}$ — многообразие (квазимногообразие), то совокупность $\mathfrak{B}$ -реплик $a_m \gamma / \beta_m$ должна иметь общее продолжение $A/\beta \in \mathfrak{B}$ ($\beta \subseteq \gamma$), при котором $a_m \gamma / \beta = \bar{a}_m \gamma / \beta_m$ и

$$x\beta \in \mathfrak{B} \Rightarrow (\exists m)(x \in \bar{a}_m \gamma \ \& \ x\beta = x\beta_m). \quad (26)$$

В силу (26) и (25) требуемое отношение $A \in \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ будет доказано, если удастся установить, что $A/\beta \in \mathfrak{B}$. Но

$$(A/\beta)/\gamma \cong A/\gamma \in \mathfrak{C},$$

и потому надо установить лишь импликацию

$$x\gamma/\beta \cong [x\beta]/\gamma \in \mathfrak{B} \Rightarrow [x\beta]/\gamma \in \mathfrak{B} \quad (x \in A).$$

Пусть $x\gamma/\beta \in \mathfrak{B}$. Так как $x\gamma$ является полным прообразом подсистемы $x\gamma/\beta \subseteq A/\beta \in \mathfrak{B}$ при гомоморфизме $A \rightarrow (A/\beta)/\gamma$, то $x\gamma$ — подсистема системы $A \in \mathfrak{B}$. Из наследственности $\mathfrak{B}$ вытекает, что $x\gamma \in \mathfrak{B}$ и потому $x\gamma = a_m \gamma \in \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$, откуда

$$x\gamma/\beta \cong a_m \gamma / \beta_m \in \mathfrak{B},$$

что и требовалось.

Из теоремы 8 получаем

С л е д с т в и е 1. Для каждого трансквазивербального квазимногообразия систем $\mathfrak{B}$ группоид $G\mathfrak{B}$ является полугруппой.

Объединяя теоремы 7 и 8, получаем

С л е д с т в и е 2. Для каждого поляризованного трансвербального многообразия $\mathfrak{B}$ алгебр с перестановочными конгруэнциями группоид $G\mathfrak{B}$ является полугруппой с нулем $\mathfrak{B}$ и единицей E .

Как отмечалось выше, каждое многообразие групп поляризованное и вербальное и на всех группах конгруэнции перестановочны. Поэтому из следствия 2 получаем (ср. Х. Нейман [1]): для каждого многообразия групп $\mathfrak{B}$ группоид $G\mathfrak{B}$ является полугруппой с нулем и единицей.

Согласно теореме Нейманов — Шмелькина [2—3], если $\mathfrak{C}$ — многообразие всех групп, то $G\mathfrak{C}$ — свободная полугруппа с нулем и единицей. Для других групповых многообразий $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$ строение $G\mathfrak{B}$ может быть более сложным.

4. Дополнительные замечания. Наряду с операцией умножения классов можно ввести операцию (правого) деления классов, в известном смысле

обратную к операции умножения. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный и $\mathfrak{B}$ — реплично полный подкласс класса $\mathfrak{K}$. Частным $\mathcal{C}/_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$ назовем класс тех $\mathfrak{K}$ -систем, которые изоморфно вкладываются в отдельные смежные классы $\mathfrak{B}$ -вербальных фактор-систем подходящих $\mathcal{C}$ -систем.

Из этого определения непосредственно видно, что класс $\mathcal{C}/_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$ всегда наследственный. Далее, если $\mathfrak{L}$ — наследственный подкласс класса $\mathfrak{K}$ и $\mathcal{C}$, $\mathfrak{B}$ — подклассы в $\mathfrak{L}$, то $\mathcal{C}/_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B} = \mathcal{C}/_{\mathfrak{L}}\mathfrak{B}$. Ниже вместо $\mathcal{C}/_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$ будем писать $\mathcal{C}/\mathfrak{B}$.

Т е о р е м а 9. Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый наследственный класс систем и $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathcal{C}$ — его наследственные подклассы, из которых $\mathfrak{B}$ реплично полный. Тогда

$$\mathcal{C}/\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}/\mathfrak{B} \circ \mathfrak{B}, \quad (27)$$

$$(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})/\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}, \quad (28)$$

$$(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})/\mathfrak{B} \circ \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}. \quad (29)$$

Согласно определению из $A \in \mathcal{C}/\mathfrak{B}$ вытекает, что A есть $\mathfrak{K}$ -подсистема подходящей $\mathcal{C}$ -системы. Ввиду наследственности $\mathcal{C}$ это дает $A \in \mathcal{C}$ и потому $\mathcal{C}/\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{C}$. С другой стороны, если $C \in \mathcal{C}$ и $C/\theta_{\mathfrak{B}}$ — ее $\mathfrak{B}$ -вербальная фактор-система, то $C/\theta_{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{B}$ и по определению

$$c\theta_{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{K} \Rightarrow c\theta_{\mathfrak{B}} \in \mathcal{C}/\mathfrak{B},$$

т. е. $C \in \mathcal{C}/\mathfrak{B} \circ \mathfrak{B}$.

Проверим теперь (28). Пусть $A \in (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})/\mathfrak{B}$. Тогда A есть $\mathfrak{K}$ -подсистема подходящей системы вида $c\theta_{\mathfrak{B}}$, где $c \in C$, $C \in \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$. Но классы $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{A}$ наследственные; поэтому $c\theta_{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{K}$ и, следовательно, $c\theta_{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{A}$, $A \in \mathfrak{A}$, т. е. (28) истинно.

В силу (27) имеем

$$\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B} \subseteq (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})/\mathfrak{B} \circ \mathfrak{B},$$

а умножая обе части включения (28) на $\mathfrak{B}$, получим

$$(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})/\mathfrak{B} \circ \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B},$$

и потому соотношение (29) также истинно.

Для произвольного класса систем $\mathfrak{L}$ обозначим через $\mathfrak{L}^V$ наименьший V -класс, содержащий $\mathfrak{L}$. Его можно определить также формулой

$$\mathfrak{L}^V = \bigcap s\mathfrak{L},$$

где $s\mathfrak{L}$, $u\mathfrak{L}$ обозначают соответственно класс всех подсистем $\mathfrak{K}$ -систем и класс всех ультрапроизведений $\mathfrak{K}$ -систем.

Через $\mathfrak{L}^Q$ и $\mathfrak{L}^{\mathfrak{A}}$ обозначим соответственно квазимногообразие и многообразие, порождаемые классом $\mathfrak{L}$.

В п. 1 указаны многообразия, произведение которых многообразием не является. В этом примере $G_{\mathfrak{K}}\mathfrak{K}$ является лишь частичным группоидом. Однако, вводя вместо операции $\mathfrak{K}$ -умножения $\circ$ операцию $\mathfrak{KI}$ -умножения, определенного формулой

$$\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B} = (\mathfrak{A} \circ_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B})^V,$$

мы обратим совокупность всех подмногообразий $\mathfrak{K}$ в группоид $G_{\mathfrak{K}}\mathfrak{K}$ с всюду определенной операцией.

Аналогичным путем можно вместо деления классов / ввести деления $/_{\mathbf{V}}, /_{\mathcal{V}}, /_{\mathcal{Q}}$, определяемые формулами

$$\mathcal{C}/_{\lambda}\mathfrak{B} = \{(\mathcal{C}/\mathfrak{B})^{\lambda} \quad (\lambda_1 = [\mathbf{V}, \mathcal{V}, \mathcal{Q}],$$

и наряду с группоидами $G_{\lambda}\mathfrak{K}$ рассматривать квазигруппоиды

$$Q_{\lambda}\mathfrak{K} = \langle L_{\lambda}\mathfrak{K}; \circ, /_{\lambda} \rangle \quad (\lambda_1 = \mathbf{V}, \mathcal{Q}).$$

Так как для $\mathfrak{A} \in Q_{\lambda}\mathfrak{K}$ по определению $\mathfrak{A}^{\lambda} = \mathfrak{A}$, то из (27) — (28), получаем

$$\mathcal{C}/_{\lambda}\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}/_{\lambda}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}, \quad (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})/_{\lambda}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \quad (30)$$

и потому

$$(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})/_{\lambda}\mathfrak{B} \circ \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}.$$

Отсюда видно, что в формуле (30) знак включения можно заменить знаком равенства тогда и только тогда, когда соответствующий группоид $G_{\lambda}\mathfrak{K}$ удовлетворяет закону правого сокращения.

Алгебраическая система A называется $\mathfrak{Q}$ -разложимой, если существует неединичная фактор-система A/σ , принадлежащая классу $\mathfrak{Q}$. В противном случае A называется $\mathfrak{Q}$ -неразложимой [6]. В частности, если класс $\mathfrak{Q}$ реплично полный, то система A тогда и только тогда $\mathfrak{Q}$ -неразложима, когда ее $\mathfrak{Q}$ -реплика является единичной системой. Система A называется $\mathfrak{Q}$ -достижимой, если существует такая принадлежащая $\mathfrak{Q}$ ее фактор-система, у которой каждый смежный класс, являющийся подсистемой в A , $\mathfrak{Q}$ -неразложим.

Наконец, подкласс $\mathfrak{A}$ наследственного класса $\mathfrak{K}$ называется достижимым в $\mathfrak{K}$, если каждая $\mathfrak{K}$ -система является $\mathfrak{A}$ -достижимой.

Теорема 10. Если реплично полный подкласс $\mathfrak{A}$ наследственного класса $\mathfrak{K}$ достижим в $\mathfrak{K}$, то для любого наследственного подкласса $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{K}$

$$(\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{X}\mathfrak{A}. \quad (31)$$

Действительно, каждый реплично полный класс содержит единичную систему [5]. Поэтому $E \in \mathfrak{A}$ и

$$\mathfrak{X}\mathfrak{A} = \mathfrak{X}\mathfrak{A} \cdot E \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}.$$

Обратно, пусть $A \in \mathfrak{X}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}$, и, следовательно, обозначая через A/θ $\mathfrak{A}$ -реплику системы A , имеем

$$a\theta \in \mathfrak{K} \Rightarrow a\theta \in \mathfrak{X}\mathfrak{A} \quad (a' \in A).$$

Пусть $a\theta \in \mathfrak{K}$. Тогда, обозначая через $a\theta/\sigma$ $\mathfrak{A}$ -реплику системы $a\theta$, из соотношения $a\theta \in \mathfrak{X}\mathfrak{A}$ получим

$$x\sigma \in \mathfrak{K} \Rightarrow x\sigma \in \mathfrak{X} \quad (x \in a\theta).$$

По условию система A является $\mathfrak{A}$ -достижимой, и потому $a\theta/\sigma = E$, $a\sigma = a\theta = x\sigma$, т. е. $a\theta \in \mathfrak{K} \rightarrow a\theta \in \mathfrak{X}$, $A \in \mathfrak{X}\mathfrak{A}$, что и требовалось.

В произвольном мультипликативном группоиде элемент a , удовлетворяющий условию $a^2 = a$, называется идемпотентом, а элемент a , удовлетворяющий условию $(xa) a = xa$ для всех x , называется правым идемпотентом. Ясно, что в группоиде с левой единицей каждый правый идемпотент является идемпотентом. В ассоциативном группоиде верно и обратное: каждый идемпотент является правым идемпотентом.

В частности, если класс $\mathfrak{A}$ достижим в классе $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{A}$ -реплика $\mathfrak{A}/\theta$ произвольной $\mathfrak{K}$ -системы $\mathfrak{A}$ удовлетворяет требованию

$$\forall a (a\theta \in \mathfrak{K} \rightarrow a\theta = E) \Rightarrow \mathfrak{A}/\theta = \mathfrak{A}, \quad (32)$$

то $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$.

Действительно, из (32) следует, что $E\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, а потому, полагая $\mathfrak{X} = E$ в (31), получим $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$.

Например, условие (32) заведомо выполняется для любых $\mathfrak{K}$ -факторов $\mathfrak{A}/\theta$ любых $\mathfrak{K}$ -алгебр в произвольных классах $\mathfrak{K}$ луп, групп, колец и т. п. Поэтому каждый достижимый подкласс $\mathfrak{A}$ в любом из указанных классов удовлетворяет условию $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$.

Т е о р е м а 11. Если подмногообразие (подквазимногообразие) $\mathfrak{A}$ трансвербального (трансквазивербального) наследственного класса $\mathfrak{K}$ удовлетворяет соотношению $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, то класс $\mathfrak{A}$ достижим в $\mathfrak{K}$.

Обозначим через $\mathfrak{A}/\theta$ $\mathfrak{A}$ -реплику произвольной $\mathfrak{K}$ -системы $\mathfrak{A}$. Если для какого-нибудь $a \in \mathfrak{A}$ смежный класс $a\theta$ окажется подсистемой, то через $a\theta/\sigma$ условимся обозначать ее $\mathfrak{A}$ -реплику. Из трансвербальности (трансквазивербальности) системы $\mathfrak{A}$ вытекает существование такой ее фактор-системы $\mathfrak{A}/\sigma^*$ ($\sigma^* \subseteq \theta$), что

$$a\theta \in \mathfrak{K} \Rightarrow a\theta/\sigma = a\theta/\sigma^*.$$

Поскольку $\mathfrak{A}/\sigma^*/\theta \in \mathfrak{A}$ и

$$(a\sigma^*)\theta/\sigma^* \in \mathfrak{K} \Rightarrow (a\sigma^*)\theta/\sigma^* \in \mathfrak{A},$$

то $\mathfrak{A}/\sigma \in \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}$ и потому в силу соотношения $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}/\sigma^* \in \mathfrak{A}$.

Так как $\mathfrak{A}/\theta$ является $\mathfrak{A}$ -репликой, то $\theta \subseteq \sigma^*$, что вместе с включением $\sigma^* \subseteq \theta$ дает $\mathfrak{A}/\theta = \mathfrak{A}/\sigma^*$, откуда

$$a\theta \in \mathfrak{K} \Rightarrow a\theta/\sigma^* = a\theta/\theta = E,$$

означающее, что класс $\mathfrak{A}$ достижим в $\mathfrak{K}$.

Выше уже отмечалось, что все группы являются квазивербальными алгебрами, удовлетворяющими условию (32). Поэтому в любом наследственном классе групп $\mathfrak{K}$ достижимы те и только те квазимногообразия, которые являются идемпотентами полугруппы $G_{\mathfrak{K}}\mathfrak{K}$.

Приведем несколько примеров. Согласно теореме Нейманов — Шмелькина для класса $\mathfrak{G}$ всех групп, полугруппа $G_{\mathfrak{G}}\mathfrak{G}$ является свободной полугруппой с нулем и единицей. Единственными идемпотентными элементами свободной полугруппы являются нуль и единица. Принимая во внимание сказанное выше, получаем, что многообразие групп не имеет нетривиальных достижимых подмногообразий. Это утверждение доказано иными методами Тамурой [6].

Обозначим через $\mathfrak{N}_k$ многообразие всех k -ступенно нильпотентных групп. Решетки $L_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{N}_1$ (см. [7]), а также решетки $L_{\mathfrak{S}}\mathfrak{N}_2$, $L_{\mathfrak{S}}\mathfrak{N}_3$ [8, 9] известны в явном виде. Каждое подмногообразие многообразия $\mathfrak{N}_1$ всех абелевых групп определимо внутри $\mathfrak{N}_1$ одним тождеством вида

$$x^m = 1 \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Обозначая это подмногообразие через $\mathfrak{A}_m$, будем иметь

$$\mathfrak{A}_m \circ \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_{mn} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots),$$

и потому полугруппа $G_{\mathfrak{S}}\mathfrak{N}_1$ изоморфна мультипликативной полугруппе натуральных чисел.

Каждое подмногообразие многообразия $\mathfrak{N}_2$ взаимно однозначно определяется внутри $\mathfrak{N}_2$ парой тождеств

$$x^m = 1, (x^{-1}y^{-1}xy)^n = 1 \quad (n \mid m; m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Обозначая это подмногообразие через $[m, n]$, после простых вычислений получаем формулу

$$[a, b] \cdot [m, n] = \left[am, \left(\frac{am!}{(2, am)}, a^2n \right) \right],$$

где (x, y) обозначает наибольший общий делитель чисел x, y . Из этой формулы видно, что полугруппа $G_{\mathfrak{N}_2}$ некоммутативна и не является полугруппой с законами сократимости.

Наконец, рассмотрим класс $\mathfrak{K} = K\Omega$ всех алгебр данной сигнатуры Ω и обозначим через $\mathfrak{P}$ многообразие алгебр этой сигнатуры, определяемое тождествами

$$F(x, x, \dots) = x \quad (F \in \Omega). \quad (33)$$

Легко убедиться, что

$$\mathfrak{P} \circ_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P} = \mathfrak{P}.$$

Действительно, обозначая через A/θ $\mathfrak{P}$ -реплику произвольной алгебры A из класса $\mathfrak{P} \circ \mathfrak{P}$, видим, что для любых $x_1, x_2, \dots$, взятых в произвольном смежном классе $x\theta$, имеем

$$F(x_1, \dots)\theta = F(x_1\theta, \dots) = F(x\theta, \dots) = x\theta,$$

т. е. каждый смежный класс $x\theta$ является подалгеброй в A . Из условия $A \in \mathfrak{P} \circ \mathfrak{P}$ вытекает $x\theta \in \mathfrak{P}$, откуда следует, что в A имеют место тождества (33) и потому $A \in \mathfrak{P}$.

Легко проверить, что если Ω содержит унарные символы, то для подходящего $\mathfrak{K}$ имеем $\mathfrak{K}\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{P} \neq \mathfrak{K}\mathfrak{P}$ и потому класс $\mathfrak{P}$ недостижим в $K\Omega$. Если же Ω состоит лишь из унарных функциональных символов, то многообразие $\mathfrak{P}$ достижимо в $K\Omega$. Действительно, в этом случае произвольный фактор A/σ тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{P}$, когда все его смежные классы $a\sigma$ являются подалгебрами и любое разбиение A на непересекающиеся подалгебры является $\mathfrak{P}$ -фактором от A . Отсюда следует, что смежные классы $\mathfrak{P}$ -реплики не разбиваются далее на подалгебры и представляют собою $\mathfrak{P}$ -неразложимые алгебры.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Neumann. On varieties of groups and their associated nearrings.— Math. Z., 1956, 65, N 1, 36—39.
2. В. Н. Неumann, H. Neumann, P. M. Neumann. Wreath products and varieties of groups.— Math. Z., 1962, 80, N 1, 44—62.
3. А. Л. Шмелькин. Полугруппа многообразий групп.— Докл. АН СССР, 1963, 149, № 3, 543—545.
4. А. И. Мальцев. О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики.— Междунар. конгр. математиков. Москва, 1966. Тезисы. М., «Мир», 1968.
5. А. И. Мальцев. Несколько замечаний о квазимногообразиях алгебраических систем.— Алгебра и логика, 1966, 5, № 3, 3—9.
6. T. Tattira. Attainability of systems of identities on semigroups.— J. Algebra, 1966, 3, N 3, 261—276.
7. А. А. Виноградов. Квазимногообразия абелевых групп.— Алгебра и логика, 1965, 4, № 6, 15—20.
8. В. Н. Ремесленников. Два замечания о трехступенно нильпотентных группах.— Алгебра и логика, 1965, 4, № 2, 59—66.
9. B. Jonsson. Varieties of groups of nilpotency three.— Notices Amer. Math. Soc., 1966, 13, N 4, 488.

УНИВЕРСАЛЬНО АКСИОМАТИЗИРУЕМЫЕ ПОДКЛАССЫ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ КЛАССОВ МОДЕЛЕЙ*



Подкласс $\mathfrak{L}$ некоторого класса моделей $\mathfrak{K}$ называется универсально аксиоматизируемым в $\mathfrak{K}$, если существует такая совокупность Σ универсальных (общностных) формул исчисления предикатов 1-й степени, что $\mathfrak{L}$ состоит из тех и только тех $\mathfrak{K}$ -моделей, в которых истинны все формулы из Σ . Если совокупность Σ можно выбрать конечной или независимой, то подкласс $\mathfrak{L}$ называется соответственно конечно V -аксиоматизируемым или независимо V -аксиоматизируемым в $\mathfrak{K}$. Аналогично определяются и понятия конечной Γ -аксиоматизируемости и независимой Γ -аксиоматизируемости для любого типа формул Γ . В настоящей заметке указываются несколько простых признаков конечной и независимой V -аксиоматизируемости подклассов локально конечных классов $\mathfrak{K}$. В качестве примера показано, что существует континуум различных универсально аксиоматизируемых подклассов класса всех неориентированных графов степени ≤ 2 и столько же универсально аксиоматизируемых подклассов частично упорядоченных множеств фиксированной размерности. Последний вопрос возник в связи с тем, что класс всех линейно упорядоченных множеств и класс всех алгебр Буля имеют лишь счетное число универсально аксиоматизируемых подклассов. В п. 1 напоминаются в видоизмененной форме хорошо известные условия Тарского — Лоса универсальной аксиоматизируемости.

1. Условия универсальной аксиоматизируемости. Пусть задана общностная формула

$$\mathfrak{A} \equiv (\forall x_1, \dots, x_n) \mathfrak{G}(x_1, \dots, x_n)$$

чисто предикатной сигнатуры $\Omega = \{P_0, P_1, \dots, P_s\}$, где через P_0 обозначен знак равенства. Подформула $\mathfrak{G}(x_1, \dots, x_n)$ формулы $\mathfrak{A}$ является $\{\&, V, \neg\}$ -полиномом от первичных формул вида $P(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{n_i}})$. Пусть $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_r$ — всевозможные формулы этого вида. Тогда $\mathfrak{G}(x_1, \dots, x_n)$ будет равносильна конъюнкции некоторого числа дизъюнкций вида

$$X_1 F_1 \vee X_2 \mathfrak{F}_2 \vee \dots \vee X_r \mathfrak{F}_r \quad (X_i = \neg, \Lambda; \Lambda — \text{пустое слово})$$

и потому предложение $\mathfrak{A}$ будет равносильно конъюнкции предложений вида

$$\mathfrak{A}_i \equiv \neg (\exists x_1 \dots x_n) (Y_1 \mathfrak{F}_1 \& \dots \& Y_r \mathfrak{F}_r) \quad (Y_i \equiv \neg X_i). \quad (1)$$

С точностью до изоморфизма существует не более одной модели M_i сигнатуры Ω , элементы которой могли бы быть обозначены символами $x_1, \dots, x_n$ так, чтобы в M_i была истинна формула

$$Y_1 \mathfrak{F}_1 \& \dots \& Y_r \mathfrak{F}_r. \quad (2)$$

Если такой модели нет, то формула (1) тождественно истинна и ее можно вычеркнуть из $\mathfrak{A}$. Пусть модель M_i существует. Тогда истинность предложения (1) в какой-нибудь модели A сигнатуры $\Omega_0 \equiv \Omega$ означает, что модель M_i

не вложима в модель A (символически $\neg M_i \text{ вл } A$), а истинность в A первоначальной формулы $\mathfrak{A}$ означает, что ни одна из моделей $M_1, \dots, M_i$ не вложима в A .

Обратно, пусть задана конечная совокупность конечных моделей $M_1, \dots, M_i$ какой-нибудь конечной сигнатуры Ω . Обозначим через n максимальную из мощностей указанных моделей. Тогда элементы любой модели M_i можно обозначить буквами $x_1, \dots, x_n$ (возможно, и с повторениями). Строя для M_i формулу (2) и беря конъюнкцию соответствующих формул (1), получим универсальную формулу $\mathfrak{A}$, истинность которой будет равносильна невложимости ни одной из заданных моделей $M_1, \dots, M_i$. Тем самым приходим к следующему утверждению, различные модификации которого хорошо известны (ср. [1]):

Т е о р е м а 1.1. *Для каждой общностной нетождественно истинной формулы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω существует конечная последовательность таких конечных моделей $M_1, \dots, M_i$ конечной сигнатуры Ω , что истинность $\mathfrak{A}$ в любой модели A сигнатуры $\Omega_0 \supseteq \Omega$ равносильна невложимости в A ни одной из моделей $M_1, \dots, M_i$. Обратно, если $M_1, \dots, M_i$ — последовательность моделей конечной сигнатуры Ω , мощность каждой из которых не превосходит конечного числа n , то существует общностная формула $\mathfrak{A}$ с n кванторами, истинность которой в произвольной модели A сигнатуры $\Omega_0 \supseteq \Omega$ равносильна невложимости в A ни одной из моделей $M_1, \dots, M_i$.*

В этой теореме идет речь об истинности в произвольных моделях заданной сигнатуры. Применяя ее не ко всем моделям данной сигнатуры, а лишь к какому-нибудь специальному классу $\mathfrak{K}$, встретимся с тем неудобством, что модели $M_1, \dots, M_i$, о которых идет речь в указанной теореме, могут оказаться не принадлежащими классу $\mathfrak{K}$. Чтобы избежать этого неудобства, вводим следующее

О п р е д е л е н и е. Класс моделей $\mathfrak{L}$ называется $\mathfrak{K}$ -локально конечным, если в любой $\mathfrak{L}$ -модели любая конечная совокупность элементов лежит в конечной $\mathfrak{K}$ -подмодели.

Отдельная модель A называется $\mathfrak{K}$ -локально конечной, если этим свойством обладает класс $\mathfrak{L}$, состоящий лишь из модели A .

Если $\mathfrak{K}$ — некоторый класс моделей сигнатуры Ω и Σ — какая-то совокупность замкнутых формул сигнатуры Ω , то через $\mathfrak{K}\Sigma$ будем обозначать класс всех тех $\mathfrak{K}$ -моделей, в которых истинны все формулы из Σ . Классы вида $\mathfrak{K}\Sigma$, где Σ — какая-нибудь совокупность V -формул, называются универсально аксиоматизируемыми подклассами класса $\mathfrak{K}$, или универсалами $\mathfrak{K}$ -моделей. Из теоремы 1.1 непосредственно вытекает следующая модификация известной теоремы Тарского — Лося [1]:

Т е о р е м а 1.2. *Для каждого подуниверсала $\mathfrak{A}$ класса $\mathfrak{K}$ моделей сигнатуры Ω существует такая совокупность $\{M_\lambda : \lambda \in L\}$ конечных моделей $M_{(\lambda)}$ конечных сигнатур $\Omega_\lambda \subseteq \Omega$, что $\mathfrak{K}$ -модель A тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{A}$, когда в A не вложима ни одна из моделей M_λ . Для любой совокупности $\{M_\lambda : \lambda \in L\}$ определенный указанным способом подкласс $\mathfrak{A}$ является подуниверсалом в $\mathfrak{K}$.*

В общем случае в формулировке этой теоремы выделенное слово моделей нельзя заменить словами $\mathfrak{K}$ -моделей, так как класс $\mathfrak{K}$ может вообще не содержать конечных моделей. Однако такую замену сделать возможно, если класс $\mathfrak{K}$ содержит достаточно много конечных моделей.

Т е о р е м а 1.3. *Для каждого подуниверсала $\mathfrak{A}$ локально конечного класса моделей $\mathfrak{K}$ существует такая совокупность $\{B_t : t \in T\}$ конечных $\mathfrak{K}$ -моде-*

лей, что $\mathfrak{K}$ -модель A тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{A}$, когда ни одна из моделей указанной совокупности не вкладывается в A .

Пусть $\{M_\lambda : \lambda \in L\}$ — та совокупность конечных моделей, существование которой утверждается теоремой 1.2. Покажем, что требованиям теоремы 1.3 заведомо удовлетворяет совокупность $\{B_t : t \in T\}$ всех тех конечных $\mathfrak{K}$ -моделей, в каждую из которых вложима какая-нибудь модель M_λ . Действительно, если $\mathfrak{K}$ -модель A принадлежит $\mathfrak{A}$, то в нее не вложима ни одна модель M_λ , а значит, не вложима и ни одна $\mathfrak{K}$ -модель A_i . Обратно, если $A \in \mathfrak{K}$ и $A \notin \mathfrak{A}$, то для подходящего $\lambda \in L$ существует вложение $\varphi : M_\lambda \rightarrow A$. В силу локальной конечности $\mathfrak{K}$ в A найдется конечная $\mathfrak{K}$ -подмодель B , содержащая множество $\varphi(M_\lambda)$. Отсюда следует, что B изоморфна какой-то $\mathfrak{K}$ -модели B_i и, следовательно, в рассматриваемом случае не все модели множества $\{B_t : t \in T\}$ не вложимы в A .

2. Независимая аксиоматизируемость. Рассмотрим какой-нибудь тип Γ формул 1-й ступени, например тождества (I -формулы), квазитожества (Q -формулы), общностные формулы (V -формулы). Подкласс $\mathfrak{L}$ какого-либо класса моделей $\mathfrak{K}$ сигнатуры Ω называется Γ -аксиоматизируемым подклассом или Γ -подклассом внутри $\mathfrak{K}$, если существует такая совокупность Σ замкнутых Γ -формул сигнатуры Ω , что $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}\Sigma$. Подкласс $\mathfrak{L}$ называется конечно Γ -аксиоматизируемым, если существует конечная совокупность $\Sigma\Gamma$ -формул, для которой $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}\Sigma$. Символом E будем обозначать класс вообще всех формул 1-й ступени. Γ -подкласс тотального класса всех моделей данной сигнатуры называется просто Γ -аксиоматизируемым классом, E -аксиоматизируемость называется просто аксиоматизируемостью. Заметим, что из теоремы компактности получается непосредственно, что в случае, когда основной класс $\mathfrak{K}$ аксиоматизируем, для любого Γ -подкласса свойства конечной Γ -аксиоматизируемости равносильны свойству конечной E -аксиоматизируемости.

Совокупность Σ замкнутых формул сигнатуры Ω называется независимой относительно класса моделей $\mathfrak{K}$ той же сигнатуры, если из $\Sigma_1 \subset \Sigma$ следует $\mathfrak{K}\Sigma_1 \supset \mathfrak{K}\Sigma$. Подкласс $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$ называется независимо Γ -аксиоматизируемым в $\mathfrak{K}$, если $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}\Sigma$, где Σ — какая-то независимая относительно $\mathfrak{K}$ система Γ -формул. Ясно, что каждый конечно Γ -аксиоматизируемый подкласс является и независимо Γ -аксиоматизируемым.

Приведем пример Ω -подкласса, не являющегося независимо Ω -аксиоматизируемым.

Пусть $\mathfrak{K}$ — класс алгебр, сигнатура которого состоит из предметного символа 0 и одноместных функций f, h , определяемый квазитожествами

$$f0 = 0, \quad fx = x \rightarrow x = 0; \quad (3)$$

$$fhx = hfx = x;$$

$$fx = fy \rightarrow x = y. \quad (4)$$

Пусть $\mathfrak{L}$ — подкласс, выделяемый в $\mathfrak{K}$ квазитожествами

$$f^n x = x \rightarrow x = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (5)$$

Покажем, что $\mathfrak{L}$ не является независимо Ω -аксиоматизируемым в $\mathfrak{K}$. Введем обозначения

$$f^0 x = x, \quad f^{-k} x = h^k x \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Пользуясь ими, произвольное квазитожество сигнатуры $0, f, h$ можно записать в форме

$$f^{m_1}u_1 = f^{n_1}v_1 \& \dots \& f^{m_s}u_s = f^{n_s}v_s \rightarrow f^m u = f^n v, \quad (6)$$

где $u_1, v_1, \dots, u, v$ — какие-то символы из последовательности $0, x_1, \dots, x_p$, а $m_1, n_1, \dots, m, n$ — числа из совокупности $\{0', \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Из (4) следует, что в классе $\mathfrak{K}$

$$f^\alpha x = f^\beta y \Leftrightarrow x = f^{\beta-\alpha} y.$$

Поэтому в классе $\mathfrak{K}$ квазитожество (6) можно привести к виду

$$f^{m_1}x = x \& \dots \& f^{m_s}x = x \& f^{n_1}y = y \& \dots \& f^{n_t}y = y \rightarrow f^m x = z, \quad (7)$$

где $z = x, y, 0$. Подставляя сюда значения $x = 0, y = 0$, видим, что (7) либо равносильно квазитожеству вида

$$f^{m_1}x = x \& \dots \& f^{m_s}x = x \rightarrow f^m x = x, \quad (8)$$

либо равносильно паре квазитожеств вида

$$f^{m_1}x = x \& \dots \& f^{m_s}x = x \rightarrow x = 0. \quad (8')$$

Но в классе $\mathfrak{K}$

$$f^{m_1}x = x \& \dots \& f^{m_s}x = x \Leftrightarrow f^d x = x_2, \quad (9)$$

где d — наибольший общий делитель чисел $m_1, \dots, m_s$. Поэтому (9) в классе $\mathfrak{K}$ равносильно квазитожеству из (5), а (8) равносильно квазитожеству вида

$$f^d x = x \rightarrow f^m x = x.$$

Итак, дело свелось к вопросу: может ли класс $\mathfrak{L}$ характеризоваться внутри $\mathfrak{K}$ независимой системой формул $A_1, A_2, \dots$, где A_i — формула вида

$$(f^{d_1}i_1 x = x \rightarrow x = 0) \& \dots \& (f^{d_{i_s}}i_s x = x \rightarrow x = 0) \& \\ \& (f^{p_1+i_1q_1}i_1 x = x \rightarrow f^{p_1}i_1 x = x) \& \dots \& (f^{p_{i_t}+q_{i_t}}i_t x = x \rightarrow f^{p_{i_t}}i_t x = x). \quad (10)$$

Смысл формулы (10) легко представить в более наглядной форме. Каждая алгебра A класса $\mathfrak{K}$ есть объединение минимальных подалгебр следующих видов: цикла длины 1, состоящего лишь из элемента 0; циклов $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$ конечной длины m , где

$$f x_i = x_{i+1}, f x_{m-1} = x_0 \quad (i = 0, 1, \dots, m-2),$$

и бесконечных циклов $\{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$, где

$$f x_i = x_{i+1} \{x_i \neq x_j; i \neq j\}.$$

Любой набор циклов указанных видов, включающий единственный цикл длины 1, определяет $\mathfrak{K}$ -алгебру с точностью до изоморфизма.

Ясно, что формула $x^m = x \rightarrow x = 0$ тогда и только тогда истинна в алгебре A , когда A не содержит циклов, длина которых равна m или неединичному делителю m . С другой стороны, так как

$$x^{p+q} = x \& x^p = x \Leftrightarrow x^d = x \quad (d = (p + q, p)),$$

то формула

$$x^{p+q} = x \rightarrow x^p = x$$

равносильна формуле

$$x^{kd} = x \rightarrow x^d = x, \quad (11)$$

истинность которой в алгебре A равносильна истинности утверждения, что A не содержит неединичных циклов, длина которых равна делителю числа kd , отличному от d . Таким образом, каждая формула $\mathfrak{A}_k$ утверждает, что алгебра A не содержит циклов каких-то фиксированных длин $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. Алгебры класса $\mathfrak{L}$ в силу (5) не содержат конечных циклов. Поэтому среди аксиом $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ должна иметься аксиома $\mathfrak{A}_i$, утверждающая, что A не имеет циклов длины $a = (d_1 \dots d_s)^2$.

Это может быть лишь в том случае, когда конъюнкция (10) содержит или член $x^{ka} = x \rightarrow x = 0$, или член $x^{ka} = x \rightarrow x^p = x$. Но в первом случае аксиома $\mathfrak{A}_i$ одновременно утверждает и отсутствие в A циклов длины $d_1, \dots, d_s$, т. е. из $\mathfrak{A}_i$ вытекает $\mathfrak{A}_k$ и система $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ не независима. Во втором случае, чтобы из $\mathfrak{A}_i$ не вытекала аксиома $\mathfrak{A}_k$, число p должно равняться какому-то из чисел $d_1, \dots, d_s$, например d_1 . Итак, аксиома $\mathfrak{A}_i$ утверждает отсутствие в алгебре A циклов каких-то длин $d_2, \dots, d_s, \beta_1, \dots, \beta_t$. Рассуждая аналогично, заключаем, что среди аксиом $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ должна иметься аксиома $\mathfrak{A}_j$, утверждающая, что A не содержит циклов длины

$$b = (d_1 d_2 \dots d_s \beta_1 \dots \beta_t)^2$$

и, следовательно, $\mathfrak{A}_j$ содержит утверждение вида

$$x^{lb} = x \rightarrow x^r = x, \quad r \in \{d_1, \dots, d_s\}.$$

Теперь, если $r = \alpha_1$, то $\mathfrak{A}_j \Rightarrow \mathfrak{A}_i$, если же $r \neq \alpha_i$, то $\{\mathfrak{A}_k, \mathfrak{A}_j\} \Rightarrow \mathfrak{A}_i$ вопреки независимости системы $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$. Итак, квазимногообразие $\mathfrak{L}$ не является независимо Ω -аксиоматизируемым в $\mathfrak{K}$. Следующее общее утверждение показывает, что $\mathfrak{L}$ также не является и независимо V -аксиоматизируемым в $\mathfrak{K}$.

Теорема 2.4. Пусть класс моделей $\mathfrak{K}$ и его подкласс $\mathfrak{L}$ мультипликативно замкнуты и содержат единичные модели. Если $\mathfrak{L}$ независимо V -аксиоматизируем в $\mathfrak{K}$, то $\mathfrak{L}$ независимо Ω -аксиоматизируем в $\mathfrak{K}$.

Пусть $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ — независимая относительно $\mathfrak{K}$ система V -формул, выделяющая $\mathfrak{L}$ из $\mathfrak{K}$. Так как класс $\mathfrak{K}$ мультипликативно замкнут, то каждая формула $\mathfrak{A}_i$ в $\mathfrak{K}$ равносильна некоторой конъюнкции $\mathfrak{A}_{i1}, \dots, \mathfrak{A}_{i\ell_i}$ хорновских формул. Поскольку эти формулы должны быть истинны на единичной модели класса $\mathfrak{K}$, то все они не содержат чисто отрицательных дизъюнкций и потому все их можно считать Ω -формулами. Итак, $\mathfrak{L}$ выделяется из $\mathfrak{K}$ совокупностью групп

$$\{\mathfrak{A}_{11}, \dots, \mathfrak{A}_{1\ell_1}\}, \{\mathfrak{A}_{21}, \dots, \mathfrak{A}_{2\ell_2}\}, \dots$$

Ω -аксиом, причем каждая группа независима в $\mathfrak{K}$ от совокупности всех остальных групп. Выбрасываем теперь по порядку все те аксиомы $\mathfrak{A}_{ij}$, которые вытекают в $\mathfrak{K}$ из всех остальных аксиом, остающихся в списке в момент выбрасывания. Ясно, что оставшиеся после завершения процесса аксиомы будут составлять искомую $\mathfrak{K}$ -независимую систему Ω -формул, характеризующих $\mathfrak{L}$.

Т е о р е м а 2.2. *Каждый V -подкласс $\mathfrak{L}$ локально конечного класса $\mathfrak{K}$ конечной сигнатуры является независимо V -аксиоматизируемым.*

Согласно теореме 1.3 $\mathfrak{L}$ состоит из $\mathfrak{K}$ -моделей A , в которые не вложима ни одна из фиксированных конечных $\mathfrak{K}$ -моделей $B_1, B_2, \dots$, попарно неизоморфных между собой. Пусть $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \dots$ — те из моделей $B_1, B_2, \dots$, которые не вложимы ни в какую другую модель указанной последовательности. Ясно, что $\mathfrak{L}$ состоит из всех тех $\mathfrak{K}$ -моделей, в которые не вложима ни одна из моделей $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \dots$. Обозначим через $\mathfrak{B}_i$ V -формулу, означающую невложимость B_{α_i} . Совокупность формул $\mathfrak{B}_{\alpha_1}, \mathfrak{B}_{\alpha_2}, \dots$ выделяет $\mathfrak{L}$ из $\mathfrak{K}$ и она независима в классе $\mathfrak{K}$. Действительно, например, совокупность $\mathfrak{B}_{\alpha_2}, \mathfrak{B}_{\alpha_3}, \dots$ выделяет в $\mathfrak{K}$ подкласс $\mathfrak{L}_1$, содержащий модель B_{α_1} , так как в эту модель не вложима ни одна из моделей $B_{\alpha_2}, \dots$. Но $B_{\alpha_1} \notin \mathfrak{L}$ и потому $\mathfrak{L}_1 \neq \mathfrak{L}$.

Т е о р е м а 2.3. *Для того чтобы каждый подуниверсал локально конечного класса моделей $\mathfrak{K}$ конечной сигнатуры был в $\mathfrak{K}$ конечно аксиоматизируемым, необходимо и достаточно, чтобы не существовало бесконечной системы $\{B_i : i \in M\}$ конечных $\mathfrak{K}$ -моделей, ни одна из которых не вложима в другую.*

Действительно, пусть $B_1, B_2, \dots$ — бесконечная последовательность конечных $\mathfrak{K}$ -моделей, никакая из которых не вложима в другие. Обозначим через $\mathfrak{B}_i$ общностьную аксиому, утверждающую невложимость B_i . Из приведенных выше рассуждений следует, что система $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$ независима относительно $\mathfrak{K}$. Поэтому различные подсистемы указанной системы определяют в $\mathfrak{K}$ различные подуниверсалы и, таким образом, мощность множества всех подуниверсалов в $\mathfrak{K}$ равна мощности континуума. Множество конечно аксиоматизируемых подуниверсалов в $\mathfrak{K}$ имеет не более чем счетную мощность. Следовательно, в $\mathfrak{K}$ существуют подуниверсалы, не являющиеся конечно аксиоматизируемыми.

Обратно, пусть подуниверсал $\mathfrak{A}$ не конечно аксиоматизируем в $\mathfrak{K}$. Согласно теореме 1.3 существует совокупность $\{B_i : i \in M\}$ попарно не вложимых конечных $\mathfrak{K}$ -моделей, обладающая тем свойством, что $\mathfrak{K}$ -модель A тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{A}$, когда в A не вкладывается ни одна из моделей B_i . Если бы совокупность M была конечна, то подуниверсал $\mathfrak{A}$ определялся бы конечной системой аксиом $\mathfrak{B}_i$, что невозможно.

3. Графы конечной степени. В качестве примера рассмотрим универсал $\mathfrak{P}_r$ всех частично упорядоченных множеств (ч.у.м.), размерность которых не превосходит данного конечного числа r (см. [2]). Сколько различных подуниверсалов содержит универсал $\mathfrak{P}_r$?

Т е о р е м а 3.1. *В универсале $\mathfrak{P}_2$ существует не конечно аксиоматизируемый подуниверсал и потому $\mathfrak{P}_2$ обладает континуумом различных подуниверсалов.*

Согласно теореме 2.3 нам достаточно указать такую бесконечную последовательность конечных ч.у.м. размерности 2, чтобы ни один ее ч.у.м. не был вложим в другой. Последовательность



очевидно, обладает требуемым свойством. Действительно, при вложении одного графа в другой степени вершин не могут понижаться. В каждом из графов указанной последовательности имеется лишь 2 вершины степени 3. Поэтому, если вложение было бы возможно, то упомянутые вершины накладывались бы друг на друга. Соединяющие их простые ломаные также накладывались бы друг на друга, что невозможно, поскольку длины этих ломаных увеличиваются.

Эти рассуждения остаются справедливыми и в случае, когда изображенные выше графы считаются неориентированными. Поэтому универсал неориентированных графов степени ≤ 3 имеет континуум различных подуниверсалов. Рассматривая последовательность правильных многоугольников с растущим числом вершин, легко убеждаемся, что универсал неориентированных графов степени ≤ 2 также имеет континуум подуниверсалов.

Ясно, что универсал всех линейно упорядоченных множеств содержит лишь счетное множество подуниверсалов. Более тонкий пример универсала со счетным числом подуниверсалов доставляет класс сходящихся ч.у.м., характеризующийся аксиомами частичного порядка и следующими двумя аксиомами:!

$$x \leq z \ \& \ y \leq z \rightarrow x \leq y \vee y \leq x,$$

$$(\forall xy) (\exists z) (z \leq x \ \& \ z \leq y).$$

Конечные сходящиеся ч.у.м. — это конечные деревья. Согласно теореме Крускала [3], не существует бесконечной последовательности попарно не вложимых конечных деревьев. В силу теоремы 2.3 это означает, что каждый подуниверсал сходящихся ч.у.м. конечно аксиоматизируем и потому существует лишь счетное число таких подуниверсалов.

4. Равномерно локально конечные классы. Сужая понятие локальной конечности, непосредственно приходим к следующему определению: класс моделей $\mathfrak{L}$ называется равномерно $\mathfrak{L}$ -локально конечным ($\mathfrak{K} = \text{р.л.к.}$), если существует функция $\Phi: \Phi: N \rightarrow N (N = \{1, 2, \dots\})$, такая, что в любой $\mathfrak{L}$ -модели A любые m элементов $a_1, \dots, a_m (m = 1, 2, 3, \dots)$ содержатся в некоторой $\mathfrak{K}$ -подмодели $A_1 \subseteq A$, причем $|A_1| \leq \Phi(m)$. Класс $\mathfrak{L}$ называется просто р.л.к., если он $\mathfrak{K}$ -р.л.к., где $\mathfrak{K}$ — класс всех систем заданной сигнатуры.

Ясно, что каждый $\mathfrak{K}$ -равномерно локально конечный класс является и $\mathfrak{K}$ -локально конечным. Обратное в общем случае неверно, но остается справедливой

Теорема 4.1. Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольный, а $\mathfrak{L}$ — аксиоматизируемый класс какой-то конечной сигнатуры Ω . Если класс $\mathfrak{L}$ $\mathfrak{K}$ -локально конечен, то $\mathfrak{L}$ является равномерно $\mathfrak{K}$ -локально конечным.

Допустим, что $\mathfrak{L}$ не является равномерно $\mathfrak{K}$ -локально конечным. Это значит, что существует такое натуральное m , что для каждого натурального $n \geq m$ найдется $\mathfrak{L}$ -модель A и в ней такие элементы $a_1, \dots, a_m$, что любая подмодель $A_1 \subseteq A$, содержащая элементы $a_1, \dots, a_m$ и имеющая мощность, не превосходящую числа n , не будет $\mathfrak{K}$ -моделью. Чтобы записать последнее утверждение в виде формулы, введем символы $x_1, x_2, \dots, x_n$ и обозначим через $\mathfrak{D}_1^n, \mathfrak{D}_2^n, \dots$ всевозможные диаграммы сигнатуры Ω , построенные на символах $x_1, x_2, \dots, x_n$. Каждая из этих диаграмм $\mathfrak{D}_i^n$ определяет модель сигнатуры Ω . Пусть $\mathfrak{D}_1^n, \dots, \mathfrak{D}_n^n$ — диаграммы тех моделей, которые не принадлежат классу $\mathfrak{K}$. Теперь упомянутое утверждение можно сформулировать так: для любого $n \geq m$ найдется $\mathfrak{L}$ -модель, в которой истинна формула

$$(\exists x_1 \dots x_m) (\forall x_{m+1} \dots x_n) (\mathfrak{D}_1^n \vee \dots \vee \mathfrak{D}_n^n). \quad (12)$$

Добавим к сигнатуре Ω индивидуальные символы $a_1, \dots, a_m$ и обозначим через $\mathfrak{K}^*, \mathfrak{L}^*$ классы тех моделей сигнатуры $\Omega^* = \Omega \cup \{a_1, \dots, a_m\}$, которые получаются соответственно из $\mathfrak{K}$ - и $\mathfrak{L}$ -моделей произвольными до-

определениями в них значений символов $a_1, \dots, a_m$. По условию класс $\mathfrak{L}$ характеризуется какой-то системой Σ замкнутых формул 1-й ступени. Класс $\mathfrak{L}^*$ характеризуется той же системой формул Σ . Из (12) следует, что в классе $\mathfrak{L}^*$ существует модель A^* , в которой истинна формула

$$(\forall x_{m+1} \dots x_n) \mathfrak{D}_1^n(a_1, \dots, a_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \vee \dots \\ \dots \vee \mathfrak{D}_{s_n}^n(a_1, \dots, a_m, x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Эту формулу мы обозначим через A^n . Сказанное означает, что совокупность формул $\Sigma \cup \{A^n\}$ совместима. Из смысла формулы A^n следует, что если в некоторой модели A^* сигнатуры Ω^* имеет место формула A^{n+k} , то в A^* истинна и формула A^n . Таким образом, любая конечная часть совокупности $\{\Sigma, A^m, A^{m+1}, \dots\}$ совместна. В силу принципа компактности отсюда следует, что и вся указанная совокупность совместна. Пусть A^* — какая-нибудь модель, удовлетворяющая этой бесконечной совокупности. В A^* для любого $n \geq m$ истинна формула A^n , означающая, что совокупность $\{a_1, \dots, a_m\}$ не лежит ни в какой $\mathfrak{K}$ -подмодели модели A^* , имеющей мощность не выше n , т. е. что совокупность $\{a_1, \dots, a_m\}$ не лежит ни в какой конечной $\mathfrak{K}$ -подмодели модели A , вопреки предположенной $\mathfrak{K}$ -локальной конечности A .

Теорема доказана. Покажем, что в ней нельзя опустить условие конечности сигнатуры Ω .

Т е о р е м а 4.2. (Пример аксиоматизируемого локально конечного универсала алгебр бесконечной сигнатуры, не являющегося р.л.к.) Обозначим через $\mathfrak{L}$ универсал алгебр, сигнатуры которых состоят из одноместных функциональных символов $f_1, f_2, \dots$, определяемый совокупностью формул

$$f_i^p x = x \quad (p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \dots), \\ f_j x \neq x \rightarrow f_j y = y \quad (j \neq i; i, j = 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда $\mathfrak{L}$ есть л.к., но не р.л.к.

Пусть $a_i, \dots, a_m$ — какие-нибудь элементы $\mathfrak{L}$ -алгебры A . Если в A истинны все формулы $(\forall x)(f_i x = x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), то само множество $a_1, \dots, a_m$ будет конечной $\mathfrak{L}$ -подалгеброй, содержащей заданные элементы. Пусть, напротив, в A есть элемент a , для которого $f_i a \neq a$ при некотором i . Тогда для $j \neq i$ имеем $(\forall y)(f_j y = y)$ и потому совокупность

$$a_1, f_i a_1, \dots, f_i^{p_i-1} a_1, \dots, a_m, \quad f_i a_m, \dots, f_i^{p_i-1} a_m$$

будет конечной подалгеброй, содержащей заданные элементы $a_1, \dots, a_m$. Таким образом, класс $\mathfrak{L}$ локально конечный. Однако в $\mathfrak{L}$ -алгебре A_i с различными элементами $c_1, c_2, \dots, c_{p_i}$, определенной равенствами

$$f_j c_k = c_k \quad (k = 1, \dots, p_i, j \neq i), \\ f_i c_k = c_{k+1}, \quad f_i c_{p_i} = c_1 \quad (k = 1, \dots, p_i - 1),$$

каждый элемент порождает всю алгебру и потому класс $\mathfrak{L}$ не р.л.к.

Заметим еще, что каждое локально конечное квазимногообразие $\mathfrak{L}$ любой сигнатуры является р.л.к. Действительно, для любого m в $\mathfrak{L}$ есть свободная алгебра F_m ранга m . Из локальной конечности $\mathfrak{L}$ следует конечность F_m . Пусть $a_1, \dots, a_m$ — какие-то элементы произвольной $\mathfrak{L}$ -алгебры A . Беря гомоморфизм $\tau: F_m \rightarrow A$, переводящий свободные порождающие F_m в элементы $a_1, \dots, a_m$, получим подалгебру $\tau(F_m) \subseteq A$, содержащую заданные

элементы $a_1, \dots, a_m$, мощность которой не превосходит числа $\Phi(m) = |F_m|$.

С помощью понятия равномерной локальной конечности можно сформулировать следующее добавление к теореме 2.2:

Т е о р е м а 4.3. *Для каждого конечно V-аксиоматизируемого подкласса $\mathfrak{L}$ равномерно $\mathfrak{K}$ -локально конечного класса моделей $\mathfrak{K}$ конечной сигнатуры Ω существует такая конечная последовательность $B_1, B_2, \dots, B_s$ конечных $\mathfrak{K}$ -моделей, что $\mathfrak{K}$ -модель A тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{L}$, когда ни одна из моделей $B_1, B_2, \dots, B_s$ не вкладывается в A .*

Согласно теореме 1.1 из конечной V-аксиоматизируемости в $\mathfrak{K}$ подкласса $\mathfrak{L}$ вытекает существование конечной последовательности $M_1, \dots, M_t$ конечных моделей сигнатуры Ω (не обязательно $\mathfrak{K}$ -моделей), которая обладает указанными в теореме 4.3 свойствами. Обозначим через m максимум мощностей моделей M_i , и пусть Φ — функция, упомянутая в определении равномерной локальной конечности. Так как сигнатура Ω конечна, то существует лишь конечная совокупность попарно неизоморфных $\mathfrak{K}$ -моделей, мощность которых не превосходит $\Phi(m)$. Пусть $B_1, \dots, B_r$ — все эти $\mathfrak{K}$ -модели. Пусть из них $B_{\alpha_{i1}}, \dots, B_{\alpha_{ir_i}}$ — те, в которые вложима модель M_i ($i = 1, \dots, t$).

Последовательность $\mathfrak{K}$ -моделей

$$B_{\alpha_{11}}, \dots, B_{\alpha_{1r_1}}, \dots, B_{\alpha_{t1}}, \dots, B_{\alpha_{tr_t}} \quad (13)$$

удовлетворяет всем требованиям доказываемой теоремы. Действительно, пусть $A \in \mathfrak{L}$. Тогда любая модель M_i , а вместе с нею и любая $\mathfrak{K}$ -модель $B_{\alpha_{ij}}$ не вложимы в A . Пусть, напротив, $A \in \mathfrak{K}$, $A \notin \mathfrak{L}$. Тогда некоторая модель M_i допускает вложение $\varphi: M_i \rightarrow A$. Так как $|\varphi(M_i)| \leq m$, то в A найдется $\mathfrak{K}$ -подмодель A_1 , для которой $|A_1| \leq m$ и $\varphi(M_i) \subseteq A_1$. Поскольку $A_1 \in \mathfrak{K}$, $|A_1| \leq m$ и существует вложение $\varphi: M_i \rightarrow A_1$, то модель A_1 изоморфна какой-то модели $B_{\alpha_{ij}}$ и, значит, не все модели совокупности (13) не вложимы в A .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. A. A. Tarski. Contributions to the theory of models, I, II, III.— Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1954, A57, 572—581, 582—588; 1955, A58, 58—64.
2. Г. Буркгоф. Теория структур. М., ИЛ, 1962, с. 198.
3. J. B. Kruskal. Well-quasi-ordering, the tree theorems and Vazsonyi's conjecture.— Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 95, N 2, 210—225.

I. Статьи в журналах и сборниках*

1. Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik.— *Мат. сб.*, 1936, 1, № 3, 323—335.
2. On the immersion of an algebraic ring into a field.— *Math. Ann.*, 1937, 113, 886—891.
3. Абелевы группы конечного ранга без кручения.— *Мат. сб.*, 1938, 4, № 1, 45—67.
4. О включении ассоциативных систем в группы.— *Мат. сб.*, 1939, 6, № 2, 331—336.
5. О включении ассоциативных систем в группы, II.— *Мат. сб.*, 1940, 8, № 2, 251—263.
6. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами.— *Мат. сб.*, 1940, 8, № 3, 405—421.
7. О локальных и полных топологических группах.— *Докл. АН СССР*, 1941, 32, № 9, 606—608.
8. Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп.— *Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та*, 1941, 1, № 1, 3—9.
9. Об односвязности нормальных делителей групп Ли.— *Докл. АН СССР*, 1942, 34, № 1, 12—15.
10. Подгруппы групп Ли в целом.— *Докл. АН СССР*, 1942, 36, № 1, 5—8.
11. О разложении алгебры в прямую сумму радикала и полупростой подалгебры.— *Докл. АН СССР*, 1942, 36, № 2, 46—50.
- 12*. О структуре групп Ли в целом.— *Докл. АН СССР*, 1942, 37, № 1, 3—6.
13. О линейных связных локально замкнутых группах.— *Докл. АН СССР*, 1943, 40, № 3, 108—110.
14. О представлениях бесконечных алгебр.— *Мат. сб.*, 1943, 13, № 2—3, 263—285.
- 15*. Ортогональные и симплектические представления полупростых групп Ли.— *Докл. АН СССР*, 1943, 41, № 8, 332—335.
16. О полупростых подгруппах групп Ли.— *Изв. АН СССР, сер. мат.*, 1944, 8, № 4, 143—174.
17. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли.— *Изв. АН СССР, сер. мат.*, 1945, 9, № 4, 291—300.
18. О разрешимых алгебрах Ли.— *Изв. АН СССР, сер. мат.*, 1945, 9, № 5, 329—352.
19. On the theory of the Lie groups in the large.— *Мат. сб.*, 1945, 16, № 2, 163—189; 1946, 10, № 3, 523.
20. Топологические разрешимые группы.— *Мат. сб.*, 1946, 19, № 2, 165—173.
21. Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова и Ю. М. Смирнова «Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов». — *Изв. АН СССР, сер. мат.*, 1947, 11, № 6, 567—568.

* Работы, отмеченные звездочкой, не включены в настоящее издание.

- 22*. Топологическая алгебра и группы Ли.— В кн.: Математика в СССР за 30 лет. М.— Л., Гостехиздат, 1948, с. 134—158.
23. О включении групповых алгебр в алгебры с делением.— Докл. АН СССР, 1948, 60, № 9, 1499—1501.
24. О нормированных алгебрах Ли над полем рациональных чисел.— Докл. АН СССР, 1948, 62, № 6, 745—748.
25. О группах конечного ранга.— Мат. сб., 1948, 22, № 2, 351—352.
- 26*. О бесконечных разрешимых группах.— Докл. АН СССР, 1949, 67, № 1, 23—25.
27. Об одном классе однородных пространств.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, 13, № 1, 9—32.
28. Нильпотентные группы без кручения.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, 13, № 3, 201—212.
29. Об упорядоченных группах.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, 13, № 6, 473—482.
30. Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы.— Мат. сб., 1949, 25, № 3, 347—366.
31. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями.— Мат. сб., 1950, 26, № 1, 19—33.
32. О доупорядочении групп.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1951, 38, 173—175.
33. О некоторых классах бесконечных разрешимых групп.— Мат. сб., 1951, 28, № 3, 567—588.
34. Симметрические группоиды.— Мат. сб., 1952, 31, № 1, 136—151.
35. Об одном представлении неассоциативных колец.— Успехи мат. наук, 1952, 7, № 1, 181—185.
36. Мультипликативные сравнения матриц.— Докл. АН СССР, 1953, 90, № 3, 333—335.
37. Нильпотентные полугруппы.— Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1953, 4, 107—111.
38. Об одном классе алгебраических систем.— Успехи мат. наук, 1953, 8, № 1, 165—171.
39. К общей теории алгебраических систем.— Мат. сб., 1954, 35, № 1, 3—20.
40. Аналитические луны.— Мат. сб., 1955, 36, № 3, 569—576.
41. Два замечания о нильпотентных группах.— Мат. сб., 1955, 37, № 3, 567—572.
42. Группы и другие алгебраические системы.— В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение. Т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1956, с. 248—331.
43. Замечание о частично упорядоченных группах.— Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1956, 10, 3—5.
44. О представлениях моделей.— Докл. АН СССР, 1956, 108, № 1, 27—29.
45. Квазипрimitивные классы абстрактных алгебр.— Докл. АН СССР, 1956, 108, № 2, 187—189.
46. Подпрямые произведения моделей.— Докл. АН СССР, 1956, 109, № 2, 264—266.
47. О производных операциях и предикатах.— Докл. АН СССР, 1957, 116, № 1, 24—27.
48. О классах моделей с операцией порождения.— Докл. АН СССР, 1957, 116, № 5, 738—741.

49. Свободные топологические алгебры. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1957, 21, № 2, 171—198.
50. О гомоморфизмах на конечные группы. — Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1958, 18, 49—60.
51. Определяющие соотношения в категориях. — Докл. АН СССР, 1958, 119, № 6, 1095—1098.
52. Структурная характеристика некоторых классов алгебр. — Докл. АН СССР, 1958, 120, № 1, 29—32.
53. О некоторых классах моделей. — Докл. АН СССР, 1958, 120, № 2, 245—248.
54. О малых моделях. — Докл. АН СССР, 1959, 127, № 2, 258—261.
55. Модельные соответствия. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1959, 23, № 3, 313—336.
56. Регулярные произведения моделей. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1959, 23, № 4, 489—502.
57. О неразрешимости элементарных теорий некоторых полей. — Сиб. мат. ж., 1960, 1, № 1, 71—77; 1961, 2, № 4, 639.
58. Об одном соответствии между кольцами и группами. — Мат. сб., 1960, 50, № 3, 257—266.
59. О свободных разрешимых группах. — Докл. АН СССР, 1960, 130, № 3, 495—498.
60. Конструктивные алгебры. I. — Успехи мат. наук, 1961, 16, № 3, 3—60.
61. Неразрешимость элементарной теории конечных групп. — Докл. АН СССР, 1961, 138, № 4, 771—774.
- 62*. Об элементарных теориях локально свободных универсальных алгебр. — Докл. АН СССР, 1961, 138, № 5, 1009—1012.
63. Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно опровержимых формул некоторых элементарных теорий. — Докл. АН СССР, 1961, 139, № 4, 802—805.
64. Об элементарных свойствах линейных групп. — В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск, Изд-во АН СССР, 1961, с. 110—132.
65. Аксиоматизируемые классы локально свободных алгебр некоторых типов. — Сиб. мат. ж., 1962, 3, № 5, 729—743.
66. Строго родственные модели и рекурсивно совершенные алгебры. — Докл. АН СССР, 1962, 145, № 2, 276—279.
67. О рекурсивных абелевых группах. — Докл. АН СССР, 1962, 146, № 5, 1009—1012.
68. О частично упорядоченных нильпотентных группах. — Алгебра и логика, 1962, 1, № 2, 5—9.
69. Об уравнении $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе. — Алгебра и логика, 1962, 1, № 5, 45—50.
70. Некоторые вопросы теории классов моделей. — Труды IV Всес. матем. съезда, т. 1. Ленинград, 1963, с. 169—198.
71. Полно нумерованные множества. — Алгебра и логика, 1963, 2, № 2, 4—29.
72. К теории вычислимых семейств объектов. — Алгебра и логика, 1964, 3, № 4, 5—31.
73. Позитивные и негативные нумерации. — Докл. АН СССР, 1965, 160, № 2, 278—280.
74. Итеративные алгебры и многообразия Поста. — Алгебра и логика, 1966, 5, № 2, 5—24.

75. Несколько замечаний о квазимногообразиях алгебраических систем.— *Алгебра и логика*, 1966, 5, № 3, 3—9.
76. Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп.— *Мат. сб.*, 1966, 69, № 1, 3—12.
77. Об одном усилении теорем Слупецкого и Яблонского.— *Алгебра и логика*, 1967, 6, № 3, 61—74.
78. Об умножении классов алгебраических систем.— *Сиб. мат. ж.*, 1967, 8, № 2, 346—365.
79. Универсально аксиоматизируемые подклассы локально конечных классов моделей.— *Сиб. мат. ж.*, 1967, 8, № 5, 1005—1014.
80. О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики.— *Международ. конгр. математиков*. Москва, 1966. М., «Мир», 1968, с. 217—231.
81. К истории алгебры в СССР за первые 25 лет.— *Алгебра и логика*, 1971, 10, № 1, 103—118.

II. Книги

82. Основы линейной алгебры. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
83. Основы линейной алгебры. Изд. 2-е, перераб. М., Гостехиздат, 1956.
84. *Foundations of linear algebra*. Transl. from Russian by T. C. Brown. San Francisco — London, W. H. Freeman and Co., 1963. Имеются пер. на япон. и кит. яз.
85. Рекурсивные функции. Ротапринт. Новосибирск, 1960.
86. Некоторые вопросы современной теории классов моделей. Ротапринт. Новосибирск, 1961.
87. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., «Наука», 1965.
88. Алгебраические системы. М., «Наука», 1970.
89. Основы линейной алгебры. Изд. 3-е, перераб. М., «Наука», 1970.
90. *The metamathematics of algebraic systems*. Collected papers: 1936—1967. Amsterdam, 1971.

III. Резюме, рецензии, научно-популярные статьи и другие публикации

91. Рец. на кн.: Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. М., 1938.— *Изв. АН СССР, сер. мат.*, 1941, 5, № 6, 445—447.
92. Рец. на кн.: А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. М.—Л., Гостехиздат, 1950.— «Сов. книга», 1952, № 12, 21—22.
93. Из доклада на Ивановской областной конференции сторонников мира.— *Газ. «Рабочий край»*, 1951, 16 сент.
94. Группы.— *БСЭ*, т. 13, 1952, с. 138.
95. Инварианты.— *БСЭ*, т. 17, 1952, с. 613.
96. Советская наука служит благородному делу мира.— *Газ. «Рабочий край»*, 1952, 5 окт.
97. Все силы — делу укрепления мира!— *Газ. «Рабочий край»*, 1953, 19 сент.
98. Мы — мирные люди.— *Газ. «Ленинец»*, 1954, 30 дек.
99. Алгебраические системы.— *Труды III Всес. матем. съезда*, т. 2. М., 1956, с. 8.
100. Защита мира — важнейшее дело человечества.— *Блокнот агитатора (Иваново)*, 1957, № 23.

101. О гомоморфизмах на конечные группы. — Успехи мат. наук, 1958, 13, № 3, 237—238.
102. Об одном соответствии между кольцами и группами. — Успехи мат. наук, 1959, 14, № 5, 208—209.
103. Великое движение современности. (К 10-летию Всемирного движения сторонников мира). — Газ. «Рабочий край», 1959, 19 апр.
104. Современное состояние теории классов моделей. — Труды IV Всес. матем. съезда. Л., 1961, с. 19—21.
105. Theories of the first order of some classes of groups and rings. — International Congress Mathematicians. Stockholm, 1962.
106. О теориях 1-й ступени некоторых классов групп и колец. — International Congress Mathematicians. Stockholm, 1962.
107. Сергей Николаевич Черников. (К 50-летию со дня рождения). — Успехи мат. наук, 1962, 17, № 5, 177—181 (совместно с В. С. Чариным).
108. Полные нумерации. — 5-й Всес. colloquium по общей алгебре. Резюме сообщ. и докл. Новосибирск, 1963, с. 38.
109. О некоторых вопросах теории конструктивных алгебр. — 5-й Всес. colloquium по общей алгебре. Резюме сообщ. и докл. Новосибирск, 1963, с. 38.
110. Предисловие к русскому изданию. — В кн.: Математическая логика и ее применение. М., «Мир», 1965.
111. Петр Григорьевич Конторович. (К 60-летию со дня рождения). — Успехи мат. наук, 1965, 20, № 4, 209—212 (совместно с Б. И. Плоткиным).
- 112*. О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики. — Междунар. конгр. математиков. Тезисы докл. по приглашению. М., 1966, с. 26.
113. О стандартных обозначениях и терминологии в теории алгебраических систем. — Алгебра и логика, 1966, 5, № 1, 71—77.
114. Сергей Антонович Чунихин. (К 60-летию со дня рождения). — Успехи мат. наук, 1967, 22, № 2, 189—197 (совместно с С. А. Сафоновым, С. Н. Черниковым и Л. А. Шеметковым).
115. Математика нужна всем. — Газ. «Правда», 1967, 29 янв.

СОДЕРЖАНИЕ



Исследования в области математической логики.	5
Об одном классе алгебраических систем	17
К общей теории алгебраических систем	23
О представлениях моделей	39
Квазипримитивные классы абстрактных алгебр	43
Подпрямые произведения моделей	47
О производных операциях и предикатах	51
О классах моделей с операцией порождения	56
Определяющие соотношения в категориях	60
Структурная характеристика некоторых классов алгебр.	64
О некоторых классах моделей	68
О малых моделях	73
Модельные соответствия	77
Регулярные произведения моделей	100
О неразрешимости элементарных теорий некоторых по- лей	113
Об одном соответствии между кольцами и группами	120
О свободных разрешимых группах	130
Конструктивные алгебры, I	134
Неразрешимость элементарной теории конечных групп . .	186
Эффективная неотделимость множества тождественно истин- ных и множества конечно опровержимых формул некото- рых элементарных теорий	191
Об элементарных свойствах линейных групп	195
Аксиоматизируемые классы локально свободных алгебр не- которых типов	216
Строго родственные модели и рекурсивно совершенные ал- гебры	230
О рекурсивных абелевых группах	235
Некоторые вопросы теории классов моделей	239
Полно нумерованные множества	275
К теории вычислимых семейств объектов	294
Позитивные и негативные нумерации	313
Итеративные алгебры и многообразия Поста	316

Несколько замечаний о квазимногообразиях алгебраических систем	331
Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп	336
Об одном усилении теорем Слупецкого и Яблонского	345
Об умножении классов алгебраических систем	355
Универсально аксиоматизируемые подклассы локально конечных классов моделей	373
Опубликованные работы А. И. Мальцева	382

АНАТОЛИЙ ИВАНОВИЧ МАЛЬЦЕВ

Избранные труды т. II

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Утверждено к печати

Институтом математики Сибирского отделения Академии наук СССР

Редактор издательства Н. Н. Бузина. Художник В. Г. Виноградов.
Художественный редактор В. А. Чернецов. Технический редактор П. С. Кашина.

Сдано в набор 14/I 1976 г. Подписано к печати 28/VI 1976 г.
Формат 70×100^{1/16}. Бумага № 2. Усл. печ. л. 31,28. Уч.-изд. л. 31,1
Тираж 4200 Т-09559. Тип. зак. 357. Цена 2 р. 42 к.

Издательство «Наука». 103717 ГСП. Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10