

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ
И ТЕХНИКИ

ИСТОРИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск
XXIV



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1979

Сборник содержит обзор советских исследований по истории математики за шестьдесят лет (1917—1977), статьи по истории анализа и по истории ряда других математических дисциплин.

В разделе публикаций впервые печатаются письма польского математика В. Серпинского к советскому математику Н. Н. Лузину.

Издание рассчитано на математиков и историков науки.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

А. П. Юшкевич (отв. редактор),
С. С. Демидов, А. И. Маркушевич, А. Д. Соловьев,
Е. П. Славутин (секретарь редакции)

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции	7
А. П. Юшкевич (Москва). Советские исследования по истории математики за шестьдесят лет (1917—1977)	9

Из истории математического анализа

В. С. Широков (Горький). Галилей и средневековая математика	88
И. А. Головинский (Москва). Интерполяционные ряды Лапласа	104
Е. П. Ожигова (Ленинград). Об истоках символических и комбинаторных методов в конце XVIII — начале XIX вв. . .	121
С. С. Петрова (Москва), Д. А. Романовская (Варшава). Об универсальном ряде Гёне-Вронского	158
С. Банах. О высшем законе Гёне-Вронского (пер. с франц. С. С. Петровой).	176
А. П. Юшкевич (Москва). К. Ф. Гаусс и Ж. А. да Кунья . .	186
С. С. Демидов (Москва). К истории теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Работы И. Ф. Пфаффа и О. Коши	191
Ф. А. Медведев (Москва). Аксиома выбора в первых работах Г. Кантора по теории множеств	218

Статьи различного содержания

В. П. Визгин (Москва). Гильберт и проблема общековариантных уравнений гравитации	226
Б. А. Розенфельд (Москва). О геометрических работах Дункана Соммервиля (к столетию со дня рождения)	247
Э. Кноблех (Зап. Берлин). Рукописи Лейбница 1672—1676 гг. (пер. с нем. И. А. Готовинского)	258

Е. И. Славутин (Москва). Общий метод решения неопределенных уравнений второй степени в «Арифметике» Диофанта	310
Н. В. Гусев (Москва), Л. Е. Майстров (Москва). Математика орнаментов Дионисия	331
А. К. Петренко (Москва), О. Л. Петренко (Москва). Машина Беббиджа и возникновение программирования	340

Публикации

<u>П. Г. Мельников</u> (Ленинград). Вацлав Серпинский . . .	361
Письма В. Серпинского к Н. Н. Лузину (публикация <i>В. А. Волкова и Ф. А. Медведева</i>)	366
Именной указатель	374

SOMMAIRE

Editorial	7
A. P. Youshkevitch (Moscou). Les recherches soviétiques sur l'histoire des mathématiques dans les années 1917—1977	9

Problèmes d'histoire de l'analyse infinitésimal

V. S. Chirokov (Gorki). Galilée et les mathématiques médiévales	88
I. A. Golovinski (Moscou). Séries d'interpolation de Laplace	104
E. P. Ogigova (Leningrad). Sur les origines des méthodes symboliques et combinatoires à la fin du XVIII ^e et au début du XIX ^e siècle	121
S. S. Petrova (Moscou), D. A. Romanovska (Varsovie). Sur la série universelle de Hoëné-Wronski	158
S. Banach. Über das «Loi suprême» von J. Hoëné-Wróński (trad. par. S. S. Petrova)	176
A. P. Youshkevitch (Moscou). C. F. Gauss et J. A. da Cunha	186
S. S. Demidov (Moscou). Pour l'histoire de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Recherches de J. F. Pfaff et de A. Cauchy	191
F. A. Medvedev (Moscou). L'axiome de choix dans les premiers travaux de G. Cantor sur la théorie des ensembles	218

Varia

V. P. Vizguine (Moscou). Hilbert et la déduction des équations générales covariantes de la gravitation	226
B. A. Rosenfeld (Moscou). Sur l'oeuvre géométrique de Duncan Sommerville (en commémoration du centenaire de sa naissance)	247
E. Knobloch (Berlin—West). Übersicht über die unveröffentlichten mathematischen Arbeiten von Leipzig, 1672—1676 (trad. par I. A. Golovinski)	258

E. I. Slavoutine (Moscou). La méthode générale de solution des équations indéterminées du 2 ^e degré dans les «Arithmétiques» de Diophante	310
N. V. Goussev (Moscou), L. E. Maïstrov (Moscou). Les éléments mathématiques des ornements de Dionisii	331
A. K. Petrénko (Moscou), O. L. Petrénko (Moscou). La machine de Babbage et les origines de la programmation	340

Publications

I. G. Melnikov (Leningrad). Wacław Sierpinski	361
Letters de W. Sierpinski à N. N. Lousin (publiées par <i>V. A. Volkov</i> et <i>F. A. Medvedev</i>)	366
Index des noms	374

ОТ РЕДАКЦИИ

Двадцать четвертый выпуск «Историко-математических исследований» открывается обзором советских исследований по истории математики за 60 лет, прошедших со времени, когда свершилась Великая Октябрьская социалистическая революция. Несмотря на довольно большой размер этой статьи, изложение весьма сжатое, и к ней не приложена библиография вопроса: в противном случае объем обзора пришлось бы удвоить или даже утроить.

Далее следует группа статей из истории математического анализа. Первая из них посвящена роли средневековой теории калькуляций или широт и долгот форм в формировании математических воззрений Галилея, — таким образом, мы, как и в XXI выпуске, продолжаем публикацию работ по проблематике, с блеском разрабатывавшейся ранее В. П. Зубовым.

Вторая статья раздела имеет своим предметом интерполяционные ряды Лапласа; она служит продолжением работы, помещенной в XII выпуске. Три дальнейшие статьи, частично примыкающие к только что указанной, тесно связаны между собой: все они трактуют о развитии символических и комбинаторных методов в конце XVIII и начале XIX в., — методов, значение которых с течением времени все возрастало. Одна из этих статей посвящена «универсальному ряду» крупнейшего польского математика XIX в. Гёне-Вронского, и в дополнение к ней мы помещаем перевод небольшой и мало известной работы другого выдающегося польского математика С. Банаха, принадлежащего уже XX веку; именно Банах впервые дал «универсальному ряду» Вронского современную интерпретацию. После небольшой заметки о положительной оценке, данной Гауссом теории показательной и логарифмической функции да Кунья (ср. XVIII выпуск «Исследований»), идет работа о до сих пор мало изученной теории уравнений с частными производными первого порядка в трудах Пфаффа и Коши. В последней, восьмой статье раздела исследу-

ется роль, которую неявно играла аксиома выбора Цермело в ранних работах Г. Кантора по теории множеств.

В разделе статей различного содержания шесть работ. Он открывается статьей о различных путях, которыми одновременно и в главном независимо друг от друга шли к открытию общей теории относительности Эйнштейн и Гильберт; эта тема, в равной мере важная для истории математики и физики, представляет также интерес с точки зрения психологии научного творчества. Вторая статья раздела посвящена творчеству крупнейшего английского геометра конца XIX и первой половины XX в. Соммервиля.

Вслед за этими двумя работами помещена статья, в которой дан обзор всех математических рукописей Лейбница 1672—1676 гг., т. е. времени формирования дифференциального и интегрального исчисления (рукописи эти до сих пор не опубликованы). Эта статья примыкает по содержанию, с одной стороны, к статье о рукописях Ньютона в XXII выпуске «Исследований», а с другой стороны, к статье о Лейбнице в XXIII выпуске, также представляющей собой один из докладов на названном симпозиуме. Три последние статьи раздела посвящены соответственно общему методу Диофанта решения неопределенных уравнений второй степени; геометрическим приемам выдающегося средневекового русского художника Дионисия; наконец, раннему этапу теории программирования, непосредственно связанному с проектированием машины Беббиджа.

Раздел публикаций содержит письма выдающегося польского математика В. Серпинского к Н. Н. Лузину. Эпистолярное наследие основоположника Московской школы теории функции действительного переменного сохранилось только в небольшой мере (в частности, письма Лузина Серпинскому погибли во время войны), и здесь ценна каждая находка. Эта публикация, предваряемая биографией Серпинского, дополняет опубликованные в XXIII выпуске письма Лузина, адресованные французскому математику А. Данжуа.

* * *

Редакция с прискорбием сообщает, что во время печатания данного выпуска скончался один из его авторов кандидат физико-математических наук Илья Григорьевич Мельников (1916—1979),

А. П. Юшкевич

СОВЕТСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ ЗА ШЕСТЬДЕСЯТ ЛЕТ (1917—1977)

А. П. Юшкевич

1. Дореволюционные исследования¹

Первые очень краткие сведения по истории математики стали появляться в печатных русских изданиях в XVIII в. — в предисловии к изложению «Начал» Евклида А. Таке (*Elementa geometriae planae et solidae*, 1654), русский перевод которого вышел в Петербурге в 1739 г., в некоторых речах и статьях академиков Х. Гольдбаха, Г. В. Крафта, С. К. Котельникова и др., в обзорах деятельности Петербургской академии наук. В 1789—1791 гг. в «Академических известиях» помещен был перевод части «Истории математики» Ж. Э. Монтюкла (1758); этот перевод не был доведен до конца.

В XIX и начале XX в. число публикаций по истории математики постепенно возрастало. Усилившийся в первые годы прошлого столетия интерес к культурно-историческому наследию России имел одним из следствий первое издание в 1828 г. сочинения по хронологии и вычислению пасхалий Кирика Новгородца, написанного в 1136 г.; за этим последовали издания таких рукописных памятников, как «Торговая книга» (1851), «Книга сошного письма 7137 года» (1853) и «Счетная мудрость» — факсимильный сборник нескольких рукописей XVII в. по арифметике и землемерию (1889). Статьи по истории

¹ Эта статья не содержит подробных библиографических ссылок на различные статьи, так как это потребовало бы увеличения ее объема на несколько десятков страниц. Библиографические сведения о многих упомянутых в ней работах имеются в книгах «Математика в СССР за тридцать лет» (М., 1948), «Математика в СССР за сорок лет» (М., 1959. Т. II), «Математика в СССР, 1958—1967» (М., 1969—1970. Т. II) и других справочных изданиях.

Для ныне здравствующих ученых даты рождения не указываются.

математики и о выдающихся математиках появлялись в энциклопедических словарях, в монографиях и других изданиях, связанных с памяtnыми датами. До сих пор сохраняют ценность «История императорского Московского университета» проф. С. П. Шевырева (1855) и «Императорский С. Петербургский университет в течение первых пятидесяти лет его существования» проф. В. В. Григорьева (1870), книги академика П. П. Пекарского «Наука и литература при Петре Великом» (1862) и «История императорской Академии наук в Петербурге в XVIII в.» (в 2-х т., 1870—1873), жизнеописания отдельных академиков XVIII в., опубликованные академиком М. И. Сухомлиновым (1874—1888), очерк истории физико-математического факультета Харьковского университета, написанный его профессором Д. М. Синцовым (1908), биографические словари деятелей Московского, Петербургского, Киевского и других университетов, а также некоторых высших учебных технических заведений.

До Великой Октябрьской социалистической революции в России было только два ученых — В. В. Бобынин и И. Ю. Тимченко, специализировавшихся в истории математики. Воспитанник Московского университета, В. В. Бобынин (1849—1919) был человеком широких интересов, огромной эрудиции и неутомимой энергии. В магистерской диссертации (1882) он изучил египетский папирус Райнда, расшифрованный пятью годами ранее, но главной заслугой его явилось первое систематическое изучение русских математических и астрономических рукописей XVII в. («Очерки истории развития физико-математических знаний в России XVII столетия», вып. 1—2. М., 1886—1893), цикл статей о математической культуре петровского времени («Эпоха государственного содействия развитию научных знаний», 1888—1892), а также издание трехтомного полного указателя печатной русской физико-математической литературы до 1816 г. (1886—1900). Многие годы Бобынин преподавал в средних военных учебных заведениях и на средства от своих заработков в 1885—1904 гг. издавал журнал «Физико-математические науки в их прошлом и настоящем», в котором его перу принадлежит большая часть всех материалов. Он же в 1882—1917 гг. читал в качестве приват-доцента первый (факультативный) курс истории математики в Московском университете.

Для IV тома «Лекций по истории математики» М. Кантора (1908), подготовленного под редакцией уже престарелого тогда Кантора группой ученых нескольких стран, Бобынин написал главу об элементарной геометрии во второй половине XVIII в. Отдельными вопросами истории математики в России XVIII в. занимались и другие лица. Так, специалист по вопросам методики Д. Д. Галанин опубликовал книгу «Л. Ф. Магницкий и его арифметика» (М., 1914).

В связи с начавшимся через несколько лет после смерти Н. И. Лобачевского расцветом изысканий по неевклидовой геометрии возник интерес к трудам и деятельности великого математика. В 1883—1886 гг. в Казани вышло полное собрание геометрических трудов Лобачевского, печатавшихся ранее по отдельности. Большой вклад в исследование научного наследия Лобачевского внес окончивший Петербургский университет и затем работавший в 1875—1907 гг. в Казанском университете профессор А. В. Васильев (1853—1929). В 1893—1913 гг. Васильев напечатал ряд статей и брошюр о Лобачевском, частью переведенных на иностранные языки; при этом он впервые обратил внимание на забытые открытия Лобачевского в алгебре и анализе и в 1909 г. опубликовал его руководство «Геометрия», рукопись которого в свое время не увидела света из-за неблагоприятного отзыва академика Н. И. Фусса. Другим важным событием явилось двухтомное издание сочинений П. Л. Чебышева под редакцией и с предисловием академиков А. А. Маркова и Н. Я. Сонина (1899—1907); ранее (1895) блестящий очерк жизни и творчества Чебышева опубликовал вскоре после его смерти А. М. Ляпунов, тогда профессор Харьковского университета, а впоследствии — академик. Третьему крупнейшему русскому математику XIX в. М. В. Остроградскому были посвящены речи, статьи и брошюры В. Г. Алексеева, Н. Е. Жуковского, Л. К. Лахтина, В. А. Стеклова (1902), приуроченные к столетию со дня его рождения.

Творчество крупного геометра К. М. Петерсона, воспитанника университета в Дерпте (Тарту), который положил в 60—80-е годы начало школе дифференциальной геометрии в Москве, было освещено в статьях московских профессоров Д. Ф. Егорова и Б. К. Млодзеевского (1903); Д. Ф. Егоров, Л. К. Лахтин, П. А. Некрасов, А. П. Ми-

нин дали анализ трудов по теории чисел и анализу выдающегося московского математика проф. Н. В. Бугаева (1904—1905). Вышло еще несколько книг, посвященных отдельным ученым, например академику В. Г. Имшенецкому (К. А. Андреев, 1911), и популярные биографии целого ряда выдающихся математиков прошлых веков.

Вслед за Бобыниным специально историей математики занялся одесский ученый, профессор Новороссийского (Одесского) университета И. Ю. Тимченко (1862—1939), магистерская диссертация которого «Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций» печаталась в «Записках» Новороссийского общества естествоиспытателей в 1892—1898 гг. Эта диссертация, в которой история вопроса прослежена до 1825 г., исключительно богата фактическим материалом и остается ценнейшим справочным пособием и в наше время. Очень содержательны были также разнообразные обширные дополнения Тимченко к его русскому переводу «A history of elementary mathematics» Ф. Кеджори (1896; рус. изд. 1910; 2-е изд. 1917). Заметим здесь же, что другой одесский математик, с 1922 г. профессор Московского университета, В. Ф. Каган (1869—1953) отдал большой второй том своей магистерской диссертации «Основания геометрии» (Одесса, 1907) истории этой проблемы во всех ее разветвлениях, доведя изложение до рубежа XIX—XX вв. (первый том содержит оригинальное аксиоматическое построение системы евклидовой геометрии).

К истории математики иногда обращались и другие математики, а также историки. Профессор Киевского университета М. Е. Ващенко-Захарченко (1825—1912) выпустил объемистую компилятивную «Историю математики» (Киев, 1883) до эпохи Возрождения. Широкую картину развития важнейших направлений развития математики до конца XVII в. нарисовал крупный деятель народного образования В. П. Шереметевский (ум. в 1919 г.) в обширном обзоре, специально написанном для его переработки «Элементов высшей математики» Г. Лоренца (в 2-х т. М., 1898—1901), голландский оригинал которой вышел под другим названием (*Leerboek der differentiaal en integraal rekening en van de eerste beginselen der analytische meetkunde*) в 1882 г. и которая затем была пере-

ведена на немецкий язык. Книга эта, предназначенная для самообразования, имела большой успех, и ее четвертое издание вышло в 1926 г., а исторический раздел ее, написанный Шереметевским и отличающийся высокими литературными достоинствами, вышел позднее отдельной книгой под названием «Очерки по истории математики» (М., 1940).

Появлялись переводы некоторых классических математических произведений. Так, Ф. Ф. Петрушевский перевел с греческого 1—6, 11—12 и затем 7—9 книги «Начал» Евклида (СПб., 1819, 1835) и отдельные сочинения Архимеда (СПб., 1823). М. Е. Ващенко-Захарченко опубликовал в Киеве вольный перевод (лучше сказать — переложение) всех книг «Начал» с комментариями и вступительной статьей, в которой предложил одно из наиболее ранних у нас изложений неевклидовой геометрии, не свободное от неточностей². В конце XIX и начале XX в. появились переводы отдельных работ Я. Бернулли, Лежен-Дирихле, Римана, Бельтрами, Гельмгольца, Клейна, Дедекинда, Г. Кантора, Пуанкаре и других выдающихся математиков, часть которых в то время еще здравствовала. Профессор Морской академии в Петербурге и академик А. Н. Крылов (1863—1965), придавая большое воспитательное значение «Математическим началам натуральной философии» Ньютона, выпустил их полный перевод с подробнейшими математическими примечаниями, не только облегчающими чтение этого основоположного труда, но имеющими самостоятельное научное значение (СПб., 1915).

Профессор Киевского университета историк Н. М. Бубнов (1858—1943) провел ценные исследования по средневековой математике. В 1899 г. он издал на языке оригинала математические сочинения ученого X в. Герберта (Gerberti. Opera mathematica. Berlin, 1899). Затем в книгах «Подлинное сочинение Герберта об абакке» и «Арифметическая самостоятельность европейской культуры» (Киев, 1908) Бубнов предложил взамен довольно распространенной гипотезы Вёпке свое собственное объяснение происхождения и развития современной десятичной позиционной нумерации и цифр. Идеи Бубнова встретили

² Несколько переводов и изложений «Начал» (неполностью), а также ряда теорем Архимеда (в изложении Таке) были изданы еще в XVIII в.

возражения, например, со стороны Бобынина, но нашли и сторонников, к числу которых относился советский историк науки И. Н. Веселовский. Вопрос остается открытым до сих пор.

Интерес к истории математики проявлял также другой киевский профессор — математик Д. А. Граве (1863—1939), вышедший из Петербургского университета. Об этом свидетельствуют частные исторические справки в руководствах Граве по теории чисел и алгебре, в его увлекательной «энциклопедии математики» (Киев, 1913). Вкус к истории науки Граве передал и некоторым своим ученикам — Б. Н. Делоне, Н. Г. Чеботареву и О. Ю. Шмидту, деятельность которых в основном пришлась уже на послереволюционное время.

Было бы неверно назвать перечисленные достижения несущественными; многие из них имели серьезную научную ценность. Но, взятые в целом, исследования по истории математики в дореволюционной России не были систематическими, велись в немногих направлениях, и, как сказано, только два человека занимались ею как основной специальностью.

2. Становление и развитие советской школы истории математики

Работа по истории математики, как и по истории других наук, приобрела более регулярный характер только после Великой Октябрьской социалистической революции. Огромные успехи в распространении среднего и высшего образования и в широкой популяризации науки, достигнутые в первые же годы советской власти, начатая тогда же подготовка массовых кадров народной интеллигенции не замедлили отразиться и на прогрессе историко-математических исследований. В поисках наилучших средств пропаганды знаний, естественно, использовались данные истории науки. Примером этого явилась книга «Математика и ее значение для человечества» (1923) В. А. Стеклова (1864—1926), вице-президента Академии наук, основателя нескольких институтов³ и профессора Петроградского университета. Мы не останавливаемся на дру-

³ Один из них, Математический институт Академии наук СССР, носит имя В. А. Стеклова.

гих популярно-исторических книгах, преимущественно по элементарной математике В. И. Лебедева (1919—1921), Г. Н. Попова (1920—1932), В. К. Беллюстина (1923), М. Н. Марчевского (1923) и др.

В 1919 г. скончался Бобынин, а научная активность Тимченко значительно понизилась еще до Октябрьской революции. Среди математиков старших поколений, продолжавших и даже усиливавших работу по истории науки, следует прежде всего назвать уже упомянутого А. В. Васильева, переехавшего в 1907 г. из Казани в Петербург. Васильев был ученым широкой культуры, энциклопедических знаний и, подобно Бобынину, неиссякаемой энергии. В 1919 г. он выпустил в свет книгу по истории теории чисел «Целое число. Исторический очерк» (2-е изд. Петроград, 1922), где отвел большое место открытиям русских ученых. Два года спустя он опубликовал первый значительный труд о развитии математики в России с 1725 г. (т. е. основания Академии наук) до 1863 г. — года введения известного университетского устава. В этой книге, вышедшей под названием «Математика. Вып. I (1725—1826—1863)» (Петроград, 1921), особенно подробно рассмотрены открытия Лобачевского, Миндинга, Остроградского, Буняковского и Чебышева. Выразительную характеристику творчества Чебышева дал В. А. Стеклов в брошюре «Теория и практика в исследованиях Чебышева» (Петроград, 1921); заметим, что ее дополняет в ряде отношений не менее яркая характеристика, данная много лет спустя в статье академика С. Н. Бернштейна (1880—1968) в сборнике «Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры» (Учен. зап. Моск. гос. ун-та, т. 97, 1947).

По инициативе Васильева в 1920 г. при Педагогическом институте Петроградского университета был создан математический кружок, в следующем году преобразованный в Петроградское математическое общество (первое Петербургское математическое общество, основанное в 1892 г., прекратило свою деятельность в начале XX в.). В 1924—1930 гг. наряду с этим научным обществом функционировало Общество ревнителей математического образования, которым руководил профессор Педагогического института С. А. Богомолов (1877—1965); перу последнего, среди прочего, принадлежали брошюра «Актуальная бесконечность (Зенон Элейский, Ис. Ньютон, Г. Кантор)» (Л.; М., 1934)

и книга «Эволюция геометрической мысли», содержащая сведения по истории проективной геометрии, неевклидовых систем и оснований геометрии (Л., 1928).

Работа по истории математики велась и в других университетах и педагогических институтах, число которых быстро возрастало во всей стране, включая те национальные районы, культурное развитие которых сознательно задерживалось при царском режиме. В начале 20-х годов выдвинулся университет в Ростове-на-Дону, где профессор Д. Д. Мордухай-Болтовской (1876—1952) впервые организовал студенческий семинар по истории математики. Мордухай-Болтовской — воспитанник Петербургского университета, преподававший затем в Варшавском университете, на базе которого и был организован Ростовский (сначала Северо-Кавказский) университет, был ученым очень широкого профиля, внесшим значительный вклад и в разработку истории математики. Часть подготовленных им в годы, о которых идет речь, статей по истории алгебры и анализа была опубликована под общим названием «Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики» в «Известиях Сев.-Кавк. университета», т. 3 (1928); в них рассматривается генезис современных идей числа, предела, развитие алгебраической символики, аксиоматического метода; к этому примыкают его статьи об античном методе исчерпывания (1928) и эволюции понятия функции (1937).

В Москве исследования по истории математики, прерванные со смертью Бобынина, возобновились в середине 20-х годов, прежде всего благодаря М. Я. Выгодскому (1898—1965), ученику Мордухай-Болтовского и затем аспиранту Московского университета, а также С. А. Яновской (1896—1966), вначале учившейся на Высших женских курсах в Одессе (где заметное влияние на нее оказал известный алгебраист проф. С. О. Шатуновский), а впоследствии окончившей Институт красной профессуры. Выгодский преподавал в Московском университете с 1931 по 1941 г. и в 1945—1946 гг., а с 1950 г. — в Тульском педагогическом институте, а Яновская — с 1921 г. до самой кончины. Оба они явились зачинателями советской историко-математической школы с характерными для нее марксистско-ленинскими методологическими установками.

Время и место возникновения советской школы историков математики не были случайными. В начале и середине

20-х годов математика проходила через кризисную полосу развития ее оснований. Этот кризис зародился в недрах теории множеств и функций примерно на четверть века ранее, а рассматриваемые годы были отмечены борьбой между течениями логицизма Рассела, формализма Гильберта и интуиционизма Броуера — Вейля, борьбой, обусловившей бурный расцвет исследований по математической логике. В Москве, где в то время процветала школа теории функций во главе с профессором и в дальнейшем академиком Н. Н. Лузиным (1883—1950), проблемы обоснования математики и споры вокруг них возбудили большой интерес, стимулировавший быстрый рост методологических и логико-математических исследований; с этим естественно переплеталось изучение исторического аспекта проблем обоснования математики, восходивших к далекой древности. Во второй половине 20-х годов обсуждение обширного круга методологических и исторических вопросов активно велось в математическом семинаре при Ассоциации естествознания Коммунистической академии, которую возглавлял профессор алгебры Московского университета О. Ю. Шмидт (1891—1956), впоследствии знаменитый полярный исследователь и академик. Руководителем семинара был профессор Московского университета, позднее член.-кор. Академии наук А. Я. Хинчин (1894—1959), активными участниками — И. В. Арнольд, М. Я. Выгодский, А. О. Гельфонд, В. И. Гливенко, А. Н. Колмогоров, Л. А. Люстерник, В. Н. Молодший, Л. Г. Шнирельман, С. А. Яновская и многие другие молодые ученые, начинавшие тогда научную карьеру. Н. Н. Лузин в этом семинаре не участвовал, но и он выступал в печати по вопросам оснований математики. В своих работах, начиная со знаменитой докторской диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд» (М., 1915), Лузин не раз совершал экскурсии в область истории математики. В рассматриваемое время он подготовил большие обзоры развития и состояния теории функций действительного переменного (1927, 1933), а к 150-летию со дня смерти Эйлера опубликовал большую статью памяти этого великого ученого (1933).

Все это создавало тогда в Москве благоприятные условия для исследований по истории математики, которым охотно содействовали многие ведущие математики Московского университета.

Выгодский и Яновская стремились применять в изу-

чении и преподавании истории математики принципы диалектического и исторического материализма. Заканчивая аспирантуру, Выгодский в 1926 г. представил и опубликовал работу «Платон как математик», в которой дал резко (и односторонне) отрицательную оценку влияния знаменитого философа и его школы на математику, вызвавшую ряд возражений его официального оппонента — профессора Д. Ф. Егорова. Вслед затем Выгодский предложил опыт марксистского анализа развития понятия числа (1929), а 27 июня 1930 г. на I Всесоюзном съезде математиков в Харькове выступил с докладом «Проблемы истории математики с точки зрения марксистской методологии», в котором произвел под этим углом зрения анализ известных обобщающих трудов М. Кантора и И. Г. Цейтена. Первые статьи Яновской — о категории количества у Гегеля и сущности математики (1928), о законе единства противоположностей в математике (1929), «Идеализм в современной философии математики» и «Очередные задачи математиков-марксистов» (1930) — были по преимуществу методологическими, но и в них видное место занимали вопросы истории математики.

Для Яновской было характерно тесное сочетание собственно исторического исследования развития математических идей с их философским и логико-математическим анализом; впоследствии, с 40-х годов в ее занятиях математическая логика стала преобладающей. В рассматриваемое время она руководила работой по подготовке к изданию математических рукописей Маркса, русский перевод важнейшей части которых вышел под ее редакцией и с ее подробным комментарием к 50-летию со дня смерти ученого в сборнике «Марксизм и естествознание» (М., 1933). Эти рукописи Маркса, ранее не издававшиеся, содержали глубокие мысли о соотношении логического и исторического в развитии математики, об оперативной роли символов, а также характеристику, по выражению самого Маркса, «мистического», «рационального» и «алгебраического» периодов в дифференциальном исчислении XVIII в. Публикация этих рукописей еще более усилила интерес к истории проблем обоснования математики, и в частности анализа бесконечно малых. Тридцать лет спустя С. А. Яновская вновь обратилась к кругу проблем, возникающих при изучении математических рукописей Маркса, на этот раз в связи с подготовкой комментариев для более полного их

издания, увидевшего свет уже после ее смерти (*Маркс К. Математические рукописи*. М., 1968). Среди комментариев Яновской особенно заслуживают внимания тонкий анализ предложенного Ньютоном вывода правила дифференцирования произведения двух функций, а также попытки обоснования анализа, предложенный Дж. Ланденом. В издании 1968 г. принял большое участие также ученик С. А. Яновской К. А. Рыбников, установивший, в частности, какой математической литературой пользовался Маркс, сам не указывавший изучавшиеся им книги.

История оснований анализа привлекала и Выгодского, который в работе об инфинитезимальных методах Кеплера (1935) отстаивал то положение, что нестрогость, необоснованность приемов исчисления бесконечно малых была необходимой предпосылкой его прогресса, по крайней мере от древности до начала XIX в., так как открывала простор для математической интуиции. Эти взгляды, близкие к делению развития математики на «творческие» и «критические» периоды (Ф. Клейн), Выгодский развивал и в других статьях; они оказали влияние и на его руководства по исчислению бесконечно малых (1932) и позднее по дифференциальной геометрии (1949). Такие же взгляды развивал в ряде работ ленинградский историк древности и историк науки проф. С. Я. Лурье (1890—1965), последние годы жизни работавший во Львове. Противопоставление научной строгости математических методов их эффективности (решительно отвергавшееся, добавим, Гильбертом) явилось предметом критики в ряде работ С. А. Яновской и других советских историков науки. Мы еще вернемся к этому вопросу.

Вскоре вслед за Выгодским и Яновской историей математики занялся, будучи еще студентом Московского университета, А. П. Юшкевич, в 1926—1930 гг. работавший в отделе истории и философии естествознания НИИ им. К. А. Тимирязева и затем в Ассоциации естествознания Коммунистической академии. Первые печатные работы Юшкевича были о философии математики Л. Карно (1929) и об идеях обоснования анализа в конце XVII и в XVIII в. (1933). Эти работы отчасти примыкали к упомянутым ранее исследованиям И. Ю. Тимченко по истории аналитических функций. В этих двух научных учреждениях работал тогда А. О. Гельфонд (1906—1968), впоследствии профессор Московского университета и член-кор. Академии наук

СССР. В те годы Гельфонд начал цикл своих блестящих исследований по теории чисел; в 1930 г. он опубликовал ценный «Очерк истории современного состояния теории трансцендентных чисел», он и впоследствии время от времени обращался к историко-математическим темам.

В середине 20-х годов история математики вновь стала предметом преподавания на физико-математическом факультете Московского университета. С. А. Яновской поручили руководить учебным семинаром по введению в историю и философию естествознания для студентов и молодых научных работников. В начале 30-х годов профессора Выгодский и Яновская возобновили на математическом отделении чтение курса по истории математики, насыщая его новым, более современным и глубоким содержанием, а в 1933 г. организовали научный семинар по истории математики, который вскоре стал одним из ведущих центров исследований в этой области. В университете появились аспиранты по истории математики — С. Е. Белозеров и Г. Б. Петросян (ученики Выгодского), Э. Я. Бахмутская и К. А. Рыбников (ученики Яновской). Все они защитили кандидатские диссертации; первые трое работали впоследствии в Ростове-на-Дону, Ереване и Харькове, а Рыбников — в Московском университете. В Ученом совете физико-математического факультета Выгодский (1938) и Юшкевич (1940) защитили первые диссертации на степень доктора физико-математических наук по специальности «история математики»; Яновской докторская степень была присуждена без защиты в 1935 г. за совокупность ее работ.

Преподавание истории математики было введено и в некоторых педагогических институтах. В Московском областном педагогическом институте его десятки лет подряд вел проф. И. К. Андронов, занимавшийся главным образом вопросами методики преподавания (1894—1975), в Ленинградском педагогическом институте — проф. И. Я. Депман (1885—1970).

Наряду с лекциями по истории математики важное значение для распространения историко-математических знаний имело включение исторических сведений в различные математические курсы. В рассматриваемое время удачные опыты такого рода сделали профессора Г. М. Шапиро (1903—1942) в своей «Высшей алгебре» (М., 1935) и И. В. Арнольд (1900—1948) в «Теоретической арифметике» (М., 1939). Забегая вперед, добавим, что позднее истори-

ческие главы вошли органической частью в «Краткий курс математического анализа» (М., 1953) А. Я. Хинчина, «Основы математического анализа» (т. 1-2. М., 1957) профессора Ленинградского университета Г. М. Фихтенгольца (1888—1959); «Элементы теории аналитических функций» А. И. Маркушевича (М., 1944); «Курс дифференциальных уравнений» (5-е изд. М., 1950) профессора Московского университета и члена-кор. Академии наук СССР В. В. Степанова (1889—1950) (глава по истории дифференциальных уравнений по просьбе автора была написана А. П. Юшкевичем); «Курс дифференциальной геометрии» (М., 1952) профессора Московского университета С. П. Финикова (1882—1964); «Теорию чисел. Элементарный курс» (Харьков, 1954) харьковского профессора А. К. Сушкевича (1889—1961); «Основы алгебраической геометрии» И. Р. Шафаревича (1972); руководства по теории вероятностей Б. В. Гнеденко (М., 1954), по операционному исчислению И. З. Штокало (Киев, 1972; исторический очерк в этой книге принадлежит перу А. Н. Боголюбова) и некоторые другие.

В первой половине 30-х годов началась работа по изданию переводов выдающихся математических трудов прошлых веков; были переведены также использовавшиеся в преподавании две известные книги о математике в древности и средние века и в XVII в. Цейтена, первый том лекций о математике XIX в. Клейна, хрестоматия Вилейтнера, лекции Нейгебауера о математике древнего Египта и Вавилона. Инициатором этих переводов является в первую очередь М. Я. Выгодский, некоторое время бывший главным редактором Государственного технико-теоретического издательства, выпускавшего математическую литературу. Так были изданы различные произведения Кеплера, Галилея, Кавальери, Декарта, Ферма, Ньютона, Лопиталя, Эйлера, Л. Карно, Монжа, Галуа, Гаусса, Листинга, Лежен-Дирихле и др. В подготовке этих изданий, снабженных, как правило, солидным комментаторским аппаратом и оригинальными статьями переводчиков или редакторов, участвовали многие математики и историки науки: М. Я. Выгодский, А. Н. Долгов, профессор Ленинградского университета, член-кор. Академии наук СССР Н. С. Кошляков (1891—1958), С. Я. Лурье, Д. Д. Мордухай-Болтовской, И. Б. Погребысский, Б. И. Сегал (1901—1971), профессор Казанского университета, член-кор.

Академии наук СССР Н. Г. Чеботарёв (1894—1947), А. П. Юшкевич и др. Видное место истории математики было уделено в соответствующих статьях 1-го издания Большой Советской Энциклопедии, главным редактором которой являлся О. Ю. Шмидт, а редакцией математики первоначально руководил В. Ф. Каган; заслуживает упоминания, что О. Ю. Шмидт читал иногда курс истории математики в Московском университете, а В. Ф. Каган отводил в своем курсе неевклидовой геометрии видное место ее истории. Особенно богаты историческими сведениями большие математические статьи во 2-м издании БСЭ, в котором математическую редакцию возглавлял А. Н. Колмогоров. В 3-м издании многие статьи по математике и соответственно их исторические разделы несколько меньше по объему, причем в ряде случаев представляют собой переработку статей 2-го издания. Назовем несколько статей первых двух изданий: «Алгебра» (А. Г. Курош, О. Ю. Шмидт, 2-е изд., 1950), «Бесконечно малые» (В. Ф. Каган, А. Н. Колмогоров, 2-е изд., 1950), «Геометрия» (В. Ф. Каган, 1-е изд., 1929; А. Д. Александров, 2-е изд., 1952), «Знаки математические» (И. Г. Башмакова, А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич, 2-е изд., 1952), «Интеграл» (В. И. Гливенко, 2-е изд., 1953), «Математика» (А. Н. Колмогоров, 1-е изд., 1938, и 2-е изд., 1954), «Функция» (Н. Н. Лузин, 1-е изд., 1935, И. П. Натансон, 2-е изд., 1956).

Наряду с Москвой работа по истории математики интенсивно шла в Ленинграде, где до 1934 г. находилась Академия наук СССР. По поручению В. А. Стеклова его ученик, профессор Ленинградского университета, впоследствии академик В. И. Смирнов (1887—1974) подготовил к печати неопубликованные рукописи А. М. Ляпунова о фигурах равновесия неоднородной вращающейся тяжелой жидкости (1925—1927). После смерти Стеклова Академия наук издала сборник «Памяти В. А. Стеклова» (Л., 1928), в котором профессор Ленинградского университета и членкор. АН СССР Н. М. Гюнтер (1871—1941), В. И. Смирнов и другие ученые произвели детальный анализ его работ и их роли в развитии математики. По решению Академии наук было издано двухтомное собрание сочинений Е. И. Золотарёва (1931—1932). В 1932—1938 гг. в системе Академии функционировал Ленинградский институт истории науки и техники, выпустивший 10 томов своих «Тру-

дов» и юбилейные сборники «Леонард Эйлер» (Л., 1935) и «Луи Лагранж» (М.; Л., 1937). Сотрудниками института состояли уже названный ранее С. Я. Лурье, Г. Гариг, проживавший тогда в Ленинграде немецкий историк математики (впоследствии директор Лейпцигского института истории медицины и естествознания в ГДР), профессор Ленинградского университета Н. И. Идельсон (1895—1951), занимавшийся преимущественно историей астрономии, Л. С. Полак — историей вариационных принципов механики. С Институтом истории науки и техники сотрудничали и в его изданиях участвовали А. Н. Крылов, профессор Ленинградского университета Б. А. Венков (1900—1962), М. Я. Выгодский, Н. Г. Чеботарёв и другие ученые. Когда в ходе реорганизации академических учреждений институт был в 1938 г. расформирован, вместо него была создана Комиссия по истории АН СССР под председательством академика С. И. Вавилова (1891—1951).

Работа по истории математики в Ленинграде проводилась и вне названного института. В 1930 г. востоковед академик В. В. Струве (1884—1965) опубликовал Московский математический папирус (*Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau, Quellen u. Stud. z. Gesch. d. Math. A*, 1930), расшифровку которого начал его старший коллега академик Б. А. Тураев (1868—1920). Еще ранее, в 1918 г., И. А. Орбели (1887—1961), в дальнейшем также академик и директор Государственного Эрмитажа, издал русский перевод небольшого древнеармянского сборника задач «Вопросы и решения вардапета Анапия Ширакаци, армянского математика VII в.» (Пг., 1918).

В середине и второй половине 30-х годов в Москве и Ленинграде наметились новые важные направления работ по истории древнеегипетской, древневавилонской и древнегреческой математики (С. Я. Лурье и М. Я. Выгодский), а в конце 30-х годов — по истории математики в России, продолжившие исследования В. В. Бобынина (Т. И. Райнов, А. П. Юшкевич). Незадолго перед второй мировой войной начато было изучение развития математики в Московском университете, но обсужденные тогда на семинаре Яновской и Выгодского и уже подготовленные статьи смогли быть напечатаны лишь через несколько лет после окончания военных действий. Темами первых кандидатских диссертаций, защищенных в Московском университе-

те, явились некоторые вопросы истории математического анализа — интеграционные методы XVII в. Б. Паскаля (Э. Я. Бахмутская), теория аналитических функций в трудах Коши (С. Е. Белозеров), истоки и ранняя история вариационного исчисления (К. А. Рыбников).

Москва и Ленинград были главными центрами исследований в 30-е годы. На Украине их продолжали, как и ранее, лишь отдельные математики. Академик АН УССР М. Ф. Кравчук (1892—1942) опубликовал в связи со столетним юбилеем Киевского университета обзор развития математики в этом университете за сто лет (1935); в том же году вышла его брошюра о влиянии Эйлера на развитие математики (обе работы — на украинском языке). Другой член Академии наук УССР Д. А. Граве, основоположник советской алгебраической школы, в своем «Трактате по алгебраическому анализу» (в 2-х т. Киев, 1938, 1939) сделал обширные экскурсии в область истории диофантова анализа, теории алгебраических чисел и т. д.

В Харьковском университете историей математики занимался украинский академик Д. М. Синцов (1867—1946). Лекции по этому предмету здесь читал алгебраист А. К. Сушкевич. И. Ю. Тимченко опубликовал в Одессе статью по истории логарифмов (1935). В Казани к отдельным вопросам истории математики не раз обращался уже упоминавшийся алгебраист Н. Г. Чеботарёв. Здесь же в 1932 г. вышла первая советская книга о математике в странах арабской культуры — «Очерки по истории развития арифметики на Ближнем Востоке» Н. В. Юсупова (1888—1937?). Не перечисляя отдельные работы историков математики в других городах России и Украины, заметим, что первые шаги в изучении математики народов СССР сделаны были в Узбекистане (академик Академии наук УзССР Т. Н. Кары-Ниязов, 1896—1970), Армении (Г. Б. Петросян) и Грузии (Д. Г. Цхакая, бывший, как и Петросян, учеником Выгодского).

Успехи зарождавшейся советской школы историков математики были частично отражены в работе секции философии и истории математики II Всесоюзного математического съезда, состоявшегося в Ленинграде летом 24—30 июня 1934 г.

Великая Отечественная война замедлила исследования в этой области, как и во многих других науках, но не приостановила их полностью. Крупным событием явилось

издание в осажденном Ленинграде большого сборника в честь двухсотлетия со дня рождения Ньютона «Исаак Ньютон» (Л., 1943), вышедшего под редакцией академика С. И. Вавилова (1891—1951). Другой сборник «Московский университет — памяти Ньютона» вышел несколько позднее (М., 1946).

Пришедшееся на годы второй мировой войны 150-летие со дня рождения Лобачевского было отмечено изданием книги академиков П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова «Николай Иванович Лобачевский» (М.; Л., 1943), а также сборника статей казанских профессоров Б. Л. Лаптева, П. А. Широкова (1895—1944) и Н. Г. Чеботарёва «Н. И. Лобачевский» (М.; Л., 1943).

После окончания войны темп историко-математических исследований ускорился, прежде всего в Москве и Ленинграде. Быстрое возрождение научной жизни в Ленинграде незадолго перед тем перенесшем 900-дневную блокаду, было явлением исключительным. В 1943 г. Академия наук СССР организовала Комиссию по истории физико-математических наук, в которую вошли А. Н. Крылов, первый ее председатель, С. Н. Бернштейн, С. И. Вавилов, Н. И. Идельсон, В. И. Смирнов и другие видные ученые; после смерти А. Н. Крылова в 1945 г. председателем стал С. И. Вавилов, а с кончиной последнего в 1950 г. — В. И. Смирнов. Одним из важнейших мероприятий комиссии, инициатором которого был Вавилов, было издание академической серии «Классики науки», существующей поныне.

В 1944 г. почти одновременно с организацией ленинградской комиссии С. А. Яновская после трехлетнего перерыва возобновила чтение курса истории математики в Московском университете, и вновь начались регулярные еженедельные собрания научно-исследовательского семинара, к руководству которым тогда же был привлечен А. П. Юшкевич (в 1930—1952 гг. работавший в Московском высшем техническом училище). Семинар становился все более многочисленным; на нем предварительно обсуждались почти все советские кандидатские и докторские диссертации, а также студенческие дипломные работы по истории математики. В 1956 г. соруководителем семинара стал К. А. Рыбников, годом ранее защитивший докторскую диссертацию о математических рукописях К. Маркса. После перехода в 1959 г. Яновской на впервые

созданную в МГУ кафедру математической логики ее как лектора по истории математики заменила ее ученица И. Г. Башмакова, защитившая докторскую диссертацию о древнегреческой математике в 1961 г. Лекции по истории математики читал также Рыбников, опубликовавший в 1960—1963 гг. двухтомный университетский учебник «История математики» (2-е переработанное издание вышло в одном томе. М., 1975). Впрочем, С. А. Яновская до конца жизни регулярно посещала семинар и во многом определяла идейное направление его работы. Регулярно выступал на семинаре и М. Я. Выгодский, после перехода на работу в Тульский педагогический институт часто приезжавший в Москву. Со временем на семинаре стали обсуждаться вопросы истории механики, хотя неизменно преобладали историко-математические темы. При кафедре теории чисел, в то время возглавлявшейся А. О. Гельфондом, был создан Кабинет истории математики и механики, руководителем которого стал К. А. Рыбников. Работа Кабинета быстро расширялась. Помимо общего курса истории математики, на математическом отделении читались специальные — по истории алгебры и др. Наряду с научным семинаром созданы были студенческие, возросло число курсовых и дипломных работ, а также аспирантов по истории математики. В настоящее время в составе кабинета, кроме И. Г. Башмаковой и К. А. Рыбникова, работают ученицы последнего А. В. Дорофеева и С. С. Петрова, историк механики И. А. Тюлина и еще несколько сотрудников; научным семинаром до последнего времени руководили И. Г. Башмакова, К. А. Рыбников и А. П. Юшкевич.

В самом конце 1944 г. Академия наук СССР приняла решение создать в Москве Институт истории естествознания, который вскоре начал свою деятельность; в 1953 г. при слиянии с академической Комиссией истории техники, он был преобразован в нынешний Институт истории естествознания и техники (ИИЕТ). В Ленинграде было организовано отделение института; Комиссия по истории физико-математических наук при этом была включена в состав Института, а в 1955 г. ликвидирована. Новый академический Институт стал ведущим научным учреждением в своей области, работающим в тесном контакте с Архивом АН СССР, родственными организациями при республиканских академиях наук и рядом вузов страны.

Важную роль сыграло создание в 1956 г. руководимого АН СССР Советского национального объединения философии и истории науки и техники и его многочисленных филиалов в различных республиках и городах. В составе объединения имеется секция истории математики.

На первых порах историю математики в ИИЕТ представляли профессор А. П. Зубов (1899—1963), А. П. Юшкевич (до 1952 г. — по совместительству), а недолгое время также профессор механики Московского высшего технического училища И. Н. Веселовский (1892—1977) и Т. И. Райнов (1888—1958). Впоследствии коллектив историков математики вырос и в 1968 г. был выделен в самостоятельную группу. В последнее время в эту группу входили Э. И. Берёзкина, А. И. Володарский, С. С. Демидов, Л. Е. Майстров, Ф. А. Медведев, А. Б. Паплаускас, Б. А. Розенфельд, Е. И. Славутин, Т. А. Токарева и ее руководитель А. П. Юшкевич; в Ленинградском отделении ИИЕТ историю математики разрабатывает Е. П. Ожигова. Некоторые из названных лиц окончили аспирантуру в Московском университете (ученица И. Г. Башмаковой Берёзкина, Демидов), другие — в ИИЕТ (Володарский, Медведев, Паплаускас), ряд бывших институтских аспирантов — историков математики — работает в различных вузах страны (В. И. Антропова в Туле, В. Г. Бабаев в Баку, В. А. Добровольский в Киеве, В. И. Лысенко в Москве). Многие из названных ученых — Антропова, Володарский, Медведев, Паплаускас и др. — были аспирантами Юшкевича; к ним относится и Демидов, начавший аспирантуру у Рыбникова. Геометр Б. А. Розенфельд (докторская диссертация 1948 г.) занялся историей математики, когда работал в Баку, и в ИИЕТ пришел в 1956 г. Большое значение имело то обстоятельство, что уже в зрелые годы Б. А. Розенфельд изучил арабский язык и активно содействовал тому, что многие первоисточники стали доступны большинству исследователей; большое число специалистов по истории так называемой арабской математики окончили аспирантуру под его руководством: Л. М. Карпова (Москва), С. А. Краснова-Бокатуева (Коломна), А. К. Кубесов (Алма-Ата), А. К. Таги-заде (Москва), Н. Г. Хайретдинова (Егорьевск) и др. В ИИЕТ, как и в Московском университете, историки математики тесно сотрудничали и сотрудничают с историками механики — А. Т. Гри-

горьяном, профессором И. Б. Погребысским (1906—1971), который до прихода в ИИЕТ в 1962 г. занимался в Киеве преимущественно историей математики и не оставлял ее и в дальнейшем, В. С. Кирсановым, М. М. Рожанской, историком физики В. П. Визгиным, а также с многочисленными внеинститутскими учеными Москвы, Ленинграда, Киева, Харькова, Ташкента, Алма-Аты, Риги, Еревана и других академических и университетских центров Советского Союза. Наиболее интенсивно в ИИЕТ исследовались вопросы истории отечественной математики, математики средних веков (особенно в странах Востока), различных отделов теории функций и геометрии; другой весьма важной областью работы является здесь создание коллективных обобщающих трудов по истории математики.

Как видно из предыдущего, историки математики ИИЕТ тесно сотрудничают также со своими коллегами из Московского университета. Одним из плодов их совместной работы явилось издание учебного пособия для педагогических институтов — «Хрестоматии по истории математики» в двух частях (М., 1976—1977), составленной И. Г. Башмаковой, Ю. А. Белым (Николаев), С. С. Демидовым, Б. А. Розенфельдом и А. П. Юшкевичем под редакцией последнего.

Изыскания по истории математики вели в Москве также И. Н. Веселовский, А. И. Лысенко, И. А. Марон, В. Н. Молодший, в течение многих лет читавший курс по этому предмету в педагогическом институте им. В. И. Ленина (в Областном педагогическом институте им. Н. К. Крупской его почти до конца жизни вел И. К. Андронов), В. Е. Прудников, с 1965 профессор Н. И. Симонов (1910—1979), Р. А. Симонов, О. Б. Шейнин и т. д. С работами по истории математики неоднократно выступали академик П. С. Александров, академик В. С. Владимиров, А. О. Гельфонд (первый председатель Ученого совета при ИИЕТ по истории физико-математических наук), Б. В. Гнеденко, Б. Н. Делоне, академик А. Н. Колмогоров, Л. А. Люстерник, А. И. Маркушевич (председатель Ученого совета при ИИЕТ по истории физико-математических наук с 1968—1976 гг.), В. В. Степанов, профессор Ф. И. Франкль (1905—1961), профессора Московского университета А. Г. Курош (1908—1971) и Г. Е. Шилов (1917—1975) и другие математики.

После окончания войны значительно выросли возможности регулярной публикации работ по истории математики, и это дополнительно стимулировало научную активность в этой области. С 1948 г. под редакцией Г. Ф. Рыбкина (1903—1972), многие годы возглавлявшего в Москве Издательство физико-математической литературы, и А. П. Юшкевича начался выход ежегодных сборников «Историко-математических исследований», сначала как органа университетского семинара, а затем как самостоятельной серии. В 1966 г. издание этих сборников приостановилось, но в 1973 г. их издание возобновил ИИЕТ. К 1978 г. в 23 выпусках «Историко-математических исследований» было напечатано больше четырехсот работ около ста авторов из различных городов Советского Союза и — в небольшом числе — из других стран: Англии, Венгрии, ГДР, ФРГ, Голландии, Румынии, США, Франции, ЧССР и Швейцарии. Немало статей по истории математики было напечатано также в I—IV томах «Трудов Института истории естествознания» (1947—1952), в 1, 5, 10, 15, 17, 19, 22, 23, 34 и 43-м томах серии «Трудов Института истории естествознания и техники» (1954—1961), в издаваемых с 1956 г. тем же ИИЕТ «Вопросах истории естествознания и техники», которые, как правило, выходят поквартально, и в некоторых других сборниках. Московский университет с 1960 г. приступил к изданию серии «История и методология естественных наук»; в 1966—1978 гг. под редакцией К. А. Рыбникова вышло пять сборников этой серии, посвященных истории математики и механики, а кроме того, два выпуска «Проблем истории математики и механики», редакторами которых были С. С. Демидов, С. С. Петрова и И. А. Тюлина (1972, 1975). Работы по истории математики печатались также в московских журналах «Успехи математических наук», «Математика в школе», «Природа», в ученых записках различных высших учебных заведений.

Работа в области истории математики усиливалась и в других городах. К сказанному выше о Ленинграде добавим, что большая работа проводилась также в Ленинградском архиве АН СССР, председателем Ученого совета которого был В. И. Смирнов, автор многих историко-научных исследований и руководитель ряда коллективных работ. Курс истории математики в Ленинградском университете иногда читал (до переезда в Новосибирск)

А. Д. Александров — геометр, живо интересующийся вопросами методологического и историко-научного характера; некоторое время этот курс вел Ф. П. Отрадных (1900—1955). В Педагогическом институте им. А. И. Герцена его постоянно вел И. Я. Депман, именно в этот период развернувший энергичную научную и литературно-популяризаторскую деятельность; отдельного упоминания заслуживает его увлекательная и богатая по содержанию «История арифметики» (М., 1959). Различные вопросы истории математики изучали также, кроме упомянутой Е. П. Ожиговой, А. А. Киселев, А. И. Кропотов, ученица В. И. Смирнова Г. П. Матвиевская (в 1954 г. переехавшая в Ташкент), И. Г. Мельников (1916—1979), профессор университета и член-кор. Академии наук СССР Р. О. Кузьмин (1891—1949), а также сотрудники Эрмитажа А. А. Вайман и И. Г. Спасский. В Ростове-на-Дону изыскания по истории математики продолжал до смерти (1952) Д. Д. Мордухай-Болтовской, а также работали С. С. Белозеров (читавший лекции в местном университете), геометр профессор М. П. Черняев (1891—1962), В. И. Кузнецов и М. Б. Налбандян; в Саратове их вел профессор математики Г. П. Боев (1899—1959), в 1956 г. издавший здесь «Лекции по истории математики»; во Владимире — Н. Ф. Канунов, в Томске — Н. Н. Круликовский, в Казани — профессора геометрии Б. Л. Лаптев и А. П. Норден; в Свердловске — В. А. Кочев; в Иркутске — специалист по вычислительным машинам и методам А. Б. Штыкан; в Йошкар-Оле — ученица С. А. Яновской Е. А. Раик и т. д.

Большой размах приобрела в послевоенное время работа на Украине и более всего в Киеве, который в 50-е годы стал крупным центром историко-научных исследований. В 1956 г. в Институте математики АН УССР был организован отдел истории математики, при котором начал работу научно-исследовательский семинар. В 1963 г. названный отдел вошел в состав специально организованного Сектора истории естествознания и техники Института истории АН УССР. В Киеве в 1959—1963 гг. вышли 4 выпуска «Історіко-математичного збірника», после чего с 1964 г. упомянутый сектор стал издавать сборник «З історії вітчизняного природознавства». Руководителем сектора и ответственным редактором этих изда-

ний является академик АН УССР И. З. Штокало; в организации семинара участвовал украинский академик Б. В. Гнеденко, в 1960 г. переехавший в Москву. Ближайшими сотрудниками И. З. Штокало являлись И. Б. Погребысский (до его перехода в ИИЕТ) и с 1962 г. член-кор. АН УССР А. Н. Боголюбов, с 1973 г. также В. С. Сологуб. Киевский семинар приобрел не только общереспубликанское, но и общесоюзное значение. Он объединил историков математики и механики как Киева (к числу их, кроме уже названных, принадлежали Л. Н. Грацианская, В. А. Добровольский, В. А. Котек (1899—1973), член-кор. Академии наук УССР Е. А. Ремез (1896—1975), Н. И. Симонов (до 1965 г.), К. И. Швецов и др.), так и других городов Украины; с докладами в нем часто выступали и ученые из других союзных республик. Особенно большую работу киевские историки математики развернули в области истории отечественной математики; ее плодом явилось несколько фундаментальных изданий, которые указаны в дальнейшем.

Исследования по истории математики развивались и в других городах УССР: их вели в Харькове — специалист по теории функций член-кор. АН УССР Н. И. Ахизер, Э. Я. Бахмутская (1916—1972), Ю. М. Гайдук, С. А. Дахия, проф. М. Н. Марчевский (1884—1974), М. А. Наумов, А. К. Сушкевич; в Одессе — И. Ю. Тимченко, С. Н. Киро, Э. Б. Лейбман, во Львове — Н. А. Чайковский (1887—1970), в Николаеве — Ю. А. Белый, в Полтаве — В. В. Лихин (1905—1960), в Виннице — П. М. Олоничев, в Ужгороде — И. И. Маркуш, в Донецке — Ю. Ф. Косолапов и А. И. Бородин, в Черновцах — Л. К. Королюк и Е. А. Кушнир.

Налаживалась работа и в других союзных республиках. В Минске в этом направлении работали специалист по теории дифференциальных уравнений академик АН БССР Н. П. Еругин и А. А. Гусак, в Гродно — Н. Д. Беспамятных, в Бресте — М. Г. Шраер; в Риге — специалисты по теории дифференциальных уравнений А. Д. Мышкис (ныне работающий в Москве), Л. Э. Рейзинь и историк математики И. М. Рабинович (1911—1977); в Даугавпилсе — ученик И. Г. Башмаковой С. С. Глушков; в Вильнюсе — З. Жемайтис и ученик Башмаковой А. П. Каучикас; в Тарту — Ю. Г. Лумисте и Г. Н. Ряго (1892—1968); в Баку — А. Г. Алиев,

Ф. А. Касумханов, Г. Д. Мамедбейли, специалист по функциональному анализу академик АН АзССР З. И. Халилов (1911—1973) и некоторое время Б. А. Розенфельд; в Тбилиси — ученик Выгодского Д. Г. Цхакая, а также тополог академик АН ГССР Г. С. Чогошвили и др.; в Ереване — Г. Б. Петросян, А. Г. Абраамян, А. М. Егнян, Т. Г. Туманян; в Алма-Ате (ныне в Сумах) — ученик Выгодского Ф. Д. Крамар, академик АН КазССР О. А. Жаутыков и А. К. Кубесов; в Кустанае — ученица А. П. Юшкевича М. А. Коренцова; в Душанбе — Х. У. Садыков и Г. С. Собиров (1905—1976); в Нукусе ученик К. А. Рыбникова Дж. Кутлумуратов; в Кызыле — его же ученик Х. О. Ондар.

Крупный центр исследований по истории математики народов Средней Азии возник в Ташкенте, прежде всего благодаря энергии уже упоминавшегося Т. Н. Кары-Ниязова, а затем ученицы В. И. Смирнова Г. П. Матвиевской, в 1959 г. перешедшей на работу в Институт математики АН УзССР и занявшейся преимущественно проблемами математики Ближнего и Среднего Востока. В настоящее время в Ташкенте под руководством Матвиевской работает большая группа историков науки А. Ахмедов, С. А. Рамазанов, Х. Тлашев и др.; при этом некоторые работы ведутся в сотрудничестве с учеными Москвы; Душанбе, Алма-Аты и других городов. Этому кругу вопросов уделяет большое внимание и академик АН УзССР, специалист по теории вероятностей С. Х. Сираждинов. В Молдавской ССР изыскания вели В. П. Бычков (1911—1978), Г. И. Глейзер (1904—1967) — автор пособия для учителей «История математики в школе» (М., 1964) и др.

Все возрастающую роль играли научные конференции. Выше говорилось о I и II Всесоюзных съездах математиков. В декабре 1947 г. ИИЕТ провел в Москве Всесоюзное совещание по истории естествознания, а в 1949 г. в Ленинграде под руководством президента АН СССР С. И. Вавилова состоялось многолюдное совещание, на котором обсуждены были состояние и актуальные задачи истории науки и техники. В обоих случаях работали секции истории математики, так же как на III Всесоюзном математическом съезде в Москве (1956) и на IV съезде (1961) в Ленинграде (опубликовано в 1963 г.).

Мы назовем по меньшей мере обзорные доклады, про-

читанные на этих съездах (и впоследствии опубликованные), поскольку они во многом определили направления последующих исследований: «О проблемах истории математики в России и в СССР» (Б. В. Гнеденко, И. Б. Погорельский, И. З. Штокало, А. П. Юшкевич), «О некоторых проблемах истории античной математики» (И. Г. Башмакова), «Об исследованиях по истории математики средних веков» (В. П. Зубов, Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич) и «Проблемы истории математики Нового времени» (Б. В. Гнеденко, К. А. Рыбников, Н. И. Симонов). Начиная с 1960 г. Московский университет и другие высшие учебные заведения, например Тамбовский педагогический институт, проводили межвузовские конференции по истории физико-математических наук. В 1968 г. в Москве состоялась Всесоюзная конференция, организованная ИИЕТ и Советским национальным объединением истории и философии естествознания и техники; впоследствии пленарные собрания этого объединения стали регулярными, и в их рамках нередко проводились заседания секции историков математики. Традицией стали также аналогичные региональные совещания — в Ленинграде, Киеве, столицах прибалтийских и закавказских республик с участием иногородних ученых. В 1973 г. ИИЕТ провел Летнюю школу по истории математики XIX и XX вв. в Тарту, в которой участвовало около 40 ученых. Добавим, что летом 1978 г. в Лиенае проведена была еще более многочисленная школа, темой которой явились взаимосвязи между математикой и физическими науками, включая механику (организаторами ее были Академия наук ЛатвССР и ИИЕТ).

Некоторые научные собрания связаны были с юбилейными датами. В 1951 г. в Киеве состоялась сессия Академии наук УССР, посвященная 150-летию со дня рождения Остроградского, и в том же году Академия наук АзССР провела в Баку всесоюзное празднование 750-летия со дня рождения Насир ад-Дина ат-Туси. Оба эти мероприятия имели свое последствие: одним из результатов первого из них явилось издание в Киеве трехтомного собрания сочинений Остроградского (см. далее), а второе существенно стимулировало советские изыскания по истории математики Ближнего и Среднего Востока. Только что сказанное относится и к совещаниям, организованным в 1973 г. в Ташкенте в связи с 1000-ле-

тием со дня смерти ал-Бируни и в 1975 г. в Алма-Ате в ознаменование 1100-летия со дня рождения ал-Фараби. В апреле 1957 г. в Ленинграде проведена была сессия АН СССР в честь 250-летия со дня рождения Л. Эйлера, в которой участвовали и многие зарубежные ученые. С докладами на сессии выступили председатель юбилейного оргкомитета академик М. А. Лаврентьев, А. О. Гельфонд, член-кор. АН СССР Б. Н. Делоне, А. И. Маркушевич, Л. Н. Сретенский, К. Шрёдер (ГДР). Несколько недель ранее в Берлине проведена была посвященная той же дате сессия АН ГДР, где сделали доклады и советские ученые — П. С. Александров, Б. Н. Делоне, А. Г. Постников и А. П. Юшкевич. Эти сессии имели следствием значительное развитие исследований, посвященных Эйлеру и вообще математике XVIII в.

Здесь невозможно перечислить различные собрания и сессии академий наук, ученых советов институтов, Московского и иных математических обществ, посвященных различным юбилейным датам — Лейбница, Гаусса, Лобачевского, Чебышева и других великих математиков. Достаточно сказать, что во многих случаях эти даты отмечались в форме не только устных выступлений, но и журнальных статей, сборников, монографий об ученых, чья память отмечалась, а также их оригинальных трудов. Некоторые примеры такого рода были уже приведены, другие встретятся далее.

Советские историки математики участвовали и во многих международных симпозиумах, конференциях, конгрессах; первыми из них в рассматриваемое время явились VIII Международный конгресс по истории науки (Флоренция — Милан, 1956), где с докладом об учении о «неделимых» и континууме в русской литературе XI—XVII вв. выступил В. П. Зубов, а затем упомянутая сессия АН ГДР 1957 г. В рамках Международного конгресса математиков в Москве 1966 г. по традиции работали объединенные секция истории и преподавания математики и симпозиум «Математика в странах Востока в средние века в ее взаимосвязи с математикой европейских стран»; обзорный доклад об итогах и перспективах исследований по математике средневекового Востока сделал по приглашению Оргкомитета конгресса А. П. Юшкевич. Большое число докладов по истории математики советские ученые представили на IX—XV Международ-

ных конгрессах по истории науки, из которых XIII состоялся в Москве в 1971 г., на конгрессах и симпозиумах памяти Лейбница (1966, 1976), Ньютона (1977) и Ламберта (1977). Укрепление контактов с зарубежными историками математики сопровождалось усилением научного сотрудничества с ними и ростом числа публикаций переводов русских книг и статей на иностранных языках.

Таковы были общие условия развития исследований по истории математики в послевоенные годы.

3. Издания сочинений классиков науки; биографии ученых

Прежде чем перейти к обзору основных результатов советских исследований по истории математики, мы остановимся на изданиях в послевоенные годы научного наследия выдающихся математиков прошлых времен. Даже суммарная картина проведенной здесь работы показывает все возрастающую активность советских ученых в изучении развития математических наук.

Выше упоминалось об основанной С. И. Вавиловым серии «Классики науки» Издательства АН СССР. Среди многих других книг в этой серии были изданы отдельные труды или избранные сочинения Д. Бернулли, Галилея, Декарта, Ньютона, Монжа, Гаусса, Лобачевского, Остроградского, Чебышева, Ковалевской, Ляпунова, А. А. Маркова-отца, Пуанкаре. Вне рамок этой серии вышли «Начала» Евклида, сочинения Архимеда, Диофанта, Мухаммеда бен Муса ал-Хорезми, ал-Фараби, ал-Бируни, Омара Хайяма, Насир ад-Дина ат-Туси, Никола Орема, Джамшида ал-Каши, Коперника, Лейбница, Эйлера, Я. Бояи, Римана, Д. Гильберта, сборники работ А. А. Маркова, А. М. Ляпунова, Н. Я. Сониной и — посмертно — Н. М. Гюнтера, Д. Ф. Егорова, Н. Н. Лузина, И. И. Привалова и т. д. В подготовке этих изданий участвовали в качестве редакторов, комментаторов, авторов статей и переводчиков очень многие математики и историки математики, фамилии которых мы назовем, не претендуя на полноту перечисления, по алфавиту: Н. И. Ахиезер, профессор Московского университета Н. К. Бари (1901—1961), И. Г. Башмакова, С. Н. Бернштейн, И. Н. Веселовский, академик И. М. Виноградов,

М. Я. Выгодский, А. О. Гельфонд, Б. В. Гнеденко, харьковский профессор В. Л. Гончаров (1896—1955), академик А. Ю. Ишлинский, В. Ф. Каган, академик П. Я. Кочина, А. К. Кубесов, академик Ю. В. Линник (1914—1972), С. Я. Лурье, член-кор. АН СССР Л. А. Люстерник, А. Г. Майер (1905—1951), Г. Д. Мамедбейли, член-кор. АН СССР А. А. Марков-младший, Г. П. Матвиевская, член-кор. АН СССР Д. Е. Меньшов, Д. Д. Мордухай-Болтовской, И. Б. Погребысский, профессор Московского университета П. К. Рашевский, Б. А. Розенфельд, В. И. Смирнов, академик С. Л. Соболев, В. В. Степанов, Ф. И. Франкль, З. И. Халилов, А. П. Юшкевич. Вышли также полные собрания сочинений крупнейших отечественных математиков (в скобках указаны ответственные редакторы): Н. И. Лобачевского (В. Ф. Каган и А. П. Норден), М. В. Остроградского (И. З. Штокало), П. Л. Чебышева (академик С. Н. Бернштейн), А. М. Ляпунова (член-кор. АН СССР Л. Н. Сретенский, 1902—1973), Г. Ф. Вороного (И. З. Штокало), Н. Н. Лузина (академик М. А. Лаврентьев), П. Боля (А. Д. Мышкис, И. М. Рабинович, Л. Э. Рейзинь), П. С. Урысона (П. С. Александров), О. Ю. Шмидта. В подготовке этих собраний сочинений, помимо некоторых уже названных лиц, участвовали академик И. И. Артоболевский (1905—1977), Б. А. Венков, А. Н. Колмогоров, профессор А. П. Котельников (1865—1944), профессор Г. Л. Лунц (1911—1976), академик АН УССР Ю. А. Митропольский, Е. Я. Ремез, Н. Г. Чеботарёв, член-кор. АН СССР И. Р. Шафаревич и многие другие.

Большинство названных изданий вышло в Москве и Ленинграде, некоторые же — в других городах — Киеве (собрания сочинений Остроградского и Вороного), Риге (сочинения Боля), Алма-Ате (часть трудов ал-Фараби), Ташкенте (сочинения ал-Хорезми и ал-Бируни), Баку (часть трудов Насир ад-Дина ат-Туси).

Переиздание трудов выдающихся ученых прошлых времен, включая их рукописное, в том числе эпистолярное, наследие, — важная составная часть историко-научных исследований. Следует подчеркнуть высокий научный уровень математических и исторических комментариев и сопроводительных статей подавляющего большинства этих изданий, нередко представляющих оригинальные исследования. Мы привели подробный, хотя

отнодъ не исчерпывающий их список ⁴, чтобы показать объем работы, проведенной в этом направлении за тридцать с небольшим послевоенных лет,— работы, разумеется, далекой от завершения, так как на русском языке нет еще переводов многих классических трудов, начиная с «Конических сечений» Аполлония, и все еще не изданы полные или достаточно представительные собрания сочинений таких выдающихся отечественных ученых, как А. А. Марков-старший, В. А. Стеклов и некоторые другие.

Список изданной литературы показывает, что при общем значительном расширении диапазона исследований особенно интенсивно велись изыскания по истории математики в нашей стране, в первую очередь в европейской части прежней Российской империи, а также на территории нынешних среднеазиатских союзных республик и смежных с ними государств арабской культуры. В результате вклад отечественных математиков в мировую науку известен теперь гораздо лучше, чем прежде. Наконец, состав участников всех этих изданий: математиков, механиков, историков науки, историков и филологов — свидетельствует о плодотворном сотрудничестве в области истории математики очень большого числа ученых различных специальностей, работающих во многих научных центрах Советского Союза.

Здесь же уместно сказать и о создании биографической литературы. Помимо кратких справочных статей в энциклопедических словарях — трех изданиях Большой Советской Энциклопедии и различных республиканских энциклопедиях, а также в собраниях сочинений, в рассматриваемое время вышло большое число научных биографий в виде отдельных книг и больших статей в периодических изданиях. И в этом случае приходится упомянуть лишь некоторые работы, авторы которых названы в скобках. Так, вышли книги или брошюры о Н. И. Лобачевском (В. Ф. Каган, 1948; Б. Л. Лаптев,

⁴ В него не вошли, в частности, публикации переводов большого числа ранее не изученных арабских и латинских средневековых рукописей, а также вновь обнаруженных фрагментов или законченных, но в свое время не увидевших свет или забытых работ Эйлера, Остроградского, Чебышева, Лузина и т. д. Эти публикации помещены в «Историко-математических исследованиях» и некоторых других сборниках.

1976), М. В. Остроградском (Б. В. Гнеденко и И. Б. Погребысский, 1963; А. Т. Григорьян, 1961; А. И. Кропотов и И. А. Марон, 1961), В. Я. Буняковском (В. Е. Прудников, 1954), П. Л. Чебышеве (В. Е. Прудников, 1950, 1976), Г. Ф. Миндинге (Р. И. Галченкова, Ю. Г. Лумисте, Е. П. Ожигова, И. Б. Погребысский, 1970), И. И. Сомове (Т. Р. Никифорова, 1964; Ф. Д. Крамар и И. Д. Моложков, 1965), Е. И. Золотарева (Р. О. Кузьмин, 1947; Е. П. Ожигова, 1966), А. Н. Коркине (Е. П. Ожигова, 1968), С. В. Ковалевской (П. Я. Кочина, 1955), Д. А. Граве (В. А. Добровольский, 1968), Н. Я. Сонине (А. И. Кропотов, 1967), В. А. Стеклове (Г. И. Игнациус, 1967; академик В. С. Владимиров и И. И. Маркуш, 1973), К. А. Андрееве (Д. З. Гордевский, 1956), Б. К. Млодзеевском (В. В. Степанов, 1950), Д. М. Синцове (И. А. Наумов, 1955), П. Боле (А. Д. Мышкис и И. М. Рабинович, 1965), А. П. Котельникове (Т. В. Путята, Б. Л. Лаптев, Б. А. Розенфельд, Б. Н. Фрадлин, 1968), В. В. Степанове (П. С. Александров и В. В. Немыцкий, 1956), В. Ф. Кагане (А. М. Лопшиц и П. К. Рашевский, 1969), С. Н. Бернштейне (Н. И. Ахиезер, 1965), А. Ю. Давидове (Р. А. Симонов, 1957); книги о выдающихся средневековых ученых ал-Бируни (П. Г. Булгаков, 1972; М. М. Рожанская, Б. А. Розенфельд, З. К. Соколовская, 1975), Омаре Хайяме (Б. А. Розенфельд и А. П. Юшкевич, 1965) Насира ад-Дине ат-Туси (Г. Д. Мамедбейли, 1961). К этому списку можно добавить брошюры о нескольких менее значительных математиках — Л. Ф. Магницком и Н. Г. Курганове (А. П. Денисов, 1967, 1961), М. Софронове (В. И. Смирнов и Е. С. Кулябко, 1954), Н. И. Фуссе (В. И. Лысенко, 1975), Н. Д. Брашмане (И. И. Лихолетов и Л. Е. Майстров, 1971), книгу В. Е. Прудникова (1895—1969) «Русские математики-педагоги XVIII—XIX вв.» (Москва, 1956) и, только для примера, несколько статей — о Д. Бернулли (В. И. Смирнов, 1959), С. Е. Гурьеве (А. П. Юшкевич, 1947), М. Ф. Бартельсе и К. М. Петерсоне (И. Я. Депман, 1950 и 1952), Т. Ф. Осиповском (Э. Я. Бахмутская, 1952), А. В. Летникове (Р. Я. Шостак, 1952), М. Е. Ващенко-Захарченко (Л. Н. Грацианская, 1961), В. П. Ермакове (Л. Н. Грацианская, К. Я. Латышева, 1956), В. В. Бобынине (К. А. Рыбников, 1950; В. П. Zubов, 1956), С. О. Шатуновском

(Н. Г. Чеботарёв, 1940), Ф. М. Суворове (П. М. Олоничев, 1956); Ф. Э. Молине (Н. Ф. Канунов, 1966, 1975), Д. Ф. Егорове (П. И. Кузнецов, 1971), Н. Н. Лузине (П. И. Кузнецов, М. А. Лаврентьев, 1974), А. Н. Крылове (В. И. Смирнов, 1956). Биографии нескольких крупных отечественных математиков помещены в сборнике «Люди русской науки» (т. I. 1-е изд. 1948; 2-е изд. 1961). Многочисленные биографические статьи об отечественных ученых, написанные в большинстве случаев советскими авторами, были опубликованы в двух больших иностранных биографических словарях, изданных в последние годы: Dictionary of scientific biography (Нью-Йорк, 15 томов) и Scienziati e tecnologi, dalle origini al 1875, Scienziati e tecnologi contemporanei (Милан, 3 + 3 тома). Эти словари в немалой мере содействуют ознакомлению зарубежных читателей с жизнью и творчеством наших отечественных ученых, и в частности математиков.

Было издано также несколько книг о зарубежных математиках. Важнейшие из них — монографии об Архимеде (С. Я. Лурье, 1945; И. Н. Веселовский, 1957), Декарте (Г. П. Матвиевская, 1976), Паскале (Е. М. Клаус, И. Б. Погребынский, У. И. Франкфурт, 1971), Гюйгенсе (У. И. Франкфурт, А. М. Френк, 1962), Ньюtone (С. И. Вавилов, 1943), Лейбнице (И. Б. Погребынский, 1971), Лебеге (И. М. Тумаков, 1975), Г. Вейле (И. М. Яглом, 1967), Вольтерра (Е. М. Полищук, 1977).

Упомянем еще «Біографічний словник діячів у галузі математики» С. И. Бородина и А. С. Бугая (1973), содержащий краткие биографии очень большого числа математиков всего мира вплоть до наших дней.

Отдельно назовем, в дополнение к упомянутому ранее, сборники статей об отдельных ученых. Это сборники «Московский университет — памяти Ньютона» (М., 1946), в ряде вопросов дополняющий уже названный академический сборник, вышедший в 1943 г. под редакцией С. И. Вавилова, «Леонард Эйлер» под редакцией М. А. Лаврентьева, А. П. Юшкевича и А. Т. Григорьяна (М., 1958), «Карл Фридрих Гаусс» под редакцией И. М. Виноградова (М., 1956), «Научное наследие П. Л. Чебышева» под редакцией С. Н. Бернштейна (I—II. М., 1945) и еще сборники памяти Д. А. Граве (М.; Л., 1940) и О. Ю. Шмидта (М., 1959). Все эти книги содер-

жат, как правило, оригинальные исследования их авторов. Несколько иной характер имеет сборник «Михаил Васильевич Остроградский. Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности. 1862—1962» под редакцией И. Б. Погребысского и А. П. Юшкевича (М., 1961), значительную часть которого составили архивные материалы.

Об архивных исследованиях необходимо сказать особо. Отметим прежде всего введение в обращение ряда средневековых русских и латинских рукописей В. П. Зубовым и арабских рукописей Б. А. Розенфельдом, Г. П. Матвиевской и их учениками (об этом будет сказано далее). С упомянутыми выше эйлеровскими сессиями АН СССР и АН ГДР было связано детальное изучение соответствующих архивных фондов обеих стран. Вышли в свет два тома «Рукописных материалов Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР», из которых первый (М.; Л., 1962) содержит подробное описание хранящихся в Ленинграде эйлеровских материалов, а второй (1965) — неопубликованные рукописи великого ученого по механике. Эту работу проделал большой коллектив ученых — Ю. Х. Копелевич, М. В. Крутикова (1889—1974), Г. К. Михайлов и Н. М. Раскин, причем второй том подготовили Г. К. Михайлов и И. А. Перельматор. Была издана неизвестная ранее переписка Эйлера с Я. В. Брюсом (Ю. Х. Копелевич, 1957), Дж. Стирлингом (Т. А. Красоткина, 1957), Т. Майером (Ю. Х. Копелевич, при участии английского ученого Э. Форбса, 1959—1969)⁵. Под редакцией Э. Винтера (ГДР) и А. П. Юшкевича и при участии П. Гофмана (ГДР), Т. Н. Кладо (1889—1972) и Ю. Х. Копелевича ИИЕТ АН СССР и Центральный Институт истории Академии наук ГДР опубликовали на языке оригинала три тома подробно комментированной корреспонденции Эйлера (всего около тысячи писем), содержание которой характеризуется ее названием «Берлинская и Петербургская академии наук в переписке Леонарда Эйлера» (*Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers*. Berlin, 1959—1975). Тот же коллектив переиздал полностью научную переписку Эйлера с Гольдбахом (*Leonhard Euler und Chris*

⁵ Некоторые неизвестные ранее части переписки Эйлера были опубликованы еще в 1935 г. С. Я. Лурье и в 1937 г. историком И. И. Любименко (1878—1959).

tian Goldbach. Briefwechsel. 1729—1764. Berlin, 1965), причем вопросы, касающиеся теории чисел, были прокомментированы А. А. Киселевым и И. Г. Мельниковым⁶. Только что названные двое ученых, а также Г. П. Матвиевская исследовали ранее неопубликованные рукописи Эйлера по теории чисел (1959—1965).

Резюме всех сохранившихся писем Эйлера и к нему (около трех тысяч), составленные теми же советскими учеными при участии К. Р. Бирмана (ГДР), были изданы отдельной книгой под редакцией В. И. Смирнова и А. П. Юшкевича (Леонард Эйлер. Переписка. Аннотированный указатель. Л., 1967); в существенно дополненном и переработанном виде эта работа вышла под редакцией Смирнова, Юшкевича и швейцарского математика В. Габихта на немецком языке, как I том IV серии Полного собрания сочинений Эйлера (*Leonhardi Euleri Opera omnia*), выходящего под эгидой Швейцарского общества естествоиспытателей и ИИЕТ Академии наук СССР (Базель, 1975). Издан также V том IV серии, содержащий обширную переписку Эйлера с Клеро, Даламбером и Лагранжем (Базель, 1979); он подготовлен и прокомментирован А. П. Юшкевичем и французским историком математики Р. Татоном.

Материалы Архива Академии наук СССР, изучавшиеся названными и другими исследователями, раскрыли также новые стороны деятельности других петербургских академиков — математиков XVIII и начала XIX в. — Г. В. Крафта, С. К. Котельникова, С. Я. Румовского, М. Софронова, А. И. Лекселля, Н. И. Фусса, Ф. И. Шуберта, С. Е. Гурьева и др.

Большой том архивных документов о Н. И. Лобачевском — «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского» (М.; Л., 1948) — опубликовал историк Л. Б. Модзалевский (1902—1948). Дополнением к этому изданию, которое раскрыло многие ранее неизвестные стороны педагогической и административной деятельности великого математика, бывшего почти 20 лет ректором Казанского университета, а также пролило новый свет на некоторые его идейные установки, явился еще один большой том документов о Лобачевском, подготовленный целым коллективом ученых (Н. И. Лобачевский. Научно-педагогическое

⁶ Эта переписка была впервые опубликована с рядом пропусков и без комментариев в 1843 г. П. Н. Фуссом.

наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма. Отв. редакторы П. С. Александров и Б. Л. Лаптев. М., 1976). Между этими двумя датами работу Лобачевского как руководителя всей системы народного образования в обширном Казанском учебном округе изучали по архивным данным В. М. Нагаева (1950) и П. Ф. Якунин (1956). Архивное наследие Остроградского исследовали В. И. Антропова, К. И. Кострюков, И. А. Марон, И. Б. Погребысский, Е. Я. Ремез; Чебышева — главным образом В. Е. Прудников (опубликовавший большую часть обнаруженных им материалов в V томе Полного собрания сочинений Чебышева); Золотарёва и Маркова — Е. П. Ожигова (академика А. А. Маркова — также его сын А. А. Марков); Вороного — И. Б. Погребысский и др.; Н. В. Бугаева — Ф. Я. Шевелев, и т. д. Были опубликованы некоторые части переписки русских ученых XIX и начала XX в.: письма Адамара, Пуанкаре и др. А. М. Ляпунову (В. И. Смирнов, 1956), Эрмита — С. В. Ковалевской (П. Я. Полубаринова-Кочина, 1956), нескольких французских математиков — А. А. Маркову-старшему (Е. П. Ожигова, 1968), письма К. Вейерштрасса — С. В. Ковалевской (П. Я. Полубаринова-Кочина, 1974), переписка А. А. Маркова с А. А. Чупровым (Х. Ондар, 1977). При всем том в советских архивах остается множество документов о жизни и работе отечественных математиков, которое еще ожидает исследователей.

Материалы по истории отечественной науки в зарубежных архивах до сих пор очень мало изучены; об отдельных находках, обнаруженных в них, сказано далее.

4. Исследования по истории отечественной математики

Мы перейдем теперь к наиболее обширному циклу работ — по истории отечественной математики, причем прежде всего — в России и в СССР с 1917 г., не выделяя особо отдельные регионы страны, как, например, Украину или же Эстонию и т. д., ввиду самой непосредственной связи научного развития в них. Средневековую математику на территориях нынешних республик Средней Азии и Закавказья мы рассмотрим в шестом параграфе, так как разграничение с другими странами арабского Востока, с одной стороны, и Византии — с другой, здесь крайне

затруднительно. Число работ по истории отечественной математики весьма велико; если считать статьи юбилейного характера и некрологи — а они также входят в историческую литературу, — то лишь за десятилетие 1957—1967 гг. их вышло свыше пятисот. Естественно, что мы ограничимся сводной характеристикой результатов, отдельно останавливаясь на немногих работах.

Как уже говорилось, первые фундаментальные исследования по истории математики в России до основания Петербургской академии наук принадлежали В. В. Бобынину, а в 1920 г. их распространил на период с 1725 по 1863 г. А. В. Васильев. После того в течение ряда лет работы по истории отечественной математики были sporadическими и систематический характер они принимают в конце 30-х годов. Т. И. Райнов в книге «Наука в России XI—XVII веков» (М., 1940), защищенной им в качестве диссертации на степень доктора исторических наук, дополнил изыскания Бобынина, привлекая некоторые новые важные материалы. В том же году А. П. Юшкевич защитил докторскую диссертацию «Математика и ее преподавание в России XVIII века», публикации которой в то время помешала Великая Отечественная война. Проведенные перед войной изыскания о развитии математики в Московском университете также не смогли быть сразу опубликованы. Симптоматичным было издание в тяжелые военные годы нескольких книг о Лобачевском. Особенно усилился и в дальнейшем постоянно возрастал темп работ по истории математики в России после окончания военных действий; это явилось одним из следствий огромного патриотического воодушевления всего советского народа.

В. В. Бобынин дал в свое время довольно низкую оценку математической культуры в России XVI—XVII вв. Конечно, основную часть русской математической литературы того времени составляли рукописи по практической арифметике и геометрии, в изучение которых Бобынин внес первый значительный вклад, но самый подход Бобынина к этим рукописям был односторонним. По догматической, бездоказательной форме изложения различных правил, вроде тройного или правила ложного положения, характерной и для аналогичной западно-европейской литературы, он ошибочно судил об уровне знаний ее авторов, отказывая им даже в понимании сути рекомендуемых

ими приемов решения задач. Эта точка зрения была подвергнута критике Юшкевичем сперва на примере тех же рукописей, которые изучал Бобынин, а затем и других первоисточников (1947—1957). Последующее изучение письменных и архитектурных памятников, а также археологические раскопки привели к еще более широкому пересмотру представлений об уровне математических знаний в древней Руси. До монгольского нашествия в таких центрах, как Киев и Новгород, элементарные арифметические навыки были не менее распространены среди простого населения, чем в передовых странах Западной Европы (Л. Е. Майстров, 1957). В. П. Зубов вновь (1953) изучил основной русский математический памятник XII в. — хронологический трактат Кирика Новгородца и специально своеобразное деление часа у этого ученого, происхождение которого по-другому объяснила А. Е. Раик (1965). А. П. Юшкевич рассмотрел математические статьи «Правды русской» (1948). Р. А. Симонов начиная с 1963 г. систематически изучал развитие славянской алфавитной нумерации и терминологии, причем выявил много новых фактов и взаимосвязей, сведенных воедино в его докторской диссертации по историческим наукам (1975) и брошюре «Математическая мысль древней Руси» (М., 1977). Историк академик Б. А. Рыбаков по-новому осветил вопрос о математических знаниях древнерусских зодчих (1957). Тесно связаны с математикой метрология и хронология. В этой связи следует упомянуть две весьма ценные книги — «Русская метрология» и «Русская хронология» (М., 1944) академика Л. В. Черепнина.

Новое направление работ в этой области открыл В. П. Зубов. Изучая «Изборник Святослава» 1073 г. и восходящий ко второй половине XV в. славянский перевод отрывков из «Метафизики» ал-Газали, сделанный в Литве с древнееврейского перевода этого арабского сочинения XI—XII вв., а также другие источники, он в 1950—1954 гг. показал, что русских образованных людей эпохи средних веков интересовали философско-математические вопросы, восходящие ко времени Зенона Элейского и волновавшие средневековых западноевропейских ученых: проблема потенциально-бесконечной делимости непрерывных величин, свойства континуума и неделимых элементов и т. д. Учение об интенсивности и ремиссии форм, восходящее к Аристотелю и получившее оригинальное развитие в

западноевропейской науке XIV—XVI вв., излагалось, как показал Зубов, в лекциях по физике, т. е. натурфилософии, читавшихся в духовных академиях Киева и Москвы в конце XVII и начале XVIII в.; возможно, что подобные лекции отразились на формировании взглядов молодого Ломоносова.

Ю. А. Белый и К. И. Швецов впервые подробно описали (1959) рукопись «Синодальная № 42», представляющую собой, как они выяснили, выполненный в 1625 г. перевод одного английского учебника того времени. Переводчик И. Елизарьев предназначал рукопись, содержащую систематическое изложение планиметрии с доказательствами многих теорем и построений, для печатного издания, которое, однако, не состоялось, поэтому, вероятно, перевод не был закончен. Для издания книги требовалось одобрение высших властей, которого дано не было: руководящие государственные деятели России еще не осознали того, что необходимо поднять уровень математического просвещения в стране.

И. Г. Спасский изучил на основании обширнейших рукописных материалов историю русских счетов и опроверг распространенное мнение об их зарубежном происхождении (1952).

Новый свет был пролит и на печатные руководства XVIII в., которые стали выходить во все возрастающем числе начиная с «Арифметики» Магницкого 1703 г. Подробный анализ этих руководств и, в частности, роли в создании русской учебной литературы XVIII в. Эйлера и его учеников, содержащийся в докторской диссертации А. П. Юшкевича 1940 г., был им резюмирован в некоторых статьях 1947—1949 гг.; дополнения и уточнения, относящиеся к учебной литературе XVIII в., предложили И. Я. Депман (1948, 1949), С. Е. Фель (1952), В. Е. Прудников (1956) и др. В более широких хронологических рамках XVIII — начала XX в. учебную математическую литературу для средней школы проанализировал в книге «К истории развития передовых идей в русской методике математики» профессор А. В. Ланков (1884—1953).

Много работ было посвящено научным исследованиям первых математиков Петербургской академии наук и особенно Леонарда Эйлера. В оценке некоторых особенностей творчества Эйлера, например его трактовки проблемы строгости и его стиля мышления, высказывались

нередко различные мнения (М. Я. Выгодский, 1949; И. Г. Мельников, 1966). Интересное сопоставление характера творчества Эйлера и Лагранжа в целом дал А. Н. Колмогоров (1954). А. О. Гельфонд (1957) особо подчеркнул алгебраическую и конструктивную направленность идей и методов аналитических исследований Эйлера, обусловленную поисками простейших и практически удобных алгоритмов решения задач теоретической и прикладной математики; как другую особенность творчества Эйлера Гельфонд назвал широкое применение экстремальных принципов (также и в теории чисел). Эти черты творчества Эйлера, как и его тематика, оказали заметное влияние на духовное формирование петербургской математической школы Чебышева.

Анализ работ Эйлера по теории чисел в целом произвел Б. А. Венков (1935) и более детально — А. О. Гельфонд (1958), его работ по теории делимости и истоков в ней теории алгебраических чисел — И. Г. Башмакова (1949—1954), доказательства теоремы о существовании первообразного корня для любого простого модуля — А. А. Киселев и И. Г. Мельников, которые установили его принципиальную правильность, подвергнутую сомнению Гауссом (1957); сравнение достижений в теории чисел Ферма и Эйлера произвел И. Г. Мельников (1974—1977). Некоторые другие исследования Киселева и Мельникова, а также Г. П. Матвиевской, посвященные арифметическому наследию Эйлера, диофантову анализу и другим вопросам, уже упоминались.

В ходе этих работ было обнаружено немало нового; например, то обстоятельство, что Эйлеру уже был известен «постулат Бертрана» (1845), доказанный Чебышевым. Рукописи и переписка Эйлера имеют не только исторический интерес. Примером может служить, как указал А. А. Киселев, эйлеров метод производящих функций в применении к аддитивным задачам теории чисел.

Эйлерово доказательство основной теоремы алгебры, опубликованное в 1751 г., через полстолетия подвергнутое за неполноту критике Гауссом, а затем почти забытое, вновь разобрала И. Г. Башмакова (1957), которая показала, что рассуждения Эйлера, идейно близкие к позднейшим алгебраическим доказательствам теоремы, могут быть проведены с полнотой, удовлетворяющей нашим современным требованиям. Р. И. Галченкова обнаружила

(1966), что почти все основные моменты эйлерова доказательства основной теоремы алгебры содержатся в его заметках 30-х годов. Упомянем тут же, что С. С. Петрова пересмотрела аналитическое доказательство той же теоремы, предложенное в 1749 г. Даламбером, и среди прочего установила, что у этого автора вовсе не встречается известная лемма, во многих учебниках называемая по его имени (1973). Обзор работ Эйлера и некоторых других ученых по теории цепных дробей дал А. Н. Хованский (1957).

Взгляды Эйлера на основания анализа изучали С. Я. Лурье (1935), М. Я. Выгодский (1949) и в другом аспекте — А. П. Юшкевич (1959), указавший на возможность рационального истолкования «исчисления нулей» (в котором нередко усматривали логические дефекты) и на предвосхищение Эйлером ряда положений «Теории аналитических функций» Лагранжа. Некоторые основные понятия анализа у Эйлера, в частности понятие функции, рассмотрел А. И. Маркушевич (1958).

К. А. Рыбников еще до второй мировой войны подробно изучил историю изопериметрических задач вплоть до известной монографии Эйлера 1744 г.; соответствующая работа Рыбникова увидела свет только в 1949 г. Дальнейшая история вариационного исчисления в только что названном и последующих трудах Эйлера и его преемников — Лагранжа, Лежандра, Якоби и др. — до эпохи Вейерштрасса была прослежена в статьях А. В. Дорофеевой (1961, 1963).

Открытия Эйлера в области дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными, были весьма обстоятельно изучены Н. И. Симоновым в статьях 1954—1973 гг. и в книге «Прикладные методы анализа у Эйлера» (М., 1957); этой же теме была посвящена его докторская диссертация (1956). Симонов впервые привлек, помимо чисто математических работ Эйлера, его работы по различным отраслям механики, содержащие многие весьма важные результаты в теории дифференциальных уравнений. Попутно Симонов выявил ряд методов и результатов Эйлера, сохраняющих актуальный интерес. С такой же точки зрения рассмотрел эйлеровы методы интегрирования уравнений с частными производными Ф. И. Франкль (1958). Естественно, что параллельно рассматривались открытия в теории дифференциальных

уравнений Даламбера, например относящиеся к системам линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (Н. И. Симонов, 1956), и знаменитый спор между Эйлером, Даламбером и другими о колеблющейся струне. Некоторые уточнения в общепринятые представления о позиции Даламбера в этом споре внес А. П. Юшкевич (1975). Вслед затем (1976) С. С. Демидов подробно показал, что, в то время как Даламбер понимал под решением уравнения колебания струны решение в классическом смысле слова, Эйлер подходил к идее так называемого теперь обобщенного решения — обстоятельство, мимоходом отмечавшееся и ранее. Ряд работ 1973—1978 гг. Демидов посвятил истории теории уравнений с частными производными, осветив, например, такие проблемы, как создание классификации типов уравнений с частными производными, общую переориентацию теории во второй половине XIX в., возникновение теории Ли и т. д.

Были изучены также геометрические заметки Эйлера как учебного, так и научного характера. Одни из них позволяют судить о его взглядах на построение курса элементарной геометрии, в частности теории параллельных; другие содержат некоторые теоремы, опубликованные позднее М. Стюартом и Понселе (обобщение теоремы Чева), новый вариант вывода известной теоремы о многогранниках и т. д. Эти заметки, частью записанные Н. И. Фуссом, исследовал Ю. А. Белый (1958—1961). Дифференциально-геометрические работы Эйлера, а также Монжа и его школы явились предметом одной статьи М. Я. Выгодского (1936), аналитико-геометрические — И. Б. Погорьского (1961).

Сжатый обзор всех ранее опубликованных геометрических работ Эйлера дал Б. Н. Делоне (1958), подробно остановившись на парадоксе Крамера, вопросах топологии, внутренней геометрии поверхностей и картографии. Различные виды геометрических преобразований, применявшихся Эйлером (в том числе движения в пространстве и их связь с кватернионами и конформные преобразования) изучал Б. А. Розенфельд (1957); конформные преобразования у Эйлера рассмотрены были также в книгах А. И. Маркушевича (1951) и С. Е. Белозерова (1962), названных далее.

К сказанному нужно добавить, что работы Эйлера по

теории вероятностей и ее приложениям были рассмотрены Б. В. Гнеденко (1958) и что, кроме того, исследования Эйлера в области анализа получили освещение в трудах по истории отдельных дисциплин, о которых говорится в дальнейшем.

Математические открытия старшего друга Эйлера Д. Бернулли, работавшего в Петербургской академии первые восемь лет ее существования и затем в качестве иностранного члена, публиковавшего в ее записках очень многие свои статьи, были рассмотрены в статье В. И. Смирнова, приложенной к русскому переводу «Гидродинамики» Бернулли (1959). В. И. Смирнов тщательно проанализировал математические мемуары Д. Бернулли по теории вероятностей, отметив при этом указанную Ю. В. Линником связь оценки «нравственного ожидания» при помощи логарифмической функции с оценкой так называемой энтропии в современной теории информации, и по теории ошибок наблюдений, его основоположные работы по математической физике, а также очень интересные позднейшие мемуары по тригонометрическим рядам, ранее не обращавшие на себя внимания. Позднее работы Д. Бернулли по теории вероятностей и ее приложениям к демографической статистике изучал О. Б. Шейнин (1972). Н. И. Симонов (1963—1966) обнаружил совершенно забытые результаты первых петербургских академиков в теории дифференциальных уравнений, например интегрирование Я. Германом с помощью предварительного дифференцирования так называемого уравнения Даламбера (особого решения Герман не заметил). Геометрические работы того же Германа изучал В. И. Лысенко (1966). А. П. Юшкевич показал (1965), что Хр. Гольдбах установил все случаи интегрирования в конечном виде дифференциального бинома, которые в общепринятой теперь форме затем выразил Эйлер. Наконец, В. И. Лысенко (1959—1975) рассмотрел работы А. И. Лекселя и Н. И. Фусса по полигонометрии, этих же ученых и Ф. И. Шуберта по сферической геометрии и тригонометрии; Фусса и Шуберта по картографии; Шуберта по дифференциальной геометрии, хранящиеся в Архиве АН СССР.

В XVIII в. единственным центром исследования по математике была в России Петербургская академия наук, и наиболее важные из этих исследований вели ученые, приглашенные из-за рубежа. Реформа среднего и высшего

образования, начатая в первые же годы XIX в., организация новых университетов и реорганизация Московского университета быстро привели к количественному и главное — качественному росту национальных кадров математиков. Из студентов учрежденных тогда в стране физико-математических факультетов вышли: в Казани — Н. И. Лобачевский, в Харькове — М. В. Остроградский, в Москве несколько позднее — И. И. Сомов и П. Л. Чебышев, который уже в качестве профессора Петербургского университета и члена Академии наук стал главным организатором и вдохновителем большой научной школы, плодотворно работавшей долгие десятилетия и оказавшей значительное влияние на развитие отечественной и мировой математики. Творчеству названных и других выдающихся русских математиков XIX и первой половины XX в. было посвящено особенно много работ, которые нам придется охарактеризовать лишь в самых общих чертах.

Многосторонне было исследовано творчество Лобачевского, открывающего собой ряд великих русских математиков последних полутора столетий. С. А. Яновская в книге «Передовые идеи Н. И. Лобачевского — орудие борьбы против идеализма в математике» (М., 1950) подвергла критике истолкование его воззрений в духе конвенционализма. На примере открытия Лобачевским неевклидовой геометрии Яновская показала, что творческое развитие математики бывает связано не с отказом от требований логической строгости, а с изменяющимся во времени и все более глубоким пониманием этих требований. Это же положение, заметим, явилось центральным в одной из ее последних статей — о роли научной строгости в развитии математики, где в качестве объекта исследования была выбрана «Геометрия» Декарта (1966). В 1955 г., в промежутке между этими двумя работами, критический разбор клейновской концепции регулярной смены в развитии математики «творческих» и «критических» периодов дал К. А. Рыбников. Развитие воззрений Лобачевского на проблему параллельных в раннем периоде его научной деятельности проследил на основании архивных материалов Б. Л. Лаптев (1952), А. П. Норден изучил вопрос о подходе самого Лобачевского к проблеме доказательства непротиворечивости его системы (1958) — вопрос, которым занимался и Б. А. Розенфельд (1957); В. Ф. Каган в деталях сопоставил построение системы гиперболиче-

ской геометрии у Лобачевского, Гаусса и Бояи (1948). Ряд авторов — Э. К. Хилькевич (1949), Ю. М. Гайдук (1957) и др. — обнаружили много забытых фактов о распространении геометрических идей Лобачевского в России и за рубежом. Мы коснулись только части обширной исторической литературы о геометрии Лобачевского.

Работы Лобачевского по анализу изучал Г. Л. Лунц (1949, 1957), подробно разобравший предложенные Лобачевским достаточные критерии разложимости функций в ряд Фурье, открытый Лобачевским достаточный признак сходимости числовых рядов и его приемы вычисления ряда специальных интегралов. Впрочем, истолкование Лунцем общего определения функции у Лобачевского вызвало возражения со стороны Ф. А. Медведева (1975). Подробному разбору был подвергнут и оригинальный вклад Лобачевского в алгебру — его трактовка понятия числа и алгебраических операций, прием решения линейных систем, приближенный метод решения уравнений высших степеней и т. д. (Н. Г. Чеботарёв, 1948; И. Г. Башмакова, А. П. Юшкевич, 1949; В. Ф. Рогаченко, 1952; профессор П. Г. Конторович (1905—1968) и Д. И. Мильман, 1953). Замечательную речь Лобачевского о важнейших предметах воспитания (1828), отразившую его философские, педагогические и нравственные воззрения, подверг тонкому историческому анализу Б. Л. Лаптев (1976); эту же речь с большим художественным искусством использовал и прокомментировал в одном выступлении перед студентами МГУ П. С. Александров (1967, опубликована в 1976).

Много нового было внесено и в изучение творчества М. В. Остроградского. Е. Я. Ремез обнаружил в архивных бумагах Остроградского ряд неопубликованных результатов по приближенным вычислениям, отдельным вопросам алгебры и анализа (1951); тогда же Б. В. Гнеденко впервые обратил внимание на статьи Остроградского по теории вероятностей и ее приложениям (1951). В 1957—1962 гг. В. И. Антропова исследовала открытия Остроградского в теории кратных интегралов, сопоставив их с работами других ученых, а в 1959—1962 гг. вместе с И. Б. Погребыским и И. З. Штокало — его открытия в области математической физики. Эти исследования были дополнены В. И. Антроповой и А. П. Юшкевичем в 1965 г., когда они опубликовали переводы обнаруженных последним двух важных мемуаров по теории теплоты, представ-

ленных в 1826—1827 гг. Остроградским Парижской академии наук и сохранившихся в ее архиве. Эти мемуары уже содержали известную формулу преобразования тройного интеграла, общую формулировку метода решения дифференциальных уравнений математической физики с помощью разделения переменных, вывод коэффициентов разложения какой-либо данной функции в так называемый обобщенный ряд Фурье вместе с доказательством ортогональности соответствующей системы собственных функций, а кроме того, решение задачи о распространении тепла в твердой прямой призме с основанием в форме равнобедренного прямоугольного треугольника (ранее о существовании такого решения было известно лишь из одного упоминания Г. Ламэ). Оба эти мемуара стали известны Ламэ, Дюамелю, Пуассону, Коши, и это окончательно решает в пользу Остроградского вопрос о его первенстве как в открытии упомянутой интегральной формулы, так и в выработке схемы обобщенного метода Фурье. Два других мемуара 1824 г., представленных Парижской академии в 1826 г., также хранящихся в ее архиве, знакомят с первыми занятиями Остроградским теорией вычетов, начала которой в то время положил Коши, и ее приложениям к вычислению определенных интегралов (они до сих пор не опубликованы). Еще ранее, в 1961 г., Антропова издала лекции, читанные Остроградским по интегральному исчислению в Главном педагогическом институте и содержащие приложения теории вычетов к вычислению специальных интегралов, а также дополнения к его опубликованным результатам в теории кратных интегралов. Е. Я. Ремез подверг разбору открытия Остроградского в вариационном исчислении (1959); их изучала также Н. В. Александрова (1959). Лекции Остроградского по алгебре и теории чисел были проанализированы И. Г. Башмаковой и Л. А. Сорокиной (1962). И. А. Марон в 1950—1962 гг. напечатал ряд статей о педагогической деятельности Остроградского.

Многие из упомянутых исследований входят составной частью в научный аппарат трехтомного собрания сочинений Остроградского, о котором говорилось выше. Важность этого аппарата к этому, как и к другим изданиям наших классиков математики, уже упоминавшаяся выше, может быть лишь констатирована в рамках данного обзора. Нередко краткий комментарий к какой-либо полу-

забытой статье содержит ценную историко-научную информацию, основанную на изучении многих первоисточников. В качестве одного из множества возможных примеров упомянем замечания В. И. Смирнова к небольшой работе Остроградского об интегрировании нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи разложения по малому параметру, напечатанной в 1836 г. и переизданной в III томе собраний сочинений (1961).

Только что сказанное в полной мере относится к полному собранию сочинений Чебышева. Из отдельных статей о Чебышеве следует отметить прежде всего два сборника уже названного ранее «Научного наследия П. Л. Чебышева» (1945). В первый сборник вошли статьи Н. И. Ахиезера о работах Чебышева по теории полиномов, С. Н. Бернштейна — по теории вероятностей, И. М. Виноградова и Б. Н. Делоне — по теории чисел, профессора Московского университета, член-кор. АН СССР В. В. Голубева (1884—1954) — об интегрировании алгебраических функций и В. Л. Гончарова — по теории наилучшего приближения функции. Во втором сборнике, целиком посвященном механизмам Чебышева, помещены статьи академика И. И. Артоболевского (1905—1978) и Н. И. Левитского, З. Ш. Блоха и член-кор. АН СССР В. В. Добровольского (1880—1956). Развитие идей и методов Чебышева прослеживается во всех случаях до середины XX в., а имена авторов сами по себе гарантируют высокий научный уровень их анализа. Из других работ о Чебышеве укажем статьи А. А. Гусака о ранней истории и предыстории теории наилучшего приближения функций (1957—1963), В. П. Бычкова — о развитии направления дифференциальной геометрии, начало которого положил доклад Чебышева 1878 г. об одевании поверхностей (1963—1966), Л. Е. Майстрова — об арифмометре и механизмах Чебышева (1973, 1975), Я. Л. Геронимуса и А. В. Медведевой — к истории квадратурной формулы Чебышева (1977).

Мы несколько подробнее задержались на изучении творчества Лобачевского, Остроградского и Чебышева; в остальных случаях нам придется ограничиться совсем краткими упоминаниями, даже когда речь идет о математиках самого высокого класса. Назовем по крайней мере исследования Р. О. Кузьмина (1947) и И. Г. Башмаковой (1949) о работах по теории алгебраических чисел Золотарева; В. И. Смирнова — о работах по математи-

ческой физике и по теории устойчивости Ляпунова в сопоставлении их с работами Пуанкаре (1948—1956); А. А. Киселева и Е. П. Ожиговой — о работах по теории чисел Бугаева (1963, 1965); А. И. Маркушевича — об открытиях в теории аналитических функций Сохоцкого (1950); С. Д. Россинского (1897—1965) — о диссертации Петерсона по теории поверхностей (1959); П. М. Олоничева — о работах по геометрии Ф. М. Суворова (1956); Н. Ф. Канунова — о работах Молина по гиперкомплексным числам и теории представлений групп (1966, 1975); А. Д. Мышкиса и И. М. Рабиновича — о работах Боля по качественной теории дифференциальных уравнений и топологии (1955 и след. годы); Н. К. Бари, Д. Е. Меньшова и Л. А. Люстерника — о вкладе Лузина в теорию функций (1951); Н. И. Ахиезера — о работах С. Н. Бернштейна по конструктивной теории функций (1965). В ходе этих и других исследований было обнаружено немало прошедших мимо внимания современников открытий, произведенных в России ранее, чем за рубежом, или одновременно с открытиями, сделанными иностранными учеными. Так обстояло дело с рядом теорем и формул Петерсона в дифференциальной геометрии, полученных затем — и независимо — Г. Майнарди, Д. Кодацци и О. Бонне; с изучением Сохоцким поведения аналитической функции в окрестности существенно особой точки (теорема Вейерштрасса — Казорати — Сохоцкого) и граничных свойств аналитических функций; с методом неподвижных точек Боля, независимо развитым несколько позднее Брауэром и др., и т. д.

Ряд работ был посвящен развитию в России и СССР отдельных математических наук. Таковы были статьи А. Н. Колмогорова (1947) и Б. В. Гнеденко (1948—1956) о развитии теоретико-вероятностных идей и методов, А. К. Сушкевича — о дореволюционных исследованиях по алгебре (1951), В. В. Гуссова — о теории гамма-функций и цилиндрических функций (1953—1954), В. В. Лихина — о теории функций и чисел Бернулли (1959), М. Б. Налбандян — по теории эллиптических функций (1961—1966), книги «Краткий очерк истории общей и математической логики в России» Н. И. Стяжкина и В. Д. Силакова (М., 1962), «Петербургская школа теории чисел» В. Н. Делоне (М., 1947), «Развитие теории чисел в России» Е. П. Ожиговой (Л., 1972) и некоторые другие.

Мы оставляем здесь в стороне десятки и десятки публикаций о математике в отдельных университетах, научных обществах, о математических съездах, журналах и т. п. Такие работы весьма отличались между собой как по объему (от многих страниц до нескольких сот страниц), так и по характеру изложения, иногда представляя собой общие описания, иногда же обстоятельный историко-математический и прежде всего собственно-математический анализ; при этом некоторые охватывали небольшие промежутки времени, скажем функционирование какого-либо недолговечного общества, а другие — промежутки в сто и даже двести лет, захватывая и советский период. Ценность этих работ в их совокупности очень велика не только для истории организации научных исследований, но и благодаря содержащимся в них новым данным о научном творчестве многих ученых, например о сохранившихся только в кратких протокольных записях, докладах или выступлениях Чебышева, Вороного, Бугаева и т. д. Оставляя точно также в стороне обзоры развития математики в рамках отдельных союзных республик, мы назовем лишь несколько больших коллективных трудов, подготовленных крупными специалистами и содержащих обзоры развития отдельных математических дисциплин в советское время. Это «Математика в СССР за 15 лет» (под редакцией П. С. Александрова, М. Я. Выгодского и В. И. Гливенко, 1932), «Математика в СССР за 30 лет» (под редакцией А. Г. Куроша, А. И. Маркушевича и П. К. Рашевского, 1948), «Математика в СССР за 40 лет» (отв. редактор А. Г. Курош, 1959). Последнее издание вышло в двух томах, второй из которых — биобиблиографический и содержит названия около 22 000 работ более чем 3600 авторов. О быстрых темпах математического прогресса в СССР свидетельствует хотя бы то, что в предыдущем сборнике «Математика в СССР за 30 лет» смогло быть учтено около 7000 работ приблизительно 1300 авторов, а во втором томе последующего сборника «Математика в СССР. 1958—1967. Биобиблиография» (отв. редактор С. В. Фомин, Г. Е. Шилов, 1970), изданном в двух выпусках, приведено около 40 000 появившихся за указанное десятилетие работ около 8000 математиков (причем популяризаторские, методические и учебные работы, как правило, не учитывались). К сожалению, первый том этого труда из печати не вышел. Ценность обзоров во всех

Этих изданий исключительна; вместе с тем недостатком многих из них является отсутствие сопоставлений с исследованиями, проводившимися одновременно за рубежом.

По мере накопления новых и новых знаний о развитии математики в России и СССР несколько раз предпринимались попытки ее изложения в целом. Первыми вышли из печати популярные «Очерки по истории математики в России» Б. В. Гнеденко (М., 1946) и вскоре затем цикл 12 статей А. П. Юшкевича «Математика и ее преподавание в России XVII—XIX веков» («Математика в школе», 1947—1949). Далее последовали написанные Юшкевичем главы в коллективной «Истории естествознания в России» (т. I—II. М., 1957—1960), которые легли к основе его книги «История математики в России до 1917 года» (М., 1968), и подготовленные им же вместе с Б. А. Розенфельдом главы коллективного труда «Развитие естествознания в России. XVIII — начало XX века» (отв. редакторы С. Р. Микулинский, А. П. Юшкевич) (М., 1977). Вышли также два тома коллективного труда, посвященного ведущему научному учреждению нашей страны «История Академии наук СССР» (М., 1958, 1964), охватывающие 1725—1917 годы; математические главы в них написаны В. И. Смирновым и А. П. Юшкевичем. Еще до выхода второго тома в сборнике «Очерки истории математики и механики» (М., 1963) появилась большая статья Б. Н. Делоне, Л. Д. Кудрявцева и М. М. Постникова «Очерки истории развития математики в Академии наук за советский период (1917—1960)». Следует заметить, что изложение вопроса в обоих последних изданиях неизбежно выходит далеко за пределы рамок деятельности академических институтов и отдельных членов и сотрудников Академии наук, поскольку эти лица работали не только в системе Академии наук. Хотя мы отказались, вообще говоря, от рассмотрения работ, посвященных отдельным университетам, назовем еще одно сочинение, выделяющееся особенно высоким уровнем и подробностью изложения, именно коллективную книгу «Математика в Петербургском-Ленинградском университете», изданную под редакцией В. И. Смирнова (Л., 1970); она существенно дополняет прежде всего два предыдущих труда, поскольку до 1935 г. академическая математика развивалась преимущественно в Ленинграде.

Наиболее полным резюмирующим трудом является «История отечественной математики» в пяти книгах, изданная Институтом истории естествознания и техники Академии наук СССР и Сектором истории естествознания и техники Института истории Академии УССР (Киев, 1967—1970). В этом труде, подготовленном авторским коллективом почти из ста человек (отв. редактор И. З. Штокало, заместители отв. редактора А. Н. Боголюбов и А. Ю. Юшкевич), содержится подробное изложение истории математических наук на всей нынешней территории Советского Союза, включая Закавказье, Среднюю Азию и т. д. от древних времен до середины 60-х годов XX в. Уже само распределение по книгам показывает, что наибольшее внимание уделено математике советского времени: первые две книги заканчиваются 1917 г., а три следующие книги отведены анализу достижений различных направлений советской математической школы за пятьдесят лет; при этом в последней книге рассмотрено развитие математических методов в теоретической физике, механике и особая глава отведена вычислительной математике и кибернетике. Общий обзор развития математики в СССР за эти полстолетия, помещенный в начале третьей книги, написан на основе остальных глав и других материалов А. Н. Боголюбовым. Издание содержит важнейшие необходимые справочные материалы биобиблиографического характера и многочисленные портреты. К «Истории отечественной математики» примыкает другой коллективный труд — «История математического образования в СССР» под общей редакцией А. Н. Боголюбова и И. З. Штокало (Киев, 1975).

Разумеется, в истории отечественной математики все еще остается немало «белых пятен», но в целом мы имеем теперь гораздо более полное представление о ней, чем перед Великой Отечественной войной. В то время были сравнительно хорошо изучены геометрические открытия Лобачевского, отдельные результаты Остроградского в области анализа и некоторые направления творчества Чебышева и таких его учеников, как Марков и Ляпунов. Но даже наши знания о творчестве названных великих математиков, как и других ближайших учеников Чебышева — Золотарёва, Вороного и др., были далеки от полноты, не говоря уже о том, что оценка их производилась с научных позиций, сейчас во многом устарелых. Ска-

занное относится даже к более далекому от нас времени Эйлера. Теперь мы имеем гораздо более точную и объективную фактическую информацию о развитии математики в России и СССР в ее различных планах и направлениях и можем правильнее оценить творчество не только нескольких общепризнанных корифеев, но и многих других ученых, которые не принадлежали к числу лидеров, но внесли тем не менее выдающийся вклад в развитие математики. Эти ученые, работавшие главным образом в университетах Москвы, Киева, Казани, Одессы, Варшавы, Харькова, Дерпта-Тарту, где, разумеется, также сказывалось влияние первенствовавшей тогда Петербургской математической школы, стали в нашей стране пионерами распространения тех идей и течений математической мысли, которые лежали вне сферы основных интересов Чебышева и его ближайших учеников, таких, как теория аналитических функций, современная алгебра и теория групп, теория множеств и теория функций действительного переменного, интегральные уравнения, многомерные неевклидовы геометрии, математическая логика и т. д. В исторической перспективе работа, которая велась в только что названных и некоторых других направлениях, была гораздо более плодотворной и важной, чем казалось прежде; она существенно подготовила почву для развития новых математических школ, которые стали возникать частью в последние предреволюционные годы (как алгебраическая школа, основанная в Киеве Граве, или школа теории функций Егорова — Лузина, возникшая в Москве), а главным образом вскоре после Великой Октябрьской социалистической революции. Именно плодотворный синтез новых возникших в нашей стране направлений с традициями чебышевской школы в значительной мере определил последующий прогресс математики в Советском Союзе.

Нельзя не заметить, что проведенная советскими учеными работа по изучению достижений отечественных математиков XIX — XX вв. совершенно недостаточно известна многим зарубежным историкам науки. Результатом этой неосведомленности являются иногда весьма серьезные пробелы в освещении развития математики последних полутора столетий даже в таких серьезных и объемистых книгах, как изданная несколько лет назад монография М. Клайна «Математическая мысль от древ-

ности до современности» (*Kline M. Mathematical thought from ancient to modern times. New York, 1972, XVII + 1238 p.*).

5. История математики в древности

Выше говорилось, что почти сто лет назад Бобынин исследовал первый крупный письменный памятник древнеегипетской математики — папирус Райнда — и что выдающимся событием в ее изучении явилось опубликование в 1930 г. В. В. Струве оригинального текста и немецкого перевода так называемого Московского математического папируса. Расшифровка Московского папируса существенно обогатила знания о математике древнего Египта и вместе с тем поставила несколько вопросов, которые обсуждаются до сих пор. Примерно в это же время О. Нейгебауер и другие зарубежные ученые расшифровывали многие клинописные тексты, в корне изменившие прежние представления о математике древнего Вавилона и также выдвинувшие целый ряд сложных и тонких вопросов.

В обсуждении обширного возникшего комплекса проблем математики древнего Востока советские ученые приняли активное участие, выдвинув собственные концепции и гипотезы, а также новые толкования и реконструкции упомянутых и других задач. Помимо самого В. В. Струве, здесь следует назвать прежде всего С. Я. Лурье, предложившего оригинальные реконструкции вывода вавилонского правила суммирования последовательности натуральных квадратов и египетского приема вычисления объема усеченной пирамиды с квадратным основанием (1934, 1937), Г. П. Боева (1950) и М. Я. Выгодского. В статьях 1940—1941 гг. о вавилонской математике (докторской диссертации) и в книге «Арифметика и алгебра в древнем мире» (М.; Л., 1941) Выгодский высказал новые соображения о возникновении алгебры путем обращения возникших в практической деятельности задач, о происхождении и назначении вавилонских таблиц умножения, о возможности арифметического истолкования ряда вавилонских задач, трактуемых Нейгебауером как алгебраические, о приемах создания египетской таблицы, в которой дроби вида $\frac{2}{2n+1}(2n+1=3, 5, \dots, 101)$ выражаются суммами долей единицы

(другие гипотезы принадлежат С. А. Яновской, 1947, и И. Н. Веселовскому, 1948). В своей оценке египетской математики Выгодский разошелся с Нейгебауером, значительно выше оценив уровень ее развития в целом. Специальную статью Выгодский посвятил вопросу о происхождении в вавилонской нумерации знака нуля (1959).

Докторскую диссертацию о математике древнего Вавилона защитил, кроме Выгодского, И. Н. Веселовский (1952), который, в частности, отверг гипотезу Нейгебауера о происхождении шестидесятиричной позиционной системы нумерации из системы мер веса и денег и высказал предположение, что шестидесятиричный характер нумерации явился следствием счета на пальцах, а принцип поместного значения — следствием техники вычислений на некоторого рода абаке (1955). Несколько ранее Веселовский опубликовал работу о египетской науке и Греции (1948), а позднее занимался преимущественно изучением математики древних греков — Евклида (1950), Архимеда (1952, 1957), Диофанта (1976).

Оригинальную интерпретацию и новые реконструкции ряда задач египетской и вавилонской математики предложила ученица Яновской А. Е. Раик (с 1953); в частности, она показала, что ход решения некоторых задач, которые, по Нейгебауеру, вавилоняне сводили к биквадратным уравнениям, можно проще объяснить как комбинированное применение правила ложного положения и замены переменных (1955). Свои исследования, охватившие также математику древней Греции и Китая, А. Е. Раик объединила в «Очерках по истории математики в древности» (Саранск, 1967; 2-е изд. 1977).

В 1958 г. А. А. Вайман расшифровал один хранящийся в Эрмитаже клинописный текст, содержащий задачу о делении трапеции на попарно равновеликие части линиями, параллельными основаниям, при условии рациональности длин оснований и делящих линий. Приведенные в тексте решения образуют последовательность целых чисел, которые Вайман назвал вавилонскими, и которые тесно связаны пифагоровыми тройками чисел, также известными в древнем Вавилоне. А. А. Вайман реконструировал прием, которым могли быть получены вавилонские числа. В книге «Шумеро-вавилонская математика» (М., 1961) он резюмировал различные, в том числе свои собственные работы в этой области, которые про-

должал и впоследствии. К гипотезам Ф. Тюрю-Данжена, О. Нейгебауера и М. Я. Выгодского о происхождении позиционной шестидесятиричной системы Вайман добавил свою собственную. Математику Двуречья он делит на два периода: шумерский, когда преобладающую роль играла прикладная математика, притом скорее «бухгалтерского», чем «инженерного» типа, и вавилонский, в который на протяжении II тысячелетия до н. э. получило развитие теоретическое направление, в значительной мере не зависящее от хозяйственных потребностей — сюда относятся задачи алгебры и теории чисел; в это время ряд результатов был получен с помощью логической дедукции.

Первой советской публикацией по истории греческой математики явилась упоминавшаяся аспирантская диссертация М. Я. Выгодского о Платоне (1926); данная здесь оценка Платона как математика не встретила позднее поддержки у советских историков науки, более дифференцированно рассмотревших этот вопрос. В большой статье о «Началах» Евклида (1948) Выгодский поддержал новыми аргументами распространенное мнение, что на этот классический труд наложили печать платоновские установки Евклида. С этой точкой зрения не согласились В. Н. Молодший и Л. Е. Майстров (1949) и позднее И. Г. Башмакова (1958), сопоставившие систему оснований «Начал» с аристотелевской концепцией дедуктивной науки. Абстрактный характер изложения «Начал» при этом объясняется не идеалистическими установками их автора, а математическими целями, им поставленными, а также кругом читателей, который имел в виду Евклид.

С. А. Яновская (1956) подошла к системе «Начал» с другой стороны, поставив вопрос: почему в них аксиоматически строится только геометрия, но не арифметика. Согласно Яновской, дело в том, что алгоритмы решения задач арифметики натуральных чисел имеют абсолютный характер, позволяя всегда довести решение опять-таки до натурального числа, между тем как в геометрии, после того как несколько задач приняты за непосредственно решенные, все остальные сводятся к ним с помощью алгоритмов, в которых аксиомы играют роль правил вывода, а не посылок. В этой, как и в других работах С. А. Яновской послевоенного времени, отчетливо отразились ее логико-математические интересы и занятия.

Упомянем в связи с вопросом об основаниях геометрии

две статьи И. Н. Веселовского и А. Е. Бусуриной (1971) о возможности возникновения в древней Греции идеи о геометрии с постулатом параллельности, отличным от постулата Евклида (вопрос этот был возбужден в 1967 г. И. Тотом).

Проблемы древнегреческой практической арифметики — логики — были рассмотрены в упомянутой ранее книге М. Я. Выгодского 1941 г. Выгодский отверг нередко встречающееся представление о греческой математике как науке преимущественно геометрической в силу якобы геометрического же по преимуществу мышления греков; он в подробностях изучил приемы арифметических вычислений греков, предложив при этом новую реконструкцию архимедова способа извлечения квадратных корней. Развитию логики в Греции и Византии, а также в тесно связанной с последней Армении был посвящен ряд работ Г. Б. Петросяна (1946, 1956), А. М. Еганяна («Греческая логика». Ереван, 1972) и других ученых. Происхождение различных систем счисления рассмотрели И. Г. Башмакова и А. П. Юшкевич (1961). Л. Е. Майстров (1974) высказал мнение, что алфавитные системы применялись исключительно для записи чисел, а вычисления там, где знали только такие системы, проводились на абакках. Напротив, по мнению Г. Б. Петросяна (как и М. Я. Выгодского), и в алфавитных системах нумерации арифметические действия могли осуществляться без счетных приборов с использованием вспомогательных таблиц (1978).

Теоретическую арифметику греков изучали И. Г. Башмакова и Н. Г. Алимов. В работе об арифметических, т. е. VII—IX книгах «Начал» (1948) Башмакова, проводя различие между употребляемыми Евклидом в этих книгах числами-кратностями и числами-отрезками, показала, что евклидова теория делимости целых чисел-отрезков построена столь же строго, как и собственно геометрические книги «Начал»; между тем даже такой авторитетный знаток античной математики, как Цейтен, усматривал в этой теории неполноту и, более того, наличие порочного круга. Сопоставляя так называемую антифайретическую «доевклидову» теорию отношений целых чисел в VII книге «Начал» с общей «евдоксовой» теорией отношений величин в V книге, Башмакова пришла к заключению, что вторая теория охватывает по существу и непрерывные

и дискретные количества, т. е. целые числа, сохранение же первой теории в VII книге объясняется тем, что она вполне достаточна для нужд излагаемой в VII—IX книгах теории чисел. В дальнейшем Башмакова детально сопоставила общую теорию отношений Евдокса—Евклида с теорией сечений Дедекинда (1958).

Н. Г. Алимов (1955) мотивировал особенности общей теории отношений стремлением Евклида обойтись без допущения делимости величин, а применение в VII книге «Начал» старой теории отношений — желанием автора «Начал» оградить себя от философских упреков в смешении разнородных понятий величины и количества и в сведении непрерывного к дискретному. В глазах Алимова теория отношений VII книги представляет собой логически несовершенное объединение доевклидовой теории пропорций с некоей более поздней ее формой. Оба исследователя, опираясь на более ранние исследования по античной теории пропорций О. Беккера (1933), существенно разошлись как с ним, так и между собой. Позднее (1973) И. Г. Башмакова рассмотрела развитие и обобщение понятия (положительного) числа в греческой науке первых веков нашей эры.

Классификация квадратичных иррациональностей в X книге «Начал» явилась предметом исследований А. Е. Раик и А. И. Маркушевича (1948).

Античная инфинитезимальная математика стала предметом исследований в первую очередь С. Я. Лурье, который в книге «Теория бесконечно малых у древних атомистов» (М.; Л., 1935) предложил реконструкцию метода неделимых, с помощью которого Демокрит впервые вывел теоремы об объеме пирамиды и конуса; реконструкция эта основывалась на текстах более поздних античных и средневековых авторов (собственные математические тексты Демокрита не сохранились). По мнению С. Я. Лурье, Демокрит, помимо учения о физических атомах, развил стройное исчисление математических неделимых, причем пытался доказать его непротиворечивость. Вместе с тем Лурье полагал, что атомистические представления являлись единственным средством античных квадратур, кубатур и решения других инфинитезимальных задач. Эту концепцию Лурье отстаивал и в других работах, например в книге «Архимед» (М.; Л., 1945). Реконструкция античного математического атомизма, предложенная

Лурье, не встретила поддержки ряда других советских историков науки, а его утверждение, что так называемый метод исчерпывания Евдокса, применявшийся затем Евклидом, Архимедом и другими античными математиками, пригоден только для проверки результатов, найденных при помощи метода неделимых, вызвало возражения Н. И. Идельсона (1946), А. П. Юшкевича (1948, 1965), И. Г. Башмаковой (1953, 1958). Последние два автора, полностью признавая эвристическую ценность и важную историческую роль метода неделимых, полагают, что и метод исчерпывания, представлявший собой — если его рассматривать во всей полноте — начальную форму метода пределов, также служил эффективным средством исследования, несмотря на громоздкую форму доказательства единственности предела, которую приходилось проводить заново в каждой задаче на квадратуры, кубатуры и др. С этой точки зрения, вопреки мнению многих историков науки, в том числе М. Я. Выгодского, не существовало принципиального различия между античными методами решения инфинитезимальных задач и приемами их изложения. С другой стороны, Ф. А. Медведев (1968) рассмотрел приложения метода неделимых у Паппа и роль его «Математического сборника» в распространении этого метода в XV—XVI вв.

Наиболее полно и оригинально исследовала античные инфинитезимальные приемы И. Г. Башмакова. Это относится как к развитому Архимедом методу интегральных сумм и к применению им к квадратурам и кубатурам теорем статики, так и к началу дифференциальных методов (1963). Показательным в этом отношении является сочинение Архимеда о спирали, где для определения касательной используется треугольник, названный Лейбницем характеристическим, и несколько предложений, равносильных простейшим теоремам теории пределов. Попутно Башмакова рассмотрела влияние только что названного сочинения Архимеда на математиков XVI—XVII вв. начиная с Виета. Решая задачу о делении шара на два сегмента с данным отношением объемов, где по ходу дела требуется, говоря на нашем языке, определить максимум функции $x^2 (a - x)$, Архимед свел определение необходимого условия максимума к задаче отыскания общей касательной к двум плоским кривым в их общей точке, причем дал правило, равносильное дифференци-

рованию произведения двух функций. В этих, как и других работах Башмаковой, характерна тенденция обнаруживать в старинных приемах и предложениях их современный математический эквивалент, иногда глубоко скрывающийся за архаической терминологией и формой. Назовем еще анализ Башмаковой сочинения Архимеда по гидростатике (1956).

Предварительные итоги работы в указанных направлениях, дополненные изучением теории конических сечений и некоторых других вопросов, Башмакова резюмировала в «Лекциях по истории математики в древней Греции» («Историко-математические исследования», XI, 1958), и в дальнейшем она не прекращала исследований в этой области. Независимо от Нейгебауера она подвергла критике концепцию Цейтена, Б. Л. ван дер Вардена и других ученых, согласно которой математика в эллинистических провинциях римской империи первых веков н. э. пришла в упадок. При этом она выдвинула на передний план совсем иные моменты, чем Нейгебауер, подчеркнув тесную связь получивших в то время развитие алгебраических, арифметических и вычислительных методов с классической греческой математикой (1961, 1963).

В своих «Лекциях» Башмакова предложила новую трактовку апорий Зенона, которые вместе с новейшими попытками их решения явились также предметом одной из последних работ С. А. Яновской (1963). Эти апории рассматривал также в книге «Развитие атомистических представлений до начала XIX века» (М., 1965) В. П. Зубов. Здесь анализируются разные трактовки античного математического атомизма и его критики.

Обширный цикл работ 1966—1978 гг. И. Г. Башмаковой посвящен «Арифметике» Диофанта. До недавнего времени считалось, что Диофант не располагал общими приемами решения задач неопределенного анализа, позволяющими найти все множество рациональных решений. Башмакова показала, что подлинный характер методов Диофанта маскируется тем, что он не формулировал их в общей форме и пояснял только на частных примерах; на самом деле данные числа в задачах у Диофанта играют по существу роль наших параметров. Прослеживая распространение идей Диофанта в средние века, через арабскую литературу, труды Бомбелли, Виета, Ферма, Эйлера и т. д. вплоть до Якоби и затем до Пуанкаре и Мордел-

ла, Башмакова, переводя приемы «Арифметики» на геометрический язык, сравнила их с методами современной арифметики алгебраических кривых и установила их тесное родство, ускользавшее ранее от внимания историков науки. Неожиданным явилось заключение Башмаковой, что диофантов метод нахождения рациональных точек на кубической кривой стимулировал разработку Ферма его метода нахождения касательных и экстремумов в случае алгебраических кривых и функций (1966). Она высказала также мнение, что Диофант оперировал отрицательными числами (1974), — мнение, оспоренное А. П. Юшкевичем (1977). В последние годы исследования И. Г. Башмаковой продолжил ее ученик Е. И. Славутин, изучавший истоки, структуру и ряд задач «Арифметики», а также недавно обнаруженного Р. Рашедом арабского перевода нескольких утерянных греческих книг этого труда (1973—1978).

Здесь упомянуты далеко не все работы по греческой математике. Укажем еще на статью Д. Д. Мордухай-Болтовского, переводчика и комментатора «Начал», о «Поризмах» и «Данных» Евклида и их роли в предыстории аналитической геометрии и соответственно тригонометрии (1948), а также на работы И. Н. Веселовского, переводчика и комментатора сочинений Архимеда (1962) и переводчика сочинений Диофанта (1974).

6. История математики в средние века

Изучение средневековой математики связано со специфической трудностью: до сих пор в различных библиотеках и архивах хранится множество неизученных арабских, сирийских, древнееврейских, санскритских, латинских рукописей. Естественно, что по мере публикации или описания этих рукописей менялись и наши представления о математике в странах Востока и средневековой Европы.

Следуя до некоторой степени хронологии развития математики и вместе с тем выделяя важнейшие крупные регионы, в значительной степени объединяемые употреблением одного основного языка научной литературы, мы начинаем с математики старинного Китая. В 1954 г. статью о достижениях китайских математиков вплоть до XIV в. опубликовал (опираясь главным образом на труды

японского ученого И. Миками (1913) и китайских историков математики Цянь Бао-цзуна (1936) и Ли-Яня (1937)) А. П. Юшкевич, подчеркнув существенное сходство главных особенностей математики на огромной территории, охватывающей Индию, Китай и страны Ближнего и Среднего Востока, а также мавританские государства. В этой статье получила дальнейшее развитие общая концепция автора, высказанная им в более ранней работе о математике народов Средней Азии (1951), — концепция, на разработку которой оказали влияние исследования немецкого ученого П. Люккея. Однако Юшкевич не имел доступа к китайским первоисточникам. Вскоре, в 1956 г., вышел комментированный русский перевод Э. И. Березкиной древнекитайской «Математики в девяти книгах», классического трактата, написанного около двух тысяч лет назад и определившего развитие математики в Китае примерно в течение пятнадцати столетий. В русском переводе, первом на один из современных европейских языков, это сочинение, составляющее основной из десяти трактатов «Десятикнижья» — свода китайских работ по математике до VII в. включительно, стало доступным в полном объеме многим читателям; ранее оно было известно только по далеко неполным и не всегда точным изложениям. Перевод и комментарий Березкиной впервые детально познакомили историков науки с древнекитайской техникой вычислений, производившихся на счетной доске, решением систем линейных уравнений, употреблением при этом отрицательных чисел, способом приближенного извлечения квадратных и кубических корней по схеме, носящей теперь имени Руффини и Горнера⁷, приемами решения арифметических задач и измерения фигур и т. д. Все это привлекло внимание многих ученых. М. Я. Выгодский рассмотрел вопрос о возникновении и распространении впервые встречающегося в этом трактате «правила двух ложных положений» (1960). А. Е. Раик предложила собственные реконструкции вывода догматически сформулированных правил вычисления некоторых объемов (1961). Опираясь на эту работу Березкиной,

⁷ Этот вопрос очень подробно рассмотрели тогда же проф. Дж. Нидем и Л. Ван (1955). Через четыре года (1959) эти же ученые опубликовали общий обзор истории математики Китая до XVIII в. включительно.

проф. К. Фогель опубликовал впоследствии собственный немецкий перевод «Математики в девяти книгах».

Вслед за «Математикой в девяти книгах» Э. И. Березкина в 1963—1975 гг. опубликовала со своими комментариями русские переводы и других трактатов, в частности Сунь-цзы, Лю Хуэя и Ван Сяо-туна, содержавшие важные сведения о старинных китайских системах мер, распространении десятичных дробей, решении задач на кубические уравнения и т. д. Опираясь на эти свои работы и на новейшую литературу вопроса, включая труды современных китайских историков науки, Березкина написала книгу «Математика в древнем Китае», находящуюся сейчас в печати.

Монгольское «Сочинение о координатах» (1712), относящееся также к астрономии, исследовала Л. С. Барановская (1954).

Вслед за изучением математики древнего Китая советские ученые приступили к исследованиям математики Индии. Э. Я. Бахмутская вслед за немецким ученым И. Э. Гофманом подробно рассмотрела (1960—1961) содержащиеся в рукописных работах математиков южной Индии представления тригонометрических функций бесконечными степенными рядами, связанные с задачами астрономии и приближенным вычислением π ⁸. А. И. Володарский изучил «Патиганиту» Шридхары (X в.), переведенную им вместе с О. Ф. Волковой на русский язык (1966). В вводной статье и примечаниях Володарского был впервые учтен один анонимный санскритский комментарий к «Патиганите». Затем А. И. Володарский исследовал важный труд по арифметике математика IX в. Магавиры (1969). После еще нескольких статей он опубликовал «Очерки истории средневековой индийской математики» (М., 1977).

Наиболее широко велись исследования по истории так называемой арабской математики, включающей, помимо стран Ближнего Востока и Ирана, средневековую математику народов Казахстана, среднеазиатских республик, отчасти республик Закавказья, а также мавританских стран. В этом направлении работали многие

⁸ Эти рукописи были описаны индийскими учеными Г. Т. Раджагопалом и др. в 1944—1957 гг., но впервые на них обратил внимание еще в 1834 г. Ч. Уиш, а вслед затем профессор физики Харьковского университета В. И. Лапшин (1838).

исследователи, первым из которых явился уже упоминавшийся Н. В. Юсупов. Исследованию были подвергнуты труды большого числа математиков и астрономов, начиная от Мухаммеда бен Муса-ал-Хорезми, продолжая такими крупными учеными, как братья Бану Муса, Сабит ибн Корра, Абу Камил, Ибрахим ибн Синан, Абу-л-Вафа, ал-Караджи, Ибн ал-Хайсам, ал-Фараби, ал-Бируни, Омар Хайям, Насир ад-Дин ат-Туси и т. д., и кончая выдающимися представителями Самаркандской научной школы, как ал-Каши, ар-Руми, Улугбек, ал-Кушчи. Возникла большая переводная литература, частично упомянутая выше, причем многие арабские сочинения вообще впервые, после столетий забвения, увидели свет в русском переводе или изложении. Все это очень значительно обогатило наши знания об арабской математике вообще, о вкладе народов Средней Азии в частности.

Первой крупной послевоенной работой в этой области явилась книга Т. Н. Кары-Ниязова «Астрономическая школа Улугбека» (1950), в которой, среди прочего, изучены вычислительные приемы, употреблявшиеся при составлении носящих имя Улугбека астрономических таблиц; почти одновременно историей арабской математики занялись Г. Д. Мамедбейли и А. П. Юшкевич (1948, 1951). Вскоре к работе приступили в качестве переводчиков, комментаторов или исследователей (либо того и другого вместе) и другие ученые: Б. А. Розенфельд (1952), ученик М. Я. Выгодского М. И. Медовой (1958), Г. П. Матвиевская (1962), а также целый ряд других историков математики и астрономии — арабистов (по большей части учеников Розенфельда и Матвиевской): А. Ахмедов, С. А. Ахмедов, Г. Д. Джалалов, Л. М. Карпова, Ф. А. Касумханов, С. А. Краснова-Бокатуева, А. К. Кубесов, М. М. Рожанская, Г. С. Собиров, А. К. Таги-заде, Х. Тлашев, Н. Г. Хайретдинова и др. Мы укажем здесь только некоторые результаты работы советских исследователей в этой области.

А. П. Юшкевич восстановил вероятное содержание основоположного арифметического трактата Мухаммеда ал-Хорезми, лишь часть которого сохранилась в несовершенном списке латинского перевода XII в. (1954, 1964)⁹. М. И. Медовой (1925—1962) изучил приемы

⁹ В 1963 г. текст этого трактата переиздал и прокомментировал К. Фогель.

практических вычислений с обыкновенными дробями, изложенные в трактате Абу-л-Вафы, попутно обнаружив у него единичный в арабской математике пример появления отрицательного числа (1958—1960), а также арифметический трактат ан-Насави (1963). Развитие понятия действительного (положительного) числа в арабской математике и своеобразную антифайретическую теорию отношений, которой Хайям предложил заменить теорию Евдокса—Евклида исследовали (независимо от голландского ученого Э. Б. Плооя, 1950) Б. А. Розенфельд и А. П. Юшкевич (1953) и Ф. А. Касумханов (1954); более раннюю теорию составных отношений Сабира ибн Корры — Л. М. Карпова и Б. А. Розенфельд (1966). Наиболее полно арабская литература по теории отношений и учении о числе проанализирована в докторской диссертации Г. П. Матвиевской «Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке» (Ташкент, 1967). Видное место в этом и других трудах Матвиевской вплоть до 1977 г. заняло изучение арифметизации в комментариях арабских ученых IX—XIII вв. евклидовой теории квадратных иррациональностей, т. е. X книги «Начал». Отметим рассмотренное Матвиевской (1976) «исчисление отрезков, площадей и тел» математика X — начала XI в. Ибн ал-Багдади, в некоторых отношениях предвосхитившего «исчисление отрезков» Декарта.

Был изучен вопрос о появлении в арабской литературе (у ал-Каши, Насир ад-Дина ат-Туси и др.) теоремы о биноме, десятичных дробей, приемов извлечения корней с целым положительным показателем степени (Б. А. Розенфельд и А. П. Юшкевич, 1954; С. А. Ахмедов, 1963; А. Ахмедов, 1977). Впоследствии исследования зарубежных ученых (Р. Рашеда и др.) позволили проследить историю этих вопросов еще далее в глубь веков.

Геометрическую теорию кубических уравнений в основном алгебраическом трактате Хайяма изучали А. П. Юшкевич (1948) и более подробно он же вместе с Розенфельдом (1953); более раннее небольшое сочинение Хайяма по алгебре, обнаруженное недавно, было разобрано Розенфельдом и С. А. Красновой-Бокатуевой (1963). Та же Краснова-Бокатуева рассмотрела книгу геометрических построений Абу-л-Вафы (1966), которая, как затем показал А. К. Кубесов (1972), почти полностью совпадает с впервые рассмотренным им геометрическим трудом

ал-Фараби. Заметим здесь же, что Кубесов опубликовал обобщающую монографию «Математическое наследие ал-Фараби» (Алма-Ата, 1974). Теория параллельных, развивавшаяся в связи с попытками доказать постулат Евклида или заменить его более очевидным (ал-Джаухари, Сабит ибн Корра, Ибн ал-Хайсам, Хайям, Насир ад-Дин ат-Туси, Шамс ад-Дин ас-Самарканди, Лев Герсонид и др.), явилась предметом занятий Розенфельда и Юшкевича (1953—1966), а также А. К. Кубесова, Г. Д. Мамедбейли, Г. Б. Петросяна, Г. С. Собирова и Р. М. Султанова. Первый толчок занятий этим вопросом дали работы американского ученого Д. Ю. Смита (1935) и иранца Т. Эрани (1936), обративших внимание на учение о параллельных Хайяма. Советские историки науки, а затем и некоторые зарубежные ученые (А. Сабра и др.) исследовали развитие этой теории с большой полнотой и показали, что математики арабских стран предвосхитили некоторые основные идеи, приемы и теоремы Саккери и Ламберта. С. А. Краснова-Бокатуева, М. М. Рожанская и Б. А. Розенфельд изучили трактат об определении хорд в круге ал-Бируни (1963), а Рожанская детально разобрала тригонометрические и другие вычислительные приемы в его «Каноне Мас'уда» (1967, 1976). Истории тригонометрии было отведено немало работ, из которых отметим исследование Н. Г. Хайретдиновой, впервые изучившей анонимное сочинение, предшествующее «Трактату о фигуре секущих» Насир ад-Дина ат-Туси и во многом предваряющее его содержание (1966). А. К. Таги-Заде изучал математическую теорию арабских астролябий (1974). Построение дуг конических сечений с помощью «совершенного циркуля» явилось предметом одной из статей С. А. Красновой-Бокатуевой (1963).

Не оставлены были в стороне и инфинитезимальные методы и идеи. В одном из трактатов Насир ад-Дина ат-Туси А. К. Кубесов нашел отклики древнегреческого учения о неделимых (1963). Обучавшийся в аспирантуре Московского университета иракский ученый Дж. ал-Даббах изучил трактаты Сабита ибн Корры и его внука Ибрахима ибн Синана о квадратуре параболы и кубатуре параболоидов, «Книгу измерения фигур» Бану Муса, а также трактаты Ибн ал-Хайсама об измерении шара и об изопериметрических фигурах (1965—1966). Квадратуру параболы Ибрахима ибн Синана, применившего аффин-

ные преобразования, рассмотрели также М. М. Рожанская и Б. А. Розенфельд (1970). Юшкевич показал, что вычисления Сабита ибн Корры и его квадратура параболы равносильны вычислению интеграла $\int_0^a \sqrt{x} dx$: здесь впер-

вые интегрирование было распространено на дробную степень $y = x^{1/2}$ (интеграции Архимеда относились к случаям $y = x$ и $y = x^2$), для чего, опять-таки впервые, было применено деление промежутка интегрирования на неравные части, составляющие арифметическую прогрессию (1965). Добавим, что многие вопросы истории тригонометрии, а также различные вычислительные методы рассмотрены в книге М. М. Рожанской «Механика на средневековом Востоке» (М., 1976) — первом обобщающем труде в этой области.

Мы привели только примеры советских работ по истории математики в странах арабской культуры IX—XV вв. Одним из аспектов этих работ было выявление роли ученых Средней Азии, вклад которых оказался гораздо более значителен в общем балансе достижений арабской науки, чем это представлялось ранее.

Специально математике Средней Азии было посвящено несколько сводных работ начиная с брошюры Т. И. Райнова «Великие ученые Узбекистана (IX—XI вв.)» (Ташкент, 1943), где, впрочем, речь идет не об одной математике. Среди таких работ назовем книги «К истории математики Средней Азии IX—XV веков» Г. П. Матвиевской (Ташкент, 1962) и «Развитие математики в Средней Азии (XV—XVII вв.)» Г. С. Собирова (Душанбе, 1966), автора ряда статей о продолжателе традиций Самаркандской школы — ал-Кушчи, в конце жизни работавшем в Турции (с 1962). Краткое резюме многолетних исследований в этом направлении содержится в одной статье академика Академии наук УзССР С. Х. Сираждинова и Г. П. Матвиевской (1976).

Изучение развития физико-математических наук в средневековой Европе, которыми в 20-е годы занимался Д. Д. Мордухай-Болтовской, блестяще продолжил В. П. Зубов. В одном докладе 1947 г. он подверг критике принципы исследований крупного историка средневековой науки П. Дюгэма. После этого доклада, напечатанного в 1948 г., Зубов систематически выступал с работа-

ми о математике, механике и физике в Европе XI—XV вв. Центральными в его исследованиях были вопросы, связанные с изучением свойств неравномерного движения, проблемами конечного и бесконечного, дискретного и континуума. Наряду с постепенным созданием буквенной алгебры разработка этого круга вопросов была важнейшей и наиболее оригинальной частью западноевропейской математики XIII—XV вв. В 1958 г. Зубов опубликовал русский перевод (первый перевод на один из живых языков латинской рукописи важнейшего труда Н. Орема «О конфигурации качеств» (около 1350 г.) парижского варианта рудиментарного общего учения о функциях и начал теории неравномерного движения, который отличался от одновременно разрабатывавшейся в Оксфорде теории «калькуляций» широким применением геометрического представления «интенсивностей качеств». За этим последовал перевод другого трактата Орема «О соизмеримости и несоизмеримости движений неба» (1960), содержащего, среди прочего, оригинальные теоретико-вероятностные идеи. Оба перевода, как и другие аналогичные публикации Зубова, были снабжены им статьями и комментариями. Глубокому анализу Зубов подверг вопрос о математизации естествознания в XIII—XIV вв. (1959—1962), проблему пространства и времени у парижских номиналистов XIV в. (1960), трактат Брэдвардина «О континууме» (1960), концепцию точки в XIV в. (1961) и трактат Герарда Брюссельского «О движении» (XII или XIII в.) — наиболее ранний известный ныне средневековый труд, с которого датируется развитие идей, получивших затем развитие в XIV в. (1965). В работе о Герарде Брюссельском, увидевшей свет через два года после смерти автора, Зубов существенно разошелся в интерпретации его трактата с американским историком науки М. Клагеттом. Инфинитезимальная математика оксфордской и парижской школ XIV в. неотделима от механики и изыскания, о которых идет речь, Зубов суммировал в труде «У истоков механики» (1962), а кроме того, в другом, более философском и физическом аспекте в посмертно изданной монографии «Развитие атомистических представлений до начала XIX века» (1965). В этой книге затронут и вопрос о связи теории конфигурации качеств, развившейся на почве аристотелевой натурфилософии, с арабской наукой. Со всеми этими изысканиями непосредственно связаны и некоторые

упоминавшиеся ранее работы Зубова о древнерусской математике. Со смертью Зубова специальные исследования в этой области у нас надолго прервались. Начиная с 1974 г. их продолжил В. С. Широков, в 1976 г. опубликовавший статью о «Книге вычислений» (т. е. калькуляций) оксфордского современника Орема — Р. Суисета, а затем об инфинитезимальных идеях непосредственного предшественника Орема в Парижском университете Буридана (1978).

Помимо работ Зубова, из которых назовем еще статью об обнаруженном им старинном русском переводе «Трактата о сфере Сакробоско» (1962), исследований о средневековой математике в Западной Европе вышло у нас немного. Отметим перевод алгебраического трактата Иордана Неморария «О данных числах» (1959), в комментариях к которому был впервые выяснен смысл нескольких задач, остававшихся ранее непонятными. Перевод и комментарии принадлежали С. Н. Шрейдеру, в подготовке публикации принял участие И. Н. Веселовский. Алгебраический трактат Шюке рассмотрела Т. А. Токарева (1978). Наконец, назовем книгу Г. П. Матвиевской «Развитие учения о числе в Европе до XVII в.» (Ташкент, 1975), непосредственно примыкавшую к более раннему ее труду, посвященному понятию числа в арабской науке.

Здесь же следует назвать исследования по истории математики в Армении и Грузии, на культуре которых в средние века отразились тесные связи как с Византией (и через нее с древнегреческой наукой), так и со странами Востока. Математику в Армении после И. А. Орбели (1918) изучали Г. Б. Петросян (с 1935 г.), Т. Г. Туманян (с 1941), А. Е. Абраамян (1962), А. М. Еганян (с 1967). Обобщающая монография Петросяна «Математика в Армении в древности и в средние века», вышедшая на армянском языке с русским и английским резюме (Ереван, 1959), послужила его докторской диссертацией (1956). Вместе с А. Г. Абраамяном Петросян опубликовал на языке оригинала с русским послесловием одну армянскую геометрическую рукопись XVII в. («Геометрия Евклида», Ереван, 1962). Д. Г. Цхакая подытожил свои изыскания о математике в Грузии (с 1941) также в докторской диссертации (1956), опубликованной в виде отдельной книги «История математических наук в Грузии с древних времен до начала XX века» (Тбилиси, 1959). Как Петросян,

так и Цхакая были учениками М. Я. Выгодского. Некоторые взаимосвязи вавилонской, египетской, античной и средневековой алгебры рассмотрены в книге А. М. Еганяна «Из истории алгебры» (Ереван, 1977).

Еще в 50-е годы уже накопленные к тому времени новые результаты вызвали потребность в обобщающем труде, каким явилась «История математики в средние века» А. П. Юшкевича (М., 1961). Изложение здесь разделено на введение и четыре главы, посвященные соответственно математике Китая, Индии, стран ислама и Западной Европы; оно доведено до конца XV — начала XVI в. Эта книга была издана также на других языках (рум. пер., 1963; нем. перераб. изд., 1964; пол., 1968; яп., 1970; чеш., 1978; а глава об арабской математике с дополнениями, учитывающими работы последних лет, вышла отдельной книгой во французском переводе в 1976 г.). В книге развита концепция, кратко намеченная автором в статьях 1951—1954 гг. Средневековая математика в странах Востока и Западной Европы трактуется здесь как единое целое; ее особенностью является преимущественное развитие алгоритмически-вычислительных методов, отвечавших практическим запросам того времени, включая нужды астрономии, географии, механики и оптики. Термин «средневековая математика» употребляется, разумеется, условно, так как хронологические границы для разных регионов не совпадают, хотя на протяжении многих столетий речь идет об одновременных процессах научного развития. Именно на вычислительно-алгоритмической основе развивались или возникали многие важные методы, ранее существовавшие лишь в эмбриональной форме или вовсе отсутствовавшие; на этой же почве происходило обобщение основных понятий и оформление новых теорий и математических дисциплин. Эти обстоятельства выступают еще более отчетливо, если проследживать развитие математики на Востоке не по отдельным регионам, а по наукам, как теория чисел, арифметика, алгебра и т. д., и по проблемам (обзор такого рода Юшкевич и Розенфельд опубликовали в 1960 г., нем. пер., 1961). В «Истории математики в средние века» рассмотрены также особенности математики в каждом из четырех указанных регионов, обусловленные специфическими условиями их истории и культурного развития. При этом опровергается преобладавшая ранее в историко-научной литературе и до сих

пор встречающаяся европоцентрическая точка зрения, согласно которой, например, так называемая арабская наука, не принесла каких-либо оригинальных идей и методов, лишь сыграла роль связующего звена между наукой древней Греции и в некоторой мере Индии и наукой Европы средних веков и эпохи Возрождения. Выявление оригинальных особенностей средневековой математики не снижает исторического значения греческой математической школы; в частности, именно быстрое усвоение греческого наследия в странах арабского мира позволило здесь продвинуться в большинстве важнейших направлений дальше, чем в Индии и Китае.

7. Математика XVI—XX веков

Предметом все возрастающего числа исследований была эпоха формирования математики нового времени с конца XVI — начала XVII и ее последующего развития вплоть до начала XX в. Многие работы, особенно на первых порах, были связаны с изданием классиков математики, как вступительные статьи М. Я. Выгодского к «Стереометрии винных бочек» Кеплера (1935) или С. Я. Лурье к так называемой «Геометрии неделимых» Кавальери (1940) и целый ряд других. Статьи о творчестве отдельных ученых неизменно занимали видное место и в различных сборниках, частью уже упомянутых, и в журнальной литературе. Впоследствии, уже после второй мировой войны, все больший интерес стала привлекать история отдельных математических дисциплин, их разделов и отдельных проблем.

Ученым рубежа XVI—XVII столетий было посвящено сравнительно немного работ. Труды Бомбелли и Виета изучали под углом зрения развития в них методов диофантова анализа И. Г. Башмакова, Е. И. Славутин и С. С. Глушков (1975—1977), причем выяснилось, что предложенные Виетом построения и преобразования прямоугольных треугольников могут быть интерпретированы в терминах арифметики комплексных чисел (1976); к исследованиям этих авторов примыкает статья Б. А. Розенфельда, перекидывающая мост от методов Виета к аналитической геометрии Ферма (1976).

Значительно большее внимание уделено было коренным изменениям в математике, связанным с научной ре-

волюцией начала Нового времени, мощный толчок которой сообщил еще Коперник, и получившим наиболее полное выражение у Декарта и Ферма, Ньютона и Лейбница; попытку охарактеризовать эту революцию в математике XVII в. исходя из идей Энгельса сделал А. П. Юшкевич (1966).

«Всеобщую математику», т. е. алгебру и координатную геометрию Декарта, изучали Д. Д. Мордухай-Болтовской (1952), А. П. Юшкевич (1938, 1953) и С. А. Яновская (1966), подчеркнувшая своеобразный индуктивно-ступенчатый характер декартова «универсального» приема построения действительных корней алгебраических уравнений с помощью пересечения (алгебраических) кривых. При этом, полемизируя с зарубежным историком логики И. М. Бохенским, Яновская показала значение выработанного Декартом нового метода логических рассуждений. С. С. Глушков (1976) разобрал особенности алгебры Жирара, на несколько лет предшествовавшей декартовой.

Ряд работ, частью упомянутых в начале этого параграфа, был посвящен предыстории дифференциального и интегрального исчисления. Это статьи И. Г. Башмаковой о Ферма (1966); К. А. Рыбникова — об «алгебраическом» обосновании Ферма его метода экстремумов и касательных (1958), на которые обратили внимание раньше Юшкевич и Яновская (1938, 1940); Л. А. Сорокиной — о дифференциальных приемах Торичелли (1970); Ф. Д. Крамара — об интеграциях и «интерполяциях» метода Валиса (1961); Э. Я. Бахмутской — об интеграциях Паскаля (1962); И. Н. Веселовского (1959), У. И. Франкфурта и А. М. Френка (1962) — об инфинитезимальных приемах Гюйгенса.

Упомянем тут же в связи с названными именами математиков XVII в. различные подходы к теоретико-числовым открытиям и методам Ферма со стороны И. Г. Башмаковой (1970) и И. Г. Мельникова (1974, 1977); обнаруженные Б. А. Розенфельдом идеи бесконечно удаленной точки у Кеплера (1970) и данную Г. И. Игнациусом (1815—1967) реконструкцию вывода Паскалем теоремы о конических сечениях, носящей его имя (1961).

Очень большое число статей появилось о Ньюtone, в частности о его концепции оснований метода флюксий, эволюционировавшей от расплывчатой трактовки идеи

бесконечно малой величины к своеобразной теории пределов. Единодушие в истолковании взглядов Ньютона на этот вопрос не было, из многих работ по этому вопросу назовем принадлежащие Н. Н. Лузину (1943), С. Я. Лурье (1943), А. Н. Колмогорову (1964) и Ф. Д. Крамару (1950). Оригинальный анализ Ньютонова доказательства теоремы о дифференциале произведения, явившегося предметом критики со стороны Беркли, произвела С. А. Яновская (опубликован в 1968). К. А. Рыбников, докторская диссертация которого (1955) была посвящена изучению математических рукописей Маркса, в примыкающей к ней статье о роли алгоритмов в истории обоснования анализа (1957) показал, что и Ньютон, подобно Лейбницу, стремился создать общий алгоритм дифференцирования и интегрирования любой функции. Новый толчок работе в этом направлении сообщило недавнее издание Д. Т. Уайтсайдом (Кембридж) математических рукописей Ньютона. Е. А. Аксенова рассмотрела проблему влияния Барроу на формирование основных понятий метода флюксий (1972); А. П. Юшкевич выделил новые моменты в эволюции взглядов Ньютона на основания анализа, которые обнаруживаются в этих рукописях (1977).

Дальнейшая разработка оснований метода флюксий Маклореном была изучена М. А. Коренцовой (1973, 1977), в частности она обнаружила у Маклорена ряд общих теорем дифференциального и интегрального исчисления, выраженных в кинематически-геометрической терминологии. Своеобразную форму, в которой Ньютон в своей теории притяжения тел проводил вычисления, равносильные вычислению двойных и тройных интегралов, рассмотрела В. И. Антропова (1966); применение Ньютоном и другими учеными XVIII и XIX вв. асимптотических рядов — М. В. Чириков (1960, 1970), метод суммирования расходящихся рядов Ньютона, впервые опубликованный Эйлером, — С. С. Петрова (1972).

Алгебру Ньютона изучали А. П. Юшкевич (1948) и И. Г. Башмакова (1959), впервые обратившая внимание на то обстоятельство, что в ней было положено начало изучению проблемы приводимости уравнений с целыми рациональными коэффициентами над некоторым квадратичным полем и что предложенный Ньютоном алгоритм приведения был далее развит Варингом; это свое исследование Башмакова продолжила в работе 1966 г.

о взаимодействии в алгебре XVIII в. двух тенденций — арифметической и общеалгебраической, синтез которых осуществил затем Гаусс. Метод параллелограмма Ньютона и его развитие на протяжении почти двух веков исследовал Н. Г. Чеботарев (1943), а его геометрические труды — Н. А. Глаголев (1946) и позднее Г. А. Школенок (1973), которая разобрала также ряд английских работ XVIII в. о конструктивном образовании алгебраических кривых (1972).

Несколько работ было посвящено дифференциальному и интегральному исчислению Лейбница, органически связанному с его поисками универсального математического алгоритма. А. П. Юшкевич, подчеркивая именно эту сторону исчисления Лейбница (1948), сопоставил также между собой его разнообразные подходы к проблеме обоснования анализа (1967), а затем сравнил концепции анализа Лейбница и Ньютона в их наиболее существенных сходствах и различиях (1978). А. Б. Штыкан подробно исследовал весьма важное в исторической перспективе, но ранее почти не отмечавшееся историками математики изобретение Лейбницем интеграла и заслуги в этом же вопросе Гюйгенса и братьев Бернулли (1952, 1977). Штыкан указал также на появление у И. Бернулли метода графического интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью изоклин (1960).

В изучении истории идей об основаниях анализа в XVIII в. к упомянутым ранее работам следует добавить еще статьи И. Н. Самойленко об «Аналисте» (Дж. Беркли, 1934), С. А. Яновской о споре между парижскими картезианцами во главе с Роллем и сторонниками исчисления бесконечно малых Лейбница (1947), ее же анализ попытки алгебраического обоснования анализа Дж. Ландена (1968), Е. С. Шатуновой о книге по теории пределов Люлье (1966), А. П. Юшкевича об обнаруженной им в Архиве Академии наук ГДР рукописи Л. Карно 1786 г. о понятии математической бесконечности (1971) и его же о трактовке некоторых основных понятий анализа у португальского ученого да-Кунья (1973). В. Н. Молодший изучал основания арифметики в XVIII в. (статьи с 1947 г., книга «Основы учения о числе в XVIII и начале XIX в.». М., 1953; 2-е перераб. изд., 1963). В этой книге, основанной на изучении литературных первоисточников и архивных материалов (переписки Эйлера с Кюном и Элером),

показано, что на протяжении XVIII в., несмотря на трудности, которые автор объясняет господством тогда метафизического мышления, была в значительной мере подготовлена почва для поворота в разработке теоретической арифметики, произведенного в самом конце XVIII и первой половине XIX в. Этому кругу вопросов посвящена была и докторская диссертация Молодшего (1967). История учения о комплексных и гиперкомплексных числах вплоть до У. Гамильтона и Г. Грассмана, была рассмотрена Ф. Д. Крамаром в рамках его исследований о развитии геометрических исчислений (1963—1966), доведенных до конца XIX в. в его докторской диссертации (1966).

Исследования в этой области были распространены и на начало XIX в., например в статьях о возникновении понятия определенного интеграла Коши (А. П. Юшкевич, 1947), о непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Больцано (харьковский профессор В. Ф. Бржечка, 1891.—1954; 1949), о трактовке идей обоснования анализа в учебниках первой половины XIX в. (Юшкевич, 1948; Ии И. Лихолетов, С. А. Яновская, 1955), о преобразования основ анализа, произведенном Коши (В. Н. Молодший, 1978).

Очень большое число статей по различным вопросам обоснования анализа, теории множеств и теории функций действительного переменного и ее приложениям в теории аналитических функций, функциональном анализе и т. д. опубликовал начиная с 1959 г. Ф. А. Медведев. Одним из его выводов является, что идеи теории множеств зарождались не только в самом анализе (в частности, в теории тригонометрических рядов), но также в теории чисел, алгебре, проективной геометрии. Вместе с тем Медведев впервые подробно изучил и объективно оценил вклад в создание теории множеств, наряду с Г. Кантором, Р. Дедекинда. Исследования Медведева были в значительной части суммированы в четырех его книгах, названных далее. К истории теории множеств примыкает статья Ю. Е. Катина о проблеме континуума (1970). Истории теории тригонометрических рядов посвятил несколько статей А. Б. Паплаускас (с 1960), подытоживший свои исследования в специальной монографии, также указанной далее. Возникновение и развитие понятия функции до конца XIX в. было изучено А. П. Юшкевичем

(1965, 1976), А. В. Дорофеевой и Ф. А. Медведевым (1973, 1975); об относящихся к этой же теме статьях Г. Л. Лунца и А. И. Маркушевича уже упоминалось. Упомянем еще в связи с проблемами обоснования анализа и арифметики ряд статей по истории математической логики (например, С. Г. Ибрагимова, 1966; З. А. Кузичева, 1970; 1973) и статьи о роли проблем обоснования в развитии математики З. А. Кузичевой (1971) и по истории аксиоматического метода — С. С. Демидова (1973).

Среди множества статей об отдельных математиках XVIII—XX вв. мы назовем, не претендуя на полноту, но лишь для примера, еще несколько, прежде всего — о младшем и крупнейшем современнике Эйлера — Лагранже, алгебраические и теоретико-числовые открытия которого исследовали Н. Г. Чеботарёв (1937), а позднее И. Г. Башмакова (1949) и Л. А. Сорокина (1959), сосредоточившие внимание на их теоретико-групповом аспекте (Сорокина — в связи с анализом творчества Абеля). В посмертно опубликованной статье ленинградского профессора А. М. Журавского (1892—1970) прослежена история ряда Лагранжа (1977).

К числу названных выше юбилейных сборников следует теперь добавить сборник к 100-летию со дня рождения Гаусса («Карл Фридрих Гаусс». М., 1956), в который вошли статьи Б. Н. Делоне (теория чисел), А. И. Маркушевича (анализ), А. П. Нордена (геометрия), Б. В. Гнеденко (теория вероятностей). Статьи о Гауссе были опубликованы также Б. А. Венковым, А. В. Погореловым и К. А. Рыбниковым (1956) и Школенок (1971). Анализ системы гиперболической геометрии Я. Бояи произвел В. Ф. Каган (1948), творчества Римана (1948) — В. Л. Гончаров, «Оснований геометрии» Гильберта — П. К. Рашевский (1948), работ Пуанкаре по качественной теории дифференциальных уравнений — А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, А. Г. Майер и В. В. Степанов (1947). Все последние названные работы были написаны для издания переводов сочинений перечисленных классиков математики. Помимо того, появился ряд статей о других выдающихся зарубежных математиках: Л. С. Полака — о Гамильтоне (1956) и Пуассоне (1957), В. И. Левина — о Рамануджане (1960), Л. Н. Сретенского — о Фредгольме (1966), С. С. Демидова и К. А. Рыбникова — к истории проблем Гильберта (1966), изданных в русском пере-

воде (Проблемы Гильберта. М., 1969) с предисловием П. С. Александрова и комментариями многочисленных специалистов (А. О. Гельфонд, Б. В. Гнеденко, Б. Н. Делоне, Ю. И. Манин, О. А. Олейник, член-кор. Академии наук СССР Д. К. Фаддеев и др.), А. Н. Паршина — о вкладе Гильберта в теорию инвариантов (1974). Мы называли несколько таких работ, чтобы охарактеризовать их разнообразие.

Особенное значение имеет все усиливающаяся в последнее время работа по истории различных математических наук, важность которой подчеркнул еще три четверти века назад на Парижском международном конгрессе математиков М. Кантор. Здесь придется ограничиться одним перечислением некоторых наиболее важных трудов — книг, статей и циклов статей, вовсе не входя в их содержание; некоторые из них нам уже приходилось упоминать. Это прежде всего «Становление идей математической логики» Н. Н. Стяжкина (М., 1964), четыре тематически связанных между собой монографии Ф. А. Медведева: «Развитие теории множеств в XX веке» (М., 1965), «Развитие понятия интеграла» (М., 1974), «Очерки истории теории функций действительного переменного» (М., 1975), «Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX века» (М., 1976), затем написанная в другом плане, чем вторая книга Медведева, и посвященная главным образом новейшему периоду, книга И. Н. Песина «Развитие понятия интеграла» (М., 1966) и монография А. Б. Паплаускаса «Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега» (М., 1966). В дополнение к работам Н. И. Симонова и С. С. Демидова по истории дифференциальных уравнений с частными производными, о которых уже говорилось, следует назвать статьи (с 1962 г.) и монографию В. С. Сологуба «Развитие теории эллиптических дифференциальных уравнений в XVIII и XIX столетиях» (Киев, 1975), статьи по той же тематике Ю. Ф. Косолапова, М. Г. Шраера (с 1963 г.), С. С. Петровой (1974) и книгу В. А. Добровольского «История аналитической теории дифференциальных уравнений» (Киев, 1973). Назовем еще статьи А. В. Дорофеевой по истории интегральных уравнений (1973); А. Н. Боголюбова (1972); Л. А. Люстерника и С. С. Петровой (1974, 1977) — по истории символического исчисления; К. А. Рыбникова, А. В. Дорофеевой и С. С. Петровой (1970) и Ф. А. Медведева

(1973) — о путях формирования функционального анализа; С. С. Петровой — по истории принципа Дирихле (1965, 1976) и преобразования Лапласа (1975). А. И. Маркушевич опубликовал «Очерки по истории теории аналитических функций» (М., 1951; нем. пер. 1955). Этому же предмету посвящена книга С. Е. Белозерова «Основные этапы развития общей теории аналитических функций» (Ростов-на-Дону, 1962). К названным работам нужно добавить статьи Л. Г. Королук и Е. А. Кушнир по истории разностных уравнений, В. М. Кузнецова по истории автоморфных функций (с 1965), И. А. Головинского по истории интерполяционных рядов (1974—1977) и преобразования Лапласа (1978), книгу «Теория вероятностей. Исторический очерк» (1967) Л. Е. Майстрова (анг. пер., 1974) и обширный цикл статей по тому же предмету О. Б. Шейнина (1965—1978), «Основания геометрии. Учение об обосновании геометрии в ходе его исторического развития» В. Ф. Кагана (М., 1949—1956), «Историю неевклидовой геометрии» Б. А. Розенфельда (М., 1976), брошюру Д. Кутлумуратова «О развитии комбинаторных методов математики» (Нукус, 1964), наконец, книгу «Развитие вычислительных машин» Л. Е. Майстрова и И. А. Апокина (М., 1976).

Советские историки математики изучали и общие вопросы истории развития этой науки в ее взаимосвязях с различными приложениями и запросами практики. Такова, например, книга В. Н. Молодшего «Очерки по вопросам обоснования математики» (М., 1958; нем. пер. 1977), в которой автор рассматривает сперва предмет математики и проблемы основных закономерностей ее развития, а затем применяет основные выработанные им методологические положения к анализу двух кризисов в древнегреческой математике и в XVII—XVIII вв., а также к истории аксиоматического метода. Назовем еще несколько статей, появившихся в последние годы: К. А. Рыбникова — об общих методологических проблемах истории математики в свете ленинских идей (1973); Г. Е. Шилова (выступившего под псевдонимом Г. Кацивели) — «Математика и действительность» (1975), В. П. Визгина — о взаимоотношениях между математикой и физикой в XIX в., и в частности о роли физики в создании Эрлангенской программы Клейна (1973—1977), и А. Н. Боголюбова — о взаимоотношении и взаимодействии «фундаментальных»

и «прикладных» исследований в истории математики (1977).

Общие проблемы развития математики — движущих сил ее развития, ее предмета и метода, характеристика основных периодов ее истории и т. д. — явились предметом статьи А. Н. Колмогорова «Математика», с некоторыми изменениями печатавшейся в трех изданиях Большой Советской Энциклопедии (1938, 1954, 1976). При этом Колмогоров выделил как основные периоды: образования простейших понятий этой науки и возникновения первых приемов измерения и счета; элементарной математики постоянных величин от времен ионийской натурфилософии до начала XVII в., далее, создания математики переменных величин — до 70-х годов XIX в., когда стали получать все более широкое распространение идеи неевклидовых геометрий и теории групп и когда начался период современной математики (который некоторые ученые называют периодом математики переменных отношений или еще периодом неевклидовой математики). Нам представляется, что затруднительно провести резкую грань между математикой древнего Востока и ранней Греции, зато несомненно, что греческая математика классического периода по своим целям, методам и форме резко отличалась от вавилонской даже в пору высшего расцвета последней. Вместе с тем уже в Греции и эллинистических странах наряду с элементарно-математическими исследованиями видное место заняла разработка инфинитезимальных методов и примыкающих к ним проблем. Поэтому в одной общей работе Зубова, Розенфельда и Юшкевича (1961) было предложено охарактеризовать эту эпоху в истории математики европейских стран как период становления теоретической дедуктивной математики. Наконец, можно рассматривать как особый период развития математики, существенно отличный от древнегреческого, время так называемых средних веков; к этому периоду в большей мере, чем к греко-римской эпохе, приложима характеристика «периода математики постоянных величин». Остается нерешенным вопрос, продолжается ли до сих пор период, начавшийся примерно в 70-е годы прошлого века, или мы находимся теперь в начале нового периода, принципиально отличного от прежнего по целям, предмету и методам современной математики.

Во всяком случае, как подчеркивает А. Н. Колмого-

ров, математика последнего столетия отличается необыкновенным расширением поля изысканий и все возрастающей степенью абстрактности и общности основных понятий. От рассмотрения издавна известных естествознанию видов количественных отношений и пространственных форм объективного мира математика перешла к изучению конструируемых ею самой возможных отношений и форм такого рода. При этом пространственные формы можно трактовать как частный вид количественных отношений, если понимать последний термин в достаточно широком смысле. Отдельное упоминание в определении предмета математики пространственных форм является с такой точки зрения указанием на относительную самостоятельность геометрических разделов. Вместе с тем различение геометрических и количественных и алгебраических свойств математических объектов не является принципиально необходимым (что не лишает геометрическое мышление и терминологию ни эвристической, ни педагогической ценности).

Сходные, хотя и несколько отличные, взгляды на общий ход развития математики высказывал А. Д. Александров, например, в статье «Геометрия» второго издания Большой Советской Энциклопедии (1952), где он писал, что предметом математики являются не только пространственные формы и отношения в собственном смысле слова, но и другие формы и отношения действительного мира, сходные с пространственными, но гораздо более общие. Свою концепцию развития математики А. Д. Александров изложил в главе «Общий взгляд на математику» I тома коллективного труда «Математика, ее содержание, методы и значение» (М., 1956). Несмотря на ряд отличий методологического характера, обрисованные воззрения родственны трактовке математики как системы «структур», развитой Н. Бурбаки.

Исследовательская работа, проведенная школой советских историков математики за прошлые десятилетия, позволила приступить, учитывая, разумеется, достижения зарубежных ученых, к созданию обобщенных трудов по истории математики в целом. Одним из этих трудов является уже названное ранее руководство для университетов К. А. Рыбникова. Работа в том же направлении, не преследующая специально учебных целей, ведется в Институте истории естествознания и техники Академии наук

СССР. Результатом ее явилось прежде всего издание трехтомной «Истории математики с древнейших времен до начала XIX века» (М., 1970—1972), первый том которой посвящен древности, средним векам и эпохе Возрождения, второй — XVII в. и третий — XVIII в. Книга, вскоре переведенная на болгарский и польский языки, написана коллективом авторов: В. И. Антроповой, И. Г. Башмаковой, Э. И. Березкиной, А. И. Володарским, А. В. Дорофеевой, Л. Е. Майстровым, Б. А. Розенфельдом, Н. И. Смирновым, М. В. Чириковым, О. Б. Шейниным и А. П. Юшкевичем — под общей редакцией последнего. Составительский коллектив стремился, применяя методологические принципы марксизма-ленинизма, рассмотреть развитие математики во взаимосвязи с развитием других наук, идеологии в целом, техники, постоянно имея в виду, что математика является не только совокупностью идей, понятий и методов, создаваемых отдельными учеными, но и необходимым элементом практической деятельности человечества и на каждом этапе его истории выполняет определенные — и со временем все возрастающие — социальные функции.

Почти одновременно с выходом названного труда И. Б. Погребысский приложил ко второму изданию своего перевода известного «Краткого очерка истории математики» Стройка (1948) ярко написанный сжатый очерк развития математики в первой половине XX в. (1969); у Стройка изложение доведено до конца XIX в. Наличие этой небольшой книги, как и переводов более ранних «Лекций по истории математики в XIX столетии» Ф. Клейна (1926, рус. пер. 1937) и «Элементов истории математики» Н. Бурбаки (1-е изд. 1960, рус. пер. 1963), не снимает с советских историков математики задачи написать с тех же методологических позиций, какие были коротко очерчены выше, труд о развитии математики в XIX и XX веках. Подготовку такого труда в нескольких книгах ведет в настоящее время Институт истории естествознания и техники. Вышла из печати первая книга этого труда «Математика XIX столетия. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей» (М., 1978), в написании которой участвовали И. Г. Башмакова, Б. В. Гнеденко, З. А. Кузичева, Ф. А. Медведев, Е. П. Ожигова, А. Н. Паршин, А. Н. Рудаков, Е. И. Славутин, О. Б. Шейнин, А. П. Юшкевич. Общая редакция этой серии принадлежит А. Н.

Колмогорову и А. П. Юшкевичу. Первые четыре книги серии намечено уделить, с некоторыми отклонениями в ту или другую сторону, времени с начала XIX в. до его 70-х годов, заключительные две книги — последним десятилетиям XIX и первой половине XX в.

Сравнение уже изданной книги с соответствующими разделами опубликованного коллективного труда «Краткого изложения истории математики. 1700—1900» под редакцией Ж. Дьёдонне (Париж, 1968) показывает существенные отличия; мы полагаем, что эти два труда не конкурируют, а во многом дополняют друг друга.

Рассматривая исследования советских историков математики за шестьдесят лет, мы видим, что в настоящее время эти ученые образуют разветвленную научную школу, объединяемую общностью методологических принципов и целей. Функционирует несколько активных научных центров, тесно связанных между собой; в работе по истории математики участвует довольно большое число математиков различных специальностей. Исследования охватили многие направления истории математики; при этом особенно значительны были успехи в изучении развития отечественной математики в России и СССР, античной математики, математики средневекового Востока и нескольких отдельных направлений математики нового и новейшего времени, как алгебра и теория чисел, проблемы обоснования математики, теория множеств и функций, дифференциальные уравнения и еще некоторые. В последние годы особенно усилились работы по истории математики XIX—XX вв.

Вместе с тем перед советскими историками математики стоит большое число нерешенных актуальных задач, и это обстоятельство побуждает их к дальнейшей продуктивной их деятельности. Однако рассмотрение этих задач, которые уже не раз обсуждались историками математики, выходит за рамки настоящего обзора, целью которого является только познакомить читателя с результатами советских исследований по истории математики за шестьдесят лет, прошедших после Великой Октябрьской социалистической революции.

ИЗ ИСТОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ГАЛИЛЕЙ И СРЕДНЕВЕКОВАЯ МАТЕМАТИКА

В. С. Широков

Глубоким убеждением Галилея всегда было то, что «книга природы написана на математическом языке» [1, т. VI, с. 232] и роль математики в сочинениях Галилея весьма значительна [2, с. 172—175; 3, с. 246—268]. Однако начальный этап становления Галилея как ученого оставался вне поля зрения историков науки вплоть до того, как Антонио Фаварро издал в 1890 г. его университетские заметки под общим названием «Juvenilia» [1, т. I, с. 15—177] и трактат «О движении» (De motu) [1, т. 1, с. 251—419]. Под заголовком «Juvenilia», т. е. «Юношеское», Фаварро объединил работы молодого Галилея, написанные им в 1584—1586 гг., когда в возрасте 20—22 лет он учился в Пизанском университете и слушал, в числе других, лекции своего учителя Франческо Бонамико. Из сочинений Бонамико, оказавших влияние на молодого Галилея, следует отметить его «физические» трактаты, написанные в традиционной для средних веков форме «вопросов» (Questiones) к сочинениям Аристотеля: к «Физике», «О небе и мире», «О соединении и разъединении» и т. д. [4¹].

В той же манере написаны и «Juvenilia». Текст обильно украшен именами «авторитетов»: Аристотель, Платон,

¹ Об этом сочинении Бонамико писал А. Койрэ [5, с. 24—47], отмечая, что Бонамико не выходит за пределы аристотелевской физики. Проблемы движения Бонамико рассматривает с точки зрения «финальной причины», т. е. того принципа, который начисто отбросил Галилей [5, с. 33]. Более кратко рассмотрел тот же труд Л. Ольшки [6, с. 137—140]. Ольшки также характеризовал трактат Бонамико как «написанный с аристотелевской точки зрения и полный резких возражений против Архимеда» [6, с. 172]. Однако в главе, посвященной образованию Галилея, Ольшки ни единым словом не упоминает «Juvenilia».

Евклид, Аверроэс, ибн Сина и др. Из ученых XIV в. Галилей ссылается на Суисета, Брэдвардина, Оккама, Хейтесбери, Григория Римини, Уолтера Берли (Бурлея), Альберта Саксонского, Марсилия Ингена и других менее известных авторов. Ссылки на Орема и Буридана нет. Галилей упоминает или цитирует и более близких по времени авторов XV—XVI веков: Гаэтана Тиенского, Марлиани, Блазия из Пармы (Бьяджо Пелакини), Помпонацци, Павла Венецианского, Ачиллини и др. Любопытно, что ни Бонамико, ни Бенедетти не упоминаются ни разу.

В историко-математической литературе давно отмечено очевидное сходство вывода Галилеем законов падения тел и вывода средневековыми авторами (мертонцы, Орем) свойств равномерно дифформного изменения [7, с. 562—585; 8, с. 218—219; 9, с. 104; 10, с. 143—173]. Сам Галилей нигде при выводе этих законов в «Диалоге о двух главных системах мира» (1632, см. [11, т. 1]) и в «Беседах и доказательствах, касающихся двух новых отраслей науки» (1638, см. [11, т. 2]), не указывает своих средневековых «предшественников». Однако понятийный аппарат, которым он пользовался, взятый в собственно математическом смысле, тот же, что и у представителей Оксфордской или Парижской школ. «Галилей оперирует такими понятиями, как „бесконечное множество градусов скорости“, „бесконечное множество точек“, „бесконечное множество линий“, „совокупность и сумма (la massa e la somma) всей скорости“, „совокупность и агрегат стольких же градусов скорости“ и т. д.» [10, с. 145]. М. Клагет, говоря о доказательстве Галилеем закона равноускоренного падения тел, пишет: «То, что в этом отрывке уделяется внимание латинской терминологии, показывает, насколько зависит стиль Галилея от стиля мертонцев. Термины „equalis motus“, „uniformis motus“, „gradus velocitatis“, „intensio velocitatis“ являются частью словарей и Галилея и мертонцев. Еще более показательно, что Галилей в этом отрывке („Третий день“ из „Двух новых наук“) сравнивает мгновенные скорости в начале первого отрезка времени и в конце второго (при равномерно изменяющемся движении), воображая, что тела движутся равномерно в течение этого отрезка времени с соответствующими мгновенными скоростями. Как мы уже видели, в точности такое же представление было у Хейтесбери и Суисета в их трактовке мгновенной скорости. Необходимо также добавить, что

определения мгновенной скорости, равномерного ускорения, данные Галилеем, являются почти точными копиями мертонских» [8, с. 252].

Первым, кто обратил внимание на «*Juvenilis*», было естественно Дюгэм [7, с. 580—583]. Дюгэм увидел в этом сочинении прямое подтверждение своей концепции «медленной и постепенной эволюции» научных представлений², он прямо говорит о Галилее как наследнике парижской и оксфордской натурфилософии XIV в. [7, с. 583]. Дюгэм усмотрел в ссылаях Галилея прямое доказательство того, что будущий автор «Бесед» штудировал средневековые трактаты: «Галилей не удовлетворился чтением трактатов итальянских авторов: Марлиани, Гаэтана Тиенского . . ., Помпонацци; он приступает к подробному изучению темных мест, которые имеют оксфордское происхождение, по первоисточнику: он не боится ни труднопонимаемых софизмов Хейтесбери, ни скучных каверз (*fastidieuses chicanes*) таинственного Калькулятора» [7, с. 581]. Поводом для такого утверждения послужило следующее место из раннего трактата Галилея «Об элементах» (*De elementis*): «Сомнение второе: как ведут себя первые качества относительно силы (*activitate*) и сопротивления. Об этом читай Калькулятора в трактате „*De reactione*“, Хейтесбери в софизме „*An aliquid fiat*“, Марлиани в его введении к „*De reactione*“ . . ., Тиенского в трактате „*De reactione*“, Помпонацци, главу 13 первой части „*De reactione*“ [1, т. I, с. 172]. Подобные перечисления имен, кото-

² Несмотря на аргументированную и весьма резкую критику этой и некоторых других концепций Дюгэма (см., например, [12; 13, с. 272—277] и указанную там литературу), тем не менее даже сейчас нельзя считать их полностью преодоленными. Например, А. Койрэ, говоря о научной революции XVII в., пишет, что «человеческая мысль с упорством обращалась к одним и тем же «вечным вопросам», встречая одни и те же проблемы, борясь с одними и теми же препятствиями и изобретая медленно и постепенно... новые концепции и новые методы научной мысли, которые наконец позволили преодолеть эти трудности» [14, с. 176]. В рамках этой же традиции решается вопрос о научной революции в известной книге Т. С. Куна «Структура научных революций» [15], в которой вместо рассмотрения внутренней логики развития научной теории, вместо сложных и чаще всего опосредствованных связей и между различными научными дисциплинами, и с общественным бытием науки все дело сводится к волевому акту «сообщества ученых», к смене основных установок и концепций внутри этого «сообщества», что Кун обозначает как «изменение парадигмы».

рые. нередко встречаются в трактатах авторов XV—XVI вв., сами по себе, однако, еще не говорят ни о глубоком знании Галилеем сочинений авторов, которые он перечисляет, ни о том, что он читал эти трактаты. Приведенная оценка Дюгэма с некоторыми коррективами имеет сторонников и в настоящее время. А. Кромби, как и Дюгэм, заявляет, что Галилей использовал теорему Орема для доказательства закона свободного падения тел, причем подразумевается простое заимствование [16, с. 96—97].

Заметим попутно, что Кромби вообще часто некритически повторяет оценки и выводы Дюгэма. Так, говоря о происхождении теории интенсии и ремиссии форм, Кромби пишет: «Как и многие научные теории (concepts) средних веков, эта проблема первоначально обсуждалась в теологическом контексте, и принципы, выработанные там, затем были приложены к физике. Именно Петр Ломбардский открыл этот вопрос, утверждая, что сила божественной благодати может возрастать и убывать в равные времена» [16, с. 85]. Это положение Дюгэма было подвергнуто обстоятельной и исчерпывающей критике В. П. Зубовым [12, с. 107; 17, с. 615]. Несмотря на то что начальный этап развития западноевропейской науки до сих пор остается во многом непроясненным, последние исследования ни в коей степени не подтверждают этого вывода Дюгэма (см., например, [9, с. 50—57]). В другом случае, рассматривая весьма тонкие определения Григорием Римини понятий «больше», «меньше», «равно», «часть» и разграничение смысла этих понятий применительно к конечным и бесконечным множествам, Кромби, почти дословно повторяя Дюгэма [18, с. 392], говорит: «Заключение 17 С показывает, что автор достиг логической тонкости, которая была вновь обретена только в XIX и XX столетиях в математической логике Кантора, Дедекинда, Рассела» [16, с. 42]. Об этих определениях Григория Римини см. [19, с. 128—130], где показано не только сходство концепций средневекового ученого математиками XIX—XX вв., но и их принципиальное различие.

Напомним, что вывод Галилеем законов падения тел основан на следующих положениях: 1. Изображение равноускоренного движения, начинающегося с нуля, треугольником, а равномерного — параллелограммом (фактически — прямоугольником), причем время соответствует вертикальному отрезку. 2. Рассмотрение беско-

нечного множества градусов скорости, «приобретенных за бесконечное множество мгновений, заключенных в промежутке времени ... и соответствующих бесконечному множеству точек, содержащихся в линии». (Мы пользуемся переводом В. П. Зубова [10, с. 144] как наиболее точно передающим особенности терминологии Галилея, ср. [11, т. I, с. 329]). 3. Приравнивание бесконечного множества градусов скорости площади треугольника (соответственно параллелограмма) или, как пишет Галилей: «чтобы представить бесконечное множество градусов скорости... нужно мысленно провести бесконечное множество все меньших и меньших линий... такое бесконечное множество линий дает нам в конце концов (*in ultimo*) площадь треугольника...» [там же]. 4. Сравнение площадей геометрических фигур, представляемых всегда как состоящие из бесконечного множества отрезков. 5. Предположение, что одно бесконечное множество в два раза больше другого: параллели параллелограмма, «поскольку их бесконечно много, будут вдвое больше бесконечного множества параллелей треугольника» [10, с. 147; ср. 11, т. 2, с. 282].

Все эти положения, рассматриваемые по отдельности, имеются в трактатах средневековых ученых, однако нет ни одного известного нам средневекового доказательства «мертонской теоремы», основанного на всех этих принципах. Прав В. П. Зубов, когда он пишет: «геометрическая суть доказательства остается той же, что у Орема. Однако „костяк“ логической аргументации обнажен: Галилей пытается глубже вникнуть в исходные принципы аргументации, раскрыть то, что у его предшественников лишь предполагалось» [10, с. 144]. Мы считаем, что представление равномерного движения прямоугольником и равномерно дифформного треугольником Галилей знал по трактату «О широтах форм», который цитируется в «*Juvenilia*» (об этом подробнее ниже). Представление континуума бесконечным множеством значений и идея сравнения бесконечных множеств также обсуждаются в этом сочинении. Самого же Орема Галилей, как и другие ученые XVI в., безусловно не читал. Вертикальное расположение линии времени применяется в «Вопросе о скорости движения изменения» (*Questio de velocitate motus alterationis*) Джованни Казале, написанного несколько позже сочинений Орема по теории широт форм, но под их влиянием [10, с. 124; 8, с. 383—384]. В итальянских библиотеках имеются

многочисленные копии трактата Казале, и, вероятно, Галилей знал этот трактат.

Возвратимся, однако, к Галилею: и «*Juvenilia*», и трактат «О движении»³ представляют собой весьма цельные сочинения (даже с учетом лагун в первом), отражающие его взгляды на предшествующую ему средневековую математику. Галилей достигает здесь замечательной ясности и своеобразия⁴. Изучение этих ранних сочинений гениального ученого показывает важный и показательный для прогрессивной научной мысли XVI века «перенос акцентов» при изучении средневековых текстов. Галилею не надо было затем совершать «переоценку ценностей». Он рано взял от предшествующей ему математики и физики все действительно наиболее ценное, и оно вошло в его сочинения, изменив, зачастую, свой первоначальный смысл.

В самом деле, средневековые трактаты или составленные на их основе и приспособленные для нужд преподавания компиляции изучались — и весьма основательно — в европейских университетах того времени. Таково было образование не только Галилея, Кеплера, Бекмана, Кавальери и Декарта, в университете не обучавшегося, а позднее даже в какой-то степени и Лейбница, не говоря уже о Николае Кузанском и Копернике. Таким образом, мы считаем, что ранние сочинения Галилея — с учетом всего его научного творчества — позволяют дать ответ на вопрос о роли средневековой математики в фор-

³ Об этом сочинении, посвященном критике концепций Аристотеля и представляющем собой лекции, которые Галилей читал в 1589—1590 гг. в Пизанском университете, см. [10, с. 32 и след.; 20, с. 86; 21—22]. Существуют три его редакции, последняя — в форме диалога. Здесь же Галилей резко критикует то положение «физики» Аристотеля, что прямолинейное и круговое движения несравнимы друг с другом, способствуя тем самым прояснению понятия величины [1, т. I, с. 302—304].

Койрэ тоже отмечает «замечательно ясное изложение принципов аристотелевской космофизики так, как они понимались по крайней мере в средние века» [5, с. 17]. Отметим, что, сопоставив в «*Juvenilia*» систему Коперника с древней системой Аристарха Самосского («Аристарх, живший на четыреста лет раньше Птолемея, которому из наших современников следует Николай Коперник в труде «О вращении небесных тел», предлагает такой порядок...» [1, т. I, с. 47—48]), молодой Галилей делает глубоко симптоматичное заявление о том, что «о делах астрономии пусть судят астрономы (*in rebus astronomicis astronomos esse consulendos*)» [там же, с. 47], направленное против слепого поклонения авторитету Философа.

мировании Галилея как ученого. Наибольший интерес имеют трактаты Галилея: «Об интенсии и ремиссии» (*De intensione et remissione*) [1, т. I, с. 111—119], «О частях или градусах качества» (*De partibus sive gradibus qualitatis*) [там же, с. 119—122] и четвертая часть трактата «Об элементах», озаглавленная «Может ли форма элементов усиливаться и ослабляться» (*an forma elementorum intenditur et remittitur*) [там же, с. 133—157].

Основное внимание в этих трактатах уделяется, что видно и из их названий, средневековой теории интенсии и ремиссии форм (причем главным образом физическому ее аспекту) и частично учению об униформности и дифформности качеств. «Ясно, что изменение происходит не только тогда, когда одна вещь (*res*) изменяется в другую, но также если рассматривать одно и то же качество, то оно также изменяется, становясь больше или меньше, как говорит Аристотель в V кн. «Физики». Из этого проистекает понятие об интенсии и ремиссии качеств, о которых пойдет речь; во-вторых, это обнаруживается почти при любом качественном изменении, так что нельзя представить, как происходит это изменение, не представляя себе интенсию и ремиссию; также и почти с любым действием (*cum omnis ferme actio*) связаны интенсия и ремиссия, поэтому также необходимо прежде всего понимать интенсию и ремиссию» [1, т. I, с. 111], — так начинается первый из отмеченных нами трактатов. Из авторов, которые писали на эту тему, Галилей отмечает Эгидия Романского, Уолтера Берли (он называет его трактат «Об интенсии и ремиссии» [21]), Григория Римини, Оккама и др. [там же].

Дальше (*Nota primo*) идет определение интенсии и ремиссии качества, которое характерно для понимания этих понятий в XVI веке. «Интенсию и ремиссию можно рассматривать двояко: во-первых, формально (*formaliter dicitur intensio et remissio*, во-вторых, как меру того, что обозначается (*modus quem significant*). Относительно первого: так же как экстенсивность качества может быть большей или меньшей, а любое свойство — совершенное или несовершенное, так и то, что имеет вид формы или качества (*habet rationem formae vel qualitatis*), может быть больше или меньше; ... Относительно второго: интенсия и ремиссия могут рассматриваться двояко: во-первых, интенсия определяется по сравнению с ремиссией, так что даже малое качество можно назвать интенсивным по срав-

нению с еще меньшим, и наоборот; во-вторых, можно определить их абсолютно и самих по себе. Тогда интенсия и ремиссия занимают некоторую широту (*requirunt aliquam latitudinem*), в которой существуют границы (*consideratur veluti extrema*), поэтому если в этом качестве вообразить среднюю точку (*medius terminus*), тогда то, что будет по ту сторону (*ultra*), называется интенсией, по эту сторону (*citra*) — ремиссией. И в этом видят различие между интенсией и ремиссией, как между количеством большим и меньшим, как между совершенным и несовершенным» [1, т. I, с. 112]. Несколько далее Галилей уточняет, что этот «высший градус» (речь идет о градусах теплоты) равен восьми [там же, с. 155].

Этот отрывок заставляет вспомнить прежде всего о Суисете. Именно подобное разграничение двух способов рассмотрения сделано в самом начале его «Калькулятора», в первом трактате «Об интенсии и ремиссии»: «Интенсия может рассматриваться двояко. Во-первых, как изменение предмета, который приобретает качество, и таким образом говорят, что интенсия есть движение. По-другому говорят, что интенсия качества есть сам этот предмет, интенсивный в чем-либо, так, теплота есть интенсия теплого предмета и точно также следует говорить о ремиссии» [22, 2]. Одна из главных мыслей Суисета также та, что интенсия и ремиссия отличаются между собой формально и как количество большее и меньшее. «Калькулятор» Суисета пользовался особым вниманием итальянских ученых XV—XVI вв. Существующие три издания этого труда отпечатаны в Италии (Падуя, 1477; Павия, 1498; Венеция, 1520). В итальянских библиотеках имеются многочисленные рукописи [9, с. 202]. Возможно, что Галилей был знаком с «Калькулятором». Также очень вероятно, что Галилей читал сочинение Помпонацци, посвященное критике концепции Суисета в пользу концепции Галена—ал-Кинди (см. подробнее [23] или статью [24, с. 132—135]). В трактате Помпонацци различие между интенсией и ремиссией полагается как между количеством большим и меньшим, что отражено даже в его названии [25]⁵. В теории Галена—ал-Кинди полагалось, что сумма градусов интенсии и ремиссии (например, градусов тепла и холода в смеси жидкостей) постоянна для любой смеси и равна

⁵ О трактате Помпонацци также писал Дюгэм [7, с. 120—123].

восьми. Интенсия измеряется расстоянием от нуля, ремиссия — от высшего градуса (восьми). Эта теория была известна на Западе начиная с первой половины XIV в. по сочинениям Вальтера из Одингтона, Арнольда из Виллановы [25, с. 78]. Этой концепции, как видно из приведенного отрывка, придерживается и Галилей. Она широко обсуждалась в кругах итальянских ученых того времени как более подходящая для физических приложений.

Сам процесс приобретения интенсивности — «интенсификация» качества — мыслится Галилеем как смешение противоположностей, т. е. речь идет о теории «mixtus», выросшей из галено-арабской традиции. Читаем дальше: «Интенсивности можно сравнивать друг с другом, предполагая один и тот же вид качества, более того, качественное изменение будет последовательным (successive)» [4, т. I, с. 112]. Дальше Галилей добавляет, что оно будет и непрерывным: изменение качества (и движения) происходит последовательно и непрерывно (successive et continue) [там же, с. 113, nota secundo]. «Движение же есть не что иное, как текущая форма (forma fluens)» [там же, с. 114]. Квантитативный подход в этой теории также совершенно ясно выражен у Галилея: «широта качества в некоторой степени подобна величине, так как поскольку в величине есть широта посредством существования количественных частей, также и в качестве есть широта интенсивностей посредством существования многих различных градусов. Однако они отличаются тем, что широта величины образуется множеством частей одна вне другой (per multitudinem partium, quarum una est extra aliam), что, собственно, и называется экстенсивностью; но и в качестве будет широта, поскольку в одной части будет несколько градусов (plures gradus), что и называется интенсивностью» [там же, с. 120]. Из этого отрывка видно, что Галилей употребляет мертоновскую терминологию или ту, которую употреблял Дж. Казале, но не Орем [9, с. 66—71].

Впрочем, теория интенсии и ремиссии форм в ее геометрическом варианте, т. е. теория широт форм Николая Орема, также знакома Галилею. В трактате «О частях или градусах качеств» кратко изложено учение об униформности и дифформности качеств. Здесь мы читаем: «Следует, в-третьих, отметить, что поскольку качество всегда существует в предмете количественно, то оно посредством собственных градусов образует широту качества и может

делиться на количественные части (*partes quantitatis*). Если сравнивать между собой эти градусы или качественные части (*partes qualitatis*) с частями количественными и если для любой части величины будут равными и градусы качества, тогда качество называется равномерным. Если эти градусы неравны, то тогда оно называется дифформным. Если же разности (*excessus*) этих градусов будут равны таким образом, например, что в первой части будет два градуса, во второй — четыре, в третьей — шесть и т. д., т. е. так, что эта разность постоянна и равна двум, то качество называется равномерно-дифформным; если же разности градусов не равны, то — дифформно-дифформным. Опять, если эти неравные разности будут такими, что в первой части, например, будет четыре градуса, во второй — шесть, в третьей — 9 и т. д., то качество называется равномерно-дифформно-дифформным (*uniformiter difformiter difformis*), если же разности градусов не будут пропорциональными, то называется дифформно-дифформно-дифформным» [1, т. 120].

Этот отрывок есть точная цитата из трактата «О широтах форм» (*De latitudinibus formarum*), написанного примерно в 1390 г. Яковом де Санкто Мартино [13, с. 367; 9, с. 85—90]. Трактат этот получил широчайшее распространение: четыре печатных издания и многочисленные рукописные копии⁶. Этот трактат стал образцом для составления подобных сочинений, положенных в основу преподавания. Можно согласиться с М. Клагетом, что Галилей мог познакомиться с теорией широт форм Орема не только по трактату «О широтах форм», но и по трактатам Дж. Казале или Блазия из Пармы: все эти сочинения изданы в 1505 г. в одном сборнике⁷. Все это остается,

⁶ Рукописи перечислены М. Клагетом [8, с. 339—340]. Укажем еще одну копию: Падуанский кодекс (Q791) отдела рукописей ГПБ им. М. Е. Салтыкова-Щедрина, обнаруженный совсем недавно [26, folio 180—183; 27].

⁷ Клагет пишет: «Я полагаю, что Галилей видел и читал и издание Хейтесбери 1494 года и все тексты сборника (Венеция, 1505), который содержит вместе с трактатами Блазия из Пармы и Дж. Казале подробно иллюстрированный текст трактата «О широтах форм». Если это так, то Галилей легко мог познакомиться с элементами учения о конфигурациях из трактата «О широтах форм», геометрическим доказательством мертонаского правила или из трактата Блазия, или из Хейтесбери, или из них обоих и даже с горизонтальным расположением линии широт из трактата Казале» [9, с. 106].

однако, предположением, к тому же у Галилея было много возможностей: почти все основные средневековые трактаты были изданы к тому времени. Главное же то, что Галилей несомненно читал трактат «О широтах форм» и, значит, и учение о дифформностях и основные идеи теории широт форм Орема были ему несомненно известны. Других упоминаний о теории широт форм в «*Juvenilia*» нет. Впрочем, следует иметь в виду, что текст «*Juvenilia*» сохранился неполностью: имеются три большие лакуны, именно на с. 115, 131, 136. С другой стороны, Галилей совершенно не обращает внимания на весьма несуразное определение в цитированном отрывке последнего вида качества (см. об этом [8, с. 396]); впрочем, у него нет неверного утверждения автора трактата «О широтах форм», что униформно-дифформно-дифформное качество изображается полукругом [там же]. Все это говорит о том, что Галилей не считал необходимым слишком вдаваться в тонкости теории интенсии и ремиссии. Вообще А. Майер, подробно исследовавшая судьбу теории Орема, справедливо писала, что все, что осталось от теории широт форм к XVI в., это «весьма примитивное средство графического объяснения и иллюстрации понятий, предложений и доказательства результатов» [13, с. 379—380].

Галилей взял наиболее существенные идеи средневековых математических теорий, в первую очередь идею функциональной зависимости (интенсивность как функция экстенсивности), причем для физических качеств эта зависимость полагается непрерывной. Отсюда интерес Галилея к понятию непрерывности, к соотношению непрерывного и дискретного. Эти вопросы интересовали Галилея и в дальнейшем. Известно, что Галилей хотел написать специальную работу, посвященную неделимым, что видно из его переписки с Кавальери [2, с. 172; 20, с. 86—87]. Существенны те инфинитезимальные соображения, которые имеются уже в этом раннем сочинении Галилея.

В средние века непрерывность понималась в аристотелевском смысле, т. е. как бесконечная делимость величины. Из этого представления исходит и Галилей: «непрерывность понимается как бесконечная делимость: т. е., взяв какое-либо время, можно взять и меньшее, и так до бесконечности», то же для любой интенсивности [там же, с. 118]. Или: «Итак, заключаем вместе с Симпликием („Физика“, VIII кн.), Эгидием Романским („О возникновении“,

кн. I), Янденом (Janduno) („Физика“, кн. VIII) и другими, что изменение интенсивности, как и вообще качественное изменение, происходит непрерывно» [там же]. Дальше Галилей пишет, что это основано на принципе бесконечной делимости «предмета, наделенного качеством» (т. е. экстенсивности): «Если изменяющийся качественно предмет делим до бесконечности, значит и само изменение происходит последовательно, следуя частям предмета» [там же]. В трактате «О движении» Галилей говорит о непрерывности геометрической величины в том же смысле: «между любыми двумя неравными отрезками заключено бесконечное множество отрезков, поскольку разность между этими отрезками бесконечно делима» [там же, с. 287].

Другой вопрос — соотношение точки и континуума или мгновения и времени: «мгновение (*instantia*) не является само по себе непрерывным, но является границей времени (*sed intercedit tempus*)» [там же, с. 117]. Здесь возникает новый вопрос, имеющий длительную историю и на который давали разный ответ, именно как понимать термин «граница» и как эта граница связана с самим континуумом. Он подробно исследуется в рамках средневековой теории «*maximum et minimum*» переменной величины⁸. Ей посвящен последний из отмеченных нами трактатов.

Эта теория, имеющая, как и многие другие средневековые теории, истоки в сочинениях Аристотеля, получила значительное развитие (по сравнению с Аристотелем) в трудах Хейтесбери и Суисета [28, с. 69—93; 29, с. 191—196]. Приведем один пример, рассматриваемый Хейтесбери. Как определить способность Сократа поднять определенный вес: по максимальному весу, который он может поднять, или по минимальному весу, который он не может поднять? Или: способность Сократа увидеть предмет на определенном расстоянии: по минимальному предмету, который он способен увидеть, или по максимальному предмету из тех, которых он не в состоянии увидеть? [30, 30va; 29, с. 192]. Эта проблема имеет для Галилея главным образом физический интерес, поскольку она связана с определением границ изменения переменной величины: силы, сопротивления, скорости и т. д. При этом один из основных вопросов таков: принадлежит ли максимум, или минимум к множеству значений самой величины или

⁸ См. об этой проблеме и родственной ей проблеме «*de incipit et desinit*», а также *fluxus formae* [19, с. 133—168].

нет, т. е. является он внутренним или внешним для этого множества. Галилей дает определения основных понятий этой теории, повторяющие средневековые определения.

«Внутренний максимум (*maximum quod sic*) есть наибольшая величина, которой вещь (*res*) может достичь (*attingere*) или при которой она может существовать (*sub qua potest esse*), а при большей не может, т. е. она может достичь этой границы (*terminum*), но не может ее превзойти.

Внутренний минимум (*minimum quod sic*) есть наименьшая величина, которой вещь может достичь или при которой она может существовать, а при меньшей не может.

Внешний максимум (*maximum quod non*) есть такая величина, которой вещь вследствие малости (*ob parvitatem*) не может достичь и при которой она не существует, но при любой большей не превосходящей величины внутреннего максимума существовать может.

Внешний минимум (*minimum quod non*) есть такая величина, которой вещь вследствие великости не может достичь и при которой она не существует, но при любой меньшей, не превосходящей внутреннего минимума, существовать может» [1, ч. I, с. 139].

В исследовательской литературе отмечалось определенное сходство средневековых определений с известными дистинкциями Дедекинда, в частности с аксиомой непрерывности (см. [19, с. 166—167] и указанную там литературу). Разница состоит в том, что у средневековых авторов не было и речи об общем определении континуума действительных чисел [29, с. 195].

Галилей применяет эти понятия к различным множествам: непрерывному, дискретному, ограниченному, неограниченному, ограниченному сверху или снизу, к физическим понятиям: силе, сопротивлению, тяжести и т. п. Например, свойства бесконечной делимости величины и неограниченного возрастания означают, что *maximum quod sic* и *minimum quod sic* не существуют. Для ряда натуральных чисел (и для любого дискретного неограниченного множества) существует *minimum quod sic* (именно, единица), а *maximum quod sic* не существует. Для физических величин Галилей принимает решение Ачиллини (преподавал в Болонье и Падуе, ум. в 1512 г.) [28, с. 110, там же подробная история этой теории]: для непрерывной величины при ее возрастании границы будут внутренними, при убывании — внешними, иначе полу-

чается противоречие с существованием последнего значения убывающей величины или же первого — для возрастающей [1, т. I, с. 152], т. е. речь идет о противоречии, зафиксированном первой апорией Зенона (апория «меры»). Как пишет сам Галилей: «если в первом случае принять внешние границы, то само возрастание начинается с небытия (*non esse*)» [там же]. Об этом см. подробнее [19, с. 153—165].

С другой стороны, Галилей отмечает, что для реально существующих физических тел существует определенный минимум, далее которого деление невозможно: «натуральные вещи (*res naturales*) имеют определенные границы по величине и малости (*magnitudinis et parvitat*is), так что если что-либо прибавляется или отнимается, то соответствующие вещи не могут более быть или сохраниться» [там же, с. 140]. Здесь нет речи о физическом атомизме, но очевидно влияние теории физических минимумов.

В этой теории важна для понимания эволюции воззрений Галилея мысль о представлении переменной величины множеством ее значений, что он позднее при выводе законов падения тел обозначал или латинским термином *aggregatum* (собрание, совокупность), или итальянским *summo* (совокупность, сумма). Как известно, этот вопрос занимал Галилея и позднее. Мы имеем в виду знаменитое место из «Бесед и математических доказательств», где приводятся примеры взаимно-однозначного отображения бесконечного множества на его правильную часть [11, т. 2, с. 140—141]. Парадоксы бесконечности широко обсуждались в средневековой математической литературе. Отражение этих споров есть и в «*Juvenilia*». Галилей, как и многие средневековые авторы, рассматривает их здесь в главе «Может ли мир существовать извечно (*an mundus potuerit esse ab eterno*)» [1, т. I, с. 32—37], где мы читаем: «Если принять, что мир существовал вечно, то следует принять, что была бы пройдена актуальная бесконечность... т. е. что была бы пройдена актуальная бесконечность дней, месяцев, лет (*infiniti dies, mensis, anni... fuissent pertransita*)». Отсюда получается противоречие: «одна бесконечность будет больше другой, поскольку если мир существует вечно, то будет пройдена бесконечность лет (*infiniti anni fuissent elapsi*), но год содержит 365 дней, значит, число дней в бесконечности больше, чем лет» [там же, с. 34]. Этот вывод повторяется затем неоднократно:

«актуальная бесконечность будет пройденной, значит, и т. д., и получается, что одна бесконечность больше другой (*infinitum actu fuisse pertransitum, ergo etc., et dari unum infinitum maius alio*)» [там же, с. 35]. Галилей при этом ссылается на таких сторонников актуальной бесконечности, как Григорий Римини, Оккам, Дурандо Порциано, у которых действительно имеется подобное рассуждение [29, с. 196—215].

Таким образом, многие основные понятия, необходимые для изучения движения — одного из главных интересов Галилея, были им достаточно четко сформулированы в самом начале его научной деятельности. Эти понятия и принципы Галилей продолжал уточнять и развивать на протяжении всей своей жизни. Мы указали то рациональное, что было в средневековых текстах и что есть в «*Juvenilia*» Галилея, что было взято им у своих «предшественников». Различие же между ними великолепно сформулировал он сам в знаменитом отрывке из «Бесед и математических доказательств» (начало главы «О естественно-ускоренном движении»): «Любой может придумать произвольный вид движения и исследовать его свойства..., но мы решили рассмотреть явление падения тел с ускорением так, как оно действительно происходит в природе, и дать такое определение ускоренного движения, чтобы оно содержало главные свойства наблюдаемых ускоренных движений» ([1, т. VIII, с. 197], ср. [11, с. 238—239]).

Автор считает своим долгом выразить глубокую признательность А. П. Юшкевичу за многочисленные советы, уточнения и пожелания по работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Galilei Galileo. Le Opere. Firenze, 1929—1936.*
2. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1970. Т. 2.
3. Кузнецов Б. Г. Галилей. М.: Наука, 1964.
4. *Francisci Bonamici de motu libri X; quibus generalia naturalis philosophiae principia summo studio collecta continentur; nec non universae questiones ad libros de Physico auditu, De Caelo, De Ortu et interitu... Florentiae, 1591.*
5. *Koyré A. Etudes galiléennes. Paris, 1966.*
6. Ольшки Л. История научной литературы на новых языках / Пер. с нем. Ф. А. Каган-Бернштейн, П. С. Юшкевич; Предисл. С. Ф. Васильева. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1933, Т. 3.
7. *Duhem P. Etudes sur Léonard de Vinci. Paris, 1913, Т. 3.*
8. *Clagett M. The science of mechanics in the Middle ages. Madison, 1959.*

9. *Clagett M.* Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motions. Madison, 1968.
10. *Григорьян А. Т., Зубов В. П.* Очерки развития основных понятий механики. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
11. *Галилей Галилео.* Избранные труды: В 2-х т. М.: Наука, 1964.
12. *Зубов В. П.* Концепции Дюэма в свете новейших исследований по истории естествознания (Тр. совещ. по истории естествозн. 24—26 декабря 1946). М., Л.: Изд-во АН СССР, 1948, с. 94—110.
13. *Maier A.* An der Grenze von Scholastik und Naturwissenschaft. Essen, 1943.
14. *Koyré A.* Galilée et la révolution scientifique du XVII^e siècle.— Etud. hist. pensée sci. Paris, 1966, p. 176—191.
15. *Кун Т. С.* Структура научных революций / Пер. И. З. Налецова. М.: Прогресс, 1975.
16. *Crombie A. C.* Medieval and early modern science. Cambridge (Mass.), 1963. Vol. 2.
17. *Зубов В. П.* Тракта́т Никола́я Оре́ма. «О конфигурации качеств». — В кн.: Ист.-мат. исследования. М.: Физматгиз, 1958, вып. XI, с. 601—635.
18. *Duhem P.* Études sur Léonard de Vinci. Paris, 1909. Т. 2.
19. *Зубов В. П.* Развитие атомистических представлений до начала XIX века. М.: Наука, 1965.
20. История механики с древнейших времен до конца XVIII века. М.: Наука, 1971.
21. *Burleus W.* De intensione et remissione formarum. Venetiis, 1496.
22. *Suisset R.* Calculator. Venetiis, 1520.
23. *Wilson C.* Pomponazzi's criticism of calculator.— Isis, 1953, vol. 44, pt. 4, N 138, p. 355—362.
24. *Широков В. С.* О «Книге вычислений» Ричарда Суисета. — В кн.: Ист.-мат. исследования, 1976, вып. XXI, с. 129—142.
25. *Petri Pomponatii Mantuani tractatus... de intensione et remissione formarum ac de parvitate et magnitudine.* Venetiis, 1525.
26. Падуанский кодекс ГПБ (Q791, фонд Общества любителей древней письменности).
27. *Горфункель А. Х.* Падуанский кодекс XV века в собрании рукописей ГПБ. — В кн.: Средние века. М.: Наука, 1972, вып. 35, с. 222—229.
28. *Wilson C.* William Heytesbury. Medieval logic and the rise of mathematical physics. Madison, 1956.
29. *Maier A.* Die Vorläufer Galileis im 14. Jahrhundert. Roma, 1949.
30. *Hentisberus.* De sensu diviso et composito (et alii opusculae). Venetiis, 1494.
31. *Юшкевич А. П.* О революции в математике Нового времени. — В кн.: Вопросы истории естествознания и техники. М.: Наука, 1969, вып. 2(27), с. 14—22.
32. *Giacomelli R.* Galileo Galilei giovane e il suo «De motu». Pisa, 1949.
33. *Galilei G.* On motion and on mechanics, comprising De motu. Transl. with introd. and notes by J. E. Drabkin and Le Meccha/niche, S. Drake. Madison, 1960.
34. *Зубов В. П.* Калориметрическая формула Рихмана и ее пред- история. М.: Изд-во АН СССР, 1955, с. 69—93.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ РЯДЫ ЛАПЛАСА

И. А. Головинский

1. Настоящая работа является продолжением нашей статьи [1]. В «Мемуаре о последовательностях» Лапласа [2], где для преобразования одних аналитических соотношений в другие впервые систематически использованы производящие функции, Лаплас применил их прежде всего для вывода разнообразных интерполяционных рядов. В работе [1] рассматривается сообщаемый Лапласом ряд

$$y_{m+x} = y_m + \frac{x}{1} \Delta y_{m-r} + \frac{x(x+2r-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y_{m-2r} + \\ + \frac{x(x+3r-1)(x+3r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y_{m-3r} + \\ + \frac{x(x+4r-1)(x+4r-2)(x+4r-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta^4 y_{m-4r} + \dots, \quad (1)$$

который Лаплас вывел методом производящих функций из разложения экспоненты t^{-x} , являющегося его частным случаем:

$$\frac{1}{t^x} = 1 + x\alpha + \frac{x(x+2r-1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 + \\ + \frac{x(x+3r-1)(x+3r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 + \\ + \frac{x(x+4r-1)(x+4r-2)(x+4r-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^4 + \dots, \quad (2)$$

где $\alpha = t^r (1/t - 1)$. Таким же способом получает Лаплас в [2] интерполяционные ряды Ньютона, Ньютона — Стирлинга и Ньютона — Бесселя. Затем [2, с. 21] он выводит интерполяционную формулу более общего характера, в которой данная функция разворачивается в ряд по степеням линейного оператора $\nabla y_x = a_0 y_x + a_1 y_{x+1} + a_2 y_{x+2} + \dots + a_n y_{x+n}$:

$$y_{m+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \nabla^k y_{m+l} [a_{l+1} Z_{x-(k+1)n+1}^{(k)} + a_{l+2} Z_{x-(k+1)n+2}^{(k)} + \\ + a_{l+3} Z_{x-(k+1)n+3}^{(k)} + \dots + a_n Z_{x-kn-l}^{(k)}]. \quad (3)$$

Здесь

$$Z_x^{(k)} = -\frac{1}{k!} \sum_{j=1}^n \frac{d^k}{d\theta^k} \left[\frac{(\theta - \alpha_j)^{k+1}}{\theta^{x+1} \{V(\theta)\}^{k+1}} \right]_{\theta=\alpha_j}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} V(\theta) &= a_0 \theta^n + a_1 \theta^{n-1} + a_2 \theta^{n-2} + \dots + a_n = \\ &= a_0 (\theta - \alpha_1)(\theta - \alpha_2) \dots (\theta - \alpha_n). \end{aligned}$$

Функция $Z_x^{(k)}$ выражается по формуле (4) тогда, когда все корни многочлена $V(\theta)$ различны. Лаплас поясняет, как нужно видоизменить выражение (4) при наличии кратных корней, но здесь мы ограничимся случаем, когда все корни простые.

Формулу (3) Лаплас получает из соответствующего ей разложения показательной функции t^{-x} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{[z(t)]^k}{t^l} [a_{l+1} Z_{x-(k+1)n+1}^{(k)} + a_{l+2} Z_{x-(k+1)n+2}^{(k)} + \\ &+ a_{l+3} Z_{x-(k+1)n+3}^{(k)} + \dots + a_n Z_{x-kn-l}^{(k)}], \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$z(t) = a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots + \frac{a_n}{t^n}.$$

Разложение (5) Лаплас умножает на производящую функцию последовательности $\{y_m\}$, получая производящую функцию последовательности $\{y_{m+x}\}$. От производящих функций он переходит, если воспользоваться термином Абея (см. [3]), к «функциям, их определяющим», и получает формулу (3).

Интерполяционная формула (3) содержит общее решение рекуррентного уравнения

$$\nabla^k y_m = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Это решение получится, если отбросить в (3) все члены, содержащие оператор ∇ в степени k и выше.

В работе [1] интерполяционные ряды Ньютона, Тейлора, Абея и лапласовский ряд (1) были описаны следующей общей схемой (см. [4, с. 101—103]). Последовательность линейных непрерывных функционалов $\{\Phi_i\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) задает интерполяционный процесс. При

этом имеется также последовательность функций $\{\varphi_j(x)\}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) такая, что

$$\Phi_i[\varphi_j] = \delta_{ij}, \quad (6)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $i = j$; иначе $\delta_{ij} = 0$). Последовательность $\{\varphi_j(x)\}$ называется базисом фундаментальных полиномов данного интерполяционного процесса. Интерполяционным рядом функции $f(x)$ называют выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k[f] \varphi_k(x), \quad (7)$$

Если ряд (7) сходится, то его сумма $S(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\Phi_k[S(x)] = \Phi_k[f(x)]$$

при $k = 0, 1, 2, \dots$ независимо от того, равна сумма $S(x)$ исходной функции $f(x)$ или нет.

В настоящей работе будет показано, что интерполяционная формула Лапласа (3) тоже укладывается в подобную схему. Вопросы сходимости мы здесь не касаемся, предполагая, что ряды, о которых идет речь, рассматриваются в их области сходимости (если она не пуста).

2. Для описания рядов типа (3) нам потребуется некоторая модификация предыдущей схемы. Пусть задано семейство линейных непрерывных функционалов $\{\Phi_{k,l}\}$ ($0 \leq k, 0 \leq l \leq n-1$) и семейство функций $\{\varphi_{k',l'}(x)\}$ ($0 \leq k', 0 \leq l' \leq n-1$) такое, что

$$\Phi_{k,l}[\varphi_{k',l'}] = \delta_{k,k'} \delta_{l,l'} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = k' \text{ и } l = l', \\ 0 & \text{при } k \neq k' \text{ или } l \neq l'. \end{cases} \quad (8)$$

Если при этом ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \Phi_{k,l}[f] \varphi_{k,l}(x) \quad (9)$$

сходится, то его сумма $S(x)$, как легко видеть, будет удовлетворять соотношениям

$$\Phi_{k,l}[S(x)] = \Phi_{k,l}[f(x)] \quad (10)$$

при всех k, l ($0 \leq k, 0 \leq l \leq n-1$). Это дает основание называть ряд (9) интерполяционным рядом функции

$f(x)$, порожденным интерполяционным процессом при функционалах $\Phi_{k,l}$. Функции $\varphi_{k,l}(x)$ мы будем называть фундаментальными полиномами данного интерполяционного процесса.

Нашей целью является доказательство того, что семейство функционалов

$$\Phi_{k,l}[y_x] = \nabla^k y_{x+l} \quad (11)$$

и семейство функций

$$\varphi_{k,l}(x) = a_{l+1} Z_{x-(k+1)n+1}^{(k)} + a_{l+2} Z_{x-(k+1)n+2}^{(k)} + \dots + a_n Z_{x-kn-l}^{(k)} \quad (12)$$

удовлетворяет условию (8). Отсюда будет следовать, что лапласовский ряд (3) является интерполяционным рядом вида (9) и удовлетворяет соотношениям (10) (при тех x , при которых он сходится). В пп. 3 и 4 мы будем считать $m = 0$, что не ограничивает общности.

3. Докажем сначала тождество

$$\nabla Z_x^{(k)} = Z_{x+n}^{(k-1)} \quad (k \geq 1).$$

Действительно,

$$Z_x^{(k)} = -\frac{1}{k!} \sum_{j=1}^n \frac{d^k}{d\theta^k} \left[\frac{(\theta - \alpha_j)^{k+1}}{\theta^{x+1} \{V(\theta)\}^{k+1}} \right]_{\theta=\alpha_j}.$$

Выражение справа есть сумма вычетов функции $[\theta^{x+1} \{V(\theta)\}^{k+1}]^{-1}$ в полюсах $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, каждый из которых имеет кратность $k+1$. Поэтому

$$Z_x^{(k)} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d\theta}{\theta^{x+1} \{V(\theta)\}^{k+1}}, \quad (13)$$

где C — контур, охватывающий точки $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и не содержащий нуля; для функции θ^{x+1} мы будем брать всегда ту ее ветвь, которая для действительных $\theta > 0$ дает действительные положительные значения. Отсюда находим:

$$\begin{aligned} \nabla Z_x^{(k)} &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{a_0 + \frac{a_1}{\theta} + \frac{a_2}{\theta^2} + \dots + \frac{a_n}{\theta^n}}{\theta^{x+1} \{V(\theta)\}^{k+1}} d\theta = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d\theta}{\theta^{x+n+1} \{V(\theta)\}^k} = Z_{x+n}^{(k-1)}, \end{aligned}$$

Из доказанного следует, что

$$\nabla \varphi_{k,l}(x) = \varphi_{k-1,l}(x) \quad (14)$$

при всех $k \geq 1$, $0 \leq l \leq n-1$.

Покажем далее, что $\varphi_{k,l}(i) = 0$ при $i = 0, 1, \dots, n-1$ ($1 \leq k$, $0 \leq l \leq n-1$).

Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{k,l}(i) &= a_{l+1} Z_{i-(k+1)n+1}^{(k)} + a_{l+2} Z_{i-(k+1)n+2}^{(k)} + \dots + a_n Z_{i-kn-l}^{(k)} = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{a_{l+1} \theta^{(k+1)n-i-2} + a_{l+2} \theta^{(k+1)n-i-3} + \dots + a_n \theta^{kn-i+l-1}}{\{V(\theta)\}^{k+1}} d\theta. \end{aligned}$$

Числитель дроби, стоящей под интегралом, при рассматриваемых значениях k, l, i ($1 \leq k$, $0 \leq l \leq n-1$, $0 \leq i \leq n-1$) есть многочлен от θ степени $\leq (k+1)n-2$. Сумма вычетов подынтегральной дроби в точках $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ равна взятому с обратным знаком вычету ее в точке $\theta = \infty$. Так как степень числителя дроби меньше степени знаменателя по крайней мере на две единицы, то ее вычет в точке $\theta = \infty$ равен нулю.

Из равенства $\varphi_{k,l}(i) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) и тождества

$$\nabla \varphi_{k,l}(x) = \varphi_{k-1,l}(x)$$

следует, что

$$\Phi_{k,l}[\varphi_{k',l'}] = \nabla^k \varphi_{k',l'}(l) = \varphi_{k'-k,l'}(l) = 0$$

при $k' < k$ ($0 \leq l \leq n-1$, $0 \leq l' \leq n-1$).

Теперь проверим, что

$$\Phi_{k,l}[\varphi_{k',l'}] = 0$$

и при $k' < k$. Имеем

$$\begin{aligned} \nabla Z_x^{(0)} &= -\sum_{j=1}^n \left[\frac{(a_0 \theta^n + a_1 \theta^{n-1} + \dots + a_n)(\theta - \alpha_j)}{\theta^{x+n+1} V(\theta)} \right]_{\theta=\alpha_j} = \\ &= -\sum_{j=1}^n \left[\frac{\theta - \alpha_j}{\theta^{x+n+1}} \right]_{\theta=\alpha_j} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_{0,l}(x) &= \nabla (a_{l+1} Z_{x-n+1}^{(0)} + a_{l+2} Z_{x-n+2}^{(0)} + \dots + a_n Z_{x-l}^{(0)}) \equiv 0, \\ \nabla^m \varphi_{0,l}(x) &= \nabla^{m-1} 0 = 0 \end{aligned}$$

при $m = 1, 2, 3 \dots$. Значит,

$$\Phi_{k, l} [\varphi_{k', l'}] = \nabla^k \varphi_{k', l'}(l) = \nabla^{k-k'} \varphi_{0, l'}(l) = 0 \quad (\text{при } k' < k).$$

4. Остается рассмотреть случай $k' = k$. Требуется доказать, что

$$\Phi_{k, l} [\varphi_{k, l'}] = \delta_{l, l'},$$

т. е. что

$$\varphi_{0, l'}(l) = \delta_{l, l'}.$$

Вычислим значение выражения

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(i) &= \varphi_{0, 1}(i) + \frac{1}{t} \varphi_{0, 2}(i) + \frac{1}{t^2} \varphi_{0, 3}(i) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{t^{n-1}} \varphi_{0, n}(i) \end{aligned}$$

при $i = 0, 1, \dots, n-1$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(i) &= a_1 Z_{i-n+1}^{(0)} + a_2 Z_{i-n+2}^{(0)} + a_3 Z_{i-n+3}^{(0)} + \dots + a_n Z_i^{(0)} + \\ &+ \frac{1}{t} [a_2 Z_{i-n+1}^{(0)} + a_3 Z_{i-n+2}^{(0)} + \dots + a_n Z_{i-1}^{(0)}] + \dots \\ &\dots + \frac{1}{t^{n-1}} [a_n Z_{i-n+1}^{(0)}] = \\ &= - \sum_{j=1}^n \left[\frac{(a_1 \theta^{-i+n-2} + a_2 \theta^{-i+n-3} + \dots + a_n \theta^{-i-1}) (\theta - \alpha_j)}{V(\theta)} \right]_{\theta=\alpha_j} - \\ &- \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n \left[\frac{(a_2 \theta^{-i+n-2} + a_3 \theta^{-i+n-3} + \dots + a_n \theta^{-i}) (\theta - \alpha_j)}{V(\theta)} \right]_{\theta=\alpha_j} - \dots \\ &\dots - \frac{1}{t^{n-1}} \sum_{j=1}^n \left[\frac{(a_n \theta^{-i+n-2}) (\theta - \alpha_j)}{V(\theta)} \right]_{\theta=\alpha_j} = \\ &= - \sum_{j=1}^n \left[\theta^{-i-1} \frac{\theta - \alpha_j}{V(\theta)} \left\{ (a_1 \theta^{n-1} + a_2 \theta^{n-2} + a_3 \theta^{n-3} + \dots \right. \right. \\ &\dots + a_n) + \frac{\theta}{t} (a_2 \theta^{n-2} + a_3 \theta^{n-3} + \dots + a_n) + \\ &\left. \left. + \frac{\theta^2}{t^2} (a_3 \theta^{n-3} + \dots + a_n) + \dots + \frac{\theta^{n-1}}{t^{n-1}} a_n \right\} \right]_{\theta=\alpha_j}. \end{aligned}$$

Выражение, записанное в фигурных скобках, умножим и разделим на $1 - \theta t^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(i) &= - \sum_{j=1}^n \left[\theta^{-i-1} \frac{\theta - a_j}{V(\theta)} \times \right. \\ &\times \frac{a_1 \theta^{n-1} \left(1 - \frac{\theta}{t}\right) + a_2 \theta^{n-2} \left(1 - \frac{\theta^2}{t^2}\right) + \dots + a_n \left(1 - \frac{\theta^n}{t^n}\right)}{1 - \theta/t} \Big]_{\theta=a_j} = \\ &= - \sum_{j=1}^n \left[\theta^{-i-1} \frac{\theta - a_j}{V(\theta)} \times \right. \\ &\times \frac{V(\theta) - \left(a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots + \frac{a_n}{t^n}\right) \theta^n}{1 - \theta/t} \Big]_{\theta=a_j} = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\theta^{n-i-1} \frac{\theta - a_j}{V(\theta)} \frac{a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots + \frac{a_n}{t^n}}{1 - \theta/t} \right]_{\theta=a_j} = \\ &= \frac{1}{t^{n-1}} \sum_{j=1}^n \left[\frac{V(t)}{t - \theta} \frac{\theta - a_j}{V(\theta)} \theta^{n-i-1} \right]_{\theta=a_j} = \frac{1}{t^{n-1}} \times \\ &\times \sum_{j=1}^n \frac{(t - a_1)(t - a_2) \dots (t - a_{j-1})(t - a_{j+1}) \dots (t - a_n)}{(a_j - a_1)(a_j - a_2) \dots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \dots (a_j - a_n)} \times \\ &\times a_j^{n-i-1}. \end{aligned}$$

Последнее выражение в силу интерполяционной формулы Лагранжа при $i = 0, 1, \dots, n - 1$ равно $1/t^i$. Итак,

$$\varphi_{0,1}(i) + \frac{1}{t} \varphi_{0,2}(i) + \frac{1}{t^2} \varphi_{0,3}(i) + \dots + \frac{1}{t^{n-1}} \varphi_{0,n}(i) = \frac{1}{t^i}$$

при $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Поскольку t произвольно, то из этого следует, что $\varphi_{0,l}(l) = \delta_{l,l}$.

5. Ввиду того что

$$\begin{aligned} \varphi_{k,l}(x) &= - \frac{1}{2\pi i} \times \\ &\times \int_C \frac{a_{l+1} \theta^{(k+1)n-1} + a_{l+2} \theta^{(k+1)n-2} + \dots + a_n \theta^{kn+l}}{\theta^{k+1} [V(\theta)]^{k+1}} d\theta = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{a_{l+1} + \frac{a_{l+2}}{\theta} + \frac{a_{l+3}}{\theta^2} + \dots + \frac{a_n}{\theta^{n-l-1}}}{\theta^{x+2} [z(\theta)]^{k+1}} d\theta,$$

где

$$V(\theta) = a_0 \theta^n + a_1 \theta^{n-1} + \dots + a_n, \quad z(\theta) = V(\theta)/\theta^n,$$

$$\Phi_{k,l}[\varphi_{k'}, l'(x)] = \nabla^k \varphi_{k'}, l'(l) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\left(a_0 + \frac{a_1}{\theta} + \frac{a_2}{\theta^2} + \dots + \frac{a_n}{\theta^n}\right)^k}{\theta^l} \times \\ \times \frac{a_{l'+1} + \frac{a_{l'+2}}{\theta} + \dots + \frac{a_n}{\theta^{n-l'-1}}}{\theta^2 [z(\theta)]^{k'+1}} d\theta,$$

то мы доказали, собственно говоря, что системы функций $\{\psi_{k,l}(\theta)\}$ и $\{u_{k,l}(\theta)\}$, определяемых по формулам

$$\psi_{k,l}(\theta) = \frac{[z(\theta)]^k}{\theta^l}, \quad u_{k,l}(\theta) = \\ = -\frac{a_{l+1} + \frac{a_{l+2}}{\theta} + \dots + \frac{a_n}{\theta^{n-l-1}}}{\theta^2 [z(\theta)]^{k+1}} (0 \leq k, 0 \leq l \leq n-1),$$

биортогональны, т. е. что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \psi_{k,l}(\theta) u_{k',l'}(\theta) d\theta = \delta_{k,k'} \delta_{l,l'} = \\ = \begin{cases} 1, & \text{если } k = k' \text{ и } l = l', \\ 0, & \text{если } k \neq k' \text{ или } l \neq l'. \end{cases}$$

Пусть вообще имеются две какие-либо биортогональные системы функций $\{\psi_{k,l}(t)\}$ и $\{u_{k,l}(t)\}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \psi_{k,l}(t) u_{k',l'}(t) dt = \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}. \quad (15)$$

Предположим, что имеет место разложение показательной функции t^{-x} в ряд вида

$$\frac{1}{t^x} = \sum_{k,l} \psi_{k,l}(t) \varphi_{k,l}(x). \quad (16)$$

Тогда функции $\varphi_{k', l'}(x)$ определяются по формуле

$$\varphi_{k', l'}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u_{k', l'}(t)}{t^x} dt \quad (17)$$

при всех рассматриваемых значениях k', l' . Чтобы в этом убедиться, достаточно умножить ряд (16) на $u_{k', l'}(t)$ и проинтегрировать его почленно (если это возможно).

Пусть $u(t)$ — производящая функция для $f(x)$, т. е.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u(t)}{t^{x+1}} dt. \quad (18)$$

Разложение (16) умножим на $u(t)/t$ и результат проинтегрируем почленно:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u(t)}{t^{x+1}} dt = \sum_{k, l} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi_{k, l}(t) u(t)}{t} dt \right] \varphi_{k, l}(x). \quad (19)$$

Обозначим

$$\Phi_{k, l}[f(x)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi_{k, l}(t) u(t)}{t} dt. \quad (20)$$

Тогда, принимая во внимание (18) и (17), имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{k, l}[\varphi_{k', l'}(x)] &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi_{k, l}(t) u_{k', l'}(t)}{t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \psi_{k, l}(t) u_{k', l'}(t) dt = \delta_{k, k'} \delta_{l, l'}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили семейство функционалов (20) и семейство функций (17), удовлетворяющих условию (8). Следовательно, ряд (19) является интерполяционным рядом вида (9) и удовлетворяет соотношениям (10). Функционалы (20) называют моментами функции $f(x)$.

Изложенная схема описывает в общем виде конструкцию лапласовских интерполяционных рядов (1), (3) и некоторых других. Отдельные ее элементы проступают и в действиях Лапласа. Сначала он получает для показательной функции t^{-x} разложение вида (16). Умножив его на $u(t)$, Лаплас переходит от производящих функций к «функциям, их определяющим». Но идея о биортогональ-

ности систем функций от него далека. Интегральных представлений функций и функционалов у него здесь нет. Они появляются позже: так, в «Аналитической теории вероятностей» Лаплас приводит формулу

$$y_x = \frac{1}{2\pi i} \int_C t^{-x-1} w(t) dt$$

и интегральные представления операторов

$$\Delta^k y_x = \int \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^k t^{-x} w(t) dt,$$

$$\nabla^k y_x = \int \left(a_0 + \frac{a_1}{t} + \dots + \frac{a_n}{t^n} \right)^k t^{-x} w(t) dt$$

(где $\nabla y_x = a_0 y_x + a_1 y_{x+1} + \dots + a_n y_{x+n}$) и

$$\frac{d^k y(x)}{dx^k} = \int \left(\ln \frac{1}{t} \right)^k t^{-x} w(t) dt$$

[5, с. 83—86]. Интерполяционные ряды Лаплас выводит без помощи интегралов, преобразуя с большим искусством непосредственно коэффициенты производящих функций. В явном виде интегральные представления при выводе интерполяционных рядов использовал Абель [3] (см. также [6, с. 253—255]).

6. После формулы (3) Лаплас в «Мемуаре о последовательностях» выводит еще два интерполяционных ряда вида (9). Разлагая функцию t^{-x} в ряд по степеням двух многочленов от

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}, \quad \frac{1}{t} - 1 \quad \text{и} \quad z(t) = a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots + \frac{a_n}{t^n} = \\ = a'_0 + a'_1 \left(\frac{1}{t} - 1 \right) + a'_2 \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^2 + \dots + a'_n \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^n, \end{aligned} \quad (21)$$

он получает

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^x} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^l [z(t)]^k [a'_{l+1} Z_{x-(k+1)n+1}^{(k)} + \\ + a'_{l+2} \Delta Z_{x-(k+1)n+1}^{(k)} + a'_{l+3} \Delta^2 Z_{x-(k+1)n+1}^{(k)} + \dots \\ \dots + a'_n \Delta^{n-l-1} Z_{x-(k+1)n+1}^{(k)}], \end{aligned} \quad (22)$$

где функции $Z_x^{(k)}$ определяются формулой (4). Умножая ряд

(22) на $u(t)$ и переходя от производящих функций к «функциям, их определяющим», Лаплас находит интерполяционную формулу

$$y_{m+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \Delta^l \nabla^k y_m [a'_{l+1} Z_{x-(k+1)n+1}^{(k)} + a'_{l+2} \Delta Z_{x-(k+1)n+1}^{(k)} + \\ + a'_{l+3} \Delta^2 Z_{x-(k+1)n+1}^{(k)} + \dots + a'_n \Delta^{n-l-1} Z_{x-(k+1)n+1}^{(k)}] \quad (23)$$

[2, с. 26], представляющую собой разложение произвольной степени оператора сдвига $E^x y_m = y_{m+x}$ по целым степеням операторов $\Delta y_m = y_{m+1} - y_m$ и $\nabla y_m = a_0 y_m + a_1 y_{m+1} + a_2 y_{m+2} + \dots + a_n y_{m+n} = a'_0 y_m + a'_1 \Delta y_m + a'_2 \Delta^2 y_m + \dots + a'_n \Delta^n y_m$.

Можно показать, подобно тому как это сделано нами для формулы (3), что ряд (23) является интерполяционным рядом вида (9) и порождается интерполяционным процессом при функционалах

$$\Phi_{k,l}[y_x] = \Delta^l \nabla^k y_m = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^l [z(t)]^k \frac{u(t)}{t^{m+1}} dt, \quad (24)$$

для которого функции

$$\varphi_{k,l}(x) = a'_{l+1} Z_{x-(k+1)n+1}^{(k)} + a'_{l+2} \Delta Z_{x-(k+1)n+1}^{(k)} + \dots \\ \dots + a'_n \Delta^{n-l-1} Z_{x-(k+1)n+1}^{(k)} = - \frac{1}{2\pi i} \times \\ \times \int_C \frac{a'_{l+1} + a'_{l+2} \left(\frac{1}{t} - 1 \right) + a'_{l+3} \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^2 + \dots + a'_n \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^{n-l-1}}{t^2 [z(t)]^{k+1}} dt \quad (25)$$

образуют базис фундаментальных полиномов ($0 \leq k$, $0 \leq l \leq n-1$). Сказанное в п. 5 относительно конструкции ряда (3) верно также и для ряда (23).

Устремляя к нулю интервал между соседними членами последовательности $\{y_m\}$, Лаплас выводит «инфинитезимальный» аналог формулы (23):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{d^l}{d\omega^l} D^k f(\omega) |_{\omega=0} \left(a''_{l+1} X_x^{(k)} + a''_{l+2} \frac{dX_x^{(k)}}{dx} + \right. \\ \left. + a''_{l+3} \frac{d^2 X_x^{(k)}}{dx^2} + \dots + a''_n \frac{d^{n-l-1} X_x^{(k)}}{dx^{n-l-1}} \right), \quad (26)$$

где

$$Df(\omega) = a_0'' + a_1'' \frac{df(\omega)}{d\omega} + a_2'' \frac{d^2f(\omega)}{d\omega^2} + \dots + a_n'' \frac{d^nf(\omega)}{d\omega^n},$$

$$X_x^{(k)} =$$

$$-\frac{1}{k!} \sum_{j=1}^n \frac{d^k}{d\theta^k} = \left[\frac{e^{-\theta x} (\theta - \beta_j)^{k+1}}{\{a_0'' - a_1''\theta + a_2''\theta^2 - \dots + a_n''(-\theta)^n\}^{k+1}} \right]_{\theta=\beta_j},$$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ — корни многочлена $a_0'' - a_1''\theta + a_2''\theta^2 - \dots - a_n''(-\theta)^n$ [2, с. 27—30]. Ряд (26) тоже является интерполяционным рядом вида (9). Он порождается интерполяционным процессом при функционалах

$$\Phi_{k,l}[f(x)] = \frac{d^l}{dx^l} D^k f(x) |_{x=0}, \quad (27)$$

для которого функции

$$\begin{aligned} \varphi_{k,l}(x) = & a_{l+1}'' X_x^{(k)} + a_{l+2}'' \frac{dX_x^{(k)}}{dx} + a_{l+3}'' \frac{d^2X_x^{(k)}}{dx^2} + \dots \\ & \dots + a_n'' \frac{d^{n-l-1}X_x^{(k)}}{dx^{n-l-1}} \end{aligned} \quad (28)$$

образуют базис фундаментальных полиномов ($0 \leq k, 0 \leq l \leq n-1$). Частным случаем ряда (26) является разложение экспоненты

$$\begin{aligned} e^{-tx} = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} (-t)^l [a_0'' - a_1''t + a_2''t^2 - \dots + a_n''(-t)^n]^k \times \\ & \times \left(a_{l+1}'' X_x^{(k)} + a_{l+2}'' \frac{dX_x^{(k)}}{dx} + a_{l+3}'' \frac{d^2X_x^{(k)}}{dx^2} + \dots \right. \\ & \left. \dots + a_n'' \frac{d^{n-l-1}X_x^{(k)}}{dx^{n-l-1}} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

(Лаплас его не приводит), играющее по отношению к интерполяционному ряду (26) ту же роль, какую играют разложения функции t^{-x} (5) и (22) по отношению к рядам (3) и (23).

Интерполяционные ряды (3), (23) и (26) Лаплас приводит и в «Аналитической теории вероятностей» [5, с. 24—34].

7. Ряд (26) можно было бы вывести так же, как и все предыдущие интерполяционные ряды, из соответствующего разложения экспоненты. Но в этом случае нужно для данной функции $f(x)$ строить не производящую функцию, а функцию $U(\tau)$, ассоциированную по Борелю с $f(x)$:

$$U(\tau) = \int_0^{\infty} f(x) e^{\tau x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C U(\tau) e^{-\tau x} d\tau.$$

Функция, ассоциированная по Борелю, получается из производящей функции, когда интервал между членами последовательности $\{y_m\}$ стремится к нулю. Действительно, пусть

$$f(x) = y_x = y(x).$$

Рассмотрим функцию $u_h(t)$, определяемую по формуле

$$u_h(t) = \sum_{m=0}^{\infty} f(mh) t^m h. \quad (30)$$

Очевидно, что при $h = 1$

$$u_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m t^m = u(t).$$

Положим

$$\tau = (t - 1) / h \quad \text{и} \quad x_m = mh \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

откуда $\Delta x = h \Delta m = h$. При $h \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} u_h(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} f(mh) t^m h = \sum_{m=0}^{\infty} f(x_m) (1 + \tau h)^{x_m/h} \Delta x \rightarrow \\ &\rightarrow \int_0^{\infty} f(x) e^{\tau x} dx = U(\tau). \end{aligned}$$

Одновременно из формулы

$$hf(mh) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_t} \frac{u_h(t)}{t^{m+1}} dt$$

вытекает

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} U(\tau) e^{-\tau x} d\tau.$$

В самом деле, возьмем любое фиксированное x , и пусть $\{h_k\}$ — произвольная последовательность, стремящаяся к нулю, $\{m_k\}$ — последовательность целых чисел, выбираемых так, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k h_k = x,$$

откуда $m_k + 1 = x/h_k + O(1)$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} f(m_k h_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} \frac{u_{h_k}(\tau) d(1 + \tau h_k)}{h_k(1 + \tau h_k)^{x/h_k + O(1)}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} U(\tau) e^{-\tau x} d\tau. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что имеются две биортогональные системы функций $\{\psi_{k,l}(\tau)\}$ и $\{u_{k,l}(\tau)\}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi_{k,l}(\tau) u_{k',l'}(\tau) d\tau = \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}.$$

Предположим, что имеется также разложение экспоненты в ряд вида

$$e^{-\tau x} = \sum_{k,l} \psi_{k,l}(\tau) \varphi_{k,l}(x). \quad (31)$$

Тогда функции $\varphi_{k,l}(x)$ определяются по формуле

$$\varphi_{k,l}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u_{k,l}(\tau) e^{-\tau x} d\tau. \quad (32)$$

Пусть $U(\tau)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $f(x)$, т. е.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C U(\tau) e^{-\tau x} d\tau.$$

Умножим разложение (31) на $U(\tau)$ и проинтегрируем по контуру C почленно:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C U(\tau) e^{-\tau x} d\tau = \\ &= \sum_{k,l} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \psi_{k,l}(\tau) U(\tau) d\tau \right] \varphi_{k,l}(x). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Phi_{k,l}[f(x)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \psi_{k,l}(\tau) U(\tau) d\tau. \quad (33)$$

Функционалы (33) называют моментами функции $f(x)$. Принимая во внимание (32), имеем:

$$\Phi_{k,l}[\varphi_{k',l'}(x)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \psi_{k,l}(\tau) u_{k',l'}(\tau) d\tau = \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}.$$

Мы построили, таким образом, интерполяционный процесс при функционалах (33), для которого функции (32) образуют базис фундаментальных полиномов. Ряд

$$f(x) = \sum_{k,l} \Phi_{k,l}[f] \varphi_{k,l}(x), \quad (34)$$

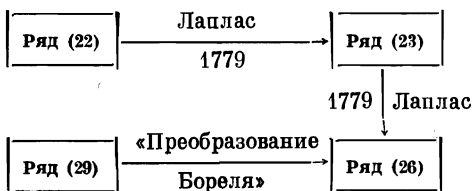
где функционалы $\Phi_{k,l}[f]$ определяются по формуле (33), является интерполяционным рядом вида (9), удовлетворяющим соотношениям (10).

Примером интерполяционного ряда такого типа будет ряд (26), если мы возьмем

$$\psi_{k,l}(\tau) = +(-\tau)^l [a_0'' - a_1''\tau + a_2''\tau^2 - \dots + a_n''(-\tau)^n]^k,$$

$$u_{k,l}(\tau) = - \frac{a_{l+1}'' - a_{l+2}''\tau + a_{l+3}''\tau^2 - \dots + a_n''(-\tau)^{n-l-1}}{[a_0'' - a_1''\tau + a_2''\tau^2 - \dots + a_n''(-\tau)^n]^{k+1}}$$

($0 \leq k, 0 \leq l \leq n-1$). Лаплас выводит ряд (26) не по этой схеме, а (как уже говорилось) предельным переходом « $h \rightarrow 0$ » непосредственно из ряда (23). Это можно представить следующей диаграммой, дополняющей диаграмму на с. 79 работы [1]¹:



¹

В диаграмме на с. 79 работы [1] допущена опечатка: все вертикальные стрелки в ней следует понимать в противоположном направлении.

Лапласу известно, что при $h \rightarrow 0$ функция t^{-x} превращается в e^{-tx} , но как при этом преобразуется разложение (22), он непосредственно не рассматривает.

Лаплас описывает в общем виде метод разложения произвольного линейного оператора Γ по степеням другого линейного оператора ∇ . Если $u(t)$ — производящая функция для y_x , $u(t) v(t)$ — производящая функция для Γy_x , $u(t) z(t)$ — производящая функция для ∇y_x , то задача сводится к тому, говорит он, чтобы разложить $v(t)$ в ряд по степеням $z(t)$. Умножая этот ряд на $u(t)$ и переходя от производящих функций к «функциям, их определяющим», мы получим разложение Γy_x по функциям $\nabla^k y_x$ [2, с. 40—42]. Интерполяционные ряды получаются у Лапласа тогда, когда Γ — степень оператора сдвига $\Gamma = E^\lambda$, т. е. $\Gamma y_x = y_{x+\lambda}$. По примеру Лапласа выводом разложений в ряды линейных операторов занимались многие математики первой четверти XIX в. (Б. Бриссон, Дж. Гершель, Ф. Ф. Швайнс, Н. Х. Абель и др.).

Общие соображения о конструкции интерполяционных рядов при помощи биортогональных систем функций мы изложили здесь и в п. 5 чисто формально, стремясь только наметить общий ход мысли. Можно было бы аккуратно перечислить все условия, при которых сходятся упоминаемые здесь ряды и интегралы и обоснованы производившиеся над ними операции (что заняло бы немало места). Но в данной работе мы не ставили задачу выяснить условия сходимости интерполяционных рядов Лапласа, а пытались только понять структуру последних. Приведенная нами схема в целом, а также в отдельных ее частях играет чрезвычайно существенную роль в нынешней теории интерполяции (ср., например, [7, с. 217—227; 8, с. 24—25; 4, с. 158—178]). В нее укладываются, по-видимому, все интерполяционные ряды, рассматриваемые Лапласом в [2, 5], и кое-где в своих рассуждениях Лаплас прямо эту схему предвосхищает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Головинский И. А. Из истории интерполяционных рядов. — В кн.: Ист.-мат. исследования, 1977, вып. XXII, с. 65—81.
2. Laplace P. S. Mémoire sur les suites. — Mém. Acad. Paris (1779), 1782. Oeuvres, t. 10, p. 1—89.

3. *Abel N. H.* Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes. Oeuvres. 2^e éd. Christiania, 1881, т. 2, р. 67—81.
4. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971.
5. *Laplace P. S.* Théorie analytique des probabilités. 3^e éd. Paris, 1820. Oeuvres, t. 7, Paris, 1866.
6. *Петрова С. С.* Ранняя история преобразования Лапласа.— В кн.: Ист.-мат. исследования. М.: Наука, 1975, вып. XX, с. 245—256.
7. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. 3-е изд. М.: Наука, 1967.
8. *Евграфов М. А.* Интерполяционная задача Абеля—Гончарова. М.: Гостехиздат, 1954.

ОБ ИСТОКАХ СИМВОЛИЧЕСКИХ И КОМБИНАТОРНЫХ МЕТОДОВ В КОНЦЕ XVIII — НАЧАЛЕ XIX В.

Е. П. Ожигова

В историко-математических исследованиях до последнего времени символическое исчисление и комбинаторный анализ рассматриваются как совершенно независимые друг от друга области математики. Кроме того, сложилось представление, что создание символического исчисления было связано лишь с чисто теоретическими вопросами. При этом название «комбинаторный анализ» употребляется в современном понимании, которое не совпадает с пониманием комбинаторного анализа в конце XVIII — начале XIX в.

При более детальном изучении истории этих областей математики выяснилось: 1) что они были созданы (или, вернее, усиленно разрабатывались) для решения примерно одинаковых задач, 2) что задачи эти были вызваны нуждами астрономии и баллистики, 3) что общим источником усиленного развития обеих областей явились работы Лагранжа, в первую очередь его статьи [1—3]. О том, что символическое исчисление и комбинаторная теория использовались для решения одних и тех же вопросов, писали неоднократно сами их создатели: Гинденбург, Арбогаст, Бринкли и другие.

Прежде чем перейти к основному предмету этой статьи, замечу, что в конце XVIII — начале XIX в. под символическим исчислением и комбинаторным анализом понимали следующее. Различали комбинаторное учение или комбинаторику (*Combinationslehre*) и комбинаторный анализ (*Combinatorische Analysis*). Под первым понимали и теорию соединений: перестановок, размещений, сочетаний, с повторениями и без повторений, с заданными суммами и без них и пр. Комбинаторным же анализом называли приложения комбинаторного учения к дифференциальному и интегральному исчислениям, а позднее и к другим разделам математики. Понятие комбинаторного анализа постепенно изменялось, и уже в 30-е годы XIX в.

в комбинаторный анализ включалась и сама теория соединений. Так, В. Я. Буняковский писал: «Комбинаторный анализ — это особая отрасль математики, которая занимается 1) исследованием различных образов изменения порядка и мест вещей, подлежащих или не подлежащих определенной зависимости, 2) разысканием законов, по которым эти изменения или перемещения могут быть изменены и вычислены, наконец, 3) приложением выводимых таким образом следствий к другим областям математики» [4, с. 204].

Символическое исчисление — то, что в классификации Г. Девиса [5] называется «формальной теорией операторов», в конце XVIII — начале XIX в. только складывалось и приобрело систематический вид лишь в книге Арбогаста [6]. Здесь рассматривалось отделение символов операций от функций, над которыми эти операции совершались, с символами производились действия как с обычными алгебраическими величинами, а затем результат этих действий снова применялся к первоначальным функциям.

Важную роль в создании математических методов вообще и указанных областей математики в частности сыграли астрономия и баллистика. Именно запросами этих дисциплин были вызваны к жизни поиски более совершенных вычислительных приемов и методов, позволявших ускорить и упростить трудоемкие огромные расчеты. Необходимость составления таблиц различных функций ставила задачи совершенствования интерполяционных формул, теории конечных разностей, теории рядов.

Если состояние астрономической аппаратуры и средств стрельбы зависело от общего уровня развития промышленности, то обработка результатов наблюдений и их методика, установление законов на основе наблюдений и экспериментов были делом теории, главным орудием которой были математические методы. Большинство лиц, работавших в указанных разделах математики, занимались в основном астрономией и баллистикой. Так, Дж. Бринкли, Дж. Гершель, К. Крамп, Г. С. Ключель, И. К. Эшенбах были астрономами; братья Франсе, Л. Арбогаст, Ф. Сервуа, А. де Лорньа и др. преподавали в военных школах и работали в области баллистики. И. Ф. Пфафф совершенствовался в практической астрономии под руководством берлинского астронома Э. Боде,

и первая научная работа Пфаффа была посвящена астрономическому вопросу.

Отметим, что эти, казалось бы, малозначительные разделы математики (символическое исчисление и комбинаторный анализ) привели, с одной стороны, к выработке удобных вычислительных приемов, к совершенствованию теории конечных разностей, теории интерполяции, теории рядов, а с другой стороны, способствовали созданию формальной алгебры, формальной логики, теории кватернионов, операционного исчисления. Интерес к этим разделам возрос в наши дни в связи с развитием вычислительной машинной математики.

1. Лагранж

Если ограничиться концом XVIII — началом XIX в., не проследивая более далекие по времени истоки, то символическое исчисление и комбинаторный анализ берут свое начало от трудов Ж. Л. Лагранжа. Находившийся в 1766—1787 гг. в Берлине Лагранж уделял большое внимание разработке математических методов решения различных задач астрономии. Практическая астрономия достигла в это время наибольшего развития в Англии и Германии, где изготовлялись наиболее совершенные приборы и работали лучшие наблюдатели. В то же время задачи мореплавания требовали постоянного совершенствования астрономических справочников и таблиц различных функций.

Свидетельством интереса Лагранжа к проблемам практической астрономии служит ряд его мемуаров конца 60-х — начала 70-х годов XVIII в. о задаче Кеплера, о притяжении эллиптических сфероидов и др. В статье [1] он предложил способ решения алгебраических и трансцендентных уравнений, основанный на формуле, носящей его имя. Ввиду того что в трудах ученых, разрабатывавших тогда комбинаторный анализ и символическое исчисление, эта формула Лагранжа была одним из центральных вопросов, мы коротко на ней остановимся.

Пусть имеется уравнение

$$\alpha - x + \varphi(x) = 0, \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ некоторая функция от x . Лагранж сперва вывел

формулу для n -й степени одного из корней p уравнения (1)

$$p^n = x^n + nx^{n-1}\varphi(x) + \frac{1}{2} \frac{dx^{n-1}[\varphi(x)]^2}{dx} + \\ + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^2 x^{n-1}[\varphi(x)]^3}{dx^2} + \dots,$$

где после дифференцирований надо подставить вместо x значение α . Затем он вывел аналогичную формулу для произвольной функции $\psi(x)$ от этого корня («теорема Лагранжа»)

$$\psi(p) = \psi(x) + \varphi(x)\psi'(x) + \frac{1}{2} \frac{d[\varphi(x)]^2\psi'(x)}{dx} + \\ + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2[\varphi(x)]^3\psi'(x)}{dx^2} + \dots, \quad (2)$$

где также надо после выполнения дифференцирований подставить α вместо x [1, с. 25]¹.

В [2] Лагранж применил способ приближенного решения уравнений из [1] к решению уравнения Кеплера

$$t = x + n \sin x, \quad (3)$$

где x — есть эксцентрическая аномалия планеты, а t — ее средняя аномалия. В частном случае, когда $\psi(x) = x$ и $\varphi(x) = -n \sin x$, получается ряд для x :

$$x = t - n \sin t + \frac{n^2}{2} \frac{d \sin^2 t}{dt} - \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2 \sin^3 t}{dt^2} + \dots,$$

который Лагранж затем преобразует к более удобному виду. Отсюда (или непосредственно по той же теореме Лагранжа) можно было потом найти радиус-вектор r и истинную аномалию u .

Одним из главных пунктов почти всех больших работ по комбинаторному анализу и символическому исчислению были доказательства и обобщения формулы Лагранжа. Краткое изложение статьи [1] было приведено на не-

¹ Современную формулировку теоремы Лагранжа см., например, в [7, с. 237]. Там говорится также: «Формула Лагранжа и ее обобщения играют весьма важную роль в небесной механике. Действительно, поскольку уравнение Кеплера можно рассматривать как частный случай уравнения Лагранжа, то они позволяют достаточно просто построить ряды по степеням эксцентриситета e для эксцентрической аномалии E и различных функций E » [7, с. 237].

мецком языке в «Сборнике для астрономов», издававшемся с 1771 г. коллегой Лагранжа по Берлинской академии наук Иоганном III Бернулли [8, с. 234—237].

Это лишь один из многих примеров того, что ряды играли в астрономии важную роль. При этом особенно ценным считалось умение определять общий член ряда независимо от предшествующих членов, а n -ю конечную разность — независимо от разностей с меньшими номерами. Такую задачу поставил перед собой Лагранж в статье «Об одном новом виде исчисления, относящегося к дифференцированию и интегрированию переменных величин» [3]. Вначале Лагранж приводит замечания Лейбница об аналогии между дифференциалами n -го порядка от произведения двух или большего числа переменных и степенью бинома или полинома стольких же переменных. Лейбниц указал, что подобная аналогия наблюдается также и между интегралами и отрицательными степенями биномов или полиномов. Эта аналогия и привлекла внимание Лагранжа. Принцип ее оставался неясным, но применение давало полезные результаты.

Отправляясь от упомянутой аналогии, Лагранж вывел символические формулы для конечных разностей n -го и $-n$ -го порядков и показал их различные приложения, в частности к составлению формул интерполяции. Символические формулы Лагранжа

$$\Delta^n u = (e^{\frac{du}{dx} h} - 1)^n, \quad (4)$$

где $\Delta^n u$ — конечная разность n -го порядка функции u , и

$$\Delta^{-n} u = \Sigma^n u = (e^{\frac{du}{dx} h} - 1)^{-n}, \quad (5)$$

где $\Delta^{-n} u$ — конечная разность порядка $-n$ функции u , а h — конечное приращение аргумента x , позволили находить конечные разности любого целого порядка без предварительного вычисления разностей меньших порядков. Он дал аналогичные формулы и для случая функций нескольких переменных. Подобные же формулы для дифференциала n -го порядка можно было получить на основании замечаний Лейбница.

В статье [3] Лагранж делает следующее замечание: «Дифференциальное исчисление, рассматриваемое во всей его общности, состоит в том, чтобы находить непосредствен-

но и процессами легкими и простыми функции $p, p', p'', \dots, q, q', q'', \dots$ произведенные (dérivées) из функции u ; а Интегральное исчисление состоит в нахождении функции u с помощью этих последних функций. Такое понятие Дифференциального и Интегрального исчисления представляется мне более простым и ясным, чем дававшееся до сих пор. Оно, как видите, не зависит от какой бы то ни было метафизики и какой-либо теории бесконечно малых или исчезающих величин» [3, с. 443].

Такова была основная мысль Лагранжа, развитая им впоследствии в его «Теории аналитических функций» (1797). В этой же статье он подробно изучает случай функции одной переменной $u = u(x)$, выясняя, как зависят друг от друга ее производные. Заменяя x на $x + \xi$, затем на $x + \xi + \eta$, $x + \xi + \eta + \zeta$ и т. д., он устанавливает, что функции $u', u'', u''', \dots$ выводятся одна из другой по одному и тому же закону, так что их легко находить повторением одной и той же операции [3, с. 445]. С помощью того же приема получает ряд Тейлора

$$u(x + \xi) = u(x) + u'(x)\xi + \frac{u''(x)}{1.2}\xi^2 + \frac{u'''(x)}{1.2.3}\xi^3 + \dots$$

и затем обобщает полученные рассуждения на функции двух и более переменных. При вычислении смешанной производной

$$u^{(\mu), (\nu)}(x, y) = \frac{d^{\mu+\nu} u(x, y)}{dx^{\mu} dy^{\nu}}$$

он приходит к необходимости определять число перестановок двух различных элементов, повторяемых первый μ , а второй ν раз:

$$\frac{1.2.3 \dots (\mu + \nu)}{1.2.3 \dots \mu . 1.2.3 \dots \nu}$$

[3, с. 448]. Вопрос усложняется, когда u -функция многих переменных и смешанная производная равна

$$u^{(\mu), (\nu), (\omega), \dots}(x, y, z, \dots) = \frac{d^{\mu+\nu+\omega+\dots} u(x, y, z, \dots)}{dx^{\mu} dy^{\nu} dz^{\omega} \dots}.$$

Эта функция получается столькими различными способами, сколько существует перестановок различных данных элементов, первый из которых повторяется μ ,

второй ν , третий ω раз и т. д. Это будет

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu + \nu + \omega + \dots)}{1 \cdot 2 \dots \mu \cdot 1 \cdot 2 \dots \nu \cdot 1 \cdot 2 \dots \omega \dots}.$$

Лагранж замечает дальше, что таким же образом вычисляется коэффициент при члене $x^\mu y^\nu z^\omega \dots$ в разложении степени полинома $(x + y + z + \dots)^{\mu + \nu + \omega + \dots}$, и, используя эту аналогию, приходит в конечном счете к своим символическим формулам для функции u от нескольких переменных. Мы видим, что в этой работе встречаются также и элементы комбинаторики.

Статьи Лагранжа [1—3] вызвали огромное число исследований. Это были в основном: 1) попытки осуществления и усовершенствования идеи Лагранжа о замене процессов дифференцирования и интегрирования другими, в которых арифметически и алгебраически единообразно выводились бы коэффициенты разложений функций в ряды (см. [9, с. 283—284]); 2) доказательства формулы Лагранжа, ее обобщения, решение задачи обращения рядов и обращения функций; 3) доказательства символических формул, найденных Лагранжем, вывод других символических формул, различные их обобщения и приложения.

Исследования, целью которых было создание удобных способов для практического применения рядов и конечных разностей, приняли различную форму у разных авторов. В Германии это было комбинаторное учение Гинденбурга, примененное к математическому анализу и к теории конечных разностей. В Англии — способ отыскания флюксий «per saltum» Бринкли, а позднее символическое исчисление, разрабатывавшееся Дж. Гершелем и его друзьями, в Эльзасе — «отделение ступеней операций» в дери-вационном исчислении Л. Арбогаста. Были и другие попытки создания новых исчислений, на которых здесь мы не будем останавливаться.

Работа Лагранжа [3] тем более привлекла внимание ученых, что автор писал: «Это специальный вид исчисления, который, как мне кажется, заслуживает развития и мог бы дать место многим полезным и важным открытиям в анализе» [3, с. 439].

2. Лаплас

Символические формулы Лагранжа для $\Delta^n u$ и $\Sigma^n u$ вскоре доказал П. Лаплас в статье «О функциях», представленной в 1773 г., а напечатанной в 1776 г. в качестве составной части его работы, относящейся к астрономии [10]. Обозначив $u = u(x)$ и давая аргументу x приращение α , Лаплас получает $u_1 = u(x + \alpha) = u + s$. Затем он дифференцирует u_1 по α и находит $^2 \partial u_1 / \partial \alpha = \partial s / \partial \alpha$, откуда

$$s = \int \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} d\alpha, \quad u_1 = u + \int \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} d\alpha.$$

Подобным же образом

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \int \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} d\alpha \quad \text{и т. д.},$$

откуда

$$\Delta u = \alpha \frac{\partial u}{\partial \alpha} + h_1 \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + h_2 \alpha^3 \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3} + \dots,$$

а n -я конечная разность

$$\Delta^n u = \alpha^n \frac{\partial^n u}{\partial \alpha^n} + q_1 \alpha^{n+1} \frac{\partial^{n+1} u}{\partial \alpha^{n+1}} + q_2 \alpha^{n+2} \frac{\partial^{n+2} u}{\partial \alpha^{n+2}} + \dots \quad (6)$$

Аналогичными приемами Лаплас находит, что

$$\Delta^{-1} u = \Sigma u = \frac{1}{\alpha} \int u dx + m_1 u + \alpha m_2 \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \alpha^2 m_3 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \dots, \quad (7)$$

а

$$\begin{aligned} \Delta^{-n} u = \Sigma^n u = \alpha^{-n} \int u dx^n + r_1 \alpha^{-n+1} \times \\ \times \int^{n-1} u dx^{n-1} + r_2 \alpha^{-n+2} \int^{n-2} u dx^{n-2} + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

и при этом замечает, что коэффициенты $q_1, q_2, q_3, \dots$ и $r_1, r_2, r_3, \dots$ не зависят от приращения α и являются постоянными.

Затем Лаплас полагает $u = e^x$. Подстановка $u = e^x$ в выражения конечных разностей $\Delta u, \Delta^2 u, \Delta^3 u, \dots, \Delta^n u$ и в $\Sigma u, \Sigma^2 u, \dots, \Sigma^n u$ дает

$$\begin{aligned} \Delta u = e^x (e^\alpha - 1), \quad \Delta^2 u = e^x (e^\alpha - 1)^2, \dots, \Delta^n u = \\ = e^x (e^\alpha - 1)^n \end{aligned}$$

² Обозначения Лапласа.

и соответственно

$$\Sigma u = e^x (e^\alpha - 1)^{-1}; \quad \Sigma^2 u = e^x (e^\alpha - 1)^{-2}, \dots, \Sigma^n u = e^x (e^\alpha - 1)^{-n}.$$

Сравнивая различные представления $\Delta^n u$, он находит, что

$$\Delta^n u = \alpha^n e^x + \alpha^{n+1} q_1 e^x + \alpha^{n+2} q_2 e^x + \dots = e^x (e^\alpha - 1)^n,$$

а сравнивая разные представления для $\Sigma^n u$, что

$$\Sigma^n u = \alpha^{-n} e^x + r_1 e^x \alpha^{-n+1} + r_2 e^x \alpha^{-n+2} + \dots = e^x (e^\alpha - 1)^{-n}.$$

Коэффициенты $q_1, q_2, q_3, \dots$ определяются из разложения в степенной ряд $(e^\alpha - 1)^n$, а коэффициенты $r_1, r_2, r_3, \dots$ — из разложения $(e^\alpha - 1)^{-n}$ по степеням α . На этом основании Лаплас записывает символические формулы

$$\Delta^n u = (e^{\alpha \frac{\partial u}{\partial x}} - 1)^n, \quad \Sigma^n u = (e^{\alpha \frac{\partial u}{\partial x}} - 1)^{-n} \quad (9)$$

и замечает, что при разложении правых частей в ряды надо сначала писать разложения по степеням $(\partial u / \partial x)^k$, $(\partial u / \partial x)^{-k}$, а потом заменить выражения $(\partial u / \partial x)^k$, $(\partial u / \partial x)^{-k}$ выражениями

$$\partial^k u / \partial x^k, \quad \partial^{-k} u / \partial x^{-k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Для разложений $\Delta^n u$, Σu он находит коэффициенты. Потом Лаплас переходит к другим вопросам и общий вид коэффициентов для ряда, соответствующего $\Sigma^n u$, так и не указывает.

В статье [11], представленной академии в 1779 г., Лаплас вновь вывел формулы (6), (8) и (9). Здесь для получения формул (6) и (8) используется ряд Тейлора и, кроме того, вводятся более удобные обозначения $\partial^{-m} \xi / \partial t^m$

вместо $\int_m^m \xi dt^m$ ($m = 1, 2, 3, \dots$). В этой работе имеется также обобщение формулы Лагранжа на функцию двух аргументов $u = u(z_1, z_2)$, где z_1, z_2 — корни уравнений $z_1 = x + a\phi(z_1, z_2)$, $z_2 = y + b\psi(z_1, z_2)$. Полученный «ряд Лапласа» был значительно сложнее соответствующего ряда Лагранжа. В 1869 г. Г. Дарбу [12] упростил эту формулу и исследовал сходимость ряда Лапласа.

Лаплас упоминает символическую формулу (9) и в «Мемуаре о рядах» [13], представленном также в 1779 г., но опубликованном в 1782 г., в связи с исчислением производящих функций. Эта же и несколько других символических формул встречаются в «Аналитической теории вероятностей» («*Théorie analytique des probabilités*», 1812) и в других сочинениях Лапласа. Наконец, формула Лагранжа и ее обобщения использовались Лапласом в его пятитомной «Небесной механике» (*Mécanique céleste*, 1799—1825).

3. Комбинаторная школа Гинденбурга

В Германии указанные труды Лагранжа вызвали появление целой школы комбинаторного анализа, основателем которой явился К. Ф. Гинденбург (1741—1808), с 1771 г. доцент, а с 1781 г. профессор Лейпцигского университета. Гинденбург поставил задачу: собрать воедино все наличные результаты по теории соединений, систематизировать их в едином комбинаторном учении и применить последнее к наиболее важным вопросам математического анализа.

В соответствии с идеями Лагранжа Гинденбург подчеркивал элементарный характер комбинаторного исчисления; это позволяло надеяться заменить процессы дифференциального и интегрального исчисления другими, не использующими основных понятий исчисления бесконечно малых. Гинденбург стремился создать для нового исчисления удобную символику, используя имевшиеся в Германии типографские шрифты, в первую очередь готический, упростить вычисление общего члена рядов и конечной разности любого порядка, а вместе с тем сделать возможно более удобным их применение в вычислительных вопросах.

В качестве приложения комбинаторных приемов Гинденбург и его последователи рассматривали различные операции с рядами, доказывали формулу Лагранжа, решали дифференциальные уравнения и пр. Многие приложения были связаны с астрономией. Как писал Гинденбург: «Тому, кто знаком с формулами и вычислениями, к которым приводят задача Кеплера, задача трех тел и вообще возмущения, не покажутся ни слишком запутанными, ни излишними эти и подобные исследования, кото-

рые можно распространить и на тригонометрические функции» [14, с. 228].

В своей рецензии на работу некоего капитана Роде (*Rohde. Über das ballistische problem und Aenderung Elemente der Planeten- und Kometenbahnen in einem widerstehenden Mittel. Potsdam, 1767*), в которой были рассмотрены некоторые вопросы баллистики и астрономии, Гинденбург сравнил комбинаторную формулу обращения рядов с принадлежавшей Лагранжу [15]. В качестве примера Гинденбург вычислил пятый член ряда для x , если $y = x^2 - \beta x^3 - \gamma x^4 - \dots$, с помощью различных формул обращения; выбор этого примера был определен баллистической задачей, которую решал Роде. Для ускорения вычислений здесь и в других случаях Гинденбург советовал пользоваться комбинаторными таблицами. Деятельность Гинденбурга и его школы изучал Д. Кутлумуратов [16, 17]. Однако у Д. Кутлумуратова и других авторов, писавших об истории комбинаторной школы и комбинаторного анализа, не говорится о том, какую роль сыграли при этом работы Лагранжа, о которых говорится в первом параграфе нашей статьи.

Гинденбург сам и в содружестве с другими учеными издавал сборники и журналы. Так, вместе с Иоганном III Бернулли в 1786—1789 гг. он издавал «Лейпцигский магазин чистой и прикладной математики», а в 1795—1800 гг. — «Архив чистой и прикладной математики». Эти и другие издания, где публиковались труды по комбинаторному анализу наряду с работами прикладного характера, в основном астрономическими (например, [18]), сделали комбинаторный анализ очень популярным в Германии.

Под влиянием Гинденбурга занимался некоторыми вопросами комбинаторного анализа и один из наиболее видных немецких математиков конца XVIII — начала XIX в. И. Ф. Пфафф (1765—1825), имя которого особенно известно в связи с «задачей Пфаффа в теории дифференциальных уравнений». В книге Пфаффа «Аналитические исследования, относящиеся в основном к интегральному исчислению и теории рядов» [19] наряду с разделами, посвященными тригонометрическим рядам и интегрированию дифференциальных уравнений и примыкавшими к исследованиям Эйлера, имеется раздел «Трактат об обращении рядов или о решении уравнений с помощью рядов» [19,

с. 225—350]. Первая глава этого раздела называется «О теореме Лагранжа, выражающей решение (уравнения) $y = x - z\varphi(x)$ в виде бесконечного ряда». Пфафф предлагает здесь свое решение задачи Лагранжа, далее упоминает о немецком переводе работы Лагранжа [1] и ее кратком изложении в «Сборнике для астрономов» [8] и затем делает критические замечания о различных доказательствах этой теоремы, предложенных Г. А. Тепфером, Г. А. Роте, И. Г. Ламбертом, Ж. А. Кондорсе, П. Лапласом, А. Лекселем и др. Во второй главе раздела Пфафф подробно излагает основы комбинаторного учения и дает его исторический очерк. В соответствии с заглавием этой главы («О полиномиальной теореме, трактуемой комбинаторно, и о ее приложении к обращению рядов») Пфафф решает задачу: дан ряд $z = ax^0 + bx^{p+\delta} + cx^{p+2\delta} + \dots$. Найти член степени x^σ с помощью обращенного ряда, расположенного по степеням z , причем выражение коэффициента этого члена не должно зависеть от коэффициентов предшествующих членов.

В третьей главе рассмотрена общая задача обращения рядов и решения уравнений с помощью рядов. Пфафф обобщает задачу Лагранжа на случай двух независимых переменных: дано уравнение $y = x - z\varphi(x, y)$. Требуется выразить $\varphi(x, y)$ в виде ряда по степеням z , если $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ суть некоторые функции от x, y .

Изложение решения задачи обращения рядов в духе школы Гинденбурга имеется в «Учебнике комбинаторики» Э. Нетто [20].

В конце XVIII в. две статьи по комбинаторному анализу прислал в Парижскую академию наук профессор Бурман из Мангейма. Доклад об этих работах сделали Лагранж и Лежандр [21], отметившие ряд новых результатов в этих статьях. Среди рассмотренных Бурманом задач была и задача о разложении функции $X(x)$ по степеням другой произвольной функции от x : $\xi(x)$. Он нашел формулу общего члена разложения, которую рецензенты сочли подобной формуле Лагранжа. Затем тот же Бурман вместе с Гинденбургом опубликовал несколько статей, в которых стремился заменить обозначения комбинаторного учения другими, более понятными математикам других стран.

Первые итоги трудов комбинаторной школы были подведены почти одновременно в обзорной работе К. Д. М. Шта-

ля [22], руководстве И. Х. Вейнгертнера [23] и широко известном в свое время «Математическом словаре» Г. С. Ключеля [24], где последний довольно подробно изложил основные принципы и приемы комбинаторного учения и комбинаторного анализа, отметив, что главными для последней области математики были операции с рядами и задача обращения рядов. Исследования в этой области продолжены были и в других странах Европы.

4. Труды английских ученых

Английский астроном Дж. Бринкли (1763—1835) в статье «Метод выражения, когда возможно, значения одной переменной величины через целые степени другой и постоянные величины...» [25] высказал мнение, что самой общей и важной задачей анализа является такая: из данной зависимости между переменными величинами выразить одну из них в виде степенного ряда по степеням другой переменной величины. Он указал также, что случаев, когда это осуществимо, сравнительно мало. Среди таких частных случаев — решение уравнений с помощью рядов. Когда эти ряды сходятся, они дают требуемое решение. Бринкли предложил свой метод для нахождения общего члена ряда, основанный на теореме Тейлора, которую он вывел здесь по своему. Главным в предложенном им методе он считал умение находить флюксии любого порядка «per saltum», т. е. сразу, не пользуясь знанием флюксий меньших порядков; как видно, Бринкли пользовался еще терминологией Ньютона, в которой слово «флюксия» равносильно нашему «производная», введенному в обиход Лагранжем. Он находит n -ю флюксию от x^m , когда m — любое целое или дробное положительное или отрицательное число, и в качестве одного из примеров записывает, не прибегая к вычислению предыдущих флюксий, шестую флюксию от x^m . В статье [25] Бринкли применяет свой способ нахождения флюксии любого порядка к различным задачам. Среди них такие: из уравнения $x^3 + qx + r = 0$ найти разложение x в виде ряда по степеням r ; найти разложение в степенной ряд полинома $a + bz + cz^2 + dz^3 + \dots$, возведенного в степень m , где m — целое или дробное число, любого знака.

Заметим, что, хотя в статье [25] Бринкли решает задачи, характерные для работ по комбинаторному анализу

и по символическому исчислению, он не пользуется здесь их символикой и приемами, а делает все в обозначениях метода флюксий.

В связи с мемуаром Лагранжа [3] и статьями Лапласа [10, 11] Бринкли написал статью [26], в которой уже стал частично употреблять символические обозначения Σ^n , Δ^n и др., комбинируя их с символикой метода флюксий; в этой статье упоминается и труд Арбогаста [6]. Он обратил внимание на то обстоятельство, что Лаплас не указал выражения общего члена для $\Sigma^n u$. В книге Лакруа Бринкли [25] также не нашел указаний на то, чтобы кто-либо другой сделал это после Лапласа. Поэтому английский астроном решил дать подробное выражение общего члена для ряда $\Sigma^n u$ при любом k . К этому времени Бринкли уже ознакомился с работой Арбогаста [6], где символические формулы Лагранжа были записаны в более удобной форме (см. § 5). Вывод формулы для общего члена разложения $\Delta^n u$ у Бринкли в общих чертах таков.

Пусть функция $u = u(x)$, обозначим последовательные приращения аргумента $h, 2h, 3h, \dots, nh$, а соответствующие значения функции $u: u_1 = u(x + h), u_2 = u(x + 2h), \dots, u_n = u(x + nh)$. По теореме Тейлора (которая доказывается Бринкли в этой же статье) записывается приращение Δu и u_1 :

$$\Delta u = \frac{\dot{u}}{\dot{x}} h + \frac{h^2}{1.2} \frac{\ddot{u}}{\dot{x}^2} + \dots,$$

$$u_1 = u + h \frac{\dot{u}}{\dot{x}} + \frac{h^2}{1.2} \frac{\ddot{u}}{\dot{x}^2} + \frac{h^3}{1.2.3} \frac{\overset{3}{\ddot{u}}}{\dot{x}^3} + \dots$$

Аналогичные формулы записываются и для

$$u_2 = u + 2h \frac{\dot{u}}{\dot{x}} + \frac{(2h)^2}{1.2} \frac{\ddot{u}}{\dot{x}^2} + \frac{(2h)^3}{1.2.3} \frac{\overset{3}{\ddot{u}}}{\dot{x}^3} + \dots,$$

$$u_3 = u + 3h \frac{\dot{u}}{\dot{x}} + \frac{(3h)^2}{1.2} \frac{\ddot{u}}{\dot{x}^2} + \frac{(3h)^3}{1.2.3} \frac{\overset{3}{\ddot{u}}}{\dot{x}^3} + \dots,$$

.....

$$u_n = u + nh \frac{\dot{u}}{\dot{x}} + \frac{(nh)^2}{1.2} \frac{\ddot{u}}{\dot{x}^2} + \frac{(nh)^3}{1.2.3} \frac{\overset{3}{\ddot{u}}}{\dot{x}^3} + \dots$$

Заменяя в этих рядах $\dot{u}/\dot{x}$ на $(\overset{k}{\ddot{u}}/\dot{x})^k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$),

получим

$$u = u + 1 - 1,$$

$$u_1 = u + e^{\frac{\dot{u}}{\dot{x}} h} - 1,$$

$$u_2 = u + e^{\frac{\dot{u}}{\dot{x}} 2h} - 1,$$

.....

$$u_{n-1} = u + e^{\frac{\dot{u}}{\dot{x}} (n-1)h} - 1,$$

$$u_n = u + e^{\frac{\dot{u}}{\dot{x}} nh} - 1.$$

Эти значения u_k , u Бринкли подставляет в формулу для $\Delta^n u$, известную из теории конечных разностей, и получает для $\Delta^n u$ представление

$$\Delta^n u = \left(e^{\frac{\dot{u}}{\dot{x}} nh} - n e^{\frac{\dot{u}}{\dot{x}} (n-1)h} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^{\frac{\dot{u}}{\dot{x}} (n-2)h} - \dots \pm 1 \right)$$

или символически

$$\Delta^n u = (e^{\frac{\dot{u}}{\dot{x}} h} - 1)^n,$$

где после разложения правой части в ряд надо заменить $(\dot{u}/\dot{x})^k$ на $\dot{u}/\dot{x}^k$. Затем аналогичное представление он получает и для $\Sigma^n u$:

$$\Sigma^n u = (e^{\frac{\dot{u}}{\dot{x}} h} - 1)^{-n}.$$

Основное внимание, как уже говорилось, Бринкли уделяет отысканию представления общего члена для ряда $\Sigma^n u$, который записывает в символике метода флюксий:

$$\begin{aligned} \Sigma^n u = \int^n u = & \frac{\alpha}{h^n} fl^n u \dot{x}^n + \frac{\beta}{h^{n-1}} fl^{n-1} u \dot{x}^{n-1} + \dots + \frac{\mu}{h} fl u \dot{x} + \\ & + \nu u + \pi \frac{\dot{u}}{\dot{x}} h + \rho \frac{\ddot{u}}{\dot{x}^2} h^2 + \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

для определения коэффициентов этого ряда он ищет

коэффициенты ряда для

$$(e^{\frac{\dot{u}}{\dot{x}} h} - 1)^{-n} = \frac{1}{h^n} \left(\frac{h}{e^{\frac{\dot{u}}{\dot{x}} h} - 1} \right)^n.$$

Знак $fl^n u \dot{x}^n$ означает флюенту n -го порядка от функции u или $\dot{x}^{-n} u / dx^{-n}$. Для нахождения коэффициента общего члена разложения (10) Бринкли применяет свой способ отыскания флюксий *per saltum* из [25]. Символика метода флюксий не только затрудняла чтение работ Бринкли на континенте, но и мешала самому Бринкли пользоваться результатами европейских математиков. Следует добавить, что в статьях Бринкли поражает большое количество опечаток, усложняющих их понимание.

Не будем приводить длинное выражение общего члена разложения (10), найденное Бринкли. Отметим только, что к решению задач, связанных с разложениями функций в ряды и применением рядов к решению уравнений и к другим вопросам анализа, Бринкли привели задачи небесной механики.

Еще в статье [25] он применил свой способ отыскания флюксий к ряду астрономических задач. Среди них были такие:

«Из средней аномалии планеты вывести эксцентрическую аномалию в виде степенного ряда по степеням эксцентриситета»; «Из средней аномалии планеты вывести истинную аномалию в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням эксцентриситета» [25, с. 347]. Он исследует решение последней задачи и замечает, что вторая степень эксцентриситета, или два первых члена ряда будут достаточны для орбиты Земли или Венеры, третья степень эксцентриситета, или три члена ряда — для орбит Юпитера, Сатурна и «звезды Георга», как он вслед за открывшим эту планету У. Гершелем называл Уран, четыре члена — для Марса, шесть или семь членов ряда — для орбиты Меркурия [25, с. 351].

Бринкли замечает также, что в астрономических расчетах вообще часто удобнее пользоваться рядами, чем исчислением конечных разностей. Таким образом, метод нахождения флюксий «*per saltum*» был нужен Бринкли для астрономических целей.

В статье [27] «Изучение различных решений задачи Кеплера и указание очень короткого практического решения этой задачи» Бринкли сравнил разные способы решения задачи Кеплера, начиная с самого Кеплера и кончая своим собственным, предложенным им в статье [25]. К этому времени Бринкли уже знал сочинение Арбогаста [6]. Поэтому он говорит и о способе Арбогаста: «В прошлом году (1800 г.) вышел труд значительного объема ин-квартио г. Арбогаста под названием „Деривационное исчисление“. Цель этого труда в точности та же, что и моего. Метод г. Арбогаста, однако, весьма отличается от моего. Но если я не ошибаюсь, мой метод применим к более широкому кругу задач и более прост на практике» [27, с. 144]. В нашу задачу не входит сравнение способов Бринкли и Арбогаста. Существенно, что по мнению Бринкли оба метода имели одно и то же назначение и решали примерно одинаковый круг задач.

Другим замечанием Бринкли объясняет, почему его внимание привлекли указанные вопросы: «Польза этого исследования будет особенно понятна в настоящее время в связи с замечательным событием — открытием двух новых планет... Могло бы показаться, что исследование подобного рода мало полезно, ввиду того что таблицы для уравнивания центра уже составлены для всех известных планет. Но теперь мы имеем два новых небесных тела ³, одно из которых движется по орбите с большим эксцентриситетом, чем орбита Меркурия, и для которых применение задачи Кеплера будет необходимо до тех пор, пока элементы их орбит не будут найдены точно и не будут составлены таблицы. Можно с полным основанием сказать, что стараниями астрономов будут вскоре открыты и другие небесные тела подобного рода...».

«Непрямой метод, который я здесь предлагаю и который для не очень эксцентрических орбит кажется мне наиболее удобным для применения, выведен на основе комбинирования методов Кеплера, Ньютона и Кассини Вто-

³ Бринкли имел в виду малые планеты Цереру и Палладу, открытые соответственно 1 января 1801 г. и в апреле 1802 г. Скрывшаяся из поля зрения астрономов Церера была найдена вторично благодаря методу вычисления орбит, предложенному Гауссом. Этот же способ позволил вычислить орбиту Паллады. Когда Бринкли писал цитируемые слова, он не был знаком с методом Гауса, который был опубликован лишь в 1809 г.

рого. Он применил также и к эксцентрическим орбитам и во всех случаях дает быстрое приближение. Задача состоит в том, чтобы в любой заданный момент времени определить положение планеты, движущейся по некоторому закону. Ряд для эксцентрической аномалии получается с помощью теоремы Лагранжа, позднее доказанной Лапласом и другими авторами. Ряд для истинной аномалии был получен несколькими учеными с помощью обращения рядов» [27, с. 144—145].

Мы сказали уже, что в работе [25, да и в 27] Бринкли еще не использовал символических методов, к которым пришел уже после 1801 г. и знакомства с книгой Арбогаста [6]. Но зато из его высказываний видно, что и формула Лагранжа, и обращение рядов, и его способ определения флюксий любого порядка «*per saltum*» нужны были ему для решения астрономических вопросов.

Работы Бринкли были известны французским ученым по краткому изложению их во втором издании трактата Лакруа [28] и по извлечениям и рефератам во французских журналах. Статья Бринкли [29] была опубликована в 1816 г. в сокращенном переводе Делабра [30].

Известный французский астроном Д. Ф. Араго посвятил Бринкли, состоявшему иностранным членом-корреспондентом Парижской академии наук, некрологический очерк [31], содержащий сведения об этом ученом и резюме основных его публикаций. Бринкли окончил Кембриджский университет и был оставлен там же преподавать. Пройдя обучение астрономии в Гринвичской обсерватории у ее директора Н. Маскелина, он занял кафедру астрономии в колледже Троицы в Дублине, став первым королевским астрономом Ирландии. Его научная карьера прервалась в 1827 г., когда Бринкли был назначен епископом. Араго писал, что в каждом сочинении Бринкли виден достоверный историк, искренний друг правды, точный наблюдатель, глубокий математик. Бринкли был также президентом Ирландской академии наук. Его учеником в колледже Троицы был знаменитый Р. У. Гамильтон (1805—1865), ставший его преемником в должности профессора колледжа и королевского астронома. Влияние Бринкли на научное творчество Гамильтона несомненно.

В конце XVIII — начале XIX в. почти все английские математики и астрономы пользовались языком исчисления флюксий, что затрудняло понимание их трудов в дру-

гих странах и мешало англичанам знакомиться с сочинениями европейских ученых. Неудобства этой символики были осознаны тремя студентами Кембриджского университета — Ч. Беббиджем (1792—1871), Дж. Гершелем (1792—1871) и Дж. Пикоком (1791—1858), каждый из которых прославился впоследствии. По инициативе Беббиджа и при участии преподававшего в колледже профессора Вудхауза они организовали в Кембридже «Аналитическое общество», основной целью которого была борьба за замену устаревших обозначений метода флюксий общепринятой на континенте и значительно более удобной символикой.

В 1816 г. был издан перевод на английский язык сокращенного трактата Лакруа [32]. Первую часть, посвященную дифференциальному исчислению, перевел Беббидж, вторую — интегральное исчисление — примерно поровну Пикок и Дж. Гершель. Имевшееся у Лакруа приложение, в котором излагались основы исчисления конечных разностей и теории рядов, Гершель заменил своим, причем добавил изложение символического исчисления, основываясь на 3-м томе большого трактата Лакруа [28], трудах Лагранжа, Лапласа, Арбогаста, Бринкли и своих собственных. В книге были также примечания, принадлежавшие Пикоку и Гершелю.

В одном из примечаний переводчики сравнили обозначения метода флюксий и лейбницевские. Они отметили, что, кроме прочих неудобств, в методе флюксий существует по несколько разных обозначений для одной и той же операции; например, $df(x)$ обозначается в методе флюксий то $(f(x))'$, то $\overline{f(x)}$. Гершель писал, что «прекрасную теорему Лагранжа, столь важную для теории конечных разностей, и многие другие, нельзя представить с помощью обозначений метода флюксий» [32, с. 620].

В добавление к этому труду в 1820 г. Дж. Гершель издал «Сборник задач на приложение исчисления конечных разностей» [33], в составлении которого также участвовали Беббидж и Пикок. Кроме того, Гершель и Беббидж напечатали несколько статей: первый — по символическому исчислению, второй — по функциональному. Пикок начал преподавать в колледже Троицы Кембриджского университета, пользуясь при этом символикой и терминологией дифференциального и интегрального исчисления. Таким образом, пристальное внимание этой

тройки к символике вообще сделалось одним из стимулов их занятий символическим исчислением.

Другим важным намерением трех друзей было осуществить проверку астрономических таблиц, имевших для Англии как морской державы особенное значение. Напомним, что отцом Джона Гершеля был знаменитый астроном У. Гершель, влияние которого могло направить интересы молодых людей к этой цели. Беседы о многочисленных ошибках в таблицах, являющихся делом рук человека, который никогда не гарантирован от ошибок, привели Беббиджа к мысли создать машину, которая сама могла бы составлять математические и астрономические таблицы и освободила бы человека от этого трудоемкого и неблагодарного занятия, а таблицы — от каких бы то ни было ошибок. Задача конструкции такой машины стала основной в жизни Беббиджа. При этом вскоре выяснилось, что машине нужен специальный язык. Вот что писал по этому поводу сам Беббидж: «Эти мемуары [речь шла о статьях Ады Лавлейс, посвященных трудам Беббиджа по созданию аналитических машин] доказали, что разложения и операции анализа могут теперь полностью быть осуществлены машинами... Существуют различные методы, с помощью которых можно производить эти разложения: 1) с помощью дифференциального и интегрального исчисления, 2) с помощью комбинаторного анализа Гинденбурга, 3) с помощью дериивационного исчисления Арбогаста. Каждый из этих методов рассматривает разложения произвольных функций по некоторым законам. Теоретически каждый из методов может считаться безупречным (may be admitted to be perfect). Но практически требующиеся для осуществления вычислений время и труд превышают возможности человека. В результате в отношении в высшей степени интересных вопросов, касающихся Лунной теории, некоторые из наиболее искусных и неутомимых живущих ныне аналитиков разошлись во мнениях.

Аналитическая машина способна осуществлять законы, предписываемые каждым из указанных методов. Одно время я изучал комбинаторный анализ и приложил усилия, чтобы с помощью некоторых из моих немецких друзей, более опытных в нем, чем я, выяснить, применим ли он с большей легкостью, чем дифференциальное исчисление. Кажется, они были склонны считать, что ком-

бинаторный анализ более непосредственно применим ко всем обычным нуждам аналитики.

Сам я работал с исчислением Арбогаста, и насколько я могу судить, исходя из собственного ограниченного использования этих трех методов, для целей аналитической машины предпочтительнее исчисление дериваций» [34, с. 137].

В другом высказывании Беббидж говорит и об использовании символического исчисления при составлении астрономических таблиц и о его значении для машинной математики: «В целом численные постоянные благодаря трудам Лапласа, Плана, Леверье, Хансена и других знаменитых людей, чьи неутомимые старания привели астрономию к ее сегодняшнему прогрессу, легко могут быть пересчитаны. Но имеются численные коэффициенты различных членов в разложениях функций в ряды. Во всех случаях, когда эти численные постоянные могут быть вычислены, причем более чем одним способом, желательно подсчитать их несколькими методами, прежде чем частая практика подтвердит нашу уверенность в непогрешимости механизма.

Большое значение точных таблиц понятно всем, кто ими пользуется, но множество ошибок в них сравнительно мало известно... Единственное обстоятельство, которое действительно странно, состоит в том, что когда было доказано, что таблицы могут быть вычислены машиной, и когда уже существует машина, которая позволяет вычислять некоторые таблицы, королевский астроном не стал самым горячим приверженцем инструмента, который может оказать неутомимую услугу его науке»... И дальше: «Несколько месяцев назад я обратился к статье в «*Philosophical Transactions*»⁴ чтобы лучше изучить некоторые аналитические исследования автора, глубоко разбирающегося в этом предмете, и очень интересные. Они относятся к отделению символов операций от величин, вопросу, особенно меня интересующему, поскольку аналитическая машина содержит воплощение этого метода» [34, с. 141].

Таким образом, комбинаторный анализ и символическое исчисление интересовали Беббиджа с точки зрения

⁴ Именно статья Дж. Буля, продолжившего исследования в области символического исчисления: *Boole G. On a general method in analysis.*— *Philos. Trans.*, London, 1844, vol. 134, p. 225.

их применения к аналитической машине. Он рассматривал их как два различных метода, имеющих одну и ту же цель — создание наиболее удобного алгоритма для совершения операций дифференциального и интегрального исчисления, в первую очередь, для действий с рядами.

Дж. Гершель со своей стороны подчеркивал, что главным достоинством методов вычислений он считал способность облегчить работу астрономов: «Метод Лапласа для вычисления орбит планет сводится к приложению этой задачи⁵. Выведенная здесь формула отличается от той, которую он использовал в „Небесной механике“ и, может быть, покажется более сложной на вид. Но я убежден, что при действительном вычислении она окажется более удобной, поскольку члены, из которых она состоит, лучше приспособлены к логарифмическим вычислениям, и, в действительности, менее запутаны по форме, а потому дают меньше поводов для ошибок со стороны вычислителя» [33, с. 106].

В этом сборнике и в статьях [35—37] Гершель рассмотрел практическое применение метода производящих функций Лапласа, их свойства, также используя свою символику. Он знал и о трудах комбинаторной школы Гинденбурга. Так, Гершель замечает [33, с. 5], что уже после публикации статьи [35] он прочел статью немецкого математика Бурмана и увидел, что тот сделал почти то же самое, что и он сам, но, по-видимому, не применил своего способа к обратным функциям. Видимо, речь шла о статье [38]. В трудах комбинаторной школы рассматривались задачи и такого типа, как те, которые Гершель относил, как он выражался, к «обратному исчислению функций». Заметим, что если f есть данная функция, то обратную функцию Гершель обозначал f^{-1} .

Если Гершеля символические методы интересовали главным образом в применении к астрономическим вычислениям, Беббиджа — применительно к машине, то Пикока заинтересовала формальная сторона символического исчисления — свойства операций, возможность алгебраизации логики. В 1830 г. он издал «Трактат по алгебре» [39], где, по словам историка математики К. Бойера, хотел представить эту дисциплину в логическом изложении, сравнимом с «Началами» Евклида [40, с. 621—

⁵ Речь идет о задаче интерполяционного характера.

622]. В первом томе этого трактата Пикок изучает правила алгебры в применении к натуральным числам, во втором — к величинам вообще, причем этот том назывался «Символической алгеброй». Единомышленником и последователем Пикокка был Август де Морган (1806—1871), окончивший колледж Троицы, где преподавал Пикок.

В результате деятельности Гершеля, Беббиджа, Пикокка, де Моргана Англия стала главным центром алгебраических и формально-логических исследований [41], причем в то же время по-прежнему оставалась страной, где усиленное внимание уделялось вычислительным методам. В дальнейшем здесь работали выдающиеся специалисты по алгебре, логике и символическому исчислению: Дж. Буль (1815—1860), Р. Мёрфи (1806—1843), А. Кэли (1821—1895), Дж. Сильвестер (1841—1897) и другие. Многие историки математики, отмечая формальный характер английской математики, не упоминают о том, что первоначально формализация математических методов осуществлялась там в чисто практических целях и была непосредственно связана с запросами астрономии.

5. Деривационное исчисление Арбогаста. Работы братьев Франсе и Сервуа

Важнейшим центром формирования символических методов явился Эльзас. В Страсбурге работал Л. Ф. А. Арбогаст (или Арбога, 1759—1803), профессор Страсбургской артиллерийской школы, член-корреспондент Парижской академии наук с 1792 г. и Французского института с 1796 г. (об Арбогасте см. [42, с. 221—222; 43, с. 282—287]). Главный труд Арбогаста [6] был посвящен «исчислению дериваций», созданному им для разложения в ряды функций от полиномов. По-видимому, поводом для создания деривационного исчисления послужили приведенные выше соображения о замене процессов дифференцирования и интегрирования процессом элементарного вывода производных и интегралов из функций и производных (и интегралов) меньших порядков. Кстати, Лагранж использовал в несколько иной форме и слово «деривация».

Еще в 1789 г. Арбогаст представил Парижской академии наук свой «Опыт начал дифференциального и интегрального исчисления, не зависящих от теории бесконечно малых и теории пределов» (*Essai sur les nouveaux princi-*

pes de calcul différentiel et de calcul intégral, indépendants de la théorie des infiniment petits et de celle des limites). Этот труд, высоко оцененный Лагранжем, однако по ряду причин не был опубликован. Судя по его описанию и отрывку из него, содержащимся в «Истории математики с древнейших времен до начала XIX столетия» [43, с. 283—284], уже здесь Арбогаст предложил оригинальный вывод разложения в ряд Тейлора

$$y + \Delta y = y + p\Delta x + \frac{1}{1.2} q\Delta x^2 + \frac{1}{1.2.3} r\Delta x^3 + \dots$$

и установил взаимосвязь между коэффициентами $p, q, r, \dots$, которые в дальнейшем назвал деривациями.

В [6] Арбогаст развивает ту же идею в форме «исчисления дериваций» и попутно строит символическое исчисление. Оно появляется у Арбогаста благодаря тому, что обозначения метода дериваций позволили ему отделять символы операций от функций, к которым они относятся.

Арбогаст писал, что «деривация — это операция, с помощью которой величина выводится из предыдущей величины или из функции» [6, с. 1], а «метод дериваций состоит в том, чтобы понять закон, который связывает совокупности некоторых величин одни с другими, и воспользоваться этим законом как средством вычисления для перехода от одной деривации к другой» [6, с. 11]. Деривационное исчисление должно было, по идее Арбогаста, дать способ, который позволил бы раскладывать функции от полиномов в ряды с такой же легкостью, как дифференциальное исчисление позволяет раскладывать в ряды функции от биномов [6, с. 11]. Чтобы дать представление об этом способе, мы приведем некоторые обозначения, понятия и выкладки Арбогаста.

Для функции $F(x + \alpha)$ можно записать разложение в ряд Тейлора

$$F(x + \alpha) = F\alpha + \frac{dF\alpha}{d\alpha} x + \frac{d^2F\alpha}{d\alpha^2} \frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3F\alpha}{d\alpha^3} \frac{x^3}{1.2.3} + \dots \quad (11)$$

Арбогаст, чтобы не пользоваться записью производных в виде дробей, обозначает производные $\frac{dF\alpha}{d\alpha}, \frac{d^2F\alpha}{d\alpha^2}, \frac{d^3F\alpha}{d\alpha^3}, \dots$ при $x = \alpha$ через $DF\alpha, D^2F\alpha, D^3F\alpha, \dots$ и отмечает, что эти величины те же самые, что входят в члены

разложения в ряд Тейлора

$$F(\alpha + 1) = F\alpha + DF\alpha + \frac{D^2F\alpha}{1 \cdot 2} + \frac{D^3F\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$DF\alpha$, $D^2F\alpha$, $D^3F\alpha$, ... — это последовательные деривации $F\alpha$ в случае, когда деривация величины α , т. е. $D\alpha$, постоянна и равна 1.

Чтобы получить ряд Тейлора для $F(\alpha + \beta x)$, можно в (11) заменить x на βx :

$$F(\alpha + \beta x) = F\alpha + \frac{DF\alpha}{1} \beta x + \frac{D^2F\alpha}{1 \cdot 2} \beta^2 x^2 + \frac{D^3F\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} \beta^3 x^3 + \dots, \quad (12)$$

но потом считать, что множитель β произошел от некоторой операции над $F\alpha$, т. е. что α есть функция другой переменной α_1 и $d\alpha = \beta d\alpha_1$. Введя обозначение $D \cdot F\alpha = DF\alpha\beta$, можно записать новый ряд в виде

$$F(\alpha + \beta x) = F\alpha + \frac{D \cdot F\alpha}{1} x + \frac{D^2 \cdot F\alpha}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot F\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots, \quad (13)$$

где

$$D \cdot F\alpha = DF\alpha \cdot \beta, D^2 \cdot F\alpha = D^2F\alpha \cdot \beta^2, D^3 \cdot F\alpha = D^3F\alpha \cdot \beta^3, \dots$$

Теперь вместо функции от бинома $\alpha + \beta x$ рассмотрим функцию от полинома $F\left(a + bx + \frac{c}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{d}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots\right)$. Если коэффициенты a , b , c , d , ... — произвольные величины, не связанные между собой каким-либо законом, Арбогаст предлагает считать, что они все же выводятся друг из друга по одному и тому же закону, и снова записать

$$\begin{aligned} F\left(a + bx + \frac{c}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{d}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots\right) &= \\ &= F\alpha + D \cdot F\alpha x + \frac{D^2 F\alpha}{1 \cdot 2} x^2 + \dots, \end{aligned}$$

считая $b = D \cdot a$, $c = D \cdot b$, $d = D \cdot c$, ... , а после осуществления дериваций заменить $D \cdot a$ на b , $D \cdot b$ на c , $D \cdot c$ на d и т. д.

Затем он рассматривает разложение функции от полинома более общего вида $F(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \dots)$

в ряд

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_nx^n + \dots \quad (14)$$

и устанавливает, что коэффициент общего члена A_nx^n в (14) будет

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{D^n \cdot F\alpha}{1 \cdot 2 \dots n} = D \cdot F\alpha \frac{D^{n-1}\beta}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} + \frac{D^2 F\alpha}{1 \cdot 2} \times \\ &\times \frac{D^{n-2}\beta^2}{1 \cdot 2 \dots (n-2)} + \frac{D^3 F\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{D^{n-3}\beta^3}{1 \cdot 2 \dots (n-3)} + \dots \\ &\dots + \frac{D^{n-1} F\alpha}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} D\beta^{n-1} + \frac{D^n F\alpha}{1 \cdot 2 \dots n}. \end{aligned}$$

Таким образом, выражения $F\alpha$ и $D F\alpha$, $\frac{D^2 F\alpha}{1 \cdot 2}$, $\frac{D^3 F\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, ... (простые деривации) суть коэффициенты последовательных членов разложения $F(\alpha + x)$, $F\alpha$ и $D \cdot F\alpha$, $\frac{D^2 \cdot F\alpha}{1 \cdot 2}$, $\frac{D^3 F\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, ... (сложные деривации) — коэффициенты последовательных членов разложения функции от полинома $F(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \dots)$. Для вычисления $D \cdot F\alpha$, $D^2 \cdot F\alpha$, $D^3 \cdot F\alpha$, ... применяются те же правила, что и в дифференциальном исчислении при дифференцировании сложных функций. Различие в вычислении $D \cdot F\alpha$, $D^2 \cdot F\alpha$, ... и $D \cdot F\alpha$, $D^2 \cdot F\alpha$, ... таково:

$$D \cdot F\alpha = \frac{dF\alpha}{d\alpha}, \quad D^2 F\alpha = \frac{d^2 F\alpha}{d\alpha^2}, \dots, D^n F\alpha = \frac{d^n F\alpha}{d\alpha^n},$$

а

$$D \cdot F\alpha = \frac{dF\alpha}{d\alpha} d\alpha, \quad D^2 \cdot F\alpha = \frac{d^2 F\alpha}{d\alpha^2} d\alpha + \frac{dF\alpha}{d\alpha} d^2\alpha$$

и т. д.

Арбогаст дает правило получения $\frac{D^{n+1} \cdot F\alpha}{1 \cdot 2 \dots (n+1)}$ из $\frac{D^n \cdot F\alpha}{1 \cdot 2 \dots n}$, когда буквы расположены в алфавитном порядке. В каждом члене надо считать переменной только последнюю букву или ее степень и пользоваться правилом дифференцирования и затем подставлять β вместо $D \cdot \alpha$, γ вместо $D \cdot \beta$ и т. д. При этом коэффициент берется равным единице.

Затем надо считать переменной предпоследнюю букву или ее степень (или функцию от нее), если эта буква непосредственно предшествует последней букве члена, и, так как степень последней буквы увеличивается на единицу, разделить полученное выражение на этот новый показатель.

Арбогаст отмечает, что правило это удобно на практике, с его помощью можно сразу писать готовое разложение. В качестве примера рассмотрена полиномиальная теорема: найти разложение в степенной ряд по степеням x m -й степени полинома

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \dots)^m = \\ = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

По правилу вычисления дериваций получаем

$$A_0 = \alpha^m, \quad A_1 = m\alpha^{m-1}\beta,$$

$$A_2 = m\alpha^{m-1}\gamma + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \alpha^{m-2}\beta^2,$$

$$A_3 = m\alpha^{m-1}\delta + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \alpha^{m-2}2\beta\gamma + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^{m-3}\beta^3$$

и т. д.

Рассмотрев примеры разложения в ряд различных функций с помощью правил вычисления дериваций, Арбогаст переходит к правилам отыскания обратных дериваций и в частном случае показывает, как, зная

$$\frac{D^n \cdot F\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n},$$

можно найти $\frac{D^{n-1} \cdot F\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}$.

Для $\frac{D^k \cdot F\alpha}{1 \cdot 2 \dots k}$ он вводит обозначение: $D^k F\alpha$ — разделенная деривация функции $F\alpha$. Арбогаст объясняет введение таких обозначений следующим образом:

«Введем здесь для разделенных дериваций (les dérivées divisées) более простое обозначение, которое будем часто употреблять в дальнейшем. Так как в

$$\frac{D^m \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}, \quad \frac{D^m \beta^2}{1 \cdot 2 \dots m}$$

знаменатель (le dénominateur) образуется в соответствии с показателем m деривационного знака D , то этот знамена-

тель, будучи ничем иным, как произведением натуральных чисел 1, 2, 3 и т. д., m , последнее из которых есть сам показатель), мы предлагаем обозначить D^m_c вместо $\frac{D^m}{1 \cdot 2 \dots m}$, где c под D означает коэффициент знаменателя (un coefficient dénominateur), определенный в соответствии с показателем m » [6, с. 33]. Таким образом, здесь буква c есть просто сокращение слова «коэффициент».

Мы не будем подробно излагать содержание большого труда Арбогаста.

Укажем лишь, что для алгоритма дериваций Арбогасту потребовались новые обозначения. При их выборе он руководствовался следующими требованиями: 1) сделать обозначения возможно более похожими на общепринятые, 2) не вводить бесполезных обозначений и таких, которые можно заменить общепринятыми, 3) выбирать их как можно более простыми, но учитывать все разнообразие, какого требует разнообразие операций [6, с. 11].

Три первые главы посвящены изложению способа дериваций, с помощью которого автор рассматривает разложение в ряды функции от ряда, произведения рядов, разложение функций в рекуррентные и кратные ряды и пр.

Арбогаст сам сравнивает свое исчисление дериваций с комбинаторным анализом Гинденбурга. Вначале, пишет Арбогаст, он не был знаком с этим исчислением и следовал своим собственным идеям. Ознакомившись же с ним, Арбогаст пришел к такому заключению: «Его выводы кажутся мне самым совершенным, что можно сделать в этой области, взяв за основу комбинации. Но я не могу не заметить, что деривационные методы... несмотря на некоторые точки соприкосновения, какие они могут иметь с комбинаторными, отличаются от них в принципах, процессах и обозначениях.

Принципы, которые я использую, более широки, так как деривации связаны с общей теорией функций, ветвь которой они составляют. Методы, которые я предлагаю, более аналитичны. В комбинаторном анализе вычисление величин, которые я называю полиномиальными, осуществляется отдельными этапами... Мои методы дают сразу полные члены разложения с помощью непрерывных вычислений... Не требуется ни таблиц комбинаций, ни расположения клеток некоторых таблиц для составления

групп полиномиальных величин. Мои обозначения просты, выразительны и их очень немного» [6, с. V—VI].

В остальных главах книги даны приложения правил и формул, выведенных в трех первых главах. В V главе Арбогаст рассмотрел приложение деривационного метода к обращению рядов. Исходным пунктом его рассуждений служит задача 1: дан ряд

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n + \dots \quad (15)$$

Преобразовать его в другой ряд вида

$$a_0 + a_1x(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \dots)^m + a_2x^2(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \dots)^{2m} + a_3x^3(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \dots)^{3m} + \dots \\ \dots + a_nx^n(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \dots)^{nm} + \dots,$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, \beta, \gamma, \delta, \dots$ — некоторые произвольные величины, не зависящие друг от друга, m — любое, целое или дробное, число любого знака. A_0 и β рассматриваются как первые члены дериваций и как величины, не зависящие друг от друга.

Для краткости он обозначает $\zeta = \beta + \gamma x + \delta x^2 + \dots$, так что

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots = A_0 + D \cdot (\beta^{-m} D \cdot A_0) x \zeta^m + \\ + \frac{1}{2} D \cdot (\beta^{-2m} D \cdot A_0) x^2 \zeta^{2m} + \frac{1}{3} D^2 \cdot (\beta^{-3m} D \cdot A_0) x^3 \zeta^{3m} + \dots,$$

полагает $x \zeta^m = y$ и находит, что общий член преобразованного ряда будет

$$a_n y^n = \frac{1}{n} D_c^{n-1} \cdot (\beta^{-nm} D \cdot A_0) y^n = \frac{1}{n} \{ n A_n \beta^{-nm} + \\ + (n-1) A_{n-1} D \cdot \beta^{-nm} + (n-2) A_{n-2} D^2 \cdot \beta^{-nm} + \dots \\ \dots + 3 A_3 D_c^{n-3} \cdot \beta^{-nm} + 2 A_2 D_c^{n-2} \cdot \beta^{-nm} + A_1 D_c^{n-1} \cdot \beta^{-nm} \}. \quad (16)$$

В качестве следствия он рассматривает преобразование ряда (15) в ряд вида

$$a_0 + \frac{a_1 x}{(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \dots)^m} + \dots \\ \dots + \frac{a_n x^n}{(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \dots)^{nm}} + \dots \quad (17)$$

Здесь

$$a_n y^n = \frac{1}{n} D_c^{n-1} \cdot (\beta^n D \cdot A_0) y^n. \quad (18)$$

Задачу обращения рядов Арбогаст сводит к рассмотренной выше задаче преобразования рядов. Пусть имеется ряд

$$y = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \dots \quad (19)$$

Требуется выразить x через y , т. е. определить коэффициенты ряда

$$x = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots + a_n y^n + \dots$$

через коэффициенты ряда (19), [6, с. 240].

Эта задача сводится к такой: преобразовать x в ряд вида

$$\begin{aligned} & a_1 x (\beta + \gamma x + \delta x^2 + \dots) + a_2 x^2 (\beta + \gamma x + \delta x^2 + \\ & + \dots)^2 + a_3 x^3 (\beta + \gamma x + \delta x^2 + \dots)^3 + \dots \\ & \dots + a_n x^n (\beta + \gamma x + \delta x^2 + \dots)^n + \dots \end{aligned}$$

Если взять $m = 1$, $x \xi = y$, то $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$ должен свестись к одному члену x . Поэтому полагаем в формуле (15) $A_1 = 1$ и все коэффициенты $A_0, A_2, \dots, A_n, \dots = 0$. Общий член преобразованного ряда будет (по (16)):

$$a_n y^n = \frac{1}{n} D_c^{n-1} \cdot \beta^{-n} y^n,$$

а ряд для x будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} x &= \beta^{-1} y + \frac{1}{2} D \cdot \beta^{-2} y^2 + \frac{1}{3} D^2 \cdot \beta^{-3} y^3 + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n} D_c^{n-1} \cdot \beta^{-n} y^n + \dots \end{aligned}$$

Среди примеров упоминавшиеся в § 1 и 2 теоремы Лагранжа и Лапласа, несколько теорем из «Дифференциального исчисления», «Интегрального исчисления» и различных статей Эйлера, задача, рассмотренная Гинденбургом (дано уравнение $\beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \dots = \beta' y^k + \gamma' y^{k+l} + \dots$, требуется выразить y как функцию от x ; выразить x как функцию от y), и другие.

В шестой главе Арбогаст применяет исчисление дериваций к дифференциальному исчислению, подчеркивая, что дифференциалы для него всегда некоторые конечные величины, не бесконечно малые и не являющиеся пределами [6, с. 306]. Именно здесь Арбогаст излагает свое символическое исчисление. По-видимому, удобные обозначения метода дериваций позволили ему отделить символы операций от величин, над которыми эти операции совершаются. Еще в § 95, 96 [6, с. 76, 77] Арбогаст упоминает и использует аналогию между дифференциалом от произведения двух функций и разложением n -й степени двучлена $(a + b)^n$. Затем он переносит эту аналогию на случай дифференциала от произведения трех и более функций и, пользуясь аналогией с разложением степени полиномов, получает выражение для деривации от произведения нескольких величин: $D^n \cdot ab$, $D^n \cdot abc$ и т. д.

По его словам, «объединяя методы дериваций и отделения символов, можно внести важные упрощения в трактат по прямому и обратному методу разностей» [6, с. X].

С помощью отделения символов операций от величин, к которым они относятся, Арбогаст записывает в более удобной форме формулы Лагранжа (4) и (5):

$$\begin{aligned} \text{вместо } \left(e^{\frac{du}{dx}} - 1 \right)^l &= \Delta^l u \quad \text{он записывает} \\ \Delta^l u &= \left(e^{\frac{d}{dx}} - 1 \right)^l u, \\ \text{вместо } \left(e^{\frac{du}{dx}} - 1 \right)^{-l} &= \Sigma^l u \quad \text{он записывает} \\ \Sigma^l u &= \left(e^{\frac{d}{dx}} - 1 \right)^{-l} u. \end{aligned} \tag{20}$$

Этот способ «отделения ступеней» (*séparation des échelles*), т. е., по существу, отделения символов операций, Арбогаст описывает в следующих словах: «Этот метод состоит в отделении, когда это возможно, знаков операций от функций, над которыми осуществляют эти операции, и в рассмотрении выражения, составленного из этих знаков и некоторых величин, выражение, которое я называю ступенью операций, причем эти выражения изучаются так, как если бы знаки входящих туда операций были величинами, а затем — в умножении результата на функцию» [6, с. VIII—IX].

Арбогаст применяет этот символический метод к исчислению конечных разностей, к задачам астрономии. В числе рассмотренных им примеров — доказательства формул (4), (5) и других символических формул, решение дифференциальных уравнений и других вопросов анализа. Предшественником Арбогаста в отношении отделения символов операций был А. де Лорнь [9], имя которого Арбогаст упоминает.

Исследования Арбогаста были, по всей вероятности, связаны с его трудами по баллистике. Имеются косвенные свидетельства этого предположения. Друг и сотрудник Арбогаста профессор математики в близлежащем Кольмаре (где до Страсбурга служил и Арбогаст) Ф. Ж. Франсе (1768—1810) [44] занимался символическим исчислением и применял его для баллистических расчетов. Ему принадлежит неопубликованный труд по баллистике. Младший брат этого ученого профессор математики в Меце Ж. Франсе (1775—1833) писал в статье, посвященной вопросу обоснования символического исчисления, открытого его братом (усовершенствованного исчисления Арбогаста): «Мой покойный брат уже давно владел теорией этого исчисления, которую распространил на исчисление того же типа высших порядков» [45].

Лакруа неоднократно упоминает имя Ф. Ж. Франсе. Он указывает (вслед за самим Арбогастом), что Франсе (старший) проверял расчеты и исправлял ошибки при подготовке Арбогастом его книги [6]. Во втором издании своего большого трактата Лакруа писал: «Отличный математик, который ознакомился с этим исчислением, при рождении которого он [т. е. Ф. Ж. Франсе. — *Е. О.*], если можно так выразиться, присутствовал, извлек из него очень многое, используя это в мемуаре, посвященном движению снарядов при наличии сопротивления воздуха» [25, т. I, с. XXX].

Важное свидетельство о труде Франсе-старшего по баллистике дает П. Шарбонье, изложивший метод Франсе в [46]. Шарбонье замечает, что деривационное исчисление позволило Франсе получить «формулы, которые не только не могли быть найдены с помощью обыкновенного анализа, но которые нельзя было даже вообразить... К деривационному исчислению Франсе присоединил особый ряд дифференцирования, позволивший ему без труда получить замечательные формулы, которые никакой дру-

гой метод не смог бы дать столь же быстро и таким легким способом... Итог работы, способность к вычислениям, которые этот метод раскрывает у Франсе, делают этот труд поистине уникальным памятником в истории баллистики: одна лишь астрономия предполагает столь неутомимых вычислителей» [47, с. 211—212].

В работе [45] Франсе-младший поставил задачу установления законности отделения символов операций от величин. Он разобрал целый ряд ошибок, допущенных прежними авторами, работавшими в этой области: Лорньа, Прони, Бриссоном; все эти ошибки были связаны с тем, что эти авторы не всегда отделяли символы операций от величин. Затем Франсе применил символический метод к интегрированию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (рассмотрев, между прочим, и случай равных корней характеристического уравнения), а также разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Вслед за статьей Франсе была напечатана работа Ф. Ж. Сервуа (1767—1847), где высказан принцип, на котором основывалось символическое исчисление и доказана его законность [48]. Сервуа установил, что причина формальной аналогии между символами операций и алгебраическими величинами кроется в том, что те и другие подчиняются одинаковым законам — коммутативному, ассоциативному и дистрибутивному.

Здесь не говорилось об интересных трудах К. Крампа (1760—1826), в частности о его книге, посвященной астрономической и земной рефракции [49], о введенном им понятии обобщенного факториала, вычислении таблиц значений интеграла Лапласа и о его попытке объединить символическое исчисление Арбогаста с комбинаторным анализом Гинденбурга.

Сравнение методов Арбогаста и Гинденбурга проделал сам Гинденбург [18] и Ключель [24]. Они пришли к выводу, что основное содержание задач, решаемых этими методами, одно и то же. Но деривационное исчисление решает задачи с помощью отделения символов операций от величин, а комбинаторный анализ применяет средства комбинаторики. По мнению Ключеля, принципы деривационного исчисления более обработаны, и метод разложения в ряды у Арбогаста более простой, но он «более аналитический», т. е. теснее связан с дифференциальным

исчислением, использует его понятия и приемы. Средства комбинаторного анализа элементарны, не пользуются дифференциальным и интегральным исчислением, а только применяются к задачам этого исчисления. В этой элементарности Ключель видел преимущество комбинаторных методов перед деривационными. Несомненно, что соображение это было связано с влиянием Лагранжа, желавшего дать дифференциальному и интегральному исчислению чисто алгебраические основания.

Ключель отмечал также, что удобству применения комбинаторных методов способствуют наличные комбинаторные таблицы, которые значительно упрощают использование комбинаторных методов.

Не останавливаясь на сочинениях других авторов по символическому исчислению и комбинаторному анализу, отметим еще, что эти вопросы изучались и в России в первой половине XIX в. Читателей из Прибалтики познакомили с комбинаторным анализом И. Ф. Пфаффа, с деривационным исчислением — М. Г. Паукер (1813) и И. М. Бартельс (1822).

Начиная с 1831 г. публикует свои статьи по комбинаторному анализу академик Э. Д. Коллинс. Его исследования примыкали по форме и содержанию к трудам Г. Роте и М. Ома. Наконец, в уже цитированном «Лексиконе чистой и прикладной математики» В. Я. Буняковского [4] было дано первое подробное изложение основных понятий и приемов комбинаторного анализа, деривационного и символического исчислений на русском языке. Здесь говорилось о работах Гинденбурга, Арбогаста, Сервуа, Франсе и других зарубежных математиков в указанных областях.

Вопросам истории символического исчисления и комбинаторного анализа посвящены работы советских авторов [16—17, 50—54] и другие.

Отметим, что было бы интересно проследить влияние комбинаторной школы Гинденбурга на творчество Гаусса и других немецких математиков XIX в., более детально исследовать взаимные связи исследований по комбинаторному анализу и различным видам символического исчисления, рассмотреть влияние трудов Бринкли, Гершеля, Беббиджа, де Моргана на последующее развитие математики в Англии, найти дополнительные сведения о

жизни и деятельности братьев Франсе, в частности подробнее изучить неопубликованную рукопись Франсе-старшего.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lagrange J. L.* Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries.— Мém. Acad. sci. Berlin, 1770, t. 24; Oeuvres. Paris, 1869, t. 3, p. 5—73.
2. *Lagrange J. L.* Sur le problème de Kepler.— Мém. Acad. sci. Berlin, 1771, t. 25; Oeuvres, Paris, 1869, t. 3, p. 111—138.
3. *Lagrange J. L.* Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables.— Nouveaux Мém. Acad. sci. Berlin, Année 1772; Oeuvres. Paris, 1869, t. 3. p. 439—476.
4. *Буняковский В. Я.* Лексикон чистой и прикладной математики. СПб., 1839.
5. *Davis H. T.* The theory of linear operators from the standpoint of differential equations of indefinite order. Bloomington, Indiana, 1936.
6. *Arbogast L. F. A.* Du calcul des dérivation. Strasbourg, An VIII (1800).
7. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под ред. Г. Н. Дубошина. 2-е изд. доп. и перераб. М., 1976.
8. Recueil pour les astronomes, par M. Jean Bernoulli, astronome royal. Berlin, 1771, t. I; 1772, t. II; 1776, t. III.
9. *de Lorgna A. M.* Théorie d'une nouvelle espèce de calcul fini et infinitésimal, par M. le chavalier Lorgna.— Мém. Acad. roy. sci. Turin, 1786—1787, vol. 3.
10. *Laplace P. S.* Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes; sur la figure de la Terre et sur les fonctions.— Мém. math. et phys. Acad. sci. Paris, 1776 (1773), t. 7, p. 503—540. (Sur les fonctions, p. 534—540).
11. *Laplace P. S.* Mémoire sur l'usage du calcul aux différences partielles. Hist. Acad. sci., (1777), 1780. Paris (présente 16 juin 1779), p. 99—122.
12. *Darboux G.* Note sur la série de Laplace.— C. r. Acad. sci., 1869, vol. 68, pt 1, p. 324—327.
13. *Laplace P. S.* Mémoire sur les suites, (1779) 1782. Oeuvres complètes. Paris, 1894, t. 10, p. 1—89.
14. *Hindenburg C. F.* Reduktion der vorhergehenden Aufgabe auf das allgemeine Potenzproblem.— Arch. reinen und angew. Math., Leipzig, 1795, Bd. 1, S. 224—228.
15. *Hindenburg C. F.* Vergleichung der Lagrangischen und combinatorischen Reversionsformula für Reihen.— Arch. reinen und angew. Math. Leipzig, 1798, Bd. II, S. 359—376.
16. *Кутлумурастов Дж.* О развитии комбинаторных методов математики. Нукус, 1964.
17. *Кутлумурастов Дж.* О развитии комбинаторных методов математики: Автореф. канд. дис. М., 1964. В надзаг.: Ин-т истории естеств. и техн. АН СССР.

18. *Hindenburg C. F.* Über combinatorische Analysis und Derivationsscalcul / Einige Fragmente gesammelt und zum Druck befördert von C. F. Hindenburg. Leipzig, 1803.
19. *Pfaff J. F.* Disquisitiones analyticae maxime ad calculum integralem et de doctrinam serierum pertinentes. Disquisitio III. Helmstedii, 1797. Tractatus de reversione serierum sive de resolutione aequationum per series, p. 227—348.
20. *Netto E.* Lehrbuch der Kombinatorik. II. Aufl. Leipzig—Berlin. 1927.
21. Rapport sur deux mémoires du professeur Burmann / (Par Lagrange et Legendre).— Mém. Inst. nat. sci. et arts; sci. math. et phys. Paris, An VII (1799), t. 2, Histoire, p. 13—17.
22. *Stahl C. D. M.* Grundriss der Kombinationslehre nebst Anwendung derselben auf die Analysis. Leipzig, 1880.
23. *Weingärtner J. Ch.* Lehrbuch der Kombinatorischen Analysis nach der Theorie des Herrn Professor Hindenburg ausgearbeitete von Johann Christoph Weingärtner. I. Theil. II. Theil. Leipzig, 1800.
24. Mathematische Wörterbuch oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik mit den nöthigen Beweise von G. S. Klügel, Professor der Mathematik und Physik auf der Friedrich-Universität zu Halle. Leipzig, 1803, I. Abt.; 1805, II. Abt. Издание продолжали Мольвейде и Грунерт.
25. *Brinkley J.* A method of expressing, when possible, the value of one variable quantity in integral powers of another and constant quantities, having given equations expressing the relation of these variable quantities, in which is contained the general doctrine of reversion, of approximation to the roots of equations and of the solution of fluxional equations by series.— Trans. Roy. Irish. Acad. Sci., 1800, vol. VII, p. 321—356.
26. *Brinkley J.* An investigation of the general term of an important series in the inverse method of finite differences.— Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1807, pt. I, p. 114—132.
27. *Brinkley J.* Examination of various solutions of Kepler's problem.— Trans. Roy. Irish. Acad. Sci., 1803, vol. IX, p. 84—144.
28. *Lacroix S. F.* Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. I éd. Paris, 1797, 1798; II ed. Paris, 1810, t. I; Paris, 1814, t. II; Paris, 1819, t. III.
29. *Brinkley J.* Analytical investigations respective astronomical refractions.— Trans. Roy. Irish Acad. Sci., 1815, vol. 12.
30. *Brinkley J.* Recherches analytiques sur les réfractions astronomiques et formation de nouvelles tables et résultats des observations propres à éclaircir la théorie de réfractions. Connaissance des temps pour l'Annee 1819. Paris. 1816, p. 405—417.
31. *Arago D. F.* Notice sur la vie et les ouvrages de M. John Brinkley, correspondant de l'Académie des sciences.— C. r. Acad. sci., 1835, t. I, p. 212—225.
32. *Lacroix S. F.* Elementary treatise on the differential and integral calculus / Translated from the French with an Appendix and Notes. Cambridge, 1816.
33. *Herschel J. F. W.* Collection of examples of the applications of the calculus of finite differences. Cambridge, 1820.
34. *Babbage Ch.* Passages from the life of a philosopher. London, 1968.

35. *Herschel J. F. W.* On a remarkable application of Cotes's theorem.— Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1813.
36. *Herschel J. F. W.* Consideration of various points of analysis.— Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1814, pt II, p. 440—468.
37. *Herschel J. F. W.* On the development of exponential functions, together with several new theorems relating to finite differences.— Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1816, pt I, p. 25—45.
38. *Burmamn.* Essai de caractéristique combinatoire ou notation universelle déduite d'éléments simples systématiquement combinés. (см. [18, p. 1—28]).
39. *Peacock G.* Treatise of algebra. Cambridge, 1830, vol. I, II. II ed., 1842, vol. I, 1845, vol. II. Reprinted. N. Y., 1940.
40. *Boyer C. B.* A history of mathematics. N. Y. etc., 1968.
41. *Novy L.* Origins of modern algebra. Prague, 1973.
42. *Юшкевич А. П.* К истории спора о колеблющейся струне.— В кн.: Ист.-мат. исследования. М.: Наука, 1975, вып. XX, с. 221—222.
43. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А. П. Юшкевича. М., 1972. Т. 3.
44. *Taton R.* Français, François Joseph; Français, Jacque Frédéric. Dictionary of scientific biography / Editor in chief C. C. Gillispie. N. Y., 1972, vol. V, p. 110—112.
45. *Français J. F.* Mémoire tendant à démontrer la légitimité de la séparation des échelles de différentiation et d'intégration, des fonctions qu'elles affectent, avec des applications é l'intàgration d'une classe nombreuse d'équations.— Ann. math. pures et appl., Nismes, 1812—1813, t. 3, p. 244—273.
46. *Charbonnier P.* Essais sur l'histoire de la ballistique.— Mém. de l'artillerie française, Paris, 1927, t. 6. Название этого сочинения и цитаты из него приведены по книге [47].
47. *Мандрыка А. П.* История баллистики. М.; Л., 1964.
48. *Servois F. J.* Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel.— Ann. math. pures et appl., Nismes, 1814—1815, t. 5, p. 93—140.
49. *Ch. Kramp.* Analyse des réfractions astronomiques et terrestres. Strasbourg, 1799.
50. *Киселев А. А., Ожигова Е. П.* О ранней истории операционного исчисления.— В кн.: Межвузовская конференция по истории физико-математических наук (25 мая — 2 июня 1960 г.): Тезисы докл. и сообщений. М., 1960, с. 36—37.
51. *Киселев А. А., Ожигова Е. П.* О ранней истории операционного исчисления.— В кн.: Вопросы истории физико-математических наук. М., 1963, с. 133—139.
52. *Люстерник Л. А., Петрова С. С.* Из ранней истории символического исчисления.— М.:Наука, 1971, вып. XXII, с. 85—101.
53. *Боголюбов А. Н.* Развитие идеи символического исчисления.— В кн.: И. З. Штокало. Операционное исчисление. Киев, 1972, с. 4—36.
54. *Петрова С. С.* Работы Бриссона по математическому анализу.— В кн.: История и методология естественных наук. М., 1974, вып. XVI, с. 159—167.

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОМ РЯДЕ ГЁНЕ-ВРОНСКОГО

С. С. Петрова, Д. А. Романовска́

1. Вступительные замечания. К историографии вопроса

Несчастливо сложилась судьба математического наследия польского математика и философа XIX в. Юзефа Гёне-Вронского. По ряду обстоятельств вследствие чрезвычайной неясности изложения и усложненности обозначений его результаты не получили признания современников. Неоднократные последующие попытки разобраться в существе его идей и методов, придать им более ясную и доступную форму не были особенно удачными. Они, однако, показали, что многие результаты, полученные Вронским, были впоследствии переоткрыты другими математиками. К их числу относится и введенный им впервые функциональный «определитель Вронского».

Однако бо́льшая часть написанного и изданного Вронским до сих пор по существу не подвергалась достаточно серьезному анализу со стороны математиков и историков математики. Зная силу дарования Вронского и широту взглядов на математику, можно предполагать, что в дебрях его выкладок и туманных рассуждений кроются идеи, предвосхищающие многие позднейшие достижения математики.

Некоторые исследователи творчества Вронского попытались более доходчиво изложить его основные математические идеи. Первое такое изложение было сделано при жизни Вронского братом его жены — Александром С. де Монферье (1845) в статье «Математика» во втором томе довольно известного в свое время математического словаря [1]. В этой статье речь идет об основных философских принципах построения математики с точки зрения трех первичных алгоритмов Вронского. Впоследствии де Монферье, исполняя пожелание Вронского, изложил некоторые, в основном элементарные, разделы математики согласно идеям и методам последнего в четырехтомной

математической энциклопедии, вышедшей в Париже в 1856 г. [2]. Если де Монферье рассматривал достижения Вронского в довольно элементарном аспекте, то в серии статей Э. Веста, появившейся в 80-х годах в журнале Лиувилля и объединенных в дальнейшем в одну книгу «Изложение общих математических методов Гёне-Вронского, решение и интегрирование уравнений, различные приложения» [3], мы находим уже более глубокий и детальный анализ работ Вронского. Однако книга Веста, в которой используется столь же сложная и громоздкая символика и терминология Вронского, читается не легче, чем труды самого Вронского. В 1882 г. Т. Мюир в курсе теории определителей обратил внимание на так называемые определители Вронского [4]. Позднее он подробнее осветил этот вопрос в своем известном труде по истории теории определителей [5, т. I, с. 473].

Математическое творчество Гёне-Вронского привлекало многих авторов конца XIX — начала XX в. Наиболее известным из них был польский математик и историк математики С. Дикштейн¹. Начиная с 1886 г. он публикует многочисленные статьи, посвященные различным аспектам творчества Вронского, причем с 1890 г. он помещает их главным образом в журнале «Prace matem. fiz.», он подробно разбирает работы Вронского по алгебре [6—7, 8], логарифмическим рядам [9], «высшему» закону Вронского [10, 11] и т. д. Дикштейну принадлежит также обширная монография о Вронском [12], включающая результаты его предшествующих статей. Одновременно с Дикштейном некоторые исследования работ Вронского были проведены другими польскими математиками — В. Краузе [13] и К. Жоравским [14]. В России о Вронском писал В. В. Бобынин, которого главным образом интересовала философско-математическая концепция Вронского.

¹ Самуил Дикштейн (Samuel Dickstein, 1851—1939) — польский математик, с 1915 г. — профессор Варшавского университета, основатель Варшавского научного общества, работавший в области алгебры, теории чисел и истории математики; широко известна его издательская деятельность: вместе с Чаевичем он издавал с 1888 г. журнал «Труды по математике и физике», с 1892 г. — «Физико-математическую библиотеку», а с 1897 г. — «Математические известия». В области истории математики Дикштейн занимался в основном исследованием творчества Гёне-Вронского. Он написал также ряд статей о Яне Бротеке, Р. Бошковице, Г. Грассмане и др.

Его книга [15] содержит также биографический очерк и очень подробную библиографию.

Дать анализ результатов Вронского — дело чрезвычайно трудное. Отчасти это удалось великому соотечественнику Вронского Стефану Банаху в 1939 г., предложившему интересную интерпретацию «универсального ряда» Вронского [16].

В общих сочинениях по истории математики Вронский упоминается, как правило, в связи с определителем, носящим теперь его имя, а также в связи с критикой теории аналитических функций Лагранжа (см., например, [17, с. 70; 18, с. 170; 19, с. 402]).

Данная работа ставит своей целью охарактеризовать некоторые идеи и методы Вронского в контексте современных математических представлений; при этом основное внимание будет сосредоточено на «универсальном» ряде Вронского².

² Уже после сдачи рукописи в редакцию авторам стало известно, что исследованием творчества Гёне-Вронского ранее занимался Арсений Евгеньевич Кастальский (1907—1963). А. Е. Кастальский, уроженец г. Драгиничи над Бугом Гродненской губернии в 1939 г. окончил естественно-математический факультет Виленского университета; после освобождения Западной Белоруссии Советской Армией он работал в различных учреждениях, а с 1947 г. и до кончины — в Гродненском педагогическом институте, сначала старшим преподавателем, а с 1957 г. — заведующим кафедрой элементарной математики. Последние 15 лет Кастальский посвятил изучению трудов Вронского. О своей работе он докладывал в 1955 г. на научно-исследовательском семинаре по истории математики МГУ. Накануне смерти им были подготовлены для Межвузовской конференции по истории физико-математических наук 1963 г. доклады о жизни и математическом творчестве Вронского и о его «наивысшем законе» (второй — в сотрудничестве с А. А. Киселевым). Смерть помешала ему выступить с докладами. Они были прочитаны А. А. Киселевым, который консультировал А. Е. Кастальского в этой его работе и сотрудничал с ним. У А. А. Киселева хранятся тексты упомянутых докладов, объемистая рукопись, посвященные жизни и творчеству Вронского, Знакомство с этими материалами позволило авторам внести некоторые дополнения в биографический очерк, а также обратило их внимание на работы [20—23], в которых приводится «универсальный ряд» Вронского. Эти работы были учтены в тексте четвертого раздела. Настоящая справка об А. Е. Кастальском составлена на основании сведений, сообщенных А. А. Киселевым.

2. Биография Вронского³

Юзеф Мари Гёне-Вронский родился в 1778 г. в г. Познани. Отец его, выходец из Чехии, Антон Гёне был хорошим архитектором и сделал в Польше блестящую карьеру, достигнув положения архитектора последнего польского короля Станислава Августа Понятовского; добавление к фамилии Вронский было сделано при даровании ему польского дворянства. Юзеф учился в Варшавском кадетском корпусе. В шестнадцать лет он был уже артиллерийским офицером и сражался за независимость Польши в армии Костюшко. В битве при Мацеевицах (10 октября 1794 г.) попал вместе с Костюшко в русский плен. Вскоре после последнего раздела Польши Вронский поступил на службу в русскую армию в штаб Суворова. В 1797 г. в чине полковника вышел в отставку, решив посвятить себя научной деятельности. Для этого он отправляется в Германию, где изучает юриспруденцию и философию и становится убежденным кантианцем. В 1800 г. Вронский едет в Марсель, где присоединяется к польскому гарнизону, организованному во Франции генералом Домбровским. В 1803 г. он окончательно решает оставить военную карьеру и заняться исключительно научной деятельностью. В этом же году он начинает работу в обсерватории Марселя и публикует свое первое сочинение по философии «Критика философии, основанная на первом принципе человеческого знания» [25], за которым появляется еще ряд его философских работ, написанных по большей части под влиянием кантианства. В дальнейшем Вронский строит свою философскую систему, названную им «мессианизм», в которой уделяет большое внимание идее единства славянских народов. На протяжении всей жизни он тщетно пытался заинтересовать своей доктриной крупнейших политических деятелей Европы, адресуя многочисленные послания русскому царю, Наполеону III и римскому папе.

В 1810 г. Вронский приезжает в Париж и представляет в Институт Франции свой первый мемуар по математике, озаглавленный «Основной принцип алгоритмических методов»⁴. Этот принцип, названный им «высшим» законом

³ Биографические сведения заимствованы из книг [12, 15, 24], а также из неопубликованной рукописи А. Е. Кастальского.

⁴ Насколько позволяют судить списки опубликованных работ Вронского, этот мемуар не был издан, однако его содержание, по

математики, в дальнейшем был положен в основу предлагаемых им реформ математики и всего человеческого знания. Математическим выражением этого принципа служил универсальный ряд, позволивший вывести все известные тогда разложения функций; ниже мы остановимся на нем подробнее. Деламбр, непременимый секретарь Академии, ввиду, как ему казалось, важности работы предложил дать отзыв на нее уже удалившемуся от дел престарелому Лагранжу. В отзыве, написанном Лагранжем совместно с Лакруа и воспроизведенном позднее в полемическом сочинении Вронского [26], мы читаем: «Поразительным для Ваших комиссаров в мемуаре Вронского явилось то, что из своей формулы он выводит все известные разложения функций, представляющие собой лишь частные случаи этой формулы» [26, с. 29]. Со смертью Лагранжа Вронский утратил единственного современного ему крупного математика, пытавшегося понять его идеи. Впоследствии его работы по математике находят уже открыто враждебный прием (см., например, отзыв Араго и Лежандра на рукописи мемуара Вронского «Опровержение теории аналитических функций Лагранжа», приведенный позднее Вронским в публикации этого мемуара [26, с. 85], а также замечания Жергонна о методе Вронского для решения алгебраических уравнений любого порядка [28]), чему способствуют и его критические выступления, направленные против крупнейших математических авторитетов его времени (например, Лагранжа [26], Лапласа [29], Пуассона [26, с. 43—81]). Такая ситуация неблагоприятно сказалась на его материальном положении. Умер Гёне-Вронский в 1853 г. под Парижем в Нейи (Neuilly) в большой бедности.

3. О творчестве Гёне-Вронского

Творческая деятельность Вронского необычайно обширна и многогранна. Начиная с 1803 г. он публикует сочинения, охватывающие широкий спектр вопросов — от построения тонких философских теорий до конструирования технических приспособлений. Его философское учение, на характеристике которого мы останавливаться

свидетельству самого Вронского [26, с. 3], вошло в сочинение, опубликованное в Париже в 1811 г. [27].

не будем, нашло многочисленных последователей и почитателей, среди которых был и О. Бальзак. Интерес к нему сохраняется и по настоящее время (об этом см., например, книгу [24]). Одним из практических выводов из философской системы Вронского была, как мы уже говорили, идея единства славянских народов.

Большое внимание Вронский уделял техническим задачам. Еще в Марселе он принял деятельное участие в разработке проекта городского водопровода, а также проекта ирригационных сооружений в устьях Роны. Вронский занимается математической теорией паровых машин, разрабатывает их новые системы, в 1837 г. представляет проект «подвижных рельсов или движущихся железных дорог», которым приписывал большое будущее. Занимался Вронский также астрономией, механикой, химией, географией и многими другими областями знания.

Однако центр интересов Вронского лежал в математике. Философское осмысление ее содержания составляло предмет его непрерывных размышлений, приведших его к оригинальной системе философии математики, рассмотрение которой лежит за пределами данной работы. Вронский затронул также некоторые вопросы оснований математики. Широкую известность в историко-математической литературе приобрели его возражения против идеи Лагранжа построить анализ без пределов и бесконечно малых. В «Опровержении теории аналитических функций Лагранжа» Вронский выступает против изгнания бесконечности из анализа и вообще из математики. «Ибо нет математической науки без бесконечности», — напишет он впоследствии в «Философии бесконечного» [30, с. 38].

Конкретные математические проблемы мало интересовали Вронского, главной его заботой была разработка формального аппарата математики. При этом он искал общие универсальные методы для решения широкого круга задач, например в алгебре и теории чисел — общий метод решения алгебраических уравнений любых степеней или сравнений, в анализе — универсальный способ решения дифференциальных и разностных уравнений любого порядка и т. п. Легко понять, что при такой общности постановок трудно получить эффективные методы, а увлечение формальной стороной дела приводило иногда Вронского к прямым ошибкам. Так, его работа о нахождении корней общего алгебраического уравнения любой степе-

ни оказалась ошибочной: он считал, что всегда возможно их выражение в радикалах [31].

Однако в процессе такого рода формальных построений Вронский получил некоторые результаты, оказавшиеся важными в дальнейшем развитии математики. Так, не говоря уже о введении «определителя Вронского», значительное развитие у него получила формальная теория рядов (об этом речь пойдет ниже), а также теория симметрических функций, названных им алеф-функциями; **ℵ**-функциями [27] Вронский называл функции

$$\aleph[N]^m = \sum x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

где сумма берется по всем $k_i \geq 0$ таким, что $\sum_{i=1}^n k_i = m$.

Впоследствии (в 1841 г.) алеф-функциями занимался Якоби [32]. На Вронского он не ссылаясь. Функции эти продолжают употребляться и в современном комбинаторном анализе (см. [33, с. 112]). Дальнейшее развитие получила в работе Вронского теория факториалов Крампа.

4. Теория рядов и «универсальный» ряд Вронского

Как мы уже отмечали, «универсальный» ряд Вронского, названный им «высшим» законом, появляется в его первой математической работе 1810 г. и в дальнейшем играет принципиальную роль не только в математических исследованиях, но и в философской концепции Вронского. Этот ряд Вронский записывает в виде

$$F(x) = A_0 \Omega_0 + A_1 \Omega_1 + \dots, \quad (1)$$

где A_i — числовые коэффициенты, а Ω_i — произвольные функции переменной x . Он записывает [27] общий ряд (1) в более частной форме, беря в качестве произвольных функций факториалы Крампа ⁵:

$$\varphi x^{m/\xi} = \varphi(x) \varphi(x + \xi) \varphi(x + 2\xi) \dots \varphi(x + (m - 1)\xi),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, ξ — некоторое приращение переменной x . Тогда «универсальный» ряд (1)

⁵ О факториалах Крампа см. статью [34].

Решая ее по правилу Крамера, он и получает отношение определителей

$$A_{\mu} = \frac{w [\Delta^a \varphi x, \Delta^b \varphi x^{2/\xi}, \dots, \Delta^l \varphi x^{(\mu-1)/\xi}, \Delta^{\mu} F x]}{w [\Delta^a \varphi x, \Delta^b \varphi x^{2/\xi}, \dots, \Delta^{\mu} \varphi x^{\mu/\xi}]}$$

Поскольку матрица определителя, стоящего в знаменателе, трехугольная, знаменатель будет равен произведению диагональных элементов, что и дает выражение (3). В предельном случае, когда шаг разности $\xi \rightarrow 0$. Вронский получает аналогичное представление для коэффициентов A_i , с тем только отличием, что разности, входящие в определители, заменяются производными. В этом случае ряд (2) представляет собой разложение функции Fx по степеням произвольной функции $\varphi(x)$.

Итак, Вронский впервые ввел определитель, носящий его имя, при выводе общего выражения коэффициентов универсального ряда (2). В 1882 г. Т. Мюир писал: «Вронскианы были прежде использованы Вронским, автором хорошо известной общей теоремы относительно этих функций [$w [\Delta^a x_1, \dots, \Delta^p x_{\omega}]$.— С. П. и Д. Р.]; будучи забытыми в течение 60 лет, они снова увидели свет благодаря исследованиям Кристофеля и Фробениуса, которым мы обязаны открытию их свойств. Прошло много времени, прежде чем установили тождественность функций Вронского и определителей, так что мне кажется справедливым дать им имя автора» [4, с. 224].

В дальнейшем Вронский рассматривает определители еще более общего вида, чем те, за которыми закрепилось его имя. Он пишет: «Нужно, наконец, отметить, что если характеристика Δ вместо того, чтобы обозначить разности функций $x_1, x_2, x_3, \dots$, обозначает совсем другую систему алгоритмических функций, взятых от тех же самых $x_1, x_2, x_3, \dots$, то сказанное относительно функций шин⁶ будет также верно» [35, с. 12]. Это означает, что Вронский считал, что можно вычислить коэффициенты A_k и тем самым найти соответствующее разложение функции $F(x)$ в ряд по функциям $\varphi_k(x)$ не только для последовательностей разностей или производных, взятых от функций $\varphi_k(x)$ в некоторой точке x_0 при выполнении условия (4),

⁶ По всей вероятности, Вронский вводит термин «шин», используя древнееврейский алфавит, в котором «шин» служит названием буквы «ш», как в случае функций алеф (см. выше).

но и для любой другой системы функционалов L_i при выполнении аналогичного условия $L_i \varphi_k = 0$ для $k > i$. Данную систему функционалов Вронский и называет «алгоритмическими функциями». Эта идея Вронского была развита и обоснована впоследствии С. Банахом (см. ниже).

Вронский отмечает, что в его универсальный ряд как частный случай входит интерполяционный ряд Ньютона и ряд Тейлора. Своим методом Вронский находит и ряд других менее тривиальных разложений. Прежде всего он получает ряд Лагранжа для обратной функции, обобщая его на многомерный случай. Задача, решаемая разложением, полученным Лагранжем в 1769 г. (подробнее см. в [36]), состоит в следующем: пусть переменная z определяется как функция x уравнением $z = a + x f(z)$, где $f(a) = 0$. Требуется разложить в ряд по степеням x произвольную функцию

$$F(z) = F[z(x)].$$

Решение этой задачи, полученное Лагранжем, дает формула

$$F(z) = F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [f^{(n)}(a) F'(a)]. \quad (6)$$

В 1812 г. в работе «Опровержение теории аналитических функций Лагранжа» [26] Вронский обобщает задачу Лагранжа и показывает, что формула Лагранжа является частным случаем его общего ряда. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f_k(x), \quad f(a) = 0,$$

где $f(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$ — заданные функции, $x_1, x_2, \dots, x_n$ — независимые переменные. Из этого уравнения переменная x выражается как некоторая функция $x_1, x_2, \dots, x_n$: $x = \varphi(x_1, \dots, x_n)$. Пользуясь своим методом, Вронский находит разложение функции $F(x) = F[\varphi(x_1, \dots, x_n)]$ в виде

$$F(x) = F(a) + \sum_{p, q, \dots, z} Z(p, q, \dots, z) x_p x_q \dots x_z, \quad (7)$$

где индексы $p, q, \dots, z$ независимо пробегают значения от 1 до n , а их число пробегает значения 1, 2, 3, $\dots$. Выра-

жение для коэффициента $Z(p, q, \dots, z)$ имеет вид

$$Z(p, q, \dots, z) = \frac{\begin{vmatrix} df(x) & df^2(x) & \dots & df^{\mu-1}(x) & d \left[\int f_p(x) \dots f_z(x) dF(x) \right] \\ d^2f(x) & d^2f^2(x) & \dots & d^2f^{\mu-1}(x) & d^2 \left[\int f_p(x) \dots f_z(x) dF(x) \right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^{\mu}f(x) & d^{\mu}f^2(x) & \dots & d^{\mu}f^{\mu-1}(x) & d^{\mu} \left[\int f_p(x) \dots f_z(x) dF(x) \right] \end{vmatrix}}{1! 2! \dots \mu! (df)^{1+2+\dots+\mu}},$$

где μ — число индексов, а определитель берется в точке $x = a$, в которой $f(a) = 0$. В силу этого все элементы определителя, стоящие вне диагонали и не в последнем столбце, обращаются в нуль, так как

$$\frac{d^k f^l(x)}{[df(x)]^k} \Big|_{x=a} = 0 \quad \text{при } k \neq l.$$

Поэтому приведенное выше громоздкое выражение для $Z(p, q, \dots, z)$ упрощается, и мы получаем

$$Z(p, q, \dots, z) = \frac{1}{\mu!} \frac{d^{\mu-1} [f_p(x) \dots f_z(x) dF(x)]}{[df(x)]^{\mu-1}}.$$

Разложение (7) является многомерным аналогом ряда Лагранжа для обратной функции. Действительно, при $n = 1$ и $f(x) = x - a$ $x - a = x_1 f_1(x)$, а ряд (7) переходит в ряд (6). В книге Веста [3] указано, что в 1873 г. Кэли, не зная о работе Вронского, при выводе формулы Лагранжа использовал подобный же метод. Любопытно отметить, что несколькими годами ранее (1868 г.) другой англичанин де Морган использовал один из результатов только что рассмотренных нами исследований Вронского, хотя и довольно элементарный, для вычисления корня многочлена с помощью ряда. К сожалению, саму эту работу де Моргана найти не удалось, указания на нее имеются в книге [37]. Суть проблемы состоит в следующем. Рассматривается разложение в ряд функции, обратной к $f(z)$:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n.$$

Если существует единственный минимальный по модулю корень x_1 уравнения $f(z) = 0$ и в круге $R > |X_1|$ функция (z) аналитична, то можно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n-1}}{s_n} = x_1.$$

Таким образом, вычисление корня x_1 сводится к нахождению коэффициентов s_n ряда для $1/f(z)$. Наиболее просто они определяются по формулам, выведенным Вронским [27]:

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n} = s_0 + s_1 x + \dots,$$

$$a_0 s_0 = 1,$$

$$a_0 s_1 + a_1 s_0 = 0,$$

$$a_0 s_2 + a_1 s_1 + a_2 s_0 = 0;$$

.....

$$s_n = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}}{a_0^{n+1} (-1)^{n+1}}.$$

Эти формулы оказались очень удобными для вычислительных методов, связанных с современной вычислительной техникой, и до сегодняшнего дня сохранили имя Вронского (см., например, [20, с. 17]).

В 1815 г. в работе [35] Вронский рассматривает общее разложение

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \Omega_k(x), \quad (1')$$

где $\Omega_0(x) = 0$, а $\Omega_k(x)$ имеет в точке $x = a$ нуль k -го порядка, т. е.

$$\Omega_k(x) = (x - a)^k \varphi_k(x), \quad \text{где } \varphi_k(a) \neq 0.$$

Тогда, дифференцируя (1') и подставляя $x = a$, получаем

$$F(a) = A_0,$$

$$F'(a) = A_1 \Omega_1'(a),$$

.....

$$F^{(n)}(a) = \sum_{k=1}^n \Omega_k^{(n)}(a) A_k.$$

Из этой треугольной системы легко находятся коэффициенты A_k . В частности, Вронский рассматривает в качестве базисных функций

$$\Omega_k(x) = \frac{(x-a)^k}{(x+n_1)(x+n_2)\dots(x+n_k)}$$

и выписывает несколько первых членов разложения. Полагая затем $n_k = a$, он находит более частное разложение. В качестве примера он находит разложение для логарифма, несущественно отличающееся от разложения $\ln [(a+x)/(a-x)]$ (подробнее о логарифмических рядах см. [9]). При $\varphi_k(x) \equiv 1$ мы получаем обычное тейлоровское разложение. Таким образом, ряд (1') можно рассматривать как прямое обобщение ряда Тейлора.

Приведенные примеры дают возможность описать метод Вронского на современном языке. Пусть задана базисная система функций $\{\varphi_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ и нужно отыскать коэффициенты разложения

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x). \quad (8)$$

Зададимся последовательностью линейных функционалов $\{L_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$.

Применяя эти функционалы к разложению (8), получаем бесконечную систему

$$L_k f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n L_k \varphi_n(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Для решения этой системы Вронский использует такой естественный прием, рассматривая усеченную систему

$$L_k f(x) = \sum_{l=0}^n A_l L_k \varphi_l(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Решение ее по правилу Крамера дает

$$A_k^{(n)} = w_{kn}/w_n. \quad (10)$$

Тогда, по мнению Вронского,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_k^{(n)} = A_k$$

и дает искомые коэффициенты. По-видимому, сам Вронский понимал, что переход к пределу в дроби (10) трудно реализовать, поэтому в примерах он выбирает последовательность функционалов $\{L_k\}$ так, чтобы

$$L_k \varphi_n = 0 \quad \text{при } n > k.$$

При этом система (9) получается треугольной и коэффициенты A_k находятся без труда. Еще проще найти эти коэффициенты, если удастся отыскать последовательность функционалов, биортогональную к последовательности $\{\varphi_k\}$. Это означает, что

$$L_i \varphi_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$$

(δ_{ij} — символ Кронекера). В этом случае

$$A_n = L_n f.$$

Так, например, для ряда Тейлора и Ньютона такими биортогональными последовательностями функционалов являются соответственно

$$L_k f = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad L_k f = \frac{\Delta_h^k f(0)}{k!} \quad (h - \text{шаг}).$$

Менее тривиально находится биортогональная последовательность функционалов в случае формулы Лагранжа. Например, для самого простейшего случая, когда нужно найти разложение функции $z = z(x)$, определяемой из уравнения $z = x f(z)$ по степеням x , биортогональная последовательность функционалов имеет вид

$$L_n \varphi = \frac{1}{n!} [f^n(z) \varphi'(z)]_{z=0}^{(n)}.$$

Нетрудно непосредственно проверить, что

$$L_i x^j = L_i [z/f(z)]^j = \delta_{ij}.$$

Разумеется, сам Вронский не мог дать такую современную интерпретацию своему методу.

«Универсальный» ряд Вронского был хорошо известен в математической литературе и приводился почти во всех учебниках по анализу в конце XIX — начале XX в. как пример «любопытного» формального разложения (см., например, [21, с. 119—120; 22, с. 352—356; 23, с. 1393—1804]). И только в 1939 г. Стефан Банах [16] показал, что при некоторых допущениях общий ряд Вронского сходится к данной функции. Банах записывает универсальный ряд Вронского в виде

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i(t), \quad (11)$$

где $\{x_i(t)\}$ — некоторая фиксированная последовательность функций. Далее выбирается последовательность линейных функционалов $\{f_j\}$, формально записывается конечное равенство

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_{in} x_i(t)$$

и результат применения к нему функционалов f_j

$$f_j(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_{in} f_j(x_i) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Решая далее по правилу Крамера последнюю систему, Банах находит выражение для коэффициентов

$$\alpha_{in}(x) = w_{in}(x)/w_n,$$

где

$$w_n = \|f_i(x_j)\|,$$

$$w_{ni}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) \dots f_1(x_{i-1}) & f_1(x) & f_1(x_{i+1}) \dots f_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_n(x_1) \dots f_n(x_{i-1}) & f_n(x) & f_n(x_{i+1}) \dots f_n(x_n) \end{vmatrix}.$$

Если существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{in}(x) = \alpha_i(x) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

то эти пределы, как считал Вронский, и дают коэффициенты разложения (11). Исследуя этот метод Вронского, Банах предполагает, что функции $x_i(t)$, по которым ведется разложение, и функция $x(t)$ принадлежат некоторому линейному нормированному пространству L . На это пространство он накладывает следующее ограничение:

для любой последовательности $\{x_i(t)\} \subset L$ существует последовательность таких положительных чисел $\{M_i\}$, что из сходимости ряда

$$\sum |\alpha_i| M_i$$

следует сходимость ряда (11) (назовем это свойство (A)). После серии вспомогательных предложений Банах доказывает следующее утверждение: если пространство L содержит последовательность $\{\alpha_i(t)\}$ и удовлетворяет свойству (A), для каждого $x(t)$ существуют пределы (12), то ряд $\sum x_i(t) \alpha_i(x)$ сходится к $x(t)$. Банах приводит ряд примеров, среди которых имеются примеры Вронского для

$$f_n(x) = \Delta^{n-1} x(0), \quad f_1(x) = x(0), \\ f_n = x^{(n-1)}(0),$$

что дает ряд Ньютона и ряд Тейлора.

Таким образом, Банах выяснил, при каких условиях, наложенных на базисные функции φ_i и на класс функций $F(x)$, каждая функция этого класса представляется сходящимся рядом по функциям φ_i в общем разложении Вронского. Подобная проблема у Вронского, естественно, не возникала. В заключение отметим, что Вронский предложил общий метод ускорения сходимости ряда (2), если он сходится медленно, и метод суммирования, если он расходится. Этот метод состоит в том, что функция $\varphi(x)$ в (2) заменяется другой функцией $\psi(x)$, которая достаточно просто раскладывается по степеням $\varphi(x)$. Тогда из сравнения коэффициентов при функциях $\varphi(x)$ Вронский получает коэффициенты второго ряда. Этот метод Вронского является обобщением, хотя и не очень содержательным, известного метода суммирования Эйлера (см. [38, гл. VIII]). В качестве примера Вронский приводит ряд Тейлора

$$F(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots$$

Он полагает $\psi(x) = (x-a)/(n+x)$. Тогда

$$F(x) = A'_0 + A'_1 \frac{x-a}{n+x} + A'_2 \left(\frac{x-a}{n+x} \right)^2 + A'_3 \left(\frac{x-a}{n+x} \right)^3 + \dots$$

Соотношения между коэффициентами A_i и A'_i следующие:

$$A_0 = A'_0,$$

$$A_1(n+a) = A'_1,$$

$$A_2(n+a)^2 = A'_2 - A'_1,$$

$$A_3(n+a)^3 = A'_3 - 2A'_2 + A'_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_\mu(n+a)^\mu = A'_\mu - \frac{\mu-1}{1} A'_{\mu-1} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2} A'_{\mu-2} - \dots$$

Вронский рассматривает для примера ряд (для $\ln x$)

$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \dots,$$

сходящийся для $0 < x \leq 2$. Полагая $n = 1$, он получает

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 2, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 2 \cdot \frac{1}{3}, \quad A_4 = 0,$$

$$A_5 = 2 \cdot \frac{1}{5}, \dots,$$

и преобразованный ряд

$$2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right]$$

сходится для всех $x > 0$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Montferrier A. S. de.* Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées, 2^e éd. Paris, 1845.
2. *Montferrier A. S. de.* Encyclopédie mathématique ou exposition complète de toutes les branches des mathématiques d'après les principes de la philosophie des mathématiques de Hoëné-Wronski. Paris, 1856—1859. Vol. 1—4.
3. *West E.* Exposé des méthodes générales en mathématiques, résolution et intégration des équations, applications diverses d'après Hoëné-Wronski. Paris, 1886.
4. *Muir T.* A treatise on the theory of determinants. London, 1882.
5. *Muir T.* The theory of determinants in the historical order of development. N. Y., 1960, vol. 1—4.
6. *Dickstein S.* O metodzie teleologicznej Hoëne-Wrńoskiego rozwywania równań algebraicznych. Kraków, 1889.
7. *Dickstein S.* Własności i niektóre zastosowania wrńoskiańów.— Pr. mat.-fiz., 1890, t. II, s. 171—177.
8. *Dickstein S.* Uwagi o metodzie teleologicznój.— Pr. mat.-fiz., 1892, t. III, s. 126—130.

9. *Dickstein S.* On szeregach logarytmowych Wrońskiego.— Pr. mat.-fiz., 1893, t. IV, s. 88—94.
10. *Dickstein S.O.* «prawie najwyższem» Hoene-Wrońskiego w matematyce.— Pr. mat.-fiz., 1890, t. II, s. 145—168.
11. *Dickstein S.* O «prawie najwyższem» Hoene-Wrońskiego w matematyce.— Pr. mat.-fiz., 1894, t. V, s. 123—145.
12. *Dickstein S.* Hoene-Wroński. Jego życie i prace. Kraków, 1896.
13. *Krauze W.* Metoda teleologiczna Hoene-Wrońskiego.— Pr. mat.-fiz., 1892, t. III, s. 110—126.
14. *Zorawski K.* O szeregach odwracających.— Pr. mat.-fiz., 1894, t. V.
15. *Бобынин В. В.* Гёне-Вронский и его учение о философии математики. М., 1894.
16. *Banach S.* Über das «Loi suprême» von J. Hoene-Wroński.— Bull. intern. Acad. pol. sci. et lett. Ser. A, 1939, N 1—3A.
17. История математики с древнейших времен до начала XIX века. Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1972, Т. 3.
18. Хрестоматия по истории математики / Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Просвещение, 1977.
19. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: Наука, 1966.
20. *Рутисхаузер Г.* Алгоритмы частных и разностей. М.: ИЛ, 1960.
21. *Mansion P.* Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand. Paris, 1887.
22. *Laurent H.* Traité d'analyse. Paris, 1888. t. III.
23. *Burkhardt H.* Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen.— Dtsch. Math. Verein., 1908, 102, S. 1393—1804.
24. *d'Arcy Ph.* Hoëné-Wronski. Une philosophie de la création. Paris, 1970.
25. *Hoëné-Wronski J.* Philosophie critique, fondée sur le premier principe du savoir humain. Marselle, 1803.
26. *Hoëné-Wronski J.* Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange. Paris, 1812.
27. *Hoëné-Wronski J.* Introduction à la Philosophie des Mathématiques. Paris, 1811.
28. *Gergonne J. D.* Sur la méthode de M. Wronski pour la résolution générales des équations.— Ann. math. pures et appl., Nismes, 1818—1819, t. IX, p. 211—212.
29. *Hoëné-Wronski J.* Critique de la théorie des fonctions génératrices de Laplace. Paris, 1819.
30. *Hoëné-Wronski J.* Philosophie de l'infini. Paris, 1814.
31. *Hiené-Wronski J.* Résolution générale des équations de tous les degrés. Paris, 1812.
32. *Jacobi C. G. J.* Über die alternirenden Functionen.— B. Ostwald's Klassiker Wissenschaften, 1896, N 77, S. 50—65.
33. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963.
34. *Курдюмова А. И.* О факториалах Крампа.— В кн.: Проблемы истории математики и механики. М.: Изд-во МГУ, 1975, вып. 2.
35. *Hoëne-Wronski J.* Philosophie de la technique algorithmique. Paris, 1815—1817.
36. *Журавский А. М.* К истории ряда Лагранжа.— Ист.-мат. исследования, М.: Наука, 1977, вып. XXII, с. 34—45.
37. *Whittaker E. T., Robinson G.* The calculus of observations. London, 1924, с. 120—122.
38. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.

О «ВЫСШЕМ ЗАКОНЕ» ГЁНЕ-ВРОНСКОГО¹

С. Банах

«Высший закон» Гёне-Вронского представляет собой разложение некоторой функции $x(t)$ в ряд вида

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i(t), \quad (*)$$

где $x_i(t)$ — заданные функции. Суть этого закона составляет правило вычисления коэффициентов α_i , когда функции $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... известны. Разложение (*) не всегда возможно, и к тому же это правило не всегда применимо. Тем не менее оно приводит (и это произвело большое впечатление на современников Гёне-Вронского, в частности на Лагранжа) к точным формулам для коэффициентов α_i разложений в ряды Тейлора, Бурмана, Лагранжа и других². В данной работе доказывается, что при весьма общих предположениях метод Гёне-Вронского определения коэффициентов справедлив для широкого класса функций, зависящих от заданных функций $x_i(t)$.

Пусть, например, $x_i(t)$ — непрерывные функции и ряд (*) сходится равномерно. Тогда доказывается, что формулы Гёне-Вронского верны для функций $x(t)$, представимых равномерно сходящимися рядами, коэффициенты которых имеют определенный порядок роста. Следовательно, если заданы некоторые формулы для коэффициентов α_i , то они должны совпадать с указанными Гёне-Вронским, если эти коэффициенты имеют тот же порядок роста.

В первом и втором параграфах содержатся известные понятия и теоремы теории линейных функционалов³,

¹ Über das «Loi suprême» von J. Hoene-Wroński. — Bull. intern. de l'Acad. Polon. des sciences. Ser. A, Cracovie, 1939, N 1—3a, 1—10. (Пер. с нем. С. С. Петровой).

² Об истории исследуемого Банахом вопроса см. статью С. С. Петровой и Д. Романовской, помещенную в настоящем сборнике.

³ Banach S. Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932.

в третьем параграфе в терминах этой теории дается интерпретация «высшего закона» Гёне-Вронского, наконец, в четвертом параграфе этот закон пояснен на частных случаях.

1

Пусть E — произвольное пространство типа (В)⁴. Обозначим через B^* наименьшее множество аддитивных функционалов, определенных в произвольном линейном подпространстве L пространства E и удовлетворяющих двум условиям:

1. B^* содержит все линейные функционалы⁵.

2. Если $f_n(x)$ — аддитивные функционалы из B^* , определенные в подпространстве L пространства E и $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ в L , то $f(x)$ также принадлежит B^* .

Легко видеть, что каждый функционал из B^* является функцио алом Бэра, однако не известно, будет ли верно обратное — будет ли каждый аддитивный функционал Бэра принадлежать B^* . Мы будем говорить, что линейное подпространство обладает свойством (А), если для любой последовательности $\{X_i\}$ из L существует такая последовательность положительных чисел $\{M_i\}$, что для произвольной числовой последовательности $\{\alpha_i\}$, удовлетворяющей условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i < \infty, \quad (1)$$

ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i \quad (2)$$

сходится и его сумма принадлежит L . Само пространство E , очевидно, обладает свойством (А).

Т е о р е м а 1. *Если линейные подпространства $L_1, L_2, \dots$ обладают свойством (А), то их пересечение также обладает этим свойством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{X_i\}$ — некоторая последовательность из L . Согласно условию для каждого

⁴ Пространство типа (В) — пространство Банаха. (Примеч. пер.).

⁵ Линейный функционал — аддитивный непрерывный функционал. (Примеч. пер.).

из L_n существует последовательность положительных чисел $\{M_i^n\}$ такая, что из условия $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i^n < \infty$ следует, что ряд (2) сходится и его сумма принадлежит L_n . Если положить

$$M_i = \max_{n=1, \dots, i} \{M_i^n\},$$

то числовая последовательность $\{M_i\}$ будет обладать во всех L_n тем же самым свойством. Следовательно, она обладает им и в пересечении L .

Далее из сходимости ряда (1) следует сходимость ряда (2). Сумма последнего принадлежит L .

2

Т е о р е м а 2. а) Если $\{X_i\}$ — некоторая последовательность из E и $\{M_i\}$ — последовательность положительных чисел, обладающая тем свойством, что из сходимости ряда (1) следует сходимость ряда (2), то существует положительная константа K , такая, что для любой числовой последовательности $\{\alpha_i\}$, для которой выполняется условие (1), имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i \right\| \leq K \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i. \quad (3)$$

Т е о р е м а 2. б) Если $f(x)$ — некоторый аддитивный функционал из B^* , определенный в линейном подпространстве L , содержащем суммы рядов (2) (с условием (1)), то для любой последовательности чисел $\{\alpha_i\}$, для которой выполняется условие (1), имеет место соотношение

$$f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f(x_i).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через H пространство числовых последовательностей $\{\alpha_i\}$, для которых выполняется условие (1). Введем в этом пространстве норму

$$\|\{\alpha_i\}\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i.$$

Легко видеть, что H является пространством типа (В). Определим в H последовательность линейных операторов

$\{U_n\}$ следующим образом:

$$U_n(\{\alpha_i\}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \quad (\{\alpha_i\} \in H) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда оператор

$$U_n(\{\alpha_i\}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i,$$

являющийся пределом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \{\alpha_i\} = U \{\alpha_i\},$$

также будет линейным. В таком случае найдется положительная константа K , для которой выполняется неравенство (3). Далее

$$F(\{\alpha_i\}) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i\right) = f[U(\{\alpha_i\})] \quad (4)$$

есть функционал Бэра, определенный во всем пространстве H . Из этого, как известно, следует, что $F(\{\alpha_i\})$ является линейным функционалом.

Пусть $\mathfrak{A} = \{\alpha_i\}$ — числовая последовательность из H . Если положить

$$\mathfrak{A}_n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, 0, 0, \dots),$$

то $\mathfrak{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n$ в смысле выбранной нормы. Тогда в силу (4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n) = F(a),$$

следовательно,

$$f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f(x_i).$$

Т е о р е м а 3. Если $\{z_n\}$ — некоторая последовательность из E и $\{\bar{M}_n\}$ — последовательность положительных чисел, такая, что для любой числовой последовательности $\{a_n\}$, для которой имеет место условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \bar{M}_n < \infty, \quad (5)$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n \quad (6)$$

сходится, то все полученные таким образом элементы (6) образуют линейное подпространство L , обладающее свойством (A).

Доказательство. По теореме 2 найдется такое число $K > 0$, что для любой числовой последовательности $\{\alpha_i\}$, для которой выполняется условие (5), имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n \right\| \leq K \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \bar{M}_n. \quad (7)$$

Пусть $\{X_i\}$ — некоторая последовательность из L , тогда

$$X_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^i z_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^i| \bar{M}_n = M_i < \infty. \quad (8)$$

Если для некоторой последовательности чисел $\{\alpha_i\}$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i$ сходится, то из (7) и (8) следует

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| K \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^i| \bar{M}_n = K \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i < \infty.$$

Следовательно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i$ сходится.

Если положить

$$a_n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_n^i,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \bar{M}_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| |a_n^i| \bar{M}_n = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i < \infty,$$

так что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n.$$

Последнее равенство показывает, что $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i$ является

элементом линейного подпространства L , обладающего свойством (A).

Т е о р е м а 4. Если $\{f_n(x)\}$ — последовательность аддитивных функционалов из B^* , которые определены соответственно в линейных подпространствах L_n , обладающих свойством (A), то множество точек сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$, принадлежащих пересечению всех L_n , образует линейное подпространство L со свойством (A).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{X_i\}$ — некоторая последовательность из L . Так как она принадлежит всем L_n , то найдется последовательность положительных чисел $\{M_i^n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), такая, что из условия

$$\sum_i |\alpha_i| M_i^n < \infty$$

следует, что

$$\sum_i \alpha_i X_i \in L_n. \quad (9)$$

Положим

$$h_i = \sup_{n=1, 2, \dots} \{f_n(x_i)\}, \quad m_i = \sup_{n=1, 2, \dots} \{M_i^n\}, \quad (10)$$

$$M_i = \max \{h_i, m_i, \|x_i\|\}. \quad (11)$$

Пусть $\{\alpha_i\}$ — последовательность, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i < \infty. \quad (12)$$

Тогда из (11) и (12) следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i < \infty,$$

поэтому ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \quad (13)$$

сходится. Из (10) и (11) вытекает, что

$$M_i \geq M_i^n \quad (n \leq i),$$

а тогда из (12) и (9) видно, что сумма ряда (13) содержится в L_n .

По теореме 2 п. б и из (10) и (11) следует, что для произвольного N

$$\begin{aligned} \left| f_n \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i X_i \right) \right| &= \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i f_n(x_i) \right| \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i| |f_n(x_i)| \leq \\ &\leq \sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i| M_i, \end{aligned}$$

так что для произвольных p, q, N имеет место

$$\begin{aligned} \left| f_p \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i \right) - f_q \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i \right) \right| &\leq \left| f_p \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i \right) - \right. \\ &\quad \left. - f_q \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i \right) \right| + \left| f_p \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i X_i \right) \right| + \left| f_q \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i X_i \right) \right| \leq \\ &\leq \left| f_p \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i \right) - f_q \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i \right) \right| + 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i| M_i. \end{aligned}$$

При $p, q \rightarrow \infty$ первый член стремится к нулю, а в силу (12) при $N \rightarrow \infty$ стремится к нулю и второй член. Следовательно, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится, когда x есть сумма ряда (13). Поэтому x принадлежит к L и L обладает свойством (А).

Т е о р е м а 5. *Любой аддитивный функционал из множества B^* подпространства L может быть продолжен до функционала $F(x)$, принадлежащего множеству B^* некоторого подпространства L , обладающего свойством (А).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\bar{B}$ множество всех аддитивных функционалов B^* , которые допускают такое продолжение. Очевидно, множество $\bar{B}$ содержит все линейные функционалы. Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность аддитивных функционалов из $\bar{B}$, определенных в некотором линейном пространстве K и сходящихся к функционалу $f(x)$. Из определения $\bar{B}$ следует, что каждый функционал $f_n(x)$ может быть продолжен до некоторого аддитивного функционала $F_n(x)$ из B^* , который определен в линейном подпространстве L_n со свойством (А). Согласно теореме 4 последовательность $F_n(x)$ сходится в линейном подпространстве L_n со свойством (А) к некоторому функционалу $F(x)$ из B^* . Очевидно, $F(x) = f(x)$ в K , так что $f(x)$ содержится в $\bar{B}$. Таким образом, для множества $\bar{B}$ выполняются условия (1), (2) из § 1. Так как B^* — наименьшее множество такого рода, то $\bar{B}$ совпадает с B^* .

Пусть $\{f_n(x)\}$ — некоторая последовательность аддитивных функционалов из B^* , которые определены соответственно в линейных пространствах L_n со свойством (A), и пусть $\{x_i\}$ — некоторая последовательность, содержащаяся во всех L_n . Для $1 \leq m \leq n$ и $x \in K \equiv \prod_{n=1}^{\infty} L_n$ положим

$$w_{m,n}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) \dots f_1(x_{m-1}) & f_1(x) & f_1(x_{m+1}) \dots f_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_n(x_1) \dots f_n(x_{m-1}) & f_n(x) & f_n(x_{m+1}) \dots f_n(x_n) \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Предположим также, что для произвольной системы чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ из соотношения

$$f_j\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (14')$$

следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Тогда $w_{m,n} \neq 0$ для всех n и $m \leq n$. Если положить

$$F_{m,n}(x) = \frac{w_{m,n}(x)}{w_{m,n}(xm)} \quad (1 \leq m \leq n), \quad (15)$$

то $F_{m,n}$ будет аддитивным функционалом из B^* , определенным в K .

Т е о р е м а 6. *Существует линейное пространство L со свойством (A), содержащее все x_i и такое, что для каждого x из L существует предел*

$$\Phi_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{m,n}(x) \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (16)$$

а ряд $\sum_{m=1}^{\infty} x_m \Phi_m(x)$ сходится и

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \Phi_m(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что

$$F_{m,n}(x_i) = \begin{cases} 1 & (1 \leq m \leq i \leq n), \\ 0 & (i \neq m, 1 \leq i \leq n). \end{cases} \quad (17)$$

Следовательно,

$$\Phi_m(x_i) = \begin{cases} 1 & (m = i), \\ 0 & (m \neq i), \end{cases}$$

и поэтому $\Phi_m(x)$ определен в линейном подпространстве $\bar{L}_m$ со свойством (A), содержащем элементы последовательности $\{x_i\}$. То же самое можно сказать и о пересечении $\bar{E}$ пространств $\bar{L}_m$. Согласно теореме 1 $\bar{L}$ обладает свойством (A). Следовательно, существует такая последовательность положительных чисел $\{M_i\}$, что линейное

множество L элементов $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ при условии

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i < \infty \quad (18)$$

содержится в L и согласно теореме 3 обладает свойством (A). Далее по теореме 2 п. 6

$$\Phi_m(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Phi_m(x_i) \quad (x \in L, m = 1, 2, \dots),$$

а принимая во внимание (17), будем иметь $\Phi_m(x) = \alpha_m$. Таким образом, с учетом (18) окончательно получаем

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \Phi_m(x) \quad (x \in L).$$

4

Обозначим через E пространство непрерывных на отрезке $0 \leq t \leq 1$ функций $x(t)$ и введем в нем норму

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|.$$

Свойство (A) формулируется здесь следующим образом: линейное подпространство L пространства E обладает свойством (A), если для любой последовательности функций $\{x_i(t)\}$ из L существует последовательность положительных чисел $\{M_i\}$, такая, что для каждой числовой последовательности $\{\alpha_i\}$, удовлетворяющей условию

$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i < \infty$, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i(t)$ сходится равномерно и его сумма принадлежит L .

Пусть $\{x_i(t)\}$ — некоторая последовательность функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$. Определим последовательность функционалов $f_n(x)$ следующим образом:

$$f_1(x) = X(0), \quad f_n(x) = \Delta^{n-1} X(0), \quad (n = 2, 3, \dots), \quad (19)$$

где $f_n(x)$ означает разность $(n-1)$ -го порядка от $x(t)$ в точке $t=0$ с шагом $h=1/n$. Функционалы $f_n(x)$ непрерывны, а следовательно, линейны. Предположим, что выполняется условие (14'), и определим $w_{m,n}(x)$ и $F_{m,n}$ с помощью формул (14) и (15). Тогда представленные формулой (16) функционалы $\Phi_m(x)$ будут определены в некотором линейном подпространстве, содержащем функции $x_i(t)$. Каждая $x(t)$ допускает в L разложение в равномерно сходящийся ряд

$$x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m x_m(t) \quad (\alpha_m = \Phi_m(x)). \quad (20)$$

Если нам известны другие формулы, выражающие коэффициенты α_m , то в силу единственности разложения они должны совпадать с (20). Если, например, $x_1(t) = 1$, $x_m(t) = t^{m-1}$, то для $x(t)$ из L мы получим выражение

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} X^{(m-1)}(0).$$

Этим объясняется тот факт, что для известных разложений Тейлора, Лагранжа и др. формулы Гёне-Вронского приводят к верным результатам.

Если функции $x_i(t)$ обладают непрерывными производными любого порядка, то можно положить, например,

$$f_1(x) = X(0), \quad f_n(x) = X^{n-1}(0). \quad (21)$$

В этом случае функционалы $f_n(x)$ не будут непрерывными в E , но, как легко показать, они будут функционалами Бэра из B^* , определенными в некотором линейном подпространстве со свойством (A). Для этих функционалов также справедливы результаты § 3.

Примеры (19) и (21) были рассмотрены Гёне-Вронским. Подобным образом можно толковать теорему из § 3 в пространстве ограниченных функций, в пространстве функций, интегрируемых вместе со своей p -й степенью ($p \geq 1$), и в других пространствах.

К. Ф. ГАУСС И Ж. А. ДА КУНЬЯ

А. П. Юшкевич

В статье о проблемах обоснования анализа в «Математических началах» (1790) португальского ученого Ж. А. да Кунья [1] я, отметив новизну некоторых его идей, в частности оригинальное определение показательной и логарифмической функций писал, что французский перевод этой книги, изданный в Бордо в 1811 г. [2], не привлек в свое время внимания специалистов [3, с. 175]. Мне был известен лишь один отклик на появление французского перевода, принадлежащий шотландскому математику и физику Дж. Плейферу, отклик весьма положительный [там же]. Теперь я должен несколько исправить прежнее свое утверждение. Во-первых, в «Göttingische gelehrte Anzeigen», издававшихся Королевским обществом наук Ганновера, была напечатана 14 ноября 1811 г. подробная анонимная рецензия [4] на только что вышедшее бордосское издание. Во-вторых, неделю спустя весьма лестно отозвался об определении логарифмической функции у да Кунья великий Гаусс, который, как это ясно из его замечаний, познакомился с «Математическими началами» не только по упомянутой рецензии, но и по самой книге. Отзыв Гаусса содержится в письме от 21 ноября к Ф. В. Бесселю. И на рецензию и на письмо Гаусса дружески обратил мое внимание проф. К. Р. Бирман, любезно приславший также ксерокопию рецензии в «Гёттингенских ученых известиях». За все это я искренне благодарен проф. К. Р. Бирману.

Остающийся пока неизвестным рецензент внимательно прочитал «Математические начала». Рецензия начинается с некоторых сведений о да Кунья и возникновении его книги, почерпнутых из предисловия к бордосскому изданию, написанного другом и поклонником автора, а также переводчиком на французский язык Ж. М. д'Абрэ (де Абреу). Д'Абрэ высоко оценил это руководство да Кунья, подчеркивая единство плана, стиля, строгости доказательств и сочетание богатства содержания с лако-

ничностью изложения; благодаря такой сжатости автор смог менее чем на 300 страницах не оставить без внимания ни один важный предмет как элементарной, так и высшей чистой математики, от начал геометрии до вариационного исчисления. «В целом,— писал рецензент,— легко согласиться с такой оценкой переводчика, хотя в частностях и возникают возражения против выбранного автором расположения материала, а также против некоторых определений и его исходных принципов» [4, с. 1802]. После того рецензент кратко излагает основное содержание 21 книги, на которые разделено сочинение да Кунья; специальной критике он подвергает определения некоторых геометрических понятий — точки, линии, поверхности и угла. В конце рецензии, занимающей более 5 страниц, мы читаем, что руководство да Кунья «отличается многими особенностями в выборе, порядке и трактовке рассматриваемых предметов, каковые хотя могут понравиться не всем, но заслуживают внимательного прочтения» [4, с. 1806].

О 9-й книге, где да Кунья предложил оригинальную теорию показательной и логарифмической функции, достоинства которой подчеркнул еще д'Абрэ [3, с. 164], в рецензии сказано: «IX. О степенях и биномиальной теореме. Трактовка этих предметов автором нова и своеобразна. Можно все же усомниться, что она встретит одобрение. Столь легко доказываемая теорема, что $a^m a^n = a^{m+n}$, занимает здесь почти целую страницу и выводится из рассмотрения некоторых бесконечных рядов. При этом мы должны отметить, что автор полностью отходит от обыкновенного понятия степени, быть может, из-за трудности, которую казалось бы представляют дробные и отрицательные показатели. Здесь его определение таково: «если a , b — два какие-либо числа и c — число, для которого $1 + \frac{c \cdot c}{1 \cdot 2} + \frac{c \cdot c \cdot c}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ и т. д. и т. д. $= a$, то ряд $1 + b \cdot c + \frac{bb \cdot cc}{1 \cdot 2} + \frac{bbb \cdot ccc}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ и т. д. будет обозначаться a^b и число a^b называться *степенью a* , указанной *показателем b* , или же *корнем a* , указанным *показателем $1/b$* , и т. д.» [4, с. 1804—1805].

Такое определение показательной функции как суммы сходящегося степенного ряда представляется в современной теории аналитических функций вполне естественным.

Логарифмическая функция вводится затем как обратная показательной. Свойства обеих функций выводятся без труда из этих определений. Именно это определение получило одобрение Гаусса, который вместе с тем выразил несогласие с оценкой, данной ему в рецензии «Гёттингенских ученых известий». При этом Гаусс подошел к вопросу с более широкой точки зрения, чем да Кунья. Последний ограничился рассмотрением показательной и логарифмической функций в действительной области, между тем как Гаусс распространил их определение на комплексные переменные.

Как известно, к рассматриваемому времени Гаусс владел основными принципами и рядом предложений теории аналитических функций. Природа логарифмов отрицательных и мнимых чисел, бывшая предметом долгих споров в XVIII в., продолжавшихся и после того, как Эйлер в 1749 г. опубликовал правильное решение вопроса (основанное, впрочем, на других началах), была Гауссу совершенно ясна. Именно в связи с этим вопросом Гаусс высказался о теории логарифмов да Кунья. В письме к Бесселю от 21.11.1811 г. Гаусс писал: «Таким же образом все парадоксы, *найденные* некоторыми математиками у логарифмов, отпадают сами собой, если исходить не из привычного определения $\log a = \text{числу}$, которое, собственно, вполне удовлетворительно только, когда показатель есть целое число, и не имеет никакого смысла, когда показатель оказывается мнимым, — но *назвать* логарифмом A всякую величину, которая при подстановке вместо x в ряд $1 + x + \frac{1}{2}xx$ и т. д. даст ему значение $A \dots$; как я с удовольствием вижу, португалец Акунья [sic!] в самом деле взял такое определение — в плохой рецензии в наших Ученых известиях его за это порицают — впрочем, он плохо, а именно только с помощью индукции, привел необходимое доказательство того, что вообще

$$\begin{aligned} & \left(1 + x + \frac{1}{2}xx + \dots\right) \left(1 + y + \frac{1}{2}yy + \dots\right) = \\ & = 1 + x + y + \frac{1}{2}(x + y)^2 + \dots, \end{aligned}$$

между тем как это *очень* легко доказать строго» [5, с. 153].

Именно из последних слов Гаусса следует, что он не ограничился знакомством с книгой да Кунья по рецен-

зии, в которой ничего не сказано о самом доказательстве да Кунья свойства $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$, которое составляет IV предложение IX книги «Математических начал», но познакомился и с самим этим руководством.

В дальнейшем Гаусс к труду да Кунья, по-видимому, не возвращался. В письме к тому же Бесселю от 18.12.1811 г., в котором он изложил свою общую концепцию начал теории аналитических функций, Гаусс ввел и другое определение логарифма, как интеграла $\int \frac{dx}{x}$, взятого вдоль кривой в комплексной плоскости, начиная с точки $x = 1$.

Автор рецензии в «Гёттингенских ученых известиях» не сумел оценить некоторые оригинальные идеи да Кунья в области оснований исчисления бесконечно малых, считая, что в его определениях «при ближайшем рассмотрении скорее скрываются обычные воззрения» [4, с. 1805—1806]. Хотя да Кунья во многом действительно придерживался традиционных взглядов на основании анализа, но в некоторых вопросах он опередил своих современников, как, например, в своем подходе к понятию дифференциала [3, с. 172—174].

Впрочем, существенны не ошибочные суждения анонимного рецензента, а тот факт, что «Математические начала» да Кунья получили известность в Германии начала XIX в., а главное — та положительная оценка, которую дал теории показательной и логарифмической функции да Кунья Гаусс¹.

Было бы интересно знать, появились ли отклики на книгу да Кунья во французских журналах. Я таких откликов пока не обнаружил.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cunha J. A. da. Principios Mathematicos. Lisboa, 1790.*
2. *Principes mathématiques de feu Joseph Anastase da Cunha, traduits littéralement du portugais. Par J. M. Abreu. Bordeaux, 1811.*

¹ Когда работа была написана, я узнал, что на цитированное место из письма Гаусса Бесселю обратил внимание еще в 1899 г. И. Ю. Тимченко, который, сформулировав определение функции у да Кунья, в сноске отметил: «Гаусс вполне одобрял такое обоснование теории показателей» [6, с. 634] — и указал на [5, с. 153].

3. *Юшкевич А. П.* Ж. А. да Кунья и проблемы обоснования математического анализа.— В кн.: Ист.-мат. исследования. М.: Наука, 1973, вып. XVIII, с. 157—175.
4. Göttingische gelehrte Anzeigen. Der dritte Band auf das Jahr 1811, 181 Stück. Den 14. November 1811, S. 1801—1806.
5. Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und F. W. Bessel. Leipzig, 1880.
6. *Тимченко И. Ю.* Основания теории аналитических функций. Одесса, 1899. Т. I, ч. 1.

К ИСТОРИИ ТЕОРИИ ДЕФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. РАБОТЫ И. Ф. ПФАФФА И О. КОШИ

С. С. Демидов

Развитие теории уравнений с частными производными первого порядка, истоки которой мы находим в трудах Ж. Даламбера и Л. Эйлера, привело к концу XVIII в. к двум замечательным достижениям. Первым была теория Лагранжа. Ж. Лагранж ввел такие центральные понятия теории, как полный, общий и особый интеграл, он дал общие методы интегрирования линейных уравнений

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = b_n$$

($a_1, a_2, \dots, b_n$ — функции $x_1, \dots, x_n, z$) для произвольных n , а также метод (с открытием которого связано также имя Шарпи) интегрирования уравнения

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, z; p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad (1)$$

$$\left(p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, p_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n} \right)$$

для случая $n = 2$. Вторым крупнейшим результатом XVIII в. явилась геометрическая интерпретация теории, данная Г. Монжем, которому принадлежит фундаментальное понятие характеристики.

В начале XIX в. основной задачей теории стало интегрирование уравнения (1) для произвольных значений n . Путь, использованный в методе Лагранжа — Шарпи для случая $n = 2$, наталкивался здесь на трудности, казавшиеся тогда непреодолимыми. Действительно, рассмотрим уравнение $f(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0$, которое не включает явным образом независимой переменной z . По аналогии с методом Лагранжа — Шарпи следовало бы найти еще $n - 1$ соотношение между $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$, включающие $n - 1$ произвольную постоянную $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ так, чтобы $p_1, p_2, \dots, p_n$, выраженные в функциях от $x_1, x_2, \dots, x_n, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$, обращали

выражение

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$$

в полный дифференциал. В этом случае искомый полный интеграл получался бы интегрированием последнего выражения. Для того чтобы это выражение было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}$$

для любых $i, k = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, искомые $n - 1$ функции должны удовлетворять $(n - 1)n/2$ условиям. В случае $n = 2$

$$n - 1 = (n - 1)n/2,$$

т. е. число искомых функций равняется числу условий, при $n > 2$ число условий переопределено, оно больше числа искомых функций. Таким образом, путь Лагранжа и Шарпи, казалось, не давал надежды на то, что, следуя ему, возможно достичь искомого результата. Хотя позднее этот путь оказался не тупиковым и привел К. Якоби к открытию его «второго» метода. Поэтому в начале XIX в. начались поиски обходного пути, и первым, кому удалось его найти, был И. Ф. Пфаф.

1. Результаты И. Ф. Пфафа

1. И. Ф. Пфаф. Ввиду того что в отечественной историко-математической литературе данные о творчестве И. Ф. Пфафа практически отсутствуют, мы вынуждены начать с краткой биографической справки.

Иоганн Фридрих Пфаф родился 22 декабря 1765 г. в г. Штуттгарте, столице герцогства Вюртемберг, в семье крупного правительственного чиновника. Учился Пфаф в Hohe Karlsschule — штуттгартской школе, готовившей правительственных служащих, которую закончил в 1785 г. Математикой он стал заниматься самостоятельно и вскоре овладел предметом настолько, что мог самостоятельно разобрать «Введение в анализ бесконечных» Л. Эйлера.

По окончании школы Пфаф был послан учиться математике в другие немецкие города. Два года он оставался в Гёттингене, где изучал математику у А. Г. Кестнера (1719—1800) и физику у Г. К. Лихтенберга (1742—1799),

автора известных «Афоризмов», а летом 1787 г. переехал в Берлин для занятий практической астрономией у И. Э. Боде (1747—1826). В Берлине по рекомендации Г. К. Лихтенберга Пфафф вошел в кружок последователей французских просветителей, группировавшихся вокруг Фридриха Николаи. Весной 1788 г. он совершил поездку в Вену через Галле, Иену, Хельмштадт, Готу, Дрезден и Прагу.

В 1788 г. по рекомендации Лихтенберга Пфафф был назначен профессором математики в университете в Хельмштадте, где развернул блестящую педагогическую деятельность. Среди его учеников мы находим Гаусса, всю жизнь сохранявшего к нему самые теплые чувства как к учителю и человеку. В 1810 г. ввиду закрытия университета в Хельмштадте Пфафф переехал в Галле, где занял место профессора математики, а в 1812 г. взял на себя также руководство обсерваторией.

На всем творчестве Пфаффа заметно влияние идей Эйлера. В 1797 г. он публикует в Хельмштадте первый и единственный том курса анализа «*Disquisitiones analyticae maxime ad calculum integralem et doctrinam serierum pertinentes*» («Аналитические исследования, в наибольшей степени относящиеся к интегральному исчислению и теории рядов»), написанного в эйлеровском духе.

Будучи в близких отношениях с К. Ф. Гинденбургом (1741—1808), главой немецкой комбинаторной школы, Пфафф активно работал над соответствующей тематикой. Его результаты в этом направлении содержатся в ряде статей, опубликованных в период с 1794 по 1800 г. в изданиях Гинденбурга («*Archiv der reinen und angewandten Mathematik*», «*Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen*»). В 1810 г. он принял участие в решении задачи, предложенной Гауссом, об эллипсе максимальной площади, вписанном в данный четырехугольник. Полученные им результаты приобрели важное значение в активной теории конических сечений [1, с. 444].

Главное достижение Пфаффа, прославившее его имя, относится к теории дифференциальных уравнений (о чем см. ниже).

Умер Пфафф 21 апреля 1825 г. в Галле [2].

2. Подход Пфаффа. Пфафф избрал путь, отличный от предложенного Лагранжем для случая двух независимых переменных, так как на последнем встретил непреодоли-

мые, по его собственному выражению, трудности. Он вернулся на путь представления дифференциальных уравнений с частными производными в виде уравнений в полных дифференциалах — путь, на котором еще Даламбер и Эйлер получили первые методы решения дифференциальных уравнений с частными производными. Пфаф свел задачу интегрирования уравнения

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad (1)$$

или в обычной у него форме

$$p_n = F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}), \quad (1')$$

к эквивалентной задаче интегрирования уравнения

$$\begin{aligned} dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_{n-1} dx_{n-1} - \\ - F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) dx_n + \\ + 0 \cdot dp_1 + 0 dp_2 + \dots + 0 \cdot dp_{n-1} = 0, \end{aligned} \quad (1a)$$

а последнюю — к более общей задаче интегрирования уравнения

$$\begin{aligned} A_1(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 + A_2(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_2 + \\ + \dots + A_k(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_k = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

— уравнения в полных дифференциалах, ранняя история теории которых связана с именами И. Ньютона, Л. Эйлера, и Г. Монжа [3, т. 2, с. 247; т. 3, с. 440].

Свою теорию интегрирования уравнений с частными производными первого порядка И. Ф. Пфаф изложил в мемуаре «Общий метод интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными...» [4], представленном Берлинской академии наук 11 мая 1815 г. Он начинает с задачи интегрирования уравнения

$$p_2 = F(x_1, x_2, z, p_1), \quad (3)$$

рассматривает соответствующее ему уравнение

$$dz - p_1 dx_1 - F(x_1, x_2, z, p_1) dx_2 + 0 \cdot dp_1 = 0, \quad (4)$$

содержащее четыре переменных. Произведем замену переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_2, u_1, u_2, u_3), \\ z &= z(x_2, u_1, u_2, u_3), \\ p_1 &= p_1(x_2, u_1, u_2, u_3), \\ x_2 &= x_2, \end{aligned} \quad (5)$$

в результате которой уравнение (4а) переходит в

$$P_1 du_1 + P_2 du_2 + P_3 du_3 + P_4 dx_2 = 0, \quad (4a)$$

где P_1, P_2, P_3, P_4 — функции x_2, u_1, u_2, u_3 . Функции (5) выбираются так, чтобы 1) $P_4 = 0$, 2) $P_i = MQ_i$, где Q_i — функция только u_1, u_2, u_3 , но не x_2 . Такой выбор возможен (разъяснения на этот счет см. ниже), и в результате выражение (4а) приобретает вид

$$Q_1 du_1 + Q_2 du_2 + Q_3 du_3 = 0,$$

или

$$du_1 + B(u_1, u_2, u_3), du_2 = C(u_1, u_2, u_3) du_3. \quad (4б)$$

При этом u_1, u_2, u_3 — функции x_1, x_2, z, p_1 . Затем, полагая временно u_3 постоянным, Пфафф рассматривает выражение

$$du_1 + B(u_1, u_2, u_3) du_2.$$

Пусть $M(u_1, u_2, u_3)$ — множитель, обращающий это выражение в полный дифференциал функции $N(u_1, u_2, u_3)$:

$$dN = M[du_1 + B(u_1, u_2, u_3) du_2].$$

Вновь рассматривая u_3 как переменную, Пфафф переписывает (4б) в виде

$$dN - \frac{\partial N}{\partial u_3} du_3 = MC du_3,$$

или

$$dN = du_3 \left(MC + \frac{\partial N}{\partial u_3} \right).$$

Положив

$$N = \varphi(u_3), \quad (6)$$

где φ — произвольная функция, он получает из последнего уравнения

$$MC + \frac{\partial N}{\partial u_3} = \varphi'(u_3). \quad (7)$$

Так как M, C, N — функции переменных u_1, u_2, u_3 , которые, в свою очередь, зависят от x_1, x_2, z, p_1 , то из соотношений (6) и (7) следует

$$\Phi(x_1, x_2, z, p_1) = \varphi[\Psi(x_1, x_2, z, p_1)], \quad (8)$$

$$\Phi(x_1, x_2, z, p_1) = \varphi'[\Psi(x_1, x_2, z, p_1)],$$

$$z = z(x_n, u_1, u_2, \dots, u_{2n-1}),$$

$$p_1 = p_1(x_n, u_1, u_2, \dots, u_{2n-1}),$$

$$p_2 = p_2(x_n, u_1, u_2, \dots, u_{2n-1}),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$p_{n-1} = p_{n-1}(x_n, u_1, u_2, \dots, u_{2n-1})$$

можно привести уравнение (1а) к уравнению, содержащему на одну переменную меньше (проблема 12). Этот же результат он формулирует для общего уравнения (2), содержащего четное число переменных (проблема 13). При этом он замечает, что для нечетного числа переменных это преобразование не проходит. Доказательства этому утверждению Пфаффа не дает.

Таким образом, уравнение (1а) при помощи замены (12) приводится к уравнению, содержащему на единицу меньше (нечетное) число переменных. Вопрос об интегрировании такого уравнения, содержащего нечетное число переменных, при помощи рассуждений, аналогичных тем, которые применялись к уравнению (2) в случае $k = 3, 5, 7, 9$, сводится к вопросу об интегрировании уравнения с числом переменных на единицу меньшим и т. д. пока не дойдем до уже рассмотренных случаев уравнений вида (2) при $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. В заключение Пфаффа показывает (проблема 14), что интегрирование общего уравнения (1') его методом приводит к n соотношениям, содержащим $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ и произвольную функцию. Исключение из этих соотношений $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ приводит к общему интегралу уравнения (1').

3. Изложение метода Пфаффа К. Ф. Гауссом. Пфаффа отправил рукопись своей работы [4] К. Ф. Гауссу, который счел нужным изложить ее результаты в небольшой заметке [5], опубликованной в 1815 г. в очередном номере (за 1 июля 1815 г.) «Гёттингенских ученых известий» — реферативном издании, помещавшем немецкие резюме сочинений по различным областям знаний. Гаусс высоко оценил результаты своего учителя и друга, отметив как важность самого результата — получение теоретического решения уравнения (1), так и то обстоятельство, что данное исследование — большой вклад в теорию уравнений в полных дифференциалах. Желая оказать услугу «друзьям математики» и сообщить о результатах Пфаффа и не

желая при этом превышать дозволенный в журнале объем пересказом обширного мемуара, Гаусс предложил свое блестящее краткое изложение результатов Пфаффа, существенно отличное от Пфаффового и делающее прозрачно ясным его результаты.

Описанное Пфаффом преобразование формы

$$\Omega = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \dots + A_k dx_k, \quad (13)$$

где $A_1, A_2, \dots, A_k$ — данные функции $x_1, x_2, \dots, x_k$, в форму

$$\Omega = \lambda (Q_1 dy_1 + Q_2 dy_2 + \dots + Q_{k-1} dy_{k-1}),$$

где $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ — функции $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$, для случая четного k Гаусс обозначил цифрой I.

Хотя такое преобразование и невозможно в случае, когда k нечетно, как вслед за Пфаффом замечает (но не доказывает) Гаусс, однако возможно другое преобразование, которое в явном виде в сочинении Пфаффа не содержится, но употребляется им по существу. Если рассматривать x_k как постоянное, то в случае нечетного k форма

$$A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \dots + A_{k-1} dx_{k-1}$$

при помощи преобразования I приводится к виду

$$\lambda (Q_1 dy_1 + Q_2 dy_2 + \dots + Q_{k-2} dy_{k-2}).$$

Рассматривая x_k вновь как переменную и обозначая

$$A_k^* = A_k - \lambda \left(Q_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + Q_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \dots + Q_{k-2} \frac{\partial y_{k-2}}{\partial x_k} \right),$$

можно записать

$$\Omega = A_k^* dx_k + \lambda (Q_1 dy_1 + Q_2 dy_2 + \dots + Q_{k-2} dy_{k-2}).$$

Это преобразование Гаусс обозначает цифрой II.

Очевидно, это преобразование II можно вновь применить к полученной форме, получится

$$\Omega = \bar{A}_k^* dx_k + \bar{Q}_{k-2} dy_{k-2} + \lambda' (P_1 dz_1 + P_2 dz_2 + \dots + P_{k-4} dz_{k-4}).$$

Этот процесс можно продолжить до тех пор, пока исходная форма не приведет к

$$\Omega = \bar{A}_k dx_k + \bar{A}_{k-2} dy_{k-2} + A_{k-4} dz_{k-4} + \dots$$

— форме, содержащей $(k + 1)/2$ членов. Это преобразование Гаусс обозначил цифрой III.

Пусть теперь снова k — четное. Применение к (13) преобразования I дает

$$\Omega = \lambda (Q_1 dy_1 + Q_2 dy_2 + \dots + Q_{k-1} dy_{k-1}).$$

Если к полученной форме применить преобразование III, то получится форма, содержащая $k/2$ переменных. Такое преобразование Гаусс обозначает цифрой IV.

Применяя к уравнению (1а)

$$\begin{aligned} dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_{n-1} dx_{n-1} - \\ - F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) + 0 \cdot dp_1 + \\ + 0 \cdot dp_2 + \dots + 0 \cdot dp_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

преобразование IV, его можно привести к виду

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \dots + F_n df_n = 0, \quad (14)$$

где f_i и F_i — функции $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$. Это же уравнение интегрируется через n уравнений

$$\begin{aligned} W(f_1, f_2, \dots, f_n) = 0, \quad F_1 : F_2 : \dots : F_n = \\ = \frac{\partial W}{\partial f_1} : \frac{\partial W}{\partial f_2} : \dots : \frac{\partial W}{\partial f_n}, \end{aligned}$$

где W — произвольная функция.

Так как F_i и f_i суть в конечном итоге функции $x_1, x_2, \dots, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$, то получается n соотношений, включающих эти переменные и одну произвольную функцию. Исключение из этих n соотношений $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ дает соотношение, включающее только $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ и одну произвольную функцию — общий интеграл уравнения¹ (1').

4. О схеме рассуждений в методе Пфаффа. Субъективную сторону исследования в области чистой математики можно образно представить себе как изучение доселе неизвестного острова, существовавшего и до вторжения в него исследователя. Решение математической проблемы понимается тогда как поиск пути от известных

¹ Если проинтегрировать уравнение (14) через n соотношений $f_1 = c_1, f_2 = c_2, \dots, f_n = c_n$, где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные, то в результате исключения из них $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ возникнет соотношение, включающее только $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ и n произвольных постоянных $c_1, c_2, \dots, c_n$ — полный интеграл уравнения (1').

данных (известного места) к некоторой желаемой цели, существование которой предполагается, но которой может и не быть вовсе. Установление связи между объектами, ранее представлявшимися разобщенными, ощущается как наведение моста. Сам путь исследования — как тропинка, путь или нить Ариадны, как любил говорить Лейбниц. (Вспомним выражения типа «рассуждения зашли в тупик», «звено в рассуждениях», «нить рассуждения» и др. Я полагаю, что это более чем просто метафоры. Эти выражения отражают характер нашего мыслительного процесса.) Поля в своей книге «Математическое открытие» [6] предложил интересное, на наш взгляд, схематическое изображение процесса решения проблемы в виде графа. Используя его идею, изобразим графически путь решения задачи интегрирования уравнения (1), данный Пфаффом. Дано уравнение (1), требуется найти его общее решение (A). Изобразим ситуацию в виде двух точек: одной, соответствующей уравнению (1), второй — (A) — искомому решению (рис. 1). Первый шаг состоит в записи уравнения (1) в виде (1a). Изобразим это таким образом (рис. 2). Второй шаг — переход к более общему объекту соответствующего уравнению (1a) — к произвольному уравнению в полных дифференциалах (2). Изобразим это рис. 3. Ситуация перехода к более общему объекту выражена здесь переходом на новый уровень (рис. 3). Третий шаг — применение редукции I к уравнению (2) и получение в результате нового уравнения (2 — 1), содержащего одной переменной меньше (рис. 4). Применяя к полученному уравнению (2 — 1) редукцию II, получаем новое уравнение (2 — 2), содержащее еще одной переменной меньше. Продолжение этого процесса, названного нами в целом преобразованием IV, изображено на рис. 5. Аналогичные преобразования IV можно проделать и непосредственно над уравнением (1a). Наша схема примет тогда вид (рис. 6). Но, что касается уравнений (2 — n), (1a — n), то они — уравнения типа (14). Следовательно, уравнение (1a — n) интегрируется посредством системы из n соотношений, включающих $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ и одну произвольную функцию. Исключая из этих n соотношений $p_1, p_2, \dots, p_n$, получаем общий интеграл уравнения (1), т. е. искомый результат (A).

Таким образом, путь решения нашей задачи изображается в виде графа (рис. 7).

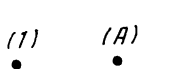


Рис. 1



Рис. 2

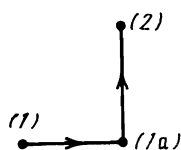


Рис. 3

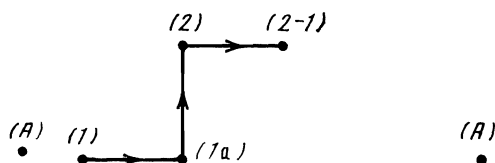


Рис. 4

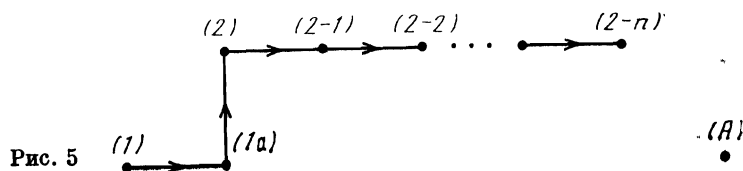


Рис. 5

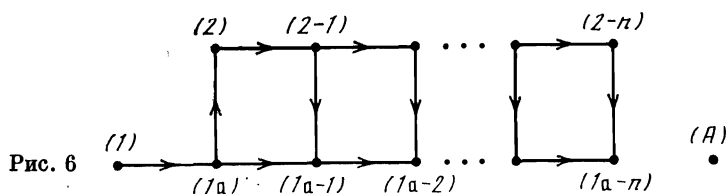


Рис. 6

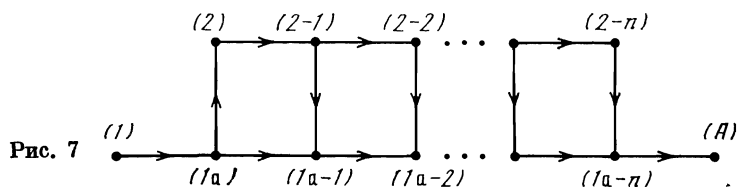


Рис. 7

5. Изложение метода Пфаффа, данное Якоби. Изложение работы Пфаффа, предложенное Гауссом в малочитаемом математиками издании [5] не получило широкой известности среди современных ученых. По-видимому, не знал о нем и Якоби, давший более строгое изложение метода Пфаффа. Во 2-м томе журнала Кремле за 1827 г. помещены две статьи Якоби «Об интегрировании дифферен-

Так как функции (15) никак пока не определены, то вид функций Q_s , Q_k можно выбрать удобным образом, чтобы они удовлетворяли $k - 1$ независимым совместным условиям. Якоби выбирает их так, чтобы в уравнении (16) освободиться от x_k и dx_k . Так, в качестве первого условия можно выбрать следующее:

$$Q_k = 0. \quad (17)$$

Последующие условия можно выбирать таким образом, чтобы

$$Q_s = MU_s \quad (s = 1, 2, \dots, k - 1),$$

где U_s зависит только от $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$. Тогда

$$\frac{\partial Q_s}{\partial x_k} = \frac{\partial M}{\partial x_k} U_s$$

и

$$\frac{1}{Q_s} \frac{\partial Q_s}{\partial x_k} = \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial x_k} = \mu,$$

или

$$\frac{\partial Q_s}{\partial x_k} = \mu Q_s \quad (s = 1, 2, \dots, k - 1). \quad (18)$$

k уравнений (17) и (18) являются соотношениями для определения функций (15) и μ . Если эта система совместна и не приводит к тождественным соотношениям, то уравнение (15) приведет к виду

$$U_1 du_1 + U_2 du_2 + \dots + U_{k-1} du_{k-1} = 0,$$

где $U_1, U_2, \dots, U_{k-1}$ — функции $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$, что и требуется. Таким образом, задача сводится к исследованию соотношений (16) и (17).

6. Исследование соотношений (16) и (17). Из системы (16) — (17) легко выводится

$$\mu \sum_{i=1}^{k-1} A_i \frac{\partial x_i}{\partial u_s} = \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ (i, k) + \sum_{j=1}^{k-1} \left((i, j) \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \right) \right\} \frac{\partial x_i}{\partial u_s},$$

где

$$(i, j) = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i},$$

или, если обозначить

$$\theta_i = (i, k) - \mu A_i + \sum_{j=1}^{k-1} (i, j) \frac{\partial x_j}{\partial x_k},$$

то

$$\theta_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_s} + \theta_2 \frac{\partial x_2}{\partial u_s} + \dots + \theta_{k-1} \frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_s} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, k-1).$$

Детерминант последней системы должен быть отличен от нуля, так как функции (15) следует выбирать независимыми. Таким образом, эта система обладает только тривиальным решением $\theta_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$):

$$\begin{aligned} \mu A_1 &= (1, k) + (1, 2) \frac{\partial x_2}{\partial x_k} + (1, 3) \frac{\partial x_3}{\partial x_k} + \dots \\ &\dots + (1, k-1) \frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mu A_2 &= (2, k) + (2, 1) \frac{\partial x_1}{\partial x_k} + (2, 3) \frac{\partial x_3}{\partial x_k} + \dots \\ &\dots + (2, k-1) \frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \mu A_{k-1} &= (k-1, k) + (k-1, 1) \frac{\partial x_1}{\partial x_k} + (k-1, 2) \frac{\partial x_2}{\partial x_k} + \dots \\ &\dots + (k-1, k-2) \frac{\partial x_{k-2}}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

$$\mu A_k = (k, 1) \frac{\partial x_1}{\partial x_k} + (k, 2) \frac{\partial x_2}{\partial x_k} + \dots + (k, k-1) \frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_k}$$

(последнее уравнение получено из предыдущих ($k-1$) с помощью (17)).

Чтобы сделать изложение более прозрачным, запишем вслед за Форсайтом [9] систему (19) в симметричном виде (Якоби этого не делает), положив

$$\frac{1}{\mu} = y_k, \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial x_s}{\partial x_k} = y_s.$$

Тогда система (19) примет вид

$$\begin{aligned} (1, 2) y_2 + (1, 3) y_3 + \dots + (1, k-1) y_{k-1} + (1, k) y_k &= A_1, \\ (2, 1) y_1 + (2, 3) y_3 + \dots + (2, k-1) y_{k-1} + (2, k) y_k &= A_2, \\ &\vdots \\ (k, 1) y_1 + (k, 2) y_2 + (k, 3) y_3 + \dots + (k, k-1) y_{k-1} &= A_k. \end{aligned} \tag{19'}$$

Вопрос о разрешимости такой системы сводится к исследованию кососимметрического детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & (1, 2) & \dots & (1, k) \\ (2, 1) & 0 & \dots & (2, k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k, 1) & (k, 2) & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad ((i, j) = -(j, i)).$$

Такой детерминант в случае четного k , вообще говоря, отличен от нуля, особые случаи обращения его в нуль изучаются отдельно (об этом см. [9]). В случае же нечетного k он всегда равен нулю, чем и обусловлена невозможность преобразования I для нечетных k .

В случае $\Delta \neq 0$ из (19') по правилам Крамера имеем

$$y_s = \Delta_s / \Delta,$$

где Δ_s — определитель, полученный из Δ заменой s -го столбца столбцом свободных членов системы (19').

Из предыдущего следует

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial x_s}{\partial x_k} = \frac{\Delta_s}{\Delta}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{\Delta_k}{\Delta}.$$

Таким образом, приходим к системе из $k - 1$ обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dx_1}{\Delta_1} = \frac{dx_2}{\Delta_2} = \dots = \frac{dx_k}{\Delta_k}. \quad (20)$$

Пусть

$$f_1(x_k, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = a_1,$$

$$f_2(x_k, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = a_2,$$

• • • • •

$$f_{k-1}(x_k, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = a_{k-1},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ — произвольные константы, $f_1, \dots, f_{k-1}$ — интегралы системы (20). Введем новые

или

$$p_n = F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) = 0 \quad (1')$$

на пути, предложенном Лагранжем для $n = 2$, наталкивается на непреодолимые затруднения в случае $n > 2$, Пфафф свел задачу к эквивалентной — задаче интегрирования уравнения

$$\begin{aligned} dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_{n-1} dx_{n-1} - F(x_1, x_2, \dots \\ \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) dx_n + 0 \cdot dp_1 + 0 \cdot dp_2 + \dots \\ \dots + 0 \cdot dp_n = 0 \end{aligned} \quad (1a)$$

(в такой форме рассматривали уравнения с частными производными еще Даламбер и Эйлер), а последнюю — к более общей задаче — интегрированию уравнения

$$\begin{aligned} A_1(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) dx_1 + A_2(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) dx_2 + \dots \\ \dots + A_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) dx_{2n} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

посредством системы из n функций от $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$, содержащих произвольную функцию. Для решения этой задачи Пфафф предложил метод, который позволял сводить последнее уравнение к уравнению вида (14):

$$\begin{aligned} F_1(f_1, f_2, \dots, f_n) df_1 + F_2(f_1, f_2, \dots, f_n) df_2 + \dots \\ \dots + F_n(f_1, f_2, \dots, f_n) df_n = 0, \end{aligned}$$

где $f_1, f_2, \dots, f_n$ — функции $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$, которое, в свою очередь, он интегрировал через систему из n уравнений

$$\begin{aligned} W(f_1, f_2, \dots, f_n) = 0, \quad F_1 : F_2 : \dots : F_n = \\ = \frac{\partial W}{\partial f_1} : \frac{\partial W}{\partial f_2} : \dots : \frac{\partial W}{\partial f_n}, \end{aligned}$$

содержащих произвольную функцию W . Для сведения уравнения (23) к уравнению (14) по методу Пфаффа необходимо решить n систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для случая уравнения (1a), интересующего Пфаффа, первая такая система имеет вид (22), т. е. для случая $n = 2$ совпадает с характеристической системой, к интегрированию которой сводился метод Лагранжа. Однако для интегрирования уравнения (1') требовалось интегрирование n систем подобного рода — в такой форме дал Пфафф первое в истории теоретическое решение вопроса.

б) Однако на практике этот метод оказался малопригодным и был вытеснен способом ², который дали независимо друг от друга О. Коши в 1819 г. и К. Г. Якоби в 1837 г. (Результат Якоби был получен в связи с развитием метода Пфаффа.) Они показали, что решение задачи сводится к интегрированию системы (22) — первой из n систем, записанных Пфаффом.

в) Но, хотя метод Пфаффа скоро потерял свое значение при решении дифференциальных уравнений с частными производными, его результаты для уравнений в полных дифференциалах (22) заложили основы их теории. За этими уравнениями закрепилось название уравнений Пфаффа (название, употребленное впервые, по-видимому, А. Кэли в работе [11]). Проблемой Пфаффа, начиная с Якоби [12], стали называть задачу интегрирования уравнения Пфаффа при помощи возможно меньшего числа соотношений.

Дальнейшее развитие теории Пфаффовых уравнений, превратившейся в важный раздел анализа и получившей важные применения далеко за рамками теории дифференциальных уравнений, связано с именами А. Кэли [11], Г. Грассмана, Г. Фробениуса, А. Клебша, С. Ли, Э. Картана и др.

г) Отметим следующие два важные обстоятельства, проявившиеся в исследовании Пфаффа. Первое состоит в том, что метод Пфаффа, изобретенный им исключительно для целей интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными (1), благодаря открытию новых методов быстро потерял свое значение как метод решения таких уравнений. Теория же уравнений в полных дифференциалах, основы которой были заложены Пфаффом при его поиске решения указанной задачи и которая вовсе не являлась целью его исследований, оказалась в итоге главным его достижением, с которым мы связывали сегодня его имя. Наконец, второе обстоятельство состоит в том, что для решения своей задачи Пфафф перешел к рассмотрению задачи более общей. Ее решение оказалось для Пфаффа более простым. Такая ситуация, кажущаяся на первый взгляд парадоксальной, в истории математики встречается постоянно — вместо задачи, решение кото-

² Однако этот метод еще долго излагался наряду с другими в подробных курсах по теории дифференциальных уравнений (см. например, [9, 10]).

рой наталкивается на большие затруднения, рассматривают задачу более общую. Решение такой задачи может оказаться (по крайней мере на данном этапе) проще. Разумное обобщение задачи требует глубокой математической интуиции, которую и проявил Пфаф в своем классическом сочинении [4].

2. Результаты О. Коши

1. Метод Коши. В 1819 г. в бюллетене французского Общества любителей знания (Société Philomatique) появилась «Заметка об интегрировании уравнений с частными производными первого порядка с любым числом переменных» О. Коши. По словам Коши, он лишь после окончания работы узнал о решении Пфафа. Но так как «речь идет здесь об одном из самых важных вопросов интегрального исчисления, и так как метод г-на Пфафа отличен от моего», — пишет Коши [13, с. 239], то он полагает, что изложение его метода представляет интерес для геометров.

О. Коши излагает метод для случаев двух и трех независимых переменных, замечая, что распространение метода на произвольное их число не представляет никакой трудности. Мы проиллюстрируем метод Коши на примере уравнения

$$f(x, y, z, p, q) = 0. \quad (24)$$

Коши ищет решение этого уравнения $z(x, y)$, удовлетворяющее условиям

$$z(x_0, y) = \varphi(y), \quad q(x_0, y) = \varphi'(y).$$

Тогда $p(x_0, y)$ определяется из уравнения

$$F(x_0, y, \varphi(y), p(x_0, y), \varphi'(y)) = 0.$$

Если x, y, z рассматривать как функции двух независимых переменных ξ и η , то задача интегрирования уравнения (24) представляется как задача нахождения пяти функций x, y, z, p, q переменных ξ и η , удовлетворяющих уравнению (24) и дифференциальному соотношению

$$dz = p dx + q dy. \quad (25)$$

Метод Коши основан на применении преобразования, использованного Ампером в работе, опубликованной

в 1815 г. [14]:

$$x = x,$$

$$y = y(u, x). \quad (26)$$

В результате преобразования (26) уравнение (25) примет вид

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial u} du = p dx + q \left(\frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial u} du \right),$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = q \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Дифференцируя (24) последовательно по x и по u и обозначая

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad P = \frac{\partial F}{\partial p},$$

$$Q = \frac{\partial F}{\partial q},$$

Коши получает

$$X + Y \frac{\partial y}{\partial x} + Z \frac{\partial z}{\partial x} + P \frac{\partial p}{\partial x} + Q \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (28)$$

$$Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u} + P \frac{\partial p}{\partial u} + Q \frac{\partial q}{\partial u} = 0.$$

Задача сводится теперь к нахождению функций y, z, p, q переменных x и u , удовлетворяющих уравнениям (27) и (28). Смысл дальнейших выкладок Коши состоит в таком подборе функции u , чтобы получить систему из четырех уравнений, содержащих только производные по x .

Дифференцируя уравнения (27) соответственно по u и x и сравнивая полученные соотношения, Коши получает

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Подставляя полученное $\partial p / \partial u$, а также $\partial z / \partial u$ во второе из уравнений (28), он имеет

$$\frac{\partial y}{\partial u} \left[Y + qZ + P \frac{\partial q}{\partial x} \right] + \frac{\partial q}{\partial u} \left[Q - P \frac{\partial y}{\partial x} \right] = 0.$$

Он выбирает u таким образом, чтобы

$$Q - P \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Тогда

$$Y + qZ + P \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Присоединяя к этим уравнениям два первых уравнения (27) и (28), он имеет

$$\begin{aligned} P \frac{\partial y}{\partial x} &= Q, \\ P \frac{\partial z}{\partial x} &= Pp + Qq, \\ P \frac{\partial q}{\partial x} &= -Y - qZ, \\ P \frac{\partial p}{\partial x} &= -X - pZ. \end{aligned} \tag{29}$$

Цель достигнута — эти уравнения не содержат производной по u . Уравнения (28) можно рассматривать как обыкновенные, содержащие параметр u :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}. \tag{30}$$

Эта система совпадает с системой, получаемой в методе Лагранжа — Шарпи. Ее интегрирование при начальных условиях

$$(x_0, u, \varphi(u), p(x_0, u), \varphi'(u))$$

дает выражения

$$\begin{aligned} y &= y(x, x_0, u, \varphi(u), p(x_0, u), \varphi'(u)), \\ z &= z(x, x_0, u, \varphi(u), p(x_0, u), \varphi'(u)), \\ p &= p(x, x_0, u, \varphi(u), p(x_0, u), \varphi'(u)), \\ q &= q(x, x_0, u, \varphi(u), p(x_0, u), \varphi'(u)) \end{aligned} \tag{31}$$

такие, что $y = u$, $z = \varphi(u)$, $q = \varphi'(u)$, $p = p(x_0, u)$ при $x = x_0$.

Для того чтобы доказать, что полученные выражения (31) — искомые функции, достаточно установить, что выполняется второе из уравнений (27). Коши рассматри-

вает для этого функцию

$$U = \frac{\partial z}{\partial u} - q \frac{\partial u}{\partial y},$$

получает ее выражение в виде

$$U(x, u) = U(x_0, u) e^{-\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx},$$

откуда вследствие того, что

$$U(x_0, u) = \frac{\partial z}{\partial u} \Big|_{x=x_0} - \left(q \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x=x_0} = \varphi'(u) - \varphi'(u) = 0,$$

заключает³:

$$U = 0.$$

Метод Коши, как он отмечает сам, без труда обобщается на уравнение, содержащее произвольное число переменных

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0;$$

при этом ищется решение $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющее условиям

$$z|_{x_n=a} = \zeta(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

$$p_i|_{x_n=a} = \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$p_n|_{x_n=a} = \omega_n,$$

где ω_n определяется из уравнения

$$f\left(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, a, \zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \zeta}{\partial x_{n-1}}, \omega_n\right) = 0.$$

³ Ж. Бертран (Comptes rendus, 1859, t. XLV, p. 617) заметил, что последнее заключение справедливо лишь в случае конечности интеграла

$$\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx.$$

Исследование, проведенное Серре (Comptes rendus, 1861, t. VIII), показало, что в противном случае соотношения (31) не доставляют общего интеграла, но приводят к особому интегралу.

Замене (26) соответствует в этом случае замена

$$x_1 = x_1 (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, x_n),$$

$$x_2 = x_2 (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, x_n),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{n-1} = x_{n-1} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, x_n),$$

$$x_n = x_n.$$

Работа Коши, напечатанная в малораспространенном издании, не получила широкой известности; и Якоби, пришедший, опираясь на результаты Пфаффа и Гамильтона, по существу, к тому же результату в 1837 г., не знал тогда о ее существовании. В 1841 г. Коши во втором томе своих «Nouveaux exercices d'analyse et de physique mathématique» опубликовал «Мемуар об интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка» [15], в первом параграфе которого воспроизвел основное содержание работы 1819 г.

В заключение заметим, что, хотя Коши и не употребил самого термина «характеристика», по существу, он обобщил понятие характеристики на случай уравнений

$$f(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0$$

и его метод является по сути своей методом характеристик.

2. Схема рассуждений Коши. (А) Дано уравнение (24). (В) Требуется найти решение уравнения (24). Изобразим ситуацию в виде двух точек на рис. 8. Решить задачу — значит, протянуть путь от A к B . Первое, что делает Коши, — он ищет решение в специальной форме, такой, что $z(x_0, y) = \varphi(y)$ (С) (рис. 9). Затем он переформулирует задачу: найти функции

$$x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta),$$

удовлетворяющие уравнению (24), соотношению

$$dz = p dx + q dy$$

и условию $z(x_0, y) = \varphi(y)$ (D) (рис. 10). Далее Коши проводит замену (26), получая при этом выражения (27) — (Е) (рис. 11).

Потом, дифференцируя (24) по x и u , Коши получает уравнение (28) — (F) (рис. 12).



Рис. 8



Рис. 9

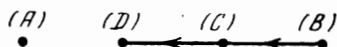


Рис. 10

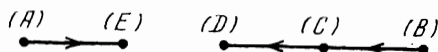


Рис. 11

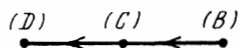
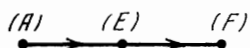


Рис. 12

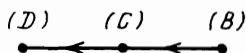
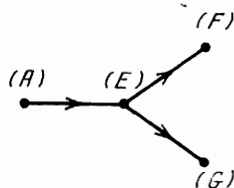


Рис. 13

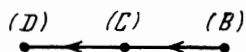
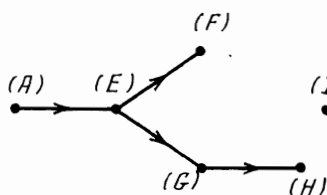


Рис. 14

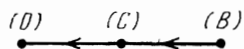
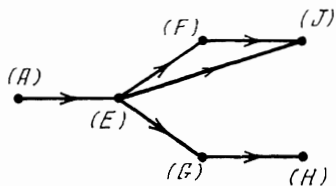


Рис. 15

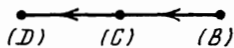
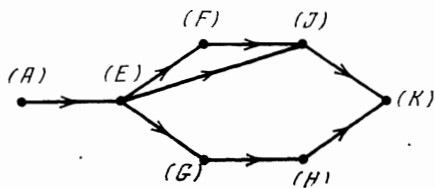


Рис. 16

Дифференцируя уравнения (27) соответственно по u и x , Коши получает уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial x} \left[Y + qZ + P \frac{\partial q}{\partial x} \right] + \frac{\partial q}{\partial u} \left[Q - P \frac{\partial y}{\partial x} \right] = 0$$

— (G) (рис. 13). Далее функция u выбирается таким образом, чтобы

$$Q - P \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

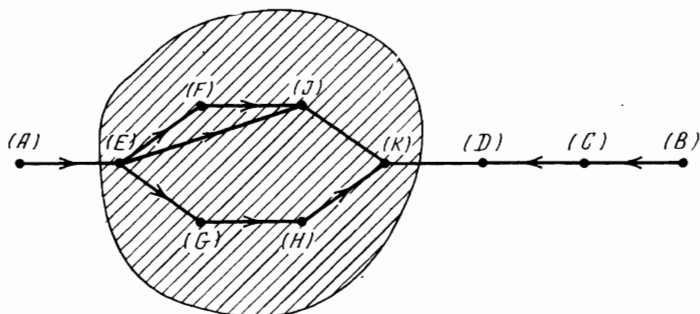


Рис. 17

тогда

$$Y + qZ + P \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

— (H) (рис. 14).

Затем берутся два первых уравнения системы (27) и (28) — (J) (рис. 15). Объединение последних двух уравнений и уравнений

$$Q - P \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad Y + qZ + P \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

дает систему (29) — (K) (рис. 16). Доказательство того, что интегрирование этой системы дает искомый интеграл, позволяет навести мост между точками (K) и (D) (рис. 17).

Основные сложности доказательства, связанные со сведением задачи к интегрированию системы обыкновенных уравнений, сосредоточены в пределах заштрихованной области.

Следует заметить, сравнивая построенный граф с графом, соответствующим методу Пфаффа, что они лежат

в разных плоскостях, так как отклонение графа от прямой в случае метода Пфаффа связано с переходом на новый уровень сложности. В случае же метода Коши уровень сложности сохраняется.

Заключение

Таким образом, задача интегрирования уравнения (2) для произвольного n была решена И. Ф. Пфаффом и О. Коши. В трудах последнего результат получил окончательную форму. И если метод интегрирования уравнения (2), предложенный Пфаффом, был впоследствии вытеснен методом Коши и Якоби, то само его исследование послужило, с одной стороны, началом развития новой ветви анализа — теории пфаффовых форм, с другой — наряду с работами У. Р. Гамильтона стало одним из источников размышлений К. Г. Якоби, с именем которого связан новый этап в развитии теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, который мы надеемся рассмотреть в другой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. 2-е изд. / Пер. под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1966.
2. Wussing H. J. F. Pfaff.— In: Dictionary of scientific biography / Ed. Ch. Gillispie. N. Y., 1974, vol. X, p. 572—574.
3. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1970—1972, Т. 1—3.
4. Pfaff J. F. Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quocunque variables, complete integrandi.— Abh. kgl. Akad. Wiss. Berlin, 1814—1815. Нем. пер.: J. F. Pfaff. Allgemeine Methode partielle Differentialgleichungen zu integrieren. Leipzig, 1902 (Ostwald's Klassiker N 129).
5. Gauss C. F. Bericht über die Abhandlung von Pfaff.— Göttingische gelehrte Anzeigen, 1815, 1. Juli, 1025—1038 — Werke, Bd. III. Göttingen, 1866, S. 231—241.
6. Пойя Д. Математическое открытие / Пер. Р. С. Бермана; под ред. И. М. Яглома. М.: Наука, 1970.
7. Jacobi C. G. J. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.— J. reine und angew. Math. Berlin, (1827), Bd. 2, H. 2, S. 317—329; Ges. Werke, Berlin, 1886, Bd. 4, S. 1—15.
8. Jacobi C. G. J. Ueber die Pfaffsche Methode, eine gewöhnliche lineäre Differentialgleichung zwischen $2n$ Variablen durch ein System

- von n Gleichungen zu integrieren.— J. reine und angew. Math. Berlin 1827, Bd. 2, H. 2, S. 347—357; Ges. Werke, Berlin, 1886, Bd. 4, S. 17—29.
9. *Forsyth A. R.* Theory of differential equations. Pt I. Cambridge, 1890.
 10. *Mansion P.* Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris, 1875.
 11. *Cayley A.* Démonstration d'un théorème de Jacobi par rapport au problème de Pfaff.— J. reine und angew. Math., 1860, Bd. 57, S. 273—277; Mathematical papers, Cambridge, 1891, vol. IV, p. 359—363.
 12. *Jacobi C. G. J.* Theoria Novi Multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi.— J. reine und angew. Math., Berlin, 1844, Bd. 27, S. 199—268; Berlin, 1845, Bd. 29, S. 213—279, 333—376; Ges. Werke, Berlin, 1886, t. IV, S. 511—522.
 13. *Cauchy A.* Note sur l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre à un nombre quelconque de variables.— Bull. Soc. philomat., 1819, p. 10—21; Oeuvres complètes, II Ser., t. II, Paris, 1958, p. 238—252.
 14. *Ampère A. M.* Considérations générales sur les intégrales des équations aux différentielles partielles.— J. l'Ecole royale polytechnique, Paris, janv. (1815), t. X (cah. 17), p. 549—611.
 15. *Cauchy A.* Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.— In: Exercices d'analyse et de physique mathématique (nouveaux exercices). Paris, 1841; t. II; Oeuvres complètes, Paris, 1916, Ser. II, t. XII, p. 272—309.

АКСИОМА ВЫБОРА В ПЕРВЫХ РАБОТАХ Г. КАНТОРА ПО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Ф. А. Медведев

Применения аксиомы выбора или ее эквивалентов в работах Кантора не раз указывались в математической и историко-математической литературе. Однако эти указания обычно относятся к относительно поздним трудам Кантора, главным образом к его фундаментальному труду [1]. Насколько нам известно, вопрос о роли названной аксиомы и ее эквивалентов в ранних теоретико-множественных работах Кантора не рассматривался. Далее предполагается проанализировать эту роль в статьях [2—4], опубликованных в 1874—1879 гг.

Первой работой Кантора по теории множеств традиционно считается его заметка «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» [2]. В ней Кантор доказал, что множество всех действительных алгебраических чисел можно, а множество всех действительных чисел нельзя поставить во взаимно-однозначное соответствие с множеством натуральных чисел. На первый взгляд ее содержание не связано с аксиомой выбора, и даже Цермело, комментировавший труды Кантора в «Gesammelte Abhandlungen» последнего, не сказал ни слова об этом.

Между тем в своих рассуждениях здесь Кантор соприкасался с аксиомой выбора по крайней мере дважды.

Его первое обращение носит неявный характер: он как очевидный факт принимает [2, с. 115], что всякое отличное от тождества алгебраическое уравнение имеет корень. Известно, однако, что доказательства того периода основной теоремы алгебры теперь считаются неудовлетворительными, а современные, рассматриваемые как корректные, доказательства опираются на какой-либо эквивалент аксиомы выбора, например на вполне упорядоченность поля алгебраических чисел [5, с. 90—91].

Второй раз Кантор прибегает к одному из эквивалентов аксиомы выбора при доказательстве несчетности множества всех действительных чисел. Ход его рассуждений таков.

Пусть

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

— произвольное счетное множество действительных чисел. Кантор доказывает, что во всяком заданном числовом интервале (α, β) существует число, не принадлежащее множеству (1). Для этого он, рассматривая произвольный (α, β) , $\alpha < \beta$, берет в нем *два первых* числа, принадлежащих множеству (1), скажем α' и β' , $\alpha' < \beta'$. В (α', β') он вновь выбирает *два первых* числа, принадлежащих множеству (1), скажем α'' и β'' , $\alpha'' < \beta''$, и т. д. до бесконечности¹.

Другими словами, он молчаливо предполагает, что всякое подмножество множества (1), попадающее в интервал $(\alpha^{(i)}, \beta^{(i)})$ ($i = 0, 1, \dots$) имеет первый элемент. Поскольку же множество (1) произвольно, а (α, β) — любой числовой интервал, то фактически в этом предположении содержится идея о том, что всякое подмножество произвольного счетного множества действительных чисел содержит первый элемент. И хотя Кантор еще не вводил не только понятия вполне упорядоченного, но даже понятия линейно упорядоченного множества, нам представляется достаточно правдоподобным, что само множество (1) он мыслил упорядоченным, а допуская существование первого элемента во всяком его подмножестве, он превращал (1) во вполне упорядоченное множество. Но предположение о упорядочении всякого счетного множества действительных чисел можно доказать, лишь опираясь на счетную версию аксиомы выбора [6, с. 108].

Более многообразны обращения Кантора к аксиоме выбора во второй его теоретико-множественной работе «К учению о многообразиях» [3]. Здесь, сразу же после введения общего понятия мощности множества, он принимает как естественное и не требующее доказательства свойство сравнимости мощностей произвольных множеств. Он выражает его следующими словами (в русском переводе): «Если два многообразия M и N не являются многообразиями равной мощности, то или M с составной частью N , или N с составной частью M имеют равную мощность; в первом случае мы называем мощность M меньшей, а во втором большей, нежели мощность N » [3, с. 119].

¹ Остальные моменты рассуждений Кантора нам здесь не нужны.

Другими словами, Кантор считает само собой разумеющимся фактом то, что мощности двух произвольных множеств или равны, или одна из них больше другой. У него еще не возникла мысль, что взаимоотношения между множествами, характеризуемые взаимно-однозначным соответствием между ними и их подмножествами, являются гораздо более сложными: еще не появилась идея будущей общей теоремы эквивалентности² и не возникло соображение, что для справедливости приведенного утверждения нужно исключить возможность несравнимости мощностей. Но такое исключение возможно только на основе аксиомы выбора. Простое же понятие свойства сравнимости мощностей произвольных множеств является косвенным признанием аксиомы выбора в ее общем виде, ибо утверждение о такой сравнимости есть один из известных основных эквивалентов этой аксиомы.

Следующим фундаментальным понятием, введенным в статье [3], является общее понятие счетного множества. При этом опять следуют неявные обращения к аксиоме выбора. Первое из них выражено в словах Кантора, что «последовательность положительных целых чисел дает, как можно легко показать, наименьшую из всех мощностей, соответствующих бесконечным многообразиям» [3, с. 120]. Никаких доводов в пользу этого утверждения Кантор в указанной работе не приводит. Говоря «легко показать», он, возможно, имел в виду, будущую теорему о том, что всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество, — теорему, доказываемую, как известно, только путем обращения к аксиоме выбора.

Столь же не обоснованы и две его первые теоремы о счетных множествах. На той же с. 120 он утверждает, будто опять-таки легко доказать, что всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно и что сумма счетного множества счетных или конечных множеств тоже счетна. Первую из этих теорем действительно доказать можно очень просто, но при условии, если принято предшествующее утверждение. Что касается второй, то еще в 1908 г. Цермело [7, с. 114] привел ее как пример пред-

² Хотя зародыш этой теоремы можно видеть в замечании Кантора, что эквивалентности некоторого бесконечного множества правильному подмножеству другого бесконечного множества еще не достаточно, чтобы заключить, что мощность первого множества меньше мощности второго [3, с. 119—120].

ложения, недоказуемого без обращения к аксиоме выбора.

Да и иллюстрация Кантором общего понятия счетного множества примером множества всех алгебраических чисел [3, с. 120] связана в конечном счете все с той же аксиомой вследствие неявного обращения к теореме о существовании корня алгебраического уравнения, о чем уже говорилось в связи с работой [1]. А эта иллюстрация является чуть ли не основной для Кантора при введении указанного общего понятия. Так что в историческом плане и понятие счетного множества в определенном смысле связано с рассматриваемой аксиомой.

Невинной на первый взгляд является теорема (E) Кантора, «доказательство которой из-за его простоты можно опустить» [3, с. 125]. Ее, несколько покороче, чем в [3], можно формулировать так: если $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) — две такие счетные последовательности множеств, что при всяком натуральном n мощности множеств P_n и Q_n соответственно равны, то множества $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ имеют одинаковую мощность. Однако доказать эту теорему без аксиомы выбора нельзя [8, с. 100].

Данная теорема играет существенную роль в плане построения статьи [3]. На нее Кантор опирается при доказательстве [3, с. 129] промежуточной теоремы (F), а с помощью последней получает теорему (D), что множество всех действительных чисел сегмента $[0, 1]$ эквивалентно множеству всех иррациональных чисел того же сегмента; второе доказательство теоремы (D) тоже опирается [3, с. 130] на (E). А теорема (D) лежит в основе канторовского доказательства основного результата его статьи [3]: возможности установить взаимно-однозначное соответствие между континуумами различного числа измерений, т. е. доказать их эквивалентность.

Та же теорема (D) привлекается Кантором [3, с. 131] при обобщении последнего результата до утверждения, что счетномерное непрерывное пространство имеет ту же мощность, что и линейный одномерный континуум.

Поскольку, далее, Кантор, опираясь на описанные результаты, в заключение рассматриваемой работы ставит проблему континуума [3, с. 132—133], то можно сказать, что и постановка этой проблемы, по крайней мере в исто-

рическом плане, в определенном смысле связана с аксиомой выбора.

Следующая теоретико-множественная работа Кантора [4] посвящена основной теореме теории размерности. Его доказательство этой теоремы является, по словам Цермело, «столь же неудовлетворительным, как и указанные в ней [т. е. в работе [4]. — Ф. М.] и раскритикованные автором предшествующие попытки доказательства» [9, с. 138]. В рассматриваемом нами аспекте эта статья [4] представляет интерес потому, что в ней Кантор тоже не обошелся без обращения, правда очень косвенного, к аксиоме выбора.

Действительно, свою основную теорему Кантор пытался подтвердить с помощью частного случая будущей теоремы Жордана о замкнутой кривой, а сам этот случай считал доказуемым путем привлечения теоремы классического анализа об обращении в нуль непрерывной функции, принимающей на концах промежутка значения противоположных знаков. В связи с последней Кантор сослался на «Алгебраический анализ» Коши [10]. Если же обратиться к названной книге, то несложно заметить в ней пробел в доказательстве указанной теоремы, связанной именно с аксиомой выбора.

Коши в [10] за исходное определение непрерывности функции одного переменного в точке x_0 взял, говоря на современном языке, требование, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. При доказательстве же указанной теоремы он воспользовался [10, с. 439] и определением непрерывности в x_0 как требованием, чтобы при $x_n \rightarrow x_0$ имело место $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, т. е. тем, что затем получило наименование «непрерывности в смысле Гейне». Пробел в рассуждениях Коши состоял здесь в том, что он заменил определение непрерывности, фигурирующее в формулировке теоремы, другим определением непрерывности, не сформулировав его явно и не доказав их эквивалентности³. Доказательство же этой эквивалентности, а тем самым восполнение отмеченного пробела требует, как установил Серпинский [11] (см. также [8, с. 107]), привлечения аксиомы выбора. Так что Кантор,

³ Других пробелов в рассуждениях Коши при доказательстве этой теоремы мы не касаемся.

опираясь на результат Коши, фактически прибегал, не осознавая этого, к данной аксиоме.

Таким образом, в начальный период построения учения о множествах Кантор был настолько убежден в цермеловости, если можно так выразиться, создаваемой им теории, что предложения, доказываемые с помощью аксиомы Цермело или ее эквивалентов, он считал совершенно очевидными, не требующими какой-либо аргументации для их подтверждения; а там, где он считал нужным аргументировать свои утверждения, он прибегал к предложениям классической математики, зависящим от этой аксиомы. Это странное с современной точки зрения явление, видимо, объясняется, так сказать, цермеловским духом доканторовской математики. Недаром Пуанкаре, говоря в 1906 г. об аксиоме выбора, писал, что «эту аксиому — не формулируя ее — применяли тысячи раз» [12, с. 140]. Что Пуанкаре имел в виду не только применения ее в теории множеств, но и в остальной математике, вытекает не только из отмеченных им тысячекратных применений (для теории множеств до 1906 г. это слишком много!), но и из его утверждения, что без этой аксиомы была бы невозможна «количественная теория» как конечных, так и бесконечных чисел [12, с. 142]. В настоящей работе приведены лишь два предложения классической математики, связанных с аксиомой выбора. Подобных им можно указать гораздо больше, причем не только в алгебре или анализе. В них эта аксиома «запрятана» несколько глубже, нежели в теории множеств, поэтому-то она и «всплыла на поверхность» первоначально именно в последней. Но она присутствовала в доканторовской математике как необходимый составной ее элемент, хотя и не сознаваемый, но делавший классическую математику цермеловской в том смысле, что доказательства очень многих ее фундаментальных предложений в конечном счете требовали обращения к аксиоме Цермело.

Строя теорию множеств на фундаменте классической математики, Кантор и ее цермеловость перенес на создаваемую им теорию, причем на первых порах это казалось ему настолько естественным, что он не видел необходимости как-либо аргументировать свои соображения, связанные с аксиомой выбора. Кажется, лишь в 1883 г. он начал несколько сомневаться в этом. Сомнения стали выражаться в том, что он, по-прежнему веря в цермело-

вость теории множеств и пользуясь теми или иными эквивалентами рассматриваемой аксиомы, начал предпринимать попытки доказательств этих эквивалентов или предложений, опирающихся на них. В частности, в «Основах общего учения о многообразиях» (1883 г.) он писал: «В одной дальнейшей работе я вернусь к тому основному, чреватому следствиями и особенно замечательному своей общезначимостью закону мышления, согласно которому всегда возможно придать всякому строго определенному множеству форму вполне упорядоченного множества» [13, с. 11]. Этот «закон мышления» есть не что иное, как тот эквивалент аксиомы выбора, при доказательстве которого Цермело [14] и ввел свою аксиому.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cantor G. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.— Math. Ann., 1895, Bd. 46, S. 481—512; 1897, Bd. 49, S. 207—246; In: Gesammelte Abhandlungen. Berlin: Springer, 1932, S. 282—356.
2. Cantor G. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.— J. reine und angew. Math., 1874, Bd. 77, S. 258—262; In: Gesammelte Abhandlungen. Berlin: Springer, 1932, S. 115—118.
3. Cantor G. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.— J. reine und angew. Math., 1878, Bd. 84, S. 242—258; In: Gesammelte Abhandlungen, 1932, S. 119—133.
4. Cantor G. Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten.— Göttingen Nachr., 1879, S. 127—135; In: Gesammelte Abhandlungen, 1932, S. 134—138.
5. Френкель А. А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.
6. Sierpinski W. Cardinal and ordinal numbers. Warszawa: PWN — Polish Sci. Publ., 1965.
7. Zermelo E. Neuer Beweis für Möglichkeit einer Wohlordnung.— Math. Ann., 1908, Bd. 65, S. 107—128.
8. Sierpinski W. L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse.— Bull. Acad. sci. Cracovie. Sér. A, 1918, p. 97—152; Oeuvres choisies, II. Warszawa: PWN — Ed. sci. Pologne, 1975, p. 208—255. Рус. пер.: В. К. Серпинский. Аксиома Зермело и ее роль в теории множеств и в анализе: — Мат. сб., 1924, т. 31, 94—128.
9. Zermelo E. Anmerkung [zu [3]].— Ф. М.].— In: Cantor's Gesammelte Abhandlungen. Berlin: Springer, 1932, S. 138.
10. Cauchy A. L. Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. 1^e partie: analyse algébrique. Paris, 1821. Рус. пер.: О. Л. Коши. Алгебраический анализ. Leipzig, 1864.
11. Sierpinski W. Sur le rôle de l'axiome de M. Zermelo.— C. r. Acad. sci., 1916, vol. 163, p. 688—690.

12. *Poincaré H.* Les mathématiques et la logique.— Rev. métaph. et morale, 1906, vol. 14, 294 —317. Рус. пер.: А. Долина; (П. Юшкевича): А. Пуанкаре. Математика и логика.— В кн.: Новые идеи в математике. Пг.: Образование, 1915, № 10, с. 116—148.
13. *Cantor G.* Grundlagen einer allgemeinen Mengenlehre. Leipzig, 1883, Ges. Abh., S. 165—204.
Рус. пер. П. Юшкевича: Г. Кантор. Основы общего учения о многообразиях.— В кн.: Новые идеи в математике. СПб.: Образование, № 6, 1914, с. 1—77.
14. *Zermelo E.* Beweis, dass jede Mengewohlgeordnet werden kann.— Math. Ann., 1904. Bd. 59, S. 514—516.

ГИЛЬБЕРТ И ПРОБЛЕМА ОБЩЕКОВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИИ

В. П. Визгин

Выдающийся гёттингенский математик Д. Гильберт внес фундаментальный вклад в разработку основ общей теории относительности (ОТО), образующей ядро современной релятивистской теории тяготения. Основной его результат — это вывод общековариантных уравнений гравитационного поля, сделанный им практически одновременно с Эйнштейном и независимо от него. Сравнение путей Эйнштейна и Гильберта к этим уравнениям, которое проводится в настоящей статье, демонстрирует определенную противоположность особенностей творческого мышления этих великих умов, связанную с двумя главными направлениями в развитии теоретической физики XX в. Основное внимание будет сосредоточено здесь на пути Гильберта, так как анализу эйнштейновского решения проблемы была посвящена другая недавняя работа автора [1].

Главные события, описываемые здесь, относятся к ноябрю 1915 г. Именно в эти трудные дни военного времени были найдены наконец правильные общековариантные уравнения гравитационного поля, венчающие грандиозное здание ОТО, первый набросок которой был дан Эйнштейном вместе с его студенческим другом математиком М. Гроссманом весной 1913 г. [2]. На завершающей стадии Эйнштейн работал один. Ноябрьская серия из четырех статей, доложенных на заседаниях Прусской академии наук в Берлине 4, 11, 18 и 25 ноября 1915 г., отражала напряженный и отнюдь не прямолинейный путь Эйнштейна от провозглашения требования общей ковариантности по отношению к уравнениям гравитационного поля, от которого он с Гроссманом отказался еще в 1913 г., до установления той формы уравнений, которая признана теперь классической [3—6].

Однако, когда дело было закончено, выяснилось, что пятью днями раньше по существу такие же уравнения фигурировали в докладе Гильберта, сделанного им на заседании Гёттингенского королевского научного общества [7]. Это была первая работа Гильберта по ОТО. Он, безусловно, опирался на предшествующие работы Эйнштейна 1913—1914 гг. Но проблема уравнений, как показывает историко-научный анализ ноябрьских работ Гильберта и Эйнштейна и как об этом свидетельствуют близко знавшие обоих Г. Вейль, Ф. Клейн, В. Паули, была ими решена независимо, вопреки недавно высказанной противоположной точке зрения [8], подвергнутой, впрочем, справедливой критике Дж. Мехрой [9]. Детальный анализ приоритетных аспектов, которых мы еще коснемся, не является предметом обсуждения в нашей работе. Наша задача состоит в том, чтобы попытаться понять, каким образом один из лидеров математики XX в. получил результат огромной физической важности. По-видимому, это может оказаться полезным при изучении особенностей взаимосвязи между физикой и математикой в период квантово-релятивистской революции в физике.

Гильбертовская программа аксиоматизации физики

Путь Гильберта к своему главному достижению в области физики восходит к выдвинутой им в 1900 г. программе аксиоматического построения физики. Речь идет о шестой проблеме Гильберта, именно об «аксиоматическом построении по этому же образцу [т. е. по образцу геометрии, аксиоматизацией которой он занимался с 1898 г.— В. В.] тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль» [10, с. 34]. Он имел в виду главным образом механику, а также тесно связанную с теорией вероятности кинетическую теорию газов и статистическую механику. Но уже тогда он предвосхитил подход к основаниям физики, который открылся после создания теории относительности и занял в физике XX в. ведущее место. Это — теоретико-инвариантный подход, в геометрии связанный с «Эрлангенской программой» Ф. Клейна [11, 12]: «Для того чтобы построение физических аксиом провести по образцу аксиом геометрии, следует попробовать сначала небольшим

количеством аксиом охватить возможно более общий класс физических явлений, а затем присоединением каждой следующей аксиомы прийти к более специальным теориям, а тогда, возможно, возникает принцип классификации, который сможет использовать глубокую теорию бесконечных групп преобразований Ли» [10, с. 35].

В известной периодизации творческой деятельности Гильберта, принадлежащей Г. Вейлю [13], пятым выделен период физических исследований, охватывающий 1910—1922 гг., хотя физические интересы его проявились значительно раньше. Важную роль здесь играла, несомненно, дружба с Г. Минковским, который с самого начала своей научной деятельности глубоко интересовался физикой [14]. В 1905 г. Гильберт вместе с Минковским руководили семинаром по электродинамике движущихся тел. Как вспоминал впоследствии М. Борн, «Минковский попутно намекал на то, что он занимается преобразованиями Лоренца и уже напал на след новых взаимосвязей» [15, с. 404]. В конечном счете это привело Минковского, правда уже после открытия специальной теории относительности (СТО), к знаменитой теоретико-инвариантной концепции четырехмерного пространства-времени, без которой едва ли бы оказалось возможным создание ОТО.

Первые же публикации Гильберта по физике относятся к вопросу о применении разработанной им незадолго до этого теории интегральных уравнений к кинетической теории газов (1910—1912 гг.). Но и здесь ведущей продолжала оставаться аксиоматическая тенденция, хотя, как выяснилось впоследствии, эти работы имеют большое практическое значение. Затем он перешел к теории излучения, с весны 1912 г. (когда Эйнштейн вплотную подошел к тензорно-геометрической концепции тяготения), у него появились ассистенты-физики П. Эвальд, затем А. Ланда, впоследствии весьма видные физики. Эвальд вспоминал, что Гильберт в это время верил в силу математического и аксиоматического подхода к физике и считал, что они в состоянии вывести эту науку из состояния кризиса [14].

В 1913 г. интересы Гильберта все больше смещаются в сторону проблем электронной теории и структуры атома. В Гёттингене его посещают Н. Бор и П. Дебай. С начала лета 1914 г., как вспоминал Дебай, который в это время организует по просьбе Гильберта семинар по исследованию строения материи, последний всерьез увле-

кается проблемой единой теории поля, способной объяснить существование частиц и структуру материи [14]. Интерес к этой глобальной проблеме физики, весьма родственной проблеме аксиоматизации основ физического знания был сильно стимулирован опубликованными в 1913 г. работами Г. Ми по единой нелинейной теории поля, которая по своей структуре была вполне аксиоматична. Теория Ми в настоящее время хорошо известна, она обстоятельно обсуждается в классических книгах Вейля [16] и Паули [17]. Основной замысел физика из Грейфсвальда, где он работал в эти годы, заключался в таком обобщении уравнений Максвелла, чтобы они смогли бы описать и частицы, по крайней мере электрон. Это достигалось за счет нелинейного характера основных уравнений. Гильберта в теории Ми привлекал не только «полевой идеал единства», но и высокий формально-аксиоматический уровень. Ми исходил из вариационного принципа

$$\delta \int L d\Sigma = 0,$$

а лагранжиан, который он называл «мировой функцией», конструировал из инвариантов группы Лоренца, составленных из напряженностей электромагнитного поля F_{ij} и потенциала φ_i . Включение в лагранжиан членов, явно зависящих от потенциала, приводило к нелинейности полевых уравнений, решение которых можно было, в частности, интерпретировать как своеобразные сгустки поля и вычислять их массы и заряды на основе только полевых величин. Эта явная зависимость от потенциала влекла за собой калибровочную неинвариантность теории, что немедленно приводило к существенным трудностям физического характера. Но в качестве программы объединения и аксиоматизации фундаментальной физики она представлялась перспективной. В сущности, это был новый замысел синтеза физики на основе электромагнитно-полевой концепции физической реальности. Эта концепция с начала 90-х годов XIX в. была очень популярна в Гёттингене, более того, именно гёттингенские теоретики были лидерами ее в Германии. Достаточно здесь назвать имена Э. Вихерта, В. Кауфмана, М. Абрагама, В. Ритца, К. Шварцшильда и др., а также тесно связанных с Гёттингеном П. Друде и А. Зоммерфельда. Влияние

этой концепции, восходящей к Гауссу, Риману и особенно В. Веберу, испытал на себе и Минковский, с которым Гильберт до самой смерти автора четырехмерного представления теории относительности находился в постоянном творческом контакте.

«Основания физики» Гильберта

В это время уже был заложен фундамент ОТО, которая, впрочем, была еще не признана большинством специалистов. Более правильно было бы говорить не об ОТО, а о теории Эйнштейна — Гроссмана, как ее тогда называли. Это была тензорная теория гравитационного поля, в которой роль потенциалов играли компоненты метрического тензора пространства-времени, при этом оказывалось, что пространство-время было уже не псевдоевклидовым, а римановым, искривленным. В результате теория выходила за рамки СТО, но таким образом, что принцип относительности не рушился, а, наоборот, обобщался. Допустимыми оказывались произвольно движущиеся системы отсчета и соответственно произвольные непрерывные преобразования. Тем самым лоренц-ковариантность заменялась общей ковариантностью, при которой СТО сохраняла свою справедливость лишь локально.

Теория Эйнштейна — Гроссмана не встретила понимания среди физиков. И не только потому, что она была слишком необычной и выходила за рамки СТО. Эта теория обладала глубоким внутренним противоречием, которое в общем видел Эйнштейн, настойчиво бился над его устранением, но все его попытки не приводили к решающему успеху. Этот кардинальный изъян теории Эйнштейна — Гроссмана заключался в том, что при общековариантном замысле теории, который и привел Эйнштейна к геометризованной концепции тяготения, сами уравнения гравитационного поля оставались не общековариантными. В 1913 г. Эйнштейн вместе с Гроссманом вплотную приблизились к правильным общековариантным уравнениям поля, но не сделали решающего шага, так как им казалось, что эти уравнения не сводятся в пределе слабых полей к ньютоновским, т. е. к уравнению Пуассона. Спустя некоторое время Эйнштейн выдвинул еще два аргумента против общековариантных уравнений поля: во-первых, он полагал, что такие уравнения нельзя согла-

совать с принципом причинности (это он показывал посредством рассуждения, согласно которому общая ковариантность полевых уравнений при одном и том же распределении энергии-импульса могла дать различные выражения для потенциала), во-вторых, ему не удалось общековариантным образом сформулировать закон сохранения энергии-импульса и поэтому ему казалось, что требование сохранения энергии-импульса ограничивает класс допустимых преобразований линейными. Таким образом, математическая структура теории, найденная, впрочем, на основе глубоких физических соображений и релятивистской методологии, подсказывала правильную форму общековариантных уравнений гравитационного поля, связанную с использованием тензора Риччи, но принять ее Эйнштейн отказался, так как на первых порах ему не удалось согласовать ее с фундаментальными методологическими принципами физики, такими, как принципы соответствия, причинности, сохранения энергии-импульса. В результате уравнения поля в теории Эйнштейна — Гроссмана пришлось выбрать линейно-ковариантными. Последующие попытки Эйнштейна расширить группу ковариантности полевых уравнений так, чтобы она включала в себя переходы от одной ускоренной системы отсчета к другой, оставаясь при этом конечно-параметрической, в конечном счете не привели к успеху. И только после возврата к требованию общей ковариантности полевых уравнений в начале ноября 1915 г. Эйнштейн в течение трех последующих недель сумел устранить основное противоречие теории, получив классические теперь уравнения гравитации и завершив тем самым разработку основ релятивистской теории тяготения, названной им ОТО.

20 ноября 1915 г., когда Эйнштейну оставалось сделать последний шаг на своем весьма драматическом пути к уравнениям поля, а именно ввести в левую часть уравнений член $-\frac{1}{2}g_{ik}R$ или, что эквивалентно, в правую часть член $-x/2g_{ik}T$, Гильберт выступает с докладом «Основания физики» (в Гёттингенском математическом обществе), в котором фактически эти уравнения уже фигурировали. Однако целью его работы были не столько эти уравнения, сколько гораздо более грандиозная задача — построить на аксиоматической основе единую теорию гравитации, электромагнитного поля и заряженных частиц.

Полученные при этом гравитационные уравнения были хотя и существенным, но побочным результатом. Так по крайней мере казалось самому Гильберту. В этой работе речь шла об аксиоматизации не отдельной физической теории, как это было в предыдущих физических исследованиях Гильберта, а физики в целом. Не случайно доклад назывался «Основания физики». Но построение аксиоматики физики в целом возможно лишь в том случае, если имеется некоторый единый теоретический каркас физического знания. Таким образом, речь шла одновременно о единой теории физического мира. Гильберт, как уже говорилось, в это время находился под влиянием единой полевой, точнее, электромагнитно-полевой теории материи Ми. Именно эту концепцию он положил в основу своего замысла. Но Ми не сумел включить в свою теорию гравитацию. Кстати говоря, он стоял на позиции скалярной лоренц-ковариантной теории гравитационного поля, т. е. теории типа Нордстрёма, не вытекающей из его единой теории. Изучив теорию Эйнштейна — Гроссмана, Гильберт усмотрел в тензорно-геометрической ее структуре значительно более богатые возможности, чем те, которые содержались в векторной теории электромагнитного поля. Математические особенности общековариантной теории тяготения натолкнули его на мысль о возможном истолковании уравнений Максвелла как некоторого следствия тензорных уравнений гравитационного поля. Точнее, речь шла о том обобщении уравнений Максвелла, которое было развито Ми в его единой теории. Гравитация, таким образом, порождала электромагнетизм, который, в свою очередь, в соответствии с нелинейной электродинамикой Ми обуславливал существование электрона, а в перспективе и других заряженных частиц, из которых уже по известным законам конструировалось вещество (атомы, молекулы, кристаллы и т. д.). Гильбертовская модификация проекта Ми, обогащенная идеями Эйнштейна, вполне удовлетворяла «полевому идеалу единства» (выражение самого Гильберта). Концепции Ми и Эйнштейна, сплавленные в едином аксиоматическом построении, к которому Гильберт неуклонно стремился, как мы видели, еще с конца прошлого века, использовали такие мощные математические теории, как риманову геометрию, тензорное исчисление, теорию непрерывных групп, вариационное исчисление, на которые Гильберт еще в 1900 г.

возлагал большие надежды при формулировке шестой проблемы.

Гильберт исходит из двух аксиом, постулируя четырехмерный континуум пространственно-временных переменных w_s и 14 полевых переменных — 10 эйнштейновских гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$ и 4 электромагнитных потенциала q_s : «аксиомы Ми о мировой функции» и «аксиомы об общей инвариантности». Последнюю он, однако, не называет «аксиомой Эйнштейна» потому, что, несмотря на провозглашенный Эйнштейном принцип общей ковариантности, этот принцип не был проведен им последовательно; к тому же Эйнштейн не использовал общековариантный принцип Гамильтона для получения уравнений гравитационного поля. В первой аксиоме утверждается, что «закон физического события определяется мировой функцией H », зависящей от $g_{\mu\nu}$, q_s , первых и вторых производных $g_{\mu\nu}$ по пространственно-временным переменным w_s и первых производных q_s по этим переменным, причем таким образом, что

$$\delta \int H \sqrt{g} d\omega = 0, \quad g = |g_{\mu\nu}|, \quad d\omega = dw_1 dw_2 dw_3 dw_4$$

для каждого из потенциалов $g_{\mu\nu}$, q_s . Во второй аксиоме требуется общековариантный характер «мировой функции». Основой же всего построения является теорема, которая непосредственно следует из этих аксиом и которая, в сущности, является частным случаем хорошо известной сейчас второй теоремы Нётер об инвариантных вариационных задачах: если вариационный интеграл инвариантен по отношению к группе общей ковариантности, зависящей от четырех произвольных непрерывных функций пространства-времени (сам интеграл при этом предполагается зависящим от n зависимых переменных), то из n соответствующих дифференциальных уравнений Лагранжа — Эйлера четыре могут всегда рассматриваться как следствие ($n - 4$) оставшихся. Это означает, что эти четыре уравнения сводятся к линейным комбинациям других ($n - 4$) уравнений и тем самым удовлетворяются тождественно. Строгого доказательства теоремы Гильберт не дал, спустя два с половиной года оно было дано ученицей Гильберта и Клейна Э. Нётер, которой через десятилетие суждено было стать лидером современной алгебраической школы. История установления теорем Нётер, являю-

щихся теоретической основой связи законов сохранения с принципами симметрии в теоретической физике, подробно рассмотрена в книге автора [18]. Лагранж-эйлеровские уравнения, вытекающие из двух основных аксиом, можно для краткости условно записать следующим образом:

$$[\sqrt{g}H]_{\mu\nu} = 0, \quad [\sqrt{g}H]_h = 0.$$

Первые 10 связаны с варьированием гравитационных потенциалов и могут рассматриваться как уравнения гравитационного поля, вторые 4, которые в соответствии с теоремой Гильберта можно считать следствием первых 10, могут рассматриваться как уравнения электродинамики (они связаны с варьированием четырех электромагнитных потенциалов). Именно в этом смысле можно говорить об электродинамике как следствии гравитации. Но электродинамика предполагается имеющей форму Ми, так как только в этом случае все построение приобретает характер единой теории поля, а упомянутые аксиомы — характер «оснований физики». Для конкретизации формы уравнений гравитационного и электромагнитного полей Гильберт вводит третью аксиому о структуре «мировой функции», согласно которой

$$H = K + L,$$

где K — скалярная кривизна, или «инвариант тензора Римана», единственный инвариант, который можно образовать исключительно из потенциалов $g_{\mu\nu}$ и первых и вторых производных его по координатам, а L — «электромагнитная» часть «мировой функции», которую в дальнейшем надлежит отождествить с лагранжианом теории Ми и которая зависит только от $g_{\mu\nu}$, электромагнитного потенциала q_s и первой производной от него. Уравнения гравитационного поля

$$\sqrt{g} \left(K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K g_{\mu\nu} \right) + \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0$$

тогда приобретают ту самую классическую форму, которую получил совершенно иным образом Эйнштейн через пять дней после гильбертовского доклада:

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right),$$

$$\text{или } R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}.$$

Дело в том, что член $\partial\sqrt{g}L/\partial g^{\mu\nu}$, как показывает далее Гильберт, как раз и является общековариантным обобщением тензора энергии-импульса электромагнитного поля (в данном случае — в формулировке Ми). Именно так, в контексте аксиоматически конструируемой единой теории поля, использующей мощные математические методы, с одной стороны, и фактически ненадежные представления нелинейной электродинамики Ми — с другой, были получены Гильбертом фундаментальные уравнения гравитации, составляющие ныне основу ОТО.

Значительная часть доклада была посвящена анализу проблемы сохранения энергии-импульса в этой теории, которая от ОТО отличалась в сущности лишь специализацией типа материальных систем, которые предполагались электродинамическими в смысле теории Ми. Гильберт, в частности, устанавливает, что законы сохранения в общековариантных теориях носят тождественный характер и тем самым принципиально отличаются от законов сохранения в теориях, основанных на плоском пространстве-времени. Э. Нётер вскоре выяснила природу этого различия на основе уже упомянутых теорем Нётер об инвариантных вариационных задачах [18]. Гильберт был очень воодушевлен успешным, как ему казалось, аксиоматическим синтезом гравитации и электромагнетизма. Об этом красноречиво свидетельствует заключительный абзац текста доклада: «Как мы видим, при соответствующем толковании немногие простые предположения, высказанные в аксиомах I и II, оказываются достаточными для построения теории, посредством которой не только в корне преобразуются наши представления о пространстве, времени и движении в направлении, указанном Эйнштейном, но и, как я убежден, при помощи составленных здесь уравнений будут разъяснены сокровеннейшие, до сих пор скрытые явления внутри атома и на их основе должно оказаться возможным вообще свести все физические постоянные к математическим постоянным. Таким путем мы приближаемся к возможности превратить в принципе физику в науку, подобную геометрии, которая составляет, несомненно, прекраснейший образец аксиоматического метода, пользующегося в данном случае услугами мощных инструментов математического анализа, а именно вариационного исчисления и теории инвариантов» [7, с. 597].

Перечислим, подводя итог, характерные черты гильбертовского вывода уравнений гравитации. Это — аксиоматичность подхода, программа единой теории поля («полевой идеал единства» физики), связанное с этой программой использование физически очень спорных представлений Ми о структуре материи, применение мощных математических методов (дифференциальной геометрии, теории инвариантов и непрерывных групп, вариационного исчисления), принятие за основу пространственно-временной структуры теории Эйнштейна — Гроссмана, отсутствие каких-либо упоминаний об экспериментально-эмпирических аспектах теории. Вопросами физического истолкования основных величин теории, физического истолкования принципа общей ковариантности, операционально-измерительными аспектами Гильберт в этой работе фактически не занимается. Решающее значение при получении гравитационных уравнений имеют теоретико-инвариантные соображения и вариационная техника. Более физический характер носит материал, относящийся к вопросу о выборе «материальной» части «мировой функции» и установлении соответствующего тензора энергии-импульса. В этом пункте Гильберт слишком жестко следует концепции Ми, хотя вся схема вывода уравнений гравитации остается в силе, если и не специализировать «материю» в духе Ми.

Сравнение подходов Гильберта и Эйнштейна

Эйнштейн и Гильберт пришли к открытию гравитационных уравнений совершенно различными путями. Конечно, лидерство Эйнштейна в разработке проблемы тяготения не вызывает сомнения. С 1907 г. он настойчиво стремился включить теорию тяготения в схему теории относительности. Основные вехи в генезисе релятивистской теории тяготения связаны с именем Эйнштейна: понимание необходимости расширения СТО при рассмотрении гравитации, принцип эквивалентности, эффекты «красного смещения» и отклонения света в поле тяготения, тензорный характер гравитационных потенциалов, идея отождествления их с компонентами метрического тензора, выдвижение принципа общей относительности и его математическое истолкование как принципа общей ковариантности, привлечение римановой геометрии и тензорного

анализа к решению проблемы (здесь ему существенно помог М. Гроссман), общековариантное описание физических процессов в поле тяготения, решение проблемы аномального смещения перигелия Меркурия, использование тензоров кривизны для формулировки уравнений гравитации (по-видимому, вместе с Гроссманом) и т. д.

Гильберт вообще не ставил перед собой задачу построения теории тяготения. Его целью, провозглашенной еще в 1900 г., была аксиоматизация физики на основе фундаментальных математических структур. До 1914 г. он занимался более частными физическими теориями (кинетическая теория газов, элементарная теория излучения). Математически глубокие полевые теории Ми и Эйнштейна вдохновили Гильберта на создание реализации своего давнего замысла — аксиоматизировать физику в целом. Электромагнитно-полевая концепция синтеза физики, как мы уже отмечали, имела в Гёттингене глубокие корни, восходящие к Гауссу, Риману, Веберу. Таким образом, исследования Ми и Эйнштейна должны были найти там благоприятный прием.

Как было показано в другой работе автора [1], и решающие достижения Эйнштейна на пути к общековариантным уравнениям поля, и его заблуждения на этом пути, и последующее осознание своих ошибок были связаны с существенно физическими аспектами исследования. Необходимость согласования новой теории, в частности полевых уравнений, с фундаментальными общезначимыми и методологическими принципами, такими, как принципы соответствия, сохранения энергии-импульса, причинности и др.; физическое истолкование основных величин и соотношений, фигурирующих в математическом аппарате теории; вопросы операционально-измерительного обоснования физических величин; виртуозное выявление следствий теории, поддающихся экспериментальной проверке; скептическое отношение к глобально-синтетическим концепциям (по крайней мере в рассматриваемый период) и модельно-гипотетическим представлениям и т. д. — таковы эти физические аспекты, которые имели главное значение в работе Эйнштейна и не имели такового в работе Гильберта, уступая место аксиоматико-дедуктивным, математическим, формальным аспектам, тесно связанным также с концепцией единой теории поля. В этом смысле подходы Гильберта и Эйнштейна были во

многим противоположны между собой. Для наглядности суммируем особенности этих подходов.

Сравнение подходов Гильберта и Эйнштейна к проблеме общековариантных уравнений гравитационного поля:

Эйнштейн

Гильберт

Конструктивно-физический подход

Аксиоматико-дедуктивный подход

Стремление к равновесию математического и физического аспектов

Явное преобладание математического аспекта над физическим

Связь с единой теорией поля отсутствует

Теория тяготения в контексте единой теории поля

Уравнения гравитации конструируются на основе физических соображений и методологических принципов физики

Уравнения гравитации выводятся из вариационного принципа

Повышенное внимание к вопросам физической интерпретации, операционально-измерительным аспектам и экспериментальной проверке теории

Вопросы физической интерпретации и операционально-измерительного обоснования физических величин отсутствуют, игнорирование проблемы экспериментального подтверждения теории

Отказ от каких-либо гипотетических представлений о структуре материи, в частности об электромагнитной природе материи

Использование физически не надежных представлений об электромагнитной природе материи, основанных на теории Ми

Приведем сравнительные оценки подходов Эйнштейна и Гильберта, принадлежащие таким авторитетам, как Ф. Клейн, Г. Вейль, В. Паули, по-видимому, хорошо знавшим всю эту историю из первых рук. Клейн в 1920 г. писал: «О каком-либо приоритете при этом не может быть и речи, так как оба автора следовали совершенно различному ходу мысли (и притом так, что совместимость их результатов первоначально не казалась обеспеченной). Эйнштейн поступает индуктивным образом и имеет в виду произвольные материальные системы. Гильберт дедуцирует, вводя упомянутое... ограничение электродинамикой, из высшего вариационного принципа. При этом он исходит, в частности, из теории Ми» [19, с. 568]. Оценка Паули такова (1921 г.): «Одновременно с Эйнштейном и независимо от него общековариантные уравнения поля были установлены Гильбертом. Изложение Гильберта было, однако, малосозвучно физикам, так как

Гильберт, во-первых, аксиоматически вводил вариационный принцип и, во-вторых, что важнее, его уравнения были выведены не для произвольной материальной системы, а специально исходя из теории материи Ми» [17, с. 211]. Через тридцать лет после описываемых событий Г. Вейль вспоминал: «В своих исследованиях по общей теории относительности Гильберт объединил теорию гравитации Эйнштейна с программой чисто полевой физики. Более умеренный подход Эйнштейна, не связанный с весьма спекулятивной программой Ми, оказался на этой стадии развития общей теории относительности более плодотворным. Попытки Гильберта в этом направлении следует рассматривать как некоторое предвосхищение единой полевой теории гравитации и электромагнетизма» [13, р. 283]. Не следует думать, что подход и замысел Гильберта не пользовались в это время популярностью: «Надежды на решение проблемы единой теории у Гильберта и его последователей в это время были весьма велики; мечта об универсальном законе, учитывающем и структуру космоса как целого, и все, что касается атомного ядра, казались близко осуществимыми» [13, р. 283].

Вопрос о приоритете, взаимоотношения между Гильбертом и Эйнштейном

Воспроизведем вкратце хронологию ноябрьских событий 1915 г.

4 ноября Эйнштейн докладывает на заседании Прусской академии наук в Берлине работу, в которой он возвращается к идее общей ковариантности по отношению к уравнениям поля (единственным ограничением является условие унимодулярности $\sqrt{-g} = 1$). В качестве уравнений поля принимаются уравнения

$$R_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu},$$

где $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи при условии $\sqrt{-g} = 1$.

11 ноября Эйнштейн представляет «Дополнение» к предыдущей работе, в которой он пытается устранить обнаруженную в конце этой работы несогласованность теории, связанную с невозможностью принятия $\sqrt{-g} = 1$. В этой статье фигурируют общековариантные уравнения поля

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu},$$

которые не приводят к указанному противоречию, если предполагается «бесследность» тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$. Это предположение созвучно концепции Ми об электромагнитной структуре материи.

18 ноября Эйнштейн докладывает работу, в которой решается задача об аномальном смещении перигелия Меркурия. При этом используется уравнение поля

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad \text{или} \quad R_{\mu\nu} = 0, \quad \sqrt{-g} = 1,$$

которое совпадает с правильным общековариантным полевым уравнением для «пустого» пространства. Кроме того, в статье вычисляется отклонение света в поле Солнца, оказавшееся в 2 раза большим, чем на основе лишь принципа эквивалентности. Наконец, анонсируется возможность отказа от гипотезы «бесследности», что возможно только в случае замены полевых уравнений укороченного типа правильными уравнениями с дополнительным членом $-\frac{1}{2}g_{ik}R$.

20 ноября Гильберт докладывает в Гёттингене свои «Основания физики», где в контексте единой теории гравитационного и электромагнитного полей он получает на основе общековариантного вариационного принципа знаменитые гравитационные уравнения с добавочным членом $-\frac{1}{2}g_{ik}R$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}}$$

и показывает, что левая часть этого уравнения имеет смысл общековариантного тензора энергии-импульса электромагнитного поля, характерного для теории Ми.

25 ноября Эйнштейн представляет доклад «Уравнения гравитационного поля», в котором он полностью отказывается от искусственной гипотезы о «бесследности» тензора энергии-импульса материи и формулирует на основе соображений, связанных с законом сохранения энергии, общековариантные уравнения гравитации в форме

$$R_{im} = -\kappa \left(T_{im} - \frac{1}{2}g_{im}T \right),$$

эквивалентной гильбертовской.

Таким образом, как будто вполне ясно, кто, что и когда сделал. При безусловном лидерстве Эйнштейна в разра-

ботке гравитационной проблемы в частности и проблемы уравниваний гравитационного поля вообще следует признать, что последний шаг на пути к общековариантным уравнениям поля был сделан Гильбертом и Эйнштейном независимо и почти одновременно. Более того, у Гильберта эти уравнения появляются даже на пять дней раньше. Но вопрос оказывается не столь простым, так как в тексте доклада Гильберта содержатся ссылки на все четыре ноябрьских статьи Эйнштейна, что может означать, по-видимому, только то, что этот текст при подготовке его к печати претерпел некоторые изменения. Здесь возникает ряд вопросов, на которые можно ответить только предположительно. Каковы были отличия опубликованного текста доклада Гильберта от первоначального? Знали ли Эйнштейн до 25 ноября о докладе Гильберта? Знал ли Гильберт о трех ноябрьских статьях Эйнштейна до своего доклада? Например, можно предположить, что гипотеза «бесследности», опубликованная Эйнштейном в статье, доложенной 11 ноября, могла стимулировать мысль Гильберта в направлении к единой теории поля в духе Ми. Независимо от ответов на эти вопросы резкое различие в логике рассуждений и ходе мысли каждого из первооткрывателей, отсутствие какой-либо приоритетной полемики, явной или косвенной, между ними, уверенная оценка независимости результата, полученного Гильбертом, такими людьми, как Клейн, Вейль, Паули, близко знавшими и Гильберта и Эйнштейна,— все это позволяет с уверенностью заключить о независимом и практически одновременном открытии общековариантных уравнений гравитации двумя этими выдающимися теоретиками XX в.

Что известно о взаимоотношениях Гильберта и Эйнштейна? До знаменательного ноября 1915 г. между ними состоялась одна встреча в первой половине лета 1915 г., вероятно в начале июля, т. е. накануне, за три-четыре месяца от открытия. В письме к Зоммерфельду 15 июля 1915 г. Эйнштейн писал: «В Гёттингене у меня была большая радость — было понято все до последних деталей. Гильберт меня совершенно очаровал. Выдающийся человек!» [20, с. 192]. Основной темой разговоров была, очевидно, ОТО и те трудности, которые стояли на пути Эйнштейна к ее завершению. По-видимому, Гильберт, с большим интересом и пониманием отнесся к эйнштейновской теории; возможно, сделал также ряд стимулирующих

щих замечаний, что и вызвало у Эйнштейна, не избалованного пониманием со стороны своих коллег, столь восторженную реплику.

Отношение Гильберта к эйнштейновской теории ясно видно из текста его ноябрьского доклада: «Грандиозные задачи, поставленные Эйнштейном, а также остроумно разработанные для их решения методы, его глубоко идущие мысли и образование оригинальных понятий... открыли для исследований по основаниям физики новые пути» [7, с. 589]. Неоднократные ссылки на работы Эйнштейна, исключительно высокая оценка его трудов в области теории относительности и гравитации говорят о том, что Гильберт считал Эйнштейна основоположником всего этого направления, в разработку которого включился и сам он.

В ноябрьских работах Эйнштейна ссылок на Гильберта мы не находим. Только в следующей большой статье, посвященной ОТО и законченной 20 марта 1916 г., появляется первое упоминание о работе Гильберта, но не в связи с его выводом гравитационных уравнений, а в связи с интерпретацией закона сохранения энергии-импульса как следствия общей ковариантности полевых уравнений. Эта интерпретация, кстати говоря, ясно показывала отношение Эйнштейна к единой теории Гильберта, которое, как и к теории Ми, было отрицательным. Первое известное нам упоминание Эйнштейна о теории Гильберта содержится в его письме к Зоммерфельду от 9 декабря 1915 г.: «Насколько я знаю о теории Гильберта, она пользуется таким подходом к электродинамике, исключая рассмотрение гравитационного поля, где он тесно примыкает к теории Ми. Подобный специальный подход с точки зрения общей теории относительности нельзя обосновать» [20, с. 194]. Еще более резкую оценку теории Гильберта он дал в письме к Эренфесту от 24 мая 1916 г.: «Гильбертовское изложение мне не нравится. Оно излишне специально в части, касающейся материи, излишне усложнено и не вполне корректно в построении (плутни сверхчеловека для завуалирования метода)» [21, с. 136]. Еще через полгода он пишет Вейлю, который вслед за Гильбертом вскоре сам приступил к разработке единой теории поля, основанной на ОТО: «Гильбертовский подход к материи кажется мне ребяческим, я имею в виду ребенка, не знающего коварства окружающего мира...

Во всяком случае невозможно согласиться с тем, чтобы серьезные соображения, вытекающие из принципа относительности, связывались со столь рискованными и необоснованными гипотезами относительно строения электрона и материи. Я охотно признаю, что поиски подходящей гипотезы для функции Гамильтона составляют сегодня одну из важнейших задач теории. Но „аксиоматический метод“ мало что может здесь дать» (письмо к Вейлю от 23 ноября 1916 г.) [21, с. 136].

Тем не менее Эйнштейн понимал, что изящный вывод гравитационных уравнений из общековариантного вариационного принципа и гильбертовский предвестник второй теоремы Нётер являются значительными теоретическими достижениями. В статье «Принцип Гамильтона и общая теория относительности», поступившей в редакцию журнала 2 ноября 1916 г., он писал: «В последнее время Г. А. Лоренцу и Д. Гильберту удалось придать общей теории относительности особенно наглядную форму, тем что они вывели ее уравнения из одного единственного вариационного принципа» [22, с. 524]. Уместно привести выдержку из статьи М. Борна, большого друга Эйнштейна и Гильберта: «Это замечательное совпадение [речь идет об открытии уравнений гравитации Эйнштейном и Гильбертом. — В. В.], однако никогда не приводило к каким-либо спорам о приоритете между ними. Скорее, их переписка, которая началась с обмена научными взглядами; перешла в более личные и дружеские связи. Гильберт всегда напоминал о том, что великие фундаментальные идеи принадлежали Эйнштейну, и он говорил об этом в своих многочисленных лекциях и воспоминаниях» [23, с. 33]. Заметим, что эта статья была написана в связи с 60-летним юбилеем Гильберта в 1922 г., и несомненно была прочитана Гильбертом. Длительной переписки между Гильбертом и Эйнштейном не возникло, с 1915 по 1919 г. они обменялись, по-видимому, только четырьмя письмами, хранящимися в принстонском архиве Эйнштейна [24].

Эта история имела продолжение, связанное с последующими двумя публикациями Гильберта по ОТО в 1917 и 1924 гг. и переходом Эйнштейна в начале 20-х годов к разработке программы единой теории поля, опирающейся на ОТО и подвергавшейся им до этого резкой критике. Но это уже выходит за рамки темы настоящей статьи.

В заключение отметим, что подчеркнутое выше различие в подходах Гильберта и Эйнштейна к решению проблемы уравнений гравитационного поля было, конечно, связано с их приверженностью к полярным, в известном смысле к научным традициям и научно-исследовательским программам, а не только с тем, что один из них был математик прежде всего, а другой — физик. Л. Пайнсон выделяет две основные стратегии в теоретическом развитии физики, не в содержательном, а методологическом отношении [25]. Эти две стратегии, тесно связанные с оформлением теоретической и математической физики в самостоятельные области исследования в конце XIX в., могут быть так и названы: направление теоретической физики и направление математической физики. Оба направления служат целям теоретического развития физики. Но одно из них, «математическая физика», более тесно связано с непосредственным анализом математических структур физики, с интенсивным использованием абстрактных методов математики, не ставших еще достоянием физики, а также с аксиоматизацией отдельных разделов физики и физической теории в целом, с повышением строгости выводов и доказательств в теоретических рассуждениях. В физическом отношении поэтому «математическая физика» настроена чаще всего на программу глобального синтеза физики, например на основе единой теории поля. Вторая стратегия, «теоретическая физика», делает упор на экспериментально-эмпирических аспектах теории, вопросах физической интерпретации, согласовании теории с фундаментальными общезначимыми и методологическими принципами. Если для первого направления характерен аксиоматико-дедуктивный подход, то для второго — конструктивно-физический.

Гёттингенская теоретическая школа, в которой видное место занимали математики или ученые, одинаково успешно работающие как в области математики, так и в области физики (Клейн, Гильберт, Минковский, Г. Вебер, Каратеодори, Г. Вейль, Курант, Герглотц, Э. Нётер), представляла институционально оформившееся направление. Ему противостояли теоретические школы, например, в Лейдене (Лоренц, Эренфест и др.), Вене (Больцман, Хазенорль и др.) [25], а также, по-видимому, в Берлине (Планк, затем и Эйнштейн), в Мюнхене (Зоммерфельд), представлявшие направление «теоретической фи-

зики». Разумеется, это разделение — определенная идеализация: «теоретики», как и «математики», нередко, как, например, Эйнштейн при разработке ОТО, используют абстрактные математические методы, разрабатывают различные варианты единых теорий и т. д. Рассмотренная идеализация представляется, однако, имеющей реальное основание и оказывается полезной при изучении формирования ОТО, в частности и проблемы открытия общековариантных уравнений гравитации.

Подход Эйнштейна и подход Гильберта наглядно моделируют оба этих направления, которые, по-видимому, вообще характерны для теоретической физики XX в. Не следует думать, что творческое начало присуще главным образом «теоретической физике». Можно вспомнить ряд фундаментальных достижений, связанных именно с «математической физикой», например работы Г. Вейля и И. фон Неймана по квантовой механике, работы Швингера, Томонаги, Фейнмана, Н. Н. Боголюбова и его учеников по квантовой теории поля, а также исследования Уайтмана, Хаага, Йоста, Хеппа и др. по аксиоматической квантовой теории поля, работы А. З. Петрова, Пенроуза, Хокинга и др. по ОТО и т. д. Девизом «математиков» могли бы служить легендарные слова Гильберта, сказанные им в период его интенсивных аксиоматических исследований физического знания: «В сущности, физика слишком трудна для физиков» [14, р. 127].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Визгин В. П. Путь Эйнштейна к общековариантным уравнениям гравитационного поля. — В кн.: История и методология естественных наук. М.: Изд-во МГУ, 1975, вып. 17, с. 56—75.
2. Эйнштейн А., Гроссман М. Проект обобщенной теории относительности и теории тяготения. — В кн.: А. Эйнштейн. Собрание научных трудов / Под ред. И. Е. Тамма и др. М.: Наука, 1965, т. I, с. 227—266.
3. Эйнштейн А. К общей теории относительности. — Там же, с. 425—435.
4. Эйнштейн А. К общей теории относительности: (Дополнение). — Там же, с. 435—438.
5. Эйнштейн А. Объяснение движения перигелия Меркурия в общей теории относительности. — Там же, с. 439—447.
6. Эйнштейн А. Уравнения гравитационного поля. — Там же, с. 448—451.

7. Гильберт Д. Основания физики.— В кн.: Вариационные принципы механики / Под ред. Л. С. Полака. М.: Физматгиз, 1959, с. 589—598.
8. Guth E. Contribution to the history of Einstein's geometry as a branch of physics.— In: Relativity. Proc. Relativity Conf. in the Midwest. Ohio, Cincinnati, 1969, June 2—6. New York; London, 1970.
9. Mehra J. Einstein, Hilbert and the theory of gravitation.— In: The physicist's conception of nature / Ed. by J. Mehra. Dordrecht; Boston, 1973, p. 92—178.
10. Гильберт Д. Математические проблемы.— В кн.: Проблемы Гильберта / Под ред. П. С. Александрова. М.: Наука, 1969, с. 11—64.
11. Визгин В. П. Эрлангенская программа и физика. М.: Наука, 1975.
12. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (Эрлангенская программа) / Пер. Д. М. Синцова.— В кн.: Об основаниях геометрии. (Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей). М.: Гостехиздат, 1956.
13. Weyl H. David Hilbert and his mathematical work.— Bull. Amer. Math. Soc., 1944, vol. 50, p. 612—654, Appendix to the book: C. Reid. Hilbert. Berlin etc.: Springer, 1970, p. 245—283.
14. Reid C. Hilbert. Berlin etc.; Springer, 1970.
15. Борн М. Воспоминания о Германе Минковском.— В кн.: М. Борн. Физика в жизни моего поколения / Пер. под ред. С. Г. Суворова. М.: ИЛ, 1963, с. 399—410.
16. Weyl H. Raum. Zeit. Materie. Vorlesungen ueber allgemeine Relativitaetstheorie. 5. Aufl. Berlin: Springer, 1923.
17. Паули В. Теория относительности. М.; Л. Гостехиздат, 1947.
18. Визгин В. П. Развитие взаимосвязи принципов симметрии с законами сохранения в классической физике. М.: Наука, 1972.
19. Klein F. Gesammelte mathematische Abhandlungen. Berlin: Springer, 1921, Bd. I.
20. Einstein A., Sommerfeld A. Briefwechsel. Sechzig Briefe aus dem goldenen Zeitalter der modernen Physik / Hsrg. und komment. von A. Hermann. Basel, 1968. Рус. пер.: А. Зоммерфельд. Пути познания в физике. М.: Наука, 1973, с. 191—246.
21. Зелиг К. Альберт Эйнштейн. М.: Атомиздат, 1964.
22. Эйнштейн А. Принцип Гамильтона и общая теория относительности.— В кн.: А. Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т. I, с. 524—529.
23. Борн М. Гильберт и физика.— В кн.: М. Борн. Размышления и воспоминания физика / Под ред. Э. И. Чудинова. М.: Наука, 1977, с. 24—35.
24. Kuhn T. S., Heilbron J. L., Forman P., Allan L. Sources for history of quantum physics. Philadelphia: Amer. Phil. Soc., 1967.
25. Pyenson L. R. The Goettingen reception of Einstein's theory of general relativity: Ph. D. Dissertation. John Hopkins Univ., 1974.

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАБОТАХ ДУНКАНА СОММЕРВИЛЛЯ (К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

Б. А. Розенфельд

24 ноября 1979 г. исполняется 100 лет со дня рождения выдающегося шотландского геометра Дункана Соммервилля. Дункан Макларен Янг Соммервилль родился в семье Джемса Соммервилля (1846—1925), питомца школы Дж. Хериота в Эдинбурге и университета в Глазго, работавшего с 1870 по 1920 г. врачом-миссионером в городах Бивар, Удайпур и Джодхпур в Раджастане (Индия). Дж. Соммервилль занимался медицинским просвещением среди индийцев и, в частности, опубликовал лекции по гигиене на языке урду. Д. М. Я. Соммервилль родился в Биваре и был назван по имени шотландского либерального политика Дункана Макларена, лорд-мэра Эдинбурга, тесно связанного со школой Хериота, в которой учился Дж. Соммервилль; имя Янг (young — «младший») было дано ему для отличия от его знаменитого тезки.

Д. М. Я. Соммервилль получил образование на родине отца в Шотландии — сначала в Пертской академии, а затем в университете в Сент-Эндрьюсе. Этот университет, старейший в Шотландии и один из старейших в Европе (он был основан в 1410 г.) в то время еще сохранял значение важного научного центра Великобритании; в XX веке это значение перешло к Эдинбургскому университету. Соммервилль учился в университете с 1896 по 1900 г., его учителями были профессора Брюс и Рамзай. В 1900 г. Соммервилль получил степень магистра и стал лектором университета, а в 1905 г. он защитил докторскую диссертацию. Соммервилль был активным членом Эдинбургского математического общества и в 1911 г. был избран его президентом. После женитьбы в 1912 г. на Луизе Агнес Беверидж, не имея возможности получить профессию в Шотландии, Соммервилль принял в 1915 г. приглашение Веллингтонского университета в Новой Зеландии и переехал в Веллингтон. Здесь он получил должность профессора чистой и прикладной математики и прожил до

конца своих дней. Соммервилль умер в Веллингтоне 21 января 1934 г.

Соммервилль был одним из крупнейших знатоков неевклидовой и многомерной геометрии. Еще работая в Сент-Эндрьюсе, он составил исчерпывающую «Библиографию неевклидовой геометрии, включая теорию параллельных линий, основания геометрии и пространства n измерений» (1911); этот труд не потерял актуальности и в настоящее время и был переиздан в 1970 г. [1]. Тогда же Соммервилль выпустил одно из первых руководств по геометрии Лобачевского и эллиптической геометрии «Элементы неевклидовой геометрии» [2]. Работая в Веллингтоне, Соммервилль выпустил «Аналитическую теорию конических сечений» [3], «Введение в геометрию n измерений» [4] и «Аналитическую геометрию трех измерений» (1934), также неоднократно переиздававшуюся [5]. Из этих книг особенно следует отметить вторую, являющуюся одной из первых монографий по многомерной евклидовой геометрии.

В своих статьях «Решетки на плоскости в геометрии с абсолют» [6] и «Полуправильные решетки на плоскости в геометрии с абсолют» [7] Соммервилль рассматривал классические неевклидовы плоскости, которые он определял как проективную плоскость, на которой задан «абсолют» — коника, т. е. коническое сечение, действительное в случае геометрии Лобачевского и мнимое в случае эллиптической геометрии. Правильные и полуправильные решетки в этих плоскостях определяют подгруппы групп движений этих плоскостей. Статья «О некоторых проективных конфигурациях пространства n измерений и о связанной с ними проблеме размещения» [8] Соммервилля была посвящена другой разновидности геометрии, связанной с конечными группами, — конечным проективным геометриям. После известной статьи Дж. Фано 1892 г., в которой были впервые определены конечные проективные плоскости над полями вычетов по простому модулю, общая теория конечных проективных пространств над конечными полями (полями Галуа) была построена в том же 1906 г. О. Вебленом и его учеником У. Буссеем [9]. Веблен и Буссей подсчитали числа точек, прямых и плоскостей, а также число коллинеаций в этих пространствах и показали, что к геометрии этих пространств сводятся многие классические задачи комбинаторного анализа.

Развивая идеи Веблена и Буссея, Коммервилль подсчитал число r -мерных плоскостей этого пространства, проходящих через данную s -мерную плоскость и лежащих в данной t -мерной плоскости, и также применил полученные результаты к задачам комбинаторного анализа. Конечным группам движений посвящен и целый ряд позднейших работ Коммервилля, многие из которых связаны с задачами кристаллографии. Аналогичным проблемам в многомерных пространствах посвящены и последние труды Коммервилля «Изоэдральные и изогональные обобщения правильных многогранников» [10] и «Об отношениях между группами вращений правильных политопов и группами перестановок» [11].

Наиболее важной геометрической работой Коммервилля, сыгравшей исключительную роль в истории геометрии, была «Классификация геометрий с проективными метриками» [12]. Заметим, что эта работа не была оценена надлежащим образом ни современниками, ни автором первой посмертной статьи о жизни и трудах Коммервилля Х. У. Тёрнболлом, написанной в 1935 г. [13]. Тёрнболл только упомянул о «его исследованиях по классификации всех типов неевклидовой геометрии (включая те, которые обычно исключаются, как причудливые (bizarre))» [13, с. 58]. Работа [12] совершенно не упомянута в биографии Коммервилля, опубликованной в 1975 г. Эдной Крамер [14]. Тем более необходимо подробнее рассказать об этой работе и ее значении для современной геометрии.

В начале этой работы Коммервилль пишет: «В проективной метрике Кэли — Клейна обычно предполагается, что мера углов, плоских и двугранных, — всегда эллиптическая, т. е. что в пучке плоскостей или прямых не существует собственной плоскости или прямой, образующей с другими плоскостями или прямыми бесконечный угол. При этом ограничении существует только три вида геометрий: параболическая, гиперболическая и эллиптическая, т. е. геометрии Евклида, Лобачевского и Римана; следовательно, на форму абсолюта накладываются ограничения. Так, в плоской геометрии единственной возможной вырожденной формой абсолюта будет пара совпадающих прямых и пара мнимых точек; в трех измерениях абсолют не может быть линейчатой quadriкой, отличной от двух совпадающих плоскостей. Если, од-

нако, снять это ограничение, относящееся к мере углов, то существует 9 систем плоских геометрий и 27 трехмерных: действительно, мера расстояний, плоских углов и двугранных углов может быть параболической, гиперболической или эллиптической.

Предмет настоящей статьи — классификация геометрий в отношении формы абсолюта сначала для трех измерений, а затем вообще для n измерений» [12, с. 25].

Далее для трехмерного пространства Соммервилль определяет «расстояния» между двумя элементами одного рода — расстояние между точками прямой, угол между прямыми пучками и двугранный угол между плоскостями следующим образом: «Два элемента P , Q (точки, пересекающиеся прямые, плоскости) определяют одномерную геометрическую фигуру (ряд точек, пучок прямых, пучок плоскостей) (P, Q) , и в этой форме существуют два абсолютных элемента X , Y . При этом, обозначая (XY, PQ) двойное отношение в ряде точек, в пучке прямых или в пучке плоскостей, мы имеем

$$(PQ) = c \ln (XY, PQ).$$

Для точек, прямых и плоскостей постоянная c имеет независимые значения K , k и κ » [12, с. 26].

Приведем сначала классификацию Соммервилля трехмерных геометрий:

А. Абсолют — собственная квадрака.

I. Мнимая.

K , k , κ — все мнимые. Расстояния и углы всегда действительны и периодичны (эллиптическая геометрия).

II. Действительная нелинейчатая.

Абсолют делит пространство на собственную и на идеальную область точек, прямых и плоскостей и обладает внешней и внутренней областью. Прямая проектирует квадраку, если она ее не пересекает.

1. Собственные точки — внутренние. Собственные прямые и плоскости пересекают квадраку. K действительно, k и κ мнимы (гиперболическая геометрия).

2. Собственные точки — внешние. Собственные прямые и плоскости пересекают квадраку. K и k действительны, κ мнимо.

3. Собственные точки — внешние. Собственные плоскости пересекают квадраку, а собственные прямые не пересекают. K мнимо, k и κ действительны.

4. Собственные точки — внешние. Собственные прямые и плоскости не пересекают квадраку. K и k мнимы, κ действительно.

III. Линейчатая.

Не существует точки, через которую нельзя провести вещественных касательных прямых и плоскостей к квадраке, и всякая плоскость пересекает квадраку. Прямая проектирует квадраку, если она ее пересекает.

1. Собственные прямые пересекают квадраку. Возьмем какую-либо из этих прямых и проведем через нее произвольную плоскость, пересекающую квадраку по конике S . Пусть эта плоскость — собственная. При этом возможны два случая:

а) точки внутри S — собственные; K действительно, k мнимо, κ действительно,

б) точки вне S — собственные; K , k , κ действительны.

2. Собственные прямые не пересекают квадраки. K мнимо, k действительно, κ мнимо.

В случае линейчатой квадраки существуют два семейства прямых, которые не пересекают квадраки, и эти два семейства разделены квадракой. Следовательно, если мы фиксируем одну из прямых как собственную, все прямые другого семейства будут идеальными, так как они не содержат собственных точек. Абсолют делит точки пространства на две области, и можно по произволу одну из этих двух областей принять за собственную.

В. Абсолют — однократно-вырожденная квадрака.

1. Конус, две совпадающие точки, $\kappa = \infty$.

1. Мнимый конус.

K и k мнимые.

2. Действительный конус.

а) Собственные точки — внутренние. K действительно, k мнимо.

б) Собственные точки — внешние. Собственные прямые пересекают конус. K , k действительны.

в) Собственные точки — внешние. Собственные прямые не пересекают конус. K мнимо, k действительно.

II. Две совпадающие плоскости, собственная коника, $K = \infty$.

1. Мнимая коника.

k , κ мнимы (параболическая геометрия).

2. Действительная коника.

а) Собственные прямые проходят внутри коники. k действительно, κ мнимо.

б) Собственные прямые и плоскости проходят вне коники. k мнимо, κ действительно.

в) Собственные прямые проходят вне, собственные плоскости пересекают конику. k , κ действительны.

III. Две плоскости, две совпадающие прямые, две точки, $k = \infty$.

1. Мнимые плоскости, мнимые точки.

K , κ мнимые.

2. Мнимые плоскости, действительные точки.

K мнимо, κ действительно.

3. Действительные плоскости, мнимые точки.

K действительно, κ мнимо.

4. Действительные плоскости, действительные точки.

K , κ действительны.

С. Абсолют — дважды-вырожденная поверхность.

I. Две совпадающие плоскости, две совпадающие прямые, две точки, $K = k = \infty$.

1. Мнимые точки. κ мнимо.

2. Действительные точки, κ действительно.

II. Две совпадающие плоскости, две прямые, две совпадающие точки, $K, = \kappa = \infty$.

1. Мнимые прямые. k мнимо.

2. Действительные прямые. k действительно.

III. Две плоскости, две совпадающие прямые, две совпадающие точки, $K = \kappa = \infty$.

1. Мнимые плоскости. k мнимо.

2. Действительные плоскости. k действительно.

Д. Абсолют — трижды-вырожденная квадрака.

Две совпадающие плоскости, две совпадающие прямые, две совпадающие точки. $K = k = \kappa = \infty$ [12, с. 29—31].

Соммервилль выбирает значение K , k и κ таким образом, чтобы значение (PQ) было бы действительным числом. В том случае, когда «абсолютные элементы» X и Y действительны, элементы P и Q находятся между элементами X и Y («пара X , Y не разделяет пару P , Q ») и двойное отношение (XY, PQ) действительно и положительно, его логарифм также действителен и положителен и c — также действительное число. В случае, когда «абсолютные элементы» X и Y мнимы и, следовательно, в силу действительности прямой или пучка (P, Q) мнимо сопряжены,

двойное отношение (XY, PQ) — комплексное число единичного модуля, его логарифм чисто мним и c — чисто мнимое число. В случае же, когда «абсолютные элементы» X и Y совпадают, двойное отношение (XY, PQ) равно 1, его логарифм равен 0, и для того чтобы расстояние (PQ) имело конечное значение, c следует считать равным ∞ .

Соммервилль называет гиперболической геометрией геометрию Лобачевского, т. е. собственную область пространства ${}^1S_3$ с овальным абсолютом, и различает еще три геометрии с тем же абсолютом, точки которых находятся вне абсолюта, а прямые и плоскости пересекают или не пересекают абсолют. Помимо этих геометрий и геометрии эллиптического пространства S_3 , Соммервилль здесь впервые рассматривает геометрию пространства S_3 с линейчатым абсолютом. Параболической геометрией Соммервилль называет геометрию евклидова пространства R_3 , геометрия, абсолют которой состоит из двух совпадающих плоскостей и действительной коники, — геометрия псевдоевклидова пространства ${}^1R_3$, четырехмерный аналог которого был определен незадолго до этого в связи со специальной теорией относительности А. Пуанкаре [15] и Г. Минковским [16]. Пространства, абсолютами которых являются конусы, — коевклидово пространство R_3^* , соответствующее по принципу двойственности пространству R_3 , и копсевдоевклидово пространство ${}^1R_3^*$, соответствующее по принципу двойственности пространству ${}^1R_3$. Пространства, абсолюты которых состоят из двух плоскостей, двух совпадающих прямых и двух точек — квазиэллиптическое пространство S_3^1 , изучение которого было начато уже в 1911 г. В. Бляшке в работе «Евклидова кинематика и неевклидова геометрия» [17], и квазигиперболические пространства ${}^{01}S_3^1$, ${}^{10}S_3^1$ и ${}^{11}S_3^1$; название работы Бляшке объясняется тем, что, подобно тому как группа движений эллиптической плоскости S_2 обладает инвариантной метрикой пространства S_3 , инвариантной метрикой пространства S_3^1 обладает группа движений евклидовой плоскости R_2 , и Бляшке определил пространство S_3^1 именно как пространство группы движений плоскости R_2 . Пространства, абсолюты которых состоят из двух совпадающих плоскостей, двух совпадающих прямых и двух точек — галилеево пространство Γ_3 , изучение которого

было начато в 1925 г. Л. Зильберштейном [18] и в 1927 г. А. П. Котельниковым [19], и псевдогалилеево пространство ${}^1G_3$; название галилеева пространства объясняется тем, что, подобно тому как пространство ${}^1R_4$ является пространством-временем специальной теории относительности, четырехмерный аналог G_4 пространства G_3 представляет собой пространство-время классической механики Галилея — Ньютона. Пространства, абсолюты которых состоят из двух совпадающих прямых, двух совпадающих точек и двух плоскостей — когалилеево пространство G_3^* и копсевдогалилеево пространство ${}^1G_3^*$, соответствующие пространствам G_3 и ${}^1G_3$ по принципу двойственности. Пространства, абсолюты которых состоят из двух совпадающих плоскостей, двух совпадающих точек и двух прямых — изотропное пространство I_3 , впервые изучавшееся в 1941 г. К. Штрубеккером [20], и псевдоизотропное пространство ${}^1I_3$; названия пространств I_3 и ${}^1I_3$ объясняются тем, что геометрия пространства I_3 имеет место на «изотропных» гиперплоскостях пространства ${}^1R_4$, не являющихся пространствами R_3 и ${}^1R_3$ и поэтому переходящих друг в друга при вращениях пространства ${}^1R_4$ (свойство изотропности). Пространство, абсолют которого состоит из двух совпадающих плоскостей, двух совпадающих прямых и, двух совпадающих точек — флаговое пространство F_3 , изучавшееся впервые в 1956—1957 гг. И. В. Парнасским [21] и Г. В. Калленбергом [22]; название пространства F_3 объясняется тем, что совокупность плоскости, прямой на ней и точки на этой прямой, образующая абсолют этого пространства, называется «флагом».

Расклассифицировав трехмерные геометрии с проективными метриками, Соммервилль переходит к общему случаю n -мерных геометрий:

«Мы распространим теперь наше исследование на пространство n измерений. Здесь существует n постоянных $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$ и, следовательно, 3^n геометрий.

Абсолют принимает следующие формы:

A₀. Невырожденная гиперквадрика n измерений („ n -квадрика“).

I. Мнимая.

II. Действительная нелинейчатая.

III. Линейчатые.

A₁. Однократно-вырожденная.

Гиперконус типа $r < n$ измерений („ (n, r) -конус“). Образуется соединением точек невырожденной $(n - r)$ -квадрики с точками некоторой $(r - 1)$ -плоскости (оси), и на оси выбирается невырожденная $(r - 1)$ -квадрика. (n, n) -конус состоит из двух совпадающих $(n - 1)$ -плоскостей с $(n - 1)$ -квадрикой; $(n, n - 1)$ -конус состоит из двух $(n - 1)$ -плоскостей с $(n - 2)$ -квадрикой; а $(n, 0)$ -конус есть невырожденная n -квадрика.

A_l , l -кратно-вырожденная.

$(r_1, r_2, \dots, r_l)$. Пары совпадающих $(r_1 - 1), (r_2 - 1), \dots, (r_l - 1)$ -плоскостей $(r_1 < r_2 < \dots < r_l)$. (n, r_l) -конус с (r_l, r_{l-1}) -конусом на его оси и (r_{l-1}, r_{l-2}) -конусом на оси второго конуса и т. д. и, наконец, с $(r_1 - 1)$ -квадрикой на оси последнего гиперконуса.

Число геометрий с невырожденным абсолютом равно 2^n , с l -кратно-вырожденным абсолютом с символом $(r_1, r_2, \dots, r_l)$ имеется 2^{n-l} геометрий» [12, с. 36].

Под «осью» (axis) конуса Соммервилль понимает вершинную плоскость конуса второго порядка, поэтому выражение « (n, r) -конус» обозначает $(n - 1)$ -мерный конус с $(r - 1)$ -мерной вершиной. В настоящее время пространства с проективной метрикой, абсолют которых состоит из мнимого $(n - 1)$ -мерного конуса с $(n - m - 1)$ -мерной вершиной и из мнимой квадрики на этой вершине, в развитие термина, введенного В. Бляшке, называются квазиэллиптическими пространствами S_n^m , а пространства, абсолюты которых состоят из действительного или мнимого конуса с такой же вершиной и из действительной или мнимой квадрики на этой вершине — квазигиперболическими пространствами ${}^{kl}S_n^m$ (k и l — индексы конуса и квадрики, т. е. числа минусов в их канонических уравнениях). Пространства с проективной метрикой, абсолюты которых Соммервилль обозначал $(r_1, r_2, \dots, r_k)$, в настоящее время, по той же терминологии, называются l -квазиэллиптическими пространствами $S_n^{m_0 m_1 \dots m_{l-1}}$ и квазигиперболическими пространствами ${}^{k_0 k_1 \dots k_l}S_n^{m_0 m_1 \dots m_{l-1}}$. Общие пространства, определенные Соммервиллем, изучались советскими геометрами [23—24] (см. также [25]).

Рассматриваемая статья Соммервилля, как и все его геометрические работы, тесно связана с теорией групп: если группы движений классических неевклидовых пространств S_n и ${}^lS_n$ (как и группа коллинеаций проектив-

ного пространства P_n , группа конформных преобразований конформного пространства C_n и псевдоконформных пространств ${}^1C_n$ и группы симплектических преобразований симплектического пространства Sp_{2n-1} являются простыми группами Ли, то группы движений пространств S_n^m и ${}^{kl}S_n^m$ и являющихся их частными случаями евклидова пространства R_n , псевдоевклидова пространства ${}^1R_n$ ($m = 0$) и коевклидова пространства R_n^* и копсевдоевклидова пространства ${}^1R_n^*$ ($m = n - 1$), соответствующих пространствам R_n и ${}^1R_n$ по принципу двойственности, являются квазипростыми группами Ли (группами Ли с коммутативным радикалом, получающимися из простых групп Ли с помощью так называемого сжатия), а группы движений пространств $S_n^{m_0 m_1 \dots m_{l-1}}$ и ${}^{k_0 k_1 \dots k_l}S_n^{m_0 m_1 \dots m_{l-1}}$ являются l -квазипростыми группами Ли (получающимися из простых групп Ли с помощью l -кратного сжатия). В настоящее время изучаются пространства с квазипростыми и l -квазипростыми группами движений более общего вида, чем пространства, определенные Соммервиллем: для их определения следует заменить в определении пространств Соммервилля действительные координаты комплексными числами, двойными числами $a + be$, $e^2 = 1$, дуальными числами $a + b\epsilon$, $\epsilon^2 = 0$, кватернионами или октавами и их аналогами, относящимися к ним как двойные и дуальные числа к комплексным; и здесь геометры прошли по пути, указанному Соммервиллем в его работе [8].

Наш краткий обзор показывает, что геометрические работы Соммервилля и прежде всего его «Классификация геометрий с проективными метриками» определили развитие неевклидовой геометрии на много десятков лет и многочисленные неевклидовы пространства, изучавшиеся геометрами в течение этого времени, были введены в этой работе Соммервилля или были построены аналогично путем замены действительных координат элементами некоторых алгебр.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sommerville D. M. Y.* Bibliography of non-Euclidean geometry. London, 1911; N. Y., 1970.
2. *Sommerville D. M. Y.* The elements of non-Euclidean geometry. London, 1914, 1919.
3. *Sommerville D. M. Y.* Analytical conics. London, 1924.

4. *Sommerville D. M. Y.* An introduction to the geometry of n dimensions. Cambridge, 1929.
5. *Sommerville D. M. Y.* Analytical geometry of three dimensions. Cambridge, 1934, 1939, 1943, 1947, 1951.
6. *Sommerville D. M. Y.* Networks of the plane in absolute geometry.— *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 1905, vol. 25, p. 392—394.
7. *Sommerville D. M. Y.* Semi-regular networks of the plane in absolute geometry.— *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*, 1906, vol. 41, p. 725—747.
8. *Sommerville D. M. Y.* On certain projective configurations in space of n dimensions and a related problem on arrangements.— *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 1906, vol. 25, p. 725—747.
9. *Veblen O., Bussey W. H.* Finite projective geometries.— *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1906, vol. 7, p. 241—259.
10. *Sommerville D. M. Y.* Isohedral and isogonal generalizations of the regular polyhedra.— *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 1932, vol. 52, p. 251—263.
11. *Sommerville D. M. Y.* On the relations between the rotation-groups of the regular polytopes and permutation-groups.— *Proc. London Math. Soc.* 2nd ser., 1933, vol. 35, p. 101—115.
12. *Sommerville D. M. Y.* Classification of geometries with projective metrics.— *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 1910—1911, vol. 28, p. 25—41.
13. *Turnbull H. W.* Professor D. M. Y. Sommerville.— *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 2nd ser., 1935, vol. 4, p. 57—60.
14. *Kramer E. E.* Sommerville, Duncan McLaren Young. Dictionary of scientific Biography / Ed. C. C. Gillispie, 1975, vol. 12, p. 532—534.
15. *Пуанкаре А.* О динамике электрона.— *Избранные труды*. М., 1974. Т. 3, с. 9—62.
16. *Минковский Г.* Время и пространство.— В кн.: *Г. А. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, Г. Минковский*. Принцип относительности. М.; Л., 1935, с. 181—203.
17. *Blaschke W.* Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie.— *Z. Math. und Phys.*, 1911, Bd. 60, 61—91.
18. *Silberstein L.* Projective geometry of Galileian space-time.— *Phil. Mag.*, 1925, vol. 1^o, p. 681—696.
19. *Котельников А. П.* Принцип относительности и геометрия Лобачевского.— В кн.: *Мемуары Лобачевского*. Казань, 1927. т. 2, с. 37—66.— In: *Memoirum Lobatschevskii*. Kasan, 1927, Bd. 2, S. 37—66.
20. *Strubecker K.* Differentialgeometrie des isotropen Raumes.— *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien. Abt. II^a*, 1941, Bd. 150, S. 1—53.
21. *Парнасский И. В.* Аксиоматическое построение трехмерной параболической геометрии.— *Учен. зап. Орловск. пед. ин-та*, 1956, т. 2, № 2, с. 3—40.
22. *Kallenberg G. W. M.* Differential geometry of a particular group of projective transformations.— *Proc. Kon. ned. akad. wetensch.*, 1957, Bd. A60, N 2, S. 147—156.
23. *Чазленкова Т. Г.* Геометрия m -евклидовых пространств.— *Изв. вузов. Математика*, 1958, № 1 (3), с. 174—184.
24. *Ясинская Е. У.* Полунеевклидовы и полувеклидовы пространства.— *ДАН СССР*, 1961, т. 137, с. 1327—1330.
25. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969.

I

Скончавшийся в 1973 г. исследователь Лейбница Й. Э. Гофман поместил в Трудах 2-го Международного лейбницевского конгресса (1966) отчет об издании серий III и VII (математика, естествознание и техника) академического собрания работ и писем Лейбница¹. Между тем как подготовленный им том III, 1 с недавних пор имеется в наличии², я вместе с сотрудником Вальтером С. Контро приступил 1.9. 1976 г. к обработке рукописей для томов VII, 1 + 2, т. е. в основном рукописей периода 1672—1676 гг.

Если оставить в стороне исследования по естествознанию и технике, прежде всего по физике, а также все письма — они опубликованы в томе III, 1 — и по смыслу темы ограничиться математическими рукописями, то по моим сегодняшним сведениям речь идет всего о 1260 из общего количества более 7300 рукописных листов по математике, из которых можно образовать по меньшей мере 774 самостоятельных фрагмента. Последние занимают 1440 страниц ин-фолио, 368 страниц четвертного формата, 74 страницы формата в одну восьмую и меньше и 1039 более или менее самостоятельных строк. Их значение я определял прежде всего при помощи изданного Риво «Catalogue critique» (1914—1924) — его я далее буду обозначать «Сс»³, а также при помощи исправлений и добавлений, которые указывает «Chronologische Katalog» Архива Лейбница и Ганновере⁴. Размеры отдельных фрагментов неодинаковы: от простого полуторастрочного сообщения идеи, как, например, Сс 1514 (приблизительно лето 1676) — «Установить общие исчисления сумм, сумм суммированных величин и моментов от основания или вершины, откуда по-

© Е. Knobloch, 1979.

* Перевод И.А. Головинского. В конце статьи приведены примечания.

лучатся прекрасные, удивительные и общие [результаты]», и до обширной, насчитывающей шестьдесят одну страницу ин-фолио работы «Пятнадцать листов о суммах рядов и квадратурах» (Сс 775 А «De serierum summis et de quadraturis plagulae quindecim», октябрь 1674) или примерно столь же объемистой работы «De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae, cuius corollarium est trigonometria sine tabulis», т. е. «Об арифметической квадратуре круга, эллипса и гиперболы, следствием которой является тригонометрия без таблиц» (Сс 1233 Е). Последняя работа, предназначавшаяся для печати, остается до сих пор, по существу, неопубликованной. Она была завершена приблизительно в июле-августе 1676, но содержит дополнения (схolia к предложению 29), относящиеся к периоду от конца августа до дня отъезда Лейбница из Парижа (4.10.1676 г.), и основана на набросках (например, Сс 1233 А — D), написанных частично в 1675, а частью — только в июне 1676, как, например, подготовительные материалы к предложению 50 (Сс 1460—1462 *Trigonometria sine tabulis*). К этой работе нам предстоит еще вернуться.

Насколько я мог установить, к настоящему времени был опубликован всего восемьдесят один фрагмент, причем отчасти в выдержках; сделали это Бирман, Боссю, Бреншвик—Бутру, Герхардт, Гофман, Кноблах, Костабель, Кутюра и Шольц (Сс 497, 517, 518, 519 А, В, 520 А, В, 544, 691, 700 А, С, 701, 740, 772, 773₁, 781, 782, 797, 816 А, 863 С, D, 866, 898, 900, 935, 991, 1031, 1032, 1037, 1042—1044, 1048, 1077, 1079, 1080, 1089, 1090, 1092, 1106₁, 1120, 1125, 1131, 1138, 1145, 1146 В, 1147 А, В, 1148, 1149, 1224 А, D, 1229—1232, 1233 Е, F, 1281, 1292, 1297, 1305, 1342, 1344, 1360, 1377, 1452, 1483 А, 1495—1499, 1500 А, В, 1501, 1514 (см. выше), соответственно LH 35 12 л. 3—4; VIII, 17 л. I; XII, I л. 17, 232—233) ⁵. Всего, таким образом, опубликовано около 10% математических работ 1672—1676 гг. Уже из этих данных можно понять, насколько необходимо издание математического наследия Лейбница. Правда, стоит подчеркнуть, что сам он предназначал для печати только очень немногие из этих штудий, между тем как большая часть их, несомненно, служила для прояснения его собственных мыслей и обнаруживает поэтому черты незаконченности и несовершенства.

Покажем на примере, как мало можно подчас доверять сжатым аннотациям из Сс. Относительно содержания рукописи ЛН 35 III В, 14 л. 4 в Сс 520 А говорится: «Различные способы разложить числа на простые множители; упорядочить результаты; пример числа 3».

На самом деле в этой заметке нет и речи о разложении на простые множители, результаты не упорядочиваются и нет никакого числового примера. Зато Лейбниц впервые в истории математики дает независимое правило определения числа P_n^k различных разбиений натурального числа n на три слагаемых. Это правило только по ошибке названо общим: Лейбниц полагал, что оно выполняется для любого натурального числа k : «Если ищется какое-либо разбиение данного числа (т. е. n) с данным показателем (т. е. k) числа частей, то нужно искать разбиение с показателем, на единицу меньшим всех предыдущих чисел, но так, чтобы все время из разбиений следующего числа, разбиения которого рассматриваются, вычиталось число предыдущих чисел. Результатом будут искомые разбиения с данным показателем. Это — общее решение, упрощения которого можно находить особым образом в соответствии с данными числами и показателями». В современной терминологии это означает:
$$P_n^k = \sum_{r=1}^{k-1} (P_{n-r}^{k-1} - r + 1) -$$
 формула, верная для $k = 3$, но и только для этого k^6 .

Этот огромный массив рукописей очень трудно упорядочить, чтобы дать некоторый его обзор, так как оба употребительных принципа упорядочивания можно применять разве лишь в очень ограниченной мере. Хронологический принцип — потому, что датированы только 190 фрагментов, т. е. едва 25%. В трех случаях из четырех приходится, наоборот, пытаться (хотя бы приблизительно) датировать рукописи при помощи, например, пространной переписки Лейбница или сопоставляя содержащиеся в рукописи цитаты и намеки. В этом отношении многие данные Сс следует исправить ⁷.

Тематический подход, при котором ориентируются на содержание работы, встречает серьезные препятствия из-за того, что Лейбниц часто меняет предмет своего интереса. Нередко в одной и той же рукописи он обращается ко многим темам. Он открыл кое-что в геометрии скорее благодаря особой удаче, чем всестороннему изучению, так как испытывает отвращение к продолжительным ис-

следованиям и вычислениям, признает он сам в письмах к Ольденбургу от 15.7.1674 и 28.12.1675 ⁸.

Чтобы избежать утомительного перечисления заглавий и начальных слов, я попытаюсь все же объединить эти рукописи согласно обоим указанным принципам в следующие одиннадцать групп.

1. Выписки, записи бесед, мнения о математиках и математических работах.

2. Последовательности, ряды, исчисление конечных разностей.

3. Заметки по истории науки.

4. Вопросы оснований математики и общеметодологические вопросы.

5. Комбинаторика, теория вероятностей.

6. Учение о числе, теория чисел.

7. Алгебра.

8. Геометрия (без инфинитезимальной геометрии).

9. Открытие исчисления бесконечно малых, теория интегрирования (без геометрии кривых, дифференциальной геометрии и дифференциальных уравнений).

10. Исследования по обратному методу касательных (решение дифференциальных уравнений).

11. Геометрия кривых и дифференциальная геометрия.

В приложении, образующем тринадцатый параграф данной статьи, будут рассмотрены под углом зрения разработки индексных алгебраических обозначений нескольких остававшихся до сих пор неизвестными записей; при этом будут, в частности, проанализированы две совершенно неверно датировавшиеся рукописи (Сс 851, 1066 В).

Хотя в дальнейшем речь идет только о «парижском периоде», не следует забывать, что ко многим математическим задачам этого периода Лейбниц очень часто возвращался и позже, а некоторые открытия в математике вообще сделал только после 1676 (двойные индексы, исчисление детерминантов) ⁹. Таким образом, если мы хотим получить общее представление о том, чего он достиг в определенных областях, мы должны просмотреть весь массив рукописей: например, задачей Давенанта (Davenant) он занимался в конце апреля 1675 г. (Сс 928, 929) и в начале июня 1678 г. ¹⁰, задачей Альхазена о зеркале — в июне 1676 г. (Сс 1451) и в 1678 (Сс 1066 В), задачей построения нормали к коническому сечению — с конца 1674 г. (Сс 852) и особенно в начале июня 1678 г. ¹¹.

II. Выписки, записи бесед, мнения о математиках и математических работах

Рукописное наследие Лейбница дает единственную в своем роде возможность получить подробное представление о его процессе творчества, которое в определяющей степени возбуждалось и поддерживалось внешними влияниями: современной литературой и научными знакомствами, например теоретико-числовые исследования — Ж. Озанамом, Э. Мариоттом и А. Арно, теоретико-вероятностные — Артю Гуффье герцогом де Роаннез и т. д. Свои первые шаги в области высшей математики Лейбниц сделал под руководством Х. Гюйгенса, по совету которого проработал соответствующую литературу ¹².

Заметки на полях книг, принадлежащих Лейбницу, учитываться здесь не могут. Но следует упомянуть, что сохранились его выписки из «Nouveaux Elémens de Géométrie» Арно (Сс 495—496) ¹³, из «Synopsis geometriae» высоко ценимого им О. Фабри (Сс 500, 501, дальнейшие относящиеся сюда замечания — в Сс 612, 619, 635 А), из сочинения Гюйгенса «De circuli magnitudine inventa» (Сс 503, 505), из «Vera circuli et hyperbolae quadratura» Дж. Грегори (Сс 504), из «Longitudinum terrestrium nec non coelestium, nova et hactenus optata scientia» К. Б. Морена (Сс 507) — в Сс со ссылкой на Лейбница неточно говорится «liber de longitudinibus» ¹⁴, из геометрических рукописей Б. Паскаля (Сс 544, 1292, 1495—1501), из книги «Mesolabum» Р. Ф. де Слюза (Сс 850) и его «письма о касательных» к Ольденбургу (Сс 616) ¹⁵, из работы «L'algebra» Р. Бомбелли (Сс 1048), из «Elémens de Mathématiques» Ж. Престе (Сс 1170), а также критические замечания к этой работе (Сс 1278).

Имеются также выписки Лейбница из «Supplementum sphaerometriae» П. Курсье (Сс 1350) и из «Circolo» П. Менголи (Сс 1383) ¹⁶. Есть также его более или менее критические замечания о С. де Лалубере (Сс 506), обладавшем якобы геометрическими теориями («speculationes»), с помощью которых он обещал все свести к ясным и легким доказательствам; о Ж. Дезарге (Сс 936), М. Дари (Сс 981), Григории де Сен-Венсане (Сс 1549, 1553), О. Рёмере (Сс 1555), а также об ошибках в «Геометрии» Декарта. Последний вопрос Лейбниц в начале 1675 г. обсуждал с Ж. Персон де Робервалем, о чем свидетельствует соответст-

вующая заметка (Сс 908). Имеется далее запись беседы с Мариоттом по теоретико-числовым вопросам, которая сделана 10 февраля 1676 (Сс 1305). Приблизительно к апрелю 1675 (Сс 935) относится выписка из письма Ольденбурга от 16 апреля 1673, содержащая большое количество сведений о работах и результатах современных математиков ¹⁷.

Разумеется, во всех затронутых им областях математики Лейбниц неявно обращался к методам своих предшественников и конкурентов, но соответствующие рукописи причислять к этой первой группе мы не будем.

III. Последовательности, ряды, исчисление конечных разностей

Первые математические занятия Лейбница в Париже относились по инициативе Гюйгенса к вопросам теории рядов, или «арифметики бесконечных», о значении которой и об ее усовершенствовании Лейбниц, примыкая к Валлису, оставил собственную заметку (Сс 523). Прежде всего он занялся суммированием чисел, обратных треугольным, затем — суммированием обратных фигурных чисел более высоких порядков (Сс 755, 756). Рукописи по этой теме (Сс 278—280) появляются в мае 1673 г. или несколько раньше (Сс 514), чистовой экземпляр — в 1674 г. (Сс 517).

Результаты своих первоначальных вычислений Лейбниц объединил в «прибавлении к Арифметике бесконечных» (*accessio ad Arithmeticae infinitorum*; Сс 700, конец 1672 г.), «где также показывается, что наибольшее число или число всех чисел невозможно или есть нуль и что принимаемое за аксиому — Лейбниц имеет в виду аксиому „целое больше части“, — как показывается на примерах, доказуемо». Публикация, которая должна была быть осуществлена в «*Journal des Sçavans*» при помощи Ж. Галлуа, в свое время не состоялась, но теперь это напечатано уже вторично в академическом издании ¹⁸. Хотя здесь речь идет о специальных задачах теории рядов, но они вскоре становятся составной частью работ Лейбница по арифметической квадратуре круга, по задачам спрямления и по обратному методу касательных, так что какое-либо разграничение вряд ли возможно. Рукописи, в которых

последовательности и ряды играют только вспомогательную роль, мы в данном параграфе рассматривать не будем.

Еще в мае 1673 г. Лейбниц пытался получить суммы других специальных рядов рациональных чисел, например таких, в которых числитель следующей дроби совпадает со знаменателем предыдущей (Сс 437). Изучение трудов Паскаля и Григория де Сен-Венсана заставило его более тщательно ознакомиться с применением последовательностей и рядов и обращением с ними (Сс 510 А, В, С, D, 515, 516, 527, 530). Особенно это касается последовательностей вторых, третьих, четвертых степеней, извлечения кубического корня — корни уравнений он вычисляет с помощью бесконечных рядов в июне (Сс 1467, 1468), образования последовательностей разностей и монотонно убывающих последовательностей (Сс 511, 512), которые он исследовал также особо (Сс 622).

Эти последовательности дают повод (Сс 513 А, В, 514) определить и систематически исследовать так называемые трансверсальные последовательности («series transversales»), к которым Лейбниц возвращается как в январе 1675 г. (Сс 900) ¹⁹, так и в начале 1676 г. (Сс 1239) и которые он определяет следующим образом:

«Трансверсальная последовательность — это такая, в которой соединены величины, взятые из различных непосредственно соприкасающихся друг с другом вертикальных последовательностей вдоль одной и той же прямой в таблице (см. табл. I)

Т а б л и ц а I

A		
	F	
B		L
	G	O
C	M	Q
	H	P
D		N
	I	
E		

. » .

Лейбниц различает монотонно нисходящие (например, A, F, L, O, Q) и восходящие (например, Q, P, N, I, E)

трансверсальные последовательности. Нисходящая трансверсальная последовательность возникает тогда, когда для образования ее n -го члена берется n -й член каждой из вертикальных последовательностей.

Особенно интенсивно он занимается исследованием гармонического ряда, которому посвящены многие рукописи 1673—1676 годов (Сс 526, 528, 1180—1186, 1239, 1303, 1334—1338, 1340, 1341, 1403). Их свойства он изучал, между прочим, в 1676 г. вместе с Чирнгаузом (Сс 1334, 1512), причем они тщетно пытались получить выражения для частичных сумм (Сс 1340, 1513). Гармоническую последовательность Лейбниц характеризует тем свойством, что для любых трех следующих друг за другом ее членов справедливо равенство

$$\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c},$$

или, как писал он сам:

«Progressionis harmonicae natura est, ut tribus quiblibet sumtis terminis continuis, sit primus ad tertium ut differentia primi et secundi ad differentiam secundi et tertii» (Сс 1303). Действительно,

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+2}} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}.$$

В одной рукописи, относящейся приблизительно к концу 1673 г., впервые появляется выражение «гармонический треугольник» (Сс 1183), который был придуман Лейбницем по аналогии с арифметическим треугольником Паскаля и с помощью которого, как он говорит в одной заметке февраля 1676 г. (Сс 1337), «можно сложить в одну сумму» обратные или дробные фигурные числа. Эта тема вновь затрагивается в апреле 1676 г. (Сс 1398).

Сходным образом решающую роль играет знакочередующийся ряд

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots,$$

найденный Лейбницем при арифметической квадратуре круга (Сс 554, 556, 633, 634, 779), а также бесконечные ряды, с помощью которых получаются квадратуры круга и

гиперболы (Сс 629, 775, 778, 1200, 1339, 1453, 1455, 1486, 1542); здесь имеет место возвращение к результатам Н. Меркатора и Валлиса.

Наряду с этим Лейбниц рассматривает самые разнообразные вопросы, как, например: сумма обратных квадратов (Сс 776), знакопередающиеся ряды (Сс 777, 1338), арифметические прогрессии (Сс 1515) и взаимосвязь между геометрическими прогрессиями (Сс 792), связи между последовательностями и обратным методом касательных (Сс 820), суммы некоторых рядов рациональных чисел (Сс 915) — отчасти в сотрудничестве с Чирнгаузом (Сс 1210), суммируемость рядов вообще (Сс 892, 1243, 1511) и в особенности вопрос о том, может ли сумма рациональных чисел быть иррациональным числом (Сс 1511).

Вероятно, в 1675 г. появляются заметки, посвященные специальным разложениям в ряды (Сс 1206, 1207), в начале 1676 г. — разложение в ряд функции $\cos x$ (Сс 1241). Весной того же года Лейбниц исследует сумму логарифмов монотонно убывающей последовательности (Сс 1400, 1401) и пытается суммировать ряд рациональных чисел, у которых числители растут в арифметической прогрессии, а знаменатели — в геометрической (Сс 1425). Наконец, к июню этого года относятся работы, в которых при помощи бесконечных рядов исследуется вопрос об определении площадей, в частности площадей конических сечений (Сс 1458, 1459).

IV. Заметки по истории науки

О значении историко-научных исследований Лейбниц говорит в написанной в 1714 г. работе «История и происхождение дифференциального исчисления» (*Historia et origo calculi differentialis*)²⁰. Чрезвычайно полезно знать истинные истоки достопамятных открытий, особенно таких, которые были совершены не случайно, а благодаря размышлению. Ведь это послужило бы не только для того, чтобы историческая литература каждому воздавала по заслугам и побуждала других стремиться к такой же славе, но также и для распространения искусства открытия, когда метод становится известным благодаря знаменитым примерам.

На основе этой точки зрения Лейбниц уже в 1673 г. написал работу об истории и состоянии геометрии (Сс 552).

Он различает три ступени, а именно евклидову геометрию, аполлониеву, которая была, как он считает, продолжена Виетом, Декартом и Слюзом, и архимедову, которой занимались Гульдин и Кавальери. Он обсуждает три недостатка математики, которые до его времени делали невозможным квадрирование поверхностей, ограниченных кривыми линиями, и в заключение приходит к применению характеристического треугольника. Более развитые соображения такого рода Лейбниц излагает осенью 1674 г. (Сс 793, 794) — здесь он делает различие уже только между аполлониевой и архимедовой геометрией, а затем с начала 1676 (Сс 1224 А, С—Н) до середины 1676 г. (Сс 1224 В), причем более подробно рассматриваются новые результаты Гульдина, Кавальери, Григория де Сен-Венсана, Ферма, Валлиса и других и обсуждается польза геометрии.

К лету 1675 г. относится заметка, в которой идет речь о назначении и истории алгебры и где принимаются во внимание прежде всего работы Виета, Гудде и Декарта (Сс 1044), а к октябрю — заметка, в которой в основном рассматривается история задач о конических сечениях (Сс 1097).

V. Вопросы оснований математики и общие методологические вопросы

Лейбниц высказывался по этим вопросам не только во многих рукописях попутно, но и оставил ряд работ, посвященных им специально, естественно переходя при этом к философским проблемам. Так, он объясняет, как возникают ошибки в алгебраических вычислениях (Сс 538), рассуждает об алгебраических обозначениях (Сс 770, 1546) и алгебраических операциях (Сс 1402) и, в частности, как для усовершенствования алгебры можно сократить и облегчить алгебраические вычисления или их вовсе избежать. Этой цели служит составление таблиц, применение и пользу которых он без конца подчеркивает (Сс 740, 898, 899). По поводу своих исследований по аддитивной теории чисел он, например, определенно заявляет, что ~~находить~~ разбиения без таблиц он предоставляет другим (Сс 520 В) ²¹.

Сюда же относится замысел одного алгебраического инструмента, некоего аналогового устройства, с помощью

которого он собирався механически решать алгебраические уравнения,— мысль, которая, как сообщил ему Ольденбург, была и у Ньютона²². Свое открытие, сделанное в декабре 1674 г., Лейбниц подробно описал в нескольких рукописях (Сс 815—819); между прочим, здесь он хотел использовать трохоиду (Сс 827). Во второй половине 1675 г. Лейбниц занялся этим снова (Сс 1044, 1069), но здесь уже дело касалось основополагающего вопроса о создании «искусства открытия» (*ars inveniendi*) (Сс 1077), его стремления раскрыть тайну духовного процесса познания. В использовании машин при решении математических задач (Сс 772, 1361) он был заинтересован принципиально. Достаточно вспомнить о его вычислительной машине.

До какой степени его волновало свершение открытий и насколько глубоко сам он был захвачен математическими проблемами, показывает частое употребление им соответствующего лексикона, содержащего такие выражения, как «*mirum, admirabilis, pulchrum, mirificum, mysterium*» (необыкновенное, удивительное, прекрасное, поразительное, таинственное). Эта особенность, делающая столь привлекательным изучение его рукописей, присуща всему его математическому творчеству²³. Например, он говорит об «удивительном свойстве чисел гармонической прогрессии» (*proprietas admirabilis numerorum progressionis harmonicae*) (Сс 1183 на л. 245^v); в другом месте сказано: «И бесконечные ряды суть символы вечных вещей» (*Et series infinitae sunt symbola rerum aeternarum*) (LH 35 II, 1 л. 2^r), а в одной работе о простых числах (январь 1676 г.)— «в коей прогрессии скрывается тайна простых чисел» (*in qua progressionе latet mysterium primitivorum*).

Символике, подходящим обозначениям Лейбниц отводил решающую роль (Сс 772, 842, 1118, 1360). Особенно обширные исследования конца 1674 г. (Сс 863 G, H относятся, пожалуй, к 1675 г.) имеются по так называемому методу универсалий (*méthode des universels*), или методу универсальности (*méthode de l'universalité; methodus universalitatis*, Сс 866), который Лейбниц исходя из теории конических сечений Дезарга и Паскаля²⁴, пытается применить к подобного рода геометрическим задачам (Сс 862—866). Чтобы находить формально-аналитические решения, он изобретает «двойственные символы» (*caractères ambigus*), т. е. многозначные символы, обозначающие неустранимые различия. Он говорит так (Сс 862 В):

«Метод универсалий состоит в использовании двойственных символов, которые суть знаки или буквы. $b \mp a$ означает $b + a$ или $b - a$; $b \pm a$ означает: b минус эта вышеназванная величина $\pm a$. Следовательно, когда $\mp$ означает $+$, тогда $\pm$ означает $-$, а когда $\pm$ означает $-$, тогда $\mp$ будет означать $+$. У гиперболы $\mp$ означает $+$, у круга или эллипса $-$, у параболы $+$, так же как и $-$ ».

Эти символы могут использоваться в трех аспектах: во-первых, когда речь идет о доказательстве теорем, которые включают много случаев (теоремы Птолемея и Теона о составлении отношений); во-вторых, когда речь идет о решении задачи со многими частными случаями; в-третьих, когда должны быть найдены соответствия или свойства, общие для различных фигур. О том, как велико было его стремление к открытию таких соответствий, свидетельствуют бесчисленные места его математических работ ²⁵.

VI. Комбинаторика, теория вероятностей

Комбинаторике или, лучше сказать, «комбинаторному искусству» (*ars combinatoria*) — ибо оно охватывает гораздо больше, чем это современное слово, — было посвящено уже юношеское сочинение Лейбница «Рассуждение о комбинаторном искусстве» (*Dissertatio de arte combinatoria*) 1666 г. ²⁶ С современной специальной математической литературой по этому предмету, в частности с «*Traité du triangle arithmétique*» Паскаля ²⁷, Лейбниц впервые познакомился в Париже. Об этом свидетельствуют три заметки (Сс 518, 519 А, В), в которых речь преимущественно идет о терминологии комбинаторных понятий, отчасти использованных уже в «Рассуждении» (оно тут цитируется), и об образовании числа сочетаний прежде всего путем суммирования фигурных чисел на единицу меньшего порядка.

Его повышенный интерес к различным свойствам этих чисел, особенно к тому, как они проявляются при вычислении степеней полиномов, побудил его в январе 1675 г., в непосредственной связи с трудом Паскаля, подготовить работу «Об интерполяции комбинаторных чисел. О формулах всех измерений из начал комбинаторного искусства — новом роде анализа и символов и экспликативное исчисление с помощью бинома» (*De intercalatione numero-*

rum combinatoriorum. De formulis omnium dimensionum ex artis combinatoriae principiis: novo analyseos et caracterum genere et calculus explicationis per binomium.) Здесь он выводит мультипликативное представление числа сочетаний ²⁸, рассматривает, принимая во внимание результаты Я. Гудде и Х. ван Гейрата, использование фигурных чисел в связи с арифметическими рядами и пытается получить степени бинома с дробными показателями при помощи арифметического треугольника или, как он выражается «комбинаторной таблицы» (*tabula combinatoria*; Сс 1344), образующее число которой равно $1/2$. Этой задаче он посвящает дальнейшее исследование (Сс 909). Кроме того, эта заметка представляет особый интерес из-за встречающегося в ней применения фиктивных числовых коэффициентов, к которым относятся слова о «новом роде анализа и символов» в заглавии. Подробно об этом будет сказано в параграфе XIII.

В связи со своими алгебраическими исследованиями Лейбниц предпринимает классификацию комбинаторных форм, мы говорим теперь — симметрических функций (Сс 1079), и весной 1676 г. пытается, отчасти в сотрудничестве с Чирнгаузом (Сс 1296), определить число различных симметрических функций n -го порядка. К этой задаче он снова обращается во многих рукописях после 1676 г. ²⁹. В свое время он выяснил, что это число совпадает с числом различных разбиений натурального числа n . Если первоначально он полагал (Сс 1305), что получается последовательность простых чисел, то уже в том же месяце заметил свою ошибку (Сс 1342), построил последовательность разностей первых девяти чисел, отчасти неверно найденных, но все же не сумел найти общего закона их образования.

Сходно обстоит дело с его занятиями аддитивной теорией чисел, или теорией разбиений. Опираясь на некоторые подсчеты в форме своего рода таблиц (Сс 520 В), он формулирует (Сс 520 А) предложение, ошибочно выдаваемое за универсальное правило, при помощи которого можно во всяком случае правильно определить число разбиений натурального числа на три слагаемых (P_n^3). Об этом шла речь выше. В рукописи, относящейся, пожалуй, к 1674 г. (LN 35 XII, 1 л. 232—233) ³⁰, он с частичным успехом ищет рекуррентную формулу.

Первый толчок к занятиям вопросами теории вероятностей, основной области приложений комбинаторики,

Лейбниц получил в конце 1675 г. от Артю Гуффье герцога де Роаннез. Последний поставил перед Лейбницем задачу: вычислить годовую смертность, если из 64 человек в течение десяти лет умерли 36 ³¹. При решении Лейбниц ссылается на «Natural and political observations made upon the bills of mortality» Дж. Граунта ³² (Сс 1197).

В январе Лейбниц занялся двумя задачами теории вероятностей, которые поставил перед Паскалем в 1654 г. кавалер де Мерз: разделить ставку при преждевременном прекращении игры (*problème des partis*) и определить вероятность выпадения заданного числа очков (*problème des dés*). Его внимание обратил на них в 1673 г. аббат де Бийете (*Billetes*) ³³. Задача о разделе ставки рассматривается в состоящей из трех частей работе Сс 1259, но здесь Лейбницу не удастся существенно продвинуться к окончательным результатам, так как у него не получается полная дизъюнкция возможных случаев. В написанной приблизительно в то же время заметке «О числе бросаний при игре в кости» (*De numero iactuum in tesseris*) (Сс 1281) Лейбниц рассматривает в основном две задачи. Во-первых, он находит число сочетаний с повторениями, классы которых образуются из числа k используемых игровых костей, но при этом все же не приближается к общему правилу. Во-вторых, он определяет, во сколько размещений с повторениями входит один элемент, быть может, многократно повторенный. Соответствующий вопрос для сочетаний без повторений он выяснил еще в «Рассуждении» ³³.

Дальнейшие работы по теории вероятностей, в частности основополагающая «Об оценке неопределенности» (*De incerti aestimatione*) ³⁴, и по математическому анализу некоторых игр относятся уже к послепарижскому периоду, равно как и открытие исчисления детерминантов, которое в решающей степени было основано на комбинаторных рассмотрениях.

VII. Учение о числе, теория чисел

Кроме работ, упомянутых выше Арно, Мариотта и Озанама, в исследованиях Лейбница по теории чисел играли некоторую роль результаты Б. Френикля де Бесси, И. Г. Альстеда и Ж. Б. Лантена. Непосредственно после своего возвращения из первой поездки в Англию Лейбниц

познакомился с Озананом и обсуждал с ним решение уравнений высших степеней. Но прежде всего Лейбницу благодаря этому стали известны теоретико-числовые задачи, к которым он обращается в многочисленных рукописях лета 1674 г. и позднее снова в начале 1676 г.

17 февраля 1674 г. Озанам выпустил листовку со следующей задачей (*problema unicum*) (Сс 703 А):

«Найти три натуральных числа, сумма которых есть квадрат, причем сумма их квадратов должна быть четвертой степенью».

Речь шла здесь о некотором распространении аналогичной задачи Ферма для случая двух натуральных чисел ³⁵. На своем экземпляре листовки Лейбниц записал одну тройку чисел, дающую решение (Сс 703 В). Его методы решения, в которых используется неопределенный анализ, содержатся в четырех работах (Сс 712, 714, 715, 724).

Труднее была так называемая задача о шести квадратах (*theorema arithmeticum*), которую Озанам публично предложил приблизительно в то же время (Сс 704); сохранилась копия Лейбница (Сс 781):

«Найти три [натуральных] числа, так чтобы разности любых двух из этих чисел, а также разности квадратов любых двух из них, были квадратами».

П. Менголи заявил, что задача неразрешима (Сс 705), Озанам ответил тройкой чисел, дающей решение (Сс 706). Лейбниц проверил это, но сам, несмотря на многократные попытки, решить задачу не смог (Сс 709 А, 723 А, 728 А, В, 1211 В, С); не смог он ее решить и в такой равносильной форме:

«Найти три числа, так чтобы суммы и разности любых двух были квадратами» (Сс 719, 721 А, В, 728 С, 729, 1211 А, Е, 1368 А, В, С, 1376 А, В, С, D).

В рукописи Сс 1376 А говорится: «Ибо здесь необходимо скрывается нечто таинственное» (*Necesse est enim aliquod hic mysterium latere*).

А в заметке Сс 1382 от апреля 1676 г. после исследования некоторых произведений Лейбниц замечает, со ссылкой на обе формулировки задачи:

«Это следует сравнить с недавно предпринятым мною в другом месте вычислением для задачи о трех числах, суммы и разности которых суть квадраты. И окажется, что найти три числа, так чтобы разность любых двух была квадратом, не труднее, чем найти три числа, разности

квадратов которых — квадраты. Это следует особо заметить на будущее».

В рукописях Лейбница (Сс 708, 713, 716, 720, 726, 1385) мы встречаем много подобных задач диофантовой алгебры (Сс 1382), или диофантовой арифметики (Сс 1061), как он это называет. Частично эти работы написаны им совместно с Озанамом (Сс 705, 710, 711, 713, 745, 779, 782, 1201). Аналогично обстояло дело также в случае совместных занятий алгеброй с Чирнгаузом, который тесно сблизился с Лейбницем осенью 1675 г.

Лейбниц, например, занимался поисками двух квадратов или кубов, сумма которых равна данному числу (скажем, кубу) (Сс 710, 723, 725, 764, 961, 962). Озанам сказал ему, что знает метод решения этой задачи. Лейбниц испробует с этой целью методы Френикля и Виета. Он изучает — отчасти под влиянием Мариотта — свойства делимости и возможное использование (*Erzeugungsmöglichkeiten*) квадратов и более высоких степеней чисел (Сс 727, 1282, 1289, 1305), а также исследует величину произведений, которые можно образовать при разбиении натурального числа на два слагаемых (Сс 730, 1248). Озанам в противоположность Лейбницу считал эту задачу трудной.

Лейбниц накладывает определенные условия на три числа, следующих в геометрической (Сс 711) или арифметической прогрессии (Сс 983). К этому же кругу вопросов относится успешно рассматривавшаяся им задача Давенанта (*Davenant*) (Сс 928, 929), которая в отличие от задачи шести квадратов интересовала и английских математиков, в частности Грегори и Ньютона ³⁶:

«Найти четыре последовательных члена геометрической прогрессии, если даны суммы их квадратов и кубов».

В декабре 1675 г. А. Арно, работу которого о магических квадратах Лейбниц цитирует в одном своем исследовании о разбиениях целых чисел (Сс 520 В) ³⁷, предложил ему задачу: перечислить все целочисленные прямоугольные треугольники или указать правило, по которому можно найти все целые квадраты, разбиваемые на два целочисленных квадрата (Сс 1145). Рассуждения Лейбница об этом содержатся в пяти работах (Сс 1146, В, 1147, а, В, 1148, 1149), еще в двух он вычисляет суммы квадратов (Сс 1343, 1406).

Мариотт, между прочим, предложил ему доказать, что площадь целочисленного, т. е. пифагорейского прямоугольного треугольника не может быть квадратным числом (Сс 1150, 1151). Родственные с этим задачи (Сс 1306), как, например, требование найти целочисленный прямоугольный треугольник, сумма кубов которого есть куб (LH 35 XII, 2 л. 80), содержатся в большом числе в рукописях, написанных после 1676 г.

При встрече с Озанамом в этом году Лейбниц приходит к таким задачам:

«Определить два числа так, что если разделить их на удвоенную их сумму, разность квадратов прибавить к меньшему и вычесть из большего, то получится квадрат, именно — квадрат их суммы» (Сс 1201);

«Найти число, которое в сумме с одно-, двух-, трех-, и четырехкратным своего квадрата дает квадрат» (Сс 1211 D).

Затем Лейбниц исследует вопрос, когда числа являются или не являются простыми (Сс 1253, 1254, 1375, 1378, 1520), занимается вопросами теории делимости (Сс 1390), специально — нахождением делимых, когда даны делители и остатки (Сс 742—744, 757—758), — задача, которую подробно рассмотрел Баше³⁸, и проверкой девяткой (Сс 893, 894). К учению о числе в более широком смысле относятся также его изыскания о десятичных числах (Сс 521).

VIII. Алгебра

По алгебре Лейбниц оставил особенно много незаконченных работ. Задачей этой дисциплины он считал составление и решение уравнений (Сс 1042, 1044). В 1672 г. он едва ли что-либо знал в этой области и выдвигал ошибочные утверждения о числе корней уравнения (Сс 277), о чем позднее самокритично писал в соответствующей заметке 1676 (Сс 1540).

Видимо, к осени 1674 г. относится ряд рукописей, в которых Лейбниц, не получая правильного результата, исследует целочисленные и рациональные решения квадратных уравнений с двумя неизвестными и квалифицирует метод Виета как недостаточный (Сс 731—739). В это время он штудировал с помощью Озанама разделы об уравнениях третьей и четвертой степени в изданной Схоотеном «Геометрии» Декарта (Сс 745, 746, 754, 769, 788), занимается

определением множителей данного уравнения (Сс 821, 848), для чего привлекает результаты Гудде, обсуждает основную теорему алгебры (Сс 834) и возможности преобразовать кубические и биквадратные уравнения в двучленные (Сс 747 А, В, 890) или же их решить (Сс 753). Он рассматривает числовые примеры (Сс 762, 763, 765), вопрос о понижении степени уравнения (Сс 766) и обращение с отношениями и алгебраическими операциями (Сс 771, 868, 1093, 1094).

Весной 1675 г. Лейбниц ищет наиболее подходящий метод решения уравнения четвертой степени (Сс 910—912), занимается неприводимым случаем уравнения третьей степени — задача, к которой он обращался еще осенью 1674 г. и позднее — в июне 1675 г. (Сс 789, 790, 923, 980). При этом он опирается, в частности, на соображения, изложенные в «Mesolabum» Р. де Слюза. К апрелю 1675 г. относятся две заметки (Сс 937, 938), содержащие попытки решения уравнений более высоких степеней, родственные кардановой формуле для уравнения третьей степени. Представление о тогдашних познаниях Лейбница в алгебре дает особенно вторая из этих заметок. Она была передана Гюйгенсу, а после возвращения ее исправлена и еще продолжена в мае 1675 г. (Сс 960), когда Лейбниц вновь обратился к кардановой формуле для решения кубических уравнений (Сс 933). Предпринятые им в это время попытки решать уравнения при помощи логарифмов остались неудовлетворительными (Сс 985—990).

Большинство работ по алгебре — 134 листа — Лейбниц написал летом 1675 г. (Сс 998—1043). Его основное внимание вновь привлечено к неприводимому случаю кубического уравнения (Сс 1000, 1005, 1007, 1008, 1012, 1014, 1015, 1017, 1018, 1020, 1022, 1036, 1034, 1041 А). Часто повторяющиеся здесь ссылки на Ш. дель Ферро, Кардано, Виета, Бомбелли, Схоотена, Декарта, «Геометрию» которого Лейбниц опять критикует (Сс 1009, 1014, 1022, 1023), Т. Брэнкера, И. Г. Рана (Рониуса), Ф. Дебона, Слюза и особенно Я. Гудде (Сс 1565) показывают, что он весьма тщательно ознакомился с методами решения и подходами своих предшественников. Здесь он получает интересный частный¹ результат — алгебраическое тождество $\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{6}$ (Сс 1031, 1032)³⁹. В связи с этим открытием он говорит о шестом арифмети-

ческом действии (вычисление действительных величин с помощью мнимых).

Разумеется, Лейбниц пытался решать также уравнения четвертой, пятой и шестой степени, применяя чаще, как и в более позднее время (Сс 1104₂) для уравнений третьей, четвертой и пятой степени, соответственно подстановки $x = m + n$, $x = m + n + p$ и $x = m + n + p + q$ (Сс 1015, 1024, 1028 В, 1037, 1042, 1044). Лейбниц называет это «раздвоением» (*bisectio*) или «трисекцией корней» (*trisectio radicum*). Особый интерес благодаря применению фиктивных числовых коэффициентов представляет собой работа Сс 1037 ⁴⁰, которую мы рассмотрим далее более подробно.

Лейбниц проводит оценки корней (Сс 1004 Е), изучает различные способы преобразований (Сс 1004 С, D, 1019), исследует разрешимость уравнений нечетной степени (Сс 1013), а также трех алгебраических уравнений второй степени с двумя неизвестными (Сс 1040), рассматривает методы исключения иррациональных выражений (Сс 1002, 1033), вычисляет квадратный корень из числа или бинома прямым способом или приближенно (Сс 1030). К наиболее важным сочинениям этого рода принадлежит «О раздвоении сторон» (*De bisectione laterum* (Сс 1042) ⁴¹), которое Лейбниц переработал в феврале 1676 г.

Несмотря на все старания, эти работы оставались в целом неудовлетворительными, что и высказал Лейбницу в учтиво-любезной форме Гюйгенс, после чего Лейбниц поначалу отложил в сторону свои алгебраические исследования ⁴². В конце сентября 1675 г. Лейбниц познакомился с хорошо осведомленным в вопросах теории уравнений Чирнгаузом. К декабрю 1675 г. и весне 1676 г. относятся несколько рукописей (Сс 1296, 1411 В), в которых Чирнгауз или они оба рассматривают соответствующие задачи (Сс 1161—1163, 1199). Лейбниц вновь обращается к решению кубического уравнения (Сс 1175—1176, 1212; Сс 1528 — со ссылкой на изложение Ньютона), в частности к его геометрической трактовке (Сс 1168, 1169), обсуждает исследования по уравнениям пятой и шестой степени с датским математиком Г. Мором (Сс 1293, 1294) и высказывает общие соображения по проблемам алгебры (Сс 1552).

Между тем как многие рукописи со следующего 1677 и до 1680 г. свидетельствуют о безуспешных, но не прекра-

щавшихся усилиях Лейбница алгоритмически решить уравнения пятой и более высоких степеней, большой интерес в методическом плане и по содержанию представляет его работа «О приведении многих уравнений к одному» (*De aequationibus pluribus ad unam reducendis*; февраль 1676, Сс 1297) ⁴³. Предвосхищая один из методов Эйлера, Лейбниц исключает одну неизвестную из двух общих уравнений второй степени с двумя неизвестными. Специальное выражение для этого, применявшееся также Ньютоном в «*Arithmetica universalis*», таково: «привести многие уравнения к одному» ⁴⁴. Лейбниц придает очень большое значение «однородности» (*uniformitas*) и «правильности» (*iustitia*) вычислений, т. е. тому, чтобы каждая неизвестная была подвергнута вычислительным операциям одинаковым образом.

Указанного принципа Лейбниц придерживается в очень многих рукописях следующего года ⁴⁵ даже тогда, когда это ведет к ненужной обстоятельности, ибо он полагает, что только так можно постичь искомые закономерности. Он следует при этом одному из выдвинутых им принципов природы, подобно тому как в 1673 г. в связи с рассуждениями о пневматике и барометре он ссылается на «стремление природы к однородности» (*conatus naturae ad uniformitatem*) (Сс 486 С).

IX. Геометрия (без инфинитезимальной геометрии)

Как много занимался Лейбниц геометрическими задачами, разрешимыми без инфинитезимальной геометрии, хотя и имеющими, быть может, точки соприкосновения с этой областью, показывают многочисленные рукописи, где часто речь идет о знаменитых задачах, которые решаются как построением, так и алгебраически. Это и античные задачи (Сс 1291), восходящие, в частности, к Паппу (Сс 1205), и задачи, сформулированные современниками.

Одна из первых, рассмотренных Лейбницем, была задача, поставленная Ж. Бюо, к которой относится ряд заметок 1673 г. (Сс 531 А, С, 532, 534, 536, 537; заметка 535 датируется декабрем 1674 г. и относится к 814), причем Лейбниц обдумывает также механическое решение (Сс 539):

«Пусть на одной прямой даны точки A, B, C, D . Найти такую точку E , чтобы проведенные к ней из этих четырех данных точек прямые линии AE, BE, CE, DE образовали три равных угла AEB, BEC, CED , если это возможно».

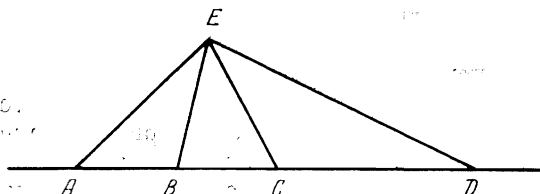


Рис. 1

В связи с задачами на квадратуры Лейбниц занимается в это время вычислением центров тяжести плоских прямоугольных треугольников (Сс 550), а в последующие два года исследует путем построения и алгебраически (Сс 611), как найти треугольник, если, например, даны основание, высота и сумма катетов (Сс 699, 761) или катеты и площадь (Сс 760). Подобные вопросы для прямоугольников он рассматривает вместе с Озанамом (Сс 1152, 1154, 1155) ⁴⁶; в январе 1676 г. речь идет о сферических треугольниках (Сс 1287). Наряду с этим рассматривается деление отрезков и углов (Сс 814, 1283, 1413, 1549), а также оценка углов (Сс 1457), отчасти с учетом работ Дж. Грегори и Виета. В других работах Лейбниц занимается геометрическими местами (Сс 1435), видами геометрических доказательств (Сс 1545), вопросом о необходимости общих методов (Сс 1205), нахождением свойств, одновременно присущих двум фигурам (Сс 1096) и задачам на построение (Сс 827, 1433, 1434, 1550), которые часто, однако, нельзя отделить от задач теории кривых, как, например, построение трохоиды (Сс 827) или нормали к коническому сечению (Сс 1434).

Мне представляется сомнительным, что указываемые в Сс наброски «Геометрической характеристики» (*Characteristica geometrica*; Сс 1168, 1169, 1249) были в самом деле составлены в начале 1676 г., а не относятся к 1679 г., как и опубликованная Герхардтом ⁴⁷ большая статья под тем же названием, датированная 10 (20) августа 1679 г.

Стоит отметить одну рукопись лета 1676 г., о которой говорилось выше, где речь идет о так называемой задаче Альхазена (Сс 1451):

«Отыскание на окружности, описанной вокруг центра A , такой точки X , что луч, выходящий из данной точки B , отражается в данную точку C , есть задача Альхазена. Смотри построения Слюза и Гюйгенса, найденные алгебраическим вычислением, а также то, что об этой задаче сказал Барроу. Слюз и Гюйгенс дали построения с помощью пересекающихся данной окружности и гиперболы. Посмотрим, нельзя ли найти другой, не менее простой способ построения безо всяких вычислений».

Между тем как в этом случае Лейбниц в противоположность названным своим предшественникам предлагает механическое решение, примерно через два года он вместе с нидерландским математиком И. Я. Фергюсоном постарался найти алгебраическое, до сих пор остававшееся неизвестным решение, о котором будет еще говориться особо в тринадцатом параграфе (Сс 1066 В).

Х. Открытие исчисления бесконечно малых.

Теория интегрирования

При обзоре рукописей этой группы мы можем лишь в небольшой мере входить в детали, ибо Лейбниц по самым различным поводам рассматривал самые разнообразные инфинитезимальные задачи. Соответствующие работы распределены главным образом по 1673 и 1675 гг.

К раннему периоду его занятий такого рода вопросами в 1673 г. относятся некоторые рукописи, где в связи с вычислением площадей рассматриваются вписанные и описанные многоугольники (Сс 522 А, В, 524 А, В, 525, 621), чему он, впрочем, посвящает некоторые исследования и в 1675 г., отчасти в сотрудничестве с Чирнгаузом (Сс 1126, 1128, 1411).

В связи с изучением Паскаля и Гюйгенса Лейбниц начинает в 1673 г. делать первые открытия из области бесконечно малых, которые фиксирует в рукописи (Сс 544) ⁴⁸. В непосредственно примыкающей работе Сс 545 В, правда, рассматриваются в основном вычисления центров тяжести, поверхностей и объемов копыт и тел вращения. Однако уже там мы находим мысль о том, что фигуру можно квадрировать, разбивая на треугольники, а не на трапеции. «Lettres» (1659) Паскаля и «Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan» (1639) Ж. Дезарга сообщили ему решающие стимулы к открытию преобразования треугольников, или, как

он это называл, «теоремы о трансмутации», с помощью которой он смог единообразно вывести найденные к тому времени интеграции ⁴⁹.

В заметке Сс 617 Лейбниц обнаруживает связь квадратуры круга с теоремами Паскаля о сумме синусов и синус-верзусов. Благодаря дальнейшему изучению Паскаля ему станет ясным значение бесконечно малого треугольника в круговом квадранте, который он называет характеристическим (*triangulum characteristicum*) и исследует в двух набросах для случаев эллипса, трохойды и циклоиды (Сс 548, 549). Позднее Лейбниц посвящает ему несколько специальных работ (Сс 1068, 1420) и дает сводное изложение в январе 1675 г. (Сс 891). Особенно важны работы Сс 696 и 697, которые содержат семьдесят семь предложений, вытекающих из рассмотрения характеристического треугольника кругового квадрата с переносом на гиперболы и параболические кривые, и восемьдесят предложений о преобразованиях частей круга в другие фигуры, в частности, конхоиду и «гиперболоиду», как в то время иногда называли кривую, задаваемую уравнением вида $y = C/x^n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$).

Почти из шестидесяти работ, в которых речь идет о квадратурах, около половины полностью или преимущественно посвящены квадратуре круга, которая, разумеется, тесно связана с квадратурой гиперболы (Сс 557—559, 617, 620, 624, 628 (около 1676?), 702, 767, 768, 773₁, 797, 1229, 1230, 1232 (около 1676?), 1233—1235, 1237, 1245—1247, 1412, 1429, 1438, 1473, 1519). Следует отдельно упомянуть работы по квадратуре круговых сегментов (Сс 555, 557—559, 563, 624, 1235), по уравнениям окружности (Сс 767, 768) и соображения о невозможности общей квадратуры круга. Наиболее обстоятельное изложение лейбницевской квадратуры круга дается в статьях Сс 1232 и 1233 июля-августа 1676 г., о которых говорилось во вступительном параграфе.

Остальные примерно тридцать работ по теории интегрирования связаны прежде всего с квадратурой гиперболы и параболических кривых (Сс 551, 623, 638, 692, 693, 1196, 1231, 1238), с логарифмической кривой (Сс 694, 895, 897, 1242), с конхойдой (Сс 695) и сегментами циклоиды (Сс 691, 1195). Некоторые рукописи посвящены принципиальным вопросам теории интегрирования, например условиям интегрируемости (Сс 607, 608,

625, 641, 694, 896), или содержат специальные предложения и методы, как выражался Лейбниц, «*Analysis tetragonistica*» т. е. «квадратурного анализа» (Сс 1086, 1164—1166), причем выделяются четыре уже опубликованных работы (октября 1675 г. (Сс 1089, 1090, 1092, 1106₁)), в которых успешно применен метод Архимеда, основанный на использовании центров тяжести. Сюда же относятся еще два наброска, написанные в январе (Сс 1286) и мае (Сс 1427) 1676 г.

Наряду с его штудиями по квадратурам, которые, как относящиеся к октябрю 1675 г. фрагменты, в решающей степени основаны на теории центров тяжести, имеется по меньшей мере шестнадцать работ, посвященных самой этой теории (Сс 1419, 1421, 1432, 1474). В частности, Лейбниц пытается определить центры тяжести конических сечений (Сс 560, 564, 1166, 1288, 1426, 1471), параболических коноидов (Сс 547, 1167) и гиперболоидов (Сс 642, около 1676 г.), полушара (Сс 639) и произвольных фигур, ограниченных кривыми линиями (Сс 1236).

Поскольку квадратура круга тесно связана с квадратурой логарифмической кривой, а та, в свою очередь, — с квадратурой гиперболы (Сс 1242), то Лейбниц проявляет большой интерес к логарифмической кривой (Сс 1456, 1461), к свойствам логарифмов и к их применению в других задачах (Сс 1119, 1140, 1462, 1463), например в задаче о касательных (Сс 1240).

Этот вопрос он рассматривает в ряде специальных работ. Помимо прочего, он исследует касательную к параболе (Сс 630), касательную к логарифмической и другим трансцендентным кривым (Сс 1244, А, В, 1475), формулирует «тетрагонистические», т. е. квадратурные теоремы, относящиеся к задаче о касательных (Сс 1076), и обсуждает использование касательной для определения точек перегиба кривых (Сс 841). О новом методе проведения касательных при помощи своего дифференциального исчисления Лейбниц говорит в одной (уже опубликованной) работе от июня 1676 г. Этот метод, как справедливо замечает он, превосходит метод Декарта, в котором используются уравнения с двумя равными корнями (Сс 1452) ⁵⁰. В это же время Лейбниц обсуждает методы определения касательных, принадлежащие Слюзу и Ферма, и в соответствующей заметке (Сс 1488) набрасывает план общего изложения учения о касательных.

XI. Исследования по обратному методу касательных (решение дифференциальных уравнений)

Среди работ по специальным инфинитезимальным задачам особое место занимают те, которые посвящены так называемому обратному методу касательных (*methodus tangentium inversa*). Их следует здесь суммарно осветить. Наиболее важная, пожалуй, рукопись относится к августу 1673 г. (Сс 575). Она представляет исключительный интерес из-за своей терминологии (тут впервые появляется слово «функция») и содержащихся в ней открытий — Лейбниц впервые образует дифференциалы высших порядков⁵¹. Первоначально работа называлась «Новый метод нахождения касательных к кривым по данным ординатам или обратно — ординат (*applicatae*) по данным подкасательным (*productae*), поднормальям (*reductae*), касательным, нормальям, секущим».

Лейбниц пытается здесь перенести свой метод характеристического треугольника, который он успешно применял при интеграциях, на задачу о касательных и ее обращение. Для различных величин — подкасательной, поднормали и т. д. — он вводит термин «функция» и в последующем дает своей работе новое заглавие: «Обратный метод касательных, или о функциях. О нахождении одних геометрических мест из других или об ординатах данного определенного геометрического места, выполняющих некоторую функцию по отношению к геометрическому месту, которое требуется найти, или же о нахождении геометрического места, в котором ординаты данного геометрического места имеют предписанную функцию».

Определение касательной сводится к вычислению подкасательной по ординате и отношению разности двух соседних ординат к разности соответствующих абсцисс. Лейбниц обнаруживает, что требуются две подкасательные или две поднормали, если он хочет обратно по ним найти ординаты. Он сводит обратную задачу о касательных к суммированию некоторого бесконечного ряда. Представление рядами дает ему повод провести различие между квадратурами арифметическими (площадь фигуры выражается бесконечным рядом рациональных чисел), геометрическими (площадь точно выражается через другую величину) и механическими (площадь выражается через другую величину, которая отличается от истинной прак-

тически пренебрежимо мало). Кроме того, представление рядами показывает, что все три задачи — спрямление, интегрирование и обратная задача о касательных — в конечном счете сводятся к одной-единственной. К этой рукописи мы еще вернемся, когда будем говорить об открытии Лейбницем индексных обозначений, так как в этом плане некоторые ее пассажи до сих пор полностью упускались из виду.

В течение трех следующих лет Лейбниц посвятил обратному методу касательных — полностью или в большей части — по меньшей мере тридцать работ, но здесь мы не можем входить в их детальный разбор (Сс 614, 627, 791, 820, 830, 832, 833, 839—846; 849, 903—906, 1120, 1125, 1131, 1250, 1290, 1470, 1482—1484)⁵². Так, он занимается задачей: найти уравнение кривой, если поднормаль (Сс 625, 791, 840) или нормаль (Сс 625, 903) дана как функция абсциссы или ординаты (Сс 846); в декабре 1674 г. он устанавливает, что обратная задача о касательных может зависеть как от интеграций, так и от спрямлений, и перечисляет вопросы, которые нужно решить для усовершенствования теории кривых (Сс 820).

Приблизительно в это же время Лейбниц сводит воедино методы решения обратной задачи о касательных (Сс 839), причем вслед за Декартом пробует подойти к ней, пользуясь вспомогательным уравнением с двумя равными корнями (Сс 823, 833, 839, 1125), и убеждается, что этот метод недостаточен. Весной 1675 г. он снова поднимает вопрос об определении кривых по данным поднормальям (Сс 1120), годом позже он ставит ту же задачу для данной подкасательной (Сс 1290).

От Декарта Лейбниц получает также импульс к изучению его овалов (Сс 832, 833). В рукописи, которая относится к ноябрю 1675 г. (Сс 1131), Лейбниц излагает возникшие у него к этому моменту идеи об обратном методе касательных. Особый интерес представляют заметки к задаче Дебона (Сс 849, 1483 А, 1484), о решении которой Лейбниц сообщает в письме к Ольденбургу от 27.8.1676 г., предназначенном для Ньютона и где он дает понять, что ему ясна ее связь с логарифмической кривой⁵³. Речь идет здесь об определении кривой с постоянной подкасательной. Эта задача приводит в современной формулировке к решению дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{a}.$$

Ее поставил друг Декарта французский правовед Ф. Дебон через год после опубликования «Геометрии».

ХII. Исследования по геометрии кривых и дифференциальной геометрии

По специальным задачам о кривых Лейбниц оставил по меньшей мере сто тридцать работ, из которых более пятидесяти преимущественно или целиком относятся к коническим сечениям. С задачей о проведении из произвольной точки нормали к коническому сечению Лейбниц встретился в «Mesolabum» Слюза, о чем свидетельствуют многочисленные заметки, главным образом 1674 г. (Сс 562, 847, 852 A, 855 D, 856 A, B, C, 861 A (около 1676 г.?), 862 B, C, 864, 865) ⁵⁴. Правда, эта задача часто занимала его и после 1676 г., особенно в начале лета 1678 г., о чем уже говорилось во вступительном параграфе ⁵⁵.

К Слюзу восходят также относящиеся к этому времени исследования Лейбница о геометрическом решении кубических и биквадратных уравнений с помощью конических сечений (Сс 852—854, 855, B, E, 855 A относится, пожалуй, к 1676 г.). Наряду с общими работами об этих кривых (Сс 787, 857—860, 862) имеются и такие, в которых затрагиваются специальные задачи (Сс 788, 925); например, «Пусть дан параметр конического сечения; найти [сопряженный] диаметр, который соответствует этому параметру» (Сс 849); или задача о пересечении круга и конического сечения (Сс 855 C, 1203₁). В октябре 1675 г. ему уже не составляло труда решить следующую задачу, которую предложил К. Ф. Мийе Дешаль: «Определить часть кругового конуса, расположенную между плоскостью основания и плоскостью, параллельной оси» (Сс 1063). Для решения, как утверждает Лейбниц, необходимы квадратуры круга и гиперболы. Точно так же, замечает он в другой работе, зависит от квадратуры круга нахождение центра тяжести сегмента гиперболы (Сс 1229), о чем идет речь также в одной работе 1676 г. (Сс 1430), — в других рукописях ищутся центры тяжести дуги окружности (Сс 1288) и некоторого кругового сегмента (Сс 612, 1508).

В октябре 1675 г. Лейбницу наконец удается доказать одну теорему о гиперболе Григория де Сен-Венсана (Сс 1087), а несколько месяцев спустя он с успехом занимается одной теоремой Архимеда о круге (Сс 1295) и некото-

рой задачей об эллипсе, поставленной Грегори (Сс 1454). В ноябре он рассматривает значение мнимых величин при сопоставлении круга и гиперболы (Сс 1454). В этих исследованиях принимает участие Чирнгауз, с **которым** Лейбниц беседует также о хордах окружности (Сс 1362). Другие специальные исследования (Сс 1209, 1280), например об эллипсе (Сс 548) и о параболе (Сс 1081, 1284, 1437), я могу здесь лишь упомянуть мимоходом. Особый интерес представляет вычисление длин дуг эллипса и гиперболы (Сс 1085, 1091).

Более сорока работ посвящены кривым, которые обстоятельно рассматривались в современной литературе — прежде всего в связи с «*Horologium oscillatorium*» Гюйгенса ⁵⁶: циклоиде (Сс 547, 549, 609, 610, 627, 691, 832, 906, 1103, 1464 А, В, 1465), для изучения которой Лейбниц использует характеристический треугольник (Сс 548, 549, 636), трохоиде (Сс 549, 775 А, 827, 828, 829, 832, 902), вслед за Декартом — кохоиде (Сс 636, 695, 697), логарифмической кривой (например, Сс 547). Особенно основательно он занимается квадратурой, под которой в эпоху Лейбница понимали всякую вспомогательную кривую для геометрической квадратуры, и прежде всего квадратуры круга (Сс 701, 906, 1074, 1386, 1464 А, В). В июне 1676 г. Лейбниц определяет ее следующим образом (Сс 1464 А): «Природа квадратрисы состоит в том, что движение линейки ST от N к RM параллельно самой себе пропорционально движению радиуса AF вокруг центра A по дуге FE окружности $CFEB$ в предположении, что AF проходит через N и AE проходит через M . Это движение пропорционально в отношении радиуса $r = AC$ к четверти окружности CEB ».

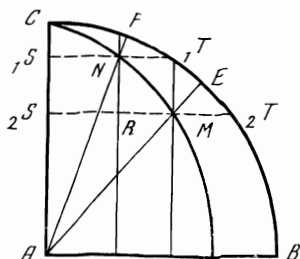


Рис. 2

В остальных примерно тридцати рукописях затрагиваются самые разнообразные вопросы теории кривых. Лейб-

ниц вычисляет площади поверхностей коноидов, сфероидов и цилиндрических поверхностей (Сс 773, 1095, 1157, 1277, 1426). Он определяет и исследует некоторые типы кривых, например родственные (Сс 613), подобные, или параллельные (Сс 631, 632, 1071—1073), силлогические (Сс 1208) и гомологические кривые (Сс 1104). Родственные кривые, к примеру, он определяет следующим образом: «Родственными (*cognatae*) являются кривые, которые имеют некоторое общее геометрическое место функций, как, например, круг, эллипс, гипербола, у которых геометрическое место поднормалей есть треугольник».

Подобие он определяет словами (Сс 631): «Подобными (*similes*) являются кривые, гомологические стороны которых пропорциональны».

Лейбниц исследует четыре способа преобразования — разворачивания (*evolutio*), трансфигурацию (*transfiguratio*) приращение (*crementa*) и сравнения движений (*motuum comparationes*) (Сс 831), принимая во внимание также инструментальные вспомогательные средства. Он изучает специальные кривые, выдвинутые на обсуждение математиками, например кривые ван Гейрата (Сс 901, 1144), Озанама (Сс 940) и особенно кривую Ж. Берте, которая получается из круга радиуса a , для которых задана длина дуги s (Сс 1110—1116).

Лейбниц занимается доказательством теорем Евклида с помощью движений (Сс 857), определяет кривую, которая получается при сечении плоскостью эллиптического, гиперболического или параболического цилиндра (Сс 1389), и рассматривает вопрос о том, как нужно удлинить нормали к кривой, чтобы они стали нормальными к некоторой другой кривой (Сс 1285). Одна рукопись от апреля 1675 г. резюмирует его изучение работ Гюйгенса, Рена, Гудде, Декарта и многих других по различным вопросам теории кривых (Сс 939).

XIII. Приложение

Первые попытки

**введения алгебраических индексных обозначений,
относящиеся к парижскому периоду**

Рукописи 1672—1676 гг. Некоторые исследования последних лет позволили опубликовать остававшиеся до сего времени неизвестными результаты, найденные Лейбни-

цем, как основателем теории детерминантов ⁵⁷. Основной предпосылкой его открытия явились введенные им алгебраические индексные обозначения — двойные и многократные индексы. Если верить соответствующим указаниям Сс, Манке и Гофмана ⁵⁸, то он должен был сделать это открытие еще в Париже. В дальнейшем, однако, будет показано, что хотя Лейбниц и развивал подходы к таким индексным обозначениям до 1676 г., но ни в одной работе до 1678 г. *двойные* индексы не применяются.

На один из таких подходов обратил внимание еще в 1901 г. Л. Кутюра ⁵⁹, приведя в доказательство рукопись Сс 893 от января 1675 г. На самом деле имеется значительно более ранняя работа, датированная августом 1673 г., в которой можно распознать первые, еще неловкие попытки применения индексов. Это упомянутая в одиннадцатом параграфе работа Сс 575 = LH 35 VIII, 3 л. 1—8 «Обратный метод касательных, или о функциях» (*Methodus tangentium inversa seu de functionibus*), которую Манке подробно проанализировал в 1925 г. ⁶⁰, не обратив внимания, однако, на интересную в этом отношении страницу 4^v, где Лейбниц безуспешно пытается решить обратную задачу о касательных для гиперболы.

Лейбниц полагает $g = c - x$, где x пробегает арифметическую прогрессию 0, 1, 2, 3, 4, ... Значения g образуют, таким образом, убывающую арифметическую прогрессию. Хотя слагаемым

1

$$1 + \frac{1}{g} = \frac{g+1}{g}, \quad g = c - 1,$$

$$1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} = \frac{g^2 + g + 1}{g^2}, \quad g = c - 2,$$

$$1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} = \frac{g^3 + g^2 + g + 1}{g^3}, \quad g = c - 3,$$

$$1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \frac{1}{g^4} = \frac{g^4 + g^3 + g^2 + g + 1}{g^4},$$

$g = c - 4$ и т. д.

соответствуют различные значения, он суммирует сначала так, как будто речь идет все время об одном и том же

значении g :

$$\frac{1}{\frac{g+1}{g}} \left\{ \frac{2g+1}{g} \right\} \frac{g^2+g+1}{g^2} \left\{ \frac{3g^2+2g+1}{g^2} \right\} \frac{g^3+g^2+g+1}{g^3} \left\{ \frac{4g^3+3g^2+2g+1}{g^3} \right\} \frac{g^4+g^3+g^2+g+1}{g^4} \left\{ \frac{5g^4+4g^3+3g^2+2g+1}{g^4} \right\}$$

Затем он замечает свою ошибку и пишет: «Но следует знать, что это суммирование вводит в заблуждение, если не примем во внимание, что g все время меняет величину. Поэтому его нужно провести снова».

Теперь различные значения g Лейбниц обозначает числами, заключенными в скобки и расположенными впереди g . Так, он пишет g , (2) g , (3) g и т. д., что соответствует современной записи g , g_2 , g_3 и т. д.:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{g+1}{g} &= \frac{2g+1}{g}, \\ \frac{2g+1}{g} + (2) \frac{g^2+g+1}{g^2} &= \\ &= \frac{2g(2)g + (2)g^2 + g(2)g + g}{g(2)g^2} = \\ &= \frac{3g(2)g^2 + (2)g^2 + g(2)g + g}{g(2)g^2}, \\ \frac{3g(2)g^2 + (2)g^2 + g(2)g + g}{g(2)g^2} + (3) \frac{g^3+g^2+g+1}{g^3} &= \\ &= 3g(2)g^2(3)g^3 + (2)g^2(3)g^3 + g(2)g(3)g^3 + \dots \end{aligned}$$

Приходится оставить открытым вопрос, не был ли этот алгебраический способ записи Лейбница подсказан системой геометрических обозначений Декарта, который в этой статье дважды цитируется (п. 5^р, 6^р). Энестрем в 1910—1911 гг. указал на то ⁶¹, что уже в первом латинском издании «Геометрии», осуществленном в 1649 г. Схоотеном, точки записываются в виде C , $2C$, $3C$, $2S$, $3S$, $2T$, $3T$, $2V$, $3V$. Оба автора, во всяком случае, опускают индекс 1. Иначе обстоит дело в относящейся к этому времени недатированной рукописи Сс 564, где для обозначения разных

точек Лейбниц использует этот же самый способ записи, включая и индекс 1.

Для верности он в Сс 575 начинает вычисление снова при других предположениях (в частности, слагаемые умножаются на m):

$$\begin{aligned}
 & m, \\
 & \frac{mg + m}{g}, \\
 & \frac{mg + m}{g(2)g} = \frac{\overbrace{mg^2(2)g + mg^2 + mg(2)g + mg}^8}{g^2(2)g}, \\
 & \frac{8}{+} + \frac{\overbrace{+}^8}{(3)g} = \\
 & = \frac{mg^4(2)g^3(3)g + mg^4(2)g^2,, + mg^4(2)g(3)g + mg^4(2)g,, +}{g^4(2)g^2(3)g} + \\
 & \quad + mg^3(2)g^2(3)g + mg^3(2)g^2,, + mg^3(2)g(3)g + mg^3(2)g.
 \end{aligned}$$

Итак, видно, что выше допущена ошибка, поскольку разные g перепутаны между собой.

В этой рукописи от августа 1673 г. Лейбниц употребляет свой способ записи без каких-либо дополнительных замечаний. Не то находим мы в работе января 1675 г. «О проверке девяткой в аналитическом исчислении» (*De examine per novenarium in calculo analytico*) (Сс 893), на которую обратил внимание Кутюра, а после него более подробно Манке ⁶². После некоторых рассуждений о преимуществах и недостатках проверки девяткой Лейбниц заводит речь о двух родах чисел, которые должны иметься в аналитическом исчислении: «существенных числах» (*numeri essentiales*) и числах «произвольных» (*arbitrarii*). Так, имеем

$$(2a + 3b)^2 = 4a^2 + \textcircled{2} 2a3b + 9b^2$$

Обведенное кружком число 2 есть существенное, незаменимое число, которое входит в квадрат всякого бинорма независимо от того, какие значения принимают a и b и какие коэффициенты берутся вместо произвольно взятых чисел 2 и 3. Это различие следует весьма тщательно учи-

тывать: «существенные числа» нужно проверять особо, так как ошибку в них нельзя выявить по сопровождающим буквам. Дополнение Лейбница относится к проверке девяток: «Смотри их употребление в записях о суммируемых рядах».

Здесь он имеет в виду листы LH 35 VIII, 4 л. 1—3 (Сс 892), которые тоже датированы январем 1675 г. На листе $1^v + 2^r$ он использует тот же метод, выделяя «существенные» числа кружком, но не уделяет здесь особого внимания этому способу записи. Кружок он рисует частично (чаще всего с левой стороны) удвоенным, например:

$$2g \sqcap 5b - 1\beta \sim \textcircled{(2)}, \quad 4g^2 \sqcap 25b^2 - \textcircled{(2)} 5b1\beta + 1\beta^2 \sim \textcircled{(4)}.$$

Таким образом, Лейбниц обдумывает в принципе возможность уже не индексирования букв, как в августе 1673 г., а представления произвольных числовых значений с помощью самих же чисел. Правда, когда Манке говорит, что «в алгебре 1, 2, 3 должны означать не определенные числа — один, два, три, а любые три отличающиеся друг от друга числа, т. е. то самое, что мы теперь обозначили бы через a_1, a_2, a_3 », то относительно этой вызывающей недоразумения формулировки — поскольку разные числа или индексы не обязательно соответствуют разным числовым значениям — следует иметь в виду, что Лейбниц в единственно использованной Манке работе Сс 893, равно как и в Сс 892, оперирует только с настоящими числами, и такое обобщение рассматривает лишь как возможность.

Следующий шаг на пути использования натуральных чисел не в их первоначальном значении Лейбниц делает в том же январе 1675 г. в работе Сс 900⁶³. Уже в заглавии, цитированном нами в шестом параграфе, он упоминает свое нововведение:

«... О формулах всех измерений из начал комбинаторного искусства: посредством нового рода анализа и символов...»

Если обозначить

$$\frac{by^z + ca^1y^{z-1} + da^2y^{z-2} + ea^3y^{z-3} + fa^4y^{z-4}}{gy^z + hay^{z-1} + ka^2y^{z-2} + la^3y^{z-3} + ma^4y^{z-4}}$$

через $f(y)$, то Лейбницу надо вычислить разность между

$f(y)$ и $f(y + \beta)$. Степени a Лейбниц пишет для однородности. «Но для того, чтобы получить задачу в числах, — продолжает он, — и избежать ошибки в вычислениях, мы напомним ⁶⁴:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2b625y^{4z} & + & 7ca125y^{4z-1} & + & 5da225y^{4z-2} & + & 4ea35y^{4z-3} & + & 8fa45y^{4z-4} \\ 4 & 2401 & 5 & 343 & 8 & \dots & 49 & + & 2 \dots 7 & + & 10 & 7^{\circ} \\ \hline 10g5^4y^{4z} & + & 11ha5^3y^{4z-1} & + & 13ka25^2y^{4z-2} & + & 14la^35y^{4z-3} & + & 16ma15^0y^{4z-4} \\ 11 & 7 & 13 & 7 & + & 14 & 7 & + & 16 & 7 & + & 17 & 7^{\circ} \end{array}$$

К сожалению, Лейбниц не дает никаких дополнительных пояснений. Несколько далее он говорит о «пробных числах» (*numeri probatorii*), которые он там опустил, чтобы не загромождать еще больше совершенно новую и без того уже сложную формулу.

Непосредственно понятен смысл степеней пятерки и семерки, а также показателей степени. Как и в начале рукописи, Лейбниц рассматривает частный пример $z = 4$. Таким образом, четверка перед показателем степени не является коэффициентом, а означает, что в числовом примере все время нужно подставлять 4 вместо z . Следует поэтому образовать y^4, y^3, y^2, y^1, y^0 , когда y принимает значения 5 и 7.

Напротив, остается неясной роль чисел, стоящих в начале каждого члена числителя и знаменателя, причем числа 7, 5, 4, 8, 4, 5, 8, 2 в числителе получены исправлением тех, что были написаны первоначально; частично их можно разобрать: 3 (?), 4, 5, 9, ?, ?, 7, 7 (?). Это создает впечатление, что сначала Лейбниц хотел воспользоваться последовательностью натуральных чисел 2, 3, 4, 5 и т. д., как он позднее и сделал. Естественная попытка объяснить упомянутые числа как остатки от деления на девять или одиннадцать соответствующих им числовых степеней могла бы иметь смысл, учитывая их величины, только для числителя, но и для него она, как это сейчас же видно, не проходит.

О том, что рассмотрение остатков от деления на девять все-таки могло играть роль, говорит тот факт, что все делящиеся на три числа из последовательности появляющихся здесь натуральных чисел 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17 исключены. Между прочим, все числа, кроме 7 и 17, встречаются дважды.

Можно заметить также, что в противоположность числителю в знаменателе числа первой строки повторяются во второй со сдвигом на один член влево. Чтобы отличать настоящие числовые величины от этих вспомогательных чисел, Лейбниц, как и в других рукописях января 1675 г., обводит их кружком:

$$2b \ 10g \ 5g \textcircled{2}^{42}.$$

В работе Сс 1037, написанной спустя примерно полгода, в июле 1675 г.⁶⁵, Лейбниц применяет тот же метод. Здесь наконец вместо общих коэффициентов, которые мы записали бы в виде $a_2, \dots, a_{19}$, он пользуется при вычислениях натуральными числами от 2 до 19, не забывая это отметить. В заметке LH 35 VIII, 30, л.18, написанной, вероятно, 10 февраля 1676 г., — она непосредственно примыкает к работе Сс 1305, датированной этим днем, и к Сс 1306 — Лейбниц выделяет «существенный» коэффициент 2 кружком, как и в работе Сс 983; иначе речь шла бы о произвольных числах: «Observation de Mons. de Mariotte soient les generateurs des triangles rectangles en nombres» [Замечание де Мариотта — числовые образующие прямоугольных треугольников. — *Пер.*]

$$1,2|2. \quad \underbrace{1 + \textcircled{2}}_5 2|5 \quad \underbrace{2 + \textcircled{2}}_{12} 5|12 \quad \underbrace{5 + \textcircled{2}}_{29} 12| \text{ etc. }.$$

В июне 1676 г. Лейбниц находит уместным дать краткое пояснение новому применению чисел. В работе «Извлечение корней с помощью бесконечного ряда» ((Extractio radicum per infinitam seriem) (Сс 1468), датированной этим месяцем, он рассматривает некоторое равенство двух произведений линейных множителей и продолжает: «Не вижу, что воспрепятствовало бы написать в общем виде (Nec video quid prohibeat generaliter scribi)

$$(1y + a)(2y + c)(3y + d) \text{ и т. д. } = \\ = (4y + e)(5y + f)(6y + g) \text{ и т. д.}$$

$$1y + a, \ 2y + c, \ 3y + d \text{ etc. } \quad \square \quad 4y + e, \ 5y + f, \\ 6y + g \text{ etc.}$$

На полях он добавляет: «Числа 1, 2, 3 стоят здесь вместо букв» (1.2.3 numeri sunt pro literis).

Других работ парижского периода, которые можно было бы связать с алгебраическими индексными обозначениями, я пока не обнаружил. Рассмотренные рукописи показывают, что в это время Лейбниц начал применять числа в смысле общих индексных буквенных символов величин, особенно при проверке вычислений, не разра-

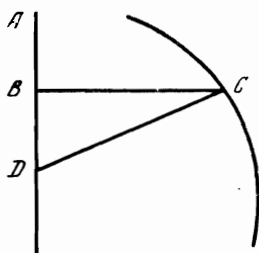


Рис. 3

ботав соответствующей терминологии. Решающее усовершенствование этого способа обозначений, а вместе с ним — «искусства характеристики» (*ars characteristica*) в виде искусно построенных двойных и многократных индексов в данный период Лейбницу не удалось — в этом едва ли можно сомневаться. До 1678 г. они, по моим исследованиям, не появляются.

Неверно датированные рукописи, содержащие двойные и многократные индексы. По данным Сс набросок Сс 851 = LH 35 XII, л. 381—39 «Наименьшая для конического сечения» (*Minima ad Conicam*), где действительно используются двузначные числа в смысле фиктивных коэффициентов, был составлен в конце 1674 г.: эти данные принял Гофман⁶⁶. Указанная датировка несомненно неверна.

В данной работе сначала повторяется взятое из схоотеновского комментария к «Геометрии» Декарта решение задачи нахождения перпендикуляра к одной из двух пересекающихся прямых. Вслед за тем Лейбниц пытается решить похожую задачу: найти вычислением перпендикуляр из данной точки *D* к некоторому коническому сечению. Для этого на листе 38 он вводит много вспомогательных величин в форме фиктивных чисел, начиная с 15 и дальше беря подряд следующие натуральные числа,

например (aequ. означает равенство):

$$\frac{BD}{BC} \text{ aequ. } \frac{15}{16}, \quad z \text{ aequ. } s + 17, \quad v \text{ aequ. } t + 18.$$

Из больших чисел среди дальнейших равенств на листе 38^r и на листе 39^v появляется число 113, которое, видимо, подчиняется арифметическим законам особого рода, так как на листе 39^v из равенства

$$113 \frac{b}{c}, \quad \text{aequ. } p$$

Лейбниц получает

$$11 \text{ aequ } 113 \frac{q}{b} p.$$

Эту задачу, как и датировку рукописи, разъясняют замечания Лейбница на листах 38^r и 39^v. На первом читаем: «но 40, 41 нужно разъяснить через уравнение 63 из заметки 29 мая 1678» (*explicanda autem 40, 41 per aequ. 63 Schedae 29 Maji 1678*). На втором говорится, что уравнения

$$9s - 10t + 9.11 \text{ aequ. } 0 \quad 9 \text{ aequ. } 113 \frac{b}{q} w + 4a - 10.12$$

«нужно сравнить с уравнением 63 во 2-й нашей заметке 21 мая 1678» (*Comparanda aequationi 63 in Scheda nostra 2da 21. Maji 1678*). Во втором случае сделана описка: Лейбниц имеет в виду ту же самую работу от 29.5 (8.6) 1678 г., что и на листе 38^r. Эти ссылки ясно показывают, что Сс 851 появляется самое раннее после 29.5 (8.6) 1678 г., может быть даже только спустя несколько месяцев. Действительно, на листе 38^r зачеркнуты слова «Места и построения» (*Loca et constructiones*), а 29.5 (8.6) 1678 г. появляется набросок ЛН 35 XII, 1 л. 207 «Уравнения мест» (*Locorum aequationes*), посвященный той же проблематике, что и Сс 851. Но, пожалуй, особенно тесно эта работа связана с тремя заметками от 13 (23). 12. 1678: ЛН 35 XII, 1 л. 202 + 206 Scheda I, л. 203^v + 203^r Scheda 2 с созвучным заглавием «О местах и построениях» (*De locis et constructionibus*), л. 204—205 Scheda 3 «*Loca et constructiones*».

В ссылке из Сс 851 Лейбниц имеет в виду работу ЛН 35 XII, 1 л. 210—211 «29 мая 1678. Часть II. О проведении из данной точки наименьшей к коническому сечению»

(29. Maji 1678 Pars II De Minima ad Conicam a puncto dato ducenda). На листе 210 он производит следующие вычисления: « $n = 113 + 113 \frac{a}{q}$ (уравнение 47), ..., $n^2 = \underline{1} + + 113 \frac{2a}{q} - \frac{a^2}{q^2}$ (уравнение 51), из уравнения 47, так как 113 представляет двойственный символ. Но всякий двойственный символ, умноженный сам на себя, дает «+»⁽⁴⁷⁾ (n aequ. $113 + + 113 \frac{a}{q}$, ..., n^2 aequ. $\underline{1} + \frac{2a}{q} - \frac{a^2}{q^2}$ ex aequ. 47 quia 113 representat signum ambiguum. omne autem signum ambiguum in se ductum facit + ». Итак, число 113 означает «±». Данный способ записи разъясняется в первой части работы. Здесь речь идет об LH 35 XI, 6 л. 1—2 «29 мая 1678. О проведении наименьшей к коническому сечению, описанному в плоскости, из точки, данной в той же плоскости...» (29 Maji 1678 De Minima ad Conicam sectionem in plano descriptam ducenda a puncto dato in eodem plano...). Представляя некоторый отрезок EP как сумму или разность отрезков AE и AP , Лейбниц получает три случая:

	(8)
«В первом случае	EP aequ. $+ AE + AP$,
во втором случае	... — ... + ...,
в третьем случае	... + ... — ...

Итак, чтобы выразить величину EP в общем виде, воспользуемся следующим общеупотребительным методом, который я часто с успехом применял. Знак $+$ выразим каким-либо числом, скажем 1, знак же $-$ выразим другим числом, например 3, так что все три случая мы выразим одной и той же записью альтернативно следующим образом: $EP = + 131AE + 113AP$ (уравнение 9), где первое число всегда обозначает первый случай, второе — второй, третье — третий».

Этот способ записи на самом деле Лейбниц распространил даже на четыре случая в работе LH 35 XII, 1 л. 217: «29 мая 1678. Из данной точки провести наименьшую к данной конике. Задача, считавшаяся одной из труднейших, теперь наконец счастливейше решена. Заметка 1-я» (29 Maji 1678 Ex puncto dato minimam ducere in Conicam datam. problema inter difficillima habitum, nunc tandem felicissime solutum. Scheda 1^{ma}).

Из сказанного следует, во-первых, что в работе Сс 851 двузначные коэффициенты в смысле исчисления детерминантов не применяются и, во-вторых, что она была написана не в 1674 г., а в 1678 г., с использованием просто перечисляемых подряд фиктивных чисел, что мы можем наблюдать во многих рукописях этого времени.

В этой связи следует упомянуть рукопись на трех с половиной листах ин-фолио, которую Манке обнаружил во втором лейбницевском экземпляре книги Дж. Грегори (*Geometriae pars universalis*», принадлежавшем первоначально Гюйгенсу⁶⁷. Здесь, как говорит Манке, содержатся в основном вычисления, направленные на приведение любого уравнения конического сечения к виду

$$vv = rz + \frac{r}{t} zz,$$

причем коэффициенты различных уравнений Лейбниц вместо букв обозначает двумя цифрами. По справке Архива Лейбница в Ганновере эта рукопись вместе с работой Грегори была потеряна во время второй мировой войны. Так как Манке не дает никаких указаний относительно возможного времени ее возникновения, придется оставить открытым вопрос о том, какую связь имела она с упомянутыми работами из папок XI, 6, XII, 1 и XII, 2.

Недатированная рукопись LH 35 IV, 13 л. 21⁶⁸, которую Манке в другом месте ошибочно отнес к 1675 г.⁶⁹, появилась самое раннее в 1678 г., так как она непосредственно примыкает к датированной июнем 1678 г. статье LH 35 IV, 8 л. 1—2 и к работе LH 35 IV, 14 л. 5—6⁷⁰, которые — о чем мы здесь не можем говорить подробно⁷¹ — следует отнести к 1678—1680 гг.

Особый интерес представляют листы LH 35 XII, 2 л. 36—37-Сс 1066 В⁷². По данным Сс это должна быть часть одного послания датского математика Г. Мора к секретарю Королевского общества Г. Ольденбургу, которое содержало вычисления по уравнениям третьей степени и было написано, вероятно, 26.9. 1675 г. Эти листы согласно Сс являлись приложением к письму Ольденбурга Лейбницу от 30.9 (10.10) 1675 г.⁷³. Так как здесь с л. 36^v многократно используются двузначные фиктивные числовые коэффициенты, то датировка этих бумаг имеет большое значение.

В действительности данные Сс об этой рукописи совершенно не верны, хотя частично и основаны на правильных предпосылках. Верно, что Мор особо интересовался алгебраическими вопросами и уже в 1675 г. тесно сблизился с Чирнгаузом. Чирнгауз сообщил ему и — еще раньше — Г. Г. Шуллеру — свой метод решения уравнения третьей степени ⁷⁴. Мор, писавший по-голландски, отправил 16.9 (26.9). 1675 г. Дж. Коллинсу статью об извлечении кубического корня из бинома, копию которой Ольденбург 30.9 (10.10). 1675 г. выслал Лейбницу ⁷⁵. К этому письму, по данным Сс должна была быть приложена также работа Сс 1066 В.

Этому противоречит то обстоятельство, что Ольденбург ничего о ней не говорит, а главное — тот факт, что эти листы не имеют никакого отношения к уравнениям третьей степени, но содержат попытку решения задачи Альхазена. К тому, что рукопись была классифицирована упомянутым образом, привела, вероятно, неверная из-за голландского языка рукописи аннотация.

Кроме языка, нет других оснований связывать эту работу с именем Мора. Почерк принадлежит другому лицу, а не переписчику копии Сс 1066 А, и определенно отличается от почерка самого Мора. В сохранившейся, но до сих пор не опубликованной переписке между Мором и Лейбницем с 1677 по 1686 гг. нет речи ни о задаче Альхазена, ни тем более об исчислении разрядов (*Stellenkalkül*) * Лейбница, которое в этой работе используется как само собой разумеющееся. Это относится также к остальной переписке между Мором и Лейбницем, впервые, вероятно, познакомившимися лично весной 1676 г., — насколько о ней можно судить по другим источникам.

Кроме Мора, из корреспондентов следует принять во внимание прежде всего голландца И. Я. Фергюсона, переписка которого с Лейбницем, сохранившаяся и тоже до сих пор не опубликованная, приходится на 1681—1684 гг. Более тщательное сравнение почерков показывает, что хотя почти вся рукопись Сс 1066 В написана не Фергюсоном, но первые восемь строчек, в которых формулируется задача, принадлежат, несомненно, ему. Кем было

* Под «исчислением разрядов» подразумевается лейбницевский метод фиктивных числовых коэффициентов, приводивший его к результатам, в которых мы теперь узнаем теоремы теории определителей. (*Примеч. авт.*).

упомянутое другое лицо, я установить не смог. Правда, в переписке Лейбница с Фергюсоном также отсутствуют какие-либо ссылки на задачу Альхазена или на применение числовых коэффициентов.

Выяснению этого вопроса способствует ряд других рукописей. К Сс 1066 В непосредственно примыкают по своему содержанию листы LH 35 XII, 2 л. 27, 31, 32—33, 173—174, XV, 4 л. 3—4, 6—7. Лист XII, 2 f, 31 представляет собой сделанное Лейбницем точное латинское изложение решения, написанного по-голландски. Подробный анализ связей между этими заметками здесь невозможен. Лист 37^v заканчивается предложением: «Далее нужно сложить вместе эти 5 появляющихся уравнений» (*Wijders sal men dese 5 comende aequatien te samen adderen*).

В то время как в Сс эта статья названа «неполной», продолжение ее находится в папке LH 35 IX, 14: это листы 9—12. Их местонахождение там неслучайно, так как находящиеся перед ними листы 1—8 принадлежат лицу с тем же почерком и написаны приблизительно в 1678—1680 гг. Кутюра напрасно смешал их с находящимися там работами на латинском языке ⁷⁶. Таблицы, о которых он говорит, — это не что иное, как записанное дважды чрезвычайно длинное уравнение, получающееся сложением упомянутых пяти предыдущих. Единственное слово, которое здесь есть, — голландское «*comt*», т. е. приходит, появляется — им начинаются эти листы, — проливает дополнительный свет на истинную связь.

Поразительно, что ни в одной из цитированных рукописей Лейбниц не говорит о задаче Альхазена и не называет никого из трех математиков, занимавшихся ее решением несколькими годами ранее, — Барроу, Гюйгенс и Слюза. В этом состоит решающее отличие от работы Сс 1451, упомянутой в девятом параграфе. Там, как говорилось, Лейбниц специально дает конструктивное решение, без всяких вычислений.

В соответствии со сказанным получается следующая картина: по-видимому, приблизительно в 1678—1680 гг. Лейбниц, основываясь на своих конспектах, обсуждал с Фергюсоном задачу Альхазена. Фергюсон или кто-то из знакомых ему лиц записал начисто по-голландски то, что удалось получить на пути к решению в набросках или в беседе.

Можно с несомненностью доказать, таким образом, что обе рассмотренные выше группы рукописей, связанные с коническими сечениями и с задачей Альхазена, появились не ранее 1678 г. В то же время для недатированного «Краткого изложения арифметической квадратуры» (*Compendium quadraturae*) это сделать не удастся⁷⁷. Все же мне кажется очень сомнительным, что названное извлечение из его исследования о рациональной квадратуре круга Лейбниц сделал, как утверждает Гофман⁷⁸, еще в 1676 г. в Париже, поскольку оно содержит такую строку:

$$ax = 10a + 11ay + 12ay^2 + 13ay^3 + 14ay^4 \text{ etc.}$$

Ни в одной из сотен просмотренных мной заметок я не встретил и намека на то, что Лейбниц еще во время своего пребывания в Париже использовал вполне разработанные двойные индексы. Наоборот, все рукописные материалы, насколько я могу судить о них в целом, говорят о том, что в это время Лейбниц применял лишь простые «фиктивные коэффициенты», а двузначные символы, в которых левая цифра выражает принадлежность к уравнению, а правая — к степени неизвестного, он ввел только в 1678 г.

ПРИМЕЧАНИЕ

1. *Hofmann J. E.* Bericht über die Herausgabe der mathematisch-naturwissenschaftlich — technischen Reihen III und VII innerhalb der Leibniz — Ausgabe: Akten des Internationalen Leibniz — Kongresses Hannover, 14—19. November 1966, Bd. 3. Erkenntnislehre — Logik — Sprachphilosophie — Editionsberichte, Stud. Leibn. Suppl. Bd. 3. Wiesbaden, 1959, S. 230—232.
2. *Leibniz G. W.* Sämtliche Schriften und Briefe, hrsg. v. der Akademie der Wissenschaften der DDR, Bd. III, 1 Mathematischer naturwissenschaftlicher und technischer Briefwechsel 1672—1676 bearbeitet von J. E. Hofmann, Berlin 1976-LSB III, 1.
3. *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz II*, ed. A. Rivaud, Poitiers 1914—1924.
4. За просмотр этого каталога приношу благодарность г-ну Контро.
5. Издания, осуществленные названными исследователями, я сокращаю следующим образом: *K. R. Biermann*, Spezielle Untersuchungen zur Kombinatorik durch G. W. Leibniz (Forschungen und Fortschritte 30 (1956), S. 169—172)-Biermann; *Oeuvres de*

B. Pascal, publiées par Ch. Bossut, 5 v. Den Haag 1779 = = Bossut. Oeuvres de Blaise Pascal publiées... par L. Brunschvicg, P. Boutroux, F. Gazier, 14 v., Paris 1904—1914 (перепечатка Vaduz 1965)-PO; *P. Costabel*, Traduction française de notes de Leibniz sur les Coniques de Pascal (Revue d'Histoire des Sciences 15 (1962), p. 253—268)-Costabel; *L. Couturat*, Opusculs et fragments inédits de Leibniz, Paris 1903 (перепечатка Hildesheim 1966) = LFC; *C. I. Gerhardt*, Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz, Halle 1848 = Gerhardt 1848; он же, Brief an die Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin (Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1851, S. 341—358) = Gerhardt 1851; он же, Die Geschichte der höheren Analysis, 1. Abtheilung, Halle 1855 = Gerhardt 1855; *G. W. Leibniz*, Mathematische Schriften, hrsg. v. C. I. Gerhardt, Berlin — Halle 1849—1863, 7. Bd. (перепечатка Hildesheim 1962) = LMG; *C. I. Gerhardt*, Leibniz in London (Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin 1891, 1. Halbband, S. 157—175) = Gerhardt 1891 (1); он же, Leibniz und Pascal (Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin 1891, 2. Halbband, S. 1053—1068) = Gerhardt 1891 (2); он же, Desargues und Pascal über die Kegelschnitte (Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin 1892, 1. Halbband, S. 183—204) = Gerhardt 1892; *G. W. Leibniz*, Der Briefwechsel mit Mathematikern, hrsg. v. C. I. Gerhardt, Berlin 1899 (перепечатка Hildesheim 1962) = = LBG; *J. E. Hofmann*, Über frühe mathematische Studien von G. W. Leibniz (Stud. Leibn. 2 (1970), S. 81—114) = Hofmann 1970; он же, Bombellis Algebra — eine genialische Einzelleistung und ihre Einwirkung auf Leibniz (Stud. Leibn. 4 (1972), S. 196—252); Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik, Textband, hrsg. v. E. Knobloch, Stud. Leibn. Suppl. Bd. XVI, Wiesbaden 1976 = LKK; Der Beginn der Determinantentheorie, Leibnizens nachgelassene Studien zum Determinantenkalkül, Textband, hrsg. v. E. Knobloch, Arbor scientiarum, Reihe B, Bd. 2, Hildesheim 1977 = LDK; *L. Scholtz*, Die exakte Grundlegung der Infinitesimalrechnung bei Leibniz, Inaugural — Dissertation, Marburg 1934 = Scholtz Cc 497: LFC S. 149.
Cc 517: LBG S. 79
Cc 518: LKK Nr. 5.
Cc 519 A: LKK Nr. 3.
Cc 519 B: LKK Nr. 4.

- Сс 520 А, В: LKK Nr. 40.
Сс 544: Gerhardt 1891 (2), S. 1066—1067 (опубл. частично).
Сс 691: LSB III, 1 Nr. 29.
Сс 700 А, С: LSB III, 1 Nr. 1.
Сс 701: Сс — опубл. полный текст.
Сс 740: LKK Nr. 2.
Сс 772: LKK Nr. 1.
Сс 773₁: LSB III, 1 Nr. 39,1.
Сс 781: LSB III, 1 Nr. 8,1
Сс 782: LSB III, 1 Nr. 8,2
Сс 797 А, В: LSB III, 1 Nr. 39,2.
Сс 861 А: LMG 7, S. 249—260.
Сс 863 С: LFC S. 122—143.
Сс 863 D: LFC S. 97—122.
Сс 866: LFC S. 144—146.
Сс 898: LDK Nr. 33.
Сс 900: LKK Nr. 6.
Сс 935: LSB III, 1 Nr. 13,5.
Сс 991: В Сс опубликован полный текст.
Сс 1031: LMG 7, S. 138—154; LBG S. 550—564.
Сс 1032: LSB III, 1 Nr. 96,1.
Сс 1037: LDK Nr. 18.
Сс 1042: LSB III, 1 Nr. 96,2
Сс 1043: LSB III, 1 Nr. 96,2.
Сс 1044: LSB III, 1 Nr. 96,3.
Сс 1048: Hofmann 1972, S. 230—237 (опубликовано частично).
Сс 1077: Hofmann 1970, S. 104.
Сс 1079: LKK Nr. 11.
Сс 1080: LKK Nr. 11.
Сс 1089: Gerhardt 1851, S. 344—346; Gerhardt 1855, S. 117—119; LBG S. 147—149.
Сс 1090: Gerhardt 1851, S. 346—348; Gerhardt 1855, S. 119—121; LBG S. 149—151.
Сс 1092: Gerhardt 1851, S. 348—354; Gerhardt 1855, S. 121—127; LBG S. 151—156.
Сс 1106₁: Gerhardt 1851, S. 354—358; Gerhardt 1855, S. 127—131; LBG S. 157—160.
Сс 1120: Gerhardt 1848, S. 32—40; Gerhardt 1855, S. 132—139; LBG S. 161—167.
Сс 1125: Gerhardt 1848, S. 46—48 (опубликовано частично).
Сс 1131: Gerhardt 1848, S. 41—45.

- Сс 1138: LSB III, 1 Nr. 96,2.
 Сс 1145: LSB III, 1 Nr. 69,3.
 Сс 1146 B: LSB III, 1 Nr. 69,4.
 Сс 1147 A: LSB III, 1 Nr. 69,2.
 Сс 1147 B: LSB III, 1 Nr. 69,5.
 Сс 1148: LSB III, 1 Nr. 69,2.
 Сс 1149: LSB III, 1 Nr. 69,5.
 Сс 1224 A: LMG 7, S. 316—326.
 Сс 1224 D: Gerhardt 1891 (1), S. 167—175.
 Сс 1229: LSB III, 1 Nr. 72,3.
 Сс 1230: LSB III, 1 Nr. 73,2.
 Сс 1231: LSB III, 1 Nr. 73,3.
 Сс 1232: LMG 5, S. 93—98.
 Сс 1233 E: Scholtz, S. 41—72 (опубликовано частично).
 Сс 1233 F: Scholtz, E Tafeln im Anhang (опубликовано частично).
 Сс 1281: Biermann, S. 170 (опубликовано частично).
 Сс 1292: PO II, S. 232—233; Costabel Hs. C.
 Сс 1297: LDK Nr. 19.
 Сс 1305: LKK Nr. 41.
 Сс 1342: LKK Nr. 42.
 Сс 1344: LSB III, 1, Nr. 96,2.
 Сс 1360: LMG, 5, S. 216.
 Сс 1377: PO II, S. 233 (опубликовано частично).
 Сс 1452: Gerhardt 1848, S. 49—50.
 Сс 1483 A: Gerhardt 1848, S. 51—54; LBG S. 201—203.
 Сс 1495: PO I, S. 243—260.
 Сс 1496: PO II, S. 229—231; Costabel Hs. B.
 Сс 1497: Gerhardt 1892, S. 196—197.
 Сс 1498: PO II, S. 227—228; Costabel Hs. A.
 Сс 1499: Gerhardt 1892, S. 197—202; LBG S. 135—140; PO II, S. 234—243.
 Сс 1500 A: PO III, S. 305—308.
 Сс 1500 B: Bossut Bd. 4, S. 408—411.
 Сс 1501: Gerhardt 1892; S. 202—204; Costabel Hs. D. (опубликовано частично).

Дополнительно: LH 35 V, 12 Bl. 3—4: Gerhardt 1848, S. 56—59; Gerhardt 1855, S. 140—142; LBG S. 229—231.

LH 35 VIII, 17 Bl. 1: Gerhardt 1848, S. 54—56; LBG S. 228—229.

LH 35 XII, 1 Bl. 17: LKK Nr. 39.

LH 35 XII, 1 Bl. 232—233: LKK Nr. 46.

6. Подробнее об этом см.: *Knobloch E.* Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik, Stud. Leibn. Suppl.

XI. Wiesbaden 1973, S. 177f.

7. Соответствующие исправления сделаны прежде всего Гофманом в LSB III, 1, с. 737—743, в допечатанных на машинке дополнениях к Сс (см. экземпляр Архива Лейбница в Ганновере) и в «Хронологическом каталоге» (картотеке). Данные последних двух источников, вообще говоря, не обоснованы и поэтому должны использоваться с осторожностью. Например, работа Сс 520 А относится якобы к 1676 г., а Сс 520 В — примерно к 1674 г. Но обе рукописи первоначально составляли один лист и, без сомнения, появились в одно время (см. Knobloch (6), с. 173—178). Поскольку передатировки в обоих этих источниках не опубликованы, приведем их здесь:

Сс 496: около 1676; 497: около 1675; 507: около 1675; 519 А, В: около 1676; 520 А: 1676; 520 В: ок. 1674; 531 В: 1676; 535: 1675; 544: январь 1676 (Hofmann LSB III, 1, S. 737 предлагает датировать маем 1673); 546; ок. 1674; 556: 1676; 628: 1676; 642: ок. 1676; 722: ок. 1675; 723 В: ок. 1675; 725: ок. 1676; 726: ок. 1676; 765: ок. 1675; 792: 1675; 796 В: апрель 1676; 854 Е: ок. 1675; 855А: 1676; 857; ок. 1676; 860: середина 1676; 861 А: 1676; 863 G: 1675; 863 Н: ок. 1675; 1014 В: ок. 1675; 1040: ок. 1676; 1066 В: 1678; 1102: середина 1676; 1181: 1676; 1182: 1676; 1240 А, В: середина 1676; 1402: ок. 1675; 1406: ок. 1675; 1545: ок. 1675; 1565: ок. 1675. Более не датируются периодом 1672—1676: Сс 817: 1671; 1543: ок. 1700; 1548: ок. 1680; 1551: ок. 1695.

Мы не упомянули работу Сс 851, вопрос о правильной датировке которой подробно рассматривается в «Приложении» к нашей статье. Обзор рукописей, очевидно относящихся к 1672—1676 гг., но не учтенных в Сс, дан в конце статьи.

8. LSB III, 1, S. 119 и LSB III, 1, S. 333.
9. Подробнее об этом см. в «Приложении» и в готовящемся труде «Der Beginn der Determinantentheorie — Leibnizens nachgelassene Studien zum Determinantenkalkül», Abhandlungsband, Hil-des heim.
10. LKK (см. примеч. 5), Nr. 18.
11. z. B. LH 35 XI, 6 Bl. 1—2; XII, 1 Bl. 210—211, Bl. 217; Сс 851.
12. Подробнее см.: J. E. Hofmann. Leibniz in Paris 1672—1676, His growth to mathematical maturity, Cambridge, 1974.
13. A. Arnould. Nouveaux élémens de Géometrie, Paris 1667 (Paris ² 1685, Den Haag ³ 1690); H. Fabri, Synopsis geometrica, Lyon 1669; Chr. Huygens, De circuli magnitudine inventa, Leiden 1654 = Oeuvres complètes de Christiaan Huygens, publ. par la Société hollandaise des sciences, Den Haag 1888—1950, 22 v.

- (частичн. перепечатка 1967), v. 12, S. 91—181; *J. Gregory*, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, Padua 1667; *J. B. Morin*, *Longitudinum terrestrium nec non coelestium, nova et hactenus optata scientia*, Paris 1634.
14. Сс S. 48, 238.
 15. *R. Fr. de Sluse*, *Mesolabum*, Lüttich 1659 (²1668); о «Письме о касательных» см. в LSB III, 1, S. 32; *R. Bombelli*, *L'algebra*, Bologna 1572 (2. Auflage 1579); *J. Prestet*, *Elémens des Mathématiques*, Paris 1675.
 16. *P. Courcier*, *Supplementum sphaerometriae*, Pont — à -- Mousson 1675; *P. Mengoli*, *Circolo*, Bologna 1672.
 17. LSB III, 1, S. 73—78.
 18. LSB III, 1, S. 1—20.
 19. LKK S. 19.
 20. LMG Bd. 5, S. 392.
 21. LKK S. 260.
 22. Oldenburg — Leibniz 4.7.1675, LSB III, 1, S. 262 und S. 269; об алгебраическом инструменте Лейбница см.: *J. E. Hofmann*, *Über frühe mathematische Studien von G. W. Leibniz*, in: *Stud. Leibn.* 2 (1970), S. 101—109.
 23. Например, LKK Nr. 46; LDK Nr. 2, 7, 24, 27, 28, 30, 35, 36, 46, 49; LH 35 XII, 1 Bl. 303—304; XIV, 1 Bl. 244; *E. Knobloch*, *Die entscheidende Abhandlung von Leibniz zur Theorie linearer Gleichungssysteme*, in: *Stud. Leibn.* 4 (1972), S. 177; G. W. Leibniz, *Ein Dialog zur Einführung in die Arithmetik und Algebra*, nach der Originalhandschrift hrsg., übersetzt und kommentiert von E. Knobloch, Stuttgart — Bad Canstatt 1976, S. 73.
 24. См. *D. Mahnke*, *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis* (Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys. — math. Klasse, 1925, Nr. 1, Berlin 1926, 60f.).
 25. Например, LMG Bd. 5, S. 360; LMG Bd. 7, S. 59, 191—193, 197; LKK S. 24, 190; LDK Nr. 35, 48; *G. W. Leibniz*, *Ein Dialog zur Einführung in die Arithmetik und Algebra* (см. прим. 23), S. 151; LH 35 XII, 2 Bl. 46—47 (Bl. 46^r); LH 35 XIII, 2b Bl. 164—165 (Bl. 164^r), Bl. 196.
 26. *G. W. Leibniz*, *Dissertation de arte combinatoria*, Leipzig 1666 (перепечатка Frankfurt/M. 1690) = LSB VI, 1, S. 163—230.
 27. *B. Pascal*, *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*, Paris 1665 = PO III, S. 433—593.
 28. LKK Nr. 6.
 29. Подробнее см. *E. Knobloch*, *Die mathematischen Studien von*

- G. W. Leibniz zur Kombinatorik, Stud. Leibn. Suppl. XI, Wiesbaden 1973, S. 178—190.
30. LKK Nr. 46.
 31. Подробнее см. *K. R. Biermann*, Eine Untersuchung] von G. W. Leibniz über die jährliche Sterblichkeitsrate (Forschungen und Fortschritte 29 (1955), S. 205—208).
 32. *J. Graunt*, Natural and political observations made upon the bills of mortality, 1662, Oxford 1665.
 33. О работах Лейбница по теории вероятностей см. список статей К. Р. Бирмана в Knobloch (см. примеч. 29) S. 259—260.
 34. Подробнее см. *K. R. Biermann* и *M. Faak*, G. W. Leibniz, «De incerti aestimatione» (Forschungen und Fortschritte 31 (1957), S. 45—50).
 35. *J. E. Hofmann*, Leibniz und Ozanams Problems, drei Zahlen so zu bestimmen, dass ihre Summe eine Quadratzahl und ihre Quadratsumme eine Biquadratzahl ergibt (Stud. Leibn. 1 (1969), S. 107).
 36. *J. E. Hofmann*, Zur Geschichte des sogenannten Sechsquadratproblems (Mathematische Nachrichten 18 (1958), S. 156).
 37. LKK Nr. 40 (S. 260).
 38. *Hofmann* (см. примеч. 12), Leibniz in Paris, S. 94.
 39. LSB III, 1, S. 625.
 40. LDK Nr. 18.
 41. LSB III, 1, Nr. 96, 2.
 42. *Hofmann* (см. примеч. 12), Leibniz in Paris, S. 159.
 43. LDK Nr. 19.
 44. The mathematical papers of Isaac Newton, edited by D. T. Whiteside, v. 5, Cambridge 1972, p. 118.
 45. LKK Nr. 46; LDK Nr. 17, 50, 65; *G. W. Leibniz*, Ein Dialog zur Einführung in die Arithmetik und Algebra (см. прим. 23), S. 35; LH 35 XII, 2 Bl. 185—186, XIII, 1 Bl. 350—351, Bl. 389—390.
 46. LMG Bd. 5, S. 168—171.
 47. LMG Bd. 5, S. 141—168.
 48. Подробнее см. *D. Mahnke*, Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis (см. примеч. 24) S. 31ff.
 49. *B. Pascal*, Lettres de A. Dettonville contenant quelques unes de ses inventions de géometrie, Paris 1659; *G. Desargues*, Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan, Paris 1639; см. *Hofmann*, Leibniz in Paris (прим. 12), S. 54ff.
 50. *C. I. Gerhardt*, Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz (см. примеч. 5), S. 49—50.

51. Подробнее см.: *D. Mahnke*, Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis (см. примеч. 24), S. 43—48, 52—59.
52. Назовем резюмирующую различные исследования по этому вопросу статью: *Chr. J. Scriba*, The inverse method of tangents: A dialogue between Leibniz and Newton (1675—1677) (Archive for History of Exact Sciences 2 (1964), p. 113—137).
53. LSB III, 1, S. 558—586.
54. *Hofmann* (см. примеч. 12), Leibniz in Paris, S. 71.
55. Кроме рукописей, упомянутых в примеч. 11, назовем, для примера, LH 35 XII, 1 Bl. 214—215; XII, 2 Bl. 64—65, 109; XIII, 1 Bl. 31—32.
56. *Chr. Huygens*, Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum... demonstrationes geometricae, Paris 1673 = Oeuvres complètes (см. примеч. 13). Bd. 18, Den Haag 1934 (перепечатка 1967), S. 27—368.
57. *E. Knobloch*, Die entscheidende Abhandlung von Leibniz zur Theorie linearer Gleichungssysteme (Stud. Leibn. 4 (1972), S. 163—180); он же, Studien von Leibniz zum Determinantenkalkül (Akten des II. Internationalen Leibniz — Kongresses Hannover, 17. — 22. Juli 1972, Bd. 2 Wissenschaftstheorie und Wissenschaftsgeschichte, Wiesbaden 1974, S. 37—45); он же, Unbekannte Studien von Leibniz zur Eliminations — und Explikationstheorie (Archive for History of Exact Sciences 12 (1974), S. 142—173).
58. Сс 1066 В; *D. Mahnke*, Die Indexbezeichnung bei Leibniz als Beispiel seiner kombinatorischen Charakteristik (Bibl. math. (3) 13 (1912/13), S. 254) для рукописи LH 35 IV, 13 Bl. 21 = = LDK Nr. 24; *J. E. Hofmann*, Leibniz in Paris (см. примеч. 12), S. 72 Anm. 46, S. 238 Anm. 29 для «Compendium quadraturae arithmeticae» (LMG Bd. 5, S. 99—113); датировка «осень 1678» на стр. 355 является опечаткой; LSB III, 1, S. XXXI.
59. *L. Couturat*, La logique de Leibniz, Paris 1901 (перепечатка Hildesheim 1969), S. 479.
60. См. примеч. 51.
61. *G. Eneström*, Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors «Vorlesungen über Geschichte der Mathematik» (Bibl. math. (3) 11 (1910/11), S. 170—171).
62. *D. Mahnke*, Die Indexbezeichnung bei Leibniz als Beispiel seiner kombinatorischen Charakteristik (см. примеч. 58), S. 253.
63. LKK Nr. 6.
64. LKK S. 21.
65. LDK Nr. 18.
66. *Hofmann* (см. примеч. 12) Leibniz in Paris, S. 338; LSB III, 1, S. LVII, 254.

67. *D. Mahnke*. Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der Höhe *en Analysis* (см. примеч. 24), S. 30; *J. Gregory*, *Geometriae pars universalis*, Padua 1668.
68. LDK Nr. 24.
69. *D. Mahnke*, Die Indexbezeichnung bei Leibniz als Beispiel seiner kombinatorischen Charakteristik (см. примеч. 58), S. 254.
70. LDK Nr. 2 bzw. Nr. 4.
71. Подробнее об этом — в работе, указанной в примеч. 9.
72. LDL Nr. 5.
73. LSB III, 1, S. 286—302.
74. *Hofmann*, (см. примеч. 12), *Leibniz in Paris*, S. 171.
75. LSB III, 1, S. 291—299.
76. *Couturat* (см. примеч. 5), *Opuscles et fragments inédits de Leibniz*, S. 586. 'Math., IV, 14, b.
77. LMG Bd. 5, S. 99—113.
78. См. примеч. 58.

**Сводный список математических рукописей Лейбница,
относящихся к 1672—1676 гг.**

Из Сс берем: Сс 277—280, 339, 437, 495—498, 500—507, 510—528, 530—539, 544—564, 575, 607—642, 591—717, 719—740, 742—747, 753—773, 773₁, 775—782; 786—794, 797, 801, 814—816, 818—821, 823, 824, 827—834, 839—849₁, 849₂, 850, 852—868, 883, 890—906, 908—912, 915, 923—925, 928, 929, 935—940, 960—963, 980, 981, 983, 985, 986, 988—991, 998—1044, 1048, 1061, 1063, 1068—1074, 1076, 1077, 1079—1081, 1085—1087, 1089—1098, 1101—1103, 1104₂, 1106₁, 1110, 1112, 1114—1116, 1118—1120, 1125—1128, 1131, 1132, 1134—1140, 1144—1152, 1154, 1155, 1157, 1161—1170, 1174—1176, 1180—1186, 1195—1202, 1203₁, 1205—1212, 1224, 1229—1251, 1253, 1254, 1259, 1277, 1278, 1280—1297, 1303, 1305, 1306, 1310, 1311, 1334—1344, 1350, 1359—1362, 1368, 1375—1378, 1382—1386, 1389, 1390, 1398—1403, 1406, 1411—1413, 1418—1422, 1425—1430, 1432—1435, 1437, 1438, 1449—1455, 1458—1475, 1482—1489, 1495—1501, 1508, 1511—1515, 1517, 1519, 1520, 1528, 1540—1543, 1545—1550, 1552, 1553, 1555, 1565.

Дополнительно — при условии правильной датировки — следующие 43 фрагмента: LH 4 I, 14 с Bl. 1—2; V 10 Bl. 52, 65; LH 35 1,5 Bl. 24, 25, I, 9, Bl. 27, 28; II, 1 Bl. 2, 77, 120, 179, 177 + 181; 178, 197 + 207, 317; IV 4, Bl. 20; V, 12 Bl. 3—4; VIII, 13 Bl. 82—85; VIII, 17 Bl. 1; VIII, 19 Bl. 1—2; VIII, 23 Bl. 1—2; VIII, 30 Bl. 18; XII, 1 Bl. 6, 7, 17, 137, 190—191, 232—233, 323, 343; XII, 2 Bl. 13, 14, 26, 85, 88, 99, 112; XIII, 1 Bl. 227; XV, 3 без номера листа рукопись между листами 14 и 14а (14, 14а); XV, 5 Bl. 6; LBr 695 Bl. 66;

Ms IV 379a. Даже если иной раз упорядочение не выполняется однозначно, то все же перечисленные фрагменты могут быть распределены по названным выше одиннадцати группам следующим образом:

1. Выписки, записи бесед, мнения о математиках и математических работах: Сс 339, 495, 496, 500, 501, 503—507, 544, 612, 616, 618, 619, 635A, 850, 883, 908, 935, 936, 981, 1048, 1170, 1278, 1292, 1350, 1383, 1495—1501, 1549, 1553, 1555.

Дополнительно: LH 35 I, 9 Bl. 28; IV, 4 Bl. 20; VIII, 17 Bl. 1; VIII, 19 Bl. 1—2; VIII, 23 Bl. 1—2; XV, 3 без номера листа (разрозненная рукопись между листами 14 и 14a); XV, 5 Bl. 6.

2. Последовательности, ряды, исчисление конечных разностей: Сс 278—280, 437, 510—517, 523, 526—528, 530, 554, 556, 622, 629, 633, 634, 700, 755, 756, 775—780, 792, 820, 892, 915, 1139, 1180—1186, 1200, 1206, 1207, 1210, 1239, 1241, 1243, 1303, 1334—1341, 1398, 1400, 1401, 1403, 1425, 1453, 1455, 1458, 1459, 1467, 1468, 1486, 1511—1513, 1515, 1542.

Дополнительно: LH 35 II, 1 Bl. 179; XII, 1 Bl. 6, 7, 137; XII, 2 Bl. 88, 99; LBr 695 Bl. 66.

3. Заметки по истории науки: Сс 552, 793, 794, 991, 1044, 1097, 1224.

Дополнительно: LH 35 VIII, 13 Bl. 82—85.

4. Вопросы оснований и общие методические вопросы: Сс 538, 698, 740, 770, 772, 815, 816, 818, 819, 827, 842, 862—866, 898, 899, 1044, 1069, 1077, 1118, 1311, 1359—1361, 1402, 1546.

Дополнительно: LH 4 I, 14c Bl. 1—2; V 10, Bl. 52; LH 35 II, 1 Bl. 2.

5. Комбинаторика, теория вероятностей: Сс 518—520, 900, 909, 1079, 1197, 1259, 1281, 1342, 1344, 1384.

Дополнительно: LH 35 XII, 1 Bl. 17, 232—233; Ms IV 379a.

6. Учение о числе и теория чисел: Сс 521, 703—717, 719—730, 742—744, 757—759, 764, 779, 781, 782, 893, 894, 928, 929, 961, 962, 983, 1061, 1145—1151, 1201, 1211, 1248, 1253, 1254, 1282, 1289, 1305, 1306, 1310, 1343, 1368, 1375, 1376, 1378, 1382, 1385, 1390, 1406, 1520.

Дополнительно: LH 35 VIII, 30 Bl. 18; XII, 1 Bl. 190—191; XII, 2 Bl. 13, 14.

7. Алгебра: Сс 277, 497, 498, 553, 731—739, 745—747, 753, 754, 762, 763, 765, 766, 769, 771, 788—790, 821, 834, 848, 868, 890, 910—912, 923, 924, 937, 938, 960, 963, 980, 985—990, 998—1043, 1093, 1094, 1104₂, 1136, 1138, 1161—1163, 1168, 1169, 1174—1176, 1198, 1199, 1212, 1293, 1294, 1296, 1297, 1411B, 1418, 1528, 1540, 1552, 1565.

8. Геометрия (без инфинитезимальной геометрии): Сс 531—537, 539, 550, 551, 611, 615, 699, 760, 761, 814, 827, 1070, 1096, 1152, 1154, 1155, 1168, 1169, 1205, 1249, 1283, 1287, 1291, 1413, 1433—1435,

1451, 1457, 1545, 1550.

Дополнительно: ЛН 4 V, 10 Bl. 65; ЛН 35 I, 5 Bl. 24, 25; I, 9 Bl. 27; XII, 2 Bl. 26, 85.

9. Открытие исчисления бесконечно малых, теория интегрирования (без геометрии кривых, дифференциальной геометрии и дифференциальных уравнений): Сс 522, 524, 525, 544—549, 551, 555, 557—561, 563, 564, 607, 608, 617, 620, 621, 623—625, 628, 630, 638, 639, 641, 642, 691—697, 702, 767, 768, 773₁, 797, 801, 841, 891, 895—897, 1068, 1076, 1086, 1089, 1090, 1092, 1102, 1106₁, 1119, 1126—1128, 1140, 1157, 1164—1167, 1195, 1196, 1202, 1229—1238, 1240, 1242, 1244—1247, 1251, 1286, 1288, 1304, 1411; 1412, 1419—1421, 1426—1429, 1432, 1438, 1449, 1450, 1452, 1456, 1460—1463, 1471—1475, 1485, 1488, 1514, 1517, 1519, 1541.

Дополнительно: ЛН 35 II, 1 Bl. 77, 120, 177 + 181, 197 + 207, 317; V, 12 Bl. 3—4; XII, 1 Bl. 343; XIII, 1 Bl. 227.

10. Исследования по обратному методу касательных (решение дифференциальных уравнений): Сс 575, 614, 625—627, 791, 820, 823, 824, 830, 832, 833, 839—846, 849₁, 903—906, 1120, 1125, 1131, 1250, 1290, 1470, 1482—1484.

11. Геометрия кривых и дифференциальная геометрия: Сс 547—549, 562, 609, 610, 612, 613, 627, 631, 632, 636, 637, 640, 691, 695, 697, 701, 773, 775 A, 786—788, 827—829, 831, 832, 847, 849₂, 852—862, 864, 865, 867, 901, 902, 906, 925, 939, 940, 1063, 1071—1074, 1081, 1085, 1087, 1091, 1095, 1098, 1101, 1103, 1110, 1112—1116, 1132, 1134, 1135, 1137, 1144, 1157, 1203₁, 1208, 1209, 1277, 1280, 1284, 1285, 1288, 1295, 1362, 1377, 1386, 1389, 1399, 1422, 1426, 1430, 1437, 1454, 1464—1466, 1469, 1487, 1489, 1508, 1547.

Дополнительно: ЛН 35 II, 1 Bl. 178; XII, 1 Bl. 323; XII, 2 Bl. 112.

ОБЩИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ В «АРИФМЕТИКЕ» ДИОФАНТА

Е. И. Славутин

Утверждение о наличии в «Арифметике» Диофанта общих методов решения неопределенных уравнений, в частности уравнений второй степени, не является чем-то само собой разумеющимся. С начала XIX до середины XX в. среди историков математики складывалось и постепенно укреплялось мнение, что «Арифметика» представляет собой довольно случайное собрание задач, каждая из которых решается своим искусным и даже «искусственным» приемом. Наиболее резко взгляд на этот вопрос высказал в свое время Г. Ганкель, утверждавший, что «современному математику после 100 решений Диофанта трудно решить 101-ю задачу» [1, с. 165]. Подобные суждения мы находим также у таких крупных историков математики, как О. Беккер, И. Гофман [2, с. 90] и ван дер Варден [3, с. 375]. Исключение составляет лишь замечание Г. Г. Цейтена [4, с. 171] о том, что Диофант знал общий прием решения уравнений вида

$$y^2 = ax^2 + bx + c,$$

если либо a , либо c являются полными квадратами. Лишь в недавних работах И. Г. Башмаковой [5—7] было доказано, что Диофант владел общими методами нахождения рациональных решений уравнений

$$f_2(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad f_3(x, y) = 0,$$

где $f_2(x, y)$ и $f_3(x, y)$ — неприводимые многочлены второй и третьей степени над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Более того, в этих исследованиях было установлено также, что общие методы Диофанта имеют, в сущности, алгебро-геометрическую природу, хотя и применяются в «Арифметике» в чисто алгебраической форме.

Именно то обстоятельство, что алгебро-геометрическое содержание алгебраических по форме построений Диофанта оставалось вне поля зрения таких крупных специалистов, как, например, Гофман и ван дер Варден, опре-

делило существовавшую трактовку «Арифметики». За внешним разнообразием задач, алгебраических преобразований и арифметических выкладок терялись или оставались в тени общие методы, понимание которых позволяет увидеть единообразие хода решения специально подобранных однотипных задач. Алгебро-геометрическая трактовка вопроса, предложенная впервые И. Г. Башмаковой, показывает, что основу «Арифметики» составляет подавляющее большинство задач, иллюстрирующих применение общих методов, а искусственные приемы являются на самом деле довольно редкими исключениями.

В настоящей работе, продолжая исследования И. Г. Башмаковой, мы рассмотрим полный цикл задач «Арифметики», сводящихся к неопределенным уравнениям второй степени, и покажем, что Диофант владел общим методом их решения в рациональных числах.

Интересующий нас метод использован в «Арифметике» при решении около 40 задач, расположенных в основном во II и III книгах. Это почти четверть всех задач сборника¹.

Общая задача, разнообразные частные случаи которой Диофант решает одним и тем же методом, состоит в следующем.

Пусть

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1)$$

— уравнение второй степени от n неизвестных, имеющее рациональное решение $x_1 = a_1^0, \dots, x_n = a_n^0$, тогда ищется еще одно рациональное решение $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$, удовлетворяющее условию *положительности* $a_1 > 0, \dots, a_n > 0$. Исходное рациональное решение $x_1 = a_1^0, \dots, x_n = a_n^0$ явно указано лишь в трех задачах (II₉, лемма 2 к VI₁₂ и лемма к VI₁₅), в которых оно удовлетворяет условию положительности. В остальных задачах исходное решение не удовлетворяет условию положительности, а поэтому не может быть указано Диофантом в явном виде, так как числовая область, в которой он ищет решение, — положительные рациональные числа, однако *неявно*, как мы увидим ниже, оно всегда используется при решении.

¹ Мы здесь и далее имеем в виду только дошедший до нас на греческом языке текст шести книг, оставляя в стороне вопрос о недавно найденных Р. Рашедом арабских текстах.

К этой общей задаче в «Арифметике» приводятся два класса задач.

К первому классу относятся задачи, в которых прямо решается уравнение вида (1). Ко второму — задачи, в которых решаются системы уравнений второй степени от двух групп неизвестных вида

$$F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0,$$

$$F_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0,$$

сводящиеся после эквивалентных преобразований к системам вида

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ y_i &= G_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, m), \end{aligned} \quad (2)$$

где первое уравнение — в дальнейшем мы будем называть его *основным* — удовлетворяет тем же условиям, что и уравнение (1). Легко видеть, что решение системы (2) равносильно решению основного уравнения. Рассмотрим сначала первый класс задач. Наиболее подробно и последовательно в «Арифметике» разработан случай решения неоднородных уравнений второй степени от двух неизвестных. Диофант начинает с простейшего случая, который он рассматривает в первых пяти задачах книги II:

$$\text{II}_1 \quad x_1^2 + x_2^2 = a(x_1 + x_2),$$

$$\text{II}_2 \quad x_1^2 - x_2^2 = a(x_1 - x_2),$$

$$\text{II}_3 \quad x_1 x_2 = a(x_1 \pm x_2),$$

$$\text{II}_4 \quad x_1^2 + x_2^2 = a(x_1 - x_2),$$

$$\text{II}_5 \quad x_1^2 - x_2^2 = a(x_1 + x_2).$$

Все эти уравнения характеризуются тем, что свободный член в каждом из них равен нулю, поэтому они имеют очевидное решение $x_1 = 0, x_2 = 0$. Однако это решение не является решением для Диофанта, ибо оно не удовлетворяет условию положительности.

Для отыскания положительного решения Диофант делает подстановку

$$x_1 = t, \quad x_2 = kt,$$

где во всех случаях он полагает $t = 2$, так как не имеет символа для обозначения числового параметра.

Далее, например, в случае Π_1 подстановка (3) приводит к уравнению

$$(1 + k^2) t^2 = a (1 + k) t,$$

откуда

$$x_1 = t = \frac{a(1+k)}{1+k^2}, \quad x_2 = k \frac{a(1+k)}{1+k^2},$$

т. е. неизвестные выражаются как рациональные функции параметра k . Верно и обратное. Параметр $k = x_2/x_1$, т. е. рационально выражается через неизвестные x_1 и x_2 .

Решение задач Π_{2-5} совершенно аналогично Π_1 .

Переведем построение Диофанта на алгебро-геометрический язык.

Уравнения Π_{1-5} задают на аффинной плоскости A_Q^2 кривую L второго порядка, на которой лежит рациональная точка $M(0, 0)$. Подстановка (3) равносильна проведению через точку M пучка прямых $x_2 = kx_1$, каждая из которых при рациональном угловом коэффициенте k пересечет кривую L еще в одной и только в одной рациональной точке, отвечающей найденному Диофантом решению.

С современной точки зрения построение Диофанта есть установление бирационального изоморфизма кривой второго порядка (окружности в случаях $\Pi_{1,4}$ и гиперболы в случаях $\Pi_{2,3,5}$) и аффинной прямой A_Q^1 .

Метод решения уравнений второй степени с двумя неизвестными, но уже с ненулевым свободным членом Диофант развивает в задачах

$$\Pi_8 \quad x_1^2 + x_2^2 = a^2, \quad a = 4,$$

$$\Pi_9 \quad x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2, \quad a = 2, \quad b = 3,$$

$$\text{Лемма 2 к VI}_{12} \quad 3x_1^2 + 6 = x_2^2,$$

$$\text{Лемма к VI}_{15} \quad 3x_1^2 - 11 = x_2^2.$$

В задаче Π_8 неявно используется, что $x_1 = 0, x_2 = -4$ является исходным рациональным решением. В трех последних задачах Диофант явно указывает исходное рациональное решение: $x_1 = 2, x_2 = 3$, в $\Pi_9, x_1 = 1, x_2 = 3$ в лемме 2 к $\text{VI}_{12}, x_1 = 5, x_2 = 8$ в лемме к VI_{15} .

По исходному рациональному решению Диофант образует подстановки:

$$x_1 = t, \quad x_2 = 2t - 4 \quad (\text{задача II}_8),$$

$$x_1 = t + 2, \quad x_2 = 2t - 3 \quad (\text{задача II}_9),$$

$$x_1 = t + 1, \quad x_2 = 3 - 3t \quad (\text{лемма 2 к VI}_{12}),$$

$$x_1 = t + 5, \quad x_2 = 8 - 2t \quad (\text{лемма к VI}_{15}),$$

с помощью которых точно так же, как в задачах II₁₋₅, приходит к решению.

С алгебро-геометрической точки зрения здесь Диофант делает то же самое, что и в задачах II₁₋₅, однако вид подстановок при переходе от задачи к задаче постепенно усложняется.

Следующая группа задач

$$\text{II}_{10} \quad x_1^2 - x_2^2 = A, \quad A = 60;$$

$$\begin{aligned} \text{II}_{11} \quad y + a &= x_1^2, \\ y + b &= x_2^2, \quad a = 2, \quad b = 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II}_{12} \quad a - y &= x_1^2, \\ b - y &= x_2^2, \quad a = 9, \quad b = 24; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II}_{13} \quad y - a &= x_1^2, \\ y - b &= x_2^2, \quad a = 6, \quad b = 7 \end{aligned}$$

сводится к решению одного и того же основного уравнения

$$x_1^2 - x_2^2 = A.$$

Действительно, три последних системы после исключения неизвестной y в одном из уравнений преобразуются в системы

$$\begin{aligned} \text{II}'_{11} \quad x_2^2 - x_1^2 &= A, \\ y &= x_1^2 - a, \quad A = b - a; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II}'_{12} \quad x_2^2 - x_1^2 &= A, \\ y &= a - x_1^2, \quad A = b - a; \end{aligned}$$

$$\Pi_{13}^4 \quad x_2^2 - x_1^2 = A, \\ y = x_1^2 + a, \quad A = a - b,$$

решение которых равносильно решению основного уравнения

$$x_1^2 - x_2^2 = A.$$

Это уравнение решается при помощи подстановок

$$x_1 = t + 3, \quad x_2 = t \quad (\Pi_{10}'),$$

$$x_1 = t, \quad x_2 = t - 4 \quad (\Pi_{11}'),$$

$$x_1 = t, \quad x_2 = t - 4 \quad (\Pi_{12}'),$$

$$x_1 = t, \quad x_2 = t - 2 \quad (\Pi_{13}').$$

В задачах $\Pi_{11,13}$ предложено еще одно решение, основанное на применении тождества

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 = a_1 a_2,$$

которое мы находим также в предложении 5 книги II «Начал» Евклида. Выбирая a_1 произвольно и полагая $a_2 = A/a_1$, он находит

$$x_1^2 = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2, \quad x_2^2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$$

в задаче Π_{11} и

$$x_1^2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2, \quad x_2 = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2$$

в задаче Π_{13} .

Если при 1-м способе решения положить $x_1 = t$, $x_2 = t - a_1$, то мы получим то же самое решение, что и при 2-м способе решения. Именно так поступает Диофант, пользуясь при 1-м способе решения задач $\Pi_{11, 13}$ подстановками $x_1 = t$, $x_2 = t - 4$ и $x_1 = t$, $x_2 = t - 2$, а при 2-м способе решения полагая $a_1 = 4$ и 2.

Можно поставить вопрос: почему в этих задачах Диофант дает два решения? Видимо, это объясняется тем, что при 2-м способе решения, основанном на применении тождества, нет необходимости вводить неизвестную t . Напри-

Таблица 1

Номер задачи	A	a_1	a_2
III ₁₂	48	12	4
III ₁₅	75	25	3
IV ₃₂	195	15	13
III ₁₇	t	$4t$	$\frac{1}{4}$
III ₁₈	$4t$	$4t$	1
IV ₂₃	t	$2t$	$\frac{1}{2}$
VI _{8,9}	$14t$	$2t$	7
III ₁₃	$16t + 4$	$4t + 1$	4
III ₁₅	$5t + 5$	$t + 1$	5
V ₁	$t^2 - 6\frac{1}{2}t$	t	$t - 6\frac{1}{2}$
V ₂	$t^2 - 4t$	t	$t - 4$
VI _{6,7}	$t^2 - 14t$	t	$t - 14$
VI ₂₈	$t^2 - 22528t$	t	$t - 22528$
		$11t$	$\frac{1}{11}t - 2048$

мер, когда в процессе решения некоторых задач появляется уравнение вида $x_1^2 - x_2^2 = A$, где $A = nt + m$ или $nt^2 + mt$, в котором через неизвестную t выражен свободный член A , и поэтому 1-й способ решения в этом случае приводит к путанице, возникает необходимость во 2-м способе решения. Приведем для задач, в которых уравнение $x_1^2 - x_2^2 = A$ решено 2-м способом, табл. 1 с указа-

Таблица 2

Номер задачи	A	x_1	x_2
V ₁	12	$t + 1$	t
V ₂	20	$t - 11$	$t + 9$
V ₂₉	4	$t + 1$	t
V ₃₀	60	t	$t - 20$
VI ₂₃	1	$t - 2$	t

нием конкретного вида свободного члена A и сомножителей a_1 и a_2 .

Приведем аналогичную табл. 2 для задач, в которых уравнение $x_1^2 - x_2^2 = A$, где A — число, решено 1-м способом. В табл. 2 указаны номера задач, конкретные числовые значения A и подстановки, использованные Диофантом.

Заметим, что свободный член уравнения $x_1^2 - x_2^2 = A$ в задачах Π_{10-13} совпадает со свободным членом одного из уравнений, указанных в табл. 2 задач. Действительно,

$$\text{в } \Pi_{10} \text{ и } V_{30} \quad A = 60,$$

$$\text{в } \Pi_{11,13} \text{ и } VI_{23} \quad A = 1,$$

$$\text{в } \Pi_{12} \text{ и } V_1 \quad A = 12.$$

Таким образом, в форме самостоятельных задач Π_{10-13} Диофант предлагает леммы, необходимые для решения более сложных задач, содержащихся в последних книгах. При этом конкретные числовые значения в задачах Π_{10-13} непосредственно заимствованы из задач $V_{1,30}$, VI_{23} , леммами к которым они являются.

Рассмотрим теперь задачи, приводящие к однородным уравнениям второй степени с тремя неизвестными:

$$\Pi_{19} \quad X_1^2 - X_2^2 = 3(X_2^2 - X_3^2),$$

$$IV_{14} \quad X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = (X_1^2 - X_2^2) + \\ + (X_2^2 - X_3^2) + (X_1^2 - X_3^2),$$

$$\text{Лемма } 1\frac{1}{2} \text{ к } V_7 \quad X_1X_2 + X_1^2 + X_2^2 = X_3^2.$$

После приведения подобных членов уравнения Π_{19} и IV_{14} будут иметь вид

$$\Pi'_{19} \quad X_1^2 + 3X_3^2 = 4X_2^2,$$

$$IV'_{14} \quad X_1^2 - X_2^2 = 3X_3^2.$$

Кроме того, при решении задач $IV_{7,8,9,11}$ Диофант приходит к однородным уравнениям второй степени с тремя неизвестными:

$$X_1^2 + 2X_2^2 = X_3^2,$$

$$X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 = X_3^2,$$

$$X_1^2 - X_1X_2 + X_2^2 = X_3^2.$$

Остановимся более подробно на способе решения уравнений $IV_{8,9}$ и его геометрическом смысле.

На неизвестные X_1 и X_2 Диофант накладывает дополнительное условие: $X_1 - X_2 = 1$ в задаче IV_8 и $X_1 + X_2 = 2$ в задаче IV_9 , что эквивалентно следующим постановкам:

$$X_1 = t + 1, \quad X_2 = t \quad \text{и} \quad X_1 = t, \quad X_2 = 2 - t.$$

После этого задачи сводятся к решению уравнений второго порядка с двумя неизвестными:

$$IV'_8 \quad 3t^2 + 3t + 1 = X_3^2,$$

$$IV'_9 \quad 3t^2 - 6t + 4 = X_3^2.$$

Полагая $X_3 = 1 - 2t$, соответственно $X_3 = 2 - 4t$ и подставляя в последнее уравнение, Диофант приходит к квадратному уравнению относительно t без свободного члена, которое после деления на t дает линейное уравнение.

Каков же геометрический смысл метода решения Диофанта?

Уравнения $IV_{8,9}$ определяют конусы в трехмерном пространстве. Добавление условия $X_1 - X_2 = 1$, соответственно $X_1 + X_2 = 2$ эквивалентно сечению конуса плоскостью. Получившиеся гиперболические конические сечения в проекции на плоскость $X_1 = 0$ с системой координат $(t, X_3) = (X_2, X_3)$, соответственно на плоскость $X_2 = 0$ с системой координат $(t, X_3) = (X_1, X_3)$ задаются уравнениями $IV'_{8,9}$. Затем в этих плоскостях через рациональные точки $(0,1)$ и $(0,2)$, лежащие соответственно на гиперболах $IV_{8,9}$, проводятся прямые $X_3 = 1 - 2X_2$ и $X_3 = 2 - 4X_1$, пересекающие соответствующую кривую второго порядка еще в одной рациональной точке.

Теперь перейдем к задачам второго класса. Начнем с решения систем второй степени трех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$II_{14} \quad y_1 + y_2 = 20, \quad II_{15} \quad y_1 + y_2 = 20,$$

$$y_1 + x_3^2 = x_1^2, \quad x_3^2 - y_1 = x_2^2,$$

$$y_2 + x_3^2 = x_2^2; \quad x_3^2 - y_2 = x_2^2;$$

$$III_{21} \quad y_1 + y_2 = 20, \quad III_{20} \quad y_1^2 + y_2^2 = 10,$$

$$\begin{aligned} y_1 + x_3^2 &= x_1^2, & x_3^2 - y_1 &= x_1^2, \\ y_2 + x_3^2 &= x_2^2; & x_3^2 - y_2 &= x_2^2. \end{aligned}$$

После исключения неизвестных y_1 и y_2 из 1-го уравнения систем они принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{II}'_{14} \quad x_1^2 + x_2^2 &= 2x_3^2 + 20, & \text{II}'_{15} \quad x_1^2 + x_2^2 &= 2x_3^2 - 20, \\ y_1 &= x_1^2 - x_3^2, & y_1 &= x_3^2 - x_1^2, \\ y_2 &= x_2^2 - x_3^2; & y_2 &= x_3^2 - x_2^2; \\ \text{III}'_{21} \quad x_1^2 + x_2^2 &= 2x_3^2 + 20, & \text{III}'_{20} \quad x_1^2 + x_2^2 &= 2x_3^2 - 10, \\ y_1 &= x_1^2 - x_3^2, & y_1 &= x_3^2 - x_1^2, \\ y_2 &= x_2^2 - x_3^2; & y_2 &= x_3^2 - x_2^2. \end{aligned}$$

Таким образом, задачи этой группы сводятся к решению основного уравнения.

С алгебро-геометрической точки зрения в задачах этой группы, как мы увидим ниже, на алгебраической поверхности, имеющей бесконечно удаленную рациональную точку, ищется еще одна рациональная точка, а метод решения Диофанта фактически дает возможность описать все рациональные точки.

К решению неопределенного уравнения второй степени приводят также циклические ² системы уравнений второй степени:

$$\begin{aligned} \text{II}_{24} \quad (y_1 + y_2)^2 + y_i &= x_i^2, & i &= 1, 2; \\ \text{II}_{25} \quad (y_1 + y_2)^2 - y_i &= x_i^2, & i &= 1, 2; \\ \text{III}_2 \quad (y_1 + y_2 + y_3)^2 + y_i &= x_i^2, & i &= 1, 2, 3; \\ \text{III}_3 \quad (y_1 + y_2 + y_3)^2 - y_i &= x_i^2, & i &= 1, 2, 3; \\ \text{III}_4 \quad y_i - (y_1 + y_2 + y_3)^2 &= x_i^2, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Системы II_{24} и III_2 получаем из серии циклических систем уравнений

$$(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2 + y_i = x_i^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

при $n = 2, 3$.

² Понятие циклических систем уравнений введено нами в работе [8].

Системы Π_{25} и Π_3 получаем из серии циклических систем уравнений

$$(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2 - y_i = x_i^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

при $n = 2, 3$.

Систему Π_4 получаем из серии циклических систем уравнений

$$y_i - (y_1 + \dots + y_n)^2 = x_i^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

при $n = 3$.

Полагая $y_1 + \dots + y_n = x$, можно переписать все три серии следующим образом:

$$y_1 + \dots + y_n = x, \quad y_i = F(x_i, x), \quad (7)$$

где для серии (4) $F(x_i, x) = x_i^2 - x^2$, для серии (5) $F(x_i, x) = x^2 - x_i^2$ и для серии (6) $F(x_i, x) = x_i^2 + x^2$.

Исключение из 1-го уравнения системы (7) неизвестных $y_1, \dots, y_n$ приводит нас к уравнению второй степени с $(n+1)$ -й неизвестной. Таким образом, решение систем Π_{24} , Π_2 сводится к решению системы уравнений

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 - nx^2 = x, \quad (8)$$

$$y_i = x_i^2 - x^2, \quad i = 1, \dots, n$$

при $n = 2, 3$; решение систем Π_{25} , Π_3 — к решению системы уравнений

$$nx^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2) = x,$$

$$y_i = x^2 - x_i^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

при $n = 2, 3$; решение системы Π_4 — к решению системы уравнений

$$nx^2 + (x_1^2 + \dots + x_n^2) = x, \quad (10)$$

$$y_i = x^2 + x_i^2, \quad i = 1, \dots, n$$

при $n = 3$.

Основные уравнения этих систем решаются при помощи подстановок $x = at$, $x_i = a_it$ ($i = 1, \dots, n$), являющихся очевидным обобщением подстановок Диофанта.

С алгебро-геометрической точки зрения смысл решения состоит в следующем. Все гиперповерхности, задаваемые указанными выше основными уравнениями, имеют исходную рациональную точку $(0, \dots, 0)$, которая не является для Диофанта решением, так как не удовлетворяет условию положительности. Рассмотренные подстановки задают прямую, проходящую через исходную рациональную точку $(0, \dots, 0)$ и пересекающую гиперповерхность второго порядка еще в одной рациональной точке.

В «Арифметике» имеется еще одна группа задач, в которых решаются циклические системы уравнений второй степени ³:

$$\text{III}_5 \quad y_1 + y_2 + y_3 = x^2, \\ y_i + y_{i+1} - y_{i+2} = x_i^2, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\text{III}_6 \quad y_1 + y_2 + y_3 = x^2, \\ y_i + y_{i+1} = x_i^2, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\text{III}_7 \quad y_1 - y_2 = y_2 - y_3, \\ y_i + y_{i+1} = x_i^2, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\text{III}_8 \quad y_1 + y_2 + y_3 + 3 = x^2, \\ y_i + y_{i+1} + 3 = x_i^2, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\text{III}_9 \quad y_1 + y_2 + y_3 - 3 = x^2, \\ y_i + y_{i+1} - 3 = x_i^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Используя метод решения системы $y_i + y_{i+1} - y_{i+2} = f(i)$, $i = 1, 2, 3$, в задаче III_5 и системы $y_i + y_{i+1} = f(i)$, $i = 1, 2, 3$, в задачах III_{6-9} , можно переписать три последних уравнения в системах III_{5-9} в следующем виде:

$$y_i = F(x_i^2, x_{i+1}^2, x_{i+2}^2), \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$F(x_i^2, x_{i+1}^2, x_{i+2}^2) = \frac{1}{2}(x_i^2 + x_{i+1}^2)$$

в задаче III_5 ,

$$F(x_i^2, x_{i+1}^2, x_{i+2}^2) = \frac{1}{2}(x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2)$$

³ Напомним, что здесь индексы отождествляются с 1, 2, 3 по mod 3.

в задачах III₆₋₇,

$$F(x_i^2, x_{i+1}^2, x_{i+2}^2) = \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 \mp 3)$$

в задачах III₈₋₉.

Исключив, кроме того, из 1-го уравнения систем III₅₋₉ неизвестные y_1, y_2, y_3 , получим системы III_{5'-9'}:

$$\text{III}_{5'} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x^2,$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{2}(x_i^2 + x_{i+1}^2), \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\text{III}_{6'} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2x^2,$$

$$y_i = \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2), \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\text{III}_{7'} \quad x_1^2 + x_2^2 = 2x_3^2$$

$$y_i = \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\text{III}_{8'} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2x^2 + 3,$$

$$y_i = \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 - 3), \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\text{III}_{9'} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2x^2 - 3,$$

$$y_i = \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + 3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Правая часть основного уравнения систем по ходу следования задач этой группы принимает постепенно все более общий вид

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x^2, 2x^2, 2x^2 \pm 3.$$

Теперь мы перейдем к алгебро-геометрической интерпретации общего метода решения задач, рассмотренных выше.

Мы показали, что все они сводятся к нахождению положительного рационального решения уравнения второй степени

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (11)$$

если заранее известно одно рациональное решение $x_1 = a_1^0, \dots, x_n = a_n^0$. В большинстве случаев это исходное решение не является решением в смысле Диофанта и поэтому в явном виде не выписывается, но в процессе решения задачи используется.

Диофант ищет такие подстановки $x_i = \alpha_i t + \beta_i$ ($i = 1, \dots, n$), где α_i и β_i — рациональные числа, чтобы свободный член или коэффициент при t^2 в концевом уравнении

$$F(\alpha_1 t + \beta_1, \dots, \alpha_n t + \beta_n) = 0 \quad (12)$$

обращался в нуль.

Рассмотрим эти два случая отдельно.

1-й случай. Свободный член уравнения (12) равен нулю.

Свободный член уравнения (1) имеет вид $F(\beta_1, \dots, \beta_n)$, поэтому равенство нулю свободного члена означает, что $x_1 = \beta_1, \dots, x_n = \beta_n$ являются рациональным решением уравнения (11).

С алгебро-геометрической точки зрения уравнение (11) задает гиперповерхность Σ второго порядка в n -мерном пространстве, на которой имеется рациональная точка $(a_1^0, \dots, a_n^0) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Подстановки $x_i = \alpha_i t + a_i^0$ ($i = 1, \dots, n$) задают в параметрической форме прямую, проходящую через рациональную точку $(a_1^0, \dots, a_n^0)$ в направлении вектора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Если этот вектор не лежит в гиперплоскости, касающейся гиперповерхности Σ в точке $(a_1^0, \dots, a_n^0)$, то прямая $x_i = \alpha_i t + a_i^0$ ($i = 1, \dots, n$) пересечет поверхность еще в одной рациональной точке $(a_1, \dots, a_n)$, координаты которой вычисляются по формулам

$$a_i = \alpha_i a + a_i^0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

где a — не нулевое решение концевое уравнения (12), являющееся рациональной функцией от координат вектора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Более того, метод Диофанта дает описание всех рациональных точек гиперповерхности Σ . Точнее говоря, этот метод позволяет установить бирациональный изоморфизм над полем рациональных чисел между гиперплоскостью и гиперповерхностью второго порядка Σ , обладающей рациональной точкой, и гиперплоскостью. Действительно, предположим, что гиперплоскость $\alpha_1 = 1$ не совпадает с касательной гиперплоскостью

скостью к точке $(a_1^0, \dots, a_n^0)$, тогда описанный метод дает рациональное отображение гиперплоскости $\alpha_1 = 1$ на гиперповерхности Σ :

$$x_1 = a + a_1^0,$$

$$x_i = \alpha_i a + a_i, \quad i = 2, \dots, n.$$

Обратное отображение имеет вид

$$\alpha_i = \frac{x_i - a_i^0}{x_1 - a_1^0}, \quad i = 2, \dots, n.$$

2-й случай. Коэффициент при t^2 в уравнении (12) равен нулю.

В этом случае, для того чтобы уяснить алгебро-геометрический смысл метода, перейдем от записи уравнения (11) в аффинных координатах к записи в однородных координатах.

Положим

$$x_i = X_i/X_0, \quad i = 1, \dots, n,$$

тогда уравнению (11) будет соответствовать однородное уравнение

$$\bar{F}(X_0, \dots, X_n) = 0. \quad (13)$$

Если положить $t = S/T$, то прямой в аффинном n -мерном пространстве

$$x_i = \alpha_i t + \beta_i$$

будет соответствовать прямая в n -мерном проективном пространстве

$$X_0 = 0 \cdot S + 1 \cdot T, \quad (14)$$

$$X_i = \alpha_i S + \beta_i T, \quad i = 1, \dots, n.$$

При указанном соответствии обращение в нуль коэффициента при t^2 в уравнении (12) означает, что уравнение (13) имеет рациональное решение $(a_0^0, \dots, a_n^0) = (0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, иначе говоря, гиперповерхность Σ , заданная в аффинном n -мерном пространстве, имеет рациональную бесконечно удаленную точку, через которую проводится прямая (14). Прямая (14) пересекает гиперповерхность (13) еще в одной точке, координаты которой в n -мерном

Таблица 3

Номер задачи	Условие	Подстановка	Рациональная точка	Вектор направления
II ₁	$X_1^2 + X_2^2 = 10(X_1 + X_2)X_0$	$X_0 = 0.S + 1.T$	(1, 0, 0)	(0, 2, 1)
II ₂	$X_1^2 + X_2^2 = 6(X_1 - X_2)X_0$	$X_1 = 2.S + 0.T$		
II ₃	$X_1 X_2 = 6(X_1 \pm X_2)X_0$	$X_2 = 1.S + 0.T$		
II ₄	$X_1^2 + X_2^2 = 10(X_1 - X_2)X_0$		(1, 0, -4)	(0, 1, 2)
II ₅	$X_1^2 - X_2^2 = 6(X_1 + X_2)X_0$			
II ₆	$x_1^2 - x_2^2 = x_1 - x_2 + 20$ $x_1 - x_2 = 2$	$x_1 = 1.t + 2$ $x_2 = 1.t + 0$		
II ₇	$X_1^2 - X_2^2 = 3(X_1 - X_2)X_0 + 10X_0^2$	$X_0 = 0.S + 1.T$ $X_1 = 1.S + 2.T$ $X_2 = 1.S + 0.T$	(1, 2, -3)	(0, 1, 2)
II ₈	$X_1^2 + X_2^2 = 16X_0^2$	$X_0 = 0.S + 1.T$ $X_1 = 1.S + 0.T$ $X_2 = 2.S - 4.T$		
II ₉	$X_1^2 + X_2^2 = 13X_0^2$	$X_0 = 0.S + 1.T$ $X_1 = 1.S + 2.T$ $X_2 = 2.S - 3.T$		
Лемма 2 к VI ₁₅	$3X_1^2 + 6X_0^2 = X_2^2$	$X_0 = 0.S + 1.T$ $X_1 = 1.S + 1.T$ $X_2 = -3.S + 3.T$	(1, 1, 3)	(0, 1, -3)

Т а б л и ц а 3 (продолжение)

Номер задачи	Условие	Подстановка	Рациональная точка	Вектор направления
Лемма к VI ₁₅	$3X_1^2 - 11X_0^2 = X_2^2$	$X_0 = 0.S + 1.T$ $X_1 = 1.S + 5.T$ $X_2 = -2.S + 8.T$	(4, 5, 8)	(0, 1, -2)
II ₁₉	$X_1^2 + 3X_3^2 = 4X_2^2$	$X_1 = 1.S + 3.T$ $X_2 = 1.S + 1.T$ $X_3 = 1.S + 0.T$	(4, 1, 1)	(3, 1, 0)
IV ₁₄	$X_1^2 - X_2^2 = 3X_3^2$	$X_1 = 1.S + 1.T$ $X_2 = 1.S - 4.T$ $X_3 = 0.S + 1.T$	(4, 1, 0)	(1, -4, 1)
Лемма к V ₇	$X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 = X_3^2$	$X_1 = 1.S + 0.T$ $X_2 = 0.S + 1.T$ $X_3 = 1.S - 2.T$	(4, 0, 1)	(0, 1, -2)
IV _{8,11}	$X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 = X_3^2$	$X_1 = 1.S + 1.T$ $X_2 = 1.S + 0.T$ $X_3 = -2.S + 1.T$	(4, 0, 1)	(1, 1, -2)
IV ₉	$X_1^2 - X_1X_2 + X_2^2 = X_3^2$	$X_1 = 1.S + 0.T$ $X_2 = -1.S + 2.T$ $X_3 = -4.S + 2.T$	(0, 2, 2)	(1, -1, -4)
IV ₇	$X_1^2 + 2X_2^2 = X_3^2$	$X_1 = 0.S + 2.T$ $X_2 = 1.S + 0.T$ $X_3 = 2.S - 2.T$	(2, 0, -2)	(0, 1, 2)
II ₁₀	$X_1^2 - X_2^2 = 60X_0$	$X_0 = 0.S + 1.T$ $X_1 = 1.S + 3.T$ $X_2 = 1.S + 0.T$	(0, 1, 1)	(1, 3, 0)

Таблица 3 (продолжение)

Номер задачи	Условие	Подстановка	Рациональная точка	Вектор направления
Π_{11}	$X_2^2 - X_1^2 = X_0^2$	$X_0 = 0.S + 1.T$ $X_1 = 1.S + 0.T$ $X_2 = 1.S - 4.T$	$(0, 1, 1)$	$(1, 0, -4)$
Π_{12}	$X_2^2 - X_1^2 = X_0^2$	$X_0 = 0.S + 1.T$ $X_1 = 1.S + 0.T$ $X_2 = 1.S - 4.T$	$(0, 1, 1)$	$(1, 0, -4)$
Π_{13}	$X_1^2 - X_2^2 = X_0^2$	$X_0 = 0.S + 1.T$ $X_1 = 1.S + 0.T$ $X_2 = 1.S - 2.T$	$(0, 1, 1)$	$(1, 0, -2)$
Π_{14}	$X_1^2 + X_2^2 = 2X_3^2 + 20X_0^2$	$X_0 = 0.S + 1.T$ $X_1 = 1.S + 2.T$ $X_2 = 1.S + 3.T$ $X_3 = 1.S + 0.T$	$(0, 1, 1, 1)$	$(1, 2, 3, 0)$
Π_{15}	$X_1^2 + X_2^2 = 2X_3^2 - 20X_0^2$	$X_0 = 0.S + 1.T$ $X_1 = 1.S + 0.T$ $X_2 = 1.S + 1.T$ $X_3 = 1.S + 2.T$	$(0, 1, 1, 1)$	$(1, 0, 1, 2)$
Π_{20}	$X_1^2 + X_2^2 = 2X_3^2 - 10X_0^2$	$X_0 = 0.S + 1.T$ $X_1 = 1.S + 0.T$ $X_2 = 1.S - 1.T$ $X_3 = 1.S + 1.T$	$(0, 1, 1, 1)$	$(1, 0, -1, 1)$
Π_{21}	$X_1^2 + X_2^2 = 2X_3^2 + 20X_0^2$	$X_0 = 0.S + 1.T$ $X_1 = 1.S + 2.T$ $X_2 = 1.S + 3.T$ $X_3 = 1.S + 1.T$	$(0, 1, 1, 1)$	$(1, 2, 3, 1)$

Таблица 3 (продолжение)

Номер задачи	Условие	Подстановка	Рациональная точка	Вектор направления
II ₁₆	$X_1^2 + 18X_0^2 = 3X_2^2$	$X_0 = 0 \cdot S + 1 \cdot T$	$(1, -3, 3)$	$(0, 2, 1)$
II ₂₄	$x_1^2 + x_2^2 - 2x^2 = x$	$X_1 = 2 \cdot S - 3 \cdot T$		
III ₂	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x^2 = x$	$X_2 = 1 \cdot S + 3 \cdot T$	$(0, 0, 0)$	$(1, 2, 3)$
II ₂₅	$2x^2 - (x_1^2 + x_2^2) = x$	$x = 1 \cdot t + 0$	$(0, 0, 0, 0)$	$(1, 2, 3, 4)$
III ₃	$3x^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = x$	$x_1 = 2 \cdot t + 0$		
III ₄	$3x^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x$	$x_2 = 3 \cdot t + 0$	$(0, 0, 0)$	$(4, 3, 2)$
III ₅	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x^2$	$x_3 = 4 \cdot t + 0$	$(0, 0, 0, 0)$	$(4, 3, 2, 1)$
		$x = 4 \cdot t + 0$		
		$x_1 = 3 \cdot t + 0$	$(0, 0, 0, 0)$	$(1, 1, 2, 3)$
		$x_2 = 2 \cdot t + 0$		
		$x_3 = 1 \cdot t + 0$		
		$x = 1 \cdot t + 0$		
		$x_1 = 1 \cdot t + 0$		
		$x_2 = 2 \cdot t + 0$		
		$x_3 = 3 \cdot t + 0$		
		$x = 1 \cdot t + 1$	$(1, 0, 1, 0)$	$(1, 1, 0, 4)$
		$x_1 = 0 \cdot t + 1$		
		$x_2 = 1 \cdot t + 0$		
		$x_3 = 0 \cdot t + 4$		

Т а б л и ц а 3 (окончание)

Номер задачи	Условие	Подстановка	Рациональная точка	Вектор направления
III ₆	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2x^2$	$x = 1 \cdot t + 0$ $x_1 = 1 \cdot t - 1$ $x_2 = 0 \cdot t + 11$ $x_3 = 1 \cdot t + 1$	(1, 1, 0, 1)	(0, -1, 11, 1)
III ₇	$x_1^2 + x_3^2 = 2x_2^2$	$x_1 = 1 \cdot t + 0$ $x_2 = 1 \cdot t + 1$ $x_3 = 1 \cdot t - 8$	(1, 1, 1)	(0, 1, -8)
III ₈	$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 2X^2 - 3X_0^2$	$X_0 = 0 \cdot S + 1 \cdot T$ $X_1 = 1 \cdot S + 2 \cdot T$ $X_2 = 1 \cdot S + 3 \cdot T$ $X_3 = 0 \cdot S + 10 \cdot T$ $X = 1 \cdot S + 4 \cdot t$	(0, 1, 1, 0, 1)	(1, 2, 3, 10, 4)
III ₉	$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 2X^2 + 3X_0^2$	$X_0 = 0 \cdot S + 1 \cdot T$ $X_1 = 1 \cdot S + 0 \cdot T$ $X_2 = 1 \cdot S + 1 \cdot T$ $X_3 = 0 \cdot S + 8 \cdot T$ $X = 1 \cdot S + 2 \cdot T$	(0, 1, 1, 0, 1)	(1, 0, 1, 8, 2)

аффинном подпространстве $X_0 \neq 0$ проективного n -мерного пространства вычисляются по формулам $x_i = a_i^0 a + \beta_i$ ($i = 1, \dots, n$), где a — не нулевое решение квадратного относительно t уравнения (12).

Кроме того, когда уравнение (11) однородно, Диофант пользуется как подстановкой

$$x_i = a_i^0 t + \beta_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $x_1 = a_1^0, \dots, x_n = a_n^0$ — исходное рациональное решение уравнения (11), так и подстановкой

$$x_i = \alpha_i t + a_i^0, \quad i = 1, \dots, n,$$

которые в этом случае совершенно равноправны.

Приведем табл. 3, в которой для всех рассмотренных в статье задач даются уравнения, записанные в однородных координатах, подстановки Диофанта и соответствующие им исходные рациональные решения и векторы направления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hankel H.* Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter. Leipzig, 1874.
2. *Becker O., Hofmann J.* Geschichte der Mathematik. Bonn, 1951.
3. *Ван дер Варден Б. Л.* Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции / Пер. с гол. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1959.
4. *Цейтен Г. Г.* История математики в древности и средние века. 2-е изд. / Пер. П. С. Юшкевича; предисл. М. Я. Выгодского. М.; Л.: Гостехиздат, 1938.
5. *Башмакова И. Г.* Диофант и Ферма. — В кн.: Ист.-мат. исследования, 1966, вып. XVII, с. 185—204.
6. *Башмакова И. Г.* Диофант и диофантовы уравнения. М.: Наука, 1972.
7. *Башмакова И. Г.* Арифметика алгебраических кривых (от Диофанта до Пуанкаре). — В кн.: Ист.-мат. исследования, 1975, вып. XX, с. 104—124.
8. *Славутин И. Е.* История циклических систем уравнений. — В кн.: Ист.-мат. исследования. М.: Наука, 1974, вып. XIX, с. 50—68.

МАТЕМАТИКА ОРНАМЕНТОВ ДИОНИСИЯ

Н. В. Гусев, Л. Е. Майстров

Уровень математических знаний на Руси с древних времен до XVII в. в настоящее время изучен еще недостаточно. Математических рукописей, относящихся к этому времени, известно очень мало, а математические книги отсутствуют полностью. Поэтому исследователи для установления уровня математики древней Руси обращаются часто к разным косвенным источникам — археологическим находкам, архитектурным памятникам, литературным произведениям, данным метрологии, орнаментам и т. п. Всюду при этом ищут отражения математических знаний. В виде примера можно упомянуть изучение берестяных грамот, которые являются в основном частными записками: употреблявшиеся в них числовые обозначения позволили осветить ряд историко-математических вопросов [1]. Изучение хозяйственных бирок также дало интересные результаты для истории математики [2].

Большое значение для истории математики имеет изучение древнерусской живописи, в которой использовались специальные геометрические знания, в частности учение о проекциях и другие сведения. Чем более крупный художник, тем более он образован¹, тем более сознательно он применяет геометрические знания. В этом отношении несомненный интерес представляет проследить, какие математические сведения и как использовал в своем творчестве Дионисий.

Дионисий после Рублева и Грека был крупнейшим живописцем древней Руси. Даты рождения и смерти художника точно не известны. Последние его работы относятся к 1502—1503 гг. Можно предположить, что он умер до 1508 г., когда исполнение великокняжеского заказа, росписей Благовещенского собора Московского Кремля, было поручено сыну Дионисия — Феодосию. Родился Диони-

¹ «Владеть кистью — это еще очень мало для того, чтобы быть живописцем. Живописцу надобно быть вполне образованным человеком» (А. А. Иванов) [3].

сий, по-видимому, в 30—40-е годы XV в., так как в 60-е годы, во время создания, совместно с Митрофаном, росписи Рождественской церкви Пафнутьева Боровского монастыря, Дионисий уже был прославленным мастером. Благодаря рано проявившемуся таланту, а также стараниям высоких покровителей успех сопутствовал Дионисию от поры начинаний до последних лет жизни.

В 1481 г. Дионисий руководил писанием икон Успенского собора Московского Кремля. В эти же годы Дионисий выполняет и другие свои знаменитые работы.

Наиболее известная и значительная монументальная работа Дионисия — это иконы и фрески собора Ферапонтова монастыря (1500—1503). Надпись над северной дверью Рождественского храма в Ферапонтовом монастыре сообщает, что живопись была выполнена «при благоверном великом князе Иване Васильевиче..., а писцы Дионисие иконник с своими чады».

Дионисий в своих работах подчеркивает духовное начало. Удлиняя пропорции фигур, замедляя ритм движений и жестов, художник стремится создать возвышенный образ человека, показать его свободным от недостатков. Дионисий занимает особое место в русском искусстве. Он был прямым наследником и продолжателем традиции Рублева. При этом он принадлежал к художникам, чье творческое мышление опиралось на определенные философские принципы и обширные познания, и был лично и духовно связан с выдающимися русскими книжниками и мыслителями своего времени. Своим творчеством, и в частности фресками Ферапонтова монастыря, Дионисий утверждал философскую значимость образов (см. [3]).

Мы не будем касаться фресок Дионисия в целом, а рассмотрим только орнаменты на «полотенцах», которые идут внутри Рождественского собора Ферапонтового монастыря под фресками.

Орнаменты на «полотенцах», иногда их называют медальонами, играли во фресковой живописи Дионисия вспомогательную роль. Они прежде всего заполняли пустое пространство между полом и фресками, так как иначе фрески нужно было начинать от пола, что приводило бы к их порче; кроме того, их не было бы видно, когда в соборе находился народ. Орнаменты были подготавливающим звеном для рассматривания фресок. Поэтому они достаточно красочные, но не яркие, чтобы не затмевать

фресок. Для этого же в зависимости от пространства, занятого над ними фресками, орнаменты писались разного размера.

В основу всех орнаментов Дионисия положена окружность. Всего имеется более 50 разных орнаментов, рисунки которых являются геометрическими построениями при помощи циркуля и линейки. Для того чтобы выполнить эти орнаменты, нужно было обладать некоторым запасом геометрических сведений. При рассмотрении этих орнаментов не следует забывать, что Дионисий был художником, а не математиком, и поэтому использование геометрии у него играло подчиненную роль для более сильного воздействия на зрителя.

При входе в собор под фигурами архангелов имеется два орнамента. Первый из них содержит четыре концентрические окружности, в меньшую из которых вписаны четыре пересекающиеся окружности (рис. 1).

Для выполнения этого чертежа нужно было провести концентрические окружности, разделить окружность на четыре части, а для этого через заданную точку — центр окружностей — провести две взаимно перпендикулярные прямые. Для нахождения центров вписанных окружностей нужно было разделить на две равные части заданный отрезок (радиус меньшей концентрической окружности). Если соединить точки пересечения вписанных окружностей, то у всех прямых углов будут проведены биссектрисы и окружность разделится на 8 частей.

На рис. 1, как и на всех остальных рисунках, дополнительные построения проводятся тонкими линиями, а сам орнамент вычерчен жирными линиями. Заметим еще, что все орнаменты состоят из нескольких концентрических окружностей, которые, кроме декоративных целей, служили для дополнительных построений. При их помощи иногда находились необходимые радиусы, центры дуг и т. п.

Второй орнамент у входа (рис. 2) представляет из себя шестилепестковую розу, вписанную в окружность. Для этого нужно было разделить окружность на 6 частей, т. е. знать, что $a_6 = R$. Разделив окружность на 6 частей точками, принимают каждую из них за центр окружности и проводят радиусом дуги, на которых и строится роза. На рисунке имеются еще дуги, усложняющие рисунок, которые проведены при помощи циркуля. Центры этих дуг находятся на пересечении дополнительной концентри-

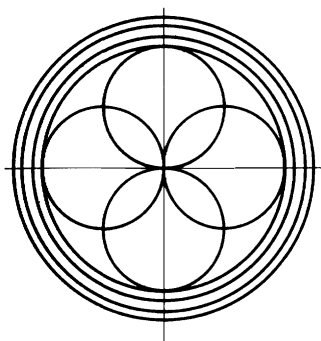


Рис. 1

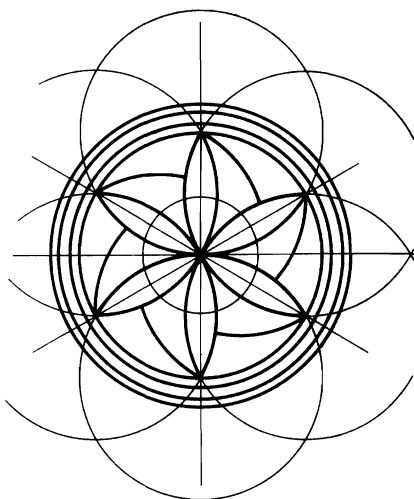


Рис. 2

ческой окружности ($r = R/2$) с соответствующими лепестками, при этом радиус этих дуг равен R .

Мы не будем останавливаться на всех орнаментах, так как некоторые из них геометрической точки зрения очень просты, кроме того, часть рисунков геометрически повторяют друг друга, различаясь только декоративными деталями и окраской. Так, например, многократно повторяется деление окружности на четыре, шесть или двенадцать частей.

Приведем один из рисунков, в основе которого лежит деление окружности на четыре части (рис. 3). Для нахождения центров дуг окружностей, которые характеризуют рисунок, проводят вначале два взаимно перпендикулярных диаметра. Из полученных точек проводят, как из центров, дуги окружностей радиусом, равным радиусу основной окружности. Таким образом, основная окружность делится на 12 частей. Иногда этот рисунок встречается без малой концентрической окружности внутри.

Интересен рис. 4, в основе которого также лежит деление окружности на четыре части. Для построения малых внутренних окружностей, которые касаются друг друга, необходимо предварительно построить квадрат, в верши-

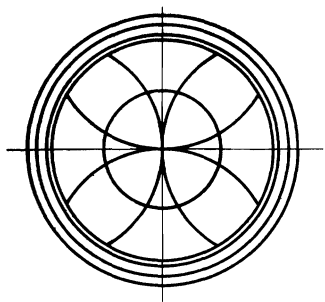


Рис. 3

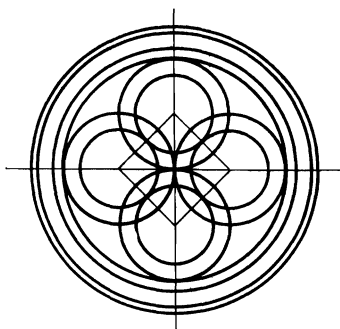


Рис. 4

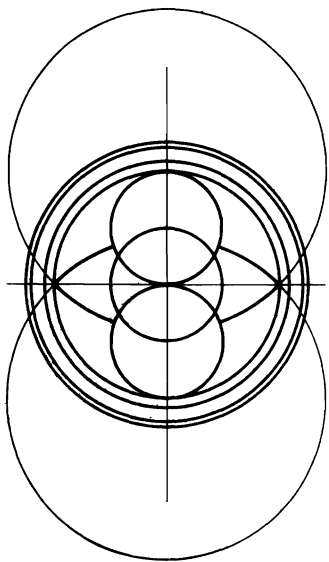


Рис. 5

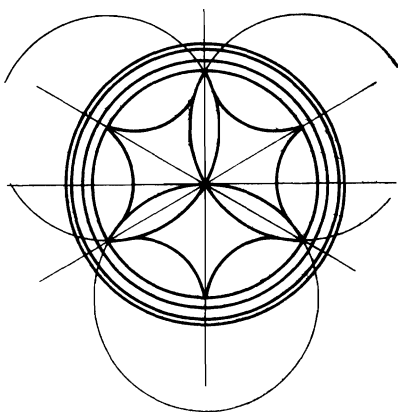


Рис. 6

нах которого лежат центры данных окружностей, а радиусами их служит половина стороны квадрата. Вершины квадрата находятся в середине радиусов большой окружности.

Имеется несколько построений с различными комбинациями окружностей и дуг. На рис. 5 центры дуг окруж-

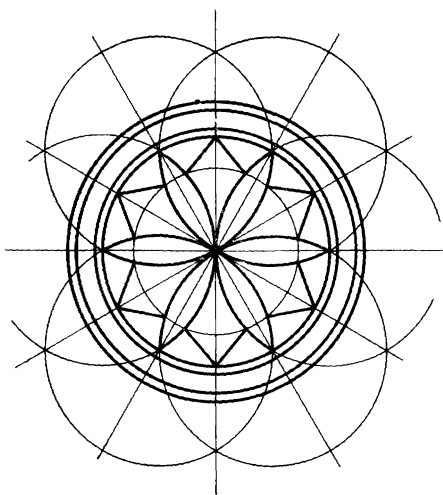


Рис. 7

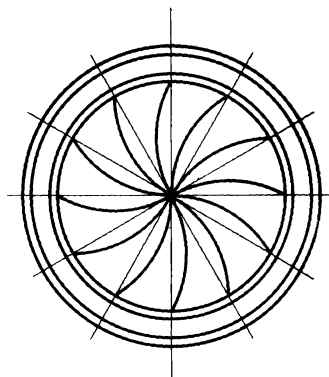


Рис. 8

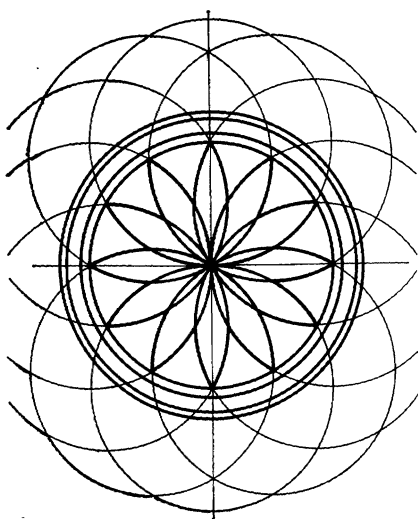


Рис. 9

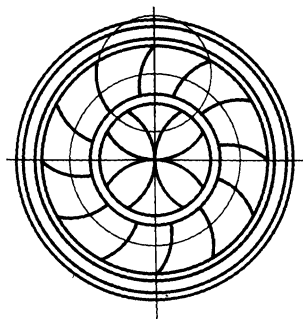


Рис. 10

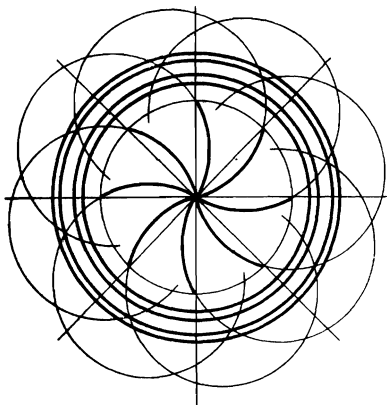


Рис. 11

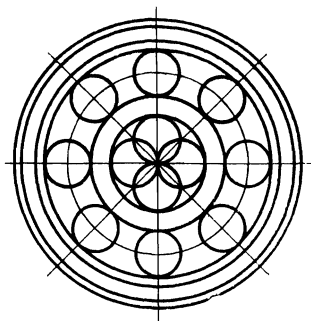


Рис. 12

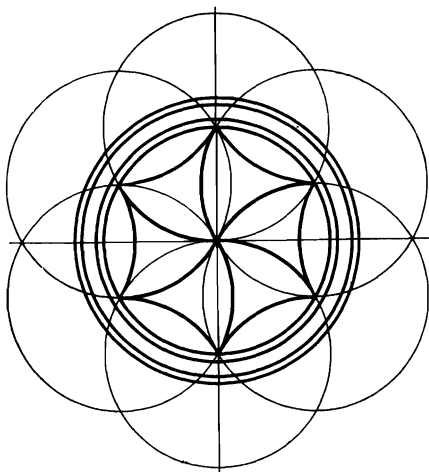


Рис. 13

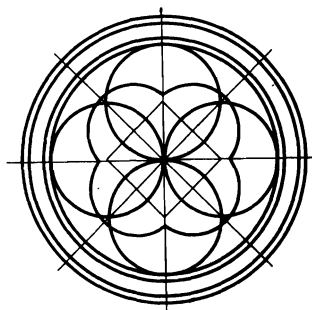


Рис. 14

ностей находятся на концах диаметров. Построение других окружностей очевидно.

Из рисунков, в основе которых лежит деление окружности на 6 частей, отметим рис. 6. Трехлепестковая роза строится проведением дуг окружностей радиусом, равным радиусу основной окружности, с центрами в точках деления окружности на 6 частей. От деления окружности на 6 частей путем деления дуги (хорды) на две равные части



Рис. 15

легко перейти к делению окружности на 12 частей. Дополнительные дуги проводятся циркулем из центра, находящегося на внешней концентрической окружности. Такие рисунки встречаются довольно разнообразного вида (рис. 7—9). Многолепестковые розы всюду строятся однотипно. Дуги рис. 8 — это половины дуг, которые вычерчиваются для роз. Все дополнительные построения на этом рисунке мы уже рассмотрели.

Интересно построение на рис. 10. Для нанесения двенадцати дуг вначале строится дополнительная окружность радиусом, равным расстоянию между наибольшей и наименьшей концентрическими окружностями. На этой дополнительной окружности и находятся центры двенадцати дуг; для этого ее делят на 12 частей.

Отметим еще несколько рисунков. На рис. 11 проведено оригинальное построение. Довольно интересные построения мы видим на рис. 12—14. На них все построения довольно хорошо видны и не нуждаются в дополнительных объяснениях.

Геометрическая структура орнаментов Дионисия не всегда очевидна, так как бывает скрыта цветочными и другими украшениями. Все орнаменты, кроме того, раскрашены в желтый, голубой, зеленый и другие цвета, что создает красочное изображение, но дополнительно затуманивает геометрическое содержание орнаментов.

Подведем некоторый итог. Дионисий в конце XV и самом начале XVI в. владел целым рядом геометрических сведений, которые применял в своих орнаментах. При помощи циркуля и линейки он строил концентрические окружности; делил окружность на 3, 4, 6, 8, 12, 16 частей; строил прямой угол; делил отрезок на две равные части; проводил биссектрисы углов; вписывал и описывал друг относительно друга окружности и делал другие построения. Иногда это были довольно замысловатые геометрические фигуры.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Е. А. Жук и Э. К. Пироговой, которые сняли копии всех орнаментов в Ферапонтовом монастыре и изготовили чертежи для данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузаков В. К., Майстров Л. Е. Вопросы естествознания и техники древней Руси по берестяным грамотам. (Труды IX научной конференции аспирантов и младших научных сотрудников Института истории естествознания и техники АН СССР). М., 1967.
2. Майстров Л. Е. Счетные бирки. — В кн.: Вопросы истории физико-математических наук. М.: Высшая школа, 1963.
3. Голейзовский Н., Ямщиков С. Дионисий. Образ и цвет. М.: Изобразительное искусство, 1969.

МАШИНА БЕББИДЖА И ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. К. Петренко, О. Л. Петренко

Первая попытка создать универсальную цифровую вычислительную машину относится к началу XIX в. Ее изобретателем был выдающийся английский ученый Чарльз Беббидж (1792—1871). Занимаясь вопросом составления математических и навигационных таблиц, Беббидж пришел к идее разностной машины, которая, суммируя частные разности заданной функции (полинома или аппроксимирующего полинома), быстро и точно вычисляла бы требуемые таблицы. Работая над усовершенствованием разностной машины, он пришел к идее программно-управляемой вычислительной машины, которую назвал аналитической. Не закончив работ, связанных с разностной машиной, Беббидж начал постройку аналитической, создавая ее на механических элементах.

Аналитическая машина Беббиджа (АМ) не была построена, но сохранилось около 200 чертежей отдельных узлов и 30 вариантов компоновки. АМ была первой программно-управляемой машиной. В настоящей работе мы не будем останавливаться на технических особенностях машины и рассмотрим только вопрос программирования на ней.

В 1840 г. Беббидж был приглашен в Турин, где читал лекции о своих вычислительных машинах. Л. Ф. Менабреа, который посещал эти лекции, с одобрения Беббиджа опубликовал «Очерк об аналитической машине, изобретенной Чарльзом Беббиджем»¹ (1840). В этой статье и в примечаниях к ее переводу на английский язык, который был выполнен А. А. Лавлейс, наиболее подробно рассмотрены вопросы программирования на АМ. Перевод и комментарии к нему служат нам главным источником знаний об АМ. Эксцентрический характер Беббиджа не позволил ему оставить полное описание своей машины

¹ Sketch of the Analytical Engine invented by Charles Babbage, Esq. by L. F. Menabrea [1, с. 225—297].

и тем более методов ее использования. Это обуславливает исключительную важность работ Менабреа и Лавлейс, уделивших основное внимание использованию, программированию на АМ. По-видимому, можно считать, что основные идеи программирования, которые лежат в основе этих работ, принадлежат Беббиджу. А. А. Лавлейс была близкой знакомой Беббиджа, она следила за его работой и постоянно интересовалась ею. Примечания к переводу она несколько раз отдавала редактировать Беббиджу. Поэтому мы склонны считать, что комментарии Лавлейс — это ее совместная работа с Беббиджем.

Основой любой современной вычислительной машины служит программное управление. Программа — совокупность команд, выполняемых машиной, это та принципиальная черта, которая отличает современные ЭВМ от всех прежних вычислительных машин. Каждая вычислительная машина всегда предназначалась для более или менее полной автоматизации процесса счета. Абак автоматизировал запоминание слагаемого и сложение единиц в пределах одного разряда. Арифмометр полностью автоматизировал сначала сложение, а затем и умножение. Программно-управляемые машины своим появлением ознаменовали вступление в следующий этап автоматизации. Они автоматизировали процесс задания хода вычислений, который состоит из последовательности арифметических операций.

Идея использования принципа программного управления для управления вычислительной машиной является исторической заслугой Беббиджа. Ход вычислений на АМ задавался при помощи перфокарт, аналогичных картам Жаккара, которые использовались в ткацких станках для производства набивных тканей со сложным узором. По своему назначению карты Беббиджа распадались на две группы: карты операций и карты переменных. Карты операций при помощи определенных комбинаций пробивок задавали одну из четырех арифметических операций: сложение, вычитание, умножение и деление. Любая задача, решаемая на АМ, должна была сводиться к последовательности этих элементарных операций. Карты операций составляли цепочку, протягивавшуюся сквозь машину. Машина выполняла ту операцию, которая определялась картой, находившейся в данный момент на протягивающей призме.

Карты переменных также представляли собой цепочку; они указывали операнды операций. У каждой арифметической операции три операнда. Например, два слагаемых и результат — сумма; соответственно на каждую карту операций приходилось три карты переменных.

Заметим, что подобную структуру команд имеют многие ЭВМ, названные в связи с этим трехадресными, например, БЭСМ-4:

Код операции	I операнд	II операнд	III операнд

Такое сходство, по-видимому, объясняется арифметическим характером большинства операций и простой структурой адресации, что справедливо для обеих сравниваемых машин.

Двумя основными блоками АМ были склад (память) и мельница (арифметическое устройство). Перед началом вычислений на колонках памяти, состоящих из дисков, по ободку которых были нанесены цифры от 0 до 9, задавались числа, служившие исходными данными задачи. В различных вариантах проектов Беббиджа число колонок памяти менялось от 100 до 1000, а количество дисков на колонке — от 40 до 50. Для выполнения операции два числа с колонок, определяемых картами переменных, передавались в мельницу, после выполнения операции результат записывался на указываемую колонку. Программа для АМ указывала, какие операции требуется выполнить над содержимым определенных колонок. Таким образом, карты, указывающие операнды, представляли не числа а понятия более высокого уровня — переменные, и тем самым программа получала общность функции, определенной над множеством чисел, каждое фиксированное значение которой определялось конкретным набором исходных данных.

Адресный принцип указания операндов, состоящий в указании места (адреса) где располагается число, а не в указании собственно числа, является неотъемлемой характеристикой программно-управляемой машины. Открытие Беббиджем этого принципа свидетельствует о глубине понимания им возможностей программно-управляемых машин.

Таблица 1

Номер операции	Карты операций	Карты переменных		Результат операции
	Знаки операций	Колонки, над которыми выполняется операция	Колонка, куда помещается результат	
1	$\times$	$v_2 \times v_4$	v_8	dn'
2	$\times$	$v_5 \times v_1$	v_9	$d'n$
3	$\times$	$v_4 \times v_0$	v_{10}	$n'm$
4	$\times$	$v_1 \times v_3$	v_{11}	nm'
5	—	$v_8 - v_9$	v_{12}	$dn' - d'n$
6	—	$v_{10} - v_{11}$	v_{13}	$n'm - nm'$
7	$\div$	v_{12}/v_{13}	v_{14}	$x = \frac{dn' - d'n}{n'm - nm'}$

Наряду с выяснением вопроса об уровне понимания идей программного управления и программирования при создании АМ представляют значительный интерес те примеры программ, которые Менабреа и Лавлейс приводят в своих работах.

Остановимся на примере Менабреа, в котором требуется решить систему уравнений $mx + ny = d$, $m'x + n'y = d'$. Значение x будет $(dn' - d'n)/(n'm - nm')$. Перед началом вычислений на колонки памяти заносятся следующие значения переменных: $v_0 = m$, $v_1 = n$, $v_2 = d$, $v_3 = m'$, $v_4 = n'$, $v_5 = d'$, $v_6 = n$, $v_7 = n'$. Программа вычислений представляется табл. 1. Объяснив работу машины при решении задачи по данной программе, Менабреа предлагает ряд улучшений. Прежде всего ряд карт операций используется многократно, например в данном случае четыре умножения подряд. Тем самым три карты умножения не несут никакой новой информации. Используя это обстоятельство, число карт операций можно уменьшить с семи до трех. При этом каждая карта операций удерживается в машине столько раз, сколько соответствующих операций необходимо выполнить подряд, в то время как переменные для этих операций меняются. Далее, память АМ устроена так, что после передачи числа из памяти в арифметическое устройство для выполнения какого-либо действия число в памяти не сохраняется,

хотя оно может потребоваться для дальнейших вычислений. Чтобы избежать ненужного стирания числа, вводятся карты переменных, которые содержат признак: сохраняется или нет содержимое колонки памяти после передачи ее в арифметическое устройство. Учитывая все это, Менабреа решает предыдущий пример более рационально, причем, вычисляя значения x и y , использует только три карты операций и дополнительно привлекает только три переменных.

Любое действительно автоматическое устройство должно обладать обратной связью. В программировании обратная связь выступает в виде условного перехода. Было ли это понятие у Беббиджа? Некоторые авторы считают, что в машине Беббиджа имелась операция условного перехода [2, с. 120]. Между тем мы приходим к выводу, что средств выполнения автоматического перехода от выполнения одной операции (карты) к другой, отделенной от первой несколькими картами, в АМ не было. Более того, в статье Менабреа даже выражается некоторое сомнение в необходимости выполнения машиной анализа вопроса, по какому пути направить дальнейшие вычисления. Но вместе с тем понятие условия необходимым образом возникает при любых достаточно сложных вычислениях, если мы хотим их автоматизировать.

Простейшим примером сигнализации о выполнении некоторого условия в процессе вычислений является звонок, который раздается в современных арифмометрах, когда вычитаемое больше уменьшаемого. Аналогичным образом сообщала о выполнении условия и АМ. Беббидж писал, что условием может служить, например, прохождение через нуль значения некоторой функции, но, по-видимому, аппаратура позволяла в качестве такой функции использовать только вычитание, которому подвергалось содержимое специального регистра. В случае наступления условия звонил звонок, и человек, работающий на машине, осуществлял переход на новую группу карт, цепочка карт для этого протягивалась вперед или назад до нужной карты, после вычисления возобновлялись. Данная реализация условного перехода во многом напоминает организацию авостов (аварийных остановок), например, на таких еще не полностью забытых ЭВМ, как М-20, где в случае деления на нуль машина останавливалась и при помощи сигнализации требовала вмешательства человека. Таким

образом, условный переход у Беббиджа состоял из автоматического прерывания по условию и из передачи управления, которое выполнялось человеком.

Одним из важнейших понятий программирования служит понятие цикла — группы операций, которая выполняется многократно. Объясняется это тем, что использование циклических (или итеративных) вычислительных методов является одним из простейших и эффективнейших методов, облегчающих использование вычислительных машин. Циклам уделяется весьма много внимания в работах Менабреа и Лавлейс, которые полностью осознали их значение.

Простейшим примером цикла, который приводит Менабреа, служит вычисление значения b^n . Перед началом вычисления на колонки v_1 и v_2 устанавливаются значения b и n . Тело цикла задается в данном случае одной картой, которая каждый раз одновременно служит указанием засылки в специальную регистрирующую аппаратуру значения счетчика n , уменьшающегося при этом на 1, и указанием выполнения умножения. При первом выполнении такой команды происходит умножение b на b и запись результата операции, т. е. в первой итерации b^2 , на место, где ранее хранился второй операнд. Одновременно с умножением происходит изменение содержимого счетчика. В следующих итерациях выполняется умножение b на b^2 , b на b^3 и т. д. до тех пор, пока значение счетчика не достигнет 0. (Начальное значение счетчика, как отмечает Менабреа, на единицу меньше содержимого v_2 , т. е. $n - 1$.)

Механизм выполнения циклов состоял в следующем. Карты укладывались последовательно друг за другом, образуя цепочку, так же как в станке Жаккара. Для выполнения некоторой группы операций повторно цепочка карт возвращалась назад до определенной карты, и все они вновь проходили через призму. Таким образом, одна и та же группа карт могла быть использована сколько угодно раз.

Значительное развитие понятия цикла принадлежит Лавлейс. Во-первых, ей принадлежит определение цикла: «Под циклом операций следует понимать любую группу операций, которая повторяется более одного раза», и далее: «Во многих случаях анализа имеет место повторяющаяся (recurring) группа одного или большего числа цик-

— первой релейной машиной с программным управлением, созданной в 1944 г. Г. Айкеном, то окажется, что АМ имела более развитую структуру. Команда MARK-1 занимала одну строку перфоленты, и код операции был не отделен от поля операндов. Тем самым MARK-1 был менее удобен для организации циклов по сравнению с АМ.

При организации вычислительных процессов обычно оказывается, что повторяются не только одни и те же наборы операций или переменных, но и возникает необходимость в вычислении одних и тех же констант или значений одних и тех же функций. Менабреа отмечает, что нецелесообразно каждый раз вычислять часто встречающуюся константу (например, π) или таблицы функций (например, логарифмов). Удобнее их значения постоянно хранить в памяти.

Но вместе с тем, как отмечает Менабреа, с точки зрения быстроты вычислений иногда выгоднее каждый раз производить вычисления нужных значений, а не искать нужное число в готовых, хранящихся в памяти таблицах функций. Для этого используются наборы перфокарт, которые можно подключать по ходу решения к любой задаче. Мы бы сказали теперь, что это был способ хранения информации не в виде перечисления всех объектов — данных, а в виде алгоритма, программы получения любого из этих объектов. Тем самым Менабреа уже затрагивает вопрос о противоречии между объемом таблиц данных, хранимых в готовой форме, и скоростью доступа к элементам этих таблиц, а также предлагает радикальный способ разрешения этого противоречия — хранить не данные, а программу. Вместе с тем здесь фактически вводится понятие подпрограммы. Заметим, что первые библиотеки стандартных подпрограмм появились лишь через некоторое время после ввода в строй первых электронных ЭВМ (EDSAC I, Кембриджский университет, 1949).

Подведем некоторые итоги, какие основные понятия программирования возникли у создателя АМ и его помощников:

- в первую очередь необходимо отметить сам принцип программного управления вычислительной машиной;

- неотъемлемой частью данного принципа служит принцип адресного указания операндов;

— важнейшим средством, позволяющим строить сложные программы, является условный переход и его частный случай — циклы;

— при использовании циклов необходимо возникает (зарождается) понятие модификации команд (операндов команд — адресов);

— стремление к созданию быстрых и надежных программ вплотную подводит к понятию подпрограммы.

Насколько глубоко сам Беббидж понимал значительность своего открытия? Структурно АМ по существу ничем не отличалась от современных нам ЭВМ. А. Тьюринг, например, [3] отмечает, что Лавлейс недооценивает роль вычислительной машины в связи с ее высказыванием: «Аналитическая машина не претендует на то, чтобы создавать что-то действительно новое. Машина может выполнить все то, что мы умеем ей предписать» [1, с. 284; 3, с. 43]. Но подобное заявление Лавлейс (а вместе с ней Биббиджа) скорее обусловлено не принижением возможностей АМ, а необходимостью объяснить консервативному обществу реальность и осуществимость проекта. В подтверждение этого можно привести высказывание Лавлейс о том, что машина в принципе способна выдавать «алгебраические результаты в буквенных обозначениях», что «было бы ошибкой считать, что, поскольку результаты машины даются в обозначениях более ограниченной науки [арифметики.— А. П. и О. П.], ее работа также ограничивается обозначениями этой области» [1, с. 273]. Вместе с тем Лавлейс замечает, что этот вопрос не актуален и приводит к значительному усложнению машины, несоразмерному с ожидаемыми преимуществами, так как «главным объектом изобретения при этом должен стать перевод (translation) на язык цифр основных формул анализа, уже известных нам» (там же). Или в другом месте. Аналитическую машину «можно в равной степени пускать в ход независимо от объекта, который обрабатывается (хотя при этом не может быть получена, конечно, никакая вещь). Механизм может работать не только с числами, но и с объектами, основные взаимосвязи между которыми можно выразить при помощи соотношений абстрактной науки операций и которые также должны легко приспособливаться к обозначениям этой науки и к механизму машины. Предположим, например, что такому выражению и применению поддаются основ-

ные соотношения между высотами звуков в гармонии и музыкальной композиции, тогда машина смогла бы сочинять тщательно, искусно и научно составленные произведения любой сложности и продолжительности» [1, с. 248—249].

Точно с таких же позиций следует рассматривать заявление Лавлейс о том, что между изобретением разностной машины и аналитической нет никакой связи и что создание этих машин проходило совершенно независимо [1, с. 225]. В действительности этим высказыванием Лавлейс лишь подчеркивает отличительную особенность аналитической машины от разностной, ее принципиальное отличие от всех предшествующих счетных машин.

Заключением работы Лавлейс служит пример программы, вычисляющей числа Бернулли, в составлении которой принимал участие и сам Беббидж. Разбор этого примера представляет исключительный интерес, поскольку величина, сложность и математическая постановка этой задачи не идут ни в какое сравнение с элементарными примерами, приводившимися ранее. Этот пример позволил Лавлейс в полной мере показать методику программирования на АМ и те преимущества, которые дает последняя при подходящем (итеративном) методе вычислений. Вместе с тем этот пример указывает и на возникающие при этом трудности.

Предвосхищая «открытие» программистов ЭВМ, Лавлейс, так же как и современные математики, начинает с постановки задачи, затем выбирает метод вычисления, удобный для программирования, и лишь тогда переходит к составлению программы.

За определение числа Бернулли Лавлейс берет следующее выражение ³:

$$B_{2n-1} = 2 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{(2\pi)^{2n}} \left\{ 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots \right\}.$$

Оно неудобно, так как требует суммирования ряда. Другая форма задания предпочтительнее ⁴:

³ В современной математике приняты другие обозначения для чисел Бернулли [4]. У Лавлейс $B_{2k} = 0$ для $k = 1, 2, \dots$; $B_1 = 1/6$, $B_3 = -1/30$, $B_5 = 1/42$ и т. д.

⁴ В [1] в качестве первого множителя ошибочно указано

$$\frac{+ 2^n}{(2^{2n} - 1) 2^{n-1}}.$$

$$B_{2n-1} = \frac{\pm 2n}{(2^{2n} - 1) 2^{2n-1}} \times \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} n^{2n-1}, \\ &-(n-2)^{2n-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{2n}{1} \right\}, \\ &+(n-2)^{2n-1} \left\{ 1 + \frac{2n}{1} + \frac{1}{2} \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \right\}, \\ &-(n-3)^{2n-1} \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n \cdot 2n - 1}{1 \cdot 2} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \end{aligned} \right\}, \\ &+ \dots \end{aligned} \right.$$

Но последняя формула представления B_{2n-1} имеет существенные недостатки. Во-первых, по такой формуле трудно организовать итеративные вычисления; во-вторых, результаты, которые были получены при вычислении чисел Бернулли с меньшим номером, не используются в дальнейших вычислениях. Поэтому Лавлейс выводит рекуррентную формулу:

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \left(\frac{2n}{2} \right) + B_3 \frac{2n(2n-1) \cdot (2n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \\ + B_5 \left(\frac{2n(2n-1) \dots (2n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \right) + \dots + B_{2n-1},$$

или

$$0 = A_0 + A_1 B_1 + A_3 B_3 + A_5 B_5 + \dots + B_{2n-1},$$

и принимает ее за основу метода вычисления.

Лишь теперь Лавлейс приступает к описанию программы. Вся программа имеет 25 операций (карт операций) и использует 13 колонок памяти для хранения промежуточных результатов (рабочих переменных) плюс необходимое число колонок для хранения результатов, по одной колонке на каждое число Бернулли. Карты операций и диаграмма, иллюстрирующая ход работы программы — изменение значений переменных при каждой операции, приводятся в табл. 2⁵.

⁵ Эта таблица заимствована из работы [1]. В ней содержится несколько ошибок. Некоторые из них могли возникнуть как опечатки, другие же являются принципиальными. Для профессио-

Лавлейс шаг за шагом подробно описывает всю программу. Вычисления состоят из последовательных серий. Номером серии служит значение переменной n . При $n = 1$ (в первой серии) вычисляется B_1 . Затем n увеличивается на 1 и вычисляется $B_{2n-1} = B_3$, при вычислении которого используется уже полученное значение B_1 , далее вычисляется B_5 с использованием B_1 и B_3 и т. д. Значения чисел Бернулли засылаются на колонку результатов V_{21} , V_{22} и т. д. На колонках V_1 и V_2 хранятся константы 1 и 2. Значением V_3 служит n .

Обратимся к разбору диаграммы. Каждая строка диаграммы соответствует определенной карте операций. Операции обозначаются символами $+$, $\times$, $-$, $\div$. В третьем столбце указано, над какими переменными производится действие, например ${}^1V_2 \times {}^1V_3$ (нижний индекс — номер переменной, о значении верхних индексов несколько позже). Четвертый столбец указывает, куда должен засылаться результат, например ${}^1V_4$, ${}^1V_5$, ${}^1V_6$. Следующий столбец таблицы показывает, значения каких переменных изменяются или не изменяются в результате выполнения операции. Верхний индекс в обозначении переменной говорит, сколько раз менялось значение переменной, причем ${}^0V_i = 0$. Именно таким значением обладают переменные $V_4, V_5, \dots, V_{13}$ и V_{24} перед началом вычислений. Переменные V_1, V_2 и V_3 перед началом счета (началом новой серии n) имеют ненулевые значения ${}^1V_1 = 1, {}^1V_2 = 2, {}^1V_3 = n$ (номер серии). Если значение изменяется, то это записывается как, например; ${}^1V_{11} = {}^2V_{11}$ (операция 5), т. е. V_n получает второе ненулевое значение. Если переменная устанавливается в 0, то пишется, например, ${}^2V_{11} = {}^0V_{11}$ (операция 6). Если значение сохраняется, то ${}^3V_{11} = {}^3V_{11}$ (операция 10) ⁶. Задержимся еще на описании

нального программиста это не покажется удивительным, так как программа подобной сложности, не будучи отлаженной на машине, практически всегда содержит ошибки. Мы исправили все намеченные нами ошибки в таблице, а также составили программу на ФОРТРАНе, которая моделирует программу Лавлейс (см. Приложение). Она позволит читателю точнее понять ход вычислений.

⁶ В современных ЭВМ при выборке числа из памяти состояние памяти не изменяется. В АМ при обычной передаче содержимого колонки в арифметическое устройство колонка обнулялась. Для сохранения значения использовались специальные карты переменных (Retaining Supply-cards).

Таблица 2

Номер операции	Название операции	Название операндов	Название ременной резульгата	Изменение значений переменных	Формула результата	Данные			
						${}^1V_1$	${}^1V_2$	${}^1V_3$	n
1	$\times$	${}^1V_2 \times {}^1V_3$	${}^1V_4, {}^1V_5, {}^1V_6$	${}^1V_2 = {}^1V_2$ ${}^1V_3 = {}^1V_3$	$2n$	•	2	•	n
2	—	${}^1V_4 - {}^1V_1$	$2V_4$	${}^1V_4 = 2V_4$ ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$2n - 1$	1	•	•	•
3	+	${}^1V_5 + {}^1V_1$	$2V_5$	${}^1V_5 = 2V_5$ ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$2n + 1$	1	•	•	•
*4	$\div$	$2V_4 \div 2V_5$	${}^1V_{11}$	$2V_5 = {}^0V_5$ $2V_4 = {}^0V_4$	$\frac{2n-1}{2n+1}$	•	•	•	•
5	$\div$	${}^1V_{11} \div {}^1V_2$	$2V_{11}$	${}^1V_{11} = 2V_{11}$ ${}^1V_2 = {}^1V_2$	$\frac{1}{n} \frac{2n-1}{2n+1}$	•	2	•	•
6	—	${}^0V_{13} - 2V_{11}$	${}^1V_{13}$	$2V_{11} = {}^0V_{11}$ ${}^0V_{13} = {}^1V_{13}$	$-\frac{1}{2} \frac{2n-1}{2n+1} = A_0$	•	•	•	•
7	—	${}^1V_3 - {}^1V_1$	${}^1V_{10}$	${}^1V_3 = {}^1V_3$ ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$n - 1 (= 3)$	1	•	•	n
8	+	${}^1V_2 + {}^0V_7$	${}^1V_7$	${}^1V_2 = {}^1V_2$ ${}^0V_7 = {}^1V_7$	$2 + 0 = 2$	•	2	•	•
9	$\div$	${}^1V_6 \div {}^1V_7$	${}^3V_{11}$	${}^1V_6 = {}^1V_6$ ${}^0V_{11} = {}^3V_{11}$	$\frac{2n}{2} = A_1$	•	•	•	•

Таблица 2 (продолжение)

10	$\times$	$1V_{21} \times 3V_{11}$	$1V_{12}$	$1V_{21} = 1V_{21}$ $3V_{11} = 3V_{11}$	$B_1 \frac{2n}{2} = B_1 A_1$	•	•	•
11	+	$1V_{12} + 1V_{13}$	$1V_{13}$	$1V_{12} = 0V_{12}$ $1V_{13} = 2V_{13}$	$-\frac{1}{2} \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \frac{2n}{2}$	•	•	•
12	-	$1V_{10} - 1V_1$	$2V_{10}$	$1V_{10} = 2V_{10}$ $1V_1 = 1V_1$	$n-2 (=2)$	1	1	•
13	-	$1V_6 - 1V_1$	$2V_6$	$1V_6 = 2V_6$ $1V_1 = 1V_1$	$2n-1$	1	•	•
14	+	$1V_1 + 1V_7$	$2V_7$	$1V_1 = 1V_1$ $1V_7 = 2V_7$	$2+1=3$	1	•	•
15	-	$2V_6 - 2V_7$	$1V_8$	$2V_6 = 2V_6$ $2V_7 = 3V_7$	$\frac{2n-1}{3}$	•	•	•
16	$\times$	$1V_8 \times 3V_{11}$	$4V_{11}$	$1V_8 = 0V_8$ $3V_{11} = 4V_{11}$	$\frac{2n}{2} \frac{2n-1}{3}$	•	•	•
17	-	$2V_6 - 1V_1$	$3V_6$	$2V_6 = 3V_6$ $1V_1 = 1V_1$	$2n-1$	1	•	•
18	+	$1V_1 + 2V_7$	$3V_7$	$2V_7 = 3V_7$ $1V_1 = 1V_1$	$3+1=4$	1	•	•
19	÷	$3V_6 \div 3V_7$	$1V_9$	$3V_6 = 3V_6$ $3V_7 = 3V_7$	$\frac{2n-2}{4}$	•	•	•
20	$\times$	$1V_9 \times 4V_{11}$	$5V_{11}$	$1V_9 = 0V_9$ $4V_{11} = 5V_{11}$	$\frac{2n}{2} \frac{2n-1}{3} \frac{2n-2}{4} = A_3$	•	•	•

Т а б л и ц а 2 (окончание)

Номер операции	Название операции	Название операндов	Название ременной ре- зультата	Изменение значений пе- ременных	Формула результата	Данные				
						${}^1V_1$	${}^1V_2$	${}^1V_3$	${}^1V_4$	n
21	$\times$	${}^1V_{23} \times {}^5V_{11}$	${}^0V_{12}$	${}^1V_{22} = {}^1V_{22}$ ${}^0V_{12} = {}^2V_{12}$	$B_3 \frac{2n}{2} \frac{2n-1}{3} \frac{2n-2}{4} = B_3 A_3$	•	•	•	•	•
22	+	${}^2V_{12} + {}^2V_{13}$	${}^3V_{13}$	${}^2V_{12} = {}^0V_{12}$ ${}^2V_{13} = {}^3V_{13}$	$A_0 + B_1 A_1 + B_3 A_3$	•	•	•	•	•
23	-	${}^2V_{10} - {}^1V_1$	${}^3V_{10}$	${}^2V_{10} = {}^3V_{10}$ ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$n - 3 (= 1)$	1	•	•	•	•
Здесь происходит повторение операций с № 13 по № 23										
*24	-	${}^0V_{24} - {}^4V_{13}$	${}^1V_{24}$	${}^4V_{13} = {}^0V_{13}$ ${}^0V_{24} = {}^1V_{24}$	B_7	•	•	•	•	•
25	+	${}^1V_1 + {}^1V_3$	${}^1V_3$	${}^1V_1 = {}^1V_1$ ${}^1V_3 = {}^1V_3$ ${}^5V_6 = {}^0V_6$ ${}^5V_7 = {}^0V_7$	$n + 1 = 4 + 1 = 5$	1	•	•	•	$n + 1$

Примечание. Программа, вычисляющая числа Бернулли, написанная Беббиджем и Лавлейс, и диаграмма, иллюстрирующая ход ее выполнения на отрезке, когда вычисляется B_7 . Исправления неточностей, обнаруженных авторами, отмечены звездочкой. Таблица заимствована из [1], где, помимо столбцов, соответствующих исходным данным (V_1, V_2, V_3), имеется еще 10 столбцов для рабочих переменных ($V_4 - V_{23}$) и 4 столбца для хранения результатов ($V_{21} - V_{24}$).

начальных значений. Кружочки под названием переменных означают диск, на котором хранится знак. Так как значения положительны, то кружочки пустые. Начальные значения V_{21} , V_{22} и V_{23} также были нулевыми, но таблица отражает состояние непосредственно перед началом вычислений $B_7 = B_{2 \cdot 4 - 1}$, на что указывает значение $V_3 = 4$. В данный момент на V_{21} , V_{22} и V_{23} стоят уже вычисленные значения $B_1 = 1/6$, $B_3 = -1/30$, $B_5 = 1/42$. Дробные числа в АМ изображались в виде десятичных дробей (число с фиксированной запятой в ЭВМ).

Первые семь операций используются в каждой серии. Результат этих вычислений сказывается на V_{13} и равен A_0 . Операция 7 вычитает из n единицу. Здесь происходит условный переход. Если V_{10} оказывается равным 0 (так было при вычислении $B_1, n = 1$), то должен произойти переход на операцию 24, которая засылает на колонку результата (при $n = 1$ это колонка V_{21} , а при $n = 4$ — V_{24}) значение очередного числа Бернулли. Операция 25 увеличивает n на 1. Здесь же V_5 и V_6 устанавливаются в нуль, и машина готова к вычислению следующего числа Бернулли; для чего происходит переход на операцию 1 — цикл. При $n = V_3 = 2$ вслед за операцией 7 выполняется операция 8, так как $n - 1 \neq 0$, но после операции 12, так как выполняется условие $V_{10} - 1$ (т. е. $n - 2 = 0$), происходит переход и выполняются операции 24 и 25. Теперь вычислено значение B_3 , управление передается на 1 команду, n задается равным 3, и начинается вычисление $B_5 = B_{2 \cdot 3 - 1}$. При $n = 3$ впервые используются все 25 карт операций, так как условия после операций 7 и 12 не выполняются: $n - 1$ и $n - 2 \neq 0$. По условию $n - 3 = 0$, после операции 23 мы переходим к выполнению следующей 24 операции. Если бы $n - 3 \neq 0$ (так будет при вычислении B_7), то управление необходимо было бы передать операции 13. Таким образом здесь условие равенства нулю значения V_{10} в действительности заменяется на обратное: условие неравенства нулю, когда происходит передача управления. Лавлейс, по-видимому, не обратила внимания на эту деталь.

Итак, выполняются операции (обозначения Лавлейс):
 (1...7), (24, 25) ... дает B_1 , $n = 1$,
 (1...7), (8...12), (24, 25) дает B_3 , $n = 2$,
 (1...7), (8...12), (13...23), (24, 25) дает B_5 , $n = 3$,
 (1...7), (8...12), 2(13...23), (24, 25) дает B_7 , $n = 4$,

$(1...7), (8...12), \Sigma (+1)^{n-2} (13...23), (24, 25)$ дает $B_{2n-1}, n=n$. $2(13...23)$ означает двукратное выполнение группы операций, т. е. $(13...23), (13...23)$. $\Sigma (+1)^{n-2} (13...23)$ означает повторение $(n-2)$ раза.

Программу для вычисления любого числа Бернулли Лавлейс записывает так:

$(1...7), (24, 25)$, в пределах от 1 до n : $\Sigma (+1)^n \{(1...7), (8...12)$, в пределах от 0 до $n-2$: $\Sigma (n-2)(13...23), (24, 25)\}$.

Обозначения $\Sigma (+1)^n$ и $\Sigma (n-2)$ различаются тем, что количество повторений (итераций) в первом случае определяется человеком и определяет фактически, сколько чисел Бернулли мы хотим вычислить. $\Sigma (n-2)$ обозначает цикл с изменяющимся числом повторений (varying), которое автоматически определяется счетчиком V_{10} .

Заметим, что циклы, которые использовались в данной программе, коренным образом отличаются от циклов, возникших в решении системы линейных уравнений. Там цикл образовывали только карты операций, и тем самым общее количество карт сокращалось лишь на четверть. Здесь в цикле используются все карты. Для вычисления любого числа Бернулли B_n ($n \geq 5$) используются 25 карт операций, 76 карт переменных, которые одинаковы для всех чисел Бернулли. Карты для указания переменных, хранящих уже вычисленные числа Бернулли (операция 21), и вычисляемое число (операция 24) меняются при каждой итерации. (Лавлейс [1, с. 293] указывает, что в операции 21 можно было бы использовать некоторую постоянную колонку, где хранится значение нужного числа Бернулли, но в действительности для аналитической машины это невозможно.)

Лавлейс не только приводит красивейшее решение поставленной задачи, но дает анализ, за счет чего достигнута такая значительная экономия карт и стройность программы. «Рассмотрев десять рабочих переменных в диаграмме, мы увидим, что, хотя значение любой из них (за исключением V_4 и V_5) происходит через ряд изменений, функция, которую каждая из них выполняет в данном вычислении, фиксирована и неизменна... Во всех вычислениях желательно так организовать процесс, чтобы функции, выполняемые переменными, могли быть настолько постоянны (uniform) и фиксированы, насколько это возможно» [1, с. 294]. Таким образом, с каждой переменной должно

ассоциироваться некоторое понятие, которое отображается значением этой переменной.

Бebbeдж в XIX в., по-видимому, в основном был известен своей энциклопедичностью. Для нас гений Беббиджа — это в первую очередь его аналитическая машина. Идея создания программно-управляемой вычислительной машины во времена, когда еще не существовало удобного арифмометра, — явление, которое не укладывается в наши представления о закономерном развитии науки эта идея была поистине гениальной. Но более того Беббидж заложил основы программирования на вычислительных машинах, он создал основные понятия и методы программирования. Он вскрыл главные трудности, которые возникнут в науке, появившейся лишь через сто лет после этого. Роль Менабреа и Лавлейс в развитии идей программирования, конечно, немаловажная. Статья Менабреа и комментарии Лавлейс — главный источник наших знаний об общем устройстве и предполагаемом использовании машины Беббиджа. Несомненно, что работа Менабреа и Лавлейс способствовала усовершенствованию ряда устройств АМ, в частности аппарата выборки чисел из памяти, устройства циклов и др. Но основные идеи их статей несомненно принадлежат Беббиджу. Какую роль сыграли работы Беббиджа? В чем заключается его главная заслуга? Если сказать, что он изобрел первую программно-управляемую машину, то это несправедливо: ткацкие станки Вокансона и Жаккара управлялись программой, отперфорированной на картах. Шаг, который совершил Беббидж, состоит в том, что он нашел универсальный способ общения с машиной. Команда (или последовательность команд) задавалась машине комбинациями пробивок на картах, т. е. некоторым двоичным представлением входной информации (то же, что у Жаккара), но машина воспринимает эту информацию как числа и оперирует над числами. Получив результат, она выводит его на карты (или печатает), и человек, в свою очередь, также воспринимает как числа. Именно это изобретение открыло дорогу повсеместному распространению ЭВМ, которые в отличие от машины Беббиджа лишь расширили спектр операций, включив в дополнение к арифметическим операции над строками битов, символов и другими объектами, несущими в себе некоторую информацию, которая может иметь нечисленный характер.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Модель программы Беббиджа, вычисляющей числа Бернулли

Для выяснения правильности программы, составленной Беббиджем, авторы смоделировали ее, записав текст программы на языке ФОРТРАН (версия ФОРТРАН IV в мониторной системе ДУБНА для ЭВМ БЭСМ-6). В результате программа, написанная на ФОРТРАНе, помогла обнаружить ряд ошибок в оригинале, некоторые из них (например, в команде 4), по-видимому, являются опечатками. Единственной принципиальной ошибкой в программе Беббиджа—Лавлейс является то, что результат вычисления B_1 попадает на колонку V_{21} с отрицательным знаком, что впоследствии уже делает невозможным дальнейшие вычисления. Мы решили исправить эту ошибку с максимальным вниманием к сохранению остальной части программы, для чего команду $24 \ V_{13} + V_{24} \rightarrow V_{24}$ заменили на $V_{24} - V_{13} \rightarrow V_{24}$ (здесь вместо V_{24} может стоять любая другая результирующая переменная V_{21} , V_{22} и т. д.). Модель программы, написанная на ФОРТРАНе, является строгим и формальным описанием программы Беббиджа—Лавлейс и поэтому может оказать важную помощь в понимании оригинала.

Приведем несколько пояснений к тексту фортрановской программы. В качестве аналогов колонок АМ выступают переменные ФОРТРАНа, которые в зависимости от назначения имеют целый или действительный тип (INTEGER, REAL). Начальное значение устанавливается в операторе DATA. Далее текст программы практически полностью повторяет источник. Метки при операторах (второй слева столбец чисел) соответствуют номерам команд в программе Беббиджа—Лавлейс. Операторы без меток появляются в том случае, если одну команду исходной программы приходится моделировать несколькими операторами ФОРТРАНа. Операторы IF стоят в местах условных переходов. В случае, если условие выполняется (например, $V_{10}.EQ.0$), т. е. V_{10} равно 0), осуществляется переход на оператор, который указывается меткой в операторе GOTO. Еще раз напомним, что, так как у Беббиджа не было подлинного условного перехода, эта операция всегда выполнялась не автоматически. Среди операторов ФОРТРАНа в данном примере часто встречается оператор вида $V_i = 0$, который у Беббиджа и Лавлейс записывается ${}^kV_i = {}^0V_i$ и выполнялся автоматически при считывании числа из памяти в арифметическое устройство.

Вслед за программой идет таблица чисел (трассировка), которая иллюстрирует ход вычислений. Для ее получения в самом на-

Таблица 3

```

PROGRAM AAL
INTEGER V1,
  - V2, V3, V10
REAL V4, V5, V6,
  V7, V8, V9, V11
REAL V12, V13,
  - V21, V22, V23,
  - V24
DATA (V1 = 1),
  - (V2 = 2),
  - (V3 = 1)
DATA (V4 = 0),
  - (V5 = 0),
  - (V6 = 0),
  - (V7 = 0)
DATA (V8 = 0),
  - (V9 = 0),
  - (V10 = 0)
DATA (V11 = 0),
  - (V12 = 0),
  - (V13 = 0)
DATA (V21 = 0),
  - (V22 = 0),
  - (V23 = 0),
  - (V24 = 0)
  1 V4 = V2 * V3
  2 V5 = V4
  3 V6 = V4
  4 2 V4 = V4 - V1
  5 3 V5 = V5 + V1
  6 4 V11 = V4/V5
  7 V5 = 0
  8 V4 = 0
  9 5 V11 = V11/V2
 10 6 V13 = V13 - V11
 11 V11 = 0
 12 7 V10 = V3 - V1
 13 100 IF (V10.EQ.0)
 14 - GOTO 24
 15 8 V7 = V2 + V7
 16 9 V11 = V6/V7
 17 10 V12 = V21 * V11
 18 11 V13 = V12 + V13
 19 V12 = 0
 20 12 V10 = V10 - V1
 21 110 IF (V10.EQ.0)
 22 - GOTO 24
 23 13 V6 = V6 - V1
 24 14 V7 = V1 + V7

```

```

25 15 V8 = V6/V7
26 16 V11 = V8 * V11
27 V8 = 0
28 17 V6 = V6 - V1
29 18 V7 = V1 + V7
30 19 V9 = V6/V7
31 20 V11 = V9 * V11
32 V9 = 0
33 21 IF ((V3*2-1).
  - EQ.5.OR.
  - (V3*2-1)
  - .EQ.7.AND.V.10.
  - NE.1)
  - GOTO 120
  C BN = B5 OR BN = B7
  C AND V10 = 1
35 V12 = V23 * V11
36 GOTO 22
37 120 V12 = V22 * V11
38 22 V13 = V12 + V13
39 V12 = 0
40 23 V10 = V10 - V1
41 130 IF (V10.EQ.0)
42 - GOTO 24
43 140 GOTO 13
44 24 IF (V3.NE.1)
45 - GOTO 141
46 V21 = V21 - V13
47 V13 = 0
48 GOTO 25
49 141 IF (V3.NE.2)
50 - GOTO 142
51 V22 = V22 - V13
52 V13 = 0
53 GOTO 25
54 142 IF (V3.NE.3)
55 - GOTO 143
56 V23 = V23 - V13
57 V13 = 0
58 GOTO 25
59 143 V24 = V24 - V13
60 25 V3 = V1 + V3
61 V6 = 0
62 V7 = 0
63 150 IF (V3.NE.5)
64 - GOTO 1
65 STOP
END

```

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10
0	1	2	4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.000	0.000	0
7	1	2	4	0.0	0.0	8.0	0.0	0.000	0.000	3
12	1	2	4	0.0	0.0	8.0	2.0	0.000	0.000	2
20	1	2	4	0.0	0.0	6.0	4.0	0.000	0.000	2
23	1	2	4	0.0	0.0	6.0	4.0	0.000	0.000	1
20	1	2	4	0.0	0.0	4.0	6.0	0.000	0.000	1
23	1	2	4	0.0	0.0	4.0	6.0	0.000	0.000	0
25	1	2	5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.000	0.000	0

Т а б л и ц а 4 (окончание)

	V11	V12	V13	V21	V22	V23	V24
0	0.000	0.00	0.0000	0.1667	-0.0333	0.0238	0.0000
7	0.000	0.00	-0.3889	0.1667	-0.0333	0.0238	0.0000
12	4.000	0.00	0.2778	0.1667	-0.0333	0.0238	0.0000
20	14.000	0.00	0.2778	0.1667	-0.0333	0.0238	0.0000
23	14.000	0.00	-0.1889	0.1667	-0.0333	0.0238	0.0000
20	9.333	0.00	-0.1889	0.1667	-0.0333	0.0238	0.0000
23	9.333	0.00	0.0333	0.1667	-0.0333	0.0238	0.0000
25	9.333	0.00	0.0333	0.1667	-0.0333	0.0238	0.0333

чале программы перед выполнением каждого условного перехода и по окончании программы мы печатали значения всех используемых переменных. Первый столбец табл. 4, указывает, после выполнения какой операции происходит печать. Начальному состоянию памяти соответствует строка, начинающаяся с нуля.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Charles Babbage and his calculating engines / Ed. by P. and E. Morrison. N. Y.: Dover Publ., 1964.
2. Апокин И. А., Майстров Л. Е. Развитие вычислительных машин. М.: Наука, 1974.
3. Тьюринг А. Может ли машина мыслить? М.: Физматгиз, 1960.
4. Корн Г., Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы. М.: Наука, 1970.

ВАЦЛАВ СЕРПИНСКИЙ

И. Г. Мельников

Выдающийся польский математик Вацлав Серпинский родился 14 марта 1882 г. в Варшаве. По окончании гимназии поступил в 1900 г. в Варшавский университет. Интерес к математике и незаурядные способности проявились у него еще в школьные годы и особенно развились во время учебы в университете, где под руководством профессора Г. Ф. Вороного, видного представителя Петербургской математической школы, началась научная деятельность Серпинского, причем прежде всего в области теории чисел. За конкурсное студенческое сочинение на тему, предложенную Г. Ф. Вороным, Серпинскому в 1904 г. была присуждена золотая модель и в том же году ему была присуждена степень кандидата математических наук. В своей первой научной работе, выполненной в духе идей Вороного, Серпинский улучшил один результат Гаусса, показав, что число $A(x)$ целых точек в круге $u^2 + v^2 \leq x$ оценивается асимптотической формулой $A(x) = \pi x + O(x^{1/3})$; у Гаусса второй член формулы был в современных обозначениях $O(x^{1/2})$. Вскоре после смерти Вороного Серпинский посвятил памяти своего учителя лекцию, прочитанную в конце 1908 г. во Львовском университете и опубликованную на польском языке в 1909 г.

В 1905 г. Серпинский после забастовки учащейся молодежи, в которой он принимал участие, уже будучи (с осени 1904 г.) преподавателем женской гимназии, переезжает в Краков и поступает в Ягеллонский университет. Здесь ему была присвоена степень доктора.

В 1908 г. Серпинский опубликовал свою первую работу по теории множеств, в которой дал найденное им неза-

висимо от Кантора доказательство того, что положение точки на плоскости можно определить с помощью одного действительного числа. С этого времени начинается его деятельность в области теории множеств и ее приложений к топологии, теории функций действительного переменного и другим математическим дисциплинам. Известность его быстро растет. В 1908 г. он начал преподавать во Львовском университете, и вскоре там ему было присуждено звание профессора.

В годы первой мировой войны Серпинский как житель г. Львова, входившего тогда в состав Австро-Венгрии, был интернирован русскими властями и направлен на жительство в г. Вятку. По ходатайству профессоров Московского университета Б. К. Млодзеевского и Д. Ф. Егорова ему было разрешено с 1915 г. проживать в Москве. Здесь он продолжал свою научную деятельность и установил полезные контакты с московскими математиками. Особенно дружественными они оказались у него с Н. Н. Лузиным, интенсивно работавшим в то время над проблемами теории функций действительного переменного и подготовившего фундаментальный труд «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915 г.). В 1915—1918 гг. Серпинский опубликовал 36 работ, из них 4 в соавторстве с Н. Н. Лузиным. Собственно, именно в эти годы появляются в *Comptes Rendus Академии наук Института Франции* его первые значительные работы по теории множеств; он сам писал об этом 9 мая 1966 г. автору этой статьи¹. Весной 1917 г. Краковская академия наук избрала Серпинского своим членом-корреспондентом.

По возвращении в 1918 г. в Польшу Серпинский был избран заведующим кафедрой Варшавского университета. Ведя исключительно интенсивную научную работу, он вместе с тем начал энергичную деятельность по созданию Польской математической школы, довольно быстро сплотив вокруг себя коллектив блестящих математиков.

¹ Именно упомянув статью 1908 г., Серпинский здесь говорил: «Но первые две мои работы по теории множеств, имеющие некоторое значение, были напечатаны только в 1916 г. Это ноты [т. е. заметки. — *И. М.*]: «Sur une courbe dont tout point est un point de ramification». — *Comptes Rendus Acad. Sciences Paris*, t. 160, p. 302—305 и «Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée» [там же. — *И. М.*], t. 162, p. 629—632» (письмо хранится у адресата).

В 1920 г. В. Серпинский, С. Мазуркевич и З. Янишевский основали журнал «Fundamenta mathematica», в котором публиковались труды по теории множеств, топологии, теории функций действительного переменного, математической логике и основаниям математики. Этот журнал остается и сегодня одним из главных изданий, где публикуются исследования по указанной тематике.

Необычайная творческая активность, выдающиеся педагогические и организационные способности Серпинского приносят ему заслуженное признание. В 1921 г. он был избран действительным членом Польской Академии наук.

В годы второй мировой войны Серпинский не прекращал научную работу и даже преподавал в подпольном университете. Отказавшись от предложенной ему кафедры в Мадридском университете, он служил своему народу всеми доступными ему средствами. После освобождения Польши, с февраля 1945 г. он некоторое время работал в Ягеллонском университете в Кракове, а осенью 1945 г. вернулся в Варшаву.

И вновь большая научная, педагогическая и организационная работа. За годы войны польская математика понесла огромные потери, составившие около половины профессорско-преподавательского состава, причем свыше двадцати видных математиков было убито гитлеровцами-расистами в концентрационных лагерях и сожжено в газовых камерах; значительное число ученых эмигрировало и не возвратилось в Польшу. Серпинскому принадлежит большая заслуга в деле восстановления математического потенциала Польской Народной Республики.

В 1949 г. Серпинский был награжден первой Государственной премией за научную деятельность. В 1952—1957 гг. он состоял вице-президентом Польской академии наук.

В апреле 1957 г. Серпинский принял участие в юбилейной научной сессии АН СССР, посвященной 250-летию со дня рождения Леонарда Эйлера, и выступил на ней с приветствием от Польской академии наук. В этом же году он возобновил издание международного журнала «Acta arithmetica», посвященного вопросам теории чисел.

В последние два десятилетия жизни Серпинский снова занялся вопросами теории чисел и вместе с А. Шинцелем и другими своими учениками существенно обогатил элементарную теорию чисел. Ряд его книг по теории чисел

и одна по теории множеств переведены на русский язык [1—6].

В Варшавском университете Серпинский преподавал до 1960 г. Но и после этого, уже в преклонном возрасте, он до конца жизни принимал большое участие в научно-организационной жизни страны как член Президиума Польской академии наук и как председатель Научного Совета ее Математического института, в котором руководил семинаром по теории чисел и работой ряда студентов.

Умер Серпинский 21 октября 1969 г.

Научная деятельность Вацлава Серпинского была на редкость плодотворной. Ему принадлежит более 700 публикаций, среди которых свыше трех десятков фундаментальных монографий, учебников и популярных книг — по теории чисел, теории множеств, классическому анализу и теории функций, по другим областям математики. В теории множеств он получил очень много глубоких и важных результатов, особенно в проблематике, пограничной между собственно теорией множеств и математической логикой. Здесь в первую очередь следует отметить изучение самим Серпинским, а затем и его многочисленными учениками обширного класса предложений, эквивалентных знаменитой континуум-гипотезе Кантора и так называемой аксиоме выбора Цермело, а также геометрических следствий этой аксиомы, зачастую внешне парадоксального характера. Наряду с Н. Н. Лузиным Серпинский является создателем теории проективных множеств.

Не менее плодотворна была и деятельность Вацлава Серпинского на педагогическом поприще. К огромному числу его учеников принадлежат такие выдающиеся математики, как К. Куратовский, С. Сакс, А. Тарский, А. Зигмунд, А. Линденбаум, Э. Марчевский, К. Борсук, А. Мостовский, А. Шинцель и многие другие.

Выдающиеся заслуги В. Серпинского получили широкое международное признание. Он был избран иностранным членом Академии наук Института Франции, Национальной академии деи Линчеи Италии, членом или членом-корреспондентом академий наук ГДР, Голландии, ЧССР, Международной академии философии (и одно время — ее вице-президентом) и т. д. Многие университеты Польши, Болгарии, Индии, Франции и других стран избрали его почетным доктором. В 1967 г. он был избран почетным доктором Московского университета, и доктор-

ский диплом вручил ему при посещении Варшавы ректор МГУ академик И. Г. Петровский.

Наибольшее число статей о жизни и деятельности Серпинского написано, естественно, на польском языке; в книге Анджея Шинцеля [7] их список содержит 13 названий. На русском языке можно указать статью [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Серпинский В.* Пифагоровы треугольники / Пер. под ред. и с примеч. С. И. Зетеля. М.: Учпедгиз, 1959.
2. *Серпинский В.* О решении уравнений в целых числах / Пер. И. Г. Мельникова. М.: Физматгиз, 1961.
3. *Серпинский В.* Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики. На границе геометрии и арифметики / Пер., предисл. и примеч. В. А. Голубева. М.: Учпедгиз, 1961.
4. *Серпинский В.* Что мы знаем и чего не знаем о простых числах / Пер. И. Г. Мельникова. М.; Л.: Физматгиз, 1963.
5. *Серпинский В.* О теории множеств / Пер. З. З. Рочинского. М.: Просвещение, 1966.
6. *Серпинский В.* 250 задач по элементарной теории чисел / Пер. с польск. И. Г. Мельникова. М.: Просвещение, 1968.
7. *Schinzel A. Wacław Sierpiński.* Warszawa, 1976.
8. *Мельников И. Г.* Выдающийся польский математик Вацлав Серпинский: (К 85-летию со дня рождения).— В кн.: В. Серпинский. 250 задач по элементарной теории чисел / Пер. И. Г. Мельникова. М.: Просвещение, 1968, с. 3—13.

ПИСЬМА В. СЕРПИНСКОГО К Н. Н. ЛУЗИНУ^{1*}

Варшава, 1/IX 1932

Глубокоуважаемый и дорогой

Николай Николаевич,

Я приехал на два дня в Варшаву и получил оба Ваши письма. С рукописью Вашей постараюсь устроить все самым лучшим образом². Буду говорить с Tonelli³. В крайнем случае всегда для нее охотно дадим место в Fundamenta⁴.

Что касается работ Hilbert'a⁵, то ими занимались у нас Lindenbaum⁶ и Куратовский⁷. Я их обоих попрошу написать Вам и дать нужный список работ. Куратовский сегодня со мной едет на Конгресс.

Что касается Mlle Braun⁸, то она решила и случай встречи в n точках. К несчастью она теперь психически больна и врачи запретили ей — надеемся на время только — заниматься наукой. Она в больнице для нервнобольных. Поэтому ее работа не могла появиться в XIX-м томе. Но мы все ее доказательства знаем точно и за нее сделаем редакцию работы, которая появится в XX-м томе⁹.

Через три часа уезжаю за границу. Поэтому кончаю писать и желаю Вам всего наилучшего. Глубокий поклон Надежде Михайловне¹⁰. Поклон и приветы от жены (Мотушь¹¹ еще в горах).

Искренне уважающий Вас и глубоко преданный Вам

Ваш В. Серпинский

Варшава, 8 февраля 1936

Дорогой Николай Николаевич, хочу Вам сообщить, что Hausdorff¹² прислал для 26-го тома Fundamenta Mathematicae работу, в которой он решил проблему, названную Вами (Annali Pisa Ser. II, vol.

* Публикацию подготовили В. А. Волков и Ф. А. Медведев. Текст Серпинского в современной транскрипции без исправления орфографических ошибок и грамматики. Примечания приведены в конце статьи.

11, p. 271: «une forme encore plus affaiblie du problème du continu»¹³.

Именно он доказал без помощи гипотезы $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, но пользуясь А. З.¹⁴, что прямая является суммой $\aleph_1$ возрастающих (в тесном смысле) множеств G_δ . Отсюда следует немедленно, что прямая является суммой $\aleph_1$, не пустых, не перекрывающихся множеств $F_{\sigma\delta}$.

Мысль его доказательства следующая. Он рассматривает мн-во $\mathcal{E}$ всех последовательностей $a = (a_1, a_2, \dots)$, где $a_n = 0$ или 1, и пишет $a < b$, если существует такое нат. число k , что $a_n \leq b_n$ для $n > k$, но для бесконечно многих n , $a_n < b_n$. При помощи двух лемм он доказывает затем **, что в $\mathcal{E}$ существует подмножество $\mathcal{H}$, образующее $\Omega\Omega^*$ — Lücke¹⁵. Потом он замещает последователь-

ности $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ точками мн-ва Cantor'а $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

Легко видеть, что в мн-ве Cantor'а мн-ва

$$F_n = E_x [a_n \leq x \leq b_n]$$

замкнуты, и, следовательно, мн-ва

$$\mathcal{F} = E_n [a \leq x \leq b] = \varliminf_n F_n = \sum_n F_n F_{n+1} F_{n+2} \dots$$

будут F_σ .

Пусть теперь мн-во $\mathcal{H}$ (образующее в $\mathcal{E}$ $\Omega\Omega^*$ -Lücke) состоит из точек a_ξ и b_ξ , где a_ξ возрастают (в $\mathcal{H}$), b_ξ малеют¹⁶ и $a_\xi < b_\xi$ (для $\xi < \Omega$). Тогда мн-ва

$$\mathcal{F}^\xi = E [a^\xi \leq x \leq b^\xi]$$

являются в множестве Cantor'а $\mathcal{F}_\sigma$ и малеют (в тесном смысле), ибо $a^\xi \in \mathcal{F}^\xi - \mathcal{F}^{\xi+1}$ для $\xi < \Omega$. Притом, т. к. мн-во $\mathcal{H}$ имело $\Omega\Omega^*$ -Lücke, то

$$\prod_{\xi < \Omega} \mathcal{F}^\xi = 0.$$

Дополнения мн-в $\mathcal{F}^\xi$ к прямой дают искомое разложение прямой на $\aleph_1$ разных, возрастающих G_δ . Разложение это:

$$\mathcal{X} = \sum_{\xi < \Omega} \Gamma_\xi$$

обладает еще, как доказывает Hausdorff, следующим свой-

** Употребляя А. З.

ством. Какова бы ни была, абсолютно аддитивная, неотрицательная мера $\underline{m}$, определенная хотя бы только для мн-в измеримых $\underline{B}$, существует такое $\mu < \Omega$, что

$$\underline{m} \left(\mathcal{X} - \sum_{\xi < \mu} \Gamma_{\xi} \right) = 0.$$

Подобное свойство имеет место по отношению к категории (относительно всякого совершенного мн-ва).

Вы конечно видите, какие интересные свойства отсюда вытекают, если, напр., из каждого Γ_{ξ} брать по одной точке.

Работу Hausdorff'a мы будем печатать вне очереди и как только будут корректуры, пришлем их Вам.

Небольшой, но милый результат получил Kurugui¹⁷: он заметил, что в пространстве Hilbert'a мн-во всех точек с рациональными координатами является в точности 3-го класса (именно $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$, которое не есть $G_{\delta\sigma}$)¹⁸. Куратовский доказал, что мн-во Lebesgue'a является одновременно $\mathcal{PCEC}(A)$ и $\mathcal{CEPC}(A)$, т. е. *ambigu* 3-го класса. Это вытекает из более общей теоремы Куратовского, по которой, при некоторых условиях, трансфинитная индукция не выводит из области проективных мн-в¹⁹.

Куратовский доказал также, что в разложении аналитического дополнения на конституанты $\sum_{\xi < \Omega} \mathcal{C}_{\xi}$, сумма тех из них, которых индекс есть число ε (такое, что $\omega^{\varepsilon} = \varepsilon$), есть мн-во CA . (Вы доказали, что A_{ρ} , т. е. разница двух $\underline{A}$).

Мы поэтому не послали еще в типографию Вашего мемуара²⁰, чтобы дать Вам возможность сделать в нем переделки ввиду результатов Куратовского, который в нескольких случаях получил более острые оценки классов мн-в. Кроме того часть Вашего мемуара посвящена мн-ву Lebesgue'a, которое теперь подробнее исследовано Куратовским. Правда, не вполне еще, ибо не знаем, нельзя ли найденной Куратовским оценки класса понизить.

Может быть лучше всего было бы послать Вам работу Куратовского, чтобы Вы могли с ней познакомиться?

Конечно с этим можно бы ждать до Вашего приезда, но дело в том, что Куратовский в апреле уезжает на несколько месяцев в Америку. Он приглашен в Princeton и несколько других американских университетов.

На кафедру, освобожденную в нашем университете после перехода Жоравского²¹ на пенсию, факультет наш

выбрал Сакса ²². На утверждение этого постановления придется подождать еще несколько месяцев.

Глубокий поклон Надежде Михайловне. Поклон и привет от жены и Мстуся.

Глубоко преданный Вам

Ваш

Вацлав.

Варшава, 4 мая 1936

Дорогой Николай Николаевич!

я не получил от Вас ответа на мое письмо, высланное Вам уже несколько недель тому назад. Denjoy ²³ приезжает к нам 17-го мая и пробудет до 23-го мая. Его «promotion» будет 20-го мая. Нам было бы очень удобно, чтобы и Ваша могла состояться того же дня. Ответьте мне, пожалуйста, возможно ли это. Скорый ответ необходим потому, что нужно еще напечатать диплом (с указанием в нем дня «promotion») и переслать Вам билеты ²⁴. Я Вам послал 15 отпечатанных уже на чисто листов 26-го тома «Fundamenta Mathematicae». На днях кончаем печатание этого тома. Ваш большой мемуар мы пока задержали, не получив от Вас ответа, не желаете ли Вы сделать в нем изменения (сокращения) по поводу появления в «Comptes Rendus Paris Note Куратовского о множестве Lebesgue'a ²⁵. Вскоре начнем печатание 27-го тома.

Не умею (даже при помощи гипотезы $2^{\aleph_0} = \aleph_1$) решить следующей проблемы:

Существует ли для всякой ϕ -ии Baire'a $f(x)$ (действ. переменного) и для всякого несчетного линейного мн-ва $\mathcal{E}$ такая несчетная часть $\mathcal{H}$ мн-ва $\mathcal{E}$, на которой ϕ -ия $f(x)$ непрерывна?

Проблемы этой я не умею решить даже для функций 1-го класса.

Глубокий поклон Надежде Михайловне. Поклон и привет от жены и Мстуся. Искренне преданный Вам

Ваш

Вацлав

Варшава, 7/V 1936.

Дорогой Николай Николаевич,

в дополнение к моему письму, высланному Вам третьего дня, спешу сообщить Вам, что мне удалось найти частич-

ное решение поставленной там проблемы. Именно мне удалось доказать при помощи гипотезы $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ существование функции $f(x)$ 4-го класса Baire'a и некоторого множества (линейного) $\mathcal{E}$, несчетного и такою, что функция $f(x)$ разрывна на всяком несчетном подмножестве множества $\mathcal{E}$. Метод мой не позволяет найти аналогичного результата для функции 1-го класса Baire'a ²⁶.

Искренне преданный Вам

Ваш

Вацлав

18 июля 1936 года

Осло

Дорогой Николай Николаевич,
Конгресс сегодня кончается. Наши доклады, Ваш и мой, должны были быть сегодня; как жаль, что только мой имел место ²⁷. Встретил здесь много участников последнего топологического конгресса, которые были в Москве в прошлом году: Heegaard'a, Lefschetz'a, Freudenthal'a ²⁸. Глубокий поклон Надежде Михайловне.

Искренне преданный Вам Ваш

Вацлав

ПРИМЕЧАНИЯ

1. Публикуемые выше пять писем В. Серпинского Н. Н. Лузину за 1932—1936 гг. хранятся в Архиве Академии наук СССР (фонд Н. Н. Лузина, № 606, оп. 1, дело 181, лл. 2—9) и все воспроизводятся здесь в современной орфографии (первое письмо Серпинского написано было в привычной ему тогда старой орфографии, последующие четыре уже в новой), но со всеми особенностями слога автора.

Письма Н. Н. Лузина к В. Серпинскому не обнаружены, и весьма вероятно, что они не сохранились. В письме к И. Г. Мельникову от 27 января 1959 г. Серпинский писал по поводу одной фотографии (именно снимка участников Международного конгресса математиков в Торонто, 1924 г.): «К сожалению эта фотография пропала во время войны вместе со всей моей библиотекой и архивом, в котором у меня, между прочим, были много писем ко мне моего друга, Н. Н. Лузина». Это письмо хранится у адресата, любезно разрешившего его процитировать.

2. Речь идет о рукописи работы Н. Н. Лузина «Sur les classes des constituants des complémentaires analytiques», представлявшей собой подготовленный текст доклада на IX Международном конгрессе математиков в Цюрихе (1932 г.). Н. Н. Лузин на конгрессе не присутствовал, и рукопись была передана для опубликования в итальянский журнал «Annali della Reale Scuola Normale superiore di Pisa, scienze fisiche e matematiche», где и появилась: serie 2, 1933, 2, 269—282. Рус. пер.: «О классах конститuant аналитических дополнений». — Н. Н. Лузин. Собрание сочинений, т. II, М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 627—641.
3. Л. Тонелли (Tonelli, Leonida; 1885—1946) — известный итальянский математик.
5. «Fundamenta mathematicae» — математический журнал, основанный в 1920 г. С. Мазуркевичем (Mazurkiewicz, Stefan; 1888—1945), В. Серпинским и З. Янишевским (Janiszewski, Zigmund; 1888—1920).
5. Д. Гильберт (1862—1943) — знаменитый немецкий математик. В письме имеются в виду работы Гильберта по основаниям математики; основные из них указаны в кн.: Д. Гильберт. Основания геометрии. М. — Л., Гостехиздат, 1948, с. 338. На русском языке имеются: «О бесконечном». — Там же, с. 338—364; «Обоснования математики». — Там же, с. 365—388; «Проблемы обоснования математики». — Там же, с. 389—399. Н. Н. Лузин сделал ряд общих замечаний о подходе Гильберта к проблеме обоснования математики в работе «Современное состояние теории функций действительного переменного» (Н. Н. Лузин. Собрание сочинений, т. II, с. 514—517).
6. А. Линденбаум (1904—1941) — известный польский математик.
7. К. Куратовский (р. 1896 г.) — известный польский математик.
8. С. Браун (Braun, Stefania) — польский математик; работала в области теории множеств.
9. Имеется в виду статья С. Браун «Некоторые теоремы о борелевских решетках» (S. Braun. Quelques théorèmes sur les cribles boreliens. — Fund. math., 1933, 20, 166—172).
10. Надежда Михайловна, ур. Малыгина, жена Н. Н. Лузина.
11. Сын В. К. Серпинского.
12. Ф. Хаусдорф (1868—1942) — известный немецкий математик.
13. В работе, указанной в примечании 2, Н. Н. Лузин писал: «Еще более слабой формой проблемы континуума является задача отыскать $\aleph_1$ измеримых B множеств, классы которых ограничены в совокупности» (Собрание сочинений, т. II, с. 629). О решении этой задачи и пишет Н. Н. Лузину В. Серпинский. Оно

- содержится в статье Ф. Хаусдорфа «Summen von $\aleph_1$ Mengen». — Fund. math., 1936, 26, 241—255.
14. А. З. — сокращение выражения «Axiome de Zermelo», т. е. «аксиома Цермело».
 15. Ω — порядковый тип вполне упорядоченного множества чисел первого и второго числовых классов; Ω^* — обратный для него порядковый тип; слово «Lücke» означает «пробел», «щель»; « $\Omega\Omega^*$ -пробел» строился Ф. Хаусдорфом при помощи множеств A, B , образованных соответственно точками a_ξ, b_ξ , ($\xi < \Omega$) такими, что a_ξ возрастают, а b_ξ убывают, и $\Omega\Omega^*$ -пробел получался тогда, когда не существовало x , удовлетворяющего условию $A < x < B$.
 16. Т. е. убывают.
 17. Кунуги К. (Kunugui K.) — японский математик.
 18. Этот результат опубликован: K. Kunugui. Sur un théorème d'existence dans la théorie des ensembles projectifs. — Fund. math., 1937, 29, 167—181.
 19. Имеется в виду множество Лебега, построенное в 1905 г. (H. Lebesgue. Sur les fonctions représentables analytiquement. — J. de math. pures et appl., sér. 6, 1905, 1, 139—216; построение этого множества описано на с. 213) с целью получить пример функции, не изображимой аналитически. Н. Н. Лузин неоднократно обращался к изучению этого множества (например, в кн. «Лекции об аналитических множествах и их приложениях». Собрание сочинений, т. II, с. 260—265). К. Куратовский установил, что это множество является проективным множеством самое большее третьего класса (предварительное сообщение в заметке «Sur un problème concernant l'induction transfinie». — Comptes rendus de l'Académie des sci. de Paris, 1936, 202, 1239—1241; развернутое изложение в статье «Les ensembles projectifs et l'induction transfinie». — Fund. math., 1936, 27, 269—276). Символы $\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{C}(A)$ и $\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{P}(A)$ означают классы проективных множеств; французское слово «ambigu» переводится как «двусмысленный» иди «двойственный» и употреблено здесь в том смысле, что множество Лебега принадлежит одновременно классам $\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{C}(A)$ и $\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{P}(A)$. Американский математик Д. фон Нейман (Neumann, John, von; 1903—1957) заметил, что проективный класс множества Лебега может быть понижен до двух. Этот результат был изложен в совместной статье К. Куратовского и Д. фон Неймана «On some analytic sets defined by transfinite induction». — Annals. of math., 1937, 38, 521—525. Заключение о классе множества Лебега К. Куратовский получил как следствие общей теоремы о том, что применение трансфинитной

индукции к проективным множествам не выводит за пределы области проективных множеств, о чем и сообщает Н. Н. Лузину В. К. Серпинский.

20. Указываемый мемуар Н. Н. Лузина не был опубликован.
21. К. Жоравский (Zorawski, Casimir) — польский геометр.
22. С. Сакс (1897—1942) — известный польский математик.
23. А. Данжуа (1884—1974) — французский математик; о нем см. «Историко-математические исследования», 1978, в. XXIII, с. 315—316.
24. Здесь, видимо, речь идет о присвоении Н. Н. Лузину почетного звания доктора. Предполагавшаяся поездка Лузина в Варшаву не состоялась.
25. См. примечания 19. Заметка Куратовского упоминалась в примечании 19.
26. Результаты В. К. Серпинского по этому вопросу опубликованы им: *Серпинский В. К.* О функциях первого класса. — ДАН СССР, 1936, III (XII), № 2, 47—48; *Sierpinski W.* Sur un problème concernant les fonctions de première classe. — *Fund. math.*, 1936, 27, 191—200; *Sierpinski W.* Sur un problème concernant les fonctions semi — continues. — *Fund. math.*, 1937, 28, 1—6 (третья работа напечатана также в «Oeuvres choisies de Sierpinski», v. III. Warszawa, PWN — Ed. sci. de Pologne, 1976, p. 329—333).
27. Речь идет о Международном конгрессе математиков в Осло (1936 г.). Н. Н. Лузин на конгрессе не был.
28. В. Серпинский имеет в виду Первую международную топологическую конференцию в Москве, состоявшуюся с 4 по 10 сентября 1935 г. На этой конференции присутствовало много зарубежных ученых, в том числе упомянутые В. Серпинским норвежский математик и историк математики П. Хегор (Heegaard, Poul; 1871—1948), известный американский математик С. Лефшец (Lefschetz, Solomon; 1884—1972) и голландский математик Г. Фрейденталь (Freudental, Hans, p. в 1905 г.).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абель Н. Х.** (N. H. Abel) 81, 105, 113, 119, 120
Абраамян А. Г. 32, 74
Абрагам М. (M. Abraham) 229
де Абреу Ж. М. (д'Абрэ, J. M. d'Abreu) 186, 187, 189
Абу-л-Вафа Мухаммед ибн Мухаммед ал-Бузджани 69, 70
Абу Камил Шуджа ибн Аслам ибн Мухаммед ал-Хасиб ал-Мисри 69
Авероез — см. **Ибн Рушд**
Адамар Ж. (J. Hadamard) 42
Айкен Г. (H. Aiken) 347
Аксенова Е. А. 78
Александров А. Д. 22, 30, 85
Александров П. С. 25, 28, 34, 36, 38, 42, 51, 55, 82, 246
Александрова Н. В. 52
Алексеев В. Г. 11
Алиев А. Г. 31
Алимов Н. Г. 62, 63
Аллан Л. (L. Allan) 246
Альберт Саксонский (Albert Saxonia) 89
Альстед И. Г. (J. H. Alsted) 271
Альхазен — см. **Ибн ал-Хайсам**
Ампер А. М. (A. M. Ampère) 209, 217
Андреев К. А. 12, 38
Андронов А. А. 81
Андронов И. К. 20, 28
Антропова В. И. 27, 42, 51, 78, 86
Апокин И. А. 83, 360
Аполлоний 37
Араго Д. Ф. (D. F. Arago) 138, 156, 162
Арбогаст Л. Ф. А. (Арбога, L. F. A. Arbogast) 121, 122, 127, 134, 137—141, 143—155
Ариабхата 39
Аристарх Самосский 93
Аристотель 44, 88, 93, 94, 99
Арно А. (A. Arnold) 262, 271, 273, 303
Арнольд И. В. 17, 20
Арнольд из Вилановы (Arnold de Villanova) 96
д'Арси Ф. (Ph. d'Arcy) 175
Артоболевский И. И. 36, 53
Архимед 13, 35, 39, 60, 63—66, 72, 88, 281, 284
Ахиезер Н. И. 31, 35, 38, 53, 54
Ахмед Бану Муса ибн Шакир 69, 71
Ахмедов А. 32, 69, 70
Ахмедов С. А. 69, 70
Ачиллини А. (A. Achillini) 89, 100
Бабаев В. Г. 27
Бальзак О. (H. Balzac) 163
Банаш С. (S. Banach) 7, 160, 167, 172, 173, 175—177
Бану Муса Мухаммед 69, 71
Бану Муса ал-Хасан 69, 71
Барановская Л. С. 68
Бари Н. К. 35, 54
Барроу И. (I. Barrow) 78, 279, 298
Бартельс М. Ф. (M. Bartels) 38, 154
Бар-Хиллел И. (J. Bar-Hillel) 224
Бахмутская Э. Я. 20, 24, 31, 38, 68, 77
Баше де Мезириак К. Г. (C. G. Bashet de Meziriac) 274
Башмакова И. Г. 22, 26—28, 31, 33, 35, 46, 51—53, 61—66, 76—78, 81, 86, 310, 311, 330
Баббидж Ч. (Ch. Babbage) 8, 139—143, 154, 156, 340—342, 344—346, 348, 349, 354, 357, 358, 360

- Беверидж Л. А. (L. A. Beveridge) 247
Беккер О. (O. Becker) 63, 310, 330
Бекман И. (I. Beekman) 93
Беллюстин В. К. 15
Белозеров С. Е. 20, 24, 30, 48, 83
Белый Ю. А. 28, 31, 45, 48
Белтрами Э. (E. Beltrami) 13
Бенедетти Ж. Б. (J. B. Benedetti) 89
Берёзкина Э. И. 27, 67, 68, 86
Беркли Дж. (G. Berkeley) 78, 79
Берли У. (Бурлей, W. Burleus) 89, 94, 103
Берман В. С. 216
Бернулли Даниил I (Daniel I Bernoulli) 35, 38, 49
Бернулли Иоганн I (Johann I Bernoulli) 79
Бернулли Иоганн III (Johann III Bernoulli) 125, 131, 155
Бернулли Яков I (Jacob I Bernoulli) 13, 54, 79, 349—351, 354—358
Бернштейн С. Н. 15, 25, 35, 36, 38, 39, 53, 54
Берте Ж. (J. Bertet) 286
Бертран Ж. (J. L. F. Bertrand) 46, 212
Беспамятных Н. Д. 31
Бессель Ф. В. (F. W. Bessel) 104, 186, 189, 190
де Бийете Г. Ф. (G. F. de Billetes) 371
Бирман К. Р. (K. R. Biermann) 41, 186, 259, 299, 302, 305
ал-Бируни Абу-р-Райхан Мухаммед ибн Ахмед 34, 36, 38, 69, 71
Блазий из Пармы — см. Пелакани Б.
Блох З. Ш. 53
Бляшке В. (W. Blaschke) 253, 255, 257
Бобынин В. В. 10—12, 14—16, 23, 38, 43, 44, 59, 159, 175
Боголюбов А. Н. 21, 31, 57, 82, 83, 157
Боголюбов Н. Н. 245
Боголюбов С. А. 15
Бодэ И. Э. (J. E. Bode) 122, 193
Боев Г. П. 30, 59
Бойер К. Б. (C. B. Boyer) 142, 157
Боль П. Г. 36, 38, 54
Больцано Б. (B. Bolzano) 80
Больцман Л. (L. Boltzmann) 244
Бомбелли Р. (R. Bombelli) 65, 76, 262, 275, 300, 304
Бонамико Ф. (F. Bonamici) 88, 89, 102
Бонне П. О. (P. O. Bonnet) 54
Бор Н. (N. Bohr) 228
Борель Э. (E. Borel) 116—118
Борн М. (M. Born) 228, 243, 246
Бородин А. И. 31
Бородин С. И. 39
Борсук К. (K. Borsuk) 364
Боссю Ш. (Ch. Bossut) 259, 300, 302
Бохенский И. М. (I. M. Bochenski) 77
Бошкович Р. (R. J. Bošcović, Boscovich) 159
Бояи Я. (J. Bolyai) 35, 51, 81
Брадвардин Т. (Th. Bradwardine) 73, 89
Браун С. (S. Braun) 366, 371
Брауэр Л. Э. (L. E. J. Brower) 54
Брашман Н. Д. 38
Брэншвиц Л. (L. Brunschvicg) 259, 300
Бржечка В. Ф. 80
Бринкли Дж. (J. Brinkley) 121, 122, 127, 133—139, 154, 156
Бриссон Б. (B. Brisson) 119, 153, 157
Бротек Я. (J. Brotek) 159
Броуер Л. (L. Brouwer) 17
Брэнкер Т. (Th. Brancker) 275
Брюс Р. (R. E. Bruce) 247
Брюс Я. В. 40
Бубнов Н. М. 13
Бугаев Н. В. 12, 42, 54, 55
Бугай А. С. 39
Булгаков П. Г. 38
Буль Дж. (G. Boole) 141, 143
Буняковский В. Я. 15, 38, 122, 154, 155
Бурбаки Н. (N. Bourbaki) 85, 86
Буридан Ж. (J. Buridan) 74, 89
Буркхард Г. (H. Burkhard) 175
Бурман (Burmman) 132, 142, 156, 157, 176

- Буссей У. (W. H. Bussey) 248, 249, 257
 Бусурина А. Е. 62
 Бутру П. (P. BOUTROUX) 259, 300
 Бычков В. П. 32, 53
 Бэр Р. Л. (R. L. Baire) 177, 179, 185, 369, 370
 Бюо Ж. (J. Buot) 277

 Вавилов С. И. 23, 25, 32, 35, 39
 Вайман А. А. 30, 60, 61
 Валлис Дж. (J. Wallis) 77, 263, 266, 267
 Вальтер из Одингтона (Walter de Odington) 96
 Ван Л. (L. Wang) 67
 Ван Сяо-гун 68
 ван дер Варден Б. Л. (B. L. van der Waerden) 65, 310, 330
 Варинг Э. (E. Waring) 78
 Васильев А. В. 11, 15, 43
 Ващенко-Захарченко М. Е. 12, 13, 38
 Вебер В. (W. Weber) 230, 237, 238
 Вебер Г. (H. Weber) 244
 Веблен О. (O. Veblen) 248, 249, 257
 Вейерштрасс К. Т. В. (K. Th. W. Weierstrass) 42, 47, 54
 Вейль Г. (H. Weyl) 17, 39, 227—229, 239, 241—246
 Вейнгертнер И. Х. (J. Ch. Weingartner) 133, 156
 Венков Б. А. 23, 36, 46, 81
 Веселовский И. Н. 14, 27, 28, 35, 39, 60, 62, 66, 74, 77, 330
 Вест Э. (E. West) 159, 168, 174
 Вёпке Ф. (F. Woepcke) 13
 Виет Ф. (F. Viète) 64, 65, 76, 267, 273—275, 278
 Визгин В. П. 28, 83, 226, 245, 246
 Вилейтнер Г. (H. Wieleitner) 21, 175, 216
 Вильсон К. (C. Wilson) 103
 Виноградов И. М. 35, 39, 53
 Винтер Э. (E. Winter) 40
 да Винчи Леонард (Leonard da Vinci) 102
 Вихерт Э. (E. Wiechert) 229

 Владимиров В. С. 28, 38
 Вокансон Ж. (J. Vancanson) 357
 Волков В. А. 366
 Волкова О. Ф. 68
 Володарский А. И. 27, 39, 68, 86
 Вольтерра В. (V. Volterra) 39
 Вороной Г. Ф. 36, 42, 55, 57, 361
 Вудхауз Р. (R. Woodhouse) 139
 Вуссинг Г. (H. Wussing) 216
 Выгодский М. Я. 16—21, 23, 24, 26, 32, 36, 46—48, 55, 59—62, 64, 67, 69, 75, 76, 330

 Габихт В. (W. Habicht) 41
 ал-Газали 44
 Газье Ф. (F. Gazier) 300
 Гайдук Ю. М. 31, 51
 Галанин Д. Д. 11
 Гален 95
 Галилей Г. (G. Galilei) 7, 21, 35, 88—103, 254
 Галлуа Ж. (J. Gallois) 263
 Галуа Э. (E. Galois) 21, 248
 Галченкова Р. И. 38, 46
 Гамильтон У. Р. (W. R. Hamilton) 80, 81, 138, 213, 216, 233, 243, 246
 Ганкель Г. (H. Hankel) 310, 330
 Гариг Г. Э. (G. E. Harig) 23
 Гаусс К. Ф. (C. F. Gauss) 7, 21, 34, 35, 39, 46, 51, 79, 81, 137, 154, 186, 188—190, 193, 197—199, 201, 216, 230, 237, 361
 Гаэтан Тиенский (Gaetanus de Tienis) 89, 90
 Гегель Г. В. Ф. (G. W. F. Hegel) 18
 Гейне Г. Э. (H. E. Heine) 222
 ван Гейрат Х. (H. van Heuraet) 270, 286
 фон Гельмгольц Г. (H. von Helmholtz) 13
 Гельфонд А. О. 17, 19, 20, 26, 28, 34, 36, 46, 82, 120
 Герард Брюссельский (Gerard of Brussels) 73
 Герберт (Gerberti) 13
 Герглоц Г. (G. Herglotz) 244
 Герман А. (A. Hermann) 246
 Герман Я. (J. Hermann) 49
 Геронимус Я. Л. 53
 Герхардт К. И. (C. I. Gerhardt) 259, 278, 300—302, 305

- Герцен А. И. 30
 Гершель Дж. (J. F. W. Herschel) 119, 122, 127, 139, 140, 142, 143, 154, 156, 157
 Гершель У. (W. Herschel) 136, 140
 Гёне А. (A. Hoene) 161
 Гёне-Вронский Ю. М. (J. M. Hoene-Wronski) 7, 158—177, 185
 Гиллиспи Ч. К. (Ch. C. Gillispie) 157, 216, 257
 Гильберт Д. (D. Hilbert) 8, 17, 19, 35, 81, 82, 226—246, 366, 368, 371
 Гинденбург К. Ф. (C. F. Hindenburg) 121, 127, 130—132, 140, 142, 148, 150, 153—156, 193
 Глаголев Н. А. 79
 Глейзер Г. И. 32
 Гливенко В. И. 17, 22, 55
 Глушков С. С. 31, 76, 77
 Гнеденко Б. Н. 21, 28, 31, 33, 36, 38, 49, 51, 54, 56, 81, 82, 86
 Голейзовский Н. 339
 Головинский И. А. 83, 104, 119, 258
 Голубев В. А. 365
 Голубев В. В. 53
 Гольдбах Х. (Ch. Goldbach) 9, 40, 41, 49
 Гончаров В. Л. 36, 53, 81, 120
 Горdevский Д. З. 38
 Горнер У. Дж. (W. G. Horner) 67
 Горфункель А. Х. 103
 Гофман Й. Э. (J. E. Hofmann) 68, 258, 259, 287, 293, 299—301, 303—307, 310, 330
 Гофман П. (P. Hofmann) 40
 Граве Д. А. 14, 24, 38, 39, 58
 Грассман Г. (H. Grassman) 80, 159, 208
 Граунт Дж. (J. Graunt) 271, 305
 Грацианская Л. Н. 31, 38
 Грегори Дж. (J. Gregori) 262, 273, 278, 284, 296, 304, 307
 Грек Максим 331
 Григорьев В. В. 10
 Григорьян А. Т. 27, 38, 39, 103
 Гроссман М. (M. Grossmann) 226, 230—232, 237, 245
 Грунерт И. А. (J. A. Grunert) 156
 Гудде Я. (J. Hudde) 267, 270, 275, 286
 Гульдин П. (P. Guldin) 267
 Гурьев С. Е. 38, 41
 Гусак А. А. 31, 53
 Гусев Н. В. 331
 Гуссов В. В. 54
 Гут Э. (E. Guth) 246
 Гуффье де Роаннез А. (A. Gouffier de Roannez) 262, 271
 Гюйгенс Х. (Ch. Huygens) 39, 77, 262, 263, 275, 276, 279, 285, 286, 296, 298, 303, 306
 Гюнтер Н. М. 22, 35
 ал-Даббах Джамаль 71
 Давенант Ч. (Ch. Davenant) 261, 273
 Давидов А. Ю. 38
 Даламбер Ж. (J. le R. d'Alembert) 41, 47—49, 191, 194, 207
 Данжуа А. (A. Denjoy) 8, 369, 373
 Дарбу Г. (G. Darboux) 129, 155
 Дари М. (M. Dary) 262
 Дахия С. А. 31
 Дебай П. (P. Debye) 228
 Дебон Ф. (F. de Beaune) 275, 283, 284
 Девис Г. Т. (H. T. Davis) 122, 155
 Дедекинд Ю. В. Р. (J. W. R. Dedekind) 13, 63, 80, 91, 100
 Дезарг Ж. (G. Desargues) 262, 268, 279, 300, 305
 Декарт Р. (R. Descartes) 21, 35, 39, 50, 70, 77, 93, 175, 216, 262, 267, 274, 275, 281, 283—286, 288, 293
 Делаамбр Ж. Б. Ж. (J. B. J. Delambre) 138, 162
 Делоне Б. Н. 14, 28, 34, 48, 53, 54, 56, 81, 82
 Демидов С. С. 27—29, 48, 81, 82, 191
 Демокрит 63
 Денисов А. П. 38
 Депман И. Я. 20, 30, 38, 45
 Деттонвилль — см. Паскаль Б.
 Джалалов Г. Д. 69
 ал-Джаухари ал-Аббас ибн Саид 71
 Джакомелли Р. (R. Giacomelli) 103

- Дикштейн С. (S. Dickstein) 159, 174, 175
 Дионисий 8, 331—333, 339
 Диофант 8, 35, 60, 65, 66, 310—315, 317—321, 323, 330
 Дирихле — см. Лежен-Дирихле
 Добровольский В. А. 27, 31, 38, 82
 Добровольский В. В. 53
 Долгов А. Н. 21
 Долин А. 225
 Домбровский Я. (J. Dombrowski) 161
 Дорофеева А. В. 26, 47, 81, 82
 Драбкин Д. Е. (J. E. Drabkin) 103
 Дрейк С. (S. Drake) 103
 Друде П. (P. Drude) 229
 Дубошин Г. Н. 155
 Дьедонне Ж. А. (J. A. Dieudonné) 87
 Дюамель Ж. М. К. (J. M. C. Duhamel) 52
 Дюгэм П. (P. Duhem) 72, 90, 91, 95, 102

 Евграфов М. А. 120
 Евдокс 63, 64, 70
 Евклид 9, 13, 35, 60—64, 66, 70, 71, 74, 89, 142, 249, 286, 315
 Еганиян А. М. 32, 62, 74, 75
 Егоров Д. Ф. 11, 12, 18, 35, 39, 58, 362
 Елизарьев И. 45
 Ермаков В. П. 38
 Еругин Н. П. 31

 Жаккар Ж. (J. Jacquard) 341, 345, 357
 Жаутыков О. А. 32
 Жемайтис Ю. З. 31
 Жергон Ж. Д. (J. D. Gergonne) 162, 175
 Жирар А. (A. Girard) 77
 Жоравский К. (K. Zorawski) 159, 175, 368, 373
 Жордан К. (C. Jordan) 222
 Жук Е. А. 339
 Жуковский Н. Е. 11
 Журавский А. М. 81, 175

 Зелиг К. 246
 Зенон Элейский 15, 44, 65, 101
 Зетель С. И. 365

 Зигмунд А. (A. Zygmund) 364
 Зильберштейн Л. (L. Silberstein) 254, 257
 Золотарёв Е. И. 22, 38, 42, 53, 57
 Зоммерфельд А. (A. Sommerfeld) 229, 241, 242, 244, 246
 Зубов В. П. 7, 27, 33, 34, 38, 40, 44, 45, 65, 72—74, 84, 91, 92, 103

 Ибн ал-Багдади Мухаммед ибн Абу ал-Баки 70
 Ибн Корра Абу-л-Хасан Сабит ас-Саби ал-Харрани 69—72
 Ибн Рушд Абу Валид Мухаммед ибн Ахмед 89
 Ибн Сина Абу Али ал-Хусейн ибн Абдулла 89
 Ибн ал-Хайсам Абу Али ал-Хасан ибн ал-Хасан 69, 71, 261, 278, 279, 297—299
 Ибрагимов И. И. 120
 Ибрагимов С. Г. 81
 Ибрахим ибн Синан ибн Сабит ибн Корра 69, 71
 Иван III Васильевич 332
 Иванов А. А. 331
 Игнациус Г. И. 38, 77
 Идельсон Н. И. 23, 25, 64
 Имшенецкий В. Г. 12
 Инген Марсилиус (Inguen Marsilius) 89
 Ишлинский А. Ю. 36

 Йост Р. (R. Jost) 245

 Кавальери Б. (B. Covalieri) 21, 76, 93, 98, 267
 Каган В. Ф. 12, 22, 36—38, 50, 81, 83
 Казале Д. (I. Casales) 92, 93, 96, 97
 Казорати Ф. (F. Casorati) 54
 Калленберг Г. В. М. (G. W. M. Kallenberg) 254, 257
 Кантор Г. (G. Cantor) 8, 13, 15, 80, 91, 218—225, 362, 364, 367
 Кантор М. (M. Cantor) 11, 18, 82, 306
 Канунов Н. Ф. 30, 39, 54
 ал-Караджи Абу Бакр Мухаммед ибн ал-Хасан 69
 Каратеодори К. (C. Carathéodory) 244

- Кардано Дж. (G. Cardano) 275
 Карно Л. (L. N. M. Carnot) 19, 21, 79
 Карпова Л. М. 27, 69, 70
 Картан Э. (E. Cartan) 208
 Кары-Ниязов Т. Н. 24, 32, 69
 Кассини Ж. (J. Cassini) 137
 Кастальский А. Е. 160, 161
 Касумханов Ф. А. 32, 69, 70
 Катин Ю. Е. 80
 Кауфман В. (W. Kaufmann) 22
 Кауфман Н. (N. Kaufmann 9 N. Mercator) 266
 Каучикас А. П. 31
 Кациавели Г. — см. Шилов Г. Е.
 ал-Каши Гийас ад-Дин Джем-шид 35, 69, 70
 Кеджори Ф. (F. Sajory) 12
 Кеплер И. (J. Kepler) 19, 21, 76, 77, 93, 123, 124, 130, 133, 137, 155, 156
 Кестнер А. Г. (A. G. Kästner) 192
 ал-Кинди Абу Юсуф ибн Исхак ибн Саббах 95
 Кирик Новгородец 9, 44
 Киро С. Н. 31
 Кирсанов В. С. 28
 Киселев А. А. 30, 41, 46, 54, 157, 160
 Клагет М. (M. Clagett) 73, 89, 97, 102, 103
 Кладо Т. Н. 40
 Клайн М. (M. Kline) 58, 59
 Клаус Е. М. 39
 Клебш Р. Ф. А. (R. F. A. Klebsch) 208
 Клейн Ф. (F. Klein) 13, 19, 21, 83, 86, 227, 233, 238, 241, 244, 246, 249
 Клеро А. К. (A. C. Clairaut) 41
 Клюгель Г. С. (G. S. Klügel) 122, 133, 153, 154, 156
 Кноблех Э. (E. Knobloch) 258, 259, 300, 302—306
 Ковалевская С. В. 35, 38, 42
 Кодаци Д. (D. Codazzi) 54
 Койрэ А. (A. Koyré) 88, 90, 93, 102, 103
 Коллинс Дж. (J. Collins) 297
 Коллинс Э. Д. 154
 Колмогоров А. Н. 17, 22, 25, 28, 36, 46, 54, 78, 84, 87
 де Кондорсе М. Ж. А. Н. Ка-рита (M. J. A. N. Caritat de Condorcet) 132
 Конторович П. Г. 51
 Контро В. С. (W. S. Contro) 258, 299
 Копелевич Ю. Х. 40
 Коперник Н. (M. Kopernik) 35, 77, 93
 Коренцова М. А. 32, 78
 Коркин А. Н. 38
 Корн Г. (G. Korn) 360
 Корн Т. (T. Korn) 360
 Королюк Л. Г. 31, 83
 Косолапов Ю. Ф. 31, 82
 Костабель П. (P. Costabel) 259, 300, 302
 Кострюков К. И. 42
 Костишко Т. (T. Kościuszko) 161
 Котек В. А. 31
 Котельников А. П. 36, 38, 254, 257
 Котельников С. К. 9, 41
 Коутс Р. (R. Cotes) 157
 Кочев В. А. 30
 Кочина П. Я. — см. Полубаринова-Кочина П. Я.
 Коши О. Л. (A. L. Cauchy) 7, 24, 52, 80, 191, 208—213, 215—217, 222—224
 Кошляков Н. С. 21
 Кравчук М. Ф. 24
 Крамар Ф. Д. 32, 38, 77, 78, 80
 Крамер Г. (G. Cramer) 48, 166, 170, 172, 205
 Крамер Э. (E. E. Kramer) 249
 Крамп К. (Ch. Kramp) 122, 153, 157, 164, 175
 Краснова-Бокатуева С. А. 27, 69—71
 Красоткина Т. А. 40
 Краузе В. (W. Krauze) 159, 175
 Крафт Г. В. (G. W. Krafft) 9, 41
 Крелле А. Л. (A. L. Crelle) 201
 Кристофель Э. Б. (E. B. Christoffel) 166
 Кромби А. (A. Crombie) 91, 103
 Кронекер Л. (L. Kronecker) 106, 171
 Кропотов А. И. 30, 38
 Круликовский Н. Н. 30
 Крупская Н. К. 28
 Крутикова М. В. 40
 Крылов А. Н. 13, 23, 25, 39

- Кубесов А. К. 27, 32, 36, 69—71
 Кудрявцев Л. Д. 56
 Кузаков В. К. 339
 Кузичева З. А. 81, 86
 Кузнецов Б. Г. 102
 Кузнецов В. И. 30
 Кузнецов В. М. 83
 Кузнецов П. И. 39
 Кузьмин Р. О. 30, 38, 53
 Кулябко Е. С. 38
 Кун Т. С. (T. S. Kuhn) 90, 103, 246
 Кунуги К. (K. Kunugui) 368, 372
 да Кунья Ж. А. (J. A. da Cunha) 7, 79, 186—190
 Курант Р. (R. Courant) 244
 Куратовский К. (K. Kuratowski) 364, 366, 368, 369, 371—373
 Курганов Н. Г. 38
 Курдюмова А. И. 175
 Кuroш А. Г. 22, 28, 55
 Курсе П. (P. Courcier) 262, 304
 Кутлумуратов Д. 32, 83, 131, 155
 Кутюра Л. (L. Couturat) 259, 287, 289, 298, 300, 306, 307
 Кушнир Е. А. 31, 83
 ал-Кушчи Али ал-Дин Али ибн Мухаммед 69, 72
 Кэли А. (A. Cayley) 143, 168, 208, 217, 249
 Кюн Г. (H. Kühn) 79
 Лавлейс А. А. (A. A. Lovelace) 140, 340, 341, 343, 345—351, 354—358
 Лаврентьев М. А. 34, 36, 39
 де Лагранж Ж. Л. (J. L. de Lagrange) 23, 41, 46, 47, 81, 110, 121, 123—134, 138, 139, 143, 144, 150, 151, 154—156, 160, 162, 163, 165—168, 171, 175, 176, 185, 191, 202, 206, 207, 211, 233
 Лакруа С. Ф. (S. F. Lacroix) 134, 138, 139, 152, 156, 162
 де Лалубер С. (S. de La Loubère) 262
 Ламберт И. Г. (J. H. Lambert) 35, 71, 132
 Ламэ Г. (G. Lamé) 52
 Ланде А. (A. Lande) 228
 Ланден Дж. (J. Landen) 19, 79
 Ланков А. В. 45
 Лантен Ж. Б. (J. B. Lantin) 271
 де Лаплас П. С. (P. S. de Laplace) 7, 83, 104—106, 112—115, 118—120, 128—130, 132, 134, 138, 139, 141, 142, 150, 153, 155, 162, 175
 Лаптев Б. Л. 25, 30, 37, 38, 42, 50, 51
 Лапшин В. И. 68
 Латышева К. Я. 38
 Лахтин Л. К. 11, 12
 Лебер А. (H. Lebesgue) 39, 82, 368, 369, 372
 Лебедев В. И. 15
 Лев Герсонид (Леви бен Гершон, Levi Ben Gerson) 71
 Леверье У. (U. Le Verrier) 141
 Левин В. И. 81
 Левитский Н. И. 53
 Лежандр А. М. (A. M. Legendre) 47, 132, 156, 162
 Лежен-Дирихле П. Г. (P. G. Lejeune-Dirichlet) 13, 21, 83
 Лейбман Э. Б. 31
 Лейбниц Г. В. (G. W. Leibniz) 8, 34, 35, 39, 64, 77—79, 93, 125, 200, 258—300, 302—307
 Лексель А. И. (A. J. Lexell) 41, 49, 132
 Ленин В. И. 28
 Леонтович Е. А. 81
 Летников А. В. 38
 Лефшец С. (S. Lefschetz) 370, 373
 Ли С. (S. Lie) 48, 208, 228, 256
 Ли-Янь 67
 Линденбаум А. (A. Lindenbaum) 364, 366, 371
 Линник Ю. В. 36, 49
 Листинг И. Б. (J. B. Listing) 21
 Лиувиль Ж. (J. Liouville) 159
 Лихин В. В. 31, 54
 Лихолетов И. И. 38, 80
 Лихтенберг Г. К. (G. C. Lichtenberg) 192, 193
 Лобачевский Н. И. 11, 15, 25, 34—37, 41, 43, 50, 51, 53, 57, 246, 248, 249, 253, 257
 Ломоносов М. В. 45
 де Лопиталь Г. Ф. А. (G. F. A. de l'Hospital) 21
 Лопшиц А. М. 38
 Лоран А. (A. Laurent) 175

- Лоренц Г. А. (H. A. Lorentz) 12, 228, 229, 243, 244, 257
 де Лорньа А. М. (A. M. de Lorgna) 122, 152, 153, 155
 Лузин Н. Н. 8, 17, 22, 35—37, 39, 54, 58, 78, 362, 364, 366, 369—373
 Лузина Н. М. 366, 369—371
 Лумисте Ю. Г. 31, 38
 Лунц Г. Л. 36, 51, 81
 Лурье С. Я. 19, 21, 23, 36, 39, 40, 47, 59, 63, 64, 76, 78
 Лысенко В. И. 27, 28, 38, 49
 Лю Хуэй 68
 Любименко И. И. 40
 Люилье С. (S. L'Huilier) 79
 Люккей П. (P. Luckey) 67
 Люстерник Л. А. 17, 28, 36, 54, 82, 157
 Ляпунов А. М. 11, 22, 35, 36, 42, 54, 57

 Магавира 68
 Магницкий Л. Ф. 11, 38, 45
 Мазуркевич С. (S. Mazurkiewicz) 363, 371
 Майер А. (A. Maier) 98, 103
 Майер А. Г. 36, 81
 Майер Т. С. (T. S. Mayer) 40
 Майнард Г. (G. Mainardi) 54
 Майстров Л. Е. 27, 38, 44, 53, 61, 62, 83, 86, 331, 339, 360
 Макларен Д. (D. McLaren) 247
 Маклорен К. (C. Maclaurin) 78
 Максвелл Дж. К. (J. C. Maxwell) 229, 232
 Малыгина Н. М. — см. Лузин Н. М.
 Мамедбейли Г. Д. 31, 36, 38, 69, 71
 Мандрыка А. П. 157
 Манин Ю. И. 82
 Манке Д. (D. Mahnke) 287, 289, 290, 296, 304—307
 Мансион П. (P. Mansion) 175, 217
 Мариотт Э. (E. Mariotte) 262, 263, 271, 273, 274, 292
 Марков А. А. (старший) 11, 35, 37, 42, 57
 Марков А. А. (младший) 36, 42
 Маркс К. (K. Marx) 18, 19, 25, 78
 Маркуш И. И. 31, 38
 Маркушевич А. И. 21, 28, 34, 47, 48, 54, 55, 63, 81, 83

 Марлиани Д. (G. Marliani) 89, 90
 Марон И. А. 28, 38, 42, 52
 Марчевский М. Н. 15, 31
 Марчевский Э. (E. Marczewski) 364
 Маскелин Н. (N. Maskelyne) 138
 Матвиевская Г. П. 30, 32, 36, 39—41, 46, 69, 70, 72, 74
 Медведев Ф. А. 27, 51, 64, 80—82, 86, 218, 366
 Медведева А. В. 53
 Медовой М. И. 69
 Мельников И. Г. 30, 41, 46, 77, 361, 365, 370
 Менабреа Л. Ф. (L. F. Menabrea) 340, 341, 343—345, 347, 357
 Менголи П. (P. Mengoli) 262, 272, 304
 Меньшов Д. Е. 36, 54
 Меркатор Н. — см. Кауфман Н.
 де Мерэ Ш. (Ch. de Méray) 271
 Мехра Дж. (J. Mehra) 227, 246
 Мёрфи Р. (R. Murphy) 143
 Ми Г. (G. Mie) 229, 232—242
 Мийе Дешаль К. Ф. (C. F. Milliet Dechales) 284
 Миками И. (Y. Mikami) 67
 Микулинский Г. Р. 56
 Мильман Д. И. 51
 Миндинг Е. Ф. А. (E. F. A. Minding) 15, 38
 Минин А. П. 12
 Минковский Г. (H. Minkowski) 228, 230, 244, 246, 253, 257
 Митропольский Ю. А. 36
 Митрофан 332
 Михайлов Г. К. 40
 Млодзеевский Б. К. 11, 38, 362
 Модзалевский Л. Б. 41
 Молин Ф. Э. 39, 54
 Молодший В. Н. 17, 28, 61, 79, 80, 83
 Мольвейде К. Б. (K. B. Mollweide) 156
 Молюков И. Д. 38
 Монж Г. (G. Monge) 21, 35, 48, 191, 194
 Монтюкла Ж. Э. (J. E. Montucla) 9
 де Монферрье А. С. (A. S. de Montferrier) 158, 159, 174
 Мор Г. (G. Mohr) 276, 296, 297
 де Морган А. (A. de Morgan) 143, 154, 168

- Морделл Л. Д. (L. J. Mordell) 65
 Мордудай-Болтовской Д. Д. 16,
 21, 30, 36, 66, 72, 77
 Морен К. Б. (J. B. Morin) 262,
 304
 Моррисон П. (P. Morrison) 360
 Моррисон Э. (E. Morrison) 360
 Мостовский А. (A. Mostowski) 364
 Мышкис А. Д. 31, 36, 38, 54
 Мюир Т. (T. Muir) 159, 166, 174

 Нагаева В. М. 42
 Налбандян М. Б. 30, 54
 Налетов И. З. 103
 Наполеон III 161
 ан-Насави Абу-л-Хасан Али ибн
 Ахмед 70
 Натансон И. П. 22
 Наумов И. А. 31, 38
 Нейгебауер О. (O. Neugebauer)
 21, 59—61, 65
 фон Нейман И. (Джон, J. von
 Neumann) 245, 372
 Некрасов П. А. 12
 Неморарий Иордан (Jordanus
 Nemorarius) 74
 Немыцкий В. В. 38
 Нетто Э. (E. Netto) 132, 156
 Нётер Э. (E. Noether), 233, 235,
 243, 244
 Нидем Дж. (J. Needham) 67
 Никифорова Т. Р. 38
 Николаи Ф. (C. F. Nicolai) 193
 Николай Кузанский (Nikolaus
 von Cues) 93
 Новы Л. (L. Nový) 157
 Норден А. П. 30, 36, 50, 81
 Нордстрём Г. (G. Nordström) 232
 Ньютон И. (I. Newton) 8, 13, 15,
 19, 21, 25, 35, 39, 77—79, 104,
 105, 133, 137, 167, 171, 173,
 194, 254, 268, 273, 276, 277,
 283, 305, 306

 Ожигова Е. П. 27, 30, 38, 42,
 54, 86, 121, 157
 Озанам Ж. (J. Ozanam) 262,
 271—274, 278, 286
 Оккам В. (W. Occam) 89, 94, 102
 Олейник О. А. 82
 Олоничев П. М. 31, 39, 54
 Ольденбург Г. (H. Oldenburg)
 261—263, 268, 283, 296, 297,
 304

 Олышки Л. (L. Olschki) 88, 102
 Ом М. (M. Ohm) 154
 Ондар Х. 32, 42
 Орбели И. А. 23, 74
 Орем Н. (N. Oresm) 35, 73, 74,
 89, 91, 92, 96—98, 103
 Осиповский Т. Ф. 38
 Остроградский М. В. 11, 15, 33,
 35—38, 40, 42, 50—53, 57
 Отрадных Ф. П. 30

 Павел Венецианский (Paulus
 Venetus) 89
 Пайнсон Л. Р. (L. R. Pyenson)
 244, 246
 Паплаускас А. Б. 27, 80, 82
 Папп 64, 277
 Парнасский И. В. 254, 257
 Паршин А. Н. 82, 86
 Паскаль Б. (B. Pascal, A. Det-
 tonville) 24, 39, 77, 262, 264,
 265, 268, 269, 271, 279, 280,
 300, 304, 305
 Паукер М. Г. 154
 Паули В. (W. Pauli) 227, 229,
 238, 241, 246
 Пекарский П. П. 10
 Пелакани Б. (B. Pelacini, Bla-
 sius Parma) 89, 97
 Пенроуз Р. (R. Penrose) 245
 Перельмутер И. А. 40
 Песин И. Н. 82
 Петерсон К. М. 11, 38, 54
 Петр Великий 10
 Петр Ломбардский (Peter Lom-
 bardus) 91
 Петренко А. К. 340
 Петренко О. Л. 340
 Петров А. З. 245
 Петрова С. С. 26, 29, 47, 78,
 82, 83, 120, 157, 158, 176
 Петровский И. Г. 365
 Петросян Г. Б. 20, 24, 32, 62,
 71, 74
 Петрушевский Ф. Ф. 13
 Пикок Дж. (G. Peacock) 139,
 143, 157
 Пирогова Э. К. 339
 Плана Дж. (G. A. A. Plana) 141
 Планк М. (M. Planck) 244
 Платон 18, 61, 88
 Плейфер Дж. (J. Playfair) 186
 Плоой Э. Б. (E. B. Plooi) 70
 Погорелов А. В. 81

- Погребынский И. Б. 21, 28, 31, 33, 36, 38—40, 42, 48, 51, 86, 103
 Пойя Д. (G. Pólya) 200, 216
 Полак Л. С. 23, 81, 246
 Полищук Е. М. 39
 Подубаринова-Кочина П. Я. 36, 38, 42
 Помпонацци П. (P. Pomponazzi) 89, 90, 95, 103
 Понселе Ж. В. (J. V. Poncelet) 48
 Понятовский С. А. (S. A. Poniatowski) 161
 Попов Г. Н. 15
 Порциано Д. (D. Portiano) 102
 Постников А. Г. 34
 Постников М. М. 56
 Престе Ж. (J. Prestet) 262, 304
 Привалов И. И. 35
 де Прони Р. (G. C. F. M. R. de Prony) 153
 Прудников В. Е. 28, 38, 42, 45
 Птолемей 93, 269
 Пуанкаре А. (H. Poincaré) 13, 35, 42, 65, 81, 222, 225, 253, 257, 330
 Пуассон С. (S. Poisson) 52, 81, 162, 230
 Путья Т. В. 38
 Пфафф И. Ф. (J. F. Pfaff) 7, 122, 123, 131, 132, 154, 156, 191—202, 206—209, 213, 215—217
 Рабинович И. М. 31, 36, 38, 54
 Раджагопал Г. Т. (G. T. Rajagopal) 68
 Раик А. Е. 30, 44, 60, 63, 67
 Райнд А. Г. (A. H. Rhind) 10, 59
 Райнов Т. Й. 23, 27, 43, 72
 Рамазанов С. А. 32
 Рамануджан С. 81
 Рамзай (Ramsay) 247
 Ран И. Г. (Рониус, J. H. Rahn, Rohnius) 275
 Раскин Н. М. 40
 Рассел У. Г. (W. H. Russel) 17, 91
 Рашевский П. К. 36, 38, 55, 81
 Рашед Р. (R. Rashed) 66, 70, 311
 Рейд К. (C. Reid) 246
 Рейзинь Л. Э. 31, 36
 Ремез Е. Я. 31, 36, 42, 51, 52
 Рен Х. (Ch. Wren) 286
 Рёмер О. (O. Römer) 262
 Риво А. (A. Rivaud) 258, 299
 Риман Б. (B. Riemann) 13, 35, 81, 230, 234, 237, 249
 Римини Г. (G. Rimini) 89, 91, 94, 102
 Риордан Дж. (J. Riordan) 175
 Ритц В. (W. Ritz) 229
 Рихман Г. В. 103
 Риччи Г. (M. M. G. Ricci) 231, 239
 де Роберваль Ж. П. (G. P. de Roberval) 262
 Робинсон Г. (G. Robinson) 175
 Рогаченко В. Ф. 51
 фон Роде И. Ф. (J. Ph. Rohde) 131
 Рожанская М. М. 28, 38, 69, 71, 72
 Розенфельд Б. А. 27, 28, 32, 33, 36, 38, 40, 48, 50, 56, 69—72, 75—77, 83, 84, 86, 247, 257
 Ролль М. (M. Rolle) 79
 Романовская Д. А. 158, 176
 Россинский С. Д. 54
 Роте Г. А. (H. A. Rothe) 131, 154
 Рочинский З. З. 365
 Рублев А. 331, 332
 Рудаков А. Н. 86
 ар-Руми Кази-заде Салах ад-Дин Муса ибн Мухаммед 69
 Румовский С. Я. 41
 Рутисхаузер Г. (H. Rutishauser) 175
 Руффини П. (P. Ruffini) 67
 Рыбаков Б. А. 44
 Рыбкин Г. Ф. 29
 Рыбников К. А. 19, 20, 24—27, 29, 32, 33, 38, 47, 50, 77, 78, 81—83, 85
 Ряго Г. Н. 31
 Сабит ибн Корра — см. Ибн Корра
 Сабра А. (A. Sabra) 71
 Садыков Х. У. 32
 Саккери Дж. (G. Saccheri) 71
 Саккробоско (Sacrobosco) 74
 Сакс С. (S. Saks) 364, 369, 373
 Салтыков-Щедрин М. Е. 97
 Самойленко И. Н. 79
 де Санито Мартино Я. (J. de Sancto Martino) 97

- Святослав 44
 Сегал Б. И. 21
 де Сен Венсан Григорий (Gregorius a St. Vincentio) 262, 264, 267, 284
 Сервуа Ф. Ж. (F. J. Servois) 122, 143, 153, 157
 Серпинский В. К. (W. Sierpiński) 8, 222, 224, 361—366, 369—371, 373
 Серпинский М. (M. Sierpiński) 361, 369
 Серре Ж. А. (J. A. Serret) 212
 Силаков В. Д. 54
 Сильвестр Дж. Дж. (J. J. Sylvester) 143
 Симонов Н. И. 28, 31, 33, 47—49, 82
 Симонов Р. А. 28, 38, 44
 Симпликий 98
 Синцов Д. М. 10, 24, 38, 246
 Сираджинов С. Х. 32, 72
 Скриба Ч. Д. (Ch. J. Scriba) 306
 Славутин Е. И. 27, 66, 76, 86, 310, 330
 де Слюз Р. Ф. (R. F. de Sluse) 262, 267, 275, 279, 281, 284, 298, 304
 Смирнов В. И. 22, 25, 29, 30, 32, 36, 38, 39, 41, 42, 49, 53, 56
 Смирнов Н. И. 86
 Смит Д. Е. (D. E. Smith) 71
 Смородинский Я. А. 245
 Собиров Г. С. 32, 69, 71, 72
 Соболев С. Л. 36
 Соколовская З. К. 38
 Сократ 99
 Сологуб В. С. 31, 82
 Sommerвиль Дж. (J. Sommerville) 247
 Sommerвиль Д. М. Я. (D. M. Y. Sommerville) 8, 247—250, 252—257
 Сомов И. И. 38, 50
 Сонин Н. Я. 11, 35, 38
 Сорокина Л. А. 52, 77, 81
 Софронов М. 38, 41
 Сохоцкий Ю. В. 54
 Спасский И. Г. 30, 45
 Сретенский Л. Н. 34, 36, 81
 Стеклов В. А. 11, 14, 15, 22, 37, 38
 Степанов В. В. 21, 28, 36, 38, 81
 Стилтес Т. А. (Th. J. Stieltjes) 35
 Стирлинг Дж. (J. Stirling) 40, 104
 Стройк Д. Я. (D. J. Struik) 86
 Струве В. В. 23, 59
 Стюарт М. (M. Stuart) 48
 Стяжкин Н. И. 54, 82
 Суворов А. В. 161
 Суворов С. Г. 246
 Суворов Ф. М. 39, 54
 Суисет Р. С. (Суайнсхед, R. S. Suisset) 74, 89, 95, 99, 103
 Султанов Р. М. 71
 Сунь-цзи 68
 Сухомлинов М. И. 10
 Сушкевич А. К. 21, 24, 31, 54
 ван Схоотен Ф. (F. van Schooten) 274, 275, 288
 Таги-заде А. К. 27, 69, 71
 Таке А. (A. Tacquet) 9, 13
 Тамм И. Е. 245
 Тарский А. (A. Tarski) 364
 Татон Р. (R. Taton) 41, 157
 Тейлор Б. (B. Teylor) 105, 126, 129, 133, 134, 144, 145, 167, 170, 171, 173, 176, 185
 Теон 269
 Тейффер Г. А. (H. Au. Toepfer) 132
 Тёрнболл Г. У. (H. W. Turnbull) 249, 257
 Тимирязев К. А. 19
 Тимченко И. Ю. 10, 12, 15, 19, 24, 31, 189, 190
 Тлашев Х. 32, 69
 Токарева Т. А. 27, 74
 Томонага С. (C. Tomonaga) 245
 Тонелли Л. (L. Tonelli) 366, 371
 Торричелли Э. (E. Torricelli) 77
 Тот Д. И. (D. I. Toth) 62
 Тумаков И. М. 39
 Туманян Т. Г. 32, 74
 Тураев Б. А. 23
 ат-Туси Насир ад-Дин Абу Джафар Мухаммед ибн Мухаммед 33, 35, 36, 38, 69—71
 Тьюринг А. М. (A. M. Turing) 348, 360
 Тюлина И. А. 26, 29
 Тюрю-Данжен Ф. (F. Thureau-Dangin) 61
 Уайтман А. (A. Whitman) 245

Вайтсайд Д. Т. (D. T. White-
 side) 78
 Уиттекер Е. Т. (E. T. Wittaker)
 175
 Уиш Ч. М. (C. M. Whish) 68
 Улугбек Мирза Мухаммед ибн
 Шахрух ибн Тимур 69
 Урысон П. С. 36

 Фаак М. (M. Faak) 305
 Фабри О. (H. Fabri) 262, 303
 Фаварро А. (A. Favaro) 88
 Фаддеев Д. К. 82
 Фано Дж. (G. Fano) 248
 ал-Фараби Абу Наср Мухаммед
 ибн Мухаммед 34—36, 69, 71
 Фейнман Р. (R. Feynman) 245
 Фель С. Е. 45
 Феодосий 331
 Фергюсон И. Я. (J. J. Ferguson)
 279, 297, 298
 де Ферма П. (P. de Fermat) 21,
 46, 65, 66, 76, 77, 267, 272, 281,
 330
 дель Ферро Ш. (S. del Ferro) 275
 Фиников С. П. 21
 Фихтенгольц Г. М. 21
 Фогель К. (K. Vogel) 68, 69
 Фомин С. В. 55
 Форбс Э. (E. Forbes) 40
 Форман П. (P. Forman) 246
 Форсайт А. Р. (A. R. Forsyth)
 204, 217
 Фрадлин Б. Н. 38
 Франкль Ф. И. 28, 36, 47
 Франкфурт У. И. 39, 77
 Франсе Ж. Ф. (J. F. Français)
 122, 143, 152—155, 157
 Франсе Ф. Ж. (F. J. Français)
 122, 143, 152—155, 157
 Фредгольм И. (J. Fredholm) 81
 Фрейденталь Г. (H. Freudent-
 hal) 370, 373
 Френикль де Бесси Б. (B. Fre-
 nicle de Bessy) 271, 273
 Френк А. М. 39, 77
 Френкель А. А. (A. Fränkel)
 224
 Фробениус Ф. Г. (F. G. Frobe-
 nius) 166, 208
 Фурье Ж. (J. B. J. Fourier) 51,
 52
 Фусс Н. И. (N. Fuss) 11, 38, 41,
 48, 49

Фусс П. Н. 41

Хааг Р. (R. Naag) 245, 300, 306
 Хазенорль Ф. (F. Hasenöhr) 244
 Хайретдинова Н. Г. 27, 69, 71
 Хайям Абу-л-Фатх Омар ибн
 Ибрахим 35, 38, 69—71
 Халилов З. И. 32, 36
 Хансен П. А. (P. A. Hansen) 141
 Харди Г. Г. (G. H. Hardy) 175
 Хаусдорф Ф. (F. Hausdorff)
 366—368, 371, 372
 Хегор П. (P. Heegaard) 370, 373
 Хейлброн Дж. Л. (J. L. Heil-
 bron) 246
 Хейтесбери У. (W. Heytesbury)
 89, 90, 97, 99, 103
 Хепп К. (K. Hepp) 245
 Хериот Дж. (J. Hariot) 247
 Хилькевич Э. К. 51
 Хинчин А. Я. 17, 21
 Хованский А. Н. 47
 Хокинг С. В. (S. W. Hawking)
 245
 ал-Хорезми Абу Абдулла Му-
 хаммед ибн Муса ал-Маджуси
 35, 36, 69

 Цейтен И. Г. (H. G. Zeuthen) 18,
 21, 62, 65, 310, 330
 Цермело Е. (E. Zermelo) 8, 218,
 220, 222—225, 364, 372
 Цхакая Д. Г. 24, 32, 74, 75
 Цянь Бао-цзун 67

 Чаевич (Czajewicz) 159
 Чайковский Н. А. 31
 Чахленкова Т. Г. 257
 Чеботарев Н. Г. 14, 22—25, 36,
 39, 51, 79, 81
 Чебышев П. Л. 11, 15, 34—39,
 42, 46, 50, 53, 55, 58
 Чева Т. (T. Ceva) 48
 Черепнин Л. В. 44
 Черняев М. П. 30
 Чириков М. В. 78, 86
 фон Чирнгауз Е. В. (E. W. von
 Tschirnhaus) 265, 266, 270,
 273, 276, 279, 285, 297
 Чогошвили Г. С. 32
 Чудинов Э. И. 246
 Чупров А. А. 42

 Шамс ад-Дин ас-Самарканди 71
 Шапиро Г. М. 20

Шарбонье П. (P. Charbonnier) 152, 157
 Шарпи П. (P. Charpit) 191, 211
 Шатунова Е. С. 79
 Шатуновский С. О. 16, 38
 Шафаревич И. Р. 21, 36
 Швайнс Ф. Ф. (F. F. Schweins) 119
 Шварцшильд К. (K. Schwarzschild) 229
 Швецов К. И. 31, 45
 Швингер Дж. (J. Schwinger) 245
 Шевелев Ф. Я. 42
 Шевырев С. П. 10
 Шейнин О. Б. 28, 49, 83, 86
 Шереметевский В. П. 12, 13
 Шилов Г. Е. 28, 55, 83
 Шинцель А. (A. Schinzel) 363—365
 Ширакаци Ананий 23
 Широков В. С. 74, 88, 103
 Широков П. А. 25
 Школенок Г. А. 79, 81
 Шмидт О. Ю. 14, 17, 22, 36, 39
 Шнирельман Л. Г. 17
 Шольц Л. (L. Scholtz) 259, 300, 302
 Шостак Р. Я. 38
 Шраер М. Г. 31, 82
 Шрейдер С. Н. 74
 Шрёдер К. (K. Schröder) 34
 Шталь К. Д. (C. D. M. Stahl) 132, 156
 Стокало И. З. 21, 31, 33, 36, 51, 57, 157
 Струбеккер К. (K. Strubecker) 254, 257
 Штыкан А. Б. 30, 79
 Шуберт Ф. И. (F. J. von Schubert) 41, 49
 Шуллер Г. Г. (G. H. Schuller) 297

Шюке Н. (N. Chuquet) 74
 Эвальд П. (P. Ewald) 228
 Эгидий Романский (Egidius Romanus) 94, 98
 Эйлер Л. (L. Euler) 17, 21, 23, 24, 34, 35, 37, 39—41, 45—49, 58, 65, 78, 79, 81, 82, 131, 150, 173, 188, 191—194, 207, 233, 277, 363
 Эйнштейн А. (A. Einstein) 8, 226—228, 230—246, 257
 Элер К. (C. Ehler) 79
 Энгельс Ф. (F. Engels) 77
 Энестрём Г. (G. Eneström) 288, 306
 Эрани Т. (T. Erani) 71
 Эренфест П. (P. Ehrenfest) 242, 244
 Эрмит Ш. (Ch. Hermite) 42
 Эшенбах И. К. (H. K. Eschenbach) 122

Юсупов Н. В. 24, 69
 Юшкевич А.-А. П. 8, 9, 87, 102, 103, 157, 175, 186, 190, 216
 Юшкевич П. С. 225, 330

Яглом И. М. 39, 216
 Якоби К. Г. Я. (K. G. J. Jacobi) 47, 65, 164, 175, 192, 201—204, 208, 213, 216, 217
 Якунин П. Ф. 42
 Ямщиков С. 339
 Янден Ж. (J. de Janduno) 99
 Янишевский З. (Z. Janiszewski) 363, 371
 Яновская С. А. 16—20, 23, 25, 26, 30, 50, 60, 61, 65, 77—80
 Ясинская Е. У. 257

УДК 512(091)

Советские исследования по истории математики за шестьдесят лет (1917—1977). А. П. Ю ш к е в и ч. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 9—87.

Статья содержит анализ основных направлений исследований по истории математики, проведенных в СССР за шестьдесят лет после Великой Октябрьской социалистической революции.

УДК 512(091)

Галилей и средневековая математика. Ш и р о к о в В. С. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 88—103.

В статье анализируется вопрос о роли средневековой теории широт и долгот форм в формировании математического аппарата, использованного Галилеем в его исследованиях по механике.

Библ. 34 назв.

УДК 512(091)

Интерполяционные ряды Лапласа. Г о л о в и н с к и й И. А. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 104—120.

Интерполяционные ряды, полученные Лапласом в «Мемуаре о последовательностях» (опубликовано в 1782 г.), анализируются с точки зрения их конструкции при помощи системы функционалов и базиса фундаментальных полиномов, а также разложений по биортогональным системам функций.

Библ. 8 назв.

УДК 512(091)

Об истоках символических и комбинаторных методов в конце XVIII — начале XIX в. О ж и г о в а Е. П. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 121—157.

Рассматривается ранний период развития операционного исчисления в работах Лагранжа, Лапласа, Пфаффа, Бринкли, Дж. Гершеля и др.

Библ. 54 назв.

УДК 512(091)

Об универсальном ряде Гёне-Вронского. П е т р о в а С. С., Р о м а н о в с к а я Д. А. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 158—175.

Рассматривается творчество известного польского математика Гёне-Вронского (1778—1853). Главное внимание уделяется введенному им «универсальному ряду».

Библ. 38 назв.

УДК 512(091)

О «высшем законе» Гёне-Вронского. Б а н а х С. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 00

Дается современная интерпретация «универсальному ряду» Вронского.

УДК 512(091)

К. Ф. Гаусс и Ж. А. да Кунья. Ю ш к е в и ч А. П. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 186—190.

Заметка служит дополнением к статье того же автора с да Кунья в XVIII выпуске «Историко-математических исследований», и характеризует высокую оценку, данную Гауссом определению у да Кунья показательной функции.

Библ. 6 назв.

УДК 512(091)

К истории теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Работы И. Ф. Пфаффа и О. Коши. Демидов С. С. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 191—217.

В работе рассматриваются результаты Пфаффа и Коши в решении задачи интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка с произвольным числом независимых переменных.

Библ. 15 назв.

УДК 512(091)

Аксиома выбора в первых работах Г. Кантора по теории множеств. Медведев Ф. А. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 218—225.

Выявляются применения аксиомы выбора или ее эквивалентов в рассуждениях Кантора, содержащихся в его первых работах по теории множеств.

Библ. 14 назв.

УДК 512(091)

Гильберт и проблема общековариантных уравнений гравитации. Визгин В. П. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 226—246.

Исследуется установление Гильбертом общековариантных уравнений Эйнштейна. Проведенный анализ демонстрирует определенную полярность подходов Гильберта и Эйнштейна и может оказаться полезным при изучении взаимосвязи физики и математики в эпоху квантово-релятивистской научной революции.

Библ. 25 назв.

УДК 512(091)

О геометрических работах Дункана Соммервилля (к столетию со дня рождения). Розенфельд Б. А. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 247—257.

Обзор геометрических трудов выдающегося шотландского геометра Дункана Соммервилля (1879—1934) и их роли в развитии неевклидовых геометрий и геометрий над алгебрами в XX в.

Библ. 25 назв.

УДК 512(091)

Рукописи Лейбница 1672—1676 гг. Кноблех Э. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 258—309.

Автор дает систематизированное описание неопубликованных математических рукописей Лейбница за 1672—1676 гг., хранящихся в Лейбницевском Архиве (ФРГ).

Ил. 3

УДК 512(091)

Общий метод решения неопределенных уравнений второй степени в «Арифметике» Диофанта. Славутин Е. И. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, 310—330.

В работе показано, что Диофант владел общим методом решения неопределенных уравнений второй степени.

Табл. 3, библи. 8 назв.

УДК 512(091)

Математика орнаментов Дионисия. Гусев Н. В., Майстров Л. Е. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 331—339.

Изучены орнаменты Дионисия на фресках в Ферапонтовом монастыре, выполненные в 1500—1503 гг. Вскрыто их геометрическое содержание и выделен тот объем математических знаний, который применял в орнаментах Дионисий.

Библи. 3 назв.

УДК 512(091)

Машина Беббиджа и возникновение программирования. Петренко А. К., Петренко О. Л. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 340—360.

Освещена роль Беббиджа, Лавлейс и Менабреа в возникновении программирования. Программа Беббиджа и Лавлейс для вычислений чисел Бернулли переложена на ФОРТРАН и на БЭСМ-6, проведены соответствующие расчеты.

Табл. 4, библи. 4 назв.

УДК 512(091)

Вацлав Серпинский. Мельников И. Г. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 361—365.

Краткая биография выдающегося польского математика В. Серпинского.

Библи. 8 назв.

УДК 512(091)

Письма В. Серпинского к Н. Н. Лузину. Сб. «Историко-математические исследования», вып. XXIV. М., «Наука», 1979, с. 366—373.

Публикуются письма научного и отчасти биографического содержания В. Серпинского Н. Н. Лузину, относящиеся к 1932—1936 гг.

Историко-математические исследования

Выпуск XXIV

Утверждено к печати
Институтом истории естествознания и техники
Академии наук СССР

Редактор А. Ф. Лапко
Редактор издательства Л. В. Кудрявцева
Художественный редактор Т. П. Полснова
Технический редактор Т. С. Жарикова
Корректоры Н. И. Казарина, Л. И. Харитонова

ИБ № 16122

Сдано в набор 11.01.79.
Подписано к печати 18.05.79.
Т-01736. Формат 84×108^{1/32}
Бумага типографская № 2
Гарнитура обыкновенная
Печать высокая
Усл. печ. л. 20,6 Уч.-изд. л. 21,8
Тираж 1450 экз. Тип. Зак. 1498
Цена 2 р. 90 к.

Издательство «Наука»
117864, ГСП-7 Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90
2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

**В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «НАУКА»
ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:**

БЕРЕЗКИНА Э. И.

Математика древнего Китая.

20 л. 2 р. 40 к.

Монография посвящена наиболее характерным проблемам математики древнего Китая: технике вычислений на счетной доске и выработке позиционной арифметики; развитию понятия числа и созданию аппарата дробей как пар; алгебраическим вопросам решения систем уравнений табличным методом и др.

Рассчитано на читателей, интересующихся историей математики.

МАЙСТРОВ Л. Е.

Развитие понятия вероятности.

18 л. 2 р. 30 к.

В монографии рассматривается история развития одного из основных понятий современной математики — понятия вероятности. В книге прослеживается история этого понятия от неотчетливых представлений античности до середины XX в., а также история других основных понятий и представлений теории вероятностей. Широко освещается роль понятия вероятности в других науках, прежде всего в физике.

Издание рассчитано на широкий круг математиков (преподавателей и учащихся), философов и историков науки.

ЗАКАЗЫ ПРОСИМ НАПРАВЛЯТЬ ПО ОДНОМУ ИЗ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ АДРЕСОВ МАГАЗИНА «КНИГА — ПОЧТОЙ» «АКАДЕМКНИГА»:

480091 Алма-Ата, 91, ул. Фурманова, 91/97; 370005 Баку, 5, ул. Джапаридзе, 13; 734001 Душанбе, проспект Ленина, 95; 252030 Киев, ул. Пирогова, 4; 443002 Куйбышев, проспект Ленина, 2; 197110 Ленинград, П-110, Петрозаводская ул., 7; 220012 Минск, Ленинский проспект, 72; 117192 Москва, В-192, Мичуринский проспект, 12; 630090 Новосибирск, 90, Академгородок, Морской проспект, 22; 620151 Свердловск, ул. Мамина-Сибиряка, 137; 700187 Ташкент, ул. Дружбы народов, 6; 450059 Уфа, 59, ул. Р. Зорге, 10; 720001 Фрунзе, бульвар Дзержинского, 42; 310003 Харьков, Уфимский пер., 4/6.

СПИСОК ОПЕЧАТОК И ИСПРАВЛЕНИЙ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
8	16 св.	Эта статья примыкает	Эта статья, представляющая собой перевод одного доклада на Лейбницеском симпозиуме в Шантильи 1976 г., примыкает
38	12 св.	Г. И. Игнатиус, 1967	Г. И. Игнатиус (1895—1967), 1967
39	21 св.	И. Н. Веселовский, 1957)	И. Н. Веселовский, 1957), Ариабхата (А. И. Володарский, 1977)

Заказ № 1498