АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ им. Л. В. КИРЕНСКОГО

Л. А. АЙЗЕНБЕРГ
А. П. ЮЖАКОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ВЫЧЕТЫ В МНОГОМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск · 1979

УДК 517.55

Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Айзенберг Л. А., Южаков А. П. Новосибирск: Наука, 1979. 368 с.

Книга посвящена интегральным представлениям голоморфных функций многих комплексных переменных, многомерному логарифмическому вычету, теории многомерных вычетов. Приведены приложения к теории неявных функций, системам нелинейных уравнений, вычислению кратности нуля отображения и вычислению в замкнутом виде комбинаторных сумм. Рассмотрены некоторые приложения в многомерном комплексном анализе.

Монография рассчитана на специалистов по теоретической и прикладной математике, теоретической физике, аспирантов и студентов старших курсов, интересующихся многомерным комплексным анализом или его приложениями.

Ответственный редактор
кандидат физико-математических наук
Ш. А. Даутов

А $\frac{20203-899}{055(02)-79}$ 1.79.1702030000.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Интегральные представления и теория вычетов занимают важное место в многомерном комплексном анализе. В настоящее время эти разделы продолжают интенсивно развиваться и находят все новые приложения в самой теории функций и в других разделах математики, а также — в теоретической физике. Так, интегральное представление Хенкина — Рамиреза для функций, голоморфных в строго псевдовыпуклых областях, позволило получить ряд важных результатов теории голоморфных функций многих комплексных переменных.

Отметим также некоторую «несимметричность» в интегральных представлениях голоморфных функций многих переменных, существовавшую до 1967 г.,— функции представлялись с помощью интегрирования внешних дифференциальных форм. Эта «несимметричность» была устранена формулой Мартинелли — Бохнера — Коппельмана (формы представляются с помощью интегрирования форм), нашедшей ряд серьезных приложений в многомерном комплексном анализе. В частности, на основе этой формулы Г. М. Хенкин получил интегральное представление для решения $\bar{\partial}$-задачи в строго выпуклых областях, что позволило дать новое доказательство основных теорем Ока без использования теории пучков и теории дифференциальных операторов.

Недавно появилась интегральная формула Лере — Коппельмана весьма общего вида, содержащая в себе как всевозможные интегральные представления голоморфных функций, так и формулы многомерного логарифмического вычета (см. § 3). Поэтому в главе I приведены как интегральные представления общего вида, так и формулы логарифмического вычета. Заметим, что интегральные представления и вычеты тесно связаны между собой, так как опираются на формулу Стокса.

Теория многомерных вычетов, которая ведет свое начало от А. Пуанкаре, развивалась в различных направлениях и в настоящее время далека еще от завершения. При обобщении теории вычетов на многомерный случай возникают серьезные трудности топологического характера, поскольку для голоморфных функций многих комплексных переменных роль изолированных особых точек играют аналитические множества, которые могут иметь сложную топологическую структуру. Для преодоления этих трудностей приходится привлекать аппарат алгебраической топологии.

Многомерные вычеты наряду с известными приложениями в исследовании фейнмановских интегралов гомологическими методами, исследовании фундаментальных решений гиперболических уравнений с частными производными (Лере), недавно нашли применения к неявным функциям, системам нелинейных уравнений, в комбинаторном анализе. Эти новые приложения не нашли еще отражения в существующих руководствах по теории функций. Кроме того, в этих руководствах интегральные представления и вычеты функций многих комплексных переменных изложены недостаточно полно. Настоящая книга призвана заполнить этот пробел. Она возникла на основе спецкурсов, прочитанных авторами в Красноярском университете в 1965—1974 годах (см. [26, 218]).

Глава I содержит, как уже отмечалось, интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных и формулы многомерного логарифмического вычета, которые излагаются здесь с единой точки зрения.

В § 2 вводится определение кратности нуля голоморфного отображения, а также доказываются основные теоремы о нулях голоморфного отображения без использования результатов локальной теории аналитических множеств с помощью только свойств интегралов от замкнутых форм. В частности, доказывается дискретность компактного множества нулей голоморфного отображения. Как следствие в § 4 получена теорема Осгуда о биголоморфности взаимно однозначного голоморфного отображения.

Кроме того, в гл. I изложено интегральное представление Андреотти—Норге для производных голоморфной функции (§ 5) и интегральное представление Мартинелли — Бохнера — Коппельмана для внешних дифференциальных форм (§ 7).

Глава II посвящена интегральным представлениям специального вида, которые выведены из формулы Лере. Наиболее важные из них: формула Бергмана — Вейля (§ 9) для функций, голоморфных в аналитических полиэдрах, и формула Хенкина — Рамиреза (§ 10) для функций, голоморфных в строго псевдовыпуклых областях. Несколько особняком стоит § 12, в котором рассматривается интегральное представление для голоморфных функций с неотрицательной действительной частью (обобщение классической формулы Рисса — Херглотца).

В этой книге рассматриваются интегральные представления только для ограниченных областей, что вызвано личными вкусами авторов (об интегральных представлениях в неограниченных областях см., например, работы [52—54, 60—62, 224, 236]).

В главе III излагается теория многомерных вычетов. Сформулирована задача теории многомерных вычетов (§ 13) и указаны некоторые пути ее решения, вытекающие из формулы Стокса, интегральной теоремы Коши—Пуанкаре, топологической двойственности Александера—Понтрягина (§ 14) и двойственности де Рама (§ 15). Далее (§ 16—17) приведены основные результаты из теории вычетов на комплексном аналитическом многообразии (теории вычетов Лере). Заканчивается эта глава применением двойственности Александера — Понтрягина и двойственности де Рама к вычислению вычетов мероморфных и рациональных форм (§ 18—19).

В книге не отражены результаты, относящиеся к распространению теории вычетов Лере на формы, имеющие особенности на подмногообразиях коразмерности больше

1, вычеты потоков, а также абстрактная теория вычетов' изучающая двойственные гомоморфизмы групп гомологий и когомологий замкнутого подмножества в многообразии и его дополнения, вычеты Гротендика, вычеты Дальбо полумероморфных форм.

Глава IV посвящена так называемым «внешним» приложениям различных формул многомерного логарифмического вычета и просто вычетов, найденным за последние годы в основном красноярскими математиками.

В § 20 рассмотрены приложения кратного логарифмического расчета для представления неявных функций многих переменных, определяемых системами уравнений, в частности обращения голоморфного отображения в виде кратных степенных и функциональных рядов (многомерные аналоги разложения Лагранжа; Бурмана — Лагранжа); даны оценки областей сходимости этих рядов. Рассмотрены некоторые случаи выделения однозначных ветвей многозначных неявных функций, получены эффективные формулы для коэффициентов псевдополинома Вейерштрасса.

В § 21 формулы кратного логарифмического вычета применяются к системам нелинейных уравнений, в частности к решению задачи исключения неизвестных в системах алгебраических уравнений; получены многомерные аналоги формулы Варинга, выражающей степенные суммы корней уравнений через их коэффициенты.

§ 22 посвящен нахождению кратости нуля системы голоморфных функций по тейлоровским разложениям этих функций. При этом снова основным аппаратом исследования является теория кратных вычетов.

В § 23 многомерные вычеты применяются для нахождения производящих функций и вычисления различных комбинаторных сумм в замкнутом виде.

Глава V содержит некоторые «внутренние» приложения в основном интегральных представлений к задачам многомерной теории функций. Обсуждаются вопросы голоморфного продолжения с границы области на всю область и вопросы разложения голоморфных функций в ряды полиномов или «простейших» дробей (§ 24). В § 25 приведены доказательства основных теорем Ока без использования теории пучков и теории дифференциальных операторов.

Текст этого параграфа написан Ш. А. Даутовым на основе неопубликованной рукописи Г. М. Хенкина, любезно предоставившего ее авторам. Вообще идеи Г. М. Хенкина оказали большое влияние на содержание I, II и V глав настоящей книги. В § 26 содержатся данные об описании форм, ортогональных голоморфным функциям при интегрировании по границе области, общем виде формул интегральных представлений голоморфных функций и логарифмического вычета, о разрешимости уравнения Г. Леви. § 27 посвящен базисам в пространствах голоморфных функций с фиксированными алгебраическими особенностями.

Небольшой объем книги не позволил авторам привести многие другие приложения интегральных представлений и вычетов. Здесь прежде всего следует упомянуть работы Ж. Лере по дифференциальным уравнениям, а также приложения вычетов к исследованию фейнмановских интегралов. О ряде других работ упомянуто в разделе «Краткие исторические сведения».

Укажем что § 1, 3, 5—12, 21, 24 написаны Л. А. Айзенбергом, § 2, 4, 13—20, 23, 27 — А. П. Южаковым, § 25, 26 — Ш. А. Даутовым, а § 22 — А. К. Цихом. Авторы благодарят Г. М. Хенкина и редактора книги Ш. А. Даутова за многочисленные полезные исправления и изменения текста.

Кроме того, авторы пользуются случаем поблагодарить В. А. Болотова, А. М. Кытманова, Е. С. Мкртчяна, М. А. Мкртчяна, В. А. Степаненко и А. К. Циха за помощь при подготовке рукописи в печать.

Авторы

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1°. **Интегрирование дифференциальных форм. Формула Стокса.** Мы считаем, что читатель знаком с понятиями дифференцируемого и комплексного аналитического многообразия (см., например, [133, 144, 189]). *Дифференциальная форма* ω *степени* p (p-форма) *на дифференцируемом многообразии*[1] X в окрестности каждой точки $a \in X$ в локальных координатах $x = (x_1, \ldots, x_n)$ представляется в виде

$$\omega(x) = \sum_J a_J(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, \tag{0.1}$$

где $J = (i_1, \ldots, i_p)$, $1 \leqslant i_j \leqslant n$; $a_J(x)$ — вещественные либо комплексные функции от x; $\wedge$ — знак внешнего умножения, удовлетворяющий условию антиперестановочности:

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i,\ i \neq j,\ dx_i \wedge dx_i = 0. \tag{0.2}$$

Представление (0.1) p-формы ω в приведенном виде, когда $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$, однозначно. При переходе к другим локальным координатам $y = (y_1, \ldots, y_n)$ выражения (0.1) преобразуются к виду

$$\sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_p \leqslant n} \left[\sum_J a_J(x(y)) \frac{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})}{\partial (y_{j_1}, \ldots, y_{j_p})} \right] dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_p}.$$

[1] Точное определение дифференциальной формы, а также более подробное изложение материала этого пункта можно найти в книгах [102, 133, 158, 161, 218].

Дифференциальные формы можно складывать и умножать на функции. Для них определена операция *внешнего умножения*, которое в локальных координатах осуществляется по правилу умножения многочленов с учетом условия (0.2). Из (0.2) вытекает следующее свойство внешнего произведения: $\omega \wedge \varphi = (-1)^{pq} \varphi \wedge \omega$, где p, q — степени форм ω, φ. Говорят, что ω — *дифференциальная форма класса* $C^{(r)}$, если ее коэффициенты $a_J(x)$ в приведенном локальном представлении (0.1) r раз непрерывно дифференцируемы. Форма ω называется *регулярной*, *если* $r = \infty$. *Линейное пространство p-форм класса* $C^{(r)}$ *на многообразии* X обозначим $C_p^{(r)}(X)$. Часто, следуя книге Лере [113], *пространство* $C_p^{(\infty)}(X)$ *регулярных p-форм* будем обозначать также $\Omega^p(X)$.

Оператор *внешнего дифференцирования* d каждой форме $\omega \in C_p^{(r)}(X)$ ставит в соответствие форму $d\omega \in C_{p+1}^{(r-1)}(X)$, которая в локальных координатах определяется формулой

$$d\omega = \sum_J da_J(x) \wedge dx_J, \tag{0.3}$$

где $da_J = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_J}{\partial x_i} dx_i$, $dx_J = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$.

Свойства внешнего дифференциала: 1) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$; 2) $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^p \omega \wedge d\varphi$, где p — степень формы ω; 3) $dd\omega = 0$. Дифференциальная форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, и соответственно, *точной*, если $\omega = d\varphi$ для некоторой формы φ. Множество замкнутых регулярных p-форм обозначим $Z^p(X)$, точных — $B^p(X)$. Из свойств внешнего дифференциала 1) — 3) следует включение групп (векторных пространств): $B^p(X) \subset Z^p(X) \subset \Omega^p(X)$.

Фактор-группа $H^p(X) = Z^p(X)/B^p(X)$ называется *группой p-мерных когомологий де Рама многообразия X*. Ее элементы называются *классами когомологий*. Две формы ω_1, ω_2, принадлежащие одному классу когомологий, называются *когомологичными* ($\omega_1 \approx \omega_2$).

Бесконечно дифференцируемое отображение многообразий

$$f : X \to Y \tag{0.4}$$

индуцирует голоморфизмы групп

$$\tilde{f} : \Omega^p(Y) \to \Omega^p(X),\ f^* : H^p(Y) \to H^p(X),$$

определяемые следующим образом. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — локальные координаты в окрестностях U_a, V_b точек $a \in X$, $b = f(a) \in Y$ и форма $\omega \in \Omega^p(Y)$ представлена в виде $\omega(y) = \sum_J a_J(y)\, dy_{i_1} \wedge \ldots, \wedge dy_{i_p}$. Тогда в U_a

$$\tilde{f}(\omega)(x) = \omega(f(x)) = \sum_J a_J(y(x))\, dy_{i_1}(x) \wedge \ldots \wedge dy_{i_p}(x),$$

где $dy_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j$. Так как $d \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ d$, то $\tilde{f}$ индуцирует фактор-гомоморфизм f^*.

На комплексном аналитическом многообразии Z в локальных координатах $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \ldots, n$, в качестве базисных дифференциалов вместо dx_j, dy_j берут их линейные комбинации $dz_j = dx_j + i dy_j$ и $d\bar{z}_j = dx_j - i dy_j$. Форма $\omega \in C^{(\infty)}_{p+q}(Z)$ называется *формой типа* (p, q), если в произвольной локальной системе координат $z = (z_1, \ldots, z_n)$ она имеет вид $\omega = \sum_{J, \mathcal{J}} a_{J, \mathcal{J}}(z)\, dz_J \wedge d\bar{z}_{\mathcal{J}}$, где $dz_J = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}$; $d\bar{z}_{\mathcal{J}} = d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q}$. Класс этих форм обозначим $C^{(\infty)}_{p,q}(Z)$. Аналогично вводится класс $C^{(r)}_{p,q}(Z)$. Если $r = 0$, то будем писать просто $C_{q,p}(Z)$. Форма называется *голоморфной*, если она типа $(p, 0)$ и ее коэффициенты — голоморфные функции.

Мы будем рассматривать интегралы от дифференциальных форм по кусочно-гладким ориентированным поверхностям на многообразии X. Чтобы можно было применять аппарат алгебраической топологии, поверхность предполагаем разбитой на части — сингулярные симплексы.

Сингулярным гладким p-мерным симплексом (p-симплексом) *на дифференцируемом многообразии* X называется пара $\sigma_p = (\Delta_p, g)$, где Δ_p — прямолинейный симплекс в R^p, например: $\Delta_p = \{t = (t_1, \ldots, t_p) \in R^p : t_j \geqslant 0, t_1 + \ldots + t_p \leqslant 1\}$; $g : \Delta_p \to X$ — непрерывно дифференцируемое отображение. При этом симплексу приписывается некоторая *ориентация*, определяемая порядком координат $t_1, \ldots, t_p$. Если в окрестности Δ_p выбраны другие координаты $\tau_1, \ldots, \tau_p$, то они определяют ту же ориентацию, если $\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial (t_1, \ldots, t_p)}{\partial (\tau_1, \ldots, \tau_p)} > 0$, и противоположную, если $\frac{\partial t}{\partial \tau} < 0$. Симплекс σ_p, взятый с противоположной ориентацией, считаем равным $-\sigma_p$. Конечная линейная комбинация ориентированных гладких сингулярных p-симплексов

$$c_p = \sum_i m_i \sigma_p^{(i)}, \tag{0.5}$$

где m_i — целые числа[2], называется *гладкой сингулярной p-цепью*. Множество p-цепей на многообразии X образует абелеву группу $C_p(X)$. *Носителем симплекса* $\sigma_p = (\Delta_p, g)$ назовем множество $|\sigma_p| = g(\Delta_p)$, *носителем цепи* (0,5) — множество $|c_p| = \bigcup_{m_i \neq 0} |\sigma_p^{(i)}|$. *Гранью сингулярного p-симплекса* σ_p называется $(p-1)$-симплекс $\sigma_{p-1}^{(i)} = \left(\Delta_{p-1}^{(i)}, g\big|_{\Delta_{p-1}^{(i)}}\right)$, где $\Delta_{p-1}^{(i)}$ — $(p-1)$-мерная грань прямолинейного симплекса Δ_p. Выберем систему координат $t_1, \ldots, t_p$ в $R^p \supset \Delta_p$, определяющую ориентацию σ_p так, чтобы грань $\Delta_{p-1}^{(i)}$ лежала в плоскости $t_1 = 0$ и в точках $t \in \Delta_p$ было $t_1 \leqslant 0$. Тогда параметры $t_2, \ldots, t_p$ определят *ориентацию грани* $\sigma_{p-1}^{(i)}$, *когерентную ориентации* σ_p. *Границей ориентированного симплекса* σ_p называется $(p-1)$-цепь, образованная суммой его когерентно ориентированных граней: $\partial \sigma_p = \sum_{i=0}^{p} \sigma_{p-1}^{(i)}$. *Граница цепи* (0.5)

[2] Иногда удобно рассматривать цепи с вещественными или комплексными коэффициентами (см. § 15).

определяется формулой $\partial c_p = \sum_i m_i \partial\sigma_p^{(i)}$. Имеет место свойство

$$\partial\partial c_p = 0. \tag{0.6}$$

Цепь $\gamma \in C_p(X)$ называется *циклом*, если $\partial\gamma = 0$. Свойство (0.6) означает, что граница цепи есть цикл. Цикл γ называется *гомологичным нулю* ($\gamma \sim 0$), если существует цепь c, для которой $\partial c = \gamma$. Обозначим $Z_p(X) = \{\gamma \in C_p(X) : \partial\gamma = 0\}$; $B_p(X) = \{\partial c : c \in C_{p-1}(X)\}$. Фактор-группа $H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X)$ называется *группой р-мерных гладких сингулярных гомологий многообразия* X. Для дифференцируемых многообразий группы гладких сингулярных гомологий изоморфны группам гомологий, определяемых другими способами (см. [114, с. 434]). Данное здесь определение гладких сингулярных гомологий годится также для кусочно-гладкого многообразия. Цикл γ называется *слабо гомологичным нулю* ($\gamma \approx 0$), если $k\gamma \sim 0$ для некоторого целого числа k. Фактор-группа группы $Z_p(X)$ по подгруппе циклов, слабо гомологичных нулю, называется *группой слабых гомологий*. В интересующих нас случаях она совпадает с $H_p(X)$. Будем ее также обозначать $H_p(X)$. Если $H_p(X)$ — группа с конечным числом образующих, то ее размерность называется *р-мерным числом Бетти многообразия* X. Система циклов $\{\gamma_j\} \subset Z_p(X)$ называется *базой р-мерных гомологий*, если любой цикл $\gamma \in Z_p(X)$ однозначно представляется в виде $\gamma \approx \sum_j m_j\gamma_j$, где m_j — целые числа. Отображение многообразий (0.4) каждому симплексу $\sigma_p = (\Delta_p, g)$ в X ставит в соответствие симплекс $f(\sigma_p) = (\Delta_p, f\circ g)$ в Y. Тем самым определяется гомоморфизм $f : C_p(X) \to C_p(Y)$, а так как $f\circ\partial = \partial\circ f$, то и гомоморфизм $f_* : H_p(X) \to H_p(Y)$.

Интеграл от р-формы ω *класса* $C^{(0)}$ *по гладкому р-симплексу* $\sigma_p = (\Delta_p, g)$ определяется равенством

$$\int_{\sigma_p} \omega = \int_{\Delta_p} \tilde{g}(\omega) = \int_{|\Delta_p|} A(t)\, dt_1 \ldots dt_p, \tag{0.7}$$

где $A(t)dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p = \tilde{g}(w)$ — форма на $\Delta_p \subset R^p$. Если форма представлена в виде (0.1), то $A(t) = \sum_J a_J(x(t)) \times \times \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})}{\partial(t_1, \ldots, t_p)}$. Последний интеграл в равенстве (0.7) понимается как обычный p-кратный интеграл в $\boldsymbol{R}^p$. Очевидно, определение (0.7) инвариантно относительно выбора локальных координат на многообразии и параметризации симплекса σ_p. *Интеграл от формы* ω *по цепи* (0.5) определяется равенством

$$\int_{c_p} \omega = \sum_i m_i \int_{\sigma_p^{(i)}} \omega. \tag{0.8}$$

Заметим, что всякую кусочно-гладкую ориентированную компактную поверхность на многообразии X можно разбить на гладкие симплексы, т. е. представить как цепь $c_p \in C_p(X)$.

Из определения гомоморфизмов $\widetilde{f}$ и $\underset{\sim}{f}$ и формул (0.7), (0.8) вытекает

Теорема 0.1 (формула замены переменных). *Если* $f: X \to Y$ — *отображение многообразий*, $\gamma \in C_p(X)$, *то для всякой формы* ω *класса* $C^{(0)}$ *на многообразии* Y

$$\int_\gamma \widetilde{f}(\omega) = \int_{\underset{\sim}{f}(\gamma)} \omega.$$

Таким образом, гомоморфизмы $\widetilde{f}$ и $\underset{\sim}{f}$ двойственны относительно интегрирования. Двойственность гомоморфизмов d и ∂ устанавливает

Теорема 0.2 (формула Стокса). *Если* ω — p-*форма класса* $C^{(1)}$ *на многообразии* X *и* $c \in C_{p-1}(X)$, *то*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

Следствие 0.3. *Интеграл от точной формы по циклу равен нулю.*

Следствие 0.4. *Интеграл от замкнутой формы по циклу, слабо гомологичному нулю, равен нулю.*

Следствие 0.5. *Если $\gamma_1 \approx \gamma_2$ и $\omega_1 = \omega_2 + d\varphi$, то*

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega_1.$$

Следствие 0.5. позволяет определить интеграл от класса когомологий $h^* = \{\omega\} \in H^p(X)$ по классу гомологий $h_* = \{\gamma\} = H_p(X)$ равенством

$$\int_{h_*} h^* = \int_{\gamma} \omega.$$

В дальнейшем часто придется рассматривать ограниченные области D комплексного пространства C^n переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$, где $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \ldots, n$. Будем считать, что C^n ориентировано так, чтобы

$$\int_D dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n = \left(-\frac{i}{2}\right)^n \int_D d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n > 0.$$

Границе ∂D области D приписываем ориентацию, индуцированную ориентацией D. Если $D = \{z : \rho(z) < 0\}$, где ρ — действительно-значная функция класса $C^{(r)}$ в окрестности ∂D и $\operatorname{grad} \rho = \left(\rho'_{z_1}, \ldots, \rho'_{z_n}\right) \neq 0$ на ∂D, то будем писать $\partial D \in C^{(r)}$. Согласно формуле Стокса,

$$(-i)^n \int_{\partial D} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \bar{\zeta}_k d\bar{\zeta}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{\zeta}_{k-1} \wedge d\bar{\zeta}_{k+1} \wedge \ldots \wedge d\bar{\zeta}_n \wedge d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n > 0.$$

Заметим, что в работах [51, 172] принята такая ориентация C^n, что

$$\int_D dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n = \left(-\frac{i}{2}\right)^n \int_D d\bar{z}_1 \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_n > 0.$$

Легко видеть, что интегралы, вычисленные при данной ориентации и ориентации, принятой нами, отличаются множителем $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Как частный случай следствия 0.4 получается

Теорема 0.6 (Коши — Пуанкаре). *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $D \subset C^n$. Тогда для любой $(n+1)$-цепи σ в D интеграл*

$$\int\limits_{\partial\sigma} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial\sigma} f(z_1, \ldots, z_n)\,dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n = 0.$$

Из формулы Стокса и свойства внешнего дифференциала вытекают следующие *формулы интегрирования по частям.*

Предложение 0.7. *Пусть $\varphi \in \Omega^p(X)$, $\psi \in \Omega^q(X)$, $\gamma \in C_{p+q+1}(X)$, тогда*

$$\int\limits_{\gamma} d\varphi \wedge \psi = \int\limits_{\partial\gamma} \varphi \wedge \psi - (-1)^p \int\limits_{\gamma} \varphi \wedge d\psi.$$

Если $\gamma \in Z_{p+q+1}(X)$, то $\int\limits_{\gamma} d\varphi \wedge \psi = (-1)^{p-1} \int\limits_{\gamma} \varphi \wedge d\psi$.

Предложение 0.8. *Пусть функции $f(z)$, $\varphi(z)$ голоморфны в области $D \subset C^n$, $\gamma \in Z_n(D)$. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z_j} \varphi dz = -\int\limits_{\gamma} f \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} dz,$$

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^{\alpha}} \varphi dz = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\gamma} f \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial z^{\alpha}} dz,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$; $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^{\alpha}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_n^{\alpha_n}}$.

Пусть D — ограниченная область в C^n с кусочно-гладкой границей ∂D и области D_1, D_1' таковы, что $D_1' \Subset D_1 \Subset D$ (обозначение см. в разд. 5°). На $\overline{D}\setminus\overline{D_1'}$ задана внешняя дифференциальная форма α размерности $2n-1$, непрерывная в $\overline{D}\setminus\overline{D_1'}$ и замкнутая в области $D\setminus\overline{D_1'}$. Область D можно аппроксимировать изнутри многогранниками D_m, $m = 2, 3, \ldots$, $D_1 \subset D_m$, так, чтобы для всякой непрерывной в $\overline{D}\setminus\overline{D_1'}$ формы β степени $2n-1$ выполнялось $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{\partial D_m} \beta = \int\limits_{\partial D} \beta$. С другой стороны, по следствию 0.5

$$\int\limits_{\partial D_m} \alpha = \int\limits_{\partial D_l} \alpha,$$

значит, верно

Следствие 0.9. *При сделанных предположениях*

$$\int\limits_{\partial D_1} \alpha = \int\limits_{\partial D} \alpha.$$

Это следствие часто используется ниже при доказательстве справедливости различных интегральных представлений.

Иногда у нас будут встречаться двойные формы $\omega(\zeta, z)$, т. е. формы по z, коэффициенты которых есть (обычные) формы по ζ, или формы по ζ, коэффициенты которых — формы по z. В связи с этим мы считаем, что дифференциалы переменных z перестановочны с дифференциалами переменных ζ. Подробнее о двойных формах см. в работе [144].

2°. **Некоторые предложения анализа и алгебры.** Обозначим $C^{(m,\lambda)}$ класс функций m раз непрерывно дифференцируемых, причем все производные порядка m удовлетворяют условию Гельдера с показателем λ. Аналогично определяется условие $\partial D \in C^{(m,\lambda)}$, где ∂D — граница ограниченной области в C^n.

Предложение 0.10. *Пусть* $\partial D \in C^{(m+1,\lambda)}$ *и* $f \in C^{(m,\lambda)}(\partial D)$, $m \geqslant 0$ *и* $0 < \lambda \leqslant 1$, *тогда функции, определяемые интегралом*

$$\int\limits_{dD_\zeta} \frac{f(\zeta)\, d\overline{\zeta}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{\zeta}_{h-1} \wedge d\overline{\zeta}_{h+1} \wedge \ldots \wedge d\overline{\zeta}_n \wedge d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{(|\zeta_1 - z_1|^2 + \ldots + |\zeta_n - z_n|^2)^{n-1}}$$

внутри и вне области, продолжаются на замыкание соответствующего открытого множества как функции класса $C^{(m+1,\,\lambda')}$, *а функции, определенные интегралом*

$$\int\limits_{D_\zeta} \frac{f(\zeta) d\overline{\zeta}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{\zeta}_n \wedge d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{(|\zeta_1 - z_1|^2 + \ldots + |\zeta_n - z_n|^2)^{n-1}},$$

— *как функции класса* $C^{(m+2,\lambda')}$, *где* $0 < \lambda' < \lambda$ (см., например, [69, с. 124, 127]).

Пусть X и Y — дифференцируемые многообразия и $f: X \to Y$ — отображение класса $C^{(1)}$. Точка $p \in X$ называется критической точкой отображения f, если $\min(\dim X, \dim Y) > \operatorname{rank}(df)_p$, где $(df)_p$ — дифференциал отображения f в точке p. Множество значений отображения f на критических точках назовем складкой и обозначим $\operatorname{wr}(f)$.

Теорема 0.11 (Сард). *Если* $\dim X = \dim Y$, *то лебегова мера* $\operatorname{wr}(f)$ *в* Y *равна нулю. Если* $X \in C^{(\infty)}$, $Y \in C^{(\infty)}$, $f \in C^{(\infty)}$, *то также лебегова мера складки* $\operatorname{wr}(f)$ *в* Y *равна нулю.*

В числовой определитель входят только операции сложения и умножения, поэтому можно ввести определитель, элементами которого будут элементы произвольного кольца. Такой определитель раскрывается по обычным правилам, причем место каждого сомножителя в членах суммы зафиксировано номером столбца, которому этот сомножитель принадлежит. В связи со способом раскрытия определителя удобно ввести следующее обозначение: пусть $\theta^1, \ldots, \theta^m$ — n-мерные векторы, тогда $D_{\nu_1,\ldots,\nu_m}(\theta^1, \ldots, \theta^m)$ — определитель порядка n, первыми ν_1 столбцами которого являются векторы θ^1, вторыми ν_2 столбцами — векторы θ^2 и т. д., последними ν_m столбцами — векторы θ^m, $\nu_1 + \ldots + \nu_m = n$.

Приведем несколько свойств определителей, необходимых для дальнейшего.

Свойство 0.12. *Если поменять местами две строки, то определитель изменит свое значение на противоположное. Если все элементы некоторого столбца перестановочны со всеми элементами соседнего столбца, то при перестановке этих столбцов определитель изменит свое значение на противоположное, если же они антиперестановочны, то определитель не изменится.*

Пусть далее определитель составлен из элементов кольца двойных внешних дифференциальных форм. Его строки назовем *линейно-зависимыми*, если некоторая их линейная комбинация с коэффициентами-функциями обращается в нуль, причем для каждой точки области задания определителя хотя бы один из коэффициентов не обращается в нуль.

Свойство 0.13. *Если все элементы какого-нибудь столбца (строки) умножить на одну и ту же функцию, то определитель умножится на эту функцию. Если строки определителя линейно-зависимы, то определитель равен* 0.

Если формы α_i, $i = 1, \ldots, m$, класса $C^{(1)}$ степени q_i по z, то

$$\overline{\partial}_z(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{q_1+\ldots+q_{i-1}} \alpha_1 \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge \alpha_{i-1} \wedge \overline{\partial}_z \alpha_i \wedge \alpha_{i+1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m.$$

Отсюда получаем (здесь и ниже $\overline{\partial}_z \theta = (\overline{\partial}_z\, \theta_1, \ldots, \overline{\partial}_z\, \theta_n)$)

Свойство 0.14. *Если элементами столбцов* θ^i, $i = 1, \ldots, n$, *определителя являются двойные формы класса* $C^{(1)}$ *степени* q_i *по* z, *то*

$$\overline{\partial}_z D_{1,\ldots,1}(\theta^1, \ldots, \theta^n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{q_1+\ldots+q_{i-1}} D_{1\ldots1}\, (\theta^1, \ldots$$
$$\ldots, \theta^{i-1}, \overline{\partial}_z \theta^i, \theta^{i+1}, \ldots, \theta^n).$$

В дальнейшем мы будем пользоваться простейшими понятиями теории меры, не объясняя, например, слова «конечная борелевская мера» или sup относительно данной меры μ (обозначения $\underset{\mu}{\mathrm{vrai\,sup}}$). Используется также понятие: разбиение единицы, подчиненное данному покрытию [133].

3.° Относительно сведений из теорий функций. Предполагается, что читатель знаком с простейшими свойствами голоморфных функций многих комплексных переменных. Их можно найти в первых главах учебников [51, 57, 148, 173, 189, 201, 26]. Например, считается известным, что голоморфная в области функция раскладывается в окрестности каждой точки этой области в кратный степенной ряд и голоморфное отображение с отличным от нуля якобианом локально обратимо. Предполагается также, что читатель знаком с понятиями оболочки голоморфности $\mathscr{H}(D)$ области D, комплексной прямой, комплексной гиперплоскости, круговой области, n-круговой области.

Напомним, что если $f(z_1, \ldots, z_n)$ — голоморфное отображение области $D \subset C^n$ в пространство той же комплексной размерности, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_k = u_k + iv_k$, $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \ldots, n$, то

$$\left|\frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (z_1, \ldots, z_n)}\right|^2 = \frac{\partial (u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)}.$$

Если граница ∂D области D кусочно-гладка, форма $\alpha \in C_{n, n-1}(\partial D)$ является $\bar\partial$-точной, т. е. на ∂D справедливо равенство $\alpha = \bar\partial\beta$, где $\beta \in C^{(1)}_{n,n-2}(\partial D)$, а функция f голоморфна на $\bar D$, то по формуле Стокса (см. следствие 0.3)

$$\int_{\partial D} f\alpha = \int_{\partial D} f\bar\partial\beta = \int_{\partial D} \bar\partial (f\beta) = \int_{\partial D} d (f\beta) = 0.$$

Пусть функция f голоморфна в окрестности точки a. *Порядком нуля $d_a(f)$ функции f в точке a* называется наименьшая степень (по совокупности переменных) членов ряда Тейлора этой функции в данной точке, коэффициенты которых отличны от нуля.

4°. Некоторые понятия и факты алгебраической топологии [3] нам потребуются в § 14, 16, 18 гл. III. В топо-

[3] См., например, [30, 114, 157, 163, 175].

логии для произвольных топологических пространств определяются *группы сингулярных гомологий* точно так же, как были определены в п. 2° гладкие сингулярные гомологии с той лишь разницей, что в определении сингулярного симплекса $\sigma_p = (\Delta_p, g)$ отображение g предполагают непрерывным, а ориентацию σ_p задают порядком вершин симплекса Δ_p.

Топологическое пространство X называется *полиэдром*, если оно допускает *триангуляцию*, т. е. может быть разбито на невырожденные симплексы [4] $\sigma_p^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, p = 0, 1, \ldots,$ внутренности которых попарно не пересекаются. Семейство $K(X) = \{\sigma_p^{(i)}\}$ называется *симплициальным комплексом полиэдра* X. Для полиэдра вводится понятие *группы гомологий симплициального комплекса*, которая определяется обычным образом, но лишь на симплексах, входящих в $K(X)$. Группы гомологий симплициального комплекса полиэдра изоморфны группам сингулярных гомологий этого полиэдра, и, следовательно, инвариантны относительно триангуляции. Так как дифференцируемое многообразие допускает гладкую триангуляцию, для него все три приведенные выше определения групп гомологий эквивалентны. Иногда вместо симплициального комплекса удобнее рассматривать *клеточный комплекс* — разбиение полиэдра на клетки $\sigma_p = (M_p, g)$, где M_p — многогранник в R^p, а $g: M_p \to X$ — непрерывное отображение, являющееся гомеоморфизмом внутри M_p.

Для симплициального и клеточного комплексов компактного полиэдра X имеет место следующая *формула Эйлера — Пуанкаре*:

$$\sum_{q=1}^{n} (-1)^q \alpha_q = \sum_{q=1}^{n} (-1)^q \beta_q, \tag{0.9}$$

где α_q — число q-мерных симплексов (клеток комплекса $K(X)$); β_q — q-мерное число Бетти полиэдра X; $n = \max\{q : \alpha_q \neq 0\}$ — размерность X.

[4] Симплекс $\sigma_p = (\Delta_p, g)$ невырожден, если $g: \Delta_p \to X$ — гомеоморфизм.

Из определения групп гомологий легко вытекают

Предложение 0.15. *Если X — линейно связное пространство*, то $H_0(X) \simeq Z$, *где Z — группа целых чисел.*

Предложение 0.16. *Если $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, где X_α, $\alpha \in A$, — линейно-связные компоненты пространства X, то $H_p(X) = \bigoplus_{\alpha \in A} H_p(X_\alpha)$.*

Предложение 0.17. *Для n-мерной сферы $S^n = \{x \in R^{n+1} : |x| = 1\}$ группы гомологий*

$$H_p(X) = \begin{cases} Z, \text{ если } p = 0, n, \\ 0, \text{ если } p \neq 0, n. \end{cases}$$

Можно показать, что двумерное ориентируемое многообразие S гомеоморфно некоторому 4ρ-угольнику $\sigma_2 = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_\rho b_\rho a_\rho^{-1} b_\rho^{-1}$, у которого стороны в каждой четверке попарно отождествлены через одну и с противоположными относительно обхода по границе σ_2 (сфера с ρ «ручками»). Целое число ρ называется *родом многообразия* (поверхности).

Предложение 0.18. *Группы гомологий двумерного ориентируемого многообразия S рода ρ*

$$H_0(S) \simeq H_2(S) \simeq Z; \quad H_1(S) \simeq \underbrace{Z \oplus \ldots \oplus Z}_{2\rho};$$

базу одномерных гомологий S образуют одномерные клетки $a_1, b_1, \ldots, a_\rho, b_\rho$, называемые «каноническими разрезами» S.

Два непрерывных отображения $f, g : X \to Y$ называются *гомотопными* $f \approx g$, если существует непрерывное отображение $F(x, t) : X \times [0, 1] \to Y$, для которого $F(x, 0) = f(x)$; $F(x, 1) = g(x)$.

Множество A пространства X называется *ретрактом* X, если существует непрерывное отображение $f : X \to A$, для которого $f|_A = 1_A$ — тождественное отображение. A — *деформационный ретракт* X, если $f \circ i \approx 1_x : X \to X$, где i — вложение $A \subset X$.

Теорема 0.19. *Если* $f \approx g : X \to Y$, то $f_* = g_* : H_p(X) \to H_p(Y)$.

Следствие 0.20. *Если* A *— деформационный ретракт пространства* X, *то* $H_p(A) \simeq H_p(X)$.

Пусть A — подпространство пространства X. *Группой относительных цепей пары* (X, A) называется фактор-группа $C_p(X, A) = C_p(X)/C_p(A)$. Граничный гомоморфизм $\partial : C_p(X) \to C_{p-1}(X)$ естественным образом индуцирует гомоморфизм $\partial : C_p(X, A) \to C_{p-1}(X, A)$. Следовательно, определена *группа относительных гомологий* $H_p(X, A)$. Определим гомоморфизм $\partial_* : H_p(X, A) \to H_{p-1}(A)$, который каждому классу $\{c_p\} \in H_p(X, A)$ ставит в соответствие класс $\{\partial c_p\} \in H_{p-1}(A)$. Заметим, что $c_p \in C_p(X)$ определяет относительный цикл, если $\partial c_p \in A$.

Последовательность гомоморфизмов групп

$$\ldots \to A_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} A_k \xrightarrow{f_k} A_{k+1} \to \ldots$$

называется *точной*, если ядро каждого гомоморфизма совпадает с образом предыдущего гомоморфизма ($\operatorname{Ker} f_k = \operatorname{Im} f_{k-1}$).

Теорема 0.21. *Последовательность гомоморфизмов*

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{j_*} H_p(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \xrightarrow{i_*} \ldots,$$

где i_*, j_* *— гомоморфизмы, индуцированные вложением* $i : A \to X$ *и фактор-отображением* $j : C_p(X) \to C_p(X, A)$, *является точной.*

Пусть A — абелева группа. Обозначим через $A^* = \{\lambda : A \to C^1\}$ группу гомоморфизмов из A в C^1 (группу линейных комплекснозначных функций на A). Гомоморфизм абелевых групп $\lambda : A \to B$ индуцирует сопряженный гомоморфизм $\lambda^* : B^* \to A^*$, определяемый следующим образом: если $b^* \in B^*$, то $\lambda^* b^*(a) = b^*(\lambda(a))$ для любого $a \in A$.

Теорема 0.22. *Если последовательность гомоморфизмов абелевых групп*

$$\ldots \to A_{k-1} \xrightarrow{\varphi_{k-1}} A_k \xrightarrow{\varphi_k} A_{k+1} \to \ldots$$

точна, то последовательность сопряженных гомоморфизмов

$$\ldots \leftarrow A_{k-1}^{*} \xleftarrow{\varphi_{k-1}^{*}} A_k^{*} \xleftarrow{\varphi_k^{*}} A_{k+1}^{*} \leftarrow \ldots$$

также точна.

5°. Основные обозначения. C^n — пространство n комплексных переменных, точки этого пространства обозначаются z, ζ, z^0, ζ^0 и т. д. Если $z = (z_1, \ldots, z_n)$, то $\bar{z} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$. Для $z, \zeta \in C^n$ обозначим $\langle z, \zeta\rangle = z_1\zeta_1 + \ldots + z_n\zeta_n$, $|z| = \sqrt{\langle z, \bar{z}\rangle}$, $\|z\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |z_i|$.
Введем обозначения для шара $B_r = B_r(z^0) = B(z^0, r) = \{z : |z - z^0| < r\}$, поликруга $U = U(z^0, r) = \{z : |z_i - z_i^0| < r$, $i = 1, \ldots, n\}$ и обобщенного шара $B_r^k(z^0) = \{z : |z_1 - z_1^0|^{2k_1} + \ldots + |z_n - z_n^0|^{2k_n} < r^2\}$, где $k = (k_1, \ldots, k_n)$. Вообще знаком $\{z : \ldots\}$ обозначается множество из C^n, другие случаи оговариваются специально. R^n — пространство n действительных переменных, его точки обозначаются x, y и т. д.

Если J, $\mathcal{J}$ — векторы с неотрицательными целыми координатами (мультииндексы), то $|J| = i_1 + \ldots + i_n$; неравенство $J \leqslant \mathcal{J}$ означает, что $i_k \leqslant j_k$, $k = 1, \ldots, n$, где $J = (i_1, \ldots, i_n)$, $\mathcal{J} = (j_1, \ldots, j_n)$. Запись $k \notin J$ означает, что $k \neq i_l$, $l = 1, \ldots, n$. Далее, $J! = i_1! \ldots i_n!$;

$$z^J = z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n}; \quad D^J = \frac{\partial^{|J|}}{\partial z_1^{i_1} \ldots \partial z_n^{i_n}};$$

$$D_{w,z}^{J,\mathcal{J}} = \frac{\partial^{|J|+|\mathcal{J}|}}{\partial w_1^{i_1} \ldots \partial w_n^{i_n} \partial z_1^{j_1} \ldots \partial z_n^{j_n}};$$

$$dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n, \quad dz_J = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p},$$

где $\quad J = (i_1, \ldots, i_p)$; $\quad dz_{[J]} = dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_{n-p}}$,

$j_1 < \ldots < j_{n-p}$, $j_k \notin J$, $k = 1, \ldots, n-p$. Знак [ ] часто будет употребляться в том же смысле, например, $a_1, \ldots, [j_1, \ldots, j_k], \ldots, a_n$ означает, что элементы $a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}$ пропущены; $dz_{[k]}^{(\alpha)} = dz_1^{\alpha_1} \wedge \ldots [k] \ldots \wedge dz_n^{\alpha_n}$.

Окрестность точки $a \in C^n$ обозначается $U = U_a$ (иногда другими буквами).

Пусть M, N — множества в C^n, тогда ∂M — граница M, а $\rho(z, M) = \inf\limits_{\zeta \in M} |\zeta - z|$, $\rho(M, N) = \inf\limits_{\substack{\zeta\in M\\ z\in N}} |\zeta - z|$, $\overline{M}$ — замыкание M, $\operatorname{int} M$ — внутренность M; $M \Subset N$ означает, что $\overline{M}$ компакт и $\overline{M} \subset \operatorname{int} N$. Если $w = (w_1, \ldots, w_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, то $\langle w, d\varphi\rangle = w_1 d\varphi_1 + \ldots + w_n d\varphi_n$, $\langle w, \varphi^{(\alpha+I)}\rangle = w_1\varphi_1^{\alpha_1+1} + \ldots + w_n\varphi_n^{\alpha_n+1}$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $I = (1, \ldots, 1)$. Далее, $0 = (0, \ldots, 0)$-начало координат; $\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{d\varphi_1}{\varphi_1} \wedge \ldots \wedge \frac{d\varphi_n}{\varphi_n}$. Якобиан отображения $f = f(z) = (f_1, \ldots, f_n)$ обозначим

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} = \frac{\partial f}{\partial z},$$

а $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_a$ — значение этого якобиана в точке a; $\operatorname{grad}\Phi = \left(\Phi'_{z_1}, \ldots, \Phi'_{z_n}\right)$. Мы часто будем записывать функцию $\psi(z)$ вместо $\psi(z, \bar{z})$. Знак $\oplus$ означает прямую сумму, δ_{ik} — символ Кронекера, $\|g_{ij}\|$ — матрица из элементов g_{ij}, а $\det\|g_{ij}\|$ — определитель этой матрицы, $\partial z = (dz_1, \ldots, dz_n)$.

Если F — замкнутое, а Ω — открытое множество в C^n и $m = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, то $C_r^{(m)}(F)$ — класс форм[5] размерности r, коэффициенты которых продолжаются в окрестность F как m раз непрерывно дифференцируемые функции. $C_{p,q}^{(m)}(F)$ — подкласс класса $C_{p+q}^{(m)}(F)$, состоящий из форм типа (p, q). При $m = 0$ этот индекс будем опускать. $C_{p,q}^{(m)}(\Omega)$ — проективный предел классов $C_{p,q}^{(m)}(F)$, $F \Subset \Omega$. Для

$$\alpha = \sum_{J,\mathcal{J}}{}' a_{J\mathcal{J}} dz_J \wedge d\bar{z}_{\mathcal{J}} \in C_{p,q}^{(m)}(\Omega)$$

$$\bar{\partial}\alpha = \sum_{J,\mathcal{J}}{}' \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{J\mathcal{J}}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_J \wedge dz_{\mathcal{J}}$$

---

[5] Здесь и часто далее слово «форма» употребляется вместо «внешняя дифференциальная форма»

(при $m = 0$ дифференцирование понимается как дифференцирование в пространстве обобщенных функций). Здесь штрих у суммы означает суммирование по $1 \leqslant i_1 < \ldots$ $\ldots < i_p \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant n$, где $J = (i_1, \ldots, i_p)$, $\mathcal{J} = (j_1, \ldots, j_q)$.

Класс функций, голоморфных в области D (на компакте K), обозначается $A(D)$ (соответственно $A(K)$). Далее, $A_C(D) = A(D) \cap C(\bar{D})$ и $A^n(D)$ — класс голоморфных в D отображений $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Кроме того, $\operatorname{Re} A_C(D)$ — класс функций, являющихся действительными частями функций из $A_C(D)$. Обозначим $Ph(D)$ — класс плюригармонических в D функций, а $R(D)$ — класс голоморфных в D функций с неотрицательной действительной частью. Наконец, $Ph_C(D) = Ph(D) \cap C(\bar{D})$, $R_C(D) = R(D) \cap C(\bar{D})$. Если на ∂D задана мера μ, то $[\operatorname{Re} A_C(D)]^{\perp}_{\mu}$ — множество таких $\varphi \in C(\partial D)$, что $\int\limits_{\partial D} f\varphi d\mu = 0$ для всех $f \in \operatorname{Re} A_c(D)$. Через $H^2_{d\mu}$ обозначим замыкание $A_C(D)$ в метрике $L^2_{d\mu}$.

Индекс ζ (или z) у множества интегрирования обозначает, что ζ (соответственно z) — переменное интегрирования; $|\partial D|$ — образ ∂D при отображении $z \to$ $\to (|z_1|, \ldots, |z_n|)$, а $\Delta_\zeta = \{z : |z_i| = |\zeta_i|, i = 1, \ldots, n\}$. Наконец, топологическое произведение множеств A и B записывается как $A \times B$. Некоторые другие обозначения были введены в п. 1°—4°.

Если $\alpha \in C_{p,q}(\Omega)$, то $\operatorname{supp} \alpha = \overline{\{z \in \Omega : \alpha(z) \neq 0\}}$. Пусть форма α определена в некотором множестве $U \subset X$, а функция χ задана на многообразии X и $\operatorname{supp} \chi \Subset U$, то как обычно, будем считать, что $\psi = \chi\alpha$ определена в X равенствами: $\psi = \chi\alpha$ при $x \in U$ и $\psi = 0$ при $x \notin U$.

Знак $\square$ указывает на конец доказательства.

Глава I

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ

§ 1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАРТИНЕЛЛИ—БОХНЕРА

1°. Теорема 1.1. *Пусть функция $f \in A_C(D)$, где D — ограниченная область в C^n с кусочно-гладкой границей ∂D, тогда справедлива формула Мартинелли — Бохнера:*

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\,\omega(\zeta - z, \bar\zeta - \bar z) = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \bar D, \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$\omega(\zeta - z, \bar\zeta - \bar z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (\bar\zeta_k - \bar z_k)\, d\bar\zeta_{[k]} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}}. \tag{1.2}$$

Доказательство. 1. Прямым подсчетом легко установить замкнутость ядра Мартинелли — Бохнера ω относительно ζ на множестве $C^n \setminus \{z\}$. Отсюда и из следствия 0.4 вытекает (1.1) для случая $z \notin \bar D$. Если же $z \in D$, то в силу того же следствия 0.4 интегрирование по ∂D можно заменить интегрированием по сфере $\partial B_r(z)$, где радиус r достаточно мал.

2. В достаточно малой окрестности точки $z \in D$ голоморфная функция $f(\zeta)$ разлагается в кратный степенной ряд с центром в точке z, значит, для доказательства

(1.1) достаточно установить, что

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i r^2)^n}\int\limits_{\partial B_r}(\zeta-z)^\beta\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\bar\zeta_k-\bar z_k)\,d\bar\zeta_{[k]}\wedge d\zeta=$$
$$=\begin{cases}0, & \text{если } \beta\neq 0,\\ 1, & \text{если } \beta=0.\end{cases}\qquad(1.3)$$

3. Заметим, что при замене переменных $\zeta_k-z_k=e^{it_k}\times$ $\times(\zeta_k'-z_k)$ все t_k действительны, $k=1,\ldots,n$, множество $\partial B_r(z)$ переходит в себя, а подынтегральная форма в (1.3) умножается на $e^{it_1\beta_1}\ldots e^{it_n\beta_n}$, поэтому верно (1.3) для случая $\beta\neq 0$.

4. Если $\beta=0$, то левая часть (1.3) по формуле Стокса равна

$$\frac{n!}{(2\pi i r^2)^n}\int\limits_{B_r}d\bar\zeta\wedge d\zeta=\frac{n!2^n}{r^{2n}}\int\limits_{|\zeta_1-z_1|^2+\ldots+|\zeta_n-z_n|^2<r^2}|\zeta_1-z_1|\ldots|\zeta_n-z_n|\,d|\zeta_1-$$
$$-z_1|\wedge\ldots\wedge d|\zeta_n-z_n|=n!\int\limits_{\tau_1+\ldots+\tau_n<1,\ \tau_j\geqslant 0}d\tau_1\wedge\ldots\wedge d\tau_n=1.\ \square$$

2°. Ядро Мартинелли — Бохнера $\omega(\zeta-z,\bar\zeta-\bar z)$ при $n>1$ не является голоморфным по z, а лишь — гармоническим, тем не менее справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2. (Аронов — Кытманов). *Если D — ограниченная область с кусочно-гладкой границей и для $f\in C^{(1)}(\bar D)$ имеет место интегральное представление Мартинелли — Бохнера* (1.1) *при $z\in D$, то $f\in A(D)$.*

Для доказательства этой теоремы нам требуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1.3. (Формула Мартинелли — Бохнера для гладких функций). *Если $f\in C^{(1)}(\bar D)$, то*

$$\int\limits_{\partial D}f(\zeta)\,\omega(\zeta-z,\bar\zeta-\bar z)-\int\limits_{D}\bar\partial f(\zeta)\wedge\omega(\zeta-z,\bar\zeta-\bar z)=$$
$$=\begin{cases}f(z), & z\in D,\\ 0, & z\notin\bar D.\end{cases}\qquad(1.4)$$

Эта лемма доказывается так же, как теорема 1.1, только появляется еще интеграл по D от $d_{\bar\zeta}(f(\zeta)\omega(\zeta-z, \bar\zeta-\bar z)) = \bar\partial_\zeta f(\zeta) \wedge \omega(\zeta - z, \bar\zeta - \bar z)$, и нельзя раскладывать $f(\zeta)$ в окрестности точки z в ряд Тейлора по степеням $\zeta - z$, а нужно приблизить f в этой замкнутой окрестности полиномом от $\zeta - z$ и $\bar\zeta - \bar z$. Формула (1.4) позволяет легко вычислить скачок интеграла типа Мартинелли — Бохнера при переходе через границу области D.

Лемма 1.4. *Пусть $f \in C^{(1)}(\partial D)$. Положим*

$$F^{\pm}(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\,\omega(\zeta - z, \bar\zeta - \bar z), \quad z \in D^{\pm}, \tag{1.5}$$

где $D^+ = D$, $D^- = C^n \setminus \bar D$. Тогда $F^{\pm}(z)$ непрерывны вплоть до границы $D^{\pm}$, соответственно и

$$F^+(z) - F^-(z) = f(z), \quad z \in \partial D. \tag{1.6}$$

Доказательство. Пусть $F \in C^{(1)}(\bar D)$, $F|_{\partial D} = f$. Функция

$$\varphi(z) = \int\limits_D \bar\partial F(\zeta) \wedge \omega(\zeta - z, \bar\zeta - \bar z)$$

непрерывна в C^n (см. теорему 0.10). По формуле (1.4)

$$F^+(z) = F(z) + \varphi(z), \quad z \in D^+,$$

$$F^-(z) = \varphi(z), \quad z \in D^-,$$

отсюда и из непрерывности φ и F получаем непрерывность $F^{\pm}(z)$ вплоть до границы области $D^{\pm}$, соответственно и равенство (1.6).□

Еще мы будем использовать следующий результат М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева, который приведем в нужном нам четномерном случае.

Лемма 1.5. (Келдыш — Лаврентьев). *Линейное многообразие, порождаемое дробями вида*

$$\frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2}}, \quad \zeta \in K, \quad z \in C^n \setminus K,$$

где K — компакт в C^n полной лебеговой меры нуль, $n > 1$, плотно в пространстве $C(K)$.

Доказательство. По теореме Стоуна — Вейерштрасса можно считать, что $f \in C^{(1)}(K)$. Продолжим f как гладкую функцию на некоторый замкнутый шар $\overline{B}$, где $B \supset K$, и представим по формуле (1.4), где $D = B$. Если теперь заменить во втором интеграле в (1.4) множество интегрирования B на $B \setminus U$, где U — окрестность K достаточно малого объема, а сами интегралы — подходящими интегральными суммами, то, используя тот факт, что коэффициенты формы $\omega(\overline{\zeta - z}, \overline{\zeta - z})$ являются производными от фундаментального решения уравнения Лапласа

$$g(\zeta, z) = (1 - n)^{-1} |\zeta - z|^{n-2n}, \tag{1.7}$$

получим, заменяя производные от g разностными отношениями, линейные комбинации искомых дробей, равномерно на K аппроксимирующие функцию f. □

Доказательство теоремы 1.2. Рассмотрим интегралы типа Мартинелли — Бохнера (1.5), тогда $F^+ \equiv f$ в D. Из (1.6) теперь следует, что $F^-|_{\partial D} = 0$. Отметим, что F^- гармонична в D^- и имеет на бесконечности нуль $(2n - 1)$ порядка. В силу теоремы единственности для гармонических функций

$$F^-(z) \equiv 0, \quad z \in D^-. \tag{1.8}$$

Так как f представима формулой (1.1), f гармонична в D. Представим ее по формуле Грина для гармонических функций

$$\int\limits_{\partial D} [f\omega + g(\zeta, z)\, \nu_f(\zeta)] = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \overline{D}, \end{cases} \tag{1.9}$$

где

$$\nu_f(\zeta) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}_k}\, d\zeta_{[k]} \wedge d\overline{\zeta}.$$

Эта «комплексная» формула Грина доказывается так же, как и ее «действительный» аналог — обычная формула

Грина (см. также доказательство леммы 1.3). Из (1.1) и (1.9) следует, что

$$\int_{\partial D} \frac{\nu_f(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-2}} = 0 \qquad (1.10)$$

для $z \in D$. Сравнивая (1.8) и (1.9), получаем, что (1.10) справедливо и для точек $z \in D^-$. Теперь лемма 1.5, примененная к компакту ∂D, показывает, что $\nu_f(\zeta)|_{\partial D} = 0$.

Функция f гармонична в D, поэтому $d\nu_f(\zeta) = c\Delta f\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = 0$, т. е. форма ν_f замкнута в D, поэтому $d(\overline{f(\zeta)} \times \nu_f(\zeta))$ непрерывно продолжается на $\bar{D}$. С помощью формулы Стокса получаем

$$(2i)^n \int_D \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k} \right|^2 dV = \int_D d\,(\overline{f(\zeta)} \cdot \nu_f(\zeta)) = \int_{\partial D} \overline{f(\zeta)}\, \nu_f(\zeta) = 0.$$

Отсюда и из непрерывности производных $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k}$, $k = 1, \ldots, n$, следует, что эти производные равны нулю в D, т. е. f голоморфна в D. $\square$

Следующий результат доказывается более сложно, и мы приведем его без доказательства.

Теорема 1.6 (Кытманов — Айзенберг). *Если функция $f \in C(\bar{D})$ представима в области D интегралом Мартинелли — Бохнера (1.1), то f голоморфна в D в каждом из следующих случаев:*

а) $\partial D \in C^{(2)}$;

б) $n = 2$, *граница ∂D связана и принадлежит классу $C^{(1)}$.*

§ 2. КРАТНОСТЬ НУЛЯ ГОЛОМОРФНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ. ПРИНЦИП РУШЕ

Пусть в области $D \subset C^n$ задано голоморфное отображение

$$w = f(z), \qquad (2.1)$$

где $w = (w_1, \ldots, w_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Точка $a \in D$ называется *нулем отображения* (2.1), если $f(a) = 0$. Множество нулей отображения (2.1) обозначим E_f. Если в изолированной точке a множества E_f якобиан отображения $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_a \neq 0$, то a называют *простым нулем отображения* (2.1).

Справедливо следующее утверждение, которое мы докажем несколько позднее.

Предложение 2.1. *Если замыкание окрестности U_a нуля a отображения* (2.1) *не содержит других нулей этого отображения, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что почти при всех $\zeta \in B_\varepsilon$ отображение*

$$w = f(z) - \zeta \qquad (2.2)$$

имеет в U_a лишь простые нули, причем число их не зависит ни от ζ, ни от выбора окрестности U_a.

Указанное в этом предложении число нулей отображение (2.2) в U_a назовем *кратностью нуля a отображения* [1] (2.1) и обозначим $\mu_a(f)$.

Пример. Для отображения $w_1 = z_1$, $w_2 = z_2^2 + z_1^2$ точка $(0, 0)$ является нулем кратности 2. Действительно, отображение $w_1 = z_1 - \zeta_1$, $w_2 = z_2^2 + z_1^2 - \zeta_2$ при малых $|\zeta|$ и $\zeta_1 \neq \zeta_2^2$ в окрестности этой точки имеет 2 простых нуля $\left(\zeta_1, \sqrt{\zeta_2 - \zeta_1^2}\right)$ и $\left(\zeta_1, -\sqrt{\zeta_2 - \zeta_1^2}\right)$.

Из локальной обратимости голоморфного отображения в точках, где его якобиан $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ следует

Предложение 2.2. *Кратность простого нуля равна* 1.

Перейдем к случаю нуля, не являющегося простым.

Предложение 2.3. *Если a — изолированный нуль отображения* (2.1) *и* $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_a = 0$, *то его кратность* $\mu_a(f) > 1$.

---

[1] Это так называемое динамическое определение кратности. О связи $\mu_a(f)$ с коэффициентами тейлоровского разложения отображения (2.1) в точке a см. в § 22.

Это утверждение дает основание называть изолированный нуль отображения (2.1) *кратным*, если $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_a = 0$.

Подобно тому как в теории функций одного комплексного переменного логарифмический вычет выражает число нулей голоморфной функции, его многомерные аналоги связаны с числом нулей голоморфного отображения. Следующий многомерный аналог классического логарифмического вычета Коши построен с помощью интегрального представления Мартинелли — Бохнера (1.1).

Теорема 2.4. *Пусть отображение $f \in A^n(\overline{D})$, где область D ограничена, граница ∂D кусочно-гладкая и не содержит нулей этого отображения. Тогда отображение f имеет в D только изолированные нули и число их, если считать каждый нуль столько раз, какова его кратность*[2], *выражается формулой*

$$N = N(f, D) = \int_{\partial D} \omega(f(z), \overline{f(z)}), \tag{2.3}$$

где

$$\omega(f, \overline{f}) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{1}{|f|^{2n}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \overline{f}_j d\overline{f}_{[j]} \wedge df.$$

Теорема 2.5. (Принцип Руше). *Пусть отображение (2.1) и область D удовлетворяют условиям теоремы 2.4, а отображение $g \in A^n(\overline{D})$. Если для каждой точки $z \in \partial D$, хотя бы для одного индекса j, $j = 1, \ldots, n$, выполняется неравенство*

$$|g_j(z)| < |f_j(z)|, \tag{2.4}$$

то отображение (2.1) и отображение

$$w = f(z) + g(z) \tag{2.5}$$

имеют в D одинаковое число нулей.

---

[2] Впредь всюду, где идет речь о числе нулей, каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.

З а м е ч а н и е. Условие (2.4) выполняется, например, если $|g| < |f|$, либо $||g|| < ||f||$ на ∂D. Это условие можно ослабить. На самом деле, требуется лишь, чтобы $f(z) + tg(z) \neq 0$ при $z \in \partial D$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Достаточно, чтобы в каждой точке $z \in D$, хотя бы для одного индекса j, было справедливо неравенство $\operatorname{Re} g_j(z) < \operatorname{Re} f_j(z)$ либо $\operatorname{Im} g_j(z) < \operatorname{Im} f_j(z)$.

Для доказательства сформулированных утверждений нам потребуются некоторые леммы.

Л е м м а 2.6. *Если отображение $f \in A^n(D)$, то для любого кусочно-гладкого цикла $\gamma \in Z_{2n-1}(D \setminus E_f)$ интеграл* $\int\limits_\gamma \omega(f, \bar{f})$ *есть целое число.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как (2.1) отображает область $D \setminus E_f$ в $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, а в $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ базу $(2n-1)$-мерных гомологий образует сфера ∂B_r, то образ цикла γ при отображении (2.1) гомологичен $N \cdot \partial B_r$, где N — целое число. Используя теорему 0.1, следствие 0.5 и формулу Мартинелли — Бохнера (1.1), получим

$$\int\limits_\gamma \omega(f, \bar{f}) = \int\limits_{\underset{\sim}{f(\gamma)}} \omega(\zeta, \bar{\zeta}) = N \int\limits_{\partial B_r} \omega(\zeta, \bar{\zeta}) = N. \square$$

Л е м м а 2.7. *Пусть отображение* (2.1) *и область D удовлетворяют условиям теоремы 2.4. Если при этом все нули отображения* (2.1) *в области D простые, то для любой функции $\varphi \in A_C(D)$ имеет место формула*

$$\int\limits_{\partial D} \varphi\omega(f, \bar{f}) = \sum_{a \in E_f} \varphi(a). \tag{2.6}$$

В частности (при $\varphi \equiv 1$), *справедливо* (2.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Форма $\varphi\omega(f, \bar{f})$ замкнута в $\bar{D} \setminus E_f$, что можно проверить также непосредственно, как при доказательстве замкнутости формы Мартинелли — Бохнера (1.2). Согласно следствию 0.5

$$\int\limits_{\partial D} \varphi\omega(f, \bar{f}) = \sum_{a \in E_f} \int\limits_{\partial U_a} \varphi\omega(f, \bar{f}), \tag{2.7}$$

где U_a — достаточно малая окрестность точки a. Возьмем в качестве U_a связную компоненту множества $\{z : z \in D,\ |f(z)| < \varepsilon\}$, содержащую a. Так как $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_a \neq 0$, то при достаточно малом ε отображение f биголоморфно в $\overline{U}_a$, поэтому по теореме 0.1 и формуле Мартинелли — Бохнера (1.1)

$$\int_{\partial U_a} \varphi\omega(f, \bar f) = \int_{\partial B_\varepsilon} \varphi\left(f^{-1}(\zeta)\right)\omega(\zeta, \bar\zeta) = \varphi\left(f^{-1}(0)\right) = \varphi(a).$$

Отсюда и из (2.7) получаем (2.6). □

Лемма 2.8. *При выполнении условий теоремы 2.5. справедливо равенство*

$$\int_{\partial D} \omega(f, \bar f) = \int_{\partial D} \omega(f + g, \overline{f + g}). \tag{2.8}$$

Доказательство. Согласно (2.4), при $z \in D$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ имеет место неравенство $f(z) + tg(z) \neq 0$, следовательно, интеграл

$$J(t) = \int_{\partial D} \omega(f + tg, \overline{f + tg})$$

есть непрерывная функция t на отрезке $[0, 1]$, и по лемме 2.6 ее значения целочисленны. Поэтому $J(t)$ постоянна и, значит, $J(0) = J(1)$, т. е. верно (2.8). □

Доказательство предложения 2.1. Возьмем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы $\varepsilon \leqslant \min\limits_{z \in \partial U_a} |f(z)|$. Тогда по лемме 2.8

$$\int_{\partial U_a} \omega(f) = \int_{\partial U_a} \omega(f - \zeta, \overline{f - \zeta}) \tag{2.9}$$

для $\zeta \in B_\varepsilon$. По теореме Сарда 0.11 $\operatorname{mes} f\left(\left\{z : z \in D,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0\right\}\right) = 0$, следовательно, почти при всех $\zeta \in B_\varepsilon$ отображение (2.2) имеет только простые нули. Для таких ζ

согласно лемме 2.7 интеграл в правой части (2.9) равен $N(f-\zeta, U_a)$. Из равенства (2.9) вытекает, что

$$N(f-\zeta, U_a)=\int_{\partial U_a}\omega(f,\bar f)$$

и, значит, $N(f-\zeta, U_a)$ не зависит от выбора $\zeta\in B_\varepsilon$. Если U_a' — другая окрестность точки a, то по следствию 0.5

$$\int_{\partial U_a'}\omega(f,\bar f)=\int_{\partial U_a}\omega(f,\bar f). \ \square$$

Попутно мы доказали, что кратность изолированного нуля голоморфного отображения (2.1) выражается формулой

$$\mu_a(f)=\int_{\partial U_a}\omega(f,\bar f). \ \square \tag{2.10}$$

Доказательство теоремы 2.4.

1. Предположим сначала, что $\frac{\partial f}{\partial z}\not\equiv 0$. Прежде всего покажем, что отображение (2.1) может иметь в D лишь изолированные нули. Возьмем ε так, чтобы $0<\varepsilon\leqslant\min\limits_{\partial D}(f)$. Из теоремы Сарда 0.11 и леммы 2.8 следует, что почти при всех $\zeta\in B_\varepsilon$ система (2.2) имеет в D лишь простые нули, причем их число $k\geqslant 0$ не зависит от $\zeta\in B_\varepsilon$.

Если $E_f\neq\varnothing$, то для любой точки $a^{(1)}\in E_f$ можно выбрать последовательность точек $\zeta^{(m)}\to 0$, $\zeta^{(m)}\in B_\varepsilon$ так, чтобы при $\zeta=\zeta^{(m)}$ отображение (2.2) имело простые нули $\{z^{m,1},\ldots,z^{m,k}\}$, $k\geqslant 1$, и $z^{m,1}\to a^{(1)}$ при $m\to\infty$. Действительно, так как $\frac{\partial f}{\partial z}\not\equiv 0$, то в любой окрестности точки a [1]) найдется точка $z^{m,1}$, в которой $\frac{\partial f}{\partial z}\neq 0$. Возьмем $\zeta^{(m)}=f(z^{m,1})$, тогда $z^{m,1}$ — простой нуль отображения (2.2) при $\zeta=\zeta^{(m)}$. Согласно теореме Сарда 0.11 можно добиться, немного изменяя $\zeta^{(m)}$, чтобы и остальные нули этого отображения были простыми. Ясно, что $\zeta^{(m)} \to 0$ при $z^{m,1} \to a^{(1)}$.

С другой стороны, покажем, что при любом выборе $\zeta^{(m)} \to 0$ простые нули $\{z^{m,1}, \ldots, z^{m,k}\}$ дают в качестве предельных точек одно и то же конечное множество[3] $\{a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}\} \subset D$, следовательно, $E_f = \{a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}\}$. Действительно, заменяя последовательности $\{z^{(m,j)}\}_{m=1}^{\infty} j, = 1, \ldots, k$, подпоследовательностями, можно сделать их сходящимися к некоторым точкам $a^{(j)} \in \in D$, $j = 1, \ldots, k$, (так как на ∂D нет нулей). Множество E_f состоит только из этих точек. Предположим противное, что существует точка $b^{(1)} \in E_f$, $b^{(1)} \neq a^{(j)}$, $j = 1, \ldots, k$. Тогда аналогично предыдущему получим последовательность точек $\zeta^{(m)} \to 0$ таких, что при $\zeta = \zeta^{(m)}$ система (2.2) имеет лишь простые нули $\{w^{m,1}, \ldots, w^{m,k}\}$, причем $w^{m,j} \to b^{(j)}$, $j = 1, \ldots, k$, при $m \to \infty$. Выберем функцию $\varphi \in H_C(D)$ так, чтобы $\varphi(a^{(1)}) = \ldots = \varphi(a^{(k)}) = \varphi(b^{(2)}) = \ldots = \varphi(b^{(k)}) = 0$, а $\varphi(b^{(1)}) = 1$. Согласно лемме 2.7

$$\int_{\partial D} \varphi\omega\left(f - \zeta^{(m)}, \overline{f - \zeta^{(m)}}\right) = \sum_{j=1}^{k} \varphi\left(z^{m,j}\right);$$

$$\int_{\partial D} \varphi\omega\left(f - \xi^{(m)}, \overline{f - \xi^{(m)}}\right) = \sum_{j=1}^{k} \varphi\left(w^{m,j}\right).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим противоречие

$$\int_{\partial D} \varphi\omega\left(f, \bar{f}\right) = \sum_{j=1}^{k} \varphi\left(a^{(j)}\right) = 0;$$

$$\int_{\partial D} \varphi\omega\left(f, \bar{f}\right) = \sum_{j=1}^{k} \varphi\left(b^{(j)}\right) = 1.$$

Таким образом, E_f конечно.

Докажем формулу (2.3). Окружим каждую точку $a \in E_f$ окрестностью U_a так, чтобы $\overline{U}_a \subset D$, $\overline{U}_a \cap \overline{U}_b = \varnothing$ при $a \neq b$, a, $b \in E_f$. Учитывая замкнутость формы

[3] При этом некоторые из точек $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ могут совпадать.

$\omega(f, \overline{f})$ в $D \setminus E_f$, следствие 0.5 и формулу (2.10), найдем

$$\int_{\partial D} \omega(f, \overline{f}) = \sum_{a \in E_f} \int_{\partial U_a} \omega(f, \overline{f}) = \sum_{a \in E_f} \mu_a(f) = N(f, D).$$

При этом если $E_f \neq \varnothing$, то $N(f, D) = k > 0$.

2. Пусть теперь $\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$. В этом случае интеграл в правой части (2.3) равен нулю, так как в форму $\omega(f, \overline{f})$ входит $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$. Покажем, что $N(f, D)$ также равно нулю, т. е. f не имеет нулей в D. Предположим противное, что $f(a) = 0$ для некоторой точки $a \in D$. Так как $f|_{\partial D} \neq 0$, то найдется голоморфное отображение $g : \overline{D} \to C^n$ такое, что $g(a) = 0$, $|g| < |f|$ на ∂D и $\frac{\partial (f+g)}{\partial z} \not\equiv 0$ (можно, например, взять линейное отображение $g(z) = \lambda(z - a)$, где $\lambda = \|\lambda_{jk}\|$ — матрица с достаточно малыми элементами такая, что $\operatorname{rang} \left\| \frac{\partial f_j(a)}{\partial z_k} + \lambda_{jk} \right\| = n$).

По лемме 2.8 и п. 1 этого доказательства

$$\int_{\partial D} \omega(f, \overline{f}) = \int_{\partial D} \omega(f + g, \overline{f + g}) > 1.$$

Противоречие. □

Доказательство теоремы 2.5 следует из сопоставления теоремы 2.4 и леммы 2.8 □

Доказательство предложения 2.3. Согласно определению кратности изолированного нуля, $\mu_a(f) \geqslant 0$. Отметим, что $\frac{\partial f}{\partial z} \not\equiv 0$, иначе бы не было вообще изолированных нулей (см. п. 2 в доказательстве теоремы 2.4). Найдется точка $z_0 \in U_a$ такая, что $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0} \neq 0$ и $|f(z_0)| < \min_{\partial U_a} |f|$. Теперь из предложения 2.2. и теоремы 2.5 следует, что $\mu_a(f) \geqslant 1$. Если $\mu_a(f) = 1$, то для любого $\zeta \in B_\varepsilon$, где ε достаточно мало, отображение (2.2) имеет в U_a ровно один нуль, т. е. отображение (2.1) взаимно-однозначно в окрестности точки a. Тогда по теореме Осгуда (см. ниже, теорему 4.15) это отображение биголоморфно в окрестности a и $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_a \neq 0$. □

Выясним геометрический смысл формулы (2.3). Пусть в $R^n \setminus \{0\}$ задана $(n-1)$-мерная замкнутая кусочно-гладкая поверхность (цикл) $S = \{x : x = x(t),\ t \in I^{n-1}\}$,

$$\begin{gathered} I^{n-1} = \{t : t = (t_1, \ldots, t_{n-1}), \\ 0 \leqslant t_j \leqslant 1,\ j = 1, \ldots, n-1\}, \\ x(t_1, \ldots, 0, \ldots, t_{n-1}) = \\ = x(t_1, \ldots, 1, \ldots, t_{n-1}), \\ j = 1, \ldots, n-1. \end{gathered}$$

Индексом поверхности S относительно начала координат называется число

$$J_0(S) = \frac{1}{\Sigma_n} \int\limits_S \frac{1}{|x|^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j dx_{[j]} =$$

$$= \frac{1}{\Sigma_n} \int\limits_{I^{n-1}} \frac{1}{|x(t)|^n} \begin{vmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t) \\ x'_{11}(t) & \ldots & x'_{n1}(t) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x'_{n1}(t) & \ldots & x'_{nn}(t) \end{vmatrix} dt, \tag{2.12}$$

где $\Sigma_n = \dfrac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ — мера (объем) единичной сферы в R^n.

Подынтегральная форма в (2.12) выражает меру проекции элемента поверхности на единичную сферу с центром в нуле (телесный угол, под которым «виден» этот элемент из начала координат). Интеграл (2.3) можно представить в виде

$$\int\limits_{\partial D} \omega(f, \bar f) = \int\limits_{\gamma} \omega(\zeta, \bar\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{|\zeta|^{2n}} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \bar\zeta_j d\bar\zeta_{[j]} \times$$

$$\times \wedge d\zeta = \frac{1}{\Sigma_{2n}} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{|\zeta|^{2n}} \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j du_{[j]} \wedge dv + \right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+n-1}v_j du\wedge dv_{[j]}+i\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}v_j\,du_{[j]}\wedge dv+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+n-1}u_j\,du\wedge dv_{[j]}\right)\right]=J_0(S),$$

где $\gamma=f(\partial D)$, $\zeta_j=u_j+iv_j$, $j=1,\ldots,n$; здесь

$$\int\limits_{\gamma}\frac{1}{|\zeta|^{2n}}\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}v_j\,du_{[j]}\wedge dv+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+n-1}\times\right.$$

$$\left.\times u_j du\wedge dv_{[j]}\right)=\int\limits_{\gamma}\frac{1}{|\zeta|^{2n}}d\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}du_{[j]}\wedge dv_{[j]}}{(2n-2)|\zeta|^{2n-2}}\right)=0$$

согласно следствию 0.3. Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2.9. (Принцип аргумента). *При выполнении условий теоремы* 2.4 *число нулей отображения* (2.1) *в области* D *равно индексу относительно начала координат образа* $f(\partial D)$ *границы области* D *при отображении* (2.1) (числу «обходов» поверхности $f(\partial D)$ вокруг 0).

Этот факт можно получить и из топологических соображений. Так как на ∂D нулей отображение (2.1) нет, то образ цикла ∂D при этом отображении $f(\partial D)\in Z_{2n-1}(C^n\setminus\{0\})$. Следовательно, $f(\partial D)\sim N\cdot\partial B_\varepsilon$, где N — целое число, показывающее, сколько раз цикл $f(\partial D)$ «обходит» вокруг нуля. Теперь из формулы (1.1), теоремы 0.1 и следствия 0.5 вытекает, что $N=N(f,D)$. □

§ 3. ОСНОВНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ЛЕРЕ — КОППЕЛЬМАНА

1°. Теорема 3.1 (Южаков — Рус.) *Пусть* D *— ограниченная область с кусочно-гладкой границей, отображение* $f\in A^n(\overline{D})$ *и не имеет нулей на* ∂D, *тогда для любой функции* $\varphi\in A_C(D)$ *справедлива* *формула*

$$\int\limits_{\partial D} \varphi\omega(f, \overline{f}) = \sum_{a \in E_f} \mu_a(f)\cdot\varphi(a). \tag{3.1}$$

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varepsilon < \min\limits_{\partial D} |f|$. Почти при всех $\zeta \in B_\varepsilon$ отображение (2.2) имеет в D лишь простые нули и по лемме 2.7

$$\int\limits_{\partial D} \varphi\omega(f-\zeta, \overline{f-\zeta}) = \sum_{a_\zeta \in E_{f-\zeta}} \varphi(a_\zeta). \tag{3.2}$$

Теперь устремляем ζ к нулю, при этом (см. п. 1 доказательства теоремы 2.4) нули отображения (2.2) стремятся к нулям отображения (2.1), причем к каждому нулю f стремится столько простых нулей $f-\zeta$, какова его кратность. Переходя в (3.2) к пределу при $\zeta \to 0$, получаем (3.1).□

2°. Рассмотрим следующую, важную для дальнейшего внешнюю дифференциальную форму, зависящую от голоморфного отображения f, непрерывной вектор-функции $w^{(0)}$ и непрерывно дифференцируемых вектор-функций $w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}$

$$\Omega(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, f) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \frac{\langle w^{(0)}, df\rangle}{\langle w^{(0)}, f\rangle} \wedge$$
$$\wedge\, d\frac{\langle w^{(1)}, df\rangle}{\langle w^{(1)}, f\rangle} \wedge \ldots \wedge d\frac{\langle w^{(n-1)}, df\rangle}{\langle w^{(n-1)}, f\rangle}. \tag{3.3}$$

Теорема 3.2. (Основная интегральная формула). *Пусть D — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, отображение $f \in A^n(\overline{D})$ не имеет нулей на ∂D, вектор-функции $w^{(0)} \in C(\partial D)$ и $w^{(j)} \in C^{(1)}(\partial D)$, $j = 1, \ldots, n-1$, удовлетворяют условию*

$$\langle w^{(j)}(z), f(z)\rangle \neq 0,\ z \in \partial D,\ j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.4}$$

Тогда для любой функции $\varphi \in A_C(D)$ имеет место *формула*

$$\int\limits_{\partial D} \varphi\Omega\left(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, f\right) = \sum_{a \in E_f} \mu_a(f) \cdot \varphi(a). \quad (3.5)$$

Укажем другие формы записи ядра Ω. Обозначим

$$u^{(j)} = \frac{w^{(j)}}{\langle w^{(j)}, f\rangle}, \; j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

тогда из (3.3) следует

$$\Omega = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \langle u^{(0)}, df\rangle \wedge d\langle u^{(1)}, df\rangle \wedge \ldots \wedge d\langle u^{(n-1)}, df\rangle, \quad (3.6)$$

а условие (3.4) переходит в условие

$$\langle u^{(j)}(z, \overline{z}), f(z)\rangle = 1, \; z \in \partial D, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \quad (3.7)$$

Далее, из (3.6) находим

$$\Omega = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{(i_1, \ldots, i_{n-1})} \begin{vmatrix} u_1^{(0)} u_{1i_1}^{(1)} \ldots u_{1i_{n-1}}^{(n-1)} \\ u_n^{(0)} u_{ni_1}^{(1)} \ldots u_{ni_{n-1}}^{(n-1)} \end{vmatrix} d\overline{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{i_{n-1}} \wedge df, \quad (3.8)$$

где
$$u_{ji_l}^{(k)} = \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial \overline{z}_{i_l}},$$

суммирование происходит по всевозможным наборам $(i_1, \ldots, i_{n-1})$ чисел, взятых из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Отметим еще, что $\Omega(\overline{f}, \ldots, \overline{f}, f) = \omega(f, \overline{f})$, т. е. формула (3.1) является частным случаем формулы (3.5), при этом условие (3.4) означает, что $|f|^2 \neq 0$ на ∂D.

Для доказательства теоремы 3.2 нам потребуются некоторые простые свойства ядра Ω.

Лемма 3.3. $\Omega(w^0, w^1, \ldots, w^{n-1}, f)$ *не зависит от вектор-функции* w_0.

Доказательство. Пусть Ω_1 и Ω_2 — две формы вида (3.6), зависящие от $u^{(0)}, \ u^{(1)}, \ldots, \ u^{(n-1)}$ и $v^{(0)}, \ u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)}$ соответственно. Нужно показать, что $\Omega_1 = \Omega_2$. Обозначим $s^{(0)} = u^{(0)} - v^{(0)}$, тогда

$$\langle s^{(0)} (z, \bar{z}), f(z) \rangle = 0, \ z \in \partial D. \tag{3.9}$$

Используя представление Ω_1 и Ω_2 в виде (3.8), получим, что форма $\Omega_1 - \Omega_2$ имеет в качестве коэффициентов определители

$$\begin{vmatrix} s_1^{(0)} u_{1i_1}^{(1)} \ldots u_{1i_{n-1}}^{(n-1)} \\ s_n^{(0)} u_{ni_1}^{(1)} \ldots u_{ni_{n-1}}^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{3.10}$$

Далее, из (3.7) находим

$$\left\langle \frac{\partial u^{(j)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_{i_k}}, \ f(z) \right\rangle = 0, \ z \in \partial D, \ j = 1, \ldots, n-1,$$

отсюда и из (3.9) вытекает обращение в нуль определителей (3.10). □

Лемма 3.4. *Если вектор-функции* $w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}$, $p^{(1)}, \ldots, p^{(n-1)}$ *входят в класс* $C^{(2)}(\partial D)$, *то разность*

$$\begin{gathered} \Omega(w^{(0)}, \ w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)} f) - \\ -\Omega(p^{(0)}, \ p^{(1)}, \ldots, p^{(n-1)}, \ f) \end{gathered} \tag{3.11}$$

есть $\bar{\partial}$*-точная форма.*

Доказательство. Разность (3.11) представляется в виде суммы аналогичных разностей форм, у которых отличается только один из аргументов, поэтому достаточно доказать, что $\bar{\partial}$ - точна разность $\Omega(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, \ f) - \Omega(w^{(0)}, \ p^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, \ w^{(n-1)}, \ f)$. Действительно,

$$\bar{\partial} \left\{ \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \frac{\langle w^{(1)}, \ df \rangle}{\langle w^{(1)}, \ f \rangle} \wedge \frac{\langle p^{(1)}, \ df \rangle}{\langle p^{(1)}, \ f \rangle} \wedge d \frac{\langle w^{(2)}, \ df \rangle}{\langle w^{(2)}, \ f \rangle} \wedge \ldots \right.$$

$$\ldots \wedge d\frac{\langle w^{(n-1)}, df\rangle}{\langle w^{(n-1)}, f\rangle}\Bigg\} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n}\left\{\left(d\frac{\langle w^{(1)}, df\rangle}{\langle w^{(1)}, f\rangle}\right)\wedge\right.$$

$$\wedge \frac{\langle p^{(1)}, df\rangle}{\langle p^{(1)}, f\rangle}\wedge \ldots - \frac{\langle w^{(1)}, df\rangle}{\langle w^{(1)}, f\rangle}\wedge d\frac{\langle p^{(1)}, df\rangle}{\langle p^{(1)}, f\rangle}\wedge \ldots\Bigg\} =$$

$$= \Omega(p^{(1)}, w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n-1)}, f) - \Omega(w^{(1)}, p^{(1)}, w^{(2)}, \ldots$$

$$\ldots, w^{(n-1)}, f) = \Omega(w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n-1)}, f) -$$

$$- \Omega(w^{(0)}, p^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n-1)}, f),$$

где при переходе к последнему равенству использована лемма 3.3.□

Доказательство теоремы 3.2. Если $w^{(1)}$, . . ., $w^{(n-1)}$ принадлежит к классу $C^{(2)}(\partial D)$, то разность ядер в формулах (3.1) и (3.5) по лемме 3.4 есть $\bar\partial$ - точная форма, т. е. эта разность ортогональна при интегрировании на ∂D голоморфным функциям (см. следствие 0.3). Поэтому (3.5) следует из (3.1). Если же $w^{(j)} \notin C^{(2)}(\partial D)$, то их можно аппроксимировать на ∂D более гладкими вектор-функциями с сохранением условия (3.4), записать для аппроксимирующих вектор-функций формулу (3.5) и сделать предельный переход.□

Отметим ближайшие следствия формулы (3.5).

Следствие 3.5 (Лере — Коппельман). *Если* $w^{(0)}, \ldots, w^{(n-1)}$ *удовлетворяют условию*

$$\langle w^{(j)}(z, a), z - a\rangle \neq 0, \ z \in \partial D, \ a \in D,$$

$$j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

то для всякой функции $\varphi \in A_C(D)$ *имеет место обобщенная формула Коши — Фантаппье*

$$\int_{\partial D} \varphi\Omega(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, z-a) = \varphi(a). \qquad (3.12)$$

Следствие 3.6 (Лере). *Если вектор-функция* $w \in C^{(1)}(\partial D)$ *и* $\langle w(z, a), z - a\rangle \neq 0$, *где* $z \in \partial D$, $a \in D$, *то всякая функция*

$\varphi \in A_C(D)$ *представима формулой Коши — Фантаппье*

$$\int\limits_{\partial D} \varphi\omega(z-a, w) = \varphi(a), \tag{3.13}$$

где

$$\omega(z-a, w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} w_k dw_{[k]} \wedge dz}{\langle w, z-a \rangle^n}.$$

Доказательство. Из (3.6) получаем, что

$$\Omega(w, \ldots, w, z-a) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k du_{[k]} \wedge dz,$$

где

$$u = \frac{w}{\langle w, z-a \rangle}. \tag{3.14}$$

Далее, учитывая (3.8), находим

$$\Omega(w, w, \ldots, w, z-a) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} u_1 u'_{11} \ldots u'_{1n} \\ \ldots\ldots [k] \ldots \\ u_n u'_{n1} \ldots u'_{nn} \end{vmatrix} d\bar{z}_{[k]} \wedge$$

$$\wedge dz = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n \langle w, z-a \rangle^n} \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} w_1 w'_{11} \ldots w'_{1n} \\ \ldots\ldots [k] \ldots \\ w_n w'_{n1} \ldots w'_{nn} \end{vmatrix} d\bar{z}_{[k]} \wedge$$

$$\wedge dz = \omega(z-a, w). \quad \square$$

Заметим, что вектор-функция (3.14) удовлетворяет условию

$$\langle u, z-a \rangle = 1, \; z \in \partial D, \; a \in D. \tag{3.15}$$

Придадим формуле (3.13) более абстрактный вид. Зафиксируем точку $a \in D$ и будем рассматривать в пространстве C^{2n} комплексных переменных (z, u) поверхность $M_a = \{(z, u) : \langle u, z-a \rangle = 1, \; z \in \partial D\}$.

Следствие 3.7 (Лере). *Пусть вектор-функция $u(z, a)$, $z \in \partial D$, $a \in D$, принадлежит по z классу $C^{(1)}(\partial D)$ и удовлетворяет условию* (3.15). *Обозначим α — цикл на M_a, который описывает точка (z, u), когда z пробегает ∂D. Цикл α входит в некоторый класс $h \in H_{2n-1}(M_a)$. Для любой функции $\varphi \in A_C(D)$ и любого цикла $\beta \in h$ имеет место формула Коши — Фантаппье*

$$\varphi(a) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\beta} \varphi(z) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k \, du_{[k]} \wedge dz. \qquad (3.16)$$

Доказательство. Заметим, что (3.16) есть (3.13) для $\beta = \alpha$. Для того чтобы получить (3.16) с любым $\beta \in h$ из (3.13), достаточно убедиться в том, что форма $\varphi(z) \cdot \omega(z-a, u)$ замкнута на поверхности M_a. Действительно, на M_a среди $dz_1, \ldots, dz_n, du_1, \ldots, du_n$ только $2n-1$ независимых дифференциалов, а указанная форма имеет максимальную размерность $2n-1$, поэтому она замкнута. □

Отметим, что формула Коши — Фантаппье (тем более обобщенная формула Коши — Фантаппье) — это есть не одно интегральное представление для функций $\varphi \in A_C(D)$, а целое множество таких представлений, зависящих от выбора вектор-функции w. Для различных классов областей D удается выбрать так w, чтобы выполнялись условия следствия 3.6 и w было голоморфно по a в D. Таким образом, получаются интегральные представления с голоморфными ядрами (см. § 4, 8—11).

Классическая формула Коши для голоморфных функций одного комплексного переменного

$$f(a_1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z_1)\, dz_1}{z_1 - a_1} \qquad (3.17)$$

обладает двумя замечательными свойствами, вызвавшими большое число ее приложений:

1) она универсальна, т. е. верна для любой области D с достаточно хорошей границей ∂D и ядро Коши $\dfrac{1}{2\pi i (z_1 - a_1)}$ не зависит от вида D;

2) ядро Коши голоморфно по $a_1 \in D$ при фиксированном $z_1 \in \partial D$.

Для голоморфных функций многих комплексных переменных нет интегрального представления с двумя аналогичными свойствами, а существуют либо универсальные формулы, но с неголоморфным ядром (например, формула Мартинелли — Бохнера (1.1)), либо неуниверсальные, но обладающие голоморфными ядрами (см. § 4, 8—11).

Аналогично следствию 3.6 получается следующее утверждение.

Следствие 3.8 *Если область D и отображение f удовлетворяют условиям теоремы 3.2 и вектор-функция $w \in C^{(1)}(\partial D)$ такова, что $\langle w, f\rangle \neq 0$ на ∂D, то справедлива для всякой $\varphi \in A_C(D)$ формула*

$$\int_{\partial D} \varphi\omega(f, w) = \sum_{a \in E_f} \mu_a(f)\,\varphi(a), \tag{3.18}$$

где

$$\omega(f, w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\,\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} w_k\, dw_{[k]} \wedge df}{\langle w, f\rangle^n}.$$

Заметим в заключение, что формулам (3.5), (3.12) и (3.18) можно придать более абстрактный вид подобно тому, как формулу (3.13) мы привели к виду (3.16).

§ 4. ФОРМУЛА КОШИ. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСТОВА

1°. Пусть $D_l \subset C^1_{z_l}$ —область с кусочно-гладкой границей, $l = 1, \ldots, n$; область $D = D_1 \times \ldots \times D_n \subset C^n$ называется *полицилиндрической областью* (в частности, поликругом или полидиском, если все D_l — круги). Множество $\Gamma = \partial D_1 \times \ldots \times \partial D_n$, снабженное естественной ориентацией, индуцированной ориентацией области D, назовем *остовом* области D.

Теорема 4.1. *Пусть D — полицилиндрическая область, a — любая точка D, функция $\varphi \in A_C(D)$, тогда справедлива формула Коши*

$$\varphi(a) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z)\,dz}{z-a}. \qquad (4.1)$$

Заметим, что в формуле Коши (4.1) остов Γ играет ту же роль, какую играет вся граница области в классической формуле Коши при $n = 1$. Из наличия интегрального представления по остову следует, что для функций из $A_C(D)$ справедлив относительно остова принцип максимального модуля (см. теорему 6.9).

Формула Коши (4.1) является примером формулы с голоморфным ядром, но неуниверсальной (верна только для полицилиндрических областей).

Доказательство. Формулу (4.1) легко получить повторным применением классической формулы Коши для $n = 1$, однако мы приведем другое доказательство, показав, что (4.1) вытекает из формулы Коши — Фантаппье (3.16) при подходящем выборе цикла интегрирования β. Этот же способ нам потребуется далее при выводе формулы Вейля.

Представим ∂D в виде $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \gamma_i$, где $\gamma_i = \{z : z \in \overline{D}, z_i \in \partial D_i\}$. Над каждой гранью γ_i рассмотрим вектор-функцию $u^{(i)} = (u_1^{(i)}, \ldots, u_n^{(i)})$, где $u_k^{(i)} = \delta_{ik}\,(z_i - a_i)^{-1}$, $i, k = 1, \ldots, n$. Очевидно, $u^{(i)}$ удовлетворяют условию (3.15). Теперь рассмотрим в пространстве C^{2n} ориентированную поверхность $\beta_i = \{(z, u^{(i)}),\ z \in \gamma_i\}$. Объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \beta_i$ не является циклом, так как над каждой гранью γ_i вектор-функция $u^{(i)}$ своя. В то же время ∂D — цикл и множество $\{(z, u), z \in \partial D\}$ также было бы циклом, если бы u была непрерывной по $z \in \partial D$. В множестве $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \beta_i$ имеются «дырки», расположенные над теми точками, где пересекаются грани γ_i, т. е. над ребрами. Эти «дырки» мы «заклеим» следующим образом: если к ребру $\gamma_{i_1 \ldots i_k}$ сходится k граней $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_k}$, то над таким ребром построим множество $\beta_{i_1\ldots i_k} = \left\{(z, \ u): z \in \gamma_{i_1\ldots i_k}, \ u = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l u^{(i_l)}, \lambda_l \geqslant 0, \sum_{l=1}^{k} \lambda_l = 1\right\}$. Все поверхности $\beta_{i_1\ldots i_k}$ добавим к $\bigcup_{i=1}^{n} \beta_i$, полученная (ориентированная) поверхность β является циклом. К β применим формулу (3.16). Заметим, что все $u^{(i)}$ голоморфны по z, поэтому $du_{[k]}^{(i)} \wedge dz = 0$, $i, k = 1, \ldots, n$, значит, интеграл (3.16) по каждому β_i равен нулю. Если $k < n$, то на $\beta_{i_1\ldots i_k}$ все $du_{[j]} \wedge dz = 0$, так как u голоморфно зависит от z и от $(k-1)$ независимого параметра λ, т. е. всего есть $n + k - 1 < 2n - 1$ независимых дифференциалов. Поэтому интеграл (3.16) по $\beta_{i_1\ldots i_k}$ тоже равен нулю. Осталось вычислить этот интеграл по $\beta_{i_1\ldots i_n}$. На $\Gamma = \gamma_{1\ldots n}$ компоненты u_k вектор-функции u имеют вид

$$u_k = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l u_k^l = \frac{\lambda_k}{z_k - a_k}, \ k = 1, \ldots, n,$$

следовательно,

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\beta_{1\ldots n}} \varphi(z) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k du_{[k]} \wedge dz =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \varphi(z) \frac{dz}{z-a} \int\limits_{\substack{\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1\\ \lambda_j \geqslant 0}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \lambda_k d\lambda_{[k]} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \varphi(z) \frac{dz}{z-a},$$

где мы использовали элементарное равенство

$$\int\limits_{\substack{\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1\\ \lambda_j \geqslant 0}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \lambda_k d\lambda_{[k]} = \frac{1}{(n-1)!}. \tag{4.2}$$

Чтобы убедиться в правильности (4.2), достаточно заметить, что левая часть в (4.2) по формуле Стокса равна

$$n \int\limits_{\lambda_1+\ldots+\lambda_n\leqslant 1,\, \lambda_i\geqslant 0} d\lambda = n\frac{1}{n!}. \quad \square$$

Следствие 4.2. *При условиях теоремы 4.1*

$$D^{\alpha}_{\varphi(a)} = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-a)^{\alpha+I}}.$$

2°. Рассмотренные в § 2,3 формулы логарифмического вычета для голоморфного отображения связаны с интегрированием по всей границе области. Теперь исследуем формулы логарифмического вычета, в которых интегрирование производится по n-мерному циклу. Формулы логарифмического вычета из § 2,3 основываются, по существу, на формуле Мартинелли — Бохнера (1.1); формулы этого пункта — на формуле Коши (4.1). Результаты данного пункта, как правило, можно извлечь из общих формул (3.5) или (3.17) так же, как мы только что получили формулу (4.1) из формулы (3.16), но ниже приведены более простые доказательства, опирающиеся на формулу Коши (4.1). В качестве аналога логарифмического дифференциала для голоморфного отображения здесь выступает форма

$$\frac{df(z)}{f(z)} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Big/ f\right)dz = \frac{\partial \ln f(z)}{\partial z}\,dz.$$

Нам потребуется понятие *аналитического полиэдра*. Так называется открытое множество вида $D = D_\rho = \{z : z \in G,\ |f_i(z)| < \rho_i,\ i = 1, \ldots, k\}$, где $f_i \in A(G)$, $i = 1, \ldots, n$; $D \Subset G$, здесь G — область в C^n. Если $k = n$, то D называют *специальным аналитическим полиэдром*. Специальные аналитические полиэдры играют важную роль в этом пункте. Предварительно отметим следующие факты, относящиеся к этим полиэдрам.

Лемма 4.3. *Всякий специальный аналитический полиэдр D состоит из конечного числа связных компонент.*

Доказательство. Всякую область $\tilde{D}$ (ограниченную) можно аппроксимировать областями с кусочно-гладкими границами так, чтобы на границах аппроксимирующих областей выполнялись условия теоремы 2.5, если они выполняются на границе $\tilde{D}$, поэтому к $\tilde{D}$ применим принцип Руше. Из определения D следует, что для каждой связной компоненты $D' \subset D$ существует точка $a \in D'$ такая, что $f(a) = \zeta$, $|\zeta_i| < \rho_i$, $i = 1, \ldots, n$. Значит, отображение $f(z) - \zeta$ имеет в D' нули. С другой стороны, согласно принципу Руше — теореме 2.5 отображения $f(z)$ и $f(z) - \zeta$ имеют в D' одинаковое число нулей. Следовательно, $f(z)$ имеет нули в D'. Итак, в каждой связной компоненте D' специального аналитического полиэдра D отображение $f(z)$ имеет нули. По теореме 2.4 заключаем, что число связных компонент D конечно. □

Лемма 4.4. *Остов* $\Gamma = \Gamma_\rho = \{z : z \in \overline{D},\ |f_i(z)| = \rho_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, *специального аналитического полиэдра* D *является гладким почти при всех* $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$, $\rho_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство немедленно получается, если применить теорему Сарда 0.11 к отображению $z \to (|f_1(z)|^2, \ldots, |f_n(z)|^2)$. □

Ниже во всех результатах, где речь идет об интегрировании по Γ_ρ, предполагается, что остов Γ_ρ гладкий. В силу леммы 4.4 этого всегда можно добиться сколь угодно малым изменением ρ.

Теорема 4.5. (Каччиопполи — Мартинелли — Сорани). *Пусть* D — *специальный аналитический полиэдр, заданный с помощью вектор-функции* $f \in A^n(\overline{D})$. *Тогда для любой функции* $\varphi \in A_C(D)$ *имеет место формула*

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \varphi(z) \frac{df(z)}{f(z)} = \sum_{a \in E_f} \mu_a(f)\, \varphi(a), \tag{4.3}$$

где $E_f = \{z : z \in D,\ f(z) = 0\}$, *а* Γ — *остов* D.

Доказательство. Так как $\partial D = \bigcup_{j=1}^{n} \{z : z \in \overline{D},\ |f_j(z)| = \rho_j\}$, то f не имеет нулей на ∂D и по теореме

2.4 имеет в D лишь изолированные нули. Каждый нуль $a \in E_f$ окружим окрестностью $U_a \Subset D$ так, чтобы $\overline{U}_a \cap \overline{U}_b = \varnothing$ для $a \neq b$, a, $b \in E_f$. Возьмем $\delta > 0$ такое, что $\delta < \min\left\{\|f(z)\|,\ z \in \overline{D} \setminus \bigcup_{a \in E_f} U_a\right\}$. Тогда каждая связная компонента цикла $\gamma = \{z : z \in D,\ |f_1(z)| = \ldots = |f_n(z)| = \delta\}$ попадет в одну из окрестностей U_a, $a \in E_f$. Обозначим $\gamma_a = \gamma \cap U_a$. Отметим что $\Gamma - \gamma = \partial Q$, где $Q = \{z : z \in \overline{D},\ |f_j(z)| = \delta t + \rho_j(1 - t),\ j = 1, \ldots, n,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, т. е. $\Gamma \sim \gamma$ в $D_f = D \setminus \{z : f_1(z) \cdot \ldots \cdot f_n(z) = 0\}$. Форма $\varphi \frac{df}{f}$ голоморфна в D_f, поэтому по теореме Коши — Пуанкаре

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \varphi \frac{df}{f} = \sum_{a \in E_f} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma_a} \varphi \frac{df}{f}. \tag{4.4}$$

Если a — простой нуль отображения f, то окрестность U_a можно выбрать столь малой, чтобы f было биголоморфно в U_a. Делая замену переменных $w = f(z)$ и применяя формулу Коши (4.1), получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma_a} \varphi \frac{df}{f} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|w_j| = \delta,\ j = 1, \ldots, n} \varphi\left(f|_{U_a}^{-1}(w)\right) \frac{dw}{w} = \varphi\left(f|_{U_a}^{-1}(0)\right) =$$

$$= \varphi(a). \tag{4.5}$$

Пусть теперь a — кратный нуль f. По предложению 2.1, почти для всех достаточно малых (по модулю) ζ отображение $f(z) - \zeta$ имеет в U_a простые нули $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$, где $k = \mu_a(f)$. Для $\|\zeta\| < \min\left\{\delta,\ \min\limits_{\partial U_a} \|f(z)\| - \delta\right\}$ множество $\gamma_{a,\zeta} = \{z : z \in U_a,\ |f_1(z) - \zeta_1| = \ldots = |f_n(z) - \zeta_n| = \delta\}$ образует цикл в U_a, так как $\gamma_{a,\zeta} \cap \partial U_a = \varnothing$. Цикл $\gamma_{a,\zeta}$ получается из γ_a гомотопией $\gamma_{a,t\zeta} = \{z : z \in U_a,\ |f_j(z) - t\zeta_j| = \delta,\ j = 1, \ldots, n\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, в области $U_a \setminus \left\{z : \prod_{j=1}^{n} (f_j(z) - \zeta_j) = 0\right\}$. Вновь применяя теорему Коши — Пуанкаре и формулу (4.5) для простых нулей, имеем

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma_a}\varphi\frac{d(f-\zeta)}{f-\zeta}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma_{a;\zeta}}\varphi\frac{d(f-\zeta)}{f-\zeta}=\sum_{j=1}^{k}\varphi(a^{(j)}),$$

и переходя к пределу при $\zeta\to 0$:

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma_a}\varphi\frac{df}{f}=\mu_a(f)\,\varphi(a). \tag{4.6}$$

Теперь из (4.4) — (4.6) следует (4.3). $\square$

Т е о р е м а 4.6. *Если f и D удовлетворяют условиям теоремы 2.4, то для любой функции $\varphi\in A_C(D)$ справедлива формула* (4.3), *где* $\Gamma=\{z: z\in\partial D,\ |f_2(z)|= \ldots =|f_n(z)|=\varepsilon\}$,

$$\varepsilon<\min_{\partial D}\|f\|(z)\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\varepsilon<\min\limits_{\partial D}\|f\|$, то $|\Gamma|\subset D_f$. Заметим, что если $D\cap E_f\neq\varnothing$, то $|\Gamma|\neq\varnothing$. Действительно, по теореме Руше 2.5 отображение $f_1(z)-\varepsilon,\ldots,f_n(z)-\varepsilon$ имеет нули в D. Согласно второй части доказательства теоремы 2.4, отсюда следует, что отображение $0, f_2(z)-\varepsilon,\ldots,f_n(z)-\varepsilon$ имеет нули на ∂D, т. е. $|\Gamma|$ не пуст. Цикл $\Gamma\sim\gamma=\{z: z\in D,\ |f_1(z)|=\varepsilon,\ldots,|f_n(z)|=\varepsilon\}$ в $D_f=\overline{D}\setminus\left\{z:\prod\limits_{j=1}^{n}f_j(z)=0\right\}$, так как $\Gamma-\gamma=\partial Q$, где $Q=\{z: z\in\overline{D},\ |f_1(z)|\geqslant\varepsilon,\ |f_2(z)|=\ldots=|f_n(z)|=\varepsilon\}$, $Q\subset D_f$. По теореме Коши — Пуанкаре и теореме 4.5, примененной к области $\widetilde{D}=\{z: z\subset\widetilde{D},\ |f_j(z)|<\varepsilon,\ j=1,\ldots,n\}$, получаем

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma}\varphi\frac{df}{f}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma}\varphi\frac{df}{f}=\sum_{a\in E_f}\mu_a(f)\,\varphi(a).\ \square$$

С л е д с т в и е 4.7. *В условиях теорем 4.5 и 4.6 число нулей N отображения f в области D выражается* *формулой*

$$N = N(f, D) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{df}{f}.$$

Для приложений полезна следующая теорема, включающая вариант принципа Руше и теоремы о логарифмическом вычете.

Теорема 4.8 (Южаков). *Пусть f, φ, D и Γ такие же, как в теореме 4.5, а отображение $g \in A^n(\overline{D})$ удовлетворяет на Γ неравенствам*

$$|g_j(z)| < |f_j(z)|, \ j = 1, \ldots, n. \tag{4.7}$$

Тогда а) *отображения f и $f + g$ имеют в D одинаковое число нулей;* б) *справедлива формула*

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \varphi \frac{d(f+g)}{f+g} = \sum_{a \in E_{f+g}} \mu_a (f+g) \varphi(a). \tag{4.8}$$

Лемма 4.9. *При условиях теоремы 4.8 существует число $\delta_0 > 0$ такое, что для* $0 < \delta < \delta_0$ цикл Γ *гомологичен циклу* $\gamma = \{z : z \in D, \ |f_j(z) + g_j(z)| = \delta, \ j = 1, \ldots, n\}$ в $D_{f+g} = \overline{D} \setminus \left\{ z : \prod\limits_{j=1}^{r} [f_j(z) + g_j(z)] = 0 \right\}$.

Доказательство. Обозначим $r_j = \max\limits_{z \in \overline{D}} |g_j(z)|$, $j = 1, \ldots, n$. Из (4.6) в силу принципа максимального модуля (см. теорему 6.9) следует, что $r_j < \rho_j$, $j = 1, \ldots, n$. Рассмотрим $\delta_0 = \min\{\rho_1 - r_1, \ldots, \rho_n - r_n\}$ и семейство циклов $\Gamma_p = \{z : z \in \overline{D}, \ \ |f_j(z) + g_j(z)| = \delta, \ j = 1, \ldots, p, \ |f_k(z)| = \rho_k, \ k = p+1, \ldots, n\}$, $0 < \delta < \delta_0$, $p = 0, 1, \ldots, n$. Очевидно, $\Gamma_0 = \Gamma$, $\Gamma_n = \gamma$. Далее, $\Gamma_p \subset D_{f+g}$, так как $f + g \neq 0$ на Γ_p в силу выбора δ. Кроме того, $\Gamma = \Gamma_0 \sim \Gamma_1 \sim \ldots \sim \Gamma_n = \gamma$ в D_{f+g}. Действительно, $\Gamma_p - \Gamma_{p+1} = \partial Q_p$, где $Q_p = \{z : z \in \overline{D}, \ |f_j(z) + g_j(z)| = \delta, \ j = 1, \ldots, p-1, \ |f_p(z) + g_p(z)| \geqslant \delta, \ |f_p(z)| \leqslant \rho_p, \ |f_k(z)| = \rho_k, \ k = p+1, \ldots, n\} \subset D_{f+g}$, $p = 1, \ldots, n$. □

Доказательство теоремы 4.8. По принципу максимального модуля для специального аналитического полиэдра (см. теорему 6.9) из (4.7) следует, что $|g_j(z)| < \rho_j$ в $\overline{D}$, $j = 1, \ldots, n$. Таким образом, на грани $\Delta_j = \{z : z \in \overline{D},\ |f_j(z)| = \rho_j\}$ выполняется неравенство $|g_j(z)| < |f_j(z)|$, $j = 1, \ldots, n$. А так как $\partial D = \bigcup_{j=1}^{n} \Delta_j$, то из теоремы 2.5 получаем утверждение а). Далее, по лемме 4.9 и теореме 4.5, примененной к отображению $f + g$ и циклу γ, имеем

$$\frac{1}{(2\pi i)_n}\int_{\Gamma}\varphi\,\frac{d(f+g)}{f+g} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\gamma}\varphi\,\frac{d(f+g)}{f+g} =$$

$$= \sum_{a\in E_{f+g}} \mu_a(f+g)\,\varphi(a). \ \square$$

Пример. Пусть m — кратность нуля отображения $w_1 = z_1 - z_2^2$, $w_2 = z_1^3 - z_2^3$ в точке $(0, 0)$. Так как на $\Gamma = \{z : |z_1| = \varepsilon^7,\ |z_2| = \varepsilon^4\}$, $0 < \varepsilon < 1$, выполняются неравенства $|z_2|^2 < |z_1|$, $|z_1|^2 < |z_2|^3$, то по теореме 4.8

$$m = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma}\frac{d\left(z_1 - z_2^2\right)\wedge d\left(z_1^2 - z_2^3\right)}{\left(z_1 - z_2^2\right)\left(z_1^2 - z_2^3\right)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma}\frac{\left(-3z_2^2 + 4z_1z_2\right)dz_1\wedge dz_2}{\left(z_1 - z_2^2\right)\left(z_1^2 - z_2^3\right)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z_2| = \varepsilon^4}\frac{\left(-3z_2^2 + 4z_2^3\right)dz_2}{z_2^4 - z_2^3} =$$

$$= 3.$$

Теорема 4.10 (Каччиополи — Мартинелли — Сорани). *Пусть $f \in A^n(D)$, $\varphi \in A(D)$, цикл*

$$\Gamma \approx \sum_{a\in E_f} n_a\mu_a(f)\,\gamma_a \tag{4.9}$$

в $D_f = D \setminus \{z : f_1(z)\cdot\ldots\cdot f_n(z) = 0\}$, где $\gamma_a = \{z : |f_1(z)| = \ldots = |f_n(z)| = \varepsilon\} \cap U_a$, здесь U_a — окрестность нуля $a \in E_f$

а в достаточно мало. Тогда

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma}\varphi\frac{df}{f}=\sum_{a\in E_f}n_a\varphi(a).$$

Доказательство сразу вытекает из следствия 0.5 и формулы (4.6).□

В связи с этой теоремой возникает задача топологического описания циклов вида (4.9). Обозначим $F_j=\{z: z\in D, f_j(z)=0\}$, $j=1,\ldots,n$, $F=F_1\cup\ldots\cup F_n$, тогда $D_f=D\setminus F$. Цикл γ_a называют *локально разделяющим* для аналитических множеств $F_1,\ldots,F_n$ в точке их пересечения a. Подгруппа группы $H_n(D\setminus F)$, порожденная локально разделяющими циклами, называется (глобально) *разделяющей подгруппой*, соответственно цикл вида (4.9) — *разделяющим циклом.*

Предложение 4.11 (Мартинелли — Сорани). *Разделяющий цикл удовлетворяет условию*

$$\Gamma\sim 0 \text{ в } D\setminus F_{[j]},\ j=1,\ldots,n, \tag{4.10}$$

где $F_{[j]}=F_1\cup\ldots[j]\ldots\cup F_n$.

Доказательство. $\gamma_a=\partial Q_a$, где $Q_a=\{z: z\in U_a, |f_1(z)|=\ldots[j]\ldots=|f_n(z)|=\varepsilon, |f_j(z)|\leqslant\varepsilon\}$, $Q_a\subset D\setminus F_{[j]}$. □

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример. $D=\mathbb{C}^2\setminus\{z: |z_1|\leqslant 1, |z_2|\leqslant 1\}$, $f_1=z_1$, $f_2=z_2$, $\Gamma=\{z: |z_1|=|z_2|=2\}$, цикл $\Gamma\not\sim 0$ в $D\setminus F$, он удовлетворяет условию (4.10), однако не является разделяющим, так как $E_f=\varnothing$.

С другой стороны, верна

Теорема 4.12. (Цих). *Если D — область голоморфности, то для того чтобы цикл $\Gamma\in Z_n(D\setminus F)$ был разделяющим, достаточно, чтобы он удовлетворял условиям* (4.9).

Выше мы рассматривали формулы логарифмического вычета в $\mathbb{C}^n$, в которых интегрирование производилось по циклам размерности n или $2n-1$. Можно указать формулы и для циклов промежуточных размерностей.

Теорема 4.13 (Южаков — Куприков). *При выполнении условий теоремы* (3.1) *справедлива формула*

$$\int\limits_{\Gamma_{2n-p-1}}\varphi K_{2n-p-1}(f)=\sum_{a\in E_f}\mu_a(f)\varphi(a),$$

где

$$K_{2n-p-1}(f) = \frac{(n-p-1)!}{(2\pi i)^n}(-1)^q \times$$

$$\times \sum_{\alpha_0<\ldots<\alpha_p} \frac{(-1)^{\alpha_0-1}\bar{f}_{\alpha_0}\ldots\bar{f}_{\alpha_p} d\bar{f}_{[\alpha_0,\ldots,\alpha_p]} \wedge df}{|f|^{2(n-p)}};$$

$q = \frac{1}{2}(n-p)(n-p-1)$; *суммирование ведется по всем упорядоченным наборам* $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p)$ *чисел из* $\{1, \ldots, n\}$, *удовлетворяющим условиям* $1 \leqslant \alpha_0 \leqslant n-p$, $n-p \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_p \leqslant n$;

$$\Gamma_{2n-p-1} = \{z : z \in \partial D, |f_{n-p-1}(z)| = \ldots = |f_n(z)| = \varepsilon\}, \ \varepsilon$$

достаточно мало.

Частными случаями этой теоремы являются: теорема 3.1 (при $p = 0$) и теорема 4.6 (при $p = n-1$).

Следствие 4.14 (Мартинелли — Зоммер — Сорани). *Пусть* $\varphi \in A_C(D)$, *где* D *— ограниченная область с кусочно-гладкой границей, тогда для* $a \in D$ *имеет место формула*

$$\int_{\Gamma_{2n-p-1}} \varphi K_{2n-p-1}(z-a) = \varphi(a). \qquad (4.11)$$

Формула (4.11) обобщает формулы Мартинелли — Бохнера (1.1) и Коши (4.1) на случай интегрирования по циклам промежуточных размерностей, но она сама может быть получена из формулы Коши — Фантаппье (3.16) подходящим выбором цикла β подобно тому, как мы в п. 1° этого параграфа получили формулу Коши.

В заключение докажем

Предложение 4.15 (Осгуд). *Если голоморфное отображение* $f: D \to C^n$, $D \subset C^n$, *взаимно-однозначно, то оно биголоморфно, т. е.* f^{-1} *также голоморфно.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $a \in D$ и ее замкнутую окрестность $\overline{B}_a \subset D$. Так как f взаимно-однозначно, то a — изолированный нуль отображения $f(z) - f(a)$, причем кратности 1. По принципу Руше (теорема 2.5) для любого $w \in U_\varepsilon = \{w \in C^n : \|w - f(a)\| \leqslant \varepsilon\}$, где $\varepsilon = \min_{\partial \overline{B}_a} \|f(z) - f(a)\|$, существует единственная точка $z = \varphi(w) \in B_a$, удовлетворяющая равенству $f(z) = w$ (отсюда вытекает, что $f(D)$ — область), причем по формуле (4.8)

$$z_j = \varphi_j(w) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{z_j df(z)}{[f(z) - w]^{\mathrm{I}}}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.12}$$

где $\Gamma = \{z \in B_a : |f_j(z) - f_j(a)| = \varepsilon, \ j = 1, \ldots, n\}$. По лемме 4.4 ε можно выбрать так, чтобы множество Γ было гладко и имело действительную размерность n. Так как форма под знаком интеграла в (4.12) голоморфна по w, то отображение $f^{-1}(w) = \varphi(w)$ голоморфно в $\overline{U}_\varepsilon$.$\square$

§ 5. ФОРМУЛА АНДРЕОТТИ—НОРГЕ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

1°. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где все α_k — целые неотрицательные числа. Обозначим $\langle w, f^{(\alpha)}\rangle = w_1 f_1^{\alpha_1} + \ldots + w_n f_n^{\alpha_n}$. Здесь $w - (w_1, \ldots, w_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$; далее,

$$\omega_\alpha(f, w) = \frac{(n-1)!\,|\alpha|}{(2\pi i)^n} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} w_k^{\alpha_k+1} dw_{[k]}^{(\alpha+\mathrm{I})} \wedge df}{\langle w, f^{(\alpha+\mathrm{I})}\rangle^n}.$$

Теорема 5.1. (Андреотти — Норге). *Пусть функция $\varphi \in A_C(D)$, где D — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, тогда для всякой точки $z \in D$ и любого α*

$$\int\limits_{\partial D} \varphi(\zeta)\, \omega_\alpha(\zeta - z, \ \bar{\zeta} - \bar{z}) = D^\alpha \varphi(z). \tag{5.1}$$

Формула Андреотти — Норге (5.1) обобщает формулу Мартинелли — Бохнера (1.1) на случай, когда речь идет о вычислении не значения голоморфной функции в заданной точке, а значения любой ее производной. При $\alpha = 0$ из (5.1) получается (1.1). Заметим, что для $n > 1$ ядро ω_α не является производной от ядра ω, и только в случае $n = 1$ формула (5.1) превращается в формулу, получающуюся простым дифференцированием формулы Коши.

Доказательство. 1. Легко проверяется, что форма $\omega_\alpha(\zeta - z, \overline{\zeta} - \overline{z})$ замкнута. Зафиксируем точку $z \in D$; в силу следствия 0.4 интегрирование по ∂D можно заменить интегрированием по $\partial B_r^{(\alpha)}(z)$.

2. В достаточно малой окрестности точки z голоморфная функция $\varphi(\zeta)$ разлагается в кратный степенной ряд с центром в точке z, значит, для доказательства (5.1) достаточно установить, что

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i r^2)^n} \int\limits_{\partial B_r^{(\alpha)}} (\zeta - z)^\beta \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (\overline{\zeta}_k - \overline{z}_k)^{\alpha_k+1} \times$$

$$\times\, d(\overline{\zeta} - \overline{z})_{[k]}^{(\alpha+I)} \wedge d\zeta = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \neq \beta, \\ 1, & \text{если } \alpha = \beta. \end{cases} \tag{5.2}$$

3. Заметим, что при замене переменных $\zeta_k - z_k = e^{it_k}(\zeta_k' - z_k)$, $0 \leqslant t_k \leqslant 2\pi$, $k = 1, \ldots, n$, множество $\partial B_r^{(\alpha)}$ переходит в себя, а подынтегральная форма в (5.2) умножается на $e^{it_1(\beta_1-\alpha_1)} \ldots e^{it_n(\beta_n-\alpha_n)}$, поэтому верна та часть (5.2), которая касается случая $\alpha \neq \beta$.

4. Если $\alpha = \beta$, то интеграл в (5.2) по формуле Стокса равен

$$\frac{n!\,(\alpha + I)^I}{(2\pi i r^2)^n} \int\limits_{B_r^{(\alpha)}} |\zeta_1 - z_1|^{2\alpha_1} \ldots |\zeta_n - z_n|^{2\alpha_n}\, d\overline{\zeta} \wedge d\zeta =$$

$$= \frac{n!\,(\alpha + I)^I 2^n}{r^{2n}} \int\limits_{|\zeta_1 - z_1|^{2(\alpha_1+1)} + \ldots + |\zeta_n - z_n|^{2(\alpha_n+1)} < r^2} |\zeta_1 - z_1|^{2\alpha_1+1} \ldots |\zeta_n - z_n|^{2\alpha_n+1}\, d\,|\zeta_1 -$$

$$- z_1| \wedge \ldots \wedge d\,|\zeta_n - z_n| = n! \int\limits_{\tau_1 + \ldots + \tau_n < 1,\ \tau_j > 0} d\tau = 1. \ \square$$

Формулу Андреотти — Норге можно обобщить в духе формулы Коши — Фантаппье.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1 и вектор-функция $w \in C_\zeta^{(1)}(\partial D)$ удовлетворяет условию*

$$\langle w(\zeta, z), (\zeta - z)^{\alpha+I}\rangle \neq 0, \ z \in D, \ \zeta \in \partial D,$$

тогда

$$\int_{\partial D} \varphi(\zeta)\, \omega_\alpha(\zeta - z, w) = D^\alpha \varphi(z). \tag{5.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о можно дать либо тем же способом, каким доказана теорема 3.2 (способ Коппельмана—аналитический), либо геометрическим способом, который мы и изложим (способ Хенкина). Каждый из интегралов (5.1) и (5.3) представляет собой интеграл от одной и той же внешней дифференциальной формы

$$\varphi(\zeta) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} v_k dv_{[k]} \wedge d\zeta \tag{5.4}$$

по циклам

$$\gamma_0 = \{(\zeta, v) : \zeta \in \partial D, \quad v_k = v_k^0 =$$

$$= \frac{(\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k)^{\alpha_k+1}}{|\zeta_1 - z_1|^{2(\alpha_1+1)} + \ldots + |\zeta_n - z_n|^{2(\alpha_n+1)}}, \quad k = 1, \ldots, n\right\}$$

и

$$\gamma = \left\{(\zeta, v) : \zeta \in \partial D, \quad v = v' = \frac{w}{\langle w, (\zeta - z)^{(\alpha+I)}\rangle}\right\},$$

соответственно, которые лежат в пространстве $C^{2n}_{\zeta, v}$ на поверхности

$$M_z^{(\alpha)} = \{(\zeta, v) : \zeta \in \partial D, \ \langle v, (\zeta - z)^{(\alpha+I)}\rangle = 1\}.$$

На этой поверхности форма (5.4) замкнута и для доказательства того, что интеграл (5.3) равен интегралу (5.1), достаточно установить, что циклы γ_0 и γ гомологичны на $M_z^{(\alpha)}$. Рассмотрим множество $Q = \{(\zeta, v) : \zeta \in \partial D, \ v = \lambda v^0 + (1 - \lambda) v', \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.\}$. Ясно, что $\gamma - \gamma_0 = \partial Q$.

Далее,

$$\langle \lambda v^0 + (1-\lambda)v', (\zeta - z)^{(\alpha+I)}\rangle =$$
$$= \lambda\langle v^0, (\zeta - z)^{(\alpha+I)}\rangle + (1-\lambda)\langle v', (\zeta - z)^{(\alpha+I)}\rangle = 1,$$

т. е. $Q \subset M_z^{(\alpha)}$. Итак, на $M_z^{(\alpha)}$ циклы γ_0 и γ гомологичны. □

Наконец, можно сделать дальнейшее обобщение формулы (5.1) аналогично теореме 3.2. Обозначим

$$\Omega_\alpha\left(w^0, w^1, \ldots, w^{n-1}, f\right) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \frac{\langle w^0, df\rangle}{\langle w^0, f^{(\alpha)}\rangle} \wedge$$
$$\wedge\, d\frac{\langle w^1, df\rangle}{\langle w^1, f^{(\alpha)}\rangle} \wedge \ldots \wedge d\frac{\langle w^{n-1}, df\rangle}{\langle w^{n-1}, f^{(\alpha)}\rangle}.$$

Теорема 5.3. *Если выполнены условия теоремы* 5.1 *и вектор-функции* $w^0 \in C_\zeta(\partial D)$ *и* $w^j \in C_\zeta^{(1)}(\partial D)$, $j = 1, \ldots, n-1$, *удовлетворяют условию*

$$\langle w^j(\zeta, z), (\zeta - z)^{(\alpha+I)}\rangle \neq 0,\ z \in D,\ \zeta \in \partial D,$$
$$j = 0,\ 1, \ldots, n-1,$$

то

$$\int\limits_{\partial D} \varphi(\zeta)\,\Omega_\alpha\left(w^0, w^1, \ldots, w^{n-1}, \zeta - z\right) = D^\alpha\varphi(z). \quad (5.5)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.2.

2°. Возникает задача: нельзя ли построить формулу многомерного логарифмического вычета, опираясь не на интегральное представление Мартинелли — Бохнера (1.1), а на более общее интегральное представление Андреотти — Норге (5.1), т. е. поставлен вопрос о вычислении интеграла

$$\int\limits_{\partial D} \varphi\omega_\alpha(f, \overline{f}), \quad (5.6)$$

где $f \in A^n(\overline{D})$ и не имеет нулей на ∂D, или, что то же самое (сравните (3.1) и (3.4), (5.1) и (5.5)),

$$\int\limits_{\partial D} \varphi\Omega_\alpha\left(w^0, w^1, \ldots, w^{n-1}, f\right). \quad (5.7)$$

Мы не знаем ответа в общем случае, поэтому перечислим частные случаи, когда интегралы (5.6), (5.7) удалось сосчитать.

1. При $n = 1$ интегралы (5.6) и (5.7) принимают вид

$$\frac{\alpha_1!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{\varphi(\zeta_1)\,df(\zeta_1)}{f(\zeta_1)^{\alpha_1+1}} = \sum_{z_1\in E_f}\mu_{z_1}(f)\,\frac{\alpha_1!}{[\mu_{z_1}(f)(\alpha_1+1)-1]!}\times$$

$$\times\frac{d^{\mu_{z_1}(f)(\alpha_1+1)-1}}{dz_1^{\mu_{z_1}(f)(\alpha_1+1)-1}}\,\frac{\varphi(z_1)\,f'(z_1)}{\psi_{z_1}^{\alpha_1+1}(z_1)}.$$

Здесь $\mu_{z_1}(f)$, как обычно, кратность нуля z_1 функции f, которая, следовательно, в окрестности этого нуля имеет вид $f(z_1') = \psi_{z_1}(z_1')(z_1'-z_1)^{\mu_{z_1}(f)}$, где ψ_{z_1} голоморфна в данной окрестности, $\psi_{z_1}(z_1)\neq 0$.

2. Если $\alpha = (0, \ldots, 0)$, то см. формулы (3.1) и (3.4).

3. Пусть все корни системы $f = 0$ в D простые, т. е. в окрестности каждого корня якобиан $\frac{\partial f}{\partial z}$ отличен от нуля. Тогда $\eta_k = f_k(z)$, $k = 1, \ldots, n$, образуют в этой окрестности систему локальных координат. В силу замкнутости форм ω_α и Ω_α интеграл (5.6) (соответственно (5.7)) равен сумме интегралов по границам достаточно малых окрестностей корней системы $f = 0$, а в каждой из них заменой переменных сводится к интегралу (5.1). Таким образом, в этом случае интеграл (5.6) (соответственно (5.7)) равен

$$\sum_{a\in E_f}\left.\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(z)}{\partial f_1^{\alpha_1}\ldots\partial f_n^{\alpha_n}}\right|_{z=a}.$$

4. Если функцию φ можно разделить на f^α, т. е. $\varphi f^{-\alpha}\in A_C(D)$, то интеграл (5.6) можно записать:

$$\frac{(n-1)!\,\alpha!}{(2\pi i)^n(\alpha+I)^I}\int\limits_{\partial D}\frac{\varphi f^{-\alpha}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\bar f_k^{\alpha_k+1}\,d\bar f_{[k]}^{(\alpha+I)}\wedge df^{(\alpha+I)}}{\left[|f_1|^{2(\alpha_1+1)}+\ldots+|f_n|^{2(\alpha_n+1)}\right]^n},$$

т. е. получается интеграл вида (3.1), но не для отображения f, а для отображения $f^{(\alpha+I)} = \left(f_1^{\alpha_1+1}, \ldots, f_n^{\alpha_n+1}\right)$, нули которого отличаются от нулей f только своими кратностями. Поэтому интеграл

(5.6) (соответственно (5.7)) равняется

$$\sum_{a\in E_{f(\alpha+I)}} \frac{\varphi(z)}{f(z)^{\alpha}(\alpha+I)^{I}}\Bigg|_{z=a} = \sum_{a\in E_f} \frac{\varphi(z)}{f(z)^{\alpha}}\Bigg|_{z=a}.$$

5. Если выполнены условия теоремы 4.6, то так же, как при доказательстве этой теоремы, можно показать, что интегралы (5.6) и (5.7) равны

$$\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma} \varphi\, \frac{df}{f^{(\alpha+I)}}. \tag{5.8}$$

Пусть выполнены условия теоремы 4.5, тогда можно показать (остов специального аналитического полиэдра D обозначим Γ'), что интегралы (5.6) и (5.7) преобразуются к виду

$$\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma'} \varphi\, \frac{df}{f^{(\alpha+I)}}.$$

Для дальнейшего нам потребуется определение: точка a называется *обыкновенной точкой аналитического множества* S, если для некоторой окрестности U этой точки существует биголоморфное в U отображение F такое, что $F(S\cap U) = F(U)\cap L$, где L — аналитическая плоскость в C^n.

Предположим, что любая точка $a \in E_f$ есть обыкновенная точка аналитических множеств $\{z : f_j(z) = 0\}$, $j = 1, \ldots, n$, тогда в окрестности $U_a \ni a$ существуют голоморфные функции $h_{ai}(z)$ такие, что $h_{ai}^{m_{ai}}(z) = f_i(z)$, где m_{ai} — наименьшая степень однородного многочлена тейлоровского разложения функции f_i в окрестности точки a (см. [148], с. 117]), $i = 1, \ldots, n$. Если еще потребовать, чтобы для всякого $a \in E_f$ указанные однородные полиномы имели изолированный нуль в точке a, то по теореме 22.6 $\mu_a(f) = m_{a1}\ldots m_{an}$. Согласно следствию 4.7,

$$m_{a1}\ldots m_{an} = \mu_a\left(h_a^{(m)}\right) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma} \frac{ah_a^{(m)}}{h_a^{(m)}} =$$

$$= \frac{m_{a1}\ldots m_{an}}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma} \frac{dh_a}{h_a} = m_{a1}\ldots m_{an}\mu_a(h_a),$$

(где $m = (m_{a1}, \ldots, m_{an})$. Значит, $\mu_a(h_a) = 1$, здесь $h_a = (h_{a1}, \ldots,$

h_{an}). Поэтому интеграл (5.8) равен

$$\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\sum_{a\in E_f} m_{a1}\ldots m_{an}\int\limits_{\gamma_a}\varphi\frac{dh_a}{h_a^{(\beta_a+I)}},$$

где $\gamma_a=\{z: z\in U_a,\ |f_1(z)|=\ldots=|f_n(z)|=\delta\}$; δ достаточно мало; $\beta_a=(\beta_{a1},\ldots,\beta_{an})$; $\beta_{ai}=\alpha_i m_{ai}$, $i=1,\ldots,n$. Поскольку $\mu_{h_a}(a)=1$, якобиан $\left.\frac{\partial h_a}{\partial z}\right|_{z=0}\neq 0$, значит, $\eta_k=h_k(z)$, $k=1,\ldots,n$, образуют в некоторой окрестности точки a систему локальных координат, и мы получаем следующее утверждение:

Предложение 5.4 (Болотов). *Пусть все точки $a\in E_f$ являются обыкновенными точками аналитических множеств $\{z: f_j(z)=0\}$, $j=1,\ldots,n$, и однородные многочлены наименьшей степени тейлоровских разложений функций $f_1,\ldots,f_n$ в окрестности каждой точки $a\in E_f$ имеют в ней изолированный нуль. Тогда интегралы* (5.6) *и* (5.7) *равны*

$$\sum_{a\in E_f} m_{a1}\ldots m_{an}\frac{\alpha!}{\beta_a!}\left.\frac{\partial^{|\beta_a|}\varphi(z)}{\partial h_{a1}^{\beta_{a1}}\ldots\partial h_{an}^{\beta_{an}}}\right|_{z=a}.$$

§ 6. КЕРНФУНКЦИЯ БЕРГМАНА, ЯДРО СЕГЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ С ГОЛОМОРФНЫМ ЯДРОМ ПО ГРАНИЦЕ ШИЛОВА

1°. Пусть Q — компакт в C^n, а $\mathcal{F}$ — некоторая совокупность действительнозначных функций, полунепрерывных сверху на Q. Множество $S_{\mathcal{F}}(Q)\subset Q$ называется *границей Шилова множества Q относительно $\mathcal{F}$*, если: 1) $S_{\mathcal{F}}(Q)$ является определяющим множеством для совокупности $\mathcal{F}$ на компакте Q, т. е. оно замкнуто и для любой функции $\varphi\in\mathcal{F}$:

$$\sup_{z\in Q}\varphi(z)=\sup_{z\in S_{\mathcal{F}}(Q)}\varphi(z);\qquad (6.1)$$

2) $S_{\mathcal{F}}(Q)$ минимально, т. е. никакое его собственное подмножество не является определяющим.

Аналогично вводится понятие границы Шилова в случае, когда $\mathscr{F}$ — совокупность комплекснозначных функций, при этом нужно (6.1) заменить равенством

$$\sup_{z\in Q}|\varphi(z)| = \sup_{z\in S_{\mathscr{F}}(Q)}|\varphi(z)|.$$

Теорема 6.1. *Если совокупность $\mathscr{F}$ действительных полунепрерывных сверху на компакте Q функций удовлетворяет условию: из $\varphi\in\mathscr{F}$ следует, что все функции вида $[\varphi(z) + \ln|z_i - c|] \in \mathscr{F}$, $i = 1, \ldots, n$, где c — любое комплексное число, то граница Шилова $S_{\mathscr{F}}(Q)$ существует и единственна.*

Доказательство. Множество определяющих множеств не пусто, например, Q — определяющее. Пусть $\{\Gamma_k\}$ — последовательность вложенных определяющих множеств: $\Gamma_k \supset \Gamma_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда $\Gamma = \bigcap_{k=1}^{\infty}\Gamma_k$ — определяющее. Это следует из того, что для полунепрерывной сверху функции φ

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{z\in\Gamma_k}\varphi(z) = \sup_{z\in\Gamma}\varphi(z).$$

Теперь из леммы Цорна следует, что существует минимальное определяющее множество — граница Шилова.

Докажем единственность $S_{\mathscr{F}}(Q)$. Пусть существуют две границы Шилова $S^1 = S^1_{\mathscr{F}}(Q)$ и $S^2 = S^2_{\mathscr{F}}(Q)$. Тогда найдется такая точка $z^0 \in S^1\setminus S^2$ и такое $r > 0$, что поликруг $U(z^0, r) = \{z: |z_i - z_i^0| < r,\ i = 1, \ldots, n\}$ не пересекается с S^2. Существует функция $\varphi\in\mathscr{F}$, достигающая максимального на S^1 значения M в пределах $U(z^0, r)\cap S^1$ и остающаяся меньше этого M на множестве $S^1\setminus U(z^0, r)$ (иначе бы S^1 не было минимальным определяющим множеством). Положим

$$m = \sup_{z\in S^1\setminus U(z^0,r)}\varphi(z),$$

тогда $m < M$.

С другой стороны, существует точка $z^1 \in S^2 \setminus S^1$ такая, что $\varphi(z^1) = M$. Так как $z^1 \notin U(z^0, r)$, то найдется такое i, что $|z_i^1 - z_i^0| > r$. Пусть $R = \sup_{z \in S^1} |z_i - z_i^1|$, выберем $\lambda > 1$ так, чтобы $m + \ln(R + \lambda|z_i^0 - z_i^1|) < M + \ln(\lambda|z_i^0 - z_i^1|)$.

Рассмотрим функцию $\psi(z) = [\varphi(z) + \ln|z_i - z_i^1 - \lambda(z_i^0 - z_i^1)|] \in \mathscr{E}$. Очевидно, $\psi(z^1) = M + \ln(\lambda|z_i^0 - z_i^1|)$; если $z \in S^1 \setminus U(z^0, r)$, то $\psi(z) \leqslant m + \ln|z_i - z_i^1 - \lambda(z_i^0 - z_i^1)| \leqslant m + \ln(R + \lambda|z_i^0 - z_i^1|) < M + \ln(\lambda|z_i^0 - z_i^1|)$; если же $z \in S^1 \cap U(z^0, r)$, то $\psi(z) \leqslant M + \ln|z_i - z_i^0 + (1 - \lambda)(z_i^0 - z_i^1)| < M + \ln(\lambda|z_i^0 - z_i^1| - |z_i^0 - z_i^1| + |z_i - z_i^0|) < M + \ln(\lambda|z_i^0 - z_i^1|)$. Итак, для $z \in S^1$ верно неравенство $\psi(z) < \psi(z^1)$, что невозможно, так как S^1 — граница Шилова множества Q относительно $\mathscr{E}$. □

Следствие 6.2. *Пусть некоторая совокупность $\mathscr{E}$ комплекснозначных функций, модуль которых полунепрерывен сверху на компакте Q, удовлетворяет условию: из $\varphi \in \mathscr{E}$ следует, что $\varphi(z)(z_i - c) \in \mathscr{E}$, $i = 1, \ldots, n$, где c — любое комплексное число. Тогда $S_{\mathscr{E}}(Q)$ существует и единственно.*

Доказательство сводится к проверке того факта, что совокупность $\{\ln|\varphi(z)|\}$, где $\varphi \in \mathscr{E}$, удовлетворяет условиям теоремы 6.1. □

Если D — ограниченная область, а $\mathscr{E} = A_C(D)$, то $S_{\mathscr{E}}(\overline{D})$ называют просто *границей Шилова области D* и обозначают $S(D)$. Если $\mathscr{E} = A(\overline{D})$, то $S_{\mathscr{E}}(\overline{D})$ называют *границей Бергмана области D* и обозначают $B(D)$. Если $\mathscr{E}$ — множество всех полиномов, то $S_{\mathscr{E}}(\overline{D})$ называется *полиномиальной границей области D* и обозначается $P(D)$.

Следствие 6.3. *Пусть D — ограниченная область в C^n. Границы $S(D)$, $B(D)$, $P(D)$ существуют, единственны и $P(D) \subset B(D) \subset S(D) \subset \partial D$.*

Примеры. 1. Если D — шар, то $S(D) = B(D) = P(D) = \partial D$.

2. Если D — поликруг, то $S(D) = B(D) = P(D) = \Gamma$, где Γ — его остов.

3. Пример области голоморфности D, для которой границы Шилова и Бергмана имеют разную размерность (Айзенберг). Пусть $D = \{z \in C^2 : |z_2| < |z_1|^{-\ln|z_1|}, 0 < |z_1| < 1\}$. Функции $f_{m,l} = z_1^{-m} z_2^l$, $m, l = 1, 2 \ldots$, принадлежат $A_C(D)$, их модули $|f_{m,l}|$ достигают максимума на $\overline{D}$ в точке $z = (z_1, z_2)$, где $|z_1| = \exp\left(-\frac{m}{2l}\right)$, $|z_2| = |z_1|^{-\ln|z_1|}$. Отсюда нетрудно видеть, что $S(D) = \{z \in C^2 : |z_1| \leqslant 1, |z_2| = R(|z_1|)\}$, где

$$R(|z_1|) = \begin{cases} |z_1|^{-\ln|z_1|}, & \text{если } 0 < |z_1| \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } |z_1| = 0. \end{cases}$$

Всякая функция из $A(\overline{D})$ голоморфна и в замкнутом бикруге $\overline{U(0, 1)} = \{z \in C^2 : |z_1| \leqslant 1, |z_2| \leqslant 1\}$, поэтому $B(D) = S(U) = \Gamma = \{z \in C^2 : |z_1| = |z_2| = 1\}$. Итак, для D граница $S(D)$ трехмерна, а граница $B(D)$ двумерна.

2°. Пусть D — ограниченная область в C^n, функция $h(z, \overline{z}) \in C(\overline{D})$ и положительна в D. Обозначим $L_h^2 = L_h^2(D)$ совокупность всех функций $f \in A(D)$ с конечной нормой

$$\|f\| = \|f\|_D^h(D) = \left(\int_D |f|^2 h dv\right)^{1/2}, \tag{6.2}$$

где dv — элемент объема, интеграл в (6.2) понимается как несобственный; L_h^2 является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(f, g) = \int_D f\overline{g} h dv$.

Легко видеть, что если поликруг $U(z^0, r) \Subset D$, то для всякой функции $f \in L_h^2$ справедливо неравенство

$$|f(z^0)| < c\|f\|_D^h, \tag{6.3}$$

где постоянная c зависит от r, h, но не от f и не от z^0.

Обычным способом показывается, что в L_h^2 существуют полные ортонормальные системы. Пусть $\{\varphi_m(z), m = 0, 1, 2, \ldots\}$ — одна из них, а a_m — коэффициенты Фурье относительно этой системы функции $f \in L^2_h$, тогда ряд

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi_m(z) \tag{6.4}$$

сходится по норме, а значит, в силу (6.3) сходится равномерно и абсолютно внутри[4] D.

Далее, рассмотрим ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(z) \overline{\varphi_m(\zeta)} = K(z, \bar{\zeta}). \tag{6.5}$$

Теорема 6.4 (Бергман). *Ряд (6.5) сходится абсолютно и равномерно внутри* $D \times D$. *При фиксированном* $\zeta \in D$ *этот ряд сходится относительно* z *по норме* L^2_h.

Доказательство. Пусть $a \in D$, тогда, учитывая ортонормальность системы $\{\varphi_m\}$ и неравенство (6.3), получаем

$$\sum_{m=0}^{M} |\varphi_m(a)|^2 = \int_D \left| \sum_{m=0}^{M} \varphi_m(z) \overline{\varphi_m(a)} \right|^2 h\,dv \geqslant c \left(\sum_{m=0}^{M} |\varphi_m(a)|^2 \right)^2,$$

отсюда

$$\sum_{m=0}^{M} |\varphi_m(a)|^2 \leqslant \frac{1}{c}. \tag{6.6}$$

Рассмотрим точки $z \in D$, $\zeta \in D$, и пусть поликруги $U(z, r)$ и $U(\zeta, \rho)$ входят в D вместе со своими замыканиями. Тогда

$$\left(\sum_{m=0}^{M} |\varphi_m(z) \overline{\varphi_m(\zeta)}| \right)^2 \leqslant \sum_{m=0}^{M} |\varphi_m(z)|^2 \sum_{m=0}^{M} |\varphi_m(\zeta)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{c(r)\,c(\rho)},$$

отсюда следует равномерная и абсолютная сходимость

[4] То есть на компактах из D.

ряда (6.5) внутри $D\times D$. Наконец, из (6.6) вытекает, что равенство (6.5) является при фиксированном $\zeta\in D$ разложением $K(z, \overline{\zeta})$ по полной ортонормальной системе $\{\varphi_m(z)\}$ $\square$.

$K(z, \overline{\zeta})$ называют *кернфункцией Бергмана для области D относительно веса h* или просто *кернфункцией*. Заметим, что $K(z, \overline{\zeta}) = \overline{K(\zeta, \overline{z})}$ и $K(z, \overline{\zeta})$ голоморфна по z и антиголоморфна по ζ в $D\times D$.

Теорема 6.5. (Бергман). *Если $f\in L_h^2(D)$, то для $z\in D$*

$$f(z) = \int\limits_D f(\zeta)\, K(z, \overline{\zeta})\, h(\zeta, \overline{\zeta})\, dv_\zeta. \tag{6.7}$$

Доказательство. Представим f и K по формулам (6.4) и (6.5), тогда

$$\int\limits_D f(\zeta)\, K(z, \overline{\zeta})\, h(\zeta, \overline{\zeta})\, dv_\zeta = \int\limits_D \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m\varphi_m(\zeta)\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l(z)\,\overline{\varphi_l(\zeta)}\right) h(\zeta, \overline{\zeta})\, dv_\zeta = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\varphi_m(z) = f(z). \ \square$$

Отметим без доказательства следующие результаты Бергмана.

1. Кернфункция $K(z, \overline{\zeta})$ не зависит от выбора полной ортонормальной системы $\{\varphi_m\}$, а зависит лишь от области D и весовой функции h.

2. Если $h\equiv 1$, то положительно определенная дифференциальная форма

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \ln K(z, \overline{z})}{\partial z_\alpha \partial \overline{z}_\beta}\, dz_\alpha d\overline{z}_\beta$$

определяет в области D эрмитову метрику, инвариантную при биголоморфных отображениях. Ее называют *метрикой Бергмана*.

Приведем примеры вычисления кернфункции, ограничиваясь полными n-круговыми областями D и весовой функцией $h \equiv 1$. В качестве полной ортонормальной системы удобно взять мономы $\{a_k z^k\}$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $k_j = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где

$$a_k^2 = \left[\int\limits_D |z^k|^2 dv \right]^{-1}. \tag{6.8}$$

Полнота этой системы следует из того, что в рассматриваемом классе областей голоморфные функции разлагаются в ряд Тейлора, а ортонормальность — из (6.8) и

$$\int\limits_D z^k \bar{z}^{k'} dv = 0, \quad k \neq k'.$$

1. Поликруг. Для поликруга $U(0, r)$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ из (6.8) получим

$$a_k^2 = \frac{1}{\pi^n} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{k_\nu + 1}{r_\nu^{2k_\nu+2}}.$$

Далее, по формуле (6.5) (здесь $x_\nu = z_\nu \bar{\zeta}_\nu r_\nu^{-2}$)

$$K(z, \bar{\zeta}) = \sum_k \frac{1}{\pi^n} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{k_\nu + 1}{r_\nu^{2k_\nu+2}} z^k \bar{\zeta}^k = \frac{1}{\pi^n r_1^2 \ldots r_n^2} \sum_k \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} x^k =$$

$$= \frac{1}{\pi^n r_1^2 \ldots r_n^2} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \frac{1}{(1 - x_1) \ldots (1 - x_n)} =$$

$$= \frac{1}{\pi^n r_1^2 \ldots r_n^2} \frac{1}{(1 - x_1)^2 \ldots (1 - x_n)^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{r_\nu^2}{(r_\nu^2 - z_\nu \bar{\zeta}_\nu)^2}.$$

2. Шар. Для шара $B(O, R)$ по формуле (6.8)

$$a_k^2 = \frac{(k_1 + \ldots + k_n + n)!}{k! \ldots k_n! \pi^n R^{2(k_1 + \ldots + k_n + n)}},$$

поэтому (здесь $x = R^{-2}\sum_{j=1}^{n} z_j\overline{\zeta}_j,\ |x| < 1$)

$$K(z, \overline{\zeta}) = \frac{1}{\pi^n R^{2n}} \sum_k \frac{(k_1 + \ldots + k_n + n)!}{k_1! \ldots k_n! R^{2(k_1+\ldots+k_n)}} z^k\overline{\zeta}^k =$$

$$= \frac{1}{\pi^n R^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)\ldots(m+n)}{R^{2n}} \sum_{k_1+\ldots+k_n=m} \frac{m!}{k_1!\ldots k_n!} z^k\zeta^k =$$

$$= \frac{1}{\pi^n R^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{1}{\pi^n R^{2n}} \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{(1-x)} = \frac{n!}{\pi^n R^{2n}(1-x)^{n+1}} =$$

$$= \frac{n!\, R^2}{\pi^n (R^2 - z_1\overline{\zeta}_1 - \ldots - z_n\zeta_n)^{n+1}}.$$

3°. Пусть D — ограниченная область в C^n с кусочно-гладкой границей ∂D. Для функции $f \in A_C(D)$ запишем формулу Мартинелли — Бохнера (1.1) в виде

$$f(\zeta) = \int_{\partial D} f(\eta)\, M(\eta, \zeta)\, d\sigma_\eta,$$

где $\zeta \in D$, а $d\sigma$ — элемент поверхности ∂D. Далее, по формуле (6.7)

$$f(z) = \int_D \left[\int_{\partial D} f(\eta)\, M(\eta, \zeta)\, d\sigma_\eta\right] K(z, \overline{\zeta})\, h(\zeta, \overline{\zeta})\, dv_\zeta =$$

$$= \int_{\partial D} \left[\int_D M(\eta, \zeta)\, K(z, \overline{\zeta})\, h(\zeta, \overline{\zeta})\, dv_\zeta\right] f(\eta)\, d\sigma_\eta =$$

$$= \int_{\partial D} f(\eta)\, B(z, \eta)\, d\sigma_\eta.$$

Здесь ядро

$$B(z, \eta) = \int_D M(\eta, \zeta)\, K(z, \overline{\zeta})\, h(\zeta, \overline{\zeta})\, dv_\zeta \qquad (6.9)$$

голоморфно по $z \in D$ и непрерывно по $\eta \in \partial D$, если интеграл (6.9) равномерно сходится на каждом множестве вида $\{(z, \eta) : z \in Q, \eta \in \partial Q\}$; Q — произвольный компакт из D. Для того чтобы это было верно, достаточно чтобы по переменному ζ имело место $\|M(\eta, \zeta)\|_D^h \leqslant c$ и c не зависило от η. Указанное неравенство верно, если, например, $h = [\rho(\zeta, \partial D)]^{4n-2}$. Таким образом, комбинируя интегральное представление Мартинелли — Бохнера (1.1) и формулу Бергмана (6.7) (со специально выбранной весовой функцией), мы доказали, следуя идее Г. М. Хенкина, следующий результат.

Теорема 6.6. (Бангарт). *Для всякой ограниченной области D с кусочно-гладкой границей ∂D существует интегральное представление функций $f \in A_C(D)$*

$$f(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta) B(z, \zeta)\, d\sigma_\zeta, \tag{6.10}$$

где $z \in D$; ядро $B(z, \zeta)$ голоморфно по $z \in D$ и $B(z, \zeta) \in C\{(z, \zeta) : z \in D, \zeta \in \partial D\}$.

Верно и такое утверждение:

Теорема 6.7 (Бангарт). *При условиях теоремы 6.6 существует интегральное представление (6.10) с ядром $B(z, \overline{\zeta}) \in A\{(z, \overline{\zeta}) : z \in D, \zeta \in D\}$ из класса $H^2_{\partial\sigma_\zeta}$ при всяком $z \in D$.*

Ядро, о котором идет речь в этой теореме, голоморфное по z и антиголоморфное по ζ, называют *ядром Сеге*. Возникает вопрос, можно ли получить аналог формулы (6.10), где вместо ∂D интегрирование происходило бы по границе Шилова $S(D)$. Положительный ответ содержится в теореме, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 6.8 (Глисон). *На границе Шилова $S(D)$ ограниченной области D существует положительная мера μ и μ-измеримая функция $Q(z, \zeta)$, $z \in D$, $\zeta \in S(D)$, такая, что:*

а) *при фиксированном $\zeta \in S(D)$ функция $Q \in A(D)$ по z;*

б) *$Q(z, \zeta)$ интегрируема по мере μ_ζ при фиксированном $z \in D$;*

в) *функция $\int\limits_{S(D)} |Q(z, \zeta)|\, d\mu_\zeta$ непрерывна в D;*

г) *для всякой* $f \in A_C(D)$ *и* $z \in \mathrm{D}$

$$f(z) = \int\limits_{S(D)} f(\zeta)\, Q(z, \zeta)\, d\mu_\zeta. \tag{6.11}$$

Таким образом, граница Шилова играет в теории функций многих комплексных переменных ту же роль, какую играет вся граница области в теории функций одного комплексного переменного. На границе Шилова не только достигают максимума все функции из $A_C(D)$, но и значения этих функций внутри области восстанавливаются с помощью интегрального представления (6.11) по значениям на границе Шилова.

Дополним теорему 6.8 простым, но часто полезным утверждением, в некотором смысле обратным к этой теореме.

Теорема 6.9. *Если M — замкнутое подмножество границы ∂D ограниченной области D и для всяких $f \in A_C(D)$ и $z \in D$*

$$f(z) = \int\limits_{M} f(\zeta)\, R(z, \zeta)\, d\mu_\zeta, \tag{6.12}$$

где μ — положительная мера на M, функция R при фиксированном $z \in D$ абсолютно интегрируема по мере μ_ζ, то $M \supset S(D)$.

Доказательство. Пусть $f \in A_C(D)$, тогда для любого натурального m

$$|f(z)|^m = \left| \int\limits_M f(\zeta)^m R(z, \zeta)\, d\mu_\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sup_M |f(\zeta)|\right)^m \int\limits_M |R(z, \zeta)|\, d\mu_\zeta.$$

Теперь, извлекая корень степени m и устремив $m \to \infty$, получим, что M — определяющее множество. Значит, $M \supset S(D)$. $\square$

§ 7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАРТИНЕЛЛИ—БОХНЕРА—КОППЕЛЬМАНА ДЛЯ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

В этом параграфе формула (1.1) обобщается на внешние дифференциальные формы.

Пусть $w(\zeta, z) = (w_1, \ldots, w_n)$ — вектор-функция, заданная на множестве $U \subset C^n_\zeta \times C^n_z \setminus \{(\zeta, z) : \zeta = z\}$, такая, что $\langle w, \zeta - z\rangle = 1$. Если $w_l \in C^{(1)}(U)$, то обозначим

$$W_{p,q}(w, \zeta, z) = \frac{(-1)^{q+p(n-q-1)}\binom{n-1}{q}}{(2\pi i)^n p!\,(n-p)!} \times$$
$$\times D_{1,q,n-q-1}(w, \bar\partial_z w, \bar\partial_\zeta w) \wedge D_{p,n-p}(\partial z, \partial\zeta),$$
$$W_{p,-1} \equiv W_{p,n} \equiv 0.$$

Ядрами интегрального представления для внешних дифференциальных форм являются формы $W_{p,q}(w, \zeta, z)$ при специальном выборе вектора $w = t(\zeta, z) = \frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}$, поэтому введем еще одно обозначение: $U_{p,q}(\zeta, z) = W_{p,q}(t(\zeta, z), \zeta, z)$. Отметим, что $W_{0,0}(w, \zeta, z) = \omega(\zeta - z, w)$, так как

$$W_{0,0}(w, \zeta, z) = \frac{1}{(2\pi i)^n n!} D_{1,n-1}(w, \bar\partial_\zeta w) \wedge D_n(\partial\zeta) =$$
$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} w_k d_\zeta w_{[k]} \wedge d\zeta.$$

Теорема 7.1 (Коппельман). *Пусть D — ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂D и $\gamma \in C^{(1)}_{p,q}(\bar D)$, тогда справедлива формула Мартинелли — Бохнера — Коппельмана*

$$J^1_{p,q}(D, \gamma) - J^2_{p,q}(D, \bar\partial_\zeta \gamma) - \bar\partial_z J^2_{p,q-1}(D, \gamma) = \begin{cases}\gamma(z), & z \in D\\ 0, & z \notin \bar D,\end{cases} \tag{7.1}$$

где

$$J^1_{p,q}(D, \gamma)(z) = \int\limits_{(\partial D)_\zeta} \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q}(\zeta, z),$$

$$J^2_{p,q}(D, \gamma)(z) = \int\limits_{D_\zeta} \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\zeta, z).$$

Отметим, что $U_{p,q}(\zeta, z)$ имеет по z тип (p, q), а по ζ — тип $(n-p, n-q-1)$. При $n=1$ в случае $p=q=0$ третьего слагаемого в (7.1) не будет по определению, а $U_{0,0}(\zeta, z) = W_{0,0}\left(\frac{1}{\zeta_1 - z_1}, \zeta_1, z_1\right) = \frac{1}{2\pi i} D_{1,0,0}\left(\frac{1}{\zeta_1 - z_1}, \ldots\right) \wedge \wedge D_{0,1}(dz_1, d\zeta_1) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1}$ и мы получаем из (7.1) классическую *формулу Помпейю*, которую иногда еще называют *формулой Коши — Грина*:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{\varphi(\zeta_1)\, d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{\varphi'_{\bar\zeta_1}(\zeta_1)\, d\bar\zeta_1 \wedge d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} = \begin{cases}\varphi(z), & z \in D,\\ 0, & z \notin \overline{D},\end{cases}$$

где функция $\varphi \in C^{(1)}(\overline{D})$. В частном случае $p=q=0$, а $n>1$, ядро $U_{0,0}(\zeta, z) = \omega(\zeta - z, \overline{\zeta - z})$, и мы приходим к формуле Мартинелли — Бохнера для гладких функций (1.4).

Заметим, что формула (7.1) верна и при несколько более общих требованиях: например, когда D есть объединение конечного числа областей, указанных в условии теоремы 7.1, замыкания которых попарно не пересекаются. Далее, отметим, что

$$\bar\partial_z t = (\bar\zeta - \bar z)\,\bar\partial_z \frac{1}{|\zeta - z|^2} - \frac{1}{|\zeta - z|^2}\,\bar\partial_z \bar z,$$

поэтому при $q>1$

$$D_{1,q,n-q-1}(t, \bar\partial_z t, \bar\partial_\zeta t) = \frac{1}{|\zeta - z|^2}\,\bar\partial_z \frac{1}{|\zeta - z|^2} \wedge$$
$$\wedge\, D_{2,q-1,n-q-1}(\bar\zeta - \bar z, \bar\partial_z t, \bar\partial_\zeta t) -$$
$$- \frac{1}{|\zeta - z|^4} D_{1,1,q-1,n-q-1}(\bar\zeta - \bar z, \bar\partial_z \bar z, \bar\partial_z t, \bar\partial_\zeta t).$$

Первый определитель в правой части имеет два одинаковых столбца из функций, следовательно, по свойству 0.12 он равен нулю. Применим этот прием еще $q-1$ раз и получим

$$D_{1,q,n-q-1}(t, \bar{\partial}_z t, \bar{\partial}_\zeta t) =$$
$$= \frac{(-1)^q}{|\zeta - z|^{2q+2}} D_{1,q,n-q-1}(\bar{\zeta} - \bar{z}, \bar{\partial}_z \bar{z}, \bar{\partial}_\zeta t).$$

Аналогично поступим с последними $(n-q-1)$ столбцами. Имеем

$$D_{1,q,n-q-1}(t, \bar{\partial}_z t, \bar{\partial}_\zeta t) =$$
$$= \frac{(-1)^q}{|\zeta - z|^{2n}} D_{1,q,n-q-1}(\bar{\zeta} - \bar{z}, \bar{\partial}_z z, \bar{\partial}_\zeta \bar{\zeta}) =$$
$$= \frac{(-1)^q q!\,(n-q-1)!}{|\zeta - z|^{2n}} \sum_J{}' \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin J}}^{n} \sigma(J, k)(\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k)\, d\bar{z}_J d\bar{\zeta}_{[J,k]}, \tag{7.2}$$

где $J = (i_1, \ldots, i_q)$ — мультииндекс; штрих у знака суммы означает суммирование по J, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant n$; постоянная $\sigma(J, k)$ определяется равенством $\sigma(J, k) d\bar{z} = d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_J \wedge \partial \bar{z}_{[J,k]}$; множители $q!$ и $(n-q-1)!$ появляются от перестановок q столбцов, состоящих из дифференциалов $\bar{z}$ и $(n-q-1)$ столбцов, состоящих из дифференциалов $\bar{\zeta}$ соответственно. Используя равенство

$$D_{p,n-p}(\partial z, \partial \zeta) = p!\,(n-p)! \sum_{\mathcal{J}}{}' \sigma(\mathcal{J})\, dz_{\mathcal{J}} d\zeta_{[\mathcal{J}]},$$

где $\mathcal{J} = (j_1, \ldots, j_p)$, $\sigma(\mathcal{J}) dz = dz_{\mathcal{J}} \wedge dz_{[\mathcal{J}]}$, получаем следующее выражение для ядра Мартинелли — Бохнера — Коппельмана

$$U_{p,q}(\zeta, z) = \frac{(-1)^{p(n-q-1)}(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{J, \mathcal{J}}{}' \sigma(J, k)\, \sigma(\mathcal{J}) \times$$
$$\times \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}}\, d\bar{\zeta}_{[J,k]} \wedge d\zeta_{[\mathcal{J}]} d\bar{z}_J \wedge dz_{\mathcal{J}}. \tag{7.3}$$

Для доказательства теоремы 7.1 понадобится еще одна форма записи ядра $U_{0,q}$. Пусть

$$v_q = \frac{(-1)^n (n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_J{}' \sum_{\substack{k=1\\ k\notin J}}^n \sigma(J, k)(-1)^{k-1} d\bar{\zeta}_{[J,k]} \wedge$$

$$\wedge\, d\zeta_{[k]} d\bar{z}_J,$$

тогда

$$U_{0,q} = \frac{(-1)^{q+1}}{1-n} \partial_\zeta \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2}} \wedge v_q. \tag{7.4}$$

Лемма 7.2. *Пусть $w(\zeta, z)$ — вектор-функция класса $C^{(2)}$ на множестве $U \subset (C^n_\zeta \times C^n_z) \setminus \{(\zeta, z) : \zeta = z\}$ такая, что $\langle w, \zeta - z\rangle = 1$ и $0 \leqslant q \leqslant n$, тогда*

$$\bar{\partial}_\zeta W_{p,q}(w, \zeta, z) = (-1)^{p+q} \bar{\partial}_z W_{p,q-1}(w, \zeta, z). \tag{7.5}$$

В частности, $\bar{\partial}_\zeta W_{0,0} = \bar{\partial}_z W_{p,n-1} = 0$.

Доказательство. Для $1 \leqslant q \leqslant n$ по свойству 0.14 получаем

$$\bar{\partial}_z D_{1,q-1,n-q}(w, \bar{\partial}_z w, \bar{\partial}_\zeta w) = D_{q,\,n-q}(\bar{\partial}_z w, \bar{\partial}_\zeta w) +$$
$$+ (-1)^{q-1}(n-q) D_{1,q-1,1,\,n-q-1}(w, \bar{\partial}_z w, \bar{\partial}_z \bar{\partial}_\zeta w, \bar{\partial}_\zeta w), \tag{7.6}$$

а для $0 \leqslant q \leqslant n-1$

$$\bar{\partial}_\zeta D_{1,q,\,n-q-1}(w, \bar{\partial}_z w, \bar{\partial}_\zeta w) = (-1)^q D_{q,\,n-q}(\bar{\partial}_z w,$$
$$\bar{\partial}_\zeta w) + q D_{1,\,q-1,\,1,\,n-q-1}(w, \bar{\partial}_z w, \bar{\partial}_\zeta \bar{\partial}_z w, \bar{\partial}_\zeta w). \tag{7.7}$$

Согласно свойству 0.13, первые определители в (7.6) и (7.7) равны нулю. При $q = n$ в (7.6) и при $q = 0$ в (7.7) вторые слагаемые равны нулю, поэтому верно (7.5) при $q = 0,\ n$.

Если $1 \leqslant q \leqslant n-1$, то вторые определители в (7.6) и (7.7) равны, так как равны двойные формы $\bar{\partial}_z \bar{\partial}_\zeta w$ и $\bar{\partial}_\zeta \bar{\partial}_z w$, поэтому

$$\bar{\partial}_\zeta [(n-q) D_{1,q,n-q-1}(w, \bar{\partial}_z w, \bar{\partial}_\zeta w)] = \bar{\partial}_z [(-1)^{q-1} \times \times q D_{1,q-1,n-q}(w, \bar{\partial}_z w, \bar{\partial}_\zeta w)].$$

Умножив последнее равенство на

$$\frac{(n-1)!\,(-1)^{p(n-q-1)}}{(2\pi i)^n\, q!\,(n-q)!\,p!\,(n-p)!} D_{p,n-p}(\partial z, \partial \zeta),$$

придем к равенству (7.5).□

Лемма 7.3. *Если $f \in C^{(1)}$ в окрестности точки $0 \in \in \mathbb{C}^n$, то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta_{[k]}}{|\zeta|^{2n-m}} = \begin{cases} (-1)^{n-k-1} \dfrac{(2\pi i)^n}{n!} \dfrac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k}(0), & m = 0, \\ 0, & m > 0, \end{cases} \tag{7.8}$$

в частности,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)\, \zeta_j\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta_{[k]}}{|\zeta|^{2n}} = (-1)^{n-k-1} \frac{(2\pi i)^n}{n!} f(0)\, \delta_{jk}. \tag{7.9}$$

Доказательство.

$$\int\limits_{|\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta_{[k]}}{|\zeta|^{2n-m}} = \frac{1}{\varepsilon^{2n-m}} \int\limits_{|\zeta|=\varepsilon} f(\zeta)\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta_{[k]} =$$

$$= (-1)^{n-k-1} \varepsilon^{m-2n} \int\limits_{|\zeta|<\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta =$$

$$= (-1)^{n-k-1} \varepsilon^{m-2n} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k}(0) \int\limits_{|\zeta|<\varepsilon} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|\zeta|<\varepsilon} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k}(\zeta) - \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k}(0) \right) d\bar{\zeta} \wedge d\zeta \right] =$$

$$= (-1)^{n-k-1} \varepsilon^{m-2n} \left[\frac{(2\pi i)^n}{n!} \varepsilon^{2n} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k}(0) + 0(\varepsilon^n) \right]$$

и, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим (7.8). Для доказательства (6.9) теперь достаточно заметить, что $\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_k} f(\zeta)\,\zeta_j\big|_{\zeta=0} = f(0)\,\delta_{jk}$. □

Доказательство теоремы 7.1. В силу аддитивности операций, производимых над формой γ в левой части (7.1), доказательство достаточно провести для форм вида

$$\gamma = f(z)\, d\bar{z}_J \wedge dz_{\mathcal{J}},$$
$$\text{где } f \in \bar{C}^{(1)}(\bar{D}),$$
$$J = (i_1, \ldots, i_q),\ \mathcal{J} = (j_1, \ldots, j_p).$$

Далее,

$$\gamma(\zeta) \wedge U_{p,q}(\zeta, z) = \frac{(-1)^{q+p(n-q-1)}\binom{n-1}{q}}{(2\pi i)^n\, p!\,(n-p)!} f(\zeta)\, d\bar{\zeta}_J \wedge d\zeta_{\mathcal{J}} \wedge$$
$$\wedge D_{1,q,n-q-1}\left(t, \bar{\partial}_z t, \bar{\partial}_\zeta t\right) \wedge D_{p,n-p}(\partial z, \partial\zeta) =$$
$$= f(\zeta)\, d\bar{\zeta}_J \wedge \frac{(-1)^q\binom{n-1}{q}}{(2\pi i)^n} D_{1,q,n-q-1}\left(t, \bar{\partial}_z t, \bar{\partial}_\zeta t\right) \wedge d\zeta dz_{\mathcal{J}} =$$
$$= f(\zeta)\, d\bar{\zeta}_J \wedge U_{0,q}(\zeta, z) \wedge d\zeta_{\mathcal{J}}.$$

Аналогично

$$\bar{\partial}\gamma \wedge U_{p,q}(\zeta, z) = \bar{\partial}\left(f d\bar{\zeta}_J\right) \wedge U_{0,q}\ dz_{\mathcal{J}},$$
$$\gamma \wedge U_{p,q-1}(\zeta, z) = f d\bar{\zeta}_J \wedge U_{0,q-1} dz_{\mathcal{J}},$$

т. е. формулу (7.1) достаточно получить для форм типа $(0, q)$, точнее, для форм вида $\gamma = f(z) d\bar{z}_J$.

И наконец, ядра $U_{0,q}$ инвариантны относительно преобразований: $\zeta_j \to \zeta_{\tau(j)}$, $z_j \to z_{\tau(j)}$, $j = 1, \ldots, n$, где τ — произвольная перестановка, так как при этом в двух определителях из $U_{0,q}$ меняются местами одни и те же строки. Значит, достаточно рассматривать формы вида

$$\gamma = f(z) dz_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_q.$$

Для $z \notin \overline{D}$ формула (7.1) — следствие формулы Стокса и леммы 7.2.

Пусть $z \in D$. Обозначим

$$\theta_q^* = U_{0,q} - \overline{\partial}_z g \wedge v_{q-1},$$

где g введена в (1.7). Так как $\gamma \wedge U_{0,q}$ имеет по ζ тип $(n, n-1)$, а форма $\gamma \wedge \overline{\partial}_z g \wedge v_{q-1}$ — тип $(n-1, n)$, то $d_\zeta(\gamma \wedge \theta_q^*) = \overline{\partial}_\zeta(\gamma \wedge U_{0,q}) - \partial_\zeta(\gamma \wedge \overline{\partial}_z g \wedge v_{q-1}) = \overline{\partial}_\zeta \gamma \wedge U_{0,q} + (-1)^q \gamma \wedge \overline{\partial}_\zeta U_{0,q} - \partial_\zeta \gamma \wedge \overline{\partial}_z g \wedge v_{q-1} - (-1)^q \gamma \wedge \partial_\zeta \overline{\partial}_z g \wedge v_{q-1}$. Теперь с помощью (7.4) и леммы 7.2 получаем

$$(-1)^q \gamma \wedge \overline{\partial}_\zeta \overline{\partial}_z g \wedge v_{q-1} = (-1)^q \gamma \wedge \overline{\partial}_z (\partial_\zeta g \wedge v_{q-1}) =$$

$$= \gamma \wedge \overline{\partial}_z U_{0,q-1} = (-1)^q \gamma \wedge \overline{\partial}_\zeta U_{0,q},$$

следовательно,

$$d_\zeta(\gamma \wedge \theta_q^*) = \overline{\partial}_\zeta \gamma \wedge U_{0,q} - \overline{\partial}_\zeta \gamma \wedge \overline{\partial}_z g \wedge v_{q-1}, \quad (7.10)$$

поэтому второй интеграл в

$$i(z) = \int_{\partial D_\zeta} \gamma \wedge \theta_q^* - \int_{D_\zeta} d_\zeta(\gamma(\zeta) \wedge \theta_q^*) \quad (7.11)$$

сходится абсолютно.

Докажем теперь, что $i(z)$ совпадает с левой частью (7.1). Для этого рассмотрим форму $\gamma \wedge g v_{q-1}$, имеющую по ζ тип $(n-1, n)$.

По формуле Стокса

$$\int_{\partial D_\zeta} \gamma \wedge g v_{q-1} - \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \gamma \wedge g v_{q-1} = \int_{D \setminus B_\varepsilon(z)} \overline{\partial} \gamma \wedge g v_{q-1} +$$

$$+ (-1)^q \int_{D \setminus B_\varepsilon(z)} \gamma \wedge \partial_\zeta g \wedge v_{q-1}. \quad (7.12)$$

Согласно лемме 7.3, предел второго интеграла в левой части (7.12) при $\varepsilon \to 0$ равен нулю, следовательно, используя (7.4), найдем

$$\int_{D_\zeta} \gamma \wedge U_{0,q-1} = \int_{\partial D_\zeta} \gamma \wedge g v_{q-1} - \int_{D_\zeta} \bar\partial \gamma(\zeta) \wedge g v_{q-1}. \quad (7.13)$$

В интегралах правой части (7.13) можно дифференцировать под знаком интеграла: первый интеграл после дифференцирования будет по-прежнему собственным, а второй — будет иметь особенность вида $|\zeta - z|^{1-2n}$ и поэтому сходится абсолютно. Значит, левая часть в (7.13) тоже дифференцируема, и

$$\int_{\partial D_\zeta} \gamma(\zeta) \wedge \bar\partial_z g \wedge v_{q-1} - \int_{D_\zeta} \partial\gamma(\zeta) \wedge \bar\partial_z g \wedge v_{q-1} -$$
$$- \bar\partial_z \int_{D_\zeta} \gamma \wedge U_{0,q-1} = 0. \quad (7.14)$$

Складывая (7.11) и (7.14) и используя определение $U_{0,q}$ и (7.10), получаем, что $i(z)$ равна левой части (7.1).

Покажем, что $i(z) = \gamma(z)$. Из формулы Стокса, примененной к области $D \diagdown \overline{B_\varepsilon(z)}$, и (7.11) следует, что

$$i(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \gamma(\zeta) \wedge \theta_q^*.$$

Вычислим этот предел, для чего перейдем от формы θ_q^* к форме $\theta_q = (-1)^q \bar\partial_\zeta g \wedge v_q - \partial_z g \wedge v_{q-1}$. Из инвариантности первого дифференциала имеем, что $d_\zeta g\,|_{\partial B_\varepsilon(z)} = 0$, или $\bar\partial_\zeta g\,|_{\partial B_\varepsilon(z)} = \partial_\zeta g\,|_{\partial B_\varepsilon(z)}$, поэтому из (7.4) следует, что $\theta_q^*\,|_{\partial B_\varepsilon(z)} = \theta_q\,|_{\partial B_\varepsilon(z)}$.

Обозначим $g_k = (\zeta_k - z_k)|\zeta - z|^{-2n}$, $k = 1, \ldots, n$. Имеем

$$\gamma(\zeta)\wedge\theta_q=(-1)^n\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}f(\zeta)\Big\{(-1)^q\,d\bar\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\bar\zeta_q\wedge$$

$$\wedge\sum_{k=1}^n g_k d\bar\zeta_k\wedge{\sum_J}'\sum_{j\notin J}\sigma(J,j)(-1)^{j-1}\,d\bar\zeta_{[J,j]}\wedge d\zeta_{[j]}d\bar z_J-$$

$$-d\bar\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\bar\zeta_q\wedge\sum_{j=1}^n(-g_k)\,d\bar z_k\wedge{\sum_{\mathcal J}}'\sum_{k\notin\mathcal J}\sigma(\mathcal J,k)\times$$

$$\times(-1)^{k-1}d\bar\zeta_{[\mathcal J,k]}\wedge d\zeta_{[k]}d\bar z_{\mathcal J}\Big\}=\frac{(-1)^n(n-1)!}{(2\pi i)^n}f(\zeta)\times$$

$$\times\Big\{(-1)^q\sum_{k=q+1}^n g_k d\bar\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\bar\zeta_q\wedge d\bar\zeta_k\wedge d\bar\zeta_{[1,\ldots,q,k]}\wedge$$

$$\wedge\Big[\sum_{j=1}^q\sigma((1,\ldots[j]\ldots,q,k),j)(-1)^{j-1}d\zeta_{[j]}d\bar z_1\wedge\ldots$$

$$\ldots[j]\ldots\wedge d\bar z_q\wedge d\bar z_k+\sigma((1,\ldots,q),k)(-1)^{k-1}d\zeta_{[k]}d\bar z_1\wedge\ldots$$

$$\ldots\wedge d\bar z_q\Big]+d\bar\zeta_1\wedge\ldots<d\bar\zeta_q\wedge d\bar\zeta_{[1,\ldots,q]}\wedge\sum_{k=1}^q\sigma((1,\ldots$$

$$\ldots[k]\ldots,q),k)(-1)^{k-1}\wedge d\zeta_{[k]}\sum_{j=1}^n g_j d\bar z_j\wedge d\bar z_1\wedge\ldots$$

$$\ldots[k]\ldots\wedge d\bar z_q\Big\}.$$

Заметим, что $(-1)^q\sigma((1,\ldots,q),k)d\bar\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\bar\zeta_q\wedge d\bar\zeta_k\wedge\wedge d\bar\zeta_{[1,\ldots,q,k]}=\sigma((1,\ldots,q),\ k)\quad d\bar\zeta_k\wedge d\bar\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\bar\zeta_q\wedge\wedge d\bar\zeta_{[1,\ldots,q,k]}=d\bar\zeta,\quad\sigma((1,\ldots[k]\ldots,q),\ k)d\zeta_1\wedge\ldots\ldots\wedge d\bar\zeta_q\wedge d\bar\zeta_{[1,\ldots,q]}d\bar z_k\wedge d\bar z_1\wedge\ldots[k]\ldots\wedge d\bar z_q==\sigma((1,\ldots[k]\ldots,q),k)d\bar\zeta_k\wedge d\bar\zeta_1\wedge\ldots[k]\ldots\wedge d\bar\zeta_q\wedge d\bar\zeta_q\wedge\wedge d\bar\zeta_{[1,\ldots,q]}d\bar z_1\wedge\ldots\wedge d\bar z_q=d\bar\zeta d\bar z_1\wedge\ldots\wedge d\bar z_q$, следовательно,

$$\gamma\wedge\theta_q=\frac{(-1)^n(n-1)!}{(2\pi i)^n}f\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}g_k d\bar\zeta\wedge d\zeta_{[k]}\wedge$$

$$\wedge\,d\bar z_1\wedge\ldots\wedge d\bar z_q+\chi,$$

где χ состоит из слагаемых вида

$$cf(\zeta)g_k d\bar{\zeta}\wedge d\zeta_{[j]}d\bar{z}_J,\ j\neq k,\ J=(i_1,\ \dots,\ i_q).$$

По лемме 7.3

$$i(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(z)}\gamma(\zeta)\wedge\theta_q=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^{n}\lim_{\varepsilon\to 0}(-1)^{n+k-1}\times$$

$$\times\int\limits_{\partial B_\varepsilon(z)}\frac{f(\zeta)(\zeta_k-z_k)}{|\zeta-z|^{2n}}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta_{[k]}d\bar{z}_1\wedge\ \dots\ \wedge d\bar{z}_q+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(z)}\chi=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2\pi i)^n}{n!}f(z)\,d\bar{z}_1\wedge\ \dots\ \wedge d\bar{z}_q=\gamma(z).\ \square$$

Теорему 7.1 можно несколько усилить, ослабив требования на форму γ. Здесь и далее под производной от непрерывной функции имеется в виду производная в смысле теории обобщенных функций.

Т е о р е м а 7.4. *Если D — ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂D и $\gamma\in C_{p,q}(\bar{D})$, а $\partial\gamma\in C_{p,q+1}(\bar{D})$, то имеет место формула (7.1).*

Наконец, при приложениях формулы (7.1) бывает следующее ее обобщение, получаемое без труда:

Т е о р е м а 7.5. *Пусть выполнены условия теоремы 7.4 и функция $\varphi(\zeta, z)\in C^{(1)}(\bar{D}\times D)$ такова, что $\varphi(z, z)\equiv 1$ для $z\in D$, тогда справедливо интегральное представление при $z\in D$:*

$$\gamma(z)=J^1_{p,q}(D,\gamma\varphi)-J^2_{p,q}(D,\varphi\bar{\partial}_\zeta\gamma)-\bar{\partial}_z J^2_{p,q-1}(D,\gamma\varphi)-$$
$$-J^2_{p,q}(D,\bar{\partial}_\zeta\varphi\wedge\gamma)+J^2_{p,q-1}(D,\bar{\partial}_z\varphi\wedge\gamma).\quad (7.15)$$

Глава II

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 8 МОДИФИКАЦИИ И ПРОСТЕЙШИЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ФОРМУЛЫ ЛЕРЕ

1°. При $n = 1$ формула Коши — Фантаппье (3.13) или обобщенная формула Коши — Фантаппье (3.12) превращаются в классическую формулу Коши. Однако для голоморфных функций одного комплексного переменного можно получить и другие интегральные представления, восстанавливающие значения функции в точках $z \in D$ по ее значениям на ∂D_z не совпадающие с формулой Коши, например, с помощью конформного отображения.

Пусть $w_1 = \psi(z_1)$ есть конформное отображение замкнутой области $\overline{D}$ на замкнутую область $\overline{G}$. Рассмотрим обратное отображение $z_1 = \theta(w_1)$, $z_1 \in \overline{D}$, $w_1 \in \overline{G}$. Теперь из классической формулы Коши (3.17) получим

$$f(\theta(w_1)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} f(\theta(\eta_1))\frac{\theta'(\eta_1)\,d\eta_1}{\theta(\eta_1) - \theta(w_1)} = $$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} f(\theta(\eta_1))\frac{\theta'(\eta_1)(\eta_1 - w_1)}{\theta(\eta_1) - \theta(w_1)}\frac{d\eta_1}{\eta_1 - w_1}$$

или в других обозначениях

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} f(\zeta_1)\,\varphi(\zeta_1, z_1)\frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1}, \tag{8.1}$$

где функция φ непрерывна по совокупности переменных при $z_1 \in D$, $\zeta_1 \in \overline{D}$, голоморфна по ζ_1 в $\overline{D}$ и $\varphi(z_1, z_1) \equiv 1$. Формула (8.1) не получается из общих формул (3.12), (3.13).

Естественно обобщить соответствующим образом формулы (3.12) и (3.13). Легко получается

Предложение 8.1. *Пусть $w^j(\zeta, z)$ удовлетворяют условиям $w^0 \in C_\zeta(\partial D)$, $w^j \in C_\zeta^{(1)}(\partial D)$, $j = 1, \ldots, n-1$, $\langle w^j, \zeta - z\rangle \neq 0$, $\zeta \in \partial D$, $z \in D$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, функция $\varphi(\zeta, z)$ при фиксированном $z \in D$ принадлежит $A_C(D)$ по ζ и $\varphi(z, z) \equiv 1$. Тогда для всякой $f \in A_C(D)$ и любой точки $z \in D$ верны модификации формул (3.12) и (3.13):*

$$\int\limits_{\partial D} f\varphi\Omega(w^0, w^1, \ldots, w^{n-1}, \zeta - z) = f(z), \tag{8.2}$$

$$\int\limits_{\partial D} f\varphi\omega(\zeta - z, w^1) = f(z). \tag{8.3}$$

Доказательство. Применим (3.12) к функции $f(\zeta)\varphi(\zeta, z)$ при фиксированном $z \in D$:

$$\int\limits_{\partial D} f\varphi\Omega = f(z)\varphi(z, z) = f(z). \quad \square$$

При $n = 1$ формулы (8.2) и (8.3) содержат все возможные интегральные представления — аналоги интеграла Коши (см. § 26). Формула (8.3) и при $n > 1$ обладает известной законченностью.

Предложение 8.2. 1. *При биголоморфном отображении замкнутой области $\overline{D}$ ядро $\varphi\omega(z - a, w^1)$ преобразуется в ядро того же вида.*

2. *Если $n = 2$, функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ принадлежат $A_C(D)$ и $F_1 + F_2 \neq 0$ в D, то воспроизводящее ядро*

$$\frac{F_1\varphi_1\omega(z - a, w^1) + F_2\varphi_2\omega(z - a, w^2)}{F_1 + F_2}$$

есть снова ядро того же вида, как в (8.3).

Отметим еще одно формальное обобщение формулы Коши — Фантаппье (3.13), состоящее в том, что в знаменателе ядра $\omega(z - a, w)$ вместо скалярного произведения $\langle w, \zeta - z\rangle$ рассматривается $\langle w, Q(\zeta) - Q(z)\rangle$, где $Q \in$

$\in A^n(\overline{D})$. По теореме Гефера 25.2

$$Q_i(\zeta) - Q_i(z) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}(\zeta_j - z_j), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $q_{ij}(\zeta, z) \in A^n(\overline{D} \times \overline{D})$; обозначим $\Omega = \det \|q_{ij}\|$. Из (3.13) следует

Предложение 8.3 (Айзенберг). *Для всякой $f \in \in A_C(D)$ и любой точки $z \in D$ справедлива формула*

$$\int_{\partial D} f\varphi\Omega\widetilde{\omega}(Q(\zeta) - Q(z), w) = f(z), \tag{8.4}$$

где

$$\widetilde{\omega}(F, w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} w_k dw_{[k]} \wedge d\zeta}{\langle w, F\rangle^n}.$$

Хотя формула (8.4) является формально более общей, чем формула Коши — Фантаппье (3.13), но тем не менее каждая из них является простым следствием другой.

2°. Формула Мартинелли — Бохнера (1.1) получается из формулы Коши — Фантаппье (3.13), если взять $w = \overline{\zeta} - \overline{z}$.

3°. Область $D = \{z : \rho(z, \overline{z}) < 0\}$ называют *регулярной линейно-выпуклой*, если действительная функция ρ принадлежит классу $C^{(2)}$ в окрестности $\overline{D}$, причем $\operatorname{grad} \rho \neq \neq 0$ на ∂D и для всякой $\zeta \in \partial D$ касательная аналитическая плоскость $\{z : \langle z - \zeta, \operatorname{grad} \rho(\zeta)\rangle = 0\}$ не пересекает D. Для такой области в качестве w в формуле (3.13) можно рассмотреть $\operatorname{grad} \rho$, в этом случае для $f \in A_C(D)$ получаем

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) \sum_{k=1}^{n} \delta_k d\overline{\zeta}_{[k]} \wedge d\zeta}{\left[\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \ldots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n)\right]^n}, \tag{8.5}$$

где

$$\delta_k = \begin{vmatrix} \rho'_{\zeta_1} \dots \rho'_{\zeta_n} \\ \rho''_{\zeta_1\bar{\zeta}_1} \dots \rho''_{\zeta_n\bar{\zeta}_1} \\ \dots [k] \dots \\ \rho''_{\zeta_1\bar{\zeta}_n} \dots \rho''_{\zeta_n\bar{\zeta}_n} \end{vmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

В (8.5) так же, как в формуле Коши при $n = 1$, внешнее переменное z входит только в знаменатель ядра, и этот знаменатель является линейной функцией от z, взятой в степени n. Такая хорошая структура ядра повлекла за собой ряд красивых приложений формулы (8.5).

Представим ∂D в виде объединения непересекающихся множеств Γ_m, $m = 1, \dots, n$, так, чтобы $\rho'_{\bar{\zeta}_m} \neq 0$ на Γ_m. При этом на Γ_m

$$d\bar{\zeta}_{[k]} \wedge d\zeta = (-1)^{m-k} \frac{\rho'_{\bar{\zeta}_k}}{\rho'_{\bar{\zeta}_m}} d\bar{\zeta}_{[m]} \wedge d\zeta,$$

поэтому формулу (8.5) можно записать в виде

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \int_{\Gamma_m} \frac{f(\zeta)\, L(\rho)\, d\bar{\zeta}_{[m]} \wedge d\zeta}{\rho'_{\bar{\zeta}_m} \langle \operatorname{grad} \rho(\zeta), \zeta - z\rangle^n}, \tag{8.6}$$

где $L(\rho)$ — определитель Леви;

$$L(\rho) = -\begin{vmatrix} 0 & \rho'_{\zeta_1} & \dots \rho'_{\zeta_n} \\ \rho'_{\bar{\zeta}_1} & \rho''_{\zeta_1\bar{\zeta}_1} & \dots \rho''_{\zeta_n\bar{\zeta}_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho'_{\bar{\zeta}_n} & \rho''_{\zeta_1\bar{\zeta}_n} & \dots \rho''_{\zeta_n\bar{\zeta}_n} \end{vmatrix}.$$

Точка $\zeta \in \partial D$ называется *точкой строгой псевдовыпуклости*, если *форма Леви*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \bar{\zeta}_k} \eta_j \bar{\eta}_k$$

положительна для всех таких η, *что*

$$\left\{\eta : \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_j} \eta_j = 0\right\}. \tag{8.7}$$

Предложение 8.4. *Определитель Леви* $L(\rho)$ *равен произведению собственных чисел формы Леви на гиперплоскости* (8.7), *умноженному на* $|\mathrm{grad}\, \rho(\zeta)|^2$.

Из этого предложения следует, что интегрирование в формуле (8.5) производится по замыканию множества точек строгой псевдовыпуклости ∂D. Теперь из теоремы 6.9 вытекает, что указанное замыкание в рассматриваемом случае регулярной линейно-выпуклой области D содержит границу Шилова $S(D)$. В этом утверждении требование линейной выпуклости D можно отбросить.

Теорема 8.5 (Росси — Базнер). *Пусть* D — *ограниченная область,* $\partial D \in C^{(2)}$. *Тогда* $S(D)$ *содержится в замыкании строго псевдовыпуклых точек* ∂D.

Отметим, что всякая регулярная выпуклая область является и регулярной линейно-выпуклой, поэтому для нее верно интегральное представление (8.5). В частности, для эллипсоида $D = \{z : \alpha_1 |z_1|^2 + \ldots + \alpha_n |z_n|^2 < R^2\}$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, получаем

$$f(z) = \frac{\alpha_1 \ldots \alpha_n (n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta) \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \bar{\zeta}_k d\bar{\zeta}_{[k]} \wedge d\zeta}{\left[R^2 - \alpha_1 \bar{\zeta}_1 z_1 - \ldots - \alpha_n \bar{\zeta}_n z_n\right]^n}. \tag{8.8}$$

Формула (8.8) при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = R = 1$ называется *формулой Бохнера* для функций, голоморфных в единичном шаре. Ядро в (8.8) голоморфно по z и антиголоморфно по ζ (т. е. голоморфно по $\bar{\zeta}$). Такие воспроизводящие ядра при интегрировании по ∂D называют *ядрами Сеге* (см. § 6).

4°. Пусть D — ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂D и для произвольной точки $z \in D$ выбрана точка $v \in D$, так, что шар $B_r(v) \subset D$ и $z \in B_r(v)$. Если $\zeta \in \partial D$, то

$$|\langle \overline{\zeta} - \overline{v}, \zeta - z\rangle| = |\langle \overline{\zeta} - \overline{v}, \zeta - v\rangle -$$

$$-\langle \overline{\zeta} - \overline{v}, z - v\rangle| \geqslant |\zeta - v|^2 - |\langle \overline{\zeta} - \overline{v},$$

$$\zeta - v\rangle| \geqslant |\zeta - v|(|\zeta - v| - |z - v|) > 0,$$

поэтому в качестве w в формуле Коши—Фантаппье можно взять $\overline{\zeta} - \overline{v}$ и для $z \in B_r(v)$ получаем *формулу Бохнера—Оно*

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta) \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\bar{\zeta}_k - \bar{v}_k\right) d\bar{\zeta}_{[k]} \wedge d\zeta}{\langle \bar{\zeta} - \bar{v}, \zeta - z\rangle^n}. \quad (8.9)$$

Можно выбрать не более чем счетное множество точек $v \in D$ так, чтобы соответствующие шары $B_{r(v)}(v)$ покрывали всю область D. Ядро в (8.9) голоморфно по $z \in \in B_r(v)$, но не является даже непрерывным по z во всей области D. Если D—шар, то (8.9) превращается в формулу Бохнера.

5°. Рассмотрим ограниченную область голоморфности Q и функцию $\Psi(z, \overline{\zeta})$ на $Q \times Q$, голоморфную по z и антиголоморфную по ζ на этом множестве. Пусть $\Psi(z, \overline{z})$ вещественна, область $D = \{z : \Psi(z, \overline{z}) < 0\}$ ограничена и имеет кусочно-гладкую границу, $\overline{D} \subset Q$, и для $\zeta \in \partial D$, $z \in D$, справедливо неравенство

$$\Psi(z, \overline{z}) - \Psi(z, \overline{\zeta}) - \overline{\Psi(z, \overline{\zeta})} + \Psi(\zeta, \overline{\zeta}) \geqslant 0, \quad (8.10)$$

откуда $\operatorname{Re} \Psi(z, \overline{\zeta}) < 0$. При этих предположениях в качестве скалярного произведения $\langle w, \zeta - z\rangle$ в (3.13) можно взять разность $\Psi(z, \overline{\zeta}) - \Psi(\zeta, \overline{\zeta}) = \Psi(z, \overline{\zeta}) \neq 0$ при $z \in D$, $\zeta \in \partial D$.

Полученное таким способом интегральное представление интересно тем, что его ядро голоморфно по z, а в знаменателе ядра стоит «уравнение» границы ∂D области D. Например, для области $D = B_r^{\alpha}(0) = \{z : |z_1|^{2\alpha_1} + \ldots + |z_n|^{2\alpha_n} < 1\}$ справедлива интегральная формула

$$(fz) = \frac{(n-1!)}{(2\pi i)^n} \times$$

$$\times \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta) \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \overline{\zeta}_k^{\alpha_k - 1} \sum\limits_{i+j=\alpha_k-1} z_k^i \zeta_k^j \right) \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha_k} \times \overline{\zeta}_k d\overline{\zeta}_{[k]} \wedge d\zeta}{\left(1 - z_1^{\alpha_1} \overline{\zeta}_1^{\alpha_1} - \ldots - z_n^{\alpha_n} \overline{\zeta}_n^{\alpha_n}\right)^n}.$$

Примером функции, удовлетворяющей условию (8.10), является функция вида $\Psi(z, \overline{\zeta}) = F(z) + F(\overline{\zeta}) + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k z_k^{m_k} \overline{\zeta}_k^{m_k}$, где m_k — натуральные числа, $a_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$, $\overline{F(\overline{\zeta})} = F(\zeta)$.

Другой пример опирается на следующую теорему.

Теорема 8.6 (Бишоп). *Пусть D — область голоморфности в C^n, тогда существуют голоморфные в D функции $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_{n+1}(z)$ такие, что для любого $R > 0$ множество $D_R = \left\{ z : \sum\limits_{k=1}^{n+1} |\varphi_k(z)|^2 < R \right\}$ обладает свойством $D_R \Subset D$ и, кроме того, почти при всех $R > 0$ граница ∂D_R является гладкой.*

Рассмотрим функцию

$$K(z, \overline{\zeta}) = \sum_{m=1}^{n+1} \varphi_m(z) \overline{\varphi_m(\zeta)},$$

голоморфную по z и антиголоморфную по ζ в $D \times D$. Для каждой связной компоненты D_R неравенство (8.10) верно, если положить $\Psi(z, \overline{\zeta}) = K(z, \overline{\zeta}) - R$, так как

$$\Psi(z, \overline{z}) - \Psi(z, \overline{\zeta}) - \overline{\Psi(z, \overline{\zeta})} + \Psi(\zeta, \overline{\zeta}) = \\ = \sum_{m=1}^{n+1} |\varphi_m(z) - \varphi_m(\zeta)|^2.$$

Теперь для $R > 0$ таких, что ∂D_R является гладкой, получаем при $f \in A_C(D)$, $z \in D_R$,

$$f(z) = \int_{\partial D_R} f(\zeta)\,\mu, \tag{8.11}$$

где ядро μ — внешняя дифференциальная форма вида Коши — Фантаппье (см. (3.13)), а в качестве скалярного произведения $\langle w, \zeta - z\rangle$ взята функция $K(z, \overline{\zeta}) - R = K(z, \overline{\zeta}) - K(\zeta, \overline{\zeta})$, к которой можно применить теорему Гефера. Отметим, что в (8.11) можно интегрировать не по всей границе ∂D_R, а только по границе той связной компоненты множества D_R, в которой содержится точка z. Ядро μ в (8.11) голоморфно по z и не зависит от R, а $\bigcup_R D_R = D$. Естественно назвать представление (8.11) *универсальным относительно данной области* D.

Заметим в заключение, что в качестве $K(z, \overline{\zeta})$ можно было взять кернфункцию Бергмана (см. § 6).

В трех следующих параграфах мы осветим и некоторые другие следствия интегрального представления Коши—Фантаппье.

§ 9. ФОРМУЛА БЕРГМАНА—ВЕЙЛЯ

Пусть в области $D \subset C^n$ задан набор голоморфных функций $\chi_1(z), \ldots, \chi_N(z)$, $N \geqslant n$, и набор плоских областей $D_1, \ldots, D_N$, причем $D_i \subset \chi_i(D)$, $i = 1, \ldots, n$. Множество $\Delta = \{z : z \in D,\ \chi_i(z) \in D_i,\ i = 1, \ldots, N\}$ называется *аналитическим полиэдром*. Связная компонента аналитического полиэдра называется *полиэдром Вейля*, если границы ∂D_i кусочно-гладки и пересечение k граней

$\gamma_i = \{z : z \in D,\ \chi_i \in \partial D_i,\ \chi_j \in D_j,\ i \neq j\}$ имело размерность не более $2n - k$ (чтобы грани пересекались в общем положении), Обозначим через $\gamma_{i_1 \ldots i_n} = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \gamma_{i_k}$. Эти n-мерные ребра мы снабдим естественной ориентацией, определяемой порядком граней $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_n}$. Объединение всех таких n-мерных ребер назовем *остовом* полиэдра Δ и обозначим σ.

По теореме Гефера 25.2 $\chi_i(\zeta) - \chi_i(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} q_{ij}(\zeta_j - z_j)$, $i = 1, \ldots, N$. Определитель $\det\|q_{ij}\|$, $i = i_1 \ldots, i_n$; $j = 1, \ldots, n$, обозначим $\Omega_{i_1 \ldots i_n}$.

Теорема 9.1. (Вейль). *Пусть Δ — полиэдр Вейля и $f \in A_C(\Delta)$, тогда для $z \in \Delta$ верна формула*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1 < \ldots < i_n} \int\limits_{\gamma_{i_1 \ldots i_n}} \frac{f(\zeta)\, \Omega_{i_1 \ldots i_n}(\zeta, z)\, d\zeta}{\prod\limits_{k=1}^{n} \left[\chi_{i_k}(\zeta) - \chi_{i_k}(z)\right]}. \quad (9.1)$$

Формула (9.1) называется *интегральным представлением Бергмана—Вейля*. Она обобщает интегральную формулу Коши для полицилиндрических областей и превращается в нее, если $N = n$, $\chi_i = z_i$, $i = 1, \ldots, n$. Формула (9.1) восстанавливает значение голоморфной функции f в Δ по ее значениям на n-мерном остове σ и имеет голоморфное по z ядро, причем вид ядра зависит от вида области.

Доказательство в основном повторяет доказательство теоремы 4.1. Над каждой гранью γ_i рассмотрим вектор-функцию $u^i = (u_1^i, \ldots, u_n^i)$, где $u_k^i = q_{ik} \times \times \left[\sum\limits_{j=1}^{n} q_{ij}(\xi_j - z_j)\right]^{-1}$, над каждым ребром $\gamma_{i_1 \ldots i_n}$ множество $\beta_{i_1 \ldots i_n} = \left\{(\zeta, u) : \zeta \in \gamma_{i_1 \ldots i_n},\ u = \sum\limits_{l=1}^{n} \lambda_l u^{i_l},\ \lambda_l \geqslant 0, \sum\limits_{l=1}^{n} \lambda_l = = 1\right\}$. Так же как при доказательстве теоремы 4.1, устанавливается, что

$$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{i_1<\ldots<i_n}\int_{\beta_{i_1\ldots i_n}} f(\zeta)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k du_{[k]}\wedge d\zeta=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{i_1<\ldots<i_n}\int_{\gamma_{i_1\ldots i_n}}\frac{f(\zeta)\,\Omega_{i_1\ldots i_n}(\zeta,z)\,d\zeta}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left[\chi_{i_k}(\zeta)-\chi_{i_k}(z)\right]}\times$$

$$\times\int\limits_{\substack{\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1\\ \lambda_i\geqslant 0}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\lambda_k d\lambda_{[k]}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{i_1<\ldots<i_n}\int_{\gamma_{i_1\ldots i_n}}\frac{f(\zeta)\,\Omega_{i_1\ldots i_n}(\zeta,z)\,d\zeta}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left[\chi_{i_k}(\zeta)-\chi_{i_k}(z)\right]}.$$

Для простоты проделаем указанные вычисления для $n=2$:

$$\int_{\beta_{i_1i_2}} f(\zeta)\,(u_1du_2-u_2du_1)\wedge d\zeta=\int_0^1 d\lambda_1\int_{\gamma_{i_1i_2}} f(\zeta)\left[\left(\lambda_1u_1^{i_1}+\right.\right.$$

$$\left.+(1-\lambda_1)\,u_1^{i_2}\right)\left(u_2^{i_1}-u_2^{i_2}\right)-\left(\lambda_1u_2^{i_1}+(1-\lambda_1)\,u_2^{i_2}\right)\times$$

$$\left.\times\left(u_1^{i_1}-u_1^{i_2}\right)\right]d\zeta=\int_0^1 d\lambda\int_{\gamma_{i_1i_2}} f(\zeta)\left(-u_1^{i_1}u_2^{i_2}+u_1^{i_2}u_2^{i_1}\right)d\zeta=$$

$$=\int_{\gamma_{i_1i_2}}\frac{f(\zeta)\,\Omega_{i_1i_2}(\zeta,z)\,d\zeta}{\prod\limits_{k=1}^{2}\left(\chi_{i_k}(\zeta)-\chi_{i_k}(z)\right)}.\ \square$$

§ 10. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ СТРОГО ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

Ограниченная область D называется *строго псевдовыпуклой*, если существует такая окрестность $U\supset\overline{D}$ и функция $\rho\in C^{(2)}(U)$, что $D=\{z: z\in U,\ \rho(z)<0\}$, где grad $\rho\neq 0$ на ∂D и функция ρ строго плюрисубгармонична в U, т. е. для $z \in U$ и всех $w \in C^n$, $w \neq 0$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k > 0.$$

Строго псевдовыпуклые области играют важную роль в многомерном комплексном анализе. Этими областями (так же как и полиэдрами Вейля) можно аппроксимировать изнутри всякую область голоморфности (см. § 25). Для того чтобы получить из формулы Коши — Фантаппье интегральное представление функций, голоморфных в строго псевдовыпуклых областях, нам потребуются некоторые вспомогательные предложения. Обозначим $D_\delta = \{z : z \in U, \rho(z) < \delta\}$, $V_\delta = \{z : z \in U, |\rho(z)| < \delta\}$,

$$U_{\varepsilon,\delta} = \{(\zeta, z) : \zeta \in V_\delta, z \in D_\delta, |\zeta - z| < \varepsilon\}, \text{ где } \varepsilon > 0, \ \delta > 0.$$

Пусть $C^{(1)}(V_\delta, H)$ — пространство функций класса $C^{(1)}$ в V_δ со значениями в пространстве H.

Лемма 10.1. *Для всякой строго псевдовыпуклой области D существуют положительные постоянные ε, δ, σ и функции $F \in C^{(1)}(U_{\varepsilon,\delta})$, $G \in C^{(1)}(U_{\varepsilon,\delta})$, $\Phi \in C^{(1)}(V_\delta, A(D_\delta))$ такие, что:*

1) $\Phi = FG$ *на* $U_{\varepsilon,\delta}$; $F(z, z) = 0$; $|G| > \delta$ *на* $U_{\varepsilon,\delta}$; $|\Phi| > \delta$ *вне* $U_{\varepsilon,\delta}$;

2) *на* $U_{\varepsilon,\delta}$ *имеет место неравенство*

$$2\operatorname{Re} F(\zeta, z) \geqslant \rho(\zeta) - \rho(z) + \sigma|\zeta - z|^2;$$

3) $d_\zeta F(\zeta, z)|_{\zeta=z} = -d_z F(\zeta, z)|_{\zeta=z} = \partial\rho(z)$.

Доказательство. Пусть вначале область D строго выпукла, точнее, пусть функция ρ строго выпукла в U, тогда введем

$$\Phi = F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho(\zeta)}{\partial \zeta_i} (\zeta_i - z_i).$$

Из формулы Тейлора следует, что существует $\sigma > 0$ такая, что для $\zeta \in D_{\delta'}$, $z \in D_{\delta'}$ имеет место неравенство $2\mathrm{Re}F(\zeta, z) \geqslant \rho(\zeta) - \rho(z) + \sigma|\zeta - z|^2$ и в этом случае утверждения леммы справедливы.

В общем случае для всякой точки $\tilde{\zeta} \in \partial D$ существует (см. лемму 10.2) такое биголоморфное отображение $w(z, \tilde{\zeta})$ некоторой окрестности $\tilde{U}_{\tilde{\zeta}}$ точки $\tilde{\zeta}$ на некоторую окрестность нуля B в пространстве C^n_w, что обратное отображение $z(w, \tilde{\zeta})$ переводит строго плюрисубгармоническую функцию $\rho(z)$ в строго выпуклую функцию $\rho_{\tilde{\zeta}}(w) = \rho(z(w, \tilde{\zeta}))$ переменного w в области B. По формуле Тейлора существуют $\tilde{\varepsilon}' > 0$, $\tilde{\sigma}' > 0$ такие, что для $|w'| < \tilde{\varepsilon}'$, $|w - w'| < \tilde{\varepsilon}'$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho_{\tilde{\zeta}}(w')}{\partial w_j}(w'_j - w_j) \geqslant \rho_{\tilde{\zeta}}(w') - \rho_{\tilde{\zeta}}(w) + \tilde{\sigma}'|w' - w|^2,$$

поэтому существуют такие $\varepsilon' > 0$, $\sigma' > 0$, что

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho_{\tilde{\zeta}}(w(\zeta, \tilde{\zeta}))}{\partial w_j}\left[w_j(\zeta, \tilde{\zeta}) - w_j(z, \tilde{\zeta})\right] \geqslant$$
$$\geqslant \rho(\zeta) - \rho(z) + \sigma'|\zeta - z|^2, \qquad (10.1)$$

если $|\zeta - \tilde{\zeta}| < \varepsilon'$, $|\zeta - z| < \varepsilon'$. Обозначим

$$F_{\tilde{\zeta}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho_{\tilde{\zeta}}(w(\zeta, \tilde{\zeta}))}{\partial w_j}\left[w_j(\zeta, \tilde{\zeta}) - w_j(z, \tilde{\zeta})\right] =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho(\zeta)}{\partial \zeta_j}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_j(w(\zeta, \tilde{\zeta}))}{\partial w_i}\left[w_i(\zeta, \tilde{\zeta}) - w_i(z, \tilde{\zeta})\right]\right]. \quad (10.2)$$

Здесь снова $|\zeta - \tilde{\zeta}| < \varepsilon'$, $|\zeta - z| < \varepsilon'$. Рассмотрим такие точки $\tilde{\zeta}^1, \ldots, \tilde{\zeta}^N$ на ∂D, чтобы

$$\partial D = \bigcup_{j=1}^{N} B_{\varepsilon'_j}(\tilde{\zeta}^j).$$

Пусть функции $\{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,N}$ образуют разбиение единицы в $V_{\delta'}$ и носитель φ_j содержится в $B_{\varepsilon_j'}(\tilde{\zeta}^j)$. Обозначим

$$F(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{n} F_{\tilde{\zeta}^j}(\zeta, z)\,\varphi_j(\zeta), \tag{10.3}$$

где $\zeta \in V_{\delta'}$, $|\zeta - z| < 2\varepsilon = \min\limits_j \varepsilon_j'$.

Теперь из (10.1) — (10.3) получим

$$2\operatorname{Re} F(\zeta, z) \geqslant \rho(\zeta) - \rho(z) + \sigma|\zeta - z|^2, \quad (\zeta, z) \in U_{2\varepsilon,\delta'}. \tag{10.4}$$

Здесь $\sigma = \min\limits_j \sigma_j'$. Тем самым доказано утверждение 2), утверждение 3) проверяется непосредственно.

При малых $\delta' > 0$ из (10.4) следует, что при $\zeta \in V_{\delta'}$, $z \in D_{\delta'}$, $\varepsilon < |\zeta - z| < 2\varepsilon$

$$\operatorname{Re} F(\zeta, z) > 0. \tag{10.5}$$

Зафиксируем непрерывную однозначную ветвь $\ln F$ в области $\{F : \operatorname{Re} F > 0\}$ и рассмотрим вещественнозначную финитную функцию $\chi(z)$ класса $C^{(\infty)}$ с носителем в шаре $B_{2\varepsilon}(0)$, причем $\chi(z) = 1$ в $\overline{B_\varepsilon(0)}$. Введем внешнюю дифференциальную форму $A(\zeta, z)$ типа $(0, 1)$, гладко зависящую от параметра $\zeta \in V_{\delta'}$:

$$A(\zeta, z) = \begin{cases} \bar{\partial}_z [(\ln F)\,\chi(\zeta - z)], & \text{если } z \in \operatorname{supp} \operatorname{grad}_z \chi(\zeta - z), \\ 0, & \text{если } z \notin \operatorname{supp} \operatorname{grad}_z \chi(\zeta - z). \end{cases} \tag{10.6}$$

Форма $A(\zeta, z) \in C^{(1)}(V_\delta, C(\overline{D}_\delta))$, где $0 < \delta < \delta'$, поэтому (см. теорему 25.3) существует функция $B(\zeta, z) \in C^{(1)}(V_\delta, C(\overline{D}_\delta))$ такая, что

$$\bar{\partial}_z B(\zeta, z) = A(\zeta, z). \tag{10.7}$$

Положим

$$\Phi(\zeta, z) = \begin{cases} F(\zeta, z)\exp[-B(\zeta, z)] \text{ при } \zeta \in V_\delta, \\ \qquad\qquad z \in D_\delta, \ |\zeta - z| \leqslant \varepsilon, \\ \exp[\ln F \cdot \chi(\zeta - z) - B(\zeta, z)] \text{ при} \\ \zeta \in V_\delta, \ z \in D_\delta, \ |\zeta - z| \geqslant \varepsilon. \end{cases} \qquad (10.8)$$

Это определение корректно, так как при $|\zeta - z| = \varepsilon$ справедливо $F\exp[-B(\zeta, z)] = \exp[\ln F - B]$. Теперь из (10.6) — (10.8) вытекает утверждение 1) леммы.□

Лемма 10.2 *Пусть* $D = \{z : z \in U, \ \rho(z) < 0\}$ — *строго псевдовыпуклая область. Для любой точки* $\tilde{\zeta} \in \partial D$ *существует такое биголоморфное отображение некоторой окрестности* $\tilde{U}_{\tilde{\zeta}}$ *точки* $\tilde{\zeta}$ *на некоторую окрестность нуля* B *в пространстве* C^n_w, *что при этом отображении область* $D \cap \tilde{U}_{\tilde{\zeta}}$ *биголоморфно эквивалентна выпуклой области в* C^n_w, *а обратное отображение переводит строго плюрисубгармоническую функцию* $\rho(z)$ *в строго выпуклую функцию.*

Доказательство. Параллельным переносом можно добиться, чтобы точка $\tilde{\zeta}$ была нулем, тогда в некоторой окрестности нуля

$$\rho(z) = 2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho(0)}{\partial z_j}z_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(0)}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}z_j\bar{z}_k +$$
$$+ \operatorname{Re}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(0)}{\partial z_j\partial z_k}z_jz_k + o(|z|^2).$$

По теореме о неявной функции в меньшей окрестности нуля за локальные координаты можно принять функцию

$$w_1(z) = 2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho(0)}{\partial z_j}z_j + \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(0)}{\partial z_j\partial z_k}z_jz_k$$

и любые линейные функции $w_2, \ldots, w_n$, являющиеся координатами в гиперплоскости $\left\{z : \frac{\partial\rho(0)}{\partial z_1}z_1 + \ldots +\right.$

$+\frac{\partial\rho(0)}{\partial z_n}z_n = 0\}$. Строгая псевдовыпуклость в точке 0 теперь означает, что

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\xi_j\bar{\xi}_k \geqslant \gamma|\xi|^2,$$

где $\gamma > 0$; $a_{jk} = \frac{\partial^2\rho(0)}{\partial w_j \partial \bar{w}_k}$.

В новых локальных координатах w

$$\rho = x_1 + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}w_j\bar{w}_k + o(|w|^2). \qquad (10.9)$$

Здесь $x_1 = \operatorname{Re} w_1$. Функция (10.9) строго выпукла в координатах w. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $B_\varepsilon(0) \cap D$ — выпуклая область в координатах w, где $B_\varepsilon(0) = \{w : |w| < \varepsilon\}$.□

Лемма 10.3. *При условиях леммы 10.1*

$$\Phi(\zeta, z) = \sum_{i=1}^{n} P_i(\zeta, z)(\zeta_i - z_i),$$

где $P_i(\zeta, z) \in C^{(1)}(V_\delta, A(D_\delta))$, $i = 1, \ldots, n$, $\zeta \in V_\delta$, $z \in D_\delta$.

Доказательство. Обозначим $C(\zeta, z, w) = \Phi(\zeta, z) - \Phi(\zeta, w)$, $C(\zeta, z, w) \in C^{(1)}(V_\delta, A(D_\delta \times D_\delta))$. При фиксированном $\zeta \in V_\delta$ функция C входит в идеал J голоморфных функций, равных нулю на множестве $\{(z, w): z \in D_\delta, w \in D_\delta, z = w\}$. По теореме Гефера (см. § 25) идеал J имеет образующие $w_1 - z_1, \ldots, w_n - z_n$ и разложение $C(\zeta, z, w)$ по этим образующим можно сделать непрерывно дифференцируемым по параметру ζ (см. теорему 25.2′), т. е. существуют $Q_i(\zeta, z, w) \in C^{(1)}(V_\delta, A(D_\delta \times D_\delta))$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что

$$C(\zeta, z, w) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(\zeta, z, w)(w_i - z_i).$$

Отметим, что $F(\zeta, \zeta) = 0$, значит, и $\Phi(\zeta, \zeta) = 0$

(см. доказательство леммы 10.1), поэтому

$$\Phi(\zeta, z) = C(\zeta, z, \zeta) = \sum_{i=1}^{n} P_i(\zeta, z)(\zeta_i - z_i),$$

где $P_i(\zeta, z) = Q_i(\zeta, z, \zeta)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. □

Используя вектор-функцию $P = P(\zeta, z) = (P_1(\zeta, z), \ldots, P_n(\zeta, z))$, существование которой доказано в лемме 10.3, теперь из формулы Коши — Фантаппье получаем следующее утверждение.

Теорема 10.4 (Хенкин — Рамирез). *При условии леммы 10.1 для всякой $f \in A_C(D)$ и любой точки $z \in D$ имеет место формула*

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\,\omega(\zeta - z, P(\zeta, z)). \qquad (10.10)$$

Ядро в интегральном представлении (10.10) не выписано явно, однако оценки из леммы 10.1 позволяют получить информацию об особенности этого ядра, что оказалось достаточным для важных приложений.

Теорема 10.5 (Хенкин). *Для всякой точки $z \in \overline{D}$ и любого δ, $0 < \delta < \gamma_0$, справедлива оценка*

$$\int_{\partial D \setminus B(z,\delta)} \frac{d\sigma_\zeta}{|\Phi(\zeta, z)|^n} \leqslant \gamma_1 \ln \frac{\gamma_1}{\delta + |\rho(z)|}, \qquad (10.11)$$

где $d\sigma_\zeta$ — элемент поверхности ∂D; положительные постоянные γ_0 и γ_1 не зависят от z и δ.

Для доказательства этой теоремы нам потребуются вспомогательные утверждения.

Лемма 10.6. *Существуют $\sigma > 0$, $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что для всякого $z \in V_\sigma$ в шаре $B_\delta(z)$ можно сделать гладкую замену переменных $\eta = \eta(\zeta)$ со свойствами:*

1) $\eta_1(\zeta) = \rho(\zeta) - \rho(z) + i\,\mathrm{Im}\,F(\zeta, z)$,
2) $\eta(z) = 0$,
3) $|\zeta - z| \geqslant \gamma|\eta(\zeta) - \eta(z)| \geqslant \gamma^2|\zeta - z|$ *для* $\zeta \in B_{2\delta}(z)$,
4) $\dfrac{1}{\gamma} \geqslant \left|\dfrac{\partial\eta}{\partial\zeta}\right| \geqslant \gamma$ *при* $\zeta \in B_{2\delta}(z)$,

где $F(\zeta, z)$ — функция, построенная в лемме 10.1.

Доказательство. Существует такое $\sigma > 0$, что для всякого $z \in V_\sigma$ справедливо $d_\zeta F(\zeta, z)|_{\zeta=z} \neq 0$, следовательно, существуют $\tilde{\gamma} > 0$ и $\tilde{\delta} > 0$ такие, что для $z \in V_\sigma$ в шаре $B_{\tilde{\delta}}(z)$ возможна гладкая замена переменных $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\zeta)$, при которой верны свойства 2) — 4) при $\delta = \tilde{\delta}$, $\gamma = \tilde{\gamma}$ и свойство 1') $\tilde{\eta}_1(\zeta) = F(\zeta, z)$. Далее, $\operatorname{Im}\tilde{\eta}_1(\zeta) = \operatorname{Im}F(\zeta, z) = \operatorname{Im}\eta_1(\zeta)$, и согласно утверждению 3) леммы 10.1 получаем $d_\zeta \operatorname{Re}\tilde{\eta}_1(\zeta)|_{\zeta=z} = d_\zeta \operatorname{Re} F(\zeta, z)|_{\zeta=z} = \frac{1}{2} d_\zeta \rho(\zeta)|_{\zeta=z} = \frac{1}{2} d_\zeta \operatorname{Re}\eta_1(\zeta)|_{\zeta=z}$, поэтому существуют γ и δ, о которых идет речь в нашей лемме. □

Лемма 10.7. *Для всяких ε и δ таких, что $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \delta < 1$, имеет место неравенство*

$$J = \int\limits_{\delta^2 \leqslant t_2^2 + t_3^2 + \ldots + t_{2n}^2 < 1} \frac{dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_{2n}}{(t_2^2 + \ldots + t_{2n}^2 + \varepsilon^2 + |t_2|)^n} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_0 |\ln(\varepsilon + \delta)| + \gamma_0, \tag{10.12}$$

где $\gamma_0 > 0$ не зависит от ε и δ.

Доказательство. Рассмотрим случай $n > 1$, который и представляет для нас интерес. Обозначим $r^2 = t_2^2 + \ldots + t_{2n}^2$. Переходя к сферической системе координат, находим, что

$$J \leqslant 2 \int\limits_\delta^1 dr \int\limits_0^{\pi/2} \frac{r^{2n-2} \sin^{2n-3} \varphi d\varphi}{(r^2 + \varepsilon^2 + r\cos\varphi)^n} \leqslant 2 \int\limits_\delta^1 dr \int\limits_0^1 \frac{r^{2n-2} ds}{(r^2 + \varepsilon^2 + rs)^n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{n-1} \int\limits_\delta^1 \frac{r^{2n-3} dr}{(r^2 + \varepsilon^2)^{n-1}} \leqslant \frac{2}{n-1} \int\limits_\delta^1 \frac{dr}{r + \varepsilon} = \frac{2}{n-1} \ln \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon + \delta} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_0 |\ln(\varepsilon + \delta)| + \gamma_0. \ \square$$

Доказательство теоремы 10.5. Согласно

лемме 10.1.

$$\int\limits_{\partial D\setminus B_\delta(z)} \frac{d\sigma_\zeta}{|\Phi(\zeta, z)|^n} \leqslant \int\limits_{(B_{\delta'}(z)\setminus B_\delta(z))\cap\partial D} \frac{d\sigma_\zeta}{|F(\zeta, z)|^n |G(\zeta, z)|^n} + \\ + \int\limits_{\partial D\setminus B_{\delta'}(z)} \frac{d\sigma_\zeta}{|\Phi(\zeta, z)|^n} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\sigma^n}\left[\int\limits_{(B_{\delta_1}(z)\setminus B_\delta(z))\cap\partial D} \frac{d\sigma_\zeta}{|F(\zeta, z)|^n} + \int\limits_{\partial D} d\sigma_\zeta\right], \quad (10.13)$$

где σ, F, G — из леммы 10.1, а достаточно малое δ' удовлетворяет условиям лемм 10.1 и 10.6. Сделаем в шаре $B_{\delta'}(z)$ замену переменных $\eta = \eta(\zeta)$ из леммы 10.6. Пусть $t_{2i-1} = \operatorname{Re}\eta_i$, $t_{2i} = \operatorname{Im}\eta_i$. Из 2) в лемме 10.1 и 1) в лемме 10.6 находим

$$|F(\zeta, z)| \geqslant \left[\left(\frac{t_1 + \sigma|\zeta - z|^2}{2}\right)^2 + t_2^2\right]^{1/2} \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|t_1| + \sigma|\zeta - z|^2}{2} + |t_2|\right)$$

для $\zeta \in B_{\delta'}(z)$. Теперь из $t_1 = -\rho(z)$ для $\zeta \in (\partial D) \cap$ $\cap\, B_{\delta'}(z)$ из 3), 4) в лемме 10.6 получаем

$$\int\limits_{(B_{\delta'}(z)\setminus B_\delta(z))\cap\partial D} \frac{d\sigma_\zeta}{|F(\zeta, z)|^n} \leqslant \\ \leqslant \gamma_2 \int\limits_{\delta^2 \leqslant t_2^2 + \ldots + t_{2n}^2 \leqslant 1} \frac{dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_{2n}}{\left(t_2^2 + \ldots + t_{2n}^2 + |\rho(z)| + |t_2|\right)^n}, \quad (10.14)$$

где $\gamma_2 > 0$ не зависит от z и δ. Далее, из (10.13), (10.14) и (10.12) следует (10.11). □

В заключение приведем один результат о связи формулы Хенкина — Рамиреза (10.10), которую мы запишем в виде

$$f(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\, H(z, \zeta)\, d\sigma_\zeta \quad (10.15)$$

с интегральным представлением с ядром Сеге

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\, S(z, \overline{\zeta})\, d\sigma_\zeta. \qquad (10.16)$$

Обозначим $A(z, \zeta) = \overline{H(\zeta, z)} - H(z, \zeta)$. Интегралы из правых частей равенств (10.15), (10.16) порождают операторы в $L^2_{d\sigma}(\partial D)$, их мы обозначим $\widetilde{H}$ и $\widetilde{S}$. Аналогично вводится оператор $\widetilde{A}$. Следующий результат опирается на теорему 10.5.

Теорема 10.8 (Керзман — Стейн). *Пусть D — строго псевдовыпуклая область с границей класса $C^{(\infty)}$. Ядро $A(z, \zeta)$ абсолютно интегрируемо по $\zeta \in \partial D$ при фиксированном $z \in \partial D$. Справедливо равенство*

$$\widetilde{S} = \widetilde{H} + \widetilde{H}\widetilde{A} + \ldots + \widetilde{H}\widetilde{A}^k + \ldots,$$

где ряд понимается в асимптотическом смысле, т. е.

$$\widetilde{S} - \widetilde{H} - \sum_{j=1}^{k} \widetilde{H}\widetilde{A}^j$$

есть ограниченный оператор из $L^2_{d\sigma}(\partial D)$ в $C^{(\alpha(k))}(\partial D)$. Здесь $\alpha(k) \to \infty$ при $k \to \infty$.

§ 11. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В n-КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

1°. Пусть D — ограниченная выпуклая n-круговая с центром в нуле область и такая, что функция $\psi(|\zeta|)$, задающая границу $\partial D = \{z : |\zeta_1| = \psi('|\zeta|),\ '|\zeta| \in \overline{G}\}$, дважды непрерывно дифференцируемая; здесь $'|\zeta| = (|\zeta_2|, \ldots, |\zeta_n|)$, а G — проекция образа D в абсолютном октанте модулей $(|\zeta_1|, \ldots, |\zeta_n|)$ на гиперплоскость $\{|\zeta_1| = 0\}$. В этом случае для функций, голоморфных в D, и класса $C(\overline{D})$ имеет место интегральное представление

(8.5), где $\rho(z) = |\zeta_1| - \psi('|\zeta|)$. Если обозначить

$$\varphi_j('|\zeta|) = \frac{|\zeta_j|\,\psi'_{|\zeta_j|}}{|\zeta_2|\,\psi'_{|\zeta_2|} + \ldots + |\zeta_n|\,\psi'_{|\zeta_n|} - \psi}, \quad j = 2, \ldots, n,$$

то получим формулу

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_G d\varphi('|\zeta|)_{[1]} \int_{\Delta_\zeta} \frac{f(\zeta)}{(1 - y_1 - \ldots - y_n)^n} \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{11.1}$$

где $d\varphi('|\zeta|)_{[1]} = d\varphi_2('|\zeta|) \wedge \ldots \wedge d\varphi_n('|\zeta|)$; $y_j = z_j \bar{\zeta}_j \varphi_j('|\zeta|)|\zeta_j|^{-2}$, $j = 2, \ldots, n$; $\varphi_1('|\zeta|) = 1 - \varphi_2 - \ldots - \varphi_n = -\psi\left[|\zeta_2|\,\psi'_{|\zeta_2|} + \ldots + |\zeta_n|\,\psi'_{|\zeta_n|} - \psi\right]^{-1}$; $\Delta_\zeta = \{\zeta' : |\zeta'_i| = |\zeta_i|, \ i = 1, \ldots, n\}$. В интегральном представлении (11.1) интеграл по ∂D записан в виде повторного интеграла: сначала интегрирование происходит по аргументам переменных, а затем — по их модулям. Осуществим в (11.1) замену переменных: $\varphi_j('|\zeta|) = \tau_j$, $|\zeta|_1 = r_1(\tau)$, $\zeta_1 = r_1(\tau)\xi$, $\zeta_j = r_j(\tau)\xi e^{i\theta_j}$, $\theta_j = \arg\zeta_j - \arg\zeta_1$, $j = 2, \ldots, n$, $|\xi| = 1$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\tau_1 = 1 - \tau_2 - \ldots - \tau_n$, $r = (r_1(\tau), \ldots, r_n(\tau))$, $\theta = (\theta_2, \ldots, \theta_n)$. Функцию f на ∂D можно записать как функцию от (ξ, r, θ) где ξ изменяется на единичной окружности, $0 \leqslant \theta_j \leqslant 2\pi$, $j = 2, \ldots, n$, и

$$(\tau_2, \ldots, \tau_n) \in \Delta^* = \{(\tau_2, \ldots, \tau_n) : \tau_2 + \ldots + \tau_n < 1, \ \tau_i > 0, \ i = 2, \ldots, n\}.$$

Теперь (10.1) преобразуется так:

$$(f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n i} \int_{\Delta_*} d\tau_{[1]} \int_{\Delta_*} d\theta_{[1]} \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi, r, \theta)}{(1 - u\bar{\xi})^n} \frac{d\xi}{\xi}, \tag{11.2}$$

где $\Delta_* = \{(\theta_2, \ldots, \theta_n) : 0 \leqslant \theta_j \leqslant 2\pi, \ j = 2, \ldots, n\}$;

$$u = \frac{\tau_1}{r_1(\tau)} z_1 + \frac{\tau_2 e^{-i\theta_2}}{r_2(\tau)} z_2 + \ldots + \frac{\tau_n e^{-i\theta_n}}{r_n(\tau)} z_n.$$

Формула (11.2) переписывается в более удобном для дальнейшего виде

$$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi)^n i}\int\limits_{\Delta^*}d\tau_{[1]}\int\limits_{\Delta_*}d\theta_{[1]}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\xi^{n-1}f(\xi,r,\theta)}{(\xi-u)^n}d\xi. \quad (11.3)$$

Рассмотрим далее линейные дифференциальные операторы:

$$L_0(f)=f,\ L_k(f)=(n-k)\,L_{k-1}(f)+\sum_{\nu=1}^{n}z_\nu\frac{\partial}{\partial z_\nu}L_{k-1}(f),$$

$k=1, 2, \ldots, n-1$. Пусть $M_k(\xi, u) = (n-k-1)!\ \xi^{n-k-1}(\xi-u)^{k-n}$,

тогда верно равенство

$$L_k(M_k)=\frac{(n-1)!\,\xi^{n-1}}{(\xi-u)^n},\quad k=0, 1, \ldots, n-1. \quad (11.4)$$

В силу (11.4) формулу (11.3) можно записать так:

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^n i}\int\limits_{\Delta^*}d\tau_{[1]}\int\limits_{\Delta_*}d\theta_{[1]}\int\limits_{|\xi|=1}f(\xi,r,\theta)\,L_k(M_k)\,d\xi. \quad (11.5)$$

Применяя к обеим частям (11.5) обратные операторы L_k^{-1} (в существовании которых нетрудно убедиться) и переобозначая функции, получаем следующее утверждение.

Теорема 11.1 (Темляков — Опиаль — Сичак). *Пусть k — фиксированное число из набора чисел: 0, 1, ..., $n-1$. Тогда для всякой функции $f\in A(D)$ такой, что $L_k(f)\in A_C(D)$ справедливо интегральное представление*

$$f(z)=\frac{(n-k-1)!}{(2\pi)^n i}\int\limits_{\Delta^*}d\tau_{[1]}\int\limits_{\Delta_*}d\theta_{[1]}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\xi^{n-k-1}L_k(f)\,d\xi}{(\xi-u)^{n-k}}. \quad (11.6)$$

При $n=2$ формулы (11.6) дают *интеграл Темлякова*

I рода $(k = 1)$

$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_0^1 d\tau \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(r_1(\tau)\xi,\ r_2(\tau)\xi e^{it})}{\xi - u}\, d\xi$$

и *интеграл Темлякова II рода* $(k = 0)$

$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_0^1 d\tau \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\xi f(r_1(\tau)\xi,\ r_2(\tau)\xi e^{it})}{(\xi - u)^2}\, d\xi,$$

где $F = L_1(f)$, $u = \frac{z_1\tau}{r_1(\tau)} + \frac{z_2(1-\tau)e^{-it}}{r_2(\tau)}$.

Интеграл Темлякова I рода удобен тем, что внутренний интеграл в нем имеет ядро Коши. Данное обстоятельство помогает при приложениях.

2°. Несмотря на большую общность формулы Коши — Фантаппье, вопрос об отыскании интегральных представлений с голоморфным ядром для конкретных областей $D \subset C^n$ не снимается. Поэтому представляют интерес способы построения интегральных формул с голоморфными ядрами для определенных областей или классов областей. Один из таких способов будет рассмотрен в этом и следующем пункте.

Пусть D — ограниченная полная n-круговая область с центром в 0, на $|\partial D|$ задана конечная мера λ. Мера λ называется допустимой, если для любых целых неотрицательных $(k_1, \ldots, k_n) = k$

$$\operatorname{Vrai\,Sup}_{|\partial D|} |z^k| = \max_{|\partial D|} |z^k|.$$

Приведем без доказательства следующий результат о существовании интегральных представлений с ядром Сеге.

Теорема 11.2 (Айзенберг). *Пусть на $|\partial D|$ задана конечная мера λ_0. Для того чтобы существовало интегральное представление* $(z \in D)$

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\partial D|} d\lambda_0 \int\limits_{\Delta_\zeta} f(\zeta)\, h(z\bar{\zeta})\, \frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (11.7)$$

для любой $f \in A_C(D)$, *где ядро Сеге* $h(z\overline{\zeta}) = h(z_1\overline{\zeta}_1, \ldots, z_n\overline{\zeta}_n)$ *при фиксированном* $z \in D$ *входит по* $\overline{\zeta}$ *в* $A(\overline{D})$, *а при фиксированном* $\zeta \in \partial D$ *входит по* z *в* $A(D)$, *причем* h *не зависит от* f, *необходимо и достаточно, чтобы мера* λ_0 *была допустимой. Ядро Сеге разлагается при* $z \in D$, $\zeta \in \partial D$ *в кратный степенной ряд*

$$h(z\overline{\zeta}) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\\ \alpha_j \geqslant 0}} a_\alpha z^\alpha \overline{\zeta}^\alpha, \tag{11.8}$$

где

$$a_\alpha = \left[\int_{|\partial D|} |\zeta^{2\alpha}|\, d\lambda_0 \right]^{-1}. \tag{11.9}$$

Отметим, что допустимые меры — это такие меры, которые *массивны на границе Шилова* области D (т. е. для всякого $E \subset |\partial D|$ нулевой меры λ имеет место включение $\overline{|\partial D| \setminus E} \supset |S(D)|$).

Приведем несколько п р и м е р о в в ы ч и с л е н и я я д е р С е г е, ограничившись случаем $n = 2$. Если граница области D имеет вид $\partial D = \{z : |z_2| = \Phi(|z_1|),\ 0 \leqslant |z_1| < r\}$, где функция Φ убывающая, то интегрирование на $|\partial D|$ по мере λ можно заменить интегрированием на отрезке $[0, r]$ по некоторой мере λ', которая может быть, в частности, задана с помощью возрастающей непрерывной функции.

1. Рассмотрим последовательность областей $D_p = \{z : |z_2|^2 + |z_1|^{2/p},\ 0 \leqslant |z_1| < 1\}$, $p = 1, 2, \ldots$, а в качестве меры λ' на $[0, 1]$ возьмем меру, порожденную функцией $|z_1|^2$. Ядра Сеге h_p для областей D_p будут иметь вид

$$h_p(z_1\overline{\zeta}_1, z_2\overline{\zeta}_2) = \sum_{k_1 \geqslant 0,\, k_2 \geqslant 0} a_k^{(p)} (z_1\overline{\zeta}_1)^{k_1} (z_2\overline{\zeta}_2)^{k_2},$$

где

$$a_k^{(p)} = \left[\int_0^1 |\zeta_1|^{2k_1} (1 - |\zeta_1|^{2/p})^{k_2}\, d|\zeta_1|^2 \right]^{-1} = \frac{[p(k_1+1)+k_2]!}{p\,[p(k_1+1)-1]!\,k_2!}$$

Остается найти в конечном виде функции

$$h_p(x_1, x_2) = \frac{1}{p} \sum_{k_1 \geqslant 0,\, k_2 \geqslant 0} \frac{[p(k_1+1)+k_2]!}{[p(k_1+1)-1]!\, k_2!} x_1^{k_1} x_2^{k_2},$$

где $x_1 = z_1\bar{\zeta}_1$, $x_2 = z_2\bar{\zeta}_2$.

Заметим, что $z \in D_p$, $\zeta \in \partial D_p$, поэтому $|x_2| < 1$, $|x_1(1-x_2)^{-p}| < 1$. Далее:

$$\frac{1}{(1-x_2)^p - x_1} = \frac{1}{(1-x_2)^p} \frac{1}{1-\dfrac{x_1}{(1-x_2)^p}} = \sum_{m=0}^{\infty} x_1^m \left(\frac{1}{1-x_2}\right)^{p(m+1)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_1^m}{[p(m+1)-1]!} \frac{d^{p(m+1)-1}}{dx_2^{p(m+1)-1}} \frac{1}{1-x_2} =$$

$$= \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{[p(k_1+1)+k_2-1]!}{[p(k_1+1)-1]!\, k_2!} x^{k_1} x^{k_2}.$$

Теперь получаем

$$h_p(x_1, x_2) = \frac{1}{p} \frac{d}{dx_2} \frac{1}{(1-x_2)^p - x_1} = \frac{(1-x_2)^{p-1}}{[(1-x_2)^p - x_1]^2}.$$

Итак, для $f \in A_C(D_p)$ имеет место интегральное представление $(z \in D_p)$

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 d|\zeta_1|^2 \int_{\Delta_\zeta} \frac{f(\zeta)(1-z_2\bar{\zeta}_2)^{p-1}}{[(1-z_2\bar{\zeta}_2)^p - z_1\bar{\zeta}_1]^2} \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (11.10)$$

Здесь $|\zeta_2|^2 = 1 - |\zeta_1|^{\frac{2}{p}}$. В случае $p=1$ для шара $D_1 = B_1(0)$ получаем

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 d|\zeta_1|^2 \int_{\Delta_\zeta} \frac{f(\zeta)}{(1-z_1\bar{\zeta}_1 - z_2\bar{\zeta}_2)^2} \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (11.11)$$

(11.11) — интегральное представление Бохнера (см. (8.8)) и, кроме того, частный случай формулы (11.1).

Таким образом, интегральное представление Темлякова в случае шара есть интегральное представление с ядром Сеге.

2. Пусть $D = \{z : |z_1| + |z_2| < 1,\ 0 \leqslant |z_1| < 1\}$, а в качестве меры λ' на $[0,1]$ рассмотрим обычную меру Лебега. Тогда

$$a_k = \left[\int_0^1 |\zeta_1|^{2k_1}(1 - |\zeta_1|)^{2k_2}\, d|\zeta_1|\right]^{-1} = \frac{(2k_1 + 2k_2 + 1)!}{(2k_1)!\,(2k_2)!},$$

а ядро Сеге для данного случая имеет вид

$$h(x_1, x_2) = \sum_{\substack{k_1 \geqslant 0 \\ k_2 \geqslant 0}} \frac{(2k_1 + 2k_2 + 1)!}{(2k_1)!\,(2k_2)!} x_1^{k_1} x_2^{k_2},$$

где снова $x_i = z_i \overline{\zeta_i}$, $i = 1, 2$. Так как $|z_1| + |z_2| < 1$, а $|\zeta_1| + |\zeta_2| = 1$, то $\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} < 1$, поэтому

$$\sum_k \frac{(2k_1 + 2k_2 + 1)!}{(2k_1)!\,(2k_2)!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} = \frac{1}{4}\left[\sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(m_1 + m_2 + 1)!}{m_1!\,m_2!} (\sqrt{x_1})^{m_1} \times\right.$$

$$\times (\sqrt{x_2})^{m_2} + \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(m_1 + m_2 + 1)!}{m_1!\,m_2!} (\sqrt{x_1})^{m_1} (-\sqrt{x_2})^{m_2} +$$

$$+ \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(m_1 + m_2 + 1)!}{m_1!\,m_2!} (-\sqrt{x_1})^{m_1} (\sqrt{x_2})^{m_2} +$$

$$\left. + \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(m_1 + m_2 + 1)!}{m_1!\,m_2!} (-\sqrt{x_1})^{m_1} (-\sqrt{x_2})^{m_2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2} + \frac{1}{(1 - \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1 + \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2} + \frac{1}{(1 + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2}\right] =$$

$$= \frac{(1 - x_1 - x_2)\left(1 + 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2\right) + 8x_1x_2}{[(1 - x_1 - x_2)^2 - 4x_1x_2]^2}.$$

3. Более общий случай представляют собой области $D_{p,q} = \left\{z : |z_1|^{\frac{2}{p}} + |z_2|^{\frac{2}{q}} < 1\right\}$, p, $q=1,2,\ldots$. Рассмотрим ту же меру, что и в п. 1, тогда можно показать, что

$$h_{p,q}(x_1, x_2) = \frac{1}{pq} \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{j_1=1}^{p} \sum_{j_2=1}^{q} \frac{1}{1 - y_{j_1 1} - y_{j_2 2}},$$

где $y_{j_1 1} = x_1^{\frac{1}{p}} \varepsilon_{j_1}$; $y_{j_2 2} = x_2^{\frac{1}{q}} \varepsilon^1_{j_2}$; ε_{j_1} — все корни степени p из единицы, $j_1 = 1, 2, \ldots, p$; $\varepsilon^1_{j_2}$ — все корни степени q из единицы, $j_2 = 1, 2, \ldots, q$. Ядра Сеге $h_{p,q}$ рациональны.

3°. Зафиксируем область D_0 и допустимую на $|\partial D_0|$ меру λ_0. По теореме 11.2 справедливо интегральное представление (11.7) с ядром Сеге. Рассмотрим произвольную область D и поставим следующую *задачу*: выбрать, если это возможно, функции $\varphi_1(|\zeta_1|, \ldots |\zeta_n|), \ldots, \varphi_n(|\zeta_1|, \ldots, |\zeta_n|)$ и меру λ на $|\partial D|$ так, чтобы для области D было справедливо интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\partial D|} d\lambda \int\limits_{\Delta_\zeta} f(\zeta)\, h\left(z\bar{\zeta} \frac{\varphi}{|\zeta|^2}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}, \qquad (11.12)$$

где

$$h\left(z\zeta \frac{\varphi}{|\zeta|^2}\right) = h\left(z_1\bar{\zeta}_1 \frac{\varphi_1}{|\zeta_1|^2}, \ldots, z_n\bar{\zeta}_n \frac{\varphi_n}{|\zeta_n|^2}\right) = \sum_k a_k z^k \bar{\zeta}^k \frac{\varphi^k}{|\zeta^{2k}|}; \qquad (11.13)$$

функция h — та же самая, что и в интегральном представлении (11.7);

$$a_k = \left[\int\limits_{|\partial D|} \varphi^k d\lambda\right]^{-1}. \qquad (11.14)$$

Всегда так можно подобрать $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и меру λ на $|\partial D|$, чтобы a_k из (11.14) равнялись соответственно

a_k из (11.9). (Это можно осуществить такой заменой переменных, при которой из интеграла (11.9) по $|\partial D_0|$ получается интеграл (11.14) по $|\partial D|$.) Если так выбранные $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ удовлетворяют условию сходимости ряда (11.13) при $z \in D$, $\zeta \in \partial D$, то искомое интегральное представление (11.12) существует. Оказалось, что данная задача имеет решение для некоторого класса $\mathfrak{M}$ n-круговых областей, зависящего только от области D_0 и не зависящего от выбора меры λ_0 (или, что то же самое, не зависящего от выбора ядра Сеге h). Ядра (11.13) называют *распространенными ядрами Сеге*. В частности, если D_0 — шар, то $\mathfrak{M}$ — класс выпуклых ограниченных n-круговых областей с некоторыми естественными ограничениями на их границу. А интегральное представление Темлякова (11.1) есть распространение интегрального представления с ядром Сеге для шара на выпуклые n-круговые области. Описание же класса $\mathfrak{M}$ в общем случае мы не приводим (см. [10, 17]). Отметим только, что для любой полной n-круговой области голоморфности D с границей $\partial D \in C^{(2)}$ существует интегральное представление (11.12) с ядром, рациональным по z, являющимся распространением ядра Сеге для области $D_p = \left\{z: |z_1|^{\frac{2}{p}} + \ldots + |z_n|^{\frac{2}{p}} < 1\right\}$ при некотором натуральном p (см. [47], [91]).

Результаты, аналогичные приведенным в 2° и 3°, можно получить и для трубчатых областей, где вместо общего базиса из мономов используется континуальный базис из экспонент, а вместо степенных рядов — интегралы Фурье (см. [60]).

4°. Пусть D — полная ограниченная n-круговая область с центром в нуле (какая-либо гладкость ∂D не предполагается), M — множество векторов k с целыми неотрицательными взаимно-простыми координатами. Для каждого $k \in M$ возьмем точку $\zeta(k)$, в которой достигает максимума на ∂D моном $|\zeta^k|$ (такую точку можно выбрать не единственным способом, возьмем одну из них). Соответствующий остов $\Delta_{\zeta(k)}$ обозначим просто $\Delta(k)$. Наконец, рассмотрим любой остов, входящий в ∂D и обозначим его $\Delta(0)$.

Теорема 11.3 (Леу — Айзенберг — Гиндикин). *Для всякой $f \in A_C(D)$ справедливо интегральное представление: при $z \in D$*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\left[\int\limits_{\Delta(0)} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + \sum_{k\in M} z^k \int\limits_{\Delta(k)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^k - z^k}\frac{d\zeta}{\zeta}\right], \quad (11.15)$$

ряд в (11.15) сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте в D.

Доказательство. Можно сразу считать, что $f \in A(\overline{D})$, так как вместо D можно рассмотреть гомотетию D_r, $r < 1$, а затем сделать предельный переход при $r \to 1$. Представим $f(z)$ в D степенным рядом

$$f(z) = \sum_k c_k z^k = c_0 + \sum_{k\in M}\sum_{l=1}^{\infty} c_{kl} z^{kl} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\left[\int\limits_{\Delta(0)} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + \sum_{k\in M}\sum_{l=1}^{\infty} z^{kl}\int\limits_{\Delta(k)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{kl}}\frac{d\zeta}{\zeta}\right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\left[\int\limits_{\Delta(0)} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + \sum_{k\in M}\int\limits_{\Delta(k)} \frac{f(\zeta)\,z^k}{\zeta^k - z^k}\frac{d\zeta}{\zeta}\right],$$

где $kl = (k_1 l, \ldots, k_n l)$ и $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\left(\frac{z^k}{\zeta^k}\right)^l = \frac{z^k}{\zeta^k - z^k}$, так как $|z^k| < |\zeta^k|$ при $z \in D$, $\zeta \in \Delta(k)$. □

Отметим, что формула (11.15) универсальна для рассматриваемого класса областей.

§ 12. ЯДРО ШВАРЦА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ЧАСТЬЮ

Классическая *теорема Рисса — Херглотца* (см., например, [134, гл. VII, § 2]) утверждает, что функция $f(z_1)$, голоморфная в единичном круге $\{z_1 : |z_1| < 1\}$, имеет в нем неотрицательную действительную часть тогда и только тогда, когда существует неотрицательная мера ν на окружности $\{z_1 : |z_1| = 1\}$ такая, что для $|z_1| < 1$

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta_1|=1} \frac{\zeta_1 + z_1}{\zeta_1 - z_1} d\nu_{\zeta_1} + i \operatorname{Im} f(0). \qquad (12.1)$$

В данном параграфе *представление Рисса — Херглотца* (12.1) обобщается на многомерный случай.

Пусть D — ограниченная область в C^n. Обозначим через $R(D)$ класс функций из $A(D)$ с неотрицательной действительной частью, а $R_C(D) = R(D) \cap C(\overline{D})$. Рассмотрим два следующих условия на область D.

А. *Для всякой $f \in R(D)$ существуют точка $z' \in D$, ее окрестность $U(z') \subset D$ и последовательность $f_m \in R_c(D)$, $m = 1, 2, \ldots$, такие, что $f(z) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(z)$ для $z \in U(z')$.*

Этому условию удовлетворяют, например, *сильно звездные области D* (т. е. такие, что гомотетия $D_r = rD \supset \overline{D}$ при $r > 1$), или, более общо, области D, для которых существуют биголоморфные отображения g_m такие, что $g_m(D) \supset \overline{D}$, $m = 1, 2, \ldots$ и $\lim\limits_{m\to\infty} g_m(z) = z$ для $z \in U(z')$ (например, топологическое произведение колец); наконец, области, биголоморфно эквивалентные указанным областям, если соответствующее биголоморфное отображение продолжается до гомеоморфизма замкнутых областей. Можно показать, что условие A выполняется для строго псевдовыпуклых областей (см. теорему Коула — Рапге [245, 186, с. 107). В то же время нам неизвестны примеры областей, являющихся открытым ядром своих замыканий и не удовлетворяющих условию A.

Б. *Существуют замкнутое множество $M \subset \partial D$, неотрицательная на подмножествах M мера μ, функция $h(\overline{\zeta}, z) \in C\{(\zeta, z) : \zeta \in \overline{D}, z \in D\}$, голоморфная по z в D, обладающая свойством $h(\overline{z}, \zeta) = h(\overline{\zeta}, z)$ на $D \times D$, и для всякой $f \in A_C(D)$ и $z \in D$ имеет место интег-*

ральное представление с ядром Сеге h

$$f(z) = \int_M f(\zeta)\, h(\overline{\zeta}, z)\, d\mu_\zeta, \qquad (12.2)$$

а, кроме того, мера μ — *представляющая для точки* $z^0 \in D$, *т. е. для любой* $f \in A_C(D)$

$$f(z^0) = \int_M f(\zeta)\, d\mu. \qquad (12.3)$$

Если не требовать непрерывности h по ζ в замкнутой области $\overline{D}$, а ограничиться условием $h \in H^2_\mu(D)$, то ядро Сеге существует в весьма общей ситуации (см. теорему 6.7). Наше более жесткое требование непрерывности осуществляется при этих условиях, если D круговая и сильно звездная, и заведомо всегда, когда ядро Сеге найдено в конечном виде [10, 83, 84, 92, 191].

В случае n-круговой области D удобно рассматривать меру, являющуюся произведением меры, зависящей только от $(|\zeta_1|, \ldots, |\zeta_n|)$, и меры, соответствующей внешней дифференциальной форме $d\arg\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\arg\zeta_n$ (см. § 11). Тогда для существования ядра Сеге с нужными нам свойствами необходимо и достаточно, чтобы $M \supset \supset S(D)$ и мера μ была массивна на $S(D)$ (т. е. для всякого $E \subset \partial D$ нулевой меры μ имеет включение $\overline{\partial D \setminus E} \supset \subset S(D)$) (см. § 11). При этом ядро Сеге $h = h(z_1\overline{\zeta}_1, \ldots, z_n\overline{\zeta}_1)$. Для целого ряда n-круговых областей ядра Сеге найдены в конечном виде (см. § 11, а также [10, 83, 84, 92]).

Наконец, эти ядра явно выписаны и для симметрических областей (см. [191]).

В упомянутых случаях, когда ядро Сеге явно вычислено, соотношение (12.3) верно для $z^0 = 0$.

Из требования Б вытекает существование функции $Q(\zeta, z) \in C\{(\zeta, z) : \zeta \in \overline{D},\ z \in D\}$, голоморфной по z в D при фиксированном $\zeta \in \overline{D}$, со свойством $Q(\zeta, z^0) \equiv 1$, такой, что для $f \in A_C(D)$ и $z \in D$ имеет место *интегральное представление Шварца*:

$$f(z) = \int_M [\operatorname{Re} f(\zeta)]\, Q(\zeta, z)\, d\mu_\zeta + i \operatorname{Im} f(z^0). \qquad (12.4)$$

Предложение 12.1 *Соотношение (12.3) эквивалентно равенству*

$$h(\overline{\zeta}, z^\circ) \equiv 1. \qquad (12.5)$$

Ядро Шварца можно задать формулой

$$Q(\zeta, z) = 2h(\overline{\zeta}, z) - 1. \qquad (12.6)$$

Доказательство. Очевидно, из (12.2) и (12.5) следует (12.3). Пусть теперь верна формула (12.3), рассмотрим

$$\int\limits_M h(\overline{\zeta}, z)\, d\mu_\zeta. \qquad (12.7)$$

Так как мера μ действительна, она обладает воспроизводящим свойством и для антиголоморфных функций, поэтому интеграл (12.7) равен $h(\overline{z}^0, z)$, но по формуле (12.2) тот же интеграл равен 1, значит, $h(\overline{z}^0, z) \equiv 1$, что и приводит к (12.5), если учесть свойство ядра Сеге: $h(\overline{z}, \zeta) = \overline{h(\overline{\zeta}, z)}$.

Далее, из (12.5) и (12.6) следует $Q(\zeta, z^0) \equiv 1$. Осталось показать, что верно (12.4). Действительно, из (12.2), (12.3), (12.5) получаем, что

$$\int\limits_M \frac{f(\zeta) + \overline{f(\zeta)}}{2} \left[2h(\overline{\zeta}, z) - 1\right] d\mu_\zeta = f(z) + \overline{f(\overline{z}^0)\, h(\overline{z}^0, z)} -$$

$$- \frac{f(z^0) + \overline{f(z^0)}}{2} = f(z) - i \operatorname{Im} f(z^0). \ \square$$

Заметим, что формулу Шварца можно построить и другими способами, так же как и формулу, восстанавливающую f по $\operatorname{Im} f$. Например,

$$f(z) = 2i \int\limits_M [\operatorname{Im} f(\zeta)]\, h(\overline{\zeta}, z)\, d\mu_\zeta + \overline{f(z^0)}.$$

В тех случаях, когда для n-круговой области ядра Сеге не удается найти в конечном виде, можно рассматривать обобщенное ядро Сеге (11.13), которое можно явно выписать для обширного класса n-круговых областей (см. [10, 17, 47, 91]. И в этом случае по обобщенному ядру Сеге можно найти ядро Шварца, используя формулу, аналогичную формуле (12.6).

Отметим, что, например, круговые сильно звездные области удовлетворяют требованиям A и $Б$.

В дальнейшем важную роль играет класс $[\operatorname{Re} A_C(D)]_\mu^\perp$. Если область D такова, что для всякой действительной $u \in Ph_C(D)$ существует последовательность u_m, $m = 1, 2, \ldots$, $u_m \in \operatorname{Re} A_C(D)$, равномерно сходящаяся к u на M, то $[\operatorname{Re} A_C(D)]_\mu^\perp = [Ph_C(D)]_\mu^\perp$ (например, D сильно звездна).

Теорема 12.2 (Айзенберг — Даутов). *Для того чтобы $f \in R(D)$ необходимо и достаточно, чтобы для $z \in D$ имело место интегральное представление*

$$f(z) = \int_M Q(\zeta, z)\, d\nu_\zeta + i \operatorname{Im} f(z^0) \tag{12.8}$$

с неотрицательной мерой ν, для которой

$$\int_M \varphi\, d\nu = 0 \tag{12.9}$$

при всех $\varphi \in [\operatorname{Re} A_C(D)]_\mu^\perp$.

В случае, когда $n = 1$, область D — единичный круг, формула (12.4) — классическая формула Шварца, из теоремы 12.2 получается теорема Рисса — Херглотца, так как при этих условиях $[\operatorname{Re} A_C(D)]_\mu^\perp$ содержит лишь нулевую функцию.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in R(D)$, а f_m — последовательность функций $f_m \in R_C(D)$ $m = 1, 2, \ldots$, из условия A. Эта последовательность образует нормальное семейство голоморфных функций (см. [131, § 119]), поэтому из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно на компактах в D сходящуюся к f. Эту подпоследовательность мы вновь обозначим через f_m, $m = 1, 2, \ldots$ Каждую функцию f_m

представим формулой (12.4):

$$f_m(z) = \int_M Q(\zeta, z)\, d\nu_{m,\zeta} + i \operatorname{Im} f_m(z^0), \qquad (12.10)$$

где $d\nu_m = \operatorname{Re} f_m d\mu$, и далее из $Q(\zeta, z^0) \equiv 1$ получаем, что

$$\operatorname{Re} f_m(z^0) = \int_M d\nu_m. \qquad (12.11)$$

Меры ν_m неотрицательны. Из (12.11) и равенства $\lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{Re} f_m(z^0) = \operatorname{Re} f(z^0)$ следует ограниченность полных вариаций этих мер, поэтому из $\{\nu_m\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой неотрицательной мере ν в слабой топологии (т. е. в C-топологии пространства $C^*(M)$, см. [70, с. 459]). Указанную подпоследовательность снова обозначим через ν_m, $m = 1, 2, \ldots$ .... Теперь перейдем в (12.10) к пределу при $m \to \infty$ и получим формулу (12.8).

Из способа задания мер ν_m вытекает, что каждая из них удовлетворяет условию (12.9), значит, и предельная мера тоже удовлетворяет этому условию.

Достаточность. Рассмотрим функцию f, представимую в D формулой (12.8) при условии (12.9). Очевидно, $f \in A(D)$. При $z \in D$

$$\operatorname{Re} f(z) = \int_M [\operatorname{Re} Q(\zeta, z)]\, d\nu_\zeta. \qquad (12.12)$$

Далее, для всякой $\psi \in \operatorname{Re} A_C(D)$ имеет место формула Пуассона (см. предложение 12.3):

$$\psi(z) = \int_M \psi(\zeta)\, \mathcal{P}(\zeta, z)\, d\mu_\zeta,$$

отсюда и из (12.4) вытекает, что разность $\operatorname{Re} Q(\zeta, z) - \mathcal{P}(\zeta, z)$ принадлежит $[\operatorname{Re} A_C(D)]^{\perp}_{\mu}$, поэтому из (12.12) и (12.9) следует, что для $z \in D$

$$\operatorname{Re} f(z) = \int_M \mathscr{P}(\zeta, z)\, d\nu_\zeta.$$

В силу неотрицательности ядра Пуассона $\mathscr{P}$ и меры ν функция $f \in R(D)$. $\square$

Предложение 12.3. *Для $f \in A_C(D)$ и $z \in D$ имеет место интегральное представление Пуассона*

$$f(z) = \int_M f(\zeta)\, \mathscr{P}(\zeta, z)\, d\mu_\zeta, \tag{12.13}$$

где ядро Пуассона

$$\mathscr{P}(\zeta, z) = \frac{|h(\bar{\zeta}, z)|^2}{h(\bar{z}, z)}.$$

Здесь при всех $z \in D$ верно неравенство

$$h(\bar{z}, z) > 0. \tag{12.14}$$

Доказательство. Применяя (12.2), получим

$$h(\bar{z}, z) = \int_M h(\bar{z}, \zeta)\, h(\bar{\zeta}, z)\, d\mu_\zeta = \int_M |h(\bar{\zeta}, z)|^2 d\mu_\zeta. \tag{12.15}$$

При всяком $z \in D$ имеем $\operatorname{Vrai}\sup_M |h(\bar{\zeta}, z)| > 0$, в противном случае из (12.2) вытекало бы, что для всех $f \in A_C(D)$ верно $f(z) = 0$. Поэтому из (12.15) следует (12.14). Далее,

$$\int_M f(\zeta)\mathscr{P}(\zeta, z)\, d\mu_\zeta = \frac{1}{h(\bar{z}, z)} \int_M f(\zeta)\, h(\bar{z}, \zeta)\, h(\bar{\zeta}, z)\, d\mu_\zeta =$$
$$= \frac{1}{h(\bar{z}, z)} f(z)\, h(\bar{z}, z) = f(z). \quad \square$$

Чтобы сделать обобщение теоремы Рисса — Херглотца, данное в теореме 12.2, более обозримым для конкретной сильно звездной области D, нужно найти семейство функций (например, полиномов) из $[Ph_C(D)]_\mu^\perp$ таких, что 1) их можно выписать явно, 2) их линейная оболочка плотна в $[Ph_C(D)]_\mu^\perp$ в метрике $C(M)$, а затем заменить условие (12.9) требованием ортогональности меры ν элементам указанного семейства.

Пусть D_0 — ограниченная круговая сильно звездная область, μ — неотрицательная мера на M, массивная на границе Шилова $S(D)$, причем M и μ — инварианты относительно *поворотов* $z \to e^{i\theta}z$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Тогда в пространстве $H_\mu^2(D)$ можно выбрать полную ортонормированную относительно меры μ систему однородных полиномов $\{\varphi_l^k(z)\}$, где l — степень полинома, а k — его номер среди однородных полиномов данной степени l. Положим $\varphi_{-l}^k(z) = \overline{\varphi_l^k(z)}$, $l = 1, 2, \ldots$ и пусть

$$P_{J\mathcal{J}}(z, \bar{z}) = \sum_k a_{J\mathcal{J}k}\varphi^k_{|J|-|\mathcal{J}|}(z),$$

где $J = (i_1, \ldots, i_n)$; $\mathcal{J} = (j_1, \ldots, j_n)$; i_l, j_l — целые неотрицательные, $l = 1, \ldots, n$; $|J| = i_1 + \ldots + i_n$. Пусть

$$a_{J\mathcal{J}k} = \int_M z^J \bar{z}^{\mathcal{J}} \varphi^k_{|J|-|\mathcal{J}|}(z)\, d\mu.$$

Предложение 12.4. *Любой полином* $P \in [Ph_C(D_0)]_\mu^\perp$ *можно представить в виде линейной комбинации полиномов*

$$z^J\bar{z}^{\mathcal{J}} - P_{J\mathcal{J}}(z, \bar{z}), \tag{12.16}$$

каждый из которых входит в $[Ph_C(D_0)]_\mu^\perp$.

Лемма 12.5. *Любой полином вида* (12.16) *принадлежит* $[Ph_C(D_0)]_\mu^\perp$.

Доказательство. В силу сильной звездности D_0 всякая функция $f \in Ph_C(D_0)$ равномерно на D_0 аппроксимируется плюригармоническими в окрестности $\overline{D}_0$ функциями, а каждая голоморфная на $\overline{D}_0$ функция равномерно приближается линейными комбинациями однородных полиномов $\varphi_l^k(z)$, $l=0, 1, 2, \dots$ (так как D_0 — круговая), поэтому f можно равномерно на $\overline{D}_0$ аппроксимировать линейными комбинациями полиномов $\varphi_l^k(z)$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Итак, достаточно показать, что

$$\int\limits_M \left[z^J \overline{z}^{\mathcal{J}} - P_{J\mathcal{J}}(z, \overline{z})\right] \varphi_l^k(z)\, d\mu = 0, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{12.17}$$

Из инвариантности меры μ относительно поворотов вытекает так же, как при доказательстве теоремы 1.1, что при $|N| \neq |L|$

$$\int\limits_M z^N \overline{z}^L d\mu = 0, \tag{12.18}$$

значит, формула (12.17) верна для $l \neq |J| - |\mathcal{J}|$. Если же $l = |J| - |\mathcal{J}|$, то (12.17) выполняется благодаря виду коэффициентов $a_{J\mathcal{J}k}$. □

Лемма 12.6. *Любой полином* $P(z, \overline{z})$ *можно представить в виде*

$$P(z, \overline{z}) = P_1(z, \overline{z}) + P_2(z, \overline{z}), \tag{12.19}$$

где P_1 — *линейная комбинация полиномов* (12.16), *а* P_2 *плюригармоничен.*

Доказательство. Запишем P в виде

$$P(z, \overline{z}) = \sum_{J, \mathcal{J}} b_{J\mathcal{J}} z^J \overline{z}^{\mathcal{J}},$$

где лишь конечное число коэффициентов $b_{J\mathcal{J}}$ отлично от нуля. Далее,

$$P(z, \overline{z}) = \sum_{J, \mathcal{J}} b_{J\mathcal{J}} \left[z^J \overline{z}^{\mathcal{J}} - P_{J\mathcal{J}}(z, \overline{z})\right] + \sum_{J, \mathcal{J}} P_{J\mathcal{J}}(z, \overline{z}).$$

Остается заметить, что $P_{J\mathcal{J}}$ — голоморфный полином при $|J| \geqslant |\mathcal{J}|$ и антиголоморфный при $|J| \leqslant |\mathcal{J}|$. □

Доказательство предложения 12.4. Представим полином $P \in [Ph_C(D_0)]_\mu^\perp$ по формуле (12.19).

Нужно показать, что $P_2 \equiv 0$. Отметим, что $\overline{P}_2 \in Ph_C(D_0)$ и $P_2 \in [Ph_C(D_0)]_\mu^\perp$, поэтому

$$\int\limits_M |P_2|^2 d\mu = 0,$$

значит, $P_2 = 0$ на $S(D)$, т. е. $P_2 \equiv 0$. $\square$

Далее, рассмотрим n-круговую сильно звездную область D_1 и предположим, что M и μ инвариантны относительно *n-поворотов* $z \to (z_1 e^{i\theta_1}, \ldots, z_n e^{i\theta_n}), 0 \leqslant \theta_j \leqslant 2\pi$, а неотрицательная мера μ массивна на $S(D)$. При этих условиях в качестве полной ортонормированной системы можно выбрать систему мономов $\{\alpha_J z^J\}$, где

$$\alpha_J = \left[\int\limits_M z^J \bar{z}^J d\mu\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Аналогично предложению 12.4 доказывается следующее утверждение.

Предложение 12.7. *Всякий полином $P \in [Ph_C(D_1)]_\mu^\perp$ можно представить в виде линейной комбинации полиномов*

$$\bar{z}^J z^{\mathcal{J}},\quad J \nleqslant \mathcal{J},\quad J \ngeqslant \mathcal{J}, \tag{12.20}$$

$$z^J \bar{z}^{J+\mathcal{J}}\left(\alpha^2_{J+\mathcal{J}+1_k} - \alpha^2_{J+\mathcal{J}} |z_k|^2\right),$$

$$z^{J+\mathcal{J}} \bar{z}^J\left(\alpha^2_{J+\mathcal{J}+1_k} - \alpha^2_{J+\mathcal{J}} |z_k|^2\right),$$

каждый из которых входит в $[Ph_C(D_1)]_\mu^\perp$.

Вновь вернемся к круговой области D_0 и рассмотрим на M произвольную меру ν. Положим для $z \in D_0$

$$F_\nu(z) = \int\limits_M \mathcal{P}(\zeta, z)\, d\nu_\zeta.$$

Лемма 12.8. *Если ν ортогональна полиномам* (12.16), *то* $F_\nu(z) \in Ph(D_0)$.

Доказательство. Для $f \in A_C(D_0)$ и $z \in D_0$ верна формула (12.13). Используя сильную звездность D_0 и действительность ядра Пуассона $\mathscr{P}(\zeta, z)$, нетрудно показать справедливость (12.13) и для $f \in Ph_C(D_0)$. Положим

$$H_a(f) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} a_i a_j, \quad a \in C^n,$$

и пусть T — произвольный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Из (12.13) следует, что для всякой $f \in Ph_C(D_0)$

$$\int_M f(\zeta) T_z [H_{a,z}(\mathscr{P}(\zeta, z))] \, d\mu_\zeta = 0,$$

где индекс z у операторов T и H_a означает, что их надо применять по z. В частности,

$$T_z [H_{a,z}(\mathscr{P}(\zeta, z))]|_{z=0} \in [Ph_C(D_0)]^{\perp}_{\mu}.$$

Отметим, что в нашем случае

$$h(\bar{\zeta}, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_k \varphi_l^k(z) \overline{\varphi_l^k(\zeta)},$$

так как в силу (12.2)

$$\int_M \varphi_l^k(\zeta) h(\bar{\zeta}, z) \, d\mu_\zeta = \varphi_l^k(z);$$

отсюда и из вида $\mathscr{P}(\zeta, z)$ вытекает,что $T_z[H_{a,z}(\mathscr{P}(\zeta, a))]|_{z=0}$ —полином от ζ, $\bar{\zeta}$, поэтому

$$T[H_a(F_\nu(z))|_{z=0} = \int_M T_z [H_{a,z}(\mathscr{P}(\zeta, z))]|_{z=0} d\nu\zeta = 0,$$

т. е. $H_a(F_\nu(z))$ и все ее производные в точке 0 обращаются в нуль. Функция $F_\nu(z)$ — действительно-аналитическая, следовательно, $H_a(F_\nu(z))$ тоже действительно-аналитическая в D_0, поэтому она тождественно равна нулю, что и означает $F_\nu(z) \in Ph(D_0)$. $\square$

Пусть теперь D — ограниченная симметрическая область (см. [174, § 24]). Такие области хорошо описаны. Для простоты будем рассматривать классические симметрические области или их топологические произведения. Указанные области круговые и сильно звездные (см. [191]), а на их границах Шилова $S(D)$ существуют неотрицательные меры μ, инвариантные относительно поворотов и массивные на $S(D)$, для которых ядра Сеге явно выписаны. Ядро Шварца, соответствующее мере μ, обозначим через $q(\zeta, z)$. (Например, это ядро можно задать формулой (12.6).) Если D еще и n-круговая, то мера μ инвариантна относительно n-поворотов.

Теорема 12.9. (Айзенберг — Даутов). *Если D — классическая симметрическая область или топологическое произведение таких областей, то $f \in R(D)$ тогда и только тогда, когда существует представление*

$$f(z) = \int_{S(D)} q(\zeta, z)\, d\nu_\zeta + i \operatorname{Im} f(0),$$

где $z \in D$, мера ν неотрицательна и

$$\int_{S(D)} P d\nu = 0 \tag{12.21}$$

для всех полиномов вида (12.16). *В случае, когда D, кроме того, является n-круговой,* (12.16) *можно заменить на* (12.20).

Доказательство. В силу теоремы 12.2 достаточно показать, что из (12.21) вытекает (12.9). Из (12.21) по лемме 12.6 следует, что $F_\nu(z) \in Ph(D)$. Кроме того (см. [291]), $F_\nu(rz)d\mu$ слабо сходится к мере ν при $r \to 1-0$, т. е. для любой $\varphi \in C(S(D))$

$$\lim_{r\to 1-0} \int_{S(D)} \varphi(z) F_\nu(rz)\, d\mu = \int_{S(D)} \varphi(z)\, d\nu. \tag{12.22}$$

Пусть $\varphi \in [Ph_C(D)]_\mu^\perp$, тогда интеграл в (12.22) равен нулю, так как $F_\nu(rz) \in Ph_C(D)$, $0 < r < 1$. $\square$

Приведем 3 характерных примера.

Пример 1 (поликруг).

$$D = U(0,\ 1) = \{z : |z_k| < 1,\ k = 1, \ldots, n\},$$

$$S(D) = \{z : |z_k| = 1,$$

$k = 1, \ldots, n\}$, мера μ порождается дифференциальной формой

$$d \arg \zeta_1 \wedge \ldots \wedge d \arg \zeta_n,$$

ядро Сеге имеет вид

$$h(\overline{\zeta},\ z) = (1 - z_1\overline{\zeta}_1)^{-1} \ldots (1 - z_n\overline{\zeta}_n)^{-1}.$$

В этом случае полиномы второго и третьего вида (12.20) равны нулю, и для характеристики $f \in R(D)$ получается *формула Кораньи — Пуканского*

$$f(z) = \int\limits_{S(D)} \left[\frac{2}{(1 - z_1\overline{\zeta}_1) \ldots (1 - z_n\overline{\zeta}_n)} - 1\right] d\nu_\zeta + i \operatorname{Im} f(0),$$

где $z \in D$, мера ν неотрицательна и

$$\int\limits_{S(D)} z^J \overline{\zeta}^{\mathcal{J}} d\nu = 0,$$

если $J \nleqslant \mathcal{J}$, $J \ngeqslant \mathcal{J}$.

Пример 2 (шар). $D = B_1(0) = \{z : |z| < 1\}$, $S(D) = \partial D$, $d\mu = (n - 1)!\ (2\pi)^{-n}\ ds$, где ds — элемент поверхности сферы ∂D, ядро Сеге имеет вид (см. (8.7))

$$h(\overline{\zeta},\ z) = (1 - z_1\overline{\zeta}_1 - \ldots - z_n\overline{\zeta}_n)^{-n}.$$

Мы приходим к следующей характеристической формуле для функций $f \in R(D)$:

$$f(z) = \int\limits_{\partial D} \left[\frac{2}{(1 - z_1\overline{\zeta}_1 - \ldots - z_n\overline{\zeta}_n)^n} - 1\right] d\nu_\zeta + i \operatorname{Im} f(0),$$

где $z \in D$, мера ν неотрицательна, и $\int\limits_{\partial D} P d\nu = 0$ для полиномов $P(z, \bar{z})$ вида

$$z^J \bar{z}^{\mathcal{J}}, \quad J \nleqslant \mathcal{J}, \quad J \ngeqslant \mathcal{J},$$

$$z^J \bar{z}^{J+\mathcal{J}} [i_k + j_k + 1 - (|J| + |\mathcal{J}| + n)|z_k|^2],$$

$$z^{J+\mathcal{J}} \bar{z}^J [i_k + j_k + 1 - (|J| + |\mathcal{J}| + n)|z_k|^2].$$

Пример 3 («обобщенный единичный круг»). Пусть $\tau_0 = \{w : ww^* < I^{(2)}\} \subset C^4$, где w — квадратная 2×2 матрица; $w^* = \bar{w}'$ — сопряженная к матрице w, а $I^{(2)}$ — единичная 2×2 матрица. Границей Шилова области τ_0 является множество $S(\tau_0) = U(2) = \{X : XX^* = I^{(2)}\}$ всех унитарных 2×2 матриц (см. [52—54]); $S(\tau_0)$ допускает параметризацию $X = e^{i\varphi/2} u$, $X \in S(\tau_0)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $u \in SU(2)$; группа $SU(2)$ изоморфна трехмерной единичной сфере S_3. Положим $d\mu = (4\pi^3)^{-1} d\varphi \wedge du$, где du — мера Лебега на S_3. Ядро Сеге по этой мере имеет вид (см., например, [53])

$$h(X, w) = \det^{-2}(I^{(2)} - wX^*).$$

Область τ_0 является классической (см. [191]), поэтому для нее справедлива теорема 12.9. Положим

$$D^j_{q_1, q_2}(w) = \left[\frac{(j+q_1)!\,(j-q_1)!}{(j+q_2)!\,(j-q_2)!}\right]^{1/2} \sum_s \binom{j+q_2}{s} \binom{j-q_2}{s-q_1-q_2} \times$$

$$\times\, w_{11}^s w_{12}^{j+q_1-s} w_{21}^{j+q_2-s} w_{22}^{s-q_1-q_2}.$$

Далее, применяя лемму 12.10, получаем, что характеристической формулой для функций $f \in R(D)$ является *формула Владимирова*

$$f(z) = \int\limits_{S(\tau_0)} \left[\frac{2}{\det^2(I^{(2)} - wX^*)} - 1\right] d\nu_X + i \operatorname{Im} f(0),$$

где $z \in \tau_0$, мера ν неотрицательна и

$$\int\limits_{S(\tau_0)} (\det X)^m D^j_{q_1, q_2}(X)\, d\nu = 0,$$

$$2j = 2,\ 3,\ \ldots,\ m = -2j + 1,\ \ldots,\ -1;$$
$$-j \leqslant q_1,\ q_2 \leqslant j.$$

Лемма 12.10. *Функции*

$$\sqrt{2j+1}\,(\det X)^m D^j_{q_1, q_2},\quad X \in S(\tau_0), \tag{12.23}$$
$$2j = 2,\ 3,\ \ldots;\quad m = -2j + 1,\ \ldots,\ -1;$$
$$-j \leqslant q_1,\ q_2 \leqslant j. \tag{12.24}$$

представимы линейными комбинациями полиномов (12.16) и, наоборот, полиномы вида (12.16) представимы линейными комбинациями функций (12.23) при условии (12.24).

Доказательство. На $S(\tau_0)$ справедливо равенство (см. [53])

$$\overline{D^j_{q_1, q_2}(X)} = (-1)^{q_1+q_2} (\det X)^{-2j} D^j_{-q_1, -q_2}(X), \tag{12.25}$$

а функции (12.23) образуют ортогональный базис для области τ_0 в $H^2_\mu(\tau_0)$, если $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ 2j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$ $-j \leqslant q_1,\ q_2 \leqslant j$.

Из (12.25) и ортогональности этого базиса следует, что

$$\int\limits_{S(\tau_0)} \varphi(X)\, u(X)\, d\mu = 0, \tag{12.26}$$

где φ — функция вида (12.23) при условии (12.24), а u — функции из базиса или им сопряженные, поэтому (12.26) выполняется для всех $u \in Ph_C(\tau_0)$. Таким образом, функции (12.23) при условии (12.24) принадлежат $[Ph_C(\tau_0)]^{\perp}_{\mu}$ и по предложению 12.4 есть линейные комбинации полиномов (12.16), так как функции (12.23) — полиномы от элементов матриц X и $\overline{X}$, потому что $(\det X)^m = (\det \overline{X})^{-m}$ на $S(\tau_0)$.

Пусть теперь $P(X, \overline{X})$ — полином вида (12.16). Его можно выразить как линейную комбинацию функций

$$(\det X)^m D^j_{q_1,q_2}(X)\,\overline{(\det X)^k D^l_{p_1,p_2}(X)} =$$
$$= (-1)^{p_1-p_2}(\det X)^{m-k-2l} D^j_{q_1,q_2}(X)\, D^l_{-p_1,-p_2}(X).$$

Однородные полиномы $D^j_{q_1,q_2}(X)\,D^l_{-p_1,-p_2}(X)$ есть линейные комбинации полиномов из базиса, значит,

$$P(X,\overline{X}) = \sum_{\substack{m=-\infty\\ j,q_1,q_2}}^{\infty} a^{j,m}_{q_1,q_2}(\det X)^m D^j_{q_1,q_2}(X), \qquad (12.27)$$

причем лишь конечное число коэффициентов $a^{j,m}_{q_1,q_2}$ отлично от нуля. Если $m \geqslant 0$ или $m \leqslant -2j$, то функция (12.23) — след на $S(\tau_0)$ функции из $Ph_C(\tau_0)$ (при $m \leqslant -2j$ это вытекает из (12.25)), поэтому из (12.25), (12.27) и того, что $P(X,\overline{X}) \in [Ph_C(\tau_0)]^{\perp}_{\mu}$, получаем при $m \geqslant 0$ или $m \leqslant -2j$

$$a^{j,m}_{q_1,q_2} = \frac{1}{2j+1}\int\limits_{S(\tau_0)} P(X,\overline{X})(\det \overline{X})^m D^j_{q_1,q_2}(\overline{X})\,d\mu = 0.$$

Это значит, что в (12.27) коэффициенты $a^{j,m}_{q_1,q_2}$ не равны нулю только для индексов, удовлетворяющих условию (12.24). □

Глава III

ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ

§ 13. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одной из основных задач теории многомерных вычетов является задача изучения и вычисления интегралов (периодов) от замкнутых дифференциальных форм на комплексном аналитическом многообразии, имеющих особенности на аналитических подмножествах этого многообразия, по циклам, не пересекающим особых множеств.

Важным случаем таких интегралов являются интегралы от голоморфных функций n комплексных переменных по n-мерным циклам (замкнутым n-мерным поверхностям), расположенных в области голоморфности этих функций. При этом n-кратный интеграл от голоморфной функции f комплексных переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$ можно рассматривать как интеграл от замкнутой голоморфной формы $f(z)dz = f(z_1, \ldots, z_n)dz \wedge \ldots \wedge dz_n$.

Имеется более абстрактный подход к теории вычетов, изучающий двойственность гомоморфизмов групп гомологий и когомологий комплексного аналитического многообразия, его аналитического подмножества и дополнения этого подмножества (см. [316, 243] и др.).

Формула Стокса и интегральная теорема Коши — Пуанкаре позволяют заменять интеграл от замкнутой формы по циклу интегралом от более простой формы, когомологичной данной, по более простому циклу, гомологичному первоначальному. Непосредственно из следствия 05 вытекает.

Предложение 13.1. *Пусть ω — замкнутая форма степени q на многообразии X, имеющая особенности на множестве T, а $\{\gamma_j\}$ — база q-мерных гомологий мно-*

гообразия $X \setminus T$. *Тогда для любого цикла* $\gamma \in Z_q(X \setminus T)$

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \sum_j k_j \int\limits_{\gamma_j} \omega, \tag{13.1}$$

где k_j *— коэффициенты разложения цикла* γ *по базе*

$$\{\gamma_j\} : \gamma \approx \sum k_j \gamma_j.$$

Таким образом, задача вычисления интеграла от замкнутой формы по циклу сводится к:

1) изучению группы гомологий дополнения $X \setminus T$ особого множества T (определению се размерности и построению базы гомологий);

2) вычислению интегралов от формы по базисным циклам;

3) нахождению коэффициентов разложения цикла интегрирования по базе.

Решение задач 1), 3) в многомерном случае в отличие от случая одного комплексного переменного, где они решаются тривиально из наглядных геометрических соображений, представляет значительные топологические трудности. В некоторых случаях решение этих задач существенно облегчается, если воспользоваться двойственностью Александера — Понтрягина (см. § 14, 18) либо двойственностью де Рама (§ 15, 19). Задача 2) не всегда может быть решена до конца, иногда возможно лишь понизить кратность интеграла (см. § 16, 18). Часто удается непосредственно, без выделения базы гомологий заменить цикл интегрирования другим циклом, интеграл по которому можно вычислить или хотя бы упростить. Важным средством приведения интегралов к более простому виду является понижение порядка полюсов подынтегральной формы — когомологическое приведение периодов (§ 17).

§ 14. ПРИМЕНЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ АЛЕКСАНДЕРА—ПОНТРЯГИНА

1°. Приведем предварительно некоторые понятия и факты из комбинаторной топологии (см. [30, 31]). Пусть X — n-мерное ориентируемое дифференцируемое многообразие с фиксированной ориентацией. Если гладкие невырожденные симплексы $U_r = \{\Delta_r, \varphi\}$ и $V_q = (\Delta_q, \psi)$, $r+q=n$, в X пересекаются трансверсально в некоторой точке a, внутренней для каждого из симплексов, то индекс пересечения этих симплексов определяется равенством

$$\chi(U_r, V_q) = \operatorname{sign} \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_r, \tau_1, \ldots, \tau_q)}\bigg|_a, \tag{14.1}$$

где $(x_1, \ldots, x_n)$ — локальные координаты в окрестности точки a, определяющие ориентацию X, а $(t_1, \ldots, t_r)$, $(\tau_1, \ldots, \tau_q)$ — координаты в Δ_r, Δ_q, определяющие ориентацию симплексов U_r, V_q. Трансверсальность означает, что якобиан в (14.1) отличен от нуля. Если симплексы U_r, V_q не пересекаются, то полагаем $\chi(U_r, V_q) = 0$. Индекс пересечения двух цепей $c_r = \sum_i m_i U_r^{(i)}$ и $l_q = \sum_j n_j V_q^{(j)}$, $r+q=n$, симплексы которых невырожденны и попарно пересекаются не более чем в одной точке, причем трансверсально, определяется формулой

$$\chi(c_r, l_q) = \sum_{i,j} m_i n_j \chi\left(U_r^{(i)}, V_q^{(j)}\right).$$

Из определения индекса пересечения непосредственно следуют его свойства:

1) $\chi\left(\lambda_1 c_r^{(1)} + \lambda_2 c_r^{(2)}, l_q\right) = \lambda_1 \chi\left(c_r^{(1)}, l_q\right) + \lambda_2 \chi\left(c_r^{(2)}, l_q\right)$;

2) $\chi(c_r, l_q) = (-1)^{rq}\chi(l_q, c_r)$. Менее очевидным является равенство

3) $\chi(c_r, \partial l_{q+1}) = (-1)^r \chi(\partial c_r, l_{q+1})$, из которого вытекают свойства:

4) если σ_r и γ_q — циклы в X и $\gamma_q \approx 0$, то $\chi(\sigma_r, \gamma_q) = 0$;

5) если цепи c_r' и c_r'' имеют общую границу $(\partial c_r' = \partial c_r'')$ и цикл $\gamma_q \approx 0$, то $\chi(c_r', \gamma_q) = \chi(c_r'', \gamma_q)$. *Коэффициент зацепления* двух циклов $\sigma_{r-1} \in B_{r-1}(X)$ и $\gamma_q \in B_q(X)$, для которых $r+q=n$, и $|\sigma_{r-1}| \cap |\gamma_q| = \varnothing$, определяется равенством

$$\mathfrak{v}(\sigma_{r-1}, \gamma_q) = \chi(c_r, \gamma_q), \tag{14.2}$$

где c_r — цепь в X, трансверсальная γ_q, и для которой

$\partial c_r = \sigma_{r-1}$. Из свойства 5) индекса пересечения вытекает независимость коэффициента зацепления от выбора цепи c_r. Из равенства (14.2) и свойств индекса пересечения вытекают следующие свойства коэффициента зацепления:

1) $\mathfrak{v}\,(\lambda_1\sigma'_{r-1} + \lambda_2\sigma''_{r-1},\ \gamma_q) = \lambda_1\mathfrak{v}\,(\sigma'_{r-1},\ \gamma_q) + \lambda_2\mathfrak{v}\,(\sigma''_{r-1},\ \gamma_q)$;

2) $\mathfrak{v}\,(\sigma_{r-1},\ \gamma_q) = (-1)^r\chi(\sigma_{r-1},\ b_{q+1})$, где $\partial b_{q+1} = \gamma_q$;

3) $\mathfrak{v}\,(\sigma_{r-1},\ \gamma_q) = (-1)^{(r-1)q-1}\,\mathfrak{v}\,(\gamma_q,\ \sigma_{r-1})$.

Теорема 14.1 (двойственность Александера — Понтрягина).[1] *Пусть S^n — многообразие, гомеоморфное n-мерной сфере и T — полиэдр в нем. Тогда для $r + q = n$, $r = 0,\ 1, \ldots,\ n$, группы слабых гомологий $H_{r-1}(T)$ и $H_q(S^n \setminus T)$ изоморфны. Причем для всякой базы $(r-1)$-мерных гомологий $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ полиэдра T существует двойственная ей база q-мерных гомологий $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ открытого множества $S^n \setminus T$ такая, что $\mathfrak{v}\,(\sigma_i,\ \gamma_j) = \delta_{ij}$, $i,\ j = 1, \ldots,\ p$.*

2°. Применим теорему 14.1 и предложение 13.1 к следующему случаю. Пусть $X = C^n$, форма ω регулярна в области $D = C^n \setminus T$ (T — особое множество формы ω). Так как пространство C^n гомеоморфно $2n$-мерной сфере с «выколотой» точкой, то можно полагать C^n вложенным в сферическое пространство $S^{2n} = \mathring{C}^n = C^n \cup \{\infty\}$. Окрестностью бесконечно удаленной точки ∞ считаем внешность произвольного шара в C^n. Если S^{2n} допускает триангуляцию, в которой множество $\mathring{T} = T \cup \{(\infty)\}$ является подполиэдром S^{2n}, то к $\mathring{T}$ и $S^{2n} \setminus \mathring{T} = C^n \setminus T = D$ можно применить теорему 14.1. В этом случае для того, чтобы найти q-мерное число Бетти области D (размерность группы $H_q(D)$), достаточно найти $(r-1)$-мерное число Бетти p особого множества $\mathring{T}$ для $r = 2n - q$. Вместо q-мерной базы гомологий $\{\gamma_j\}_{j=1}^p$ области D достаточно построить $(r-1)$-мерную базу гомологий $\{\sigma_j\}_{j=1}^p$ особого множества $\mathring{T}$. Коэффициенты разложения цикла интегрирования $\gamma \in Z_q(D)$ по базе $\{\gamma_j\}$, двойственной

[1] Доказательство см. в [30, 31].

базе $\{\sigma_j\}$, находятся как коэффициенты зацепления:

$$\mathfrak{v}(\sigma_j, \gamma) = \mathfrak{v}\left(\sigma_j, \sum_i k_i\gamma_i\right) = \sum_{i=1}^{p} k_i \mathfrak{v}(\sigma_j, \gamma_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} k_i \delta_{ij} = k_j.$$

Для вычисления интеграла от формы ω по базисным циклам γ_j также не обязательно непосредственно находить базу $\{\gamma_j\}$. Для этого достаточно подобрать p гомологически независимых q-мерных циклов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ в области D, интегралы по которым будут достаточно простыми. Тогда интегралы по базисным циклам находятся из системы линейных уравнений:

$$\int\limits_{\Gamma_j} \omega = \sum_{i=1}^{p} k_{ji} \int\limits_{\gamma_i} \omega, \quad j = 1, \ldots, p,$$

где $k_{ji} = \mathfrak{v}(\sigma_i, \Gamma_j)$. Здесь неравенство $\det \|k_{ji}\| \neq 0$ является условием гомологической независимости циклов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$.

Если форма ω регулярна в области $D = G \setminus T$, где G — область в C^n, гомеоморфная шару, то G можно дополнить до сферического пространства S^{2n}, отождествляя ее границу ∂G в одну несобственную точку (∞). При этом вместо группы $H_{r-1}(\mathring{T})$ можно рассматривать изоморфную ей группу относительных гомологий $H_{r-1}(T, \partial G)$. Положим теперь $r = q = n$, $\omega = f(z)dz$, где $f \in A(D)$. Тогда из предыдущих рассуждений и предложения 13.1 вытекает

Теорема 14.2 (о вычетах). *Пусть* $f \in A(D)$, *и особое множество* $\mathring{T} = T \cup \{\infty\}$, где $T = C^n \setminus D$, *является подполиэдром сферической компактификации* $S^{2n} = C^n \cup \cup \{\infty\}$ *пространства* C^n. *Если* $\{\sigma_j\}_{j=1}^{p}$ *— база* $(n-1)$*-мерных гомологий особого множества* $\mathring{T}$, *а* $\{\gamma_j\}_{j=1}^{p}$ *— двойственная ей база* n*-мерных гомологий области* D, *тогда для любого цикла* $\gamma \in z_n(D)$ *имеет место равенство*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = (2\pi i)^n \sum_{j=1}^{n} k_j R_j,$$

где $k_j = \mathfrak{v}\,(\sigma_j,\ \gamma)$, $\quad R_j = \dfrac{1}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$

По аналогии с одним переменным R_j можно назвать *вычетом функции* $f(z)$ *относительно базисного цикла* γ_j. Интеграл $\int_\gamma f(z)\,dz$ называют также *периодом* формы $f(z)dz$ относительно цикла γ.

Следствие 14.3. *Если* $f \in A(C^n \setminus T)$ *и* $H_{n-1}(\mathring{T}) \simeq 0$, *где* $\mathring{T} = T \cup \{\infty\}$, *то для любого цикла* $\gamma \in Z_n(C^n \setminus T)$ *интеграл* $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Пример 1. Пусть $f(w, z)$ — целая функция двух комплексных переменных, k, m — взаимно-простые натуральные числа. Тогда для любого цикла $\gamma \in Z_2(C^2 \setminus T)$, где $T = \{(w, z)\colon w^k - z^m = 0\}$, интеграл

$$\int_\gamma \frac{f(w, z)\,dw \wedge dz}{w^k - z^m} = 0.$$

Действительно, множество $\mathring{T} = T \cup \{\infty\}$ топологически эквивалентно римановой поверхности функции $w = z^{\frac{m}{k}}$, которая гомеоморфна 2-мерной сфере S^2, а $H_1(S^2) \simeq 0$.

Пример 2. Пусть $f(z)$ — целая функция в C^n, тогда интеграл

$$\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{\prod_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k z_k + b_j \right)^{m_j}} = 0$$

для любого цикла $\gamma \in Z_n(C^n \setminus T)$, где $T = \Big\{ z \in C^n\colon$

$: \prod_{j=1}^{N}{}'\left(\sum_{k=1}^{n} a_k z_k + b_j\right) = 0\Big\}$. Действительно, так как T есть семейство N параллельных аналитических плоскостей комплексной размерности $n-1$, то множество $\overset{\circ}{T}$ гомеоморфно N сферам размерности $2n-2$, имеющим одну общую точку ∞ (букет сфер). Следовательно, $H_{n-1}(\overset{\circ}{T}) \simeq 0$.

Пример 3. Пусть $T = \{(w, z) \in C^2 : wz = 1\}$. Тогда множество $\overset{\circ}{T} = T \cup \{\infty\}$ гомеоморфно двумерной сфере, у которой отождествлены две точки (точка сферы Римана $z = 0$, в которой $w = \frac{1}{z} = \infty$, и точка $z = \infty$ отождествляются в точку $\infty \in \overset{\circ}{T}$). Следовательно, размерность групп $H_1(\overset{\circ}{T}) \simeq H_2(C^2 \setminus T)$ равна единице. В качестве двойственных базисных циклов можно взять $\sigma = \{(w, z) : y = v = 0, \quad u = \frac{1}{x}, \ 0 \leqslant x < \infty\} \in Z_2(\overset{\circ}{T})$, где $x - \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$, а $\gamma = \{(w, z) : w = 2e^{it}, z = 2e^{i\tau}, 0 \leqslant t, \tau \leqslant 2\pi\} \in Z_2(C^2 \setminus T)$. Очевидно, $\mathfrak{v}(\sigma, \gamma) = \chi(c, \gamma) = 1$, где $c = \{(w, z) : y = v = 0, \ xu \geqslant 1, \ x \geqslant 0, \ u \geqslant 0\}$, так как $\partial c = \sigma$ и $|\gamma| \cap |c|$ состоит из одной точки (2.2), в которой $\operatorname{sign} \frac{\partial(u, v, x, y)}{\partial(x, u, t, \tau)} = 1$ (можно взять $\mathfrak{v}(\sigma, \gamma) = \chi(\sigma, b)$, где $b = \{(w, z) : w = re^{it}, \ z = 2e^{i\tau}, \ 0 \leqslant r \leqslant 2, \ 0 \leqslant t, \ \tau \leqslant 2\pi\}$, $\partial b = \gamma$). По теореме 14.2, для цикла $\Gamma \in Z_2(C^2 \setminus T)$ и целой функции $f(w, z)$ интеграл

$$\int_{\gamma} \frac{f(w, z)\, dw \wedge dz}{wz - 1} = (2\pi i)^2 mR,$$

где $m = \mathfrak{v}(\sigma, \Gamma)$, а $R = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} \frac{f(w, z)\, dw \wedge dz}{wz - 1} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} \frac{f(w, z)\, dw \wedge dz}{(wz)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \frac{\partial^{2k} f(0, 0)}{\partial w^k \partial z^k}$$

— вычет функции $f(w, z)/(wz-1)$ относительно цикла γ.

Применение двойственности Александера—Понтрягина особенно эффективно в случае, когда $n = 2$ и T — аналитическое множество, так как в этом случае изучение двумерных гомологий области четырехмерного евклидова пространства сводится к изучению одномерной группы гомологий вещественно-двумерной поверхности (см. § 18).

§ 15. ПРИМЕНЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЕ РАМА

Двойственность групп гомологий и когомологий дифференцируемого многообразия X устанавливает следующая

Теорема 15.1 (де Рам)[2]. *Для любого гомоморфизма $\lambda : H_p(X) \to C^1$, R^1 существует единственный элемент $\{\omega\} = h^* \in H^p(X)$ такой, что*

$$\lambda(h) = \int\limits_h h^* = \int\limits_\gamma \omega$$

для любого $h = \{\gamma\} \in H_p(X)$.

Здесь под $H_p(X)$ и $H^p(X)$ мы будем понимать группы гомологий и когомологий с вещественными либо комплексными коэффициентами. Заметим, что всякая замкнутая форма $\omega \in Z^p(X)$ или ее класс $\{\omega\} \in H^p(X)$ задает гомоморфизм $\lambda : H_p(X) \to C^1$, R^1, определяемый равенством $\lambda(h) = \int\limits_h \{\omega\}$.

Следствие 15.2. *Для того чтобы форма $\omega \in Z^p(X)$ была точной, необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_\gamma \omega = 0$ для любого цикла $\gamma \in Z_p(X)$.*

Необходимость совпадает с утверждением следствия 0.3. Докажем достаточность. Пусть для некоторой формы $\omega \in h^* \in H^p(X)$ интеграл $\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_h \{\omega\} = 0$ для любого класса $\{\gamma\} = h \in H_p(X)$. Это значит, что форма ω оп-

[2] Доказательство см. в книге [144].

ределяет нулевой гомоморфизм $0 : H_p(X) \to C^1$. Из утверждения единственности теоремы де Рама следует, что $\{\omega\} = h^* = 0$. □

Следствие 15.3. *Для того чтобы цикл $\gamma \in Z_p(X)$ был слабо гомологичен нулю, необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_\gamma \omega = 0$ для любой формы $\omega \in Z^p(X)$.*

Необходимость есть следствие 0.4. Докажем достаточность. Если $\gamma_0 \not\approx 0$, то $h_0 = \{\gamma_0\} \neq 0$. Так как для случая вещественных либо комплексных коэффициентов $H_p(X)$ есть группа без кручения, то для любого $h_0 \in H_p(X)$, $h_0 \neq 0$ найдется гомоморфизм $\lambda : H_p(X) \to C^1$ такой, что $\lambda(h_0) \neq 0$. По теореме 14.1 существует класс $h^* = \{\omega\} \in H^p(X)$, для которого $\lambda(h) = \int\limits_h \{\omega\}$. Тогда $\int\limits_{\gamma_0} \omega = \int\limits_{h_0} \{\omega\} \neq 0$. □

Для приложений к многомерным вычетам полезно следующее

Предложение 15.4. *Если для циклов $\gamma_j \in Z_p(X)$, $j = 1, \ldots, q$, и форм $\omega_j \in Z^p(X)$, $j = 1, \ldots, q$, выполняется условие $\det\|a_{ij}\| \neq 0$, где $a_{ij} = \int\limits_{\gamma_i} \omega_j$, и любая форма $\omega \in Z^p(X)$ представляется в виде $\omega \approx c_1\omega_1 + \ldots + c_p\omega_p$, где c_j — комплексные числа, то циклы $\{\gamma_j\}_{j=1}^q$ образуют базу p-мерных гомологий, а формы $\{\omega_j\}_{j=1}^q$ — базу p-мерных когомологий многообразия X.*

Доказательство. Из условия $\det\|a_{ij}\| \neq 0$ непосредственно следует, что циклы $\{\gamma_j\}$ гомологически, а формы $\{\omega_j\}$ когомологически независимы. Тогда из условия следует, что $\{\omega_j\}$ — база p-мерных когомологий. Покажем, что циклы $\{\gamma_j\}$ образуют базу p-мерных гомологий. Используя линейные преобразования, можно циклы $\{\gamma_j\}$ и формы $\{\omega_j\}$ выбрать так, чтобы

$$\int\limits_{\gamma_i} \omega_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, q. \tag{15.1}$$

Возьмем произвольный цикл $\gamma \in Z_p(X)$ и рассмотрим цикл $\gamma_0 = \gamma - \sum\limits_{j=1}^q k_j\gamma_j$, где $k_j = \int\limits_\gamma \omega_j$. Очевидно, $\int\limits_{\gamma_0} \omega_j = 0$,

$j = 1, \ldots, q$. А так как $\{\omega_j\}$ — база когомологий, то $\int\limits_\gamma \omega = 0$ для любой формы $\omega \in Z^p(X)$. По следствию 15.3 $\gamma_0 \approx 0$. Таким образом, $\gamma \approx \sum\limits_{j=1}^{q} k_j \gamma_j$, т. е. $\{\gamma_j\}$— база гомологий. □

Базы $\{\gamma_j\}_{j=1}^q$, $\{\omega_j\}_{j=1}^q$, удовлетворяющие условию (15.1), будем называть *двойственными по де Раму*.

С помощью следствия 0.5 получается следующая теорема, аналогичная теореме 14.2.

Теорема 15.5. *Пусть* $\{\gamma_j\}_{j=1}^q$ *— база p-мерных гомологий, а* $\{\omega_j\}_{j=1}^q$ *— двойственная ей база p-мерных когомологий, тогда для любого цикла* $\gamma \in Z_p(X)$ *и любой формы* $\omega \in Z^p(X)$

$$\int\limits_\gamma \omega = \sum_{j=1}^{q} N_j R_j, \tag{15.2}$$

где $N_j = \int\limits_\gamma \omega_j$ *— коэффициенты разложения цикла* γ *по базе* $\{\gamma_j\}$: $\gamma \approx \sum\limits_{j=1}^{q} N_j \gamma_j$, *а* $R_j = \int\limits_{\gamma_j} \omega$ *—коэффициенты разложения формы* ω *по базе* $\{\omega_j\}$: $\omega \approx \sum\limits_j R_j \omega_j$.

Нам будет полезна теорема Серра, устанавливающая для многообразий Штейна [3] изоморфизм когомологий де Рама и когомологий голоморфных форм. Заметим, что частным случаем многообразия Штейна является область голоморфности в C^n.

Теорема 15.6 (Серр). *Если* X *— многообразие Штейна, то для любой замкнутой формы* $\omega \in Z^p(X)$ *существует когомологичная ей голоморфная форма* $\omega' \in Z^p(X)$.

Так как на комплексном аналитическом многообразии X комплексной размерности n любая голоморфная форма

[3] Определение и свойства многообразия Штейна, или голоморфно полного комплексного аналитического многообразия, см. в работах [189, 201].

степени $p > n$ тождественно равна нулю, то из теорем 15.1 и 15.6 вытекает

Следствие 15.7. *Если X — многообразие Штейна комплексной размерности n, то $H^p(X) \simeq H_p(X) \simeq 0$ для $p > n$.*

Пример. Покажем, что в области $D = C^n \setminus \{z : z_1 \ldots z_n = 0\}$ двойственные базы n-мерных гомологий и когомологий образуют цикл $\gamma_0 = \{z : |z_1| = \ldots = |z_n| = 1\}$ и форма $\omega_0 = (2\pi i)^{-n}\frac{dz}{z}$. Действительно, так как D—область голоморфности, то любая форма $\omega \in Z^n(D)$ когомологична голоморфной форме степени n, которая имеет вид $f(z)dz$, где $f \in A(D)$. Функция $f(z)$ разлагается в области D в кратный ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = -\infty}^{\infty} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}.$$

Если $\alpha \neq -\mathrm{I} = (-1, \ldots, -1)$, например, если $\alpha_j \neq -1$, то $c_\alpha z^\alpha dz = c_\alpha (\alpha_j + 1)^{-1} d\left(z_1^{\alpha_1} \ldots z_j^{\alpha_j+1} \ldots z_n^{\alpha_n} dz_{[j]}\right) \approx 0$. Таким образом, $\omega \approx f(z)dz \approx c_{-\mathrm{I}} dz/z$. Очевидно, $\int\limits_{\gamma_0} \omega_0 = 1$. Остается применить предложение 15.4.

§ 16. ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ ЛЕРЕ

1°. Пусть X — комплексное аналитическое многообразие комплексной размерности n; $S_1, \ldots, S_m$ — его комплексные аналитические подмногообразия размерности $n - 1$ (коразмерности 1), пересекающиеся в общих точках *трансверсально*, или, по-другому, *«находящиеся в общем положении»*. Это значит, что в окрестности произвольной точки $a \in S_{i_1} \cap \ldots \cap S_{i_k}$ для голоморфных функций $S_j(z, a)$, задающих в U_a подмногообразия $S_j : S_j \cap U_a = \{z : S_j(z, a) = 0\}$, векторы $\operatorname{grad} S_j(z, a) = (\partial S_j/\partial z_1, \ldots, \partial S_j/\partial z_n)$, $j = i_1, \ldots, i_k$ линейно независимы. Здесь $z = (z_1, \ldots, z_n)$ — локальные координаты в U_a. Рассматриваются интегралы вида

$$\int\limits_\gamma \varphi, \tag{16.1}$$

где $\gamma \in Z_p(X \setminus S_1 \cup \ldots \cup S_m)$, $\varphi \in Z^p(X \setminus S_1 \cup \ldots \cup S_m)$.

Основными в этом параграфе будут понятия кограницы Лере, формы-вычета, класса-вычета, обобщающие понятие вычета голоморфной функции одной переменной, а также теоремы о вычете Лере, позволяющие в случае, когда γ является когранечным циклом, сводить интеграл (16.1) к интегралу меньшей кратности от формы-вычета по циклу, лежащему на особом подмногообразии.

2°. **Точная последовательность и кограница Лере.** Рассмотрим сначала случай $m = 1$. Обозначим $S_1 = S$. Так как S имеет вещественную коразмерность 2, то для S можно построить окрестность V с гладкой границей ∂V так, чтобы V являлась *локально-тривиальным расслоением* с базой S и слоем V_a, $a \in S$, гомеоморфным кругу, соответственно ∂V — расслоением с базой S и слоем $\delta_a = \partial V_a$, гомеоморфным окружности. Последнее означает, что $V = \bigcup_{a \in S} V_a$ и соответственно $\partial V = \bigcup_{a \in S} \delta_a$, причем $V_a \cap V_b = \varnothing$ для $a \neq b$, а для любой точки a существует окрестность U_a такая, что $V \cap U_a$ гомеоморфно $(S \cap U_a) \times V_a$, соответственно $\partial V \cap U_a$ гомеоморфно $(S \cap U_a) \times \delta_a$. Чтобы построить такое расслоение, выбираем на X риманову метрику и за V_a принимаем объединение отрезков геодезических, исходящих из точки a ортогонально S, длины $\rho(a)$, где $\rho(a)$ достаточно мало, функцию $\rho(a)$ предполагаем класса $C^{(1)}$.

Определим отображения

$$\mu: \overline{V} \to S, \quad \nu: X \setminus S \to X \setminus V$$

следующим образом. Если $z \in V_a$, то $\mu(z) = a$. Если $z \in X \setminus V$, то $\nu(z) = z$, а если $z \in V \setminus S$, то $\nu(z)$ есть точка пересечения с ∂V геодезической, проходящей через z ортогонально S. Очевидно, μ и ν — деформационные ретракции. По следствию 0.20

$$\nu_*: H_p(X \setminus S) \to H_p(X \setminus V)$$

— изоморфизм. Определим гомоморфизм

$$\tilde{\mu}: C_p(S) \to C_{p+2}(X, X \setminus V) \tag{16.2}$$

следующим образом. Пусть σ — p-мерный симплекс в S, тогда $\mu^{-1}(\sigma)$ есть $(p+2)$-мерная клетка в $\overline{V}$. Если предполагать симплекс σ достаточно малым, то $\mu^{-1}(\sigma)$ гомеоморфно $V_a \times \sigma$. Ориентация клетки $\mu^{-1}(\sigma)$ естественным образом определяется ориентацией V_a и σ. Возьмем $\tilde{\mu}(\sigma) = \{\mu^{-1}(\sigma)\} \in C_{p+2}(X, X \setminus V)$. Очевидно, $\partial \circ \tilde{\mu} = \tilde{\mu} \circ \partial$. Действительно, $\partial \mu^{-1}(\sigma) = \partial(V_a \times \sigma) = \partial V_a \times \sigma + V_a \times \partial\sigma \in \tilde{\mu}(\partial\sigma)$, так как $\partial V_a \times \sigma \in C_{p+1}(X \setminus V)$. Таким образом, (16.2) индуцирует гомоморфизм

$$\mu_* : H_p(S) \to H_{p+2}(X, X \setminus V). \tag{16.3}$$

Этот гомоморфизм является изоморфизмом, так как существует обратный ему гомоморфизм, индуцированный пересечением цепей из $C_{p+2}(X)$ с подмногообразием S (предполагается, что цепи пересекаются с S трансверсально). При этом пересечение $(p+2)$-мерного цикла с S является циклом размерности p, пересечение границы цепи есть граница пересечения этой цепи. Согласно теореме 0.21, имеет место точная последовательность

$$\xrightarrow{i_*} H_{p+2}(X) \xrightarrow{j_*} H_{p+2}(X, X \setminus V) \xrightarrow{\partial_*} H_{p+1}(X \setminus V) \xrightarrow{i_*}$$
$$\xrightarrow{i_*} H_{p+1}(X) \to \ldots \tag{16.4}$$

Если в (16.4) заменить группы $H_{p+1}(X \setminus V)$ и $H_{p+2}(X, X \setminus V)$ изоморфными им группами $H_{p+1}(X - S)$ и $H_p(S)$, то получается

Теорема 16.1 (Лере). *Последовательность гомоморфизмов*

$$\to H_{p+2}(X) \xrightarrow{\overline{\omega}} H_p(S) \xrightarrow{\delta} H_{p+1}(X \setminus S) \xrightarrow{i} H_{p+1}(X) \to \ldots, \tag{16.5}$$

где $i = i_* \circ \nu_*$, $\overline{\omega} = \mu_*^{-1} \circ j_*$, $\delta = \nu_*^{-1} \circ \partial_* \circ \mu_*$, *является точной*.

Последовательность (16.5) называется *гомологической точной последовательностью Лере*. Гомоморфизмы i, $\overline{\omega}$, δ в ней можно интерпретировать как гомоморфизмы, индуцированные следующим образом: i — вложением $X\setminus S\subset\subset X$; $\overline{\omega}$ — пересечением цепей из X с подмногообразием S; δ — заменой каждого симплекса $\sigma\in C_p(S)$ клеткой $\delta\sigma=\partial\mu(\sigma)=\bigcup\limits_{z\in\sigma}\delta z$. Наибольший интерес представляет гомоморфизм δ, называемый *кограницей Лере*. Цикл $\gamma\in Z_{p+1}(X\setminus S)$ называется кограничным циклом, если $\{\gamma\}=\delta h\in\delta H_p(S)$, т. е. если он является границей цепи в X, трансверсальной S, пересечение которой с S есть цикл $\gamma_0\in h\in H_p(S)$.

3°. **Форма-вычет. Формула вычета Лере.** Говорят, что форма $\varphi\in\Omega^p(X\setminus S_1\cup\ldots\cup S_m)$ имеет на $S_1,\ldots,S_m$ полюсы порядков $r_1,\ldots,r_m$, если для любой точки $a\in S_{i_1}\cap\ldots\cap S_{i_k}$, $\{i_1,\ldots,i_k\}\subset\{1,\ldots,m\}$, $a\notin S_j$, $j\neq i_1,\ldots,i_k$, форма $\varphi(z)\,S_{i_1}^{r_1}(z,a)\ldots S_{i_k}^{r_k}(z,a)$ продолжается в некоторую окрестность U_a точки a как форма класса $C^{(\infty)}$. Такая форма называется *полумероморфной* в $X\setminus S_1\cup\ldots\cup S_m$. Снова полагаем $m=1$, $S_1=S$.

Теорема 16.2 (существование формы-вычета, Лере). *Пусть $\varphi(z)$ — замкнутая регулярная форма на $X\setminus S$, имеющая на S полярную особенность 1-го порядка. Тогда в некоторой окрестности U_a произвольной точки $a\in S$ существуют регулярные формы $\psi(z,a)$, $\theta(z,a)$ такие, что в U_a*

$$\varphi(z)=\frac{ds(z,a)}{s(z,a)}\wedge\psi(z,a)+\theta(z,a),\qquad(16.6)$$

где $s(z,a)\in A(U_a)$, $\operatorname{grad}s(z,a)\neq 0$ и $S\cap U_a=\{z:s(z,a)=0\}$. При этом форма $\psi(z,a)|_s$ замкнута и однозначно определяется формой φ. Если форма φ голоморфна в $X\setminus S$, то и форма $\psi(z,a)|_s$ голоморфна в $U_a\cap S$.

Замкнутая форма на S, определяемая в окрестности каждой точки $a\in S$ сужением $\psi(z,a)|_s$, называется *формой-вычетом формы* φ и обозначается $\operatorname{res}[\varphi]$.

Лемма 16.3 (о делении форм). *Форму φ, регулярную на X можно представить в некоторой окрестности U_a точки $a\in S$ в виде*

$$\varphi(z)=ds(z,a)\wedge\psi(z,a),$$

где $\psi(z, a)$ — *форма, регулярная в* U_a, *в том и только том случае, если*

$$ds(z, a) \wedge \varphi(z) = 0$$

в U_a. *При этом* $\psi(z, a)|_s$ *зависит только от* φ *и* $s(z, a)$. *Если форма* φ *голоморфна, то и форму* $\psi(z, a)$ можно выбрать *голоморфной.*

Доказательство. Выберем локальную систему координат $z_1, \ldots, z_n$ в некоторой окрестности U_a так, чтобы $s(z, a) = z_1$. Тогда форму φ в U_a можно представить в виде $\varphi(z) = dz_1 \wedge \psi(z, a) + \theta(z, a)$, где ψ, θ — формы, регулярные в U_a.

При этом можно предполагать, что формы ψ, θ не содержат dz_1, $dz_1 \wedge \varphi = dz_1 \wedge \theta$. Значит, $dz_1 \wedge \varphi = 0$ тогда и только тогда, когда $\theta = 0$, т. е. $\varphi = dz_1 \wedge \psi$. Если $\varphi = 0$, то по предыдущему $\psi = dz_1 \wedge \psi_1$. Тогда $\psi|_{z_1=0} = 0$, т. е. имеет место единственность формы $\psi|_S$. □

Доказательство теоремы 16.2. Так как $d\varphi = 0$ и форма $s(z, a)\varphi(z)$ регулярна в U_a, то форма

$$d(s\varphi) = ds \wedge \varphi \tag{16.7}$$

регулярна в U_a. Умножение на ds обращает эту форму в нуль. Согласно лемме 16.3, найдется форма $\theta(z, a)$, регулярная в U_a такая, что $ds \wedge \varphi = ds \wedge \theta$. Отсюда $ds \wedge (s\varphi - s\theta) = 0$. А так как форма $s\varphi - s\theta$ регулярна в U_a, по лемме 16.3 найдется форма $\psi(z, a)$, регулярная в U_a, для которой выполняется равенство $s\varphi - s\theta = ds \wedge \psi$, или (16.6).

Если форма φ голоморфна, то форма (16.7), будучи голоморфной в $U_a \setminus S$ и регулярной в U_a, голоморфно продолжается в U_a. Тогда, согласно лемме 16.3, формы θ и ψ можно выбрать голоморфными.

Форма $\psi(z, a)$ однозначно определяется формой φ и функцией $s(z, a)$. Действительно, пусть $\varphi = 0$. Тогда $\frac{ds}{s} \wedge \psi + \theta = 0$, , или $ds \wedge \psi + s\theta = 0$. Отсюда $ds \wedge \theta = 0$ и $\theta = ds \wedge \omega$, где ω — форма, регулярная в U_a. Следовательно, $ds \wedge (\psi + s\omega) = 0$ и $\psi + s\omega = ds \wedge \omega_1$, где форма ω_1 регулярна в U_a. Таким образом, сужение $\psi|_s = 0$.

Пусть $s_1(z, a) = 0$ — другое уравнение $S \cap U_a$. Тогда $\varphi = \frac{ds_1}{s_1} \wedge \psi + \theta_1$, где форма $\theta_1 = \theta + d \ln\left(\frac{s}{s_1}\right) \wedge \psi$ регулярна в U_a, так как $\frac{s}{s_1} \in A(U_a)$ и $\frac{s}{s_1} \neq 0$. Таким образом, $\psi|_S$ не зависит от выбора $s(z, a)$.

Докажем, наконец, замкнутость формы $\psi|_S$. Возьмем внешний дифференциал в равенстве (16.6), получим $0 = -\frac{ds}{s} \wedge d\psi + d\theta$. Отсюда в силу доказанной единственности $d(\psi|_S) = d\psi|_S = 0$.□

Пример 1. Пусть $X = C^n$, $S = \{z : z \in C^n : s(z) = 0\}$, $\varphi(z) = \frac{f(z)}{s(z)} dz$, где $f, s \in A(C^n)$, $\operatorname{grad} s|_S \neq 0$. Тогда $\operatorname{res}[\varphi] = (-1)^{j-1}\left(f/s'_{z_j}\right)\Big|_S dz_{[j]}$ в точках, где $s'_{z_j} \neq 0$.

Пример 2. Пусть X — аналитическое многообразие комплексной размерности 1, φ — мероморфная форма 1-й степени, имеющая лишь полюсы 1-го порядка, $S = \{a_1, \ldots, a_N\}$ — множество ее полюсов. Тогда $\operatorname{res}_a[\varphi] = \{\operatorname{res}_a \varphi, a \in S\}$ есть множество чисел, являющихся обычными вычетами формы $\varphi : \operatorname{res}_a \varphi = \operatorname{res}_a f(z)$, где $\varphi = f(z)dz$ — представление формы φ через локальный параметр z в окрестности точки a.

Для замкнутой формы, имеющей полюс 1-го порядка на S, и кограничного цикла имеет место следующая *формула вычета Лере*.

Теорема 16.4 (Лере). *Пусть форма* $\varphi \in Z^{p+1}(X \setminus S)$ *имеет полюс 1-го порядка на* S, $\gamma \in Z_p(S)$. *Тогда*

$$\int_{\delta\gamma} \varphi = 2\pi i \int_{\gamma} \operatorname{res}[\varphi]. \qquad (16.8)$$

Доказательство. Рассмотрим семейство окрестностей V_ε подмногообразия S, непрерывно зависящее от ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, такое, что $V_1 = V$, $V_\varepsilon \to S$ при $\varepsilon \to 0$. Для этого возьмем $V_\varepsilon = \bigcup_{a \in S} V_{\varepsilon,a}$, где $V_{\varepsilon,a}$ — объединение отрезков геодезических длины $\varepsilon\rho(a)$, исходящих из точки a и ортогональных S. Каждому ε соответствует кограничный оператор δ_ε, ставящий в соответствие каждой точке $a \in S$ замкнутую кривую $\delta_\varepsilon a = \partial V_{\varepsilon, a}$, гомеоморфную окружности. Так как $\delta_\varepsilon a$ получается из δ_a непрерывной деформацией в $V_a \subset X \setminus S$, то $\delta\gamma \sim \delta_\varepsilon \gamma$ в $X \setminus S$ для любого цикла $\gamma \in Z_p(S)$. Следовательно,

$$\int_{\delta\gamma} \varphi = \int_{\delta_\varepsilon \gamma} \varphi.$$

Остается показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\delta_\varepsilon \gamma} \varphi = 2\pi i \int_\gamma \operatorname{res}[\varphi].$$

Это равенство достаточно доказать для малых симплексов, составляющих γ. Можно предполагать, что симплекс σ лежит в координатной окрестности U_a. Согласно теореме 16.2, форму φ в U_a можно представить в виде (16.6). Выберем в U_a локальную систему координат $z_1, \ldots, z_n$ так, чтобы $z_1 = s(z, a)$ и длина вектора dz выражалась формулой $|dz| = (|dz_1|^2 + \ldots + |dz_n|^2)^{1/2}$. Тогда $\delta_\varepsilon \sigma$ можно с точностью до малых 2-го порядка представить в виде $\delta_\varepsilon \sigma = \{z : {}'z = (z_2, \ldots, z_n) \in \sigma,\ |z_1| = \varepsilon\rho('z)\}$. Так как формы ψ и θ непрерывны в U_a, mes $|\delta_\varepsilon \sigma| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, mes $\delta_\varepsilon \sigma / |z_1|$ ограничено сверху, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\delta_\varepsilon \sigma} \varphi(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\delta_\varepsilon \sigma} \left[\frac{dz_1}{z_1} \wedge \psi(z, a) + \theta(z, a) \right] =$$

$$= \int_{\delta_\varepsilon \sigma} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \psi(\mu_\varepsilon(z), a) = \oint \frac{dz_1}{z_1} \int_\sigma \psi(z, a)|_S = 2\pi i \int_\sigma \operatorname{res}[\varphi],$$

где $\mu_\varepsilon(z)$ — проекция точки $z \in \delta_\varepsilon \sigma$ на $S \cap U_a = \{z : z_1 = 0\}$. □

4°. **Класс-вычет.** Для произвольных замкнутых регулярных форм в $X \setminus S$ справедлива

Теорема 16.5 (существование класса-вычета, Лере). *Для всякой формы $\varphi \in Z^{p+1}(X \setminus S)$, $p = 1, 2, \ldots$, существуют когомологичные ей в $X \setminus S$ формы, имеющие на S полюс 1-го порядка. Формы-вычеты таких форм принадлежат одному и тому же классу когомологий на S.*

Этот класс когомологий называется *классом-вычетом формы* φ и обозначается Res $[\varphi]$. Так как оператор res линеен, Res порождает гомоморфизм

$$\mathrm{Res}: H^{p+1}(X \setminus S) \to H^p(S). \qquad (16.9)$$

З а м е ч а н и е. В теореме 16.5 нельзя ограничиться рассмотрением голоморфных форм. Для голоморфной формы φ класс-вычет Res $[\varphi]$ может не содержать голоморфных форм (контрпример см. в [113, с. 103]). Однако в случае многообразий Штейна теорема 16.7 справедлива в классе голоморфных форм. Это следует из теоремы 15.6 Серра.

О конструктивном нахождении класса-вычета для полумероморфных и рациональных форм см. ниже в § 17.

Доказательству теоремы 16.5 предпошлем некоторые леммы.

Л е м м а 16.6. *Для всякой формы* $\chi(z) \in Z^p(S)$ *существует форма* $\omega(z) \in \Omega^{p+1}(X \setminus S)$ *такая, что:* 1) $\omega(z)|_{X \setminus V} = 0$; 2) *для любой точки* $a \in S$ *существует окрестность* U_a, *в которой*

$$\omega(z) = \frac{ds(z, a)}{s(z, a)} \wedge \psi(z, a) + \theta(z, a), \qquad (16.10)$$

где ψ, θ — *формы, регулярные в* U_a; $\psi(z, a)|_S = \chi(z)$, $d\psi(z, a) = 0$ *вблизи* S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Форма $\chi(\mu(z))$, где $\mu: \overline{V} \to S$ — ретракция, определенная в п. 2°, замкнута в $\overline{V}$. Возьмем функцию $f: X \to R^1$ класса $C^{(\infty)}$, равную нулю в $X \setminus V$ и единице в окрестности S. Согласно следствию, из теоремы о «разбиении единицы» такая функция существует. Положим $\psi(z) = f(z)\chi(\mu(z))$. Очевидно, $d\psi = 0$ в окрестности S, $\psi|_S = \chi$. Возьмем «разбиение единицы» $\{\varphi_a\}_{a \in X}$, подчиненное покрытию $\{U_a\}_{a \in X}$ многообразия X координатными окрестностями, в каждой из которых существует локальное уравнение: $S \cap U_a = \{z : s(z, a) = 0\}$. Тогда форма

$$\omega(z) = \sum_{a \in X} \varphi_a(z) \frac{ds(z, a)}{s(z, a)} \wedge \psi(z)$$

удовлетворяет условиям леммы. При этом $\psi(z, a) = \psi(z)$, а $\theta(z, a) = \sum\limits_{b \neq a} \varphi_b(z)\, d \log \frac{s(z, b)}{s(z, a)} \wedge \psi(z)$. □

Согласно теоремам 0.22 и 15.1, точной последовательности (16.5) соответствует точная последовательность сопряженных гомоморфизмов

$$\ldots \to H^{p+1}(X) \xrightarrow{i^*} H^{p+1}(X \setminus S) \xrightarrow{\delta^*} H^p(S) \xrightarrow{\overline{\omega}^*} H^{p+2}(X) \to \ldots \tag{16.11}$$

Лемма 16.7. *Для форм χ и ω, рассмотренных в лемме 16.6, справедливо равенство*

$$\overline{\omega}^* \{\chi\} = -\frac{1}{2\pi i}\{d\omega\}, \tag{16.12}$$

где $\{\chi\}$, $\{d\omega\}$ — классы когомологий форм χ, $d\omega$.

Доказательство. Возьмем произвольный класс гомологий $\{\gamma\} \in H_{p+2}(X)$ и рассмотрим интеграл

$$J = \int\limits_{\gamma} d\omega = \int\limits_{\{\gamma\}} \{d\omega\}. \tag{16.13}$$

Так как $\omega = 0$ вне V, то интеграл (16.3) зависит лишь от класса $h \in H_{p+2}(X, X \setminus V)$, который определяется циклом γ. А так как (16.2) — изоморфизм, то найдется цикл $\sigma \in Z_p(S)$, для которого $\widetilde{\mu}\sigma \in h$. Тогда $J = \int\limits_{\gamma} d\omega = \int\limits_{h} d\omega = \int\limits_{\widetilde{\mu}\sigma} d\omega$. Как и при доказательство теоремы 16.4, рассмотрим окрестность V_ε подмногообразия S и операторы $\widetilde{\mu}_\varepsilon$, δ_ε. Поскольку форма $d\omega$ регулярна в X, по формуле Стокса

$$J = \int\limits_{\widetilde{\mu}\sigma} d\omega = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\widetilde{\mu}\sigma - \widetilde{\mu}_\varepsilon\sigma} d\omega = \int\limits_{\delta\sigma} \omega - \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\delta_\varepsilon\sigma} \omega.$$

Так как $\omega|_{X-V} = 0$, то $\int\limits_{\delta\sigma} \omega = 0$. Учитывая (16.10) точно так же, как и в доказательстве теоремы 16.4, получим

$$J = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\delta_\varepsilon \sigma} \omega = -2\pi i \int_{\sigma} \chi.$$

По построению $\{\sigma\} = \overline{\omega}\{\gamma\}$. Таким образом,

$$\int_{\{\gamma\}} \{d\omega\} = -2\pi i \int_{\overline{\omega}\{\gamma\}} \{\chi\} = -2\pi i \int_{\{\gamma\}} \overline{\omega}^* \{\chi\}.$$

По следствию 15.2 имеет место равенство (16.12). □

Доказательство теоремы 16.5. Возьмем произвольную форму $\varphi \in Z^{p+1}(X \setminus S)$. Она определяет гомоморфизм $\varphi^* : H_{p+1}(X \setminus S) \to C^1$, задаваемый равенством $\varphi^*(h) = \int_h \{\varphi\} = \int_\gamma \varphi$ для каждого $h = \{\gamma\} \in H_{p+1}(X)$. Тогда гомоморфизм $\delta^*\varphi^* : H_p(S) \to C^1$ определяется равенством

$$\delta^*\varphi^*(h_1) = \int_{\delta h_1} \{\varphi\} = \int_{\delta \gamma_1} \varphi,$$

где $h_1 = \{\gamma_1\} \in H_p(S)$. В силу теоремы де Рама 15.1 существует класс когомологий $\{\chi\} = \delta^*\{\varphi\} \in H^p(S)$, для которого $\delta^*\varphi^*(h_1) = \int_{h_1} \delta^*\{\varphi\} = \int_{\gamma_1} \chi$. Построим для формы χ форму ω согласно лемме 16.6. Так как $\{\chi\} = \delta^*\{\varphi\}$ то в силу леммы 16.7 и точности последовательности (16.11) класс $-\frac{1}{2\pi i}\{d\omega\} = \overline{\omega}^*\{\chi\} = \overline{\omega}^*\delta^*\{\varphi\} = 0$, т. е. форма $d\omega$ когомологична нулю в X. Следовательно, существует форма $\omega_1 \in \Omega^{p+1}(X)$ такая, что $d\omega = d\omega_1$. Тогда форма $\varphi_1 = \omega - \omega_1$ замкнута в $X \setminus S$ и имеет полюс 1-го порядка на S, причем $\operatorname{res} \varphi_1 = \chi$. Из определения класса $\{\chi\}$ и теоремы 16.6 следует, что $\int_{\delta\gamma_1} \varphi = \int_{\delta\gamma_1} \varphi_1$ для любого цикла $\gamma_1 \in Z_p(S)$, или $\int_{\delta\{\gamma_1\}} (\varphi - \varphi_1) = \int_{\{\gamma_1\}} \delta^*\{\varphi - \varphi_1\} = 0$. Отсюда по следствию 15.2 $\delta^*\{\varphi - \varphi_1\} = 0$. В силу точности последовательности (16.11) $\{\varphi-\varphi_1\}\in i^*H^{p+1}(X)$, т. е. существует форма $\varphi_2\in Z^{p+1}(X)$ такая, что $\varphi-\varphi_1\sim\varphi_2$ в $X\setminus S$. Значит, форма φ когомологична $X\setminus S$ замкнутой форме $\varphi_3=\varphi_1+\varphi_2$, имеющей полюс 1-го порядка на S. Причем $\operatorname{res}[\varphi_3]=\chi$. Пусть φ_4 — другая форма, когомологичная φ и имеющая полюс 1-го порядка на S. Тогда

$$\int\limits_{\delta\gamma_1}\varphi=\int\limits_{\delta\gamma_1}\varphi_3=\int\limits_{\delta\gamma_1}\varphi_4=2\pi i\int\limits_{\gamma_1}\operatorname{res}[\varphi_3]=2\pi i\int\limits_{\gamma_1}\operatorname{res}[\varphi_4]$$

для любого цикла $\gamma_1\in Z_p(S)$. Отсюда по следствию 15.2 $\operatorname{res}[\varphi_3]\sim\operatorname{res}[\varphi_4]$. □

Из теорем 16.4 и 16.5, а также из определения класса-вычета вытекает

Теорема 16.8. *Пусть* $\varphi\in Z^{p+1}(X\setminus S)$, $h\in H_p(S)$. *Тогда*

$$\int\limits_{\delta h}\{\varphi\}=2\pi i\int\limits_{h}\operatorname{Res}[\varphi]. \tag{16.14}$$

5°. Сложные вычеты. Перейдем теперь к случаю $m>1$. Многообразие X и его подмногообразия $S_1,\ldots$ $\ldots,\ S_m$ порождают следующие последовательные пары комплексных аналитических многообразий и их подмногообразий поразмерности 1:

$$S_1\cap\ldots\cap S_{m-1}\supset S_1\cap\ldots\cap S_m;$$
$$(S_1\cap\ldots\cap S_{m-2})\setminus S_m\supset(S_1\cap\ldots\cap S_{m-1})\setminus S_m;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_1\setminus(S_3\cup\ldots\cup S_m)\supset(S_1\cap S_2)\setminus(S_3\cup\ldots\cup S_m);$$
$$X\setminus(S_2\cup\ldots\cup S_m)\supset S_1\setminus(S_2\cup\ldots\cup S_m).$$

Применяя к этим парам результаты разд. 2°, а также учитывая, что

$$[(S_1\cap\ldots\cap S_{j-1})\setminus(S_{j+1}\cup\ldots\cup S_m)]\setminus[(S_1\cap\ldots$$
$$\ldots\cap S_j)\setminus(S_{j+1}\cup\ldots\cup S_m)]=$$
$$=(S_1\cap\ldots\cap S_{j-1})\setminus(S_j\cup\ldots\cup S_m),$$

получим последовательность гомоморфизмов-кограниц Лере:

$$H_p(S_1 \cap \ldots \cap S_m) \xrightarrow{\delta_m} H_{p+1}(S_1 \cap \ldots \cap S_{m-1} \setminus S_m) \xrightarrow{\delta_{m-1}} \ldots$$

$$\ldots H_{p+j}((S_1 \cap \ldots \cap S_j) \setminus (S_{j+1} \cup \ldots \cup S_m)) \rightarrow \ldots$$

$$\ldots \xrightarrow{\delta_2} H_{p+m-1}(S_1 \setminus (S_2 \cup \ldots \cup S_m)) \xrightarrow{\delta_1}$$

$$\xrightarrow{\delta_1} H_{p+m}(X \setminus S_1 \cup \ldots \cup S_m),$$

композиция которых определит *сложную кограницу Лере*:

$$H_p(S_1 \cap \ldots \cap S_m) \xrightarrow{\delta^m} H_{p+m}(X \setminus S_1 \cup \ldots \cup S_m).$$

Поскольку кограничный оператор δ определен также для симплексов и цепей, то и δ^m распространяется на симплексы и цепи. Сложная кограница Лере δ^m каждому симплексу ставит в соответствие клетку $\delta^m\sigma$, являющуюся расслоением с базой σ и слоем $\delta^m a = \delta_m a \times \ldots \times \delta_1 a$, гомеоморфным топологическому произведению m окружностей, и взятую с естественной ориентацией. Если подмногообразия $S_1, \ldots, S_m$ взять в другом порядке $S_{j_1}, \ldots, S_{j_m}$, то клетка $\delta^m\sigma$ сменит ориентацию на -1 в степени равной четности перестановки $(j_1, \ldots, j_m)$.

Точно так же определим *сложный класс-вычет*

$$\mathrm{Res}^m : H^{p+m}(X \setminus S_1 \cup \ldots \cup S_m) \rightarrow H^p(S_1 \cap \ldots \cap S_m)$$

как композицию гомоморфизмов

$$H^{p+m}(X \setminus S_1 \cup \ldots \cup S_m) \xrightarrow{\mathrm{Res}_1} H^{p+m-1}(S_1 \setminus S_2 \cup \ldots$$

$$\ldots \cup S_m) \xrightarrow{\mathrm{Res}_2} \ldots \xrightarrow{\mathrm{Res}_{m-1}} H^{p+1}(S_1 \cap \ldots$$

$$\ldots \cap S_{m-1} \setminus S_m) \xrightarrow{\mathrm{Res}_m} H^p(S_1 \cap \ldots \cap S_m). \qquad (16.15)$$

В случае, когда форма $\varphi \in Z^{p+m}(X \setminus S_1 \cup \ldots \cup S_m)$ имеет на $S_1, \ldots, S_m$ полюсы 1-го порядка, с помощью повторного применения теоремы 16.2 можно определить форму

$$\mathrm{res}^m[\varphi] = \mathrm{res}_m \circ \ldots \circ \mathrm{res}_1[\varphi] \in \mathrm{Res}^m[\varphi],$$

называемую *сложной формой-вычетом*. Возможность повторного применения теоремы 16.2 обеспечивает следующая

Лемма 16.9. *Если форма* φ *замкнута на* $X \setminus S_1 \cup \ldots \cup S_m$ *и имеет на* $S_1, \ldots, S_m$ *полюсы 1-го порядка, то форма* $\operatorname{res}_1[\varphi]$ *замкнута на* $S_1 \setminus (S_2 \cup \ldots \cup S_m)$ *и имеет на* $S_1 \cap S_2, \ldots, S_1 \cap S_m$ *полюсы 1-го порядка.*

Доказательство. Замкнутость формы $\operatorname{res}_1[\varphi]$ следует из теоремы 16.2. Пусть точка $a \in S_1 \cap S_{i_1} \cap \ldots \cap S_{i_k}$, $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{2, \ldots, m\}$, $a \notin S_j$ для $j \neq i_1, \ldots, i_k, 1$. Выберем локальные координаты $z_1, \ldots, z_n$ в некоторой окрестности U_a точки a так, чтобы $S_j \cap U_a = \{z_j = 0\}$, $j = i_1, \ldots, i_k$. В окрестности произвольной точки $b \in S_1 \setminus (S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k})$ форму φ согласно теореме 16.2 можно представить в виде

$$\varphi = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \psi + \theta,$$

где ψ и θ — формы регулярные в $U_b \setminus (S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k})$. Формы ψ и θ можно выбрать не зависящими от dz_1. Тогда любой коэффициент $c_1(z)$ формы ψ имеет вид $z_1 \cdot c(z)$, где $c(z)$ — коэффициент формы φ. Соответствующий коэффициент формы $\operatorname{res}_1[\varphi] = \psi|_{S_1 \setminus S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k}}$ есть сужение $c_1(z) = z_1 \cdot c(z)$ на $S_1 \setminus S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k}$ и не зависит от точки b. По предположению форма $\varphi z_1 z_{i_1} \ldots z_{i_k}$, а следовательно ее коэффициент $z_1 z_{i_1} \ldots z_{i_k} c(z) = z_{i_1} \ldots z_{i_k} c_1(z)$ регулярны в U_a. Но тогда сужение $z_{i_1} \ldots z_{i_k} c_1(z)|_{S_1}$, а значит, и форма $z_{i_1} \ldots z_{i_k} \operatorname{res}_1[\varphi]$ регулярны в точке a. $\square$

Заметим, что если $\varphi = \dfrac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega}{s_1 \ldots s_m}$, то $\operatorname{res}^m[\varphi] = \omega|_{S_1 \cap \ldots \cap S_m}$. Очевидно, $\operatorname{res}_{i_1} \circ \ldots \circ \operatorname{res}_{i_m}$ отличается от $\operatorname{res}_1 \circ \ldots \circ \operatorname{res}_m$ лишь множителем -1 в степени, равной четности перестановки $(i_1, \ldots, i_m)$.

Применяя последовательно m раз формулы вычета (16.8) и (16.14), получим *формулу сложного вычета Лере.*

Теорема 16.10. *Если форма* $\varphi \in Z^{p+m}(X \setminus S_1 \cup \ldots \cup S_m)$ *имеет полюсы 1-го порядка на* $S_1, \ldots, S_m$, *то* *для любого цикла* $\gamma \in Z_p(S_1 \cap \ldots \cap S_m)$ *имеет место формула*

$$\int_{\delta^m(\gamma)} \varphi = (2\pi i)^m \int_\gamma \operatorname{res}^m [\varphi]. \tag{16.16}$$

Для произвольной формы $\varphi \in Z^{p+m}(X \setminus S_1 \cup \ldots \cup S_m)$ имеет место формула

$$\int_{\delta^m(\gamma)} \varphi = (2\pi i)^m \int_\gamma \operatorname{Res}^m [\varphi]. \tag{16.17}$$

6°. Формулы вычета Лере (16.8), (16.14), (16.16), (16.17) позволяют понизить кратность интеграла (16.1) в случае, когда цикл γ является кограницей Лере. Поэтому естественно возникает вопрос, при каких условиях цикл $\gamma \in Z^{p+m}$ $(X \setminus S_1 \cup \ldots \cup S_m)$ является кограничным, т. е. $\{\gamma\} \in \delta^m H^p(S_1 \cap \ldots \cap S_m)$.

В случае $m = 1$ простой критерий кограницы Лере непосредственно вытекает из точной последовательности Лере.

Предложение 16.11. *Для того чтобы цикл* $\gamma \in Z_{p+1}(X \setminus S)$ *принадлежал классу кограниц* $\{\gamma\} \in \delta H_p(S)$, *необходимо и достаточно, чтобы он был слабо гомологичен нулю в* X.

Действительно, наше утверждение равносильно равенству $\delta H_p(S) = \ker \{i : H_{p+1}(X \setminus S) \to H_{p+1}(X)\}$, которое следует из точности (16.5). □

Следствие 16.12. *Если* $H_{p+1}(X) \simeq 0$, *то любой цикл* $\gamma \in Z_{p+1}(X \setminus S)$ *является кограницей Лере. Если, кроме того,* $H_{p+2}(X) \approx 0$, *то* $\delta : H_p(S) \to H_{p+1}(X \setminus S)$) *— изоморфизм.*

Последнее, например, имеет место для $X = C^n$ в любой размерности p. Если $X = CP^n$ — комплексное проективное пространство, то справедливо

Предложение 16.13 (Гриффитс). *Если* S *— подмногообразие* (алгебраическое) *в* CP^n, *то гомоморфизм*

$$\delta : H_{n-1}(S) \to H_n(CP^n \setminus S)$$

сюръективен для любого n *и инъективен для* n *четного. Для* n *нечетного ядро гомоморфизма* δ *порождено сечением* $CP^m \cap S$, *где* CP^m *— подпространство пространства* CP^n *размерности* $m = \dfrac{n+1}{2}$.

В случае $m > 1$ имеет место

Предложение 16.14. *Для того чтобы цикл* $\gamma \in Z_{p+m}(X \setminus S_1 \cup \ldots \cup S_m)$ *являлся сложной кограницей Лере, т. е.*

$\{\gamma\} \in \delta^m H_p(S_1 \cap \ldots \cap S_m)$, *необходимо, чтобы выполнялось условие:*

$$\gamma \approx 0 \text{ в } X \setminus S_1 \cup \ldots [S_j] \ldots \cup S_m, \quad j = 1, \ldots, m. \quad (16.18)$$

Доказательство. Пусть $\gamma = \delta^m \gamma_0$, где $\gamma_0 \in Z_p(S_1 \cap \ldots \ldots \cap S_m)$. Тогда $\gamma = \delta_1(\delta^{m-1}\gamma_0)$, где $\delta_1 : H_{p+m-1}(S_1 \setminus (S_2 \cup \ldots \cup S_m)) \to H_{p+m}(X \setminus (S_1 \cup \ldots \cup S_m))$. По предложению 16.13 $\gamma \approx 0$ в $X \setminus S_2 \cup \ldots \cup S_m$. Рассматривая $S_1, \ldots, S_m$ в другом порядке, получим (16.18) для $j = 2, \ldots, m$. □

В общем случае условия (16.18) не являются достаточными для того, чтобы $\{\gamma\} \in \delta^m H_p(S_1 \cap \ldots \cap S_m)$.

Пример 3. Возьмем $X = \{z \in C^n : |z| > 1\}$, $S_j = \{z : z_j = 0\}$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда цикл $\gamma = \{z : |z_1| = \ldots = |z_n| = 2\}$ удовлетворяет условиям (16.18), но $\{\gamma\} \notin \delta^n H_0(S_1 \cap \ldots \ldots \cap S_n)$, так как $S_1 \cap \ldots \cap S_n = \varnothing$, а $\gamma \not\approx 0$ в $X \setminus (S_1 \cup \ldots \ldots \cup S_n)$.

Однако, например, справедливо следующее

Предложение 16.15 (Южаков). *Если X — многообразие Штейна размерности n, то для цикла $\gamma \in Z_{p+m}(X / (S_1 \cup \ldots \ldots \cup S_m))$, $m + p \geqslant n$, условие (16.18) необходимо и достаточно, чтобы $\{\gamma\} \in \delta^m H_p(S_1 \cap \ldots \cap S_m)$.*

При некоторых предположениях на $X, S_1, \ldots, S_m$ структуру группы $H_p(X \setminus (S_1 \cup \ldots \cup S_m))$ описывает следующая *теорема о разложении.*

Теорема 16.16 (Фруассар). *Пусть $S_0, S_1, \ldots, S_m$; $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_h$ — два семейства $(n-1)$-мерных комплексных аналитических подмногообразий n-мерного комплексного проективного пространства CP^n, находящиеся в общем положении; S_0 — комплексная гиперплоскость в CP^n, которая отождествляется с бесконечно удаленной гиперплоскостью $CP^{n-1}_\infty = CP^n \setminus C^n$.* Положим $X = \Sigma_1 \cap \ldots \cap \Sigma_h$, $Y = C^n \cap X$. Тогда

$$H_p\left(X \setminus \bigcup_{j=0}^m S_j\right) = H_p\left(Y \setminus \bigcup_{j=1}^m S_j\right) \simeq$$

$$\simeq \bigoplus_{h \in \{1,\ldots,m\}} \delta^{|h|} H_{p-|h|}\left(\bigcap_{j \in h} S_j \cap Y\right) = H_p(Y) \oplus$$

$$\oplus \sum_{j=1}^m \delta h_{p-1}(Y \cap S_j) \oplus \sum_{1 < i < j \leqslant m} \delta^2 H_{p-2}(Y \cap S_i \cap S_j) \oplus \ldots,$$

где $|h|$ — число элементов множества h.

Пример 4. Пусть $Y=C^n$, $S_j = \left\{z : \varphi_j(z) = \sum\limits_{h=1}^{n} a_{jh}z + b_j = 0\right\}$, $j = 1, \ldots, m$,—аналитические гиперплоскости в C^n, находящиеся в общем положении. Последнее означает, что если $S_{j_1} \cap \ldots \cap S_{j_k} \neq \varnothing$, то функции $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_k}$ линейно-независимы. Так как $H_n(C^n) \simeq 0$, $H_{n-r}(S_{i_1} \cap \ldots \cap S_{i_r}) \simeq 0$ при $r < n$ ($S_{i_1} \cap \ldots \cap S_{i_r}$ —вещественно-$2(n-r)$-мерная плоскость), $H_0(S_{i_1} \cap \ldots \cap S_{i_n}) \simeq Z$, если $S_{i_1} \cap \ldots \cap S_{i_n} \neq \varnothing$, то по теореме 16.16 базу группы $H_n(C^n \setminus S_1 \cup \ldots \cup S_m)$ образуют циклы вида $\delta^n(S_{i_1} \cap \ldots \cap S_{i_n}) = \{z \in C^n : |\varphi_{i_1}(z)| = \ldots = |\varphi_{i_n}(z)| = \varepsilon\} = \gamma_{i_1 \ldots i_n}$, где ε достаточно мало, $\{i_1, \ldots, i_n\}$—произвольный набор из $\{1, \ldots, m\}$, для которого функции $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_n}$ линейно независимы. Двойственную ей по де Раму базу когомологий образуют формы вида

$$\omega_{i_1 \ldots i_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{d\varphi_{i_1}(z)}{\varphi_{i_1}(z)} \wedge \ldots \wedge \frac{d\varphi_{i_n}(z)}{\varphi_{i_n}(z)}.$$

Представляет интерес обобщение теоремы 16.16 на случай когда $S_1, \ldots, S_m$ — произвольные аналитические множества в Y. Для частного случая, когда Y — область в C^2, одно из таких обобщений дает следующая теорема (см. также § 18). Пусть $S = S = \bigcup\limits_{j=1}^{m} S_j$ аналитическое множество в $Y \subset C^2$; S_j — его неприводимые компоненты; $\widetilde{S}_j$ — риманова поверхность, определяемая компонентой S_j (риманова поверхность неявной аналитической функции, графиком которой служит S_j); Q — множество точек, в которых S локально приводимо. Для каждой точки $\mathcal{P} \in Q$ выберем локальную систему координат так, чтобы в этой системе координат граница $\partial\Delta_{\mathcal{P}}$ достаточно малого полицилиндра $\Delta_{\mathcal{P}}$ с центром в точке $\mathcal{P}$ пересекала каждую локальную компоненту множества S по гладкой кривой, гомеоморфной окружности. Обозначим через $A_{\mathcal{P}}$ множество $\partial\Delta_{\mathcal{P}} \cap S$, из которого удалена одна связная компонента, $A = \bigcup\limits_{\mathcal{P} \in Q} A_{\mathcal{P}}$.

Теорема 16.17 (Педан). *Если гомоморфизмы $\widetilde{\omega} : H_{p+1}(Y \setminus$*

$\setminus Q) \to H_{p-1}(S\setminus Q)$ *нулевые* $\left(\overline{\omega} H_{p+1}(Y\setminus Q)=0\right)$, *то*

$$H_2(Y\setminus S)=H_2(Y)\oplus\sum_{j=1}^{m}\delta H_1(\widetilde{S}_j)\oplus\delta H_1(A),$$

$$H_1(Y\setminus S)=H_1(Y)\oplus\sum_{j=1}^{m}\delta H_0(S_j).$$

Здесь $\overline{\omega}$, δ — гомоморфизмы, определенные в п. 2°.

§ 17. КОГОМОЛОГИЧЕСКОЕ ПРИВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОЛУМЕРОМОРФНЫХ И РАЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМ

1°. Теорема 16.5 доказывает лишь существование класса-вычета для формы $\varphi\in Z^{p+1}(X\setminus S)$ и не дает конструктивных алгоритмов для его нахождения. Аналогична ситуация со сложным классом-вычетом. Теорема 16.2, пример 1 (см. § 16) и лемма 16.9 позволяют находить класс-вычет в случае полумероморфных форм, имеющих полюсы 1-го порядка. Поэтому задача нахождения класса-вычета формы $\varphi\in Z^{p+1}(X\setminus S)$, соответственно кратного класса-вычета формы $\varphi\in Z^{p+m}(X\setminus(S_1\cup\ldots\cup S_m))$, сводится к задаче нахождения когомологичной ей формы, имеющей на S, соответственно на $S_1,\ldots,S_m$, полюсы 1-го порядка, т. е. к задаче когомологического приведения формы φ. Эту задачу достаточно решать в окрестности S, $S_1\cap\ldots\cap S_m$. В ряде случаев задача когомологического приведения решается конструктивно, если φ имеет полюсы на $S, S_1,\ldots,S_m$, т. е. является полумероморфной формой.

2°. Если подмногообразие S задается глобальным уравнением, то понижение порядка полюсов позволяет осуществить следующая

Лемма 17.1. *Пусть* $S=\{z: z\in V,\ \ s(z)=0\}$, *где* V *— некоторая окрестность* S, $s\in A(V)$, $\operatorname{grad} s\neq 0$. *Тогда всякую форму* $\varphi\in Z^{p+1}(X\setminus S)$, *имеющую на* S *полюс* *порядка k, можно представить в виде*

$$\varphi = \frac{ds}{s^k} \wedge \psi + \frac{\theta}{s^{k-1}}, \qquad (17.1)$$

где ψ, θ — формы, регулярные в V.

Доказательство. По условию форма $s^k\varphi$ регулярна в V. А так как форма φ замкнута, то $d(s^k\varphi) = ks^{k-1}ds \wedge \varphi$. Умножение последней формы на ds обращает ее в нуль. Следовательно, по лемме 16.3 для любой точки $a \in S$ существует форма θ_a, регулярная в некоторой окрестности U_a точки a, для которой $s^{k-1}ds \wedge \varphi = ds \wedge \theta_a$. Форма $s^k\varphi - s\theta_a$ регулярна в U_a и $ds \wedge (s^k\varphi - s\theta_a) = 0$. По лемме 16.3 существует форма ψ_a, регулярная в U_a, для которой $s^k\varphi - s\theta_a = ds \wedge \psi_a$, или

$$\varphi = \frac{ds}{s^k} \wedge \psi_a + \frac{\theta_a}{s^{k-1}}. \qquad (17.2)$$

В окрестности $U_a \subset V \setminus S$ точки $a \in V \setminus S$ представим форму φ в виде (17.2), где $\psi_a = 0$, а $\theta_a = \varphi s^{k-1}$. Возьмем разбиение единицы, $\{\chi_a\}_{a \in V}$, подчиненное покрытию $\{U_a\}_{a \in V}$, и построим формы $\psi = \sum_{a \in V} \chi_a \psi_a$, $\theta = \sum_{a \in V} \chi_a \theta_a$, регулярные в V. Для этих форм из (17.2) вытекает (17.1). $\sqcap$

Форму (17.1) можно преобразовать к виду

$$\varphi = d\left(-\frac{\psi}{(k-1)s^{k-1}}\right) + \frac{\theta_1}{s^{k-1}},$$

где $\theta_1 = d\psi/(k-1) + \theta$. Таким образом, в $V \setminus S$ форма φ когомологична форме θ_1/s^{k-1}, имеющей на S полюс порядка $k-1$. По индукции форму φ в $V \setminus S$ можно когомологически привести к форме, имеющей на S полюс 1-го порядка.

3°. Сложный класс-вычет некоторых полумероморфных замкнутых форм позволяет найти *конструкция Гельфанда — Шилова.*

Теорема 17.2. (Гельфанд — Шилов — Лере). *Пусть $S_j = \{z \in X : s_j(z) = 0\}$, $j = 1, \ldots, m$,— подмногообразия в общем положении, заданные глобальными уравне-*

ниями, $\omega(z)$ — регулярная форма на многообразии X, удовлетворяющая в окрестности $S = S_1 \cap \ldots \cap S_m$ условию

$$ds_1(z) \wedge \ldots \wedge ds_m(z) \wedge d\omega(z) = 0. \qquad (17.3)$$

Тогда существуют формы $\omega_1, \ldots, \omega_m, \omega_{11}, \ldots, \omega_{1m}, \omega_{21}, \ldots, \omega_{j,\ldots k}$, $j, k = 1, \ldots, m$, регулярные в окрестности S такие, что

$$\begin{aligned} d\omega &= ds_1 \wedge \omega_1 + \ldots + ds_m \wedge \omega_m; \\ d\omega_1 &= ds_1 \wedge \omega_{11} + \ldots + ds_m \wedge \omega_{1m}; \qquad (17.4) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d\omega_{p\ldots q} &= ds_1 \wedge \omega_{p\ldots q,1} + \ldots + ds_m \wedge \omega_{p\ldots q,m}. \end{aligned}$$

При этом

$$\frac{1}{r_1! \ldots r_m!} \omega_{j\ldots k}|_S \in \operatorname{Res}\left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega}{s_1^{r_1+1} \ldots s_m^{r_m+1}}\right], \qquad (17.5)$$

где r_l — число индексов l, $l = 1, \ldots, m$, содержащихся среди $j, \ldots, k$.

Лемма 17.3. *Если регулярная на X форма φ удовлетворяет в окрестности $S = S_1 \cap \ldots \cap S_m$ условию $ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \varphi = 0$, то в этой окрестности существуют регулярные формы такие, что*

$$\varphi(z) = ds_1(z) \wedge \psi_1(z) + \ldots + ds_m(z) \wedge \psi_m(z). \qquad (17.6)$$

Доказательство. В окрестности U_a произвольной точки $a \in S$ выберем локальные координаты $z_1, \ldots, z_n$ так, чтобы $S_j \cap U_a = \{z : z_j = 0\}$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда форму φ в U_a можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi(z) = \psi_0(a, z) + dz_1 \wedge \psi_1(a, z) + \ldots + \\ + dz_m \wedge \psi_m(a, z), \qquad (17.7) \end{aligned}$$

где ψ_0 — форма, не содержащая $dz_1, \ldots, dz_m$. По условию $dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_m \wedge \varphi = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_m \wedge \psi_0 = 0$, откуда $\psi_0 = 0$. Используя разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_a\}_{a \in S}$, перейдем от локального представления (17.7), где $\psi_0 = 0$, к глобальному представлению (17.6) в окрестности $V = \bigcup_{\alpha \in S} U_\alpha$ подмногообразия S. □

Доказательство теоремы 17.2. Заметим, что из условия (17.3) немедленно вытекает замкнутость формы $ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega / s_1^{r_1+1} \ldots s_m^{r_m+1}$. Из леммы 17.3 и условия (17.3) вытекает существование форм $\omega_1, \ldots, \ldots, \omega_m$, для которых выполняется первое из равенств (17.4). Дифференцируя его, получим $ds_1 \wedge d\omega_1 + \ldots + ds_m \wedge \wedge d\omega_m = 0$. Отсюда $ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge d\omega_j = 0$. Согласно лемме 17.3, существуют формы $\omega_{j1}, \ldots, \omega_{jm}$, для которых $d\omega_j = = ds_1 \wedge \omega_{j1} + \ldots + ds_m \wedge \omega_{jm}$, и т. д. Таким образом, последовательно получаем (17.4).

Соотношение (17.5) будем доказывать индукцией по числу индексов $j \ldots k$, равному $r_1 + \ldots + r_m$. Для $r_1 = \ldots = r_m = 0$ имеем (см. § 16, п., 5°).

$$\omega|_S = \operatorname{res}^m \left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega}{s_1 \ldots s_m} \right] \in \operatorname{Res}^m \left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega}{s_1 \ldots s_m} \right].$$

Предположим (17.5) справедливым для $r_1, \ldots, r_m$ и докажем его для $r_1, \ldots, r_j + 1, \ldots, r_m$. Замечая, что

$$\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega}{s_1^{r_1+1} \ldots s_j^{r_j+2} \ldots s_m^{r_m+1}} = \frac{(-1)^j}{r_j+1} d\left(\frac{ds_1 \wedge \ldots [j] \ldots \wedge ds_m \wedge \omega}{s_1^{r_1+1} \ldots s_j^{r_j+1} \ldots s_m^{r_m+1}} \right) +$$

$$+ \frac{(-1)^{m-j}}{r_j+1} \frac{ds_1 \wedge \ldots [j] \ldots < ds_m \wedge d\omega}{s_1^{r_1+1} \ldots s_j^{r_j+1} \ldots s_m^{r_m+1}} \approx \frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega_j}{(r_j+1) s_1^{r_1+1} \ldots s_j^{r_j+1} \ldots s_m^{r_m+1}},$$

по предположению индукции получим

$$\operatorname{Res} \left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega}{s_1^{r_1+1} \ldots s_j^{r_j+2} \ldots s_m^{r_m+1}} \right] = \frac{1}{r_j+1} \times$$

$$\times \operatorname{Res} \left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega_j}{s_1^{r_1+1} \ldots s_j^{r_j+1} \ldots s_m^{r_m+1}} \right] = \frac{1}{r_1! \ldots (r_j+1)! \ldots r_m!} \omega_{jp \ldots q}|_S,$$

где среди индексов $p \ldots q$ индексы $1, \ldots, j, \ldots, m$

встречаются соответственно $r_1, \ldots, r_j+1, \ldots, r_m$ раз[4]. □

Пример 1. Если $X = C^n$, $m = n$, $S_j = \{z : z_j = 0\}$, $\omega(z) = f(z) \in A(C^n)$,

$$\omega_{p\ldots q} = \frac{\partial^{r_1+\ldots+r_n} f(z)}{\partial z_1^{r_1}\ldots\partial z_m^{r_m}}.$$

Приведенные выше приемы понижения порядка полюсов замкнутой полумероморфной формы не вполне конструктивны, поскольку нахождение представлений (17.1) и (17.6) опирается на разбиение единицы.

4°. В случае рациональных форм в C^n задача когомологического приведения по аналогичной схеме эффективно решается с использованием теоремы Гильберта о корнях.

Теорема 17.4. (Лейнартас — Южаков). *Пусть $Q_1(z), \ldots, Q_m(z)$ — неприводимые полиномы в C^n* и $S_j = \{z \in C^n : Q_j(z) = 0\}$, $j = 1, \ldots, m$, — *многообразия в общем положении. Тогда форма*

$$\omega = \frac{P(z)\,dz}{Q_1^{r_1}\ldots Q_m^{r_m}}, \tag{17.8}$$

где P — полином (целая функция); $dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$ *когомологична в $C^n \setminus (S_1 \cup \ldots \cup S_m)$ форме вида*

$$\omega^* = \sum_{\mathcal{J}} \frac{P_{\mathcal{J}}\,dz}{Q_{j_1}\ldots Q_{j_k}}, \tag{17.9}$$

где $\mathcal{J} = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$, $k \leqslant n$; $P_{\mathcal{J}}$ — полиномы (целые функции).

Доказательство. А. Пусть $m \leqslant n$. Из условия общего положения многообразий $S_1, \ldots, S_m$ следует, что в точках множества $S_1 \cap \ldots \cap S_m$ ранг матрицы $\left\| \frac{\partial Q_j}{\partial z_k} \right\|_{j=1,\ldots,m;\, k=1,\ldots,n}$ равен m. Следовательно, полиномы

---

[4] Эквивалентный метод дает аппарат частных производных для внешних дифференциальных форм, разработанный Лере и Норге, см. [113, пп. 7, 46, 47; 316].

$Q_1, \ldots, Q_m, \ \dfrac{\partial (Q_1, \ldots, Q_m)}{\partial \left(z_{j_1}, \ldots, z_{j_m}\right)}, \quad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n,$ не имеют общих нулей в C^n. По теореме Гильберта о корнях (см. [48, с. 11]) существуют полиномы H_j, $H_{\mathcal{J}}$, $\mathcal{J} = \{j_1, \ldots, j_m\}$ такие, что

$$1 = \sum_{j=1}^{n} H_j Q_j + \sum_{\mathcal{J}} H_{\mathcal{J}} \frac{\partial (Q_1, \ldots, Q_m)}{\partial \left(z_{j_1}, \ldots, z_{j_m}\right)}. \qquad (17.10)$$

Подставляя (17.10) в (17.8), получим

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j dz}{Q_1^{r_1} \ldots Q_j^{r_j - 1} \ldots Q_m^{r_m}} + \sum_{\mathcal{J}} \frac{(-1)^{\varepsilon[\mathcal{J}]} P_{\mathcal{J}} dQ_1 \wedge \ldots \wedge dQ_m \wedge dz[\mathcal{J}]}{Q_1^{r_1} \ldots Q_m^{r_m}}, \qquad (17.11)$$

где $P_j = H_j \cdot P$; $P_{\mathcal{J}} = H_{\mathcal{J}} \cdot P$; $dz[\mathcal{J}] = dz_1 \wedge \ldots [j_1, \ldots j_m] \ldots \ldots \wedge dz_n$; $\varepsilon[\mathcal{J}]$ — четность перестановки $(j_1, \ldots, j_m, 1, \ldots \ldots [j_1, \ldots, j_m] \ldots, n)$ из $(1, \ldots, n)$. Если хотя бы один показатель $r_j > 1$, то точно так же, как в п. 3°, можно показать, что

$$\frac{P_{\mathcal{J}} dQ_1 \wedge \ldots \wedge dQ_m \wedge dz[\mathcal{J}]}{Q_1^{r_1} \ldots Q_m^{r_m}} \approx$$

$$\approx \frac{(-1)^{j-1} dP_{\mathcal{J}} \wedge dQ_1 \wedge \ldots [j] \ldots \wedge dQ_m \wedge dz[\mathcal{J}]}{(r_j - 1) Q_1^{r_1} \ldots Q_j^{r_j - 1} \ldots Q_m^{r_m}}. \qquad (17.12)$$

Понижая таким образом последовательно степени знаменателей, мы через конечное число шагов придем к форме вида (17.9).

Б. Если $m > n$, то из условия общего положения следует, что $V_1 \cap \ldots \cap V_m = \varnothing$, т. е. полиномы $Q_1^{r_1}, \ldots, Q_m^{r_m}$ не имеют общих нулей в C^n. Тогда по теореме Гильберта найдутся полиномы $H_1(z), \ldots, H_m(z)$ такие, что

$$1 = H_1(z) Q_1^{r_1}(z) + \ldots + H_m(z) Q_m^{r_m}(z).$$

Подставляя это равенство в (17.8), представим (17.8) в виде

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j dz}{Q_1^{r_1} \dots [j] \dots Q_m^{r_m}},$$

где $P_j = H_j \cdot P$. Применяя этот прием $m - n$ раз, придем к случаю А. □

Замечание. Так как теорема Гильберта имеет конструктивное доказательство, то полиномы H_j, $H_{\mathcal{J}}$, а следовательно, форма (17.9) могут быть найдены эффективно. В п. Б, по существу, излагается прием разложения рациональных функций на простейшие дроби. В общем случае этот вопрос решает

Теорема 17.5 (Лейнартас). *Всякую рациональную функцию n переменных можно представить в виде суммы дробей, у каждой из которых знаменатель содержит не более, чем n, неприводимых множителей.*

Пример 2. Рассмотрим в C^2 форму

$$\omega = dw \wedge dz / w^3(wz - 1)(w^2 + z^2 - 1)^2.$$

Учитывая, что $1 \equiv wz - 1(wz - 1)$, последовательно применим рассуждения п. Б. Получим

$$\omega = \frac{z^3 dw \wedge dz}{(wz-1)(w^2+z^2-1)^2} - \frac{dw \wedge dz}{w^3(w^2+z^2-1)^2} - \\ - \frac{z dw \wedge dz}{w^2(w^2+z^2-1)^2} - \frac{z^2 dw \wedge dz}{w(w^2+z^2-1)}.$$

Используя тождества

$$1 \equiv w \cdot w - 1 \cdot (w^2 + z^2 - 1) + \frac{z}{2} \cdot 2z,$$

$$1 \equiv -\frac{4}{3}(1 + wz)(wz - 1) + \frac{1}{3}(w^2 + z^2 + 1)(w^2 + z^2 - 1) + \\ + \frac{1}{6}(w^2 - z^2)(2z^2 - 2w^2),$$

где $2z = \dfrac{\partial(w, w^2 + z^2 - 1)}{\partial(w, z)}$, $2z^2 - 2w^2 = \dfrac{\partial(wz - 1, w^2 + z^2 - 1)}{\partial(w, z)}$, и формулу (17.12), находим, что

$$\omega \approx \frac{\partial w \wedge dz}{4w(w^2+z^2-1)} + \frac{(5z^3-6z^5)\,dw \wedge dz}{6(wz-1)(w^2+z^2-1)}.$$

Теорему 17.4 можно обобщить на мероморфные формы в областях голоморфности.

Т е о р е м а 17.6. *Пусть $P, Q_1, \ldots, Q_n$ — голоморфные функции в области голоморфности $D \subset C^n$ и $S_j = \{z \in D : Q_j(z) = 0\}$, $j = 1, \ldots, m$, — многообразия в общем положении. Тогда форма вида* (17.8) *когомологична в* $D \setminus (S_1 \cup \ldots \cup S_m)$ *форме вида* (17.9), *где* $P_{\mathcal{J}} \in A(D)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 17.6. аналогично доказательству теоремы 17.4, только вместо теоремы Гильберта о корнях используется следующее утверждение (см. [201, с. 296]): если функции $Q_1, \ldots, Q_m$, голоморфные в области голоморфности $D \subset C^n$, не имеют общих нулей в D, то существуют такие голоморфные в D функции $P_1, \ldots, P_m$, что $1 \equiv P_1Q_1 + \ldots + P_mQ_m$.□

В комплексном проективном пространстве CP^n имеет место

Т е о р е м а 17.7 (Гриффитс). *Пусть $Q(z)$ — неприводимый полином от $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $S = \{z \in CP^n : Q(z) = 0\}$ — многообразие. Тогда всякую форму ω, рациональную в $CP^n \setminus S$, можно когомологически привести к рациональной форме вида $\omega_1 = Pdz/Q^k$, где $k \leqslant n - E\left(\frac{n}{q}\right)$, $q = \deg Q$; $E(a)$ — целая часть a.*

§ 18. ВЫЧЕТЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

1°. Применим метод, описанный в § 14, к интегралам вида

$$\iint\limits_{\gamma} \frac{P(w,z)}{Q(w,z)}\,dw \wedge dz, \tag{18.1}$$

где P, Q — полиномы двух переменных (можно предполагать, что P — целая функция); $\gamma \in Z_2(C^2 \setminus T)$; $T =$

$= \{w, z) \in C^2 : Q(w, z) = 0\}$. Найдем размерность изоморфных групп гомологий $H_2(C^2 \setminus T) \simeq H_1(\dot{T})$, где $\dot{T} = T \cup \{\infty\}$ — замыкание особого множества T в пространстве C^2, пополненном до сферы $S^4 = \dot{C}_2 = C^2 \cup \{\infty\}$ одной бесконечно удаленной точкой ∞ (см. § 14), и двойственные по Александеру — Понтрягину базы этих групп. Вычислим вычеты (периоды) формы $P dw \wedge dz/Q$ относительно базисных циклов.

2°. **Род римановой поверхности.** Предварительно напомним некоторые сведения о римановых поверхностях алгебраических функций (см. [198, 66]). Пусть $Q(w, z) = a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \ldots + a_n(z)$ — неприводимый полином степени n относительно переменной w. Его дискриминант $D(z) = R(Q, Q'_w) \not\equiv 0$. Уравнение

$$Q(w, z) = 0 \tag{18.2}$$

определяет в области $G = \{z \in C^1 : D(z) \neq 0\}$ n-значную аналитическую функцию $w = \varphi(z)$, которая называется алгебраической функцией. В точках множества $\mathscr{E} = \{z : D(z) = 0\} \cup \{\infty\} = \{z_1, \ldots, z_N, \infty\} \in \overline{C}$, где $\overline{C}$ — сфера Римана, эта функция может лишь иметь полюсы либо алгебраические точки ветвления.

Возьмем произвольную точку $z_0 \in G$ и проведем на сфере Римана $\overline{C}$ разрезы по отрезкам, соединяющим z_0 с точками множества $\mathscr{E}$ (можно предположить, что никакие две точки из $\mathscr{E} \setminus \{\infty\}$ не лежат на одном луче, исходящем из z_0). Получим односвязную область D. Присоединяя к ней стороны разрезов, получим односвязный замкнутый $2(N + 1)$-угольник $\overline{D}$. Алгебраическая функция $w = \varphi(z)$ распадается на n ветвей $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)$, каждая из которых голоморфна и однозначна в D и непрерывно продолжается на $\overline{D}$, если ее значения рассматривать в $\overline{C}$. Каждой ветви φ_j поставим в соответствие свой экземпляр $\overline{D}_j$, $j = 1, \ldots, n$, многоугольника $\overline{D}$ и отождествим у этих экземпляров попарно те стороны (края разрезов), на которых значения соответствующих ветвей совпадают. Получим n-листную риманову поверхность S, являющуюся компактным связным ориентируемым многообразием размерности 2, на которой алгебраическая функция $w = \varphi(z)$ однозначна.

Точка римановой поверхности S, лежащая над точкой $a \in \mathscr{E}$, называется точкой ветвления порядка k, если в ней отождествлены вершины k различных многоугольников $\overline{D}_j$. В окрестности такой точки алгебраическая функция $w = \varphi(z)$ представляется в виде ряда

$$w = \sum_{m=m_0}^{\infty} c_m (z-a)^{\frac{m}{k}},$$

где m_0 — целое число, положительное или отрицательное. Это разложение может быть найдено с помощью диаграммы Ньютона (см. [198]).

Определим род римановой поверхности S. Многоугольники $\overline{D}_j$, $j = 1, \ldots, n$, образуют клеточное разбиение многообразия S. Имеем $\alpha_2 = n$ двумерных клеток, $\alpha_1 = n(N+1)$ одномерных и $\alpha_0 = r + n$ нульмерных клеток, где r — число точек многообразия S, лежащих над точками множества $\mathscr{E}$ (точке z_0 соответствует ровно n точек многообразия S). Так как нульмерное и двумерное числа Бетти римановой поверхности S равны $p_0 = p_2 = 1$, то одномерное число Бетти S, равное удвоенному ее роду, можно найти по формуле Эйлера — Пуанкаре (0.9)

$$\begin{aligned} p_1 = 2\rho = p_0 + p_2 - \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = \\ = 2 - r + (N+1)n - 2n. \end{aligned} \tag{18.3}$$

Учитывая, что сумма порядков точек ветвления римановой поверхности S, лежащих над одной и той же точкой множества $\mathscr{E}$ равна n, получим

$$n(N+1) - r = \sum_{j=1}^{r} (k_j - 1), \tag{18.4}$$

где k_j — порядки соответствующих точек ветвления. Из (18.3) и (18.4) вытекает

Теорема 18.1 (Риман). *Род римановой поверхности алгебраической функции определяется формулой*

$$\rho = \frac{\omega}{2} - n + 1, \tag{18.5}$$

где n — *число листов*; $\omega = \sum_{j=1}^{r}(k_j - 1)$ *индекс разветвления римановой поверхности.*

3°. Размерность двумерной группы гомологий дополнения до алгебраической кривой в C^2. Вернемся к интегралу (18.1). Знаменатель Q представим в виде $Q = Q_1^{r_1} \ldots Q_m^{r_m}$, где $Q_1, \ldots, Q_m$ — неприводимые полиномы.

Теорема 18.2 (Южаков). *Размерность групп* $H_1(\dot{T})$ *и* $H_2(C^2 \setminus T)$ *определяется формулой*

$$p = \sum_{j=1}^{m} 2\rho_j + \sum_{i=1}^{s}(q_i - 1) + l - m, \qquad (18.6)$$

где ρ_j — *род римановой поверхности алгебраической функции, определяемой уравнением* $Q_j(w, z) = 0$, $j = 1, \ldots, m$; q_i — *число неприводимых компонент аналитического множества* T *в его точке самопересечения* A_i; s — *число точек самопересечения множества* T; l — *число бесконечно удаленных элементов множества* T (число связных компонент множества $T \cup \{|z|^2 + |w|^2 > R\}$ при R, достаточно большом).

Доказательство. Множество $\dot{T} = \{z : Q(z) = 0\} \cup \cup \{\infty\}$ гомеоморфно топологической сумме S римановых поверхностей S_j алгебраических функций $w = \varphi_j(z)$, определяемых уравнениями[5] $Q_j(w, z) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, у которых отождествлены некоторые точки. А именно: 1) точки римановых поверхностей S_j, которые имеют общую проекцию на плоскость z и в которых функции $w = \varphi_j(z)$ принимают одинаковое значение $\neq \infty$, отождествляются в одну точку самопересечения (A_i) множества $\dot{T}$, причем в точке $A_i \in \dot{T}$ отождествляется q_i точек из S; 2) точки римановых поверхностей S_j, $j = 1, \ldots, m$, лежащие над точкой $z = \infty$ сферы Римана, а также полюсы функций $\varphi_j(z)$ (всего l точек) отождествляются в одну точку $\infty \in \dot{T}$. В произвольной триангуляции полиэдров S и $\dot{T}$, вклю-

[5] Можно предполагать, что $Q_j(w, z) \not\equiv z$. Иначе сделаем линейную замену переменных.

чающей в число вершин отождествляемые точки, при переходе от S к $\dot{T}$ числа двумерных и одномерных симплексов α_2 и α_1 не меняются, число вершин α_0 уменьшается на $\sum\limits_{i=1}^{s}(k_i - 1) + l - 1$. Числа Бетти полиэдра S соответственно равны: $p_0 = m$ (число связных компонент S); $p_1 = \sum\limits_{j=1}^{m} 2\rho_j$; $p_2 = m$. Для полиэдра $\dot{T}$ число $p_0 = 1$, так как все компоненты $T_j = \{(w, z) : Q_j\ (w, z) = 0\} \cup \{\infty\}$, $j = 1, \ldots, m$, имеют общую точку $\infty \in \dot{C}^2$, $p_2 = m$. Отсюда по формуле Эйлера — Пуанкаре (0.9) для одномерного числа Бетти множества $\dot{T}$ получаем формулу (18.6). Согласно теореме 14.1, двумерное число Бетти области $C^2 \setminus T = \dot{C}^2 \setminus \dot{T}$ также равно (18.6). □

Формулу (18.6) можно преобразовать к другому виду, удобному для вычислений. Обозначим $Q_*\ (w, z) = Q_1\ (w, z) \ldots Q_m(w, z)$. Тогда $T = \{Q(w, z) = 0\} = \{Q_*\ (w, z) = 0\}$. Пусть n — степень полинома Q_* относительно переменной w; $z_1, \ldots, z_N$ — корни дискриминанта $D_* = R\,(Q_*, \partial Q_*/\partial w)$ полинома Q_*; r_j — число различных конечных корней уравнения $Q_*\ (w, z_j) = 0$, $j = 1, \ldots, N$. Тогда имеет место

Предложение 18.3. *Размерность групп гомологий $H_1(\dot{T}) \simeq H_2(C^2 \setminus T)$ определяется формулой*

$$p = (N - 1)\,n - \sum_{j=1}^{N} r_j + m. \qquad (18.7)$$

Доказательство. Представим в формуле (18.6) ρ_j, $j = 1, \ldots, m$, по формуле (18.5). Получим

$$p = \sum_{r}(k_r - 1) - 2\sum_{j=1}^{m} n_j + 2m + \sum_{i=1}^{s}(q_i - 1) + l - m$$

или

$$p = \sum_{r}(k_r - 1) + \sum_{i=1}^{s}(q_i - 1) + l - 2n + m, \qquad (18.8)$$

где n_j — степень полинома $Q_j(w, z)$ относительно переменной w; $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$; k_r — порядки точек ветвления римановых поверхностей S_j, $j = 1, \ldots, m$, причем в $\sum_r$ суммирование ведется по всем точкам ветвления. Точки ветвления римановых поверхностей S_j, точки самопересечения алгебраической кривой T, а также полюсы функций $w = \varphi_j(z)$ могут лежать лишь над теми точками плоскости z, в которых $D_*(z) = 0$. Пусть в точке (z_j, w_{ji}) отождествлено q, $q \geqslant 1$, точек множества $S = \bigcup_{j=1}^{m} S_j$ порядков $k_{r_1}, \ldots, k_{r_q}$, тогда точка w_{ji} является корнем уравнения $Q_*(w, z_j) = 0$ кратности $\beta_{ji} = \sum_{t=1}^{q} k_{r_t}$. В сумме (18.8) ей соответствует слагаемое

$$\sum_{t=1}^{q} (k_{r_t} - 1) + (q - 1) = \beta_{ji} - 1.$$

Бесконечно удаленной точке $(\infty) \in \dot{T} \subset \dot{C}^2$ в сумме (18.8) соответствует слагаемое

$$\sum_{t=1}^{l} (k_{s_t} - 1) + l = \sum_{t=1}^{l} k_{s_t} = \sum_{j=1}^{N} \delta_j + n,$$

где k_{q_t} — порядки ветвления полюсов и точек римановых поверхностей S_j, $j = 1, \ldots, m$, лежащих над точкой $z = \infty \in \overline{C}$; δ_j — кратность бесконечного корня уравнения $Q_*(w, z_j)$, т. е. разность между n и степенью уравнения $Q_*(w, z_j)$, равная сумме порядков ветвления полюсов, лежащих над точкой z_j; n — сумма порядков точек ветвления, лежащих над точкой $z = \infty$, включая точки ветвления 1-го порядка. Таким образом,

$$p = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{r_j} (\beta_{ji} - 1) + \sum_{j=1}^{N} \delta_j - n + m.$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^{r_j} \beta_{ji} + \delta_j = n$, получаем (18.7). □

4°. **Двойственные базы гомологий.** Построим базу двумерных гомологий области $C^2 \setminus T$, являющейся областью регулярности формы $P dw \wedge dz/Q$, и двойственную ей по Александеру — Понтрягину базу одномерных гомологий особого множества $\dot{T}$.

1. На каждой неприводимой компоненте $T_j = \{Q_j(w, z) = 0\}$ алгебраической кривой T проведем $2\rho_j$ одномерных циклов $\sigma^1_{j,s}$, $s = 1, \ldots, 2\rho_j$, $j = 1, \ldots, m$, соответствующих «каноническим» разрезам двумерного многообразия S_j (о параллелях и меридианах ручек см. Предложение 0.18). При этом можно предположить, что циклы $\sigma^1_{j,2k-1}$ и $\sigma^1_{j,2k}$ имеют одну общую точку и не пересекаются с остальными циклами $\sigma^1_{j,s}$, а также на проходят через точки самопересечения $\dot{T}$. Возьмем $\gamma^1_{js} = \delta_\varepsilon \omega^1_{js}$, где ω^1_{js} получается из σ^1_{jr} небольшим сдвигом; $r = s - (-1)^s$; δ_ε — кограничный оператор Лере (см. § 16); $\varepsilon > 0$ — достаточно мало. Получим $\sum\limits_{j=1}^{m} 2\rho_j$ циклов $\sigma^1_{js} \in Z_1(\dot{T})$, соответственно $\gamma^1_{js} \in \in Z_2(C^2 \setminus T)$, $s = 1, \ldots, 2\rho_j$, $j = 1, \ldots, m$, которые назовем *каноническими*.

2. Пусть в точке $A_j \in T$ пересекаются q_j неприводимых элементов (ростков) алгебраической кривой $T : S_{ji}$, $i = 1, \ldots, q_j$. Проведем в $\dot{T}$ замкнутую ориентированную кривую (одномерный цикл) σ^2_{ji}, выходящую из точки A_j по элементу S_{jq_j} и приходящую в A_j по элементу S_{ji}, $i = 1, \ldots, q_j - 1$. Если элементы S_{ji} и S_{jq_j} принадлежат различным неприводимым компонентам T_s, $s = 1, \ldots, m$, алгебраической кривой T, то переход кривой σ^2_{ji} с одной компоненты на другую осуществляется через точку ∞. Так как канонические разрезы $\sigma^1_{js}, \omega^1_{js}$ не разбивают поверхность $\dot{T}_j$ и не проходят через точки самопересечения и точку ∞, можно предположить, что σ^2_{ji} и ω^1_{jr} не имеют общих точек. Построим двумерные циклы $\gamma^2_{ji} = \delta_\varepsilon \omega^2_{ji} \in Z_2(C^2 \setminus T)$, где ω^2_{ji} — простая замкнутая кривая на элементе S_{ji}, окружающая точку A_j (заметим, что $S_{ji} \setminus \{A_j\}$ — гомеоморфно кругу с выколотым центром).

Очевидно, циклы σ^2_{ji} и $\omega^2_{s,r}$ не имеют общих точек, если $(j, i) \neq (s, r)$. Циклы σ^2_{ji} и ω^2_{ji} можно провести так, чтобы они пересекались по одной точке.

Итак, получим $\sum\limits_{j=1}^{k}(q_j-1)$ циклов $\gamma^2_{ji} \in Z_2(C^2 \setminus T)$ и соответственно циклов $\sigma^2_{ji} \in Z_1(\dot{T})$, которые назовем *циклами пересечения*.

3. Наконец, пусть $\widetilde{S}_{j_1}, \ldots, \widetilde{S}_{jl_j}$ — бесконечно удаленные элементы неприводимой компоненты T_j(компоненты связности множества $T_j \cap \{|z|^2+|w|^2>R^2\}$, где R—достаточно большое положительное число) алгебраической кривой T, $\sum\limits_{j=1}^{m} l_j = l$. Проведем на $\dot{T}_j = T_j \cup \{\infty\}$ замкнутую ориентированную кривую σ^3_{js}, выходящую из точки ∞ по элементу $\widetilde{S}_{jl_j}$ и возвращающуюся в точку ∞ по элементу $\widetilde{S}_{js}$, $s = 1, \ldots, l_j-1$, $j = 1, \ldots, m$. Цикл σ^3_{js} можно провести так, чтобы он не пересекал циклы ω^1_{jr} и не проходил через точки самопересечения A_j, т. е. не пересекал циклы ω^2_{ji}. Возьмем циклы $\gamma^3_{js} = \delta_\varepsilon\omega^3_{js} \in Z_2(C^2 \setminus T)$, где, ω^3_{js} —замкнутая кривая на $\widetilde{S}_{js}$, окружающая точку ∞ (элемент $\widetilde{S}_{js}$ гомеоморфен кругу с выколотым центром), $s = 1, \ldots, l_j-1$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда циклы σ^3_{js} и ω^3_{ir} не пересекаются, если $(j, s) \neq (i, r)$. Можно предположить, что циклы σ^3_{js} и ω^3_{js} пересекаются только по одной точке. Будем также предполагать, что если цикл σ^2_{is} переходит с компоненты T_j на компоненту T_q, то это осуществляется через элементы $\widetilde{S}_{jl_j}$ и $\widetilde{S}_{ql_q}$. Тогда σ^2_{js} не пересекает циклы ω^3_{jr}. Итак, получаем $l-m = \sum\limits_{j=1}^{m}(l_j-1)$ циклов $\gamma^3_{js} \in Z_2(C^2 \setminus T)$, соответственно циклов $\sigma^3_{js} \in Z_1(\dot{T})$, которые будем называть *полярными*.

Теорема 18.4 (Южаков). *Канонические циклы* γ^1_{ji}, $i = 1, \ldots, 2\rho_j$, $j = 1, \ldots, m$, *циклы пересечения* γ^2_{js}, $s = 1, \ldots, q_j$, $j = 1, \ldots, k$, *и полярные циклы* γ^3_{ji}

$i=1, \ldots, l_j-1$, $j=1, \ldots, m$, образуют базу двумерных гомологий области $C^2 \setminus T$, а циклы $\{\sigma^1_{ji}\}$, $\{\sigma^2_{ji}\}$, $\{\sigma^3_{ji}\}$ — двойственную ей (с точностью до знака) базу одномерных гомологий особого множества $\dot{T}$.

Доказательство. Обозначим через V_ε оператор, аналогичный кограничному оператору Лере, где вместо окружности $\delta_\varepsilon a$ радиуса ε берется круг радиуса ε (см. § 16). Тогда $\partial V_\varepsilon \omega^r_{ji} = \delta_\varepsilon \omega^r_{ji} = \gamma^r_{ji}$. Из построения циклов $\{\sigma^r_{ji}\}$, $\{\gamma^r_{ji}\}$ следует, что $|\sigma^r_{ji}| \cap |V_\varepsilon \omega^h_{sq}| = |\sigma^r_{ji}| \cap |\omega^h_{sq}|$ состоит из одной точки, если $(j, i, r) = (s, q, k)$, и пусто, если $(j, i, r) \neq (s, q, k)$. Таким образом, $\nu(\sigma^r_{ji}, \gamma^k_{sq}) = \chi(\sigma^r_{js}, V_\varepsilon \omega^k_{sq}) = \pm 1$ при $(j, i, r) = (s, q, k)$ и равно нулю при $(j, i, r) \neq (s, q, k)$. А так как число циклов $\{\gamma^r_{ji}\}$, соответственно циклов $\{\sigma^r_{ji}\}$, равно $\sum\limits_{j=1}^{n} 2\rho_j + \sum\limits_{i=1}^{s} (k_j - 1) + l - m$ и, согласно теореме 18.2, совпадает с размерностью групп $H_2(C^2 \setminus T) \simeq H_1(\dot{T})$, то эти циклы образуют двойственные по Александеру — Понтрягину базы групп гомологий $H_2(C^2 \setminus T)$ и $H_1(\dot{T})$. □

5°. Вычисление вычетов относительно базисных циклов. Вычислим интеграл (18.1) по базисному циклу γ^r_{jq}. Можно предполагать, что ω^r_{jq} не проходит через точки $(w, z) \in T$, в которых $\partial Q_*/\partial w = 0$. Пусть $\omega^r_{jq} = \{(w, z): w = \psi(t), z = \varphi(t), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, $\varphi(0) = \varphi(1), \psi(0) = \psi(1)$, $Q_s(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$ (при $r = 1, 3, s = j$). Тогда можно взять

$$\gamma^r_{jq} = \delta_\varepsilon \omega^r_{jq} = \{(w, z): z = \varphi(t), w = \psi(t) + \varepsilon e^{i\tau}, \quad 0 < t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi\},$$

где ε — достаточно малое положительное число. Так как цикл ω^r_{jq} не проходит через особые точки алгебраической кривой $T = \{(w, z): Q_*(w, z) = 0\}$, к интегралу (18.1) при $\gamma = \gamma^r_{jq}$ можно применить теорему (16.10). Получим

$$\iint\limits_{\gamma^r_{jq}} \frac{P(w, z)}{Q(w, z)} dw \wedge dz = 2\pi i \int\limits_{\omega^r_{jq}} \operatorname{Res}\left[\frac{P}{Q} dw \wedge dz\right]. \quad (18.9)$$

Класс-вычет $\operatorname{Res}\left[\frac{P}{Q}\,dw \wedge dz\right]$ можно найти по методу, описанному в § 17, п. 2°. Его также можно вычислить непосредственно следующим образом.

Так как $\frac{\partial Q_s}{\partial w} \neq 0$ на $|\omega_{jq}^r|$, в окрестности $|\omega_{jq}^r|$ можно выбрать систему координат[6] $(\zeta, \omega): \zeta = z,\ \omega = Q_s(w, z)$. Тогда

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P}{Q}\,dw \wedge dz\right] = \operatorname{Res}\left[\frac{F}{\omega^r}\,d\zeta \wedge d\omega\right] \Rrightarrow$$

$$\Rrightarrow \frac{1}{(r_s-1)!}\left.\frac{\partial^{r_s-1}F}{\partial\omega^{r_s-1}}\right|_{\omega=0} d\zeta = \frac{1}{(r_q-1)!}\left.\frac{\partial^{r_s-1}F}{\partial Q_s^{r_s-1}}\right|_{Q_s(w,z)=0} dz,$$

где $F = PQ_s^{r_s}/Q$. Так как $\frac{\partial^{r_s-1}F}{\partial Q_s^{r_s-1}}$ — рациональная функция от w, z, отсюда по теореме 14.2 (о вычетах) получается

Теорема 18.5 (Пуанкаре). *Интеграл (18.1) по произвольному циклу $\gamma \in Z_2\,(C^2 \setminus T)$ выражается через периоды абелевых интегралов[7] на римановых поверхностях алгебраических функций, определяемых уравнениями: $Q_j(w, z) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, где Q_j — неприводимые множители полинома Q.*

В случае, когда γ_{jq}^r — цикл пересечения или полярный цикл, интеграл (18.9) может быть вычислен до конца. Пусть γ_{jq}^2 — цикл пересечения. Предположим, что точка самопересечения A_j совпадает с началом координат. Тогда

[6] Хотя в целом в окрестности кривой ω_{jq}^r эта замена может быть не взаимно-однозначной, однако локально она взаимно-однозначна. А так как в пересечении двух координатных окрестностей локальные системы координат совпадают, нет необходимости пользоваться разбиением единицы (сравни с § 17, леммой 17.1).

[7] Интеграл вида $\int\limits_{\gamma} R(w, z)dz$, где R — рациональная функция от w, z; переменные w, z связаны соотношением $Q(w, z) = 0$, Q — неприводимый полином, называется абелевым. Значение абелева интеграла по циклу на римановой поверхности называется его периодом.

элемент S_{jq} в окрестности точки A_j можно задать уравнением $w = g(z) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r z^{\frac{r}{k}}$. Цикл $\omega_{jq}^2 = \{(w, z): w = g(z), z = \delta e^{it}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi k_q\}$. Тогда интеграл (17.9) примет вид

$$\iint\limits_{\gamma_{jq}^2} \frac{P}{Q}\, dw \wedge dz = k(2\pi i)^2 \operatorname*{res}_{z=0} [\Phi(z)],$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{(r_s-1)!} \frac{\partial^{r_s-1}}{\partial Q_s^{r_s-1}} F(w, z)\big|_{w=g(z)}$.

Очевидно, $\Phi(z)$ имеет полюс в точке $z = 0$.

Вычеты относительно полярных циклов вычисляются аналогично. Если элемент $\widetilde{S}_{jq}$ соответствует конечному полюсу $z = z_0$ алгебраической функции $w = \varphi_j(z)$, то $\widetilde{S}_{jq}$ задается уравнением $w = g(z) = \sum_{r=-n_0}^{\infty} c_r (z - z_0)^{\frac{r}{k_q}}$. Если $\widetilde{S}_{jq}$ соответствует точке $z = \infty$, то его уравнение имеет вид $w = \sum_{r=n_0}^{-\infty} c_r z^{\frac{r}{k_q}}$, $|z| > R$.

Таким образом, вычисление вычета рациональной функции относительно цикла пересечения или полярного цикла сводится к повторному вычислению однократного вычета относительно полюса, т. е. сводится к дифференцированию.

П р и м е р. Рассмотрим интеграл

$$J = \iint\limits_{\gamma} \frac{P(w, z)\, dw \wedge dz}{w(w^2 - z^3)(w^2 - z^3 - z^4)}, \tag{18.10}$$

где $\gamma \in Z_2(C^2 \setminus T)$; $T = \{Q(w, z) = 0\}$; $Q(w, z) = w(w^2 - z^3) \times \times (w^2 - z^3 - z^4)$. Каждый неприводимый множитель знаменателя определяет риманову поверхность рода нуль. Поверхность T имеет 2 точки самопересечения: $(0, 0)$ и $(0, -1)$. В точке $(0, 0)$ пересекается 3 неприводимых элемента (ростка) алгебраической кривой T, а в $(0, -1)$ — два. Связные компоненты $\{w = 0\}$, $\{w^2 - z^3 = 0\}$ имеют по одному бесконечно удаленному элементу, а компонента

$\{w^2 - z^3 - z^4 = 0\}$ имеет их два. Таким образом, по формуле (18.6) размерность группы $H_2(C^2 \setminus T)$ равна 4. Имеем 3 базисных цикла пересечения, из которых два:

$$\gamma_1 = \{z = \varepsilon e^{it}, \quad \omega = \delta e^{i\tau}, \quad 0 \leqslant t, \quad \tau \leqslant 2\pi\},$$

$$\gamma_2 = \{z = \varepsilon e^{it}, \ w = \varepsilon^{3/2} e^{3it/2} + \delta e^{i\tau}, 0 \leqslant t \leqslant 4\pi, \\ 0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi\}$$

— соответствуют точке (0, 0), а один

$$\gamma_3 = \{z = -1 + \varepsilon e^{it}, \quad w = \delta e^{i\tau}, \quad 0 \leqslant t, \quad \tau \leqslant 2\pi\}$$

— точке (0, —1), и один полярный цикл

$$\gamma_4 = \{z = \mathrm{R} e^{it}, \quad w = R^2 e^{2it} \sqrt{1 + R^{-1} e^{-it}} + \delta e^{i\tau}, \\ 0 \leqslant t, \quad \tau \leqslant 2\pi\}.$$

Здесь ε и δ — достаточно малые числа $\delta \ll \varepsilon$, а $R > 1$.

Вычислим вычеты по базисным циклам:

$$R_1 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{\gamma_1} \frac{P}{Q}\, dw \wedge dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\varepsilon} \frac{P(0, z)\, dz}{z^3 (z^3 + z^4)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k P(0, 0)}{\partial z^k};$$

$$R_2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{\gamma_2} \frac{P}{Q}\, dw \wedge dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{z = e^{it} \\ 0 < t \leqslant 4\pi}} \frac{P(z^{3/2}, z)\, dz}{z^{3/2} 2 z^{3/2} z^4} =$$

$$= \frac{1}{6!} \frac{\partial^6 P(0, 0)}{\partial z^6} + \frac{1}{2!3!} \frac{\partial^5 P(0, 0)}{\partial w^2 \partial z^3} + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 P(0, 0)}{\partial w^4};$$

$$R_3 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{\gamma_3} \frac{P}{Q}\, dw \wedge dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z+1|=\varepsilon} \frac{P(0, z)\, dz}{z^3 (z^3 + z^4)} = P(0, -1);$$

$$R_4 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{\gamma_4} \frac{P}{Q}\, dw \wedge dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} \frac{P\left(\sqrt{z^3 + z^4},\, z\right)}{2 (z^3 + z^4) z^4}\, dz =$$

$$= \operatorname*{res}_{\zeta=0} P\left(\sqrt{1 + \zeta}/\zeta^2,\ 1/\zeta\right) \zeta^6 / 2 (\zeta + 1).$$

Последний вычет легко вычисляется при конкретном задании полинома P. По теореме 13.2 интеграл (18.1) по произвольному циклу γ равен $J = (2\pi i)^2 \sum_{j=1}^{4} n_l R_l$, где n_l — целые числа.

6°. Чтобы не различать циклы пересечения и полярные циклы, интеграл (18.1) можно рассматривать в комплексном проективном пространстве CP^2. После перехода к однородным координатам $(z_0, z_1, z_2) : w = z_1/z_0$, $z = z_2/z_0$ интеграл (17.1) примет вид

$$\iint\limits_{\gamma} \frac{P(z_0, z_1, z_2)}{Q(z_0, z_1, z_2)} (z_0 dz_1 \wedge dz_2 - z_1 dz_0 \wedge dz_2 + z_2 dz_0 \wedge dz_1), \quad (17.1')$$

где $\gamma \in Z^2(CP^2 \setminus T)$; $T = \{(z_0, z_1, z_2) \in CP^2 : Q(z_0, z_1, z_2) = 0\}$. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 18.6 (Цих).

$$H_2(CP^2 \setminus T) \simeq H_1(T).$$

Теорема 18.6. *Одномерное число Бетти алгебраической кривой T в CP^2, т. е. размерность группы $H_1(T)$, определяется формулой*

$$p = \sum_{j=1}^{m} 2\rho_j + \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - 1) - m + 1,$$

где m — число различных неприводимых множителей $Q_1, \ldots, Q_m$ полинома Q; ρ_j — род алгебраической кривой, определяемой уравнением $Q_j(z_0, z_1, z_2) = 0$; k — число точек самопересечения алгебраической кривой T; α_i — число неприводимых компонент (ростков) кривой T в окрестности точки самопересечения A_i.

Базу группы гомологий $H_2(CP^2 \setminus T)$ можно построить так же, как в п. 3° (см. [196]). Получим $\sum_{j=1}^{m} 2\rho_j$ канонических циклов и $\sum_{j=1}^{k} (\alpha_j - 1) - m + 1$ циклов пересечения.

Укажем один любопытный аналог теорем 17.2 и 17.3 для одного частного случая рациональных функций n переменных. Пусть P, Q — полиномы от $z = (z_1, \ldots, z_n)$ и $Q(z) = Q_2^{r_2}(z_1, z_2) \ldots Q_n^{r_n}(z_1, z_n)$. Обозначим $T_j = \{z \in C^n : Q_j(z_1, z_j) = 0\}$, $\dot{T}_j = T_j \cup \cup \{\infty\}$ — замыкание T_j в пространстве $\dot{C}^n = C^n \cup \{\infty\}$, являяющемся сферической компактификацией пространства C^n.

Теорема 18.7 (Цих).

$$H_n\left(C^n\setminus(T_2\cup\ldots\cup T_n)\right)\simeq H_1(\dot{T}_2\cap\ldots\cap\dot{T}_n).$$

При этом база группы $H_n\left(C^n\setminus(T_2\cup\ldots\cup T_n)\right)$ строится точно так же, как в п. 3°, т. е. строятся одномерные циклы на комплексной кривой $\dot{T}_2\cap\ldots\cap\dot{T}_n$, а затем берется сложная кограница Лере δ^{n-1}. Применяя формулу сложного вычета Лере (16.17), можно показать, что интеграл $\int\limits_\gamma \frac{P}{Q}\,dz$, где $\gamma\in Z_n\left(C^n\setminus(T_2\cup\ldots\cup T_n)\right)$, выражается через периоды абелевых интегралов на алгебраической кривой $T_2\cap\ldots\cap T_n$ (см. [193]).

§ 19. ЛОКАЛЬНЫЕ ВЫЧЕТЫ НЕКОТОРЫХ МЕРОМОРФНЫХ И РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В C^n

1°. Пусть $\varphi_1,\ldots,\varphi_N$ — голоморфные функции в окрестности точки $a\in C^n$, $\varphi_j(a)=0$, $\left.\frac{\partial(\varphi_{\alpha_1},\ldots,\varphi_{\alpha_n})}{\partial(z_1,\ldots,z_n)}\right|_{z=a}\neq 0$ для любого набора $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subset\{1,\ldots,N\}$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz\Big/\prod_{j=1}^N\varphi_j^{r_j}(z),\tag{19.1}$$

где $\gamma\in Z_n\left(U\setminus\bigcup\limits_{j=1}^N T_j\right)$, U — достаточно малая окрестность точки a, $T_j=\{z:\varphi_j(z)=0\}$, $f\in A(U)$, а также более общий интеграл

$$\int\limits_\gamma F(z)\,dz,\tag{19.2}$$

где $F\in A\left(U\setminus\bigcup\limits_{j=1}^N T_j\right)$. Применим для изучения этих интегралов подход, рассмотренный в § 15. Найдем двойственные по де Раму базы n-мерных гомологий и когомологий области $U \setminus \bigcup_{j=1}^{N} T_j$, а также вычислим вычеты функций $f / \prod_{j=1}^{N} \varphi_j^{r_j}$ относительно базисных циклов.

2°. Предварительно докажем некоторые вспомогательные теоремы о разделении особенностей. Частным случаем теоремы о разрешимости первой проблемы Кузена (см. [189, теорему 5.5.1]) является следующая

Теорема 19.1. *Пусть D_1 и D_2 — области в $\mathbf{C}^n$ такие, что $D_1 \cup D_2$ — область голоморфности. Тогда всякую функцию $f \in A(D_1 \cap D_2)$ можно представить в* виде $f = f_1 + f_2$, *где* $f_j \in A(D_j)$, $j = 1, 2$.

Опираясь на нее, докажем одну теорему о разделении особенностей, лежащих на аналитических множествах.

Теорема 19.2. (Южаков). *Пусть G — область голоморфности в $\mathbf{C}^n$,* $\varphi_j \in A(G)$, $j = 1, \ldots, k$, $k \geqslant n$. Если существуют функции $c_j \in A(G)$, $c_j(z) \neq 0$ в G, $j = 1, \ldots, k$, такие что $c_1\varphi_1 + \ldots + c_k\varphi_k \equiv 0$, тогда всякую функцию $f \in A\left(G \setminus \bigcup_{j=1}^{k} T_j\right)$ можно представить в виде $f = f_1 + \ldots + f_{k-1}$, где $f_j \in A(G \setminus (T_1 \cup \ldots [j] \ldots \ldots \cup T_k))$, $j = 1, \ldots, k-1$.

Доказательство проведем индукцией по k. Для $k = 3$ теорема 13.2 является следствием теоремы 19.1. Действительно, положим $D_1 = G \setminus (T_2 \cup T_3)$, $D_2 = G \setminus (T_1 \cup T_3)$. Тогда $D_1 \cap D_2 = G \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_3)$, причем $D_1 \cup D_2 = G \setminus (T_3 \cup (T_1 \cap T_2)) = G \setminus T_3$ — область голоморфности (здесь $T_1 \cap T_2 = \{z \in G : \varphi_1(z) = \varphi_2(z) = 0\} \subset T_3 = \{z \in G : \varphi_3(z) = -[c_1(z)\varphi_1(z) + c_2(z)\varphi_2(z)]/c_3(z) = 0\}$).

Предположим теорему справедливой для $k \geqslant 3$ и докажем ее для $k+1$. Пусть $f \in A\left(G \setminus \bigcup_{j=1}^{k+1} T_j\right)$, тогда f голоморфна и в области $G \setminus \left(T_k' \cup \bigcup_{j=1}^{k+1} T_j\right) = G' \setminus (T_1 \cup \ldots \cup T_{k-1} \cup T_k')$, где

$$T_k' = \{z \in G : c_k(z)\varphi_k(z) + c_{k+1}(z)\varphi_{k+1}(z) = 0\}, \quad G' = G \setminus (T_k \cup T_{k+1}).$$

Область G' и функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{k-1}, c_k\varphi_k + c_{k+1}\varphi_{k+1}$ удовлетворяют условиям теоремы для k. По предположению индукции функцию f можно представить в виде $f = g_1 + \ldots + g_{k-1}$, где $g_j \in A(G_j)$; $G_j = G' \setminus (T_1 \cup \ldots [j] \ldots \cup T_{k-1} \cup T'_k) = D_j \setminus (T_k \cup T'_k \cup T_{k+1})$; $D_j = G \setminus (T_1 \cup \cup \ldots [j] \ldots \cup T_{k-1})$. По доказанному для $k = 3$ функцию g_j можно представить в виде $g_j = f_j + \varphi_j$, где $f_j \in A(D_j \setminus T_k \cup T_{k+1}) = A(G \setminus (T_1 \cup \ldots [j] \ldots \cup T_{k+1}))$, а $\varphi_j \in A(D_j \setminus T'_k \cup T_{k+1})$, $j = 1, \ldots, k-1$. Тогда функция $f_k = \sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j = f - \sum_{j=1}^{k-1} f_j$ голоморфна в областях $G \setminus \bigcup_{j=1}^{k+1} T_j$ и $\bigcap_{j=1}^{k-1} (D_j \setminus (T'_k \cup T_{k+1})) = G \setminus (T_1 \cup \ldots \cup T_{k-1} \cup T'_k \cup \cup T_{k+1})$, а значит, и в их объединении

$$G \setminus (T_1 \cup \ldots \cup T_{k-1} \cup T_{k+1} \cup (T_k \cap T'_k)) = \\ = G \setminus (T_1 \cup \ldots \cup T_{k-1} \cup T_{k+1}).$$

Здесь $T_k \cap T'_k = \{z \in G : \varphi_k(z) = c_k(z)\,\varphi_k(z) + c_{k+1}(z) \times \times \varphi_{k+1}(z) = 0\} \subset T_{k+1} = \{z \in G : \varphi_{k+1}(z) = 0\}$. $\square$

3°. Вернемся к обозначениям п. 1°. Обозначим через A множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, у которых $1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n-1} \leqslant N - 1$, $\alpha_n = N$.

Теорема 19.3. *Размерность групп* $H_n\left(U \setminus \bigcup_{j=1}^{N} T_j\right)$, $H^n(U \setminus \bigcup_{j=1}^{N} T_j)$ *равна* $\binom{N-1}{n-1}$. *Циклы*

$$\gamma_\alpha = [z \in U : |\varphi_{\alpha_1}(z)| = \ldots = |\varphi_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,$$

$$|\varphi_{\alpha_n}(z)| = \varepsilon], \quad \alpha \in A,$$

где ε, δ/ε — *достаточно малые положительные числа, и формы*

$$\omega_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{d\varphi_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{\alpha_n}}{\varphi_{\alpha_1} \ldots \varphi_{\alpha_n}}, \quad \alpha \in A,$$

образуют двойственные по де Раму базы n-мерных гомологий и когомологий области $U \setminus \bigcup_{j=1}^{N} T_j$.

Лемма 19.4. *При* $N \geqslant n$ *всякую функцию* $f \in A\left(U \setminus \bigcup_{j=1}^{N} T_j\right)$ *в некоторой окрестности* V *точки* a, $V \subset U$, *можно представить в виде* $f = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha$, где $f_\alpha \in A\left(V \setminus \bigcup_{j=1}^{n} T_{\alpha_j}\right)$.

Доказательство. Проведем индукцию по N. При $N = n$ утверждение тривиально. Предположим лемму справедливой для $N - 1 \geqslant n$ и докажем ее для N. Из предположения, что $\left.\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z}\right|_a \neq 0$, для любого набора $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \{1, \ldots, N\}$ следует, что в некоторой окрестности V точки a функцию φ_N можно представить в виде $\varphi_N = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$, где $c_j \in A(V)$, $c_j(z) \neq 0$ в V. Действительно, достаточно сделать замену $\zeta_j = \varphi_j(z)$, $j = 1, \ldots, n$, разложить функцию φ_N в ряд по $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ и сделать группировку членов ряда по ζ_j, $j = 1, \ldots, n$. Так как $V \setminus \bigcup_{j=1}^{N} T_j$ — область голоморфности, то по теореме 19.2 функцию f можно представить в виде $f = \sum_{j=1}^{n} f_j$, где $f_j \in A\ (V \setminus T_1 \cup \ldots [j] \ldots \cup T_N))$, $j = 1, \ldots, n$. Теперь остается применить предположение индукции к функциям f_j. □

Замечание. Если f — мероморфная функция, то функции f_α, $\alpha \in A$, можно также выбрать мероморфными. Для этого функцию $f = F \Big/ \prod_{j=1}^{N} \varphi_j^{r_j}$ умножим на $\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j$ и разделим на φ_N, затем в каждом слагаемом произведем сокращение на φ_j. Повторяя этот прием конечное число раз, представим f в виде $f = \sum_{j=1}^{n} f_j$, где $f_j = F_j \Big/ \left(\varphi_1^{\beta_1} \ldots \right.$ $\left.\ldots [j] \ldots \varphi_N^{\beta_N}\right)$.

Доказательство теоремы 19.3. Будем предполагать окрестность U достаточно малой и такой, что для любого $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и любого $j\neq\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ существуют функции $c_k\in A(\overline{U})$, $c_k(z)\neq 0$ в $\overline{U}$, $k=1,\ldots,n$, для которых $\varphi_j=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\varphi_{\alpha_k}$. При ε и δ/ε достаточно малых $|\gamma_\alpha|\subset U\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{N}T_j$. Действительно, для $j=\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, очевидно, $|\gamma_\alpha|\cap T_j=\varnothing$. Для $j\in\{1,\ldots[\alpha_1,\ldots,\alpha_n],\ldots,N\}$ $T_j\cap|\gamma_\alpha|=\varnothing$, если $\dfrac{\delta}{\varepsilon}<\min\limits_{z\in\overline{U}}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left|\dfrac{c_k(z)}{c_n(z)}\right|$.

По теореме Серра всякая форма $\omega\in Z^n\left(U\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{N}T_j\right)$ когомологична голоморфной форме $\omega\sim f(z)dz$, где $f\in A\left(U\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{N}T_j\right)$. По лемме 19.4 $f dz=\sum\limits_{\alpha\in A}f_\alpha dz$, где $f_\alpha\in A\left(U\setminus\left(T_{\alpha_1}\cup\ldots\cup T_{\alpha_n}\right)\right)$. Точно так же, как в примере 15.8, можно показать, что $f_\alpha dz\sim c_\alpha\omega_\alpha$, где c_α — const. Для этого достаточно сделать замену

$$\zeta_j=\varphi_{\alpha_j}(z),\quad j=1,\ldots,n, \tag{19.3}$$

и разложить функцию f_α в ряд Лорана по степеням $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$. Согласно предложению (15.4), остается показать, что

$$\int\limits_{\gamma_\alpha}\omega_\beta=\begin{cases}1, & \text{если } \alpha=\beta,\\ 0, & \text{если } \alpha\neq\beta.\end{cases}$$

После замены (19.3) получаем

$$\int\limits_{\gamma_\alpha}\omega_\alpha=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\substack{|\zeta_n|=\varepsilon\\ |\zeta_1|=\ldots=|\zeta_{n-1}|=\delta}}\frac{d\zeta}{\zeta}=1.$$

При $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\neq\alpha=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ цикл $\gamma_\alpha\sim 0$

в $U \setminus (T_{\beta_1} \cup \ldots \cup T_{\beta_n})$. Действительно, в этом случае найдется $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ такое, что $\alpha_j \neq \beta_1, \ldots, \beta_n$. Тогда $\gamma_\alpha = \partial B$, где $B = [z \in U : |\varphi_{\alpha_1}(z)| = \ldots [\alpha_j] \ldots = |\varphi_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta, |\varphi_{\alpha_j}(z)| \leqslant \delta, |\varphi_{\alpha_n}(z)| = \varepsilon]$. При этом $|B| \subset U \setminus T_{\beta_1} \cup \ldots \cup T_{\beta_n}$, так как если $\beta_q = \alpha_k$, $k \neq j$, то, очевидно, $T_{\beta_q} \cap |B| = \varnothing$; если $\beta_q \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, то на $|B|$ выполняется неравенство $\varepsilon = |\varphi_{\alpha_n}| > \sum_{k=1}^{n-1} \left|\frac{c_k}{c_n}\right| \delta \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left|\frac{c_k}{c_n}\right| |\varphi_{\alpha_k}|$,

т. е. $\varphi_{\beta_q} \neq 0$ и тоже $T_{\beta_q} \cap |B| = \varnothing$. Здесь $\varphi_{\beta_q} = c_1\varphi_{\alpha_1} + \ldots + c_n\varphi_{\alpha_n}$, $c_j \in A(U)$, $c_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда по следствию 0.4 $\int\limits_{\gamma_\alpha} \omega_\beta = 0$. Очевидно, число элементов множества A равно числу сочетаний из $N-1$ по $n-1$, т. е. $\binom{N-1}{n-1}$. □

4°. Вычислим вычеты формы $f(z)dz$ относительно базисных циклов γ_α, $\alpha \in A$. Сделаем замену переменных (19.3) в окрестности U точки a. Тогда

$$R_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma_\alpha} f(z)\, dz = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} g(\zeta)\, d\zeta,$$

где

$$\Gamma = \{\zeta \in C^n : |\zeta_1| = \ldots = |\zeta_{n-1}| = \delta, \quad |\zeta_n| = \varepsilon\};$$

$$g(\zeta) = \left[f(z) \Big/ \frac{\partial(\varphi_\alpha)}{\partial(z)} \right] \Bigg|_{z = \varphi_\alpha^{-1}(\zeta)}; \quad \varphi_\alpha = (\varphi_{\alpha_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_n}).$$

Так как функция g голоморфна в окрестности n-кругового компакта $|\Gamma|$, она допускает в ней разложение в ряд Лорана по переменным $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Коэффициент при $\zeta^{-I} = \zeta_1^{-1} \ldots \zeta_n^{-1}$ этого ряда, очевидно, равен R_α.

В общем случае находить обращение голоморфного отображения (19.3) сложно. На самом деле, при вычислении вычета R_α можно ограничиться линейной заменой переменных

$$\zeta_j = \mathscr{L}_{\alpha_j}(z), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{19.4}$$

где $\mathscr{L}_{\alpha_j}$ — линейная часть функции φ_{α_j} в точке a. Действительно, цикл γ_α гомологичен (гомотопен) в $U \setminus \setminus \bigcup_{j=1}^{N} T_j$ циклу

$$\widetilde{\gamma}_\alpha = \{z \in U : |\mathscr{L}_{\alpha_1}(z)| = \ldots = |\mathscr{L}_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta, \\ |\mathscr{L}_{\alpha_n}(z)| = \varepsilon\}.$$

Тогда

$$R_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n \Delta_\alpha} \int_\Gamma f\left(\mathscr{L}_\alpha^{-1}(\zeta)\right) d\zeta,$$

где $\Delta_\alpha = \left.\frac{\partial(\varphi_\alpha)}{\partial(z)}\right|_a$. Для нахождения вычета R_α остается разложить функцию $f\left(\mathscr{L}_\alpha^{-1}(\zeta)\right)$ в кратный ряд Лорана в окрестности n-кругового компакта $|\Gamma|$.

В случае мероморфной функции $f = F \Big/ \prod_{j=1}^{N} \varphi_j^{r_j}$ этот коэффициент ряда Лорана можно найти следующим образом. После замены (19.4) функция $f\left(\mathscr{L}_\alpha^{-1}(\zeta)\right)$ принимает вид

$$\frac{\psi(\zeta)}{\prod_{j=1}^{n}\Big(\zeta_j + \sum_{|\beta|>1} a_{\alpha_j\beta}\zeta^\beta\Big)^{r_{\alpha_j}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \alpha}}^{N}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\xi_k + \sum_{|\beta|>1} a_{j\beta}\zeta^\beta\Big)^{r_j}}. \tag{19.5}$$

Для ε, δ, δ/ε, достаточно малых на Γ, выполняются неравенства

$$\Big|\sum_{|\beta|>1} a_{\alpha_j\beta}\zeta^\beta\Big| < |\zeta_j|;$$

$$\Big|\sum_{k=1}^{n-1} a_{jk}\zeta_j + \sum_{|\beta|>1} a_{j\beta}\zeta^\beta\Big| < |a_{jn}\zeta_n|.$$

Таким образом, на Г дроби

$$1/\zeta_j \left(1 + \frac{1}{\zeta_j} \sum_{|\beta|>1} a_{\alpha_j\beta} \zeta^\beta\right)_x$$

$$1/a_{jn}\zeta_n \left[1 + \frac{1}{a_{jn}\zeta_n} \left(\sum_{|\beta|\geq 1} a_{j\beta}\zeta^\beta + \sum_{k=1}^{n-1} a_{jk}\zeta_j\right)\right]$$

можно разложить в ряды геометрических прогрессий. Перемножая полученные ряды и ряд Тейлора функции ψ, получим ряд Лорана дроби (19.5). Заметим, что для нахождения коэффициента при ζ^{-1} ряда Лорана достаточно иметь лишь конечное число членов указанных рядов.

Иногда знаменатель дроби (19.5) удобно представить в виде

$$\left(\prod_{j=1[\alpha]}^{N} a_{jn}^{r_j}\right) \left(\prod_{j=1}^{n} \zeta_j^{r_j}\right) \zeta_n^{r_1+\ldots[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]\ldots+r_N} [1 + g(\zeta)],$$

где

$$g(\zeta) = \sum_{|\beta|>r_1+\ldots+r_N} c_\beta \zeta^\beta \Bigg/ \left(\prod_{j=1}^{N} a_{j\alpha}^{r_j}\right) \left(\prod_{j=1}^{n} \zeta_j^{r_j}\right) \zeta_n^{r_1+\ldots[\alpha]\ldots+r_N}.$$

При ε, δ/ε, достаточно малых, $|g(\zeta)| < 1$ на $|\Gamma|$. Раскладывая дробь $1/(1-g)$ в ряд геометрической прогрессии, найдем ряд Лорана дроби (19.5) в окрестности $|\Gamma|$.

5°. Использованные здесь приемы можно применить также для изучения вычетов рациональной функции, знаменатель которой разлагается на линейные множители. Рассмотрим интегралы вида

$$\int_\gamma P(z)\, dz \Bigg/ \prod_{j=1}^{N} \mathscr{L}_j^{r_j}(z) \tag{19.6}$$

и

$$\int_\gamma f(z)\, dz, \tag{19.7}$$

где P — полином (либо целая функция);

$$\mathscr{L}_j(z) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} z_k + a_{j0}, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{19.8}$$

— линейные функции; $E_j = \{z : \mathscr{L}_j(z) = 0\}$; $f \in A\left(C^n \setminus \bigcup_{j=1}^{N} E_j\right)$.

Пусть ранг матрицы

$$\|a_{jk}\|_{\ j=1,\ldots,N;\ k=1,\ldots,n} \qquad (19.9)$$

равен r, $r \leqslant n$. Обозначим через $\Omega = \{\omega\}$ семейство всевозможных максимальных наборов индексов $\omega \subset \{1, \ldots, N\}$, для которых ранг расширенной матрицы $\|a_{jk}\|_{j\in\omega; k=0,1,\ldots,n}$ также равен r, т. е. $\bigcap_{j\in\omega} E_j \neq \varnothing$.

Лемма 19.5. *Всякую функцию $f \in A\left(C^n \setminus \bigcup_{j=1}^{N} E_j\right)$ можно представить в виде $f = \sum_{\omega\in\Omega} f_\omega$, где $f_\omega \in A\left(C^n \setminus \bigcup_{j\in\omega} E_j\right)$.*

Доказательство. Проведем индукцию по N. Для $N = r$ утверждение очевидно. Пусть $N > r$. Предположим лемму справедливой для $N - 1$. Если ранг расширенной матрицы $\|a_{jk}\|_{j=1,\ldots,N; k=0,1,\ldots,n}$ равен r, то Ω состоит из одного набора $\omega = \{1, \ldots, N\}$. Пусть ранг расширенной матрицы равен $r + 1$. Тогда среди функций (19.8) найдутся $r + 1$ таких, для которых ранг расширенной матрицы равен $r + 1$. Пусть это $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{r+1}$. Для них найдутся числа $c_1, \ldots, c_{r+1}$, не равные нулю, такие, что $\sum_{j=1}^{r+1} c_j \mathscr{L}_j \equiv 1$. Полагая в теореме 19.2 $G = C^n \setminus (E_{r+2} \cup \ldots \cup E_N)$, $k = r + 2$, $\varphi_{r+2} \equiv 1$, $\varphi_j = \mathscr{L}_j$, $j = 1, \ldots, r + 1$, получим, что каждую функцию $f \in A\left(C^n \setminus \bigcup_{j=1}^{N} E_j\right)$ можно представить в виде $f = \sum_{j=1}^{r+1} f_j$, где $f_j \in A\left(C^n \setminus (E_1 \cup \ldots [j] \ldots \cup E_N)\right)$. Применяя к f_j предположение индукции и объединяя слагаемые, соответствующие одному и тому же $\omega \in \Omega$, докажем лемму для N. □

Возьмем систему линейных функций $\{\mathscr{L}_j\}_{j\subset\omega}$, $\omega \in \Omega$, и упорядочим множество $\omega = \{j_1, \ldots, j_q\}$, $q = q(\omega)$, так, чтобы система функций $\{\mathscr{L}_{j_1}, \ldots, \mathscr{L}_{j_r}\}$ была линейно-независима. Назовем эту систему системой 0-го шага семейства $\{\mathscr{L}_j\}_{j\in\omega}$. Очевидно, $q \geqslant r$. Линейно-независимые системы r функций из $\mathscr{L}_{j_1}, \ldots, \mathscr{L}_{j_r}$, $\mathscr{L}_{j_{r+1}}$, содержащие функцию $\mathscr{L}_{j_{r+1}}$, назовем системами 1-го шага и т. д. Системы k шага получаются, если к каждой системе $k - 1$ шага присоединить функцию $\mathscr{L}_{j_{r+k}}$ и образовать из них всевозможные системы r-линейно-независимых функций, содержащие

$\mathscr{L}_{j_{r+k}}$. Системы $\{\mathscr{L}_{\alpha_1}, \ldots, \mathscr{L}_{\alpha_r}\}$ последнего $q - r$ шага назовем каноническими системами семейства $\{\mathscr{L}_j\}_{j\in\omega}$. Множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, соответствующих каноническим системам, обозначим $J(\omega)$. Заметим, что для любого $\alpha \in J(\omega)$, $\alpha_r = j_q$. Из рекуррентного способа построения канонических систем и из теоремы 19.2 вытекает

Лемма 19.6. *Всякую функцию* $f_\omega \in A\left(C^n \diagdown \bigcup_{j\in\omega} E_j\right)$ *можно представить в виде* $f_\omega = \sum_{\alpha\in J(\omega)} f_\alpha$, где $f_\alpha \in A\left(C^n \diagdown \left(T_{\alpha_1} \cup \cdots \cup T_{\alpha_r}\right)\right)$.

Предложение 197. *Если ранг матрицы* (19.9) *равен* $r < n$, *то интеграл* (19.8) *по любому циклу* $\gamma \in Z_n\left(C^n \diagdown \bigcup_{j=1}^{N} E_j\right)$ *равен нулю*.

Доказательство. Так как $C^n \diagdown \bigcup_{j=1}^{N} E_j$ — область голоморфности, то по теореме 15.6 Серра всякий класс n-мерных когомологий может быть представлен голоморфной формой $f(z)dz$, где $f \in A\left(C^n \diagdown \bigcup_{j=1}^{N} E_j\right)$. По леммам 19.5 и 19.6 эту форму можно представить в виде

$$f(z)\,dz = \sum_{\omega\in\Omega} \sum_{\alpha\in J(\omega)} f_\alpha(z)\,dz,$$

где $f_\alpha \in A\left(C^n \diagdown \left(E_{\alpha_1} \cup \ldots \cup E_{\alpha_r}\right)\right)$. Сделаем линейную замену так, чтобы $E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_r}$ были координатными плоскостями $\zeta_1 = 0, \ldots, \zeta_r = 0$, и разложим f_α в ряд Лорана по ζ. Если $r < n$, то этот ряд не содержит отрицательных степеней по $\zeta_{r+1}, \ldots, \zeta_n$. Следовательно, $f_\alpha dz \sim 0$ (см. пример 15.8). Остается применить следствие 0.3 из формулы Стокса. □

Пусть ранг матрицы (19.9) равен n. Тогда для каждого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in J(\omega)$ построим цикл

$$\gamma_\alpha = \{z : |\mathscr{L}_{\alpha_1}(z)| = \varepsilon_1, \ldots, |\mathscr{L}_{\alpha_n}(z)| = \varepsilon_n\},$$

где $\varepsilon_1 < \ldots < \varepsilon_n$ достаточно малы и выбраны так, что при $z \in |\gamma_\alpha|$ для любого $j \in \omega$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{m-1} |b_{jk}|\,\varepsilon_k < |b_{jm}|\,\varepsilon_m,$$

где $b_{j1}, \ldots, b_{jn}$ — коэффициенты разложения $\mathscr{L}_j$ по $\mathscr{L}_{\alpha_1}, \ldots, \mathscr{L}_{\alpha_n}$: $\mathscr{L}_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\mathscr{L}_{\alpha_j}$, причем $b_{jm} \neq 0$, а $b_{jk} = 0$ для $k > m$. Отсюда следует, что $|\gamma_\alpha| \cap E_j = \varnothing$. Если $j \notin \omega$, то $E_j \cap |\gamma_\alpha| = \varnothing$, так как ε_j достаточно малы. Таким образом, $\gamma_\alpha \in Z_n\left(C^n \setminus \bigcup_{j=1}^{N} E_j\right)$.

Теорема 19.8. *Если ранг матрицы* (19.9) $r = n$, *то циклы* $\{\gamma_\alpha\}$ *и формы* $\varphi_\alpha = \dfrac{d\mathscr{L}_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge d\mathscr{L}_{\alpha_n}}{(2\pi i)^n \mathscr{L}_{\alpha_1} \ldots \mathscr{L}_{\alpha_n}}$, $\alpha \in J(\omega)$, $\omega \in \Omega$, *образуют двойственные по де Раму базы* n*-мерных гомологий и когомологий области* $C^n \setminus \bigcup_{j=1}^{N} E_j$.

Доказательство. Очевидно, что $\int\limits_{\gamma_\alpha} \varphi_\alpha = 1$. Покажем, что $\int\limits_{\gamma_\alpha} \varphi_\beta = 0$ при $\beta \neq \alpha$. Для этого достаточно показать, что цикл $\gamma_\alpha \sim 0$ в $C^n \setminus (E_{\beta_1} \cup \ldots \cup E_{\beta_n})$. Если $\alpha \in J(\omega_1)$, $\beta \in J(\omega_2)$, $\omega_1 \neq \omega_2$, то найдется $\beta_k \notin \omega_1$. Для любого $\beta_j \in \omega_1$ имеет место представление $\mathscr{L}_j = \sum_{k=1}^{m} b_{jk}\mathscr{L}_{\alpha_j}$, $b_{jm} \neq 0$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Так как не все $\beta_j \in \omega_1$, $j = 1, \ldots, n$, то найдется k, $1 \leqslant k \leqslant m$, такое, что $m = m(\beta_j) \neq k$ для $\beta_j \in \omega_1$. Тогда $\gamma_\alpha = \partial B$, где

$$B = \{z : |\mathscr{L}_{\alpha_j}(z)| = \varepsilon_j,\ j = 1, \ldots [k] \ldots, n,\ |\mathscr{L}_{\alpha_k}(z)| \leqslant \varepsilon_k\}, \tag{19.10}$$

и $|\partial| \cap E_{\beta_j} = \varnothing$, $j = 1, \ldots, n$. Действительно, для $z \in |B|$, $|\mathscr{L}_{\beta_j}| = \left|\sum_{j=1}^{m} b_j \mathscr{L}_{\alpha_j}\right| \geqslant |b_m|\varepsilon_m - \sum_{l=1}^{m-1} |b_l|\varepsilon_l > 0$. Если $\beta_j \notin \omega_1$, то $|B| \cap E_{\beta_j} = \varnothing$, так как $|B|$ лежит в достаточно малой окрестности точки $a = \bigcap_{l \in \omega_1} E_l \in C^n$ и $\mathscr{L}_{\beta_j}(a) \neq 0$. Пусть теперь α, $\beta \in J(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $\alpha \neq \beta$. Для удобства обозначений положим $\omega = \{1, \ldots, q\}$, $\alpha_n = \beta_n = q$. Пусть $\alpha_j = \beta_j$, $j = r + 1, \ldots, n$, $\alpha_r \neq \beta_r$, $r < n$. Тогда найдется хотя бы один индекс β_j, $j \leqslant r$, для которого $\mathscr{L}_{\beta_j}$ не выражается линейно через $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. В противном случае система $\mathscr{L}_{\beta_1}, \ldots, \mathscr{L}_{\beta_r}$ получается из системы $\mathscr{L}_{\alpha_1}, \ldots, \mathscr{L}_{\alpha_r}$ невырожденным преобразованием, поскольку это линейно-независимые системы. Так как $(\mathscr{L}_{\beta_1}, \ldots$ $\ldots, \mathscr{L}_{\beta_r})$, $(\mathscr{L}_{\alpha_1}, \ldots, \mathscr{L}_{\alpha_r})$ встречаются в канонических системах, то они должны встречаться соответственно в системах $(\beta_r - n)$-го, $(\alpha_r - n)$-го и всех последующих шагов. Пусть, например, $\alpha_r < \beta_r$ (аналогично $\beta_r > \alpha_r$). Тогда на $(\alpha_\lambda - n)$ шаге вместо систем, содержащих $(\mathscr{L}_{\beta_1}, \ldots, \mathscr{L}_{\beta_r})$, появятся системы, содержащие $(\mathscr{L}_{\beta_1}, \ldots [j] \ldots, \mathscr{L}_{\beta_r}, \mathscr{L}_{\alpha_r})$, $j = 1, \ldots, r$, т. е. на $(\alpha_r - m)$ последующих шагах не будет систем, содержащих $(\mathscr{L}_{\beta_1}, \ldots, \mathscr{L}_{\beta_r})$. Противоречие. Следовательно, найдется k, $1 \leqslant k \leqslant r$, такое, что в разложениях $\mathscr{L}_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ji} \mathscr{L}_{\alpha_i}$, где $\beta_{jm} \neq 0$, для $j = \beta_1, \ldots, \beta_n$ будет $m = m(j) \neq k$. И тогда снова $\gamma_\alpha = \partial B$, где B имеет вид (19.10), причем $|B| \cap E_{\beta_j} = \varnothing$, $j = 1, \ldots, n$.

Из лемм 19.5 и 19.6 следует, что форма $f dz$ когомологична линейной комбинации форм $\{\varphi_\alpha\}$ (см. пример 15.8). Таким образом, согласно предложению 15.4, циклы $\{\gamma_\alpha\}$ и формы $\{\varphi_\alpha\}$ образуют базы, двойственные по де Раму. $\Box$

Интегралы (19.6), (19.7) относительно базисных циклов (вычеты) можно вычислять методом, указанным в п. 4°.

Глава IV

ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕЯВНЫМ ФУНКЦИЯМ, СИСТЕМАМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВЫЧИСЛЕНИЮ КРАТНОСТИ НУЛЯ И КОМБИНАТОРИКЕ

§ 20. РАЗЛОЖЕНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

1°. С помощью логарифмического вычета для голоморфных функций одного комплексного переменного легко выводится разложение Лагранжа (см. [120, 170, 67])

$$F(z(\zeta)) = F(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[F'(z)\, \Psi^k(z)\right]_{z=z_0}, \quad (20.1)$$

выражающее функцию $F(z)$ через переменное ζ, связанное с z уравнением $z = z_0 + \zeta\Psi(z)$, если $F(z)$ и $\Psi(z)$ — голоморфные функции в окрестности точки $z_0 \in C^1$. В частности, получается ряд Бюрмана — Лагранжа (см. [170, 200]), позволяющий представить одну голоморфную функцию $\Phi(z)$ в виде ряда по степеням другой голоморфной функции $w = f(z) = (z - z_0)\Psi(z)$, $\Psi(z_0) \neq 0$, в окрестности точки $z_0 \in C^1$:

$$\Phi(z) = \Phi(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[\frac{\Phi'(z)}{\Psi^k(z)}\right]\Bigg|_{z=z_0}. \quad (20.2)$$

При $\Phi(z) \equiv z$ ряд (20.2) дает обращение голоморфной функции $w = f(z)$ в окрестности точки z_0.

В данном параграфе с помощью кратного логарифмического вычета выводятся обобщения разложения Лагранжа (20.1) для случая произвольных неявных функций, определяемых системой уравнений, а также формулы обращения голоморфного отображения в C^n, рассматриваются некоторые случаи нахождения однозначной ветви неявной функции в вырожденном случае, оцениваются области сходимости и остатки полученных рядов.

2°. **Обобщение разложения Лагранжа на системы произвольных неявных функций.** Пусть $\Phi(w, z)$,

$$F_j(w, z),\ j = 1, \ldots, n, \tag{20.3}$$

— голоморфные функции переменных $w = (w_1, \ldots, \ldots, w_m)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ в окрестности точки $(0, 0) \in C^{m+n}$, $F_j(0, 0) = 0$, $j = 1, \ldots, n$; $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial (F_1, \ldots, F_n)}{\partial (z_1, \ldots, z_n)}\right|_{(0,0)} \neq \neq 0$. По теореме существования неявных функций (см. [189, 201]) система уравнений

$$F_j(w, z) = 0,\ j = 1, \ldots, n, \tag{20.4}$$

в окрестности точки $(0, 0) \in C^{m+n}$ однозначно определяет систему функций

$$z_j = \varphi_j(w),\ j = 1, \ldots, n\ (z = \varphi(w)), \tag{20.5}$$

голоморфных в окрестности точки $0 \in C^m$. Рассмотрим задачу: найти явное представление функции $\Phi(w, \varphi(w))$ и, в частности (при $\Phi(w, z) \equiv z_j$), функций (20.5). Не теряя общности, можно предполагать, что

$$F_j(0, 0) = 0,\ \frac{\partial F_j(0, 0)}{\partial z_k} = \delta_{jk},\quad j, k = 1, \ldots, n. \tag{20.6}$$

В противном случае заменим систему (20.4) эквивалентной ей системой $\left\| \frac{\partial F_j(0, 0)}{\partial z_k} \right\|^{-1} \cdot F(w, z) = 0$.

Теорема 20.1. *Пусть функции (20.2) удовлетворяют условиям (20.6). Тогда найдутся числа* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *такие, что в замкнутом поликруге* $\overline{V}_\delta = \{w \in \in C^m : |w_j| \leqslant \delta,\ j = 1, \ldots, n\}$, *имеет место интегральное представление*

$$\Phi(w, \varphi(w)) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\Phi(w, z)}{F^{I}(w, z)} \frac{\partial F}{\partial z}\, dz, \tag{20.7}$$

где $F^I = F_1 \ldots F_n$, $\Gamma_\varepsilon = \{z : |z_1| = \ldots = |z_n| = \varepsilon\}$. *При* $\Phi(w, z) \equiv z_j$ *формула (20.6) дает интегральное представление неявных функций (20.5), определяемых уравнениями (20.4).*

Доказательство. Из условий (20.6) следует, что ряд Тейлора функции $g_j(w, z) = F_j(w, z) - z_j$, $j = 1, \ldots, n$, в точке $(0, 0)$ не содержит свободного члена и членов из первых степеней переменных $z_1, \ldots, z_n$. Следовательно, найдутся такие числа $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, что при любых $w \in \overline{V}_\delta$, $z \in \Gamma_\varepsilon$ будут выполняться неравенства

$$|g_j(w, z)| < |z_j| = \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Так как система функций $z = (z_1, \ldots, z_n)$ имеет единственный простой нуль в точке $0 \in C^n$, по теореме 4.8 для любой точки $w \in \overline{V}_\delta$ система (20.4) имеет единственное решение $z = \varphi(w) \in U_\varepsilon = \{z : |z_j| < \varepsilon, \ j = 1, \ldots, n\}$, причем по формуле (4.8) имеет место равенство (20.7). □

Теорема 20.2 (Южаков). *При выполнении условий теоремы 20.1 функция* $\Phi(w, \varphi(w))$ *представляется в некотором поликруге* $\overline{V}_\delta$ *абсолютно и равномерно сходящимся кратным функциональным рядом*

$$\Phi(w, \varphi(w)) = \sum_{\beta > 0} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!} D_z^\beta \left[\Phi(w, z)\, g^\beta(w, z) \frac{\partial F}{\partial z} \right] \Bigg|_{z = h(w)}, \tag{20.8}$$

где $h = (h_1, \ldots, h_n)$ — *произвольная вектор-функция, голоморфная в* $\overline{V}_\delta$, *для которой* $h(0) = 0$; $g^\beta = g_1^{\beta_1} \ldots g_n^{\beta_n}$; $\beta! = \beta_1! \ldots \beta_n!$; $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$, $g_j(w, z) = F_j(w, z) - z_j + h_j(w)$, $j = 1, \ldots, n$.

Замечание. Часто удобно брать $h_j(w) \equiv 0$, либо $h_j(w) \equiv F_j(w, 0)$, $j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Найдутся $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ такие, что при $w \in \overline{V}_\delta$, $z \in \Gamma_\varepsilon$ будут выполняться неравенства $|h_j(w)| < \varepsilon/2$, $|g_j(w, z)| < \varepsilon/2$. Тогда дробь $1/F$

раскладывается в ряд кратной геометрической прогрессии

$$\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n} F_j(w, z)} = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n} (z_j - h_j)\,[1 + g_j/(z_j - h_j)]} = \\ = \sum_{\beta \geqslant 0} \frac{(-1)^{|\beta|}\, g^{\beta}(w, z)}{[z - h(w)]^{\beta + I}},$$

который равномерно и абсолютно сходится на компакте $\overline{V}_\delta \times \Gamma_\varepsilon$. Подставляя этот ряд в (20.7) и производя почленное интегрирование, получим ряд

$$\Phi(w, \varphi(w)) = \sum_{\beta \geqslant 0} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\Phi(w, z)\, g^{\beta}(w, z)\, \frac{\partial F}{\partial z}\, dz}{[z - h(w)]^{\beta + I}}, \quad (20.9)$$

который согласно следствию (4.2) совпадает с рядом (20.8). □

Предложение 20.3. *Коэффициенты разложения Тейлора*

$$\Phi(w, \varphi(w)) = \sum_{\alpha \geqslant 0} c_\alpha w^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \quad (20.10)$$

определяются формулой

$$c_\alpha = \sum_{|\beta| \leqslant 2|\alpha|} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\,\beta!} D^{\alpha, \beta}_{w, z} \left[\Phi(w, z)\, g^{\beta}(w, z)\, \frac{\partial F}{\partial z}\right]\Bigg|_{(0, 0)}, \quad (20.11)$$

где $g^\beta = g_1^{\beta_1} \ldots g_n^{\beta_n}$, $g_j(w, z) = F_j(w, z) - z_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Разложим функцию $\Phi(w, \varphi(w))$ в ряд Тейлора (20.11) с коэффициентами в интегральной форме. Так как ряд (20.9) равномерно сходится на $\overline{V}_\delta$, его можно почленно интегрировать по $\gamma_\delta = \{w : |w_1| = \ldots = |w_m| = \delta\}$. Положим при этом $h(w) \equiv 0$ и получим

$$c_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int\limits_{\gamma_\delta} \frac{\Phi(w, \varphi(w))\, dw}{w^{\alpha + I}} =$$

$$= \sum_{\beta \geqslant 0} \frac{(-1)^{|\beta|}}{(2\pi i)^{m+n}} \int\limits_{\gamma_\delta \times \Gamma_\varepsilon} \frac{\Phi(w, z)\, g^{\beta}(w, z)\, \frac{\partial F}{\partial z}\, dw \wedge dz}{w^{\alpha + I} z^{\beta + I}}. \quad (20.12)$$

Интегралы в членах ряда (20.12) с помощью формулы бинома можно представить в виде

$$\sum_{0\leqslant\mu\leqslant\beta}\frac{\beta!}{\mu!\,(\beta-\mu)!}\int\limits_{\gamma_\delta\times\Gamma_\varepsilon}\frac{\Phi\Psi^{\mu}\theta^{\beta-\mu}\,\dfrac{\partial F}{\partial z}\,dw\wedge dz}{w^{\alpha+I}z^{\beta+I}},\qquad(20.13)$$

где $\Psi(w)=g(w,\ 0)$; $\theta\ (w,\ z)=g(w,\ \ z)-\Psi(w)$; $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$; $\beta-\mu=(\beta_1-\mu_1,\ldots,\beta_n-\mu_n)$. Так как порядок нуля $d_0(\Psi)\geqslant 1$, а $d_{(0,0)}\ (\theta)\geqslant 2$ и интеграл $\int\limits_{\gamma_\delta\times\Gamma_\varepsilon} w^\alpha z^\beta dw\wedge dz\neq 0$ лишь при $\alpha_1=\ldots=\alpha_m=\beta_1=\ldots\ldots=\beta_n=-1$, то интегралы в сумме (20.13) равны нулю при $|\mu|>|\alpha|$, а также при $|\mu|+2|\beta-\mu|=2|\beta|-|\mu|>|\alpha|+|\beta|$, следовательно, и при $|\beta|>2|\alpha|$. Учитывая это и следствие 4.2, из (20.12) получим (20.11). □

При $n=1$ формулы (20.8) и (20.11) можно несколько упростить.

Предложение 20.4. *Пусть $F(w,\ z)$, $\Phi(w,\ z)$, $h(w)$ — голоморфные функции переменных $w=(w_1,\ldots\ldots,w_m)\in C^m$, $z\in C^1$ в окрестности точки $(0,\ 0)\in C^{m+1}$, $F(0,\ 0)=0$, $F'_z(0,0)=1$, $h(0)=0$. Тогда функция $\Phi(w,\ \varphi(w))$, где $z=\varphi(w)$ — неявная функция, определяемая уравнением $F(w,z)=0$, представляется функциональным рядом*

$$\Phi\,(w,\varphi\,(w))=\Phi\,(w,h\,(w))+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\times$$
$$\times\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\left[\Phi'_z\,(w,z)\,g^k\,(w,z)\right]\big|_{z=h(w)},\qquad(20.14)$$

где $g(w,\ z)=F(w,\ z)-z+h(w)$, а также кратным степенным рядом $\Phi\,(w,\varphi\,(w))=\sum\limits_{\alpha\geqslant 0}c_\alpha w^\alpha$, коэффициенты которого определяются формулой

$$c_\alpha=\frac{1}{\alpha!}\,D^\alpha_w\,\Phi\,(0,0)+\sum_{k=1}^{2|\alpha|}\frac{(-1)^k}{k|\alpha|}\,D^{\alpha,k}_{w,z}\left(\Phi'_z g^k\right)\big|_{(0,0)},\qquad(20.15)$$

где $g\,(w,z)=F\,(w,z)-z$.

Доказательство. При $n = 1$ формулу (20.8) можно представить в виде

$$\Phi(w, \varphi(w)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[\Phi(w, z) g^k(w, z)\left(1 + \frac{\partial g}{\partial z}\right)\right]\Bigg|_{z=h(w)} =$$

$$= \Phi(w, h(w)) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{d}{dz}\left(\Phi g^k\right)\right]\Bigg|_{z=h(w)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\left(\Phi \frac{\partial g^k}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=h(w)},$$

или (20.14). Формула (20.15) получается из (20.14) так же, как и в теореме 20.3. $\square$

Заметим, что ряд Лагранжа (20.1) получается из (20.14) при $m = 1$, $h(w) = 0$, $g(w, z) = -w\Psi(z)$, $w = \zeta$, если взять $z - z_0$ вместо z.

3°. Локальное обращение голоморфного отображения в C^n. Частным случаем рассмотренной задачи является следующая. Пусть в окрестности точки $0 \in C^n$ заданы голоморфное отображение

$$w_j = f_j(z),\ j = 1, \ldots, n\ \ (w = f(z)), \tag{20.16}$$

удовлетворяющее условию

$$f_j(0) = 0,\ \frac{\partial f_j(0)}{\partial z_k} = \partial_{jk},\ j, k = 1, \ldots, n, \tag{20.17}$$

и голоморфная функция $\Phi(z)$. Требуется выразить функцию $\Phi(z)$ через переменные $w = (w_1, \ldots, w_n)$ и, в частности, найти отображение

$$z_j = \varphi_j(w),\ j = 1, \ldots, n\quad (z = \varphi(w)), \tag{20.18}$$

обратное отображению (20.16) в окрестности точки $0 \in C^n$.

Теорема 20.5 (Перкус). *При сделанных предположениях в окрестности точки $0 \in C^n$ имеет место* *разложение*

$$\Phi(\varphi(w)) = \sum_{\beta \geqslant 0} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!} D^{\beta}\left[\Phi(z)\,\theta^{\beta}(z)\frac{\partial f}{\partial z}\right]\Big|_{z=w}, \qquad (20.19)$$

где $\theta^{\beta} = \theta_1^{\beta_1} \ldots \theta_n^{\beta_n}$, $\theta_j(z) = f_j(z) - z_j$, $j = 1, \ldots, n$. *При* $\Phi(z) \equiv z_j$, $j = 1, \ldots, n$, *ряд (20.19) дает формулу обращения голоморфного отображения (20.16).*

Доказательство. Положим в теореме 20.2 $m = n$, $F_j(w, z) = f_j(z) - w_j$, $h_j(w) = w_j$, получим (20.19). □

Предложение 20.6. *Коэффициенты разложения функции* $\Phi(z)$ *в ряд по функциям (20.16)*:

$$\Phi(z) = \sum_{\alpha \geqslant 0} c_{\alpha} f^{\alpha}(z) \quad \left(\Phi(\varphi(w)) = \sum_{\alpha \geqslant 0} c_{\alpha} w^{\alpha}\right) \quad (20.20)$$

выражаются формулой

$$c_{\alpha} = \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\,\beta!} D^{\alpha+\beta}\left[\Phi(z)\,\theta^{\beta}(z)\frac{\partial f}{\partial z}\right]\Big|_{z=0}. \quad (20.21)$$

Доказательство. Применяя к 20.19 разложение Тейлора и учитывая, что $d_0(\theta_j) \geqslant 2$, получим (20.20), (20.21). □

Ряды (20.19) — (20.21) можно рассматривать как многомерные аналоги ряда Бюрмана — Лагранжа (20.2). Для специального случая функций (20.16) получается более точный аналог ряда (20.2).

Теорема 20.7 (Стильтьес — Пуанкаре — Гуд). *Если компоненты отображения* (20.16) *имеют вид*

$$w_j = f_j(z) = z_j \Psi_j(z), \; \Psi_j(0) \neq 0, \; j = 1, \ldots, n,$$

то имеет место разложение

$$\Phi(\varphi(w)) = \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{w^{\alpha}}{\alpha!} D^{\alpha}\left[\frac{\Phi(z)}{\Psi^{\alpha+I}(z)} \det\left\|\delta_{jk} + \frac{z_j}{\Psi_j(z)}\frac{\partial \Psi_j}{\partial z_k}\right\|\right]\Big|_{z=0}. \quad (20.19')$$

Доказательство. Положим в (20.7) $m = n$, $F_j(w, z) = f_j(z) - w_j$, $\Phi(w, z) = \Phi(z)$. **Раскладывая дробь**

$\prod_{j=1}^{n} 1/[f_j(z) - w_j] = \prod_{j=1}^{n} 1/f_j(1 - w_j/f_j)$ в ряд кратной геометрической прогрессии, получим

$$\Phi(\varphi(w)) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\Phi(z)\frac{\partial f}{\partial z}dz}{[f(z) - w]^{I}} = \sum_{\alpha\geqslant 0} \frac{w^\alpha}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\Phi(z)\frac{\partial f}{\partial z}dz}{z^{\alpha+I}\Psi^{\alpha+I}(z)}.$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial z} = \det\left\| \delta_{jk}\Psi_j(z) + z_j\frac{\partial\Psi_j}{\partial z_k}\right\|$, по следствию 4.2 полученный ряд можно записать в виде (20.19′). $\square$

Укажем один случай обращения голоморфного отображения (20.16), когда $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0 = 0$.

Предложение 20.8. *Пусть функции системы (20.16) имеют вид*

$$w_j = z_j^{k_j}\Psi_j(z), \quad k_j \geqslant 1, \quad \Psi_j(0) = 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда в некоторой окрестности точки $0 \in C^n$ обращение отображения (20.16) $(k_1\cdot\ldots\cdot k_n)$- значно, имеет ветвления порядков k_j на координатных плоскостях $w_j = 0$ и представляется рядом по дробным степеням w:

$$z_j = w_j^{1/k_j} + \sum_{|\alpha|\geqslant 2} \frac{w^{\alpha/k}}{\alpha!} D^\alpha \left[\frac{z_j}{\Psi^{(\alpha+I)/k}(z)} \det\left\| \frac{\partial\left(z_j\Psi_j^{1/k_j}\right)}{\partial z_k}\right\|\right]\Bigg|_{z=0},$$

где $\alpha/k = (\alpha_1/k_1, \ldots, \alpha_n/k_n)$.

4°. **Выражение коэффициентов Тейлора неявных функций через коэффициенты Тейлора функций, входящих в уравнения. Обращение системы степенных рядов.** Пусть функции (20.3) заданы в виде степенных рядов

$$F_j(w, z) = z_j + \sum_{\mu,\nu}{}' a_{j\mu\nu} w^\mu z^\nu, \quad j = 1, \ldots, n. \quad (20.22)$$

Здесь и ниже мы предполагаем, что в $\sum'_{\mu,\nu}$, $\prod'_{\mu,\nu}$, $(\,)'_{\mu,\nu}$ мультииндексы $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ пробегают всевозможные наборы неотрицательных целых чисел, для которых $|\mu| + |\nu| \geqslant 2$, либо $|\mu| = 1$, $|\nu| = 0$. Функция

$$\Phi(w, z) = \sum_{(\alpha, \beta) \geqslant (0,0)} b_{\alpha\beta} w^{\alpha} z^{\beta}. \tag{20.23}$$

Теорема 20.9 (Южаков — Болотов). *Коэффициенты ряда Тейлора (20.10) функции $\Phi(w, \varphi(w))$, где $z = \varphi(w)$ — неявная вектор-функция, определяемая системой (20.4), выражаются через коэффициенты рядов (20.22), (20.23) следующей формулой:*

$$c_{\alpha} = \sum_{\eta, \tau, S} (-1)^{|\rho(S)|} b_{\eta\tau} \Delta(S) \prod_{j=1}^{n} [\rho(S_j) - 1]! \prod_{\mu,\nu}' \frac{1}{s_{j\mu\nu}!} (a_{j\mu\nu})^{s_{j\mu\nu}}, \tag{20.24}$$

где $S = (S_1, \ldots, S_n)$, $S_j = \{s_{j\mu\nu}\}'_{\mu,\nu}$ — наборы неотрицательных целых чисел, среди которых лишь конечное число отличных от нуля, $\rho(S) = (\rho(S_1), \ldots, \rho(S_n))$, $\rho(S_j) = \sum\limits_{\mu,\nu}' s_{j\mu\nu}$, $\Delta(S) = \det\|\delta_{kj}\rho(S_j) - \sigma_k(S_j)\|_{j,k=1,\ldots,n}$, $\sigma_k(S_j) = \sum\limits_{\mu,\nu}' \nu_k s_{j\mu\nu}$; δ_{kj} — символ Кронекера; в $\sum\limits_{\eta,\tau,S}$ суммирование ведется по всевозможным мультииндексам $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ и системам $S = (S_1, \ldots, S_n)$, удовлетворяющим условиям

$$\begin{gathered} \eta_k + \sum_{j=1}^{n} \lambda_k(S_j) = \alpha_k, \quad k = 1, \ldots, m, \\ \tau_k + \sum_{j=1}^{n} \sigma_k(S_j) = \rho(S_k), \quad k = 1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{20.25}$$

где $\lambda_k(S_j) = \sum\limits_{\mu,\nu}' \mu_k s_{j\mu\nu}$. При этом если S содержит S_j, для которого $\rho(S_j) = 0$, *то в соответствующем слагаемом формулы (20.24) нужно вместо $[\rho(S_j) - 1]!$ поставить 1, а в $\Delta(S)$ вместо $\delta_{kj}\rho(S_j) - \sigma_k(S_j)$ взять δ_{kj}.*

Доказательство. Из (20.7) и первой части равенства (20.12) получаем интегральную формулу для коэффициентов ряда Тейлора функции $\Phi(w, \varphi(w))$:

$$c_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^{m+n}} \int\limits_{\gamma\delta\times\Gamma_\varepsilon} \frac{\Phi(w,z)\dfrac{\partial F}{\partial z}\, dw \wedge dz}{F^{\mathrm{I}}(w,z)\, w^{\alpha+\mathrm{I}}}. \qquad (20.26)$$

Функция

$$\frac{\Phi(w,z)}{F^{\mathrm{I}}(w,z)} \frac{\partial F}{\partial z} = \Phi(w,z) \frac{\partial \ln F(w,z)}{\partial z} \qquad (20.27)$$

голоморфна на $(n+m)$-круговом компакте $\overline{V}_\delta \times \Gamma_\varepsilon$ и разлагается на нем в кратный ряд Лорана. Из (20.26) следует, что коэффициент c_α равен коэффициенту при $w^\alpha z^{-\mathrm{I}}$ этого ряда. Разложение в ряд Лорана функции (20.27) можно найти непосредственно. Учитывая, что при $w \in \overline{V}_\delta$, $z \in \Gamma_\varepsilon$ выполняются неравенства $|g_j(w, z)| < |z_j| = \varepsilon$, $j = 1, \ldots, n$, где $g_j(w,z) = F_j(w,z) - z_j = \sum\limits_{\mu,\nu}' a_{j\mu\nu} w^\mu z^\nu$, получаем разложения

$$\ln F_j(w,z) = \ln z_j + \ln[1 + g_j(w,z)/z_j] = \ln z_j +$$
$$+ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} g_j^p(w,z)/p z_j^p = \ln z_j + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1}(p-1)! \times$$
$$\times \sum_{\rho(S_j)=p} \left[\prod_{\mu,\nu}' \frac{1}{s_{j\mu\nu}!} \cdot (a_{j\mu\nu})^{s_{j\mu\nu}}\right] w^{\lambda(S_j)} z^{\sigma(S_j)-\rho(S_j)e_j} = \ln z_j +$$
$$+ \sum_{\rho(S_j)\geqslant 1} (-1)^{\rho(S_j)-1} [\rho(S_j) - 1]! \left[\prod_{\mu,\nu}' \frac{1}{s_{j\mu\nu}!} (a_{j\mu\nu})^{s_{j\mu\nu}}\right] \times$$
$$\times\, w^{\lambda(S_j)} z^{\sigma(S_j)-\rho(S_j)e_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $e_j = (\delta_{j1}, \ldots, \delta_{jn})$, $\lambda(S_j) = (\lambda_1(S_j), \ldots, \lambda_n(S_j)) = \sum\limits_{\mu,\nu}' \mu s_{j\mu\nu}$, $\sigma(S_j) = (\sigma_1(S_j), \ldots, \sigma_n(S_j)) = \sum\limits_{\mu,\nu}' \nu s_{j\mu\nu}$.

Отсюда

$$\frac{\partial \ln F_j(w, z)}{\partial z_k} = \frac{\delta_{jk}}{z_j} + \sum_{\rho(S_j) \geq 1} (-1)^{\rho(S_j)} [\rho(S_j) - 1]! \times$$
$$\times \left[\prod_{\mu,\nu}' \frac{1}{s_{j\mu\nu}!} (a_{j\mu\nu})^{s_{j\mu\nu}} \right] [\delta_{kj} \rho(S_j) - \sigma(S_j)] \times$$
$$\times w^{\lambda(S_j)} z^{\sigma(S_j) - \rho(S_j) e_j - e_k}, \quad j, k = 1, \ldots, n. \tag{20.28}$$

В (20.28) слагаемое δ_{jk}/z_j можно рассматривать как член суммы $\sum\limits_{\rho(S_j) \geq 0} \ldots$ при $\rho(S_j) = 0$ с учетом соглашений, принятых в формулировке теоремы. Подставляя (20.28) в якобиан $\partial(\ln F)/\partial(z)$, вынося знаки суммирования и общие множители в строках и столбцах за знак определителя, получим

$$\frac{\partial \ln F(w, z)}{\partial z} = (-1)^{|\rho(S)|} \Delta(S) \left\{ \prod_{j=1}^{n} [\rho(S_j) - 1]! \times \right.$$
$$\left. \times \prod_{\mu,\nu}' \frac{1}{s_{j\mu\nu}} (a_{j\mu\nu})^{s_{j\mu\nu}} \right\} w^{\lambda(S)} z^{\sigma(S) - \rho(S) - I}, \tag{20.29}$$

где $\lambda(S) = \lambda(S_1) + \ldots + \lambda(S_n)$, $\sigma(S) = \sigma(S_1) + \ldots + \sigma(S_n)$. Перемножая ряды (20.29) и (20.23), найдем ряд Лорана функции (20.27). Выделяя в нем коэффициент при $w^\alpha z^{-I}$, получим (20.24). $\square$

Замечание. Коэффициенты рядов Тейлора $z_q = \varphi_q(w) = \sum\limits_{\alpha \geq 0} c_{q\alpha} w^\alpha$, $q = 1, \ldots, n$, неявных функций (20.5) выражаются через коэффициенты рядов (20.22) формулой

$$c_{q\alpha} = \sum_{S} (-1)^{|\rho(S)|} \Delta(S) \prod_{j=1}^{n} [\rho(S_j) - 1]! \prod_{\mu,\nu}' \frac{1}{s_{j\mu\nu}} (a_{j\mu\nu})^{s_{j\mu\nu}},$$

где суммирование ведется по всевозможным наборам $S = (S_1, \ldots, S_n)$, удовлетворяющим условиям

$$\lambda_k(S_1) + \ldots + \lambda_k(S_n) = \alpha_k, \; k = 1, \ldots, m;$$
$$\delta_{qk} + \sigma_k(S_1) + \ldots + \sigma_k(S_n) = \rho(S_k), \quad k = 1, \ldots, n.$$

При $m = n$, $F_j(w, z) = f_j(z) - w_j$, $j = 1, \ldots, n$, $\Phi(w, z) \equiv \Phi(z)$ из теоремы 20.9 получается

Теорема 20.10 (Кэли — Сильвестр — Сакк). *Пусть функции (20.16) и* $\Phi(z)$ *заданы степенными рядами*

$$w_j = f_j(z) = z_j + \sum_{|\alpha|\geqslant 2} a_{j\alpha} z^\alpha, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{20.30}$$

$$\Phi(z) = \sum_{\alpha \geqslant 0} b_\alpha z^\alpha. \tag{20.31}$$

Тогда коэффициенты ряда Тейлора (20.20) *функции* $\Phi(\varphi(w))$, *где* $z = \varphi(w)$ — *обращение системы* (*20.30*), *выражается через коэффициенты степенных рядов* (*20.31*) *формулой*

$$c_\alpha = \sum_{\tau, S} (-1)^{|\rho(S)|} b_\tau \Delta(S) \prod_{j=1}^{n} \frac{[\rho(S_j) + \alpha_j - 1]!}{\alpha_j!} \times$$
$$\times \prod_{|\nu|\geqslant 2} \frac{1}{s_{j\nu}!} (a_{j\nu})^{s_{j\nu}}, \tag{20.32}$$

где $S = (S_1, \ldots, S_n)$, $S_j = \{s_{j\nu}\}_{|\nu|\geqslant 2}$, $\rho(S) = (\rho(S_1), \ldots, \rho(S_n))$, $\rho(S_j) = \sum_{|\nu|\geqslant 2} s_{j\nu}$, $\Delta(S) = \det \| \delta_{kj} [\alpha_j + \rho(S_j)] + \sigma_k(S_j) \|$, $\sigma_k(S_j) = \sum_{|\nu|\geqslant 2} \nu_k s_{j\nu}$; *суммирование в* $\sum_{\tau, S}$ *ведется по всевозможным мультииндексам* $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $|\tau| \geqslant 0$ *и наборам* S, $\rho(S) \geqslant 0$, *удовлетворяющим условиям*

$$\tau_k + \sum_{j=1}^{n} \sigma_k(S_j) = \alpha_k + \rho(S_k), \quad k = 1, \ldots, n,$$

При этом если $\rho(S_j) + \alpha_j = 0$, то *вместо* $[\rho(S_j) + \alpha_j - 1]!$ *следует взять* 1, *а вместо* $\delta_{kj}[\alpha_j + \rho(S_j)] - \sigma_k(S_j)$ *поставить* δ_{kj}.

При $\Phi(w, z) = z_q$, $q = 1, \ldots, n$, (20.20) и (20.32) дают формулы обращения систем степенных рядов (20.30). В частности, при $n = 1$ получается формула обращения степенного ряда.

Предложение 20.11 (Сильвестр). *Пусть дан степенной ряд* $w = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, $a_1 \neq 0$. *Тогда коэффициенты* *обратного ряда* $z=\sum_{n=1}^{\infty} c_n w^n$ *выражаются формулой*

$$c_n=\frac{1}{na_1^n}\sum_{k_1,\ldots,k_n}\frac{(n+k_2+\ldots+k_n-1)!}{k_2!\ldots k_n!}\left(-\frac{a_2}{a_1}\right)^{k_2}\cdots\left(-\frac{a_n}{a_1}\right)^{k_n},$$

где суммирование ведется по всевозможным наборам чисел $k_1\geqslant 0,\ldots, k_n\geqslant 0$, *удовлетворяющим равенству* $k_2+2k_3+\ldots+(n-1)k_n=n-1$.

5°. Выделение однозначной ветви системы неявных функций для некоторых вырожденных случаев. Рассмотрим один случай выделения однозначной голоморфной ветви неявной вектор-функции, определяемый системой (20.4) в окрестности точки $(0, 0)\in C^{m+n}$ в случае, когда $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,0)}=0$. Пусть функции системы (20.3) в окрестности точки (0.0) могут быть представлены в виде

$$F_j(w, z)=z_jP_j(w, z)+Q_j(w, z),\ j=1,\ldots, n, \tag{20.33}$$

где $z_jP_j(w, z)$ — однородный многочлен наименьшей степени в разложении функции F_j в ряд по однородным многочленам от w, z, $P_j(w, 0)\not\equiv 0$. Выделим старший член $w^{\lambda(j)}=w_1^{\lambda_{j_1}}\ldots w_m^{\lambda_{j_m}}$ многочлена $P_j(w, 0)$ при лексикографическом упорядочении его членов (для любого члена $a_{j\alpha}w^{\alpha}$ полинома $P_j(w, 0)$, $\alpha\neq\lambda(j)$ выполняются условия $\alpha_1=\lambda_{j1},\ldots, \alpha_{k-1}=\lambda_{j,k-1}$, $\alpha_k<\lambda_{jk}$, для некоторого k, $1\leqslant k\leqslant m$). Коэффициент при $w^{\lambda(j)}$ полагаем равным 1. Обозначим $g_j(w, z)=Fj(w, z)-z_jw^{\lambda(j)}$, $j=1,\ldots, n$, $\lambda=(\lambda_{(1)},\ldots,\lambda_{(n)})$; $\lambda\cdot(\beta+I)=(\lambda_{11}(\beta_1+1)+\ldots+\lambda_{n1}(\beta_n+1),\ldots,\lambda_{1m}(\beta_1+m)+\ldots+\lambda_{nm}(\beta_n+1))$; $\gamma_\delta=\{w:|w_1|=\ldots=|w_n|=\delta\}$; $\Gamma_\varepsilon=\{z:|z_1|=\ldots=|z_n|=\varepsilon\}$, где δ, ε — достаточно малые положительные числа.

При сделанных предположениях имеет место

Теорема 20.12 (Южаков). *Для того чтобы существовала система голоморфных функций*

$$z_j=\varphi_j(w)=\varphi_j(w_1,\ldots, w_m),\ j=1,\ldots, n, \tag{20.34}$$

удовлетворяющая системе (20.4) *в окрестности точки* $(0, 0) \in C^{m+n}$ *и условиям*

$$\varphi_j(0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_j(0)}{\partial w_k} = 0, \quad j = 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots, m, \tag{20.35}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{\beta \geqslant 0} (-1)^{|\beta|} \int\limits_{\gamma_\delta \times \Gamma_\varepsilon} \frac{z_j g^\beta(w, z) \dfrac{\partial F}{\partial z}\, dw \wedge dz}{z^{\beta+I} w^{\lambda(\beta+I)+\alpha+I}} = 0 \tag{20.36}$$

для $j = 1, \ldots, n$ *и всех целочисленных мультииндексов* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $-\infty < \alpha_q < \infty$, *для которых* $|\alpha| \geqslant 2$ *и хотя бы для одного* $q \in \{1, \ldots, m\}$ *было* $\alpha_q < 0$. *При выполнении условий* (27.36) *коэффициенты разложения в степенной ряд*

$$\Phi(w, \varphi(w)) = \sum_{\alpha \geqslant 0} c_\alpha w^\alpha, \tag{20.37}$$

где $\Phi(w, z)$ — *голоморфная функция в окрестности точки* $(0, 0)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — *вектор-функция* (20.34), *определяется формулой*

$$c_\alpha = \sum_{\substack{\beta \geqslant 0 \\ |\beta| < N(\alpha)}} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta! [\lambda(\beta + I) + \alpha]!} D_{z,w}^{\beta, \lambda(\beta+I)+\alpha} \left[\Phi g^\beta \frac{\partial F}{\partial z}\right]\Bigg|_{(0,0)}. \tag{20.38}$$

При $\Phi(w, z) \equiv z_j$ (20.37), (20.38) дают ряды Тейлора функций (20.34)

Следствие 20.13. *При* $m = 1$ *из условий* (20.33) *всегда вытекает существование однозначной ветви* (20.34), *удовлетворяющей системе* (20.4) *и условиям* (20.35).

При $m > 1$ условия (20.33) еще не обеспечивают существования однозначной ветви (20.34). Например, левая часть уравнения $z(w_1 + w_2) + w_1^4 = 0$ удовлетворяет условию (20.33), однако в окрестности точки $(0, 0, 0) \in C^3$ это уравнение определяет лишь мероморфную функцию $z = w_1^4/(w_1 + w_2)$.

Доказательство теоремы 20.12. Из сделанных предположений вытекает существование чисел $\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_m > \varepsilon > 0$ таких, что при $z \in \Gamma_\varepsilon$, $w \in \gamma = \{w : |w_1| = \delta_1, \ldots, |w_m| = \delta_m\}$ будут выполняться неравенства

$$|g_j(w, z)| < |w^{\lambda(j)} z_j|, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{20.39}$$

Например, достаточно взять $\delta_1 = \delta$, $\delta_2 = \delta^2, \ldots, \delta_m = \delta^m$, $\varepsilon = \delta^{m+1}$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Так как $\gamma \times \Gamma_\varepsilon$ — компакт, то неравенство (20.39) будет выполняться и при $z \in \Gamma_\varepsilon$, $w \in V(\gamma)$, где $V(\gamma)$ — некоторая m-круговая окрестность множества γ. По теореме 4.8 для любого $w \in V(\gamma)$ найдется единственная точка $z = \varphi(w) \in U_\varepsilon = \{z : ||z|| < \varepsilon\}$, удовлетворяющая системе $z_j - g_j(w, z)/w^{\lambda(j)} = 0$, $j = 1, \ldots, n$, т. е. системе (20.4). По формуле (4.8)

$$z_j = \varphi_j(w) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{z_j \dfrac{\partial F}{\partial z} \, dz}{F^I(w, z)}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{20.40}$$

и

$$\Phi(w, \varphi(w)) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{L_\varepsilon} \frac{\Phi(w, z)}{F^I(w, z)} \frac{\partial F}{\partial z} \, dz. \tag{20.41}$$

Из голоморфности подынтегральных форм в (20.40), (20.41) следует, что функции $\varphi_j(w)$, $\varphi(w, \varphi(w))$ голоморфны в $V(\gamma)$. Следовательно, функции (20.40) раскладываются в $V(\gamma)$ в кратные ряды Лорана

$$z_j = \varphi_j(w) = \sum c_{j\alpha} w^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \quad -\infty < \alpha_q < \infty, \tag{20.42}$$

где

$$c_{j\alpha} = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int\limits_\gamma \frac{\varphi_j(w) \, dw}{w^{\alpha + I}} = \frac{1}{(2\pi i)^{n+m}} \int\limits_{\gamma \times \Gamma_\varepsilon} \frac{z_j \dfrac{\partial F}{\partial z} \, dw \wedge dz}{F^I(w, z) \, w^{\alpha + I}} =$$

$$= \sum_{\beta \geqslant 0} \frac{(-1)^{|\beta|}}{(2\pi i)^{n+m}} \int_{\gamma \times \Gamma_\varepsilon} \frac{z_j g^\beta(w, z) \frac{\partial F}{\partial z}\, dw \wedge dz}{z^{\beta+I} w^{\lambda(\beta+I)+\alpha+I}} \qquad (20.43)$$

Здесь мы, опираясь на (20.39), разложили дробь $1/F^I(w, z) = 1 \Big/ \prod_{q=1}^{n} z_q w^{\lambda(q)} [1 + g_q(w, z)/z_q w^{\lambda(q)}]$ в ряд кратной геометрической прогрессии.

Покажем, что $c_{j\alpha} = 0$ при $|\alpha| \leqslant 2$. Для этого функции $g_j^{\beta_j} = [z_j Q_j - \theta_j]^{\beta_j}$, где $Q_j = P_j - w^{\lambda(j)}$, разложим по формуле бинома. Получим

$$\int_{\gamma \times \Gamma_\varepsilon} \frac{z_j g^\beta \frac{\partial F}{\partial z}\, dw \wedge dz}{z^{\beta+I} w^{\lambda(\beta+I)+\alpha+I}} = \sum_{0 \leqslant \mu < \beta} \frac{\beta!}{\mu!(\beta-\mu)!} \times$$

$$\times \int_{\gamma \times \Gamma_\varepsilon} \frac{z_j Q^\mu \theta^{\beta-\mu} \frac{\partial F}{\partial z}\, dw \wedge dz}{z^{\beta-\mu+I} w^{\lambda(\beta-I)+\alpha+I}}. \qquad (20.44)$$

Так как $d_{(0,0)}(\theta_j) \geqslant |\lambda_{(j)}| + 2$, $d_{(0,0)}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \lambda(I) = |\lambda_{(1)}| + \ldots + |\lambda_{(n)}|$, $d_{(0,0)}(Q_j) = \lambda_{(j)}$, то в интеграле, стоящем под знаком суммы (20.44), порядок числителя в точке $(0, 0)$ $d_{(0,0)}\left(z_j Q^\mu \theta^{\beta-\mu} \frac{\partial F}{\partial z}\right) \geqslant 1 + \lambda(\mu) + |\lambda(\beta-\mu)| + 2|\beta-\mu| + \lambda(I) = 1 + \lambda(\beta+I) + 2|\beta-\mu|$. Следовательно, этот интеграл равен нулю при $1 + \lambda(\beta+I) - 2|\beta-\mu| > |\beta-\mu| + |\lambda(\beta+I) + \alpha|$, т. е. при $1 + |\beta-\mu| > |\alpha|$, а также если учитывать только интегрирование по z, при $|\beta-\mu| < 1$. Таким образом, он равен нулю при $|\alpha| < 2$. Отсюда следует, что при выполнении условий (20.36) ряды Лорана (20.42) не содержит членов с отрицательными степенями, т. е. функции (20.40) аналитически продолжаются на $\overline{V} = \{w : |w_1| < \delta_1, \ldots, |w_m| \leqslant \delta_m\}$, причем эти функции по теореме единственности для голоморфных функций удовлетворяют системе (20.4) в $\overline{V} \times U_\varepsilon$. Так как $c_{j\alpha} = 0$ при $|\alpha| < 2$, эти функции удовлетворяют также условию (20.35).

Покажем необходимость условий (20.36). Если существуют функции (20.34), голоморфные в $\overline{V}$, удовлетворяющие уравнениям (20.4) и условиям (20.35), то в силу единственности решения системы (20.4) в $V(\gamma) \times U_\varepsilon$ они совпадают в $V(\gamma)$ с (20.40). Следовательно, ряды Лорана (20.42) не содержат членов с отрицательными степенями. Отсюда и из формул (20.43) вытекают условия (20.36).

При выполнении условий (20.36) функция (20.41) также будет голоморфной в $\overline{V}$. Раскладывая в (20.41) дробь $1/F^{I}$ в ряд кратной геометрической прогрессии, а затем раскладывая функцию (20.41) в ряд Тейлора, получим ряд (20.37) с коэффициентами

$$c_\alpha = \sum_{\beta \geqslant 0} \frac{(-1)^{|\beta|}}{(2\pi i)^{n+m}} \int\limits_{\gamma \times \Gamma_\varepsilon} \frac{\Phi(w, z)\, g^{\beta}(w, z)\, \dfrac{\partial F}{\partial z}\, dw \wedge dz}{z^{\beta+I} w^{\lambda(\beta+I)+\alpha+I}}, \tag{20.45}$$

т. е. (20.38). Можно показать, что члены ряда (20.45) обращаются в нуль при $|\beta| > N(\alpha)$, где $N(\alpha)$ — целое число, зависящее от α. Отсюда следует, что в цикле интегрирования $\gamma \times \Gamma_\varepsilon$ числа $\delta_1, \ldots, \delta_m$, ε можно брать произвольными, лишь бы они были достаточно малы. □

6°. Оценка области сходимости и остатка рядов (20.8), (20.19). Нам потребуется следующее обобщение многомерного аналога леммы Шварца.

Т е о р е м а 20.14. *Пусть* $B_r^{(1)} = \{w \in C^m : \|w\|_1 < r\}$, $B_R^{(2)} = \{z \in C^n : \|z\|_2 < R\}$ — *шары в некоторых нормах* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *и* $f : B_r^{(1)} \to B_R^{(2)}$ — *такое голоморфное отображение, что* $f(0) = 0$ *и порядок нуля отображения* f *в точке* 0: $d_0(f) = \min\{d_0(f_1), \ldots, d_0(f_n)\} = k \geqslant 1$. *Тогда* $\|f(w)\|_2 \leqslant R \times \|w\|_1^k / r^k$ *для любого* $w \in B_r^{(1)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится точно так же, как это сделано в книге [201, с. 56] для случая $k = 1$. При этом нужно только учесть, что вектор-функция $f(\zeta, w)/\zeta^k = f(\zeta w_1, \ldots, \zeta w_n)/\zeta^k$ голоморфна в круге $|\zeta| < 1$ при любом $w \in \partial B_r^{(1)}$. □

Оценим область сходимости ряда (20.8) вначале при некоторых дополнительных предположениях.

Теорема 20.15 (Южаков). *Пусть функции (20.3) и $\Phi(w, z)$ голоморфны в замкнутом поликруге $\overline{U}_{r,R} = \{(w, z) : \|w\| \leqslant r, \|z\| \leqslant R\}$, удовлетворяют условиям (20.6) и*

$$\frac{\partial F_j(0, 0)}{\partial w_k} = 0, \quad j = 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots, m. \quad (20.46)$$

Тогда ряд (20.8) при $h = 0$ равномерно и абсолютно сходится внутри поликруга $V_\rho = \{w : \|w\| < \rho\}$ радиуса $\rho = \min\{rR/A, r\}$, где $A = \max\limits_{\overline{U}_{r,R}} \|g(w, z)\|$.

Доказательство. Из условий (20.6), (20.46) следует, что $d_{(0,0)}(g) \geqslant 2$. Введем в C^{m+n} норму $\|(w, z)\|_1 = \max\{\|w\|/r, \|z\|/R\}$. Тогда по теореме 20.14 для любого $(w, z) \in \overline{U}_{r,R} = \{(w,z): \|(w,z)\|_1 \leqslant 1\}$ выполняется неравенство $\|g(w, z)\| \leqslant A\|(w, z)\|_1^2$. Отсюда следует, что при $w \in \overline{V}_\delta$, $z \in \Gamma_\varepsilon$, где $\delta = r\sigma$, $\varepsilon = R\sigma$, $\sigma < \min\{r/A, 1\}$, имеют место неравенства

$$|g_j(w, z)| \leqslant A\sigma^2 = \delta\varepsilon A/rR \leqslant \delta\varepsilon/\rho < \varepsilon = |z_j|,$$

$$j = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, при $w \in \overline{V}_\delta$, $h = 0$, ряд (20.9), совпадающий с рядом (20.8), мажорируется рядом кратной геометрической прогрессии со знаменателем δ/ρ. Таким образом, ряд (20.8) для $h = 0$ равномерно сходится в $\overline{V}_\delta \subset V_\rho$. □

Общий случай, рассмотренный в теореме 20.2 сводится к случаю, когда выполняются условия (20.46) при помощи замены: $\tilde{z}_j = z_j - \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial F_j(0, 0)}{\partial w_k} w_k$, $j = 1, \ldots, n$.

Однако полезно также в общем случае иметь оценки радиуса полицилиндра сходимости ряда (20.8).

Теорема 20.16. *Пусть функции (20.3) и Φ голоморфны в $\overline{U}_r = \{(w, z) : \|(w, z)\| \leqslant r\}$ и удовлетворяют условиям (20.6). Обозначим $\theta(w, z) = F(w, z) - z - F(w, 0)$, $K = \max\limits_{\|w\| \leqslant r} \|F(w, 0)\|$, $A = \max\limits_{\|(w,z)\| < r} \|\theta(w, z)\|$.*

Тогда ряд (20.8) при $h \equiv 0$ равномерно и абсолютно сходится внутри поликруга U_ρ радиуса

$$\rho = \begin{cases} r^3/4AK, \text{ если } K \geqslant r/2, \ A \geqslant r/2, \\ r(r-A)/K, \text{ если } A \leqslant r/2, \ A + K \geqslant r, \\ r(r-K)/A, \text{ если } K \leqslant r/2, \ A + K \geqslant r, \\ r, \text{ если } A + K \leqslant r. \end{cases} \quad (20.47)$$

Доказательство. Из условий (20.6) следует, что $d_0(F(w, 0)) \geqslant 1$, а $d_{(0,0)}(\theta) \geqslant 0$. Тогда по теореме 20.14 для любых $(w, z) \in \overline{U}_r$ выполняются неравенства $\|F(w, 0)\| \leqslant K\|w\|/r$, $\|\theta(w, z)\| \leqslant A\|(w, z)\|^2/r^2$. Если $\varepsilon < r^2t/A$, $\delta < r\varepsilon(1-t)/K$, $0 < \delta \leqslant \varepsilon \leqslant r$, $0 < t < 1$, то при $w \in \overline{V}_\delta$, $z \in \Gamma_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\|g(w, z)\| \leqslant \|F(w, 0)\| + \|\theta(w, z)\| \leqslant K\delta/r + \\ + A\varepsilon^2/r^2 < \varepsilon = |z_j|.$$

Из этого неравенства вытекает равномерная и абсолютная сходимость ряда (20.8), (20.9) в $\overline{U}_\delta$. Таким образом

$$\rho = \sup\{\delta\} = \sup_{0<t<1} \{r^3t(1-t)/KA, \ r^2t/A, \ r^2(1-t)/K, \ r\}.$$

Исследуя это выражение на максимум относительно t, получим (20.47). □

Аналогично получаются оценки для ряда (20.19).

Теорема 20.17. *Если функции (20.16) и $\Phi(z)$ голоморфны в замкнутом поликруге $\overline{U}_r = \{z : \|z\| \leqslant r\}$, то ряд (20.19) равномерно и абсолютно сходится внутри поликруга $V_\rho = \{w : \|w\| < \rho\}$, где $\rho = \min\{r^2/4A, r/2\}$, $A = \max\limits_{\|z\| \leqslant r} \|g(z)\|$.*

Можно получить более точную оценку: $\rho = r^2/4A$, если $A > r/2$; $\rho = r - A$, если $A \leqslant r/2$. Очевидно, в указанных поликругах сходятся и ряды (20.10), (20.20) соответственно.

Отметим еще один простой частный случай.

Предложение 20.18. *Если в теореме 20.2 функции (20.3) и Φ голоморфны в $\overline{U}_{r,R}$ и $g_j(w, z) =$*

$= F_j(w, z) - z_j = w_j\Psi_j(w, z)$, $j = 1, \ldots, n$, *то ряд (20.8) сходится в поликруге V_ρ радиуса $\rho = \min\{R/A, r\}$, где $A = \max\limits_{U_{r,R}} \|\Psi(w, z)\|$.*

Оценим остатки рядов (20.8) и (20.19). Обозначим $\Psi_\beta(w)$ — общий член, $S_k(w) = \sum\limits_{|\beta| \leqslant k} \Psi_\beta(w)$ — частичную сумму, $r_k(w) = \Psi(w) - S_k(w) = \sum\limits_{|\beta| \leqslant k} \Psi_\beta(w)$ — остаток ряда (20.8) при $h \equiv 0$ соответственно ряда (20.19).

Теорема 20.19. *Пусть функции (20.3) и $\Phi(w, z)$ голоморфны в $\overline{U}_{\delta,\varepsilon}$ и для любых $w \in \overline{V}_\delta$, $z \in \Gamma_\varepsilon$ выполняется неравенство $|g_j(w, z) < |z_j| = \varepsilon$. Тогда для любых $w \in \overline{V}_\delta$ имеет место оценка остатка ряда (20.8) при $h \equiv 0$:*

$$|r_k(w)| \leqslant M \cdot (\sigma/\varepsilon)^{k+1} \sum_{p=1}^{n} \binom{k+n-p}{k} (1-\sigma/\varepsilon)^{-p}, \tag{20.48}$$

где $\sigma = \max\limits_{\overline{U}_{\delta,\varepsilon}} \|g(w, z)\|$, $M = \max\limits_{\overline{U}_{\delta,\varepsilon}} \left|\Phi(w, z)\frac{\partial F}{\partial z}\right|$.

Доказательство. Из интегрального представления членов ряда (20.8) (см. ряд (20.9)) вытекает оценка: $|\Psi_\beta(w)| \leqslant M(\sigma/\varepsilon)^{|\beta|}$. Тогда

$$|r_k(w)| \leqslant \sum_{|\beta| \geqslant k+1} |\Psi_\beta(w)| \leqslant M \sum_{|\beta| \geqslant k+1} (\sigma/\varepsilon)^{|\beta|} = M \sum_{q=k+1}^{\infty} \binom{q+n-1}{q} (\sigma/\varepsilon)^q.$$

Отсюда вытекает (20.48), поскольку для $0 < a < 1$, $\varepsilon < a$ остаток ряда Тейлора функций $(1-a)^{-n}$ равен

$$\sum_{q=k+1}^{\infty} \binom{q+n-1}{q} a^q = \sum_{q=k+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\varepsilon} \frac{a^q d\zeta}{(1-\zeta)^n \zeta^{q+1}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\varepsilon} \frac{a^{k+1} d\zeta}{(1-\zeta)^{n+1}\zeta^k} = a^{k+1} \sum_{p=1}^{n} \binom{k+n-p}{k} (1-a)^{-p}. \square$$

Замечание. Как видно из доказательства теорем (20.15), (20.16), для любого $w \in V_\rho$ найдутся ε, δ, удовлетворяющие условиям теоремы 20.19. Решая элементарную задачу на экстремум, можно ε, δ выбрать так, чтобы σ/ε было минимальным. Например, в условиях теоремы 20.15 нужно взять $\delta = \|w\|$, $\varepsilon = \|w\| \times \times R/r$.

Аналогично доказывается

Теорема 20.20. *В условиях теоремы 20.17 для любого* $w \in \overline{V}_\delta$, $\delta < \rho$, *справедлива оценка*

$$|r_k(w)| \leqslant M(\sigma/\delta)^{k+1} \sum_{p=1}^{n} \binom{k+n-p}{k} (1-\sigma/\delta)^{-p},$$

где $M = \max\limits_{\|z\| \leqslant 2\delta} |\Phi(z)\, \partial\Psi/\partial z|$, $\sigma = \max\limits_{\|z\| \leqslant 2\delta} \|g(z)\|$.

7°. Примеры. 1. Найдем неявные функции $z_j = \varphi_j(w_1, w_2)$, $j = 1, 2$, определяемые системой

$$z_1 - w_1 e^{z_2 w_2} = 0, \quad z_2 - w_2 e^{z_1 w_1} = 0.$$

По формуле (20.8) при $h \equiv 0$

$$z_j = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{w_1^m w_2^n}{m!\,n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial z_1^m \partial z_2^n} \left[z_j e^{m w_2 z_2 + n w_1 z_1} \left(1 - w_1^2 w_2^2 e^{w_1 z_1 + w_2 z_2}\right)\right]_{z=0}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} z_1 &= w_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m!\,n!} n^{m-1} m^n w_1^{2m-1} w_2^{2n}; \\ z_2 &= w_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m!\,n!} m^{n-1} n^m w_1^{2m} w_2^{2n-1}. \end{aligned} \tag{20.49}$$

По предложению 20.18 найдем радиус ρ бикруга сходимости этих рядов. Здесь $\Psi_1 = e^{w_2 z_2}$, $\Psi_2 = e^{w_1 z_1}$, $A = \max\limits_{\overline{U}_{r,R}} \times \|\Psi\| = e^{rR}$. Получим $\rho = \min\{r, e^{-rR}\}$. При $r = 1/\sqrt{e}$, $R = \sqrt{e}$ эта величина имеет минимум, равный $\rho = 1/\sqrt{e} \approx 0{,}607$. Непосредственное исследование рядов (20.49) показывает, что эта оценка является точной. По теореме 20.19 находим оценку остатка рядов (20.49). При $\delta = \|w\|$, $\varepsilon = 1/\delta$, $M = \max|z_j| = \varepsilon = 1/\delta$ (члены рядов, соответствующие второму слагаемому якобиана $1 - w_1^2 w_2^2 \exp(w_1 z_1 + w_2 z_2)$ уничтожаются) имеем оценку:

$$|r_k(w)| \leqslant \left| \frac{1}{\delta} (\delta^2 e)^{k+1} \left[\frac{k+1}{1+\delta^2 e} + \frac{1}{(1-\delta^2 e)^2} \right] \right|.$$

В частности, при $\delta = 0{,}2$ и $k = 3$ будет $|r_k(w)| < 0{,}004$.

2. Найдем обращение голоморфного отображения

$$w_1 = z_1 - z_2^p; \quad w_2 = z_2 - z_1^q, \quad p > 1, \ q > 1.$$

По формулам (20.20), (20.21)

$$z_j = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{jmn} w_1^m w_2^n, \quad j = 1, 2,$$

где

$$c_{jmn} = \sum_{m+n \geqslant k+r \geqslant 0} \frac{1}{k!\,r!\,m!\,n!} \frac{\partial^{m+n+k+r}}{\partial z_1^{m+k} \partial z_2^{n+r}} \left[z_j \times \right.$$
$$\left. \times z_2^{pk} z_1^{qr} \left(1 - pq z_1^{q-1} z_2^{p-1}\right) \right|_{(0,0)}.$$

После вычислений получаем

$$z_1 = \sum_{\substack{qr+1 > k \geqslant 0 \\ pk \geqslant r \geqslant 0}} \frac{(pqrk - 1)(qr + pk - r - k + 1)!}{k!\,r!\,(qr - k + 1)!\,(pk - r)!} w_1^{qr-k+1} w_2^{pk-r}.$$

Аналогичный ряд получаем для z_2.

3. Выделим голоморфные ветви кривой (декартова листа)

$$w^3 - 3wz + z^3 = 0$$

в окрестности точки (0, 0). Согласно теореме 20.12, регулярная ветвь, касательная к комплексной кривой $z = 0$, определяется рядом

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^n,$$

где

$$c_n = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{\substack{|w|=\delta \\ |z|=\varepsilon}} \frac{z(z^3+w^3)^k (w-z^2)\, dw \wedge dz}{3^k z^{k+1} w^{k+n+2}},$$

т. е.

$$z = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(3r)!\, w^{3r+2}}{3^{3r+1} r!\, (2r+1)!} = \frac{w^2}{3} + \frac{w^5}{3^4} + \frac{w^8}{3^6} + \frac{4w^{11}}{3^9} + \ldots$$

Аналогично выделяется вторая ветвь, касательная к $w=0$.

8°. **Аналоги разложения Лагранжа для коэффициентов псевдополинома Вейерштрасса.** Пусть $f(z)$ — голоморфная функция переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$ в окрестности точки $0 \in C^n$ и $f(0)=0$, $\dfrac{\partial^k f(0)}{\partial z_n^k}=0$, $k=1, \ldots, m-1$, $\dfrac{\partial^m f(0)}{\partial z_n^m} \neq 0$. Согласно подготовительной теореме Вейерштрасса (см. [201]), функцию f в окрестности точки $0 \in C^n$ можно представить в виде

$$f(z) = \left[z_n^m + a_1('z)\, z_n^{m-1} + \ldots + a_m('z)\right] \Psi(z), \tag{20.50}$$

где $a_j('z)$, $\Psi(z)$ — голоморфные функции; $'z=(z_1, \ldots, z_{n-1})$, $a_j('0)=0$, $j=1, \ldots, m$, $\Psi(0) \neq 0$. Многочлен относительно z_n в равенстве (20.50) называется *псевдополиномом Вейерштрасса функции f в точке* 0. Как известно (см. [201, с. 113]) существуют числа $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ такие, что при $'z \in {}'U_\delta = \{'z : \|'z\| < \delta\}$ корни псевдополинома относительно переменного z_n лежат в круге $|z_n|<\varepsilon$ и сумма k-х степеней этих корней выражается формулой

$$S_k('z) = \sum_{j=1}^{m} z_{nj}^k('z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{z_n^k f'_{z_n}(z)\, dz}{f(z)}, \tag{20.51}$$

где $\gamma = \{z_n : |z_n| = \varepsilon\}$. Найдем явные выражения для функций (20.51). Для удобства будем предполагать, что $\dfrac{\partial^m f(0)}{\partial z_n^m} = m!$, т. е. что коэффициент при z_n^m в разложении Тейлора функции в точке 0 равен 1.

Теорема 20.21 (Южаков). *При сделанных предположениях функции* (20.51) *выражаются формулой*

$$S_k('z) = k\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(mr-k)!\,r} \left.\frac{\partial^{mr-k}[g^r(z)]}{\partial z_n^{mr-k}}\right|_{z_n=0}, \quad (20.52)$$

где $g(z) = f(z) - z_n^m$.

Коэффициенты псевдополинома Вейерштрасса через степенные суммы $S_k('z)$ можно выразить по формуле Ньютона (см. § 21):

$$a_k('z) = -\frac{1}{k}[S_k('z) + a_1('z)S_{k-1}('z) + \ldots + a_{k-1}('z)S_1('z)]. \quad (20.53)$$

Доказательство. Из предположений следует, что $\dfrac{\partial^k g(0)}{\partial z_n^k} = 0$ для $k = 1, \ldots, m$. Исходя из этого, можно показать, что ε и δ можно выбрать так, чтобы при $'z \in {'U_\delta}$, $z_n \in \gamma$ выполнялось неравенство $|g(z)| < |z_n|^m = \varepsilon^m$. Следовательно, дробь $1/f$ разлагается в ряд кратной геометрической прогрессии

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z_n^m\left[1 - g(z)/z_n^m\right]} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r g^r(z)}{z_n^{m(r+1)}}, \quad (20.54)$$

который при любом $'z \in {'U_\delta}$ равномерно сходится на γ. Подставляя разложение (20.54) в (20.51), получим

$$S_k('z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g^r(z)\left[mz_n^{m-1} + g'_{z_n}(z)\right] dz_n}{z_n^{m(r+1)-k}} =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r m}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g^r(z)\,dz_n}{z_n^{mr-k+1}} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r2\pi i} \int_\gamma \frac{[g^r(z)]'_{z_n} dz_n}{z_n^{mr-k}}.$$

По формуле интегрирования по частям (предложение 0,8)

$$\int_\gamma \frac{[g^r(z)]'_{z_n} dz_n}{rz_n^{mr-k}} = \int_\gamma \frac{[mr-k]\,g^r(z)\,dz_n}{rz_n^{mr-k+1}}.$$

Таким образом,

$$S_k('z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r k}{r\cdot 2\pi i} \int_\gamma \frac{g^r(z)\,dz}{z_n^{mr-k+1}},$$

что равносильно (20.52). □

Пример. Найдем псевдополином Вейерштрасса функции $f(w, z) = w^5 + w^3 - z^3 + z^5$ в точке $(0, 0) \in C^2$ относительно переменного w. Здесь $m = 3$, $g(w, z) = w^5 - z^3 + z^5$. По формуле (20.52)

$$S_k(z) = k \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r(3r-k)!} \frac{\partial^{3r-k}}{\partial w^{3r-k}} (w^5 - z^3 + z^5)|_{w=0}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Отсюда

$$S_1(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^{q+1}(5q+1)!}{(3q+1)!\,(2q+1)!} (z^3 - z^5)^{2q+1};$$

$$S_2(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^{q}(5q+3)!}{(3q+2)!\,(2q+2)!} (z^3 - z^5)^{2q+2};$$

$$S_3(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^{q}(5q)!}{(3q)!\,(2q+1)!} (z^3 - z^5)^{2q+1}.$$

Тогда коэффициенты псевдополинома Вейерштрасса

$$w^3 + a_1(z)w^2 + a_2(z)w + a_3(z)$$

функции f в точке $(0, 0)$ находим по формуле (20.53):

$$a_1(z) = (z^3 - z^5) - 5(z^3 - z^5)^3 + 66(z^3 - z^5)^5 - \ldots;$$
$$a_2(z) = -(z^3 - z^5)^2 + 9(z^3 - z^5)^4 - 136(z^3 - z^5)^6 + \ldots;$$
$$a_3(z) = -(z^3 - z^5) + 2(z^3 - z^5)^3 - 23(z^3 - z^5)^5 + \ldots.$$

§ 21. ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ВЫЧЕТА К СИСТЕМАМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1°. Пусть D — ограниченная область в C^n с кусочно-гладкой границей ∂D. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1, \ldots, z_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(z_1, \ldots, z_n) = 0, \end{cases} \qquad (21.1)$$

где все функции $f_i \in A(\overline{D})$ не имеют общих нулей на ∂D. В этом случае (см. § 2) система (21.1) имеет в D не более чем конечное число корней (общих нулей). Его мы обозначим N. Формулы § 3, 4 позволяют вычислять с помощью интеграла по границе ∂D или по остову суммы вида

$$\sum_{l=1}^{N} \varphi\left(z^{(l)}\right), \tag{21.2}$$

где φ — любая функция из $A_C(D)$, а $z^{(l)}$, $l = 1, \ldots, N$,— корни системы (21.1), лежащие в D, причем каждое слагаемое $\varphi(z^{(l)})$ берется столько раз, какова кратность[1] корня $z^{(l)}$.

Если положить $\varphi = 1$, то соответствующие интегралы будут равны числу корней (с учетом кратности) в области D, т. е. N. Короче, это запишем так:

$$\varphi = 1 \Rightarrow \int \ldots = N. \tag{21.3}$$

Далее,

$$\begin{gathered}
\varphi = z_1 \Rightarrow \int \ldots = \sum_{l=1}^{N} z_1^{(l)}; \\
\varphi = z_1^2 \Rightarrow \int \ldots = \sum_{l=1}^{N} \left(z_1^{(l)}\right)^2; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi = z_1^N \Rightarrow \int \ldots = \sum_{l=1}^{N} \left(z_1^{(l)}\right)^N.
\end{gathered} \tag{21.4}$$

В этих формулах мы для определенности записали степенные суммы первых координат корней. Аналогично записываются степенные суммы остальных координат. Таким образом, вычисление интегралов в (21.3), (21.4) позволяет систему (21.1) (вообще говоря, трансцендентную) заменить алгебраической системой простого вида

[1] Всюду в этом параграфе в суммах вида (21.2) каждый корень считается соответственно своей кратности.

(мы опять выписываем систему лишь для отыскания первых координат корней):

$$\sum_{l=1}^{N} (z_1^{(l)})^j = S_j, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Далее можно поступать по-разному. Обсудим несколько вариантов.

I способ. Через степенные суммы s_j выражаются элементарные симметрические многочлены, являющиеся (с точностью до знака) коэффициентами многочлена $\Omega(z_1) = z_1^N + b_1 z_1^{N-1} + \ldots + b_{N-1} z_1 + b_N$, имеющего корни $z_1^{(1)}, \ldots, z_1^{(N)}$. Для отыскания коэффициентов b_j можно воспользоваться известной формулой Варинга (см., например, [128, с. 246]) или *рекуррентной формулой Ньютона*

$$jb_j = -S_j - S_{j-1}b_1 - \ldots - S_1 b_{j-1}, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{21.5}$$

Таким образом, найдя многочлен $\Omega(z_1)$, мы исключим все неизвестные, кроме одного, причем не добавляется лишних корней и ни один корень не пропадает. Задача сводится к хорошо изученной задаче отыскания корней многочлена одного комплексного переменного. Главная трудность этого способа состоит в необходимости достаточно вычислять многомерные интегралы (21.4).

II способ. Вычисляется интеграл (21.3), затем область D делится на две области $D = D_1 \cup D_2$ и ищется интеграл (21.3). Для D_1 получаем число корней N_1 в D_1 (а следовательно, и $N_2 = N - N_1$ в D_2), затем делим каждую из этих областей на две и т. д., пока область не разделится на подобласти, в каждой из которых один или два корня системы. Для таких подобластей находим первый (или первые два) из интегралов (21.4) и получаем сразу корень (или квадратное уравнение для двух корней).

Этот способ особенно удобен для случая, когда область D — прямоугольный параллелепипед, а интегралы в (21.3) берутся по всей ∂D. Интересующий нас интеграл распадается на конечное число интегралов по граням —

обычных $(2n-1)$-мерных интегралов. При их вычислении можно заранее считать интегралы по частям граней, тогда в дальнейшем будет легче производить подсчеты для меньших параллелепипедов. Если при делении параллелепипеда на части соответствующая «перегородка» случайно попала на корень системы, то интеграл станет несобственным. Это можно предусмотреть при составлении программы для ЭВМ. (Если при вычислении интеграла (21.3) для подобласти он становится больше N, то «перегородку» следует несколько передвинуть).

Если при осуществлении достаточно большого числа делений области число корней не меняется, то это означает наличие кратного корня (или нескольких близких простых корней).

Недостаток этого способа состоит в том, что заранее не известно, сколько делений области нужно произвести, но зато интеграл (21.3), вычисляемый при каждом делении,— целое число, и, следовательно, его достаточно подсчитывать с точностью до 1/3.

III способ можно применять, если все корни (или их первые координаты) действительны и нужно найти корень с наибольшей первой координатой. Заменой переменных (сдвигом) можно добиться того, чтобы первые координаты всех корней были положительны. Затем нужно воспользоваться элементарным неравенством: если $a_1, \ldots, a_n$ положительны, то

$$1<\frac{\sqrt[k]{\sum_{i=1}^{N} a_i^k}}{a_{\max}}\leqslant\sqrt[k]{N},$$

значит, можно определить такое k, чтобы $\sqrt[k]{\sum_{i-1}^{N} a_i^k}$ было достаточно близко к $a_{\max}$. Поэтому для отыскания с нужной точностью наибольшей из первых координат корней достаточно вычислить один из интегралов вида (21.4), где $\varphi=z_1^k$.

В заключение отметим, что интегралы § 3 содержат много произвола (выбор вектор-функции w, или набора вектор-функций) при $n > 1$, чего нет в одномерном случае. Этот произвол можно использовать так: по системе (21.1) нужно подбирать подходящую формулу логарифмического вычета так, чтобы соответствующие интегралы удалось вычислить точно (см. следующий пункт) или приближенно.

2°. Рассмотрим *систему алгебраических уравнений*

$$Q_j(z) + P_j(z) = 0, \ j = 1, \ldots, n, \tag{21.6}$$

где $Q_j(z)$ — однородные полиномы старшей степени по совокупности переменных, имеющие только один общий нуль — начало координат; степени Q_j обозначим через k_j, тогда степень P_j меньше k_j, $j = 1, \ldots, n$. По теореме Руше 2.5 система (21.6) имеет конечное число корней. Пусть $m_1, \ldots, m_n$ — такие натуральные числа, что уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j(z) = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{2m_j} \tag{21.7}$$

имеет решение вида

$$w_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(z)\, \bar{z}_k^{m_k}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{21.8}$$

где a_{jk} — полиномы от z. Указанному условию заведомо удовлетворяют $m_j = |k| + 1 - n$, $j = 1, \ldots, n$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$ (см. теорему Мэколея [303]), но иногда m_j можно выбрать меньшими. Решение (21.8) (вообще говоря, не единственное) уравнения (21.7) можно найти методом неопределенных коэффициентов, т. е. $a_{jk}(z)$ определяются после решения соответствующей системы линейных уравнений. Теперь найденную вектор-функцию w можно использовать в формуле (3.18) для $D = B_r^{(m)}(0)$, что позволяет доказать такое утверждение

Теорема 21.1 (Айзенберг). *Пусть $R(z)$ — полином степени μ, тогда*

$$\sum_l R(z^{(l)}) = \mathfrak{M}\left[R\Delta_1\Delta_2 \sum_{j=0}^{\mu} \frac{(-1)^j}{j!} \langle w, P\rangle^j\right], \tag{21.9}$$

где Δ_1 — *якобиан системы* (21.6), *а* $\Delta_2 = \det\|a_{jk}\|$, *суммирование в левой части* (21.9) *производится по всем корням системы* (21.6), $\mathfrak{M}$ — *линейный функционал на полиномах от* $z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1^{m_1}, \ldots, \bar{z}_n^{-m_n}$, *заданный равенством*

$$\mathfrak{M}\left[z^{\beta} z_1^{m_1\alpha_1} \ldots \bar{z}_n^{-m_n\alpha_n}\right] = \begin{cases} \alpha!, & \text{если } \beta_j = m_j\alpha_j + m_j - 1, \\ & \qquad j = 1, \ldots, n, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. По формуле (3.18) при достаточно больших r

$$\sum_l R\left(z^{(l)}\right) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial B_r^{(m)}} \frac{R \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} w_k dw_{[k]} \wedge d(Q+P)}{\langle Q+P, w\rangle^n}. \tag{21.10}$$

Нетрудно установить, что

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} w_k dw_{[k]} \wedge d(Q+P) =$$

$$= \Delta_1\Delta_2 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \bar{z}_k^{-m_k} d\bar{z}_{[k]}^{(m)} \wedge dz$$

и при больших r на $\partial B_r^{(m)}(0)$ справедливо неравенство $r^2 > |\langle w, P\rangle|$, поэтому интеграл в (21.10) равен

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial B_r^{(m)}} \frac{R\Delta_1\Delta_2 \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \bar{z}_k^{-m_k} d\bar{z}_{[k]}^{(m)} \wedge dz}{(r^2 + \langle w, P\rangle)^n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \times$$

$$\times \int\limits_{\partial B_r^{(m)}} R\Delta_1\Delta_2 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(j+n-1)!}{j!\, r^{2(j+n)}} \langle w, P\rangle^j \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \bar{z}_k^{-m_k} d\bar{z}_{[k]}^{(m)} \wedge dz;$$

далее применяем формулу, являющуюся некоторым обобщением формулы (5.2) и доказываемую аналогично формуле (5.2)

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\partial B_r^{(m)}} z^{\beta}\bar z_1^{m_1\alpha_1}\ldots\bar z_n^{m_n\alpha_n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\bar z_j^{m_j}d\bar z_{[j]}^{(m)}\wedge dz=$$

$$=\begin{cases} r^{2(n+|\alpha|)}\dfrac{\alpha!}{(|\alpha|+n-1)!}, & \text{если } \beta_j=m_j(\alpha_j+1)-1,\\ & j=1,\ldots,n,\\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Получаем

$$\sum_l R\left(z^{(l)}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\mathfrak{M}\left[R\Delta_1\Delta_2\frac{(-1)^j}{j!}\langle w, P\rangle^j\right]. \quad (21.11)$$

Осталось показать, что члены ряда в правой части (21.11) равны нулю при $j>\mu$. Вычислим степень многочлена, стоящего в (21.11) в квадратных скобках, относительно z, представив его в виде

$$R\Delta_1\Delta_2\frac{(-1)^j}{j!}\sum_{|\alpha|=j}w^{\alpha}P^{\alpha}\frac{j!}{\alpha!}.$$

Слагаемое, соответствующее мультииндексу α, имеет степень по z:

$$\mu+|m|-n+\sum_{p=1}^{n}m_p\alpha_p-j.$$

По определению функционала $\mathfrak{M}$, для его неравенства нулю должно быть

$$\mu+|m|-n+\sum_{p=1}^{n}m_p\alpha_p-j\geqslant\sum_{p=1}^{n}m_p\alpha_p+|m|-n,$$

т. е. $\mathfrak{M}$ не равен нулю только при $j\leqslant\mu$. □

С л е д с т в и е 21.2.

$$\sum_l R\left(z^{(l)}\right) = \frac{t}{s^{\mu+n}},$$

где t — многочлен от коэффициентов системы (21.6) *и полинома R, а s — многочлен только от коэффициентов полиномов $Q_1, \ldots, Q_n$, причем s не зависит от R.*

Особенно простой вид формула (21.9) имеет в случае системы

$$z_j^{k_j} + P_j(z) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{21.12}$$

где степень P_j меньше k_j, $j = 1, \ldots, n$. Здесь можно взять $m_i = k_i$, $i = 1, \ldots, n$, тогда $w_i = z_i^{-k_i}$, определитель $\Delta_2 = 1$, и приходим к следующему утверждению.

Т е о р е м а 21.3 (Айзенберг). *Для системы* (21.12) *и полинома $R(z)$ степени μ справедлива формула*

$$\sum_l R\left(z^{(l)}\right) = \mathfrak{R}\left[R\Delta_1 \frac{z_1 \ldots z_n}{z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}} \sum_{|\alpha|=0}^{\mu} (-1)^{|\alpha|} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{P_1}{z_1^{k_1}}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{P_n}{z_n^{k_n}}\right)^{\alpha_n}\right], \tag{21.13}$$

где суммирование в левой части (21.13) *производится по всем корням системы* (21.12), $\mathfrak{R}$ — *линейный функционал на полиномах от $z_1, \ldots, z_n, \frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_n}$, который каждому такому полиному сопоставляет его свободный член.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для нашего случая формула (21.9) имеет вид

$$\sum_l R\left(z^{(l)}\right) = \mathfrak{M}\left[R\Delta_1 \sum_{|\alpha|=0}^{\mu} (-1)^{|\alpha|} \frac{\left(z_1^{-k_1}P_1\right)^{\alpha_1} \ldots \left(z_n^{-k_n}P_n\right)^{\alpha_n}}{\alpha!}\right],$$

теперь очевидно, что полученное выражение равно правой части (21.13). $\square$

Теорема 21.3 (и теорема 21.4) приводят к методу исключения (см. 1°) неизвестных, который представляется нам более простым, чем известный классический метод исключения, использующий результанты полиномов.

Отметим, что если система (21.12) имеет действительные коэффициенты, то после исключения неизвестных получается многочлен $\Omega(z_1)$ тоже с действительными коэффициентами. Если нас интересуют лишь действительные корни системы (21.12), то остается найти с нужной точностью действительные корни $\Omega(z_1)$, т. е. дело сводится к хорошо изученной классической задаче.

Особенно к простым вычислениям приводит формула (21.13) в случае, когда степень многочлена $R(z)$ мала.

Пример 1. Если нас интересует число корней N системы (21.12), то в (21.13) нужно взять $R(z) \equiv 1$, $\mu = 0$. Тогда

$$N = \Re\left[\Delta_1 \frac{z_1 \dots z_n}{z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}}\right],$$

остается найти в якобиане Δ_1 коэффициент при мономе $z_1^{k_1-1} \dots z_n^{k_n-1}$. Очевидно, этот коэффициент равен $k_1 \dots k_n$, и мы получили для данного случая теорему Безу[2]: $N = k_1 \dots k_n$.

Пример 2. Рассмотрим в трехмерном пространстве R^3 три поверхности третьего порядка:

$$\begin{cases} x_1^3 + \sum\limits_{i+j+k\leqslant 2} a_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k = 0; \\ x_2^3 + \sum\limits_{i+j+k<2} b_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k = 0; \\ x_3^3 + \sum\limits_{i+j+k<2} c_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k = 0, \end{cases} \tag{21.14}$$

где i, j, k — целые неотрицательные, а коэффициенты a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk} — действительные числа. Потребуем, чтобы поверхности (21.14) были «в общем положении» в том смысле, чтобы они имели в пространстве R^3 максимальное число точек пересечения (с учетом кратности), т. е. (см. пример 1) 27 общих точек. Рассмотрим любую фикси-

[2] См. теорему 22.5.

рованную точку $(A, B, C) \in R^3$. Поставим задачу вычисления среднего квадратического расстояния от этой точки до 27 общих точек поверхностей (21.14). Достаточно найти сумму квадратов расстояний от (A, B, C) до точек пересечения (21.14). По формуле (21.13) это легко сделать, так как квадрат расстояния — многочлен всего лишь второго порядка. Получаем

$$\sum_{l=1}^{27}[(A-x_1^{(l)})^2+(B-x_2^{(l)})^2+(C-x_3^{(l)})^2]=9\,(a_{200}^2+b_{020}^2+$$
$$+c_{002}^2)-18\,(a_{100}+b_{010}+c_{001})+6\,(a_{101}c_{002}+a_{110}b_{020}+$$
$$+a_{200}b_{110}+b_{011}c_{002}+a_{200}c_{101}+b_{020}c_{011})+12\,(a_{002}c_{101}+$$
$$+a_{020}b_{110}+a_{110}b_{200}+b_{002}c_{011}+b_{011}c_{020}+a_{101}c_{200})+$$
$$+27\,(A^2+B^2+C^2)+18\,(Aa_{200}+Bb_{020}+Cc_{002}).$$

Любопытно, что ответ не зависит от 12 из 30 коэффициентов поверхностей (21.14).

Далее мы обобщим теорему 21.3, чтобы охватить случай систем более общего вида, чем (21.12). Хотя будут рассмотрены системы более частного вида, чем (21.6), но зато результат будет более обозримым (не нужно, как в условиях теоремы 21.1, отыскивать решения уравнения (21.7)). Рассмотрим сначала систему алгебраических уравнений вида

$$f_i(z)=z_i^{k_i}+\sum_{j=1}^{i-1}z_j\varphi_{ij}(z)+P_i(z),\quad i=1,\ldots,n,\qquad(21.15)$$

где $\varphi_{ij}(z)$ — однородные многочлены степени k_i-1, а $P_i(z)$ — многочлены степени не выше, чем k_i-1. Система (21.12) получается из (21.15), если все $\varphi_{ij}\equiv 0$. По-прежнему пусть Δ_f — якобиан системы (21.15), а $\mathfrak{R}$ — функционал, который на многочлене от $z_1,\ldots,z_n$, $\frac{1}{z_1},\ldots,\frac{1}{z_n}$ равен его свободному члену, $z^{(1)},\ldots,z^{(N)}$ — все корни системы (21.15).

Теорема 21.4 (Айзенберг — Цих). *Для любого многочлена $R(z)$ степени m_i по переменному z_i, $i=1,\ldots,n$, и степени μ по совокупности переменных имеет место* *равенство*

$$\sum_{l=1}^{N} R\left(z^{(l)}\right) = \Re\left[\frac{R\Delta_1 z_1 \ldots z_n}{z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}} \sum_{\alpha}(-1)^{|\alpha|}\left(\frac{s_1}{z_1^{k_1}}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{s_n}{z_n^{k_n}}\right)^{\alpha_n}\right], \tag{21.16}$$

где $s_i(z) = f_i(z) - z_i^{k_i}$, $i = 1, \ldots, n$; *суммирование в правой части формулы (21.16) ведется по всем наборам* α *с целыми координатами из параллелепипеда* $M = \{\alpha : 0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \mu,\quad 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant k_1(|m| + 1) - m_1 - 2,$ $0 \leqslant \alpha_j \leqslant k_1 \ldots k_{j-1}(|m| + 1) - k_2 \ldots k_{j-1}(m_1 + 1) - k_3 \ldots k_{j-1}(m_2 + 1) - \ldots - k_{j-1}(m_{j-2} + 1) - (m_{j-1} + 1) - 1,\ j = 3, 4, \ldots, n\}$.

Доказательство можно провести, как и доказательство теоремы 21.1, используя $(2n - 1)$-мерный логарифмический вычет, точнее, одну из формул этого вычета с подходящей вектор-функцией w. Но в данном случае можно идти и другим путем — использовать n-мерный логарифмический вычет и теорему 4.8. Для того чтобы продемонстрировать различные подходы, проведем доказательство вторым способом. Обозначим через Δ_r остов поликруга U_r, т. е. $\Delta_r = \{z : |z_i| = r_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Сначала подберем r так, чтобы на Δ_r были справедливы неравенства

$$\left|z_i^{k_i}\right| > \left|\sum_{j=1}^{i-1} z_j \varphi_{ij}(z)\right|,\quad i = 2, \ldots, n. \tag{21.17}$$

Увеличивая r_n, можно добиться того, чтобы (21.17) выполнялось для $i = n$. Или можно не трогать r_n, а уменьшать $r_1, \ldots, r_{n-1}$. Далее уменьшаем $r_1, \ldots, r_{n-2}$ так, чтобы было верно (21.17) для $i = n$ и $i = n - 1$ и т. д. Через $n - 1$ шагов получим требуемые неравенства (21.17). Теперь нетрудно установить существование такого r, что на Δ_r справедливы неравенства

$$\left|z_i^{k_i}\right| > |s_i(z)|,\quad i = 1, \ldots, n; \tag{21.18}$$

достаточно воспользоваться (21.17) и заменить $(r_1, \ldots$

$\ldots, r_n)$ на $(Rr_1, \ldots, Rr_n)$ при достаточно большом R, при этом надо учесть, что степень P_i меньше k_i, $i = 1, \ldots, n$.

Итак, пусть r таково, что верно (21.18). По теореме Руше 2.5 все корни системы (21.15) лежат в поликруге U_r. Далее применяем теорему 4.8

$$\sum_{l=1}^{N} R\left(z^{(l)}\right) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Delta_r} R(z)\,\frac{df(z)}{f(z)} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Delta_r}\frac{R\Delta_1 dz}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(z_i^{k_i}+s_i\right)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Delta_r}\frac{R\Delta_1}{z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}}\sum_{\alpha_1=0}^{\infty}(-1)^{\alpha_1}\left(\frac{s_1}{z_1^{k_1}}\right)^{\alpha_1}\ldots$$

$$\ldots\sum_{\alpha_n=0}^{\infty}(-1)^{\alpha_n}\left(\frac{s_n}{z_n^{k_n}}\right)^{\alpha_n}dz = \sum_{\alpha}\mathfrak{R}\left[\frac{R\Delta_1 z_1\ldots z_n}{z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}}(-1)^{|\alpha|}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{s_1}{z_1^{k_1}}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{s_n}{z_n^{k_n}}\right)^{\alpha_n}\right]. \qquad (21.19)$$

Остается показать, что слагаемые в (21.19) при $\alpha \notin M$ равны нулю. Так как Δ_1, s_1, s_j, $j = 2, \ldots, n$,— многочлены по z степени не выше соответственно $|k| - n$, $k_1 - 1$, k_j, $j = 2, \ldots, n$, то для ненулевого слагаемого (21.19) должно быть

$$\mu + |k| + \sum_{j=1}^{n} k_j\alpha_j - \alpha_1 \geqslant |k| + \sum_{j=1}^{n} k_j\alpha_j,$$

т. е. $\alpha_1 \leqslant \mu$. Далее подсчитываем максимально возможную степень d_i по совокупности переменных $z_i, z_{i+1}, \ldots, z_n$ многочлена $P\Delta_1 z_1\ldots z_n s_1^{\alpha_1}\ldots s_n^{\alpha_n}$. Многочлены s_j, $j = 1, \ldots, i$, имеют по этим переменным степень не выше $k_j - 1$, а многочлены s_j, $j = i + 1, \ldots, n$,— не выше k_j, поэтому

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} m_j + |k| - 2i + 2 + \sum_{j=1}^{n} k_j\alpha_j - \alpha_1 - \ldots \alpha_i. \qquad (21.20)$$

В (21.20) дают вклад лишь слагаемые с такими α, для которых

$$d_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} k_j(\alpha_j + 1). \qquad (21.21)$$

Из (21.20) и (21.21) получаем

$$\alpha_i \leqslant \sum_{j=i}^{n} m_j + \sum_{j=1}^{i-1} k_j - 2i + 2 + \sum_{j=1}^{i-1} (k_j - 1)\,\alpha_j. \quad (21.22)$$

Формула (21.22) позволяет последовательно находить границы изменения α_i, если они известны для $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$. В частности, из (21.22) следует, что $\alpha_2 \leqslant k_1(|m| + 1) - m_1 - 2$, $\alpha_3 \leqslant k_1k_2(|m| + 1) - k_2m_1 - k_2 - m_2 - 2$. Теперь проведем индукцию. Пусть отличные от нуля слагаемые в (21.19) имеют место лишь для таких α, что

$$\alpha_j \leqslant k_1 \ldots k_{j-1}(|m| + 1) - k_2 \ldots k_{j-1} \times \\ \times (m_1 + 1) - \ldots - k_{j-1}(m_{j-2} + 1) - (m_{j-1} + 1) - 1, \qquad (21.23)$$

где $j = 3, 4, \ldots, i - 1$. Легко видеть, что из (21.22) и (21.23) вытекает справедливость оценки и для α_i. Итак, в (21.19) можно ограничиться лишь конечным числом слагаемых, а именно теми, для которых $\alpha \in M$. □

Пример. 3 Рассмотрим на плоскости две «замечательные» кривые третьего порядка: кубику Чирнгаузена (см. [150, с. 89] и кривую Шаля (см. [154, с. 229]:

$$\begin{cases} 2(2p + x)^3 = 27p(x^2 + y^2) \\ y = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3. \end{cases} \qquad (21.24)$$

В случае $a = b = c = 0$ систему (21.24) легко исследовать и показать, что она имеет 9 различных действительных корней при $p = 1$, $3/4 < d < 1$, поэтому можно утверждать, что кривые (21.24) находятся «в общем положении» (т. е. имеют максимально возможное число точек пересечения — 9), если $|a| < \varepsilon$, $|b| < \varepsilon$, $|c| < \varepsilon$, $|p - 1| < \varepsilon$, $3/4 - \varepsilon < d < 1 + \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Будем предполагать, что условие «общего положения» выполнено.

Каждой общей точке (x, y) кривых (21.24) поставим в соответствие площадь (алгебраическую) прямоугольника, ограниченного осями координат и перпендикулярами из (x, y) на эти оси, т. е. число xy. Рассмотрим задачу вычисления суммы всех указанных площадей. С помощью формулы (21.16) эта задача легко решается:

$$\sum_{l=1}^{9} x^{(l)}y^{(l)} = -c + \frac{p}{4}(22 + 121p) - \frac{p}{4d}(54a + 75b + 76c +$$

$$+ 1329pa + 594pb + 715pc) + \frac{p}{4d^2}\,(54b^2 + 76c^2 + 108bc +$$

$$+ 264pbc + 729pb^2 + 1458pab) - \frac{p}{4d^3}(54c^3 + 162bc^2 +$$

$$+ 1323pc^3 + 2187pbc^2 + 2187pac + 2187pb^2c) +$$

$$+ \frac{p}{4d^4}(54c^4 - 729pc^4 + 729pbc^3) - \frac{p}{4d^5}\,729pc^5.$$

Результат, полученный в теореме 21.4, мы распространим на случай, когда в системе (21.15) многочлены $f_i - P_i$, $i = 1, \ldots, n$, не просто однородные, а *взвешенно-однородные с пропорциональными весами* многочлены старшей взвешенной степени. Это означает существование рациональных положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$, $c_1, \ldots, c_n$, таких что

$$z_i^{k_i} + \sum_{j=1}^{i-1} z_j \varphi_{ij}(z)$$

состоит из мономов z^β, для которых $\beta_1/a_1 + \beta_n/a_n = c_i$, а $P_i(z)$ — из мономов, для которых $\beta_1/a_1 + \ldots + \beta_n/a_n < c_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда найдется целое $q > 0$ такое, что все числа $l_j = q\prod_{l \neq j} a_l$, $j = 1, \ldots, n$, целые.

Т е о р е м а 21.5 (Айзенберг— Цих). *Пусть система (21.15) удовлетворяет указанным выше условиям, использующим взвешенную однородность, а $R(z)$ — любой многочлен. Пусть μ' — максимальное из чисел $\beta_1 l_1 + \ldots + \beta_n l_n$, где максимум рассматривается по всем мономам z^β из $R(z)$, а m_j' — максимальное из чисел $\beta_j l_j$,*

$j = 1, \ldots, n$. Тогда верно (21.16), где суммирование в правой части этой формулы производится по всем наборам α с целыми координатами из параллелепипеда $M' = \{\alpha : 0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \leqslant \mu',\ 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant k_1 l_1 (|m'| + 1) - m_1' - 2, 0 \leqslant \alpha_j \leqslant k_1 l_1 \ldots \ldots k_{j-1} l_{j-1} (|m'| + 1) - k_2 l_2 \ldots k_{j-1} l_{j-1} (m_1' + 1) - \ldots \ldots - k_{j-1} l_{j-1} (m_{j-2}' + 1) - (m_{j-1}' + 1) - 1, j = 3, 4, \ldots, n\}$.

Доказательство. Легко проверяется, что заменой переменных $z_j(\zeta) = \zeta_j^{l_j}$, $j = 1, \ldots, n$, дело сводится к случаю, рассмотренному в теореме 21.4. Поэтому, обозначая $\zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(N')}$ все корни системы

$$\tilde{f}_i(\zeta) = f_i(z(\zeta)) = 0, \ i = 1, \ldots, n, \tag{21.25}$$

получим

$$\sum_{j=1}^{N'} R\left(z\left(\zeta^{(j)}\right)\right) = \mathfrak{R}\left[\frac{R(z(\zeta))\,\Delta_1(\tilde{f})\,\zeta_1 \ldots \zeta_n}{\zeta_1^{k_1 l_1} \ldots \zeta_n^{k_n l_n}} \times \right. \\ \left. \times \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \left(\frac{s_1(z(\zeta))}{\zeta_1^{k_1 l_1}}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{s_n(z(\zeta))}{\zeta_n^{k_n l_n}}\right)^{\alpha_n}\right]. \tag{21.26}$$

Каждому корню $z^{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$, системы (21.15) при наших условиях соответствует $l_1 \ldots l_n$ корней системы (21.25), причем координаты этих корней являются корнями степени l_q из $z_q^{(j)}$, $q = 1, \ldots, n$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{N} R\left(z^{(j)}\right) = \frac{1}{l_1 \ldots l_n} \sum_{j=1}^{N'} R\left(z\left(\zeta^{(j)}\right)\right). \tag{21.27}$$

Учитывая связь между якобианами систем (21.15) и (21.25), теперь из формул (21.26) и (21.27) после возвращения к первоначальным переменным получаем формулу (21.16). Границы изменения α в этом случае устанавливаются так же, как при доказательстве теоремы 21.4. □

Теорема 21.4 получается из теоремы 21.5, так как при использовании обычной однородности $l_1 = \ldots = l_n = 1$ и $\mu' = \mu$, $M' = M$. С другой стороны, доказательство теоремы 21.5 состоит в том, что подходящей заменой переменных дело сводится к случаю, рассмотренному в теореме 21.4. Основным результатом из этих двух мы считаем теорему 21.4, поэтому она и формулируется отдельно, хотя и является следствием теоремы 21.5. Формула (21.16) может применяться для решения различных задач непосредственно (см. примеры 1—3, нетрудно также показать, что в случае теоремы 21.5 число корней тоже $N = k_1 \ldots k_n$) или как метод исключения неизвестных. Иногда полезно его комбинировать с методом, изложенным в § 22.

Пусть дана система вида

$$f_j(z, z_{n+1}) = 0, \; j = 1, \ldots, n, \; n+1, \tag{21.28}$$

где функции $f_j(z, z_{n+1})$, $j = 1, \ldots, n$, при фиксированном z_{n+1} имеют вид (21.15), а f_{n+1} — произвольный многочлен. Обозначим $z^{(j)}(z_{n+1})$, $j = 1, \ldots, N$, — все корни системы уравнений $f_j(z, z_{n+1}) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, в которой z_{n+1} является параметром. Голоморфная функция $r(z_{n+1}) = \prod_{j=1}^{N} f_{n+1}\left(z^{(j)}(z_{n+1}), z_{n+1}\right)$ называется *результантом многочлена* f_{n+1} *относительно системы* $f_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, и ее нули есть в точности $(n+1)$-координаты корней системы (21.28). Найти $r(z_{n+1})$ можно так: по формуле (21.16) определяем степенные суммы

$$S_q(z_{n+1}) \doteq \sum_{j=1}^{N} f_{n+1}^q\left(z^{(j)}(z_{n+1}), z_{n+1}\right), \quad q = 1, \ldots, N,$$

затем по формуле Ньютона (21.5) вычисляем $b_N = (-1)^N \times \times r(z_{n+1})$ (отсюда, в частности, видно, что $r(z_{n+1})$ — многочлен). Отыскание $r(z_{n+1})$ означает исключение неизвестных $z_1, \ldots, z_n$, а также позволяет узнать, сколько (конечных) корней имеет система (21.28).

Метод исключения, основанный на формулах (21.13) или (21.16), осуществим значительно легче, чем классический метод, использующий результанты полиномов. Например, в этих формулах присутствует определитель порядка n, а если производить исключение классическим методом, то на последнем шаге нужно вычислять определитель порядка $k_1^{2^{n-3}} k_2^{2^{n-4}} \ldots k_{n-3}^2 k_{n-2} (k_{n-1} + k_n)$.

Ниже приведем пример на указанный метод исключения, в котором вычисления проведены «руками». Мы не знаем, как можно было бы в этом примере воспользоваться классическим методом без применения вычислительных машин, так как на последнем шаге нужно было бы вычислять определитель по крайней мере 10-го порядка.

Применение ЭВМ, конечно, значительно расширяет возможности указанного в этом параграфе метода исключения.

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} f_1 = z_1 - z_3 - z_2^3 = 0, \\ f_2 = z_2^4 - z_3 - z_1 = 0, \\ f_3 = z_1^2 - z_3 - z_2^2 = 0. \end{cases} \qquad (21.29)$$

Требуется исключить z_1, z_2. Представим $f_1 = z_1 + P_1$, $f_2 = z_2^4 - z_1 + P_2$, где z_1, $z_2^4 - z_1$ — взвешенно-однородные многочлены веса (1, 4), а P_1, P_2 имеют, соответственно меньшую взвешенную степень по совокупности переменных z_1, z_2. Система уравнений $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ при фиксированном z_3 имеет 4 корня, поэтому

$$S_q(z_3) = \sum_{j=1}^{4} f_3^q\left(z_1^{(j)}(z_3), z_2^{(j)}(z_3), z_3\right) =$$

$$= \mathfrak{R}\left[\sum_{\alpha_1,\alpha_2} \frac{f_3^q \Delta_1}{z_2^3} \left(\frac{z_3 + z_2^3}{z_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{z_3 + z_1}{z_2^4}\right)^{\alpha_2}\right], \quad q = 1, \ldots, 4.$$

Здесь функционал $\mathfrak{R}$ действует на полином Лорана от z_1, z_2, а переменное z_3 является параметром. Вычисления дают следующее:

$$S_1(z_3) = 4z_3^2 + 10z_3,$$

$$S_2(z_3) = 4z_3^4 + 244z_3^3 + 100z_3^2;$$

$$S_3(z_3) = 4z_3^6 + 1410z_3^5 + 4068z_3^4 + 922z_3^3 - 12z_3^2 - 9z_3;$$

$$S_4(z_3) = 4z_3^8 + 4440z_3^7 + 51012z_3^6 + 45520z_3^5 + 7744z_3^4 +$$
$$+ 7472z_3^3 - 480z_3^2.$$

Далее с помощью рекуррентной формулы Ньютона (21.5) находим искомый многочлен:

$$r(z_3) = z_3^8 - 6z_3^7 - 67z_3^6 - 4272z_3^5 + 293z_3^4 - 1920z_3^3 + 90z_3^2.$$

Итак, исключение z_1 и z_2 из системы (21.29) дает уравнение

$$r(z_3) = 0.$$

Рассмотрим задачу: найти многомерный аналог для систем (21.15) формулы Варинга (см., например, [128, с. 245]), выражающей степенные суммы S_j сразу через коэффициенты соответствующего многочлена,— формулы более громоздкой, чем формула Ньютона (21.5), но зато дающей ответ сразу, а не рекуррентным образом.

Обозначим степенные суммы координат корней системы (21.15):

$$\sum_{j=1}^{N} \left(z_l^{(j)}\right)^m = S_l^{(m)}.$$

Пусть далее $\sum\limits_{\alpha}^{j}$ означает суммирование по всем мультииндексам α, для которых либо $|\alpha| < k_j$, либо $|\alpha| = k_j$, но для какого-то i выполняется условие $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{i-1} = 0$, $\alpha_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, j-1$. Аналогично определяются произведения $\prod\limits_{\alpha}^{j}$ и наборы чисел $\{\}_{\alpha}^{j}$, $j = 1, \ldots, n$. В этих обозначениях систему (21.15) можно записать в виде

$$z_j^{k_j} - \sum_{\alpha}^{j} a_{j\alpha} z^{\alpha} = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{21.30}$$

Теорема 21.6 (Болотов). *Для системы* (21.30) *справедлив следующий многомерный аналог формулы Варинга:*

$$S_l^{(m)} = \sum_{q} \prod_{j=1}^{n} \left[(\beta_j(q) - 1)! \prod_{\alpha}^{j} \frac{a_{j\alpha}^{\lambda_{j\alpha}}}{\lambda_{j\alpha}!} \right] D(q), \tag{21.31}$$

где $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $q_j = \{\lambda_{j\alpha}\}_{\alpha}^{j}$, $\lambda_{j\alpha}$ — *целые неотрицательные числа*; $\beta_j(q) = \sum\limits_{\alpha}^{j} \lambda_{j\alpha}$; *определитель* $D(q) = \det \|\delta_{pj} k_j \beta_j(q) - \gamma_p(q_j)\|$, $p, j = 1, \ldots, n$; $\gamma_p(q_j) = \sum\limits_{\alpha}^{j} \lambda_{j\lambda} \alpha_p$. *Суммирование по* q

в (21.31) *ведется по наборам* q, *удовлетворяющим системе*

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_p(q_j) - k_p\beta_p(q) + \delta_{lp}\cdot m = 0, \quad p = 1, \ldots, n.$$

Здесь δ_{lp} — *символ Кронекера. В* (*21.31*) *участвует лишь конечное число слагаемых.*

Доказательство мы не приводим. Оно похоже на доказательство теоремы 20.8. Формула (21.31) содержит при $n = 1$ известную классическую формулу Варинга.

3°. Рассмотрим теперь *произвольную систему алгебраических уравнений*

$$P_j(z) = 0, \ j = 1, \ldots, n, \tag{21.32}$$

а также вспомогательную систему, имеющую вид (21.12):

$$\lambda z_j^{k_j} + P_j(z) = 0, \ j = 1, \ldots, n, \tag{21.33}$$

где k_j больше степени $P_j(z)$, $j = 1, \ldots, n$. Не уменьшая общности, можно считать, что среди корней системы (21.32) нет нуля (в противном случае сделаем параллельный перенос). Пусть эта система имеет N (конечных) корней, а система (21.33) — $N' = k_1 \ldots k_n$ корней (см. пример 1). Введем линейные комбинации координат корней системы (21.33):

$$a_1 z_1^{(j)}(\lambda) + \ldots + a_n z_n^{(j)}(\lambda), \quad j = 1, \ldots, N', \ a \in \mathbb{C}^n. \tag{21.34}$$

При $\lambda \to 0$ «лишние» $N' - N$ корней стремятся к ∞, а N корней стремится к корням системы (21.32), что нетрудно установить с помощью теоремы Руше. Поэтому для всех параметров $a \in \mathbb{C}^n$, за исключением множества комплексной размерности $(n - 1)$, среди чисел (21.34) ровно $N' - N$ стремится к ∞ при $\lambda \to 0$, а N чисел стремится к соответствующим (отличным от нуля) линейным комбинациям корней системы (21.32). Обозначим

$$S_a^{(m)}(\lambda) = \sum_{j=1}^{N'} \langle a, z^{(j)}(\lambda)\rangle^m, \quad m = 1, 2, \ldots, N'.$$

Суммы $S_a^{(m)}(\lambda)$ вычисляются по теореме 21.3. По $S_a^{(m)}(\lambda)$ и формуле Ньютона (21.5) можно найти элементарные симметрические многочлены от (21.34), которые обозначим $\sigma_a^{(m)}(\lambda)$, $m = 1, 2, \ldots, N'$. Далее, рассмотрим отношения

$$\frac{\sigma_a^{(m)}(\lambda)}{\sigma_a^{(N')}(\lambda)}, \quad m = N'-1, N'-2, \ldots, 1, \frac{1}{\sigma_a^{(N')}(\lambda)}, \tag{21.35}$$

представляющие собой элементарные симметрические многочлены от $\langle a, z^{(j)}(\lambda)\rangle^{-1}$, $j = 1, 2, \ldots, N'$. Они являются рациональными функциями от коэффициентов системы (21.33). Устремив $\lambda \to 0$, из (21.35) получим

$$\delta_1, \ldots, \delta_N, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N'-N}, \tag{21.36}$$

где δ_j — элементарные симметрические многочлены от $\langle a, z^{(j)}\rangle^{-1}$; $z^{(j)}$ — корни системы (21.32), $j = 1, \ldots, N$. Значит, мы построили многочлен $\Omega(z_1)$, одного комплексного переменного z_1, имеющий корнями $\langle a, z^{(j)}\rangle^{-1}$, $j = 1, \ldots, N$, указав тем самым *метод исключения для произвольных алгебраических систем* и, в частности, алгорифм, позволяющий определять общее число корней (конечных) этих систем (номер N числа δ_N, после которого в (21.36) стоят одни нули [3]). Отметим, что этот метод правильно работает для параметров $a \in C^n$, за исключением множества параметров комплексной размерности $(n-1)$. Данный метод исключения, как и метод, указанный в 2° для систем (21.15), представляется нам более простым, чем классический метод, основанный на применении результантов многочлена.

4°. Обсудим вопрос о *числе действительных корней нелинейной алгебраической системы с действительными коэффициентами.* Пусть коэффициенты системы (21.32) действительны. Корни этой системы обозначим, по-прежнему: $z^{(1)}, \ldots, z^{(N)}$. Рассмотрим линейные комбинации

---

[3] Случайно δ_N может быть равно нулю также для исключительного множества параметров $a \in C^n$ комплексной размерности $(n-1)$.

координат корней $\langle a, z^{(j)}\rangle$, $j = 1, \ldots, N$, параметр a на этот раз будем брать из действительного пространства R^n. Построим многочлен одного переменного $\Omega_a(z_1)$, имеющий корни $\langle a, z^{(j)}\rangle$, $j = 1, \ldots, N$ (это легко сделать, вычислив суммы $S_a^{(m)} = \sum_{j=1}^{N} \langle a, z^{(j)}\rangle^m$; для системы (21.15) $S_a^{(m)}$ можно сосчитать для любого $a \in R^n$, а для общего случая — системы (21.32) — для $a \in R^n$, за исключением $(n-1)$-мерного подмножества в R^n). Если корень $z^{(j)}$ действителен, то линейная комбинация $\langle a, z^{(j)}\rangle$ тоже действительна. Если же $\langle a, z^{(j)}\rangle$ действительно, то или корень $z^{(j)}$ действителен, или параметр a удовлетворяет уравнению $\langle a, \operatorname{Im} z^{(j)}\rangle = 0$.

Алгебраическая система с действительными коэффициентами вместе с каждым комплексным корнем $z^{(j)}$ имеет и корень $\overline{z^{(j)}}$, поэтому верно

Предложение 21.7. *Многочлен $\Omega_a(z_1)$ имеет столько же действительных корней, сколько рассматриваемая система уравнений, за исключением случая, когда параметр a лежит на «особом» множестве, состоящем не более чем из $\frac{N}{2}$ гиперплоскостей в R^n.*

Если находить число действительных корней $\Omega_a(z_1)$ любым классическим методом и при этом окажется, что для малых изменений коэффициентов $\Omega_a(z_1)$ это число не меняется [4], то можно быть уверенным, что данное число и есть число действительных корней системы. Часто бывает достаточно просто исключить все неизвестные, кроме одного, из данной нелинейной системы.

Пример 5. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} z_1^3 - z_2 + z_3^2 - 1 = 0, \\ z_2^3 + z_1 - z_3 + 1 = 0, \\ z_3^2 - z_1 - z_2 + 2 = 0, \end{cases} \tag{21.37}$$

[4] Степень $\Omega_a(z_1)$, вообще говоря, равна N. Если для данного a она оказалась меньше N, то считаем недостающие коэффициенты равными нулю, и их тоже нужно менять, когда речь идет об изменениях коэффициентов.

имеющую вид (21.12). По формуле (21.13) можно вычислить $\Omega_a(z_1)$ для любого a (сначала считают суммы $S_a^{(m)}$, а затем используют формулу Ньютона (21.5)). Однако для определения числа действительных корней системы (21.37) достаточно исключить неизвестные z_1 и z_3. Получается

$$P(z_2) = z_2^{18} + 6z_2^{15} - 3z_2^{13} + 21z_2^{12} - 12z_2^{10} + 44z_2^9 + 3z_2^8 - $$
$$- 30z_2^7 + 63z_2^6 + 6z_2^5 - 36z_2^4 + 53z_2^3 + 9z_2^2 - 27z_2 + 27 = 0 .$$

Если рассмотреть число перемен знаков в ряду $P(z_2)$, $P'(z_2)$, ..., $P^{(18)}(z_2)$ в точках $-\infty$, -1, 1 и ∞, то обнаружится с использованием теоремы Бюдана — Фурье (см., например, [128, с. 219]), что на $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ корней у $P(z_2)$ нет, причем в рядах знаков будут только плюсы или минусы и нет нулей. На отрезке $[-1, 1]$ многочлен $P(z_2)$ легко оценить и показать, что и здесь нет его корней. Поскольку используемые при этом неравенства, а также плюсы и минусы в рядах знаков сохраняются при малых изменениях коэффициентов P, приходим к выводу, что среди 18 корней системы (21.37) действительных нет.

Заметим, что если бы мы исключили z_2 и z_3, то получили бы $Q(z_1) = z_1^3 - z_1 + 1 = 0$. Многочлен $Q(z_1)$ имеет действительные корни, но это не значит, что они есть и у нашей системы (см. сноску). Другими словами, точка (1, 0, 0) находится на «особом» множестве параметров (см. предложение 21.7).

Пример 6. Рассмотрим систему (21.29) из примера 4. Из нее легко исключить z_1 и z_3, получим $P(z_2) = z_2^2 Q(z_2) = 0$, где $Q(z_2) = z_2^6 + 2z_2^5 + z_2^4 - 2z_2^2 + 2z_2 - 4$. Если у $P(z_2)$ мало менять коэффициенты, то число действительных корней может измениться (кратный корень $z_2 = 0$ может перейти в пару комплексно-сопряженных корней), поэтому прямо применить предложение 21.7 здесь нельзя. Но можно поступить иначе. С помощью теоремы 22.7 легко обнаружить, что система (21.29) имеет (0, 0, 0) корень кратности 2. Поэтому будем искать число ее действительных корней, отличных от нуля. Тогда можно исследовать $Q(z_2)$. Если подсчитать число перемен знаков в ряду $Q(z_2)$, $Q'(z_2)$, ..., $Q^{(6)}(z_2)$ в точках $-\infty$, -1, то по теореме Бюдана — Фурье обнаружится, что в $(-\infty, -1]$ находится один корень, причем в рядах знаков будут только плюсы или минусы. Далее легко заметить, что $z_2 = 1$ — простой корень и других корней на $[0, \infty)$ нет. С помощью простых неравенств найдем, что на $(-1, 0)$ корней тоже нет. Итак, система (21.29) имеет 4 действительных корня. К аналогичному выводу придем, если исключим z_1 и z_2 (см. пример 4), т. е. параметры (0, 1, 0) и (0, 0, 1) не лежат на «особом» множестве параметров.

Далее рассмотрим вопрос о *числе корней нелинейной алгебраической системы с действительными коэффициентами в заданном эллипсоиде пространства* R^n (аналогично можно обсудить способ отыскания числа корней в области, ограниченной алгебраической поверхностью).

Сначала вычислим суммы

$$S_{a,b}^{(m)} = \sum_{j=1}^{N} \left[a_1 (z_1^{(j)} - b_1)^2 + \ldots + a_n (z_n^{(j)} - b_n)^2\right]^m,$$

$m = 1, \ldots, N$. Затем по формуле Ньютона (21.5) найдем коэффициенты многочлена $\Omega_{a,b}(z_1)$, имеющего корни

$$a_1 (z_1^{(j)} - b_1)^2 + \ldots + a_n (z_n^{(j)} - b_n)^2, \qquad (21.38)$$

$j = 1, \ldots, N$. Здесь параметры (a, b) — точка из R^{2n}. Если корень $z^{(j)}$ действителен, то выражение (21.38) тоже действительно. Если же (21.38) действительно, то либо корень $z^{(j)}$ действителен, либо параметры (a, b) удовлетворяют уравнению: мнимая часть от (21.38) равна нулю. Таких уравнений может быть не более чем $\frac{N}{2}$, где N — число всех корней данной системы, т. е. справедливо

Предложение 21.8. *Многочлен $\Omega_{a,b}(z_1)$ имеет столько же корней на полуинтервале $[0, r)$, сколько их у данной системы в эллипсоиде $\{x : x \in R^n, a_1(x_1 - b_1)^2 + \ldots \ldots + a_n(x_n - b_n)^2 < r\}$, за исключением случая, когда точка (a, b) принадлежит «особому» множеству, состоящему из не более чем $\frac{N}{2}$ гиперповерхностей третьего порядка пространства R^{2n}.*

Замечание о том, как определить, что (a, b) не лежит на «особом» множестве, сделанное после предложения 21.7, верно и в данном случае. Другой способ состоит в следующем: сначала нужно на основе предложения 21.7 найти общее число N_1 действительных корней у рассматриваемой системы. Затем определить число корней N_2 у многочлена $\Omega_{a,b}$, на полуоси $[0, \infty)$. Если $N_2 = N_1$, то параметры (a, b) не находятся на «особом» множестве.

Пример 7. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} z_1^3 - z_2^2 - 1 = 0 \\ z_2^3 - z_1^2 - z_1 = 0. \end{cases} \tag{21.39}$$

Если из нее исключить z_2, то получим $z_1^9 - 3z_1^6 - z_1^4 + z_1^3 - z_1^2 - 1 = 0$. Далее так же, как в примерах 5 и 6, устанавливается, что система (21.39) имеет один действительный корень. Система (21.39) небольшая, поэтому $\Omega_{a,b}$ можно вычислить даже, не придавая a или b конкретных значений. Например, для случая $b = (0, 0)$, $a \in R^2$ получим

$$\begin{aligned} \Omega = z_1^9 &- (5a_1a_2 + 6a_2^2)\, z_1^7 - (7a_1^3 + 7a_1^2a_2 + 14a_1a_2^2 + \\ &+ 6a_2^3)\, z_1^6 - (6a_1^4 + 42a_1^3a_2 + 19a_1^2a_2^2 + a_1a_2^3 - 9a_2^4)\, z_1^5 - \\ &- (7a_1^5 + 29a_1^4a_2 + 91a_1^3a_2^2 + 6a_1^2a_2^3 - 27a_1a_2^4 - 17a_2^5)\, z_1^4 - \\ &- (7a_1^6 + 29a_1^5a_2 + 39a_1^4a_2^2 + 88a_1^3a_2^3 - 4a_1^2a_2^4 - 30a_1a_2^5 - \\ &- 3a_2^6)\, z_1^3 - (3a_1^7 + 24a_1^6a_2 + 30a_1^5a_2^2 + 12a_1^4a_2^3 + 60a_1^3a_2^4 + \\ &+ 13a_1^2a_2^5 - 17a_1a_2^6 + 13a_2^7)\, z_1^2 - (2a_1^8 + 6a_1^7a_2 + 18a_1^6a_2^2 + \\ &+ 7a_1^5a_2^3 - 7a_1^4a_2^4 + 36a_1^3a_2^5 + 11a_1^2a_2^6 - 10a_1a_2^7 + 12a_2^8)\, z_1 - \\ &- a_1^9 - 2a_1^8a_2 - 3a_1^7a_2^2 - 4a_1^6a_2^3 + 12a_1^5a_2^4 + 2a_1^4a_2^5 - \\ &- 9a_1^3a_2^6 - a_1^2a_2^7 + 4a_1a_2^8 - 4a_2^9. \end{aligned}$$

Теперь можно находить количество корней системы (21.39) в эллипсе $[x : x \in R^2,\ a_2x_1^2 + a_2x_2^2 < r]$.

Например, для $a_1 = a_2 = 1$ находим $\Omega = z_1^9 - 11z_1^7 - 34z_1^6 - 59z_1^5 - 89z_1^4 - 126z_1^3 - 138z_1^2 - 75z_1 - 6$. Так же как в предыдущих примерах, нетрудно установить, что в $[0, \infty)$ у этого многочлена 1 корень, поэтому параметры $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 0$ не лежат на «особом» множестве. Далее, легко заметить, что $\Omega(4) < 0$, $\Omega(5) > 0$, т. е. этот корень лежит в интервале (4.5). Поэтому наша система имеет корень в круге $\{x : x_1^2 + x_2^2 < 5\}$; но не имеет корней в круге $\{x : x_1^2 + x_2^2 < 4\}$,

Если $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, то $\Omega = z_1^9 - 34z_1^7 - 125z_1^6 - 22z_1^5 + 119z_1^4 + 291z_1^3 - 2179z_1^2 - 3678z_1 - 1421$, и аналогично предыдущему легко найти, что система (21.39) имеет корень в эллипсе $\{x : x_1^2 + 2x_2^2 < 8\}$, но не имеет корней в эллипсе $\{x : x_1^2 + 2x_2^2 < 7\}$.

Замечание. Итак, выше указан алгоритм, позволяющий дать ответ на вопрос о числе корней системы в заданном эллипсоиде пространства R^n. В частности, меняя размеры осей эллипсоида, можно говорить о числе корней в шаре или, например, о числе корней в окрестности отрезка.

§ 22. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНОСТИ НУЛЯ СИСТЕМЫ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ИХ РЯДАМ ТЕЙЛОРА

1°. Пусть

$$f(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z)) - \tag{22.1}$$

система голоморфных функций (голоморфное отображение) в окрестности U_a точки $a \in C^n$ и a — изолированный нуль этой системы, имеющей кратность $\mu_a(f)$ (см. § 2). Для голоморфной функции одного переменного кратность нуля $\mu_a(f)$ всегда совпадает с порядком $d_a(f) = \min\limits_{c_k \neq 0} \{k\}$ функции $f = \sum\limits_{k>0} c_k (z-a)^k$, т. е. кратность нуля зависит лишь от того, какие тейлоровские коэффициенты функции f в точке a не равны нулю. В многомерном случае картина более сложная. Во-первых, кратность нуля системы (22.1) не всегда определяется порядками нуля a функций f_j. Например, для системы $f : f_j = z_j^{k_j} + \sum\limits_{|\alpha|>k_j} c_{j\alpha} z^\alpha$, $j=1, \ldots, n$,

$\mu_0(f) = k_1 \ldots k_n = d_0(f_1) \ldots d_0(f_n)$. Это легко видно из принципа Руше (см. теорему 2.5) и из определения кратности нуля. С другой стороны, порядки $d_a(f_i)$, $i = 1, 2$, функций системы $(z_1, z_1 + z_2^2)$ равны 1, а $\mu_0(f) = 2$.

В п. 3° мы приведем необходимое и достаточное условие на систему (22.1) для того, чтобы $\mu_a(f) = d_a(f_1) \ldots \ldots d_a(f_n)$.

Более того, не всегда знание мономов с ненулевыми коэффициентами позволяет определить кратность нуля. Так системы $(z_1 + z_2 + z_1^2, z_1 - z_2 + z_2^2)$ и $(z_1 + z_2 + z_1^2, z_1 + z_2 + z_2^2)$ имеют одинаковый набор мономов, а кратности нуля (0, 0) у них различны. Однако, как правило, кратность изолированного нуля определяется лишь мономами, входящими в f_l с ненулевыми коэффициентами, т. е. множествами $S_l = \operatorname{supp} f_l = \{\alpha \in N^n : c_{l\alpha} \neq 0\}$, где $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $f_l = \sum_\alpha c_{l\alpha}(z - a)^\alpha$. Поэтому заданному набору множеств $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$, $S_l \subset N^n$ можно сопоставить число $\mu_a(S)$, равное кратности нуля «почти всех» систем f с условием $\operatorname{supp} f_l \subset S_l$, $i = 1, \ldots, n$.

В п. 4° конструктивно решается задача вычисления $\mu_a(S)$ в терминах набора S, а также указываются условия *«невырожденности»* на коэффициенты Тейлора функций f_l, при которых $\mu_a(f) = \mu_a(S)$.

Приведем некоторые простые свойства кратности изолированного нуля систем голоморфных функций. Если $f(a) \neq 0$, положим $\mu_a(f) = 0$.

Предложение 22.1.

1) $\mu_a(f \circ g) = \mu_0(f) \cdot \mu_a(g)$, где $f \circ g$ — *композиция отображений*;

2) $\mu_a(f_1 \cdot g_1, f_2, \ldots, f_n) = \mu_a(f_1, f_2, \ldots, f_n) + \mu_a(g_1, f_2, \ldots, f_n)$;

3) *кратность нуля системы голоморфных функций совпадает с кратностью нуля системы их псевдополиномов Вейерштрасса.*

Доказательство. 1. Пусть $w = f(z)$, $z = g(\zeta)$, $g(a) = 0$, $f(0) = 0$. Если $B = \{|\zeta - a| < \delta\}$, то по принципу аргумента (см. теорему 2.9) $(f \circ g)(\partial B) \sim \mu(f \circ g)\{|w| = \delta\}$ в $C^n \setminus \{0\}$. Но $g(\partial B) \sim \mu_a(g) \partial V$, $f(\partial V) \sim \mu_0(f) \times$

$\times\{|w|=\delta\}$, где $V=\{|\widetilde{z}|<\delta\}$, поэтому $(f\circ g)(\partial B)= = f(g(\partial B))\sim\mu_a(g)\cdot f(\partial V)\sim\mu_0(f)\cdot\mu_a(g)\cdot\widetilde{\{|w|=\delta\}}$ в $C^n\setminus\{0\}$. Отсюда $\mu_a(f\circ g)=\mu_a(g)\cdot\mu_0(\widetilde{f})$.

2. По теореме 4.6

$$\mu_a(f_1g_1, f_2, \ldots, f_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma}\frac{d(f_1g_1)}{f_1g_1}\wedge\frac{df_2}{f_2}\wedge\ldots\wedge\frac{df_n}{f_n}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma}\frac{df_1}{f_1}\wedge\ldots\wedge\frac{df_n}{f_n}+\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma}\frac{dg_1}{g_1}\wedge\frac{df_2}{f_2}\wedge\ldots\wedge\frac{df_n}{f_n}=$$

$\mu_a(f_1, \ldots, f_n)+\mu_a(g_1, f_2, \ldots, f_n)$,

где $\Gamma=\{z\in S(\varepsilon):|f_2(z)|=\ldots=|f_n(z)|=\delta\}$, $S(\varepsilon)= =\{z:|z-a|=\varepsilon\}$, $\delta\ll\varepsilon$.

3 следует из 2), так как $\mu_a(f)$ симметрична относительно f_j, $j=1, \ldots, n$, и, кроме того, для псевдополиномов Вейерштрасса P_j имеем $f_j=P_j\psi_j$, $\psi_j(a)\neq 0$, $j= =1, \ldots, n$. □

Основным аппаратом для вычисления кратности нуля системы в этом параграфе является принцип Руше и общая теорема о кратности нуля системы f, конструирующая по системе f функцию одного переменного, кратность нуля которой совпадает с $\mu_a(f)$.

2°. **Общая теорема о кратности нуля.** Нам потребуются две теоремы об аналитических множествах: теорема о локальном описании и теорема о соотношении размерностей аналитических множеств (см. [205]).

Пусть K — одномерное аналитическое множество, содержащее точку $0\in C^n$.

Теорема 22.2 (о локальном описании). *Существуют базис в C^n и полицилиндр $U_\varepsilon=\{z:|z_j|<\varepsilon_j,\ j= =1, \ldots, n\}$ (радиусы ε_j предполагаются достаточно малыми) такие, что:*

а) *точка $z=0$ является изолированной точкой множества $K\bigcap\{z:z_n=0\}$;*

б) *для любого фиксированного $z_n^{(0)}\in U_{\varepsilon_n}\setminus\{0\}=\{z_n\in \subset C^1:0<z_n<\varepsilon_n\}$ множество $K(z_n^{(0)})=\{z\in K\bigcap U_\varepsilon:z_n=z_n^{(0)}\}$ состоит из одного и того же числа $p<\infty$ точек;*

в) *существуют отмеченные относительно* z_j *псевдополиномы* $P_j(z_j, z_n)$, $j=1, \ldots, n-1$, такие, что $K \cap U_\varepsilon \subseteq \{z \in U_\varepsilon : P_j(z_j, z_n) = 0,\ j = 1, \ldots, n-1\}$.

Из теоремы о локальном описании вытекает, что $K(z_n)$ в окрестности каждой точки $z_n^{(0)} \in U_{\varepsilon_n} \setminus \{0\}$ представляет собой конечный набор голоморфных вектор-функций $z^{(\nu)}(z_n) = \left(z_1^{(\nu)}(z_n), \ldots, z_{n-1}^{(\nu)}(z_n), z_n\right)$, $\nu = 1, \ldots, p$, которые продолжаются по любому пути в $U_{\varepsilon_n} \setminus \{0\}$ и выражаются там рядами по дробным степеням вида

$$z_i^{(\nu)}(z_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(\nu)} z_n^{k/m}, \quad i = 1, \ldots, n-1; \quad \nu = 1, \ldots, p, \tag{22.2}$$

где $m > 0$ — целое число. Мы будем называть одномерные аналитические множества *аналитическими кривыми*, а вектор-функции $z^{(\nu)}(z_n)$ — *ветвями кривой*.

Теорема 22.3. *Пусть A — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset C^n$, h — голоморфная функция в U, $A' = \{z \in A : h(z) = 0\}$. Тогда для каждой точки $a \in A'$: $\dim_a A' = \dim_a A$ или $\dim_a A' = \dim_a A - 1$, где $\dim_a$ — комплексная размерность в точке a аналитического множества.*

В общей теореме о кратности главную роль будет играть понятие результанта функции относительно системы. Если система $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ голоморфных в области $D \subset C^n$ функций имеет там конечное число нулей $E = \{z^{(\nu)}\}_{\nu=1}^{s}$, то *результантом функции* ψ *относительно системы* φ назовем число

$$R(\varphi, \psi) = \prod_{\nu=1}^{s} \psi^{\mu_\nu}(z^{(\nu)}),$$

где $\mu_\nu = \mu_{z^{(\nu)}}(\varphi)$ — кратность нуля $z^{(\nu)}$ системы φ.

В случае, когда $n = 1$, $D = C^1$, а φ_1 и ψ — многочлены, то результант $R(\varphi_1, \psi)$ совпадает с обычным результантом Сильвестра многочленов φ_1 и ψ.

Пусть $z = 0$ — изолированный нуль системы (22.1). Тогда по теореме 22.3 комплексная размерность в точке 0 аналитического множества $K = \{ z \in U_0 : f_j(z) = 0,\ j = 1, \ldots, n-1\}$ равна единице. Согласно теореме о локальном описании, можно выбрать базис в C^n так, чтобы в полицилиндре $U_\varepsilon = \{z : |z_j| < \varepsilon_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ выполнялось условие: для любого фиксированного $\zeta \in U_{\varepsilon_n} \setminus \{0\} = \{z_n : 0 < |z_n| < \varepsilon_n\}$ множество

$$K(\zeta) = \{z \in U_\varepsilon : f_1(z) = \ldots = f_{n-1}(z) = 0,\ z_n = \zeta\}$$

состоит из p точек $z^{(\nu)}(\zeta)$, $\nu = 1, \ldots, p$. Поэтому для любого $z_n \in U_{\varepsilon_n} \setminus \{0\}$ можно определить результант функции f_n относительно системы $'f = (f_1, \ldots, f_{n-1})$

$$R('f, f_n) = \prod_{\nu=1}^{p} f_n^{\mu_\nu} ('z^{(\nu)}(z_n), z_n),$$

где $'z^{(\nu)}(z_n) = (z_1^{(\nu)}(z_n), \ldots, z_{n-1}^{(\nu)}(z_n))$, $\nu = 1, \ldots, p$, — изолированные нули системы $'f$ в области $'U_\varepsilon = \{'z \in C^{n-1} : |z_j| < \varepsilon_j,\ j = 1, \ldots, n-1\}$; μ_ν — кратность нуля $'z^{(\nu)}(z_n)$ системы $'f$.

Заметим, что кратность μ_ν не зависит от z_n, хотя сами нули $'z^{(\nu)}(z_n)$ зависят от z_n. Действительно, по теореме 2.4 кратность нуля $'z^{(\nu)}(z_n)$ выражается интегралом $\mu_\nu = \int\limits_{S_\nu(\delta)} \omega('f, \overline{'f})$, где $S_\nu(\delta) = \{'z : |'z - 'z^{(\nu)}(\zeta)| = \delta\}$, δ—достаточно мало, а $\omega('f, \overline{'f})$ — ядро Мартинелли — Бохнера — непрерывная по параметру z_n форма. Поэтому $\mu_\nu = \mu('z^{(\nu)}(z_n))$ как непрерывная и целочисленная функция принимает одно и то же значение для всех $z^{(\nu)}(z_n)$ из одной связной компоненты множества $K \setminus \{0\}$.

Далее, легко видеть, что $R('f, f_n)$ — голоморфная функция внутри круга $U_{\varepsilon_n} = \{z_n : |z_n| < \varepsilon_n\}$, так как она является симметричной относительно ветвей $z^{(\nu)}(z_n)$ кривой K.

Теперь мы можем сформулировать общую теорему о кратности нуля системы голоморфных функций.

Теорема 22.4 (Цих). *Кратность изолированного нуля $z = 0$ системы (22.1) равна кратности нуля $z_n = 0$ результанта функции f_n относительно системы $'f$: $\mu_0(f) = \mu_0(R('f, f_n))$.*

Доказательство. По теореме 4.6 имеем

$$\mu_0(f) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\bar\Gamma} \frac{df}{f} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{d'f}{'f} \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

где $\Gamma = \{z \in \partial U_\varepsilon : |f_j(z)| = \delta,\ j = 1, \ldots, n-1\}$, $0 < \delta < \min\limits_{z \in \partial U_\varepsilon} \|f\|$, $\|f\| = \max\{|f_1|, \ldots, |f_n|\}$. Так как мы находимся в условиях теоремы о локальном описании, то при достаточно малом δ цикл Γ можно записать в виде $\Gamma = \{z : |f_j(z)| = \delta,\ j = 1, \ldots, n-1,\ |z_n| = \varepsilon_n\}$. Обозначим $\gamma = K \cap \{z : |z_n| = \varepsilon_n\}$, тогда $\Gamma \sim \Gamma' = \bigcup\limits_{w \in \gamma} \Gamma_w$ в $U_\varepsilon \setminus \{z : f_1(z) \ldots f_n(z) = 0\}$, где Γ_w — связная компонента $(n-1)$-мерного цикла $\{z \in U_\varepsilon : |f_j(z)| = \delta,\ j = 1, \ldots, n-1,\ z_n = w_n\}$ (этот цикл имеет p компонент, если δ достаточно мало), лежащая в окрестности точки $w \in \gamma$. По теореме 4.5

$$\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int\limits_{\Gamma_w} \frac{d'f}{'f} = \mu(w),$$

где $\mu(w)$ — кратность изолированного нуля $'w = (w_1, \ldots, w_{n-1})$ системы $'f$ при $z_n = w_n$. Следовательно,

$$\mu_0(f) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma'} \frac{d'f}{'f} \wedge \frac{df_n}{f_n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \mu(w) \frac{df_n}{f_n}.$$

Поскольку на γ любому $z_n \in \gamma_0 = \{|z_n| = \varepsilon_n\}$ соответствует p точек $w = z^{(\nu)}(z_n)$, $\nu = 1, \ldots, p$, и $\mu(w) = \mu(z^{(\nu)}(z_n)) = \mu_\nu$ не зависит от z_n, последний интеграл равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} \sum_{\nu=1}^{p} \mu_\nu \frac{df_n\left(z^{(\nu)}(z_n)\right)}{f_n\left(z^{(\nu)}(z_n)\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} \frac{d\left(\prod\limits_{\nu=1}^{p} f_n^{\mu_\nu}\left(z^{(\nu)}(z_n)\right)\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{p} f_n^{\mu_\nu}\left(z^{(\nu)}(z_n)\right)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} \frac{dR('f, f_n)}{R('f, f_n)}. \ \square$$

З а м е ч а н и е. По теореме 22.4 и предложению 22.1 кратность нуля $(0, 0) \in C^2$ системы двух голоморфных функций равна кратности нуля результанта Сильвестра их псевдополиномов Вейерштрасса, который записывается в виде определителя. Поскольку коэффициенты псевдополиномов Вейерштрасса могут быть найдены конструктивно (см. теорему 27.1), теорема 22.4 дает практический способ вычисления кратности нуля любой голоморфной системы в C^2.

Теорема 22.4 и принцип Руше позволяют легко доказать известную теорему Безу об общем числе корней системы алгебраических уравнений в комплексном проективном пространстве CP^n. Эта теорема нам потребуется в дальнейшем.

Пусть задана система уравнений

$$f_j(\zeta) = 0, \ j = 1, \ldots, n, \tag{22.3}$$

где $f_j(\zeta)$ — однородные многочлены; $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ — однородные координаты в CP^n. Пропорциональные решения системы (22.3) определяют одну и ту же точку CP^n, которую называем корнем системы (22.3) в CP^n. Если $\tilde\zeta = (\tilde\zeta_0, \tilde\zeta_1, \ldots, \tilde\zeta_n)$ — изолированный корень системы (22.3) в CP^n, $\tilde\zeta_j \neq 0$, то кратность $\mu_{\tilde\zeta}(f)$ этого корня системы (22.3) определим как кратность нуля $(\tilde\zeta_0/\tilde\zeta_j, \ldots, \tilde\zeta_{j-1}/\tilde\zeta_j, \tilde\zeta_{j+1}/\tilde\zeta_j, \ldots, \tilde\zeta_n/\tilde\zeta_j)$ системы $f_j(\zeta_0, \ldots, \zeta_{j-1}, 1, \zeta_{j+1}, \ldots, \zeta_n)$, $j = 1, \ldots, n$, в C^n.

Т е о р е м а 22.5 (Безу). *Если система уравнений (22.3) имеет в CP^n лишь изолированные корни, то число их с учетом кратностей равно произведению степеней многочленов $f_j(\zeta)$, $j = 1, \ldots, n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим индукцию по числу переменных. Для $n = 1$ доказательство элементарно. Предположим справедливой теорему для $n - 1$ и докажем ее для n. Выберем в CP^n систему однородных координат $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ так, чтобы система (22.3) не имела корней на плоскости $\zeta_0 = 0$. Тогда число корней системы (22.3) в CP^n совпадает с числом нулей системы

$$f_j(1, z_1, \ldots, z_n), \ j = 1, \ldots, n, \tag{22.4}$$

в пространстве C^n. Пусть $f_j(1, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{|\alpha|\leqslant k_j} c_{j\alpha} z^\alpha$, $j = 1, \ldots, n$; $k_j = \deg f_j$, тогда система

$$Q_j(z) = f_j(0, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{|\alpha|=k_j} c_{j\alpha} z^\alpha, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{22.5}$$

не имеет в C^n нулей, отличных от $z = 0$, в противном случае система (22.3) имела бы корень на плоскости $\zeta_0 = 0$.

Докажем сначала, что кратность нуля $z = 0$ системы (22.5) равна $k_1 \ldots k_n$. Выберем в C^n систему координат так, чтобы $K \cap \{z : z_n = 0\} = \{0\}$, где $K = \{z : Q_j(z) = 0, 1, \ldots, n-1\} = \{z = a^{(\nu)} z_n\}_{\nu=1}^p$, $a^{(\nu)} = \left(a_1^{(\nu)}, \ldots, a_{n-1}^{(\nu)}, 1\right)$ — множество корней системы уравнений $Q_j(z) = 0$, $j = 1, \ldots, n-1$, в пространстве CP^{n-1} с однородными координатами $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Если $\mu_\nu = \mu_{'a^{(\nu)}}('Q)$ — кратность нуля $'a^{(\nu)} = \left(a_1^{(\nu)}, \ldots, a_{n-1}^{(\nu)}\right)$ системы $'Q('z, 1) = (Q_1('z, 1), \ldots, Q_{n-1}('z, 1))$, то по предположению индукции $\sum_{\nu=1}^p \mu_\nu = k_1 \ldots k_{n-1}$. Поскольку $z = 0$ — изолированный нуль системы (22.5), то $Q_n(a^{(\nu)} z_n) = z_n^{k_n} Q_n(a^{(\nu)}) \neq 0$, $\nu = 1, \ldots, p$, поэтому кратность нуля $z_n = 0$ результанта $R('Q, Q_n) = \prod_{\nu=1}^p Q_n^{\mu_\nu}(a^{(\nu)} z_n)$ равна $k_1 \ldots k_n$. По теореме 22.4 $\mu_0(Q) = k_1 \ldots k_n$.

Осталось доказать, что системы (22.4) и (22.5) имеют в C^n одинаковое число нулей с учетом их кратностей. Заметим, во-первых, что $f_j(1, z_1, \ldots, z_n) = g_j(z) + Q_j(z)$, где $g_j(z) = \sum_{|\alpha|<k_j} c_{j\alpha} z^\alpha$, $j = 1, \ldots, n$. Так как $\{z : Q_j(z) = 0, j = 1, \ldots, n\} = \{0\}$, для любой точки $w \in S(1) = \{z : |z| = 1\}$ найдется номер $j \in \{1, \ldots, n\}$, для которого $Q_j(w) \neq 0$. Можно указать на $S(1)$ окрестность U_w точки w и число $r_w > 0$ такие, что для всех $z \in U_w$ и $r > r_w$

$$|Q_j(rz)| = \left| r^{k_j} \sum_{|\alpha|=k_j} c_{j\alpha} z^\alpha \right| > \left| \sum_{m=0}^{k_j-1} r^m \sum_{|\alpha|=m} c_{j\alpha} z^\alpha \right| = |g_j(rz)|.$$

Выбирая из покрытия $\{U_w\}_{w\in S(1)}$ компакта $S(1)$ конечное подпокрытие $U_{w_1}, \ldots, U_{w_N}$ и $r_0 = \max\{r_{w_1}, \ldots \ldots, r_{w_N}\}$, получим, что системы Q и g для любого $r > r_0$ удовлетворяют на сфере $S(r) = \{z : |z| < r\}$ условиям принципа Руше. Следовательно, системы (22.4) и (22.5) имеют в C^n одинаковое число нулей с учетом их кратностей, и это число равно $k_1 \ldots k_n$ — произведению степеней многочленов $f_j(\zeta)$, $j = 1, \ldots, n$. □

3°. **Вычисление кратности нуля по однородным и взвешенно однородным главным частям.** Пусть $f_j(z) = \sum\limits_{|\alpha| \geqslant k_j} c_{j\alpha} z^\alpha$, $j = 1, \ldots, n$, — разложение Тейлора функции f_j из (22.1) в точке 0, где $k_j = d_0(f_j)$ — порядок нуля $z = 0$ этой функции. Обозначим $P_j(z) = \sum\limits_{|\alpha| = k_j} c_{j\alpha} z^\alpha$, $j = 1, \ldots, n$, и назовем систему однородных многочленов

$$P(z) = (P_1(z), \ldots, P_n(z)) \tag{22.6}$$

однородной главной частью системы (22.1).

Теорема 22.6 (Цих — Южаков). *Кратность изолированного нуля $z = 0$ системы* (22.1) *равна произведению порядков нуля $z = 0$ функций этой системы* $(\mu_0(f) = d_0(f_1) \ldots d_0(f_n))$ *тогда и только тогда, когда 0 является изолированным нулем системы (22.6). При этом всегда* $\mu_0(f) \geqslant d_0(f_1) \ldots d_0(f_n)$.

Доказательство. Пусть $l(z) = c_1 z_1 + \ldots + c_n z_n$ — произвольная линейная форма и $z^{(\nu)}(z_n)$, $\nu = 1, \ldots, p$, — ветви кривой $K = \{z \in U_\varepsilon : f_j(z) = 0, j = 1, \ldots, n-1\}$, представленные в виде (22.2). Результант $R('f, l) = \prod\limits_{\nu=1}^{p} l^{\mu_\nu}(z^{(\nu)}(z_n))$ есть степенной ряд по z_n, коэффициенты которого являются многочленами от $c = (c_1, \ldots, c_n)$. Следовательно, множество таких c, для которых кратность $\mu_0(R('f, l)) = \mu_0('f, l)$ минимальна (обозначим эту кратность через μ), открыто и всюду плотно в C^n, как дополнение множества нулей многочлена при младшей степени z_n. Выберем в пространстве C^n переменных z систему координат так, чтобы для форм $l(z) = z_i$, $i = 1, \ldots, n$, выполнялись равенства $\mu_0('f, z_i) = \mu$.

В этой системе координат представление (22.2) для аналитических элементов кривой K примет вид

$$z_i^{(\nu)}(z_n) = a_i^{(\nu)} z_n + o\left(z_n^{1+\lambda}\right), \qquad (22.7)$$

где[5] $a_i^{(\nu)} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n-1$; $\nu = 1, \ldots, p$, $o\left(z_n^{1+\lambda}\right)$ — бесконечно малая относительно $z_n^{1+\lambda}$ при $z_n \to 0$; $\lambda > 0$ — постоянная. Докажем это. Поскольку $\mu_0('f, z_n) = \mu$, а $R('f, z_n) = z_n^{\mu_1 + \ldots + \mu_n}$, то $\mu_1 + \ldots + \mu_n = \mu$. Если (22.2) записать в виде $z_i^{(\nu)}(z_n) = b_i^{(\nu)} z_n^{\varepsilon_{i\nu}} + o\left(z_n^{\varepsilon_{i\nu}}\right)$, $b_j^{(\nu)} \neq 0$, то для почти всех $u \in C^1$ имеем $\mu_0(R('f, z_i + uz_n)) = \sum\limits_{\nu: \varepsilon_{i\nu} \geqslant 1} \mu_\nu + \sum\limits_{\nu: \varepsilon_{i\nu} < 1} \mu_\nu \varepsilon_{i\nu} = \mu = \mu_1 + \ldots + \mu_p$, откуда вытекает, что $\varepsilon_{i\nu} \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, n-1$; $\nu = 1, \ldots, p$. Но $\mu_0(R('f, z_i)) = \sum\limits_{\nu=1}^{p} \mu_\nu \varepsilon_{i\nu} = \mu$, $i = 1, \ldots, n-1$, следовательно, все $\varepsilon_{i\nu} = 1$ и (22.7) доказано.

Запишем (22.7) в векторном виде $z^{(\nu)}(z_n) = a^{(\nu)} z_n + o\left(z_n^{1+\lambda}\right)$, где $a^{(\nu)} = \left(a_1^{(\nu)}, \ldots, a_{n-1}^{(\nu)}, 1\right)$, тогда

$$f_j(z^{(\nu)}(z_n)) = z_n^{k_j} P_j(a^{(\nu)}) + o\left(z_n^{k_j}\right) \equiv 0,$$

откуда

$$P_j(a^{(\nu)} z_n) \equiv 0, \; j = 1, \ldots, n-1; \; \nu = 1, \ldots, p. \qquad (22.8)$$

Покажем, что если комплексная размерность в 0 множества $K_1 = \{z : P_j(z) = 0, \; j = 1, \ldots, n-1\}$ равна 1, то K_1 равно объединению аналитических прямых $A = \bigcup\limits_{\nu=1}^{p} \{z = a^{(\nu)} t, \; t \in C^1\}$. Пусть

$$f_j(z) = P_j(z) + \sum_{i=1}^{\infty} P_{ji}(z), \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

---

[5] На самом деле, число p зависит от выбора системы координат в C^n, однако мы сохраняем обозначение, которое было в (22.2).

— разложение функции f_j в ряд по однородным многочленам, $\deg\ P_{j_i} = k_j + i$. Рассмотрим систему

$$F_j('z, t, \tau) = P_j('z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} \tau^i P_{ji}('z, t) = \tau^{-k_j} f_j(\tau('z, t)), \tag{22.9}$$

$j = 1, \ldots, n-1$, зависящую от параметров $t \in C^1$, $\tau \in [0, 1]$. Ясно, что $F_j('z, t, 1) = f_j('z, t)$, $F_j('z, t, 0) = P_j('z, t)$. Далее, при фиксированных t и τ (22.9) имеет p изолированных нулей $'z^{(\nu)}(t, \tau)$, удовлетворяющих условию $\tau' z^{(\nu)}(t, \tau) = = 'a^{(\nu)} t\tau + 0((t, \tau)^{1+\lambda})$, откуда $'z^{(\nu)}(t, \tau) = 'a^{(\nu)} t + + o(t^{1+\lambda}\tau^{\lambda})$, $\nu = 1, \ldots, p$. Поэтому при $|t|$, достаточно малом, и любом $\tau \in [0, 1]$ нуль $'z^{(\nu)}(t, \tau)$ системы (22.9) лежит в шаре $B_\nu(t) = \{'z : |'z - 'a^{(\nu)} t| < |t|^{1+\delta}\}$, где $0 < \delta < \lambda$. Таким образом, мы построили гомотопию $'F('z, t, \tau)$ систем $'P(z, t)$ и $'f('z, t)$, которая при малых $|t|$ не имеет нулей на сферах $\partial B_\nu(t)$. Поэтому эти системы имеют в $B(t) = = \bigcup\limits_{\nu=1}^{p} B_\nu(t)$ одинаковое (с учетом кратностей) число нулей. Система $'f('z, t)$ имеет в $B(t)$ $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_p$ нулей с учетом кратностей. Но мы находимся в условиях теоремы о локальном описании, поэтому для любого фиксированного t, $|t| \leqslant \varepsilon_n$ система $'f('z, t)$ не имеет нулей на границе полицилиндра $'U_\varepsilon = \{'z : |z_j| < \varepsilon_j,\ j = 1, \ldots \ldots, n-1\}$. Следовательно, $\mu_0('f('z, 0)) = \mu$. Можно считать, что $\{'z \in C^{n-1} : P_j('z, 0) = 0, j = 1, \ldots, n-1\} = \{0\}$. Если теперь воспользоваться индукцией по числу переменных (т. е. предположить справедливой теорему для $n-1$ переменных), можно заключить, что $\mu_0('f('z, 0)) = = k_1 \ldots k_{n-1}$. Значит, система $'P('z, t)$ при достаточно малых $|t|$ имеет в $B(t)$ $k_1 \ldots k_{n-1}$ нулей с учетом их кратностей. По теореме Безу заключаем, что все нули системы $'P('z, t)$ лежат в $B(t)$. Так как радиусы шаров $B_\nu(t)$ стремятся к нулю при $t \to 0$ быстрее, чем расстояние между точками, лежащими в гиперплоскости $\{z : z_n = t\}$ на различных аналитических прямых из K_1, то $K_1 \subset A$. Обратное включение $A \subset K_1$ вытекает из (22.8).

Обозначим $E_1 = \{z : P_j(z) = 0,\ j = 1, \ldots, n\}$. Если $E_1 = \{0\}$, т. е. система (22.6) имеет изолированный нуль $z = 0$, то K_1 одномерно и равно A. Следовательно,

$P_n(a^{(\nu)}z_n) \not\equiv 0$, $\nu = 1, \ldots, p$. Поскольку все ветви $z^{(\nu)}(z_n)$ кривой K имеют вид (22.7), $f_n(z^{(\nu)}(z_n)) = z_n^{k_n} P_n(a^{(\nu)}) + o\left(z_n^{k_n}\right)$, $P_n(a^{(\nu)}) \neq 0$. По вышедоказанному $\sum\limits_{\nu=1}^{p} \mu_\nu = k_1 \ldots k_{n-1}$, поэтому кратность нуля $z_n = 0$ результанта $R('f, f_n) = \prod\limits_{\nu=1}^{p} f_n^{\mu_\nu}(z^{(\nu)}(z_n))$ равна $k_1 \ldots k_n$. По теореме 22.4 достаточность доказана.

Необходимость докажем индукцией по числу переменных. Пусть система (22.6) имеет неизолированный нуль, тогда $\dim_0 K_1 \geqslant 1$. Если $\dim_0 K_1 = 1$, то $K_1 = A$. Так как $E_1 \neq \{0\}$, то существует $\nu_0 (1 \leqslant \nu_0 \leqslant p)$, что $P_n(a^{(\nu_0)}) = 0$, откуда $f_n(z^{(\nu_0)}(z_n)) = o\left(z_n^{k_n}\right)$. Поэтому $\mu_0(R('f, f_n)) = \mu_0(f) > k_1 \ldots k_n$. Если $\dim_0 K_1 > 1$, то $\dim_0\{z : P_j('z, 0) = 0,\ j = 1, \ldots, n-1\} \geqslant 1$. По предположению индукции $\mu_0('f('z, 0)) > k_1 \ldots k_{n-1}$. С другой стороны, $\mu_0('f('z, 0))$ равно числу нулей с учетом их кратностей системы $'f('z, z_n)$ в полицилиндре $'U_\varepsilon$, т. е. числу $\sum\limits_{\nu=1}^{p} \mu_\nu$, поэтому $\mu_0(R('f, f_n)) = \mu_0(f) > k_1 \ldots k_n$.□

З а м е ч а н и е. Только достаточность условия теоремы 22.7 легко доказывается с помощью принципа Руше и теоремы Безу.

Теорема 22.7 легко обобщается на случай, использующий вместо обычной однородности понятие взвешенной однородности. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — рациональные положительные числа. Напомним, что многочлен $g(z)$ называется *взвешенно-однородным относительно веса* $(1/a_1, \ldots, 1/a_n)$, если все его мономы $z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n}$ имеют одну и ту же взвешенную степень $d = i_1/a_1 + \ldots + i_n/a_n$ относительно этого веса.

Т е о р е м а 22.7. *Пусть* $f_j(z) = P_j(z) + \theta_j(z)$, *где* $P_j(z)$ — *взвешенно-однородный многочлен степени* d_j *относительно веса* $(1/a_1, \ldots, 1/a_n)$, *а* $\theta_j(z)$ — *ряд из мономов, имеющих взвешенную степень относительно веса* $(1/a_1, \ldots, 1/a_n)$, *большую, чем* d_j, $j = 1, \ldots, n$.

Тогда $\mu_0(f) = \mu_0(f_1, \ldots, f_n) \geqslant a_1 d_1 \ldots a_n d_n$, *причем равенство имеет место в том и только том случае, когда*

$z = 0$ *является изолированным нулем системы* $(P_1, \ldots, P_n)$.

Теорема 22.7 получается из теоремы 22.6 заменой переменных $z_j = \zeta_j^{s_j}$, $j = 1, \ldots, n$, где $s_j = q\prod_{k\neq j} a_k$, а q выбрано так, что все s_j, $j = 1, \ldots, n$ — целые. Тогда $f_j(z)$ перейдет в $\widetilde{f}_j(\zeta) = \widetilde{P}_j(\zeta) + \widetilde{\theta}_j(\zeta)$, где $\widetilde{P}_j(\zeta)$—однородный многочлен степени $d_j q a_1 \ldots a_n$. Поэтому $\mu_0(\widetilde{f}) = q^n d_1 \ldots d_n a_1^n \ldots a_n^n$ тогда и только тогда, когда $\zeta = 0$ — изолированный нуль системы $(\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_n)$. Но свойство изолированности нуля при указанной замене переменных не изменяется и, кроме того, по предложению 22.1

$$\mu_0(f) = \frac{\mu_0(\widetilde{f})}{\mu_0(z(\zeta))} = \frac{q^n\left(\prod_{j=1}^n d_j\right)\left(\prod_{j=1}^n a_j\right)^n}{q^n\left(\prod_{j=1}^n a_j\right)^{n-1}} = a_1 d_1 \cdot \ldots \cdot a_n d_n. \ \square$$

4°. **Вычисление кратности нуля по ломаным Ньютона.** По аналогии с однородными главными частями опишем более широкий класс систем многочленов, играющих роль главных частей. Обозначим через N, R_+ множества неотрицательных целых и неотрицательных вещественных чисел соответственно. Для функции $g = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ и компактного подмножества $M \subset R_+^n$ положим $\operatorname{supp} g = \{\alpha \in N^n,\ c_\alpha \neq 0\}$, $g_M = \sum_{\alpha \in M\cap N^n} c_\alpha z^\alpha$.

Скажем, что система (22.1) *невырождена на* M, если многочлены $f_{1M}, \ldots, f_{nM}$ не обращаются в нуль на множестве $(C\setminus 0)^n$. Для любого многогранника $\Delta \in R_+^n$ будем обозначать n-мерный объем Δ через $v(\Delta)$.

Многогранником Ньютона $\Gamma_+(f_1, \ldots, f_n)$ *системы* (22.1) в *нуле* назовем выпуклую оболочку в R_+^N множества $\left(\bigcup \left(\alpha + R_+^n\right) : \alpha \in (\operatorname{supp} f_1 \cup \ldots \cup \operatorname{supp} f_n) \setminus \{0\}\right)$.

Ломаной Ньютона $\Gamma(f_1, \ldots, f_n)$ *системы* (22.1) *в нуле* назовем объединение замкнутых компактных граней многогранника $\Gamma_+(f_1, \ldots, f_n)$. Положим $\Gamma_-(f_1, \ldots, f_n)$ — объединение всех отрезков с началом в 0 и концом на $\Gamma(f_1, \ldots, f_n)$ и назовем число $n!v(\Gamma_-(f_1, \ldots, f_n)$ *числом Ньютона* *системы* (22.1) *в нуле*. Обозначим для краткости $\Gamma(f_1, \ldots, f_n)$ через Γ и назовем многочлены $f_{1\Gamma}, \ldots, f_{n\Gamma}$ *главными частями системы* (22.1) *в нуле*. Скажем, что система (22.1) *невырождена в нуле*, если для любой грани σ ломаной Ньютона Γ система (22.1) невырождена на множестве σ (это условие на главные части системы (22.1) в нуле).

Будем предполагать систему (22.1) *удобной*, т. е. такой, что для любого i от 1 до n хотя бы в одну из функций $f_1, \ldots, f_n$ входит с ненулевым коэффициентом моном вида $z_i^{k_i}$, $k_i \geqslant 1$.

Теорема 22.8 (Кушниренко). 1. *Кратность изолированного нуля $z = 0$ системы* (22.1) *не меньше числа Ньютона этой системы в нуле, если же система* (22.1) *невырождена в нуле, то имеет место равенство.*

2. *Множество главных частей всех невырожденных в нуле систем, имеющих данную ломаную Ньютона, является открытым всюду плотным подмножеством в многообразии всех главных частей, отвечающих данной ломаной Ньютона.*

Доказательство. 1. Достаточно доказать утверждение для совпадающих носителей: $\operatorname{supp} f_1 = \ldots = \operatorname{supp} f_n$. Действительно, при малых $\tau_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$, система (22.1) и система $F_j = f_j + \sum_{j \neq i} \tau_j f_j$, $i = 1, \ldots, n$, имеют нуль $z = 0$ одинаковой кратности, одновременно вырождаются на гранях ломаной Ньютона $\Gamma = \Gamma(f_1, \ldots, f_n)$ и, кроме того, $\operatorname{supp} F_1 = \ldots = \operatorname{supp} F_n$. Для простоты положим $n = 2$. Пусть $\sigma \subset \Gamma$ — одномерная грань, заданная своими концами (α_1, α_2), $(\beta_1, \beta_2) \in N^2$ (предположим, что $\beta_1 > \alpha_1$). Грани σ соответствует $\beta_1 - \alpha_1$ с учетом кратностей локальных решений уравнения $f_1(z_1, z_2) = 0$, которые имеют вид

$$z_1^{\nu}(z_2) = a^{\nu} z_2^{\lambda} + o\left(z_2^{\lambda}\right), \quad \nu = 1, \ldots, \beta_1 - \alpha_1,$$

где $\lambda = \dfrac{\alpha_2 - \beta_2}{\beta_1 - \alpha_1}$, $\quad a^{(\nu)} \neq 0$, и удовлетворяют условию (см. [198])

$$f_{1\sigma}\left(a^{\nu} z_2^{\lambda}, z_2\right) \equiv 0, \quad \nu = 1, \ldots, \beta_1 - \alpha_1.$$

В результанте $R(f_1, f_2)$ грани σ соответствует произведение

$$\varphi_\sigma(z_2) = \prod_{\nu=1}^{\beta_1-\alpha_1} f_2\left(z_1^\nu(z_2), z_2\right) =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{\beta_1-\alpha_1} \left[f_{2\sigma}\left(a^\nu z_2^\lambda, z_2\right) + o\left(z_2^{\lambda\alpha_1+\alpha_2}\right)\right].$$

Если система (f_1, f_2) невырождена на σ, то $f_{2\sigma}\left(a^{(\nu)}z_2^\lambda, z_2\right) \not\equiv 0$, $\nu = 1, \ldots, \beta_1 - \alpha_1$, поэтому наименьшая степень в разложении $\varphi_\sigma(z_2)$ по дробным степеням переменной z_2 равна $(\beta_1 - \alpha_1)(\lambda\alpha_1 + \alpha_2)$ и больше этого числа, если (f_1, f_2) вырождена на σ. Нетрудно видеть, что $(\beta_1 - \alpha_1)(\lambda\alpha_1 + \alpha_2)$ равно удвоенной площади треугольника с вершиной в 0 и основанием σ. Учитывая теперь, что $R(f_1, f_2) = \prod_{\sigma\subset\Gamma}\varphi_\sigma(z_2)$, получим требуемое.

☛ 2. Пусть σ — грань ломаной Ньютона Γ и $f_1, \ldots, f_n$ — многочлены с переменными коэффициентами, причем $\operatorname{supp} f_i \subset \Gamma$. Очевидно, $f_{1\sigma}, \ldots, f_{n\sigma}$ — взвешенно-однородные многочлены относительно одного и того же веса, поэтому при замене переменных $z_j = \zeta_j^{s_j}$, $j = 1, \ldots, n$ (см. доказательство теоремы 22.7), система $f_\sigma = (f_{1\sigma}, \ldots, f_{n\sigma})$ перейдет в систему однородных многочленов $\tilde{f}(\zeta) = (\tilde{f}_1(\zeta), \ldots, \tilde{f}_n(\zeta))$. Но для любого i от 1 до n система $\tilde{f}_j\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_i}, \ldots, 1, \ldots, \frac{\zeta_n}{\zeta_i}\right)$, $j = 1, \ldots, n$, из многочленов от $n-1$ переменных $\zeta_1/\zeta_i, \ldots, [i] \ldots \zeta_n/\zeta_i$ почти при всех коэффициентах не имеет нулей в $\mathbf{C}^{n-1}$. Поэтому системы $\tilde{f}(\zeta)$ и $f_\sigma(z)$ почти всегда не имеют нулей в $(\mathbf{C}\setminus 0)^n$.

Замечание. На самом деле, мы доказали, что в двумерном случае условие невырожденности системы (22.1) на каждой грани ломаной Ньютона $\Gamma(f)$ является также и необходимым для того, чтобы $\mu_0(f)$ равнялось числу Ньютона.

В теореме 22.8 ломаная Ньютона $\Gamma(f)$ строилась для всей системы f, а именно для объединения носителей $\operatorname{supp} f_i$, $i = 1, \ldots, n$. Однако ломаную Ньютона можно строить для каждого носителя в отдельности. Тогда в роли главных частей для системы f будут выступать многочлены $f_{1\Gamma_1}, \ldots, f_{n\Gamma_n}$, где $\Gamma_i = \Gamma(f_i)$ — ломаная Ньютона, построенная для носителя $\operatorname{supp} f_i$. Такой подход к вычислению кратности нуля сводится к случаю совпадающих носителей $\operatorname{supp} f_1 = \ldots \operatorname{supp} f_n$, т. е. к теореме 22.8.

Предложение 22.9. *Пусть $S = (S_1, \ldots, S_n)$ — такой набор конечных подмножеств из $N^n \setminus \{0\}$, что существует система многочленов g с условием $\operatorname{supp} g_i \subset S_i$, имеющая изолированный нуль $z = 0$. Тогда для всех систем f с условием $\operatorname{supp} f_i \subset S_i$, за исключением аналитического множества в пространстве коэффициентов, кратность $\mu_0(f)$ одна и та же и является минимальной из всех возможных.*

Доказательство. Пусть c — переменное пространства коэффициентов C^m (m равно сумме мощностей множеств S_i, $i = 1, \ldots, n$) и $f_i(z, c) = \sum\limits_{\alpha \in S_i} c_{i\alpha} z^\alpha$, $i = 1, \ldots, n$, — система с переменными коэффициентами. Из принципа Руше вытекает, что множество M таких c, для которых $\mu_0(f(z, c))$ минимальна, является открытым в C^m. Поэтому существует окрестность U точки $(0, c^{(0)}) \in C^n \times M$ такая, что для аналитического множества $E_f = \{(z, c) \in C^n \times C^m : f_i(z, c) = 0, i = 1, \ldots, n\}$ имеем $U \cap E_f = \{(z, c) \in U : z = 0\}$. Если $\tilde{c}$ — граничная точка для M, то в любой окрестности V точки $(0, \tilde{c})$ $V \cap E_f \setminus \{(z, c) : z = 0\} = \varnothing$. Действительно, в противном случае существовали бы шары $B_1(0) \in C^n$, $B_2(\tilde{c}) \in C^m$ с центрами в точках 0 и $\tilde{c}$ соответственно, что для любого $c \in B_2(\tilde{c})$ система $f(z, c)$ имела бы в шаре $B_1(0)$ единственный нуль $z = 0$, т. е. $\tilde{c} \in M$. Далее, росток аналитического множества $\Pi = \{(z, c) : z = 0\}$ в точке $(0, \tilde{c})$ не принадлежит никакой другой неприводимой компоненте ростка аналитического множества E_f. Поэтому существуют голоморфные в окрестности $V(0, \tilde{c})$ функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ такие, что $E_f = \Pi \cup \{(z, c) \in V(0, \tilde{c}) : \varphi_1(z, c) = \ldots = \varphi_s(z, c) = 0\}$.

Таким образом, множество точек $(0, c) \in \Pi$, в любой окрестности которых $E_f \setminus \Pi \neq \varnothing$, удовлетворяет в окрестности точки $(0, \tilde{c})$ системе уравнений $\psi_j(c) = \varphi_j(0, c) = 0$, $j = 1, \ldots, s$. Следовательно, $C^m \setminus M$ — аналитическое множество. $\square$

Для набора $S = (S_1, \ldots, S_n)$ обозначим через $\mu(S)$ минимальную кратность нуля среди всех кратностей $\mu_0(f)$ систем f с условием $\operatorname{supp} f_i \subset S_i$. Из принципа Руше следует, что для любого набора S существует конечный поднабор $S' = (S_1', \ldots, S_n')$, $S_i' \subset S_i$, со свойством $\mu(S') = \mu(S)$. Поэтому для вычисления $\mu(S)$ будем предполагать, что S_i конечны.

Введем на подмножествах из N^n операцию сложения, полагая $S_1 + S_2 = \{q_1 + q_2 : q_1 \in S_1,\ q_2 \in S_2\}$. Ясно, что умножению функций $g_1 g_2$ соответствует сложение их носителей: $\operatorname{supp} g_1 + \operatorname{supp} g_2$. Отсюда по предложению 22.1

$$\mu(S_1 + S_1', S_2, \ldots, S_n) = \mu(S_1, \ldots, S_n) + \\ + \mu(S_1', S_2, \ldots, S_n). \tag{22.10}$$

Кроме того, $\mu(S)$ симметрична относительно своих аргументов, а потому по свойству (22.10) полилинейна. Следовательно, $\mu(S)$ восстанавливается по своим значениям на диагонали следующим образом:

$$\mu(S) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mu(S_{i_1} + \ldots \\ \ldots + S_{i_k}, \ldots, S_{i_1} + \ldots + S_{i_k}).$$

Для множества $S \in N^n \setminus \{0\}$ обозначим: $\Gamma_+(S)$ — выпуклая оболочка множества $[\alpha + R_+^n : \alpha \in S]$; $\Gamma(S)$ — объединение замкнутых компактных граней многогранника $\Gamma_+(S)$; $\Gamma_-(S)$ — объединение всех отрезков с началом в 0 и концом на $\Gamma(S)$. Будем в дальнейшем предполагать, что для каждого i от 1 до n множество S_i из набора $S = (S_1, \ldots, S_n)$ содержит точки вида $\alpha = (0, \ldots, \alpha_j, \ldots, 0)$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда по теореме 22.8 $\mu(S_{i_1} + \ldots + S_{i_{k}} \ldots$

$\ldots, S_{i_1} + \ldots + S_{i_k}) = n! v\,(\Gamma_-(S_{i_1} + \ldots + S_{i_k})), k = 1, \ldots, n$, и

$$\mu(S) = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k < n} v\,(\Gamma_-(S_{i_1} + \ldots + S_{i_k})). \tag{22.11}$$

Опишем условия невырожденности на систему f с условием $\operatorname{supp} f_i \subset S_i$, обеспечивающие равенство $\mu_0(f) = \mu(S)$. Пусть $S \subset N^n$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $l_j > 0$,— рациональные числа. Положим $m(l, S) = \min\{\langle l, \alpha\rangle = l_1\alpha_1 + \ldots + l_n\alpha_n, \alpha \in S\}$; $S_l = \{\alpha \in S : \langle l, \alpha\rangle = m(l, S)\}$ — пересечение S с опорной плоскостью в направлении l. Для функции $g = \sum\limits_{\alpha} c_\alpha z^\alpha$ с условием $\operatorname{supp} g \subset S$ обозначим $g_l = \sum\limits_{\alpha \in S_l} c_\alpha z^\alpha$. Если $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — система с условием $\operatorname{supp} f_i \subset S_j$, $j = 1, \ldots, n$, то положим $f_l = (f_{1l}, \ldots, f_{nl})$.

Теорема 22.10. *Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — система с условием* $\operatorname{supp} f_i \subset S_i$, $i = 1, \ldots, n$. *Если для любого рационального положительного вектора l система f_l не имеет нулей в $(C \setminus 0)^n$, то $\mu_0(f) = \mu(S)$, где $\mu(S)$ вычисляется по формуле (22.11).*

Важно отметить, что условие теоремы надо проверять лишь для конечного числа векторов l, дающих различные наборы S_{il}, $i = 1, \ldots, n$. А именно: достаточно брать такие l, для которых пересечения ломаных $\Gamma(S_i)$, $i = 1, \ldots, n$, с опорными плоскостями в направлении l состоят более чем из одной точки, т. е. являются гранями, а не вершинами.

Доказательство. Рассмотрим систему $f + tg = (f_1 + tg_1, \ldots, f_n + tg_n)$, где g — система с условием $\operatorname{supp} g_i \subset S_i$, причем $\mu_0(g) = \mu(S)$. Допустим, что $\mu_0(f) > \mu(S) = \mu_0(g)$. Тогда для кривой $K = \{(z, t) \in C^{n+1}, f_j + tg_j = 0, j = 1, \ldots, n\}$ существует аналитический элемент $z(t) \not\equiv 0$ такой, что $z(0) = 0$. По предложению 22.9 можно выбрать g так, чтобы $z(t) = at^l + o(t^l)$, где $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (C \setminus 0)^n$. Так как $z(0) = 0$, то $l_j > 0$, поэтому из $f_j(z(t)) + tg_j(z(t)) = t^q f_{jl}(a) + o(t^q) \equiv 0$, $j = 1, \ldots, n$, следует, что $f_{jl}(a) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Противоречие. □

§ 23. ПРИМЕНЕНИЕ КРАТНЫХ ВЫЧЕТОВ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ И ВЫЧИСЛЕНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ СУММ

Основная идея применения одномерных и кратных вычетов в комбинаторном анализе, систематически развитая Г. П. Егорычевым, состоит в следующем. Пусть нам требуется найти производящую функцию некоторой кратной комбинаторной последовательности $c_\alpha = c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ либо комбинаторную сумму, общий член которой c_α можно выразить при помощи операций сложения и умножения через коэффициенты известных производящих функций. Подставляя интегральные представления коэффициентов этих известных функций (коэффициенты Тейлора в интегральной форме) в степенной ряд производящей функции $F(t) = F(t_1, \ldots, t_n) = \sum\limits_{\alpha \geqslant 0} c_\alpha t^\alpha$, соответственно в искомую комбинаторную сумму, заменяя произведения интегралов кратными интегралами и меняя порядок интегрирования и суммирования, получим ряд либо конечную сумму под знаком кратного интеграла, которые, как правило, свертываются гораздо проще, чем исходные. Чаще всего под знаком интеграла оказывается геометрическая прогрессия. Вычисляя с помощью вычетов интеграл от полученной суммы, найдем искомую производящую функцию или комбинаторную сумму. Иногда комбинаторную сумму полезно рассматривать как член некоторой комбинаторной последовательности. Находя для нее указанным способом производящую функцию и раскладывая эту функцию в ряд Тейлора обычным способом, получим искомую сумму.

В качестве исходных простейших интегральных формул чаще всего используются следующие:

$$\binom{a}{m} = \frac{a(a-1)\ldots(a-m+1)}{m!} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\varepsilon} \frac{(1+z)^a\,dz}{z^{m+1}},$$
$$\frac{a^n}{n!} = \int\limits_{|z|=\varepsilon} \frac{e^{az}dz}{z^{n+1}} \tag{23.1}$$

и т. д.

Изложенную выше идею для достаточно общей ситуации реализует следующая

Т е о р е м а 23.1 (Егорычев — Южаков). *Пусть члены n-кратной числовой последовательности $c_\alpha = c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ можно представить в виде*

$$c_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{\varphi(z)\,[f_1(z)]^{\alpha_1\beta_1} \ldots [f_n(z)]^{\alpha_n\beta_n}\, dz}{z_1^{\beta_1(\alpha_1+1)} \ldots z_n^{\beta_n(\alpha_n+1)}}, \tag{23.2}$$

где $\varphi,\ f_j \in A(\overline{U}_R)$, $\overline{U}_R = \{z \in C^n : ||z|| \leqslant R\}$ — *некоторый поликруг*, $\Gamma_\rho = \{z : |z_1| = \ldots = |z_n| = \rho\}$, $0 < \rho < R$. *Тогда ряд*

$$F(t) = \sum_{\alpha \geqslant 0} c_\alpha t^\alpha, \quad t = (t_1, \ldots, t_n), \tag{23.3}$$

абсолютно сходится в некоторой окрестности $V_\varepsilon = \{t : ||t|| < \varepsilon\}$ *и*

$$F(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{\varphi(z)\, dz}{\prod\limits_{j=1}^{n} \left[z_j^{\beta_j} - t_j f_j^{\beta_j}(z)\right]}. \tag{23.4}$$

В частности,

а) если $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 1$, *то*

$$F(t) = \left(\varphi(z) \Big/ \frac{\partial w}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=z(t)} = \left[\varphi(z) \Big/ \det\left\| \delta_{jh} - t\frac{\partial f_j(z)}{\partial z_h}\right\|\right]\Bigg|_{z=z(t)}, \tag{23.5}$$

где

$$w_j = z_j - t_j f_j(z),\ j = 1, \ldots, n, \tag{23.6}$$

$z = z(t)$ — *нуль системы* (23.6), *лежащий в* $U_\rho = \{z : ||z|| < \rho\}$;

б) если $f_j(0) \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$, *то*

$$F(t) = \sum_{\mu \in M} \left[\varphi(z) \Big| \frac{\partial w}{\partial z}\right]\Bigg|_{z=z^{(\mu)}(t)}, \tag{23.7}$$

где

$$w_j = z_j^{\beta_j} - t_j f_j^{\beta_j}(z), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{23.8}$$

$\{z^{(\mu)}(t),\ \mu \in M\}$ — *множество нулей системы* (23.8) *в поликруге* U_ρ, $M = \{\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n),\ \mu_j = 1, \ldots, \beta_j,\ j = 1, \ldots, n\}$.

Формулы (23.5), (23.7) являются для указанных случаев выражением интеграла (23.4) через кратные вычеты. В общем случае указать формулы вычетов для интеграла (23.6) не удается. Однако в конкретных примерах вычисление интеграла (23.4) не вызывает затруднений. Иногда его удобно вычислять повторным интегрированием.

Доказательство теоремы 23.1. При $z \in \Gamma_\rho$, $t \in V_\varepsilon$ где ρ фиксировано, $0 < \varepsilon < (\rho/M_j)^{\beta_j}$, $M_j = \max\limits_{z\in\Gamma_\rho} |f_j(z)|$, $j = 1, \ldots, n$, ряд кратной геометрической прогрессии

$$\frac{\varphi(z)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left[z_j^{\beta_j} - t_j f_j^{\beta_j}(z)\right]} = \sum_{\alpha\geqslant 0} \varphi(z) \prod_{j=1}^{n} \frac{t_j^{\alpha_j}\,[f_j(z)]^{\beta_j\alpha_j}}{z_j^{\beta_j(\alpha_j+1)}}$$

сходится равномерно и абсолютно. Интегрируя этот ряд почленно по циклу Γ_ρ, получим при $t \in V_\varepsilon$ формулу (23.4) суммы ряда (23.3) с коэффициентами (23.2).

По лемме 4.9 при фиксированном $t \in V_\varepsilon$ цикл $\Gamma_\varepsilon \sim \sim \Gamma_\delta = \left\{z : \left|z_j^{\beta_j} - t_j f_j^{\beta_j}(z)\right| = \delta,\ j = 1, \ldots, n\right\}$, где $\delta > 0$ достаточно мало, $\gamma_\delta = \sum\limits_{\mu\in M} \gamma_\mu$, $\gamma_\mu = \gamma_\delta \cap U_\mu$, U_μ—окрестность нуля $z^\mu(t)$ системы (23.8). По теореме Коши — Пуанкаре 0.6 интеграл в (23.4) равен

$$\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{\varphi\,dz}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(z_j^{\beta_j} - t_j f_j^{\beta_j}(z)\right)} = \sum_{\mu\in M} \int\limits_{\gamma_\mu} \frac{\varphi(z)\,dz}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(z_j^{\beta_j} - t_j f_j^{\beta_j}(z)\right)}. \tag{23.9}$$

В случае а) система (23.8) принимает вид (23.6) и имеет в U_ρ один простой нуль. В случае б) эта система имеет $\beta_1 \ldots \beta_n$ различных простых нулей в U_ρ, так как системы уравнений

$$z_j - t_j^{1/\beta_j} f_j(z) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

имеют в U_ρ по одному простому нулю и при $f_j(0) \neq 0$ для различных значений корня $\sqrt[\beta_j]{t_j}$ эти нули различны.

Поскольку $\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z^{(\mu)}(t)} \neq 0$, в достаточно малой окрестности U_μ нуля $z^\mu(t)$ отображение (23.8) биголоморфно. Производя в U_μ замену (23.8), получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma_\mu} \frac{\varphi(z)\, dz}{\prod\limits_{j=1}^{n} \left[z_j^{\beta_j} - t_j f_j^{\beta_j}(z)\right]} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\substack{|w_j|=\delta \\ j=1,\ldots,n}} \frac{\varphi(z(w)) \frac{\partial z}{\partial w}\, dw}{w^{I}} =$$

$$= \left.\left[\varphi(z(w)) \frac{\partial z}{\partial w}\right]\right|_{w=0} = \left.\left[\varphi(z) \middle/ \frac{\partial w}{\partial z}\right]\right|_{z=z^{(\mu)}(t)}. \quad (23.10)$$

Из (23.10) и (23.9) получим (23.7), а при $\beta_1 = \ldots \beta_n = 1$ — (23.5).□

Из теоремы 23.1, как частный случай, получается следующая теорема, имеющая важное значение в комбинаторике.

Теорема 23.9 (главная теорема Мак — Магона). *Пусть* $X_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} x_j$, $j = 1, \ldots, n$. *Тогда коэффициент* $b_\alpha = b_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ при $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ *в разложении* $X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$ *равен коэффициенту при* $t_1^{\alpha_1} \ldots t_n^{\alpha_n}$ *в разложении дроби*

$$F(t) = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 - a_{11}t_1 & -a_{12}t_1 & \ldots & -a_{1n}t_1 \\ -a_{12}t_2 & 1 - a_{22}t_2 & \ldots & -a_{2n}t_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1n}t_n & -a_{2n}t_n & \ldots & 1 - a_{nn}t_n \end{vmatrix}}. \quad (23.11)$$

Доказательство. Коэффициент b_α можно представить в виде

$$b_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|x_j|=\varepsilon,\ j=1,\ldots,n} \frac{X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{x_1^{\alpha_1+1} \ldots x_n^{\alpha_n+1}}.$$

По теореме 23.1 (см. случай а)) производящая функция $F(t)=\sum\limits_{\alpha>0} b_\alpha t^\alpha$ определяется формулой

$$F(t)=1\Big/\frac{\partial(w_1,\ldots,w_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\Big|_{x=x(t)},$$

где $w_j=x_j-t_jX_j$, $j=1,\ldots,n$, или (23.11).□

Пример 1. Доказать тождество

$$\sum_{k=0}^{N}\binom{m}{k}\binom{n}{k}\binom{m+n+p-k}{m+n}=\binom{m+p}{m}\binom{n+p}{n},\tag{23.12}$$

где $m, n, p>0$, $N=\min(m,n,p)$. Будем решать задачу вычисления комбинаторной суммы

$$A_{mn}=\sum_{k=0}^{N}\binom{m}{k}\binom{n}{k}\binom{m+n+p-k}{m+n}.$$

Используя (23.1) и то, что

$$\int\limits_{|z|=\varepsilon}\frac{(1+z)^m\,dz}{z^{k+1}}=0$$

при $k>m$, представим A_{mn} в виде

$$A_{mn}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2\pi i)^3}\int\limits_{|z_1|=\rho_1}\frac{(1+z_1)^m dz_1}{z_1^{k+1}}\int\limits_{|z_2|=\rho_2}\frac{(1+z_2)^n dz_2}{z_2^{k+1}}\times$$
$$\times\int\limits_{|z_3|=\rho_3}\frac{(1+z_3)^{m+n+p-k}dz_3}{z_3^{m+n+1}}.$$

Рассмотрим производящую функцию последовательности A_{mn}:

$$F(u,v)=\sum_{m,n=0}^{\infty}A_{mn}u^m v^n=\sum_{m,n,k=0}^{\infty}\frac{1}{(2\pi i)^3}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{u(1+z_1)(1+z_3)}{z_3}\right]^m\times$$
$$\times\left[\frac{v(1+z_2)(1+z_3)}{z_3}\right]^n\left[\frac{1}{z_1z_2(1+z_3)}\right]^k\frac{(1+z_3)^p}{z_1z_2z_3}\,dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3,\tag{23.13}$$

где $\Gamma=\{z : |z_j|=\rho_j,\ j=1,\ 2,\ 3\}$. При $\rho_1=\rho_2=2$, $\rho_3={}^1/_2$, $|u|<1/9$, $|v|<1/9$ в (23.13) можно переставить суммирование и интегрирование, так как при этом условии ряд тройной геометрической прогрессии равномерно сходится на Γ. Аналогично (23.4) получим

$$F(u,v)=\frac{1}{(2\pi i)^3}\int\limits_\Gamma\frac{(1+z_3)^p z_3\,dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3}{[z_3-u(1+z_1)(1+z_3)][z_3-v(1+z_2)(1+z_3)]\times}\rightarrow$$

$$\xrightarrow{\hspace{2em}}\overline{\times[z_1z_2(1+z_3)-1]}.$$

Вычисляя полученный интеграл как повторный, найдем

$$F(u,v)=\frac{1}{(1-u)^{p+1}(1-v)^{p+1}}.$$

Разложение Тейлора этой функции имеет вид

$$F(u,v)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\binom{m+p}{m}\binom{n+p}{n}u^m v^n.$$

Отсюда и из (23.13) получим (23.12).

Пример 2. Вычислить сумму

$$S_m=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}^3.$$

С помощью (23.1), учитывая, что $\int\limits_{|z|=\varepsilon}(1+z)^m dz/z^{k+1}=0$ при $k>m$, найдем интегральное представление

$$S_m=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2\pi i)^3}\int\limits_\Gamma\frac{(1+z_1)^m}{z_1^{m-k+1}}\frac{(1+z_2)^m}{z_2^{m-k+1}}\frac{(1+z_3)^m}{z_3^{k+1}}\,dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3,$$

где $\Gamma=\{z : |z_j|=\rho_j,\ j=1,\ 2,\ 3\}$. Чтобы не все переменные степени оказались в знаменателе, воспользуемся тождеством $\binom{m}{k}=\binom{m}{m-k}$. При $\rho_1=\rho_2=1$, $\rho_3=2$, меняя суммирование и интегрирование, получим

$$S_m = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int\limits_{\Gamma} \frac{(1+z_1)^m (1+z_2)^m (1+z_3)^m}{z_1^{m+1} z_2^{m+1} (z_3 + z_1 z_2)} dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3.$$

После интегрирования по z_3 имеем

$$S_m = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|z_1|=|z_2|=1} \frac{(1+z_1)^m (1+z_2)^m (1-z_1 z_2)^m dz_1 \wedge dz_2}{z_1^{m+1} z_2^{m+1}}.$$

Если теперь находить производящую функцию непосредственно для S_m, то получим двойной интеграл, прямое вычисление которого либо приводит к исходному степенному ряду, либо к периоду эллиптического интеграла. Поэтому целесообразно рассмотреть двойную последовательность

$$R_{mn} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|z_1|=|z_2|=1} \frac{(1+z_1)^m (1+z_2)^m (1-z_1 z_2)^n dz_1 \wedge dz_2}{z_1^{m+1} z_2^{n+1}},$$

для которой $R_{mm} = S_m$. К последовательности R_{mn} уже можно применить теорему 23.1 (см. случай а)). По формулам (23.3) и (23.5) после элементарных вычислений получим

$$F(t_1, t_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} R_{mn} t_1^m t_2^n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|z_1|=|z_2|=1} \frac{dz_1 \wedge dz_2}{[z_1 - t_1(1+z_1)(1+z_2)][z_2 - t_2(1 - z_1 z_2)]} =$$

$$= \left[(1-t_1)^2 + 4 t_1 t_2^2\right]^{-1/2}.$$

Разлагая эту функцию в биномиальный ряд сначала по t_2, а затем по t_1, найдем

$$R_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{при } n \text{ нечетном}, \\ \dfrac{(-1)^p (m+p)!}{(p!)^2 (m-p)!}, & \text{при } n = 2p. \end{cases}$$

Отсюда

$$S_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k}^3 = \begin{cases} 0, & \text{при } m \text{ нечетном}, \\ \dfrac{(-1)^p (3p)!}{(p!)^3}, & \text{при } m = 2p. \end{cases}$$

Глава V

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В МНОГОМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ

§ 24. ТЕОРЕМА О ПРИНУДИТЕЛЬНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ГАРТОГСА—БОХНЕРА. АППРОКСИМАЦИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛИЭДРАХ ВЕЙЛЯ И ЛИНЕЙНО-ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТАХ

1°. Обсудим вопрос о голоморфном продолжении внутрь области D функции, заданной на границе ∂D. Рассмотрим сначала простое следствие из теоремы 1.2.

Теорема 24.1 (Аронов — Кытманов). *Пусть D — ограниченная область с границей $\partial D \in C^{(3)}$ и $f \in C^{(2)}(\partial D)$. Для того чтобы нашлась голоморфная в D функция $F \in C^{(1)}(\overline{D})$ такая, что $F|_{\partial D} = f$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\,\omega(\zeta - z, \overline{\zeta - z}) = 0 \qquad (24.1)$$

для $z \in C^n \setminus \overline{D}$. Если $C^n \setminus \overline{D}$ связно, то достаточно, чтобы (24.1) выполнялось для $z \in \{w : |w_l| > R,\ l = 1, \ldots, n\}$, где R — достаточно большое положительное число.

Доказательство. Первая часть теоремы сразу следует из теоремы 1.2 и леммы 1.4 и того факта, что

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\bar{\zeta}_{[k]} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n-2}}, \quad z \in D, \qquad (24.2)$$

продолжается на $\overline{D}$ как функция класса $C^{(2)}(\overline{D})$ (см. предложение 0.10). Остается только заметить, что интеграл типа Мартинелли — Бохнера от f есть линейная комбинация производных от интегралов вида (24.2) и, следовательно, принадлежит классу $C^{(1)}(\overline{D})$. Для доказательства второго утверждения теоремы нужно вспомнить, что интеграл типа Мартинелли — Бохнера гармоничен вне ∂D.□

Теорема 24.2 (Бохнер). *Пусть D — ограниченная область, $\partial D \in C^{(1)}$, множество $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ связано, $n > 1$, функция $f \in C^{(1)}(\partial D)$. Для существования функции $F \in A(D) \cap C^{(1)}(\overline{D})$ такой, что $F|_{\partial D} = f$, необходимо и достаточно выполнение условий Севери (касательных уравнений Коши — Римана)*:

$$df \wedge d\zeta|_{\partial D} = 0. \tag{24.3}$$

Доказательство. Необходимость сразу получается из условий Коши — Римана $\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}_k} = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Достаточность мы для простоты докажем при предположениях $\partial D \in C^{(3)}$, $f \in C^{(2)}(\partial D)$, позволяющих воспользоваться предыдущей теоремой. Отметим, что

$$\omega(\zeta - z, \overline{\zeta - z}) = d_\zeta \Omega(\zeta, z), \tag{24.4}$$

где

$$\Omega(\zeta, z) = \frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{|\zeta - z|^{2n-2}} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{\zeta_1 - z_1} d\bar{\zeta}_{[1,k]} \wedge d\zeta.$$

Пусть $R > 0$ такое, что $D \subset C(O, R)$. При $z \in \{w : |w_1| > R\}$ и $\zeta \in \partial D$ форма Ω регулярна. Теперь из (24.3) и (24.4) в силу формулы Стокса

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\, \omega = \int_{\partial D} f(\zeta)\, d_\zeta \Omega = \int_{\partial D} d_\zeta [f(\zeta)\, \Omega] = 0.$$

Остается сослаться на теорему 24.1.□

Теорема 24.3 (Гартогс — Осгуд — Браун). *Пусть D — ограниченная область, множество $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ связно, $n > 1$. Всякая функция $f(z)$, голоморфная на ∂D (т. е. в некоторой окрестности $U(\partial D)$), голоморфно продолжается на всю область D.*

Доказательство. Выберем область D' так, чтобы граница $\partial D' \in C^{(1)}$, $D' \subset D$, $\partial D' \subset U(\partial D)$, множество $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D'}$ было по-прежнему связно. На $\partial D'$ функция $f(z)$ голоморфна, поэтому на $\partial D'$ выполняются касательные условия Коши — Римана. По теореме 24.2 существует функция $F \in A(D') \cap C^{(1)}(\overline{D'})$ такая, что $F|_{\partial D'} = f$. Остается показать, что $F = f$ в $U(\partial D) \cap D'$. Это следует из их совпадения на $\partial D'$ и из того факта, что нули голоморфной функции, отличной от тождественного нуля, не могут заполнять $(2n-1)$-мерную непрерывную действительную поверхность (см., например, [173], теорему 4.7).

При доказательстве этой теоремы можно считать, что $\partial D' \in C^{(3)}$, чтобы пользоваться только тем случаем теоремы 24.2, который мы действительно доказали.

Если вместо теоремы 1.2 воспользоваться теоремой 1.6, то можно получить следующий результат подобно тому, как была получена теорема 24.1.

Теорема 24.4 (Кытманов — Айзенберг.). *Условие (24.1) необходимо и достаточно в каждом из двух случаев из теоремы 1.6 для того, чтобы для всякой $f \in C(\partial D)$ нашлась $F \in A_C(D)$ такая, что $F|_{\partial D} = f$.*

В качестве следствия этого утверждения приведем еще один критерий существования голоморфного продолжения. Пусть $Z_{k,l}(\zeta)$ — шаровые (однородные гармонические) многочлены, которые на единичной сфере $\partial B_1(0) \subset C^n$ образуют ортонормальный базис в пространстве $L^2(\partial B_1(0))$. Здесь k — степень многочлена, а l — номер его среди многочленов степени k, входящих в базис, $k = 0, 1, 2, \ldots, l = 1, 2, \ldots, \sigma(k)$, где

$$\sigma_k = \frac{2(n+k-1)!\,(2n+k-3)!}{k!\,(2n-2)!}.$$

Следствие 24.5. *Пусть $\partial D \subset C^{(2)}$ связна, D ограничена. Функция $f \in C(\partial D)$ является следом на ∂D функции из $A_c(D)$ тогда и только тогда, когда*

$$\int_{\partial D} f(\zeta) \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} Z_{k,l}(\zeta)\, d\bar{\zeta}_{[j]} \wedge d\zeta = 0,$$

$l = 1, 2, \ldots, \sigma(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

При $n = 1$ данное следствие представляет собой известный классический критерий, состоящий в ортогональности $f(\zeta)$ всем мономам ζ^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Для того чтобы получить другое следствие теоремы 24.4, нам потребуется следующее понятие. Пусть D ограничена, $\partial D \in C^{(1)}$, функция $f \in C(\partial D)$. Будем говорить, что f обладает *одномерным свойством голоморфного продолжения*, если для любой комплексной прямой l для сужения $f_l = f|_{\partial D\cap l}$ существует функция $F_l \in C(\overline{D}\cap l)$, голоморфная во внутренних (относительно l) точках $\overline{D}\cap l$, такая, что $f_l = F_l|_{\partial D\cap l}$.

Лемма 24.6. *Если функция обладает одномерным свойством голоморфного продолжения, то верно* (24.1) *для* $z\in \mathbf{C}^n\setminus\overline{D}$.

Доказательство. Пусть z принадлежит неограниченной компоненте $\mathbf{C}^n\setminus\overline{D}$. Сделаем ортогональное линейное преобразование и сдвиг в $\mathbf{C}^n$ так, чтобы $z=0$ и плоскость $\{z: z_1=0\}$ не пересекала D. Это можно сделать для точек z, достаточно удаленных от D, тогда ядро $\omega(\zeta - z, \overline{\zeta - z})$ перейдет в $\omega(\zeta, \overline{\zeta})$. Далее, произведем замену переменных $\zeta_1 = v_1^{-1}$, $\zeta_j = v_j v_1^{-1}$, $j=2,\ldots,n$, получим

$$d\zeta = d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{v_1^2} & 0 & \ldots & 0\\ -\dfrac{v_2}{v_1^2} & \dfrac{1}{v_1} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\dfrac{v_n}{v_1^2} & 0 & \ldots & \dfrac{1}{v_1}\end{vmatrix} dv = -\frac{1}{v_1^{n+1}}\,dv.$$

При этом $\mathbf{C}_z^n\setminus\{z: z_1=0\}$ биголоморфно отображается на $\mathbf{C}_v^n\setminus\{v: v_1=0\}$. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\overline{\zeta}_k d\overline{\zeta}_{[k]} = \sum_{k=1}^{n}\overline{\Delta}_k d\overline{v}_{[k]},$$

где

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \ldots & \zeta_n\\ \zeta'_{1v_1} & \zeta'_{2v_1} & \ldots & \zeta'_{nv_1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \zeta'_{1v_n} & \zeta'_{2v_n} & \ldots & \zeta'_{nv_n}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v_1} & \dfrac{v_2}{v_1} & \ldots & \dfrac{v_n}{v_1}\\ -\dfrac{1}{v_1^2} & -\dfrac{v_2}{v_1^2} & \ldots & -\dfrac{v_n}{v_1^2}\\ 0 & \dfrac{1}{v_1} & \ldots & 0\\ \cdot & & & \cdot\\ [k] & & & \\ \cdot & & & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & \dfrac{1}{v_1}\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{cases} 1/v_1^n, & k=1,\\ 0, & k\neq 1.\end{cases}$$

Поэтому

$$\omega(\zeta, \bar\zeta) = (-1)^n \frac{dv_1}{v_1} \wedge \frac{d\bar v_{[1]} \wedge dv_{[1]}}{(1 + |v_2|^2 + \ldots + |v_n|^2)^n} = \frac{dv_1}{v_1} \wedge \lambda(v'),$$

где $v' = (v_2, \ldots, v_n)$. При рассматриваемой замене переменных прямые $\{\zeta : \zeta_1 = t,\ \zeta_2 = c_2 t, \ldots, \zeta_n = c_n t\}$ переходят в прямые $\{v : v_2 = c_2, \ldots, v_n = c_n\}$, граница ∂D — в некоторый цикл Γ. Если f обладает одномерным свойством голоморфного продолжения, то после замены переменных эта функция (теперь ее обозначим $f(v)$) будет обладать одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых $\{v : v_2 = c_2, \ldots, v_n = c_n\}$. Далее,

$$\int\limits_{\partial D} f\omega(\zeta, \bar\zeta) = c_n \int\limits_{\Gamma} f(v) \frac{dv_1}{v_1} \wedge \lambda(v') = c_n \int\limits_{\pi(\Gamma)} \lambda(v') \times$$
$$\times \int\limits_{\pi^{-1}(v') \cap \Gamma} f(v) \frac{dv_1}{v'},$$

где π — проекция $v \to v'$. Заметим, что $\pi^{-1}(v') \cap \Gamma$ для почти всех $v^1 \in \pi(\Gamma)$ являются гладкими кривыми по теореме Сарда. Точка 0 лежит вне области, ограниченной Γ, поэтому внутренний интеграл равен нулю для почти всех v^1, т. е. верно (24.1) для z, достаточно удаленных от D. В силу гармоничности интеграла типа Мартинелли—Бохнера (24.1) справедливо и для всех точек из неограниченной компоненты множества $\mathbb{C}^n \setminus \bar D$.

Пусть теперь z принадлежит ограниченной компоненте $Q \subset \mathbb{C}^n \setminus \bar D$ и предположим, что $z = 0$ (этого всегда можно добиться сдвигом начала координат). Рассмотрим конус Π_ε с центром в 0, образованный комплексными прямыми, проходящими через 0, где ε — величина площади куска гиперповерхности ∂Q, находящегося внутри Π_ε. После той же замены переменных конус перейдет в цилиндр, образованный прямыми $\{v : v_2 = c_2, \ldots, v_n = c_n\}$, причем Π_ε можно выбрать так, чтобы: 1) при $\varepsilon \to 0$ площадь $\partial(Q \cap \Pi_\varepsilon) \cap \partial D$ стремится к нулю, поэтому

$$\int\limits_{\partial D} f\omega(\zeta, \bar\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial D \setminus \partial(Q \cap \Pi_\varepsilon)} f\omega(\zeta, \bar\zeta);$$

2) $\partial D \setminus \partial(Q \cap \Pi_\varepsilon)$ переходит при замене переменных в компакт Γ_ε. Так же как и выше, можно показать, что

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f(v) \frac{dv_1}{v_1} \wedge \lambda(v') = 0,$$

следовательно, (24.1) верно и для $z \in Q$. □

Из этой леммы и теоремы 24.4 получается

Теорема 24.7 (Аграновский — Вальский — Стоут). *Если область D ограничена, $\partial D \in C^{(2)}$, функция $f \in C(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения, то f голоморфно продолжается в D.*

Отметим, что доказательство теоремы 12.9 состояло в применении теоремы 12.2 и того факта, что в рассмотренном случае линейные комбинации полиномов вида (12.16) плотны в $[Ph_C(D)]_\mu^\perp$ в метрике $C(S(D))$. Эти соображения (и аналогичные для голоморфных функций) привели к следующей характеристике следов плюригармонических (соответственно голоморфных) функций на границе Шилова.

Теорема 24.8 (Айзенберг — Даутов). *Пусть D — круговая сильно звездная ограниченная область, μ — неотрицательная массивная мера на $S(D)$, инвариантная относительно поворотов, для которой существует ядро Сеге, а каждая точка $S(D)$ есть точка пика для алгебры $A_c(D)$. Если $\varphi \in C(S(D))$, то:*

1) $\varphi = f|_{S(D)}$ *для некоторой $f \in A_c(D)$ тогда и только тогда, когда*

$$\int_{S(D)} \varphi P d\mu = 0 \tag{24.3}$$

для всякого полинома вида

$$\begin{cases} z^J \bar{z}^{\mathcal{J}} - P_{J\mathcal{J}}(z), & |J| \leqslant |\mathcal{J}|, \\ z^J \bar{z}^{\mathcal{J}}, & |J| > |\mathcal{J}|; \end{cases} \tag{24.4}$$

2) $\varphi = u|_{S(D)}$ *для некоторой $u \in Ph_C(D)$ в том и только том случае, когда выполняется соотношение (24.3) для любого полинома вида (12.16).*

Если, кроме того, область D — n-круговая, а мера инвариантна относительно n-поворотов, то (24.4) можно заменить на

$$\begin{cases} z^J \bar{z}^{\mathcal{J}}, & J \nleqslant \mathcal{J}, \\ z^J \bar{z}^{J+\mathcal{J}} \left(a^2_{J+\mathcal{J}+I_k} - a^2_{J+\mathcal{J}} \mid z_k \mid^2\right), \end{cases}$$

а (12.16) — на (12.20).

2°. Рассмотрим полиэдр Вейля $\Delta = \{z : z \in D, \chi_i(z) < 1, i = 1, \ldots, N\}$, $\chi_i(z) \in A(D)$, $i = 1, \ldots, N$, $\Delta \subset\subset D$, и функцию $f(z) \in A(\Delta)$ Для всякого r, $0 < r < 1$, имеем $f \in A(\overline{\Delta(r)})$, где $\Delta(r) = \{z : z \in D, |\chi_i(z)| < r, i = 1, \ldots, N\}$.

Представим $f(z)$ в $\Delta(r)$ формулой Бергмана — Вейля (9.1). Заметим, что при $z \in \Delta(r)$, $\zeta \in \gamma_{i_1 \ldots i_n}$ справедливо неравенство

$$\frac{|\chi_{i_k}(z)|}{|\chi_{i_k}(\zeta)|} < 1,$$

поэтому из (9.1) следует

$$f(z) = \sum_{i_1 < \ldots < i_n} \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} \left[\frac{1}{(2\pi i)^n} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\gamma_{i_1 \ldots i_n}} \frac{f(\zeta)\, \Omega_{i_1 \ldots i_n}(\zeta, z)\, d\zeta}{\chi_{i_1}^{k_1+1}(\zeta) \ldots \chi_{i_n}^{k_n+1}(\zeta)} \right] \chi_{i_1}^{k_1}(z) \ldots \chi_{i_n}^{k_n}(z). \quad (24.5)$$

По теореме Коши — Пуанкаре 0.6 ряд (24.5) не зависит от $r < 1$ при r, достаточно близких к 1. Таким образом, верна

Т е о р е м а 24.9 (Вейль). *Всякая функция $f \in A(\Delta)$ разлагается при $z \in \Delta$ в равномерно сходящийся на компактах из Δ ряд (24.5).*

Полиэдр Δ называется *полиномиальной областью Вейля*, если все $\chi_i(z)$ — полиномы. Область D, для которой всякая функция $f \in A(D)$ равномерно на компактах из D аппроксимируется полиномами, называется *областью Рунге*.

С л е д с т в и е 24. 10. *Всякая полиномиальная область Вейля есть область Рунге.*

Ряд (24.5) — обобщение кратного степенного ряда. Его отличие от степенного ряда заключается не только в наличии суммы по $i_1 \ldots i_n$, и не только в замене мономов $z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$ степенями функций $\chi_i(z)$, $i = 1, \ldots, N$, но главным образом в том, что коэффициенты ряда (24.5) — функции от z и что разложение в этот ряд, вообще говоря, неединственно.

3°. Рассмотрим следующую задачу: найти условия, при которых компакт $M \subset C^n$ обладает тем свойством, что всякая функция $f \in A(M)$ представима в некоторой окрестности (зависящей от f) равномерно сходящимся рядом «простейших дробей»:

$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{\prod\limits_{j=1}^{n} (a_{pj1}z_1 + \ldots + a_{pjn}z_n + b_{pj})}, \qquad (24.6)$$

где $\sum\limits_{m=1}^{n} |a_{pjm}|^2 = 1$, $j = 1, \ldots, n$, $p = 1, 2, \ldots$,
$\sum\limits_{p=1}^{\infty} |A_p| < \infty$.

Можно, не уменьшая общности, считать компакт M связным. Для дальнейшего нам потребуются некоторые понятия. Будем говорить, что компакт M *аппроксимируется извне* последовательностью областей D_p, $p = 1, 2, \ldots$, если $D_{p+1} \subset\subset D_p$ и $M = \bigcap\limits_p D_p$. Введем понятие *оболочки голоморфности компакта*. Предположим, что существует такая последовательность областей D_p, $p=1, 2, \ldots$, аппроксимирующая M извне, что каждая область D_p имеет однолистную оболочку голоморфности $\mathscr{H}(D_p)$; тогда будем считать, что *компакт M имеет однолистную оболочку голоморфности* и определим $\mathscr{H}(M) = \bigcap\limits_p \mathscr{H}(D_p)$.

Легко видеть, что верны следующие утверждения:

1) $\mathscr{H}(M)$ — *компакт, не зависящий от выбора последовательности D_p. Каждая функция, голоморфная на M, является голоморфной и на множестве $\mathscr{H}(M)$*;

2) *если всякая голоморфная на компакте M функция является голоморфной и на множестве E, то $E \subset \mathscr{H}(M)$*;

3) *каждая функция из $A(M)$ принимает на $\mathscr{H}(M)$ только те значения, которые она принимает на M.*

При решении поставленной выше задачи будем предполагать, что компакт M имеет однолистную оболочку голоморфности. Это ограничение выглядит в данном случае естественным. Действительно, естественно считать, что M можно аппроксимировать извне последовательностью таких областей D_p, $p = 1, 2, \ldots$, что каждая $f \in A(D_p)$ аппроксимируется равномерно на компактах в D_p рациональными функциями, а также области имеют однолистные оболочки голоморфности $\mathscr{H}(D_p)$ (см. [174, с. 67]).

Область $D \subset C^n$ назовем *линейно-выпуклой*, если для каждой точки $\zeta \in \partial D$ существует комплексно $(n-1)$-мерная аналитическая плоскость, проходящая через ζ и не пересекающая D. Поскольку через каждую точку из $(2n-1)$-мерной гиперплоскости α можно провести комплексно $(n-1)$-мерную аналитическую плоскость, лежащую в α, всякая выпуклая область в C^n является и линейно-выпуклой. Далее, топологическое произведение $D = D_1 \times \ldots \times D_n$ областей из C^1 есть линейно-выпуклая область, в частности, любая область $D \subset C^1$ линейно-выпуклая.

Компакт M назовем *линейно-выпуклым*, если существует последовательность линейно-выпуклых областей, аппроксимирующая M извне.

Пусть $E \subset C^n$ и $0 \subset E$. *Сопряженным множеством* будем называть множество $\widetilde{E} = \{w : \langle w, z\rangle \neq 1$ для всех $z \in E\}$. Множество, сопряженное к $\widetilde{E}$, обозначим $\widetilde{\widetilde{E}}$. Всегда $E \subset \widetilde{\widetilde{E}}$. Нетрудно доказать следующие свойства:

4) *если* E *открыто, то* $\widetilde{E}$ — *компакт*. И, *наоборот, если* E — *компакт, то* $\widetilde{E}$ *открыто*;

5) *пусть* $E_1 \subset\subset E$, *тогда* $\widetilde{E} \subset\subset \widetilde{E}_1$, $\widetilde{\widetilde{E}}_1 \subset\subset \widetilde{\widetilde{E}}$.

Обозначим через $(\widetilde{\widetilde{D}})_C$ связную компоненту $\widetilde{\widetilde{D}}$, содержащую область D;

6) *для линейной выпуклости области* $D \ni 0$ *необходимо и достаточно, чтобы* $(\widetilde{\widetilde{D}})_C = D$;

7) *для того, чтобы компакт* E *был линейно-выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность линейно-выпуклых полиэдров Вейля, заданных с помощью функций вида*

$$\frac{c}{(a_1z_1 + \ldots + a_nz_n + b)^m}, \tag{24.7}$$

аппроксимирующих E *извне. Здесь* $a_1, \ldots, a_n, b, c$ — *комплексные числа;* m — *натуральное число.*

Теперь можно сформулировать результат, решающий поставленную задачу.

Т е о р е м а 24.11 (Айзенберг). *Пусть компакт* M *имеет однолистную оболочку голоморфности* $\mathscr{H}(M)$. *Для* *того чтобы всякая $f \in A(M)$ была представима в некоторой окрестности M, зависящей от f, равномерно сходящимся рядом (24.6), необходимо и достаточно, чтобы оболочка голоморфности $\mathscr{H}(M)$ была линейно-выпуклым компактом.*

При $n = 1$ для всякой области D справедливо $\mathscr{H}(D) = D$ и всякий связный компакт является линейно-выпуклым, поэтому теорема 24.11 содержит классический результат Вольфа о том, что рассмотренная аппроксимация при $n = 1$ имеет место всегда. Для доказательства теоремы 24.11 нам потребуются некоторые вспомогательные предложения. Пусть $E(U(M))$ — множество таких точек $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n+1}) \in C^{n+1}$, что $\sum\limits_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 = 1$, и плоскость $\alpha(\eta) = \{z : z_1\eta_1 + \ldots + z_n\eta_n + \eta_{n+1} = 0\}$ не пересекает окрестность $U(M)$ компакта M. Обозначим $F = \{(z, \eta) : z \in M, \eta \in E(U(M))\} \subset C^{2n+1}$.

Л е м м а 24.12. *Существует такая постоянная $\delta > 0$, что при всех $(z, \eta) \in F$ справедливо неравенство*

$$|z_1\eta_1 + \ldots + z_n\eta_n + \eta_{n+1}| \geqslant \delta. \tag{24.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $|z_1\eta_1 + \ldots + z_n\eta_n|$ непрерывна на компакте $F_1 = \left\{(z, \eta_1, \ldots, \eta_n) : z \in M, \sum\limits_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 = 1\right\}$, поэтому существует такое $\delta_1 > 0$, что для всех точек F_1 имеет место неравенство $|z_1\eta_1 + \ldots + z_n\eta_n| \leqslant \delta_1$. Разобьем множество $E(U(M))$ на два: $E_1 = \{\eta : \eta \in E(U(M)), \ |\eta_{n+1}| > 2\delta_1\}$, $E_2 = \{\eta : \eta \in E(U(M)), |\eta_{n+1}| \leqslant 2\delta_1\}$. Для всех точек $(z, \eta) \in M \times E_1$ получаем $|z_1\eta_1 + \ldots + z_n\eta_n + \eta_{n+1}| \geqslant |\eta_{n+1}| - |z_1\eta_1 + \ldots + z_n\eta_n| > \delta_1$, поэтому достаточно установить неравенство вида (24.8) для $\eta \in E_2$.

Множество E_2 ограничено, так как содержится в компакте $\left\{\eta : \sum\limits_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 = 1, \ |\eta_{n+1}| \leqslant 2\delta_1\right\}$. Покажем, что E_2 замкнуто. Пусть $\eta^{(0)} = \lim\limits_{p\to\infty} \eta^{(p)}, \eta^{(p)} \in E_2$, $p = 1, 2, \ldots$ Все плоскости $\alpha(\eta^{(p)})$ не пересекают $U(M)$, так как $\eta^{(p)} \in E(U(M))$. Очевидно, что предельная плоскость $\alpha(\eta^{(0)})$ тоже не пересекает открытое множество $U(M)$. Следовательно, $\eta^{(0)} \in$

$\in E(U(M))$. Наконец, заметим, что $|\eta_{n+1}^{(0)}| = \lim\limits_{p\to\infty} |\eta_{n+1}^{(p)}| \leqslant 2\delta_1$, поэтому $\eta^{(0)} \in E_2$. Положительная непрерывная функция $|z_1\eta_1 + \ldots + z_n\eta_n + \eta_{n+1}|$ достигает на компакте $F_2 = \{(z, \eta) : z \in M, \eta \in E_2\}$ своей нижней грани $\delta_2 > 0$. Итак, для $(z, \eta) \in F_2$ тоже справедливо неравенство вида (24.8). □

Лемма 24.13. *Пусть ограниченная замкнутая область $\overline{D}$ аппроксимируется извне последовательностью полиэдров Вейля, заданных с помощью функций вида (24.7). Тогда всякую функцию $f \in A(\overline{D})$ можно представить рядом (24.6), равномерно сходящимся на компактах в D.*

Доказательство этой леммы принципиально не отличается от доказательства аналогичной теоремы Вольфа для случая $n = 1$ (см. [171, с. 35—36]), но является значительно более громоздким из-за применения интеграла Вейля вместо интеграла Коши, поэтому мы его не приводим.

Доказательство теоремы 24.11. Достаточность. Пусть $\mathscr{H}(M)$ является линейно-выпуклым компактом, тогда $\mathscr{H}(M)$ можно аппроксимировать извне (см. свойство 7) последовательностью линейно-выпуклых ограниченных полиэдров Вейля Δ_p, $p = 1, 2, \ldots$, заданных с помощью функций вида (24.7). Всякая функция $f \in A(M)$ согласно свойству 1) входит в $A(\mathscr{H}(M))$, поэтому найдется такое p_0, что $f \in A(\overline{\Delta}_{p_0})$. Полиэдр $\overline{\Delta}_{p_0}$ можно, в свою очередь, аппроксимировать извне полиэдрами Вейля того же вида. Остается применить лемму 24.13.

Необходимость. Не уменьшая общности, можно считать, что $0 \in M$ (этого всегда можно добиться с помощью сдвига начала координат, при этом ряд (24.6) перейдет в ряд того же вида, линейно-выпуклые компакты перейдут в линейно-выпуклые и т. д.). Возьмем любую последовательность областей D_p, $p = 1, 2, \ldots$, аппроксимирующую извне $\mathscr{H}(M)$, и рассмотрим последовательность $(\tilde{\tilde{D}}_p)_C$, $p = 1, 2, \ldots$, линейно-выпуклых (см. свойство 6)) областей, которые аппроксимируют извне (см. 5)) компакт $M_1 = \bigcap\limits_p \left(\tilde{\tilde{D}}_p\right)_C$, $M_1 \supset \mathscr{H}(M)$. Всякая $f \in A(M)$ представима по условию в некоторой окрестности U компакта

M равномерно сходящимся рядом (24.6). Хорошо известно, что области равномерной сходимости рядов голоморфных функций являются (см. [174, с. 30]) областями голоморфности, поэтому ряд (24.6) равномерно сходится на компактах, лежащих в оболочке голоморфности $\mathscr{H}(U)\supset\supset\mathscr{H}(M)$. Значит, существует такое p_0, что этот ряд равномерно сходится в D_{p_0}. Знаменатель каждого члена ряда не обращается в нуль в области D_{p_0}, т. е. точка $(-a_{pj1}\times\times b_{pj}^{-1}, \ldots, -a_{pjn}b_{pj}^{-1}) \in \widetilde{D}_{p^0}$ (заметим, что $0\in M\subset\mathscr{H}(M)\subset\subset D_{p_0}$, поэтому $b_{pj}\neq 0$), значит, этот знаменатель не обращается в нуль и в $\left(\widetilde{\widetilde{D}}_{p_0}\right)_C$. Отсюда в силу леммы 24.12 и сходимости ряда $\sum\limits_{p=1}^{\infty}|A_p|$ следует равномерная сходимость ряда (24.6) в $\widetilde{\widetilde{D}}_{p_0}\supset M_1$. Итак, всякая $f\in A(M)$ входит и в $A(M_1)$, следовательно, (см. свойство 2)), $M_1\subset\mathscr{H}(M)$. Таким образом, показано, что $\mathscr{H}(M)=M_1$, а компакт M_1 является линейно-выпуклым. □

4°. Интегральное представление (8.5) позволило дать описание общего вида линейного непрерывного функционала в пространствах $A(D)$ (соответственно $A(M)$) функций, голоморфных в линейно-выпуклых областях (на компактах), аппроксимируемых изнутри (извне) ограниченными регулярными линейно-выпуклыми областями. Такая аппроксимация не всегда возможна. Топология в $A(D)$ и $A(M)$ вводится общепринятым способом. Это описание является обобщением известных результатов Кете — Себастьяна — де Сильва — Гротендика для случая $n=1$. Роль внешности играет сопряженное множество. Пусть $D_m=\{z:\Phi_m(z)<0\}$ — указанные выше аппроксимирующие области, $0\in D_m$, $m=1, 2, \ldots$ Положим $\tau(\Phi)=(\tau_1(\Phi), \ldots, \tau_n(\Phi))$, где $\tau_i(\Phi)=\Phi'_{z_i}\langle\operatorname{grad}\Phi, z\rangle^{-1}$, $i=1, \ldots, n$.

Теорема 24.14 (Мартино — Айзенберг). *Всякий линейный непрерывный в пространстве $A(D)$ (в $A(M)$) функционал $F(f)$ имеет вид*

$$F(f)=\int\limits_{\partial D_m} f(z)\,\varphi(\tau(\Phi_m))\,\omega(z, \operatorname{grad}\Phi_m(z)), \qquad (24.9)$$

где $\varphi\in A(\widetilde{D})$ (соответственно $\varphi\in A(\widetilde{M})$; m зависит только от φ, формула (24.9) дает изоморфизм линейных топологических пространств $A'(D)$ и $A(\widetilde{D})$ (соответственно $A'(M)$ и $A(\widetilde{M})$).

Пусть $F \in A'(D)$ (соответственно $F \in A'(M)$). Индикатрисой Фантаппье называют функцию $F_z[(1-\langle z, w\rangle)^{-n}]$, где $z \in D$ и $w \in \widetilde{D}$, $0 \in D$ (соответственно $z \in M$, $w \in \widetilde{M}$, $0 \in M$). В (24.9) функция φ есть индикатрисса соответствующего функционала F. Область D (компакт M) называется *сильно линейно-выпуклой*, если она линейно-выпукла и отображение $F \to F_z[(1-\langle z, w\rangle)^{-n}]$ является изоморфизмом пространств $A'(D)$ и $A(\widetilde{D})$ (соответственно $A'(M)$ и $A(\widetilde{M})$). Из теоремы 24.14 следует, что аппроксимация, указанная перед этой теоремой,— достаточное условие сильной линейной выпуклости. Следующий результат опирается на теорему 24.11.

Теорема 24.15 (Знаменский). *Для сильной линейной выпуклости области (компакта) необходимо и достаточно, чтобы пересечение этой области (компакта) всякой комплексной прямой было связно и односвязно.*

Теперь можно сформулировать результат о разложении голоморфных функций на дроби более простого вида, чем (24.6):

$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{(a_{p1}z_1 + \ldots + a_{pn}z_n + b_p)^n}, \qquad (24.10)$$

где $\sum\limits_{m=1}^{n} |a_{pm}|^2 = 1$, $\sum\limits_{p=1}^{\infty} |A_p| < \infty$. Так же как в 3°, будем предполагать компакт M связным и имеющим однолистную оболочку голоморфности $\mathscr{H}(M)$.

Теорема 24.16. (Трутнев). *Для того чтобы всякая $f \in A(M)$ была представима в некоторой окрестности M равномерно сходящимся рядом (24.10), необходимо и достаточно, чтобы оболочка голоморфности $\mathscr{H}(M)$ была сильно линейно-выпуклым компактом.*

Следствие 24.17 (Айзенберг). *Для того чтобы всякая $f \in A(M)$ была представима в некоторой окрестности M равномерно сходящимся рядом (24.10), необходимо, чтобы $\mathscr{H}(M)$ была линейно-выпуклым компактом, и достаточно, чтобы $\mathscr{H}(M)$ можно было аппроксимировать извне регулярными линейно-выпуклыми областями.*

§ 25. $\bar\partial$-ЗАДАЧА И ТЕОРЕМЫ ОКА

1°. В комплексном анализе важное место занимает

Теорема (Ока). *Если область $D \subset \mathbb{C}^n$ не расширяема голоморфно в каждой точке границы, то D — область голоморфности.*

Напомним, что область D *не расширяема голоморфно в точке* $\zeta \in \partial D$, если существует окрестность U и функция

$f \in A(D \cap U)$, не продолжаемая голоморфно в точку ζ.

В существующих изложениях этой теоремы, решающей известную *проблему Е. Леви*, используются либо алгебраические методы (теория пучков), либо теория дифференциальных операторов (разрешимость $\bar{\partial}$-задачи Неймана).

Здесь мы приводим доказательство теоремы Ока, принадлежащее Г. М. Хенкипу, в котором используются, как и в оригинальных работах Ока, только методы теории функций, в основном интегральные представления.

Следующие 2 утверждения можно найти во многих курсах комплексного анализа (см., например, [51, с. 126, 170]).

I. *Если область D не расширяема голоморфно в каждой точке границы, то D псевдовыпукла (т. е. существует плюрисубгармоническая в D функция, стремящаяся к $+\infty$ при приближении к ∂D).*

II. *Пусть D псевдовыпукла, тогда $D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k$, где D_k — строго псевдовыпуклые области и $D_k \subset\subset D_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$*

Теперь для доказательства теоремы Ока достаточно доказать следущее.

III. *Если D — строго псевдовыпуклая область, то D — область голоморфности.*

IV. *Если $D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k$, $D_k \subset\subset D_{k+1}$, и D_k — области голоморфности, то D — область голоморфности.*

Легко видеть, что III следует из такого утверждения (см., например, [51, с. 168]).

Теорема 25.1 (Ока). *Пусть D — строго псевдовыпуклая область. Тогда для любой точки $\zeta \in \partial D$ существует $g \in A(D)$ такая, что $g(z) \to \infty$ при $z \to \zeta$ и $z \in D$.*

Далее, утверждение IV — теорема Бенке — Штейна (см. [51, с. 173]). При доказательстве этой теоремы можно использовать теорему Ока — Гефера в такой формулировке:

Теорема 25.2 (Ока — Гефер). *Пусть D — псевдовыпуклая область в C^n и $f \in A(D)$. Тогда для любой области $G \subset\subset D$ существуют функции $P_j(\zeta, z) \in A(G \times G)$, $j = 1, \ldots, n$, для которых при $\zeta, z \in G$ $f(\zeta) - f(z) = P_1(\zeta, z) \cdot (\zeta_1 - z_1) + \ldots + P_n(\zeta, z) \cdot (\zeta_n - z_n)$.*

Таким образом, для решения проблемы Леви главное — доказать теоремы 25.1 и 25.2. Кроме того, для построения барьерной функции для строго псевдовыпуклой области (лемма 10.1) нужны следующие утверждения.

Теорема 25.2′. *Пусть D — область голоморфности в C^n и $G \subset\subset D$. Существуют линейные операторы P_j: $: A(D) \to A_C(G\times G)$, $j = 1, \ldots, n$, для которых при ζ, $z \in \overline{G}$*

$$f(\zeta) - f(z) = (P_1 f)(\zeta, z)\cdot(\zeta_1 - z_1) + \ldots$$
$$\ldots + (P_n f)(\zeta, z)\cdot(\zeta_n - z_n).$$

Теорема 25.3. *Пусть D — область голоморфности в C^n, $A_{0,1}(\overline{D})$ — пространство $\bar\partial$-замкнутых непрерывных форм типа $(0,1)$ в замкнутой области $\overline{D}$. Тогда для любой области $G \subset\subset D$ существует такой линейный оператор $\tau : A_{0,1}(\overline{D}) \to C(\overline{G})$, что $\bar\partial\tau g = g$ в G для любой формы $g \in A_{0,1}(\overline{D})$.*

2°. $\bar\partial$-задача для строго выпуклых областей. Обозначим через $A_{p,q}(\overline{D})$ пространство непрерывных на $\overline{D}$ форм f типа (p, q) и таких, что $\bar\partial f = 0$, через $C^{(\tau)}_{p,q}(\overline{D})$ — пространство форм типа (p, q), коэффициенты которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем τ, $0 < \tau \leqslant 1$. Будем считать, что эти пространства снабжены естественной топологией. Здесь D — ограниченная область в C^n.

Пусть теперь D — строго выпуклая область, т. е. $D = \{z, \rho(z) < 0\}$, где $\rho \in C^{(2)}(\Omega)$; Ω — область; $\overline{D} \subset \Omega$, $\operatorname{grad} \rho|_{\partial D} \neq 0$ и второй дифференциал $d^2\rho$ положительно определен в Ω. В этом пункте будет доказана

Теорема 25.4. *Пусть D — строго выпуклая область в C^n. Существует линейный оператор $G_{p,q} : A_{p,q}(\overline{D}) \to C^{(1/2)}_{p,q-1}(\overline{D})$, $0 \leqslant p \leqslant n$, $1 \leqslant q \leqslant n$, такой, что уравнению $\bar\partial u = f$ удовлетворяет форма $u = G_{p,q} f$.*

Другими словами, оператор $G_{p,q}$ — правый обратный к оператору $\bar\partial$. Конструкция [1]) оператора $G_{p,q}$ дается фор-

[1] Приведенная в (25.12) конструкция оператора $G_{p,q}$ сделана с расчетом на использование и в § 26. Для доказательства теоремы 25.4 достаточно более простых утверждений.

мулой (25.12) для любого $k \geqslant 2$. Теорема 25.4 — следствие теорем 25.6 и 25.9.

Положим ,

$$P(\zeta) = (P_1(\zeta), \ldots, P_n(\zeta)) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_1}(\zeta), \ldots, \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_n}(\zeta)\right); \tag{25.1}$$

$$\Phi(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{n} P_j(\zeta)\cdot(\zeta_j - z_j); \quad \widetilde{\Phi}(\zeta, z) = \Phi(\zeta, z) - \rho(\zeta).$$

Из формулы Тейлора и строгой выпуклости функции ρ следует, что существует константа $\sigma > 0$, для которой при $\zeta,\ z \in \Omega'$, $\overline{D} \subset \Omega' \subset\subset \Omega$

$$\begin{gathered} 2\operatorname{Re}\Phi(\zeta,\ z) \geqslant \rho(\zeta) - \rho(z) + \sigma|\zeta - z|^2; \\ 2\operatorname{Re}\widetilde{\Phi}(\zeta,\ z) \geqslant -\rho(\zeta) - \rho(z) + \sigma|\zeta - z|^2. \end{gathered} \tag{25.2}$$

Теперь из (25.2) получаем, что при $\zeta,\ z \in \Omega'$

$$|\zeta - z|^2 \leqslant \frac{2}{\gamma}|\widetilde{\Phi}(\zeta, z)|; \tag{25.3}$$

$$|\Phi(\zeta,\ z)| \leqslant \widetilde{\Phi}(\zeta,\ z)|; \tag{25.4}$$

$$\begin{gathered} |\widetilde{\Phi}(\zeta,\ z)| \geqslant \sigma_1[|\rho(\zeta) - \rho(z)| + \\ + |\operatorname{Im}\Phi(\zeta,\ z)| - \rho(\zeta) - \rho(z) + |\zeta - z|^2], \end{gathered} \tag{25.5}$$

где $\sigma_1 > 0$ — константа, зависящая только от D.

Пусть $w(\zeta,\ z,\ \lambda) = (w_1, \ldots, w_n)$ — вектор-функция, заданная на множестве $U \subset (C_\zeta^n \times C_z^n \times R_\lambda^1) \setminus \{(\zeta, z, \lambda) : z = \zeta\}$ и такая, что $\langle w,\ \zeta - z\rangle = 1$. Для $w \in C^{(1)}(U)$ положим

$$\widetilde{W}_{p,q}(w, \zeta, z, \lambda) = \frac{(-1)^{q+p(n-q-1)}\binom{n-1}{q}}{(2\pi i)^n p!\,(n-p)!} \times$$

$$\times D_{1,q,n-q-1}(w, \overline{\partial}_z w, (\overline{\partial}_\zeta + d_\lambda)w) \wedge D_{p,n-p}(\partial z, \partial\zeta);$$

$$W_{p,-1} = W_{p,n} = 0.$$

Если w не зависит от λ, то $\widetilde{W}_{p,q}(w,\ \zeta,\ z,\ \lambda) = W_{p,q}(w,\ \zeta,\ z)$

(см. § 7). Введем вектор-функции

$$u(\zeta, z) = \frac{P(\zeta)}{\Phi(\zeta, z)} \text{ и } \eta(\zeta, z, \lambda) = (1-\lambda)\, t + \lambda u(\zeta, z), \quad (25.6)$$

и функцию

$$\alpha_k(\zeta, z) = \left[1 - \left(\frac{\Phi(\zeta, z)}{\tilde\Phi(\zeta, z)}\right)^{2n}\right]^k = \left(-\frac{\rho(z)}{\tilde\Phi(\zeta, z)}\right)^k \left[\sum_{j=0}^{2n-1} \left(\frac{\Phi(\zeta, z)}{\tilde\Phi(\zeta, z)}\right)^j\right]^k. \quad (25.7)$$

Здесь $\zeta,\ z \in \overline{D}$, $\Phi(\zeta, z) \neq 0$, $\lambda \in [0,1]$ и $t = \dfrac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}$.

Лемма 25.5. *При $\Phi(\zeta, z) \neq 0$ форма $\bar\partial_\zeta \alpha_k(\zeta, z) \wedge \wedge (\widetilde W_{p,q}(\eta, \zeta, z, \lambda) - W_{p,q}(\eta, \zeta, z))$ представляется линейной комбинацией форм вида*

$$\left(\frac{\rho(\zeta)}{\tilde\Phi(\zeta, z)}\right)^{k-1} \left(\frac{\Phi(\zeta, z)}{\tilde\Phi(\zeta, z)}\right)^s \frac{(\bar\zeta_j - \bar z_j)\, \varphi(\zeta, z, \lambda) \wedge \bar\partial\rho(\zeta)}{|\zeta - z|^{2(q+r+1)} \tilde\Phi^{n-q-r}(\zeta, z)} \quad (25.8)$$

и

$$\left(\frac{\rho(\zeta)}{\tilde\Phi(\zeta, z)}\right)^{k} \left(\frac{\Phi(\zeta, z)}{\tilde\Phi(\zeta, z)}\right)^s \frac{(\bar\zeta_j - \bar z_j)(\zeta_m - z_m)\, \Psi(\zeta, z, \lambda)}{|\zeta - z|^{2(q+r+1)} \tilde\Phi^{n-q-r}(\zeta, z)}, \quad (25.9)$$

где $1 \leqslant j;\ m \leqslant n$; $0 \leqslant r \leqslant n-q-2$; $s = 0, 1, \ldots$; формы φ и Ψ имеют тип (p, q) по z, степень 1 по λ и тип $(n-p,\ n-q-2)$ и $(n-p,\ n-q-1)$ по ζ. Коэффициенты форм φ и Ψ — произведения производных не выше второго порядка функции $\rho(\zeta)$ на полином от λ.

Доказательство. Из равенства (25.6), свойств определителя и голоморфности вектор-функции u по z при $\Phi(\zeta, z) \neq 0$ получаем

$$D_{1,q,n-q-1}(\eta, \bar\partial_z\eta, (\bar\partial_\zeta + d_\lambda)\,\eta) - D_{1,q,n-q-1}(\eta, \bar\partial_z\eta, \bar\partial_\zeta\eta) =$$
$$= (n-q-1)\, D_{1,q,1,n-q-2}(t, \bar\partial_z\eta, d_\lambda\eta, \bar\partial_\zeta\eta) =$$
$$= (-1)^{n-q}(n-q-1)\, D_{1,q,1,n-q-2}(t, (1-\lambda)\,\bar\partial_z t,\ u - t, \quad (25.10)$$
$$(1-\lambda)\,\bar\partial_\zeta t + \lambda\bar\partial_\zeta u) \wedge d\lambda = \sum_{r=0}^{n-q-2} (-1)^n (n-q-1) \times$$
$$\times \binom{n-q-2}{r} D_{1,1,q,r,n-q-r-2}(t, u, \bar\partial_z t, \bar\partial_\zeta t, \bar\partial_\zeta u) \wedge$$
$$\wedge \lambda^{n-q-r-2}\ (1-\lambda)^{q+r}\ d\lambda.$$

Так же как при доказательстве равенства (7.2), найдем

$$D_{1,1,q,r,n-q-r-2}\left(t, u, \bar\partial_z t, \bar\partial_\zeta t, \bar\partial_\zeta u\right) =$$
$$= \frac{(-1)^q}{|\zeta - z|^{2(q+r+1)}\Phi^{n-q-r-1}(\zeta, z)} \times$$
$$\times D_{1,1,q,r,n-q-r-2}\left(\bar\zeta - \bar z, P, \bar\partial_z \bar z, \bar\partial_\zeta \bar\zeta, \bar\partial P\right).$$

Теперь из (25.10) и определения $\widetilde{W}_{p,q}$ и $W_{p,q}$ следует, что $\widetilde{W}_{p,q}(\eta) - W_{p,q}(\eta)$ — линейная комбинация форм вида

$$\frac{\left(\bar\zeta_j - \bar z_j\right)\varphi(\zeta, z, \lambda)}{|\zeta - z|^{2(q+r+1)}\Phi^{n-q-r-1}(\zeta, z)}, \tag{25.11}$$

где $1 \leqslant j \leqslant n$; $0 \leqslant r \leqslant n - q - 2$; φ имеет тип (p, q) по z, тип $(n-p, n-q-2)$ по ζ и степень 1 по λ, коэффициенты формы φ — произведения производных $\rho(\zeta)$ не выше второго порядка на полином от λ.

С другой стороны,

$$\bar\partial_\zeta \alpha_k(\zeta, z) = -k\cdot 2n\alpha_{k-1}(\zeta, z)\left(\frac{\Phi}{\widetilde\Phi}\right)^{2n-1}\left(\frac{\Phi}{\widetilde\Phi}\frac{\bar\partial\rho(\zeta)}{\widetilde\Phi(\zeta, z)} - \frac{\rho(\zeta)\bar\partial_\zeta\Phi}{\widetilde\Phi^2}\right).$$

Утверждение леммы вытекает из этого равенства, (25.11) и равенства $\bar\partial_\zeta\Phi = \langle\bar\partial_\zeta P, \zeta - z\rangle$.□

Определим операторы

$$\left(G^k_{p,q}f\right)(z) = -\int\limits_{D_\zeta} f(\zeta) \wedge \alpha_k(\zeta, z)\, U_{p,q-1}(\zeta, z) +$$
$$+ (-1)^{p+q-1}\int\limits_{D_\zeta\times[0,1]_\lambda} f(\zeta) \wedge \bar\partial_\zeta\alpha_k(\zeta, z) \wedge \widetilde{W}_{p,q-1}(\eta, \zeta, z, \lambda), \tag{25.12}$$

где $0 \leqslant p \leqslant n$, $1 \leqslant q \leqslant n$, $f \in C_{p,q}(\overline{D})$.

Замечание. Форма $f(\zeta) \wedge \bar\partial_\zeta\alpha_k(\zeta, z) \wedge W_{p,q-1}(\eta)$ имеет тип $(n, n+1)$ по ζ, поэтому обращается в 0. Следовательно, фактически подынтегральное выражение во втором интеграле в (25.12) имеет вид $f(\zeta) \wedge \bar\partial_\zeta\alpha_k \wedge (\widetilde{W}_{p,q}(\eta) - W_{p,q}(\eta))$. Так как $\widetilde\Phi(\zeta, z) \neq 0$ и $\Phi(\zeta, \zeta) = 0$ при $z \in D$ и $\zeta \in \overline{D}$, то форма $\bar\partial_\zeta\alpha_k \wedge (\widetilde{W}_{p,q}(\eta) - W_{p,q}(\eta))$ непрерывно продолжается на $\bar{D}_\zeta \times D_z \times [0,1]_\lambda$ (это следует из леммы 25.5). Таким образом, второй интеграл в (25.12) — собственный.

Теорема 25.6. *Если $f \in A_{p,q}(\bar{D})$, $q \geqslant 1$, то форма $u = G^k_{p,q} f$ — решение уравнения $\bar\partial u = f$ для любого $k \geqslant 2$.*

Доказательство. В формуле (7.15) возьмем в качестве φ функцию $\alpha_k(\zeta, z)$. Поскольку α_k голоморфна по z и $\alpha_k(\zeta, z) \equiv 0$ при $\zeta \in \partial D$ (см. (25.7)), то, используя равенство $\bar\partial f = 0$, получим при $z \in D$

$$f(z) = (-1)^{p+q-1} \int_{D_\zeta} f(\zeta) \wedge \bar\partial_\zeta \alpha_k(\zeta, z) \wedge U_{p,q}(\zeta, z) - \\ - \bar\partial_z \int_{D_\zeta} f(\zeta) \wedge \alpha_k(\zeta, z)\, U_{p,q-1}(\zeta, z). \qquad (25.13)$$

По формуле Стокса

$$\int_{D_\zeta \times [0,1]_\lambda} d\left(f(\zeta) \wedge \bar\partial_\zeta \alpha_k(\zeta, z) \wedge \widetilde{W}_{p,q}(\eta, \zeta, z, \lambda)\right) = \\ = \int_{D_\zeta} f(\zeta) \wedge \bar\partial_\zeta \alpha_k(\zeta, z) \wedge W_{p,q}(u, \zeta, z) - \\ - \int_{D_\zeta} f(\zeta) \wedge \bar\partial_\zeta \alpha_k(\zeta, z) \wedge U_{p,q}(\zeta, z) + \\ + \int_{\partial D_\zeta \times [0,1]_\lambda} f(\zeta) \wedge \bar\partial_\zeta \alpha_k(\zeta, z) \wedge \widetilde{W}_{p,q}(\eta, \zeta, z, \lambda).$$

Вектор-функция u голоморфна по $z \in D$, поэтому $W_{p,q}(u, \zeta, z) \equiv 0$ при $q \geqslant 1$. При $k \geqslant 2$ и $\zeta \in \partial D$ имеем $\bar\partial_\zeta \alpha_k = 0$, следовательно, предыдущее равенство дает

$$\int_{D_\zeta} f(\zeta) \wedge \bar\partial_\zeta \alpha_k(\zeta, z) \wedge U_{p,q}(\zeta, z) = (-1)^{p+q} \int_{D_\zeta \times [0,1]_\lambda} f(\zeta) \wedge \\ \wedge \bar\partial_\zeta \alpha_k(\zeta, z) \wedge (\bar\partial_\zeta + d_\lambda) \widetilde{W}_{p,q}(\eta, \zeta, z, \lambda) = \\ = \bar\partial_z \int_{D_\zeta \times [0,1]_\lambda} f(\zeta) \wedge \bar\partial_\zeta \alpha_k(\zeta, z) \wedge \widetilde{W}_{p,q-1}(\eta, \zeta, z, \lambda). \qquad (25.14)$$

Здесь мы воспользовались условием $\bar{\partial} f = 0$ и равенством $(\bar{\partial}_\zeta + d_\lambda)\tilde{W}_{p,q} = (-1)^{p+q}\bar{\partial}_z \tilde{W}_{p,q-1}$, которое доказывается точно так же, как лемма 7.2, и голоморфностью α_k по z. Подставив (25.14) в (25.12), получим утверждение теоремы. □

Для оценки решения уравнения $\bar{\partial} u = f$, приведенного в теореме 25.6, нам понадобятся 2 леммы.

Лемма 25.7. *Пусть*

$$J_{\alpha,k,l}(\varepsilon) = \int\limits_{\substack{|t|<1 \\ t_1+\varepsilon>0}} \frac{(t_1+\varepsilon)^\alpha dt_1 \dots dt_{2n}}{(|t_1| + |t_2| + \varepsilon + |t|^2)^k |t|^l},$$

где α, k, l — *действительные*, $\alpha > -1$. *Тогда*

а)

$$J_{\alpha,k,2n-1}(\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon^{1-k+\alpha}), & k-\alpha > 1, \\ O(\ln \varepsilon), & k-\alpha = 1; \end{cases}$$

б) *при* $m \geqslant 0$

$$J_{\alpha,k,2n-3-2m}(\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon^{-k+\alpha+m+5/2}), & k-\alpha-m > 5/2, \\ O(\ln \varepsilon), & k-\alpha-m = 5/2. \end{cases}$$

Доказательство. Перейдем в интеграле, определяющем $J_{\alpha,k,l}$, к сферическим координатам $t_1 = r\cos\varphi_1$, $t_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2$, ..., и сделаем замену переменных $s_i = \cos\varphi_i$, $i = 1, 2$:

$$J_{\alpha,k,l}(\varepsilon) = O(1) \int\limits_{\substack{0<r,\, s_2<1 \\ -1<s_1<1 \\ rs_1+\varepsilon>0}} \frac{(rs_1+\varepsilon)^\alpha r^{2n-1-l} dr ds_1 ds_2}{\left[r\left(|s_1| + s_2\sqrt{1-s_1^2}\right) + \varepsilon + r^2\right]^k}.$$

Воспользуемся неравенством $|s_1| + s_2\sqrt{1-s_1^2} \geqslant 1/4 \times (|s_1| + s_2)$ при $-1 \leqslant s_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant s_2 \leqslant 1$. После замены переменных $s_1 = su$, $s_2 = s(1-|u|)$, найдем

$$J_{\alpha,k,l}(\varepsilon) = O(1) \int\limits_{\substack{0<r,\, s<2 \\ -1<u<1 \\ rsu+\varepsilon>0}} \frac{(rsu+\varepsilon)^\alpha r^{2n-1-l} s dr ds du}{(rs+\varepsilon+r^2)^k}.$$

Положим $l = 2n - 1$. Перейдем к координатам (v, s, u), где $v = \varepsilon^{-1} rs$, и воспользуемся неравенством $rs + \varepsilon + r^2 \geqslant rs + \varepsilon$

$$J_{\alpha,k,2n-1}(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{1-k+\alpha}\right)\left[\int\limits_0^1 \frac{dv}{(v+1)^k}\int\limits_{-1}^{1}(vu+1)^\alpha du + \right.$$

$$\left. + \int\limits_1^{4\varepsilon^{-1}} \frac{dv}{(v+1)^k}\int\limits_{-v^{-1}}^{1}(vu+1)^\alpha du\right] = O\left(\varepsilon^{1-k+\alpha}\right)\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^1 \frac{(1+v)^{1+\alpha}-(1-v)^{1+\alpha}}{v}\,dv + \int\limits_1^{4\varepsilon^{-1}}\frac{dv}{v(v+1)^{k-\alpha+1}}\right].$$

Отсюда следует утверждение а).

Пусть теперь $l = 2n - 3 - 2m$, $m \geqslant 0$. Тогда

$$J_{\alpha,k,2n-3-2m} = O(1)\int\limits_0^2 r^{2m}dr\int\limits_0^2 \frac{rds}{(rs+\varepsilon+r^2)^k}\int\limits_{-\varepsilon(rs)^{-1}}^{1}\times$$

$$\times (rsu+\varepsilon)^\alpha rs\,du = O(1)\int\limits_0^2 r^{2m}dr\int\limits_0^2\frac{rds}{(rs+\varepsilon+r^2)^{k-\alpha-1}} =$$

$$= O(1)\int\limits_0^2\frac{r^{2m}dr}{(\varepsilon+r^2)^{k+\alpha-2}} = O(1)\int\limits_0^2\frac{dr}{(r+\sqrt{\varepsilon})^{2(k-\alpha-m-2)}}.$$

Непосредственным интегрированием получаем утверждение б). □

Лемма 25.8. *Пусть $D = \{x,\ \rho(x) < 0\}$ — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей и функция $F: D \to C^1$ удовлетворяет условию*

$$|F(x) - F(y)| = |x-y|\lambda(|\rho(x)|) \text{ при } \rho(x) > \rho(y),$$

где $\lambda(t)$—монотонно убывающая неотрицательная функция *на* $(0, \infty)$, *для которой* $\int\limits_0^1 \lambda(t)\,dt < \infty$, *тогда*

$$|F(x) - F(y)| = 0(1)(\Lambda(|x-y|) + \\ + |x-y|\lambda(|x-y|)), \quad x, y \in D,$$

где $\Lambda(t) = \int\limits_0^t \psi(\tau)\,d\tau$ *и константа, входящая в* $O(1)$, *не зависит от* F.

В частности, $|F(x) - F(y)| = O(1)|x-y|^{1-\tau}$, *если* $\lambda(t) = t^{-\tau}$, $0 \leqslant \tau < 1$ *и* $|F(x) - F(y)| = 0(1)|x-y| \ln|x-y|$, *если* $\lambda(t) = -\ln t$.

Это утверждение — небольшое обобщение одного результата Харди и Литлвуда, когда D — круг на плоскости и $\lambda(t) = t^{-\tau}$ (см., например, [65]).

Теорема 25.9. *Если* $f \in C_{p,q}(\overline{D})$, *то* $G^k_{p,q}f \in C^{(1/2)}_{p,q-1}(\overline{D})$ и $G^k_{p,q}$ *—линейный оператор из* $C_{p,q}(\overline{D})$ *в* $C^{(1/2)}_{p,q-1}(\overline{D})$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{G}^h_{p,q}$ и $\widetilde{\widetilde{G}}{}^h_{p,q}$ — операторы, определяемые соответственно первым и вторым интегралом в (25.12). Рассмотрим функцию

$$H(z) = \int\limits_{D_\zeta} h(\zeta)\,\alpha_k(\zeta, z)\frac{\bar\zeta_j - \bar z_j}{|\zeta - z|^{2n}}\,dv, \quad \text{где } h \in C(\overline{D}).$$

Тогда для $z, w \in D$

$$|H(w) - H(z)| \leqslant \int\limits_{D_\zeta} |h(\zeta)|\,|\alpha_k(\zeta, w)|\left|\frac{\bar\zeta_j - \bar w_j}{|\zeta - w|^{2n}} - \frac{\bar\zeta_j - \bar z_j}{|\zeta - z|^{2n}}\right| \times \\ \times dv + \int\limits_{D_\zeta} |h(\zeta)|\,|\alpha_k(\zeta, w) - \alpha_k(\zeta, z)|\frac{dv}{|\zeta - z|^{2n-1}}. \quad (25.15)$$

Из (25.2), (25.4) и (25.7) получаем

$$|\operatorname{grad}_z \alpha_k(\zeta, z)| = 2kn\,|\alpha_{k-1}(\zeta, z)|\left|\frac{\Phi(\zeta, z)}{\widetilde{\Phi}(\zeta, z)}\right|^{2n-1} \times \\ \times \left|\frac{\rho(\zeta)\operatorname{grad}_z \Phi(\zeta, z)}{\widetilde{\Phi}^2(\zeta, z)}\right| = O(1)\frac{1}{|\widetilde{\Phi}(\zeta, z)|}.$$

Пусть $\rho(z) \geqslant \rho(w)$. По теореме Лагранжа при некотором θ, $0 < \theta < 1$.

$$|\alpha_k(\zeta, w) - \alpha_k(\zeta, z)| \leqslant |\operatorname{grad}_z \alpha_k(\zeta, w + \theta(z-w))| \cdot |w-z| = \\ = O(1)\frac{|w-z|}{|\Phi(\zeta, w+\theta(z-w))|} = O(1)\frac{|w-z|}{|\Phi(\zeta, z)|}.$$

Если обозначить через $\mathcal{J}(z, w)$ второй интеграл в (25.15), то получим, что

$$\mathcal{J}(z, w) = O(1)\|h\|_{C(\overline{D})}\Bigg(1 + \\ + \int\limits_{(D \cap B_\delta(z))_\zeta} \frac{dv(\zeta)}{|\Phi(\zeta, z)|\,|\zeta - z|^{2n-1}}\Bigg)|w-z|.$$

Пусть теперь σ и δ выбраны в соответствии с леммой 10.6 и $z \in D$, $\rho(z) > -\delta$. Перейдем к переменным $t_{2j-1} = \operatorname{Re}\eta_j(\zeta)$, $t_{2j} = \operatorname{Im}\eta_j(\zeta)$ (функции η_j определены в лемме 10.6), воспользуемся неравенством (25.5) и найдем при $\rho(z) \geqslant \rho(w)$

$$\mathcal{J}(z, w) = O(1)\|h\|_{C(\overline{D})}(1 + J_{0,1,2n-1}(|\rho(z)|))\,|w-z|.$$

По лемме 25.7 при $\rho(z) > -\delta$

$$\mathcal{J}(z,w) = O(1)\|h\|_{C(\overline{D})}|w-z|\ln|\rho(z)|. \qquad (25.16)$$

Очевидно, что (25.16) выполняется и при $\rho(z) \leqslant -\delta$. С другой стороны, (25.7) и (25.4) показывают, что $\alpha_k(\zeta, w) = O(1)$ при ζ, $w \in D$. Кроме того, известно, что

$$\int\limits_{D_\zeta} |h(\zeta)|\left|\frac{\bar\zeta_j - \bar w_j}{|\zeta - w|^{2n}} - \frac{\bar\zeta_j - \bar z_j}{|\zeta - z|^{2n}}\right| dv(\zeta) = O(1)\|h\|_{C(D)} \times \\ \times |w-z|\ln|w-z|.$$

Следовательно, (25.15) и (25.16) дают при $\rho(z) \geqslant \rho(w)$

$$|H(w) - H(z)| = O(1)\|h\|_{C(\overline{D})}|w-z|(\ln|\rho(z)| + \ln|w-z|).$$

Из леммы 25.8 вытекает, что

$$|H(w) - H(z)| = O(1)\|h\|_{C(\overline{D})}|w-z|\ln|w-z|.$$

Теперь из определения оператора $\widetilde{G}^k_{p,q}$ и ядра $U_{p,q-1}$ следует, что $\widetilde{G}^k_{p,q}$ удовлетворяет условиям теоремы.

Осталось доказать, что оператор $\widetilde{\widetilde{G}}^k_{p,q}$ тоже удовлетворяет условиям теоремы. Лемма 25.5 и замечание после (25.12) показывают, что для этого достаточно доказать следующее:

$$|F_1(w) - F_1(z)| = O(1)\,\|h\|_{C(\overline{D})}\,|w - z|^{1/2} \qquad (25.17)$$

и

$$|F_2(w) - F_2(z)| = O(1)\,\|h\|_{C(\overline{D})}\,|w - z| \ln |w - z|, \qquad (25.18)$$

где $F_1(z) =$

$$= \int\limits_{D_\zeta} h(\zeta)\left(\frac{\rho(\zeta)}{\widetilde{\Phi}(\zeta, z)}\right)^{k-1}\left(\frac{\Phi(\zeta, z)}{\widetilde{\Phi}(\zeta, z)}\right)^{s}\frac{(\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j)\,\varphi(\zeta)}{|\zeta - z|^{2r}\,\widetilde{\Phi}^{n-r+1}(\zeta, z)}\,dv(\zeta),$$

$F_2(z) =$

$$= \int\limits_{D_\zeta} h(\zeta)\left(\frac{\rho(\zeta)}{\widetilde{\Phi}(\zeta, z)}\right)^{k}\left(\frac{\Phi(\zeta, z)}{\widetilde{\Phi}(\zeta, z)}\right)^{s}\frac{(\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j)(\zeta_m - z_m)\,\varphi(\zeta)}{|\zeta - z|^{2r}\,\widetilde{\Phi}^{n-r+1}(\zeta, z)}\,dv(\zeta).$$

Здесь $\varphi(\zeta)$ — произведение производных функции $\rho(\zeta)$ не выше второго порядка, $1 \leqslant j$, $m \leqslant n$, $s = 0, 1, \ldots$

В интегралах, определяющих F_1 и F_2, можно дифференцировать под знаком интеграла. Непосредственным подсчетом с использованием неравенств (25.2)—(25.4) получим

$$|\operatorname{grad} F_1(z)| = O(1)\left(\int\limits_{D_\zeta}\frac{dv}{|\zeta - z|^{2r-1}\,|\widetilde{\Phi}(\zeta, z)|^{n-r+2}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{D_\zeta}\frac{dv}{|\zeta - z|^{2r}\,|\widetilde{\Phi}(\zeta, z)|^{n-r+1}}\right) = O(1)\left(\int\limits_{D_\zeta}\frac{dv}{|\zeta - z|^{2n-3}\,|\widetilde{\Phi}(\zeta, z)|^{3}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{D_\zeta}\frac{dv}{|\zeta - z|^{2n-1}\,|\widetilde{\Phi}(\zeta, z)|^{3/2}}\right).$$

Пусть σ и δ выбраны в соответствии с леммой 10.6. Тогда при $\rho(z) > -\delta$

$$|\operatorname{grad} F_1(z)| = O(1)\,\|h\|_{C(\overline{D})}\Bigg(1 + \int\limits_{(D\cap \overset{\circ}{B}_\delta(z))_\zeta} \frac{dv}{|\zeta - z|^{2n-3}\,|\widetilde{\Phi}(\zeta, z)|^3} + \int\limits_{(D\cap \overset{\circ}{B}_\delta(z))_\zeta} \frac{dv}{|\zeta - z|^{2n-1}\,|\widetilde{\Phi}(\zeta, z)|^{3/2}}\Bigg) =$$

$$= O(1)\,\|h\|_{C(\overline{D})}\,(1 + J_{0,3,2n-3}\,(|\rho(z)|) + J_{0,3/2,2n-1}\,(|\rho(z)|)\,.$$

Здесь мы воспользовались заменой $t_{2j-1} = \operatorname{Re}\eta_j(\zeta)$, $t_{2j} = \operatorname{Im}\eta_j(\zeta)$ и неравенством (25.5). Теперь лемма 25.7 показывает, что при $\rho(z) > -\delta$

$$|\operatorname{grad} F_1(z)| = O(1)\,\|h\|_{C(\overline{D})}\,|\rho(z)|^{-1/2}.$$

Далее, из теоремы Лагранжа и леммы 25.8 следует (25.17). Формула (25.18) доказывается аналогично. $\square$

3°. $\bar\partial$-задача для строго псевдовыпуклых областей. Обозначим через $B_{p,q}(\overline{D})$ подпространство форм $f \in A_{p,q}(\overline{D})$, $q \geqslant 1$, для которых существует форма $u \in C^{(1/2)}_{p,q-1}(\overline{D})$ такая, что $\bar\partial u = f$.

Т е о р е м а 25. 10. *Пусть D — ограниченная строго псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$. Тогда $B_{p,q}$ — подпространство конечной коразмерности в $A_{p,q}(\overline{D})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 10.2 следует, что существует такое конечное покрытие $\{U_j\}$, $j = 1, \ldots, k$, компакта $\overline{D}$, что для каждого $j = 1, \ldots, k$, найдется биголоморфное в окрестности $\overline{D}_j = \overline{U}_j \cap \overline{D}$ отображение $\varphi_j(z)$, для которого $\varphi_j(\overline{D}_j)$— замыкание строго выпуклой области. Пусть $f \in A_{p,q}(D)$, тогда $f\left(\varphi_j^{-1}(w)\right) \in A_{p,q}\left(\varphi_j(\overline{D})\right)$. По теореме 25.4 определены линейные операторы $G^{(j)}_{p,q}$: $:A_{p,q}(\varphi_j(D_j)) \to C^{(1/2)}_{p,q-1}(\varphi_j(D_j))$ такие, что $\bar\partial G^{(j)}_{p,q} f\left(\varphi_j^{(-1)}(w)\right) = f\left(\varphi_j^{-1}(w)\right)$. Таким образом, можно определить линейные операторы $G^{(j)}_{p,q}: A_{p,q}(\overline{D}) \to C^{(1/2)}_{p,q-1}(\overline{D}_j)$, $j = 1, \ldots, k$, для которых $\bar\partial G^{(j)}_{p,q} f = f$ на $\overline{D}_j$.

Пусть $\{\chi_j\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_j\}$. Определим операторы $N_{p,q}: A_{p,q}(\overline{D}) \to C^{(1/2)}_{p,q-1}(\overline{D})$ и $T_{p,q}: A_{p,q}(\overline{D}) \to C_{p,q}(\overline{D})$ равенствами

$$N_{p,q}f = \sum_{j=1}^{k} \chi_j G^{(j)}_{p,q} f;$$

$$T_{p,q}f = \sum_{j=1}^{k} \overline{\partial} \chi_j \wedge G^{(j)}_{p,q} f.$$

Имеем

$$\overline{\partial} N_{p,q} f = T_{p,q} f + f. \tag{25.19}$$

Отсюда следует, что $T_{p,q}$ переводит $A_{p,q}(D)$ в $A_{p,q}(\overline{D})$ Кроме того, из определения оператора $T_{p,q}$ следует, что $T_{p,q}$ непрерывен, если его рассматривать как оператор из $A_{p,q}(\overline{D})$ в $C^{(1/2)}_{p,q}(\overline{D})$. По теореме Асколи (см. [80, с. 164]) оператор $T_{p,q}: A_{p,q}(\overline{D}) \mapsto A_{p,q}(\overline{D})$ вполне непрерывен. По теореме Рисса — Фредгольма (см. [80, с. 370]) множество $\widetilde{B}_{p,q}(\overline{D})$ форм $T_{p,q}f + f$, где $f \in A_{p,q}(\overline{D})$ — замкнутое подпространство в $A_{p,q}(\overline{D})$ конечной коразмерности. Из (25.19) вытекает, что $\widetilde{B}_{p,q}(\overline{D}) \subset B_{p,q}(\overline{D})$, следовательно, $B_{p,q}(\overline{D})$ — замкнутое подпространство конечной коразмерности в $A_{p,q}(\overline{D})$. □

Отметим, что на результаты данного параграфа опирается доказательство леммы 10.1, позволяющей построить для строго псевдовыпуклых областей операторы, аналогичные операторам $G^k_{p,q}$. Если повторить все рассуждения, приведенные в п. 2° данного параграфа, то получается

Теорема 25.11 (Романов — Хенкин). *Пусть D — строго псевдовыпуклая область в C^n. Тогда существуют линейные операторы $G_{p,q}: A_{p,q}(\overline{D}) \to C^{(1/2)}_{p,q-1}(\overline{D})$, $0 \leqslant p \leqslant n$, $1 \leqslant q \leqslant n$, такие, что уравнению $\overline{\partial} u = f$ удовлетворяет форма $u = G_{p,q}f$.*

Теорема 25.11 сильнее теоремы 15.10, но при доказательстве теоремы 25.11 используются следствия теоремы 25.10.

4°. Доказательство теоремы 25.1. Пусть ζ — фиксированная точка ∂D, где D — ограниченная строго псевдовыпуклая область. В лемме 10.2 фактически доказано, что существует такое $\delta > 0$, что $\operatorname{Re} F(\zeta, z) > 0$ при $0 < |\zeta - z| < 2\delta$ и $z \in \bar{D}$, где

$$F(\zeta, z) = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_j}(\zeta)(z_j - \zeta_j) + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta_j\partial\zeta_k}(\zeta)(z_j - \zeta_j)(z_k - \zeta_k).$$

Пусть χ — финитная бесконечно дифференцируемая функция в C^n с носителем в $B_{2\delta}(\zeta)$ и $\chi(z) \equiv 1$ при $z \in B_\delta(\zeta)$. Построим формы

$$f_k(z) = \begin{cases} \bar\partial\left(\dfrac{\chi(z)}{F^k(\zeta, z)}\right) = \dfrac{\bar\partial\chi(z)}{F^k(\zeta, z)} & \text{при } z \in \bar{D} \cap (B_{2\delta}(\zeta) \setminus B_\delta(\zeta)), \\ 0 & \text{при } z \in \bar{D} \setminus (B_{2\delta}(\zeta) \setminus B_\delta(\zeta)), \end{cases}$$

$k = 1, 2, \ldots$. Нетрудно проверить, что $f_k \in A_{0,1}(\bar{D})$ и линейно-независимы, поэтому по теореме 25,10 существуют такие натуральное k и комплексные числа $a_1, \ldots, a_{k-1}$, что $f_k + a_{k-1}f_{k-1} + \ldots + a_1 f_1 = \bar\partial u$, где $u \in C(\bar{D})$. Функция

$$g(z) = \chi(z)\left(\frac{1}{F^k(\zeta, z)} + \frac{a_{k-1}}{F^{k-1}(\zeta, z)} + \ldots + \frac{a_1}{F(\zeta, z)}\right) - u(z)$$

голоморфна в D и $\lim\limits_{\substack{z\to\zeta \\ z\in D}} g(z) = \infty$. $\square$

5°. Доказательство теорем 25.2 и 25.2′. Нам необходима

Лемма 25.12. *Пусть D и G удовлетворяют условиям теоремы 25.2, $\Pi_{n-1} = \{z_n = 0\}$; $\Pi_{n-1} \cap G \neq \varnothing$ и на $D \cap \Pi_{n-1}$ задана голоморфная функция $f('z)$, $'z = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. Тогда существует функция $F \in A(G)$, для которой $F|_{G\cap\Pi_{n-1}} = f$.*

Доказательство. Пункт II плана доказательства теоремы Ока (см. п. 1° настоящего параграфа) показывает, что существует такая строго псевдовыпуклая область Ω, что $G \Subset \Omega \Subset D$. Положим $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega$:

$: |z_n| < \varepsilon\}$. Так как $\Omega \Subset D$, то при достаточно малом ε функцию f можно продолжить в $\Omega_{2\varepsilon}$, полагая $f(z) = f('z)$.

Пусть χ — финитная бесконечно дифференцируемая функция на плоскости с носителем в $B_{2\varepsilon}(0)$ и $\chi \equiv 1$ на $B_\varepsilon(0)$. Введем формы

$$f_k(z) = \begin{cases} \overline{\partial}\left(\dfrac{\chi(z_n) f(z)}{z_n^k}\right) = \overline{\partial}\chi(z_n)\dfrac{f(z)}{z_n^k} & \text{при } z \in \Omega_{2\varepsilon} \setminus \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{при } z \in \Omega_\varepsilon \cup (\Omega \setminus \Omega_{2\varepsilon}), \end{cases}$$

$k = 1, 2, \ldots$. Точно так же, как в предыдущем пункте, получаем, что $f_k + a_{k-1} f_{k-1} + \ldots + a_1 f_1 = \overline{\partial} u$, где $u \in C(\Omega)$ для некоторых натурального k и комплексных $a_1, \ldots, a_{k-1}$. Функция

$$F(z) = \chi(z_n) f(z) \left(1 + a_{k-1} z_n + \ldots + a_1 z_n^{k-1}\right) - z_n^k u(z)$$

дает искомое продолжение функции f в Ω. $\square$

Теперь доказательство теоремы 25.2 проводится обычным образом, например, как в [201, с. 260], только слова «область голоморфности» надо заменить на «псевдовыпуклая область».

Если в доказательстве леммы 25.12 использовать теорему 25.3 вместо теоремы 25.10, то получится усиленная форма леммы 25.12, в которой F строится по f с помощью линейного оператора $P: A(D) \to A_C(G)$, а это, в свою очередь, влечет теорему 25.2′. Отметим, что при доказательстве теоремы 25.3 используется теорема 25.2, а не 25.2′.

6° Доказательство теоремы 25.3. Так как D — область голоморфности и $G \Subset D$, то найдется полиэдр Вейля Δ, для которого $G \Subset \Delta \Subset D$. Полиэдр Δ имеет вид (см. § 9)

$$\Delta = \{z \in D : |\chi_j(z)| < 1, \ j = 1, \ldots, N\},$$

где χ_j — голоморфны в D, причем непустые грани $\sigma_{j_1 \ldots j_k} = \{z \in D : |\chi_{j_1}(z)| = \ldots = |\chi_{j_k}(z)| = 1, |\chi_j(z)| \leqslant 1, j = 1, \ldots, N, \ j \neq j_1, \ldots, j_k\}$ имеют размерность $2n - k$ для всех $j_1, \ldots, j_k$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant N$.

В $C^n_\zeta \times R^{N+1}_\lambda$ построим цепь Γ следующим образом: пусть $j_1, \ldots, j_k$ таковы, что $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant N$ и $\sigma_{j_1 \ldots j_k} \neq \varnothing$, тогда

$$\Gamma_{j_1 \ldots j_k} = \{(\zeta, \lambda) : \zeta \in \sigma_{j_1 \ldots j_k}; \quad \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N),\ \lambda_m \geqslant 0$$

$$\text{при } m = 0, 1, \ldots, N,\ \lambda_m = 0 \text{ при } m \neq j_1, \ldots, j_k, 0 \text{ и}$$

$$\lambda_0 + \lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} = 1\};$$

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{N} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant N} \Gamma_{j_1 \ldots j_k}.$$

Нетрудно проверить, что $\partial\Gamma = \Gamma \cap \{\lambda_0 = 1\} - \Gamma \cap \cap \{\lambda_0 = 0\}$ и $\Gamma \cap \{\lambda_0 = 1\} = \partial\Delta$.

Пусть теперь $w(\zeta, z, \lambda)$ определено в множестве $U \subset \subset C^n_\zeta \times C^n_z \times R^{N+1}_\lambda$. Формы $\widetilde{W}_{p,q}(w, \zeta, z, \lambda)$ определим так же, как в п. 1° настоящего параграфа; вектор-функции u_j — так же, как в § 9 (в этом месте используется теорема 25.2); $t = \frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}$ и $\eta(\zeta, z, \lambda) = \lambda_0 t + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j u^j$.

Для $f \in A_{p,q}(\overline{\Delta})$ определим оператор

$$(\tau_{p,q} f)(z) = \int_{\Gamma_{\zeta,\lambda}} f(\zeta) \wedge \widetilde{W}_{p,q-1}(\eta, \zeta, z, \lambda) - $$

$$- \int_{\Delta_\zeta} f(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\zeta, z). \qquad (25.20)$$

Теорема 25.13 (Хенкин — Поляков). *Если $f \in \in A_{p,q}(\overline{\Delta})$, $0 \leqslant p \leqslant n$, $1 \leqslant q \leqslant n$, то $\tau_{p,q} f \in C_{p,q-1}(\overline{G})$, где $G \Subset \Delta$. Оператор $\tau_{p,q} : A_{p,q}(\overline{\Delta}) \to C_{p,q-1}(\overline{G})$ непрерывен и удовлетворяет условию*

$$\bar\partial \tau_{p,q} f = f. \qquad (25.21)$$

Теорема 25.3 сразу же следует из теоремы 25.13.

Доказательство теоремы 25.13. Первый интеграл в (25.20) — собственный при $z \in G$, второй равномерно сходится, поэтому в проверке нуждается только равенство (25.21). По формуле Стокса

$$\int_{\Gamma_{\zeta,\lambda}} d_{\zeta,\lambda}\left(f(\zeta)\wedge \widetilde{W}_{p,q}(\eta,\zeta,z,\lambda)\right)=$$

$$=\int_{(\Gamma\cap\{\lambda_0=1\})_{\zeta,\lambda}} f(\zeta)\wedge \widetilde{W}_{p,q}(\eta,\zeta,z,\lambda)-\int_{(\Gamma\cap\{\lambda_0=0\})_{\zeta,\lambda}} f(\zeta)\wedge$$

$$\wedge\widetilde{W}_{p,q}(\eta,\zeta,z,\lambda)=\int_{\partial\Delta_\zeta} f(\zeta)\wedge U_{p,q}(\zeta,z)-$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{1<j_1<\ldots<j_k<N}\int_{\substack{\zeta\in\sigma_{j_1\ldots j_k}\\ \lambda_{j_1}\geqslant 0,\ldots,\lambda_{j_k}\geqslant 0\\ \lambda_{j_1}+\ldots+\lambda_{j_k}=1}} f(\zeta)\wedge$$

$$\wedge\widetilde{W}_{p,q}\left(\sum_{m=1}^{k}\lambda_{j_m}u^{j_m},\zeta,z,\lambda\right).$$

Так как u^j голоморфны по $z\in D$, то $\widetilde{W}_{p,q}\left(\sum\limits_{m=1}^{k}\lambda_{j_m}u^{j_m},\zeta,z,\lambda\right)=0$ при $q\geqslant 1$. Следовательно,

$$\int_{\partial\Delta_\zeta} f(\zeta)\wedge U_{p,q}(\zeta,z)=(-1)^{p+q}\int_{\Gamma_{\zeta,\lambda}} f(\zeta)\wedge$$

$$\wedge(\bar\partial_\zeta+d_\lambda)\widetilde{W}_{p,q}(\eta,\zeta,z,\lambda)=\bar\partial_z\int_{\Gamma_{\zeta,\lambda}} f(\zeta)\wedge\widetilde{W}_{p,q-1}(\eta,\zeta,z,\lambda).$$

Равенство (25.21) теперь вытекает из формулы Мартинелли — Бохнера — Коппельмана (7.1), примененной к Δ. □

7°. В этом пункте мы приведем некоторые оценки для решения $\bar\partial$-уравнения и их приложения. Пусть $f\in L^1_{p,q}(D)$. Будем говорить, что $u\in L^1_{p,q-1}(D)$ и $g\in L^1_{p,q-1}(\partial D)$ обладают свойствами $\bar\partial u=f$ и $u|_{\partial D}=g$, если для любой гладкой на $\bar D$ формы φ типа $(n-p,\ n-q)$

$$\int_{\partial D} g\wedge\varphi=\int_D f\wedge\varphi+(-1)^{p+q}\int_D u\wedge\bar\partial\varphi.$$

Теорема 25.14 (Хенкин — Шкода). *Пусть D — строго выпуклая область в C^n и $f \in L^1_{p,q}(D)$, $0 \leqslant p \leqslant n$, $1 \leqslant q \leqslant n$. Тогда если $\bar\partial f = 0$ и $|f(z)| + |\rho(z)|^{-1/2}|f(z) \wedge \bar\partial\rho(z)| \in L^1(D)$, то существуют формы $u \in L^1_{p,\,q-1}(D)$ и $g \in L^1_{p,q-1}(\partial D)$ со свойствами $\bar\partial u = f$ и $u|_{\partial D} = g$.*

Под *модулем формы*, как обычно, понимается сумма модулей ее коэффициентов.

Теорема 25.14 позволяет дать описание множества нулей функций *класса Неванлинны, т. е.* голоморфных в D функций, для которых

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_{\zeta\in\partial D} \log^+ |f(\zeta - \varepsilon\nu(\zeta))|\, d\sigma_{2n-1}(\zeta) < \infty.$$

Здесь $\log^+ t = \max(0, \log t)$, $t > 0$, $\nu(\xi)$ — единичный вектор внешней нормали к границе области D в точке ζ; $d\sigma_k$ — элемент k-мерной меры Лебега.

Теорема 25.15 (Хенкин — Шкода). *Пусть D - строго выпуклая область в C^n. Для того чтобы $(n-1)$-мерное аналитическое множество M в D было множеством нулей функции класса Неванлинны $N(D)$, необходимо и достаточно, чтобы M удовлетворяло условию Бляшке:*

$$\int_M |\rho(z)|\, d\sigma_{2n-2}(z) = \sum_j \gamma_j \int_{M_j} |\rho(z)|\, d\sigma_{2n-2}(z) < \infty,$$

где M_j — неприводимые компоненты множества M; γ_j — кратности компонент M_j.

Из вида функции α_k (см. (25.7)) следует, что оператор $G^k_{p,q}$, определяемый равенством (25.12), можно применять к таким формам f, что $f(z)\rho^{k-1}(z) \in L^1_{p,q}(D)$. Используя теорему 25.6 и леммы 25.5 и 25.7, можно доказать следующий результат.

Теорема 25.16 (Даутов — Хенкин). *Пусть D — строго выпуклая область в C^n и $f \in L^1_{p,q}(D, \mathrm{loc})$. Если $\bar\partial f = 0$ и число $\alpha > 0$ таковы, что $|\rho(z)|^\alpha (|f(z)| + |\rho(z)|^{-1/2}|f(z) \wedge \bar\partial\rho(z)|) \in L^1(D)$, то форма $u_k = G^k_{p,q} f$ при любом $k > \alpha + 1/2$ удовлетворяет в D уравнению $\bar\partial u = f$, причем $\left|\left(G^k_{p,q} f\right)(z)\right| |\rho(z)|^{\alpha-1} \in L^1_{p,q}(D)$.*

Функцию f, голоморфную в ограниченной области $D \subset C^n$ назовем функцией *класса Неванлинны — Джрбашяна* $N_\alpha(D)$ $(\alpha > 0)$, если

$$\int_D |\rho(z)|^{\alpha-1} \ln^+ |f(z)|\, d\sigma_{2n}(z) < \infty.$$

Теорема 25.17 (Даутов — Хенкин). *Пусть D — строго выпуклая область в C^n. Для того чтобы $(n-1)$-мерное аналитическое множество M в D было множеством нулей функции класса Неванлинны — Джрбашяна $N_\alpha(D)$, $\alpha > 0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_M |\rho(z)|^{\alpha+1}\, d\sigma_{2n-2}(z) < \infty.$$

Теоремы 25.14 и 25.15 — предельный случай (при $\alpha \to 0$) теорем 25.16 и 25.17.

§ 26. ФОРМЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ГОЛОМОРФНЫМ ФУНКЦИЯМ. УРАВНЕНИЕ Г. ЛЕВИ. ОБЩИЙ ВИД ФОРМУЛ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

1°. Пусть D — ограниченная область в C^n с гладкой границей. Нас интересуют формы $\alpha \in C_{p,\, n-1}(\partial D)$, ортогональные голоморфным формам в том смысле, что

$$\int\limits_{\partial D} f \wedge \alpha = 0, \qquad (26.1)$$

для всех $f \in A_{n-p}(\overline{D})$ ($A_{n-p}(\overline{D})$—пространство форм типа $(p, 0)$ с голоморфными на $\overline{D}$ коэффициентами).

При $n = 1$ функция $\alpha \in C(\partial D)$, удовлетворяющая условию (26.1) для всех форм вида $f(z)dz$, где $f \in A(\overline{D})$, продолжается до функции $\alpha \in A_C(D)$ (см. [132, с. 132]).

В этом параграфе мы проведем аналог этого утверждения для $n > 1$ и его следствие, дающее общий вид формулы логарифмического вычета, в частности, общий вид интегральных представлений голоморфных функций многих комплексных переменных. В конце параграфа приведено необходимое и достаточное условие для (локальной) разрешимости уравнения Г. Леви.

2°. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые обозначения и определения. *Модулем непрерывности* называется непрерывная возрастающая вогнутая функция θ, заданная на $[0, \infty)$ и равная 0 в точке 0.

Пусть F — компакт в R^n и m — целое, $m \geqslant 0$. Если $g \in C^{(m)}(F)$, то назовем модуль непрерывности θ *модулем непрерывности функции* g, если при $x, y \in F$ и $|J| \leqslant m$

$$|D^J g(x) - D^J g(y)| = O(1)\theta(|x-y|).$$

Здесь $J = (i_1, \ldots, i_n)$ — мультииндекс и

$$D^J = \frac{\partial^{|J|}}{\partial x_1^{i_1} \ldots dx_n^{i_n}}.$$

Если D — ограниченная область в R^n и m — целое, то через $\widetilde{C}^{(m)}(D)$ обозначим пространство комплекснозначных бесконечно дифференцируемых в D функций g таких, что существует модуль непрерывности θ, для которого при $x, y \in D$

$$|D^J g(x) - D^J g(y)| = O(1)\theta(|x-y|) \quad \text{при } |J| \leqslant m \tag{26.2}$$

и

$$|D^J g(x)| \leqslant \frac{O(1)\,\theta(\rho(x, \partial D))}{\rho(x, \partial D)^{|J|-m}} \quad \text{при } |J| > m. \tag{26.3}$$

Здесь $\rho(x, \partial D) = \inf\limits_{\xi \in \partial D} |\xi - x|$ — евклидово расстояние от x до ∂D.

Модуль непрерывности θ, участвующий в (26.2) и (26.3), будем называть *модулем непрерывности функции* $g \in \widetilde{C}^{(m)}(D)$. Нетрудно показать, что при $m \geqslant 0$ любая функция $g \in \widetilde{C}^{(m)}(D)$ продолжается до функции $g_1 \in C^{(m)}(\overline{D})$, причем g_1 имеет тот же модуль непрерывности, что и g. Будем считать, что $\widetilde{C}^{(m)}(D)$ вложено в $C^{(m)}(\overline{D})$, если $m \geqslant 0$. Если $D \subset C^n$, то через $\widetilde{C}^{(m)}_{p,q}(D)$ обозначим пространство форм типа (p, q) с коэффициентами из $\widetilde{C}^{(m)}(D)$. *Модулем непрерывности формы* из $\widetilde{C}^{(m)}_{p,q}(D)$ или из $C^{(m)}_{p,q}(F)$ назовем общий модуль непрерывности ее коэффициентов. Так как для любого конечного множества модулей непрерывности $\{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$ существует модуль непрерывности θ (см. [119, с. 9]), для которого $\theta_j = O(1)\cdot\theta$, то для любой формы из $\widetilde{C}^{(m)}_{p,q}(D)$ или $\widetilde{C}^{(m)}_{p,q}(F)$ существует ее модуль непрерывности.

Если $m = 0$ и модуль непрерывности формы имеет вид t^τ, где $0 < \tau \leqslant 1$, то будем говорить, что *форма удовлетворяет условию Гельдера с показателем* τ.

Пусть D — область в R^n с границей класса $C^{(l)}$, $l \geqslant 1$, т. е. $D = \{x \in \Omega\colon \rho(x) < 0\}$, где $\overline{D} \Subset \Omega$, $\rho \in C^{(l)}(\Omega)$ и $\operatorname{grad}\rho|_{\partial D} \neq 0$. По теореме Уитни (см. теорему 3.2 и [119, дополнение 3.3 к гл. I]) можно найти функцию $\widetilde{\rho} \in C^{(l)}(\Omega) \cap \widetilde{C}^{(l)}(D)$, совпадающую с ρ на ∂D вместе со всеми производными до порядка l, поэтому в дальнейшем мы будем считать, что область D задается функцией $\rho \in C^{(l)}(\Omega) \cap \widetilde{C}^{(l)}(D)$.

Так как $\operatorname{grad}\rho|_{\partial D} \neq 0$, то $\rho(x, \partial D) = O(1)|\rho(x)| = O(1) \times \rho(x, \partial D)$, поэтому условие (26.3) эквивалентно условию

$$|D^J g(x)| \leqslant \frac{O(1)\,\theta(|\rho(x)|)}{|\rho(x)|^{|J|-m}} \quad \text{при } |J| > m. \tag{26.3'}$$

3°. Описание форм, ортогональных голоморфным формам.

Теорема 26.1 (Даутов). *Пусть* $D = \{z : \rho(z) < 0\}$ — *строго псевдовыпуклая область в* C^n, $n \geqslant 2$, *с границей класса* C^{m+2}, $m \geqslant 0$, *и* $\alpha \in C_{p,n-1}(\partial D)$, *удовлетворяющая* (26.1). *Тогда если*

1) $\alpha \in C^{(m)}_{p,n-1}(\partial D)$ *при* $m \geqslant 1$ *или*

2) α *удовлетворяет условию Гельдера порядка* τ, $0 < \tau \leqslant 1$, *при* $m = 0$, *то существует форма* $\beta = \beta_1 + \bar\partial\rho \wedge \sqrt{|\rho|}\beta_2$, *где* $\beta_1 \in \widetilde{C}^{(m)}_{p,n-1}(D)$ *и* $\beta_2 \in \widetilde{C}^{(m-1)}_{p,n-2}(D)$ *такая, что* $\bar\partial\beta = 0$ *и* $\beta_1|_{\partial D} = \alpha$. *Причем модуль непрерывности формы* α *является модулем непрерывности форм* β_1 *и* β_2.

Замечание. Если $m \geqslant 1$, то $\beta_2 \in C_{p,n-2}(\overline{D})$ и поэтому $\beta|_{\partial D} = \beta_1|_{\partial D} = \alpha$. Если же $m = 0$ и $\tau > 1/2$, то из (26.3′) следует, что

$$\sqrt{|\rho(z)|}\,|\beta_2(z)| = O(1)\frac{|\rho(z)|^{1/2+\tau}}{|\rho(z)|} = O(1)|\rho(z)|^{\tau-1/2},$$

поэтому $\sqrt{|\rho|}\beta_2$ непрерывно продолжается на $\overline{D}$ и $\sqrt{|\rho|}\times$

$\beta_2|_{\partial D}=0$, следовательно, и в этом случае $\beta|_{\partial D} = \alpha$. Таким образом, при $m \geqslant 1$ или $m = 0$ и $\tau > 1/2$ форма α — сужение на ∂D непрерывной $\bar\partial$-замкнутой формы. В общем случае для любой $f \in C^{(1)}_{n-p,0}(\bar D)$

$$(-1)^{p+n-1}\int_D \beta\wedge\bar\partial f = \lim_{\delta\to 0}\int_{D_{-\delta}} d(\beta\wedge f) = \lim_{\delta\to 0}\int_{\partial D_{-\delta}} \beta\wedge f =$$

$$= \int_{\partial D}\beta_1\wedge f + \lim_{\delta\to 0}\int_{\partial D_{-\delta}}\bar\partial\rho\wedge\sqrt{|\rho|}\,\beta_2\wedge f = \int_{\partial D}\alpha\wedge f -$$

$$-\lim_{\delta\to 0}\int_{\partial D_{-\delta}}\partial\rho\wedge\sqrt{|\rho|}\,\beta_2\wedge f = \int_{\partial D}\alpha\wedge f. \qquad (26.4)$$

Здесь $D_{-\delta} = \{z : \rho(z) < -\delta\}$. Мы воспользовались равенством $\bar\partial\rho|_{\partial D} + \partial\rho|_{\partial D} = d\rho|_{\partial D} = 0$ и том, что форма $\partial\rho\wedge\beta_2\wedge f$ имеет тип $(n+1,\ n-2)$, следовательно, она обращается в 0.

Равенство (26.4) можно принять за определение $\bar\partial$-замкнутого продолжения формы α в случае, когда это продолжение не может быть доопределено до непрерывной формы на $\bar D$. Значит, и в общем случае α — сужение (в обобщенном смысле) на ∂D формы β.

Приведем без доказательства утверждение, содержащее информацию о $\bar\partial$-замкнутом продолжении форм в случае $m = 0$ и $\tau = 0$. Сначала дадим нужные определения. Пусть $\alpha \in L^1_{p,n-1}(\partial D)$. Представим α в виде $\alpha = \sum\limits_{J,\mathcal{J}}{}'\alpha_{J,\mathcal{J}}(z)\times$ $\times\, dz_J\wedge d\bar z_{\mathcal{J}}$ и положим

$$|\alpha(z)| = \sum_{J,\mathcal{J}}{}'|\alpha_{J,\mathcal{J}}(z)|;\quad \tilde f(z,t) = \sum_{J,\mathcal{J}}{}'\tilde f_{J,\mathcal{J}}(z,t),$$

где $\tilde f_{J,\mathcal{J}}(z,t)$ — *максимальные функции Хермандера*,

$$\tilde f_{J,\mathcal{J}}(z,t) = \sup_{\delta\geqslant t}\frac{1}{\sigma_{2n-1}(B_{z,\delta})}\int_{B_{z,\delta}}|f_{J,\mathcal{J}}(\zeta)|\,d\sigma_{2n-1}(\zeta).$$

Здесь $B_{z,\delta}$ — *«эллипсоид» Хермандера*, т. е. множество точек $\zeta \in \partial D$, отстоящих от комплексной касательной к ∂D плоскости, проведенной в точке z, не более чем на δ.

Теорема 26.2 (Хенкин). *Пусть D — строго псевдовыпуклая область в C^n и $\alpha \in L^1_{p,n-1}(\partial D)$ удовлетворяет условию (26.1). Тогда существует форма $\beta \in C_{p,\,n-1}(D)$, которая является $\bar\partial$-замкнутым продолжением формы α и обладает следующим свойством:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D_{-\varepsilon}} \beta(z)\wedge\varphi(z) = \int_{\partial D}\alpha(z)\wedge\varphi(z)$$

для любой $\varphi \in C_{n-p,\,0}(\overline{D})$. Кроме того, справедливы неравенства

$$\int_{\partial D_{-\varepsilon}} \left(|\beta(z)\wedge\bar\partial\rho(z)| + |\rho(z)|^{1/2}|\beta(z)|\right) d\sigma_{2n-1}(z) = O(1)\,\|f\|_{L^1(D)}$$

и

$$|F(z)\wedge\bar\partial\rho(z)| + |\rho(z)|^{1/2}|F(z)| = O(1)\tilde f(\tilde z(z),\ |\rho(z)|),$$

где $\tilde z(z)$ — ближайшая к z точка на ∂D.

Доказательство теоремы 26.1 проведем для строго выпуклой области. В общем случае появляются дополнительные технические трудности, о которых мы поговорим в конце данного пункта.

Лемма 26.3. *Если D — область в $\boldsymbol{R}^n$ с границей класса $C^{(l)}$, $l \geqslant 1$ и $g \in \widetilde{C}^{(m)}(D)$, $m \leqslant l-2$, то $\rho g \in \widetilde{C}^{(m+1)}(D)$. Если $m \geqslant -1$, то $\rho g|_{\partial D} = 0$. Причем модуль непрерывности функции g является модулем непрерывности функции ρg.*

Доказательство. Условие (26.2) при $|J| \leqslant m$ и условие (26.3) при $|J| > m+1$ для ρg сразу же следует из формулы Лейбница и условий (26.2) и (26.3) для функций g и ρ. Пусть $|J| = m+1$. По формуле Лейбница

$$D^J(g\rho)(x) = \sum_{\mathcal{J}\leqslant J}\binom{J}{\mathcal{J}} D^{\mathcal{J}}\rho(x)\cdot D^{J-\mathcal{J}}g(x).$$

Здесь, как обычно, $\mathcal{J} \leqslant J$ означает, что $j_l \leqslant j_m$ для всех $m = 1,\ldots, n$; $\binom{J}{\mathcal{J}} = \binom{i_1}{j_1}\cdots\binom{i_n}{j_n}$.

Для слагаемых с номером $\mathscr{J} \neq 0$ оценка типа (26.2) вытекает из условия (26.2) для g и ρ. Осталось доказать, что

$$|\rho(x)h(x) - \rho(y)h(y)| = O(1)\theta(|x - y|), \tag{26.5}$$

где θ — модуль непрерывности функции g и $h = D_g^J$. Можно считать, что $\rho(x, \partial D) \geqslant \rho(y, \partial D)$. Обозначим $\rho(x,\partial D)$ через d. Предположим сначала, что $d \leqslant 2|x - y|$. Отметим, что из вогнутости θ и равенства $\theta(0) = 0$ следует, что $\theta(\lambda t) \leqslant \lambda\theta(t)$ при $\lambda \geqslant 1$. В силу монотонности и вогнутости θ получаем из (26.3) и (26.3′)

$$|\rho(x)h(x) - \rho(y)h(y)| = O(1)(\theta(d) + \theta(\rho(y, \partial D))) =$$
$$= O(1)\theta(d) = O(1)\theta(2|x - y|) = O(1)\theta(|x - y|),$$

т. е. (26.5) в этом случае выполняется.

Пусть теперь $d > 2|x - y|$, тогда отрезок Γ, соединяющий точки x и y, лежит в шаре $B_{d/2}(x)$ и поэтому $^3/_2 d \geqslant \rho(\widetilde{x}, \partial D) \geqslant {}^1/_2 d$ для любой точки $\widetilde{x} \in \Gamma$. Из (26.3) при $\widetilde{x} \in \Gamma$ и монотонности θ имеем

$$|\operatorname{grad}(\rho h)(\widetilde{x})| = |\rho(\widetilde{x}) \operatorname{grad} h(\widetilde{x}) + h(\widetilde{x}) \operatorname{grad} \rho(\widetilde{x})| =$$
$$= O(1)\,\frac{\theta(\rho(\widetilde{x}, \partial D))}{\rho(\widetilde{x}, \partial D)} = O(1)\,\frac{\theta(d)}{d}.$$

Далее,

$$|\rho(x)h(x) - \rho(y)h(y)| = \left| \int_0^1 \frac{d}{dt}[(\rho h)(x + t(x - y))]\,dt \right| =$$
$$= \left| \int_0^1 (\operatorname{grad}(\rho h)(x + t(x - y)),\ (x - y))\,dt = \right.$$
$$= O(1)\,\frac{|x - y|}{d}\,\theta(d) = O(1)\,\theta(|x - y|).$$

На последнем шаге мы воспользовались неравенством $\theta(\lambda t) \leqslant \lambda\theta(t)$ при $t = |x - y|$ и $\lambda = \dfrac{d}{|x - y|} \geqslant 2$. □

Лемма 26.4. *Пусть D — ограниченная область в C^n с границей класса $C^{(l)}$, $l \geqslant 1$, и $\alpha \in C^{(m)}_{p,n-1}(\partial D)$, $0 \leqslant m < l$, тогда существует форма $\tilde{\alpha} \in \tilde{C}^{(m)}_{p,n-1}(D)$, для которой $\tilde{\alpha}|_{\partial D} = \alpha$; $\bar{\partial}\tilde{\alpha}(\zeta) = \rho^{m-1}(\zeta)\cdot\varkappa(\zeta)$; $\varkappa \in \tilde{C}^{(0)}_{p,n}(D)$ и $\varkappa(\zeta) = 0$ при $\zeta \in \partial D$. Причем модуль непрерывности формы α является модулем непрерывности форм $\tilde{\alpha}$ и $\varkappa$.*

Доказательство. Так как $\bar{\partial}\rho \in \tilde{C}^{(l-1)}_{0,1}(D)$ и $\bar{\partial}\rho \neq 0$ на ∂D, то для некоторого $\delta > 0$ любая форма $\mu \in \tilde{C}^{(m-1)}_{p,n}(\bar{D})$, обращающаяся в 0 при $\rho(\zeta) < -\delta$, имеет вид $\mu(\zeta) = \bar{\partial}\rho(\zeta) \wedge \nu(\zeta)$, где $\nu \in \tilde{C}^{(m-1)}_{p,n-1}(D)$.

По теореме Уитни (см. теорему 3.2 и [119, дополнение 3.3 к гл. I]), найдется форма $\alpha_0 \in \tilde{C}^{(m)}_{p,n-1}(\bar{D})$, имеющая тот же модуль непрерывности, что и α, для которой $\alpha_0|_{\partial D} = \alpha$. Умножая, если потребуется, на бесконечно дифференцируемую функцию, тождественно равную 1 в окрестности ∂D и 0 при $\rho(\zeta) \leqslant -\delta$, добъемся равенства $\alpha_0 \equiv 0$ при $\rho(\zeta) < -\delta$.

Лемма 26.3 и равенство $\bar{\partial}\alpha_0(\zeta) = \rho^{-1}(\zeta)\varkappa$, где $\varkappa(\zeta) = \rho(\zeta)\bar{\partial}\alpha_0(\zeta)$, завершают доказательство леммы при $m = 0$.

Пусть $m \geqslant 1$. Тогда $\bar{\partial}\alpha_0 = \bar{\partial}\rho(\zeta) \wedge \varkappa_0(\zeta)$ при $\zeta \in \bar{D}$ и $\varkappa_0 \in \tilde{C}^{(m-1)}_{p,n-1}(\bar{D})$. Определим форму $\alpha_1 = \alpha_0 + \rho\varkappa_0$. По лемме 26.3 $\alpha_1 \in \tilde{C}^{(m)}_{p,n-1}(D)$. Имеем $\bar{\partial}\alpha_1 = \bar{\partial}\alpha_0 - \bar{\partial}\rho \wedge \varkappa_0(\zeta) - \rho\bar{\partial}\varkappa_0 = -\rho\bar{\partial}\varkappa_0$. По лемме 26.3 $\rho\bar{\partial}\varkappa_0 \in \tilde{C}^{(0)}_{p,n}(D)$ и $\rho(\zeta)\bar{\partial}\varkappa_0(\zeta) = 0$ при $\zeta \in \partial D$. При $m = 1$ доказательство закончено. Если $m \geqslant 2$, то представляем $\bar{\partial}\varkappa_0$ в виде $\bar{\partial}\rho \wedge \varkappa_1$ и полагаем $\alpha_2 = \alpha_1 - {}^1/_2\rho^2\varkappa_1$. Применив этот прием m раз, получим утверждение леммы. □

Пусть теперь D — строго выпуклая область с границей класса $C^{(m+2)}$, $m \geqslant 0$, и функции P_j, $j = 1, \ldots, n$, Φ, $\tilde{\Phi}$ и α_k определены в § 25. Введем функции

$$\Phi^*(\zeta, z) = -\Phi(z, \zeta);\quad \tilde{\Phi}^*(\zeta, z) = -\tilde{\Phi}(z, \zeta);$$
$$\alpha^*_k(\zeta, z) = \alpha_k(\zeta, z)$$

и вектор-функции

$$u^*(\zeta, z) = \frac{P(z)}{\Phi^*(\zeta, z)};$$

$$\eta^*(\zeta, z, \lambda) = -\eta(z, \zeta, \lambda) = (1-\lambda)t + \lambda u^*,$$

где, как и раньше, $t(\zeta, z) = \dfrac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}$.

Введем операторы для $\mu \in L^1_{p,n}(D)$:

$$(G_p^{*k}\mu)(z) = -\int_{D_\zeta} \mu(\zeta) \wedge \alpha_k^*(\zeta, z)\, U_{p,n-1}(\zeta, z) +$$

$$+ (-1)^{p+n} \int_{D_\zeta \times [0,1]_\lambda} \mu(\zeta) \wedge \bar\partial_z \alpha_k^* \wedge \widetilde W_{p,n-2}(\eta^*, \zeta, z, \lambda). \tag{26.6}$$

Ядро $U_{p,\,n-1}$ определено в § 7, $\widetilde W_{p,\,n-2}$ — в § 25.

Из леммы 25.5 вытекает, что $\bar\partial_z \alpha_k^* \wedge (\widetilde W_{p,n-2}(\eta^*, \zeta, z, \lambda) - W_{p,n-2}(\eta^*, \zeta, z))$ есть линейная комбинация форм вида

$$\bar\partial\rho \wedge \rho^{k-1}(z) \left(\frac{\Phi^*}{\bar\Phi^*}\right)^s \frac{(\bar\zeta_j - \bar z_j)\, \varphi(\zeta, z, \lambda)}{|\zeta - z|^{2r} (\bar\Phi^*)^{n-r+k}} \tag{26.7}$$

и

$$\rho^k(z) \left(\frac{\Phi^*}{\bar\Phi^*}\right)^s \frac{(\bar\zeta_j - \bar z_j)(\zeta_l - z_l)\, \Psi(\zeta, z, \lambda)}{|\zeta - z|^{2r} (\bar\Phi^*)^{n-r+k+1}}, \tag{26.8}$$

где $s = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $r = 0, 1, \ldots, n-1$; φ и Ψ — формы, коэффициенты которых — произведение производных функции $\rho(z)$ не выше второго порядка на полином от λ.

Так же как в замечании после (25.12), получаем, что второй интеграл в (26.6) — собственный.

Л е м м а 26.5. *Пусть* $\mu \in L^1_{p,n}(D)$ *и*

$$\int_D \mu \wedge f = 0 \tag{26.9}$$

для любой $f \in A_{n-p}(\bar D)$, *тогда* $\gamma_k = G_p^{*k}\mu$ *для любого* $k \geqslant 0$ *является решением уравнения* $\bar\partial\gamma_k = \mu$.

Доказательство. Применив (7.15), где $\varphi = \alpha_k^*$, получим

$$\mu(z) = -\bar{\partial}_z \int_{D_\zeta} \mu(\zeta) \wedge \alpha_k^* U_{p,n-1}(\zeta, z) + \\ + (-1)^{p+n} \int_{D_\zeta} \mu(\zeta) \wedge \bar{\partial}_z \alpha_k^* \wedge U_{p,n-1}(\zeta, z). \quad (26.10)$$

По формуле Стокса

$$\int_{D_\zeta \times [0,1]_\lambda} d_{\zeta,\lambda}\left(\mu(\zeta) \wedge \bar{\partial}_z \alpha_k^* \wedge \widetilde{W}_{p,n-1}(\eta^*, \zeta, z, \lambda)\right) = \\ = -\int_{D_\zeta} \mu(\zeta) \wedge \bar{\partial}_z \alpha_k^*(\zeta, z) \wedge U_{p,n-1}(\zeta, z) + \\ + \int_{D_\zeta} \mu(\zeta) \wedge \bar{\partial}_z \alpha_k^* \wedge W_{p,n-1}(u^*, \zeta, z). \quad (26.11)$$

Нетрудно видеть, что $\bar{\partial}_z \alpha_k^*(\zeta, z) \wedge W_{p,n-1}(u^*, \zeta, z)$ голоморфна по $\zeta \in \bar{D}$ при $z \in D$, поэтому из (26.9) следует, что последний интеграл в (26.11) равен 0. Тогда

$$\int_{D_\zeta} \mu(\zeta) \wedge \bar{\partial}_z \alpha_k^* \wedge U_{p,n-1}(\zeta, z) = \\ = (-1)^{p+n} \int_{D_\zeta \times [0,1]_\lambda} \mu(\zeta) \wedge \bar{\partial}_z \alpha_k^* \wedge (\bar{\partial}_\zeta + d\lambda) \widetilde{W}_{p,n-1}(\eta^*, \\ \zeta, z, \lambda) = \bar{\partial}_z \int_{D_\zeta \times [0,1]_\lambda} \mu(\zeta) \wedge \bar{\partial}_z \alpha_k^* \wedge \widetilde{W}_{p,n-2}(\eta^*, \zeta, z, \lambda).$$

Здесь мы так же, как в доказательстве теоремы 25.6, воспользовались равенством $\bar{\partial}_z \widetilde{W}_{p,q} = (-1)^{p+q}(\bar{\partial}_\zeta + d_\lambda)\widetilde{W}_{p,q+1}$. Теперь из (26.10) следует, что $\bar{\partial} G_p^{*k} \mu = \mu$. □

Лемма 26.6. *Пусть* $h \in \widetilde{C}^{(0)}(D)$, $h|_{\partial D} = 0$; m, k, r, s — *целые, неотрицательные,* $r \leqslant n-1$; *функция* $\varphi(z)$ — *произведение производных функций* $\rho(z)$ *не выше второго* *порядка; при $m = 0$ функция h удовлетворяет условию Гёльдера порядка τ для некоторого τ, $0 < \tau \leqslant 1$;*

$$H_1(z) = \rho^k(z) \int\limits_{D_\zeta} \rho^{m-1}(\zeta)\, h(\zeta) \frac{\bar\zeta_j - \bar z_j}{|\zeta - z|^{2n} (\tilde\Phi^*)^k} \left(\frac{\Phi^*}{\tilde\Phi^*}\right)^s dv(\zeta);$$

$$H_2(z) = \rho^k(z) \int\limits_{D_\zeta} \rho^{m-1}(\zeta)\, h(\zeta) \frac{(\bar\zeta_j - \bar z_j)(\zeta_l - z_l)\,\varphi(z)}{|\zeta - z|^{2r} (\tilde\Phi^*)^{n-r+k+1}} \left(\frac{\Phi^*}{\tilde\Phi^*}\right)^s dv(\zeta);$$

$$H_3(z) = |\rho(z)|^{k-1^1/_2} \int\limits_{D_\zeta} \rho^{m-1}(\zeta)\, h(\zeta) \frac{(\bar\zeta_j - \bar z_j)\,\varphi(z)}{|\zeta - z|^{2r} (\tilde\Phi^*)^{n-r+k}} \times$$

$$\times \left(\frac{\Phi^*}{\tilde\Phi^*}\right)^s dv(\zeta).$$

Тогда при $k > m + 2$ функции H_1 и $H_2 \in \tilde C^{(m)}(D)$, $H_1|_{\partial D} = H_2|_{\partial D} = 0$ и $H_3 \in \tilde C^{(m-1)}(D)$. Причем модуль непрерывности функции h является модулем непрерывности функций H_1, H_2 и H_3.

Доказательство проведем для функции H_3, в остальных случаях рассуждения аналогичны. Из того, что $h|_{\partial D} = 0$ и (26.2) следует равенство $|h(\zeta)| = O(1)\theta(|\rho(\zeta)|)$, где θ — модуль непрерывности функции h. При $m = 0$ по условию $\theta(t) = t^\lambda$, поэтому интеграл, определяющий H_3, сходится.

Пусть $\chi \in C^{(\infty)}(C^n)$; $\operatorname{supp}\chi \subset B_2(0)$ и $\chi(\zeta) \equiv 1$ в $B_1(0)$. Зафиксируем $z^0 \in D$, обозначим через $a = {}^1/_3\rho(z^0, \partial D)$ и через H' и H'' функции, которые определяются так же, как и H_3, только подынтегральное выражение надо умножить на $\chi(a^{-1}(\zeta - z^0))$ и $1 - \chi(a^{-1}(\zeta - z^0))$ соответственно. Ясно, что $H = H' + H''$. Кроме того, $a = O(1)\rho(z^0) = O(1)a$.

В интеграле, определяющем H'', можно дифференцировать под знаком интеграла при $z \in B_a(z^0)$, так как $1 - \chi(a^{-1}(\zeta - z^0)) \equiv 0$ при $\zeta \in B_a(z^0)$. Пусть D — линейный дифференциальный оператор порядка $s \geqslant 0$ с постоянными коэффициентами. Используя формулу Лейбница, неравенства (25.3), (25.4) и условия (26.2) и (26.3) для функции ρ, получаем

$$D\left(\frac{H''(z)}{|\rho(z)|^{k-1^{1}/_{2}}}\right)\Big|_{z=z^0} = O(1) \int\limits_{D_\zeta \setminus B_a(z^0)} |\rho(\zeta)|^{m-1}|h(\zeta)| \times$$

$$\times \sum_{i_1+i_2+i_3=s} \frac{dv(\zeta)}{|\zeta - z^0|^{2n-3+i_1}|\tilde{\Phi}^*(\zeta, z^0)|^{k+1+i_2}a^{i_3}} =$$

$$= O(1) \sum_{i_1+i_2+i_3=s} \frac{1}{a^{i_1+i_3}} \int\limits_{D_\zeta} \frac{|\beta(\zeta)|^{m-1}\theta(|\rho(\zeta)|)\,dv(\zeta)}{|\zeta - z_0|^{2n-3}|\tilde{\Phi}^*(\zeta, z^0)|^{k+1+i_2}}.$$

Пусть $m \geqslant 1$. Из монотонности и вогнутости функции θ и равенства $\theta(0) = 0$ следует, что

$$\theta(|\rho(\zeta)|) \leqslant (|\rho(\zeta)|\cdot|\rho(z^0)|^{-1} + 1)\cdot\theta(|\rho(z^0)|) =$$
$$= O(1)(|\rho(\zeta)|a^{-1} + 1)\cdot\theta(a).$$

Поэтому $D\left(\frac{H''(z)}{|\rho(z)|^{k-1^{1}/_{2}}}\right)\Big|_{z=z^0} = O(1) \sum\limits_{i_1+i_2=s} \frac{\theta(a)}{a_1^{i_1+1}} \times$

$$\times \int\limits_{D_\zeta} \frac{(|\rho(z)|^m + a|\rho(\zeta)|^{m-1})\,dv(\zeta)}{|\zeta - z^0|^{2n-3}|\tilde{\Phi}^*(\zeta, z^0)|^{k+1+i_2}}.$$

Так же как в доказательстве теоремы 25.9, разобъем каждый интеграл на 2: по $D_\zeta \setminus B_\delta(z^0)$ и по $D \cap B_\delta(z^0)$, где δ выбрано в соответствии с леммой 10.6; в интеграле по $D \cap B_\delta(z^0)$ сделаем замену переменных (см. лемму 10.6) и воспользуемся (25.5). Используя лемму 25.7, получим

$$D\left(\frac{H''(z)}{|\rho(z)|^{k-1^{1}/_{2}}}\right)\Big|_{z=z^0} =$$

$$= O(1) \sum_{i_1+i_2=s} \frac{\theta(a)}{a^{i_1+1}} (J_{m,k+1+i_2,2n-3}(|\rho(z^0)|) +$$

$$+ aJ_{m-1,k+1+i_2,2n-3}(|\rho(z^0)|) + O(1)) =$$

$$= O(1) \sum_{i_1+i_2=s} \frac{\theta(a)}{a^{i_1+1}} (|\rho(z^0)|^{m-k-1-i_2+{}^3/_2} +$$

$$+ a|\rho(z^0)|^{m-1-k-1-i_2+{}^3/_2} + O(1)) = O(1)\frac{\theta(a)}{a^{s+k-m-{}^1/_2}}.$$

При $m=0$ имеем $\theta(t)=t^{\tau}$, поэтому

$$D\left(\frac{H''(z)}{|\rho(z)|^{k-1^1/_2}}\right)\Bigg|_{z=z^0}=O(1)\sum_{i_1+i_2=s}\frac{1}{a^{i_1}}\times$$

$$\times\int_{D_\zeta}\frac{|\rho(\zeta)|^{\tau-1}dv(\zeta)}{|\zeta-z^0|^{2n-3}|\widetilde{\Phi}^{\bullet}(\zeta,z)|^{k+1+i_2}}=O(1)\sum_{i_1+i_2=s}\frac{1}{a^{i_1}}\times$$

$$\times\left(J_{\tau-1,k+1+i_2,2n-3}(|\rho(z^0)|)+O(1)\right)=O(1)\frac{a^{\tau}}{a^{s+k-1/_2}}.$$

Заменой переменных $\zeta'=\zeta-z$ в интеграле, задающем H', получим

$$H'(z)=|\rho(z)|^{k-1^1/_2}\int_{B_{2a}(z^0-z)}\rho^{m-1}(\zeta+z)\,h(\zeta+z)\,\chi\,(a^{-1}\times$$

$$\times(\zeta+z-z^0))\frac{\overline{\zeta}_j\varphi(z)}{|\zeta|^{2r}[\widetilde{\Phi}^{\bullet}(\zeta+z,z)]^{n-r+k}}\left(\frac{\Phi^{\bullet}(\zeta+z,z)}{\widetilde{\Phi}^{\bullet}(\zeta+z,z)}\right)^{s}dv(\zeta).$$

Дифференцируя под знаком интеграла, имеем

$$D\left(\frac{H'(z)}{|\rho(z)|^{k-1^1/_2}}\right)=O(1)\int_{B_{2a}(z^0-z)}\sum_{i_1+\ldots+i_4=s}\rho^{m-i_1-1}(\zeta+z)\times$$

$$\times\frac{\theta(\rho(\zeta+z))}{|\rho(\zeta+z)|^{i_2}}\cdot\frac{1}{a^{i_3}}\cdot\frac{dv(\zeta)}{|\zeta|^{2n-3}|\widetilde{\Phi}^{\bullet}(\zeta+z,z)|^{k+1+i_4}}.$$

Здесь мы использовали формулу Лейбница, неравенства (25.3), (25.4) и условия (26.2) и (26.3) для функций ρ и h. Сделаем обратную замену:

$$D\left(\frac{H'(z)}{|\rho(z)|^{k-1^1/_2}}\right)\Bigg|_{z=z^0}=$$

$$=O(1)\int_{B_{2a}(z^0)}\sum_{i_1+\ldots+i_4=s}\frac{|\rho(\zeta)|^{m-1-i_1-i_2}\,\theta(|\rho(\zeta)|)\,dv(\zeta)}{a^{i_3}\,|\zeta-z^0|^{2n-3}\,|\widetilde{\Phi}^{\bullet}(\zeta,z^0)|^{k+1+i_4}}.$$

Так как $\rho(z^0,\partial D)=3a$, то $a\leqslant\rho(\zeta,\partial D)\leqslant 5a$ при $\zeta\in$

$\in B_{2a}(z^0)$, поэтому $|\rho(\zeta)|^{m-1-i_1-i_2}\theta(|\rho(\zeta)|) = O(1)\times$ $\times a^{m-1-i_1-i_2}\theta(a)$, следовательно,

$$D\left(\frac{H'(z)}{|\rho(z)|^{k-1^1/_2}}\right)\Bigg|_{z=z^0} = \sum_{i_1+i_2=s}\theta(a)\,a^{m-i_1-1}\times$$

$$\times\int_{D\zeta}\frac{dv(\zeta)}{|\zeta-z^0|^{2n-3}\,|\widetilde{\Phi}^*(\zeta,z^0)|^{k+1+i_2}} = O(1)\,\theta(a)\sum_{i_1+i_2=s}a^{m-1-i_1}\times$$

$$\times J_{0,k+1+i_2,2n-3}(|\rho(z^0)|) = O(1)\,\frac{\theta(a)}{a^{s+k-m-1/_2}}.$$

Итак, для любой точки $z^0\in D$

$$D\left(\frac{H_3(z)}{|\rho(z)|^{k-1^1/_2}}\right)\Bigg|_{z=z^0} = D\left(\frac{H'(z)}{|\rho(z)|^{k-1^1/_2}}\right)\Bigg|_{z=z^0}+$$

$$+D\left(\frac{H''(z)}{|\rho(z)|^{k-1^1/_2}}\right)\Bigg|_{z=z^0} = O(1)\,\frac{\theta(a)}{a^{s+k-m-1/_2}} =$$

$$= O(1)\,\frac{\theta(|\rho(z^0)|)}{|\rho(z^0)|^{s+k-m-1/_2}}.$$

Отсюда и из формулы Лейбница вытекает, что

$$D\left(\frac{H_3(z)}{|\rho(z)|^{k-1}}\right) = D\left(|\rho(z)|^{-1/_2}\frac{H_3(z)}{|\rho(z)|^{k-1^1/_2}}\right) = O(1)\,\frac{\theta(|\rho(z)|)}{|\rho(z)|^{s+k-m}},$$

т. е. (сравни с (26.3′)) $H_3\cdot|\rho|^{1-k}\in\widetilde{C}^{(m-k)}(D)$ и θ—модуль непрерывности $H_3\cdot|\rho|^{1-k}$; теперь, применяя $k-1$ раз лемму 26.3, получим, что $H_3\in\widetilde{C}^{(m-1)}(D)$ и θ — модуль непрерывности H_3.□

Доказательство теоремы 26.1. Пусть D — строго выпуклая область и α удовлетворяет условиям теоремы. По лемме 26.4 $\alpha=\widetilde{\alpha}|_{\partial D}$, где $\widetilde{\alpha}\in\widetilde{C}^{(m)}_{p,n-1}(D)$ и $\overline{\partial}\widetilde{\alpha}(\zeta)=\rho^{m-1}(\zeta)\varkappa(\zeta)$, $\varkappa\in\widetilde{C}^{(0)}_{p,n}(D)$, $\varkappa(\zeta)=0$ при $\zeta\in\partial D$, модуль непрерывности формы α является модулем непрерывности форм $\widetilde{\alpha}$ и $\varkappa$. Как и в доказательстве леммы 26.6, получаем, что $\overline{\partial}\,\widetilde{\alpha}\in L^1_{p,n}(D)$. Из условия 26.1 имеем

$$\int_D\overline{\partial}\,\widetilde{\alpha}\wedge f = \int_D d(\widetilde{\alpha}\wedge f) = \int_{\partial D}\alpha\wedge f = 0 \qquad (26.12)$$

для всех $f \in A_{n-p}(\overline{D})$. По лемме 26.5 $\overline{\partial}\widetilde{\alpha} = \overline{\partial}\gamma_k$, где $\gamma_k = G_p^{*k}(\overline{\partial}\,\widetilde{\alpha})$ для любого $k \geqslant 0$. Из определения оператора G_p^{*k} (см. (26.6)), определения $U_{p,\,n-1}$ и функции α_k^{*}, (26.7) и (26.8) следует, что $\gamma_k = \gamma_k' + \overline{\partial}\rho \wedge \sqrt{|\rho|}\cdot\gamma_k''$, где γ_k' и γ_k'' — формы типа $(p,\ n-1)$ и $(p,\ n-2)$ соответственно, коэффициенты формы γ' — линейные комбинации функции вида H_1 и H_2 из леммы 26.6, а коэффициенты формы γ_k'' — линейные комбинации функций вида H_3. По лемме 26.6 $\gamma_k' \in \widetilde{C}^{(m)}_{p,n-1}(D)$, $\gamma_k'' \in \widetilde{C}^{(m-1)}_{p,n-2}(D)$ и $\gamma_k'|_{\partial D} = 0$ при $k > m+2$. Теперь любую форму вида $\widetilde{\alpha} - \gamma_k$ при $k > m+2$ можно взять в качестве формы β, где $\beta_1 = \widetilde{\alpha} - \gamma_k'$ и $\beta_2 = -\gamma_k''$, так как $\overline{\partial}\beta = \overline{\partial}(\widetilde{\alpha} - \gamma_k) = \overline{\partial}\widetilde{\alpha} - \overline{\partial}\gamma_k = 0$ и $\beta_1|_{\partial D} = \widetilde{\alpha}|_{\partial D} - \gamma_k'|_{\partial D} = \alpha$ □.

Для доказательства теоремы в общем случае надо построить оператор, аналогичный оператору G_p^{*k}. Он строится точно так же, как G_p^{*k}, только в качестве P_j и Φ надо взять функции, полученные в леммах 10.1 и 10.3, а в качестве $\widetilde{\Phi}(\zeta, z)$ — функцию $(F(\zeta, z) - \rho(\zeta))G(\zeta, z)$. Функции P_j, $\widetilde{\Phi}$ и Φ определены при $(\zeta, z) \in U_{\varepsilon,\delta} = \{(\zeta, z) : |\rho(\zeta)| < \delta;\ \rho(z) < \delta;\ |\zeta - z| < \varepsilon\}$ для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Повторив рассуждения лемм 26.5 и 26.6, найдем $\overline{\partial}$-замкнутую форму $\widetilde{\beta}$, заданную в $U \cap D$, где U — некоторая окрестность ∂D, удовлетворяющую условиям теоремы. Сгладим $\widetilde{\beta}$ около границы U и получим форму, которую снова обозначим $\widetilde{\beta}$, заданную в D и удовлетворяющую всем условиям теоремы, только $\overline{\partial}\widetilde{\beta} = 0$ в некоторой (односторонней) окрестности ∂D. Далее, надо подправить $\widetilde{\beta}$ примерно так же, как в доказательстве теоремы форма $\widetilde{\alpha}$ была подправлена до формы β. Делается это так.

В некоторой окрестности U_1 границы ∂D определена форма

$$\tau(z) = \int\limits_{D_\zeta \times [0,1]_\lambda} \overline{\partial}\widetilde{\beta}(\zeta) \wedge \widetilde{W}_{p,n-2}(\eta^*, \zeta, z, \lambda) =$$

$$= \int\limits_{(D \setminus U)_\zeta \times [0,1]_\lambda} \overline{\partial}\beta(\zeta) \wedge \widetilde{W}_{p,n-2}(\eta^*, \zeta, z, \lambda), \qquad (26.13)$$

где, как и раньше, $\eta^*(\zeta, z) = (1-\lambda)t + \lambda u^*$ и $u^* = P^*(\zeta, z)/\Phi^*(\zeta, z)$. Поскольку $\rho \in C^{(\infty)}(D)$, из доказательства лемм 10.1 и 10.3 можно получить, что $\widetilde{W}_{p,n-1}(\eta^*, \zeta, z, \lambda)$ бесконечно дифференцируема при $(\zeta, z, \lambda) \in (D \setminus U) \times U_1 \times [0,1]$, поэтому

$\tau \in C^{(\infty)}_{p,n-2}(U_1 \cap D)$. Сгладив τ около границы U_1, найдем форму, которую обозначим через τ, принадлежащую $C^{(\infty)}_{p,n-2}(D)$ и такую, что в некоторой окрестности U_2 границы ∂D задается формулой (26.13).

Имеем при $z \in U_2 \cap D$

$$\bar\partial\tau(z) = \int\limits_{D_\zeta \times [0,1]_\lambda} \bar\partial\widetilde\beta(\zeta) \wedge \bar\partial_z \widetilde W_{p,n-2}(\eta^*, \zeta, z, \lambda) =$$

$$= (-1)^{p+n-1} \int\limits_{D_\zeta \times [0,1]_\lambda} \bar\partial\beta(\zeta) \wedge \left(\bar\partial_\zeta + d_\lambda\right) \widetilde W_{p,n-1}(\eta^*, \zeta, z, \lambda) =$$

$$= - \int\limits_{D_\zeta \times [0,1]_\lambda} d_{\zeta,\lambda}\left(\bar\partial\beta(\zeta) \wedge \widetilde W_{p,n-1}(\eta^*, \zeta, z, \lambda)\right) =$$

$$= \int\limits_{D_\zeta} \bar\partial\widetilde\beta(\zeta) \wedge U_{p,n-1}(\zeta, z) - \int\limits_{D_\zeta} \bar\partial\widetilde\beta \wedge W_{p,n-1}(u^*, \zeta, z).$$

При z, близких к ∂D, вектор-функция $u^*(\zeta, z)$ голоморфна по $\zeta \in D_{\rho(z)} = \{w : \rho(w) < \rho(z)\}$. Можно показать, что функции из $A(D_{\rho(z)})$ равномерно на $D \setminus U$ приближаются функциями из $A(\overline D)$. Отсюда и из равенства для $\bar\partial\widetilde\beta$, аналогичного (26.12), получаем

$$\int\limits_{D_\zeta} \bar\partial\widetilde\beta \wedge W_{p,n-1}(u^*, \zeta, z) = 0$$

для z, близких к ∂D. Поэтому форма

$$\widetilde\gamma(z) = \int\limits_{D_\zeta} \bar\partial\widetilde\beta(\zeta) \wedge U_{p,n-1}(\zeta, z) - \bar\partial\tau(z)$$

принадлежит $C^{(\infty)}_{p,n-1}(D)$ и обращается в 0 около ∂D. Теперь из формулы Мартинелли — Бохнера — Коппельмана (7.1) следует, что форма $\beta = \widetilde\beta - \widetilde\gamma$ — искомая.

4°. В предыдущем пункте показано, что любая форма, ортогональная голоморфным формам при интегрировании по границе строго псевдовыпуклой области D, продолжается до формы, $\bar\partial$-замкнутой в D. Поскольку в строго псевдовыпуклых областях разрешима $\bar\partial$-задача (см. теорему 25.10), то естественно выглядит

Теорема 26.7. *Пусть D — строго псевдовыпуклая область в C^n и для формы $\alpha \in C_{p,\,n-1}(\partial D)$ выполняется* (26.1). *Если α удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\tau > 1/2$, то $\alpha = \bar\partial\gamma|_{\partial D}$, где $\gamma \in C^{(1)}_{p,n-2}(\bar D)$.*

Доказательство будем проводить для строго выпуклой области. Для того чтобы доказать теорему, достаточно решить уравнение $\bar\partial\gamma = \beta$, где $\beta = \beta_1 + \bar\partial\rho \wedge \wedge \sqrt{|\rho|}\cdot\beta_2$ из теоремы 26.1. Решение этого уравнения дает оператор $G^k_{p,n-1}$ (см. (25.12)), однако при оценке производных возникают значительные трудности. Поэтому построим другое решение.

Пусть Ω — область, содержащая $\bar D$, в которой выполняются оценки (25.2) — (25.5). Используя лемму 26.4, найдем форму $\tilde\beta_1 \in \tilde C^{(0)}_{p,n-1}(\Omega\setminus D)$ такую, что $\tilde\beta_1|_{\partial D} = \beta_1|_{\partial D}$, $\bar\partial\tilde\beta_1 = \rho^{-1}(\zeta)\varkappa(\zeta)$, где $\varkappa \in \tilde C^{(0)}_{p,n}(D)$ и $\varkappa(\zeta) = 0$ при $\zeta \in \partial D$. Модуль непрерывности формы β_1 по теореме 26.1 имеет вид $\theta(t) = t^\tau$, следовательно, модуль непрерывности форм β_1 и $\varkappa$ имеет тот же вид. Можно считать, что $\tilde\beta_1|_{\partial\Omega} = 0$.

Из формулы Мартинелли — Бохнера — Коппельмана (7.1) и замечания после теоремы 26.1 при $z \in D$

$$\beta(z) = \int\limits_{\partial D_\zeta} \beta_1(\zeta) \wedge U_{p,n-1}(\zeta, z) - \bar\partial_z \int\limits_{D_\zeta} \beta(\zeta) \wedge U_{p,n-2}(\zeta, z);$$

$$0 = -\int\limits_{\partial D_\zeta} \tilde\beta_1(\zeta) \wedge U_{p,n-1}(\zeta, z) - \bar\partial_z \int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta} \tilde\beta_1(\zeta) \wedge$$

$$\wedge U_{p,n-2}(\zeta, z) - \int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta} \bar\partial\tilde\beta_1(\zeta) \wedge U_{p,n-1}(\zeta, z).$$

Складывая эти равенства и учитывая $\beta_1|_{\partial D} = \tilde\beta_1|_{\partial D}$, получим при $z \in D$

$$\beta(z) = -\int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta} \bar\partial\tilde\beta_1(\zeta) \wedge U_{p,n-1}(\zeta, z) -$$

$$- \bar\partial_z \left[\int\limits_{D_\zeta} \beta(\zeta) \wedge U_{p,n-2}(\zeta, z) + \int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta} \tilde\beta_1(\zeta) \wedge U_{p,n-2}(\zeta, z)\right]. \tag{26.14}$$

Преобразуем первый интеграл в (26.14):

$$\int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta} \bar\partial\widetilde{\beta}_1(\zeta)\wedge U_{p,n-1}(\zeta, z) = -\int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta\times[0,1]_\lambda} d_{\zeta,\lambda}\big(\bar\partial\widetilde{\beta}_1(\zeta)\wedge$$

$$\wedge\widetilde{W}_{p,n-1}(\eta,\zeta,z,\lambda)\big) + \int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta} \bar\partial\widetilde{\beta}_1\wedge W_{p,n-1}(u,\zeta,z).$$

Здесь, как и раньше, $u(\zeta, z) = \frac{P(\zeta)}{\Phi(\zeta, z)}$; $\eta = (1-\lambda)t + \lambda u$.

Так как u голоморфна по $z\in D$ при $\zeta\notin D$, то $W_{p,\,n-1}(u,\zeta,z) = 0$. Далее,

$$\int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta} \bar\partial\widetilde{\beta}_1(\zeta)\wedge U_{p,n-1}(\zeta,z) = (-1)^{p+n+1}\times$$

$$\times\int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta\times[0,1]_\lambda} \bar\partial\widetilde{\beta}_1(\zeta)\wedge(\bar\partial_\zeta + d_\lambda)\widetilde{W}_{p,n-1}(\eta,\zeta,z,\lambda) =$$

$$= \bar\partial_z\int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta\times[0,1]_\lambda} \bar\partial\widetilde{\beta}_1(\zeta)\wedge\widetilde{W}_{p,n-2}(\eta,\zeta,z,\lambda).$$

Отсюда и из (26.14) имеем $\bar\partial\gamma(z) = \beta$ при $z\in D$, где

$$\gamma(z) = -\int\limits_{D_\zeta}\beta(\zeta)\wedge U_{p,n-2}(\zeta,z) - \int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta}\widetilde{\beta}_1(\zeta)\wedge U_{p,n-2}(\zeta,z) -$$

$$-\int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta\times[0,1]_\lambda}\bar\partial\beta_1(\zeta)\wedge\widetilde{W}_{p,n-2}(\eta,\zeta,z,\lambda). \quad (26.15)$$

Покажем, что γ — искомая форма. В первых двух интегралах в (26.15) коэффициенты ядра имеют вид $\frac{\bar\zeta_j - \bar z_j}{|\zeta - z|^{2n}}$, а формы β и β_1 удовлетворяют условию Гёльдера, поэтому формы, определяемые этими интегралами, принадлежат $C^{(1)}_{(p,n-2)}(\bar D)$ (см. предложение 0.10).

Рассмотрим третий интеграл в (26.15). Используя (25.11), проинтегрируем по $\lambda\in[0,1]$ и получим, что этот интеграл — линейная комбинация форм с коэффициентами вида

$$F(z) = \int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta} \frac{(\bar\zeta_j - \bar z_j)\,\varphi(\zeta)}{|\zeta - z|^{2(n-1)}\Phi(\zeta, z)} \cdot \frac{\varkappa(\zeta)}{\rho(\zeta)}, \quad z \in D,$$

где $1 \leqslant j \leqslant n$ и $\varphi(\zeta)$ — произведение производных функции $\rho(\zeta)$ не выше второго порядка. Отметим, что $|\varkappa(\zeta)| = O(1)\theta(|\rho(\zeta)|) = O(1)|\rho(\zeta)|^\tau$ (сравните с доказательством леммы 26.6).

Пусть D — дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами. После дифференцирования под знаком интеграла имеем при $z \in D$

$$|DF(z)| = O(1)\left[\int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta} \frac{|\rho(\zeta)|^{\tau-1} dv(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-1}|\Phi(\zeta, z)|} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta} \frac{|\rho(\zeta)|^{\tau-1} dv(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-2}|\Phi(\zeta, z)|^2} + \int\limits_{(\Omega\setminus D)_\zeta} \frac{|\rho(\zeta)|^{\tau-1} dv(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-3}|\Phi(\zeta, z)|^3}\right].$$

Воспользовавшись неравенством (25.2) и заменой переменных, о которой говорится в лемме 10.6, так же как в доказательстве теоремы 25.9 (и леммы 26.6), получим с помощью леммы 25.7

$$|DF(z)| =$$

$$= O(1)\,[J_{\tau-1,1,2n-1}(|\rho(z)|) + J_{\tau-1,1^1/_2,2n-1}(|\rho(z)|) +$$

$$+ J_{\tau-1,3,2n-3}(|\rho(z)|)] = O(1)\,(|\rho(z)|^{\tau-1} +$$

$$+ |\rho(z)|^{\tau-1^1/_2} + |\rho(z)|^{\tau-1^1/_2}) = O(1)\,|\rho(z)|^{-1+(\tau-1/_2)}.$$

Поскольку $\tau > 1/_2$, по лемме 25.8 первые производные функции F удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\tau - 1/_2$. Таким образом, и третий интеграл в (26.15) принадлежит $C^{(1)}_{p,n-2}(\bar D)$. □

5°. Приведем без доказательства еще несколько результатов о формах, ортогональных голоморфным.

Теорема 26.8 (Даутов). *Если* $D = \Omega \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{h} \Omega_j$, *где* Ω *и* Ω_j — *такие строго псевдовыпуклые области в* C^n, *что* $\Omega_j \subset\subset \Omega$

и $\overline{\Omega}_j \cap \overline{\Omega}_l = \varnothing$ *при* $j \neq l$ *и* $\alpha \in C^{(\tau)}_{(p,n-1)}(\partial D)$, $1/2 < \tau \leqslant 1$, *то* α *удовлетворяет* (26.1) *тогда и только тогда, когда существует* $\overline{\partial}$*-замкнутая форма* $\beta = \beta_1 + \overline{\partial}\rho \wedge \sqrt{|\rho|}\cdot\beta_2$, $\beta_1 \in \widetilde{C}^{(0)}_{p,n-1}(D)$, $\beta_2 \in \widetilde{C}^{(-1)}_{p,n-2}(D)$, $\beta_1|_{\partial D} = \alpha$ *и модуль непрерывности формы* β_2 *имеет вид* t^τ.

Так же как в замечании после теоремы 26.1, можно доказать, что β продолжается до формы, непрерывной на $\overline{D}$.

Теорема 26.9 (Хенкин). *Если* $D = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_j$, *где* Ω *и* Ω_j *— такие псевдовыпуклые области в* C^n *с границами класса* $C^{(\infty)}$, *что* $\Omega_j \subset\subset \Omega$ *и* $\overline{\Omega}_j \cap \overline{\Omega}_l = \varnothing$ *при* $j \neq l$ *и* $\alpha \in C^{(\infty)}_{p,n-1}(\partial D)$, *то* α *удовлетворяет* (26.1) *тогда и только тогда, когда существует* $\overline{\partial}$*-замкнутая форма* $\beta \in C^{(\infty)}_{p,n-1}(\overline{D})$, *для которой* $\beta|_{\partial D} = \alpha$.

«Экзотический» вид области, в которой дается это описание, в какой-то мере (а при $n = 2$ почти полностью) оправдан сутью дела. Об этом говорит

Теорема 26.10 (Даутов). *Пусть* D *— ограниченная область в* C^2 *с границей класса* $C^{(2)}$. *Если для любой формы* $\alpha \in C^{(\infty)}_{p,n-1}(\partial D)$, *удовлетворяющей* (26.1), *существует* $\overline{\partial}$*-замкнутая форма* $\beta \in C_{p,n-1}(\overline{D})$, *для которой* $\beta|_{\partial D} = \alpha$, *то* $D = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j$, *где* Ω *и* Ω_j *— псевдовыпуклые области,* $\Omega_j \subset\subset \Omega$ *и* $\overline{\Omega}_j \cap \overline{\Omega}_l = \varnothing$ *при* $j \neq l$. *Если же* $\beta = \overline{\partial}\gamma$, *где* $\gamma \in C_{p,n-2}(\overline{D})$, *то* D *— псевдовыпуклая.*

В общем случае справедлива

Теорема 26.11 (Айзенберг). *Если* D *— ограниченная область в* C^n *с границей класса* $C^{(2)}$, *компакт* $\overline{D}$ *обладает однолистной оболочкой голоморфности* [2] $\mathscr{H}(\overline{D})$ *и* $\alpha \in C^{(\tau)}_{p,n-1}(\partial D)$, $0 < \tau \leqslant 1$, *то* α *удовлетворяет* (26.1) *тогда и только тогда, когда существуют такие* $\overline{\partial}$*-замкнутые формы* $\alpha_1 \in \widetilde{C}^{(0)}_{(p,n-1)}(\overline{D})$ и $\alpha_2 \in \widetilde{C}^{(0)}_{(p,n-1)}(C^n \setminus D)$, *что* $\alpha = \alpha_1|_{\partial D} + \alpha_2|_{\partial D}$, *причем* $\alpha_2 = O(|z|^{1-2n})$ *при* $z \to \infty$ *и* α_2 *является* $\overline{\partial}$*-точной в* $C^n \setminus \mathscr{H}(\overline{D})$

6°. Формы, ортогональные голоморфным функциям, тесно связаны с формулами логарифмического вычета и, в частности, с интегральными представлениями.

Пусть D — ограниченная область в C^n с гладкой границей и отображение $f : \overline{D} \to C^n$ принадлежит $A^n(\overline{D})$, причем f не имеет нулей на ∂D, тогда (см. теорему 2.4) f имеет конечное число нулей в D. Напомним, что E_f — множество нулей отображения f, а $\mu_a(f)$—

[2] Определение оболочки голоморфности компакта см. в § 24.

кратность нуля $a \in E_f$. Под *формулой логарифмического вычета* мы понимаем формулу вида

$$\int_{\partial D_\zeta} \varphi(\zeta)\,\varkappa(\zeta) = \sum_{a \in E_f} \mu_a(f)\,\varphi(a), \qquad (26.16)$$

справедливую для всех $\varphi \in A_C(D)$. Здесь $\varkappa \in C_{2n-1}(\partial D)$. Примером формулы вида (26.16) является (3.5). Если отображение f имеет единственный нуль в D кратности 1, то формула логарифмического вычета превращается в *интегральное представление для голоморфных функций*. Отметим, что форма $\varkappa$, удовлетворяющая (26.16),— решение неоднородной системы уравнений вида (26.16), а формы, ортогональные голоморфным функциям,— решения соответствующей однородной системы уравнений, поэтому любая форма $\varkappa$, удовлетворяющая (26.16), может быть получена из фиксированной формы прибавлением формы, ортогональной голоморфным функциям, и, наоборот, любая форма, ортогональная голоморфным функциям, может быть получена как разность между фиксированной формой $\varkappa_0$ и некоторой подходящей формой $\varkappa$, если $\varkappa_0$ и $\varkappa$ удовлетворяют (26.16).

При $n = 1$ примером формы $\varkappa$, для которой справедливо (26.16), может служить

$$\frac{1}{2\pi i}\, d \ln f = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{df}{f},$$

где $f \in A(\overline{D})$. Из классического результата, упомянутого в п. 1° настоящего параграфа, можно получить, что любая форма $\varkappa$, для которой выполняется (26.16), отличается от $(2\pi i)^{-1} d \ln f$ на слагаемое вида $g\,dz$, где $g \in A_C(D)$.

В дальнейшем будем считать, что $n > 1$. Выясним, при каких условиях любая форма, удовлетворяющая (26.12), имеет вид $\Omega(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, f)$ (см. 3.3)) для подходящих $w^{(0)}$, $w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}$.

В форму $\Omega(w^{(0)}, \ldots, w^{(n-1)}, f)$ множителем входит произведение $df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$, поэтому если якобиан $\frac{\partial f}{\partial z}$ отображения f вырождается в точке $z^0 \in \partial D$, то и все формы вида (3.3) вырождаются в этой точке. Добавляя $\overline{\partial}$-точное слагаемое типа $(n, n-1)$ к форме $\Omega(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, f)$, всегда можно найти $\varkappa$, удовлетворяющую (1) и невырожденную в точке z^0. Поэтому естественным условием на f является следующее: $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ на ∂D.

Любые 2 формы вида (3.3) для одного и того же отображения f отличаются друг от друга на $\overline{\partial}$-точное слагаемое (см. лемму 3.4). Отсюда следует, что если любая форма, для которой выполняется (26.16), имеет вид (3.3), то любая форма, ортогональная голоморфным функциям при интегрировании по границе области, продолжается в D как $\bar\partial$-точная. При $n = 2$ получаем из теоремы (26.8), что D — псевдовыпуклая область. Мы потребуем несколько больше: D — строго псевдовыпуклая.

Теорема 26.12 (Даутов). *Пусть D — строго псевдовыпуклая область в C^n, $n \geqslant 2$, отображение $f \in A^n(\bar D)$, причем $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ на ∂D. Тогда любая форма $\varkappa$ степени $2n - 1$ на ∂D, удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем $\tau > 1/2$ и условию (26.16), имеет вид $\Omega(w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}, f)$ для подходящих вектор-функций $w^{(j)} \in C^{(1)}(\partial D)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, если*

1) $n = 2$, либо

2) $n \geqslant 3$ и комплексные касательные к поверхности[3] *$f(\partial D)$ не заходят в начало координат.*

Условие 2) можно ослабить, а именно потребовать, чтобы существовала вектор-функция $u^{(0)}$, гладкая на ∂D, такая, что $\langle u^0, f\rangle = 1$, и любая гладкая форма типа $(n, n-2)$ на ∂D имеет вид

$$\sum_{k<l} a_{kl} du^{(0)}_{[k,l]} \wedge df,$$

где a_{kl} — гладкие функции. Скорее всего, условие 2) или это, более слабое условие, идет от метода доказательства.

Фактически мы докажем, что $\varkappa$ имеет вид

$$\Omega(\bar f, w, \underbrace{\bar f, \ldots, \bar f}_{n-2}, f)$$

для подходящей w.

Доказательство. Обозначим $u^{(0)} = \frac{\bar f}{|f|^2}$. Ясно, что $\langle u^{(0)}, f\rangle = 1$, поэтому форма $\Omega(u^{(0)}, \ldots, u^{(0)}, f)$ удовлетворяет (1). Следовательно, если $\alpha = \varkappa - \Omega(u^{(0)}, \ldots, u^{(0)}, f)$, то для α выполняется (26.1). По теореме 26.7 $\alpha = \bar\partial\gamma|_{\partial D}$, где $\gamma \in C^{(1)}_{n,n-2}(\bar D)$. Покажем, что

$$\gamma|_{\partial D} = \frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k<l} a_{kl} du^{(0)}_{[k,l]} \wedge df, \qquad (26.17)$$

где $a_{kl} \in C^{(1)}(\partial D)$.

---

[3] $f(\partial D)$ — гладкая поверхность (возможно, с самопересечением), так как ∂D — гладкая и $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ на ∂D.

При $n = 2$ равенство (26.17) тривиально. Пусть $n \geqslant 3$, тогда (26.17) достаточно доказать локально; глобальное разложение формы γ получается из локальных с помощью разбиения единицы. Пусть ζ^0 — фиксированная точка ∂D и $z^0 = f(\zeta^0)$. Рассмотрим поверхность $S = f(U \cap \partial D)$, где U - некоторая окрестность ζ^0. Тогда S — гладкая поверхность, задаваемая уравнением $\rho_1(z) = 0$, где $\rho_1(z) = \rho(f^{-1}(z))$, а ρ — функция, задающая область D. Можно считать, что $\frac{\partial \rho_1}{\partial \bar z_1}(z) \neq 0$ и $z_1 \neq 0$ при $z \in S$. Этого всегда можно добиться поворотом системы координат и уменьшением U, так как $z^0 = f(\zeta^0) \neq 0$ и $\operatorname{grad} \rho_1|_S \neq 0$. Непосредственным подсчетом находим, что

$$\overline{\left(z_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial z_1} + \ldots + z_n \frac{\partial \rho_1}{\partial z_n}\right)} \frac{d\bar z[1] \wedge dz}{|z|^{2n} \dfrac{\partial \rho_1}{\partial \bar z_1}}\Bigg|_S = \frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!}\, \Omega(\bar z, \ldots, \bar z, z)\Big|_S =$$

$$= \frac{1}{z_1} d\left(\frac{\bar z}{|z|^2}\right)_{[1]} \wedge dz\Big|_S.$$

Первое равенство показывает, что $\Omega(\bar z, \ldots, \bar z, z)|_S$ не вырождена, так как по условию теоремы комплексные касательные к $S = f(U \cap \partial D)$ не заходят в 0. Второе равенство означает, что дифференциалы $d\left(\frac{\bar z_2}{|z|^2}\right), \ldots, d\left(\frac{\bar z_n}{|z|^2}\right), dz_1, \ldots, dz_n$ линейно-независимы на S, следовательно, дифференциалы $du_2^{(0)} = d\frac{\bar f_2}{|f|^2}, \ldots, du_n^{(0)} = d\frac{\bar f_n}{|f|^2}, df_1, \ldots, df_n$ линейно-независимы на $\partial D \cap U$. Отсюда следует (26.17) на $\partial D \cap U$.

Обозначим $\eta_{kl} = f_l e_k - f_k e_l$, где e_k и e_l — векторы, у которых координаты с номером k и l соответственно равны 1, а остальные — 0. Положим

$$w = u^{(0)} + \sum_{k<l} a_{kl} \eta_{kl}.$$

Имеем $\langle w, f\rangle = \langle u^{(0)}, f\rangle + \sum\limits_{k<l} a_{kl} \langle \eta_{kl}, f\rangle = 1$ и

$$\Omega(u^{(0)}, w, \underbrace{u^{(0)}, \ldots, u^{(0)}}_{n-2}, f) - \Omega(\underbrace{u^{(0)}, \ldots, u^{(0)}}_{n}, f) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \langle u^{(0)}, df\rangle \wedge d\langle w - u^{(0)}, df\rangle \wedge (d\langle u^{(0)}, df\rangle)^{n-2} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \sum_{k<l} \langle u^{(0)}, df\rangle \wedge \bar{\partial} a_{hl} \langle \eta_{kl}, df\rangle \wedge (\langle \bar{\partial} u^{(0)}, df\rangle)^{n-2}. \tag{26.18}$$

Рассмотрим выражение

$$\langle \theta^1, df\rangle \wedge \langle \theta^2, df\rangle \wedge \ldots \wedge \langle \theta^n, df\rangle, \tag{26.19}$$

где θ^1 — вектор-функция, для которой $\langle \theta^1, \varphi\rangle = 1$, а $\theta^2, \ldots, \theta^n$ — вектор-функции или вектор-формы, для которых $\langle \theta^2, f\rangle = \ldots = \langle \theta^n, f\rangle = 0$. Точно так же, как в лемме 3.3, можно убедиться в том, что (26.19) не изменится, если θ^1 заменить на любую вектор-функцию θ, $\langle \theta, f\rangle = 1$. Ясно, что $\langle \eta_{kl}, f\rangle = 0$ и $\langle \bar{\partial} u^{(0)}, f\rangle = \bar{\partial}\langle u^{(0)}, f\rangle = \bar{\partial} 1 = 0$. Поэтому в (26.18) в каждом слагаемом можно заменить $\langle u^{(0)}, df\rangle$ на $\langle f_k^{-1} e_k, df\rangle = f_k^{-1} df_k$. При $f_1 \ldots f_n \neq 0$ получим

$$\Omega\Big(u^{(0)}, w, \underbrace{u^{(0)}, \ldots, u^{(0)}}_{n-2}, f\Big) - \Omega\Big(\underbrace{u^{(0)}, \ldots, u^{(0)}}_{n}, f\Big) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \sum_{k<l} \frac{1}{f_k} df_k \wedge \bar{\partial} a_{kl} \wedge (f_l df_k - f_k df_l) \wedge (\langle du^{(0)}, df\rangle)^{n-2} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \sum_{k<l} \bar{\partial} a_{kl} \wedge df_k \wedge df_l \wedge (n-2)! \bigwedge_{\substack{m=1\\ m\neq k,l}}^{n} du_m^{(0)} \wedge df_m =$$

$$= \frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k<l} \bar{\partial} a_{kl} \wedge du_{[k,l]}^{(0)} \wedge df = \bar{\partial}\gamma \big|_{\partial D} = \alpha.$$

Следовательно, при $f_1 \ldots f_n \neq 0$

$$\varkappa = \alpha + \Omega\Big(\underbrace{u^{(0)}, \ldots, u^{(0)}}_{n}, f\Big) = \Omega\Big(u^{(0)}, w, \underbrace{u^{(0)}, \ldots, u^{(0)}}_{n-2}, f\Big). \tag{26.20}$$

Множество $\partial D \cap \{f_1 \cdot \ldots \cdot f_n \neq 0\}$ всюду плотно на ∂D, поэтому равенство (26.20) верно на всей границе. □

Следствие 26.13. *Пусть D — строго псевдовыпуклая область в $\mathbf{C}^2$ либо строго псевдовыпуклая и линейно-выпуклая*[4] *область*

[4] Определение линейно-выпуклой области см. в § 24.

в C^n, $n \geqslant 3$, *и* $\varkappa_a(z)$ — *орма по* $z \in \partial D$ *степени* $2n-1$, *удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем* $\tau > 1/2$ *и такая, что для всех* $a \in D$ *и для всех* $\varphi \in A_C(D)$

$$\varphi(a) = \int_{\partial D} \varphi(z)\, \varkappa_a(z).$$

Тогда существует гладкая по $z \in \partial D$ *вектор-функция* $w_a(z)$, *для которой* $\langle w_a(z), z-a\rangle \neq 0$ *на* ∂D *и*

$$\varkappa_a(z) = \Omega(\bar z - \bar a,\, w_a(z),\, \bar z - \bar a, \ldots, \bar z - \bar a,\, z - a).$$

Следствие утверждает, что для указанного класса областей при $n > 1$ любое интегральное представление для голоморфных функций с ядром, удовлетворяющим условию Гёльдера с показателем $\tau > 1/2$, есть обобщенная формула Коши — Фантаппье (формула (3.12)).

7°. Для того, чтобы дать локальный вариант теоремы 26.7, нам потребуются некоторые обозначения. Пусть D — ограниченная область в C^n с гладкой границей и $\alpha \in C^{(1)}_{n,q}(\partial D)$, $0 \leqslant q \leqslant n-1$, тогда α можно продолжить до формы $\tilde\alpha \in C^{(1)}_{n,q}(\bar D)$. Формой $\bar\partial_b \alpha$ называется форма из $C_{n,\,q+1}(\partial D)$, полученная сужением формы $\bar\partial\alpha$ на ∂D. Нетрудно доказать, что $\bar\partial_b\alpha$ не зависит от продолжения $\tilde\alpha$ формы α.

Теорема 26.7 при $p = n$ утверждает, что если α — форма типа $(n, n-1)$ на ∂D, удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем $\tau > 1/2$ и условию (26.1), то для нее найдется форма $\gamma \in C^{(1)}_{n,n-2}(\partial D)$, являющаяся решением уравнения

$$\bar\partial_b \gamma = \alpha. \tag{26.21}$$

При $n = 2$ уравнение (26.21) эквивалентно уравнению

$$Lg = \left(\frac{\partial\rho}{\partial\bar z_1}\frac{\partial}{\partial\bar z_2} - \frac{\partial\rho}{\partial\bar z_2}\frac{\partial}{\partial\bar z_1}\right) g = f, \quad z \in \partial D, \tag{26.22}$$

где g — коэффициент формы γ, а f строится по форме α и ρ — функция, задающая область D. Оператор [5] L введен

[5] Отметим, что условие $Lg = 0$ в точности означает, что g удовлетворяет касательным условиям Коши — Римана (см. § 24).

Г. Леви. Он выяснил, что если D — строго выпуклая область в C^2, то уравнение $Lg = f$, вообще говоря, не разрешимо даже локально. Точнее, множество функций, для которых разрешимо уравнение $Lg = f$, не является замкнутым подпространством ни в каком естественном функциональном пространстве.

Приведем необходимое и достаточное условие на форму α (а следовательно, и на f) для того, чтобы уравнение (26.21) (соответственно (26.22)) имело локальные решения. Пусть D — ограниченная строго выпуклая область в C^n и $0 \in D$; $\tilde{\tilde{D}} = \{w : \langle w, z\rangle \neq 1, z \in D\}$ — область, сопряженная к компакту $\overline{D}$ (см. § 24, п. 3°). Из того, что D — область с гладкой границей, следует, что каждой точке $z \in \partial D$ соответствует единственная точка $w(z) \in \partial\tilde{\tilde{D}}$, для которой $\langle w(z), z\rangle = 1$. Из строгой выпуклости области D вытекает, что отображение $z \to w(z)$ взаимно-однозначно на ∂D. Точка $w(z)$ определяется равенством

$$w(z) = \frac{P(z)}{\langle P(z), z\rangle},$$

где $P(z) = (P_1(z), \ldots, P_n(z)) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial z_1}(z), \ldots, \frac{\partial\rho}{\partial z_n}(z)\right)$ (см. § 25).

Пусть $\alpha \in C_{n,\ n-1}(\partial D)$, тогда форме α, как функционалу на пространстве $A(\overline{D})$, соответствует голоморфная в $\tilde{\tilde{D}}$ функция

$$\alpha^*(w) = \int_{\partial D_\zeta} \frac{\alpha(\zeta)}{(1 - \langle \zeta, w\rangle)^n},$$

называемая *индикатриссой Фантаппье* формы α (сравни с § 24, п. 4°).

Теорема 26.14 (Хенкин). *Пусть D — строго выпуклая область в C^n и $\alpha \in C_{n,\ n-1}(D)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\tau > 1/2$. Тогда для того чтобы уравнение (26.21) имело в некоторой окрестности точки $z^0 \in \partial D$ решение $\gamma \in C^{(1)}_{n,n-2}(\partial D)$, необходимо и достаточно, чтобы индикатрисса Фантаппье α^* формы α продолжалась голоморфно в окрестность точки $w(z^0) \in \partial\tilde{\tilde{D}}$.*

Для доказательства нам потребуется одно утверждение, которое имеет и самостоятельное значение.

Предложение 26.15. *Пусть D — ограниченная область в C^n с гладкой границей и $\alpha \in C_{n,n-1}(\partial D)$. Если существует такая форма $\widetilde{\alpha} \in C_{n,n-1}(\overline{D})$, что $\widetilde{\alpha}|_{\partial D} = \alpha$ и $\overline{\partial}\widetilde{\alpha} \in L^1_{n,n}(D)$, то формы α^+ и α^-, заданные соответственно в D и $C^n \setminus \overline{D}$ равенством*

$$\alpha^{\pm}(z) = \int\limits_{\partial D_\zeta} \alpha(\zeta) \wedge U_{n,n-1}(\zeta, z) - \overline{\partial} \int\limits_{D_\zeta} \widetilde{\alpha}(\zeta) \wedge U_{n,n-2}(\zeta, z), \tag{26.23}$$

$\overline{\partial}$-замкнуты, продолжаются как непрерывные на $\overline{D}$, и выполняется равенство

$$\alpha = \alpha^+|_{\partial D} - \alpha^-|_{\partial D}.$$

Доказательство. По формуле Мартинелли—Бохнера — Коппельмана (7.1)

$$\alpha^+(z) = \widetilde{\alpha}(z) + \int\limits_{D_\zeta} \overline{\partial}\widetilde{\alpha}(\zeta) \wedge U_{n,n-1}(\zeta, z), \quad z \in D,$$

и

$$\alpha^-(z) = \int\limits_{D_\zeta} \overline{\partial}\widetilde{\alpha}(\zeta) \wedge U_{n,n-1}(\zeta, z), \quad z \in C^n \setminus D. \tag{26.24}$$

Нетрудно выяснить, что интеграл

$$\int\limits_{D_\zeta} \overline{\partial}\widetilde{\alpha}(\zeta) \wedge U_{n,n-1}(\zeta, z)$$

равномерно сходится при $z \in C^n$, поэтому определяет форму, непрерывную на C^n. Следовательно, α^+ и α^- непрерывно продолжаются на ∂D и справедливо равенство

$$\alpha^+|_{\partial D} - \alpha^-|_{\partial D} = \widetilde{\alpha}|_{\partial D} = \alpha.$$

Доказательство теоремы 26.14. Необходимость. Пусть в некоторой окрестности U_{z^0}

точки z^0 разрешимо уравнение (26.21). По формуле Стокса

$$\alpha^*(w) = \int\limits_{(\partial D\setminus U_{z^0})_\zeta} \frac{\alpha(\zeta)}{(1-\langle w,\zeta\rangle)^n} + \int\limits_{(w_{z^0}\cap \partial D)_\zeta} \frac{\bar\partial_b \gamma(\zeta)}{(1-\langle w,\zeta\rangle)^n} =$$

$$= \int\limits_{(\partial D\setminus U_{z^0})_\zeta} \frac{\alpha(\zeta)}{(1-\langle w,\zeta\rangle)^n} + \int\limits_{\partial(U_{z^0}\cap \partial D)_\zeta} \frac{\gamma(\zeta)}{(1-\langle w,\zeta\rangle)^n}.$$

В силу строгой выпуклости D интегралы в правой части определены не только в $\tilde{\tilde{D}}$, но и в некоторой окрестности точки $w(z^0)$, поэтому α^* голоморфно продолжается через точку $w(z^0)$.

Достаточность. По лемме 26.3 найдем форму $\tilde\alpha \in \tilde C^{(0)}_{n,n-1}(D)$, для которой $\tilde\alpha|_{\partial D} = \alpha$, $\bar\partial\tilde\alpha(\zeta) = \rho^{-1}(\zeta)\varkappa(\zeta)$, где $\varkappa \in \tilde C^{(0)}_{n,n}(D)$, $\varkappa(\zeta) = 0$ при $\zeta \in \partial D$ и модуль непрерывности форм α и $\varkappa$ имеет вид $\theta(t) = t^\lambda$. Так же как в доказательстве леммы 26.6, получаем, что $|\bar\partial\tilde\alpha(z)| = O(1)\times$ $\times[\rho(\zeta)]^{\tau-1}$, поэтому $\bar\partial\tilde\alpha \in L^1_{n,n}(D)$. По предложению 26.15 $\alpha = \alpha^+|_{\partial D} - \alpha^-|_{\partial D}$, где α^+ и α^- задаются формулой (26.23).

Из предложения 0.10 имеем, что первый интеграл в (26.23) удовлетворяет в D условию Гёльдера с показателем τ', $1/2 < \tau' < \tau$. Кроме того, $U_{n,\ n-1}(\zeta, z)$ — $\bar\partial$-замкнутая форма по z, следовательно, первый интеграл в (26.23) — $\bar\partial$-замкнутая форма в D. Так же как в теореме 26.7, можно убедиться, что этот интеграл можно представить в виде $\bar\partial\gamma_1$, где $\gamma_1 \in C^{(1)}_{n,n-1}(\bar D)$. Второе слагаемое (26.23) имеет вид $\bar\partial\gamma_2$, где

$$\gamma_2 = \int\limits_{D_\zeta} \tilde\alpha(\zeta) \wedge U_{n,n-2}(\zeta, z).$$

Из предложения 0.10 следует, что $\gamma_2 \in C^{(1)}_{n,n-2}(\bar D)$. Таким образом, $\alpha^+ = \bar\partial\gamma^+$ в D. Здесь $\gamma^+ = \gamma_1 + \gamma_2 \in C^{(1)}_{(n,n-2)}(\bar D)$.

Осталось убедиться в том, что уравнение $\bar\partial_b\gamma^- = \alpha^-|_{\partial D}$ разрешимо. Пусть Ω — область, содержащая $\bar D$, для которой справедливы оценки (25.2), Тогда

$$u^*(\zeta, z) = \frac{P(z)}{\Phi^*(\zeta, z)} = \frac{P(z)}{\langle P(z), \zeta - z\rangle}$$

голоморфна по $\zeta \in \overline{D}$ при $z \in \Omega \setminus \overline{D}$, поэтому из (26.24) и формулы Стокса получим (сравните с доказательством леммы 26.5) при $z \in \Omega \setminus \overline{D}$

$$\alpha^{-}(z) = \int\limits_{D_\zeta} \overline{\partial}\widetilde{\alpha}(\zeta) \wedge W_{n,n-1}(u^*, \zeta, z) - \overline{\partial}_z \int\limits_{D_\zeta \times [0,1]_\lambda} \overline{\partial}\widetilde{\alpha}(\zeta) \wedge$$

$$\wedge \widetilde{W}_{n,n-2}(u^*, \zeta, z, \lambda) = \int\limits_{\partial D_\zeta} \alpha(\zeta) \wedge W_{n,n-1}(u^*, \zeta, z) -$$

$$- \overline{\partial}_z \int\limits_{D_\zeta \times [0,1]_\lambda} \overline{\partial}\widetilde{\alpha}(\zeta) \wedge \widetilde{W}_{n,n-2}(u^*, \zeta, z, \lambda). \qquad (26.25)$$

Имеем

$$W_{n,n-1}(u^*, \zeta, z) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^j P_j(z)\, dP(z)_{[j]} \wedge dz}{\langle P(z), \zeta - z\rangle^n} =$$

$$= \frac{\langle P(z), z\rangle^n}{(\langle P(z), \zeta\rangle - \langle P(z), z\rangle)^n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} P_j(z)\, dP(z)_{[j]} \wedge dz}{\langle P(z), \zeta - z\rangle^n} =$$

$$= \frac{1}{(\langle w(z), \zeta\rangle - 1)^n}\, \omega(z, w(z)).$$

Отсюда и из (26.25) следует, что при $z \in \Omega \setminus \overline{D}$

$$\alpha^{-}(z) = (-1)^n \alpha^*(w(z))\, \omega(z, w(z)) -$$

$$\overline{\partial}_z \int\limits_{D_\zeta \times [0,1]_\lambda} \overline{\partial}\widetilde{\alpha}(\zeta) \wedge \widetilde{W}_{n,n-2}(u^*, \zeta, z, \lambda). \qquad (26.26)$$

По условию α^* голоморфно продолжается в некоторую окрестность точки $w(z^0)$, следовательно, форма $\alpha^*(w(z)) \times \times \omega(z, w(z))$ определена в (выпуклой) окрестности точки z^0. Далее,

$$\alpha^*(w) \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} w_j dw_{[j]} \wedge dz$$

— голоморфная форма максимальной размерности на многообразии $\{\langle w, z\rangle = 1\} \subset C^{2n}$, поэтому она замкнута, значит, $\bar{\partial}$-замкнута форма $\alpha^*(w(z))\omega(z, w(z))$. Кроме того, она гладкая в окрестности z^0; также как в теореме 26.7, можно доказать что $\alpha^*(w(z))\omega(z, w(z)) = \bar{\partial}\gamma_3$ в окрестности точки z^0 и $\gamma_3 \in C^{(1)}_{(n,n-2)}(\bar{D})$.

Обозначим через γ_4 интеграл во втором слагаемом из (26.26). Так же как в доказательстве теоремы 26.7, получим, что γ_3 — линейная комбинация форм с коэффициентами вида

$$F_1(z) = \int_{D_\zeta} \frac{(\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j)\,\varphi(z)}{|\zeta - z|^{2(n-1)}\Phi^*(\zeta, z)} \frac{\varkappa(\zeta)}{\rho(\zeta)}; \quad z \in \Omega \setminus \bar{D}.$$

Далее, дифференцируя под знаком интеграла, с помощью неравенства (25.2), замены переменных из лемм 10.6 и 25.7 докажем, что вторые производные от F_1 растут не быстрее, чем $|\rho(z)|^{-1+\tau-1/2}$. Из леммы 25.8 следует, что первые производные от F_1 непрерывны в $\Omega \setminus D$, т. е. форма γ_4 продолжается на ∂D как гладкая. Из (26.26) получаем, что $\alpha^-|_{\partial D} = \bar{\partial}\gamma^-$ в некоторой окрестности точки z^0. Здесь $\gamma^- = (\gamma_3 - \gamma_4)|_{\partial D}$. □

Теорема 26.16 (Хенкин). *Пусть D — строго выпуклая область и $f \in A_C(\tilde{\tilde{D}})$, причем f не продолжается голоморфно через точку $w^0 \in \partial\tilde{\tilde{D}}$. Тогда уравнение $\bar{\partial}_b\gamma = \alpha$, где*

$$\alpha = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} f(w(z)) \wedge \omega(z, w(z)),$$

не имеет решений ни в какой окрестности точки $z^0 \in \partial D$, для которой $w^0 = w(z^0)$.

Доказательство. Теорема 26.14 показывает, что достаточно доказать, что f — индикатрисса Фантаппье формы α, т. е.

$$f(w) = \int_{\partial D_\zeta} \frac{\alpha(\zeta)}{(1 - \langle w, \zeta\rangle)^n} = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D_\zeta} \frac{f(w(\zeta))\,\omega(\zeta, w(\zeta))}{(1 - \langle w, \zeta\rangle)^n}.$$

Эта формула — в точности формула (8.5) для линейно-выпуклой области $\tilde{\tilde{D}}$. □

§ 27. БАЗИС ПРОСТРАНСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ФИКСИРОВАННЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

1° Множество $A(D)$ функций, голоморфных в области $D \subset C^n$, образует линейное векторное пространство. Это пространство с топологией равномерной сходимости внутри D также будем обозначать $A(D)$. Последовательность функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A(D)$ сходится в этой топологии к функции $f \in A(D)$, если для любого компакта $K \subset D$ последовательность $f_n(z) \to f(z)$ равномерна относительно $z \in K$. Последовательность функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A(D)$ образует базис пространства $A(D)$, если любую функцию $f \in A(D)$ можно единственным образом представить в виде $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$, где $\{c_k\}$ — последовательность комплексных чисел, а ряд сходится в топологии пространства $A(D)$.

Пример 1. Базис пространства $A(C^1 \setminus \{a_1, \ldots, a_m\})$ образуют мономы $(z - a_j)^k$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots$; z^n, $n = 0, 1, \ldots$ Коэффициенты разложения произвольной функции $f \in A(C^1 \setminus \{a_1, \ldots, a_m\})$ по базису

$$f(z) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{jk}}{(z - a_j)^k} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{27.1}$$

однозначно определяются формулами

$$c_{jk} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a_j| = \varepsilon} f(\zeta)\, \zeta^{k-1} d\zeta; \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = R} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}},$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно мало; $R > \max\{|a_1|, \ldots, |a_m|\}$.

Для голоморфных функций многих комплексных переменных роль изолированных особых точек играют нулевые множества голоморфных функций. Мы рассмотрим пространство голоморфных функций с алгебраическими особенностями; $A(C^n \setminus T)$, где $T = \{z : \mathcal{P}(z) = 0\}$, $\mathcal{P}$ — полином.

2°. Предварительно вернемся к разложению Вейля (24.5). Если $\chi_j(z)$, $j = 1, \ldots, N$, — полиномы, либо рациональные функции, то в (24.5) функцию $\Omega_J(z)$, $J=(j_1,\ldots$ $\ldots, j_n)$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_n \leqslant N$, можно представить в виде

$$\Omega_J(\zeta, z) = \sum_{k=1}^{m(J)} g_{Jk}(\zeta)\, h_{Jk}(z),$$

где g_{Jk}, h_{Jk} — полиномы либо рациональные функции соответственно. В этом случае разложение Вейля (24.5) можно представить в виде

$$f(z) = \sum_J \sum_{k=1}^{m(J)} \sum_{\alpha \geqslant 0} a_{Jk\alpha} h_{Jk}(z)\, \chi_J^{\alpha}(z), \tag{27.2}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $\chi_J^{\alpha} = \chi_{j_1}^{\alpha_1} \ldots \chi_{j_n}^{\alpha_n}$;

$$a_{Jk\alpha} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma_J} \frac{f(\zeta)\, g_{Jk}(\zeta)\, d\zeta}{\chi_J^{\alpha+I}(\zeta)}. \tag{27.3}$$

Ряд (27.2), как и ряд Вейля (24.5), равномерно сходится внутри Δ. В общем случае функции $h_{Jk}(z)\,\chi_J^{\alpha}(z)$ не образуют базис пространства $A(D)$, так как функции $f \in A(\Delta)$ не всегда однозначно представляются в виде ряда (27.2).

Пример 2. Для полиэдра Вейля $\Delta = \{z \in C^2 : :|z_1| < 1,\ |z_2| < 1,\ |z_1 + z_2| < 1\}$ всякую функцию $f \in A(\Delta)$ по формулам (27.2), (27.3) можно разложить в ряд

$$f(z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} z_1^m z_2^n + \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn} z_1^m (z_1 + z_2)^n + \\ + \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} z_2^m (z_1 + z_2)^n.$$

Однако это разложение не однозначно, так как мономы $z_1^m z_2^n$, $z_1^m (z_1 + z_2)^n$, $z_2^m (z_1 + z_2)^n$, $m + n = \mathrm{const}$, зависимы.

Укажем на один важный частный случай, когда разложение (27.2) может быть однозначным. Рассмотрим специальный полиэдр Вейля $\Delta = \{z \in D : |\chi_j(z)| < R_j,\ j = 1, \ldots, n\}$, $\chi_j \in A(D)$, $\Delta \Subset D \subset C^n$. В этом случае остов полиэдра $\Delta_\varepsilon = \{z \in D : |\chi_j(z)| < R_j - \varepsilon_j,\ j = 1, \ldots$ $\ldots, n\}$ состоит из одной компоненты $\gamma = \{z \in D : |\chi_j(z)| =$

$= R_j - \varepsilon_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ и разложение (27.2) для рациональных функций χ_j принимает вид

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{k\alpha} h_k(z) \chi^{\alpha}(z), \tag{27.4}$$

где

$$a_{k\alpha} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) g_k(\zeta)\, d\zeta}{\chi^{\alpha+I}(\zeta)}. \tag{27.5}$$

Напомним, что здесь

$$\chi_j(\zeta) - \chi_j(z) = \sum_{k=1}^{n} (\zeta_k - z_k) \mathcal{P}_{jk}(\zeta, z),\ j = 1, \ldots, n, \tag{27.6}$$

— разложение Гефера, в котором $\mathcal{P}_{jk}$ — полиномы, либо рациональные функции, а

$$\Omega(\zeta, z) = \begin{vmatrix} \mathcal{P}_{11}(\zeta, z) & \ldots & \mathcal{P}_{1n}(\zeta, z) \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \mathcal{P}_{n1}(\zeta, z) & \ldots & \mathcal{P}_{nn}(\zeta, z) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{m} g_k(\zeta) h_k(z). \tag{27.7}$$

Предложение 27.1 (Михайлова). *Для того чтобы любая функция f, голоморфная в специальном полиэдре Вейля Δ, единственным образом разлагалась в ряд* (27.4), *необходимо и достаточно, чтобы* $\det \|\lambda_{kj}\| \neq 0$, *где*

$$\lambda_{kj} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma} \frac{g_k(\zeta) h_j(\zeta)\, d\zeta}{\chi^{I}(\zeta)},\quad k, j = 1, \ldots, m. \tag{27.8}$$

Доказательство. Необходимость. Возьмем $f = h_j$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда в силу единственности разложения (27.4) из формул (27.5) для $\alpha = 0 = (0, \ldots, 0)$ имеем $\lambda_{kj} = a_{k0} = \delta_{kj}$, $k = 1, \ldots, m$. Следовательно, $\det \|\lambda_{kj}\| \neq 0$.

Достаточность. Пусть $\det\|\lambda_{kj}\| \neq 0$. Покажем что если

$$0 \equiv \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha \geqslant 0} a_{k\alpha} h_k(z) \chi^{\alpha}(z) \tag{27.9}$$

и ряд равномерно сходится внутри Δ, то $a_{k\alpha}=0$ для всех $k=1, \ldots, m$, $\alpha \geqslant 0$. Проведем индукцию по $p=|\alpha|$. Умножим равенство (27.9) на форму $g_j(z)dz/(2\pi i)^n\chi^I(z)$, $j=1, \ldots, m$, и проинтегрируем по циклу γ. Получим

$$0=\sum_{K=1}^{m} a_{k\alpha}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\gamma h_k(z)\,g_j(z)\,\chi^{\alpha-I}(z)\,dz.$$

По теореме Коши — Пуанкаре 0.6 $\int_\gamma h_k g_j \chi^{\alpha-I}dz=0$ при $|\alpha|>0$, так как в этом случае $\gamma\sim 0$ в области регулярности подынтегральной формы. Действительно, при $\alpha_q>1$ цикл $\gamma=\pm\,\partial B$, где

$$B=\{z\in D: |\chi_j(z)|=R_j-\varepsilon,\\ j=1, \ldots [q] \ldots, n, \ |\chi_q(z)|\leqslant R_q-\varepsilon\},$$

и форма $h_k q_j \chi^{\alpha-I}dz$ голоморфна на $|B|$. Таким образом, с учетом обозначений (27.8) имеем

$$\sum_{h=1}^{m} a_{h0}\lambda_{jh}=0, \quad j=1, \ldots, m.$$

Из условия $\det\|\lambda_{jk}\|\neq 0$ следует, что $a_{h0}=0$, $k=1, \ldots, m$. Предположим, что в разложении (27.9) $a_{k\alpha}=0$, если $|\alpha|\leqslant p-1$. Покажем, что тогда $a_{k\beta}=0$, $k=1, \ldots, m$, при $|\beta|=p$. Умножив равенство (27.9) на форму $g_j(z)\times \times dz/(2\pi i)^n\chi^{\beta+I}(z)$, $j=1, \ldots, m$, будем иметь

$$0=\sum_{h=1}^{m}\sum_{|\alpha|\geqslant p} a_{h\alpha}\int_\gamma h_h(z)\,g_j(z)\,\chi^{\alpha-\beta-I}(z)\,dz.$$

Для $\alpha\neq\beta$, $|\alpha|\geqslant p$, интеграл $\int_\gamma h_k g_j \chi^{\alpha-\beta-I}dz=0$, так как хотя бы для одного индекса $q\in\{1, \ldots, n\}$ показатель $\alpha_q-\beta_q-1\geqslant 0$. Таким образом,

$$\sum_{h=1}^{m} a_{h\beta}\lambda_{jh}=0, \quad j=1, \ldots, n,$$

следовательно, $a_{h\beta}=0$, $k=1, \ldots, m$. □

Замечание. Так как разложение Гефера (27.6) и представление (27.7) находятся не однозначно, то для данного специального полиэдра Вейля, определяемого рациональными функциями χ_j, $j = 1, \ldots, n$, система функций $\{h_k(z)\chi^\alpha(z),\ k = 1, \ldots, m,\ \alpha \geqslant 0\}$, по которым раскладываются функции $f \in A(\Delta)$, может быть выбрана не единственным способом. При одном выборе функций $h_k(z)$, $g_k(z)$ она может образовать базис пространства $A(\Delta)$, а при другом — нет.

Пример 3. Нетрудно показать, что специальный аналитический полиэдр $\Delta = \{z \in C^2 : |\chi_j(z)| < 1,\ j = 1, 2\}$, где $\chi_1(z) = z_1^3 + z_2^3$, $\chi_2(z) = z_1^2 + z_2^2$, является полиэдром Вейля. Для разложений Гефера

$$\chi_1(\zeta) - \chi_1(z) = \sum_{j=1}^{2} (\zeta_j - z_j)\left(z_j^2 + z_j\zeta_j + \zeta_j^2\right),$$

$$\chi_2(\zeta) - \chi_1(z) = \sum_{j=1}^{2} (\zeta_j - z_j)(\zeta_j + z_j)$$

определитель

$$\Omega(\zeta, z) = \begin{vmatrix} z_1^2 + z_1\zeta_1 + \zeta_1^2 & z_2^2 + z_2\zeta_2 + \zeta_2^2 \\ z_1 + \zeta_1 & z_2 + \zeta_2 \end{vmatrix}$$

можно представить в виде

$$\Omega = \left(z_1^2 z_2 - z_2^2 z_1\right) + \left(z_1 z_2 - z_2^2\right)\zeta_1 + z_2\left(\zeta_1^2 - \zeta_1\zeta_2\right) + \\ + z_1\left(\zeta_1\zeta_2 - \zeta_2^2\right) + \left(z_1^2 - z_1 z_2\right)\zeta_2 + \left(\zeta_1^2\zeta_2 - \zeta_2^2\zeta_1\right)$$

и в виде

$$\Omega = \left(z_1^2 z_2 - z_2^2 z_1\right) + \left(z_1 z_2 - z_2^2\right)\zeta_1 + z_2\zeta_1^2 + \left(z_1^2 - z_1 z_2\right)\zeta_2 + \\ + (z_1 - z_2)\zeta_1\zeta_2 + z_1\zeta_2^2 + \left(\zeta_1^2\zeta_2 - \zeta_1\zeta_2^2\right).$$

В первом случае разложение удовлетворяет условиям предположения 27.1, а во втором — нет. Таким образом, система функций $\{h_k(z)\,\chi_1^{\alpha_1}(z)\,\chi_2^{\alpha_2}(z),\ k = 1, \ldots, 6,\ \alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0\}$, где $h_1 = z_1^2 z_2 - z_1 z_2^2$, $h_2 = z_1 z_2 - z_2^2$, $h_3 = z_2$, $h_4 = z_1$, $h_5 = z_1^2 - z_1 z_2$, $h_6 = 1$, образует базис пространства $A(\Delta)$.

3°. Построим базис пространства $A(C^n \setminus T)$, где $T = \{z \in C^n, \mathscr{P}(z) = 0\}$, $\mathscr{P}$ — полином. Не теряя общности, можно предполагать, что полином $\mathscr{P}$ имеет вид

$$\mathscr{P}(z) = z_n^m + A_1('z)\, z_n^{m-1} + \ldots + A_m('z), \qquad (27.8)$$

где $'z = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. В противном случае сделаем линейную замену переменных.

Для любой точки $z \in C^n \setminus T$ найдется число $R > 0$ такое, что $z \in \Delta_R \subset C^n \setminus T$, где

$$\begin{aligned} \Delta_R = \{z \in C^n : |z_j| < R,\ j = 1, \ldots, n-1,\\ 1/R < |\mathscr{P}(z)| < R\} = \{z : |z_j| < R,\\ j = 1, \ldots, n-1,\ |\mathscr{P}(z)| < R,\\ |1/\mathscr{P}(z)| < R\} \end{aligned} \qquad (27.9)$$

Нетрудно показать, что Δ_R — полиэдр Вейля. Остов полиэдра Δ_R состоит из двух компонент: $\gamma_R = \{z : |z_1| = \ldots = |z_{n-1}| = |\mathscr{P}(z)| = R\}$ и $\gamma_{\bar{R}} = \{z : |z_1| = \ldots = |z_{n-1}| = |1/\mathscr{P}(z)| = R\}$. Заметим, что $\gamma_{\bar{R}} \sim -\gamma_R$ в области $C^n \setminus T$. Пусть

$$\mathscr{P}(\zeta) - \mathscr{P}(z) = \sum_{j=1}^{n} (\zeta_j - z_j)\, Q_j(\zeta, z), \qquad (27.10)$$

где Q_j, $j = 1, \ldots, n$, — полиномы. Тогда

$$\mathscr{P}^{-1}(\zeta) - \mathscr{P}^{-1}(z) = \sum_{j=1}^{n} (\zeta_j - z_j)\left[-Q_j(\zeta, z)\, \mathscr{P}^{-1}(\zeta)\, \mathscr{P}^{-1}(z)\right];$$

$$\Omega_1(\zeta, z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 \\ Q_1 & Q_2 & . & . & . & Q_n \end{vmatrix} = Q_n(\zeta, z),$$

$$\Omega_2(\zeta, z) = -Q_n(\zeta, z)\, \mathscr{P}^{-1}(\zeta)\, \mathscr{P}^{-1}(z);$$

Пусть

$$Q_n(\zeta, z) = \sum_{h=1}^{N} g_k(\zeta)\, h_k(z), \tag{27.11}$$

где g_k, h_k — полиномы. Согласно формулам (27.2), (27.3), любая функция $f \in A(C^n \setminus T)$ разлагается в полиэдре Вейля Δ_R в ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\alpha \geqslant 0} a_{k\alpha} h_k(z)\, {}'z^{'\alpha} \mathscr{P}^{\alpha_n}(z) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{\alpha \geqslant 0} b_{k\alpha} h_k(z)\, {}'z^{'\alpha} \mathscr{P}^{-\alpha_n - 1}(z),$$

где

$$a_{k\alpha} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)\, g_k(\zeta)\, d\zeta}{{}'\zeta^{'\alpha + 'I} \mathscr{P}^{\alpha_n + 1}(\zeta)};$$

$$b_{k\alpha} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_{\bar R}} \frac{f(\zeta)\, g_k(\zeta)\, \mathscr{P}^{\alpha_n} d\zeta}{{}'\zeta^{'\alpha + 'I}}.$$

Переходя к единообразным обозначениям $a_{k\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} - \alpha_n} = b_{k\alpha}$ и учитывая, что $\gamma_{\bar R} \sim -\gamma_R$, запишем это разложение в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{'\alpha \geqslant '0} \sum_{\alpha_n = -\infty}^{\infty} a_{k\alpha} h_k(z)\, z_1^{\alpha_1} \ldots z_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \mathscr{P}^{\alpha_n}(z), \tag{27.12}$$

где

$$a_{k\alpha} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)\, g_k(\zeta)\, d\zeta}{\zeta_1^{\alpha_1 + 1} \ldots \zeta_{n-1}^{\alpha_{n-1}+1} \mathscr{P}^{\alpha_n + 1}}. \tag{27.13}$$

Так как при изменении R, $R \to \infty$, цикл γ_R гомотопно меняется в $C^n \setminus T$, то разложение (27.12) с коэффициентами (27.13) для функцийf $f \in A(C^n \setminus T)$ справедливо во всей области $C^n \setminus T$. При этом ряд (27.12) равномерно сходится на любом компакте $K \subset C^n \setminus T$.

Предложение 27.2. *Для того, чтобы всякая функция $f \in A(C^n \setminus T)$ разлагалась в ряд вида (27.12) единственным образом, необходимо и достаточно, чтобы* $\det\|\lambda_{kj}\| \neq 0$, *где*

$$\lambda_{kj} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma_R} \frac{g_k(\zeta)\, h_j(\zeta)\, d\zeta}{\zeta_1 \ldots \zeta_{n-1} \mathscr{P}(\zeta)}. \tag{27.14}$$

Доказательство. Необходимость доказывается точно так же, как в предложении 27.1.

Заметим, что согласно предложению 27.1 условие $\det\|\lambda_{kj}\| \neq 0$ для λ_{kj}, определяемых равенством (27.14), является необходимым и достаточным для единственности разложения произвольной функции $f \in A(\Delta_R^*)$, где $\Delta_R^* = \{z : |z_j| < R,\ j = 1, \ldots, n-1, |\mathscr{P}(z)| < R\}$ в ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\alpha \geqslant 0} a_{k\alpha} h_k(z)\, 'z'^{\alpha} \mathscr{P}^{\alpha_n}(z). \tag{27.15}$$

Из этого замечания снова вытекает необходимость в предложении 27.2.

Докажем достаточность. Пусть $\det\|\lambda_{kj}\| \neq 0$ и

$$0 = \sum_{k=1}^{N} \sum_{'\alpha \geqslant' 0} \sum_{\alpha_n = -\infty}^{\infty} a_{k\alpha} h_k(z)\, 'z'^{\alpha} \mathscr{P}^{\alpha_n}(z),$$

где ряд равномерно сходится внутри $C^n \setminus T$. Покажем, что все коэффициенты $a_{k\alpha}$ равны нулю. Умножим последнее равенство на форму $g_j(z)\, dz/(2\pi i)^n\, 'z'^{\beta + '1} \mathscr{P}^{\beta_n + 1}$, $j = 1, \ldots, n$, и проинтегрируем по циклу γ_R. При $\alpha \neq \beta$

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma_R} \frac{g_j(z)\, h_k(z)\, dz}{'z'^{\beta + '\alpha + '1} \mathscr{P}^{\beta_n - \alpha_n + 1}} = 0. \tag{27.16}$$

Действительно, если $\alpha_q > \beta_q$ хотя бы для одного индекса $q \in \{1, \ldots, n\}$, то равенство (27.16) вытекает из теоремы Коши — Пуанкаре. Если же $\alpha_j \leqslant \beta_j$, $j = 1, \ldots, n$, то интеграл в левой части равенства (27.16) можно рассматривать как коэффициент при $h_k\, 'z'^{\beta - '\alpha + '1} \mathscr{P}^{\beta_n - \alpha_n + 1}$ в разложении функции $h_k(z) \in A(\overline{\Delta}_R^*)$ в ряд вида (27.15). В силу единственности этого разложения указанный коэффициент равен нулю при $\beta - \alpha \neq 0$. Таким образом, учитывая (27.14), имеем

$$\sum_{k=1}^{N} a_{k\beta}\lambda_{kj} = 0, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Следовательно, $a_{k\beta} = 0$, $k = 1, \ldots, N$, поскольку $\det\|\lambda_{kj}\| \neq 0$. □

Теорема 27.3 *Функции*

$$z_n^{k-1} z_1^{\alpha_1} \ldots z_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \mathscr{P}^{\alpha_n}(z), \tag{27.17}$$
$$k = 1, \ldots, m; \ \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} = 0, 1, \ldots;$$
$$\alpha_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

образуют базис пространства $A(C^n \setminus T)$, *где* $T = \{z : P(z) = 0\}$, $\mathscr{P}$ — *полином* (27.8). *Коэффициенты разложения произвольной функции* $f \in A(C^n \setminus T)$ *по базису* (27.17) *выражаются формулами*

$$a_{k\alpha} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)\left[\zeta_n^{m-k} + \sum\limits_{p=k}^{m-1} A_p('\zeta)\zeta_n^{p-k}\right] d\zeta}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \ldots \zeta_{n-1}^{\alpha_{n-1}+1} \mathscr{P}^{\alpha_n+1}}, \tag{27.18}$$

где $\gamma_R = \{z : |z_1| = \ldots = |z_{n-1}| = |\mathscr{P}(z)| = R\}$, $R > 0$.

Доказательство. В разложении Гефера (27.10) полином $Q_n(\zeta, z)$ можно взять равным

$$Q_n(\zeta, z) = [\mathscr{P}(\zeta) - \mathscr{P}('\zeta, z_n)]/(\zeta_n - z_n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} z_n^{k-1}\left[\zeta_n^{m-k} + \sum_{p=k}^{m-1} A_p('\zeta)\zeta_n^{p-k}\right].$$

Отсюда видно, что в разложении (27.11) можно положить

$$h_k(z) = z_n^{k-1}, \quad g_k(\zeta) = \zeta_n^{m-k} + \sum_{p=k}^{m-1} A_p('\zeta)\zeta_n^{p-k}, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{27.19}$$

Покажем, что при таком выборе функций h_k, q_k выполняются условия предложения 27.2. Действительно, при любом фиксированном $'\zeta \in C^{n-1}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mathscr{P}(\zeta)|=R} \frac{\zeta_n^k d\zeta_n}{\mathscr{P}(\zeta)} = \operatorname*{res}_{z_n=\infty}\left[\frac{z_n^k}{\mathscr{P}(\zeta)}\right] = \begin{cases}0, & k < m-1,\\ 1, & k = m-1.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\lambda_{hj} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\zeta_1|=R}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\cdots\int\limits_{|\zeta_{n-1}|=R}\frac{d\zeta_{n-1}}{\zeta_{n-1}}\int\limits_{|P(\zeta)|=R}\frac{\zeta_n^{k-1}g_j(\zeta)\,d\zeta_n}{P(\zeta)} =$$

$$= \begin{cases}0, & k < j,\\ 1, & k = j,\end{cases}$$

так как $\deg_{z_n}\left[z_n^{k-1}g_j(z)\right] = m - j + k - 1$ и $\det\|\lambda_{jk}\| = 1 \neq 0$. □

Разложение (27.12) в случае (27.19), т. е. в условиях теоремы 27.3, является обобщением разложения (27.1) для голоморфных функций n переменных с алгебраическими особенностями.

4°. В случае, когда полином $\mathscr{P}(z)$ разлагается на линейные множители, можно построить более точный аналог разложения (27.1). Пусть $\mathscr{P}(z) = \prod_{j=1}^{N} L_j(z)$, где $L_j(z) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}z_k + a_{j_0}$, $j = 1, \ldots, N$.

Тогда $T = \bigcup_{j=1}^{N} E_j$, где $E_j = \{z : L_j(z) = 0\}$. Предполагаем, что $T_j \neq T_k$ при $k \neq j$, т. е. $\mathscr{P}$ не содержит кратных множителей. Обозначим через Ω_r, $0 \leqslant r \leqslant p$, где p—ранг матрицы $\|a_{jk}\|$, $j = 1, \ldots, N$; $k = 1, \ldots, n$, семейство всевозможных максимальных подмножеств $\omega_r \subset \subset \{1, \ldots, N\}$, для которых ранги матриц

$$\|a_{jk}\|_{j\in\omega_r, k=1,\ldots,n} \text{ и } \|a_{jk}\|_{j\in\omega_r, k=0,1,\ldots,n}$$

равны r. Для каждого множества ω_r подберем $n - r$ линейных функций $L_{k\omega_r}(z)$, $k = r+1, \ldots, n$, так, чтобы ранг матрицы из коэффициентов функций L_j, $j \in \omega_r$, $L_{k\omega_r}$, $k = r+1, \ldots, n$, был равен n. Множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subset \omega_r$, для которых упорядоченные системы функций $L_{\alpha_1}, \ldots, L_{\alpha_r}$ образуют каноническое семейство r-систем системы $\{L_j,\ j \in \omega_r\}$ (см. § 19, п. 5°), обозначим $J(\omega_r)$. Для $r = 0$ множества $\Omega_0 = \{\omega_0 = \varnothing\}$, $J(\omega_0) = \varnothing$ предполагаем одноэлементными. Для каждого мультииндекса $\alpha \in J(\omega_r)$, $\omega_r \in \Omega_r$, $r = 0, \ldots, p$, построим цикл

$$\Gamma_\alpha = [z : |L_{\alpha_1}(z)| = \varepsilon_1, \ldots, |L_{\alpha_r}(z)| = \varepsilon_r, |L_{k\omega_r}(z)| = R,\ \ k = 1, \ldots, n - r],$$

где R — достаточно большое, а $\varepsilon_r, \varepsilon_{r-1}/\varepsilon_r, \ldots, \varepsilon_1/\varepsilon_2$ — достаточно малые положительные числа. При этих предположениях имеет место

Теорема 27.4 (Южаков). *Всякую функцию* $f \in A\left(C^n \setminus \bigcup_{j=1}^{N} E_j\right)$ *можно представить в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{r=0}^{p} \sum_{\omega_r \in \Omega_r} \sum_{\alpha \in J(\omega_r)} \sum_{\beta, r} c_{\alpha\beta} L_{\alpha\omega_r}^{\beta}(z),$$

где

$$\sum_{\beta, r} = \sum_{\beta_1, \ldots, \beta_r = -\infty}^{\infty} \sum_{\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n = 0}^{\infty};$$

$$L_{\alpha\omega_r}^{\beta} = L_{\alpha_1}^{\beta_1} \ldots L_{\alpha_r}^{\beta_r} L_{r+1,\omega_r}^{\beta_{r+1}} \ldots L_{n,\omega_r}^{\beta_n}.$$

Этот ряд равномерно сходится внутри $C^n \setminus \bigcup_{j=1}^{N} E_j$, и коэффициенты его единственным образом определяются по формуле

$$c_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\alpha} \frac{f(z)\, dL_{\alpha\omega_r}(z)}{L_{\alpha\omega_r}^{\beta+I}(z)},$$

где $dL_{\alpha\omega_r} = dL_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dL_{\alpha_r} \wedge dL_{r+1,\omega_r} \wedge \ldots \wedge dL_{n\omega_r}$.

Доказательство этой теоремы можно провести, используя теорему 19.2 и идею доказательства теоремы 19.8.

КРАТКИЕ ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Глава 1

§ 1. Формула (1.1) была получена Мартинелли [308] и Бохнером [235] независимо друг от друга и разными методами. Теорема 1.2 для случая шара сформулирована Ароновым [33], а в общем случае — Ароновым и Кытмановым [37]. Теорема 1.6 приведена в работе Кытманова и Айзенберга [111] (см. также [108]). Вопрос о функциях, представимых интегралом (1.1), изучался и в ошибочных работах [151, 152].

§ 2. Понятие индекса поверхности относительно точки принадлежит Пуанкаре. Динамическое определение кратности нуля встречается в работах Сегре [343], Севери [344], Мартинелли [310]. В основном здесь мы следуем монографиям [123, см. дополнение B; 201, § 48]. Однако при выводе свойств кратности нуля и доказательстве дискретности компактного множества нулей голоморфного отображения не опираемся на локальную теорию аналитических функций. Теорема 2.5 (принцип Руше) является частным случаем теоремы Пуанкаре — Боля (см. [104, с. 14]). О кратности нуля голоморфного отображения см. также работу [137]. Обобщение логарифмического вычета на случай неполных пересечений рассмотрено в [347].

§ 3. Формула Коши — Фантаппье (3.13) получена Лере [113] (см. также [9, 15, 179, 289]). Формула Лере — Коппельмана (3.12) отмечалась Русом [338], однако фактически содержалась ещё в работе Коппельмана [289]. Формула (3.1) выведена Южаковым [218, 221] и Русом [338], формула (3.18) — Русом [338]. Формула (3.5), обобщающая формулу Лере — Коппельмана (3.12), выписана в работе [20]. Для формулы Коши — Фантаппье (3.13) можно поставить вопрос, аналогичный решенному в § 1 для формулы (1.1): будет ли функция, представимая формулой (3.13) по своим значениям на ∂D, голоморфной? Ответ на этот вопрос отрицателен (Кытманов).

§ 4. Впервые интеграл вида (4.3) при $n = 2$ и $\varphi \equiv 1$ изучал Дидон [247], однако он не обнаружил его связи с кратностью нуля. Теорема 4.5 и предложение 4.11 при $n = 2$ доказаны Каччиопполи [242] ($\varphi \equiv 1$) и Мартинелли [310], а при $n > 2$ — Сорани [349]. Кратность пересечения аналитических поверхностей и обобщения логарифмического вычета для $n = 2$ рассматривались также Виртингером [365] и Бергманом [234]. Теорема 4.13, включающая как частные случаи теорему 4.6 и формулу (3.1), доказана в работе [221]. Эта теорема является обобщением интегрального представления Сорани [351]. Теорема 4.8 содержится в [216 и 221], теорема 4.12 доказана в [194]. Формулы (3.1) и (4.3) были повторены в работе [230].

§ 5. Формула Андреотти — Норге (5.1) опубликована в [228, 321] (см. также [312]), она имеет важные применения в теории q-псевдовыпуклых областей. Приведенное доказательство принадлежит Айзенбергу [21]; формулы (5.3), (5.5), задача в п. 2° и случаи 1) — 4) взяты из [20, 21]. Предложение 5.4 принадлежит Болотову.

§ 6. Понятия границы Бергмана, керн-функции Бергмана (при $h \equiv 1$), метрики Бергмана встречались в ряде работ Бергмана (о границе Бергмана см., например, [233]). Понятие кольцовой границы было введено Шиловым (см., например, [58]), он же доказал существование и единственность этой границы для пространства максимальных идеалов нормированного кольца. Теорема 6.1 и следствие 6.2 взяты из работ [174 (§15) и 11]. Пример области голоморфности, для которой границы Шилова и Бергмана имеют разную размерность, принадлежит Айзенбергу (см. [174, § 16]). Теорему 6.8 сформулировал Глисон [260], теоремы 6.6 и 6.7 — Бангарт [240], [241], теорему 6.9 — Айзенберг.

§ 7. Теорема 7.1 форм типа $(0, q)$ получена Коппельманом [290], а в случае форм типа (p, q) — Ароновым и Даутовым [35] и Русом [337], однако в последней работе есть ошибка. Теоремы 7.4 и 7.5 принадлежат Даутову. Идея вводить в интегральные формулы функцию $\varphi(\zeta, z)$ со свойством $\varphi(z, z) \equiv 1$ была применена Айзенбергом [9, 15]. Формула (7.1) распространена на формы в действительном пространстве $\boldsymbol{R}^n$ в спецкурсе Норге [321]. Если представить формулой (7.1) $\bar{\partial}$-замкнутую форму, то исчезнет второе слагаемое в (7.1). Наоборот, пусть форма α представима формулой Мартинелли — Бохнера — Коппельмана (7.1) без второго слагаемого. Будет ли α в этом случае $\bar{\partial}$-замкнутой? Иначе говоря, будет ли представимость формы α формулой (7.1) без второго слагаемого характеристическим свойством $\bar{\partial}$-замкнутых форм? Частным случаем этой задачи является следующая: будет ли функция, представимая интегралом Мартинелли — Бохнера, голоморфной (см. § 1)? Положительный ответ на этот вопрос содержится в работе Кытманова [110]. Тарханов получил аналогичный результат для замкнутых форм в $\boldsymbol{R}^n$ [162].

Глава II

§ 8. Предложения 8.1—8.3 взяты из работ [9, 15]. Формула (8.5) для выпуклых областей получена Лерс [113]. Она распространена на регулярные линейно-выпуклые области [13, 14]. Формула Бохнера (8.7) отмечалась в работе [235], а формула Бохнера — Оно (8.8) — в [235] (для окрестности нуля) и в [324]. Содержание пункта 5° принадлежит Айзенбергу.

§ 9. Формула для функций, голоморфных в аналитическом полиэдре весьма общего вида, была опубликована в ряде статей Бергмана (см., например, [232]). Результат этого параграфа принадлежит А. Вейлю [363], а идея приведенного доказательства — Норге [318, 319].

§ 10. Теоремы 10.4 и 10.5 сформулированы Хенкиным [178, 179]. Близкий к теореме 10.4 результат независимо, но несколько позднее получен Рамирезом де Ареллано [333] (см. также [293, 322]), в связи с леммой 10.2 см. [276].

§ 11. Интегралы Темлякова I и II рода были получены Темляковым в 1954 г. и окончательно сформулированы в работах [164, 165]. Формула (11.6) принадлежит Опиалю и Сичаку [325], другие распространения интегрального представления Темлякова на случай $n > 2$ комплексных переменных см. в работах [4, 39, 40, 115]. О распространении на круговые области см. [203]. Ряд работ посвящен приложениям интегралов Темлякова к различным задачам теории функций [2—4, 6, 202]. Интегралам Темлякова посвящена и работа [237], однако в ней есть ошибка, и в работе [226] объяснено, что интегральные представления Темлякова нельзя распространить на n-круговые области, отличные от выпуклых. Теорема 11.2, примеры 1) и 2) взяты из статьи [10], см. также [7, 17]. Пример 3) принадлежит Зиновьеву [91], см. также [47]. Результаты п. 3° принадлежат Айзенбергу [10, 17]. Аналогично построение можно делать для ядер Бергмана, Пуассона и Шварца [90]. Другие ядра Сеге и Бергмана подсчитаны в исследованиях [81, 83, 84, 91, 92]. О распространении на неограниченные области см. работу Айзенберга и Егорычева [25]. Формула (11.5) в неявном виде содержалась в статье Леу [296]. Точнее, там говорилось о существовании такой формулы, но ее ядра не были выписаны. Это было сделано при $n = 2$ и некоторых условиях на границу ∂D (обеспечивающих однозначный выбор $\Delta(k)$) Айзенбергом [10], а затем для любого n и без всяких условий на границу ∂D — Гиндикиным [63]. Он же выяснил (см. [63]), что имеется задача интегральной геометрии, приводящая к формуле (11.15). Нужно восстановить функцию на n-мерном торе, если известны ее интегралы по замкнутым вполне геодезическим гиперповерхностям на этом торе. Эта задача так же связана с рядами Фурье, как известная задача Радона — с интегралами Фурье.

§ 12. О роли голоморфных функций с неотрицательной действительной частью в математической физике см. [55, гл. III]. Пример 1 принадлежит Кораньи и Пуканскому [292]; близкий результат см. в работе Владимирова и Дрожжинова [56], где изучались голоморфные в поликруге функции с неотрицательной мнимой частью. Пример 3 приводится из [53, 54]. Остальные результаты этого параграфа получены Айзенбергом и Даутовым [24]. В статьях Владимирова [52, 54] приведены характеристические интегральные формулы для функций с неотрицательной мнимой частью, голоморфных в некоторых трубчатых (неограниченных) областях. Мы не знаем, укладываются ли эти результаты в схему § 12, если ее обобщить на неограниченные области.

Отметим, что ряд работ, посвященных интегральным представлениям в самых различных ситуациях, мы не смогли поместить в книгу. Упомянем о результатах Бицадзе об аналогах интеграла Коши для трехмерного пространства [44]. Ряд работ был посвящен вопросам восстановления голоморфной функции по ее значениям на достаточно малых (в разных смыслах) множествах (результаты в духе формулы Голузина — Крылова [143, с. 105]): [76, 93—95, 122, 129, 130, 327]. В статье Знаменского [95] рассмотрены интегральные представления в духе формулы Вострецова (см. [143]) для равномерно ограниченного внутри области D семейства голоморфных функций.

Глава III

§ 13. Якоби [277] еще в 1830 г. фактически использовал понятие кратного вычета как коэффициента при минус первых степенях кратного ряда Лорана. Попытки обобщить понятие вычета на функции двух комплексных переменных встречаются в работах Коши, Дидона [247], Пикара [329, 330], Пуанкаре [331]. Однако началом теории многомерных вычетов следует считать мемуар Пуанкаре [332], где он обобщил интегральную теорему Коши на функции двух комплексных переменных, рассмотрел периоды рациональных функций двух переменных, доказав, что они выражаются через периоды абелевых интегралов, а также обосновал с помощью двойных вычетов обобщение разложения Лагранжа для двух переменных, найденное Стильтьесом [354]. В дальнейшем теория кратных вычетов была продолжена в работах Лефшеца [297], де Рама [335], Сегре [343], Севери [344], Лере [113], Дольбо [248, 249] и др. (см. замечания к § 14—19).

§ 14. Идея применения двойственности Александера — Понтрягина принадлежит Мартинелли, который использовал ее при распространении интегральной формулы Коши на голоморфные функции n комплексных переменных и интегралы кратности $n + l$, $0 \leqslant l \leqslant n - 1$ [309], а также при обобщении логарифмического вычета [310]. Эта идея применительно к общей теории вычетов и вычетам рациональных функций по предложению В. К. Иванова была развита Южаковым в работах [206—210, 214].

§ 15. Доказательство теоремы де Рама можно найти в исследованиях [144, 189]. Приведенная здесь ее формулировка взята из книги [113]. Теорема 15.6 Серра содержится в работе [153]. Теорема 15.5 о вычетах сформулирована в работе Южакова [218, 382].

§ 16. Изложение § 16 в основном следует книге Лере [113]. Оператор δ^{-1}, обратный кограничному оператору Лере, фактически использовал Пуанкаре [332]. Теория вычетов на комплексном аналитическом многообразии в основном создана Лере (см. [113]). Дальнейшему ее развитию и обобщению посвящены работы Норге [316, 317, 320], Сорани [350], Дольбо [250—252], Гриффитса [267—269], Херрера [187, 273, 274], Кинга [283, 284], а также работы [68, 103, 243, 246, 262, 342, 343, 345, 347]. Теорема 16.5 о разложении Фруассара содержится в книге [192, с. 142—182]. Предложение 16.11 доказано в работе [268], предложение 16.14 — в [211], а теорема 16.16 — в [138, 139].

§ 17. Метод нахождения кратного класса-вычета полумероморфных форм (теорема 17.2) описан в книгах [59, 113], случай простого класса вычета разобран в [172, с. 80]. Теорема 17.7 содержится в статье [268], а теорема 17.5 — в [112].

§ 18. Основные результаты этого параграфа опубликованы в работах Южакова [207, 208, 214]. Теорема 18.5 впервые отмечена Пуанкаре [332]. Теорема 18.7 приведена в [213], а теорема 18.6 и 18.8 — в [193, 196].

§ 19 написан на основе работ [209, 210, 213]. Многомерным вычетам посвящены также статьи [253, 275, 385, 389, 391, 393, 395, 397, 402].

Глава IV

§ 20. Простой вывод ряда Бурмана — Лагранжа (20.2) с помощью вычетов дан Эрмитом в 1865 г. Первое обобщение разложения Лагранжа на функции двух переменных (теорема 20.7) было указано Стельтьесом [354] и обосновано с помощью двумерных вычетов Пуанкаре [332]. Для $n \geqslant 2$ теорема 20.7, а также некоторые другие ее модификации рассмотрены Гудом [261], Сакком [339] и др. (см. также [67, и 359]).

Формула обращения для общего случая голоморфного отображения получена Перкусом [328] с помощью операторных методов. Простое доказательство ее с помощью вычетов приведено в работе [216]. Результаты, близкие к предложению 20.8, получены в [105]. Обобщения разложения Лагранжа на произвольные неявные функции (теоремы 20.2, 20.12, предложения 20.3, 20.4) найдены в [215—217].

Формула обращения степенного ряда (формула n-й производной обратной функции) была найдена Сильвестром [360] в 1854 г. и переоткрыта в [326]. Ее обобщение для систем степенных рядов (теорема 20.10) для $n = 2,3$ получено Кэли [244] и Сильвестром [361]. Для $n \geqslant 2$ теорема 20.10 доказана Сакком [340] с помощью операторных методов. Теорема 20.9 доказана Болотовым и Южаковым в статье [46]. Теорема 20.14 и теоремы 20.15—20.20 об оценках области сходимости и остатка кратного ряда Лагранжа получены Южаковым.

Другие оценки области сходимости обращения голоморфного отображения указаны Шойхетом [204].

§ 21. Некоторые результаты о системах нелинейных алгебраических уравнений найдены в прошлом веке Якоби [278], Эрмитом [272] и Кронекером. Теоремы 21.1 и 21.3 принадлежат Айзенбергу [19, 20, 21], теоремы 21.4 и 21.5 — Айзенбергу и Циху [28], теорема 21.6 — Болотову, предложения 21.7 и 21.8 — Айзенбергу. Пример 7 по просьбе авторов подсчитан М. Мкртчяном. Мы не обсуждали различные итерационные методы приближенного решения систем нелинейных уравнений, подробный обзор этих методов и библиографию можно найти в книге [135].

§ 22. Теорема 22.8 опубликована в работе [106], а ее модификация для чисел Милнора — в [107]. Теорема 22.10 сформулирована и доказана на основе совершенно аналогичной теоремы Бернштейна [42] о числе корней системы многочленов Лорана. Теорема 22.4 для $n = 2$ доказана в [195], а для $n > 2$ — в [223]. В работе [223] содержится также теорема 22.6. Теорема 22.7 получена Цихом [197].

§ 23. Теорема 23.1 сформулирована в работах [85, 86]. Метод вычисления комбинаторных сумм с помощью вычетов подробно развит в книгах Егорычева [82, 84]. Там же разобрано большое число разнообразных примеров, а также решен ряд задач комбинаторного характера, возникающих в теории групп, теории графов, теории функций.

Глава V

§ 24. Проблеме, связанной с обобщением классических теорем Гартогса — Осгуда — Брауна (теорема 24.3) и Бохнера — Севери (теорема 24.2), посвящено большое количество работ: [41, 50, 227, 235, 239, 256, 288, 311, 314, 341, 344, 364, 365]. Теорема 24.1 принадлежит Аронову и Кытманову [37, 38], теорема 24.4 и следствие 24.5 — Кытманову и Айзенбергу [11]. Теоремы 7 и 10, в которых обсуждается вопрос о голоморфном продолжении в D функций из класса $L^p(\partial D)$, взяты из обзора Хенкина и Чирки [186, гл. I]. Хенкин показал, что утверждение теоремы 24.4 справедливо и для функций из $L^1(\partial D)$ (при этом вместо $A_C(D)$ нужно говорить об $H^1(D)$). Теорема 24.7 для случая шара содержалась в работе Аграновского и Вальского [1] (см. также [313]), а в общем случае — в работе Стоута [358]. В статье [1] на самом деле доказано следующее: $f \in C(\partial D)$ голоморфно продолжается в шар D, если интегралы от f по сечениям ∂D комплексными прямыми равны нулю. Лемма 24.6 доказана Кытмановым по предложению Хенкина. Теорема 24.8 принадлежит Айзенбергу и Даутову [24].

Теорема 24.9 и следствие 24.10 сформулирована А. Вейлем. Линейная выпуклость для $n = 2$ была в эквивалентном виде введена в работе Бенке и Пешля [231], в общем случае она рассмотрена и подробно исследована Айзенбергом [13, 14]. Близкое, но не эквивалентное понятие исследовал Мартино [304]. Теорема 24.14 ошибочно анонсировалась Мартино в [305] для линейно-выпуклых по Мартино компактов и областей. Верные результаты для выпуклых компактов и областей получены Мартино [304] и Айзенбергом [12], а в приведенном в § 24 виде — Айзенбергом [13]. Теорема 24.11 и следствие 24.17 взяты из работы [14]. Теорема 24.16 принадлежит Трутневу [169], а теорема 24.15 — Знаменскому. О других приложениях понятия линейной выпуклости и о его свойствах см. статьи [22, 27, 29, 89, 116, 117, 159, 160, 167—169, 220, 305—307]. Ряд работ посвящен различным приложениям интегральных представлений к изучению пространств голоморфных функций: [13, 60, 87, 88, 124, 125, 167, 169, 177—179, 186, 281, 285, 304—307, 353, 362].

§ 25. Проблема Е. Леви, решение которой дает теорема Ока, поставлена в 1910 г. [298]. Для областей в C^2 теорема Ока доказана им в 1942 г. Затем появились доказательства для C^n Ока [323], Бремермана [238], Норге [315]. Наиболее известные доказательства принадлежат Грауэрту [264] и Хермандеру [189]. Текст § 25 написан Даутовым на основе рукописи Хенкина (1973 г.), где основные теоремы Ока элементарно выведены из интегральных формул для выпуклых областей. Теорема 25.10, лежащая в основе § 25, была доказана Романовым и Хенкиным [147]. Она уточняет предшествующие результаты Хенкина [180], Грауэрта — Либа [265], Оврелида [322], Керзмана [280], Либа [302]. Теоремы 25.14 и 25.16, в которых учитывается различное поведение правой части $\bar\partial$-уравнения вдоль комплексных касательной и нормали, доказаны Хенкиным [185], Шкодой [346] и Даутовым — Хенкиным [77].

Формула для решения $\bar\partial$-задачи, изложенная в этом параграфе (формула (25.12)), получена в [77] с целью доказательства теоремы 25.16. На основе теорем 25.14 и 25.16 получены теорема 25.15 — описание множеств нулей функций класса Неванлинны (Хенкин, [185], Шкода [346]) и теорема 25.17 — описание множеств нулей функций класса Неванлинны — Джрбашяна (Даутов — Хенкин [77]). Другие формулы для решения $\bar\partial$-уравнения, их оценки и приложения можно найти в работах [142, 179, 180, 182, 183, 322, 334, 357]. Более подробный обзор о $\bar\partial$-задаче приведен в [184 и 186].

§ 26. Первое описание гладких форм, ортогональных голоморфным функциям в строго псевдовыпуклых областях, получено Даутовым [71] (см. также [23]). Соответствующее продолжение в обобщенном смысле вытекает уже из равномерных оценок Хенкина [180] для $\bar\partial$-оператора (см. [184]). Теорема 26.1 доказана Даутовым по предложению Хенкина, теорема 26.2 — Хенкиным [185]. Теорема 26.7 фактически содержится в работе [184]. Теоремы 26.8, 26.10 и 26.11 — это соответственно теоремы 6.2, 8.1 и 7.1 из [23] с уточнением некоторых формулировок (см. также [18, 72, 74]). Теорема 26.9 сообщена Хенкиным. Теорема 26.12 и следствие 26.13 получены Даутовым. При $n = 2$ следствие 26.13 совпадает с теоремой 13.2 из [23], при $n > 2$ в теореме 13.4 из [23] дан общий вид интегрального представления, отличный от приведенного в следствии 26.13.

Оператор $\bar\partial_\tau$ — «касательный» оператор Коши — Римана — введен в работах Кона [287] и Кона — Росси [288]. Он определяется и для форм из $C^{(1)}_{p,q}(\partial D)$ для любого p, $0 \leqslant p \leqslant n$, а не только $p = n$, как в п. 7° § 26. Уравнение Г. Леви (26.22) рассмотрено в его работах [299, 300]. Теоремы 26.14 и 26.16 принадлежат Хенкину. В случае, когда $n = 2$ и D — шар, теорема 26.14 — лишь переформулировка результатов Сато и Грейнера — Кона — Стейна [266]. Теорема 26.16 — уточнение классических утверждений Г. Леви [300] и Хермандера [188] о существовании неразрешимых уравнений Г. Леви.

Предложение 26.15 — это теорема о скачке для форм. Первые утверждения о скачке для форм можно найти в статьях Айзенберга [18] и Андреотти — Хилла [172] (см. также [23]).

§ 27. Разложение (27.1) для полиномов и рациональных функций отмечено Айзенбергом. Теорема 27.4 доказана Южаковым [127]. Предложение 27.1, а также некоторые другие условия единственности разложения (27.1) получены Михайловой [126]. Идея построения базиса пространства $A(C^n \setminus T)$, где $T = \{z : P(z) = 0\}$, P — полином, путем аппроксимации области $C^n \setminus T$ полиэдрами Вейля и применения к ним предложения 27.1 предложена Южаковым. Эта идея реализована (теорема 27.3) в работе Михайловой [126]. Приведенное здесь упрощенное доказательство теоремы 27.3 предложено Захарютой. Обобщение теоремы 27.3 на случай псевдополиномов и некоторых классов целых функций содержится в работе [127].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аграновский М. Л., Вальский Р. Е. Максимальность инвариантных алгебр функций.— «Сиб. мат. журн.», 1971, т. 12 № 1, с. 3—12.
2. Айзенберг Л. А. Об интегралах Темлякова и граничных свойствах аналитических функций двух комплексных переменных.— «Докл. АН СССР», 1958, т. 120, № 5, с. 935—938.
3. Айзенберг Л. А. О плюригармонических функциях.— «Докл. АН СССР», 1959, т. 124, № 5, с. 967—969.
4. Айзенберг Л. А. Об интегралах Темлякова и граничных свойствах аналитических функций многих комплексных переменных.— «Учен. зап. МОПИ», 1959, т. 57, с. 13—35.
5. Айзенберг Л. А. Пространства функций, аналитических в (p, q)-круговых областях.— «Докл. АН СССР», 1961, т. 136, № 3, с. 521—524.
6. Айзенберг Л. А. Об одной теореме Б. А. Вострецова.— «Учен. зап. МОПИ», 1962, т. 110, с. 37—46.
7. Айзенберг Л. А. Интегральные представления функций, голоморфных в кратно-круговых областях.— «Докл. АН СССР», 1961, т. 138, № 1, с. 9—12.
8. Айзенберг Л. А. Интегральные представления функций, голоморфных в выпуклых областях пространства C^n.— «Докл. АН СССР», 1963, т. 151, № 6, с. 1247—1249.
9. Айзенберг Л. А. Интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных.— «Докл. АН СССР», 1964, т. 155, № 1, с. 9—12.
10. Айзенберг Л. А. Интегральные представления функций, голоморфных в n-круговых областях. («Распространение» ядер Сеге.) — «Мат. сб.», 1964, т. 65, № 1, с. 104—143.
11. Айзенберг Л. А. Об одной теореме о границе Шилова для функций многих комплексных переменных.— «Ученые зап. МОПИ», 1966, т. 166, с. 175—176.
12. Айзенберг Л. А. Общий вид линейного непрерывного функционала в пространствах функций, голоморфных в выпуклых областях C^n.— «Докл. АН СССР», 1966, т. 166, № 5, с. 1501—1018.

13. **Айзенберг Л. А.** Линейная выпуклость в C^n и разделение особенностей голоморфных функций.— «Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. math.», 1967, вып. 19, № 7, 487—495.
14. **Айзенберг Л. А.** О разложении голоморфных функций многих комплексных переменных на простейшие дроби.— «Сиб. мат. журн.», 1967, т. 8, № 5, с. 1124—1142.
15. **Айзенберг Л. А.** Интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных.— В кн.: Труды Моск. мат. о-ва. М., Моск. ун-т, 1970, т. 21, с. 3—26.
16. **Айзенберг Л. А.** Полиномы, ортогональные голоморфным функциям многих комплексных переменных и аналог теоремы Риссов.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 199, № 2, с. 255—257.
17. **Айзенберг Л. А.** Распространение интегральных представлений с ядрами и квазиядрами Сеге для n-круговых областей.— В кн.: Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1973, с. 3—34.
18. **Айзенберг Л. А.** О ∂-замкнутых внешних дифференциальных формах типа $(p, n-1)$ в пространстве C^n.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 209, № 5, с. 1009—1012.
19. **Айзенберг Л. А.** Об одной формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета и ее приложении к решению систем нелинейных уравнений. Препринт ИФСО-7М, Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1976, с. 1—16.
20. **Айзенберг Л. А.** Об одной формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета и решении систем нелинейных уравнений.— «Докл. АН СССР», 1977, т. 234, № 3, с. 505—508.
21. **Айзенберг Л. А.** О формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета, интегральных представлениях голоморфных функций многих комплексных переменных и некоторых их приложениях.— В кн.: Комплексный анализ и многообразия. Киев, ИМ АН УССР, 1978.
22. **Айзенберг Л. А., Губанова А. С.** Об областях голоморфности функций с действительными или неотрицательными тейлоровскими коэффициентами.— «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», 1972, т. 15, с. 50—55.
23. **Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А.** Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства. Новосибирск, «Наука», 1975. 114 с.
24. **Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А.** Голоморфные функции многих комплексных переменных с неотрицательной действительной частью. Следы голоморфных и плюригармонических функций на границе Шилова.— «Мат. сб.», 1976, т. 99, № 3, с. 342—355.
25. **Айзенберг Л. А., Егорычев Г. П.** Интегральные представления с ядром Сеге для функций, голоморфных в неограниченных n-круговых областях.— «Докл. АН СССР», 1976, т. 231, № 2, с. 265—268,

26. **Айзенберг Л. А., Зиновьев Б. С.** Элементарные свойства и интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск, Красн. ун-т, 1975. 156 с.
27. **Айзенберг Л. А., Трутнев В. М.** Об одном методе суммирования по Борелю n-кратных степенных рядов.— «Сиб. мат. журн.», 1971, т. 12, № 6, с. 1895—1901.
28. **Айзенберг Л. А., Цих А. К.** О применении многомерного логарифмического вычета к системам нелинейных алгебраических уравнений. Препринт ИФСО-9М. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1977, с. 1—19. , Сиб. м. ж. 1979 т. 20 № 4 с. 6
29. **Айзенберг Л. А., Южаков А. П., Макарова Л. Я.** О линейной выпуклости в C^n.— «Сиб. мат. журн.», 1968, т. 9, № 4, с. 731—746.
30. **Александров П. С.** Комбинаторная топология. М.—Л., Гостехиздат, 1947. 660 с.
31. **Александров П. С.** Топологические законы двойственности. 4.1. М., 1955, с. 3—110. (Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 48).
32. **Аронов А. М.** Об интегральной формуле Мартинелли — Бохнера для внешних дифференциальных форм.— В кн.: Голоморфные функции многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1972, с. 167—170.
33. **Аронов А. М.** О функциях, представимых интегралом Мартинелли — Бохнера.— В кн.: Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1973, с. 35—39.
34. **Аронов А. М.** О граничных значениях производных интеграла типа Мартинелли — Бохнера.— В кн.: О голоморфных функциях многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1976, с. 20—28.
35. **Аронов А. М., Даутов Ш. А.** Об интегральных представлениях для комплексных дифференциальных форм.— «Сиб. мат. журн.», 1972, т. 13, № 4, с. 739—747.
36. **Аронов А. М., Даутов Ш. А.** Об одном результате Б. Вайнстока.— В кн.: Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1973, с. 193—195.
37. **Аронов А. М., Кытманов А. М.** О голоморфности функций, представимых интегралом Мартинелли — Бохнера.— «Функциональный анализ и его приложения», 1975, т. 9, № 3, с. 83—84.
38. **Аронов А. М., Кытманов А. М.** Критерий существования голоморфного продолжения гладкой функции, заданной на границе области в C^n.— В кн.: О голоморфных функциях многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1976, с. 13—19.
39. **Баврин И. И.** Интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных.— «Докл. АН СССР», 1966, т. 169, № 3, с. 495—498.

40. **Баврин И. И.** Интегральные представления голоморфных функций.— Учен. зап. МОПИ», 1966, т. 166, с. 3—47.
41. **Байков В. А.** Об одной граничной теореме для голоморфных функций двух комплексных переменных.— «Успехи мат. наук», 1969, т. 24, № 5, с. 221—222.
42. **Бернштейн Д. Н.** Число корней системы уравнений.— «Функциональный анализ и его приложения», 1975, т. 9, № 3, с. 1—4.
43. **Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., «Наука», 1975. 480 с.
44. **Бицадзе А. В.** Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М., «Наука», 1969. 240 с.
45. **Болотов В. А.** О формуле Тейлора и одном ее аналоге для систем неявных функций.— В кн.: О голоморфных функциях многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1976, с. 29—38.
46. **Болотов В. А., Южаков А. П.** Обобщение формул обращения систем степенных рядов на системы неявных функций.— «Мат. заметки», 1978, т. 23, № 1, с. 47—54.
47. **Бородин М. А.** Некоторые интегральные представления функций, голоморфных в двоякокруговых областях.— «Сиб. мат. журн.», 1969, т. 10, № 2, с. 287—296.
48. **Ван-дер-Варден Б. Л.** Современная алгебра. Ч. II. М.— Л., Гостехиздат, 1947. 260 с.
49. **Виноградов В. С.** Об одном аналоге системы Коши — Римана в четырехмерном пространстве.— «Докл. АН СССР», 1964, т. 154, № 1, с. 16—19.
50. **Виноградов В. С.** Об аналоге интеграла типа Коши для аналитических функций многих комплексных переменных.— «Докл. АН СССР», 1968, т. 178, № 2, с. 282—285.
51. **Владимиров В. С.** Методы теории функций многих комплексных переменных. М., «Наука», 1964. 410 с.
52. **Владимиров В. С.** Голоморфные функции с неотрицательной мнимой частью в трубчатой области над конусом.— «Мат. сб.», 1969, т. 79, с. 128—152.
53. **Владимиров В. С.** Голоморфные функции с положительной мнимой частью в трубе будущего. I.— «Мат. сб.», 1974, т. 93, с. 3—17.
54. **Владимиров В. С.** Голоморфные функции с положительной мнимой частью в трубе будущего. IV.—«Мат. сб.», 1977, т. 104, с. 341—370.
55. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике. М., «Наука», 1976. 280 с.
56. **Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н.** Голоморфные функции в поликруге с неотрицательной мнимой частью.— «Мат. заметки», 1974, т. 15, № 1, с. 55—61.
57. **Ганнинг Р., Росси Х.** Аналитические функции многих комплексных переменных. М., «Мир», 1969. 396 с.
58. **Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.** Коммутативные нормированные кольца. М., Физматгиз, 1960. 316 с.

59. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958. 470 с.
60. Гиндикин С. Г. Аналитические функции в трубчатых областях.— «Докл. АН СССР», 1962, т. 145, № 6, с. 1205—1208.
61. Гиндикин С. Г. Анализ в однородных областях.— «Успехи мат. наук», 1964, т. 19, № 4, с. 3—92.
62. Гиндикин С. Г. Преобразование Радона для голоморфных функций от нескольких переменных и связанные с ним интегральные формулы.— «Успехи мат. наук», 1965, т. 20, № 3, с. 237—239.
63. Гиндикин С. Г. Об универсальной интегральной формуле для кратнокруговых областей в n-мерном комплексном пространстве.— «Сиб. мат. журн.», 1966, т. 7, № 3, с. 708—712.
64. Голубева В. А. Некоторые вопросы аналитической теории фейнмановских интегралов.— «Успехи мат. наук», 1976, т. 31, № 2, с. 174—202.
65. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., «Наука», 1966. 628 с.
66. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М., «Наука», 1968. 648 с.
67. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. II. М.— Л., ОНТИ, 1936. 563 с.
68. Гутенмахер В. Л. Интегрирование многозначных форм и взвешенные однородные многочлены.— «Функциональный анализ и его приложения», 1972, т. 6, № 4, с. 79—80.
69. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М., Гостехиздат, 1953. 415 с.
70. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962. 896 с.
71. Даутов Ш. А. О формах, ортогональных голоморфным функциям при интегрировании по границе строго псевдовыпуклых областей.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 203, № 1, с. 16.
72. Даутов Ш. А. О формах, ортогональных голоморфным функциям, и близких вопросах.— «Функциональный анализ и его приложения», 1972, т. 6, № 4, с. 84—85.
73. Даутов Ш. А. О $\bar{\partial}$-замкнутых формах типа $(p, n-1)$ как аналоге голоморфных функций одного комплексного переменного.— В кн.: Голоморфные функции многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1972, с. 21—36.
74. Даутов Ш. А. Об общем виде интегрального представления голоморфных функций в C^n.— В кн.: Голоморфные функции многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1972, с. 37—45.
75. Даутов Ш. А., Кытманов А. М. О граничных свойствах интеграла типа Мартинелли — Бохнера. В кн.: Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1973, с. 49—54.
76. Даутов Ш. А., Мкртчян Е. С. Восстановление функций из H^1 в полицилиндре.— В кн.: О голоморфных функциях мно-

гих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1976, с. 39—45.

77. Даутов Ш. А., Хенкин Г. М. Нули голоморфных функций конечного порядка и весовые оценки решений $\bar{\partial}$-уравнения.— Препринт ИФСО-8М. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1977, с. 1—26.
78. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., «Наука», 1966. 672 с.
79. Дынин А. С. Алгебра псевдодифференциальных операторов на группе Гейзенберга. Символическое исчисление.— «Докл. АН СССР», 1976, т. 227, № 4, с. 792—795.
80. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М., «Мир», 1964. 430 с.
81. Егорычев Г. П. Применение кратных вычетов к вычислению ядер Сеге и Бергмана для некоторых n-круговых областей.— В кн.: Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1973, с. 55—76.
82. Егорычев Г. П. Комбинаторные суммы и метод производящих функций. Красноярск, Краснояр. ун-т, 1974. 200 с.
83. Егорычев Г. П. Вычисление ядер Сеге и Бергмана для некоторых n-круговых областей с помощью многомерных вычетов.— «Изв. вузов. Математика», 1975, т. 152, № 1, с. 101—103.
84. Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск, «Наука», 1977. 285 с.
85. Егорычев Г. П., Южаков А. П. Применение многомерных вычетов к нахождению производящих функций и вычислению комбинаторных сумм.— В кн.: Голоморфные функции многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1972, с. 47—61.
86. Егорычев Г. П., Южаков А. П. О нахождении производящих функций и комбинаторных сумм с помощью многомерных вычетов.— «Сиб. мат. журн.», 1974, т. 15, № 5, с. 1049—1060.
87. Захарюта В. П. О базисах и изоморфизме пространств функций, аналитических в выпуклых областях многих переменных.— «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», 1967, т. 5, с. 5—12.
88. Захарюта В. П. Об интегральной формуле Вейля и некоторых ее применениях.— В кн.: Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории функций компл. перем. Харьков, ФТИНТ АН УССР, 1971, с. 78—80.
89. Зиновьев Б. С. Аналитические условия и некоторые вопросы аппроксимации линейно-выпуклых областей с гладкими границами в пространстве C^n.— «Изв. вузов. Математика», 1971, т. 11, № 6, с. 61—69.
90. Зиновьев Б. С. О ядрах Бергмана, Пуассона и Шварца для кратно-круговых областей голоморфности.— В кн.: Тез. докл.

Всесоюз. конф. по теории функций комплексного переменного. Харьков, ФТИНТ АН УССР, 1971, с. 83—85.
91. **Зиновьев Б. С.** О воспроизводящих ядрах для кратно-круговых областей голоморфности.— «Сиб. мат. журн.», 1974, т. 15, № 1, с. 35—48.
92. **Зиновьев Б. С., Свисткова Г. П.** Нахождение воспроизводящих ядер Бергмана и Сеге для некоторого класса кратнокруговых областей.— В кн.: Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1973, с. 209—214.
93. **Знаменский С. В.** Связь аналитических функций многих переменных с рядами Дирихле одного переменного. Приложение к представлению нелинейных аналитических операторов.— «Докл. АН СССР», 1975, т. 223, № 3, с. 544—547.
94. **Знаменский С. В.** Связь голоморфных функций многих комплексных переменных, аналитических функционалов и операторов с рядами Дирихле одного переменного и некоторые ее приложения.— В кн.: О голоморфных функциях многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1976, с. 46—59.
95. **Знаменский С. В.** Об интегральных формулах для равномерно ограниченного внутри области $D \subset C^n$ семейства голоморфных функций.— «Успехи мат. наук», 1978.
96. **Какичев В. А.** Граничные свойства интеграла типа Коши многих переменных.— «Учен. зап. пед. ин-та», Шахты, 1959, т. 2, № 6, с. 25—90.
97. **Какичев В. А.** Интеграл типа Коши для топологического произведения двумерных аналитических поверхностей.—«Докл. АН СССР», 1959, т. 129, № 6, с. 1218—1221.
98. **Какичев В. А.** Интеграл Шварца и формулы Гильберта для аналитических функций многих комплексных переменных.— «Изв. вузов. Математика.», 1959, т. 2, с. 80—93.
99. **Какичев В. А.** Характер непрерывности граничных значений интеграла Маргинелли — Бохнера.— «Учен. зап. МОПИ», 1960, т. 96, с. 145—150.
100. **Какичев В. А.** Свойства многомерного интеграла Гильберта и некоторые их приложения.— «Учен. зап. МОПИ», 1962, т. 110, с. 163—181.
101. **Какичев В. А.** Предельные значения для одного частного случая интеграла типа Вейля.— «Учен. зап. МОПИ», 1964, т. 137, с. 121—132.
102. **Картан А.** Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., «Мир», 1971. 392 с.
103. **Краснов В. А.** Когомологии комплексов мероморфных форм и вычеты.— «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1972, т. 36, № 6, с. 1237—1268.
104. **Красносельский М. А., Забрейко П. П.** Геометрические методы нелинейного анализа. М., «Наука», 1975. 512 с.
105. **Куприков А. В.** Ряд Лагранжа для одного многозначного обратного отображения в C^n.— В кн.: Комбинаторный и

асимптотический анализ. Вып. 1. Красноярск, КрасГУ, 1975, с. 163—167.
106. Кушниренко А. Г. Многогранник Ньютона и число решений системы k уравнений с k неизвестными.— «Успехи мат. наук», 1975, т. 30, № 2, с. 266—267.
107. Кушниренко А. Г. Многогранник Ньютона и числа Милнора.— «Функциональный анализ и его приложения.» 1975, т. 9, № 1, с. 74—75.
108. Кытманов А. М. Критерий голоморфности интеграла типа Мартинелли — Бохнера.— В кн.: Комбинаторный и асимптотический анализ. Красноярск, Красноярск. ун-т, 1975, с. 169—177.
109. Кытманов А. М. О некоторых свойствах внешних дифференциальных форм класса В.— В кн.: О голоморфных функциях многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1976, с. 184—189.
110. Кытманов А. М. Об одном характеристическом свойстве $\bar{\partial}$-замкнутых внешних дифференциальных форм.— «Успехи мат. наук», 1976, т. 31, № 2, с. 217—218.
111. Кытманов А. М., Айзенберг Л. А. О голоморфности функций, представимых интегралом Мартинелли — Бохнера. Препринт ИФСО-5М. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1975. 20 с.
112. Лейнартас Е. К. О разложении рациональных функций многих переменных на простейшие дроби.— «Изв. вузов. Математика», 1978, № 10, с. 47—52.
113. Лере Ж. Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии. М., ИЛ, 1961. 140 с.
114. Лефшец С. Алгебраическая топология. М., ИЛ, 1949. 503 с.
115. Ли Чэ Гон. Интегральное представление функций комплексных переменных.— «Суххакка Мулли», 1959, т. 3, с. 27—30. (Пер. с корейск.)
116. Макарова Л. Я. О дополнительных линейно-выпуклых оболочках.— «Сиб. мат. журн.», 1970, т. 11, № 3, с. 547—551.
117. Макарова Л. Я., Худайберганов Г., Черкашин В. П. Заметка о линейной и полиномиальной выпуклости.— «Изв. АН Уз. ССР. Сер. мат., физ., мох.», 1973, № 1, с. 36—41.
118. Малышев В. А. Аналитический метод в теории двумерных положительных случайных блужданий.— «Сиб. мат. журн.». 1972, т. 13, № 6, 1314—1329.
119. Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций. М., «Мир», 1968. 131 с.
120. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1. М., «Наука», 1967. 486 с.
121. Маслов В. П. Операторные методы. М., «Наука», 1973. 544 с.
122. Месис А. В., Одвирко-Будко Б. И. О восстановлении функции двух комплексных переменных по ее граничным значениям.— «Мат. зап. Урал. ун-та», Свердловск, 1967, т. 5, № 4, с. 76—85.
123. Милнор Д. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М., «Мир», 1972. 127 с.

124. **Митягин Б. С.** Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах.— «Успехи мат. наук», 1961, т. 16, № 4, с. 63—132.
125. **Митягин Б. С., Хенкин Г. М.** Линейные задачи комплексного анализа.— «Успехи мат. наук», 1971, т. 26, № 4, с. 93—152.
126. **Михайлова Т. С.** Построение базиса в пространствах функций, голоморфных в некоторых областях C^n.— «Сиб. мат. журн.», 1972, т. 13, № 6, с. 1387—1394.
127. **Михайлова Т. С.** Пространства функций, голоморфных в некоторых областях C^n.— «Сиб. мат. журн.», 1973, т. 14, № 4, с. 806—816.
128. **Мишина А. П., Проскуряков Н. В.** Высшая алгебра. М., Физматгиз, 1962. 300 с.
129. **Мкртчян Е. С.** О восстановлении голоморфной функции по ее значению на некоторых множествах единственности.— «Докл. АН Арм. ССР», 1976, т. 62, № 4, с. 199—202.
130. **Мкртчян Е. С.** Об одном интегральном представлении функций, голоморфных в звездных областях в C^n.— В кн.: О голоморфных функциях многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1976, с. 97—106.
131. **Монтель П.** Нормальные семейства аналитических функций. М.— Л., ОНТИ, 1936. 240 с.
132. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962. 599 с.
133. **Нарасимхан Р.** Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М., «Мир», 1971. 232 с.
134. **Неванлинна Р.** Однозначные аналитические функции. М.— Л., Гостехиздат, 1941. 388 с.
135. **Ортега Дж., Рейнболдт В.** Интегральные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., «Мир», 1975. 558 с.
136. **Паламодов В. П.** Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М., «Наука», 1967. 488 с.
137. **Паламодов В. П.** О кратности голоморфного отображения.— «Функциональный анализ и его приложения», 1967, т. 1, № 3, с. 54—65.
138. **Педан Ю. В.** Об одном аналоге теорем о разложении Фруассара для двух комплексных переменных.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 208, № 1, 46—47.
139. **Педан Ю. В.** Об одном уточнении для комплексных переменных теорем о разложении Фруассара.— «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», 1974, т. 19, с. 33—34.
140. **Педан Ю. В.** Исследование римановых поверхностей некоторых двукратных интегралов, зависящих от одного комплексного параметра.— «Изв. вузов. Математика», 1976, № 12, с. 66—76.
141. **Петросян А. И.** Равномерное приближение функций полиномами на полиэдрах Вейля.— «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1970, т. 34, с. 1241—1261.

142. **Поляков П. Л.** Банаховские когомологии кусочно строго псевдовыпуклых областей.— «Мат. сб.», 1972, т. 88, № 2, с. 238—255.
143. **Привалов И. И.** Граничные свойства аналитических функций. М.—Л., Гостехиздат, 1950. 336 с.
144. **Рам Ж.** Дифференцируемые многообразия. М., ИЛ, 1956. 250 с.
145. **Романов А. В.** Формула и оценки для решения касательного уравнения Коши — Римана.— «Докл. АН СССР», 1975, т. 220, № 3, с. 36—39.
146. **Романов А. В.** Формула и оценки для решения касательного уравнения Коши — Римана.— «Мат. сб.», 1976, т. 99, № 1, с. 58—82.
147. **Романов А. В., Хенкин Г. М.** Точные гельдеровские оценки решений $\bar{\partial}$-уравнения.— «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1971, т. 35, № 5, с. 1171—1183.
148. **Ронкин Л. И.** Элементы теории аналитических функций многих переменных. Киев, «Наукова думка», 1977. 168 с.
149. **Рудин У.** Теория функций в поликруге. М., «Мир», 1974. 160 с.
150. **Савелов А. А.** Плоские кривые. М., Физматгиз, 1960. 294 с.
151. **Сербин А. И.** О функциях, представимых интегралом Мартинелли — Бохнера.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 196, № 6, с. 1276—1278.
152. **Сербин А. И.** Условия представления функций интегралом Мартинелли — Бохнера.— «Изв. вузов. Математика», 1975, т. 15, № 6, с. 136—142.
153. **Серр Ж. П.** Некоторые задачи, связанные с изучением в целом многообразии Штейна.— В кн.: Расслоенные пространства и их приложения. М., ИЛ, 1958, с. 363—372.
154. **Смогоржевский А. С., Столова Е. С.** Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. М., Физматгиз, 1961. 264 с.
155. **Соболев С. Л.** Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1954. 444 с.
156. **Соболев С. Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М., «Наука», 1974. 808 с.
157. **Спеньер Э.** Алгебраическая топология. М., «Мир», 1971. 680 с.
158. **Спивак М.** Математический анализ на многообразиях. М., «Мир», 1968. 164 с.
159. **Степаненко В. А.** Об обобщении понятия линейной выпуклости и его приложениях.— В кн.: Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1973, с. 123—138.
160. **Степаненко В. А.** Об одном примере ограниченной линейно-выпуклой, но невыпуклой области с гладкой границей в C^n. В кн.: О голоморфных функциях многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1976, с. 200—202.
161. **Стернберг С.** Лекции по дифференциальной геометрии. М., «Мир», 1970. 412 с.

162. **Тарханов Н. Н.** Характеристическое свойство замкнутых внешних дифференциальных форм.— В кн.: О голоморфных функциях многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1976, с. 203—209.
163. **Телеман К.** Элементы топологии и дифференцируемые многообразия. М., «Мир», 1967. 390 с.
164. **Темляков А. А.** Интегральное представление функций двух комплексных переменных.— «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1957, т. 21, с. 89—92.
165. **Темляков А. А.** Интегральные представления функций двух комплексных переменных.— «Докл. АН СССР», 1958, т. 120, № 5, с. 976—979.
166. **Темляков А. А.** Интегральные представления.— «Докл. АН СССР», 1960, т. 131, № 2, с. 263—264.
167. **Трутнев В. М.** Некоторые свойства функций, голоморфных на сильно линейно-выпуклых множествах.— «Успехи мат. наук», 1972, т. 27, № 5, с. 253—254.
168. **Трутнев В. М.** Об одном аналоге ряда Лорана для функций многих комплексных переменных, голоморфных на сильно линейно-выпуклых множествах.— В кн.: Голоморфные функции многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1972 , с. 139—152.
169. **Трутнев В. М.** О свойствах функций, голоморфных на сильно линейно-выпуклых множествах.— В кн.: Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1973, с. 139—155.
170. **Уиттекер Э. Т., Ватсон Г. Н.** Курс современного анализа. Т. 1. М., Физматгиз, 1962. 343 с.
171. **Уолш Дж. Л.** Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М., ИЛ, 1961. 508 с.
172. **Фам Ф.** Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. М., «Мир», 1967. 184 с.
173. **Фукс Б. А.** Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М., Физматгиз, 1962. 419 с.
174. **Фукс Б. А.** Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. М., Физматгиз, 1963. 427 с.
175. **Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л.** Гомотопическая топология. М., Моск. ун-т, 1969. 460 с.
176. **Хавин В. П.** Об одной задаче В. В. Голубева.— «Докл. АН СССР», 1958, т. 121, № 2, с. 232—242.
177. **Хавин В. П.** Пространства аналитических функций.— В кн.: Итоги науки. Математический анализ 1964. М., ВИНИТИ, 1966, с. 76—164.
178. **Хенкин Г. М.** Банаховы пространства аналитических функций в шаре и в бицилиндре неизоморфны. — «Функциональный анализ и его приложения», 1968, т. 2, № 4, с. 82—91.
179. **Хенкин Г. М.** Интегральное представление функций, голоморфных в строго псевдовыпуклых областях и некоторые приложения.- «Мат. сб.», 1969, т. 78, № 4, с. 611—632.

180. Хенкин Г. М. Интегральное представление функций в строго псевдовыпуклых областях и приложения к $\bar{\partial}$-задаче.— «Мат. сб.», 1970, т. 79, № 2, с. 300—308.
181. Хенкин Г. М. Аппроксимация функций в псевдовыпуклых областях и теорема З. Л. Лейбензона.— «Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. math., astron. et phys.», 1971, vol. 19, N 1, p.37—42.
182. Хенкин Г. М. Равномерная оценка решения $\bar{\partial}$-задачи в области Вейля.— «Успехи мат. наук», 1971, т. 26, № 3, с. 211—212.
183. Хенкин Г. М. Продолжение ограниченных голоморфных функций с подмногообразий общего положения в строго псевдовыпуклой области.— «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1972, т. 36, № 3, с. 540—567.
184. Хенкин Г. М. Уравнение Г. Леви и анализ на псевдовыпуклом многообразии.— «Успехи мат. наук», 1977, т. 32, № 3, с. 57—118.
185. Хенкин Г. М. Уравнение Г. Леви и анализ на псевдовыпуклом многообразии. II.— «Мат. сб.», 1977, т. 102, № 1, с. 71—108.
186. Хенкин Г. М., Чирка Е. М. Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных.— В кн.: Современные проблемы математики. (Итоги науки и техники). М., ВИНИТИ, 1975, Т. 4. с. 13—142.
187. Херрера М. Вычеты на комплексных пространствах.— «Математика.», 1971, т. 154, с. 111—114. (Сб. пер.)
188. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., «Мир», 1965. 483 с.
189. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких переменных. М., «Мир», 1968. 279 с.
190. Хованский А. Т. Многогранник Ньютона и торические многообразия.— «Функциональный анализ и его приложения», 1977, т. 11, № 4, с. 56—67.
191. Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М., ИЛ, 1959. 163 с.
192. Хуа Р., Теплиц В. Гомология и фейнмановские интегралы М., «Мир», 1969. 223 с.
193. Цих А. К. Один случай распространения теоремы о разложении Фруассара и его применение к вычетам некоторых рациональных функций.— В кн.: Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск, Изд-во ИФ СО АН СССР, 1973, с. 167—180.
194. Цих А. К. О циклах, разделяющих нули аналитических функций в C^n.— «Сиб. мат. журн.», 1975, т. 16, № 5, с. 1118—1121.
195. Цих А. К. Кратность нуля голоморфного отображения в C^2.— В кн.: О голоморфных функциях многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1976, с. 131—138.
196. Цих А. К. Двумерные гомологии дополнения алгебраической

кривой в CP^2. — «Изв. вузов. Математика,» 1977, № 5, с. 122—124.

197. Цих А. К. О числе Милнора и кратности нуля голоморфного отображения.— В кн.: Комбинаторный и асимптотический анализ. Вып. 2. Красноярск, Краснояр. ун-т, 1977.

198. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.— Л., Гостехиздат, 1948. 396 с.

199. Чирка Е. М. Аналитическое представление CR-функций.— «Мат. сб.», 1975, т. 98, № 4, с. 591—623.

200. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. I. М., «Наука», 1976. 320 с.

201. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ Ч. II. М., «Наука», 1976. 400 с.

202. Шейнов В. П. Распространение формулы Крылова — Голузина на случай двух комплексных переменных.— «Учен. зап. МОПИ», 1962, т. 110, с. 133—140.

203. Шейнов В. П. Интегральное представление для круговых областей C^2 и некоторые его приложения.— «Сиб. мат. журн.», 1967, т. 8, № 6, с. 1423—1431.

204. Шойхет Д. М. О некоторых оценках радиуса однолистности голоморфных отображений в C^n и аналог теоремы Каратеодори.— В кн.: О голоморфных функциях многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1976, с. 139—148.

205. Эрве М. Функции многих комплексных переменных. М., «Мир», 1965. 165 с.

206. Южаков А. П. Вычисление интегралов от функций двух комплексных переменных по замкнутым двумерным контурам.— «Учен. зап. Урал. ун-та, Свердловск, 1960, вып. 23, № 2, с. 73—85.

207. Южаков А. П. К теории вычетов функций двух комплексных переменных.— «Учен. зап. МОПИ. Математика», 1960, т. 60, № 7, с. 153—162.

208. Южаков А. П. Некоторые случаи вычисления вычетов функций двух комплексных переменных разложением в ряд Лорана.— «Изв. Арм. ССР. Математика», 1962, т. 15, № 4, с. 113—124.

209. Южаков А. П. О вычетах функций многих комплексных переменных. — «Изв. вузов. Математика», 1964, № 5, с. 149—161.

210. Южаков А. П. Вычисление вычетов мероморфной функции многих комплексных переменных, знаменатель которой разлагается на линейные множители.— «Матем. зап. Урал. ун-та, Свердловск, 1967, т. 5, № 2, с. 116—124.

211. Южаков А. П. Одно условие кограницы по Лере и его применение к логарифмическому вычету.— «Сиб. мат. журн.», 1970, т. 11, № 3, с. 708—711.

212. Южаков А. П. Группы гомологий приводимой алгебраической кривой в CP^2.— В кн.: Тезисы докл. Всесоюз. конф. по теории функций компл. перем. Харьков, ФТИНТ АН УССР, 1971, с. 242—243.

213 **Южаков А. П.** Достаточное условие разделения аналитических особенностей в C^n и базис одного пространства голоморфных функций.— «Мат. заметки» 1972, т. 11, № 5, с. 585—596.
214. **Южаков А. П.** О вычетах рациональных функций двух переменных.— В кн.: Голоморфные функции многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1973, с. 181—191.
215. **Южаков А. П.** Обобщение разложения Лагранжа на произвольные неявные функции.— «Докл. АН СССР», 1974, т. 219, № 4, с. 822—824.
216. **Южаков А. П.** О применении кратного логарифмического вычета для разложения неявных функций в степенные ряды.— «Мат. сб.», 1975, т. 97, № 2, с. 177—192.
217. **Южаков А. П.** О представлении неявных функций в виде функциональных рядов.— В кн.: Комбинаторный и асимптотический анализ. Вып. 1. Красноярск, Красноярск. ун-т, 1975, с. 179—183.
218. **Южаков А. П.** Элементы теории многомерных вычетов. Красноярск, Красноярск. ун-т, 1975. 182 с.
219. **Южаков А. П.** Сведения из теории многомерных вычетов.— В кн.: Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск, «Наука», 1977, с. 224—261.
220. **Южаков А. П., Кривоколеско В. П.** Некоторые свойства линейно-выпуклых областей с гладкими границами в C^n.— «Сиб. мат. журн.», 1971, т. 12, № 2, с. 452—458.
221. **Южаков А. П., Куприков А. В.** О логарифмическом вычете.— В кн.: Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1973, с. 181—191.
222. **Южаков А. П., Ореховский З. Б.** Об аналитической функции, определяемой интегралом от некоторой рациональной формы C^n. - «Сиб. мат. журн.», 1975, т. 16, № 1, с. 191—194.
223. **Южаков А. П., Цих А. К.** О кратности нуля системы голоморфных функций.— «Сиб. мат. журн.», 1978, № 3.
224. **Ярмухамедов Ш.** Обобщение интегрального представления Мартинелли — Бохнера.— «Мат. заметки», 1974, т. 15, № 5, с. 739—747.
225. **Ahern P., Schneider R.** The boundary behaviour of Henkin's kernel.— «Pacif. J. Math.», 1976, vol. 66, N 1, p. 9—14.
226. **Aizenberg L. A., Braun R. B.** Über das Integral von Temlyakov.— «Math. Ann.», 1976, Bd. 224, S. 281—285.
227. **Andreotti A., Hill C. D. E.** E. Levi convexity and the Hans Lewy problem. Part I. Reduction to vanishing theorems.— «Ann. Scuola norm. Super. Pisa. Sci. fis. e mat.», 1972, vol. 26, N 2, p. 325—363.
228. **Andreotti A., Norguet F.** Problème de Levi pour les clásses de cohomologie.— «C. r. Acad. Sci.», 1964, vol. 258, p. 778—781.

229. Basener R. F., Peak points, barriers and pseudoconvex boundary points.— «Proc. of Amer. Math. Soc.», 1977, V. 65, N 1, p. 89—92.
230. Becheron D. Multiplicite d'intersection et formules integrales.— «Lect. Not. Math.», 1975, vol. 482, p. 168—179.
231. Behnke H., Peschl E. Konvexität in bezug auf analytische Ebenen in kleinen und grossen.— «Math. Ann.», 1935, vol. 111, N 2, p. 158—177.
232. Bergmann S. Über eine Integraldarstellung von Funktionen von zwei Komplexen Veränderlichen.— «Мат. сб.», 1936, т. 1, с. 242—257.
233. Bergmann S. Über die ausgezeichneten Randflächen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexer Veränderlichen.— «Math. Ann.», 1931, vol. 104, p. 611—636.
234. Bergmann S. The number of intersection points of two analytic surfaces in the space of two complex variables, Math. Zeitschr., 1960, vol. 72, N 3, p. 294—306.
235. Bochner S. Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula.— «Ann. Math.», 1943, vol. 44, p. 652.
236. Bochner S. Group invariance of Cauchy's formula in several variables.— «Ann. of Math.», 1944, vol. 45, p. 686—707.
237. Braun R. B. Temlyakovsche Integraldarstellungen.— «Math. Ann.», 1976, Bd, 221, S. 291.
238. Bremermann H. Über Aquivalenz der preudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete in Raum von n komplexen Veränderlichen.— «Math. Ann.», 1954, vol. 128, p. 63—91.
239. Bremermann H. On a generalized Dirichlet problem for plurisabharmonic functions and pseudoconvex domains.— «Trans. Amer. Math. Soc.», 1959, vol. 91, N 2, p. 246—276.
240. Bungart L. Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas.— «Trans. Amer. Math. Soc.», 1964, vol. 111, N 2, p. 317—344.
241. Bungart L. Boundary kernel functions for domains on complex manifolds.— «Pacific J. Math.», 1964, vol. 14, N 4, p. 1151—1164.
242. Caccioppoli R. Residui di integrali doppi e intersezioni di curve analitiche.— «Ann. Mat. pura ed appl.», 1949, vol. 29, N 4, p. 1—14.
243. Cantor I. M. Introduction á la teorie des residus.— «Lect. Not. Math.», 1970, vol. 205, p. 1—11.
244. Cayley A. Note sur une formule pour la reversion des séries. — «J. reine und Angew. Math.», 1856, Bd 52, N 1, S. 276—284.
245. Cole B., Range R. M. A — measures on complex manifolds and some applications.— «J. Junct. Anal.», 1972, vol. 11, N 4, p. 393—400.
246. Corput van der I. G. Sul calcolo neitralizzato dei residui.— «Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.», 1965, vol. 38, N 2, p. 166—170.
247. Didon M. F. Note sur une formule de calcul integral.— «Ann. scient.— «Ec. Norm. Sup.», 1873, vol. 2, N 2, p. 31—48.

248. **Dolbeault P.** Formes differentielles et cohomologie sur une variete analitique complexe.— «Ann. of Math.», 1956, vol. 64, N 2, p. 83—130.
249. **Dolbeault P.** Formes differentielles et cohomologie sur une variete analitique complexe. II.— «Ann. of Math.», 1957, vol. 65, N 2, p. 282—330.
250. **Dolbeault P.** Theory of residues and homology.— «Lect. Not. Math.», 1970, vol. 116, p. 152—163.
251. **Dolbeault P.** Courants residus des formes semi — meromorphes.— «Lect. Not. Math.», 1971, vol. 205, p. 56—70.
252. **Dolbeault P.** Valeurs principales et residus ser les espaces complexes d'apres M. Herrera et D. Libermann.— «Lect. Not. Math.», 1972, vol. 275, p. 14—26.
253. **Elzein F.** Comparisen des residues de Grothendieck et de Herrera.— «C. r. Acad. Sci., 1974, vol. 278, N 12, p. 863—866.
254. **Epe R.** Charakterisierung des Schilowrandes von Holomorphiegebieten.— «Schr. Math. Inst. Univ. Münster», 1963, vol. 25, p. 1—68.
255. **Fefferman C.** On the Bergman Kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains.— «Bull. Amer. Math. Soc.» 1974, vol. 80, N 4, p. 667—669.
256. **Fichera G.** Caratterizzazione della traccia, sulla frontiera di un campo, di una funzione analitica di piú variabili complesse.— «Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.», 1957, vol. 22, N 6, p. 706—715.
257. **Fischer W., Lieb I.** Lokale Kerne und beschränke Lösungen für den $\bar{\partial}$-operator auf q-konvexen Gebieten.— «Math. Ann.», 1974, Bd 208, N 3, S. 249—265.
258. **Foland G. B., Kohn J. J.** The Neumann problem for the Gauchy-Riemann complex.— «Ann. Math. Stud.», 1972, vol. 75, p. 1—146.
259. **Forelli F., Rudin W.** Projections on spaces of holomorphic functions in buels.— «Indiana Univ. Math. J.», 1974, vol. 24, N 6, p. 593—602.
260. **Gleason A. M.** The abstract theorem of Cauchy-Weil.— «Pacific J. Math.», 1962, vol. 12 N 2, p. 511—525.
261. **Good I. J.** Generalizations to several variables of Lagrange's expansions, with applications to stochastic processes.— «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1960, vol. 56, N 4, p. 367—380.
262. **Gordon G.** The residues calculus in several complex variables.— «Lect. Not. Math.», 1974, vol. 409, p. 430—438.
263. **Gramsch B.** Über das Cauchy-Weil-Integral für Gebiete mit beliebigen Rand.— «Archiv Math.», 1977, vol. 28, N 3, p. 409—421.
264. **Grauert H.** On Levi's Problem and the imbedding of real-analytic manifolds.— «Ann. of Math.», 1958, vol. 68, p. 460—472.
265. **Grauert H., Lieb I.** Das Ramirersche Integral und die Lösung der Gleichung df-α imbereich der beschränkten Formen.— «Rice Univ. Stad.», 1970, vol. 56, N 2, p. 29—50.

266. **Greiner P. C., Kohn J. J., Stein E. M.** Necessary and sufficient conditions for the solvability of the Lewy equation.— «Proc. Nat. Acad. USA», 1975, vol. 72, N 9, p. 3287—3289.
267. **Griffiths P. A.** The residue calculus and some transcendental results in algebraic geometry.— «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1966, vol. 55, N 5, p. 1303—1309.
268. **Griffiths P. A.** On the periods of certain rational integrals. «Ann. of Math.», 1969, vol. 90, p. 460—541.
269. **Griffiths P. A.** Periods of integrals on algebraic manifolds: summary of main results and discussion of open problems.— «Bull. Amer. Math. Soc.», 1970, vol. 76, N 2, p. 228—296.
270. **Harvey F. R., Lowson H. B.** Boundaries of complex analytic varieties.— «Bull. Amer. Math. Soc.», 1974, vol. 80, N 1, p. 180—184.
271. **Harvey F. R., Lowson H. B.** On boundaries of complex analytic varieties. I.— «Ann. Math.», 1975, vol. 102, N 2, p. 223—290.
272. **Hermite C.** Sur l'extension du théoréme de M. Sturm á un sustéme d'équations simultanées.— «C. r. Acad. Sci.», 1852, vol. 35, p. 52—54.
273. **Herrera M.** Rosidues on Copmlex Spaces.— «Lect. Not. Math.», 1970, vol. 155, p. 110—114.
274. **Herrera M.** Residues of forms with logarithmic Singularities.— «Rev. Union mat. Argent.», 1971, vol. 25, N 3—4, p. 379—387.
275. **Herrera M., Liberman D.** Residnes and Principal Values on Complex Spaces. — «Math. Ann.», 1971, vol. 194, N 4, p. 259—294.
276. **Hörmander L.** L^p-estimates for (pluri-) subharmonic functions. — «Math. Scand.», 1967, vol. 20, N 1, p. 65—78.
277. **Jacobi G. G. J.** De resolution Aequationum per series infinitas.— «J. reine und angew. Math.», 1830, Bd 6, S. 257—286.
278. **Jacobi G. G. J.** Theoremata nova algebraica cirva systema duarum dequationum inter daus variabiles propositarum.—«J. reine u. angew. Math.», 1835, Bd 14, p. 281—288.
279. **Kambartel F.** Orthonormale Systeme und Randintegralformeln in der Funktionentheorie mehreres Veränderlichen.— «Schr. Math. Inst. Univ. Münster», 1960, vol. 18, p. 1—52.
280. **Kerzman N.** Hölder and L^p-estimates for solutions of in strongly pseudoconvex domains.— «Comm. Pure and Appl. Math.» 1971, vol. 24, N 3, p. 301—379.
281. **Kerzman N.** The Bergman kernel function. Differentiability at the boundary.— «Math. Ann.», 1972, vol. 195, N 2, p. 149—158.
282. **Kerzman N., Stein E. M.**, The Szegö kernel in terms of Cauchy — Fantappie kernels.— «Duke math. J.», 1978, vol. 45, № 2, p. 197—224.
283. **King J. R.** Global residues and intersections on a complex manifold. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1974, vol. 192, p. 163—199.
284. **King J. R.** Residues and Chern classes.— «Proc. of Symp. in Pure Math.», 1975, vol. 27, p. 91—97.

285. **Kohn J. J.** Harmonics intergrals on strongy pseudoconvex manifolds. I.— «Ann. Math.», 1963, vol. 78, N 1, p. 112—148.
286. **Kohn J. J.** Harmonics integrals on strongly pseudoconvex manifolds. II.— «Ann. Math.», 1964, vol. 79, N 3, p. 450—472.
287. **Kohn J. J.** Boundaries of complex manifolds.— «Proc. Conf. Complex Analysis, Minueapolis 1964», Berlin — Heidelberg — N.-Y., 1965, p. 81—94.
288. **Kohn J.J., Rossi H.** On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold.— «Ann. Math.» 1965, vol. 81, N 3, p. 451—472.
289. **Koppelman W.** The Cauchy integral for functions of several complex variables.— «Bull. Amer. Math. Soc.», 1967, vol. 73, N 3, p. 373—377.
290. **Koppelman W.** The Cauchy integral for differential forms.— «Bull. Amer. Math. Soc.», 1967, vol. 73, N 4, p. 554—556.
291. **Koranyi A.** The Poisson integral for generalized halfplanes and symmetric domains.— «Ann. of Math.», 1965, vol. 82, N 2, p. 332—350.
292. **Koranyi A., Pukansky J.** Holomorphic functions with positive real part on policylinder.— «Trans. Amer. Math. Soc.», 1963, vol. 108, N 3, p. 449—456.
293. **Korányi A., Vagi S.** Singular integrals on homogeneous spaces and some problems of classical analysis.— «Ann. Scuola norm. super. Pisa, Sci. fis. e mat.», 1972, vol. 25, N 4, p. 575—648.
294. **Laville G.** Rèsolution du $\partial\bar\partial$ avec croissance dans des ouverts pseudoconvexes ètoilès de $\mathbf{C}^n$.— «C. r. Acad. sci.», 1972, vol. 274, N 7, p. 554—556.
295. **Laville M. G.** Decomposition des fonctions dans un domaine strictement pseudoconvexe.— «C. r. Acad. Sci.», 1974, vol. 279, p. 549—550.
296. **Leeuw de K.** Functions on circular subsets of the space of n complex variables.— «Duke Math. J.», 1957, vol. 24, N 3, p. 415—431.
297. **Lefshetz S.** On the residues of double integrals to an algebraic surfaces.— «The Quart. J. Math. Oxford», 1916, vol. 47, p. 333—343.
298. **Levi E. E.** Studii sui punti singolari essenziali delle funsioni analitiche di due o pin variabili complesse.— «Ann. mat. pura ed appl.», 1910, vol. 17, N 3, p. 61—87.
299. **Lewi H.** On the local character of the solutions of a typical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables.— «Ann. of Math.», 1956, vol. 64, N 3, p. 514—522.
300. **Lewi H.** An example of a smooth linear partial differential equation without solution.— «Ann. of Math.», 1957, vol. 66, p. 155—158.
301. **Lieb J.** Die Cauchy — Riemannschen Differential — gleichungen auf streng Gebieten. Beschränkte Lösungen. — «Math. Ann.», 1970, Bd 190, N 1, S. 6—44.

302. **Lieb J.** Die Cauchy — Riemannschen Differential — gleichungen Gebieten. Stetige Randwertr.—«Math. Ann.», 1972, Bd. 199, N 3, S. 241—256.
303. **Macaulay F. S.** Algebraic Theory of Modular Systems, Cambridge, 1916.
304. **Martineau A.** Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes.— «Math. Ann.», 1966, vol. 163, N 1, p. 62—88.
305. **Martineau A.** Indicatrices des fonctionnelles analytiques et inversion de la transformation de Fourier-Borel par la transformation de Laplace.— «C. r. Acad. Sci.», 1962, vol. 255, p. 1845—1847, 2880—2890.
306. **Martineau A.** Sur la notion d'ensemble fortement linéellement convexe. Prep. univ. de Montpellier, 1966. 18 p.
307. **Martineau A.** Sur la notion d'ensemble fortement linéellementconvexe.— «Ann. Acad. Brasil.», 1968, vol. 40, N 4, p. 427—435.
308. **Martinelli E.** Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di piú variabili complesse.— «Mem. r. Acad. Ital.», 1938, vol. 9, p. 269—283.
309. **Martinelli E.** Sulle estensioni della formula integrale di Cauchy alle funzioni analitiche di piu variabili complesse.— «Ann. mat. pura ed appl.», 1953, vol. 34, N 4, p. 277—347.
310. **Martinelli E.** Contributi alla teoria dei residui per le funsioni di due variabili complesse— «Ann. mat. pura ed appl.», 1955, vol. 39, N 4, p. 335—343.
311. **Martinelli E.** Sulla determinazione di una funzione analitica di piú variabili complesse in un campo, assegnatano la traccia sulla frontiera.— «Ann. mat. pura ed appl.», 1961, vol. 55, p. 191—202.
312. **Martinelli E.** Sopra una formula di Andreotti-Norquet.— «Boll. unione mat. ital.», 1975, vol. 11, N 3, p. 455—457.
313. **Nagel A., Rudin W.** Moebius-invariant function spaces on balls and spheres. — «Duke Math. J.», 1976, vol. 43, p. 841—865.
314. **Nirenberg R.** On the H. Levy extension phenomenon.— «Trans, Amer. Math. Soc.», 1972, vol. 168, p. 337—356.
315. **Norguet F.** Sul les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes.— «Bull. soc. Math. France», 1954, vol. 82, p. 137—159.
316. **Norguet F.** Derivees partielles et residus de formes differentielles sur une variete analitique complexe.— «Seminaire d'Analyse (P. Lelong). Sculte des Sciences de Paris», 1958—1959, N 10, p. 1—24.
317. **Norguet F.** Sur la theorie des residus.— «C. r. Acad. Sci.», 1959, vol. 248, p. 2057—5059.
318. **Norguet F.** Representations intégrales des fonctions de plusieurs variables complexes.— «C. r. Acad. Sci.», 1960, vol. 250, N 10, p. 1780—1782.
319. **Norguet F.** Problémes sul les formes differentielles et les courants.— «Ann. Inst. Fourier.», 1961, vol. 11, p. 1—82.

320. Norguet F. Introduction à la theorie cohomologique des residus.— «Lect. Not. Math.», 1970, vol. 205, p. 34—56.
321. Norguet F. Introduction aux fonctions de plusieurs variables complexes representations integrales.— «Lect. Not. Math.», 1974, vol. 409, p. 1—97.
322. Ovrelid N. Integral representation formulas and L^p-estimates for the $\bar{\partial}$-equation.— «Math. Scand.», 1971, vol. 29, N 1, p. 137—160.
323. Oka K. Sur les fonction de plusieurs variables. IX, Domaines finis sans point critique intérrieurs.— «Jap. J. Math.», 1953, vol. 23, p. 97—155.
324. Ono I. An analytic kernel in several complex variables.— «Scien. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku», 1956, vol. 5, p. 260—266.
325. Opial Z., Siciak J. Integral formulas for functions holomorphic in convex n-circular domains.— «Zes. nauk. uniwer. Jagiellons.», Prace matem., 1963, vol. 9, N 77, p. 67—75.
326. Ostrovski A. Ledeveloppement de Taylor de la fonction inverse.— «C. r. Acad. Sci.», 1957, vol. 244, N 4, p. 429—430.
327. Patie D. I. Recapturing H^2-function on a polydics.— «Trans. Amer. Math. Soc.», 1974, vol. 188, p. 97—103.
328. Percus I. K. A Note extension of the Lagrange inversion Formula.— «Comm. on pure and appl. Math.», 1964, vol. 17, N 2, p. 137—146.
329. Picard E. Sur les périodes des integrales doubles.— «C. r. Acad. Sci.», 1886, vol. 102, p. 250—253.
330. Picard E. Sur le calcul des périodes des integrales doubles. «C. r. Acad. Sci.», 1886, vol. 102, p. 410—412.
331. Poincare H. Sur les résidus des integrales doubles.— «C. r. Acad. Sci.», 1886, vol. 102, p. 202—204.
332. Poincare H. Sur les résidus des intégrales doubles.— «Acta Math.», 1887, vol. 9, p. 321—380.
333. Ramires de Arellano E., Ein Divisionsproblem und Randintegraldarstellungen in der komplexen Analysis.— «Math. Ann.», 1970. Bd 184. N 3, S. 172—187.
334. Range R. M., Siu Yum-Tong. Uniform estimates for the $\bar{\partial}$-equation on domains with piecewise smooth strictly pseudoconvex boundaries.— «Math. Ann.», 1973, vol. 206, N 4, p. 325—354.
335. de Rham G. Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples. — «Enseign. math.», 1936, vol. 35, p. 213—228.
336. Rizza G. B. Su diverse estensioni dell'invariante di E. E. Levi nella teoria delle funzioni di piú variabili complesse. — «Ann. Mat. pura ed appl.», 1957, vol. 44, p. 73—89.
337. Roos G. Formules intégrales pour les formes différentielles sur C^n.— «Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.», 1972, vol. 26, N 1, p. 171—179.
338. Roos G. L'intégrale de Cauchy daus C^n.— «Lect. Not. Math.», 1974, vol. 409, p. 176—195.
339. Sack R. A. Interpretation of Lagrange's expansion and its generalization to several as integration formulas.— «J. Soc. Indust. Appl. Math.», 1965, vol. 13, N 1, p. 1—15.

340. Sack R. A. Generalization of Lagrange's expansion for functions of several implicity defind variables.— «J. Soc. Indust. Appl. Math.», 1965, vol. 13, N 4, p. 913—926.
341. Schaeffer D. G. An extension of Hartogs' theorem for domains whose boundary is not smooth.— «Proc. Amer. Math. Soc.», 1970, vol. 25, N 3, p. 714—715.
342. Sebastiani M. Un exposé de la formula de Leray-Norguet.— «Boll. Soc. Brasil. Mat.», 1970, vol. 1, N 2, p. 47—57.
343. Segre B. Sull'estensione formula integrale di Cauchy e sui re sidui degli integrali n-pli nella teoria della funzioni di n-variabili complesse.— Jn: Atti del primo Congresso dell' Unione matematica italiana. Bologna N. Zanicholli, 1938, p. 174—180.
344. Severi F. Funzioni analitiche e forme differenziali.— Jn: Atti del quatro Congresso dell'Unione matematica italiana. T. I. Roma, Edizioni Gremonese, 1953, p. 125—140.
345. Shih W. Une remarque sur la formule de residus.— «Bull. Amer. Math. Soc.», 1970, vol. 76, N 4, p. 717—718.
346. Skoda H. Valeurs au bord pour les solutions de l'operateur d'' et caracherisation des zeros des fonctions de la classe de Nevanlinna. — «Bull. Soc. Math. France», 1976, vol. 104, p. 225—299.
347. Solomin I. E. Le résidu logarithmiqhue dans les intersections how complétes.— «C. r. Acad. Sci.», 1977, vol. 284, N 17, p. 1061—1064.
348. Sommer F. Über die Integralformeln in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen.— «Math. Ann.», 1952, Bd 125, S. 172—182.
349. Sorani G. Sull' indicatore logaritmico per e funsioni di piu variabili complesse.— «Rendiconti di Matem. e appl.», 1960, vol. 19, N 1—2, p. 130—142.
350. Sorani G. Sui Residui delle forme differenziali di una varietá analitica complessa.— «Rendiconti di Matem. e appl.», 1962, vol. 21, p. 1—23.
351. Sorani G. Integrals representations of holomorphic functions.— «Amer. J. of Math.», 1966, vol. 88, N 4, p. 737—746.
352. Stein E. M. Boundary behaviour of holomorphic function of several complex variables. Princeton University Press, 1972, p. 72.
353. Stein E. M. Singular integrals and estimates for the Cauchy — Riemann equations.— «Bull. Amor. Math. Soc.», 1973, vol. 79, N 2, p. 440—445.
354. Stieltyes T. I. Sur une generalisation de la serie de Lagrange.— «Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.», 1885, Ser. 3, p. 93—98.
355. Stoll M. Integral formulae for pluriharmonic function of bounded symmetric domains.— «Duke Math. J.», 1974, vol. 41, N 2, p. 393—404.
356. Stout E. L. An integral formula for holomorphic functions on strictly pseudoconvex hypersurfaces.— «Duke Math. J.», 1975, vol. 42. N 2, p. 347—356.

357. **Stout E. L.** H^p-functions on strictly pseudoconvex domains.— «Amer. J. Math.», 1976, vol. 98, N 3, p. 821—852.
358. **Stout E. L.** The boundary values of holomorphic functions of several complex variables.— «Duke Math. J.», 1977, vol. 44, N 1, p. 105—108.
359. **Sturrock R. A.** Generalization of the Lagrange Expansion with Application to Physical Problems.— «J. of Math. Physics», 1960, vol. 1, N 5, p. 405—408.
360. **Sylvester I. I.** Note on Burman's Law for the Inversion of the Independent Variable.— «Philos. Mag.», 1854, vol. 8, p. 535—540.
361. **Sylvester I. I.** On the change of systems of independent variables.— «Quart. J. Math.», 1857, vol. 1, p. 43—56.
362. **Venugopalkrishna** U. Fredholm operators associated with strongly pseudoconvex domains in C^n.— «J. Funct. Anal.», 1972, vol. 9, N 3, p. 349—373.
363. **Weil A.** L'integrale Cauchy et les fonctions de plusieurs variables.— «Math. Ann.», 1935, Bd 111, S. 178—182.
364. **Weinstock B. M.** Continuous boundary values of analytic functions of several complex variables.— «Proc. Amer. Math. Soc.», 1969, vol. 21, N 2, p. 463—466.
365. **Weinstock B. M.** An approximation theorem for $\overline{\partial}$-closed forms of type $(n, n-1)$.— «Proc. Amer. Math. Soc.», 1970, vol. 26, N 4, p. 625—628.
366. **Wirtinger W.** Ein Integralsatz über analitische Gebilde im Gebiete von mehreren komplexen Veränderlichen.— «Monatshefte für Math. und Phys.», 1937, vol. 45, p. 418—431.

Дополнение к литературе

367. **Айзенберг Л. А., Цих А. К.** О применении многомерного логарифмического вычета к системам нелинейных алгебраических уравнений.— «Сиб. мат. журн.», 1979, т. 20.
368. **Владимиров В. С.** О представлении Коши — Бохнера.— «Изв. АН СССР, сер. матем.», 1972, т. 36, № 3, с. 534—539.
369. **Газиев А.** О предельных значениях интеграла Мартинелли — Бохнера.— «Изв. вузов. Математика», 1978, № 9, с. 25—30.
370. **Гиндикин С. Г., Хенкин Г. М.** Интегральная геометрия для $\overline{\partial}$-когомологий в q-линейно вогнутых областях в CP^n.— «Функциональный анализ и его прил.», 1978, т. 12, № 4, с. 6—23.
371. **Даутов Ш. А., Хенкин Г. М.** Нули голоморфных функций конечного порядка и весовые оценки решений $\overline{\partial}$-уравнения.— «Матем. сборник», 1978, т. 107, № 2, с. 163—174.
372. **Какичев В. А.** Представления функций, голоморфных в круговых бицилиндрических областях интегралами типа Коши с плотностью специального вида.— «Теория функций, функциональный анализ и их прил.», 1974, т. 19, с. 3—23.

373. **Какичев В. А.** Двумерная задача типа задачи Римана, содержащая интегро-дифференциальные операторы.— «Изв. АН АрмССР, сер. матем.», 1977, т. 12, № 3, с. 189—203.
374. **Какичев В. А.** Методы решения некоторых краевых задач для аналитических функций двух комплексных переменных. Тюмень, Тюменск. ун-т, 1978. 124 с.
375. **Какичев В. А., Зон Ле-динь.** Интеграл Шварца и задача Шварца для биполуплоскости.— В кн.: Математический анализ и его приложения. Ростов-Дон, Изд-во РГУ, 1977, с. 29—38.
376. **Какичев В. А., Шелкович В. М.** Решение краевых задач теории аналитических функций многих переменных в алгебрах Владимирова.— «Матем. заметки», 1977, т. 22, № 1, с. 51—60.
377. **Кытманов А. М.** Об интегральном характеристическом свойстве $\bar{\partial}$-замкнутых комплексных дифференциальных форм.— «Сиб. мат. журн.», 1978, т. 19, № 4, с. 788—792.
378. **Кытманов А. М., Айзенберг Л. А.** О голоморфности непрерывных функций, представимых интегралом Мартинелли — Бохнера.— «Изв. АН Арм ССР, сер. матем.», 1978, т. 13, № 2, с. 158—169.
379. **Романов А. В.** Сходимость итераций оператора Мартинелли — Бохнера и уравнение Коши — Римана. — «Докл. АН СССР», 1978, т. 242, № 4, с. 780—783.
380. **Романов А. В.** Спектральный анализ интеграла Мартинелли — Бохнера для шара в C^n и его приложения.— «Функциональный анализ и его прил.», 1978, т. 12, № 3, с. 86—87.
381. **Хенкин Г. М.** Решения с оценками уравнений Г. Леви и Пуанкаре — Лелона. Построение функций класса Неванлинны с заданными нулями в строго псевдовыпуклой области.— «Докл. АН СССР», 1975, т. 224, № 4, с. 771—774.
382. **Южаков А. П.** О применении двойственности де Рама к локальным вычетам.— В кн.: О голоморфных функциях многих комплексных переменных. Красноярск, Изд-во ИФ СО АН СССР, 1976, с. 191—194.
383. **Янушаускас А. И.** Аналитическая теория эллиптических уравнений. Новосибирск, «Наука», 1979.
384. **Ярмухамедов Ш.** Интегральная формула Мартинелли — Бохнера и принцип Фрагмена — Линделёфа. — «Докл. АН СССР», 1978, т. 243, № 6, с. 1414—1417.
385. **Aronzajn N.** Calculus of residues and general Cauchy formulas in C^n. — «Bull. scien. Math.», 1977, Bd. 101, f. 4, p. 319—352.
386. **Bartolomeis P., Lunducci M.** Reguirisation an bord et probleme de Cauchy pour l'operateur $\bar{\partial}$ a croissance de «type Hardy».— «C. r. Acad. Sci.», 1977, vol. 285, N 15, p. 209—212.
387. **Beauville A.** Une notion de residus en geometrie analitique.— «Lect. Not. Math.», 1971, 205, p. 183—203.
388. **Bonami A., Lohouè N.** Noyaux de Szegö de certains domaines de C^n et inègalitès L^p.— «C. r. Acad. Sci.», 1977, t. 285, N 11, p. 699—702.
389. **Carrell J. B.** A remark on the Grothendieck residue map.— «Proc. of Amer. Math. Soc.», 1978, vol. 70, N 1, p. 43—48.

390. **Coifman R. R., Rochberg R., Weiss G.** Factorization theorems for Hardy spaces of complex spheres.— «Proc. Symp. Pure Math.», 1977, vol. 30, N 1, p. 119—121.
391. **Coleff N., Herrera M.** Fibering of residual currents.— «Proc. Symp. Pure Math.», 1977, vol. 30, N 1, p. 11—19.
392. **Diederich K.** Some recent developments in the theory of Bergman kernel function: a survey.— «Proc. Symp. Pure Math.», 1977, vol. 30, N 1, p. 127—137.
393. **Dolbeault P., Poly J.** Differential forms with subanalytic singularities; integral cohomology; residues.— «Proc. Symp. Pure Math.», 1977, v. 30, N 1, p. 255—261.
394. **D'Angelo J. P.** A note of the Bergman kernel.— «Duke math. J.», 1978, v. 45, N 2, p. 259—265.
395. **Elzein F.** Residus on geometrie algebrique — «Composito Math.», 1971, t. 23, p. 379—405.
396. **Gindikin S., Henkin G.** Radon Transform for $\bar\partial$-cohomology on q-linearly conceve domains.— «C. r. Acad. Sci.», 1978, t. 287, N 4, p. 209—212.
397. **Griffiths P., Harris J.** Residues and zero — cycles on algebraic varieties.— «Ann. of Math.», 1978, v. 108, N 3, p. 461—508.
398. **Henkin G. M., Lieterer J.** Global integral formulas for solving the $\bar\partial$-equation on Stein manivolds.— «Preprint ZiMM der AdW», Berlin, 1979, S. 1—51.
399. **Kerzman N.** Remarks on estimates for the $\bar\partial$-equation.— «Lect. Not. Math.», 1973, v. 336, p. 111—124.
400. **Landucci M.** Uniform bounds on derivatives for the $\bar\partial$ — problem in the polydisk.— «Proc. Symp. Pure Math.», 1977, v. 30, N 1, p. 177—180.
401. **Lu Qi — keng.** On the Cauchy - Fantappiè formula.— «Acta Math. Sinica», 1966, v. 16, N 3, p. 344—363.
402. **Melchout Z.** Valeur principale et residu simple des formes a singularites essentielles.— «Lect. Not. Math.», 1975, t. 482, p. 190—215.
403. **O'Brian N. R.** Zeroes of holomorpfic vector fields and the Grothendick residue.— «Bull. London Math. Soc.», 1975, v. 7, N 1, p. 33—38.
404. **Ostrowski A. M.** On Kroneker's elimitation theory.— «J. reine und angew. Math.», 1977, v. 296, p. 37—57.
405. **Rady G.** Meromorphic and semi-meromorphic forms on a complex analytic surfaces.— «C. r. Acad. Sci.», 1978, t. 287, N 3, p. 125—128.
406. **Range R. M.** Hölder estimates for $\bar\partial$ on convex domains in $\mathbb{C}^2$ with real analytic boundary.— «Proc. Symp. Pure Math.», 1977, v. 30, N 2, p. 31—33.
407. **Roos G.** Formules intègrales pour les formes différentielles sur $\mathbb{C}^n$. II.— «Lect. Not. Math.», 1977, v. p. 31—51.
408. **Sato M.** Regularity of hyperfunction solutions of partial differential eqyations.— In.: Actes Congress Intern. Math., Nice, 1970.

409. **Sibner L. M., Sibner R. J.** A note on the Atiyah — Bott fixed point formula.— «Pacif. J. of Math.», 1974, v. 53, N 2, p. 605—609.
410. **Skoda H.** Zèros des fonctions de la dasse de nevanlinna dans les ouverts strictement preudo-convexes.— C. r. Acad. Sci.», 1975, t. 280, p. 125—128.
411. **Toledo D., Tong L.** The holomorphic Lefschetz formula.— «Bull. Amer. Math. Soc.», 1975, v. 81, N 6, p. 1133—1135.
412. **Tutschke W.** Die Cauchysche Integralformel für morphe Funktion mehrerer komplexer Variabler.— «Math. Nachrichten», 1972, b. 54, h. 2, s. 361—385.
413. **Vladimirov V. S.** Holomorphic functions of several complex variables with non-negative imaginary part and some applications.— In.: Complex analysis and its applications. Vienna, 1976, v. 3, p. 259—287.
414. **Weinstock B. M.** Uniform approximation and the Cauchy — Fantappie integral.— «Proc. Symp. Pure Math.», 1977, v. 30, N 2, p. 187—191.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Лев Абрамович Айзенберг
Александр Петрович Южаков

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ВЫЧЕТЫ В МНОГОМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ

Ответственный редактор
Шамиль Абдуллович Даутов

Утверждено к изданию Институтом физики им. Л. В. Киренского СО АН СССР

Редактор издательства *Л. В. Нонкина*
Художественный редактор *Т. Ф. Каминина*
Художник *В. В. Растегаев*
Технический редактор *Н. М. Бурлаченко*
Корректоры *Т. О. Неводова, И. А. Литвинова*

ИБ № 9975

Сдано в набор 22.08.79. Подписано к печати 06.11.79. МН-02292. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Бумага тип. № 2. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 19,3. Уч.-изд. л. 18. Тираж 2800 экз. Заказ № 249. Цена 2 руб.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.