Льюис Кэррол

# ИСТОРИЯ С УЗЕЛКАМИ

*Перевод с английского*
*Ю. А. ДАНИЛОВА*

*Под редакцией*
*Я. А. СМОРОДИНСКОГО*

*Иллюстрации*
*Ю. А. ВАЩЕНКО*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1973

51
К98

Кэррол Л.
К98 История с узелками. Пер. с англ. Ю. А. Данилова. Под ред. Я. А. Смородинского. М., «Мир», 1973.
408 с. с илл.

В «Истории с узелками» впервые на русском языке собраны математические головоломки и изящные логические парадоксы знаменитого автора «Алисы в Стране Чудес» и «Алисы в Зазеркалье».

Книга рассчитана на широкие круги читателей, интересующихся математикой и желающих с пользой провести свой досуг.

К $\frac{0223\text{-}182}{141(01)\text{-}73}$ 51

*Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы*

# ПРЕДИСЛОВИЕ

*Есть старая восточная притча. Трое слепых спорили о том, что такое слон.*

*«Слон похож на веревку»,— утверждал слепой, ухвативший слона за хвост. «Нет, слон подобен стволу могучего дерева», — возражал другой, нащупавший ногу слона. «Вы оба заблуждаетесь. Слон похож на змею»,— настаивал третий. Он держал слона за хобот.*

*С вероятностью, близкой к единице, нечто очень похожее на спор трех слепцов о слоне можно обнаружить, раскрыв наугад несколько книг или статей о Льюисе Кэрроле.*

*Одни авторы склонны видеть в нем лишь поэта, автора замечательных детских сказок об Алисе, поэмы «Охота на Снарка» и прочих «лепых нелепиц». Для других Кэррол не более чем посредственный математик. Третьи видят в нем логика-самоучку, не сумевшего разобраться в традиционных теориях, и оценивают логические работы Кэррола как своего рода курьез.*

*Но проходит время, и постепенно выясняется иная картина.*

*«Детские» сказки об Алисе особенно охотно цитируют в своих работах люди, которых менее всего можно упрекнуть в наивном восприятии действительности,— ученые самых различных специальностей, в том числе и таких, которые не существовали во времена Кэррола. «Изящные безделушки» на протяжении почти столетия таинствен-*

*ным образом не поддаются усилиям переводчиков, и трудности носят не только языковый характер. Более того, по мнению столь крупного авторитета, как Бертран Рассел, «Алиса в Стране Чудес» по обилию затрагиваемых в ней тонких логических и философских вопросов с полным основанием может быть отнесена к категории книг «Только для взрослых». Представители совсем молодых наук семантики и семиотики необычайно высоко оценивают эксперименты Кэррола с языком, а историки науки вынуждены признать, что логические работы Кэррола скорее намного опережали свое время, чем отставали от него. Словом, выясняется, что Кэррол похож только на Кэррола так же, как слон похож только на слона.*

*Чарлз Лютвидж Додгсон (1832—1898) (ибо таково подлинное имя Кэррола, которым он имел обыкновение подписывать свои математические работы) стал Льюисом Кэрролом в 1856 г. В его «Дневниках» рождение псевдонима отмечено следующей записью:*

> *«11 февраля 1865 г.*
>
> *Написал мистеру Иетсу*, предложив ему на выбор псевдонимы: 1) Эдгар Катвеллис (имя Edgar Cuthwellis получается при перестановке букв из Charles Lutwidge); 2) Эдгар У. Ч. Вестхилл (рецепт получения тот же, что и в предыдущем случае); 3) Луис Кэррол (Луис от Лютвидж — Людовик — Луис, Кэррол — от Чарлза); 4) Льюис Кэррол (по тому же принципу)».*

*1 марта 1856 г. в дневнике появилась еще одна строка: «Выбор пал на Льюиса Кэррола».*

*Сочетание безупречной логики математика с беспредельной фантазией литератора создали неповторимое своеобразие кэрроловского стиля. И хотя скромный и несколько чопорный Додгсон во многом проигрывал при сравнении с ярким Кэрролом, союз их был нерасторжим.*

*В следующих строках, заимствованных из предисловия к серьезной работе Ч. Л. Додгсона «Новая теория параллельных», явственно ощущается рука Льюиса Кэррола:*

> *«Ни тридцать лет, ни тридцать столетий не оказывают никакого влияния на ясность или на красоту геометрических истин. Такая теорема, как*

* См. примечание на стр. 352.

> *«квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов», столь же ослепительно прекрасна сегодня, как и в тот день, когда Пифагор впервые открыл ее, отпраздновав по преданию свое открытие закланием сотни быков. Такой способ выражать свое почтение к науке мне всегда казался слегка преувеличенным и неуместным. Даже в наши дни всеобщего упадка можно представить себе, что некто, совершив блестящее научное открытие, пригласит одного или двух друзей, чтобы отметить это событие за бифштексом и бутылкой вина. Но приносить в жертву сотню быков! Это было бы слишком. Что бы мы стали делать с таким количеством мяса?»*

*И наоборот, мышление математика отчетливо проступает во многих, казалось бы, «невинных» местах «детских» сказок Кэррола, придавая его творениям особый блеск и завершенность. Не нужно быть особенно искушенным в кэрроловедении, чтобы безошибочно определить автора следующих незабываемых строк.*

*«Как хорошо, что я не люблю спаржу,— сказала маленькая девочка своему заботливому Другу.— Ведь если бы я любила спаржу, мне пришлось бы ее есть, а я ее терпеть не могу».*

*Не будет преувеличением сказать, что литератор Кэррол был лучшим математиком, чем преподаватель оксфордского колледжа Крайст Черч Ч. Л. Додгсон.*

*Возможно, и в «Истории с узелками», и в «Полуночных задачах» кое-что покажется необычным современному читателю, однако мы не сочли возможным вносить какие-либо изменения в условия задач или в кэрроловские решения. Поразмыслив над тем, что покажется ему странным или даже неверным, читатель не только соединит приятное с полезным (осуществив таким образом на практике девиз «Dulce et utile»), но и проявит свои аналитические способности (в духе девиза «Ex ungue leonem» — «По когтям узнают льва», — открывающего вторую часть «Истории с узелками»).*

*Особой виртуозности Кэррол достиг в составлении (и решении) сложных логических задач, способных поставить в тупик не только неискушенного человека, но даже современную ЭВМ. Разработанные Кэрролом методы позволяют навести порядок в, казалось бы, безнадежном* *хаосе посылок и получить ответ в считанные минуты. Несмотря на столь явное превосходство, методы Кэррола не были оценены по достоинству, а имя его незаслуженно обойдено молчанием в книгах по истории логики.*

*Кэррол творил в одиночестве и многое вынужден был изобретать заново. Даже обозначения его отличаются от общепринятых. Так, вместо* $\bar{x} \& y \rightarrow z$ *Кэррол пишет* $x' \dagger y \mathbf{P} z$. *Знакомство с «Символической логикой» именно в силу ее нетрадиционности может вызвать известные затруднения у нашего читателя. Современную интерпретацию встречающихся в трактате Кэррола специальных терминов, а также обширную библиографию можно найти в «Логическом словаре» Н. И. Кондакова (М., «Наука», 1971).*

*Высочайшим достижением Кэррола следует считать два логических парадокса «Что черепаха сказала Ахиллу» и «Аллен, Браун и Карр», опубликованных в философском журнале «Mind».*

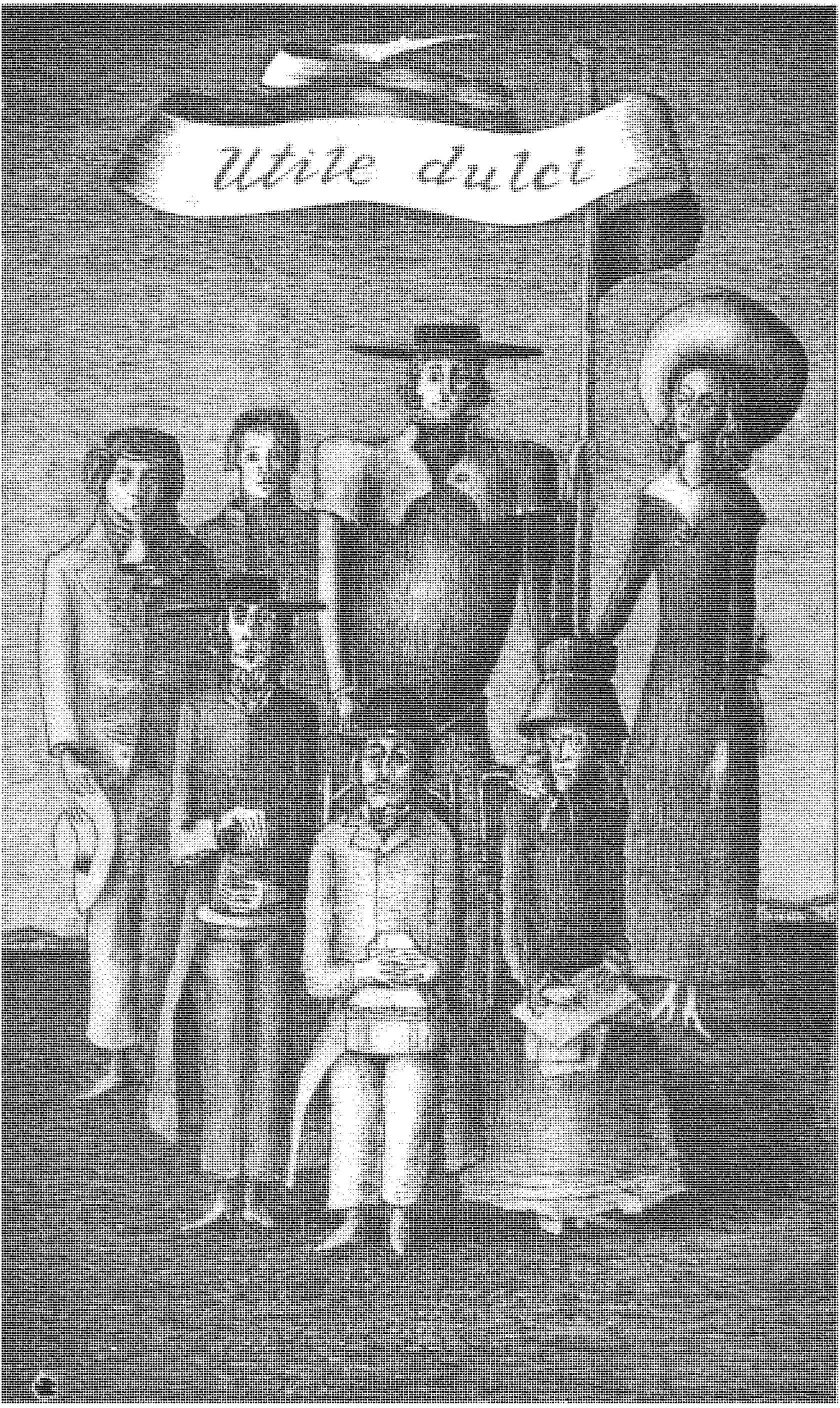
*В двуединстве математика и литератора, Кэррол-поэт оказался не только более ярким, но и более удачливым, чем Кэррол-математик. Если «Алиса» переводится на русский язык почти сто лет (от первого перевода «Соня в царстве дива», вышедшего в 1879 г., до появившихся недавно перевода Н. М. Демуровой 1968 г. и пересказа Б. В. Заходера 1972 г.), то математические работы Кэррола оставались почти неизвестными нашему читателю. Публикуя настоящий сборник, мы надеемся приоткрыть дверь в Страну Чудес, не менее удивительную, чем та, в которой побывала Алиса.*

*Ю. Данилов*
*Я. Смородинский*

## *МОЕЙ ЛЮБИМОЙ УЧЕНИЦЕ*

*Друг мой! Знаешь ты уже*
*Вычитанье и сложе-,*
*Умноже-нье и деленье*
*Просто всем на удивленье.*

*Так дерзай! Пусть славы эхо*
*О твоих гремит успехах.*
*Станешь ты, хоть скромен вид,*
*Знаменитей, чем Евклид!*


Utile dulci

# Узелок 1

## ПО ХОЛМАМ И ДОЛАМ

*Злой гном, веди их по горам то вверх, то вниз.*

Угрюмые ночные тени уже начали сменять румяное зарево заката, когда вдали показались два путника, быстро — со скоростью 6 миль в час — спускавшиеся по густо усеянному валунами склону горы. Молодой путник с ловкостью оленя перепрыгивал с камня на камень. Путник постарше, с трудом переставляя натруженные ноги, еле поспевал за ним, сгибаясь под тяжестью лат и кольчуги — обычного для тех мест одеяния туристов.

Как всегда бывает в подобных случаях, первым нарушил молчание молодой рыцарь.

— Неплохо идем! — воскликнул он.— Взбирались на гору мы куда медленнее!

— Идем мы действительно неплохо,— со стоном отозвался его спутник,— а на гору мы поднимались со скоростью 3 мили в час.

— Не скажешь ли ты, с какой скоростью мы идем по ровному месту? — спросил молодой рыцарь. Он не был силен в арифметике и имел обыкновение оставлять все детали такого рода на долю своего компаньона.

— Со скоростью 4 мили в час,— устало ответил другой рыцарь и добавил со свойственной старческому возрасту любовью к метафорам: — Ровно 4 мили в час, ни на унцию больше и ни на фартинг меньше!

— Мы вышли из гостиницы ровно в 3 часа пополудни,— задумчиво заметил молодой человек,— и, конечно, опоздаем к ужину. Хозяин может нам ничего не оставить!

— Да еще станет бранить нас за опоздание,— уныло подхватил старик,— но получит достойный отпор!

— Браво! Зададим ему перцу! — воскликнул юноша с веселым смехом.— Но боюсь, нам придется совсем не сладко, если мы решимся попросить у него хотя бы сладкое.

— К третьему блюду мы и так успеем,— вздохнул рыцарь постарше, не понимавший шуток и несколько раздосадованный неуместным с его точки зрения легкомыслием своего молодого друга.

— Когда мы доберемся до гостиницы,— добавил он тихо,— будет ровно 9 часов. Да, немало миль отмахали мы за день!

— А сколько? Сколько? — нетерпеливо воскликнул юноша, не упускавший случая расширить свои познания.

Старик помолчал.

— Скажи,— спросил он после небольшого раздумья,— в котором часу мы взобрались вон на ту вершину?

И, заметив на лице юноши возмущение нелепым вопросом, поспешно добавил:

— Мне не обязательно знать время с точностью до минуты. Достаточно, если ты назовешь момент восхождения с ошибкой на добрых полчаса. Ни о чем большем я и не думаю просить сына твоей матери. Зато в ответ я смогу указать с точностью до последнего дюйма, какое расстояние мы прошли с 3 часов пополудни до 9 часов вечера.

Лишь стон, вырвавшийся из уст молодого человека, был ему ответом. Искаженное страданием мужественное лицо и глубокие морщины, избороздившие широкий лоб юноши, свидетельствовали о глубине арифметической агонии, в которую вверг беднягу случайно заданный вопрос.

# *Узелок II*

## КОМНАТЫ СО ВСЕМИ УДОБСТВАМИ

***Ступайте прямо по кривому переулку, а потом по замкнутому квадрату.***

— Спросим у Бальбуса,— сказал Хью.
— Идет! — согласился Ламберт.
— Уж он-то что-нибудь придумает,— сказал Хью.
— Еще как! — воскликнул Ламберт.

Больше не было сказано ни слова: два брата прекрасно понимали друг друга.

Бальбус ожидал их в гостинице. Дорога, по его словам, была несколько утомительной, поэтому два юных воспитанника и отправились бродить по курортному местечку в поисках пансиона без своего престарелого наставника — иеразлучного компаньона обоих братьев с самого раннего детства. Бальбусом братья прозвали его в честь героя одной книги — сборника упражнений по латинскому языку, который им приходилось штудировать. Сборник этот содержал невероятное количество историй о похождениях неутомимого героя — историй, в которых недостаток достоверных фактов с лихвой восполнялся блестящей манерой изложения. Против истории под названием «Как Бальбус одолел всех своих врагов» наставник сделал на полях пометку: «Доблесть, увенчаиная победой». Он был искренне уверен, что подобные сентеиции помогут его воспитанникам извлечь мораль из каждой истории. Порой эти пометки носили назидательный характер (так, против истории «Как Бальбус похитил здоровенного дракона и что из этого вышло» мудрый наставник начертал на полях «Опрометчивость поступков»), порой — одобрительный (ибо что, кроме одобрения, звучит в словах «Совместные усилия как следствие взаимопонимания», украсивших поля страниц, на которых излагалась история «Как Бальбус помог своей теще убедить дракона»), а иногда сводились к одиому-единственному слову (так, мораль, которую почтенный наставник юношества извлек из трогательной истории «Как Бальбус отрубил хвост дракону и ретировался», вылилась в лаконичную надпись «Благоразумие»).

Чем короче была мораль, тем сильнее нравилась она братьям, ибо тем больше места оставалось на полях для иллюстраций. В последнем примере им понадобилось все пустое пространство, чтобы должным образом изобразить поспешность, с которой герой оставил поле битвы.

Вернувшись в гостиницу, Ламберт и Хью не смогли сообщить своему наставнику ничего утешительного. Модный курорт Литтл-Мендип, куда они прибыли на воды, по выражению братьев, «кишмя кишел» отдыхающими. Все же на одной площади, имевшей форму квадрата, братьям удалось заметить на дверях не менее четырех домов карточки, на которых огромными буквами значилось: «Сдаются комнаты со всеми удобствами».

— Выбор у нас, во всяком случае, большой,— подвел итог своим наблюдениям Хью, взявший на себя роль докладчика.

— Из сказанного тобой этого отнюдь не следует,— возразил Бальбус, поднимаясь с шаткого стульчика, на котором он сладко дремал над местной газетой.— В каждом доме может сдаваться лишь одна комната, а нам желательно сиять три спальни и одну гостиную в одном доме, но взглянуть все же не мешает. Кстати я буду рад немного поразмять ноги, а то здесь их просто негде вытянуть.

В ответ иа последнее замечание непредвзято настроенный наблюдатель мог бы возразить, что вытягивать и без того длинные ноги — операция совершенио излишняя и что внешность тощего существа, высказавшего его, во многом бы выиграла, будь его нижние конечности покороче. Но, разумеется, любящим воспитанникам подобная мысль даже не могла прийти в голову. Пристроившись с флангов к своему наставнику, братья изо всех сил старались не отставать. Бальбус гигантскими шагами несся по улице. Хью на бегу не переставал бормотать фразу из письма, только что полученного от отца из-за границы. Фраза эта не давала покоя ни ему, ни Ламберту.

— Он пишет, что его друг — губернатор... Ламберт, как называется то место?

— Кговджни,— подсказал Ламберт.

— Ах, да! Так вот. Губернатор этого самого... ну, как его?.. хочет созвать гостей на званый обед в очень тесном кругу и намеревается пригласить шурина своего отца, тестя своего брата, брата своего тестя и отца своего шурина. Отец хочет, чтобы мы отгадали, сколько гостей соберется у губернатора.

После легкого замешательства Бальбус наконец спросил:

— А отец не пишет, каких размеров пудинг собираются подавать на званом обеде? Если объем пудинга разделить на объем порции, которую может съесть один гость, то частное будет как раз равно...

— Нет, о пудинге в письме не говорится ни слова,— ответил Хью,— а вот и та самая квадратная площадь, о которой я говорил.

С этими словами вся троица свернула за угол, и взорам запыхавшихся путников открылся вид на площадь, где сдавались комнаты «со всеми удобствами».

— Да она *и в самом деле* имеет форму квадрата! — с восторгом воскликнул Бальбус, оглядевшись вокруг.— Потрясающе! Великолепно! Все стороны равны, и *даже* углы прямые!

Мальчики озирали площадь с меньшим энтузиазмом.

— Первое объявление о сдаче комнаты висит на доме номер 9,— заметил чуждый поэзии Ламберт, но заставить охваченного экстазом Бальбуса спуститься на землю было не так-то просто.

— Да вы только посмотрите! — кричал он в упоении. — Вдоль каждой из сторон по двадцать дверей! Какая симметрия! Каждая сторона разделена на двадцать одну равную часть! Просто чудо!

— Мне как, стучать или звонить? — спросил Хью, озадаченно глядя на квадратную медную табличку с лаконичной надписью «Звонить тоже».

— И то, и другое,— ответил Бальбус.— Это, мой мальчик, так называемый эллипс. Разве тебе прежде не приходилось встречать эллипс?

— Тут неразборчиво написано, — уклончиво сказал Хью.— И что толку от эллипса, если он у них не начищен до блеска?

— У меня сдается лишь одна комната, джентльмены,— объявила, приветливо улыбаясь, хозяйка дома,— и, надо прямо сказать, комната превосходная. Такой уютной задней комнатки вам нигде больше ие иайти.

— Позвольте посмотреть,— угрюмо прервал хозяйку Бальбус и, войдя вслед за ней в комнату, добавил: — Так я и знал! В каждом доме лишь по одной комнате! Вида из окна, разумеется, никакого?

— Наоборот, прекраснейший вид, джентльмены! — негодующе запротестовала хозяйка и, подняв шторы, указала на крохотный огородик на заднем дворе.

— Что это у вас там? — поинтересовался Бальбус.— Капуста? Ну, что ж, все-таки хоть какая-то зелень!

— Видите ли, сэр,— пояснила хозяйка,— в зеленной лавке овощи подчас бывают несвежими, а здесь все к вашим услугам и притом *высшего* качества.

— Окно открывается? — Этот вопрос Бальбус при подыскании квартиры обычно задавал первым. Вторым его вопросом был:

— А как у вас с печной тягой?

Получив на все вопросы удовлетворительные ответы, Бальбус сообщил хозяйке, что пока оставляет комнату за собой, и вместе с братьями направился к дому номер 25.

На этот раз хозяйка не улыбалась и держалась неприступно.

— У меня сдается лишь одна комната,— сказала она,— с окнами в сад на заднем дворе.

— Но капуста, надеюсь, в вашем саду растет? — задал наводящий вопрос Бальбус.

— Конечно, сэр! — с видимым облегчением ответила хозяйка.— Может, мие и не следовало бы так говорить, но капуста и в самом деле уродилась необыкиовенная. На зеленную лавку надежда плоха, вот и приходится выращивать капусту самим!

— Капуста, действительно, необыкновенная, — подтвердил Бальбус и, задав обычные вопросы, направился со своими питомцами к дому номер 52.

— С радостью устроила бы вас всех вместе, если бы это было в моих силах,— такими словами встретили их там.— Но мы всего лишь простые смертные («Неважно,— пробормотал про себя Бальбус,— к делу не относится!»), и у меня осталась свободной только одна комната.

— Надеюсь, задняя? — спросил Бальбус.— С видом на капусту?

— Совершенно верно, сэр! — обрадовалась хозяйка.— Что бы ни говорили *некоторые*, *мы* выращиваем капусту сами. Ведь зеленные лавки...

— Очень предусмотрительно с вашей стороны,— прервал ее Бальбус.— Уж на качество собственной капусты можно положиться, не так ли? Кстати, окно открывается?

На обычные вопросы были даны исчерпывающие ответы, однако на этот раз Хью задал один вопрос собственного изобретения.

— Скажите, пожалуйста, ваша кошка царапается?

Хозяйка подозрительно оглянулась, словно желая удостовериться, что кошка не подслушивает.

— Не стану вас обманывать, джентльмены,— сказала она.— Кошка *царапается*, но лишь в том случае, если вы потянете ее за хвост. Если ее за хвост не тянуть,— проговорила хозяйка медленно, с видимым усилием припоминая точный текст соглашения, некогда подписанного ею и кошкой, — то она никогда *не* царапается!

— Многое простительно кошке, с которой обращаются столь неподобающим образом,— промолвил Бальбус, когда он и два брата, оставив присевшую в реверансе хозяйку (слышно было, как она продолжала невнятно бормотать, словно благословляя своих гостей: «... лишь в том случае, если вы потянете кошку за хвост!»), направились через площадь к дому номер 73.

В доме номер 73 они обнаружили лишь маленькую застенчивую девочку-служанку. Показывая им дом, она на все вопросы отвечала:

— Да, мэм!

— Передайте, пожалуйста, вашей хозяйке,— сказал Бальбус,— что мы снимем у нее комнату и что ее идея самостоятельно выращивать капусту *выше всяких похвал!*

— Да, мэм! — сказала девочка и проводила наставника и его воспитанников до выхода.

— Итак, одна гостиная и три спальни! — подвел итоги Бальбус, вернувшись с мальчиками в гостиницу.— Гостиную мы устроим в том доме, до которого меньше всего ходьбы.

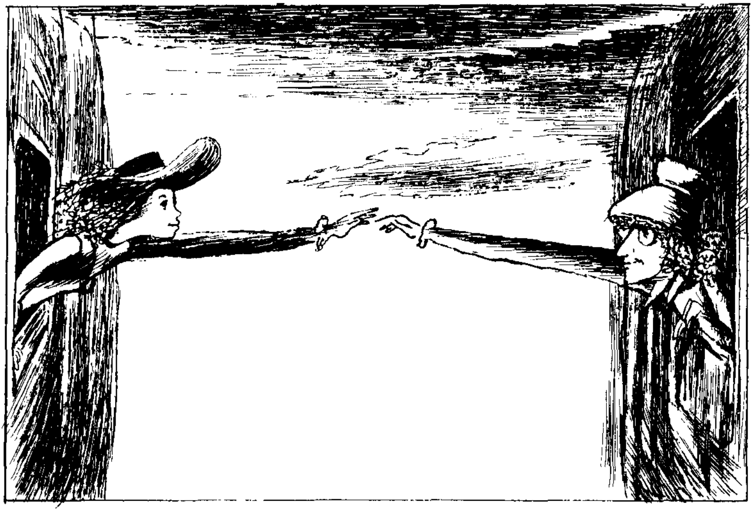
— А как его определить: ходить от двери к двери и считать шаги? — спросил Ламберт.

— Нет, зачем же ходить, когда все можно вычислить? Придется вам, мальчики, как следует пораскинуть мозгами,— весело воскликнул Бальбус и, положив перед своими не на шутку приунывшими подопечнымн бумагу, перья и чернильницу, вышел из комнаты.

— Вот так задача! Придется над ней поломать голову! — сказал Хью.

— Еще как! — согласился Ламберт.

## БЕЗУМНАЯ МАТЕМАТИЛЬДА



*Ждал я поезд.*

— Называют меня Безумной потому, что, по-видимому, я и в самом деле немного не в своем уме,— сказала она в ответ на осторожный вопрос Клары о том, почему у нее такое странное прозвище.— Я никогда не делаю того, чего в наши дни ожидают от нормальных людей. Во-первых, не ношу платьев с длинными шлейфами. Они напоминают мне составы, тянущиеся за паровозом. Кстати о поездах. Вон там (видишь?) находится вокзал Чаринг-Кросс. О нем я потом расскажу тебе *кое-что* интересное. Во-вторых, я не играю в лаун-теннис, в-третьих, не умею жарить омлет. В-четвертых, я даже не умею наложить шины на сломанную руку или ногу. Как видишь, перед тобой круглая невежда!

Племянница Безумной Математильды Клара была на добрых двадцать лет моложе своей тетушки и училась еще в школе для девочек — учебном заведении, о котором Безумная Математильда отзывалась с нескрываемым отвращением.

— Женщина должна быть скромна и послушна! — говаривала она.— Все эти ваши школы не в моем вкусе!

Но сейчас настала пора каникул, Клара приехала погостить к тетушке, и Безумная Математильда показывала своей племяннице достопримечательности восьмого чуда света — Лондона!

— Вокзал Чаринг-Кросс! — продолжала она, широким жестом указывая на вход и как бы представляя племянницу старому другу. — Бейсуотерскую и Бирмингемскую ветки дороги только что закончили строить, и теперь поезда могут непрерывно циркулировать по замкнутому маршруту, доходя на западе до границ Уэльса, на севере — до Йорка и возвращаясь вдоль восточного побережья назад в Лондон. Расписанне поездов *не совсем* обычно: поезда, идущие в западном направлении, возвращаются на вокзал Чаринг-Кросс через 2 часа после отправления, поезда, идущие в восточном направлении, проходят весь путь за 3 часа. Но это еще не все. Составители расписания ухитрились сделать так, что каждые 15 минут отсюда, с вокзала Чаринг-Кросс, в противоположных направлениях отправляются два поезда!

— Они расстаются, чтобы затем встретиться вновь, — сказала Клара, и глаза ее при столь романтической мысли наполнились слезами.

— Не стоит плакать, — сухо заметила тетушка. — Встречаться-то они встречаются, но не на одной и той же колее железной дороги. Кстати о встречах. Мне в голову пришла великолепная идея! — добавила она, со свойственной ей резкостью меняя тему разговора. — Давай сядем на поезда, идущие в противоположных направлениях, и посмотрим, кто из нас встретит больше поездов. Сопровождать тебя не нужно: в этих поездах, да будет тебе известно, есть специальные дамские купе. Итак, выбирай, в каком направлении тебе ехать, и мы побьемся об заклад относительно того, кто из нас выиграет.

— Я не бьюсь об заклад, — с мрачиым видом заявила Клара. — Наша достопочтенная воспитательница неоднократно предостерегала нас от...

— Не вижу в этом ничего дурного! — перебила ее Безумная Математильда. — По-моему, лучше биться об заклад, чем бить баклуши, — хоть какая-то польза!

— Наша достопочтенная воспитательница настоятельно рекомендует нам не употреблять каламбуров, — заметила Клара и, быстро произведя в уме какие-то подсчеты, добавила:

— Если вы хотите, тетя, то мы можем устроить состязание. Я постараюсь выбрать поезд так, чтобы мне встретилось ровно в полтора раза больше поездов, чем вам.

— Это невозможно, если, конечно, ты будешь честно считать встречные поезда,— с присущей ей прямотой возразила Безумная Математнльда.— Не забудь, что считать следует лишь те поезда, которые встречаются *в пути*. Поезд, который отправляется с вокзала Чаринг-Кросс или прибывает сюда одновременно с твоим поездом, в счет не идет.

— Если я и внесу поправку на эти правила, то число встреченных поездов изменится лишь *на единицу*,— сказала Клара, когда они с тетушкой вошли в здание вокзала.— Правда, мне никогда раньше не приходилось ездить одной. Некому будет даже помочь мне сойти с поезда, но все равио я согласна. Жаль только, что одна из нас выиграет, а другая...

— *Если* одна выиграет, то у другой дело — табак,— решительно отрубила Безумная Математильда.

Маленький оборванный мальчик, торговавший всякой мелочью, услышав последнее замечание, бросился за ними.

— Купите табачку, мисс! — предложил он, потянув Клару за бахрому шали. Клара остановилась.

— Я не курю,— сказала она робким извиняющимся тоном.— Наша достопочтенная воспитательница...

Но Безумная Математильда нетерпеливо потащила Клару за собой, так и не дав ей договорить. Мальчик замер на месте, глядя на странную пару вытаращенными от изумления глазами.

Леди купили билеты и прошли на центральную платформу. Безумная Математильда, как всегда, болтала без умолку, Клара безмолвствовала, лихорадочно проверяя в уме вычисления, на которых зиждились все ее надежды на выигрыш.

— Смотри под ноги! — воскликнула тетушка как раз вовремя.— Еще шаг, и не миновать бы тебе холодного душа!

— Да, да,— пробормотала погруженная в свои размышления Клара,— душа холодная, надменная, черствая...

— Пассажиров просят занять места на трамплинах! — громко объявил дежурный.

— А для чего трамплины? — испуганным шепотом спросила Клара.

— Чтобы удобнее было садиться в поезд,— с невозмутимым видом человека, не видящего в происходящем ничего особенного, ответила Безумная Математильда.— Видишь ли, не много найдется людей, которые смогли бы без посторонней помощи сесть в вагон за 3 секунды, а поезд стоит лишь 1 секунду.

Тут раздался свисток, и на станцию с противоположных сторон влетели два поезда. Секундная пауза, и... оба поезда помчались дальше. Но и за столь малый промежуток времени несколько сот пассажиров успело впрыгнуть в вагоны (причем каждый из них со снайперской точностью попал на свое место!) и ровно столько же пассажиров умудрилось выпрыгнуть из вагонов на платформу.

Три часа спустя тетушка и племянница вновь встретились на платформе вокзала Чаринг-Кросс и сравнили свои подсчеты. Клара со вздохом отвернулась. Для столь юного и чувствительного сердца, как у нее, разочарование — пилюля неизменно горькая, и Безумная Математильда поспешила утешить племянницу.

— Попробуем еще раз,— ласково предложила она,— но правила слегка изменим. Начнем, как прежде, но считать встречные поезда не будем до тех пор, пока наши поезда не повстречаются. Как только увидим друг друга из окон вагонов, скажем: «Раз!» — и будем продолжать счет встречных поездов до тех пор, пока не прибудем на вокзал Чаринг-Кросс.

Лицо Клары просветлело.

— Уж на этот раз я непременно выиграю,— радостно воскликнула она,— лишь бы мне было позволено снова выбирать поезд.

И снова раздался резкий свисток паровоза, снова ожидающие заняли места на трамплинах, снова живая лавина пассажиров чудом успела заполнить два пронесшихся мимо поезда, снова наши путешественницы расстались.

Каждая из них с нетерпением выглядывала из окна своего вагона, держа наготове платок, чтобы успеть подать сигнал, когда поезда поравняются друг с другом. Наконец, под оглушительный стук колес и завывание ветра поезда встретились в туннеле, и путешественницы со вздохом — точнее с *двумя* вздохами — облегчения откинулись на спинки диванов в своих купе.

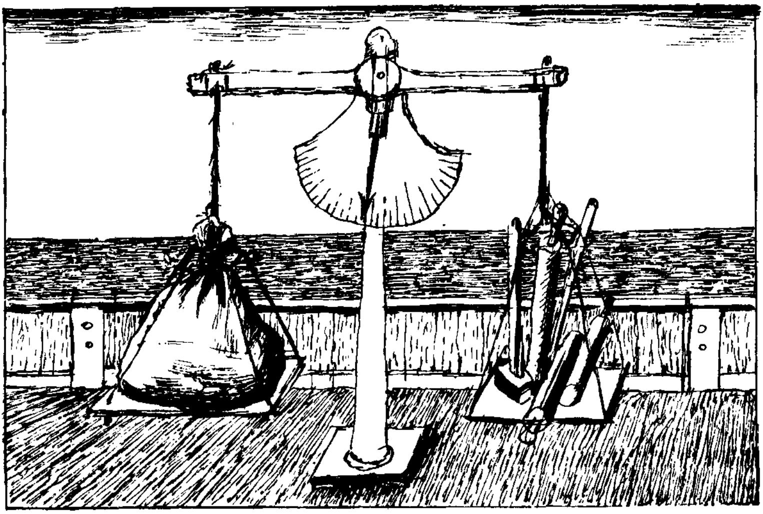
— Раз! — открыла счет Клара. Вскоре за первым встречным поездом последовал второй, за вторым — третий.

— Три! Уф, как я устала! — вздохнула Клара и тут же радостно встрепенулась:

— Три, уф! Звучит почти как триумф! Это — добрая примета: уж теперь-то я непременно выиграю!

Но... выиграла *ли* она?

## ИСКУССТВО СЧИСЛЕНИЯ



*И снились мне ночью мешки золота.*

В нескольких градусах от экватора в полдень даже в открытом море жара стоит совершенно невыносимая, и два уже знакомых нам путешественника, сбросив с себя кольчуги и латы, облачились в легкие ослепительно белые полотняные костюмы. Латы, по мнению этих многоопытных людей, незаменимы в горах, где воздух, которым они еще так недавно наслаждались, свеж и прохладен, ибо предохраняют владельца не только от простуды, но и от кинжалов бандитов, в изобилии встречающихся в заоблачных высях. Закончив свое путешествие, оба туриста возвращались теперь домой на небольшом парусном судне, совершавшем раз в месяц рейсы между двумя самыми крупными портами того острова, который они столь успешно исследовали.

Сбросив латы, туристы перестали употреблять и те несколько архаичные обороты речи, которые так нравились им, пока они находились в рыцарском обличье, и вернулись к обычному лексикону провинциальных джентльменов девятнадцатого века.

Растянувшись на груде подушек под сенью огромного зонтика, они лениво наблюдали за несколькими рыбаками-туземцами, севшими на корабль во время последней стоянки. Поднимаясь на борт, каждый из рыбаков нес на плече небольшой, но тяжелый мешок. На палубе стояли огромные весы, на которых при погрузке обычно взвешивали принимаемые на борт грузы. Вокруг этих весов и собрались рыбаки. Возбужденно крича что-то на непонятном языке, они, по-видимому, намеревались взвесить свои мешки.

— Больше похоже на воробьиное чириканье, чем на человеческую речь,— заметил пожилой турист, обращаясь к сыну, который лишь слабо улыбнулся, не найдя в себе сил произнести хоть слово в ответ. Отец в поисках более отзывчивого слушателя обратил свой взор к капитану.

— Что там у них в мешках, капитан? — спросил он первого после бога человека на судне, когда тот, совершая свой бесконечный променад из конца в конец палубы, поравнялся с зонтом, под которым возлежали наши знакомые.

Капитан прервал свой марш и, высокий, строгий, весьма довольный собой, замер перед туристами, возвышаясь над ними, подобно величествеиному монументу.

— Рыбаки,— пояснил он,— частые пассажиры на моем судне. Эти пятеро из Мхрукси, места нашей последией стоянки. В мешках они везут деньги. Нужно сказать, джентльмены, что деньги этого острова тяжеловесны, но, как вы догадываетесь, малоценны. Мы покупаем их у туземцев на вес — по 5 шиллингов за фунт. Думаю, что все мешки, которые вы видите, можно купить за одну десятифунтовую банкноту.

Слушая капитана, пожилой джентльмен закрыл глаза — несомненно, лишь для того, чтобы как можно лучше сосредоточиться на сообщаемых ему интересных фактах, но капитан, не поняв истинных намереиий своего собеседника, с недовольным ворчаньем возобновил прерванный было променад.

Между тем рыбаки, собравшиеся у весов, стали шуметь так отчаянно, что один из матросов счел нелишним принять меры предосторожности и унести все гири. Туземцам волей-неволей пришлось довольствоваться ручками от лебедок, кофель-нагелями и тому подобными тяжелыми предметами, которые им удалось отыскать. Предпринятый матросом демарш возымел желаемое действие: шум вскоре прекратился.

Тщательно спрятав мешки в складках кливера, лежавшего на палубе невдалеке от наших туристов, рыбаки разбрелись кто куда.

Когда снова послышалась тяжелая поступь капитана, молодой человек приподнялся.

— Как вы назвали место, откуда эти туземцы, капитан? — поинтересовался он.

— Мхрукси, сэр.

— А как называется то место, куда мы направляемся?

Капитан набрал побольше воздуха в легкие, храбро нырнул в слово и с честью вынырнул из его глубин:

— Они называют его Кговджни, сэр!

— Кг... Не могу выговорить! — еле слышно отозвался молодой человек.

Дрожащей рукой он взял стакан воды со льдом, который за минуту до того принес ему сердобольный стюард, и сел, к несчастью оказавшись не в отбрасываемой зонтом тени, а на самом солнцепеке. Жара стояла убийственная, и молодой человек решил воздержаться от холодной воды. Немалую роль в столь самоотверженном решении сыграл утомительный, только что воспроизведенный разговор с капитаном. Совершенно обессилев, молодой человек вновь молча откинулся на подушки.

Отец вежливо попытался заменить сына в разговоре.

— Где мы сейчас находимся, капитан? — любезно осведомился он.— Имеете ли вы об этом хоть какое-нибудь представление?

Капитан бросил презрительный взгляд на погрязшую в невежестве «сухопутную крысу» и ответил тоном, преисполненным глубочайшего снисхождения:

— Я могу сообщить вам наши координаты, сэр, с точностью до дюйма!

— Не может быть! — лениво удивился пожилой турист.

— Не только может, но так оно и есть! — настаивал капитан.— Как вы думаете, что бы стало с моим судном, если бы я потерял долготу и широту? Имеет ли кто-нибудь из присутствующих хотя бы отдаленное представление о счислении?

— С уверенностью могу сказать: никто из присутствующих в счислении не смыслит,— откровенно признался сын; однако он несколько переусердствовал в своем правдолюбии.

— А между тем для тех, кто разбирается в подобных вещах, в счислении нет ничего сложного,— тоном оскорбленного достоинства заявил капитан. С этими словами он удалился, чтобы отдать необходимые распоряжения матросам, собиравшимся поднять кливер.

Наши туристы с таким интересом наблюдали за поднятием паруса, что ни один из них даже не вспомнил о мешках с туземными деньгами, спрятанных в его складках. В следующий момент ветер наполнил поднятый кливер, и все пять мешков, оказавшись за бортом, с тяжелым плеском упали в море.

Несчастным рыбакам забыть о своей собственности было не так просто. Они сгрудились у борта и с яростными криками, размахивая руками, указывали то на море, то на матросов, явившихся причиной несчастья.

Пожилой турист объяснил капитану, в чем дело.

— Позвольте мне возместить несчастным убытки,— добавил он в заключение.— Полагаю, что десяти фунтов будет достаточно? Ведь вы, кажется, называли именно эту сумму?

Но капитан отверг предложение.

— Нет, сэр! — сказал он с величественным видом.— Надеюсь, вы меня извините, но это — *мои* пассажиры. Происшествие случилось на борту вверенного *мне* судна и вследствие отданных *мной* приказаний. Поэтому и компенсацию за причиненный ущерб должен выплатить *я*.

И он обратился к разгневанным рыбакам на мхруксийском диалекте.

— Подойдите сюда и скажите, сколько весил каждый мешок. Я видел, как вы только что их взвешивали.

Не успел капитан закончить свою речь, как на палубе вновь началось воистину вавилонское столпотворение: все пятеро туземцев наперебой пытались объяснить капитану, что матрос унес гири и им пришлось взвешивать, пользуясь лишь «подручными средствами».

Под наблюдением капитана импровизированные гири — два железных кофель-нагеля, три блока, шесть камней для чистки палубы, четыре ручки от лебедок и большой молот — были тщательно взвешены. Результаты взвешивания капитан аккуратно занес в свой блокнот. Однако на этом его неприятности не закончились. В последовавшей довольно жаркой дискуссии приняли участие и матросы, и пятеро туземцев. Наконец, капитан с несколько растерянным видом подошел к нашим туристам, пытаясь легким смешком скрыть замешательство.

— Возникло нелепое затруднение,—сказал он.— Может быть, вы, джентльмены, подскажете выход из него. Дело в том, что туземцы, как я сейчас выяснил, взвешивали не по одному, а по два мешка!

— Если они произвели менее пяти взвешиваний, то, разумеется, оценить стоимость содержимого каждого мешка не представляется возможным,— поспешил вывести заключение молодой человек.

— Послушаем лучше, что известно о весе мешков,— осторожно заметил его отец.

— Туземцы произвели пять взвешиваний, — сообщил капитан. — Но у меня, — добавил он, поддавшись внезапному приступу откровенности,— просто голова идет кругом. Послушайте, что получилось. Первый и второй мешки весили 12 фунтов, второй и третий — 13,5 фунта, третий и четвертый — 11,5, четвертый и пятый — 8 фунтов. После этого, по утверждению туземцев, у них остался только тяжелый молот. Чтобы уравновесить его, понадобилось три мешка: первый, третий и пятый. Вместе они весят 16 фунтов. Вот так, джентльмены! Приходилось ли вам слышать что-либо подобное?

Пожилой турист смог лишь едва слышно пробормотать:

— Если бы моя сестра была здесь! — и безнадежно посмотрел на своего сына. Пятеро туземцев с надеждой взирали на капитана. Капитан не смотрел ни на кого: глаза его были закрыты. Казалось, он тихо говорил, обращаясь к самому себе:

— Созерцайте друг друга, джентльмены, если это доставляет вам удовольствие. *Я* предпочитаю созерцать *самое себя*!

# *Узелок V*

## КРЕСТИКИ И НОЛИКИ

*Как вам нравится та картина? А эта?*

— Что заставило тебя, глупышка, выбрать первый поезд? — спросила Безумная Математильда племянницу, когда они садились в кэб.— Неужели ты не могла придумать ничего лучше?

— Я рассмотрела предельный случай,— ответила Клара сквозь слезы.— Наша достопочтенная воспитательница всегда говорит нам: «Если вы сомневаетесь в чем-то, рассмотрите предельный случай», а я как раз была в сомнении.

— И что же, этот совет всегда помогает? — поинтересовалась тетушка.

Клара вздохнула.

— Не всегда,— неохотно призналась она, — хотя я никак не могу понять, в чем тут дело. Как-то раз наша достопочтенная воспитательница сказала девочкам из младших классов (они ведь всегда так ужасно шумят за столом!): «Чем больше вы будете шуметь, тем меньше получите варенья и *vice versa**». Я подумала, что девочки не

* Наоборот (*лат.*).

знают, что такое *vice versa*, и решила объяснить им. Я сказала: «Если вы будете шуметь бесконечно громко, то не получите варенья совсем. Если же вы совсем не будете шуметь, то получите бесконечно много варенья», а наша достопочтенная воспитательница сочла пример неудачным. Хотела бы я знать почему,— добавила Клара жалобно.

Тетушка уклонилась от прямого ответа.

— Твой пример, действительно, не может не вызвать возражений,— сказала она,— но мне любопытно знать, как ты перешла к пределу в задаче с поездами. Насколько мне известно, ни один поезд не движется бесконечно быстро.

— Одни поезда я назвала зайцами, другие — черепахами,— робко пояснила Клара, боясь, что ее поднимут на смех.— Я думала, что число зайцев и черепах на линии не может быть одинаковым, и взяла поэтому предельный случай: одного зайца и бесконечно много черепах.

— Что и говорить, случай действительно предельный! — заметила крайне мрачным тоном Безумная Математильда.— Ситуация предельно опасна!

— Подумав, я решила,— продолжала Клара,— что если я сяду на черепаху, то встречу лишь одного зайца: ведь больше их и нет. Зато если я сяду на зайца, то встречу целые толпы черепах!

— Ну что ж, идея не так уж плоха,— промолвила тетушка, когда они сошли с кэба у входа в Берлингтон-Хаус.— А сейчас тебе представится еще один удобный случай проявить свою смекалку. Мы будем состязаться в оценке картин.

Клара просияла.

— Я буду очень стараться,— воскликнула она,— и на этот раз буду осторожнее. А как мы будем играть?

На этот вопрос Безумная Математильда не ответила: она с деловым видом чертила какие-то линии на полях каталога.

— Взгляни,— сказала она Кларе минуту спустя.— Видишь, против названий картин, выставленных в большом зале, я начертила три графы. В них мы будем ставить крестики и нолики: крестик — вместо положительной оценки, нолик — вместо отрицательной. В первой графе мы будем ставить оценку за сюжет, во второй — за композицию и в третьей — за колористическое решение. Условия нашего состязания состоят в следующем. Ты должна поставить три крестика двум или трем картинам, два крестика — четырем или пяти картинам...

— Что вы имеете в виду, когда говорите о двух крестиках? — спросила Клара.— Картины, отмеченные только двумя крестиками, или также и картины, отмеченные тремя крестиками?

— Картины, получившие три крестика, разумеется, можно считать получившими два крестика,— ответила тетушка.— Ведь о всяком, у кого есть три глаза, можно сказать, что уж два-то глаза у него заведомо есть, не так ли?

С этими словами тетушка устремила задумчивый взгляд на переполненный публикой зал картинной галереи. Клара с опаской посмотрела в ту же сторону, боясь увидеть трехглазого посетителя.

— Девяти или десяти картинам ты должна поставить один крестик,— продолжала перечислять условия состязания Безумная Математильда.

— А кто же выигрывает? — спросила Клара, тщательно записывая все сказанное на чистом листе каталога.

— Тот, кто поставит оценки наименьшему числу картин.

— А если мы поставим оценки одинаковому числу картин?

— Тогда тот, кто поставит больше оценок.

Клара задумалась.

— Это состязание совсем нетрудное,— сказала она.— Я поставлю оценки девяти картинам. Трем из них я поставлю по три крестика, двум другим — по два крестика, а остальным — по одному крестику.

— Нетрудное состязание, говоришь? — спросила тетушка.— Подожди, пока не узнаешь все условия, нетерпеливое дитя! Одной или двум картинам ты должна поставить три нолика, трем или четырем картинам — по два нолика и восьми или девяти картинам — по одному нолику. И не будь слишком строгой к картинам членов Королевской академии изобразительных искусств!

Записав новые условия, Клара почти лишилась дара речи.

— Это похуже периодических дробей,— вздохнула она, но я все равно должна выиграть!

Тетушка зловеще улыбнулась.

— Отсюда мы и начнем,— сказала она, когда они подошли к картине огромных размеров, значившейся в каталоге под названием «Портрет лейтенанта Брауна верхом на любимом слоне».

— Какой у него самодовольный вид,— воскликнула Клара.— Не думаю, чтобы он был любимым лейтенантом бедного слона. Картина просто ужасна и к тому же занимает столько места, что его хватило бы на двадцать картин!

— Подумай, что ты говоришь! — прервала Клару тетушка.— Ведь автор этой картины член Королевской академии!

Но Клара была непреклонна.

— Мне все равно, кто ее автор! — упрямо сказала она.— Я поставлю ей три плохие оценки.

Тетушка и племянница вскоре потеряли друг друга в толпе, и в течение ближайшего получаса Клара трудилась в поте лица, ставя оценки, вновь стирая их и упорно разыскивая подходящие картины. Последнее оказалось труднее всего.

— Никак не могу найти того, что мне нужно! — воскликнула она наконец, чуть не плача с досады.

— Что ты хочешь найти, деточка? — раздался за спиной Клары незнакомый, но такой ласковый и приятный голос, что Клара, еще не видя произнесшего эти слова, почувствовала к нему горячую симпатию. Обернувшись, она увидела двух ласково улыбавшихся старушек небольшого роста с круглыми морщинистыми лицами, очень похожих друг на друга. Они выглядели так сиротливо и бесприютно, что Клара (как она потом призналась тетушке) еле удержалась, чтобы не обнять их.

— Я ищу картину, — сказала она,— написанную на хороший сюжет, с хорошей композицией, но с плохим колористическим решением.

Маленькие старушки тревожно переглянулись.

— Успокойся, деточка,— сказала та из них, которая уже обращалась к Кларе,— и попытайся припомнить, что изображено на картине, каков ее сюжет.

— Не изображен ли на ней, например, слон? — спросила вторая старушка. С того места, где стояли Клара и старушки, нетрудно было заметить лейтенанта Брауна.

— Не знаю,— нетерпеливо ответила Клара.— Мне совсем неважно, каков сюжет картины, лишь бы он был хорошим!

Старушки снова тревожно переглянулись, и одна из них что-то прошептала на ухо другой. Клара смогла уловить лишь одно слово «...безумна».

— Ну, конечно, они имеют в виду мою тетю Математильду,— подумала она про себя, полагая по своей наивности, что в Лондоне, как и в ее родном городке, все знают друг друга.

— Если вы хотите видеть мою тетю,— добавила она вслух,— то она стоит вон там, через три картины от лейтенанта Брауна.

— Очень хорошо, деточка! Тебе лучше пойти к ней,— успокаивающе сказала новая знакомая Кларе.— Уж она-то сумеет найти картину, которая так тебе нужна. До свиданья, бедняжка!

— До свиданья, бедняжка! — как эхо, отозвалась другая сестра.— Постарайся больше не терять свою тетю.

И обе старушки, мелко семеня, вышли из зала. Клара, очень удивленная их поведением, посмотрела им вслед.

— Какие они милые! — подумала она.— Интересно, почему они так жалели меня?

И она отправилась вновь бродить по выставке, бормоча себе под нос:

— Нужно найти картину с двумя хорошими и одной...

## ЕЕ БЛИСТАТЕЛЬСТВО

*Я твой совсем не понимай,*
*Но твой поймешь все вдруг,*
*Когда изведаешь, сагиб,*
*По пяткам ты бамбук.*

Едва путешественники высадились на берег, как их повели во дворец. На полпути вновь прибывших гостей повстречал губернатор, приветствовавший наших знакомых на английском языке — к великому их облегчению, ибо, как выяснилось, приставленный к ним гид говорил лишь на кговджнийском диалекте.

— Не нравятся мне ухмылки этих туземцев,— прошептал пожилой путешествениик на ухо сыну.— Что они на нас так уставились? И почему без конца повторяют «бамбук»?

— Они имеют в виду местный обычай,— пояснил губернатор, случайно услышавший вопрос.— Те, кто каким-либо образом осмелится вызвать неудовольствие Ее Блистательства, подвергаются наказанию: их бьют бамбуковыми палками по пяткам.

Пожилой путешественник поежился.

— Какой варварский обычай! Мне он очень не нравится! — заметил он, делая особое ударение на «мне» и «не нравится».— Очень сожалею, что мы вообще сошли здесь на берег! Норман, взгляни вот на этого дикаря. Что он так скалит зубы? Не иначе, как хочет нас съесть!

Норман обратился к шедшему рядом губернатору.

— Как часто здесь принято съедать знатных чужестранцев? — спросил он самым безразличным тоном, на который только был способен.

— Не очень часто. Во всяком случае, не всегда,— послышался успокоительный ответ.— Знатные путешественники не слишком съедобны. То ли дело свиньи: они так жирны! А этот почтенный старец, например, тощ.

— Весьма рад этому обстоятельству,— пробормотал пожилой путешественник.— Бамбуковых палок нам не миновать, но все же утешительно сознавать, что ты будешь лишь поколочен, а не проглочен. Мой мальчик! Ты только взгляни на этих павлинов!

Наши друзья теперь шли между двумя идеально ровными рядами павлинов. Каждого павлина за цепочку, прикрепленную к золотому ошейнику, держал чернокожий раб, стоявший несколько позади, так чтобы не мешать любоваться великолепным хвостом с синими глазкàми и отливающими зеленым золотом перьями.

Губернатор с гордостью улыбнулся.

— Это в вашу честь,— пояснил он.— Ее Блистательство, помимо обычных, приказала выстроить еще десять тысяч павлинов. Она, несомненно, осыплет вас милостями и на прощанье наградит вас орденом Звезды с Павлиньими Перьями.

— Боюсь, как бы дождь наград не сменился на град побоев! — усомнился один из слушателей губернатора.

— Пойдем! Не падай духом,— ободрил его другой,— здесь очень мило!

— Ты молод, Норман,— вздохнул его отец,— молод и легкомыслен. Я не разделяю твоего восторга. Мне все время мерещится, будто нас уже ведут в острог.

— Престарелый чужеземец чем-то опечален? — с некоторым беспокойством заметил губернатор.— Может быть, на его совести тяжкое преступление?

— Моя совесть чиста,— поспешно воскликнул пожилой джентльмен.— Скажи ему, Норман, что я не совершал никаких преступлений.

— Пока еще не совершал,— веско подтвердил Норман, и губернатор тоном глубочайшего удовлетворения повторил:

— Пока еще не совершал.

— Страна, из которой вы прибыли,— поистине страна чудес,— продолжал, немного помолчав, губернатор.— Как раз недавно я получил письмо от одного моего друга, купца, из Лондона. Год назад он отправился туда вместе с братом, причем у каждого из них было с собой по 1000 фунтов стерлингов. И что ж? Сейчас братьям осталось совсем немного до 60 000 фунтов!

— Как им это удалось? — воскликнул искренне заинтересованный Норман, и даже его отец слегка оживился.

Губернатор протянул Норману письмо.

— Всякий может достичь того же, нужно только знать, как взяться за дело,— гласил этот красноречивый документ.— Мы не должны ни пенса и не украли ни пенса. Год назад у каждого из нас было по 1000 фунтов стерлингов, а сегодня мы уже, как никогда, близки к 60 000 фунтов стерлингов — 60 000 золотых соверенов!

Возвращая письмо, Норман был угрюм и задумчив. Отец его рискнул высказать догадку:

— Может быть, ваши друзья выиграли эту огромную сумму в карты?

— Кговджнийцы никогда не играют в карты,— сурово отверг нелепое предположение губернатор, вводя наших путешественников в ворота дворца. В полном молчании отец и сын проследовали за своим провожатым по длинному коридору и вскоре оказались в величественном зале, все стены которого были сплошь покрыты павлиньими перьями. Ее Блистательство — полная дама крохотного росточка — в мантии из зеленого шелка, сплошь усыпанной серебряными звездами, восседала в центре зала на груде алых подушек. Ее маленькая фигурка была почти незаметна. Бледное круглое лицо ее на миг озарилось отдаленным подобием улыбки, когда путешественники склонились в низком поклоне, и вновь обрело полную неподвижность восковой маски, когда она еле слышным голосом обронила несколько слов на кговджнийском диалекте.

— Ее Блистательство приветствует вас,— перевел губернатор,— и отмечает Невозмутимое Спокойствие старости и Незрелую Поспешность юности.

Тут маленькая властительница хлопнула в ладоши. Как из-под земли появилась целая армия слуг с подносами, уставленными чашечками кофе и сластями. Слуги наперебой принялись угощать путешественников, опустившихся по знаку губернатора на ковер.

— Леденцы! — пробормотал отец. — Я чувствую себя так, словно попал в кондитерскую! Попроси сладкую булочку за один пенс, Норман!

— Не так громко! — прошептал сын.— Скажем ей какой-нибудь комплимент!

Губернатор явно ожидал ответной речи.

— Мы благодарим Ее Недосягаемое Всемогущество,— дрожащим голосом начал престарелый путешественник,— чья улыбка согревает нас, подобно...

— Слова старцев слабы! — недовольно прервал его губернатор.— Пусть скажет юноша!

— Передайте ей,— воскликнул Норман в необычайном порыве красноречия,— что в присутствии Ее Многозвездного Всесокрушительства мы особенно остро ощущаем свое ничтожество, подобно двум жалким козявкам, попавшим в жерло клокочущего вулкана.

— Неплохо сказано,— одобрил губернатор и перевел речь Нормана на кговджнийский.

— А теперь я сообщу вам,— продолжал он,— что угодно Ее Блистательству потребовать от вас, прежде чем вы покинете этот дворец.

— Только что закончился ежегодный конкурс на замещение должности Придворной Вязальщицы Шарфов. Вы назначаетесь судьями. Вынося свое решение, вы должны принять во внимание, насколько быстро связан шарф, насколько он легок и хорошо ли он греет. Обычно участницы конкурса расходились лишь по одному из трех пунктов. Например, в прошлом году Фифи и Гого в течение испытательного срока — недели — успели связать одинаковое количество одинаково теплых шарфов, но шарфы, связанные Фифи, оказались вдвое теплее, чем шарфы, связанные Гого, поэтому Фифи и сочли вдвое лучшей вязальщицей, чем Гого. Но в этом году — о горе мне! — рассудить, кто из вязальщиц лучше, выше человеческих сил. В конкурсе приняли участие три вязальщицы, и связанные ими шарфы отличаются по всем трем пунктам! Ее Блистательство уполномочила меня заявить, что на время разбора столь сложного казуса вы будете расквартированы — разумеется, бесплатно — в лучшей темнице и будете в изобилии получать лучший хлеб и воду.

Пожилой путешественник, услышав страшную весть, застонал.

— Все пропало! — воскликнул он в отчаянии. Норман повел себя иначе: вытащив из кармана блокнот, он спокойно принялся записывать данные об участницах конкурса.

— Их трое: Лоло, Мими и Зузу,— сообщил губернатор.— За то время, которое требуется Мими, чтобы связать 2 шарфа, Лоло успевает связать 5 шарфов, но пока Лоло вяжет 3 шарфа, Зузу успевает связать 4 шарфа! И это не все! Шарфы, связанные Зузу, легче пуха — 5 ее шарфов весят не больше, чем один шарф, связанный Лоло,— но шарфы Мими еще легче! 5 шарфов Мими весят столько же, сколько 3 шарфа Зузу! Но и это еще не все! Один шарф Мими греет так же, как 4 шарфа Зузу, а один шарф Лоло — так же, как 3 шарфа Мими!

Тут маленькая леди еще раз хлопнула в ладоши.

— Аудиенция окончена! — поспешно сказал губернатор.— Вы должны подарить Ее Блистательству прощальные комплименты и выйти из зала, не показав ей спину!

Идти — единственное, на что еще был способен турист постарше. Норман просто сказал:

— Передайте Ее Блистательству, что мы оцепенели при виде Ее Лучезарного Сверкательства и из последних сил шлем свой прощальный привет Ее Августейшей Сметанности!

— Ее Блистательство выражает свое удовлетворение,— сообщил губернатор после тщательного перевода прощального комплимента Нормана.— Она озаряет вас взглядом Своих Царственных Глаз и выражает уверенность, что вы можете поймать этот взгляд!

— Хоть эта задача нам по силам! — в отчаянии простонал старший из путешественников.

Они еще раз низко поклонились и, выйдя из зала, по винтовой лестнице спустились в Собственную Ее Блистательства Темницу, которая оказалась выложенной разноцветным мрамором, освещалась через крышу и была великолепно, хотя и без излишней роскоши, обставлена одной-единственной скамьей из полированного малахита.

— Надеюсь, вы не станете затягивать свое решение,— сказал губернатор, вводя отца и сына в темницу с соблюдением всех правил придворного этикета.— Должен предупредить вас, что у тех несчастных, которые не слишком торопились исполнить повеления Ее Блистательства, возиикали различные неприятности, подчас большие и серьезные. В подобных случаях Ее Блистательство действует весьма решительно. Она говорит: «Что должио быть совершено, да свершится!» — и приказывает дать еще десять тысяч ударов бамбуковыми палками сверх обычного наказания.

С этими словами губернатор покинул путешественников, и они услышали, как за дверью лязгнул засов и щелкнул замок.

— Говорил я тебе: добром это не кончится! — простонал, ломая в отчаянии руки, пожилой путешественник. В своих страданьях он забыл, что сам выбрал маршрут путешествия и никогда иичего подобного не пророчил.— О, если бы нам только благополучно разделаться с этим проклятым конкурсом!

— Не падай духом! — бодро воскликнул молодой человек.— *Haec olim meminisse juvabit**! Вот увидишь, все будет хорошо! Слава еще увенчает нас розами!

— Розами с «г» после «з»! — вот все, что мог вымолвить несчастный отец, в отчаяиии раскачиваясь взад и вперед на малахитовой скамье.— С «г» после «з»!

---

* Когда-нибудь об этом будет приятио вспомнить (*лат.*).

## МЕЛКИЕ РАСХОДЫ

*Раб, который еще должен платить.*
*Какая низость!*

— Тетя Математильда!

— Что, милая?

— Не могли бы вы записать расходы сразу? Если вы их сейчас не запишете, я непременно забуду.

— Подожди хотя бы, пока кэб остановится. Не могу же я писать, когда так трясет!

— Ну, тетя, пожалуйста! А то я действительно забуду.

В голосе Клары зазвучали просительные нотки, против которых тетушка не могла устоять. Достав со вздохом свой блокнот — несколько табличек небольшого формата из слоновой кости,— она приготовилась внести в него те суммы, которые Клара только что израсходовала в кондитерской. Платила за все, разумеется, тетушка, но бедная девочка отлично знала, что рано или поздно Безумная Математильда потребует от нее подробный отчет о каждом израсходованном пенсе, и поэтому сейчас с плохо скрываемым нетерпением ждала, пока тетушка найдет среди своих табличек ту, которая была озаглавлена «Мелкие расходы».

— Вот она,— сказала наконец тетушка.— Последняя запись относится к вчерашнему завтраку. Один стакан лимонада (Почему ты не можешь пить простую воду, как я?), три бутерброда (Горчицы, конечно, в них нет и в помине. Я прямо так и сказала девушке за прилавком, а она в ответ лишь вздернула подбородок. Удивительная дерзость!) и семь бисквитов. Итого 1 шиллинг и 2 пенса*. Итак, что ты заказывала сегодня?

— Один стакан лимонада... — начала было перечислять Клара, но тут кэб неожиданно остановился, и стоявший у входа в вокзал швейцар с отменными манерами помог растерявшейся девочке выйти из экипажа прежде, чем она успела закончить фразу.

Тетушка немедленно захлопнула свой блокнот.

— Дело прежде всего,— сказала она.— Удовольствия (а деньги на мелкие расходы, что бы ты там ни говорила,— всего лишь одна из разновидностей удовольствий) могут подождать.

И Безумная Математильда начала рассчитываться с кэбменом, отдавать подробнейшие и пространнейшие распоряжения относительно багажа, не обращая никакого виимаиия на мольбы несчастной племянницы записать и остальную часть расходов на завтрак.

— Милая моя, да тебе и впрямь следует развивать свою память, чтобы она стала более емкой,— таково было единственное изречение, которым тетушка соблаговолила утешить свою племянницу.— Неужели скрижали твоей памяти недостаточно широки для того, чтобы удержать расходы иа одии-единственный завтрак?

— Конечно, недостаточно! И вполовину не так широки, как надо бы! — послышался возмущенный ответ.

Слова достаточно точно подходили по смыслу, но произнесший их голос не был голосом Клары, и тетя и племянница в удивлении обернулись, чтобы посмотреть, кто это так внезапно вмешался в их разговор.

---

* 1 фунт стерлннгов содержнт 20 шнллингов, а 1 шиллинг — 12 пенсов.

Во времена Кэррола в обращении находились следующие серебряные монеты: крона (достоинством в 5 шнллингов), полкроны ($2^1/_2$ шнллннга), двойной флорин (4 шнллнига), флорнн (2 шиллинга) и монеты достониством в 6 шиллиигов, 3 шнллиига н $^1/_4$ шиллннга. Кроме того, нмели хождеиие 3 медные монеты достоинством в 1 пенс, $^1/_2$ пенса и $^1/_4$ пенса (последняя монета называлась фартннгом).— *Прим. перев.*

Толстенькая старушка суетилась у дверцы, помогая кэбмену извлечь из кабины свою точную копию. Решить, кто из двух старушек полнее и добродушнее, было не так-то просто.

— Говорю вам: эта дверь и вполовину не так широка, как должна была бы быть! — повторила старушка, когда ее сестра была, наконец, извлечена из кэба (совместными усилиями кэбмена и старушки пленница вылетела из места своего невольного заточения, как пробка из духового ружья).

— Не правда ли, девочка? — обратилась она за поддержкой к Кларе, тщетно пытаясь грозно нахмуриться.

— Некоторые пассажиры слишком широки для кэба,— проворчал возница.

— Не выводите меня из себя! — воскликнула старушка, охваченная тем, что у нее должно было означать приступ ярости.— Еще одно слово, и я привлеку вас к ответственности за нарушение *Habeas Corpus**.

Кэбмен прикоснулся к шляпе и отошел, улыбаясь.

— Чтобы поставить на место зарвавшегося грубияна, моя милая, лучше всего сослаться на какой-нибудь пусть даже плохонький закон,— доверительно заметила старушка, обращаясь к Кларе.— Ты видела, как он сразу струсил, когда я упомянула *Habeas Corpus*? Хотя я и не имею ни малейшего понятия о том, что это значит, но звучит все равно здорово, правда?

— Мне как-то не по себе от этого *Habeas Corpus*,— несколько туманно возразила Клара.

— Еще бы,— воскликнула старушка.— Нас и вывели из себя, не так ли, сестрица?

— Никогда в жизни я не была так выведена из себя!— подтвердила, лучезарно улыбаясь, более толстая сестра.

Только теперь Клара узнала в сестрах старушек, с которыми познакомилась в картинной галерее. Отведя в сторону тетушку, она торопливо прошептала ей на ухо:

— Я впервые встретилась с ними в Королевской академии изобразительных искусств. Они были так любезны со мной, а сегодня они завтракали за соседним столом. Они пытались помочь мне найти картину, которую я искала. По-моему, они очень симпатичные старушки!

---

* Начальные слова закона о неприкосновенности личности, принятого английским парламентом в 1679 г.

— Так ты говоришь, что это твои друзья? — переспросила Безумная Математильда.— Ну что ж, они производят приятное впечатление. Можешь побеседовать с ними, пока я куплю билеты. Постарайся только следить за своей речью и располагать мысли в более строгом хронологическом порядке!

Вскоре все четверо — две сестры и тетушка с племянницей — сидели на одной скамейке и в ожидании поезда вели непринужденный разговор, словно уже давно знали друг друга.

— Какое замечательное совпадение! — воскликнула та из сестер, которая была поменьше ростом и поразговорчивей (именно ее познания в юриспруденции обратили в бегство кэбмена).— Мы не только ждем один и тот же поезд на одном и том же вокзале — что достаточно любопытно само по себе,— но и ждем в один и тот же день и в один и тот же час! Это меня особенно поражает!

Она взглянула на свою более толстую и более молчаливую сестру, основное предназначение которой в жизни состояло в том, чтобы поддерживать единство семейного мнения. Сестра тотчас же смиренно откликнулась:

— Меня тоже, сестрица!

— Эти совпадения не являются независимыми,— начала было Безумная Математильда, но Клара рискнула прервать ее.

— Здесь не трясет,— умоляюще сказала она.— Может быть, мы запишем расходы?

Таблички слоновой кости снова были извлечены на свет.

— Итак, что мы заказывали? — спросила тетушка.

— Стакан лимонада, один бутерброд, один бисквит. Ой, что же мне делать? — с отчаяньем в голосе вдруг воскликнула Клара.

— У тебя что, зубы разболелись? — спокойно спросила тетушка, записывая названное Кларой меню. Обе сестры тотчас же открыли сумочки и достали два различных болеутоляющих лекарства (на каждой коробочке было написано: «Самое лучшее»).

— Нет! — удрученно сказала Клара.— Просто я не могу вспомнить, сколько истратила на завтрак.

— Постарайся вычислить, если не помнишь,— предложила тетушка.— Что ты заказывала на завтрак вчера, тебе известно. А вот запись о том, что ты заказывала позавчера — в первый день, когда мы отправились завтракать в кондитерскую: один стакан лимонада, четыре бутерброда, десять бисквитов. Итого 1 шиллинг и 5 пенсов.

С этими словами тетушка передала свои таблички Кларе. Сквозь слезы Клара даже не сразу разглядела, что держит таблички вверх ногами.

Две сестры с глубочайшим интересом прислушивались к разговору между тетей и племянницей. Видя, что Клара очень расстроена, меньшая из сестер ласково положила ей руку на плечо.

— Знаешь, деточка,— сказала она успокаивающе,— мы с сестрой находимся в таком же затруднительном положении! Ну, просто точь-в-точь таком же! Правда, сестрица?

— В совершенно и абсолютно та... — начала более полная старушка, но масштабы задуманного ею предложения были слишком грандиозны, а ее сестре поменьше ростом некогда было ждать, пока она кончит.

— Дело в том, деточка,— продолжала меньшая из сестер,— что мы сегодня завтракали в той же кондитерской, где завтракали вы с тетей, и заказалн два стакана лимонада, три бутерброда и пять бисквитов, но ни одна из нас не имеет ни малейшего понятия о том, сколько мы заплатили. Правда, сестрица?

— Совершенно и абсолютно...— пробормотала вторая старушка, очевидно полагая, что она отстала ровно на одно предложение, и считая необходимым выполнить уже взятое обязательство, прежде чем брать на себя новое. Но тут первая старушка вновь прервала ее, и вторая старушка, потерпев в разговоре сокрушительное фиаско, смолкла.

— Ты сосчитаешь для нас, сколько мы заплатили? — попросила Клару первая старушка.

— Надеюсь, ты не забыла арифметику? — с легким беспокойством спросила тетушка. Клара рассеянно перебирала таблички, тщетно пытаясь собраться с мыслями. В голове у нее было пусто. Лицо быстро утрачивало осмысленное выражение.

Наступило угрюмое молчание.

## DE REBUS OMNIBUS*

*Этот поросенок отправился на рынок. Этот поросенок остался дома.*

— По повелению Ее Блистательства,— сказал губернатор, провожая путешественников с последней Высочайшей аудиенции,— я буду иметь несравненное удовольствие проводить вас до наружных ворот Военного плаца, на котором должна произойти агония прощания,— разумеется, если у нас хватит сил вынести столь сильное потрясение! Грурмстиптсы отправляются от ворот каждые четверть часа в обе стороны.

— Простите, не могли бы вы повторить это слово, — попросил Норман.— Грурм... Как дальше?

— Грурмстиптсы,— повторил губернатор.— У себя в Англии вы называете их омнибусами. Они отправляются в обе стороны, и на любом из них вы сможете добраться до порта.

Пожилой путешественник с облегчением вздохнул. Четырехчасовая придворная церемония утомила его: он все

* В данном случае «О загадке омнибуса», буквально — «О всеобщей загадке» (*лат.*).

время боялся допустить какую-нибудь оплошность, которая привела бы в действие десять тысяч бамбуковых палок (сверх обычной нормы).

Через минуту наши знакомые вышли на огромный четырехугольный плац, вымощенный мрамором. Четыре свинарника, возведенные по углам, радовали глаз изяществом пропорций. Солдаты, державшие на руках поросят, маршировали по плацу во всех направлениях. В центре плаца стоял офицер огромного роста и громовым голосом, перекрывавшим поросячий визг, отдавал приказания.

— Верховный Главнокомандующий! — поспешно прошептал губернатор своим спутникам, которые последовали его примеру и простерлись ниц перед великим человеком. Главнокомандующий мрачно поклонился в ответ. С головы до ног он был расшит золотыми галунами. На лице отважного воина застыло выражение глубокой скорби. Под мышкой Главнокомандующий держал черного поросенка. Отдавая ежеминутно приказания солдатам, доблестный защитник Кговджни все же ухитрился выкроить время, чтобы в отменных выражениях попрощаться с отъезжающими гостями.

— Прощай, о старый чужестранец!.. Этих трех отнести в южный угол!.. Прощай и ты, юный чужестранец!.. Этого жирного поросенка положить поверх других поросят в западном свинарнике!.. Пусть ваши тени никогда не станут короче!.. Горе мне! Опять не так! Очистить все свинарники и начать все сначала!

И закаленный в боях воин, опершись на меч, смахнул слезу.

— Он в глубоком отчаянии,— пояснил губернатор, когда наши путешественники покинули плац.— Ее Блистательство повелела ему разместить в четырех угловых свинарниках 24 поросенка так, чтобы при обходе плаца число поросят в очередном свинарнике неизменно оказывалось ближе к 10, чем число поросят в предыдущем.

— Считает ли Ее Блистательство, что 10 ближе к 10, чем 9? — спросил Норман.

— О да! — подтвердил губернатор.— Ее Блистательство не только считает, что 10 ближе к 10, чем 9, но и выражает уверенность в том, что 10 ближе к 10, чем 11.

— Тогда, я полагаю, поросят можно разместить требуемым образом,— сказал Норман.

Губернатор покачал головой.

— В течение вот уже четырех месяцев Главнокомандующий только тем и занимается, что пробует расположить поросят в свинарниках то так, то этак, но — увы! — все его попытки ни к чему не привели,— заметил губернатор.— Судите сами, осталась ли еще хоть какая-то надежда. Ее Блистательство уже повелела отпустить сверх обычной нормы десять тысяч...

— Поросята, по-видимому, отнюдь не в восторге от этих бесконечных переездов,— поспешно перебил губернатора отец Нормана. Он не любил разговоров о бамбуковых палках.

— Но ведь они переезжают лишь временно,— возразил губернатор.— В большинстве случаев их тотчас же отправляют обратно, стало быть, им нужно просто запастись терпением и не обращать внимания на переезды. Кроме того, переезд вряд ли причиняет им беспокойство: все тщательно предусмотрено и производится под личным наблюдением Верховного Главнокомандующего.

— Ее Блистательство, разумеется, намеревалась обойти все четыре свинарника лишь один раз? — спросил Норман.

— Увы, нет! — вздохнул провожатый.— Она намеревалась обойти их несколько раз, круг за кругом. Круг за кругом. Это собственные слова Ее Блистательства. Но... о горе, о агония расставания! Вот наружные ворота. Здесь мы должны проститься.

Губернатор зарыдал, с чувством пожал руки отцу и сыну и проворно зашагал назад.

— Мог бы хоть раз оглянуться на прощанье! — сказал отец с сожалением.

— И не начинать свистеть с того самого момента, как он повернулся к нам спиной,— сурово произнес сын.— Но посмотри! Эти две штуки... как их... кажется, отправляются!

К сожалению, в омнибусе, отправляющемся прямо в порт, свободных мест уже не было.

— Неважно! — беззаботно воскликиул Норман.— Пойдем по дороге, а следующий омнибус подберет нас.

Некоторое время отец и сын шли молча, размышляя над проблемой, возникшей перед Главнокомандующим вооруженных сил Кговджни. Вдали показался шедший навстречу им омнибус. Когда он поравнялся с путешественниками, отец достал свои карманные часы.

— Прошло двенадцать с половиной минут с того момента, как мы отошли от наружных ворот дворца,— рассеянно заметил он. Внезапно скучное выражение его лица сменилось радостной улыбкой: отца озарила идея!

— Сын мой! — вскричал он, с такой силой кладя свою руку на плечо Норману, что на какое-то мгиовенье вывел центр тяжести последнего за точку опоры.

Застигнутый врасплох молодой человек чуть было не полетел вверх тормашками с явным намерением оставить позади значительную часть расстилавшейся перед иим дороги, но вовремя спохватился и не без изящества принял обычное положение.

— Задача о прецессии и нутации,— заметил он тоном, в котором сыновья почтительиость едва скрывала тень беспокойства.

— Что случилось? — поспешно добавил он, опасаясь, что отец его заболел.— Не угодно ли глоточек бренди?

— Когда следующий омнибус подберет нас? Когда? Когда? — продолжал кричать отец, приходя во все большее и большее возбуждение.

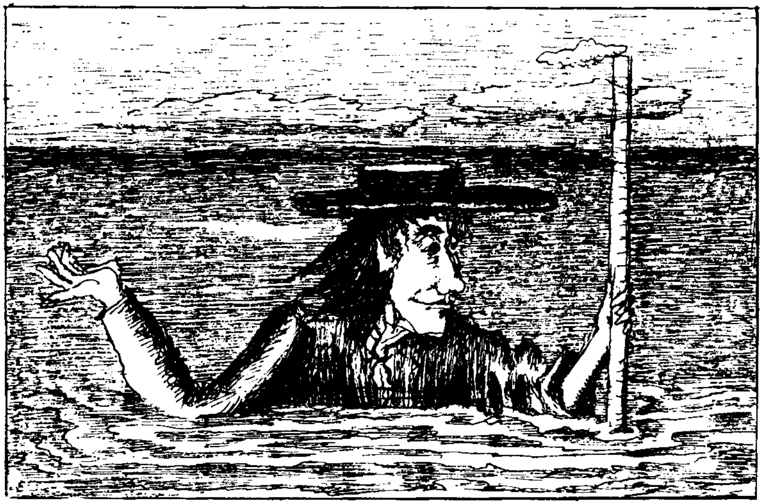
Норман помрачнел.

— Минутку,— сказал он,— дай подумать.

Наступила тишина — тишина, нарушаемая лишь доиосившимся издали визгом несчастных поросят, которых временно переносили из одного свинарника в другой под личным наблюдением Верховного Главнокомандующего.

# *Узелок IX*

## ЗМЕЯ С УГЛАМИ



*Все вода, вода повсюду,*
*А попить — и капли нет.*

— Еще один камешек, и оно утонет!

— Хотел бы я знать, что это ты делаешь с ведерками?

Действующие лица: Хью и Ламберт. Место действия: пляж в Литтл-Мендип. Время действия: 1 час 30 минут пополудни. Хью пускал маленькое ведерко плавать внутри другого, несколько больших размеров, пытаясь определить, сколько камешков можно положить в первое ведерко, прежде чем оно потонет. Ламберт лежал на спине и предавался безделью.

Несколько минут Хью сидел молча, что-то обдумывая, а затем, вскочив на ноги, закричал:

— Ламберт, что я тебе сейчас покажу! Ни за что не догадаешься!

— Если оно живое, покрытое слизью и с ножками, то и смотреть не стану,— ответствовал Ламберт.

— Да нет, не то! Помнишь, что Бальбус говорил нам сегодня утром? Тело, полностью погруженное в воду, вытесняет количество жидкости, равное его объему. Верно?— спросил Хью.

— Что-то в этом роде Бальбус действительно говорил,— неуверенно согласился Ламберт.

— А теперь взгляни сюда! Видишь: маленькое ведерко почти полностью погружено в воду. Следовательно, оно должно вытеснять количество воды, равное своему объему. Я беру и — раз, два, три! — вынимаю его из большого ведерка.

С этими словами Хью вынул маленькое ведерко, а большое передал Ламберту.

— Видишь? Воды в большом ведерке чуть-чуть на донышке. Неужели ты думаешь, что это ничтожное количество воды равно по объему маленькому ведерку?

— Оно должно быть равно,— сказал Ламберт.

— А вот и нет! — торжествующе воскликнул Хью и перелил воду из большого ведерка в маленькое. — Видишь: ведерко наполнилось меньше чем наполовину.

— Это его дело, как оно наполнилось,— сказал Ламберт.— Раз Бальбус сказал, что объемы равны, значит, они равны. Можешь не сомневаться.

— А я не верю, что это так,— возразил Хью.

— Можешь не верить,— ответил Ламберт.— Кроме того, пора обедать. Пошли.

Бальбус уже ждал их, чтобы вместе идти к столу. Хью сразу же поведал ему о возникшем затруднении.

— Сначала поешь, потом поговорим,— сказал Бальбус, ловко отрезав и подложив на тарелку Хью кусок жаркого.— Ты ведь знаешь старую поговорку: «Сначала — баранина, потом — механика».

Такой поговорки мальчики не знали, однако в существовании ее ничуть не усомнились, как не сомневались ни в какой информации, когда-либо исходившей от столь непререкаемого авторитета, как их наставник. Обед прошел в полной тишине. Когда со стола было убрано, Хью достал чернила, ручки и бумагу, и Бальбус приступил к формулировке задачи, которую он приготовил для дневных занятий.

— У одного моего друга был сад с чудесными цветами — прекраснейший сад, хотя и небольших размеров...

— Каких именно? — спросил Хью.

— Именно это вы и должны будете определить — весело ответил Бальбус.— Скажу лишь, что сад имел форму вытянутого прямоугольника — был ровно на пол-ярда больше в длину, чем в ширину, и что посыпанная гравием дорожка шириной в 1 ярд, начинаясь в одном углу, шла вокруг всего сада.

— Дорожка была замкнутой? — поинтересовался Хью.

— Нет, молодой человек, концы дорожки не смыкались. Каждый раз, когда дорожке уже, казалось, не оставалось ничего другого, как сомкнуться, она поворачивала и вновь шла вокруг всего сада рядом со своим первым отрезком, потом снова поворачивала и снова шла вокруг всего сада вдоль предыдущего отрезка и так до тех пор, пока в саду не осталось ни клочка земли.

— Дорожка извивалась, как змея с углами? — спросил Ламберт.

— Совершенно так же! И если пройти вдоль всей дорожки до последнего дюйма, держась ее середины, то длина пройденного пути окажется равной $2^1/_8$ мили. А пока вы найдете длину и ширину сада, я поразмыслю над тем, почему объем воды в большом ведерке оказался меньше объема маленького ведерка.

— Вы, кажется, сказали, что у вашего друга в саду росли чудеснейшие цветы? — спросил Хью, когда Бальбус уже выходил из комнаты.

— Сказал,— ответил Бальбус.

— А где же они росли? — удивился Хью, но Бальбус сделал вид, что не расслышал вопроса. Предоставив мальчикам ломать голову над заданной задачей, он уединился у себя в комнате, чтобы поразмыслить над обнаруженным Хью механическим парадоксом.

— Для простоты предположим,— бормотал он, расхаживая взад и вперед по комнате и глубоко засунув руки в карманы,— что у нас имеется цилиндрический стеклянный сосуд, на поверхности которого через каждый дюйм нанесены метки, и мы заполним его водой до десятой метки. Условимся считать, что каждое деление на стенке сосуда соответствует одной пинте воды. Возьмем теперь сплошной цилиндр, каждый дюйм которого имеет объем в полпинты воды, и погрузим его на 4 дюйма в воду, налитую в первый цилиндр. Дно сплошного цилиндра достигнет отметки 6 дюймов на стенке первого цилиндра. При этом сплошной цилиндр вытеснит 2 пинты воды. Что станет с этими двумя пинтами? Если бы сплошной цилиндр не выступал над поверхностью воды, то эти две пинты преспокойно расположились бы сверху, заполнив наружный цилиндр до отметки 12 дюймов. Но, к несчастью, сплошной цилиндр выступает над поверхностью воды, занимая половину объема, который мог бы вместиться между отметками 10 и 12 дюймов. Следовательно, оставшаяся часть пространства может вместить лишь одну пинту. А что же станется со второй? Если бы сплошной цилиндр не выступал над поверхностью воды, эта пинта преспокойно могла бы разместиться сверху, заполнив наружный цилиндр до отметки 13 дюймов. Но, к сожалению ... О, тень великого Ньютона! — воскликнул Бальбус в ужасе.— Что же сможет остановить непрестанно поднимающийся уровень воды?

И тут его осенила блестящая идея.

— Напишу-ка я обо всем этом небольшой трактат.

*Трактат, написанный Бальбусом*

Известно, что тело, погруженное в жидкость, вытесняет часть жидкости, объем которой равен объему тела. При этом уровень жидкости поднимается ровно настолько, насколько он поднялся бы, если бы к уже имеющейся жидкости добавили количество жидкости, объем которого равен объему погруженного тела. Ларднер обнаружил, что частичное погружение тела сопровождается точно такими же явлениями: количество вытесненной жидкости в этом случае равно по объему погруженной части тела, а уровень жидкости поднимается ровно настолько, насколько он поднялся бы от прибавления объема жидкости, равного объему погруженной части тела.

Предположим, что на поверхности жидкости каким-либо образом удерживается частично погруженное в нее тело. Поскольку часть жидкости вытесняется, уровень жидкости поднимается. Вследствие повышения уровня какая-то новая часть тела оказывается погруженной, вытесняет новую порцию жидкости, что приводит к новому повышению уровня. В свою очередь новое повышение уровня вызывает дальнейшее погружение тела, что приводит к вытеснению еще одной порции жидкости и т. д. Ясно, что весь этот процесс должен продолжаться до тех пор, пока в жидкость не погрузится все тело, после чего начнет погружаться то, что его удерживало (будучи соединенным с телом, это нечто может рассматриваться, по крайней мере при решении интересующей нас задачи, как часть тела). Так, если вы возьмете шест длиной в 6 футов, опустите его конец в бушующие воды и подождете достаточно долго, вы в конце концов погрузитесь в воду. Вопрос о том, откуда берется вода (относящийся к высшим разделам математики и потому не рассматриваемый в данной работе), не имеет отношения к морю. Представим себе человека, стоящего во время прилива у самой воды с шестом в руках, который частично погружен в море. Человек этот стоит прямо и неподвижно, и мы все знаем, что он непременно утонет. Люди, каждый день во множестве погибающие таким образом, дабы удостовериться в философской истине, люди, чьи тела безрассудные волны мрачно выносят на наши неблагодарные берега, имеют большее право называться мучениками науки, чем Галилей или Кеплер. Если воспользоваться проникновенным высказыванием Кошута, именно этих людей следовало бы назвать безвестными полубогами нашего девятнадцатого века.

— Должно быть, в мои рассуждения где-то вкралась ошибка,— сонно пробормотал Бальбус, вытягивая свои длинные ноги на софе.— Надо проверить их еще раз.

Очевидно, для того чтобы лучше сосредоточиться, он закрыл глаза. В течение ближайшего часа или около того его медленное мерное дыхание свидетельствовало о глубоком внимании, с которым он изучал новый и несколько парадоксальный взгляд на интересовавший его предмет.

## ПИРОЖКИ

*Пирожки, пирожки, горячие пирожки!*

— Ох как грустно! — воскликнула Клара, и глаза ее наполнились слезами.

— Грустно, но с точки зрения арифметики весьма любопытно,— последовал менее романтический ответ ее тетушки.— Одни из них потеряли на службе родине руку, другие — ногу, третьи — ухо, четвертые — глаз...

— А некоторые лишились всего сразу! — задумчиво прошептала Клара, когда они с тетушкой проходили мимо длинных рядов нежившихся на солнце загорелых и обветренных ветеранов.— Тетя, вы видите того старика с красным лицом? Он что-то чертит на песке своей деревянной ногой, а остальные внимательно его слушают. Должно быть, он чертит схему какого-нибудь сражения...

— Сражения при Трафальгаре! Ясно, как дважды два — четыре! — тотчас же перебила Клару тетушка.

— Вряд ли,— робко возразила племянница.— Если бы он принимал участие в сражении при Трафальгаре, его бы давно уже не было в живых.

— Не было бы в живых! — презрительно повторила тетушка.— Да он живее нас с тобой, вместе взятых! По-твоему, рисовать на песке да еще деревянной ногой не значит быть в живых? Хотела бы я знать, что тогда по-твоему означает быть в живых!

Клара растерянно промолчала: она никогда не была особенно сильна в логике.

— Вернемся-ка мы лучше к арифметике,— продолжала Безумная Математильда. Эксцентричная старая леди не упускала случая дать своей племяннице какую-нибудь задачку.— Как ты думаешь, какая часть ветеранов потеряла и ногу, и руку, и глаз, и ухо?

— Я... я не знаю. Откуда я могу знать? — с трудом произнесла оробевшая девочка: кому-кому, а ей хорошо было известно, что последует дальше.

— Разумеется, без необходимых исходных данных ты ничего узнать не сможешь, но я сейчас дам тебе...

— Дайте ей пирожок, миссис! Только у нас в Челси умеют печь такие пирожки. Девочки их очень любят,— раздался вдруг приятный голос, и разносчик пирожков, проворно приподняв край белоснежной салфетки, показал аккуратно уложенные в корзине пирожки, выглядевшие весьма соблазнительно. Пирожки были квадратной формы, щедро смазаны яйцом, румяны и блестели на солнце.

— Нет, сэр! Я не имею обыкновения давать своей племяннице такую гадость. Убирайтесь прочь! — и старая леди угрожающе взмахнула зонтиком. На добродушного разносчика эта гневная тирада, казалось, не произвела ни малейшего впечатления. Прикрыв пирожки салфеткой, он удалился, напевая.

— Пирожки эти — просто яд! — сказала старая леди.— То ли дело арифметика. Уж она-то всегда полезна!

Клара, вздохнув, проводила голодным взглядом быстро уменьшавшуюся вдали корзину с пирожками и стала послушно внимать своей неутомимой тетушке, которая тут же начала излагать условие задачи, производя все вспомогательные подсчеты на пальцах.

— Скажем, так: 70% ветеранов лишились глаза, 75 — уха, 80 — руки и 85 — ноги. Просто великолепно! Спрашивается, чему равна наименьшая часть ветеранов, лишившихся одновременно глаза, уха, руки и ноги?

Больше ни тетушка, ни племянница не произнесли ни слова, если не считать восклицания «Пирожки!», вырвавшегося у Клары, когда разносчик со своей корзиной скрылся за углом. В полном молчании обе леди — старая и молодая — дошли до старинного особняка, в котором остановился вместе с тремя сыновьями и их почтенным наставииком отец Клары.

Бальбус, Хью и Ламберт опередили тетушку и племянницу лишь на несколько минут. Они вернулись с прогулки, во время которой Хью умудрился задать головоломку, не только безиадежно испортившую настроение Ламберту, но и поставившую в тупик самого Бальбуса.

— Если я не ошибаюсь, четверг наступает после среды ровно в полночь? — начал Хью.

— Иногда наступает,— осторожно заметил Бальбус.

— Не иногда, а всегда! — решительно заявил Ламберт.

— Иногда,— мягко настаивал Бальбус.— В шести случаях из семи в полночь наступает не четверг, а какой-нибудь другой день недели.

— Я хочу лишь сказать,— пояснил Хью,— что когда вслед за средой наступает четверг, то происходит это в полночь и только в полночь.

— Безусловно,— подтвердил Бальбус. Ламберт счел за лучшее промолчать.

— Прекрасно. Предположим теперь, что здесь, в Челси, сейчас как раз полночь. Тогда к западу от Челси (например, в Ирландии или в Америке), где полночь еще не наступила, на календаре среда, а к востоку от Челси (например, в Германии или в России), где полночь наступила раньше,— четверг. Я рассуждаю правильно?

— Да, вполне,— вновь подтвердил Бальбус, и даже Ламберт соизволил кивнуть головой.

— Но если в Челси сейчас полночь, то к востоку и к западу от него смена дат происходить, казалось бы, не может. Тем ие менее на земном шаре непременно найдется место, по одну сторону от которого будет среда, а по другую—четверг. И что хуже всего: люди, живущие в этом месте, считают дни недели в обратном порядке! Да и как им считать иначе, если к востоку от того места на календарях стоит «среда», а к западу — «четверг». Ведь это означает, что после четверга наступает среда!

— А я знаю! А я знаю! — закричал Ламберт.— Эту головоломку мне задавали и раньше, только формулировали ее иначе.— Моряки уходят в кругосветное плавание, огибают земной шар с востока на запад, возвращаются домой и тут обнаруживают, что у них пропал один день. Им кажется, что они вернулись домой в среду, а все вокруг говорят, что это четверг, и все потому, что у тех, кто оставался дома, полночь наступала на один раз больше, чем у тех, кто плавал. А если бы моряки плыли с запада на восток, то один день у них оказался бы лишним.

— Все это мне известно,— возразил Хью в ответ на несколько сумбурное объяснение Ламберта, — но к делу не относится. Ведь сутки для корабля имеют неодинаковую продолжительность. Когда корабль плывет в одну сторону, сутки на нем продолжаются более 24 часов, когда же он плывет в другую сторону — менее 24 часов. Отсюда и происходит путаница с днями недели: ведь у людей, живущих на суше на одном и том же месте, сутки длятся ровно 24 часа.

— Мне кажется,— задумчиво проговорил Бальбус,— что место, о котором говорит Хью, на земном шаре действительно существует, хотя мне и не приходилось слышать о нем раньше. Людям, живущим там, должно быть странным видеть вчерашний день к востоку от себя, а завтрашний — к западу. Особенно трудно понять, что происходит, когда наступает полночь: ведь в этом странном месте на смену «сегодня» приходит не «завтра», а «вчера». Тут есть над чем задуматься!

О том, как подействовал этот обмен мнениями на наших друзей, мы уже говорили: входя в дом, Бальбус усиленно размышлял над головоломкой, а Ламберт был погружен в мрачное раздумье.

— Добро пожаловать, м'м, милости просим! — приветствовал тетушку представительный дворецкий. (Заметим кстати, что произнести подряд три «м», не вставив между ними ни единого гласного, может далеко не всякий. Это под силу лишь дворецкому, искушенному во всех тонкостях своей профессии.) — Вас уже ожидают в библиотеке. Полный аншлаг!

— Как он смеет говорить о твоем отце «дуршлаг», да к тому же «полный»! — негодующе прошипела на ухо племяннице Безумная Математильда, когда они пересекали просторную гостиную.

— Да нет же, тетя, он просто хотел сказать, что все в сборе,— едва успела прошептать в ответ Клара, как дворецкий ввел их в библиотеку. При виде открывшегося перед ней зрелища Клара лишилась дара речи. За столом в торжественном молчании сидели пять человек: отец, Хью, Ламберт, Норман и Бальбус.

Во главе стола восседал отец. Не нарушая тишины, он молча указал Кларе и Безумной Математильде на пустые кресла справа и слева от него. Стол был сервирован, как для банкета, с той лишь разницей, что вместо привычных приборов на нем были разложены письменные принадлежности. По всему было видно, что дворецкий вложил много выдумки в эту злую шутку. Вместо тарелок перед каждым из присутствовавших был положен лист бумаги, вместо ложки и вилки слева и справа от каждого прибора лежали ручка с пером и карандаш. Роль ломтика хлеба исполняла перочистка, а там, где обычно стоит бокал для вина, красовалась чернильница. Украшением стола — главным блюдом — служила обтянутая зеленым сукном шкатулка. Когда пожилой джентльмен, сидевший во главе стола, встряхивал ее, а делал он это беспрерывно, она издавала мелодичный звон, словно внутри ее находилось бесчисленное множество золотых гиней.

— Сестра! Дочь моя! Сыновья! И ... и Бальбус! — начал пожилой джентльмен столь неуверенно, что Бальбус счел необходимым заявить о полном согласии со сказанным, а Хью — забарабанить кулаками по столу. Столь лестные знаки внимания окончательно сбили с толку неопытного оратора.

— Сестра! — начал он снова, затем помолчал и, встряхнув шкатулку, продолжил с лихорадочной поспешностью:

— Сегодня я... некоторым образом... э... собрал вас... э... по поводу знаменательного события... В этом году... одному из моих сыновей исполняется...— тут он снова умолк в полном замешательстве, ибо достиг середины речи намного раньше намеченного времени, но возвращаться было уже поздно.

— Совершенно верно! — воскликнул Бальбус.

— Вот именно! — ответствовал пожилой джентльмен, который понемногу начал приходить в себя.

— Мысль о том, чтобы ежегодно дарить каждому из сыновей столько гиней, сколько ему лет исполняется в текущем году, пришла мне в голову в весьма знаменательное время. Надеюсь, мой друг Бальбус поправит меня (— Еще как поправит! Ремнем! — прошептал Хью, но его никто не услышал, кроме Ламберта, который нахмурился и укоризненно покачал головой.), если я ошибаюсь. Так вот, эта мысль, повторяю, пришла мне в голову именно в тот год, когда, как сообщил мне Бальбус, сумма возрастов двух из вас была равна возрасту третьего. По этому случаю, как вы все, конечно, помните, я произнес речь...

Бальбус счел, что настал подходящий момент для того, чтобы вставить несколько слов, и начал:

— Это была самая ...

— Произнес речь,— уколол его предостерегающим взглядом пожилой джентльмен.— Несколько лет назад Бальбус сообщил мне ...

— Совершенно верно,— подтвердил Бальбус.

— Вот именно, — ответил благодарный оратор и продолжал:

— Я говорю, сообщил мне о другом не менее знаменательном событии: сумма возрастов двух из вас в тот год оказалась вдвое больше возраста третьего. По этому поводу я тоже произнес речь,— разумеется, не ту, что в первом случае.

В этом году — как утверждает Бальбус — мы присутствуем при третьем знаменательном событии, и я... (тут Безумная Математильда многозначительно посмотрела на часы) ...я тороплюсь изо всех сил,— воскликнул пожилой джентльмен, демонстрируя ясность духа и полное самообладание,— и перехожу к существу дела. Число лет, протекших со времени первого знаменательного события, составляет ровно две третьих от числа гиней, которые я вам тогда подарил. Мальчики! Пользуясь этими данными, вычислите свой возраст, и вы получите от меня ежегодный подарок!

— Но мы и так знаем свой возраст! — воскликнул Хью.

— Замолчите, сэр! — вне себя от негодования вскричал отец, выпрямляясь во весь рост (составлявший ровно пять футов и пять дюймов).— Я сказал, что при решении вы имеете право пользоваться только данными задачи, а не гадать о том, сколько кому лет.

Он захлопнул шкатулку и удалился, ступая неверными шагами и сгибаясь под ее тяжестью.

— Ты также получишь от меня такой же подарок, как мальчики, если сумеешь решить задачу,— шепнула Безумная Математильда племяннице и вышла вслед за братом.

Перо бессильно передать, с какой торжественностью встали из-за стола брат и сестра. Мог ли, спрашиваем мы, отец хитро улыбнуться в такую минуту при виде своих удрученных сыновей? Могла ли, спрашиваем мы, тетушка лукаво подмигнуть своей приунывшей племяннице? Были ли похожи на сдавленный смех те звуки, которые раздались, когда Бальбус, выйдя из комнаты вслед за хозяином дома и его сестрой, прикрывал за собой дверь? Нет, нет и нет! И все же дворецкий рассказал потом кухарке, что... Впрочем, не станем же мы повторять всякие сплетни.

Ночные тени сжалились над молчаливой мольбой несчастных и «не сомкнулись над ними» (поскольку дворецкий внес лампу). «Во тьме ночной» (те же услужливые тени, но в концентрированном виде) «было слышно порой, как где-то залает собака» (на заднем дворе всю ночь напролет пес выл на луну). Но ни «когда утро настало», ни позже сестра и трое братьев «не воспрянули духом» — они так и не смогли обрести былое душевное спокойствие, навсегда покинувшее их после того, как все эти задачи обрушились на них и увлекли на путь нескончаемых страданий.

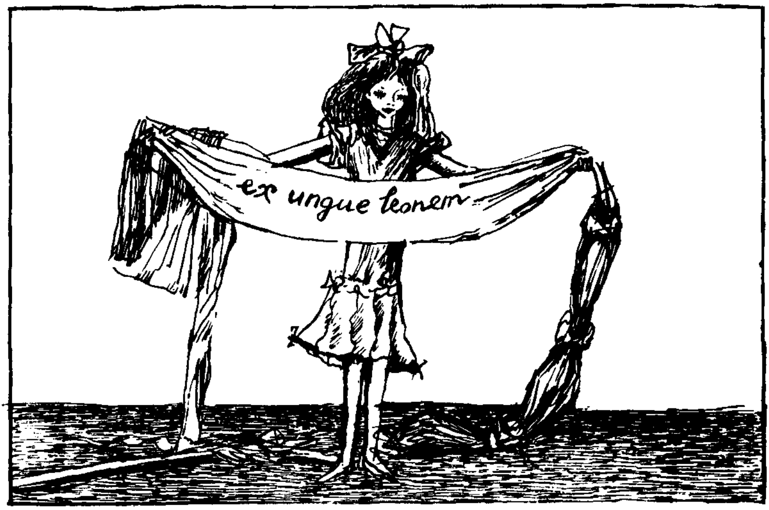
— Вряд ли честно,— пробормотал Хью,— задавать нам такие головоломные задачи.

— Нечего сказать — честно! — с горечью подхватила Клара.

Всем моим читателям я могу лишь повторить слова Клары и честно признаться:

— Больше мне сказать нечего! До свиданья!

# ОТВЕТЫ




*— Узелок, — сказала Алиса.— Позвольте, я помогу вам развязать его!*

## Узелок I

*Задача*. Два путешественника выходят из гостиницы в 3 часа дия и возвращаются в нее в 9 часов вечера. Маршрут их проходит то по ровному месту, то в гору, то под гору. По ровному месту путешественники идут со скоростью 4 мили в час, в гору — со скоростью 3 мили в час и под гору — со скоростью 6 миль в час. Найти расстояние, пройденное путешественниками с момента выхода из гостиницы до момента возвращения, а также (с точностью до получаса) момент восхождения на вершину горы.

*Ответ*: 24 мили; 6 часов 30 минут вечера.

*Решение*. Одну милю пути по ровной местности путешественники проходят за $^1/_4$ часа. Поднимаясь в гору, они преодолевают одну милю за $^1/_3$ часа, а спускаясь с горы,— за $^1/_6$ часа. Следовательно, на то, чтобы пройти туда и обратно одну милю, независимо от того, пролегает ли их путь по долине или по склону горы, у наших путешественников всегда уходит $^1/_2$ часа. Таким образом, за 6 часов (с

3 до 9) они прошли 12 миль в одну сторону и 12 миль — в другую. Если бы 12 миль почти целиком проходили по местности без подъемов и спусков, то у наших путешественников на преодоление их ушло немногим больше 3 часов. Если путь в 12 миль почти все время шел в гору, на него ушло бы немногим меньше 4 часов. Следовательно, $3\frac{1}{2}$ часа — это время, которое не больше чем на $\frac{1}{2}$ часа отличается от времени, прошедшего с момента выхода из гостиницы до подъема на вершину. Поскольку путешественники вышли из гостиницы в 3 часа дня, они достигли вершины горы в 6 часов 30 минут (время дано с точностью до получаса).

Я получил много ответов на эту задачу, среди них особенно любопытны одно дополнение и одно решение в стихах.

В присланном дополнении я изменил одно или два слова. Надеюсь, автор его ие будет за это в обиде, поскольку в исправленных местах он допустил некоторые неточности.

> — Постой, постой! — сказал молодой рыцарь, и слабый отблеск вдохновенья озарил черты его лица, с которого начало исчезать выражение глубокого отчаяния.— Когда мы взошли на вершину горы и тем самым достойно увенчали тяготы нашего пути, как мне кажется, роли не играет. В самом деле, за то время, пока мы взбираемся на одну милю по склону горы и проходим ее на обратном пути, мы по ровному месту могли бы пройти вдвое больше. Отсюда неопровержимо следует, что за битых 6 часов, которые мы находимся в пути, нигде не останавливаясь, чтобы перевести дух или полюбоваться природой, будет пройдено 24 мили.
>
> — Великолепно! — воскликнул пожилой рыцарь.— Двенадцать миль туда и двенадцать миль обратно. На вершину горы мы взобрались где-то между 6 и 7 часами. А теперь послушай, что говорят старшие! Сколько раз по 5 минут прошло с 6 часов до того момента, когда мы достигли вершины горы, столько миль мы взбирались по ее мрачному склону!
>
> Молодой рыцарь застонал и со всех ног бросился бежать в гостиницу.

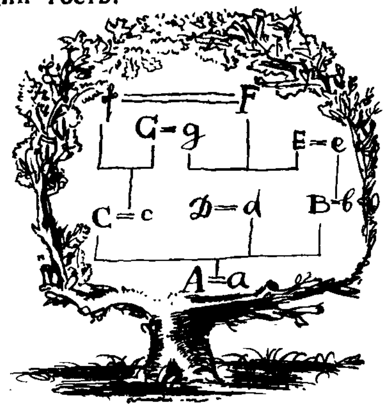
Читательницы, скрывшиеся за псевдонимами *Простушка Сюзанна* и *Добрая примета*, изложили ход своих рассуждений в следующих стихах.

Лишь три пробило на часах,
Пустились в путь тернистый
Те, кто не ведал слова «страх»,—
Два рыцаря-туриста.
Один был молод и силен,
Другой был стар и сед.
Один был прям, другой — согбен
Под грузом лат и лет.
Сначала по равнине шли,
Шагая в ногу дружно,
Но сколько миль они прошли —
Об этом знать не нужно.
Известна лишь скорость,
С которой брели
Они по равнинной
Дороге в пыли:
Хоть миля длинна,
Каждый час проходили
Герои-туристы
По дважды две мили.
Но то по равнине.
По склонам же горным
Туристы взбирались
Не столь уж проворно,
Но все же неплохо:
Три мили за час
Они проходили в горах
Всякий раз.
И вдвое быстрее
Спускались с горы,
Желая успеть
До вечерней зари.
В три вышли,
А в девять вернулись назад,
Преодолев
Сто препон и преград.
Длину маршрута даже дети
Сумеют вычислить, заметив,
Что милю любую всего в полчаса
Туристы успеют пройти до конца,
Затем повернуть и дойти до начала.
Хоть сказано этим, казалось бы, мало,
Но можно задачу решенной считать
И наш узелок до конца развязать.

## Узелок II

*Задача 1. Званый обед у губернатора.* Губернатор Кговджни хочет пригласить гостей на обед в узком кругу и приглашает шурина своего отца, тестя своего брата, брата своего тестя и отца своего шурина. Найти число гостей на званом обеде.

*Ответ.* Один гость.

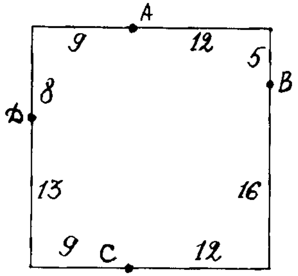



На этом генеалогическом древе мужчины обозначены заглавными, а женщины — строчными буквами. Губернатор обозначен буквой $E$, а его гость — буквой $C$.

*Задача 2. Комнаты с удобствами.* В каждой стороне квадрата находится по 20 дверей, делящих ее на 21 равную часть. Все двери перенумерованы по кругу, начиная с некоторой вершины квадрата. Какая из четырех дверей — № 9, 25, 52 или 73 — обладает тем свойством, что сумма расстояний от нее до трех остальных дверей наименьшая?

*Ответ.* Дверь № 9.

Обозначим девятую дверь через $A$, двадцать пятую — через $B$, пятьдесят вторую — через $C$ и семьдесят третью — через $D$.



Тогда

$$AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13;$$
$$AC = 21;$$
$$AD = \sqrt{9^2 + 8^2} = \sqrt{145} = 12, \ldots$$

(12, ... означает «между 12 и 13»);

$$BC = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20;$$
$$BD = \sqrt{3^2 + 21^2} = \sqrt{450} = 21, \ldots;$$
$$CD = \sqrt{9^2 + 13^2} = \sqrt{250} = 15, \ldots.$$

Таким образом, сумма расстояний до 3 других дверей для $A$ заключена между 46 и 47, для $B$ — между 54 и 55, для $C$ — между 56 и 57 и для $D$ — между 48 и 51. (Почему не «между 48 и 49»? Постарайтесь разобраться сами.) Следовательно, сумма расстояний минимальна для двери $A$.

В задаче 2 я молчаливо предполагал, что нумерация домов начинается с одной из вершин квадрата. Подавляющее большинство читателей в своих решениях исходили из того же предположения. Однако *один* из читателей в своем письме сообщает иное: «Если предположить, что в середине каждой из сторон квадрата на площадь выходит некая улица (такое предположение *не* противоречит условиям задачи!), то вполне допустимо, что нумерация домов на площади начинается где-то на улицах и лишь продолжается на площади». Возможно, бывает и так, но не естественнее ли встать на точку зрения, разделяемую автором и большинством читателей?

## Узелок III

*Задача 1.* Два путешественника садятся на поезда, идущие в противоположных направлениях по одному и тому же замкнутому маршруту и отправляющихся в одно и то же время. Поезда отходят от станции отправления каждые 15 минут в обоих направлениях. Поезд, идущий на восток, возвращается через 3 часа, поезд, идущий на запад,— через 2. Сколько поездов встретит каждый из путешественников в пути (поезда, которые отбывают со станции отправления и прибывают на нее одновременно с поездом, которым следует путешественник, встречными не считаются)?

*Задача 2*. Путешественники следуют по тому же маршруту, что и раньше, но начинают считать встречные поезда лишь с момента встречи их поездов. Сколько поездов встретится каждому путешественнику?

*Ответы*. 1) 19 поездов. 2) Путешественник, следующий восточным поездом, встретит 12 поездов, его напарник — 8.

*Решение*. С момента отправления до возвращения в исходный пункт у одних поездов проходит 180 минут, у других — 120. Возьмем наименьшее общее кратное 180 и 120 (оно равно 360) и разделим весь маршрут на 360 частей (будем называть каждую часть просто единицей). Тогда поезда, идущие в одном направлении, будут следовать со скоростью 2 единицы в минуту, а интервал между ними будет составлять 30 единиц. Поезда, идущие в другом направлении, будут следовать со скоростью 3 единицы в минуту, а интервал между ними будет равен 45 единицам. В момент отправления восточного поезда расстояние между ним и первым встречным поездом составляет 45 единиц. Восточный поезд проходит $^2/_5$ этого расстояния, встречный — остальные $^3/_5$, после чего они встречаются в 18 единицах от станции отправления. Все последующие поезда восточный поезд встречает на расстоянии 18 единиц от места предыдущей встречи. В момент отправления западного поезда первый встречный поезд находится от него на расстоянии 30 единиц. Западный поезд проходит $^3/_5$ этого расстояния, встречный — остальные $^2/_5$, после чего они встречаются на расстоянии 18 единиц от станции отправления. Каждая последующая встреча западного поезда с восточными происходит на расстоянии 18 единиц от места предыдущей встречи. Следовательно, если вдоль всего замкнутого маршрута мы расставим 19 столбов, разделив его тем самым на 20 частей по 18 единиц в каждой, то поезда будут встречаться у каждого столба. При этом в первом случае (задача 1) каждый путешественник, вернувшись на станцию отправления, проедет мимо 19 столбов, а значит, встретит 19 поездов. Во втором случае (задача 2) путешественник, едущий на восток, начинает считать поезда лишь после того, как он проедет $^2/_5$ всего пути, то есть доедет до восьмого столба, и таким образом успевает сосчитать лишь 12 столбов (или, что то же самое, поездов). Его конкурент сосчитает лишь 8. Встреча их поездов происходит в конце $^2/_5$ от 3 часов, или $^3/_5$ от 2 часов, то есть спустя 72 минуты после отправления.

## Узелок IV

*Задача.* Имеются 5 мешков. Первый и пятый мешки вместе весят 12 фунтов, второй и третий — $13^1/_2$ фунтов, третий и четвертый — 11½ фунтов, четвертый и пятый — 8 фунтов, первый, третий и пятый — 16 фунтов. Требуется узнать, сколько весит каждый мешок.

*Ответ.* 5½, 6½, 7, 4½ и 3½ фунта.

*Решение.* Сумма результатов всех пяти взвешиваний равна 61 фунту, при этом вес третьего мешка входит в 61 фунт *трижды*, а вес всех остальных мешков лишь дважды. Вычитая из 61 фунта удвоенную сумму результатов первого и четвертого взвешиваний, получаем, что *утроенный* вес третьего мешка равен 21 фунту. Следовательно, третий мешок весит 7 фунтов. Из результатов второго и третьего взвешиваний (с учетом того, что вес третьего мешка нам уже известен) находим вес второго и четвертого мешков: второй мешок весит 6½ фунтов, четвертый — 4½. Наконец, из результатов первого и четвертого взвешиваний получаем для первого и пятого мешков 5½ фунтов и 3½ фунта.

Задача об определении веса мешков, как ясно с первого взгляда любому алгебраисту, сводится к решению системы линейных уравнений. Однако она без труда решается и с помощью одной лишь арифметики, и поэтому использование более сложных методов я считаю дурным тоном.

## Узелок V

*Задача.* Требуется поставить 3 крестика двум или трем картинам, 2 крестика четырем или пяти картинам и один крестик — девяти или десяти картинам, отмечая одновременно тремя ноликами 1 или 2 картины, двумя ноликами 3 или 4 картины и одним ноликом 8 или 9 картин так, чтобы число картин, получивших оценки, было наименьшим из возможных, а отмеченные картины получили как можно большее число оценок.

*Ответ.* 10 картин получают 29 оценок, распределенных следующим образом:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| × | × | × | × | × | × | × | × | × | 0 |
| × | × | × | × | × | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| × | × | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

*Решение.* Расставив все крестики и заключив в скобки те из них, которые по условиям задачи необязательны, мы получим 10 картин, оценки которых распределены так:

$$\times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ (\times)$$

$$\times\ \times\ \times\ \times\ (\times)$$

$$\times\ \times\ (\times)$$

Расставив все нули (но не от начала к концу, как крестики, а в обратном направлении — от конца к началу), мы получим 9 картин с оценками, распределенными так:

$$(0)\ 0$$

$$(0)\ 0\ 0\ 0$$

$$(0)\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$

Единственное, что еще необходимо сделать после этого,— вдвинуть оба клина как можно плотнее друг в друга, чтобы число отмеченных картин было минимальным. Если та или иная необязательная оценка мешает нам загонять клин в клин, мы ее стираем, если же не мешает — оставляем в целости и сохранности. В первом и третьем рядах оказывается по 10 обязательных оценок, а в середине — лишь 7. Следовательно, необходимо стереть все необязательные оценки в первом и третьем рядах обоих клиньев и оставить все необязательные оценки, стоящие в середине.

## Узелок VI

*Задача 1.* В начале года у каждого из братьев *A* и *B* было по 1000 фунтов стерлингов. Через год братья в своем письме губернатору Кговджни уведомляют его, что в день отправления письма они, как никогда, близки к 60 000 фунтов стерлингов. Каким образом им это удалось?

*Решение.* В день отправления письма братья впервые решили прогуляться близ Английского банка, в подвалах которого хранилась указанная сумма.

На эту задачу было получено 2 в высшей степени замечательных ответа. Читатель, у которого *Сумбур в голове* (это его псевдоним), заставил братьев занять 0 пенсов и украсть 0 пенсов, а затем приписать обе «добытые» цифры справа от 1000 фунтов. В результате столь невинной операции у братьев оказывается 100 000 фунтов, что значительно превышает те 60 000, о которых идет речь в задаче. *At Spes Infracta** нашел еще более остроумное решение: пользуясь взятым взаймы нулем, этот читатель превращает 1, с которой иачинается 1000 фунтов одного брата, в 9, прибавляет «добычу» к исходной 1000 фунтов другого брата, получая в результате 10 000 фунтов. С помощью «украденного» нуля *At Spes Infracta* превращает 1 в 6 и тем самым достигает требуемой в условии задачи суммы в 60 000 фунтов.

*Задача 2.* Лоло (Л) успевает связать 5 шарфов за то время, пока Мими (М) вяжет 2. Зузу (З) успевает связать 4 шарфа за то время, пока Лоло вяжет 3. Пять шарфов Зузу весят столько же, сколько один шарф Лоло. Пять шарфов Мими весят столько же, сколько 3 шарфа Зузу. Один шарф Мими греет так же, как 4 шарфа Зузу, а один шарф Лоло — как 3 шарфа Мими. Какая из трех вязальщиц лучше, если быстроту вязки, легкость шарфа и его спобиость сохранять тепло оценивать одинаково?

*Ответ.* Места на конкурсе вязальщиц шарфов распределились следующим образом: 1) М, 2) Л, 3) З.

*Решение.* При прочих равных условиях Л превосходит М по быстроте вязки в $^5/_2$ раза, а З превосходит Л в $^4/_3$ раза. Чтобы найти 3 числа, удовлетворяющих этим условиям, проще всего принять скорость, с которой вяжет Л (ибо Л непосредственно связана и с М, и с З), за 1, а скорость, с которой вяжут ее конкурентки, выразить в виде дробей. В этих единицах качество работы Л, М и З оценивается числами 1, $^2/_5$ и $^4/_3$.

Для оценки *легкости* шарфа следует иметь в виду, что, чем больше вес, тем менее искусной следует считать вязальщицу. Следовательно, качество шарфов З относится к качеству шарфов Л, как 5 к 1. Таким образом, при оценке легкости шарфов Л, М и З получают оценки $^1/_5$, $^5/_3$ и 1. Аналогичным образом оценивается и умение Л, М и З вязать теплые шарфы: 3, 1 и $^1/_4$. Чтобы получить окончательный результат, необходимо *перемножить* три оценки, полу-

* Надежде вопреки (*лат.*).

ченные Л, и проделать ту же операцию с оценками М и З. В итоге мы получим: $1 \times {}^1/_5 \times 3$, ${}^2/_5 \times {}^5/_3 \times 1$, ${}^4/_3 \times 1 \times {}^1/_4$, то есть ${}^3/_5$, ${}^2/_3$ и ${}^1/_3$. Умножив все три числа на 15 (отчего *отношение* любых из них не изменится), мы получим оценки 9, 10 и 5. Следовательно, лучшей вязальщицей необходимо признать М, затем идет Л и, наконец, З.

Почему оценки претенденток надлежит именно перемножать, а не складывать, подробно объясняется во многих учебниках, и я не буду занимать здесь место повторением избитых истин. Однако *проиллюстрировать* необходимость умножения можно очень легко на примере длины, ширины и глубины. Представим себе, что два землекопа *А* и *В* пожелали узнать, кто из них более искусен в своем ремесле. Оба копают ямы в форме прямоугольного параллелепипеда. Количество проделанной работы измеряется числом кубических футов вынутой земли. Предположим, что *А* выкопал яму длиной 10, шириной 10 и глубиной 2 фута, а *В* выкопал яму длиной 6, шириной 5 и глубиной 10 футов. Объем первой ямы равен 200, а второй — 300 кубическим футам. Следовательно, *В* справляется со своим делом в ${}^3/_2$ раза лучше, чем *А*. А теперь попробуйте оценить по десятибальной системе длину, ширину и глубину каждой из ям, а затем сложить оценки. Что у вас получится?

Некоторые письма, полученные в связи с узелком VI, навели меня на мысль о желательности дополнительных объяснений.

Первая задача, разумеется, не более чем шутка, основанная на игре слов. Я считал, что подобная вольность вполне допустима в серии задач, призванной не столько поучать, сколько развлекать. Однако двое моих корреспондентов, полагающих, что Аполлон должен всегда быть начеку и не ослаблять тетивы своего разящего лука, обрушились на задачку о 60 000 фунтов стерлингов с уничтожающей критикой. Кстати сказать, ни один из них не смог решить задачу, но такова уж человеческая натура.

Как-то раз (для желающих я могу назвать точную дату: 31 сентября) я встретил своего старого друга Брауна и загадал ему только что услышанную загадку. Мощным усилием своего колоссального интеллекта Браун разгадал ее. «Правильно!» — сказал я, услышав ответ. «Очень хорошая загадка,— похвалил меня Браун,— не всякий ее разгадает. Нет, что и говорить, загадка — просто прелесть!» Не успел я распрощаться с Брауном, как через несколько шагов налетел на Смита и задал ему ту же загадку. Тот на минуту наморщил лоб, а потом махнул рукой. Дрожащим голосом я робко пролепетал ответ. «Дурацкая загадка, сэр! — недовольно проворчал Смит на прощание.— Глупее не придумаешь! Удивляюсь, как вы решаетесь повторять подобную чепуху!» Тем не менее есть все основания считать, что Смит по уму не только не уступает Брауну, но и, быть может, даже превосходит его!

Вторая задача представляет собой пример на обычное тройное правило. Сущность его сводится к следующему. Результат зависит от нескольких изменяющихся параметров, которые связаны между собой так, что если бы все параметры, кроме одного, имели постоянные значения, то результат изменялся бы пропорционально параметру, оставшемуся свободным; поскольку же варьируются все параметры, то результат изменяется пропорционально их произведению. Так, например, объем ямы, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда при постоянной длине и ширине, изменяется пропорционально глубине ямы, а при переменной длине, ширине и глубине — пропорционально произведению всех трех измерений.

При иной связи результата с исходными данными тройное правило перестает действовать, и задача нередко становится чрезвычайно сложной.

Приведем несколько примеров. Предположим, что на конкурсном экзамене по французскому, немецкому и итальянскому языку за право получать некую стипендию борются два кандидата: $A$ и $B$.

*а.* Согласно правилам, которыми руководствуется экзаменационная комиссия, результат экзамена зависит от *относительного* уровня знаний кандидатов по каждому языку. Это означает, что независимо от того, получит ли $A$ по французскому языку 1, а $B$ — 2 или же $A$ получит 100, а $B$ — 200, результат экзамена будет одним и тем же. Кроме того, правилами предусмотрено, что если по двум языкам оба кандидата получат одинаковые оценки, то их общие оценки должны находиться одна к другой в таком же отношении, в каком находятся оценки, полученные кандидатами по третьему языку. При этих условиях исход экзамена удовлетворяет тройному правилу. Дабы получить окончательное представление о шансах кандидатов на стипендию, мы должны перемножить 3 оценки, полученные $A$, и сравнить произведение с произведением очков, набранных $B$. Обратите внимание на то, что если $A$ получит хоть один «нуль», то его итоговой оценкой также будет «нуль», даже если по двум остальным языкам он получит наивысший балл, а $B$ выйдет в победители, набрав всего лишь по одному очку за каждый язык. Разумеется, $A$ оказывается в очень невыгодном положении, хотя решение комиссии будет абсолютно правильным с точки зрения существующих правил.

*б*. Результат экзамена, как и прежде, зависит от *относительного* уровня знаний кандидатов, но оценку по французскому языку по новым правилам при выведении общей оценки надлежит учитывать с вдвое большим весом, нежели оценки по немецкому или итальянскому языку. Поскольку такая постановка задачи необычна, я сформулирую ее еще раз несколько подробнее. Итоговая оценка по новым правилам должна быть ближе к отношению оценок за французский язык, чем в случае *а*, причем ближе настолько, что для получения итоговой оценки, выведенной комиссией в случае *а*, каждый из сомножителей, отвечающих относительному уровню знаний кандидатов по немецкому и итальянскому языкам, надлежит возвести в квадрат. Например, если относительный уровень знания кандидатами французского языка оценен в $^9/_{10}$, а двух других языков — в $^4/_9$ и $^1/_9$, то итоговая оценка, вычисляемая по методу *а*, была бы равна $^2/_{45}$, а по методу *б* — $^1/_5$, то есть ближе к $^9/_{10}$, чем $^2/_{45}$. При вычислении итоговой оценки по методу *б* я извлек из $^4/_9$ и $^1/_9$ квадратный корень, то есть «учел» их с вдвое меньшим весом по сравнению с оценкой за французский язык.

*в*. Результат экзамена должен зависеть не от *относительного*, а от *абсолютного* уровня знаний каждого кандидата и оцениваться по *сумме* баллов, полученных по всем трем языкам. Здесь мы должны остановиться и уточнить правила, задав целый ряд вопросов.

1) Что принять за единицу измерения («эталон») знаний по каждому языку?

2) Должны ли все эти единицы иметь одинаковое или различное значение при выводе общей оценки за экзамен?

Обычно за «эталон» знаний принимается умение правильно ответить на все вопросы экзаменационного билета. Если эту высшую оценку принять, например, за 100, то все остальные оценки будут колебаться между 0 и 100.

В предположении, что все единицы равны, мы найдем общую оценку за экзамен для *A* и *B*, сложив баллы, полученные каждым из кандидатов за французский, немецкий и итальянский языки.

*г*. Условия те же, что и в случае *в*, но с одним изменением: оценку по французскому языку при выводе окончательной оценки надлежит засчитывать с удвоенным весом. В этом случае, прежде чем подсчитывать сумму баллов, необходимо сначала еще умножить оценку по французскому языку на 2.

*д*. Оценку по французскому языку при выводе итоговой оценки надлежит брать таким образом, чтобы при одинаковых оценках по немецкому и итальянскому языкам итоговая оценка совпадала с оценкой по французскому (таким образом, нуль по французскому означает, что получивший его кандидат окончательно выбывает из игры). При различных оценках по немецкому и итальянскому языкам они обе должны влиять на окончательный итог экзамена лишь в сумме, каждая — в той же мере, что и другая. В этом случае я бы сложил оценки, полученные, например, *A* по немецкому и итальянскому языкам, а сумму умножил на оценку по французскому языку.

Вряд ли нужно продолжать примеры: данную задачу, очевидно, можно формулировать по-разному и каждый тип условий требует своего метода решения. Задача из узелка VI по замыслу автора должна была принадлежать к классу *а*. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, я специально вложил в уста губернатора следующие слова: «Обычно участницы конкурса расходились лишь по одному из трех пунктов. Например, в прошлом году Фифи и Гого в течение испытательного срока — недели — успели связать одинаковое количество одинаково легких шарфов, но шарфы, связанные Фифи, оказались вдвое теплее, чем шарфы, связанные Гого, поэтому Фифи и сочли вдвое лучшей вязальщицей, чем Гого».

## Узелок VII

*Задача*. Стакан лимонада, 3 бутерброда и 7 бисквитов стоят 1 шиллинг 2 пенса. Стакан лимонада, 4 бутерброда и 10 бисквитов стоят 1 шиллинг 5 пенсов. Найти, сколько стоят: 1) стакан лимонада, бутерброд и бисквит; 2) 2 стакана лимонада, 3 бутерброда и 5 бисквитов.

*Ответ.* 1) 8 пенсов; 2) 1 шиллинг 7 пенсов.

*Решение.* Эту задачу лучше всего решать алгебраически. Пусть $x$ — стоимость (в пенсах) одного стакана лимонада, $y$ — стоимость бутерброда и $z$ — бисквита. Тогда по условию задачи, $x + 3y + 7z = 14$ и $x + 4y + 10z = 17$. Требуется вычислить, чему равны $x + y + z$ и $2x + 3y + 5z$. Располагая лишь *двумя* уравнениями, мы не можем найти значения *каждого* из *трех* неизвестных *в отдельности*, но вычислить значения некоторых *комбинаций* неизвестных в наших силах. Известно также, что с помощью двух данных уравнений мы можем исключить два из трех неизвестных, после чего искомые выражения будут зависеть лишь от одного неизвестного. Значения искомых выражений могут быть вычислены лишь в том случае, если единственное неизвестное, оставшееся неисключенным, само собой уничтожается. В противном случае задача не имеет решения.

Исключим лимонад и бутерброды и сведем все к бисквитам — ситуации еще более удручающей, нежели та, о которой говорится в проникновенных строках:

«Ну, скажи на милость,
Кто бы думать мог?
Все вдруг превратилось
В яблочный пирог».

Для этого вычтем первое уравнение из второго, исключив тем самым лимонад, и получим $y + 3z = 3$. Подставляя $y = 3 - 3z$ в первое уравнение, найдем: $x - 2z = 5$, или, что то же, $x = 5 + 2z$. Если теперь мы подставим выражения для $x$ и $y$ в те выражения, значения которых нам необходимо вычислить, то первое из них превратится в $(5+2z) + (3-3z) + z = 8$, а второе — в $2(5 + 2z) + 3(3 - 3z) + 5z = 19$. Следовательно, стоимость первого набора составляет 8 пенсов, а второго — 1 шиллинг 7 пенсов.

Изложенный нами метод *универсален*. Иными словами, он абсолютно во всех случаях позволяет либо получить ответ, либо доказать, что решения не существует. Разумеется, следовать ему отнюдь не обязательно. Искомые величины можно, например, найти, комбинируя величины, значения которых известны. Такой способ решения требует лишь остроумия и известного «везения». Я не могу оценивать его столь же высоко, как и универсальный метод, поскольку он не гарантирует от неудач даже в том случае, когда решение существует, и оказывается совершенно бесполезным, когда требуется доказать, что задача не имеет решения. Кроме того, составление нужных комбинаций, даже если оно и приводит к успеху, может оказаться довольно утомительным занятием.

Здесь мне хочется остановиться подробно на разборе одного из присланных решений, принадлежащего читателю, скрывающемуся под псевдонимом *Бальбус*, ибо речь пойдет о вещах, достаточно важных для всех читателей.

*Бальбус* решил считать стоимость любого завтрака окончательно установленной лишь в том случае, если «два разных предположения приводят к одинаковой сумме» (израсходованиой на завтрак). Приняв два предположения — согласно первому бутерброд ничего не стоит, согласно второму — бисквит выдается в виде бесплатного приложения к лимонаду и бутербродам (если бы хоть одно из этих предположений соответствовало действительности, в кондитерскую нельзя было бы пробиться!), *Бальбус* получает, что завтрак Клары стоил 8 пенсов, а завтрак старушек — 19 пенсов независимо от принятой гипотезы. Отсюда в соответствии со своим правилом *Бальбус заключил*, что «обнаруженное совпадение доказывает правильность полученных результатов». Я опровергну правило *Бальбуса*, указав всего лишь *один* пример, в котором это правило нарушается. Для того чтобы опровергнуть любое утверждение, одного противоречащего примера вполне достаточно. Если воспользоваться специальной логической терминологией, то можно сказать, что для опровержения общеутвердительного суждения достаточно опровергнуть противоположное ему частноотрицательное суждение. (Здесь необходимо остановиться и совершить небольшой экскурс в логику вообще и в женскую логику в частности. Общеутвердительное суждение «Все говорят, что такой-то и такой-то — мокрая курица» мгновенно опровергается доказательством истинности частноотрицательного суждения «Питер говорит, что такой-то и такой-то — гусь лапчатый», эквивалентного суждению «Питер *не* говорит, что такой-то и такой-то — мокрая курица». Общеотрицательное суждение «Никто не бывает у нее» великолепно парируется частноутвердительным суждением «Я был у нее вчера». Короче говоря, любое из двух противоположных суждений опровергает другое. Отсюда мораль: поскольку доказать частное суждение гораздо легче, чем общее, в разговоре с дамой разумно ограничивать собственные высказывания частными суждениями, предоставляя своей собеседнице доказывать, если это в ее силах, *общие* суждения. Тем самым вы всегда сможете обеспечить себе *логическую* победу. Особенно рассчитывать на то, что вам *практически* удастся одержать верх над вашей собеседницей, не следует, поскольку она всегда может отступить, сделав обескураживающее заявление: «*Это* к делу не относится!» Ни одному мужчине еще не удавалось удовлетворительным образом парировать подобный ход. А теперь вернемся к *Бальбусу*.) Частноотрицательное суждение, на котором я хочу проверить его правило, можно сформулировать так. Предположим, что два счета за завтрак гласят: «2 булочки с изюмом, 1 пирожок, 2 сосискн и бутылка лимонада. Итого: 1 шиллинг 9 пенсов» и «1 булочка с изюмом, 2 пирожка, 1 сосиска и бутылка лимонада. Итого: 1 шнллинг 4 пенса». Предположим также, что Клара заказала себе на завтрак 3 булочки с изюмом, 1 пирожок, 1 сосиску и 2 бутылки лимонада, а две сестры-старушки довольствовались 8 булочками с изюмом, 4 пирожками, 2 сосисками и 6 бутылками лимонада (бедняжки, как им захотелось пить!). Если *Бальбус* любезно согласится испытать свое правило «двух разных предположений» на этом «суждении» и предположит сначала, что булочка с изюмом стоит 1 пенс, а пирожок 2 пенса, а затем — что булочка с изюмом и пирожок стоят по 3 пенса, то за первый счет ему придется «уплатить» 1 шиллинг 9 пенсов, а за второй — 4 шиллинга 10 пенсов независимо от предположения. Полное согласие результатов, скажет он, «доказывает их правильность». Между тем булочка с изюмом в действительности стоила 2 пенса, пирожок 3 пенса, сосиска 6 пенсов, а бутылка лимонада — 2 пенса. Поэтому третий завтрак обошелся Кларе в 1 шиллинг 7 пенсов, а ее умирающим от жажды приятельницам в 4 шиллинга 4 пенса!

Я хотел бы процитировать и кратко прокомментировать еще одно замечание *Бальбуса*, ибо, как мне кажется, некоторые читатели могли бы извлечь из него мораль. Вот что он пишет: «В сущности безразлично, будем ли мы при решении данной задачи пользоваться словами и называть это арифметикой или прибегнем к буквам и символам и назовем его алгеброй». Оба определения (и арифметики, и алгебры) мне представляются неверными. Арифметический метод решения задачи является чисто синтетическим: от одного известного факта он переходит к другому до тех пор, пока желанная цель не будет достигнута. Алгебраический же метод решения по своей природе аналитический: он начинает с конца и, обозначив цель поиска условным символом, устремляется к началу и влечет за собой свою жертву-инкогнито до тех пор, пока не выходит на ослепительный свет известных фактов, срывает с нее маску и говорит: «Я тебя знаю!»

Чтобы не быть голословным, приведу пример. Представьте себе, что к вам в дом забрался грабитель и, похитив какие-то вещи, скрылся. Вы зовете на помощь дежурного полисмена. Отчет о дальнейших событиях в устах полисмена мог бы звучать, например, так:

— Да, мэм, я видел, как какой-то верзила перелез через забор вашего сада, но от меня это было далековато и сразу схватить я его не мог. А что, думаю, если я побегу ему наперерез? И точно, только я выбежал на соседнюю улицу, гляжу — из-за угла на всех парах катит Билл Сайкс собственной персоной. Я его цап за воротник:

— Ага, голубчик, попался! Тебя-то мне и надо!

Больше я ему ничего не сказал. А он мне в ответ:

— Ладно,— говорит,— фараон, твоя взяла. Веди в участок, ничего не попишешь!

Так действовал бы *арифметический* полисмен. А вот другой отчет о тех же событиях:

— Вижу, кто-то бежит. Что делать? Пуститься за ним вслед? Не имеет смысла: больно далеко он ушел, все равно не догонишь. Вот я и решил осмотреть сад. Гляжу — на клумбе, где этот парень помял все ваши цветы, следы остались: такие, знаете, ясные, четкие отпечатки его ножищ. Пригляделся повнимательнее — так и есть: левый каблук везде отпечатался глубже, чем правый. Тут я и говорю себе: «Парень, что их оставил, должно быть, высокого роста и хром на левую ногу». Провел я рукой по стене в том месте, где он перелез, и вижу: на руке сажа. Я и подумал: «Где я мог видеть здоровенного парня, трубочиста, да к тому же хромого на левую ногу?» И тут меня как громом ударило: «Да ведь это же Билл Сайкс!»

Так действовал бы *алгебраический* полисмен — на мой взгляд, более интеллектуальный тип полисмена, чем первый.

## Узелок VIII

*Задача 1.* Расположить 24 поросенка в четырех свинарниках так, чтобы при обходе свинарников по кругу число поросят в очередном свинарнике неизменно оказывалось ближе к 10, чем число поросят в предыдущем свинарнике.

*Ответ.* В первом свинарнике должно находится 8 поросят, во втором — 10 и в четвертом — 6. Ничего не должно находиться в третьем свинарнике: он должен быть пуст. Совершаем контрольный обход свинарников. Десять ближе к 10, чем 8. Что может быть ближе к 10, чем 10? Ничто! Но именно «ничто» и находится в третьем свинарнике. Шесть ближе к 10, чем 0 (арифметический псевдоним «ничего»), 8 ближе к 10, чем 6. Условия задачи выполнены.

*Задача 2.* Из некоторого пункта в обе стороны каждые 15 минут отправляются омнибусы. Пешеход выходит из того же пункта в момент отправления омнибусов и встречает первый омнибус через $12\frac{1}{2}$ минут. Когда пешехода нагонит первый омнибус?

*Ответ.* Через $6^1/_4$ минуты после встречи с первым омнибусом.

*Решение.* Пусть $a$ — расстояние, проходимое омнибусом за 15 минут, а $x$ — расстояние от пункта отправления до того места, где омнибус нагонит пешехода. Поскольку встреченный пешеходом омнибус прибывает в пункт отправления через $2\frac{1}{2}$ минуты после встречи, он за эти $2\frac{1}{2}$ минуты проезжает расстояние, на преодоление которого у пешехода ушло $12\frac{1}{2}$ минут. Следовательно, скорость омнибуса в 5 раз превышает скорость пешехода. Омнибус, который нагонит пешехода в тот момент, когда пешеход пускается в путь, находится на расстоянии $a$ от пункта отправления. Следовательно, к тому моменту, когда путешественник проходит расстояние $x$, омнибус успевает проехать расстояние $a + x$. Учитывая соотношение скоростей, получаем $a + x = 5x$, то есть $4x = a$, откуда $x = a/4$. Это расстояние омнибус преодолевает за $^{15}/_4$ минуты. Следовательно, пешеход проходит его за $5 \times {}^{15}/_4$ минут. Таким образом, омнибус нагоняет пешехода через $18^3/_4$ минуты после того, как тот отправится в путь, или (что то же) через $6^1/_4$ минуты после встречи с первым омнибусом.

## Узелок IX

*Задача 1.* В учебниках физики говорится, что тело, полностью погруженное в жидкость, вытесняет столько жидкости, что ее объем равен объему самого тела. Справедливо ли это утверждение для маленького ведерка, плавающего в другом ведерке несколько больших размеров?

*Решение.* Говоря о теле, «вытесняющем жидкость», авторы учебников имеют в виду, что оно «занимает пространство, которое можно заполнить жидкостью, не вызывая каких-либо изменений в окружающей среде». Если уничтожить ту часть меньшего ведерка, которая выступает над поверхностью воды в большем ведерке, а вместо остальной части ведерка взять столько воды, сколько оно вмещает, то уровень воды в большем ведерке в полном соответствии с учебниками физики останется неизменным.

*Задача 2.* Из рассуждений, приводимых в трактате Бальбуса, следует, что при погружении тела в сосуд с водой уровень воды последовательно поднимается на 2 дюйма, 1 дюйм, ½ дюйма и т. д. Бальбус считает ряд, образуемый приращениями уровня, бесконечным и заключает отсюда, что уровень воды должен неограниченно возрастать. Правильно ли такое заключение?

*Решение.* Нет, неправильно. Сумма всех приращений уровня никогда не достигает 4 дюймов, ибо, сколько бы членов ряда мы ни взяли, от отметки 4 дюйма нас будет отделять расстояние, равное последнему взятому члену ряда.

*Задача 3.* Сад имеет форму «вытянутого» прямоугольника, длина которого на ½ ярда больше ширины. Дорожка шириной в 1 ярд и длиной в 3630 ярдов, усыпанная гравием и закрученная спиралью, заполняет весь сад. Найти длину и ширину сада.

*Ответ.* Ширина сада 60 ярдов, длина — 60½ ярдов.

*Решение.* Разделим дорожку на прямые участки и «повороты» — квадраты размером $1 \times 1$ ярд в «углах». Число полных ярдов и их долей, пройденных вдоль прямых участков дорожки, очевидно, равно площади прямых участков дорожки, измеряемой в квадратных ярдах. Расстояние, проходимое на каждом «повороте», равно 1 ярду, а площадь «уголка» также равна 1 ярду (но уже квадратному). Таким образом, площадь сада равна 3630 квадратным ярдам. Если $x$ — ширина сада в ярдах, то $x(x + 1/2) = 3630$. Решая это квадратное уравнение, получаем $x = 60$. Следовательно, ширина сада равна 60 ярдам, а его длина — $60\frac{1}{2}$ ярдам.

## Узелок X

*Задача 1.* 70 процентов инвалидов потеряли глаз, 75 процентов — ухо, 80 процентов — руку и 85 процентов — ногу. Каков процент ветеранов, лишившихся одновременно глаза, уха, руки и ноги?

*Ответ.* 10 процентов.

*Решение.* Предположим, что инвалидов ровно 100 человек. Общее число всех увечий равно $70 + 75 + 80 + 85 = 310$. Следовательно, на каждого инвалида приходится по 3 увечья, а десятерым особенно не повезло: они получили все 4 увечья. Таким образом, наименьшая доля инвалидов, лишившихся глаза, уха, руки и ноги, равна 10 процентам.

*Задача 2.* Решение географической задачи — о смене дат — я вынужден отложить на неопределенный срок отчасти потому, что я не знаю, как ее решить*.

*Задача 3.* Некогда сумма возрастов двух сыновей была равна возрасту третьего сына. Через несколько лет сумма возрастов стала равна удвоенному возрасту третьего сына. Когда число лет, прошедших с тех пор, когда сумма возрастов двух сыновей была равна возрасту третьего, составит $^2/_3$ от суммы возрастов всех трех сыновей, третьему сыну исполнится 21 год. Сколько лет будет двум другим сыновьям?

*Ответ.* 15 и 18 лет.

*Решение.* Обозначим возраст сыновей в момент первого знаменательного события $x$, $y$ и $(x + y)$. Заметим, что если $a + b = 2c$, то $(a - n) + (b - n) = 2(c - n)$ при любых $n$. Следовательно, последнее соотношение, коль скоро оно выполняется *хоть когда-нибудь*, выполняется *всегда*, в частности в момент первого знаменательного события. Но по условию задачи сумма возрастов двух сыновей ($x$ и $y$) в этот момент равна возрасту третьего и, следовательно, не может быть вдвое больше возраста третьего. Следовательно, условие должно выполняться для суммы возраста третьего сына $(x + y)$ и возраста какого-нибудь из первых

* См. также «Трудность первую» на стр. 365. — *Прим. перев.*

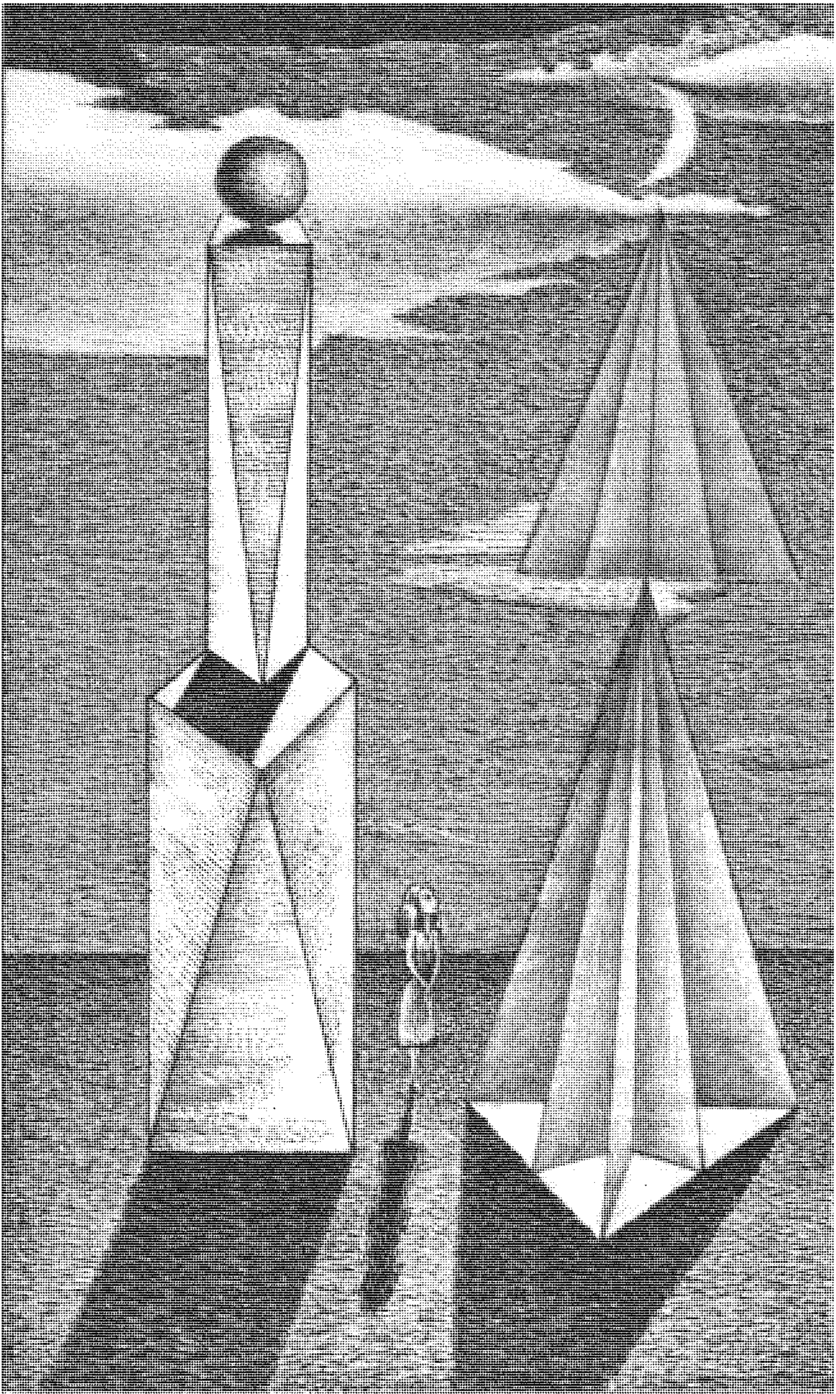
двух сыновей, то есть $x$ или $y$ (какого именно, безразлично). Предположим, например, что $(x + y) + x = 2y$, тогда $y = 2x$. Таким образом, в момент первого знаменательного события возрасты сыновей образуют арифметическую прогрессию $x$, $2x$, $3x$, а число лет, прошедших с тех пор, составляет $^2/_3$ от $6x$, то есть равно $4x$. Итак, в момент, когда отец произносил свою последнюю торжественную речь, его сыновьям исполнилось по $5x$, $6x$ и $7x$ лет. Возраст любого из сыновей выражается целым числом. Об этом свидетельствует то место в речи отца, где говорится: «В этом году одному из моих сыновей исполняется...» Поэтому $7x = 21$, $x = 3$, $5x = 15$ и $6x = 18$.

Один из читателей обратил внимание на допущенную мной неточность. Я упустил из виду, что, хотя одному из сыновей «в этом году исполняется» 21 год, ниоткуда не следует, что он *уже* достиг этого возраста, ибо его день рождения мог прийтись и на более позднюю дату. В день же, когда все герои собрались у отца, сыну *могло* быть еще 20 лет. Отсюда возникает второе решение: 20 лет, 24 года и 28 лет.

Пользуясь случаем, я благодарю всех, кто выразил свое сожаление по поводу того, что узелок X был не только десятым, но и последним, или просьбу пересмотреть мои намерения и продолжить публикацию «Узелков». Я чрезвычайно признателен за любезные слова и добрые пожелания, но все же считаю наиболее разумным закончить на этом то, что в лучшем случае можно было бы назвать не слишком удачной попыткой. «Размеренный ритм античной песни» недосягаем для меня. Куклы, послушно игравшие в «Узелках» отведенные им роли, не заняли (в отличие от тех, кому я адресую эти строки) заметного места в моей жизни и не стали (подобно Алисе и Морскому Деликатесу*) живыми существами вне ее. И все же, дорогой читатель, сейчас, когда я откладываю перо и возвращаюсь к тихой жизни, мне приятно думать, что меня провожает ваша незримая улыбка, и ощущать дружеское пожатие вашей бесплотной руки. Итак, доброй ночи! Грусть расставания настолько приятна, что я буду повторять до самого утра: «Доброй ночи!»

---

* Так назван один из персонажей «Алисы в Стране Чудес» Mock Turtle в пересказе Бориса Заходера — «Пионер», № 12 (1971) — 3(1972).— *Прим. перев.*



# ПОЛУНОЧНЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИДУМАННЫЕ В ЧАСЫ БЕССОННИЦЫ

Первоначально эта книга называлась «Полуночные задачи, придуманные бессонными ночами», однако со второго издания «бессонные ночи» сменились «часами бессонницы».

Это изменение было внесено для успокоения любезных друзей, которые в многочисленных письмах выражали свое сочувствие по поводу плохого состояния моего здоровья. Они полагали, что я страдаю хронической бессонницей и рекомендую математические задачи как средство от этой изнурительной болезни.

Боюсь, что первоначальный вариант названия был выбран необдуманно и действительно *допускал* толкование, которое я отнюдь не имел в виду, а именно, что я часто не смыкаю глаз в течение *всей* ночи. К счастью, предположение моих доброжелателей не отвечает действительности: я никогда не страдал бессонницей, и если мне и случалось провести несколько бессонных часов, то лишь потому, что перед этим я изрядно подремал вечером. Математические задачи я предлагал не как средство от *бессонницы*, а как способ избавиться от *навязчивых мыслей*, которые легко овладевают праздным умом. Надеюсь, что новое название более ясно выражает тот смысл, который я намеревался в него вложить.

Мои друзья *полагают*, будто я (если воспользоваться логическим термином) стою перед дилеммой: либо обречь себя на длинную бессонную ночь, либо, приняв то или иное лекарство, вынудить себя заснуть. Насколько я могу судить, опираясь на *собственный* опыт, ни одно лекарство от бессонницы не оказывает ни малейшего действия до тех пор, пока вы сами не захотите спать. Что же касается математических выкладок, то они скорее способны разогнать сон, нежели приблизить его наступление.

*Л. Кэррол*

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Почти все 72 задачи, собранные в этой книжке, вполне заслуживают названия «полуночных»: я решал их «в уме», лежа в постели в часы бессонницы. Отдельные задачи были решены при свете дня во время одиноких прогулок, но и в этих случаях я, прежде чем делать чертеж или записать хотя бы единое слово, доводил решение до конца «в уме». Обычно я сначала записывал ответ и лишь *затем* условие задачи и ее решение. Например, когда я размышлял над задачей 70, то первая запись выглядела так: «1) заднее ребро, проходимое сначала сверху вниз, затем снизу вверх и т. д.; 2) на расстоянии, равном примерно 0,7 длины ребра (расстояние отсчитывается от верхней вершины тетраэдра); 3) около 18°18′; 4) около 14″. Эти ответы не совсем правильны, но по крайней мере *честны*, ибо они были получены *в уме* без помощи карандаша и бумаги. «Хоть плохонький, сударь, да свой!»

Мотивом, которым я руководствовался при публикации этих задач с их решениями, найденными без помощи карандаша и бумаги силой чистого разума, было *отнюдь* не желание продемонстрировать свои способности к устному счету. Я совершенно уверен в том, что мои способности в этой области оставляют желать много лучшего, и найдется немало математиков, которые сумеют придумать более короткие и изящные решения, не прибегая к карандашу и бумаге. Моя книжка предназначается не для них. Я адресую ее гораздо более широкому кругу людей с *обыкновенными* математическими способностями, которые время от времени испытывали потребность чем-то занять свой ум, но не догадывались воспользоваться открытым мной источником. Я надеюсь, что мой пример поощрит их; они, увидев, чего может достичь после небольшой практики человек *средних* математических способностей, попытаются испробовать свои силы и найдут новое занятие столь же увлекательным и успокоительным, каким нашел его я.

Может быть, определение «успокоительное» в связи с чисто *интеллектуальным* занятием звучит несколько неуместно, но многим из тех, кто знает, что такое навязчивые мысли, неотступно преследующие тебя днем и ночью, оно придется по душе. Не раз говорил я себе, отправляясь спать после дневных неприятностей и огорчений: «Хватит! Не буду больше думать *об этом*! Все неприятное уже позади. Стоит ли вновь возвращаться к нему? Подумаю лучше о чем-нибудь другом!» А через каких-то десять минут я вновь ловил себя на том, что незаметно вернулся в самую гущу неприятных воспоминаний и бесцельно мучаю себя, предаваясь горестным размышлениям о событиях минувшего дня.

В настоящее время невозможно (и я думаю, что все психологи согласятся с этим) никаким усилием воли выполнить принятое самим собой решение «*Не буду* больше думать о том-то и том-то». (Свидетельство тому — известная шутка, которую разыгрывают над ребенком. «Я дам тебе пенс,— говорят ему,— если ты сможешь выстоять в углу пять минут, ни разу не подумав о клубничном варенье!» Ни одно дитя человеческое не способно выстоять против такого искушения!) Однако вполне возможно (и я очень рад, что мне довелось узнать об этом) выполнить решение «*Буду* думать о том-то и том-то!» Стоит лишь сосредоточить свое внимание на избранном объекте, и неприятная тема, от которой вам хотелось избавиться, практически *исчезает* из ваших мыслей. Время от времени она может возвращаться, чтобы, так сказать, заглянуть к вам в дверь. Но поскольку она встретит холодный прием и ей почти не будет уделено внимания, то вскоре она исчезнет совсем.

Я рискну на миг обратиться к читателю в более серьезном тоне и указать на муки разума, гораздо более тягостные, чем просто назойливые мысли. Целительным средством от них также служит занятие, способное поглотить внимание.

Мысли бывают скептическими, и порой кажется, что они способны подорвать самую твердую веру. Мысли бывают богохульными, незванно проникающими в самые благочестивые души, нечестивыми, искушающими своим ненавистным присутствием того, кто дал обет блюсти чистоту. И от всех этих бед самым действенным лекарством служит какое-нибудь *активное* умственное занятие. Нечистый дух из сказки, приводивший с собой семерых еще более порочных, чем он сам, духов, делал так лишь потому, что находил «комнату чисто прибранной», а хозяина — праздно сидящим сложа руки. Если бы его встретил «деловой шум» активной *работы*, то такой прием и ему, и семерым его собратьям пришелся бы весьма не по вкусу!

Моя цель (а я намеревался поощрить других) не была бы достигнута, если бы я, записывая решения, позволил себе вносить *улучшение* в ту часть работы, которая была проделана в уме. Я считал гораздо более важным зафиксировать *полученный результат в его первозданном виде*, чем приводить более краткие и изящные решения, получить которые без карандаша и бумаги было бы намного труднее. Например, при умножении столбиком (скажем, двух семизначных чисел) *на бумаге* сложение промежуточных результатов удобнее начинать с единиц, выписывая семь столбиков цифр и складывая их, как обычно. Но проделать такую операцию *в уме* чрезвычайно трудно (а для *меня* просто невозможно). Единственный шанс на успех заключается, по-видимому, в том, чтобы начать с *миллионов* и сгруппировать их подходящим образом, затем перемножить сотни тысяч, прибавить их к ранее полученному результату и т. д. Нередко оказывается, что решение, необычайно легко и просто получаемое *в уме*, на бумаге становится неуклюжим и длинным.

Когда я впервые приступил к осуществлению своего замысла, мне по силам были лишь простые геометрические задачи, и, даже решая их, я вынужден был время от времени останавливаться, чтобы сделать чертеж и разобраться, где «зарыта собака». Алгебраических задач я поначалу старался избегать по простой причине: стоит хотя бы одному коэффициенту выпасть из памяти, как решение алгебраической задачи приходится начинать с самого начала. Но вскоре я преодолел обе трудности и научился запоминать громоздкие коэффициенты и удерживать перед своим мысленным взором сложные чертежи настолько ясно, что мог *свободно переходить от одной их части к другой*. Труднее всего было запоминать буквы на чертежах, и я научился почти не пользоваться ими, а вместо этого отличал точки лишь по их *расположению*. В моих рукописных заметках к задаче 53 можно найти следующие строки: «Я никогда не задавал себе этой задачи до недели, закончившейся 6 апреля 1889 г. Две или три ночи я пытался решить ее в уме, пока, наконец, не решил в ночь с 6 на 7 апреля. Все рассуждения я провел в уме, без чернил и бумаги. Решая задачи, я не обозначал буквами никаких точек, кроме $A$, $B$, $C$ и $P$, а, думая о них, указывал их положение (например, «основание перпендикуляра, опущенного из точки $P$ на $BC$»)».

Если кто-нибудь из читателей захочет упрекнуть меня в том, что я действовал слишком однообразно, избрал область слишком известную и ни разу не рискнул покинуть торный путь, то я с гордостью укажу иа мою задачу из «трансцендентной теории вероятности» — области, в которой, по моему убеждению, даже самым дерзким математикам до сих пор удалось достичь *весьма* немногих результатов. Случайному читателю эта задача может показаться ненормальной и даже парадоксальной, но я бы хотел, чтобы он честно спросил себя: «А разве сама жизнь — не парадокс?»

Чтобы читатель мог создать себе некоторое представление о том, как я придумывал свои задачи, я приведу «биографию» задачи 63. Ее история типична для большинства задач.

Началась история в ночь с 3 на 4 сентября 1890 г. и завершилась следующей ночью. Незадолго до этого мне пришло в голову, что область, которую я назову «геометрией частично правильных тел», может быть достаточно интересной. Число правильных тел вызывающе мало. Безнадежно пытаться найти хоть один связанный с ними вопрос, который бы не был уже исчерпывающим образом проанализирован. Некоторые из «частично правильных» тел (например, ромбоидальные кристаллы), по-видимому, можно было бы рассматривать с помощью тех же методов, что и правильные тела. В то же время в отличие от правильных тел ничто ие мешает строить новые частично правильные тела.

В соответствии с этим я придумал тело, ограниченное сверху и снизу двумя равными и параллельными квадратами, центры которых расположены на одной вертикали, причем верхний квадрат повернут так, что его стороны параллельны диагоналям нижнего. Затем я представил себе, что расстояние между верхним и нижним квадратами увеличивается до тех пор, пока вершины верхнего квадрата не становятся вершинами четырех равносторонних треугольников, основаниями которых служат стороны нижнего квадрата. Гранями получившегося тела служат два квадрата и 8 равносторонних треугольников. Задача, которую я себе поставил, заключалась в вычислении *объема* такого тела.

Без особого труда удалось показать, что расстояние между квадратами (сторона которых считается равной 2) равно $2^3/_4$. Но когда я попытался вычислить объем с помощью тригонометрии, меня очень скоро охватило отчаяние! Я видел, как можно было бы вырезать из *середины* тела призму, объем которой вычисляется совсем просто, но вычисление объема «обрезков» оставалось для меня иепосильной задачей. Некоторое время спустя мне пришла в голову счастливая идея воспользоваться аналитической геометрией и рассматривать каждую грань тела как основание пирамиды с вершиной в центре тела, который я выбрал за начало координат. Я сразу же увидел, что смогу вычислить координаты вершин, затем вывести уравнения плоскостей, содержащих грани, и найти расстояния от них до начала координат, равные высотам вспомогательных пирамид. Кроме того, стало ясно, что вычисления достаточно проделать лишь для одной пирамиды, поскольку они все одинаковы. В первую же ночь мне удалось вычислить объем, но затем все запуталось, и я вскоре убедился, что мое решение было неправильным.

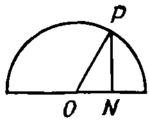
На следующую ночь я вновь принялся за решение, начав его с самого начала. Наутро я вспомнил *ответ* и сразу же записал его. Что же касается условия задачи и решения, то я записал их лишь на следующий день после того, как с удовлетворением убедился, что доказательство на бумаге подтверждает результат, полученный ранее во тьме ночи.

Пользуясь случаем, я хочу объяснить, *почему* я избрал для обозначения синуса и косинуса соответственно символы  и .

Необходимость использования *каких-то* символов для обозначения синуса и косинуса вряд ли нуждается в более подробном обосновании, чем использование знаков $+$ и $-$ для обозначения «плюса» и «минуса».

Что же касается выбранных мной обозначений, то они заимствованы из старой тригонометрии, в которой синусы, косинусы и т. д. были реальными *линиями*.

Так, на приведенном здесь рисунке (радиус *OP* счи-



тается равным единице) отрезок $PN$ есть *синус* угла $NOP$, а отрезок $ON$ — *косинус* того же угла.

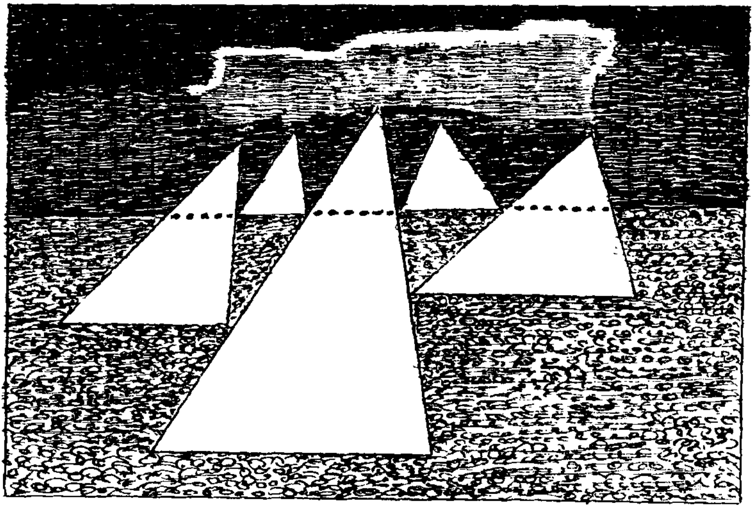
В каждом из выбранных мной обозначений я сохранил полуокружность: в символе ⌓ я лишь сдвинул отрезок $PN$ в середину, а в символе ⌓ слегка удлинил отрезок $ON$, продолжив его за полуокружность, чтобы мое обозначение косинуса не смешивали с встречающимся иногда обозначением для полуокружности.

При подготовке задач к печати мне и моим друзьям удалось обнаружить многочисленные и подчас весьма серьезные ошибки в решениях. Я не льщу себя надеждой, что нам удалось выловить все ошибки.

Вполне возможно, что какие-то ошибки ускользнули от меня и еще ожидают проницательного взгляда какого-нибудь критически настроенного читателя. Я надеюсь, что радость открытия ошибок и испытанное при этом чувство интеллектуального превосходства над автором в какой-то мере вознаградят счастливца за потерю времени и беспокойство, которое могло доставить ему внимательное чтение этой книжки.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ЗАДАЧ

## ЗАДАЧИ*



**1**

Найти общую формулу для двух чисел, сумма квадратов которых равна 2.

**2**

В данном треугольнике провести прямую, параллельную основанию, так, чтобы сумма отрезков боковых сторон, заключенных между этой прямой и основанием, была равна основанию.

**3**

Доказать, что если стороны четырехугольника проходят через вершины параллелограмма и три вершины делят проходящие через них стороны пополам, то и четвертая вершина параллелограмма также делит проходящую через нее сторону четырехугольника пополам.

---

* Ответы см. на стр. 110, решения — на стр. 116.

## 4

В данный остроугольный треугольник вписать треугольник, стороны которого (при каждой из его вершин) образуют равные углы со сторонами данного треугольника.

## 5

Урна содержит один шар, о котором известно, что он либо белый, либо черный. В урну кладут белый шар, после чего ее содержимое перемешивают и вытаскивают наудачу один шар, который оказывается белым. Какова после этого вероятность вытащить белый шар?

## 6

Даны длины медиан треугольника. Найти стороны и углы треугольника.

## 7

Даны длины двух смежных сторон четырехугольника и заключенный между ними угол. Кроме того, известно, что углы четырехугольника, прилежащие к каждой из этих сторон, прямые. Найти: 1) остальные стороны четырехугольника; 2) его площадь.

## 8

Несколько человек сидят по кругу так, что у каждого из них имеется по одному соседу справа и слева. Каждый из сидящих располагает определенным количеством шиллингов. У первого на 1 шиллинг больше, чем у второго, у второго на 1 шиллинг больше, чем у третьего, и т. д. Первый из сидящих отдает 1 шиллинг второму, второй — 2 шиллинга третьему и т. д. Каждый отдает следующему на 1 шиллинг больше, чем получил сам, до тех пор, пока это возможно. В результате у одного из сидящих шиллингов оказывается в 4 раза больше, чем у его соседа. Сколько всего было людей и сколько шиллингов было сначала у самого бедного из них?

## 9

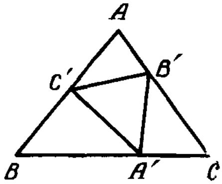
Даны две пересекающиеся прямые и точка внутри образованного ими угла. Через эту точку требуется провести две прямые под прямым углом одна к другой так, чтобы вместе с данными прямыми и прямой, соединяющей точку пересечения последних с данной точкой, они образовывали два равных треугольника.

### 10

Треугольный бильярдный стол имеет три лузы — по одной в каждому углу. В одной лузе умещается лишь один шар, в двух других — по два шара. На столе находятся 3 шара, в каждом из которых спрятано по монете. Стол наклоняют так, что все шары скатываются в один угол, но в какой именно — неизвестно. Полное математическое ожидание «начинки» шаров (или шара), попавших в лузу, составляет 2 шиллинга 6 пенсов*. Монеты какого достоинства спрятаны в шарах?

### 11

В треугольник $ABC$ вписан другой треугольник $A'B'C'$ так, что $\angle BA'C' = \angle CB'A' = \angle AC'B' = \theta$ и, следовательно, треугольники $ABC$ и $A'B'C'$ подобны. Найти отношение длин соответственных сторон. Решить ту же задачу для случая $\theta = 90°$.




Подобие треугольников можно доказать следующим образом:

$$\angle C'A'B' + \angle B'A'C = 180° - \theta,$$

$$\angle B'A'C + \angle A'CB' = 180° - \theta.$$

Следовательно,

$$\angle C'A'B' + \angle B'A'C = \angle B'A'C + \angle ACB',$$

откуда

$$\angle C'A'B' = \angle C.$$

Но тогда

$$\angle A'B'C' = \angle A \quad \text{и} \quad \angle B'C'A' = \angle B.$$

* См. примечание на стр. 43.

Пусть $C'A' = ka$ и, следовательно, $A'B' = kb$, $B'C' = kc$. Требуется найти $k$.

12

Даны полупериметр и площадь треугольника, а также объем прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны сторонам треугольника. Найти сумму квадратов сторон треугольника.

13

Даны радиусы двух пересекающнхся окружностей и расстояние между их центрами. Найти площадь четырехугольника, образованного касательными, проведенными к окружностям в точках пересечения.

14

Доказать, что утроенную сумму трех квадратов можно представить в виде суммы четырех квадратов.

15

Доказать, что если фигура обладает тем свойством, что сумма противоположных углов любого вписанного в нее четырехугольника равна 180°, то эта фигура — окружность.

16

Имеются две урны. В одной из них находится шар, о котором известно, что он либо белый, либо черный. В другой урне находятся 1 белый и 2 черных шара. В первую урну кладут белый шар, после чего ее хорошенько встряхивают и извлекают из нее один шар, который оказывается белым. Как следует действовать, чтобы вероятность извлечь белый шар после проделанных операций была наибольшей: тащить шар, не зная, из какой урны мы его извлекаем, или сначала пересыпать содержимое одной урны в другую и лишь затем тащить шар?

17

В данном треугольнике провести прямую, параллельную основанию, так, чтобы длина отрезка, отсекаемого на ней боковыми сторонами, была равна сумме длин отрезков прямых, проведенных через его концы параллельно боковым сторонам до пересечения с основанием треугольника.

## 18

На основании данного треугольника найти такую точку, чтобы прямая, соединяющая основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на боковые стороны треугольника, была параллельна его основанию. Дать тригонометрическое (1) и геометрическое (2) решения задачи.

## 19

Имеются 3 урны. В одной из них содержится 1 белый и 1 черный шар, в другой — 2 белых и 1 черный шар и в третьей — 3 белых и 1 черный шар. В каком именно порядке расставлены урны, неизвестно. Из первой урны извлекают белый шар, из второй — черный. Какова вероятность вытащить из оставшейся урны белый шар?

## 20

На основании данного треугольника найти такую точку, чтобы длина восставленного из нее перпендикуляра к основанию была равна длине перпендикуляра, опущенного из нее на левую боковую сторону треугольника.

## 21

Найти сумму: 1) $n$ членов; 2) 100 членов ряда $1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + \ldots$

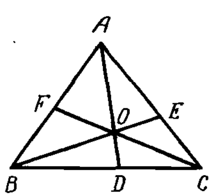
## 22

Даны 3 высоты треугольника. Найти его стороны (1); углы (2); площадь (3).

## 23

Урна содержит 2 шара. Относительно каждого из них известно, что он либо черный, либо белый. В урну кладут еще 2 белых и 1 черный шар. Затем в урну кладут 1 белый шар и извлекают 1 белый шар. Какова вероятность того, что в урне осталось 2 белых шара?

## 24



Из вершин треугольника $ABC$ проведены прямые $AD$, $BE$ и $CF$, пересекающиеся в точке $O$. Выразить отношение $DO/DA$ через два отношения: $EO/EB$ и $FO/FC$.

**25**

Пусть $\varepsilon$, $\alpha$ и $\lambda$ — правильные дроби, и пусть в некотором госпитале $\varepsilon$-я доля всех пациентов потеряла глаз, $\alpha$-я — руку и $\lambda$-я — ногу. Чему равна наименьшая доля пациентов, лишившихся одновременно глаза, руки и ноги?

**26**

Внутри данного треугольника расположить подобный ему треугольник (отношение площадей внутреннего и наружного треугольников задано и выражается числом, меньшим единицы) так, чтобы стороны треугольников были параллельны, а вершины внутреннего треугольника были равноудалены от вершин внешнего треугольника.

**27**

Имеются 3 урны, в каждой из которых содержится по 6 шаров. В одной урне находятся 5 белых шаров и 1 черный, в другой — 4 белых и 2 черных шара и в третьей — 3 белых и 3 черных шара. Из двух урн (из каких именно, неизвестно) извлекли 2 шара, оказавшиеся черным и белым. Какова вероятность вытащить из оставшейся урны белый шар?

**28**

Стороны данного треугольника разделены в крайнем и среднем отношении, и точки деления соединены отрезками прямых. Найти отношение площади образовавшегося при этом треугольника к площади исходного треугольника.

**29**

Доказать, что сумму квадратов двух различных чисел, умноженную на сумму квадратов двух различных чисел, можно представить в виде суммы квадратов двух чисел двумя различными способами.

**30**

В данном треугольнике провести прямую, параллельную его основанию, так, чтобы длина отрезка, отсекаемого на ней боковыми сторонами, была вдвое меньше суммы длин отрезков прямых, проведенных через его концы параллельно боковым сторонам до пересечения с основанием треугольника.

**31**

1 июля, когда на моих карманиых часах было 8 ч утра, стенные часы показывали 8 ч 4 мин. Взяв с собой карманные часы, я отправился в Гринвич и обнаружил, что, когда они показывают полдень, точное время в действительности равно 12 ч 5 мин. Вечером того же дня, когда на моих карманных часах было ровно 6 ч, стенные часы показывали 5 ч 59 мин.

30 июля в 9 ч утра по моим карманным часам стенные часы показывали 8 ч 57 мин. В Гринвиче, когда мои карманные часы показывали 12 ч 10 мин, точное время было 12 ч 5 мин. Вечером того же дня карманные часы уже показывали 7 ч, когда на стенных еще было 6 ч 58 мин.

Карманные часы я завожу лишь при поездке в Гринвич. В течение суток они идут равномерно. Настенные часы идут всегда, причем идут равномерно.

Каким образом мне узнать, когда наступает полдень (по *точному* времени) 31 июля?

**32**

Найти сумму: 1) $n$ членов; 2) 100 членов ряда $1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + \ldots$

**33**

В данную окружность вписать четырехугольник наибольшей площади с двумя параллельными сторонами, из которых одна вдвое больше другой.

**34**

Из данной точки провести 2 прямые, одна из которых проходит через центр данной окружности, а другая отсекает от этой окружности сегмент, вмещающий угол, равный углу между прямыми.

**35**

Провести окружность, пересекающую каждую из сторон данного треугольника в двух точках и такую, что стороны треугольника делят перпендикулярные к ним радиусы в данных отношениях.

## 36

Точку, лежащую на одной боковой стороне данного треугольника, соединить отрезком прямой с точкой, лежащей на другой боковой стороне, так, чтобы сам отрезок был перпендикулярен к одной из этих сторон, а его длина была равна сумме отрезков сторон, заключенных между его концами и основанием треугольника.

## 37

Две окружности пересекаются так, что их общая хорда стягивает центральные углы в 30 и 60°. Какая часть круга, ограниченного меньшей окружностью, находится внутри большего круга?

## 38

Имеются три урны $A$, $B$ и $C$. Урна $A$ содержит 3 красных шара, урна $B$ — 2 красных и 1 белый и урна $C$ — 1 красный и 2 белых шара. Две урны выбраны наудачу, и из каждой извлечено по одному шару. Оба шара оказались красными. Шары вернули в те урны, из которых их вытащили, после чего весь эксперимент повторили заново с теми же двумя урнами. Известно, что один из вытащенных во второй раз шаров красный. Какова вероятность того, что и другой шар тоже красный?

## 39

Два пешехода $A$ и $B$ пускаются в путь ровно в 6 ч утра в один и тот же день. Оба идут по одной дороге и в одном направлении. Пешеход $B$ сначала опережает пешехода $A$ на 14 миль. Оба идут с 6 утра до 6 вечера. В первый день пешеход $A$, двигаясь с постоянной в течение дня скоростью, проходит 10 миль, во второй — 9, в третий — 8 миль и т. д. Пешеход $B$, двигаясь также с постоянной в течение дня скоростью, проходит в первый день 2 мили, во второй — 4, в третий — 6 и т. д. Где и когда пешеход $A$ нагонит пешехода $B$?

## 40

Из основания данного треугольника с острыми углами при основании восставить два перпендикуляра до пересечения с боковыми сторонами так, чтобы сумма их длин была равна высоте, опущенной из вершины треугольника на основание, и при этом:

1) восставленные перпендикуляры были равноудалены от высоты;

2) отстояли на равные расстояния от концов основания треугольника.

## 41

Мой друг принес мне урну с четырьмя шарами. Известно, что каждый из них может быть либо черным, либо белым. По его просьбе я вынул из урны 2 шара, которые оказались белыми. Затем он произнес: «Я забыл предупредить тебя заранее, что по крайней мере 1 шар в урне белый. Впрочем, теперь тебе это и так известно. Вытащи, пожалуйста, еще 1 шар».

1. Какова вероятность того, что я теперь вытащу белый шар?

2. Чему была бы равна эта вероятность, если бы мой товарищ ничего не сказал?

## 42

Через вершины данного треугольника перпендикулярно его биссектрисам проведены прямые, которые пересеклись, образовав новый треугольник. Найти отношение площади нового треугольника к площади данного треугольника.

## 43

Из концов основания данного треугольника провести две прямые, пересекающиеся внутри его и образующие равнобедренный треугольник при основании и равновеликий этому треугольнику четырехугольник при вершине.

## 44

Доказать, что если $a$ и $b$ — взаимно-простые числа, то всегда можно найти такое $n$, при котором число $(a^n - 1)$ будет делиться на $b$.

## 45

Предположим, что бесконечно много палок ломают на две части. Чему равна вероятность того, что по крайней мере одна палка будет переломана точно посредине?

## 46

На основании треугольника выбрана точка. Требуется вписать в него другой треугольник, углы при вершинах которого равны трем наперед заданным углам, так, чтобы заранее указанная его вершина находилась в выбранной точке.

## 47

Решить систему двух неопределенных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y} &= x - z \qquad (1) \\ \frac{x}{z} &= x - y \qquad (2) \end{aligned}\right\}$$

и установить пределы (если таковые существуют), в которых изменяются *вещественные* значения неизвестных.

## 48

На сторонах данного треугольника, как на диаметрах, во внешнюю сторону построеиы полуокружности. Длины общих касательных к этим полуокружностям равны соответственно $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Доказать, что величина

$$\frac{\beta\gamma}{\gamma} + \frac{\gamma\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

равна полупериметру треугольника.

## 49

Четыре равносторонних треугольника сделаны боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды. Найти отношение объема этой пирамиды к объему тетраэдра, составленного из тех же 4 треугольников.

## 50

В каждой из двух урн $H$ и $K$ находится по 2 шара. Известно, что каждый шар либо белый, либо черный. В урну $H$ добавляют белый шар, тщательно перемешивают ее содержимое, после чего извлекают из нее один шар и, не глядя, переносят его в урну $K$. Затем то же самое проделывают с урной $K$ (с той лишь разницей, что шар-«инкогнито» перекладывается теперь в урну $H$). Чему равна в результате вероятность вытащить белый шар из урны $H$?

## 51

Из точки, лежащей на боковой стороне данного треугольника, провести прямую так, чтобы длина отрезка ее, заключенного внутри треугольника, была равна сумме длин перпендикуляров, опущенных из концов этого отрезка на основание треугольника.

## 52

Пять нищих уселись в круг, и каждый из них положил перед собой небольшую кучку пенсов, которые ему удалось насобирать за день. Все пять кучек оказались одинаковыми.

Затем поднялся самый старый и мудрый из нищих и, развернув пустой мешочек, который был у него в руках, сказал:

— Друзья мои, я хочу научить вас одной забавной игре! Прежде всего я назову себя № 1, соседа справа — № 2 и т. д. до № 5. Затем я высыплю в мешочек весь свой дневной «улов» и передам его тому, кто сидит через одного человека слева от меня, то есть № 3. Его роль в игре сводится к тому, чтобы вынуть из мешочка и отдать своим соседям столько пенсов, сколько им причитается в соответствии с их номерами (иначе говоря, он должен дать 4 пенса № 4 и 2 пенса № 2), затем добавить в мешочек половину того количества пенсов, которое было в мешочке, когда № 3 получил его, и передать мешочек, как сделал я, тому, кто сидит через одного человека слева, то есть № 5. № 5 проделывает все то же, что и № 3, и вручает мешочек № 2, от которого мешочек переходит к № 4 и попадает снова ко мне. Если у того, кто держит мешочек в руках, не осталось ни одного пенса, поскольку он всю свою кучку уже высыпал в мешочек, то он имеет право взять нужное ему количество пенсов из любой кучки, *кроме моей*!

Нищие с восторгом принялись за игру. По прошествии определенного времени мешочек вернулся к № 1. Тот положил в него полученные за время игры 2 пенса, тщательно завязал мешочек веревочкой и со словами: «Игра и впрямь *чрезвычайно* забавна, не так ли?» — поднялся и поспешил прочь. Остальные нищие печально переглянулись. Ни у одного из них не осталось ни единого пенса!

Сколько пенсов было у каждого из нищих до «игры»?

### 53

Положение точки на треугольном бильярдном столе задается ее треугольными координатами. Шар выходит из заданной точки и, ударившись о три стенки стола, возвращается в исходную точку. Выразить координаты точки, в которой шар отражается от второй стенки, через треугольные координаты исходной точки и углы треугольника.

### 54

От данного треугольника прямыми, параллельными его сторонам, отрезать три треугольника так, чтобы оставшийся шестиугольник был равносторонним. Выразить сторону полученного шестиугольника через стороны исходного треугольника и найти, в каком отношении вершины шестиугольника делят стороны исходного треугольника.

### 55

На плоскости расставлены три цилиндрические башни. Найти точку плоскости, из которой их ширина будет казаться одинаковой.

### 56

Построить треугольник по трем высотам.

### 57

На сторонах треугольника, внутри его, построить три квадрата, верхние стороны которых образуют треугольник. Задачу требуется решить геометрически (1); тригонометрически (2).

### 58

На бесконечной плоскости случайным образом выбраны три точки. Найти вероятность того, что они являются вершинами тупоугольного треугольника.

### 59

В тетраэдре противоположные ребра попарно равны, вследствие чего все грани снаружи выглядят одинаково. Выразить объем тетраэдра через длины ребер.

### 60

В треугольнике $ABC$ точка $D$ делит основание $BC$ в отношении $m$ к $n$. Найти углы $BAD$ и $CAD$.

## 61

Докажите, что если взять любые три числа, не являющиеся последовательными членами арифметической прогрессии и такие, что их сумма делится на 3, то сумму их квадратов можно представить в виде суммы квадратов трех других чисел, причем обе суммы не будут иметь ни одного общего слагаемого.

## 62

Внутри угла, образуемого двумя пересекающимися прямыми, дана точка. Провести через эту точку прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

## 63

Два равных квадрата лежат в различных горизонтальных плоскостях так, что центры их расположены на одной вертикали и стороны одного параллельны диагоналям другого. Расстояние между плоскостями выбрано так, что, соединив соседние вершины квадратов, мы получим 8 равносторонних треугольников. Вычислить объем тела, ограниченного квадратами и треугольниками.

## 64

Точка внутри треугольника выбрана так, что расстояние от нее до одной из сторон меньше, чем расстояние от нее до любой из двух других сторон. Провести окружность с центром в этой точке так, чтобы из отрезков сторон треугольника, высекаемых окружностью, можно было построить прямоугольный треугольник.

## 65

Сколько существует различных форм треугольников, все углы которых представимы в виде $360°/n$, где $n$ — целое число?

## 66

В урне лежат 2 шара, относительно которых первоначально известно лишь, что каждый из них либо белый, либо черный. Было проведено испытание. Из урны несколько раз подряд извлекали по 1 шару, смотрели, какого он цвета и затем снова возвращали его в урну. Результаты оказались следующими: все вытащенные шары были белыми, а вероятность вытащить белый шар стала равной $\alpha/(\alpha + \beta)$. Испытание было повторено еще $m$ раз. Вытащенные шары всякий раз оказывались белыми. Чему равна вероятность вытащить белый шар после $m + 1$ испытаний?

## 67

Правильный тетраэдр помещен вершиной вниз в углубление, точно повторяющее его форму, после чего приподнят ровно настолько, чтобы его можно было повернуть, повернут на 120° и отпущен. Повернутый тетраэдр снова плотно заполнил углубление. Найти геометрическое место одной из «повернувшихся» вершин тетраэдра.

## 68

Пятеро друзей решили на паях организовать компанию по торговле вином. Каждый из них внес в фонд компании одинаковое количество бутылок вина, купленного по одной цене. Один из друзей на общем собрании «акционеров» был избран казначеем, другой — продавцом. В обязанность продавцу вменялось продавать вино с 10%-ной надбавкой (по сравнению с покупной ценой).

В первый день продавец распил одну бутылку вина, несколько бутылок продал, а всю выручку передал казначею.

На второй день продавец не стал пить вина, но прикарманил деньги, полученные от продажи одной бутылки, а всю остальную выручку передал казначею.

Вечером того же дня казначей наведался в погреба фирмы и пересчитал оставшиеся бутылки. «Вина ровно на 11 фунтов стерлингов»,— заметил он себе под нос, покидая погреб.

На третий день продавец выпил одну бутылку вина, присвоил себе деньги, полученные от продажи другой бутылки, а всю остальную выручку передал казначею.

Поскольку все вино было продано, друзья созвали общее собрание «акционеров» и к своему огорчению обнаружили, что их доходы (то есть разность между суммами, переданными продавцом казначею, и первоначальной стоимостью вина) составили лишь 6 пенсов за бутылку. Доходы эти поступали в течение трех дней равномерно (то есть разность между выручкой, переданной продавцом казначею в конце каждого дня, и первоначальной стоимостью проданного за день вина была одной и той же в течение всех трех дней), но об этом, разумеется, знал лишь продавец.

1. Сколько бутылок вина было куплено в фонд компании?

2. По какой цене друзья покупали вино?

## 69

Через вершины треугольника $ABC$ проведены прямые, отсекающие от углов $A$, $B$ и $C$ части, которые выражаются соответственно правильными дробями $k$, $l$ и $m$. Пересекаясь между собой, эти прямые образуют треугольник, подобный треугольнику $ABC$. При этом угол нового треугольника, образованный прямыми, проходящими через вершины $B$ и $C$, равен углу $A$ и т. д.

Выразить $k$, $l$ и $m$ как (близкие по виду) функции одного переменного и найти отношение соответственных сторон нового и исходного треугольников.

## 70

Правильный тетраэдр расположен так, что одна из его граней обращена вперед (вершиной вверх) и основание ее горизонтально. Предположим, что в плоскости передней грани мы построили все возможные треугольники, имеющие с этой гранью общее основание и равновеликие ей, после чего каждый из треугольников обернули («до отказа») вокруг тетраэдра.

Найти: 1) геометрическое место вершин построенных треугольников, обернутых вокруг тетраэдра; 2) положение вершины треугольника, у которого левый угол при основании равен 15°; 3) левый угол при основании треугольника, вершина которого (при оборачивании треугольника вокруг тетраэдра справа вниз и налево) совместилась с вершиной тетраэдра, а сам треугольник закрыл собой части всех четырех граней тетраэдра; 4) левый угол при основании треугольника, который (направление, в котором треугольник оборачивают вокруг тетраэдра, такое же, как и в предыдущем вопросе) закрыл все четыре грани тетраэдра, затем переднюю и правую грани по второму разу, а его вершина совместилась с дальней (не принадлежащей передней грани) вершиной основания тетраэдра.

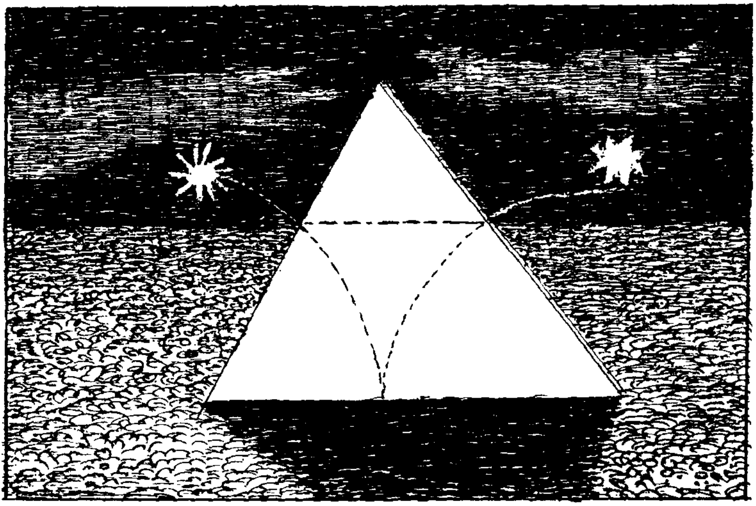
## 71

В данный треугольник вписать шестиугольник так, чтобы противоположные стороны шестиугольника были равны и параллельны, три из них лежали на сторонах треугольника, а диагонали пересекались в заданной точке внутри треугольника.

## 72

В урне содержатся 2 шара, относительио которых неизвестно ничего, кроме того, что каждый из них либо черный, либо белый. Установить цвет шаров, не вынимая их из урны.

## ОТВЕТЫ



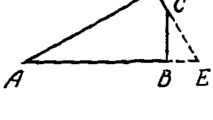
**5.** 2/3.

**6.** Пусть $2a$, $2b$, $2c$ — стороны треугольника, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — его медианы. Тогда

$$a^2 = \frac{-\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2}{9},$$

$$\text{⌓} A = \frac{5\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2\sqrt{2\alpha^2 - \beta^2 + 2\gamma^2}\sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}}.$$

**7.** Пусть $AB$ и $AD$ — известные стороны четырехугольника, углы $B$ и $D$ — прямые, $S$ — площадь четырехугольника, и пусть $AB = b$, $AD = d$.



Тогда

$$1)\ BC = \frac{d - b \text{⌓} A}{\pitchfork A}; \qquad CD = \frac{b - d \text{⌓} A}{\pitchfork A};$$

$$2)\ S = \frac{2bd - (b^2 + d^2) \text{⌓} A}{2 \pitchfork A}.$$

**8.** 7 человек; 2 шиллинга.

**10.** Либо 2 флорина и 1 шестипенсовик, либо полкроны и 2 шиллинга.

**11.** Искомое отношение равно

$$\frac{\pitchfork A \pitchfork B \pitchfork C}{\pitchfork \theta\, (1 + \text{⌓} A \text{⌓} B \text{⌓} C) + \text{⌓} \theta \pitchfork A \pitchfork B \pitchfork C}.$$

При $\theta = 90^\circ$ это выражение упрощается и принимает вид

$$\frac{\pitchfork A \pitchfork B \pitchfork C}{1 + \text{⌓} A \text{⌓} B \text{⌓} C}.$$

**12.** Пусть $s$ — полупериметр, $m$ — площадь треугольника, $v$ — объем прямоугольного параллелепипеда. Тогда

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(s^2 - \frac{v}{s} - \frac{m^2}{s^2}\right).$$

**13.** Пусть $2M$ — площадь четырехугольника, вершинами которого служат центры окружностей и точки их пересечения. Если стороны такого четырехугольника равны $a$ и $b$, а его диагональ, соединяющая центры окружностей,— $c$, то искомая площадь равна

$$\frac{32M^3}{(b^2 + c^2 - a^2)\ (c^2 + a^2 - b^2)}.$$

**16.** В первом случае вероятность равна $1/2$, во втором — лишь $5/12$. Следовательно, лучше придерживаться первой тактики.

**18.** 1) Искомая точка $E$ делит основание так, что $BE/EC = \pitchfork 2C/\pitchfork 2B$.

2) Через вершины $B$ и $C$ основания треугольника проведем прямые, образующие прямые углы со сторонами $AB$ и $AC$. Точку $D$ пересечения этих прямых соединим с вершиной $A$. Точка $E$ пересечения прямой $AD$ с основанием треугольника $BC$ и будет искомой точкой.

**19.** 11/17.

**21.** 1) $\frac{n(n+1)(n+4)(n+5)}{4}$; 2) 27573000.

**22.** Обозначим высоты треугольника через $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ и положим

$$k^2 = \frac{2\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\beta^4\gamma^4+\gamma^4\alpha^4+\alpha^4\beta^4)}{4\alpha^4\beta^4\gamma^4}.$$

Тогда:

1) $a = \frac{1}{k\alpha}, \quad b = \frac{1}{k\beta}, \quad c = \frac{1}{k\gamma}$;

2) $\sin A = k\beta\gamma, \quad \sin B = k\alpha\gamma, \quad \sin C = k\alpha\beta$;

3) $S = \frac{1}{2k}$.

**23.** 2/5.

**24.** Величины $DO/DA$, $EO/EB$ и $FO/FC$ связаны соотношением $DO/DA + EO/EB + FO/FC = 1$, из которого любую из трех величин можно выразить через две остальные.

**25.** $\varepsilon + \alpha + \lambda - 2$.

**27.** 17/20.

**28.** $7 - 3\sqrt{5}$.

**31.** Полдень наступит в тот момент, когда стенные часы покажут 12 ч 2 мин $29^{277}/_{288}$ с.

**32.** 1) $\frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$; 2) 358 550.

**37.** $\frac{4+\sqrt{3}}{12} - \frac{1+\sqrt{3}}{2\pi}$, то есть около 0,044.

**38.** 49/72.

**39.** Пешеходы встречаются в полдень на третий день пути и в самом конце четвертого дня. Пешеход $A$ к моменту встреч успевает пройти 23 и 34 мили.

**41.** 1) 7/12; 2) 1/2.

**42.** $\dfrac{abc}{2(s-a)(s-b)(s-c)}$, где $a$, $b$, $c$ — стороны исходного треугольника, а $s$ — его полупериметр.

**45.** 0,6321207...

**47.** Первый набор значений неизвестных: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Второй набор: $x = y = 0$, $z$ принимает произвольное значение.

Третий набор: $x = z = 0$, $y$ принимает произвольное значение.

Четвертый набор: $x = k^2/(k-1)$, $y = z = k$, где $k$ принимает любое значение.

Если $x$ имеет любое положительное значение меньше 4, то $y$ и $z$ не вещественны.

**49.** 2.

**50.** 17/27.

**52.** 2 фунта 18 шиллингов 0 пенсов.

**53.** Пусть $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — треугольные координаты исходной точки. Тогда расстояние от вершины $A$ треугольника до точки, в которой шар вторично отражается от стенки стола, составляет

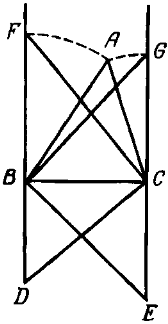
$$\frac{(\alpha \pitchfork C + \gamma \pitchfork A)(2\gamma \underline{\frown} A + \beta)}{\alpha \underline{\frown} C + \gamma \underline{\frown} A + \beta} + \frac{\beta \underline{\frown} A + \gamma \underline{\frown} 2A}{\pitchfork A}.$$

**54.** Вершины шестиугольника $D$ и $G$ должны разбить сторону $AB$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$AD : DG : GB = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

(остальные стороны треугольника делятся аналогичным образом). Следовательно, сторона равностороннего шестиугольника выражается через стороны исходного треугольника как $1/a + 1/b + 1/c$.

**56.** Построим отрезки $BC$, $CE$ и $BD$, равные высотам искомого треугольника, так, чтобы углы $DBE$ и $BCE$ были и прямыми, и продолжим $DB$ за точку $B$, а $EC$ — за точку $C$. Соединим точки $D$ и $C$ отрезком прямой и проведем $CF \perp DC$. Соединим точки $E$ и $B$ отрезком прямой и проведем $BG \perp EB$. С центром в точке $B$ и радиусом $BF$ опишем одну окружность, с центром в точке $C$ и радиусом $CG$ — другую. Пусть $A$ — точка пересечения окружностей. Соединим отрезками прямых $A$ с $B$ и с $C$.




Можно доказать, что треугольник $ABC$ подобен искомому треугольнику. Остальная часть построения очевидна.

**57.** 1) Г е о м е т р и ч е с к о е  р е ш е н и е. На сторонах данного треугольника, вне его, построим квадраты. Продолжив стороны квадрата, параллельные сторонам треугольника, в обе стороны до пересечения друг с другом, получим новый треугольник, подобный данному. Разделим стороны нового треугольника на части, пропорциональные частям, на которые стороны квадратов разбивают стороны нового треугольника. Центральные отрезки будут равны основаниям искомых квадратов.

2) Т р и г о н о м е т р и ч е с к о е  р е ш е н и е. Пусть $a$, $b$, $c$ — стороны данного треугольника, $m$ — его площадь, а $x$, $y$, $z$ — стороны искомых квадратов. Тогда

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2m} + 1.$$

**58.** $$\frac{3}{8 - \frac{6\sqrt{3}}{\pi}}.$$

**59.** Пусть 3 пары противоположных ребер тетраэдра равны соответственно $a$, $b$ и $c$, а соответствующие углы в каждой гранн — $A$, $B$ и $C$. Объем тетраэдра

$$v=\frac{abc}{6}\sqrt{1-(\triangle^2 A+\triangle^2 B+\triangle^2 C)+2\triangle A\triangle B\triangle C}.$$

**60.** $$\operatorname{ctg}(\angle BAD)=\frac{(m+n)\operatorname{ctg}A+n\operatorname{ctg}B}{m};$$

$$\operatorname{ctg}(\angle CAD)=\frac{(m+n)\operatorname{ctg}A+m\operatorname{ctg}C}{n}.$$

**63.** Пусть сторона любого квадрата равна 2. Тогда объем тела равен

$$\frac{8\cdot 2^{1/4}(\sqrt{2}+1)}{3}.$$

**66.** $$\frac{2^m(\alpha-\beta)+\beta}{2^m(\alpha-\beta)+2\beta}.$$

**67.** Выберем начало координат в центре горизонтальной грани тетраэдра, ось $x$ проведем через одну из вершин этой грани, ось $y$ направим параллельно ребру горизонтальной грани, противолежащему выбранной вершине, а ось $z$ — перпендикулярно горизонтальной грани вниз. Если $h$ — высота тетраэдра и $a$ — расстояние от начала координат до вершины, лежащей на оси $x$, то искомое геометрическое место определяется системой уравнений

$$\left.\begin{aligned}(x+\sqrt{3}y)(h-z)&=ah,\\ x^2+y^2&=a^2.\end{aligned}\right\}$$

**68.** 1) пять дюжин;
2) 8 шиллингов 4 пенса за бутылку.

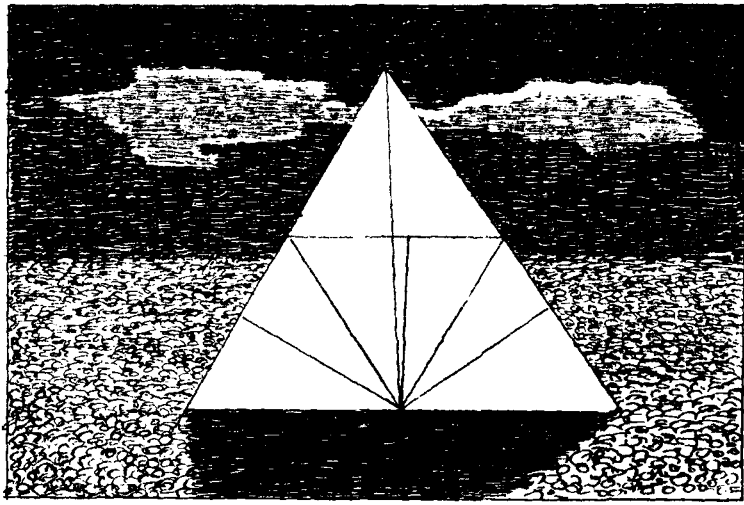
**69.** 1) $k=(\theta-B)/A,\ \ l=(\theta-C)/B,\ \ m=(\theta-A)/C.$
2) Обозначим вершины нового треугольника $A'$, $B'$, $C'$. Тогда $a'/a=b'/b=c'/c=2\triangle\theta$.

**70.** 1) Заднее ребро, проходимое сначала сверху вниз, затем снизу вверх и т. д.
2) На расстоянии, равном примерно 0,7 длины ребра (расстояние отсчитывается от верхней вершины тетраэдра).
3) Около 18,65°.
4) Около 14,53°.

**72.** Один шар черный, другой белый.

# *Глава III*

## РЕШЕНИЯ



### 1

Пусть $u$ и $v$ — искомые числа. Тогда $u^2 + v^2 = 2$. Ясно, что квадраты, удовлетворяющие этому условию, можно представить в виде $u^2 = 1 + k$, $v^2 = 1 - k$.

Если бы в правой части вместо 2 стояло $2m^2$ (на решение задачи такая замена не повлияла бы, поскольку, разделив обе части равенства на $m^2$, мы бы вновь вернулись к исходному условию $u^2/m^2 + v^2/m^2 = 2$), то квадраты можно было бы представить в виде $m^2 + k$ и $m^2 - k$.

Поскольку каждое из чисел $m^2 + k$ и $m^2 - k$ является *квадратом* некоторого числа, нетрудно усмотреть их сходство с формулами для квадрата суммы и квадрата разности

$$a^2 + b^2 + 2ab \quad \text{и} \quad a^2 + b^2 - 2ab.$$

Задача была бы решена, если бы нам удалось отыскать такие $a$ и $b$, что число $a^2 + b^2$ само было бы квадратом. В этом случае $k$ было бы равно $2ab$.

Общая формула для таких $a$ и $b$ известна. Она имеет вид

$$a = x^2 - y^2,$$

$$b = 2xy.$$

[Нетрудно проверить, что $a^2 + b^2 = (x^2 + y^2)^2$.]

Формула $u^2 + v^2 = 2m^2$ при этом переходит в

$$(x^2 - y^2 + 2xy)^2 + (x^2 - y^2 - 2xy)^2 = 2(x^2 + y^2)^2,$$

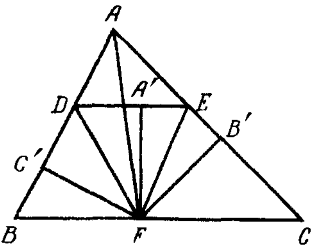
или

$$\left(\frac{x^2 - y^2 + 2xy}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2 - y^2 - 2xy}{x^2 + y^2}\right)^2 = 2.$$

Что и требовалось доказать.

### 2

Анализ. Пусть $ABC$ — данный треугольник, а $DE$ — искомая линия, так что $BD + CE = BC$.




На основании $BC$ от вершины $B$ отложим отрезок $BF$, равный отрезку $BD$. Тогда $CF = CE$. Соединим точку $F$ с точками $D$ и $E$. Нетрудно видеть, что $\angle BDF = \angle BFD = \angle FDE$ (первые два угла равны как углы при основании $DF$ равнобедренного треугольника $BDF$, последние два — как внутренние накрест лежащие). Аналогично показывается, что $\angle CFE = \angle FED$. Отсюда мы заключаем, что $DF$ — биссектриса угла $BDE$, $EF$ — биссектриса угла $CED$, а точка $F$ — центр вневписанной окружности треугольника $ADE$. Следовательно, перпендикуляры $FC'$, $FA'$ и $FB'$, опущенные из точки $F$ на $BD$, $DE$ и $EC$, равны, и прямая $AF$, соединяющая вершину $A$ треугольника $ABC$ с точкой $F$, делит угол $A$ пополам.

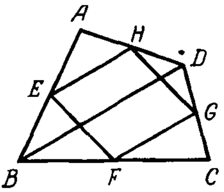
Отсюда мы получаем способ построения искомой прямой.

Синтез. Проводим биссектрису $AF$ угла $A$. Из точки $F$ опускаем перпендикуляры $FB'$ и $FC'$ на стороны $AC$ и $AB$ и восставляем перпендикуляр, на котором откладываем отрезок $FA' = FB'$. Через точку $A'$ проводим прямую $DE$, перпендикулярную $FA'$ (и, следовательно, параллельную $BC$). Прямая $DE$ и есть искомая прямая.

Действительно, углы $FA'E$, $FB'C$ и $FC'D$ прямые и $FA' = FB' = FC'$. Следовательно, $DF$ — биссектриса угла $BDE$, а $EF$ — биссектриса угла $CED$. Но $\angle BFD = \angle FDA'$, а $\angle FDA' = BDF$. Отсюда мы заключаем, что $\angle BFD = \angle BDF$ и $BF = BD$. Аналогичным образом можно показать, что $CF = CE$.
Итак, $BC = BD + CE$, что и требовалось доказать.

### 3

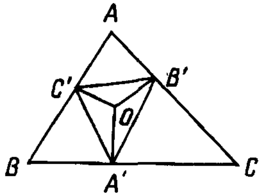
Пусть $ABCD$ — четырехугольник, 3 стороны которого $AB$, $BC$ и $CD$ делятся пополам вершинами $E$, $H$ и $G$ параллелограмма $EFGH$.




Соединим отрезком прямой вершины четырехугольника $B$ и $D$. В треугольнике $BCD$ точки $F$ и $G$ служат серединами сторон $BC$ и $CD$. Следовательно, $FG \parallel BD$ как средняя линия треугольника $BCD$. Но $EH \parallel FG$, и, таким образом, $EH \parallel BD$. Отсюда мы заключаем, что треугольники $AEH$ и $ABD$ подобны. Но $AE = \frac{1}{2}AB$, следовательно, и $AH = \frac{1}{2}AD$, что и требовалось доказать.

**4**

Пусть $ABC$ — данный, а $A'B'C'$ — искомый треугольники, причем $\angle BA'C' = \angle CA'B'$, $\angle BC'A' = \angle AC'B'$, $\angle AB'C' = \angle CB'A'$.




Прямые $A'C'$ и $A'B'$ образуют равные углы с перпендикуляром к $BC$, восставленным в точке $A'$. Аналогичное утверждение справедливо и относительно двух других пар сторон треугольника $A'B'C'$. Следовательно, перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника $ABC$ в точках $A'$, $B'$ и $C'$, делят углы $C'A'B'$, $A'B'C'$, $B'C'A'$ пополам и как биссектрисы внутренних углов треугольника $A'B'C'$ пересекаются в одной точке. Проведем все эти перпендикуляры. Обозначим точку их пересечения через $O$ и положим $\angle C'A'B' = 2\alpha$, $\angle A'B'C' = 2\beta$, $\angle B'C'A' = 2\gamma$. Тогда $\beta + \gamma = \pi - \angle B'OC' = A$, откуда $2A = 2(\beta + \gamma) = \pi - 2\alpha$, или $\alpha = 90° - A$. Следовательно, $\angle BA'C' = A$. Аналогичным образом можно показать, что $\angle BC'A' = C$. Итак, треугольник $BC'A'$ подобен треугольнику $BCA$ (треугольники $C'AB'$ и $A'CB$ также подобны треугольнику $BCA$).

Выбирая соответственные стороны, получаем

$$BA' = \frac{c}{a} \cdot BC' = \frac{c}{a} \cdot (c - AC') =$$

$$= \frac{c}{a} \cdot \left(c - \frac{b}{c} \cdot AB'\right) =$$

$$= \frac{c^2}{a} - \frac{b}{a} \cdot (b - CB') =$$

$$= \frac{c^2}{a} - \frac{b^2}{a} + \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot CA' =$$

$$= \frac{c^2}{a} - \frac{b^2}{a} + a - BA',$$

откуда

$$2BA' = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{a} = \frac{2ca \triangle B}{a},$$

или окончательно

$$BA' = c \triangle B.$$

Следовательно, точка $A'$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из вершины $A$ на сторону $BC$ данного треугольника. Отсюда ясно, как построить искомый треугольник, что и требовалось доказать.

5

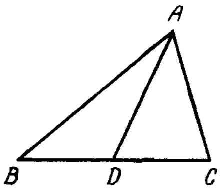
На первый взгляд может показаться, что, *после* того как мы добавили в урну один белый шар и извлекли из нее один белый шар, возникла ситуация, тождественная *исходной*, и, следовательно, вероятность вытащить белый шар вновь стала такой, какой она была сначала, то есть $1/2$. Однако те, кто так думает, заблуждаются.

*До того*, как мы положили в урну белый шар, вероятность присутствия в ней одного белого шара была равна $1/2$ и такой же была вероятность того, что в урне находился 1 черный шар. Следовательно, *после того*, как мы положили в урну белый шар, вероятности того, что в ней находятся 2 белых шара или 1 белый и 1 черный, одинаковы и равны $1/2$. С какой вероятностью шар, извлекаемый из урны, будет белым в каждом из этих двух случаев? Если в урне 2 белых шара, то извлечение белого шара произойдет с вероятностью 1, то есть будет достоверным событием. Если в урне 1 белый и 1 черный шар, то вероятность извлечь белый шар равна $1/2$. Таким образом, после извлечения одного белого шара вероятности того, что урна до извлечения его содержала 2 белых шара или 1 белый и 1 черный шар, пропорциональны соответственно $1/2 \cdot 1$ и $1/2 \cdot 1/2$, то есть $1/2$ и $1/2$, или 2 и 1. Следовательно, эти вероятности равны $^2/_3$ (2 белых шара в урне перед вытаскиванием белого шара) и $^1/_3$ (в урне 1 белый и 1 черный шар). Таким образом, после извлечения белого шара вероятность того, что в урне остался 1 белый шар, равна $^2/_3$, а вероятность того, что в урне остался 1 черный шар, $^1/_3$.

Итак, вероятность вытащить при очередном извлечении шара из урны белый шар равна $^2/_3$, что и требовалось доказать.

6

Пусть $2a$, $2b$, $2c$ — стороны треугольника, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — его медианы.




Так как $\angle BDC$ — развернутый, то

$$\text{⌓}(\angle ADB)+\text{⌓}(\angle ADC)=0$$

или

$$\frac{a^2+\alpha^2-4c^2}{2\alpha a}+\frac{a^2+\alpha^2-4b^2}{2\alpha a}=0,$$

откуда

$$2a^2+2\alpha^2-4b^2+4c^2=0$$

и, следовательно,

$$\alpha^2=-a^2+2b^2+2c^2.$$

Аналогично

$$\beta^2=2a^2-b^2+2c^2,$$

$$\gamma^2=2a^2+2b^2-c^2.$$

Исключим $b$ и $c$. Для этого подберем числа $k$, $l$ и $m$ так, чтобы выполнялись равенства

$$2k-l+2m=0,$$

$$2k+2l-m=0.$$

Вычитая из второго равенства первое, находим

$$3(l-m)=0,$$

то есть $l=m$. Следовательно,

$$2k=-l=-m,$$

и мы можем, в частности, положить $k=-1$, $l=m=2$. Умножая на $k=-1$ обе части выражения для $\alpha^2$, на $l=2$ — обе части выражения для $\beta^2$ и на $m=2$ — обе части выражения для $\gamma^2$ и складывая правые и левые части всех трех выражений, получаем

$$-\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2=9a^2,$$

откуда

$$a^2=\frac{-\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2}{9}.$$

Следовательно,

$$BC\,(=2a)=\frac{2}{3}\sqrt{-\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2}.$$

Аналогичные выражения нетрудно получить и для других сторон треугольника. Итак, выражение для длин сторон треугольника через его медианы получено.

По теореме косинусов

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{2\alpha^2 - \beta^2 + 2\gamma^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2 + \alpha^2 - 2\beta^2 - 2\gamma^2}{2\sqrt{2\alpha^2 - \beta^2 + 2\gamma^2}\,\sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}} =$$

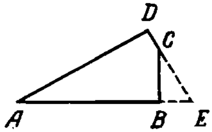
$$= \frac{5\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2\sqrt{2\alpha^2 - \beta^2 + 2\gamma^2}\,\sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}}.$$

Аналогичные выражения получаются и для косинусов углов $B$ и $C$. Что и требовалось доказать.

**7**

Пусть $AB$ и $AD$ — данные стороны, углы $B$ и $D$ — прямые, и пусть $AB = b$, $AD = d$.

Продолжим стороны $DC$ и $AB$ до пересечения в точке $E$. Имеем




$$AE = AD \sec A = d \sec A,$$

откуда

$$BE = d \sec A - b.$$

Далее,

$$BC = BE \operatorname{tg} E = (d \sec A - b) \operatorname{ctg} A = \frac{d - b \cos A}{\sin A}$$

и аналогично

$$CD = \frac{b - d \cos A}{\sin A}.$$

Ответ на первый вопрос получен.

Вычислим теперь площадь $S$ четырехугольника:

$$S = \frac{1}{2}(AB \cdot BC + AD \cdot DC) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{b(d - b\cos A) + d(b - d\cos A)}{\sin A} =$$

$$= \frac{2bd - (b^2 + d^2)\cos A}{2\sin A}.$$

Это дает ответ и на второй вопрос.

## 8

Пусть $m$ — число людей, $k$ — число шиллингов у последиего (самого бедного) из них. После первого тура каждый из участииков игры станет на 1 шиллинг беднее, а сумма, передаваемая последним из игроков первому, составит $m$ шиллиигов. Следовательно, после некоторого чнсла $k$ туров каждый участник станет беднее на $k$ шиллингов, у последнего участиика не останется ни одного шиллинга, а сумма, передаваемая им первому участнику, составит $mk$ шиллингов. Игра прекратится иа следующем туре, когда очередь пополнять «передвижиую кассу» дойдет до последнего игрока. В этот момент в «кассе» будет $mk + m - 1$ шиллннгов, у предпоследнего игрока не останется ничего, а у первого $m-2$ шиллингов.

Ясно, что единственными участниками, «состояния» которых относятся как $4:1$, могут быть лишь первый и последиий игроки. Следовательно, лнбо

$$mk + m - 1 = 4(m - 2),$$

либо

$$4(mk + m - 1) = m - 2.$$

Первое уравнение преобразуем к виду

$$mk = 3m - 7,$$

илн

$$k = 3 - \frac{7}{m}.$$

Ясно, что оно не имеет иных решений в целых числах, кроме $m = 7$, $k = 2$.

Второе уравнение преобразуется к виду

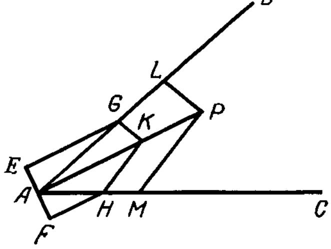
$$4mk = 2 - 3m.$$

Оно не имеет решений в целых положительных числах.

Итак, ответ задачи: 7 человек; 2 шиллннга.

## 9

Пусть $AB$ и $AC$ — данные прямые, $P$ — даниая точка.




Соединим точку пересечения прямых $A$ с точкой $P$. Через $A$ проведем отрезок $EAF \perp AP$ и делящийся в точке $A$ пополам ($EA = AF$). Через концы его $E$ и $F$ проведем прямые $EG$ и $FH$, параллельные $AP$ и пересекающиеся с данными прямыми $AB$ и $AC$ в точках $G$ и $H$. Соединим $G$ и $H$ и на отрезке $GH$ как на диаметре опишем полуокружность, пересекающуюся с $AP$ в точке $K$. Соединим $K$ с точками $G$ и $H$. Угол $GKH$ как вписанный в полуокружность будет прямым. Через точку $P$ проведем $PL \parallel KG$ и $PM \parallel KH$. Треугольник $APL$ подобен треугольнику $AKG$, при этом $AP = 2AK$. Точно так же треугольник $APM$ подобен треугольнику $AKH$, и отношение соответственных сторон равно 2.

Но треугольники $AKG$ и $AKH$ равны, поскольку у них общее основание $AK$ и равные высоты $AE$ и $AF$. Следовательно, треугольники $APL$ и $APM$ также равны, и угол $LPM$, очевидно, равен углу $GKH$, то есть $\angle LPM = 90°$, что и требовалось доказать.

### 10

Обозначим достоинство монет, спрятанных в бильярдных шарах, через $x$, $y$ и $z$. Пусть $x + y + z = s$.

Вероятность того, что луза, в которую скатились шары, вмещает 2 шара, равна 2/3. Математическое ожидание суммы денег, оказавшейся в лузе, то есть среднее значение величин $y + z$, $z + x$, $x + y$, в этом случае равно $2s/3$.

Вероятность того, что луза, в которую скатились шары, вмещает лишь 1 шар, равна 1/3, и в этом случае математическое ожидание суммы денег, оказавшихся в лузе, равно $s/3$.

Следовательно, полное математическое ожидание суммы, оказавшейся в лузе, составляет

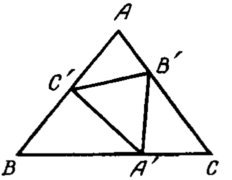
$$\frac{4s}{9} + \frac{s}{9} = \frac{5s}{9}.$$

По условию задачи $5s/9 = 30$ пенсов, откуда

$$s = 54 \text{ пенса} = 4 \text{ шиллинга } 6 \text{ пенсов}.$$

Итак, в шарах спрятаны либо 2 флорина и 1 монета в 6 пенсов, либо полкроны и 2 шиллинга, что и требовалось доказать.

### 11




По теореме синусов

$$\frac{BA'}{A'C'} = \frac{\sin(B+\theta)}{\sin B} \quad \text{и} \quad \frac{A'C}{A'B'} = \frac{\sin\theta}{\sin C},$$

откуда

$$BA' = \frac{\sin(B+\theta)}{\sin B} ka \quad \text{и} \quad A'C = \frac{\sin\theta}{\sin C} kb.$$

Но $BA' + A'C = a$. Следовательно,

$$k = \frac{a}{\dfrac{a\sin(B+\theta)}{\sin B} + \dfrac{b\sin\theta}{\sin C}} = \frac{\sin A}{\dfrac{\sin A\sin(B+\theta)}{\sin B} + \dfrac{\sin B\sin\theta}{\sin C}} =$$

$$= \frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin A\sin(B+\theta)\sin C + \sin^2 B\sin\theta} =$$

$$= \frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin A\sin C(\sin B\cos\theta + \cos B\sin\theta) + (1-\cos^2 B)\sin\theta} =$$

$$= \frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin\theta + \sin\theta(\sin A\sin C\cos B - \cos^2 B) + \cos\theta\sin A\sin B\sin C} =$$

$$= \frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin\theta + \sin\theta\cos B[\sin A\sin C + \cos(A+C)] + \cos\theta\sin A\sin B\sin C} =$$

$$= \frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin\theta(1+\cos A\cos B\cos C) + \cos\theta\sin A\sin B\sin C},$$

что и требовалось доказать.

При $\theta = 90°$

$$k = \frac{\sin A\sin B\sin C}{1+\cos A\cos B\cos C}.$$

## 12

Пусть $s$ — полупериметр, $m$ — площадь треугольника и $v$ — объем прямоугольного параллелепипеда.

По формуле Герона

$$m = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

откуда

$$m^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

и

$$\frac{m^2}{s} = s^3 - s^2(a+b+c) + s(bc+ca+ab) - abc =$$
$$= s^3 - 2s^3 + s(bc+ca+ab) - v.$$

Следовательно,

$$\frac{m^2}{s^2} + \frac{v}{s} + s^2 = bc + ca + ab,$$

$$2\left(\frac{m^2}{s^2} + \frac{v}{s} + s^2\right) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) =$$

$$= 4s^2 - (a^2+b^2+c^2).$$

Разрешая последнее равенство относительно $(a^2+b^2+c^2)$, получаем

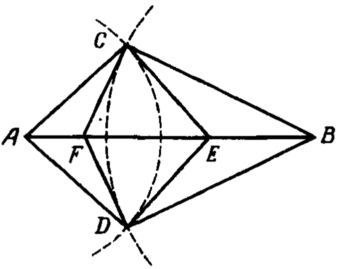
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(s^2 - \frac{v}{s} - \frac{m^2}{s^2}\right),$$

что и требовалось доказать.

**13**

Пусть $A$, $B$ — центры окружностей, $C$ и $D$ — точки их пересечения и $CFDE$ — четырехугольник, площадь которого требуется найти.

Обозначим стороны треугольника через $a$, $b$ и $c$, а его углы — через $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Тогда




$$CE = b \operatorname{tg} \alpha, \quad CF = a \operatorname{tg} \beta.$$

Кроме того,

$$\angle FCE = \angle ACE + \angle FCB - \gamma = \pi - \gamma.$$

Следовательно,

$$\sin FCE = \sin \gamma,$$

площадь треугольника $FCE$ равна

$$\frac{1}{2} ab \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \sin \gamma.$$

Отсюда получаем первое выражение для площади четырехугольника $ACBD$:

$$S = \frac{ab \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Обозначив через $M$ площадь треугольника $ABC$, находим

$$\sin \alpha = \frac{2M}{bc}, \quad \sin \beta = \frac{2M}{ca}, \quad \sin \gamma = \frac{2M}{ab}.$$

Подставляя $\sin \alpha$, $\sin \beta$ и $\sin \gamma$ в выражение для $S$ и заменяя $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ по теореме косинусов, приходим к окончательному выражению для площади четырехугольника:

$$S = ab \cdot \frac{8M^3}{a^2 b^2 c^2} \cdot \frac{4bc \cdot ca}{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)} =$$

$$= \frac{32M^3}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)},$$

что и требовалось доказать.

**14**

Задача сводится к доказательству тождества

$$3(a^2+b^2+c^2) = (a+b+c)^2 + (b^2-2bc+c^2) + (c^2-2ca+a^2) + \\ + (a^2-2ab+b^2) = (a+b+c)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2.$$

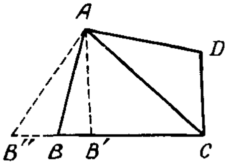
Числовые примеры (подобранные позднее с карандашом и бумагой в руках):

$$3(1^2+2^2+3^2) = 6^2+1^2+2^2+1^2,$$

$$3(1^2+3^2+7^2) = 11^2+4^2+6^2+2^2.$$

**15**

Пусть $ABCD$ — четырехугольник, вписанный в данную фигуру. Проведем диагональ $AC$ и опишем окружность вокруг треугольника $ACD$. Если окружность не проходит через точку $B$, обозна-



чим через $B'$ точку пересечения окружности со стороной $BC$ (или через $B''$ — точку пересечения окружности с продолжением стороны $BC$). Соединим вершину $A$ с точкой $B'$ (или $B''$). Сумма углов $AB'C$ (или $AB''C$) и $ADC$ равна 180°. Таким образом, $\angle AB'C$ равен $\angle ABC$, что абсурдно. Следовательно, окружность проходит через точку $B$.

Можно показать, что любая точка той части периметра фигуры, которая расположена по одну сторону от диагонали $AC$ четырехугольника $ABCD$ с точкой $D$, также лежит на окружности, описанной вокруг треугольника $ACD$.

Аналогичное утверждение справедливо и для той части периметра фигуры, которая расположена по другую сторону диагонали $AC$, чем точка $D$.

Следовательно, данная фигура совпадает с окружностью, что и требовалось доказать.

**16**

Априорные вероятности содержимого первой урны одинаковы: с вероятностью ½ в ней может быть белый шар и с вероятностью ½ — черный. После того как в первую урну положили белый шар, вероятности комбинаций «белый — белый» и «черный — белый», очевидно, также равны ½. Для первой комбинации (2 белых шара) вероятность «наблюденного события» равна 1, для второй (1 черный и 1 белый шар) — $\frac{1}{2}$. Следовательно, после того как из первой урны извлекли белый шар, вероятности того, что в урнах находилось по 1 черному и 1 белому шару, пропорциональны 1 и $\frac{1}{2}$, то есть 2 и 1. Их истинные значения равны $^2/_3$ и $^1/_3$.

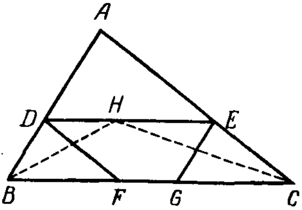
Выбирая наугад урну и извлекая из нее шар, мы вытащим белый шар с вероятностью $\frac{1}{2}\cdot{}^2/_3 + \frac{1}{2}\cdot{}^1/_3 = \frac{1}{2}$.

Пересыпая содержимое одной урны в другую и извлекая затем шар, мы вытащим белый шар с вероятностью $^2/_3\cdot\frac{1}{2} + {}^1/_3\cdot{}^1/_4 = {}^5/_{12}$.

Следовательно, первый способ предпочтительнее, что и требовалось доказать.

### 17

Анализ. Пусть $ABC$ — данный треугольник, $DE$ — искомая линия.




Через концы $D$ и $E$ отрезка $DE$ проведем $DF \parallel AC$ и $EG \parallel AB$. По условию задачи $DF + EG = DE$.

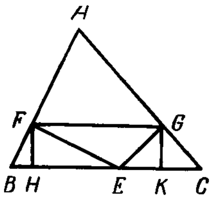
Поскольку $BDEG$ — параллелограмм, $DB = EG$. Отрезки $EC$ и $DF$ равны как противоположные стороны параллелограмма $DFCE$. Следовательно, $DB + EC = DE$. Идея построения теперь ясна.

Синтез. Проведем биссектрисы углов $B$ и $C$. Пусть $H$ — точка их пересечения. Через точку $H$ проведем $DE \parallel BC$, а через точки $D$ и $E$ — прямые $DF \parallel AC$ и $EG \parallel AB$.

Поскольку $DE \parallel BC$, $\angle DHB = \angle HBF$ (как внутренние накрест лежащие). Кроме того, поскольку $BH$ — биссектриса угла $B$, $\angle HBF = \angle DBH$. Следовательно, $DB = DH$ и аналогично $EC = EH$, откуда $DB + EC = DF$. Далее, поскольку $BDEG$ и $DFCE$ — параллелограммы, $EG = DB$ и $DF = EC$, откуда $DF + EG = DE$, что и требовалось доказать.

### 18

1. Пусть $E$ — искомая точка. Опустим из нее перпендикуляры $EF$ и $FG$ на стороны $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$. Соединим отрез-

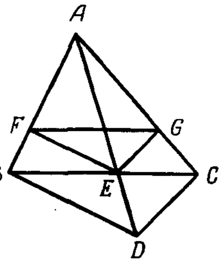


ком прямой основания этих перпендикуляров $F$ и $G$. Из $F$ и $G$ опустим перпендикуляры $FH$ и $GK$ на $BC$. Пусть $BE = x$, $EC = y$.

Так как $FG \parallel BC$, то $FH = GK$. Кроме того, $EF = x \frown B$ и $FH = EF \frown (\angle FEH) = EF \triangle B = x \frown B \triangle B$.
Аналогично $GK = y \frown C \triangle C$. Но $FH = GK$.
Следовательно, $x \frown B \triangle B = y \frown C \triangle C$, или

$$\frac{x}{y} = \frac{\frown 2C}{\frown 2B},$$

что и требовалось доказать.




2. Через вершины $B$ и $D$ данного треугольника проведем прямые, составляющие прямой угол со сторонами $AB$ и $AC$. Пусть $D$ — точка пересечения этих прямых. Прямая, соединяющая вершину треугольника $A$ с точкой $D$, пересекает сторону $BC$ в точке $E$. Из $E$ опустим перпендикуляры $EF$ и $EG$ на $AB$ и $AC$ и соединим их основания $F$ и $G$.

Поскольку $BD$ и $FE$ перпендикуляры $AB$, они параллельны между собой и $AF : FB = AE : ED$. Точно так же $CD \parallel GE$, поскольку они перпендикуляры $AC$, и $AG : GC = AE : ED$. Таким образом, $AF : FB = AG : GC$, откуда следует, что $FG = BC$. Что и требовалось доказать.

## 19

Обозначим урны в том порядке, как они упоминаются в условии задачи: $A$, $B$ и $C$ (урна $A$, например, содержит 1 белый и 1 черный шар и т. д.).

Урны могут располагаться шестью различными способами: $ABC$, $ACB$, $BAC$, $BCA$, $CAB$ и $CBA$. Априори вероятность каждого расположения равна $^1/_6$. Поскольку вероятности всех шести комбинаций урн равны, мы можем не умножать каждую из них на вероятность наблюденного события (из условия задачи известно, что из одной урны был извлечен белый шар, из второй — черный), а просто предположить, что вероятность наблюденного события для любого расположения урн пропорциональна апостериорной вероятности этого расположения, то есть вероятности расположения *после* извлечения из первой урны белого шара, а из второй — черного.

Вероятиости наблюдениого событня равиы:

$$\begin{array}{ll} \text{для } ABC & {}^1/_2 \cdot {}^1/_3 = {}^1/_6, \\ \text{для } ACB & {}^1/_2 \cdot {}^1/_4 = {}^1/_8, \\ \text{для } BAC & {}^2/_3 \cdot {}^1/_2 = {}^1/_3, \\ \text{для } BCA & {}^2/_3 \cdot {}^1/_4 = {}^1/_6, \\ \text{для } CAB & {}^3/_4 \cdot {}^1/_2 = {}^3/_8, \\ \text{для } CBA & {}^3/_4 \cdot {}^1/_3 = {}^1/_4. \end{array}$$

Следовательно, апостериорные вероятности пропорциоиальны 4, 3, 8, 4, 9, 6, то есть равны этим числам, делеииым на 34.

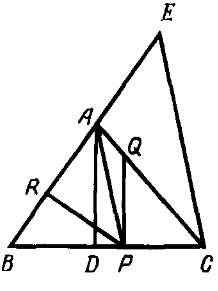
Отсюда мы получаем, что вероятность вытащить белый шар из оставшейся (третьей) урны равна

$$\frac{1}{34} \cdot \left(4 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{2}{3} + 8 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{34} \cdot (3 + 2 + 6 + 2 + 6 + 3) = \frac{22}{34} = \frac{11}{17}.$$

**20**

Анализ. Пусть $ABC$ — данный треугольник, $P$ — искомая точка. Из $P$ восставим перпендикуляр $PQ$ к $BC$ и опустим перпендикуляр $PR$ к $AB$. По условию задачи $PQ = PR$.




Следовательно,

$$PC \operatorname{tg} C = PB \sin B.$$

Опустив из вершины $A$ перпендикуляр $AD$ на сторону $BC$, получим

$$PC : PB = \sin B : \operatorname{tg} C = \frac{AD}{AB} : \frac{AD}{AC} = DC : AB.$$

Синтез. Из вершины $A$ опустим перпендикуляр $AD$ на сторону $BC$. Сторону $AB$ продолжим за вершину $A$ и отложим иа продолженни $AE = DC$. Соединим точки $E$ и $C$. Через $A$ проведем $AP \parallel EC$, а из точки $P$ восставим перпендикуляр $PQ$ к основанию $BC$ и опустим перпендикуляр $PR$ к $AB$.

По построению

$$\frac{PQ}{PC}=\frac{AD}{DC}=\frac{AD}{AB}\cdot\frac{AB}{DC}=\frac{PR}{PB}\cdot\frac{AB}{AE}=\frac{PR}{PB}\cdot\frac{PB}{PC}=\frac{PR}{PC}.$$

Следовательно,

$$PQ=PR.$$

Что и требовалось доказать.

**21**

1. $n$-й член ряда имеет вид $n(n+2)(n+4)$. Следовательно, $(n+1)$-й член — $(n+1)(n+3)(n+5)$.

Преобразуем последнее выражение:

$$(n+1)(n+2+1)(n+5)=(n+1)(n+2)(n+5)+$$
$$+(n+1)(n+5)=(n+1)(n+2)(n+3+2)+$$
$$+(n+1)(n+2+3)=(n+1)(n+2)(n+3)+2(n+1)(n+2)+$$
$$+(n+1)(n+2)+3(n+1)=(n+1)(n+2)(n+3)+$$
$$+3(n+1)(n+2)+3(n+1).$$

Отсюда получаем выражение для суммы $n$ членов ряда:

$$S_n=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}+n(n+1)(n+2)+3n(n+1)+C.$$

Подставляя $n=1$, находим, что $C=0$.
Следовательно,

$$S_n=n(n+1)\left(\frac{n^2+5n+6}{4}+n+2+\frac{3}{2}\right)=$$
$$=n(n+1)\frac{n^2+9n+20}{4}=\frac{n(n+1)(n+4)(n+5)}{4},$$

что и требовалось доказать.

2. $S_{100}=\dfrac{100\cdot 101\cdot 104\cdot 105}{4}=100\cdot 101\cdot 26\cdot 105.$

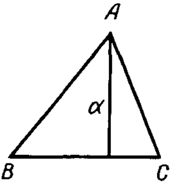
Но $101\cdot 105=10605$. Следовательно, $101\cdot 105\cdot 13=130000+7800+$ $+65=137865$. Умножив это число на 2, получим $274000+1730=$ $=275730$, откуда

$$S_{100}=27573000.$$

**22**

Пусть $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — данные высоты. Вычисляя площадь треугольника тремя различными способами, получим

$$\alpha a=\beta b=\gamma c,$$



откуда
$$\alpha \sin A = \beta \sin B = \gamma \sin C.$$

Пусть $k$ означает любое из следующих равных отношений:
$$k = \frac{\sin A}{\beta\gamma} = \frac{\sin B}{\gamma\alpha} = \frac{\sin C}{\alpha\beta}\,.$$
Тогда
$$\sin A = k\beta\gamma, \quad \sin B = k\gamma\alpha, \quad \sin C = k\alpha\beta.$$
Но $\sin(A+B) = \cos C$. Поэтому
$$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin C,$$
$$\sin A \cos B = \sin C - \cos A \sin B,$$
$$\sin^2 A\,(1 - \sin^2 B) = \sin^2 C + \sin^2 B\,(1 - \sin^2 A) - 2 \sin C \cos A \sin B,$$
$$\sin^2 A - \sin^2 A \sin^2 B = \sin^2 C + \sin^2 B - \sin^2 A \sin^2 B - 2 \sin B \sin C \cos A,$$
$$\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = -2 \sin B \sin C \cos A.$$

Возводя обе части последнего равенства в квадрат, получаем:
$$(\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C) - 2\sin^2 A \sin^2 B - 2 \sin^2 A \sin^2 C + 2 \sin^2 B \sin^2 C =$$
$$= 4 \sin^2 B \sin^2 C\,(1 - \sin^2 A),$$
$$(\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C) - 2\,(\sin^2 A \sin^2 B + \sin^2 A \sin^2 C + \sin^2 B \sin^2 C) +$$
$$+ 4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C = 0.$$

Подставляя вместо $\sin A$, $\sin B$ и $\sin C$ их выражения через $k$, $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ и деля на $k^4$, преобразуем это равенство к виду
$$(\beta^4\gamma^4 + \gamma^4\alpha^4 + \alpha^4\beta^4) - 2\alpha^2\beta^2\gamma^2\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 4k^2\alpha^4\beta^4\gamma^4 = 0,$$
откуда
$$k^2 = \frac{2\alpha^2\beta^2\gamma^2\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\beta^4\gamma^4 + \gamma^4\alpha^4 + \alpha^4\beta^4)}{4\alpha^4\beta^4\gamma^4}\,.$$

Подставляя полученное выражение для $k$ в формулы $A = k\beta\gamma$ и т. д., найдем углы треугольника (и, таким образом, ответим на второй вопрос задачи).

Пользуясь соотношениями $\alpha = b \sin C$, $\beta = c \sin A$, $\gamma = a \sin B$, получим
$$a = \frac{\gamma}{\sin B} = \frac{\gamma}{k\gamma\alpha} = \frac{1}{k\alpha}$$

и аналогично

$$b=\frac{1}{k\beta}, \qquad c=\frac{1}{k\gamma}.$$

Тем самым мы дадим ответ на первый вопрос задачи.

Наконец, площадь треугольника $S$ можно записать в виде

$$S=\frac{bc\frown A}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{k\beta}\cdot\frac{1}{k\gamma}k\beta\gamma=\frac{1}{2k},$$

что дает ответ на третий (и последний) вопрос задачи.

## 23

Исходные вероятности различных вариантов содержимого урны были такими:

| | |
|---|---|
| 2 белых шара | $^1/_4$ |
| 1 белый и 1 черный шар | $^1/_2$ |
| 2 черных шара | $^1/_4$ |

После того как в урну положили 2 белых шара и 1 черный, вероятности соответствующих вариантов стали:

| | |
|---|---|
| 4 белых шара и 1 черный | $^1/_4$ |
| 3 белых и 2 черных шара | $^1/_2$ |
| 2 белых и 3 черных шара | $^1/_4$ |

Вероятиости наблюдеиного события (извлечения 2 белых шаров и 1 черного) для этих вариантов равны соответствеино $^3/_5$, $^3/_5$ и $^3/_{10}$.

Следовательно, после того как из урны извлечены 2 белых шара и 1 черный, вероятности трех вариантов ее содержимого пропорциональны $^3/_{20}$, $^3/_{10}$ и $^3/_{40}$, то есть 2, 4 и 1, и, таким образом, равны $^2/_7$, $^4/_7$ и $^1/_7$.

Итак, вероятности различных вариантов стали теперь такими:

| | |
|---|---|
| 2 белых шара | $^2/_7$ |
| 1 белый и 1 черный шар | $^4/_7$ |
| 2 черных шара | $^1/_7$ |

После того как в урну добавили еще 1 белый шар, те же вероятности соответствовали следующим вариантам:

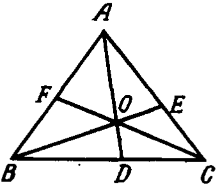
| | |
|---|---|
| 3 белых шара | $^2/_7$ |
| 2 белых шара и 1 черный | $^4/_7$ |
| 1 белый шар и 2 черных | $^1/_7$ |

Вероятность извлечения белого шара для этих вариантов равна соответствеино 1, $^2/_3$ и $^1/_3$.

Следовательно, после извлечения белого шара вероятиости этих вариантов заполнения урны становятся пропорциональными $^2/_7$, $^8/_{21}$ и $^1/_{21}$, или 6, 8 и 1, то есть равными $^6/_{15}$, $^8/_{15}$ и $^1/_{15}$.

Таким образом, вероятность того, что в урне осталось 2 белых шара, равна $^6/_{15}$, или $^2/_5$, что и требовалось доказать.

**24**




$$\frac{DO}{OA}=\frac{S_{DOC}}{S_{OAC}}=\frac{S_{DOB}}{S_{OAB}}=\frac{S_{OBC}}{S_{OCA}+S_{OAB}}.$$

Следовательно,

$$\frac{DO}{DA}=\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}.$$

Аналогично

$$\frac{EO}{EB}=\frac{S_{OCA}}{S_{ABC}} \quad \text{и} \quad \frac{FO}{FC}=\frac{S_{OAB}}{S_{ABC}},$$

откуда

$$\frac{DO}{DA}+\frac{EO}{EB}+\frac{FO}{FC}=1,$$

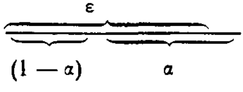
что и требовалось доказать.

**25**

Обозначим одноглазых пациентов буквой Г (глаз), одноруких — Р (рука) и одноногих Н — (нога).

Наименьшую долю Г- и Р-пациентов, которые к тому же являются Н-пациентами, мы найдем, выстроив всех пациентов в ряд так, чтобы класс ГР-пациентов начинался с одного конца ряда, Н-класс — с другого, и подсчитав, какую долю от всех пациентов составляет та часть ряда, на которой ГР- и Н-классы перекрываются. Чем меньше будет ГР-класс, тем меньше будет и общий отрезок ряда у него с Н-классом. Следовательно, чтобы найти ответ на вопрос задачи, необходимо минимизировать ГР-класс пациентов.

Для этого мы перестроим пациентов так, чтобы Г-пациенты стояли, начиная с одного конца ряда, а Р-пациенты с другого. Наименьшая доля, которую ГР-пациенты составляют от общего числа пациентов госпиталя, равна длине перекрывающейся части отрезков длиной $\varepsilon$ и $\alpha$, отложенных навстречу друг другу с противоположных концов единичного отрезка, то есть $\varepsilon-(1-\alpha)=$ $=\varepsilon+\alpha-1$.



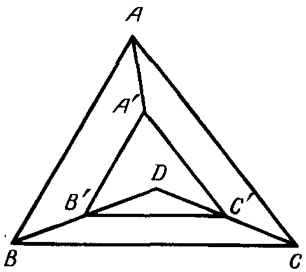
Аналогичным построением найдем долю, которую составляют ГРН-пациенты от общего числа пациентов госпиталя:

$$\overbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{1-\lambda}\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\lambda}}^{\varepsilon+\alpha-1}$$

$$\varepsilon+\alpha-1-(1-\lambda)=\varepsilon+\alpha+\lambda-2,$$

что и требовалось доказать.

**26**




Анализ. Пусть $ABC$ — данный, а $A'B'C'$ — искомый треугольники, и пусть $k$ — отношение сходственных сторон, меньшее 1 (например, $k=B'C'/BC$).

Поскольку $BB'=CC'$ и $BC \parallel B'C'$, нетрудно доказать (опустив из $B'$ и $C'$ перпендикуляры на $BC$, которые должны быть равны по длине), что $\angle B'BC=\angle C'CB$ (и аналогично $\angle A'AC=$ $=\angle C'CA$, $\angle A'AB=\angle B'BA$).

Обозначим для краткости $\angle B'BC$ через $\theta$. Тогда $\angle C'CB=$ $=\theta$ и, следовательно,

$$\angle C'CA=C-\theta=\angle A'AC,$$

$$\angle A'AB=A-(C-\theta)=\angle B'BA.$$

Но $\angle B'BC+\angle B'BA=B$, поэтому $\theta+A-(C-\theta)=B$, откуда

$$2\theta=B+C-A=180^\circ-2A,$$

или окончательно

$$\theta=90^\circ-A.$$

Таким образом, продолжив $BB'$ за $B'$ и $CC'$ за $C'$ до пересечения в точке $D$, мы получим равнобедренный треугольник $DBC$ с углом при вершине $D$, равным $2A$.

Описав окружность вокруг треугольника $ABC$ и соединив ее центр с вершинами $B$ и $C$, мы убедимся, что треугольник с вершинами в центре описанной окружности и точках $B$ и $C$ удовлетворяет тем же условиям. Следовательно, центр описанной окружности совпадает с точкой $D$.

Синтез. Из середин сторон данного треугольника $ABC$ восставим перпендикуляры до пересечения в точке $D$ и соединим ее с вершинами $B$ и $C$. На отрезке $BD$ от точки $D$ отложим $DB' = kDB$ и через конец $B'$ отложенного отрезка проведем $B'C' \parallel BC$.

Нетрудно доказать, что $B'C' = kBC$. Точно так же нетрудно доказать, что точка пересечения прямых, проведенных через $B'$ и $C'$ параллельно сторонам $AB$ и $AC$ данного треугольника, лежит на отрезке $AD$, причем $A'B' = kAB$, $A'C' = kAC$, что и требовалось доказать.

## 27

Обозначим урны через $A$, $B$ и $C$. Если после извлечения двух шаров нетронутой осталась урна $A$, то вероятность наблюденного события (извлекли 1 белый и 1 черный шар) равна половине вероятности извлечения белого шара из урны $B$ и черного — из урны $C$ плюс половина вероятности извлечения черного шара из урны $B$ и белого — из урны $C$, то есть

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Аналогично если нетронутой осталась урна $B$, то вероятность наблюденного события равна

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},$$

а если нетронутой осталась урна $C$, то

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{36}.$$

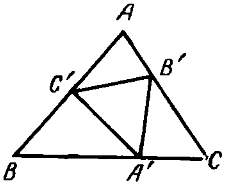
Следовательно, вероятности того, что нетронутыми остались урны $A$, $B$, $C$, относятся между собой как $9:9:7$, то есть равны $^9/_{25}$, $^9/_{25}$ и $^7/_{25}$.

Вероятность извлечь белый шар из урны $A$ равна $^5/_6$, поэтому вероятность вытащить белый шар из оставшейся урны, если осталась урна $A$, равна $^5/_6\cdot{}^9/_{25} = {}^3/_{10}$. Аналогично для урны $B$ мы получаем вероятность $^6/_{25}$ и для урны $C$ — $^7/_{50}$. Вероятность вообще вытащить белый шар из оставшейся урны равна сумме этих вероятностей, то есть

$$\frac{15+12+7}{50}=\frac{34}{50}=\frac{17}{25}.$$

## 28

Пусть $ABC$ — данный треугольник, стороны которого разделены в точках $A'$, $B'$, $C'$ в крайнем и среднем отношении, и $M$ — его площадь.



Обозначим длину отрезка $BA'$ через $x$. Тогда

$$x^2 = a(a - x),$$

или, что то же,

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку длина отрезка — величина неотрицательная, из двух корней мы выбираем лишь

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Зная $x$, вычисляем площадь треугольника $AB'C'$:

$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2}\,\frac{c}{2}(\sqrt{5} - 1)\left[b - \frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1)\right] \frown A =$$

$$= \frac{1}{8}(\sqrt{5} - 1)(3 - \sqrt{5})\,bc \frown A =$$

$$= \frac{1}{4}(4\sqrt{5} - 8)\,M = (\sqrt{5} - 2)\,M.$$

Площади треугольников $BC'A'$ и $CA'B'$ вычисляются аналогично.

Сумма площадей треугольников $AB'C'$, $BC'A$ и $CA'B$ равна $3(\sqrt{5}-2)$, а площадь треугольника $A'B'C' = (7-3\sqrt{5})M$.

## 29

Требуемое утверждение можно вывести из тождества

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2.$$

Действительно, правую часть тождества можно представить либо как

$$a^2c^2 = b^2d^2 + 2acbd + a^2d^2 + b^2c^2 - 2adbc,$$

либо как

$$a^2c^2 + b^2d^2 - 2acbd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2adbc,$$

то есть либо как

$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2,$$

либо как

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Если последние две суммы *тождественны* (то есть отличаются друг от друга самое большое лишь порядком слагаемых), то число $ac + bd$ должно совпадать с числом $ad + bc$, поскольку $ac + bd \neq$ $\neq ac - bd$. Отсюда следует, что

$$a(c - d) - b(c - d) = 0,$$
$$(a - b)(c - d) = 0.$$

то есть, что какое-то из выражений

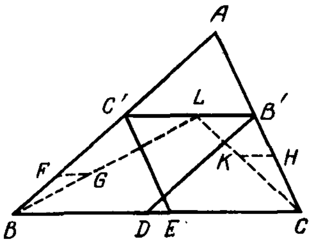
$$a^2c^2 + b^2d^2 + 2acbd + a^2d^2 + b^2c^2 - 2adbc,$$

$$a^2c^2 + b^2d^2 - 2acbd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2adbc$$

представляет собой сумму двух *тождественных* квадратов.

Отсюда, рассуждая от противного, мы заключаем, что если *каждая* из скобок в исходном тождестве содержит 2 *различных* квадрата, то произведение можно представить в виде суммы квадратов двух чисел двумя различными способами. Что и требовалось доказать.

## 30




А н а л и з. Пусть $ABC$ — данный треугольник. Предположим, что прямая $B'C'$ проведена так, что $B'D \parallel AB$, $C'E \parallel AC$ и $B'D + C'E = 2B'C'$.

По теореме о равенстве противоположных сторон параллелограмма $B'D = C'D$ (из параллелограмма $BDB'C'$) и $C'E = B'C$ (из параллелограмма $C'ECB'$), вследствие чего $B'C + C'B = 2B'C'$. Поэтому, если на $B'C'$ отложить $B'L = \frac{1}{2}B'C$, то $C'L = \frac{1}{2}C'B$.

С и н т е з. На $BC'$ выберем произвольную точку $F$ и через нее проведем прямую, параллельную основанию треугольника, на которой отложим $FG = \frac{1}{2}BF$; через точку $B$ и конец $G$ построенного отрезка проведем прямую.

Аналогичным образом выберем произвольную точку $H$ на $CB'$, проведем через $H$ прямую, параллельную $BC$, отложим на ней отрезок $HK = \frac{1}{2}HC$ и через конец $H$ построенного отрезка и вершину $C$ треугольника проведем другую прямую.

Обе проведенные прямые продолжим до пересечения в точке $L$. Через $L$ проведем $B'C' \parallel BC$, а через концы отрезка $B'C'$ — прямые $C'E \parallel AC$ и $B'D \parallel AB$.

Так как по построению $FG = \frac{1}{2}FB$, из подобия треугольников $BFG$ и $BC'L$ следует, что и $C'L = \frac{1}{2}BC'$, и (по аналогичным причинам) $B'L = \frac{1}{2}B'C$. Таким образом, $C'B' = \frac{1}{2}(C'B + B'C)$, или $C'B + B'C = 2B'C'$. Но по теореме о равенстве противоположных сторон параллелограмма $C'B = B'D$ и $B'C = C'E$, откуда $B'D + C'E = 2B'C'$, что и требовалось доказать.

## 31

1 июля мои карманные часы за 10 ч ушли вперед по сравнению со стенными часами на 5 мин, то есть спешили на $\frac{1}{2}$ мин в час, или

на 2 мин в 4 ч. Следовательно, когда карманные часы показывали полдень, на стенных часах было 12 ч 2 мин. Иначе говоря, в тот момент, когда *точное* время было 12 ч 5 мин, стенные часы отставали на 3 мин (от точного времени).

30 июля карманные часы отстали от стенных на 1 мин за 10 ч, то есть отставали на 6 с в час, или на 19 с за 3 ч 10 мин. Таким образом, когда карманные часы показывали 12 ч 10 мин, на стенных было 12 ч 7 мин 19 с. Иначе говоря, в момент, когда *точное* время было 12 ч 5 мин, стенные часы спешили на 2 мин 19 с (по сравнению с точным временем).

Итак, стенные часы уходят вперед по сравнению с *точным* временем на 5 мин 19 с за 29 дней, что составляет 319 с за 29 дней, или 11 с в день, или 11/24·12 с за 5 мин. Следовательно, 5 мин точного времени соответствуют 5 мин 11/288 с, отсчитанным по карманным часам.

31 июля, когда точное время равнялось 12 ч 5 мин, стенные часы ушли вперед на 2 мин 19 с + 11 с, то есть показывали 12 ч 7½ мин. Следовательно, если вернуться на 5 мин назад по *точному* времени, то стрелки стенных часов следует отвести на 5 мин 11/288 с назад, то есть поставить так, чтобы они показывали 12 ч 2 мин 29 $^{277}/_{288}$ с.

Таким образом, в момент, когда 31 июля стенные часы показывают это время, по точному времени наступает полдень.

### 32

1. $n$-й член ряда имеет вид $n(n+4)$, а $(n+1)$-й — вид $(n+1)(n+5)$. Преобразуем последнее выражение:

$$(n+1)[(n+2)+3] = (n+1)(n+2) + 3(n+1).$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + 3\frac{n(n+1)}{2} + C.$$

Подставляя $n = 1$, получаем $C = 0$.

Таким образом,

$$S_n = n(n+1)\left(\frac{n+2}{3} + \frac{3}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{6},$$

что и требовалось доказать.

2. $S_{100} = \dfrac{100 \cdot 101 \cdot 213}{6} = \dfrac{100 \cdot 101 \cdot 71}{2} = \dfrac{717100}{2} = 358550.$

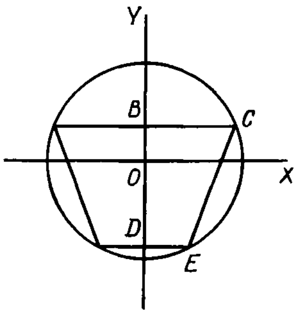
### 33

Пусть $DE = x$, тогда $BC = 2x$. Площадь трапеции, максимум которой необходимо найти, как известно, дается выражением

$$3x\left(\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - 4x^2}\right).$$

Максимум его мы найдем, если будем знать максимум выражения

$$v = x\left(\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - 4x^2}\right).$$




Дифференцируя $v$ по $x$ и приравнивая производную нулю, получаем

$$\frac{dv}{dx}=\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{r^2-4x^2}-x^2\left(\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}+\frac{4}{\sqrt{r^2-4x^2}}\right)=0.$$

Следовательно,

$$(r^2-x^2)\sqrt{r^2-4x^2}+(r^2-4x^2)\sqrt{r^2-x^2}=$$
$$=x^2\left(4\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{r^2-x^2}\right),$$
$$(r^2-2x)\sqrt{r^2-4x^2}=-(r^2-8x^2)\sqrt{r^2-x^2},$$
$$r^4-4(r^2x^2+4x^4)(r^2-4x^2)=(r^4-16r^2x^2+64x^4)(r^2-x^2),$$
$$r^6-8r^4x^2+20r^2x^4-16x^6=r^6-17r^4x^2+80r^2x^4-64x^6.$$

Отбрасывая в правой и левой частях $r^6$, после деления на $x^6$ получаем

$$48x^4-60r^2x^2+9r^4=0$$

или

$$16x^4-20r^2x^2+3r^4=0,$$

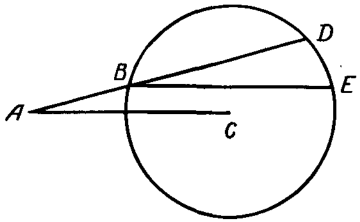
откуда

$$\frac{x^2}{r^2}=\frac{20\pm\sqrt{208}}{32}.$$

В качестве ответа задачи мы выбираем корень $\frac{x^2}{ч^2}=\frac{5-\sqrt{13}}{8}$ (верхнй знак недопустим, хотя подробного анализа этого случая я ие пронзводил).

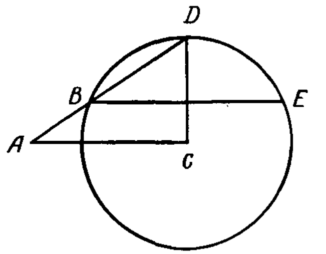
## 34

Анализ. Пусть $A$ — даниая точка, $C$ — центр данной окружности. Соединим $A$ с $C$ отрезком прямой и предположим, что $ABD$ — искомая прямая. Из точки $B$ проведем хорду $BE \parallel AC$.




Тогда $\angle DBE = \angle A$. Следовательно, дуга $DE$ равна дуге $BD$, или, что то же, точка $D$ делит дугу $BE$ пополам, то есть лежит на перпендикуляре, проведенном из центра окружности $C$ к хорде $BE$. Отсюда ясно, как построить искомую прямую.

Синтез. Соединим данную точку $A$ с центром окружности $C$ и из конца отрезка $AC$ восставим перпендикуляр $CD$. Соединим




точки $A$ и $D$. Пусть $B$ — точка пересечения отрезка $AD$ с окружностью. Через точку $B$ проведем $BE \parallel AC$.

Нетрудно доказать, что дуги $BD$ и $DE$ равны. Следовательно, дуга $BD$ стягивает угол $DBE$, равный углу $A$, что и требовалось доказать.

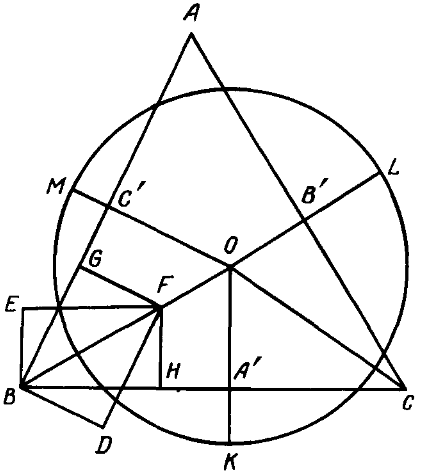
## 35

Пусть $ABC$ — данный треугольник, и пусть отрезки радиусов, лежащие вне треугольника, относятся к радиусу, как $k:1$, $l:1$, $m:1$ (величины $k$, $l$ и $m$ по предположению — правильные дроби).

Из вершины $B$ восставим перпендикуляр $BD$ к стороне $AB$ и другой перпендикуляр $BE$ к стороне $BC$. Длины перпендикуляров подберем так, чтобы они относились между собой, как $(1-m):(1-k)$. Через точку $D$ проведем прямую $DF \parallel BA$, а через точку $E$ — прямую $EF \parallel BC$ и соединим точки $B$ и $F$ отрезком прямой. Из $F$ опустим перпендикуляры $FG$ (на сторону $AB$) и $FH$ (на сторону $BC$). Тогда

$$FG : FH = (1-m) : (1-k).$$

Через вершину треугольника $C$ проведем прямую так, чтобы длины перпендикуляров, опущенных из любой ее точки на стороны $CA$ и $CB$, относились между собой как $(1-l):(1-k)$. Отрезок $BF$ продолжим за точку $F$ до пересечения с этой прямой в точке $O$.




Из $O$ опустим перпендикуляры $OA'$, $OB'$, $OC'$ на $BC$, $AC$ и $AB$. По построению

$$OA' : OB' : OC' = (1-k) : (1-l) : (1-m).$$

На продолжении $OA'$ отложим отрезок $AK'$, такой, что $OK : OA' = 1 : (1-k)$. С центром в точке $O$ и радиусом $OK$ опишем окружность и продолжим $OB'$ и $OC'$ до пересечения с ней в точках $L$ и $M$.

Имеем

$$OK : OA' = 1 : (1-k),$$

$$OA' : OB' = (1-k) : (1-l).$$

Следовательно,

$$OK : OB' = 1 : (1-l).$$

Аналогично

$$OK : OC' = 1 : (1-m),$$

и, наконец,

$$A'K : OK = (OK - OA') : OK = k : 1$$

($OK$ — радиус окружности).

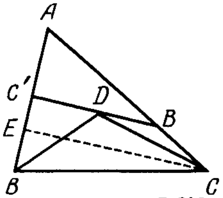
Так же доказываются и два остальных отношения:

$$B'L : OL = l : 1 \quad \text{и} \quad C'M : OM = m : 1.$$

## 36

Анализ. Пусть $B'C'$ — искомый отрезок и $\angle B'C'B = \angle B'C'A = 90^0$.

На $C'B'$ отложим отрезок $C'D$, равный отрезку $C'B$, тогда $DB' = B'C$. Соединим точку $D$ с вершинами треугольника $B$ и $C$.




Из равнобедренных треугольннков $BC'D$ и $DB'C$ следует, что $\angle DBC' = 45°$ н $\angle B'DC = \angle B'CD$. Опустив нз вершины $C$ перпендикуляр $CE$ на сторону $AB$, получим $\angle B'DC = \angle DCE$ и, следовательно, $\angle B'CD = \angle DCE$.

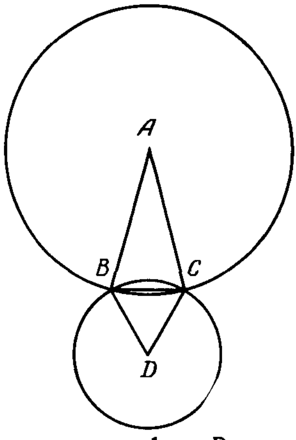
С и н т е з. Из вершины $C$ опустим перпендикуляр $CE$ на сторону треугольннка $AB$ и проведем бнссектрису угла $ACE$. На стороне $AB$ с вершнной в точке $B$ построим угол $ABD$, равный 45°. Продолжнм сторону $BD$ этого угла и биссектрису $CD$ угла $ACE$ до пересечения в точке $D$. Через $D$ проведем прямую $B'DC' \perp AB$. Тогда

$$\angle C'DB = 180° - (\angle DC'B + \angle C'BD) = 45° = \angle C'BD.$$

Следовательно, $C'D = C'B$. Кроме того, $\angle B'CD = \angle DCE = \angle DCB'$, откуда $DB' = B'C$, и мы получаем, что $C'B' = BC' + CB'$, что и требовалось доказать.

Для того чтобы решение было возможиым, $\angle A$ не должен превосходить 90°, $\angle B$ не должен быть меньше 45°, а $\angle C$ не должен быть меньше половины дополнения $A$ до 90°, то есть угла $45° - (A/2)$.

**37**




Пусть $BC$ — общая хорда, $A$ и $D$ — центры окружностей, $\angle A = 30°$, $\angle D = 60°$, $BC$ $(= DB = DC) = 1$, а $AB = x$.

Поскольку $\cos A = \sqrt{3}/2 = (2x^2 - 1)/2x^2$, то $\sqrt{3}/2 = 1 - 1/2x^2$, откуда $1/2x^2 = (2 - \sqrt{3})/2$, или $x^2 = 1/(2 - \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}$.

Площади кругов равны соответственно $\pi\,(2+\sqrt{3})$ и $\pi$, а площади секторов — $\pi(2+\sqrt{3})/12$ и $\pi/6$. Сумма площадей секторов равна $\pi(4+\sqrt{3})/12$.

Площадь треугольника $ABC$ составляет $\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2} = (2+\sqrt{3})/4$, площадь треугольника $DBC$ равна $\sqrt{3}/4$, а их сумма составляет $(2+2\sqrt{3})/4 = (1+\sqrt{3})/2$.

Площадь той части меньшего круга, которая находится внутри большего круга, равна разности между суммой площадей секторов и суммой площадей треугольников, то есть

$$\pi\frac{4+\sqrt{3}}{12}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, чтобы найти отношение между площадью этой луночки и площадью меньшего круга, найденную величину необходимо разделить на $\pi$. Искомое отношение равно

$$\frac{4+\sqrt{3}}{12}-\frac{1+\sqrt{3}}{2\pi}\approx$$

$$\approx\frac{5{,}73^2}{12}-\frac{2{,}73^2}{\left(\frac{44}{7}\right)}\approx 0{,}478-\frac{0{,}248}{\left(\frac{4}{7}\right)}=$$

$$=0{,}478-\frac{1{,}736}{4}=0{,}478-0{,}434=0{,}044,$$

что и требовалось доказать.

## 38

Расположим урны по порядку. Условимся считать первой ту урну, из которой вынут «другой» шар неизвестного цвета, второй — урну, из которой два раза был вытащен красный шар, и третьей — оставшуюся урну. Нетрудно видеть, что всего возможно 6 различных вариантов расположения урн $A$, $B$ и $C$, а именно:

| | |
|---|---|
| 1) $ABC$, | 4) $BCA$, |
| 2) $ACB$, | 5) $CAB$, |
| 3) $BAC$, | 6) $CBA$. |

В первом случае вероятность наблюденного события равна $1\cdot 4/9 = 4/9$, во втором $1\cdot 1/9 = 1/9$, в третьем $2/3\cdot 1 = 2/3$, в четвертом $2/3\cdot 1/9 = 2/27$, в пятом $1/3\cdot 1 = 1/3$ и в шестом $1/3\cdot 4/9 = 4/27$.

Следовательно, вероятности существования шести расположений урн $A$, $B$, $C$ пропорциональны 12, 3, 18, 2, 9, 4 и, следовательно, равны 1/4, 1/16, 3/8, 1/24, 3/16, 1/12.

Вероятность того, что и второй из вытащенных во второй раз шаров окажется красным, равна сумме

$$\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{16}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{24}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{36+9+36+4+9+4}{9\cdot 16}=\frac{98}{9\cdot 16}=\frac{49}{72},$$

что и требовалось доказать.

**39**

Пусть $x$ — число дней, прошедших с того момента, как пешеходы пустились в путь, до встречи.

Тогда

$$[2\cdot 10-(x-1)]\frac{x}{2}=14+[2\cdot 2+(x-1)\cdot 2]\frac{x}{2},$$

то есть

$$\frac{21x}{2}-\frac{x^2}{2}=14+x+x^2,$$

или окончательно $3x^2-19x+28=0$, откуда

$$x=\frac{19\pm 5}{6}.$$

Таким образом,

$$x_1=4,\quad x_2=\frac{7}{3}.$$

Приведенное выше решение не учитывает (при составлении уравнения) того обстоятельства, что как возрастание, так и убывание скорости пешеходов происходят *скачкообразно*. Оно верно лишь в предположении, что возрастание и убывание скорости пешеходов происходят *непрерывно*, причем так, что в конце каждого дня скорости согласуются с теми данными, которые приведены в условии задачи. Следовательно, правильный ответ дает $x_1=4$ дням. Второй же ответ $^7/_3$ лишь указывает на то, что встреча происходит на *третий день*. Чтобы установить час встречи, введем новое неизвестное: пусть $y$ означает число часов, которые пешеходы находятся в пути (напомним, что $y$ отсчитывается с 6 ч утра каждого дня).

К концу второго дня пути $A$ пройдет 19 миль, а $B$ будет находиться от пункта отправления $A$ на расстоянии $14+6=$ $=20$ миль.

Следовательно,

$$19+y\cdot\frac{8}{12}=20+y\cdot\frac{6}{12},$$

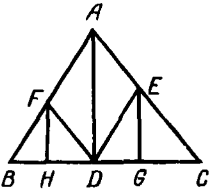
$$y\cdot\frac{2}{3}=1+y\cdot\frac{1}{2},$$

откуда $y=6$.

Таким образом, пешеходы встречаются по прошествии двух с половиной дней (2 дня 6 ч) и четырех дней пути на расстояниях в 23 и 34 мили от отправного пункта пешехода $A$.

## 40

1. Пусть $ABC$ — данный треугольник и $AD$ — его высота, опущенная на сторону $BC$.




Через точку $D$ проведем прямые $DE$ и $DF$, параллельные боковым сторонам треугольника, а из точек $E$ и $F$ опустим на основание $BC$ перпендикуляры $EG$ и $FH$.

Треугольники $FBD$ и $EDC$ подобны треугольнику $ABC$, вследствие чего

$$FH : AD = BD : BC$$

и

$$EG : AD = DC : BC.$$

Следовательно,

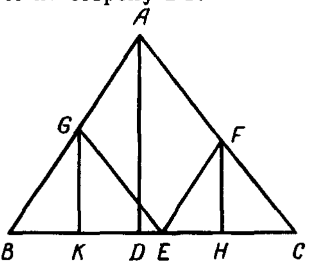
$$(FH + EG) : AD = BC : BC,$$

откуда

$$FH + EG = AD.$$

Кроме того, площади треугольников $AED$ и $AFD$ равны, а сами треугольники имеют общее основание $AD$. Следовательно, их высоты также равны, то есть $DH = DG$, что и требовалось доказать.

2. Пусть $ABC$ — данный треугольник и $AD$ — высота, опущенная из вершины $A$ на сторону $BC$.




На стороне $BC$ от точки $C$ отложим отрезок $CE = BD$ и через точку $E$ проведем прямые $EF$ и $EG$, параллельные боковым сторонам треугольника. Из точек $F$ и $G$ опустим перпендикуляры $GK$ и $FH$ на сторону $BC$.

Из подобия треугольников $GBE$, $FEC$ и треугольника $ABC$ следует, что

$$GK : AD = BE : BC$$

и

$$FH : AD = EC : BC,$$

откуда

$$(GK = FH) : AD = BC : BC.$$

Последиее равенство означает, что

$$GK + FH = AD.$$

Кроме того,

$$BK : BE = BD : BC,$$

откуда

$$BK : DC = EC : BC = HC : DC.$$

Следовательно,

$$BK = HC,$$

что и требовалось доказать.

**41**

1. Поскольку из слов друга известно, что по крайней мере один шар в урне белый, априорные вероятности различных вариантов содержимого урны равны (*б* означает белый шар, *ч* — черный шар):

| | |
|---|---|
| для *бббб* | $^1/_8$ |
| для *бббч* | $^3/_8$ |
| для *ббчч* | $^3/_8$ |
| для *бччч* | $^1/_8$ |

Вероятности наблюдениого события для этих вариантов равны 1, $^1/_2$, $^1/_6$ и 0.

После испытания вероятности различных вариантов содержимого урны пропорциональны $^1/_8 \cdot 1$, $^3/_8 \cdot {^1/_2}$, $^3/_8 \cdot {^1/_6}$, $^1/_8 \cdot 0$, то есть $^1/_8$, $^3/_{16}$, $^1/_6$, 0, или, что то же, 2, 3, 1. Следовательно, этн вероятности равны $^1/_3$, $^1/_2$, $^1/_6$, 0.

Поэтому вероятность извлечь белый шар при очередном испытании равна $^1/_3 \cdot 1 + {^1/_2} \cdot {^1/_2} = {^7/_{12}}$.

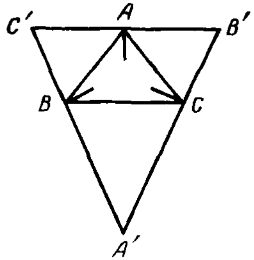
2. Если бы мой друг не предупредил о том, что по крайней мере один шар в урне белый, то априорные вероятности для вариантов *бббб*, *бббч*, *ббчч*, *бччч* и *чччч* были бы равны $^1/_{16}$, $^1/_4$, $^3/_8$, $^1/_4$, $^1/_{16}$, а вероятности наблюдеиного события —1, $^1/_2$, $^1/_6$, 0, 0.

Следовательно, после испытаиия вероятности различных вариантов заполнения урны пропорциональны $^1/_{16} \cdot 1$, $^1/_4 \cdot {^1/_2}$; $^1/_6 \cdot {^3/_8}$, 0, 0, или 1, 2, 1, 0, 0, то есть равны $^1/_4$, $^1/_2$, $^1/_4$, 0, 0.

Такнм образом, в этом случае вероятность извлечь белый шар равна $^1/_4 \cdot 1 + {^1/_2} \cdot {^1/_2} = {^1/_2}$.

**42**

Пусть $ABC$ — данный треугольник. Проведем биссектрисы его углов и прямые, перпендикулярные к ним и образующие треугольник $A'B'C'$.




Имеем

$$\angle CBA' = 90^\circ - \frac{B}{2},$$

$$\angle BAC' = 90^\circ - \frac{A}{2},$$

$$\angle ACB' = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

Следовательно,

$$\angle A' = 180^\circ - (\angle CBA' + \angle BCA') = \frac{B + C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2},$$

$$BA' = a \cdot \frac{\text{⌓}\frac{C}{2}}{\text{⌓}\frac{A}{2}} \text{ и аналогично } BC' = c \cdot \frac{\text{⌓}\frac{A}{2}}{\text{⌓}\frac{C}{2}}.$$

Таким образом, если $s$ — полупериметр данного треугольннка, то

$$A'C' = \frac{a\,\text{⌓}^2\frac{C}{2} + c\,\text{⌓}^2\frac{A}{2}}{\text{⌓}\frac{A}{2}\,\text{⌓}\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{a \cdot \frac{s \cdot (s-c)}{ab} + c \cdot \frac{s \cdot (s-a)}{bc}}{\frac{s}{b} \cdot \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}} =$$

$$= \frac{s - c + s - a}{\text{⏀}\frac{B}{2}} = \frac{b}{\text{⏀}\frac{B}{2}}$$

и аналогично

$$A'B' = \frac{c}{\sin \frac{C}{2}}.$$

Зная $A'B'$ и $A'C'$, нетрудно вычислить площадь треугольника $A'B'C'$. Она равна

$$\frac{bc \cos \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\text{площ. } A'B'C'}{\text{площ. } ABC} = \frac{bc \cos \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \cdot \frac{2}{bc \sin A} =$$

$$= \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} =$$

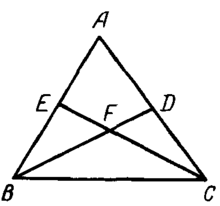
$$= \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{abc}{2(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)},$$

что и требовалось доказать.

## 43

Пусть $ABC$ — данный треугольник, $BFD$ и $CFE$ — искомые прямые: $FB = FC$, и четырехугольник $AEFD$ равновелик треугольнику $FBC$. Обозначим $\angle FBC$ через $\theta$. Для решения задачи достаточно вычислить этот угол.



Поскольку треугольник $FBC$ равновелик четырехугольнику $AEFD$, то

$$S_{\triangle DBC} = S_{\triangle AEC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle EBC}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle DBC} + S_{\triangle EBC} = S_{\triangle ABC},$$

откуда

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}C}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}B}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C},$$

$$\frac{1}{\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}C}+\frac{1}{\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}B}=\frac{1}{\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C}.$$

Левую часть последнего равенства преобразуем к виду

$$\frac{2\operatorname{ctg}\theta+(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)}{\operatorname{ctg}^2\theta+\operatorname{ctg}\theta(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)+\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{ctg}C}.$$

Освобождаясь от знаменателя в обеих частях равенства, получаем

$$\operatorname{ctg}^2\theta+\operatorname{ctg}\theta\cdot(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C=$$
$$=2\operatorname{ctg}\theta\cdot(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)+(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)^2,$$

или

$$\operatorname{ctg}^2\theta-\operatorname{ctg}\theta(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)-(\operatorname{ctg}^2B+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}^2C)=0,$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C\pm\sqrt{5\operatorname{ctg}^2B+6\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+5\operatorname{ctg}^2C}\right).$$

### 44

Пусть $k$ — число, в разложении которого на простые множители не содержатся числа 2 или 5, то есть число, взаимно-простое с 10. Если $1/k$ представить в виде бесконечной периодической дроби, а последнюю, воспользовавшись формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, свести к простой дроби, то знаменатель этой дроби будет состоять из девяток, то есть будет иметь вид $(10^n-1)$. Поскольку полученная дробь равна $1/k$, а число $k$ взаимно-просто с 10, а следовательно, и с $10^m$, множитель $(10^n-1)$ должен делиться на $k$.

Аналогичное утверждение, очевидно, остается в силе и в любой другой (недесятичной) системе счисления. Следовательно, если $a$ — основание системы счисления, $b$ — число взаимно-простое с $a$, то найдется целое положительное число $n$, такое, что число $(a^n-1)$ будет делиться на $b$.

Что и требовалось доказать.

Примеры (придуманные днем с карандашом и бумагой в руках).

1. В десятичной системе счисления найти $n$, при котором число $(10^n - 1)$ будет делиться на 7.

$$\frac{1}{7} = 0,(142857) = \frac{142857}{10^6 - 1}. \quad \text{Ответ: } n = 6.$$

2. Пусть числа $a$ и $b$, о которых говорится в условии задачи, равны 8 и 9. Найти $n$, при котором $(8^n - 1)$ будет делиться на 9. Выбрав основание системы счисления равным 8, находим:

$$\frac{1}{9} = 0,(07) = \frac{7}{8^2 - 1}. \quad \text{Ответ: } n = 2.$$

3. То же для $a = 7$, $b = 13$.

$$\frac{1}{13} = 0,(035245631421) = \frac{35245631421}{7^{12} - 1}. \quad \text{Ответ: } n = 12.$$

**45**

Разделим каждую палку на $(n + 1)$ частей (число $n$ будем считать нечетным) и предположим, что палки могут ломаться только в точках деления (их $n$), причем в каждой из точек с одинаковой легкостью.

Вероятность сломать палку в одной точке равна $(n - 1)/n$, вероятность сломать палку в $n$ точках равна $[(n - 1)/n]^n = (1 - 1/n)^n$.

Следовательно, вероятность того, что ни одна палка не сломана посредине, равна $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - 1/n)^n$, и, таким образом, ответ задачи надлежит формулировать так: искомая вероятность (того, что по крайней мере одна палка переломана точно посередине) равна $1 - \lim\limits_{n\to\infty} (1 - 1/n)^n$.

Но $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e$. Пусть $a$ — сумма нечетных, а $b$ — сумма четных членов разложения

$$e = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots .$$

Тогда $e = a + b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - 1/n)^n = a - b = 2a - e$, что и требовалось доказать.

Примечание. Приводимые ниже выкладки были проделаны не «в уме», а с карандашом и бумагой в руках.

Вычислим значение искомой вероятности. Для этого представим $a$ в виде непрерывной дроби

$$a = 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 4} + \dots .$$

Подходящие дроби равны:

$$1 = 1,$$

$$\frac{1}{\llcorner 2} = 0{,}5,$$

$$\frac{1}{\llcorner 4} = 0{,}4166666\ldots,$$

$$\frac{1}{\llcorner 6} = 0{,}00138888\ldots,$$

$$\frac{1}{\llcorner 10} = 0{,}00000027\ldots .$$

Следовательно,

$$a = 1{,}5430806\ldots,$$

$$2a = 3{,}0861612\ldots .$$

Так как

$$e = 2{,}7182818\ldots,$$

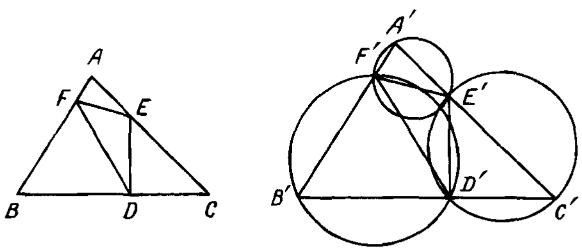
то

$$\lim_{n\to\infty} (1 - 1/n)^n = 0{,}3678793\ldots,$$

и мы получаем численное значение искомой вероятности:

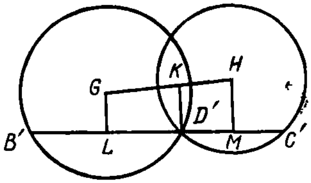
$$1 - \lim_{n\to\infty} (1 - 1/n)^n = 0{,}6321207\ldots .$$

**46**




Пусть $ABC$ — данный треугольник, $D$ — выбранная точка. Если мы построим треугольник $D'E'F'$ с углами при вершинах, равными данным углам, и выделенной вершиной $D'$, то задача сведется к построению треугольника, описанного вокруг треугольника $D'E'F'$ и подобного треугольнику $ABC$.

На сторонах треугольника $D'E'F'$ мы можем построить сегменты, вмещающие углы, равные углам $A$, $B$ и $C$. Следовательно, задача будет решена, если через вновь построенные окружности мы сумеем провести прямую $B'D'C'$, которую точка $D'$ делит в том же отношении, в каком выбранная заранее точка $D$ делит основание треугольника $ABC$.




Необходимое вспомогательное построение можно осуществить следующим образом. Пусть $G$ и $H$ — центры окружностей. Соединим их и разделим в точке $K$ на отрезки, пропорциональные $BD$ и $DC$. Точку $K$ соединим с точкой пересечения окружностей $D'$. Через $D'$ перпендикулярно $KD'$ проведем прямую $B'D'C'$ и из центров окружностей $G$ и $H$ опустим на нее перпендикуляры $GL$ и $HM$.

Нетрудно доказать, что

$$LD' : D'M = GK : KH = BD : DC.$$

Но $B'D' = 2LD'$, $D'C' = 2D'M$, следовательно,

$$B'D' = D'C' = BD : DC,$$

что и требовалось доказать.

Построение теперь очевидно. Через $B'$, $F'$ и $C'$, $E'$ нужно провести прямые и продолжить их до пересечения в точке $A'$, лежащей, как нетрудно показать, на третьей окружности, затем разделить $AB$ и $AC$ в точках $F$ и $E$ пропорционально $A'F'B'$ и $A'E'C'$ и провести прямые $DE$ и $DF$.

### 47

Непосредственно видно, что нулевые значения неизвестных удовлетворяют системе уравнений.

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$x(1/y - 1/z) = y - z,$$

откуда $x = yz[(y-z)/(z-y)] = -yz$ (при $y \neq z$, в противном случае $x = 0/0$).

Но из уравнения (1) $x = xy - yz$. Следовательно, при $y \neq z$

$$x = xy + x,$$

откуда (при конечных $x$)

$$xy = o.$$

Аналогичным образом из уравнения (2) находим $xz = 0$ (если $x$ конечен).

Таким образом, при конечных значениях $x$ и $y \neq z$, во-первых, либо $x = 0$, либо $y = 0$ и, во-вторых, либо $x = 0$, либо $z = 0$, то есть либо $x = 0$, либо $y = z = 0$. Но в силу предположения $y \neq z$ вторая возможность исключается. Следовательно, $x = 0$. Но тогда и $yz=0$. Это означает, что одна из двух неизвестных $y$ или $z$ равна нулю, а вторая может принимать произвольные значения.

Итак, мы получаем еще два решения:
$x = y = 0$, $z$ принимает произвольное значение;
$x = z = 0$, $y$ принимает произвольное значение.

Исследуем теперь, что происходит при $y = z$.
Из уравнения (1) $x/y = x - y$. Следовательно, $y^2 = x(y - 1)$, $x = y^2/(y - 1)$.
Из уравнения (2) получаем $x = z^2/(z - 1)$.
Таким образом, четвертое решение нашей системы уравнений имеет вид

$$x = \frac{k^2}{k-1}, \quad y = z = k,$$

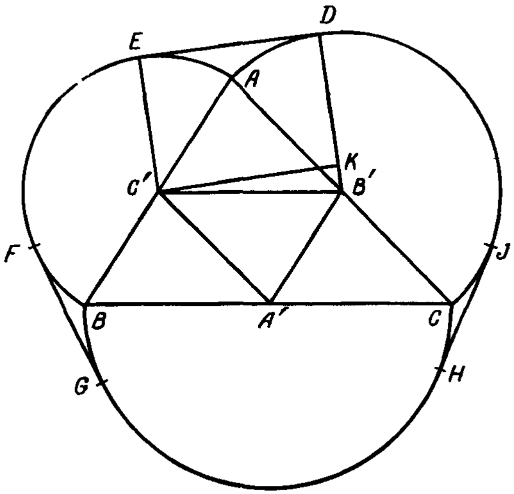
где $k$ — любое вещественное число (не равное 1).

Ясно, что $y$ и $z$ могут принимать *любые* вещественные значения, а область допустимых значений $x$ ограничена условием

$$y^2 - xy + x = 0.$$

При $x^2 - 4x < 0$ неизвестная $y$ не будет вещественной. Следовательно, $x$ может принимать любые отрицательные значения и любые положительные значения, которые больше или равны 4. При $0 < x < 4$ неизвестная $y$ перестает быть вещественной.

## 48



Пусть $ABC$ — данный треугольник, $A'$, $B'$, $C'$ — центры полуокружностей, а $DE$, $FG$, $HJ$ — общие касательные к полуокружностям, так что $DE = \alpha$, $FG = \beta$, $HJ = \gamma$.

Соединим точки $B'$ и $D$, $C'$ и $E$ и из точки $C'$ опустим перпендикуляр $C'K$ на $B'D$. Нетрудно видеть, что $C'K = \alpha$.

Обозначим стороны данного треугольника через $2a$, $2b$ и $2c$.

Так как $B'C' = a$, $B'K = b—c$, то $C'K = \sqrt{a^2 - (b-c)^2}$, то есть

$$\alpha = \sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}\,.$$

Аналогично получаем выражения для $\beta$ и $\gamma$:

$$\beta = \sqrt{(a+b-c)(-a+b+c)},$$

$$\gamma = \sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)}\,.$$

Таким образом,

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha} = -a+b+c,$$

$$\frac{\gamma\alpha}{\beta} = a-b+c,$$

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma} = a+b-c,$$

а сумма всех трех выражений равна $a + b + c$, то есть полупериметру треугольника $ABC$, что и требовалось доказать.

### 49

Примем за единицу длины сторон любого треугольника.

Сечение правильного тетраэдра вертикальной плоскостью, проходящей через одно из наклонных ребер, имеет вид треугольника с основанием, равным $\sqrt{3}/2$, и боковыми сторонами $\sqrt{3}/2$ и 1. Косинус меньшего из углов при основании этого треугольника равен

$$\left(\frac{3}{4}+1-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,,$$

а синус того же угла (и высота треугольника) равен $\sqrt{2}/\sqrt{3}$.

Поскольку высота проведенного сечения совпадает с высотой правильного тетраэдра, объем последнего равен

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{12}\,.$$

Высота пирамиды равна высоте треугольника с основанием $\sqrt{2}$ и боковыми сторонами 1 и 1, то есть равна $\sqrt{2}/2$. Нетрудно вычислить, что объем пирамиды равен

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Таким образом, искомое отношение объемов составляет

$$\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{12}{\sqrt{2}}=2.$$

**50**

Вначале вероятность того, что в урне $H$ находятся 2 белых шара, равна $^1/_4$, 1 черный и 1 белый шар — равна $^1/_2$, 2 черных шара — равна $^1/_4$. Следовательно, после того, как в урну $H$ положили 1 белый шар, в ней с вероятностью $^1/_4$ находились 3 белых шара, с вероятностью $^1/_2$ — 2 белых шара и 1 черный и с вероятностью $^1/_4$—1 белый шар и 2 черных, вследствие чего вероятность извлечь из нее белый шар стала равной

$$\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

а вероятность извлечь черный шар $^1/_3$.

После того как в урну $K$ перенесли 1 шар неизвестно какого цвета, в ней с вероятностью $^2/_3\cdot{}^1/_4={}^1/_6$ стало 3 белых шара, с вероятностью $^2/_3\cdot{}^1/_2+{}^1/_3\cdot{}^1/_4={}^5/_{12}$ — 2 белых шара и 1 черный, с вероятностью $^2/_3\cdot{}^1/_4+{}^1/_3\cdot{}^1/_2={}^1/_3$ — 1 белый шар и 2 черных и с вероятностью $^1/_3\cdot{}^1/_4={}^1/_{12}$— 3 черных шара. Следовательно, вероятность извлечь из урны белый шар стала равной

$$\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{5}{12}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9},$$

а вероятность вытащить черный шар равна $^4/_9$.

До того как мы извлекаем из урны $K$ белый шар и переносим его в урну $H$, в последней с вероятностью $^1/_4\cdot 1+{}^1/_2\cdot{}^1/_3={}^5/_{12}$ находятся 2 белых шара, с вероятностью $^1/_2\cdot{}^2/_3+{}^1/_4\cdot{}^2/_3={}^1/_2$ — 1 белый и 1 черный шар и с вероятностью $^1/_4\cdot{}^1/_3={}^1/_{12}$ — 2 черных шара. Следовательно, после того, как мы извлечем из урны $K$ *какой-то* шар, о котором известно лишь, что он либо белый, либо черный, и перенесем его в урну $H$, в последней с вероятностью $^5/_{12}\times$ $\times{}^5/_9={}^{25}/_{108}$ окажутся 3 белых шара, с вероятностью $^5/_{12}\cdot{}^4/_9+$ $+{}^1/_2\cdot{}^5/_9={}^{50}/_{108}$ — 2 белых шара и 1 черный, с вероятностью $^1/_2\cdot{}^4/_9+$ $+{}^1/_{12}\cdot{}^5/_9={}^{29}/_{108}$ — 1 белый шар и 2 черных и с вероятностью $^1/_{12}\cdot{}^4/_9={}^4/_{108}$ — 3 черных шара.

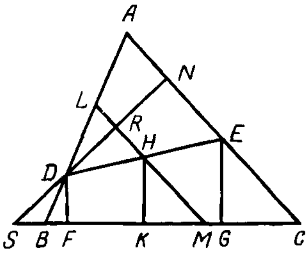
Таким образом, вероятность извлечь из урны белый шар будет равна

$$\frac{1}{108}\cdot\left(25\cdot 1+50\cdot\frac{2}{3}+29\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{27},$$

то есть семнадцать шансов против десяти.

## 51

Пусть $ABC$ — данный треугольник, а $D$ — данная точка.




Анализ. Предположим, что $DE$ — искомая прямая. Из точек $D$ и $E$ опустим перпендикуляры $DF$ и $EG$ на основание треугольника $BC$. По условию $DF + EG = DE$.

Из середины $H$ отрезка $DE$ опустим на $BC$ перпендикуляр $HK$. Очевидно, что $HK = \frac{1}{2}(DF + EG)$. Следовательно, окружность с центром в точке $H$ и радиусом $HD$ проходит через точки $E$ и $K$ и касается основания треугольника в точке $K$.

Через точку $H$ проведем прямую $LHM \parallel AC$. Ясно, что точка $L$ будет при этом серединой отрезка $AD$. Кроме того, $LM$ проходит через центр окружности $H$. Следовательно, если из точки $D$ опустить перпендикуляр $DN$ на $LM$ (или $CA$), то $DN$ как хорда окружности будет делиться пополам в точке $R$. Продолжим $ND$ до пересечения в точке $S$ с продолжением основания треугольника. Тогда $SDN$ — секущая, а $SK$ — касательная к одной и той же окружности, проведенные из точки $S$. Но точку $S$ можно найти, а $SK^2 = SD \cdot SN$.

Синтез. Из точки $D$ опустим перпендикуляр $DN$ на $AC$ и продолжим его до пересечения в точке $S$ с продолжением основания $BC$. Построим отрезок $SK$, такой, что $SK^2 = SD \cdot SN$.

Разделим пополам отрезок $DA$, пусть $L$ — его середина. Через $L$ проведем $LM \parallel AC$, а из точки $K$ восставим перпендикуляр $KH$ до пересечения с $LM$. Соединим точки $D$ и $H$ отрезком прямой и продолжим до пересечения с $AC$ в точке $E$. Из концов отрезка $DE$ опустим перпендикуляры $DF$ и $EG$ на основание треугольника.

Так как $DL = LA$ и $LM \parallel AC$, то $DH = HE = HK$, откуда $DE = 2HK$. Но $DF + EG = 2HK$. Следовательно, $DF + EG = DE$, что и требовалось доказать.

Примечание. Приведенное выше доказательство неполно, поскольку в нем необоснованно использовано равенство $DH = HK$.

Это равенство можно доказать следующим образом. Так как $SK^2 = SD \cdot SN$, то $DN$ — хорда окружности, касающейся основания треугольника в точке $K$. Следовательно, прямая $LM$, перпендикулярная хорде $DN$ и делящая ее пополам, проходит через центр окружности. Но $KH$ также проходит через центр окружности. Отсюда мы заключаем, что точка $H$ есть центр окружности и, следовательно, $HD = HK$.

## 52

Пусть $x$ — число пенсов у каждого из нищих до игры. № 3 получает $x$ пенсов, вынимает из мешочка $(2+4)$ пенса, кладет в него $x/2$ пенсов. В результате этих манипуляций в мешочке оказывается $(x\cdot {}^3/_2—6)$ пенсов. Условимся в дальнейшем вместо ${}^3/_2$ писать $a$.

№ 5 получает $(xa-6)$ пенсов, отдает соседям справа и слева $(4+1)$ пенс и досыпает в мешочек $(xa-6)a$ пенсов, после чего в мешочке оказывается $(xa^2-6a-5)$ пенсов.

№ 2 вынимает $(1+3)$ пенса и передает очередному играющему мешочек с $(xa^3-6a^2-5a-4)$ пенсами.

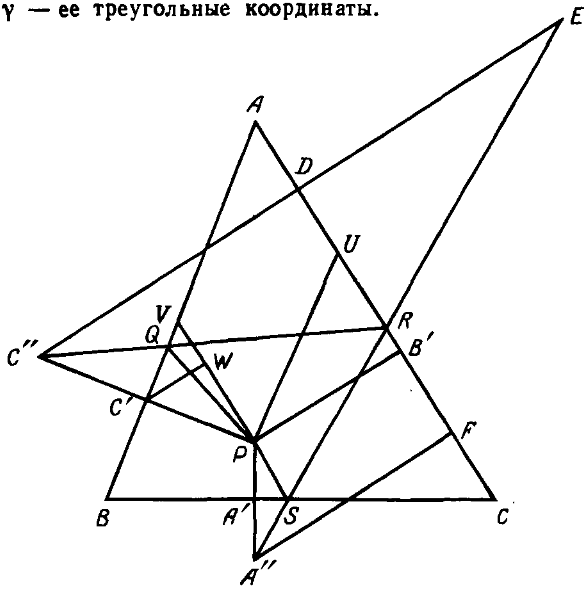
№ 4 раздает соседям $(3+5)$ пенсов и передает дальше мешочек с $(xa^4-6a^3-5a^2-4a-8)$ пенсами.

№ 1 кладет в мешочек 2 пенса, после чего в мешочке оказывается $5x$ пенсов.

Итак, $$xa^4-6a^3-5a^2-4a-6=5x,$$
откуда
$$x=\frac{6a^3+5a^2+4a+6}{a^4-5}=\frac{(6\cdot 3^3+5\cdot 3^2\cdot 2+4\cdot 3\cdot 2^2+6\cdot 2^3)\cdot 2}{3^4-5\cdot 2^4}=$$
$$=\frac{(162+90+48+48)\cdot 2}{81-80}=696$$ пенсов = 2 фунта 18 шиллингов 0 пенсов.

## 53

Пусть $ABC$ — данный треугольник, $P$ — данная точка, а $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — ее треугольные координаты.



Из точки $P$ на стороны треугольника опустим перпендикуляры $PA = \alpha$, $PB' = \beta$ и $PC = \gamma$. На продолжениях отрезков $PA'$ и $PC'$ отложим отрезки $A'A'' = PA'$ и $C'C'' = PC'$. Из точки $C''$ опустим перпендикуляр $C''D$ на $AC$ и продолжим его на отрезок $DE = C''D$. Проведем прямую $EA''$, пересекающую сторону $AC$ в точке $R$ и сторону $BC$ в точке $S$, и прямую $C''R$, пересекающую сторону $AB$ в точке $Q$. Соединим точку $P$ с точками $Q$ и $S$.

Путь шара по столу изображается ломаной $PQRSP$. Для решения задачи необходимо вычислить длину отрезка $AR$. Но $AR = DR + AD = DR + AB' - DB'$. Следовательно, предварительно необходимо вычислить длину отрезка $DR$.

Через $P$ проведем прямые $PU \parallel AB$ и $PV \parallel AC$, из точки $C'$ опустим перпендикуляр $C'W$ на $PV$, а из точки $A''$ — перпендикуляр $A''F$ на $AC$.

Из подобия треугольников $C''DR$ и $A''FR$

$$DR : RF = DE : A''F = C''D : A''F,$$

откуда

$$DR : DF = C''D : (C''D + A''F)$$

и, таким образом,

$$DR = \frac{DF \cdot C''D}{C''D + A''F}.$$

Но

$$\angle C'VP = \angle A,$$

поэтому

$$\angle C'PV = 90^\circ - \angle A,$$
$$WP = \gamma \pitchfork A,$$
$$DB' = 2WP = 2\gamma \pitchfork A.$$

Аналогично

$$B'F = 2\alpha \pitchfork C.$$

Следовательно,

$$DF = 2\,(\alpha \pitchfork C + \gamma \pitchfork A).$$

Далее,

$$C'W = \gamma \mathbin{\text{⌓}} A,$$

откуда

$$C''D = 2C'W + PB' = 2\gamma \mathbin{\text{⌓}} A + \beta.$$

Из аналогичных соображений

$$A''F = 2\alpha \mathbin{\text{⌓}} C + \beta,$$

откуда

$$C''D + A''F = 2\,(\alpha \mathbin{\text{⌓}} C + \gamma \mathbin{\text{⌓}} A + \beta),$$
$$DR = \frac{(\alpha \pitchfork C + \gamma \pitchfork A)\,(2\gamma \mathbin{\text{⌓}} A + \beta)}{\alpha \mathbin{\text{⌓}} C + \gamma \mathbin{\text{⌓}} A + \beta}.$$

Но

$$AB' = B'U + UA = B'U + RV = \beta \operatorname{ctg} A + \gamma \operatorname{cosec} A = \frac{\beta \cos A + \gamma}{\sin A},$$

следовательно,

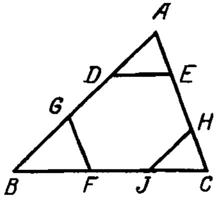
$$AB' - DB' = \frac{\beta \cos A + \gamma}{\sin A} - 2\gamma \sin A = \frac{\beta \cos A + \gamma (1 - 2 \sin^2 A)}{\sin A} = \frac{\beta \cos A + \gamma \cos 2A}{\sin A}.$$

Подставляя вычисленные значения $AB' - DB'$ и $DR$ в равенство $AR = DR + AB' - DB'$, получаем

$$AR = \frac{(\alpha \sin C + \gamma \sin A) \cdot (2\gamma \cos A + \beta)}{\alpha \cos C + \gamma \cos A + \beta} + \frac{\beta \cos A + \gamma \cos 2A}{\sin A}.$$

**54**

Ясно, что треугольник $ADE$ подобен треугольнику $ABC$.




Пусть $k$ — коэффициент подобия:

$$k = \frac{DE}{a} = \frac{AE}{b} = \frac{AD}{c}.$$

Так как шестиугольник равносторонний, то $DG = DE$ и, следовательно, $DG = ka$. Отсюда $GB = c - ka - kc$, $GB/c = 1 - k - k \cdot a/c$ и $GF = GB \cdot b/c = b - kb - k \cdot ab/c$. Но $GF = DE = ka$, поэтому

$$b - kb - k \cdot \frac{ab}{c} = ka,$$

$$bc = k(bc + ca + ab),$$

откуда

$$k = \frac{bc}{bc + ca + ab} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Введем новое обозначение: пусть

$$m=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

Тогда $k=\frac{1/a}{m}$, $AD=\frac{c\cdot 1/a}{m}$, $DG=\frac{1}{m}=\frac{c\cdot 1/c}{m}$.

Таким образом,

$$GB=c-AD-DG=\frac{c\left(m-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)}{m}=\frac{c\cdot\frac{1}{b}}{m}.$$

Следовательно,

$$AD:DG:GB=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$$

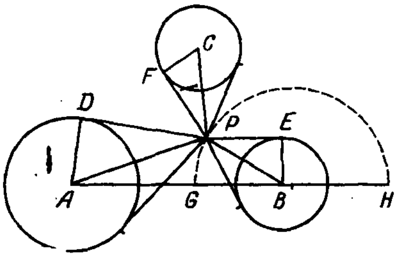
и

$$DE=ka=\frac{1}{m}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

что и требовалось доказать.

55

Пусть $A$, $B$, $C$ — центры оснований башен; $a$, $b$, $c$ — их радиусы.




Предположим, что $P$ — искомая точка. Из $P$ к каждой из окружностей проведем по две касательные и соединим $P$ с центрами окружностей. Ясно, что каждая из прямых $PA$, $PB$ и $PC$ делит пополам угол между касательными, проведенными из $P$ к соответствующей окружности. Следовательно, углы $APD$, $BPE$ и $CPF$ равны, в силу чего

$$\frown(\angle APD)=\frown(\angle BPE)=\frown(\angle CPF).$$

Эти равенства означают, что

$$\frac{a}{AP}=\frac{b}{BP}=\frac{c}{CP},$$

или

$$AP : BP : CP = a : b : c.$$

Через центры окружностей $A$ и $B$ проведем прямую и выберем на ней точки $G$ и $H$ так, чтобы

$$AG : GB = AH : HB = a : b.$$

Тогда полуокружность, описанная на $GH$, как на диаметре, есть геометрическое место точек, расстояния от которых до $A$ и $B$ относятся между собой, как $a : b$.

Следовательно, если провести прямую через $B$ и $C$ и на ней также построить полуокружность, служащую геометрическим местом точек, расстояния от которых до $B$ и $C$ относятся между собой, как $b : c$, то точка пересечения двух полуокружностей будет искомой точкой.

П р и м е ч а н и е. Для каждой пары окружностей мы используем лишь *половину* геометрического места точек, расстояния от которых до центров заданных окружностей относятся между собой, как радиусы этих окружностей. Так, геометрическим местом точек... и т. д. для пары окружностей с центрами в точках $A$ и $B$ и радиусами $a$ и $b$ является *окружность* с центром, лежащим на прямой $AB$, и диаметром $GH$.

**56**

Построим отрезки $BC$, $CE$ и $BD$, равные данным высотам, и расположим их так, чтобы углы между $DB$ и $BC$, а также между $BC$ и $CE$ были прямыми. Продолжим отрезки $DB$ и $EC$ за точки $B$ и $C$.

Соединим отрезком прямой точки $D$ и $C$. Из конца отрезка $C$ восставим перпендикуляр $CF$ до пересечения с продолжением отрезка $DB$.

Соединим точки $E$ и $B$ отрезком прямой. Из конца $B$ отрезка $EB$ восставим перпендикуляр $BG$ до пересечения с продолжением отрезка $EC$.

Опишем одну окружность с центром в точке $B$ радиусом $BF$, а другую — с центром в точке $C$ и радиусом $CG$. Пусть $A$ — точка пересечения окружностей. Соединим ее с точками $B$ и $C$.

Обозначим высоты треугольника $ABC$ через $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, а его площадь — через $S$. Справедливы следующие равенства:

$$\alpha \cdot BC = \beta \cdot CA = \gamma \cdot AB = 2S.$$

Следовательно, приняв $BC$ за единицу длины, мы получим соотношения:

$$BC = \frac{1}{BC}, \quad CA = CG = \frac{1}{CE}, \quad AB = BF = \frac{1}{BD}.$$

Подставив их в первые равенства, найдем, что

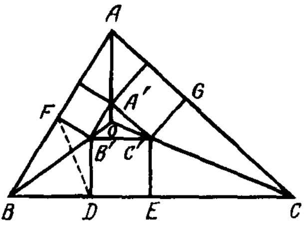
$$\frac{\alpha}{BC} = \frac{\beta}{CE} = \frac{\gamma}{BD},$$

то есть, что $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ пропорциональны данным высотам. Следовательно, треугольник $ABC$ подобен искомому, построение которого теперь очевидно.

**57**

### 1. *Геометрическое решение*

Пусть $ABC$ — данный треугольник.




Анализ. Предположим, что 3 квадрата внутри треугольника $ABC$ построены и стороны их, параллельные сторонам, лежащим на $AB$, $BC$ и $AC$, образуют треугольник $A'B'C'$. Соединим отрезками прямых $A$ с $A'$, $B$ с $B'$ и $C$ с $C'$.

Продолжим отрезок $BB'$ за точку $B'$. Ясно, что перпендикуляры, опущенные из любой точки отрезка $BB'$ или его продолжения на стороны $AB$ и $AC$, пропорциональны отрезкам $B'F$ и $B'D$. Аналогичное утверждение справедливо и для отрезков $AA'$, $CC'$ и их продолжений. Следовательно, все три прямые (продолжения отрезков $BB'$, $CC'$ и $AA'$) пересекаются в точке, такой, что перпендикуляры, опущенные из нее на стороны треугольника $ABC$, пропорциональны отрезкам $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$.

Следовательно, если на сторонах треугольника $ABC$, вне его, построить квадраты и продолжить их внешние основания до пересечения в точках $A''$, $B''$, $C''$, то треугольник $A''B''C''$ с тремя квадратами, построенными на его сторонах, внутри его, по чертежу будет неотличим от треугольника $ABC$ с тремя искомыми квадратами.

Синтез. На сторонах данного треугольника, вне его, построим квадраты. Стороны квадрата, параллельные лежащим на сторонах треугольника, продолжим до пересечения в точках, образующих вершины нового треугольника. Разделим стороны данного треугольника на части, пропорциональные частям, на которые построенные вне его квадраты делят стороны нового треугольника. Тогда центральные отрезки будут основаниями искомых квадратов.

### 2. *Тригонометрическое решение*

Пусть $a$, $b$, $c$ — стороны данного треугольника, $m$ — его площадь, $x$, $y$, $z$ — стороны искомых квадратов.

Вокруг четырехугольника $BDB'F$, очевидно, можно описать окружность. Следовательно, $\angle B'BD = \angle B'FD$.

Кроме того, нам известно, что в треугольнике $B'FD$

$$B'D \frown D = B'F \frown F,$$

то есть

$$x \frown (\angle B' + \angle F) = z \frown F.$$

Таким образом,

$$x \pitchfork B' \frown F + x \frown B' \pitchfork F = z \pitchfork F.$$

Но $\angle B$ дополняет $\angle B'$ до $180°$, следовательно,

$$x \pitchfork B \frown F = (z + x \frown B) \pitchfork F,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} F = \frac{z + x \frown B}{x \pitchfork B} = \operatorname{ctg}(\angle B'BD).$$

Подставляя $\operatorname{ctg}(\angle B'BD)$ в выражение

$$BD = x \operatorname{ctg}(\angle B'BD),$$

получаем

$$BD = \frac{z + x \frown B}{\pitchfork B}.$$

Аналогичным способом находим, что

$$EC = \frac{y + x \frown C}{\pitchfork C}.$$

Но $BD + EC = a - x$, поэтому

$$\frac{z + x \frown B}{\pitchfork B} + \frac{y + x \frown C}{\pitchfork C} = a - x,$$

$$\frac{x \pitchfork (B + C) + y \pitchfork B + z \pitchfork C}{\pitchfork B \pitchfork C} = a - x,$$

$$\frac{x \pitchfork A + y \pitchfork B + z \pitchfork C}{\pitchfork B \pitchfork C} = a - x. \qquad (*)$$

Из подобия треугольников $ABC$ и $A'B'C'$ следует, что

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$

Следовательно, равенство (*) с помощью выписанного ряда равных отношений можно преобразовать к виду

$$\frac{a \pitchfork A + b \pitchfork B + c \pitchfork C}{\pitchfork B \pitchfork C} = \frac{a^2}{x} - a,$$

откуда

$$\frac{a \pitchfork A + b \pitchfork B + c \pitchfork C}{a \pitchfork B \pitchfork C} = \frac{a}{x} - 1$$

и, наконец,

$$\frac{a}{x} = \frac{a \pitchfork A + b \pitchfork B + c \pitchfork C}{a \pitchfork B \pitchfork C} + 1.$$

Умножая числитель и знаменатель стоящей в правой части дроби на одно из равных отношений

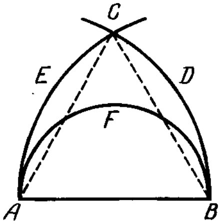
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

находим

$$\frac{a}{x}=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab\sin C}+1=\frac{a^2+b^2+c^2}{2m}+1=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}.$$

**58**

Можно предположить, что для трех точек, образующих треугольник, вероятность лежать на одной прямой (практически) равна нулю.




Пусть $AB$ — самая длинная из сторон треугольника. На $AB$, как на диаметре, построим полуокружность (полуокружность должна лежать по ту сторону от $AB$, по которую лежит треугольник $ABC$). Кроме того, проведем дуги окружностей с центрами в точках $A$ и $B$ и радиусами $AB$ и $BA$. Пусть $C$ — точка пересечения этих дуг.

Ясно, что вершина треугольника $C$ не может лежать вне фигуры $ABDCE$.

Кроме того, мы видим, что если вершина $C$ лежит внутри полуокружности, то треугольник тупоугольный, если же вне полуокружности,— то остроугольный. (Вероятность того, что вершина $C$ лежит на полуокружности, практически равна нулю.)

Следовательно, искомая вероятность равна отношению

$$\frac{\text{площадь половины круга}}{\text{площадь фигуры } ABDCE}.$$

Положим $AB = 2a$, тогда площадь половины круга, построенного на $AB$, как на диаметре, равна $\pi a^2/2$, а площадь фигуры $ABDCE$ равна разности между удвоенной площадью сектора $ABDC$ и площадью треугольника $ABC$, то есть

$$2\cdot\frac{4\pi a^2}{6}-\sqrt{3}\cdot a^2=a^2\cdot\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right).$$

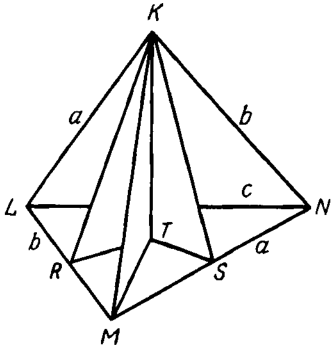
Следовательно, искомая вероятность равна

$$\frac{\pi/2}{4\pi/3-\sqrt{3}}=\frac{3}{8-6\sqrt{3}/\pi},$$

что и требовалось доказать.

## 59

Пусть $KL = MN = a$, $KN = LM = b$, $KM = LN = c$, $\angle LMK = A$, $\angle MKL = B$, $\angle KLM = C$ (аналогичные равенства справедливы и для углов в других гранях).



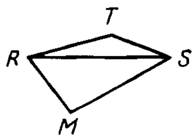

Из вершины тетраэдра $K$ опустим высоту $KT$ на основание $LMN$, а также перпендикуляры $KR$ и $KS$ к ребрам $LM$ и $MN$. Соединим точку $T$ с вершиной $M$ и основаниими перпендикуляров $R$ и $S$.

Нетрудно доказать, что углы $TRM$ и $TSM$ — прямые.

Искомый объем равен $^1/_3$ $KT\cdot$площадь $LMN$. Площадь грани $LMN$, разумеется, можно считать известной. Следовательно, чтобы решить задачу, необходимо лишь знать высоту $KT$. Но $KT^2 = KS^2 - TS^2$, причем $KS = c \sin B$. Итак, задача свелась к вычислению длины отрезка $TS$.

Чтобы вычислить длину $TS$, нам понадобится вспомогательная лемма, доказательство которой само по себе представляет красивую задачу.

Лемма 1. В четырехугольнике $RMST$ стороны $RM$ и $MS$ известны, а углы $RMS$, $TRM$ и $TSM$ — прямые. Найти длину стороны $TS$.




По теореме синусов

$$\frac{TS}{\sin(\angle TRS)} = \frac{TR}{\sin(\angle TSR)}.$$

Кроме того,

$$TS \cos(\angle TSR) + TR \cos(\angle TRS) = RS,$$

следовательно,

$$\frac{TS}{\frown(\angle TRS)}=\frac{TR}{\frown(\angle TSR)}=$$

$$=\frac{TS\triangle(\angle TSR)+TR\triangle(\angle TRS)}{\frown(\angle TRS)\triangle(\angle TSR)+\frown(\angle TSR)\triangle(\angle TRS)}=$$

$$=\frac{RS}{\frown(\angle RMS)}=\frac{MS}{\frown(\angle MRS)}.$$

Таким образом,

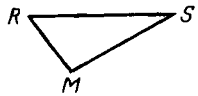
$$\frac{TS}{\triangle(\angle MRS)}=\frac{MS}{\frown(\angle MRS)},$$

то есть

$$TS=MS\cdot\mathrm{ctg}\,(\angle MRS).$$

Итак, для решения задачи нам требуется вычислить $\mathrm{ctg}\,(\angle MRS)$. Его значение мы найдем с помощью другой леммы (разумеется, мы могли бы с тем же успехом вычислять и $\mathrm{tg}(\angle MRS)$; более того, вычисление тангенса представляет собой более изящную задачу, чем вычисление котангенса).

Лемма 2. В треугольнике $RMS$ даны стороны $RM$, $MS$ и $\angle RMS$. Найти $\mathrm{tg}(\angle MRS)$.




$$\mathrm{tg}\,(\angle MRS)=\frac{\frown(\angle MRS)}{\triangle(\angle MRS)}=\frac{RS\frown(\angle MRS)}{RS\triangle(\angle MRS)}=$$

$$=\frac{MS\frown(\angle RMS)}{RM-MS\triangle(\angle RMS)}.$$

Итак, в четырехугольнике $RMST$ по лемме 1

$$TS=MS\,\mathrm{ctg}\,(\angle MRS),$$

а по лемме 2

$$\mathrm{ctg}\,(\angle MRS)=\frac{RM-MS\triangle(\angle RMS)}{MS\frown(\angle RMS)}=\frac{c\triangle A-c\triangle B\triangle C}{c\triangle B\frown C}=$$

$$=\frac{\triangle A-\triangle B\triangle C}{\triangle B\frown C}.$$

Следовательно,

$$TS=\frac{c}{\frown C}(\triangle A-\triangle B\triangle C).$$

Но $KT^2 = KS^2 - TS^2$, поэтому

$$KT^2 = (c \frown B)^2 - \frac{c^2}{\frown^2 C} \cdot (\triangle A - \triangle B \triangle C)^2 =$$

$$= \frac{c^2}{\frown^2 C} [(\frown B \frown C)^2 - (\triangle A - \triangle B \triangle C)^2].$$

Таким образом,

$$KT = \frac{c}{\frown C} \sqrt{\frown^2 B \frown^2 C - \triangle^2 B \triangle^2 C - \triangle^2 A + 2 \triangle A \triangle B \triangle C} =$$

$$= \frac{c}{\frown C} \sqrt{(1 - \triangle^2 B)(1 - \triangle^2 C) - \triangle^2 B \triangle^2 C - \triangle^2 A + 2 \triangle A \triangle B \triangle C} =$$

$$= \frac{c}{\frown C} \sqrt{1 - (\triangle^2 A + \triangle^2 B + \triangle^2 C) + 2 \triangle A \triangle B \triangle C}.$$

Выраженне, стоящее под раднкалом, как и должно быть, снмметрично относительно $A$, $B$ и $C$.

Площадь грани $LMN$ равна

$$\frac{ab \frown C}{2},$$

следовательно, нскомый объем тетраэдра равен

$$\frac{abc}{6} \sqrt{1 - (\triangle^2 A + \triangle^2 B + \triangle^2 C) + 2 \triangle A \triangle B \triangle C}.$$

Остается выясннть (это было сделано *после* решення задачи), каким условиям должны удовлетворять отрезки $a$, $b$ н $c$, чтобы построенне тетраэдра было *возможно.*

1. Отрезки длнной $a$, $b$ н $c$ должны быть сторонами треугольника. Следовательно, какне бы две нз велнчин $a$, $b$ и $c$ мы ни взяли, их сумма должна быть больше третьей величины.

2. Углы треугольника, построенного нз отрезков длиной $a$, $b$ и $c$, должны образовывать *пространственный угол.* Следовательно, сумма любой пары углов должна быть больше третьего угла н, таким образом, превосходнть 90°. Это означает, что *каждый* из углов должен быть *меньше* 90°, а его *косинус* — больше нуля. Отсюда мы заключаем, что должно выполняться неравенство $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Иначе говоря, числа $a$, $b$ н $c$ должны быть такими, что *сумма квадратов* любых двух из ннх должна быть больше *квадрата* третьего числа.

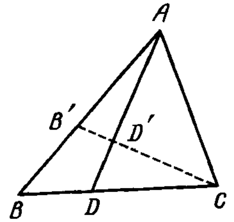
Напрнмер, отрезки 2, 3 н 4 *не могут* служить для построення тетраэдра, хотя они и удовлетворяют *первому* условию ($2 + 3 > 4$), поскольку *второе* условне нарушено ($2^2 + 3^2 < 4^2$).

**60**

Пусть $\angle BAD = \theta, \quad \angle CAD = \varphi.$

Имеем

$$\frac{\sin(\angle B + \theta)}{\sin\theta} = \frac{c}{\left(\dfrac{ma}{m+n}\right)} = \frac{c(m+n)}{ma},$$




откуда

$$\sin B \operatorname{ctg}\theta + \cos B = \frac{c(m+n)}{ma}.$$

Из этого равенства находим $\operatorname{ctg}\theta$:

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{c(m+n)}{ma\sin B} - \operatorname{ctg} B =$$

$$= \frac{(m+n)(a\cos B + b\cos A) - ma\cos B}{ma\sin B} =$$

$$= \frac{(m+n)\, b\cos A + na\cos B}{ma\sin B} =$$

$$= \frac{(m+n)\dfrac{b}{\sin B}\cos A + na\operatorname{ctg} B}{ma} =$$

$$= \frac{(m+n)\, a\operatorname{ctg} A + na\operatorname{ctg} B}{ma} =$$

$$= \frac{(m+n)\operatorname{ctg} A + n\operatorname{ctg} B}{m}.$$

Аналогичным образом вычисляем и $\operatorname{ctg}\varphi$:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{(m+n)\operatorname{ctg} A + m\operatorname{ctg} C}{n}.$$

Следствия.

1. $m \operatorname{ctg} \theta - n \operatorname{ctg} \varphi = n \operatorname{ctg} B - m \operatorname{ctg} C$.

2. $\dfrac{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} \varphi}{\operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} \theta} = \dfrac{m}{n}$.

3. Если треугольник равносторонний, то

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{m+2n}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{n+2m}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \varphi} = \frac{mn+2n^2}{mn+2m^2},$$

$$\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{mn+2m^2}{mn+2n^2}.$$

Последние равенства означают, что если провести прямую $CD'B' \perp AD$, то

$$\frac{B'D'}{D'C} = \frac{mn+2m^2}{mn+2n^2}.$$

Например, если $m/n = 1/2$, то $B'D'/D'C = 2/5$.
4. Пусть $\operatorname{tg} A = 1$, $\operatorname{tg} B = 2$, $\operatorname{tg} C = 3$.
Тогда

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{m+n+n \cdot \frac{1}{2}}{m} = \frac{2m+3n}{2m},$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{m+n+m \cdot \frac{1}{3}}{n} = \frac{3n+4m}{3n}.$$

Следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{6mn+8m^2}{6mn+9n^2}.$$

Отсюда при заданном отношении $\operatorname{tg}\theta/\operatorname{tg}\varphi$ мы можем находить $m/n$, решая квадратное уравнение.

Пытаясь найти отношение тангенсов, при котором число $m/n$ рационально, я перепробовал различные $\operatorname{tg}\theta/\operatorname{tg}\varphi$ и обнаружил, что нужным мне свойством обладает отношение $\operatorname{tg}\theta/\operatorname{tg}\varphi = 2/3$.

Действительно, в этом случае мы приходим к квадратному уравнению

$$2(6mn + 9n^2) - 3(6mn + 8m^2) = 0,$$

или

$$4m^2 + mn^2 - 3n^2 = 0,$$

откуда $m/n = (-1 \pm 7)/8$. Нас интересует лишь корень $m/n = 3/4$, дающий решение следующей задачи.

«Дан треугольник $ABC$, такой, что $\operatorname{tg} A = 1$, $\operatorname{tg} B = 2$, $\operatorname{tg} C = 3$. Разделить сторону $BC$ так, чтобы прямая, проведенная из вершины $A$ в точку $D$, делила отрезок $CB'$, проведенный перпендикулярно ей, в отношении 2/3». Ответ задачи: $BD/DC = 3/4$.

## 61

Воспользуемся тождеством

$$(a^2 + 4b^2 + 4c^2) + (4a^2 + b^2 + 4c^2) + (4a^2 + 4b^2 + c^2) = 9(a^2 + b^2 + c^2)$$

и запишем его в следующем виде:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{9}[(a^2 + 4b^2 + 4c^2) + (4a^2 + b^2 + 4c^2) + (4a^2 + 4b^2 + c^2)] = \frac{1}{9}[(a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 8bc - 4ca - 4ab) + (4a^2 + b^2 + 4c^2 - 4bc + 8ca - 4ab) + (4a^2 + 4b^2 + c^2 - 4bc - 4ca + 8ab)] = \frac{1}{9}[(-a + 2b + 2c)^2 + (2a - b + 2c)^2 + (2a + 2b - c)^2] = \left(\frac{-a + 2b + 2c}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a - b + 2c}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a + 2b - c}{3}\right)^2.$$

Но $(-a + 2b + 2c) = 3(b + c) - (a + b + c)$. Следовательно, если $(a + b + c)$ делится на 3, то $(-a + 2b + 2c)$ также делится на 3, то есть $(-a + 2b + 2c)/3$ — целое число. Аналогичные утверждения справедливы и относительно остальных двух дробей.

Кроме того, можно показать, что если число $(-a + 2b + 2c)/3$ равно $a$, $b$ или $c$, то $a$, $b$ и $c$ образуют арифметическую прогрессию.

Действительно, пусть

$$\frac{-a + 2b + 2c}{3} = a.$$

Тогда $-a+2b+2c=3a$, или $b+c=2a$.

Если же

$$\frac{-a+2b+2c}{3}=b,$$

то $-a+2b+2c=3b$, или $2c=(a+b)$.
Наконец, если

$$\frac{-a+2b+2c}{3}=c,$$

то $-a+2b+2c=3c$, или $2b=c+a$.

Аналогичные утверждения без труда доказываются и для двух остальных дробей.

Следовательно, рассуждая от противного, мы заключаем, что если числа $a$, $b$ и $c$ *не* образуют арифметическую прогрессию, то сумму их квадратов можно представить в виде суммы 3 других квадратов, причем эти суммы не будут иметь общих слагаемых, что и требовалось доказать.

Числовые примеры (придуманные *не* в часы бессонницы):

| $a^2$ | $b^2$ | $c^2$ | $\left(\frac{-a+2b+2c}{3}\right)^2$ | $\left(\frac{2a-b+2c}{3}\right)^2$ | $\left(\frac{2a+2b-c}{3}\right)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1^2$ | $4^2$ | $4^2$ | $5^2$ | $2^2$ | $2^2$ |
| $3^2$ | $4^2$ | $8^2$ | $7^2$ | $6^2$ | $2^2$ |
| $4^2$ | $5^2$ | $9^2$ | $8^2$ | $7^2$ | $3^2$ |

Думаю, что читателям моей книги будет небезынтересно познакомиться со следующим решением задачи 61, забавным образом нарушающим законы логики. Его прислал один из моих читателей. Привожу его рассуждения дословно.

Пусть $3m$, $21m$, $30m$ — три числа.
Тогда

$$3m+21m+30m=3\cdot 18m$$

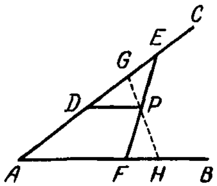
и, как нетрудно видеть,

$$(3m)^2+(21m)^2+(30m)^2=(6m)^2+(15m)^2+(33m)^2=$$
$$=(5m)^2+(10m)^2+(34m)^2=(10m)^2+(17m)^2+(31m)^2=$$
$$=(14m)^2+(23m)^2+(25m)^2.$$

Обозначим через $\alpha$ свойство трех чисел не быть последовательными членами арифметической прогрессии и давать в сумме число, делящееся на 3, а через $\beta$ — свойство трех чисел, состоящее в том, что сумму их квадратов можно представить в виде суммы квадратов трех других чисел. Автору присланного решения удалось доказать лишь, что *некоторые определенным образом выбранные* числа, обладающие свойством $\alpha$, обладают также свойством $\beta$. Но этим утверждением не исчерпывается сформулированная мной теорема, поскольку в ней требуется доказать, что *любые* три числа, обладающие свойством $\alpha$, обладают также и свойством $\beta$. Записав рассуждение автора приведенного выше решения в виде силлогизма, мы без труда обнаружим, что он исходит из совершенно несостоятельной большей посылки, а именно: «То, что верно для *некоторых определенным образом выбранных чисел*, обладающих свойством $\alpha$, верно и для любых чисел, обладающих свойством $\alpha$».

## 62

Пусть $AB$, $AC$ — данные прямые, $P$ — данная точка. Через точку $P$ проведем прямую $PD \parallel AB$ и на прямой $AC$ от точки $D$ отложим отрезок $DE = AD$. Соединим точки $E$ и $P$ отрезком прямой и продолжим его до пересечения с прямой $AB$ в точке $F$.

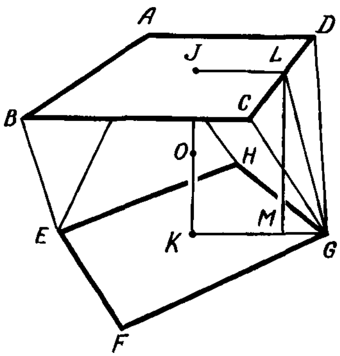



Так как $AD = DE$ и $DP \parallel AB$, то $FP = PE$. Пусть $GPH$ — любая другая прямая, проходящая через точку $P$. Тогда $\angle PFH > \angle PEG$.

Поскольку в треугольниках $PFH$ и $PEG$ стороны $PF$ и $PE$, а также углы $FPH$ и $GPE$ равны, а $\angle PFH > \angle PEG$, то и сторона $PH$ больше стороны $PG$. Следовательно, $S_{\triangle PFH} > S_{\triangle PGE}$. Присоединив к каждому из треугольников четырехугольник $AFPG$, мы получим неравенство $S_{\triangle AGH} > S_{\triangle AEF}$.

Поскольку $GPH$ — произвольная прямая, проходящая через точку $P$, площадь треугольника $AEF$ — наименьшая из возможных, что и требовалось доказать.

## 63



Пусть сторона каждого квадрата равна 2. Тогда $LG = \sqrt{3}$, $MG = (\sqrt{2}-1)$, откуда $LM = JK = \sqrt{3-(2+1-2\sqrt{2})} = 2^{3/4}$ и, следовательно, $OJ = OK = 1/2^{1/4}$.

Выберем точку $O$ за начало координат, ось $X$ направим параллельно $AD$, ось $Y$ — параллельно $AB$, а ось $Z$ — по $JK$.

Уравнение плоскости, в которой лежит треугольник $CDG$, имеет вид

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0,$$

где $p$ — длина перпендикуляра, опущенного из $O$ на плоскость и пересекающегося с последней в какой-то из точек отрезка $LG$.

Следовательно, $p$ можно найти из уравнения прямой $LG$, лежащей в плоскости $XZ$. Это уравнение имеет вид

$$x \cos\alpha + z \cos\gamma - p = 0.$$

Координаты точек $L$ и $G$, через которые проходит прямая, известны: $L = (1, 1/2^{1/4})$, $G = [\sqrt{2}, -(1/2^{1/4})]$. Подставляя их в уравнение, получаем

$$\cos\alpha + \frac{1}{2^{1/4}} \cos\gamma - p = 0,$$

$$\sqrt{2} \cos\alpha - \frac{1}{2^{1/4}} \cos\gamma - p = 0.$$

Отсюда

$$(\sqrt{2}-1) \cos\alpha = \frac{2}{2^{1/4}} \cos\gamma = 2^{3/4} \cos\gamma,$$

следовательно,

$$\frac{\cos\alpha}{2^{3/4}} = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2^{3/4}+3-2^{3/4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\alpha = \frac{2^{3/4}}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}},$$

$$p = \frac{2^{3/4}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}-1}{2^{1/4}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2^{1/4}\sqrt{3}}.$$

Площадь треугольника $CDG$ равна $\sqrt{3}$. Следовательно, площадь пирамиды с основанием $CDG$ и вершиной в точке $O$ равна $(\sqrt{2}+1)/(3\cdot 2^{1/4})$.

Интересующее нас тело содержит восемь таких пирамид. Их суммарный объем составляет $8(\sqrt{2}+1)/(3\cdot 2^{1/4})$.

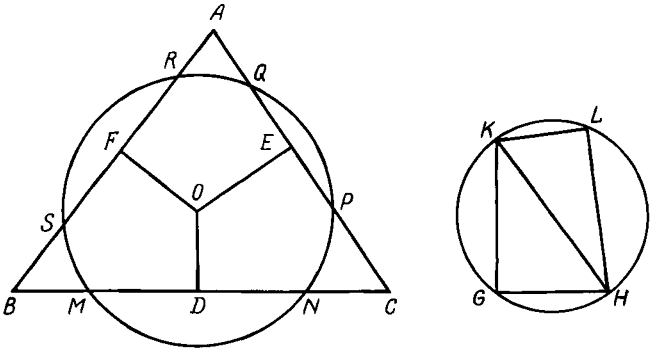
Объем пирамиды с основанием $ABCD$ и вершиной в точке $O$ равен $4/(3\cdot 2^{1/4})$. В интересующем нас теле имеются две такие пирамиды. Их суммарный объем составляет $8/(3\cdot 2^{1/4})$.

Следовательно, объем тела равен

$$\frac{8(2+\sqrt{2})}{3\cdot 2^{1/4}} = \frac{8\cdot 2^{1/4}(\sqrt{2}+1)}{3},$$

что и требовалось доказать.

## 64




Пусть $ABC$ — данный треугольник, $O$ — данная точка, и пусть $OD$ (расстояние от $O$ до $BC$) меньше, чем $OE$ или $OF$ (расстояний от $O$ до $AC$ и $AB$).

Построим отрезок $GH = OE$. На перпендикуляре, восставленном к нему в точке $G$, отложим $GK = OF$ и соединим точки $K$ и $H$ отрезком прямой. Вокруг треугольника $GHK$ опишем окружность, проведем в ней хорду $KL = OD$ и соединим отрезком прямой точки $L$ и $H$.

Так как $KL^2 + LH^2 = KG^2 + GH^2$ и отрезок $KL$ меньше любого из отрезков $KG$ и $GH$, то отрезок $LH$ должен быть больше любого из них. Следовательно, окружность с центром в точке $O$ и радиусом $LH$ пересечет каждую из сторон треугольника $ABC$ в двух точках. Проведем такую окружность. Тогда

$$MD^2 + DO^2 = PE^2 + EO^2,$$

$$LH^2 = RF^2 + FO^2,$$

следовательно,

$$MD^2 + DO^2 + LH^2 = PE^2 + RF^2 + EO^2 + FO^2.$$

Но

$$DO^2 + LH^2 = KL^2 + LH^2 = GH^2 + GK^2 = EO^2 + FO^2.$$

Таким образом,

$$MD^2 = PE^2 + RF^2,$$

$$4MD^2 = 4\,(PE^2 + RF^2),$$

откуда

$$MN^2 = PQ^2 + RS^2.$$

Следовательно, отрезки $MN$, $PQ$ и $RS$ могут быть сторонами прямоугольного треугольника, что и требовалось доказать.

## 65

Обозначив углы искомого треугольника через $360°/x$, $360°/y$ и $360°/z$, получим диофантово уравнение с тремя неизвестными вида

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}.$$

Очевидно, что ни $x$, ни $y$, ни $z$ не могут быть равны 2.

1. Пусть $x=3$. Тогда $1/y+1/z=1/6$. Если $1/y = [k/(k+l)]\cdot 1/6$, то $1/z=[l/(k+l)]\cdot 1/6$, откуда следует, что $k$ и $l$ могут принимать только значения 1, 2, 3 или 6.

Примечание. Предполагается, что числители и знаменатели каждой из дробей $k/(k+l)$, $l/(k+l)$ не содержат общих множителей.

Предположим, что $1/y \geqslant 1/z$. Тогда $k/(k+l) \geqslant 1/2$, и мы можем перечислить все допустимые значения $k/(k+l)$ и $l/(k+l)$:

| $\frac{k}{k+l}$ | $\frac{l}{k+l}$ |
|---|---|
| $^1/_2$ | $^1/_2$ |
| $^2/_3$ | $^1/_3$ |
| $^3/_4$ | $^1/_4$ |
| $^3/_5$ | $^2/_5$ |
| $^6/_7$ | $^1/_7$ |

Отсюда мы получаем 5 наборов допустимых значений $1/x$, $1/y$, $1/z$, а именно: 1/3, 1/12, 1/12; 1/3, 1/9, 1/18; 1/3, 1/8, 1/24; 1/3, 1/10, 1/15; 1/3, 1/7, 1/42.

2. Пусть $x=4$. Тогда $1/y+1/z=1/4$, и, как и раньше, $k$ и $l$ могут принимать только значения 1, 2 или 4. Допустимыми в этом случае являются следующие значения $k/(k+l)$ и $l/(k+l)$:

| $\frac{k}{k+l}$ | $\frac{l}{k+l}$ |
|---|---|
| $^1/_2$ | $^1/_2$ |
| $^2/_3$ | $^1/_3$ |
| $^4/_5$ | $^1/_5$ |

Отсюда мы получаем еще 3 допустимых набора значений $1/x$, $1/y$ и $1/z$: 1/4, 1/8, 1/8; 1/4, 1/6, 1/12; 1/2, 1/5, 1/20.

3. Пусть $x=5$. Тогда $1/y+1/z=3/10$. Следовательно, знаменатель левой части должен содержать множитель 3, а $k$ и $l$ могут принимать только значения 1, 2, 5 или 10.

Из таблицы допустимых значений $k/(k+l)$ и $l/(k+l)$

| $\frac{k}{k+l}$ | $\frac{l}{k+l}$ |
|---|---|
| $^1/_2$ | $^1/_2$ |
| $^2/_3$ | $^1/_3$ |
| $^5/_6$ | $^1/_6$ |

получаем 2 набора допустимых значений $1/x$, $1/y$ и $1/z$: 1/5, 1/5, 1/10; 1/5, 1/4, 1/20.

Последний набор уже встречался нам (это обстоятельство ускользнуло от меня, когда я решал задачу в уме).

4. Пусть $x = 6$. Тогда $1/y + 1/z = 1/3$. Следовательно, $k$ и $l$ могут принимать только значения 1 или 3. Допустимыми для $k/(k+l)$ и $l/(k+l)$ являютси значения

| $\frac{k}{k+l}$ | $\frac{l}{k+l}$ |
|---|---|
| $^1/_2$ | $^1/_2$ |
| $^3/_4$ | $^1/_4$ |

Отсюда мы получаем 2 набора допустимых значений $1/x$, $1/y$ и $1/z$: 1/6, 1/6, 1/6; 1/6, 1/4, 1/12, но последний из них уже встречался нам (это обстоятельство я также упустил из виду, когда решал задачу в уме).

Придавать $x$ значения больше 6 бессмысленно, поскольку при этом $1/y + 1/z > 1/3$ и, следовательно, одно из слагаемых в левой части должно быть больше 1/6. Это означало бы, что либо $y$, либо $z$ должен быть меньше 6, и мы вернулись бы к прежним наборам допустимых значений.

Итак, существуют 10 различных форм треугольников интересующего нас вида, что и требовалось доказать.

Перечислю их (я не уверен, что все они были получены мной без обращения к карандашу и бумаге):

1) 120°, 30°, 30°;
2) 120°, 40° 20°;
3) 120°, 45°, 15°;
4) 120°, 36°, 24°;
5) 120°, $51^3/_7$°, $8^4/_7$°;
6) 90°, 45°, 45°;
7) 90°, 60°, 30°;
8) 90°, 72°, 18°;
9) 72°, 72°, 36°;
10) 60°, 60°, 60°.

## 66

Обозначим для краткости $\alpha/(\alpha+\beta)$ через $k$. Шары в урне могут быть либо оба белые, либо один белый и один черный. Пусть $x$ — вероятность того, что в урне находятся 2 белых шара. Тогда вероятность того, что в урне находятся 1 белый и 1 черный шар равна $1 - x$. Следовательно, вероятность вытащить из урны белый шар равна

$$x \cdot 1 + (1 - x) \cdot \frac{1}{2} = x + \frac{1 - x}{2} = k,$$

откуда

$$x = 2k - 1,$$

$$1 - x = 2 - 2k.$$

Предположим теперь, что из урны вытащили 1 шар и он оказался белым. Вероятность «наблюденного события» в первом случае (в урне 2 белых шара) равна 1, во втором случае 1/2. Следовательно, послеапостериорные вероятности того, что в урне находились 2 белых шара или 1 белый и 1 черный шар, пропорциональны $(2k - 1) \cdot 1$ и $(2 - 2k) \cdot 1/2$, или просто $(2k - 1)$ и $(1 - k)$, то есть равны $(2k - 1)/k$ и $(1 - k)/k$.

Вероятность вытащить белый шар теперь равна

$$\frac{2k - 1}{k} \cdot 1 + \frac{1 - k}{k} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3k - 1}{2k}.$$

Итак, в результате 1-го повторения испытания вероятность перешла в $(3k - 1)/2k$.

При втором повторении $(3k-1)/2k$ перейдет в

$$\frac{3 \cdot \dfrac{3k - 1}{2k} - 1}{2 \cdot \dfrac{3k - 1}{2k}} = \frac{7k - 3}{6k - 2}.$$

Найдем общий закон (если таковой существует) для членов ряда

$$k, \quad \frac{3k - 1}{2k}, \quad \frac{7k - 3}{6k - 2},$$

то есть выражение, которое при $n = 1, 2, 3$ ($n$ — число испытаний) принимает выписанные выше значения.

Записав первый и второй члены ряда по аналогии с третьим в виде

$$\frac{k - 0}{0 \cdot k - (-1)}, \quad \frac{3k - 1}{2k - 0}, \quad \frac{7k - 3}{6k - 2},$$

заметим, что каждое из трех выражений является частным случаем выражения

$$\frac{(2^n - 1)k - (2^{n-1} - 1)}{(2^n - 2)k - (2^{n-1} - 2)},$$

где $n$ — номер члена (и число испытаний).

Предположим, что этот закон верен для $n$ членов. Как изменится вероятность после проведения еще одного испытания?

Мы уже знаем, что после одного испытания $k$ переходит в $(3k - 1)/2k$. Следовательно, новое значение вероятности равно

$$\frac{3\cdot\dfrac{(2^n-1)k-(2^{n-1}-1)}{(2^n-2)k-(2^{n-1}-2)}-1}{2\cdot\dfrac{(2^n-1)k-(2^{n-1}-1)}{(2^n-2)k-(2^{n-1}-2)}}=$$

$$=\frac{k(3\cdot 2^n-3-2^n+2)-3\cdot 2^{n-1}+3+2^{n-1}-2}{(2^{n+1}-2)k-(2^n-2)}=$$

$$=\frac{(2^{n+1}-1)k-(2^n-1)}{(2^{n+1}-2)k-(2^n-2)}.$$

Таким образом, $(n + 1)$-й член ряда удовлетворяет тому же закону. Поскольку мы знаем, что закон верен при $n = 1, 2, 3$, он верен при любых значениях $n$.

Следовательно, вероятность вытащить белый шар после $(m + 1)$ повторных испытаний совпадает с $(m + 1)$-м членом ряда, то есть равна

$$\frac{(2^{m+1}-1)k-(2^m-1)}{(2^{m+1}-2)k-(2^m-2)}.$$

Подставляя $k = \alpha/(\alpha + \beta)$, получаем

$$\frac{(2^{m+1}-1)\alpha-(2^m-1)(\alpha+\beta)}{(2^{m+1}-2)\alpha-(2^m-2)(\alpha+\beta)}=\frac{(2^{m+1}-2^m)\alpha-(2^m-1)\beta}{(2^{m+1}-2^m)\alpha-(2^m-2)\beta}=$$

$$=\frac{2^m(\alpha-\beta)+\beta}{2^m(\alpha-\beta)+2\beta},$$

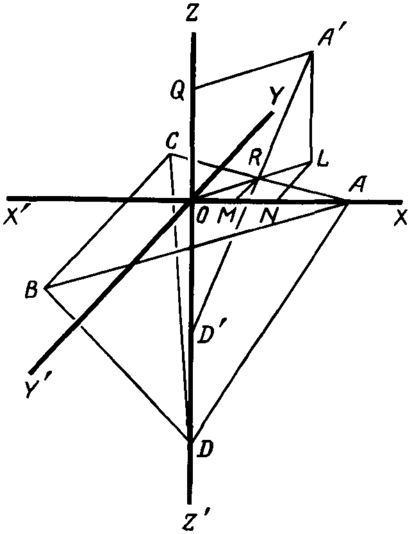
что и требовалось доказать.

Пример. Пусть вероятность вытащить белый шар равна и испытание повторено еще 5 раз. В этом случае $\alpha = 9$, $\beta = 1$, следовательно, искомая вероятность равна $(32\cdot 8 + 1)/(32\cdot 8 + 2) = 257/258$.

## 67

Пусть $ABCD$ — углубление. Будем поворачивать тетраэдр до тех пор, пока связанная с ним плоскость $DOA$ не совместится с плоскостью $D'QA'$, а ребро $DA$ в новом положении не коснется ребра $AC$ углубления в точке $R$. Из $A'$ опустим на плоскость $XY$ перпендикуляр $A'L$. Через точки $O$ и $R$ проведем прямую и продолжим ее до точки $L$. Проведем отрезки $RM$ и $LN$ — ординаты точек $R$ и $L$.

Координатами точки $A'$ служат длины отрезков $ON$, $NL$, $LA'$. Условимся относительно обозначений. Пусть $x' = OM$, $y' = MR$, $a = OA$, $a' = OR$, $h = OD$, $\theta = \angle XOR$.




Ясно, что вертикальная ось тетраэдра все время совпадает с осью $Z$. Следовательно, точка $A$ движется по поверхности цилиндра, то есть

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{1}$$

Поскольку $\angle XAC = 150°$, уравнение прямой $AC$ имеет вид

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - a),$$

или, что то же,

$$x + \sqrt{3} \cdot y = a. \tag{2}$$

Уравнение прямой $OR$, очевидно, можно записать в виде

$$\frac{x}{\text{⌓}\,\theta} = \frac{y}{\pitchfork\,\theta} = \delta.$$

Следовательно, координаты точки $R$ удовлетворяют соотношенню

$$\frac{x'}{\cos\theta}=\frac{y'}{\sin\theta}=a'. \tag{3}$$

Кроме того, поскольку точка $R$ лежит на прямой $AC$, в снлу уравнения (2)

$$a'\cos\theta+\sqrt{3}\,a'\sin\theta=a$$

н, таким образом,

$$a'=\frac{a}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}. \tag{4}$$

Далее, из подобня треугольников $D'QA'$ и $D'OR$

$$QA':QD'=OR:OD',$$

то есть

$$a:h=\frac{a}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}:(h-z),$$

откуда

$$h-z=\frac{h}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}.$$

Но $\cos\theta=x/a$, $\sin\theta=y/a$, следовательно,

$$h-z=\frac{ah}{x+\sqrt{3}\,y},$$

или

$$\left(x+\sqrt{3}\,y\right)(h-z)=ah. \tag{5}$$

Искомое геометрическое место точек определяется уравненнями (1) и (5).

**68**

Обозначим число бутылок вина, проданных в первый, второй и третий день, через $x$, $y$ н $z$. Предположим, что каждая бутылка была куплена за $10\,v$ пенсов и, следовательно, продана за $11\,v$ пенсов.

В первый день казначей получил от продавца $(x-1)\cdot 11\,v$, во второй $y\cdot 11\,v-v$ и в третий день $(z-1)\cdot 11v-v$ пенсов. Следовательно, прибыль (разность между выручкой и затратами на покупку виuа) составила: в первый день $xv-11$, во второй день $yv-v$ и в третнй $zv-12v$ пенсов. По условию задачи все три велнчнны равны, откуда $y=x-10$, $z=x+1$.

Такнм образом, полное число бутылок $(x+y+z)$, хранившихся в начале в винном погребе «фирмы», равно $3x-9$.

Прибыль от продажи всех бутылок составила $(x + y + z)v - 24v = (3x - 33)v$, а прибыль от продажи одной бутылки равна $[(3x - 33)v]/3x - 9$. (По условию задачи эта величина равна 6 пенсам.) Отсюда мы получаем уравнение

$$(x - 11)\, v = (x - 3)\, 6.$$

Кроме того, $z \cdot 11v = 11 \cdot 240$, то есть

$$(x + 1) \cdot 11v = 11 \cdot 240.$$

Комбинируя эти два уравнения, получаем:

$$\frac{x - 11}{x + 1} = \frac{6\,(x - 3)}{240},$$

$$(x + 1)\,(x - 3) = 40\,(x - 11),$$

$$x^2 - 2x - 3 = 40x - 440,$$

$$x^2 - 42x + 437 = 0,$$

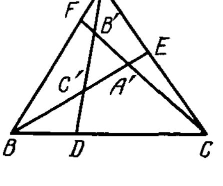
$$x_{1,2} = \frac{42 \pm 4}{2}, \quad x_1 = 23, \quad x_2 = 19.$$

Итак, число бутылок равно либо 60, либо 48, но, поскольку оно должно быть кратно 5, остается лишь одно решение: 60 бутылок.

Поскольку $(x + 1) \cdot 11v = 11 \cdot 240$, или $24v = 240$, то $v = 10$. Таким образом, вино было куплено по цене 8 шиллингов 4 пенса за бутылку и продано по цене 9 шиллингов 2 пенса за бутылку.

## 69

1. Пусть $\angle BAD = k \cdot A$, $\angle CBE = l \cdot B$, $\angle ACF = m \cdot C$. Тогда $\angle ABE = (1 - l) \cdot B$, а поскольку $\angle B'CD = \angle C'AB + \angle C'BA$,




то

$$k \cdot A + (1 - l) \cdot B = C. \tag{1}$$

Аналогично выводятся и соотношения

$$l \cdot B + (1 - m) C = A, \tag{2}$$

$$m \cdot C + (1 - k) A = B. \tag{3}$$

Пользуясь соотношениями (1) и (3), величины $l$ и $m$ можно выразить через $k$, но получающиеся при этом функции не будут однотипными с $k$. Поэтому $k$ необходимо представить в виде некоторой функции, зависящей, например, от $A$, $B$, $C$ и $\theta$. При этом $l$ и $m$ должны быть такими же по виду функциями $A$, $B$, $C$ и $\theta$, то есть должны выполняться соотношения:

$$k = f(A, B, C, \theta),$$

$$l = f(B, C, A, \theta),$$

$$m = f(C, A, B, \theta).$$

Из соотношения (1) известно, что $kA - lB = C - B$, то есть

$$A \cdot f(A, B, C, \theta) - B \cdot f(B, C, A, \theta) = C - B.$$

В качестве эксперимента положим

$$k \cdot A = xA + yB + zC + \theta,$$

$$l \cdot B = xB + yC + zA + \theta,$$

тогда

$$kA - lB = (x - z) A + (y - x) B + (z - y) C.$$

Следовательно,

$$x - z = 0, \quad \text{то есть} \quad x = z;$$

$$z - y = 1, \quad \text{то есть} \quad z = y + 1.$$

Эти условия будут выполнены, если положить $y = 1$, $x = z = 2$, так что

$$kA = 2A + B + 2C + \theta,$$

$$lB = 2B + C + 2A + \theta.$$

При этом

$$f(A, B, C, \theta) = \frac{2A + B + 2C + \theta}{A}.$$

Функцию $f$ можно упростить, если вычесть из числителя $A + B + C = 180°$. При этом $k = (A + C + \theta)/A$. Формула упростится еще больше, если $A+B+C=180°$ вычесть из числителя еще раз, и будет иметь вид $k=(\theta-B)/A$.

Величины $l$ и $m$ выражаются так же:

$$l=\frac{\theta-C}{B}, \quad m=\frac{\theta-A}{C}.$$

2. Поскольку $kA=\theta-B$, то, очевидно, $\angle ADC=\theta$ и точно так же $\angle BEA=\angle CFB=\theta$.

Это обстоятельство позволяет решить следующую геометрическую задачу на построение: «Через вершины $A$, $B$ и $C$ треугольника провести прямые, образующие один и тот же угол $\theta$, с противолежащими сторонами».

3. Установим пределы, в которых должен лежать угол $\theta$.

Мы знаем, что $kA=\theta-B$. Но $kA\leqslant A$, следовательно, $\theta-B\leqslant A$, то есть $\theta\leqslant A+B$. Иначе говоря, угол $\theta$ не превосходит угла, дополняющего угол $C$ до 180°.

Разумеется, это утверждение справедливо не только для $C$, но и для любого из трех углов $A$, $B$ и $C$ треугольника. Следовательно, угол $\theta$ не должен превосходить угол, дополняющий наибольший из углов треугольника до 180°.

Кроме того, должно выполняться соотношение $kA\geqslant 0$. Следовательно, $\theta-B\geqslant 0$, или $\theta\geqslant B$. То же неравенство, разумеется, можно выписать и для других углов треугольника.

Итак, если углы $A$, $B$, $C$ треугольника расположены в порядке убывания величины, то $\theta$ может изменяться в пределах

$$A\leqslant\theta\leqslant 180°-A.$$

4. Найдем коэффициент подобия треугольников $A'B'C'$ и $ABC$.

Вычислим стороны треугольника $ABC'$, углы которого равны $(\theta-B)$, $(180°-\theta-A)$, $(180°-C)$:

$$AC'=\frac{AB}{\frown(AC'B)}\cdot\frown(ABC')=\frac{c}{\frown C}\cdot\frown(\theta+A)=\frac{a}{\frown A}\cdot\frown(\theta+A);$$

$$BC'=\frac{AB}{\frown(AC'B)}\cdot\frown(BAC')=\frac{c}{\frown C}\cdot\frown(\theta-B)=\frac{a}{\frown A}\cdot\frown(\theta-B)$$

и по симметрии

$$AB'=\frac{a}{\frown A}\cdot\frown(\theta-A).$$

Сторону $B'C'$ треугольника $A'B'C'$ можно представить в виде $B'C'=AC'-AB'$. Следовательно,

$$B'C'=\frac{a}{\frown A}[\frown(\theta+A)-\frown(\theta-A)]=\frac{a}{\frown A}2\triangle\theta\frown A=a2\triangle\theta.$$

Таким образом,

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = 2 \triangle \theta.$$

**70**

1. В плоскости передней грани геометрическим местом вершин всех равновеликих ей треугольников, имеющих с ней общее основание (и расположенных по ту же сторону от этого основания, что и сама грань), является прямая, параллельная основанию и отстоящая от него на расстояние $\sqrt{3}/2$ (если за единицу длины принять длину ребра).

Следовательно, если мы представим себе, что к передней грани тетраэдра приклеена полоска бумаги шириной $\sqrt{3}/2$, которой мы оборачиваем тетраэдр, то верхний край этой полоски и будет, очевидно, геометрическим местом вершин треугольников, равновеликих передней грани и имеющих с ней общее основание. Воображаемую полоску бумаги удобно представить себе разделенной на равносторонние треугольники с основаниями, обращенными попеременно то вниз, то вверх. По мере того как мы будем оборачивать полоску вокруг тетраэдра, эти треугольники будут совмещаться с гранями тетраэдра, закрывая их в такой последовательности: передняя, правая, боковая, нижняя, левая боковая, передняя и т. д. *Верхний* край полоски, образованный основаниями перевернутых равносторонних треугольников, расположится на поверхности тетраэдра следующим образом.

Обозначим треугольники, на которые разбита полоска, буквами греческого алфавита. Пусть вслед за первым треугольником, совпадающим с передней гранью тетраэдра, идет треугольник $\alpha$ (обращенный основанием вверх), затем — треугольник $\beta$ (обращенный основанием вниз), $\gamma$ (основание обращено вверх), $\delta$ (основание обращено вниз) и т. д. Геометрическое место, о котором идет речь, состоит из оснований треугольников $\alpha, \gamma$ и т. д. Когда треугольник $\alpha$ совмещается с правой боковой гранью тетраэдра, его основание совпадает с задним ребром тетраэдра, идущим от вершины к основанию. Треугольник $\beta$ закроет нижнюю грань тетраэдра. Его основание совпадает с нижним ребром передней грани. Треугольник $\gamma$ совместится с левой боковой гранью тетраэдра, его основание совпадет с задним ребром тетраэдра, идущим от вершины к основанию, и т. д. Таким образом, искомое геометрическое место точек будет состоять из точек заднего ребра тетраэдра, не лежащего в горизонтальной плоскости и проходимого сначала сверху вниз, затем снизу вверх и т. д. Таков ответ на первый вопрос.

Отвечая на остальные вопросы, мы будем рассматривать полоску бумаги до того, как она будет обернута вокруг тетраэдра, и вычислять положение вершин соответствующих треугольников вдоль *верхнего* ее края. При этом задачи сводятся к более простым задачам планиметрии.

2. Рассмотрим прямоугольный треугольник с высотой $\sqrt{3}/2$ и углом при основании, равным 15°. Если мы вычислим его основание и вычтем из него половину основания треугольника, образующего переднюю грань тетраэдра (то есть просто ½), то найдем, на каком расстоянии от вершины тетраэдра (считая вдоль верхнего

края полоски) находится его вершина. Затем мы сможем вычислить, сколько раз нам придется спуститься и подняться по заднему ребру тетраэдра, чтобы попасть в эту точку.

Итак, пусть $x$ — основание прямоугольного треугольника (с высотой $\sqrt{3}/2$ и углом при основании, равным 15°). Тогда

$$\frac{\sqrt{3}}{2x} = \operatorname{tg} 15°.$$

Если обозначить tg 15° через $t$, то

$$\frac{2t}{1-t^2} = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$1 - t^2 = 2\sqrt{3}t, \quad t^2 + 2\sqrt{3}t - 1 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим

$$t = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4}{2}.$$

Отбрасывая отрицательный корень, получаем $t = 2-\sqrt{3}$. Таким образом,

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \frac{3}{2}.$$

Искомое расстояние равно $x - {}^1/_2 = \sqrt{3} + 1$, то есть около 2,7.

Следовательно, нам придется спуститься по заднему ребру, затем подняться и снова спуститься примерно на 0,7 его длины. Таков ответ на второй вопрос задачи.

3. Прежде чем дойти до вершины этого треугольника, нам придется один раз спуститься вдоль заднего ребра тетраэдра и один раз подняться, то есть пройти обращенные вверх основания треугольников $\alpha$ и $\gamma$. Поэтому основание вспомогательного прямоугольного треугольника (см. решение предыдущего вопроса) в этом случае равно $2\frac{1}{2}$, а тангенс угла при его основании равен $(\sqrt{3}/2)\cdot 2/5$, то есть $\sqrt{3}/5$. Вычисляя приближенно арксинус этого угла, я нашел, что угол равен 18,65°.

4. В этом случае основание вспомогательного прямоугольного треугольника равно $3\frac{1}{2}$. Следовательно, тангенс искомого угла (обозначим его $\varphi$) при основании равен

$$\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{7}{2} = \frac{\sqrt{3}}{7},$$

откуда

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}} = \frac{\cos\varphi}{7} = \frac{1}{\sqrt{52}}$$

и

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{3}{52}} \approx \sqrt{\frac{1}{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Поскольку $\sqrt{17} \approx 4,\ 12\ \ldots$ , то

$$\sin\varphi \approx 0,24\ \ldots ,$$

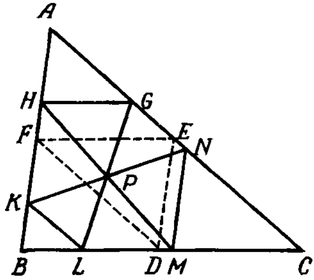
а

$$\varphi \approx 14,53°.$$

71

Пусть $ABC$ — данный треугольник, $P$ — данная точка.

Соединим отрезками прямых середины $D$, $E$ и $F$ сторон треугольника $ABC$.




Предположим сначала, что точка $P$ лежит внутри треугольника $DEF$.

Проведем прямую $HG \parallel BC$ так, чтобы расстояние между $HG$ и $BC$ было вдвое больше расстояния от точки $P$ до $BC$. Соединим отрезками прямых точки $G$, $P$ и $H$, $P$ и продолжим отрезки $GP$ и $HP$ до пересечения со стороной $BC$ в точках $L$ и $M$. Через $L$ проведем $LK \parallel AC$. Прямую $KP$ продолжим до пересечения со стороной $AC$ в точке $N$. Соединим точки $M$ и $N$ отрезком прямой.

Так как $HG \parallel LM$, то $GP = PL$ и $HP = PM$, а поскольку $KL \parallel GN$ и $LP = PG$, то $KP = PN$ и, следовательно, $MN \parallel HK$. Таким образом, треугольники $PGH$ и $PLM$ равны, в силу чего $GH = LM$.

Равенства $KL = GH$ и $MN = HK$ доказываются аналогично.

Если точка $P$ лежит на $FE$, то отрезки $HG$ и $LM$ стягиваются в точку и шестиугольник вырождается в параллелограмм.

Если точка $P$ совпадает с точкой $D$, то шестиугольник вырождается в прямую $BC$.

Если точка $P$ лежит вне треугольника $DEF$, то задача неразрешима.

**72**

Мы знаем, что если бы в урне было 3 шара, из них 2 черных и 1 белый, то вероятность вытащить черный шар была бы равна 2/3, и что при любой *другой* комбинации трех шаров вероятность извлечь черный шар была бы *иной*.

Вероятности того, что в данной урне находятся (α) 2 черных шара, (β) 1 белый и 1 черный шар и (γ) 2 белых шара, равны соответственно 1/4, 1/2, 1/4.

Положим в урну один черный шар.

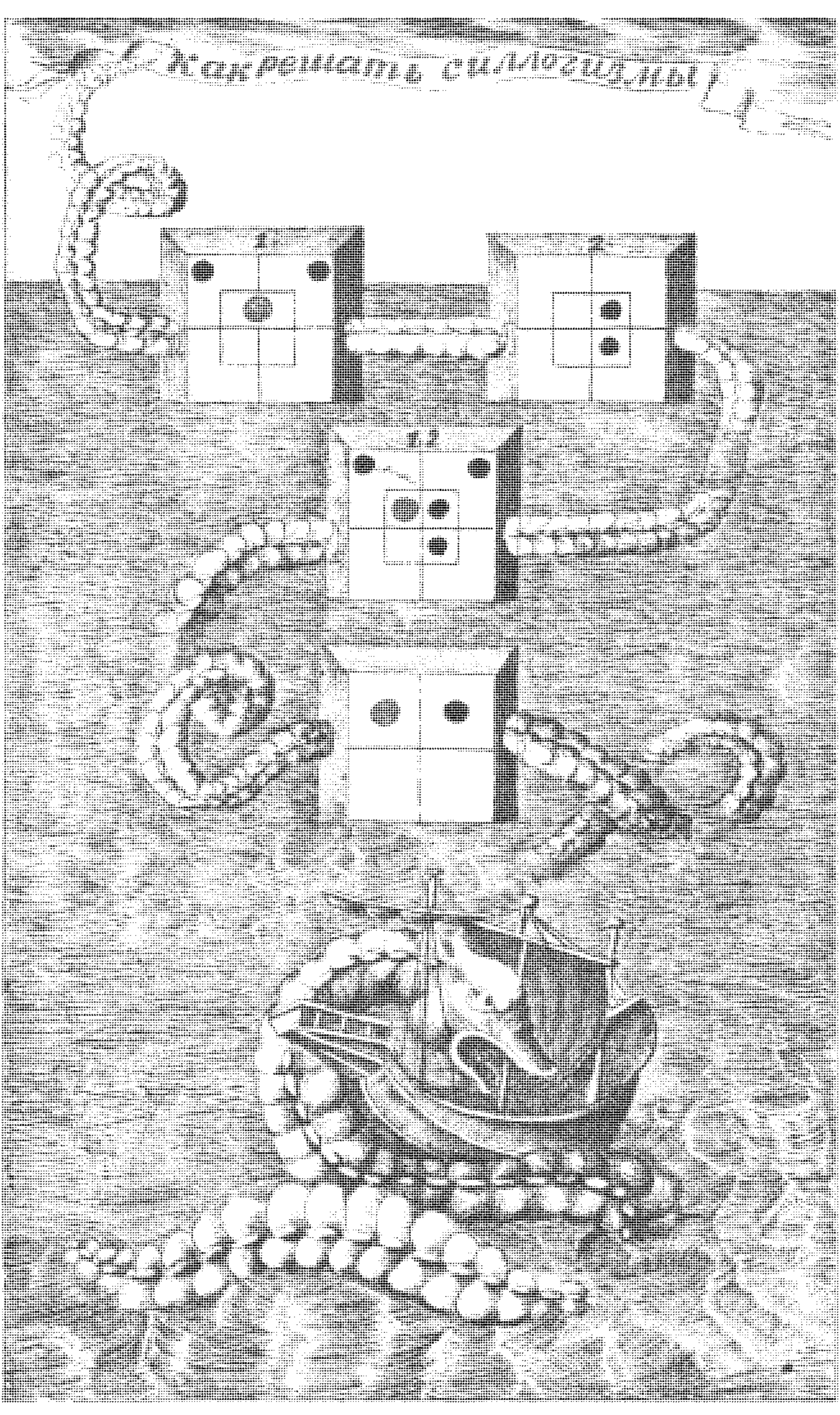
Вероятности того, что в ней теперь находятся (α) 3 черных шара, (β) черный шар, белый шар и черный шар и (γ) 2 белых шара и 1 черный шар, как и прежде, равны 1/4, 1/2, 1/4.

Следовательно, теперь вероятность вытащить черный шар равна

$$\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Это означает, что теперь в урне находятся 2 черных шара и 1 белый (ибо при любой *другой* комбинации 3 шаров вероятность вытащить черный шар была бы *иной*).

Таким образом, *до того*, как мы положили в урну 1 черный шар, в ней находились 1 белый шар и 1 черный шар, что и требовалось доказать.


Как решать силлогизмы

# СИМВОЛИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

## КАК РЕШАТЬ СИЛЛОГИЗМЫ

1.

От истории о том, как вам однажды посчастливилось встретить морского змея, меня всегда клонит в сон.

2.

Меня никогда не клоиит в сон, если только я не слушаю что-ибудь совсем неинтересное.

---

История о том, как вам однажды посчастливилось встретить морского змея, совсем неинтересна.

# ОБРАЩЕНИЕ К УЧАЩИМСЯ*

Учащемуся, который захочет честно разобраться в том, содержится ли в этой небольшой книжке материал для интереснейшего умственного развлечения или нет, мы прямо посоветуем придерживаться следующих правил.

1. Начать *с самого начала* и не заглядывать вперед из праздного любопытства. Вы, наверное, покачаете головой и скажете, что это выше человеческих сил. Может быть! Но, нарушив правило, вы упустите случай *существенно* пополнить имеющийся у вас запас умственных развлечений. Следовать этому правилу (то есть *не заглядывать* вперед) весьма желательно и при чтении *других* книг, например романов. Действительно, забегая вперед, вы можете испортить все удовольствие, которое в противном случае получили бы от истории, ибо то, что автор намеревался сделать приятным сюрпризом, вам будет казаться вполне естественным и само собой разумеющимся. Я знаю людей, которые, прежде чем браться за первый том, непременно заглянут в третий, чтобы заранее знать, чем все кончится, и даже просто чтобы убедиться в *счастливом* конце: влюбленные после долгих мытарств женятся, *он* оказывается совершенно невиновным в убийстве, козни злого кузена рушатся напрочь, а самого кузена ждет заслуженное возмездие и, наконец, богатый дядюшка в Индии (*Вопрос.* Почему в Индии? *Ответ.* Потому что по каким-то совершенно неясным причинам дядюшки не могут разбогатеть в другом месте) умирает в нужный момент.

Может быть, с романом, у которого третий том *понятен* даже тем, кто не читал первые два, поступать так вполне

* Обращение, адресованное преподавателям, см. на стр. 329.

допустимо, но по отношению к научной книге такое поведение вопиюще нелепо. Забежав вперед, вы непременно обнаружите, что *конец* книги вам *совершенно* непонятен.

2. Не приступайте к чтению новой главы или раздела до тех пор, пока до конца не разберетесь во всем предыдущем материале и не продумаете тщательнейшим образом большинство, если не все, из предложенных примеров. До тех пор, пока вы будете уверены, что за вашей спиной простирается лишь полностью *покоренная* территория и вы не оставили не решенным ни одного трудного вопроса (к которому вам все равно пришлось бы вернуться позднее), ваше триумфальное продвижение вперед будет легким и приятным. В противном случае число недоуменных вопросов будет неминуемо возрастать от страницы к странице, пока наконец вы не отбросите книжку с чувством крайнего отвращения.

3. Если вам встретится в тексте непонятное место, *перечитайте его еще раз*. Если оно по-прежнему останется непонятным, еще раз перечитайте. Если вам не удалось понять его с третьего раза, то весьма вероятно, что вы просто немного устали. Отложите книгу и займитесь чем-нибудь другим, а на следующий день, когда вы вернетесь к ней со свежими силами, очень может быть, что трудное место покажется вам *совсем* легким.

4. Если возможно, постарайтесь найти «гениального» приятеля, с которым вы сможете вместе читать эту книгу и обсуждать возникающие трудности. *Словесное обсуждение* — прекрасное средство для выяснения всех трудных вопросов. Когда что-нибудь ставит *меня* в тупик (будь то в логике или в какой-нибудь иной области), я всегда обсуждаю возникшую трудность *вслух*, даже если я совершенно один. Уж себе-то все можно объяснить *так ясно* и понятно! Кроме того, объясняя самим себе, люди проявляют удивительное *терпение*: никто *никогда* не выходит из себя и не сетует на собственную глупость!

Если, мой дорогой читатель, вы будете честно соблюдать все эти правила и, следовательно, обращаться с моей книжкой так, как подобает, то я ничуть не сомневаюсь в том, что «Символическая логика» станет одним из любимых (если не самым любимым) ваших развлечений. В этой книге, составляющей лишь первую часть задуманного мной труда, я тщательно избегал всех трудных вопросов, которые казались мне недоступными для развитого ребенка лет 12—14. Многое из ее содержания было неоднократно *испытано viva voce** на знакомых мне подростках. Все они проявляли живой интерес к предмету. Тем, кто одолеет предлагаемую книгу и начнет, подобно Оливеру, «просить еще», я надеюсь предложить впоследствии несколько *весьма* крепких орешков**. Чтобы расколоть их, понадобится напрячь все силы!

Интеллектуальные развлечения необходимы для нашего духовного здоровья. К числу таких развлечений, несомненно, можно отнести игры, подобные игре в триктрак, шахматам и новую игру «халма». Но став первоклассным игроком в любой из этих игр, вы не сможете извлечь из них ничего, что можно было бы считать *результатом*! Пока вы играете, процесс игры и победа доставляют вам удовольствие, но *результат*, который можно оценить или как-то использовать, вы не получаете. Тем самым вы оставляете лежать втуне бесценное сокровище. Овладев же методами «Символической логики», вы получите увлекательное развлечение, не требующее ни специальных досок, ни карт и к тому же полезное независимо от того, чем вы занимаетесь. Методы эти позволят вам обрести ясность мысли, способность находить собственное, оригинальное решение трудных задач, выработают у вас привычку к систематическому мышлению и, что особенно ценно, умение обнаруживать логические ошибки и находить изъяны и пробелы тех, кто не пытался овладеть увлекательным искусством логики.

*Попытайтесь.* Вот все, о чем я прошу вас.

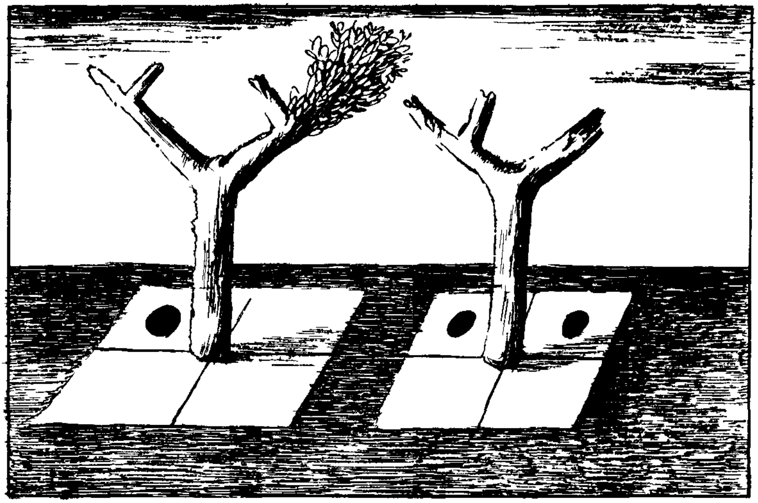
*Л. К.*

* Живым голосом, лично, в непосредственном общении (*лат.*).

** Корректура второй части «Символической логики» была недавно обнаружена в архиве проф. Кука Вилсона. — *Прим. перев.*

# *Книга I*

# ПРЕДМЕТЫ И ИХ ПРИЗНАКИ



## *Глава I*

## ВВЕДЕНИЕ

Во Вселенной множество предметов (как, например, «я», «Лондон», «розы», «краснота», «старые английские книги», «письмо, которое я получил вчера»).

Предметы обладают признаками (как, например, «большой», «красная», «старые», «которое я получил вчера»).

Один предмет может иметь много признаков, а один признак — принадлежать многим предметам. Например, предмет «роза» может обладать признаками «красная», «благоухающая», «распустившаяся» и т. д., а признак «красный (красная)» — принадлежать таким предметам, как «роза», «кирпич», «лента» и т. д.

Любой признак или любую совокупность признаков можно также назвать особенностью предмета. Этот термин я ввожу, чтобы избежать постоянного повторения фразы «Признак или совокупность признаков». Например, можно сказать, что роза обладает признаком (или, если угодно, особенностью) «красная», точно так же можно сказать, что роза обладает особенностью «красная, благоухающая и распустившаяся».

## *Глава II*

## КЛАССИФИКАЦИЯ

Классификация, или разбиение на классы,— это процесс мышления, при котором мы в своем воображении объединяем в группы предметы, обладающие определенными признаками. Каждая такая группа называется к л а с с о м.

Классификацию можно производить тремя различными способами.

1. Представим себе, что мы собрали в одну группу все предметы, какие только существуют. Класс, образовавшийся в результате такой операции (то есть класс «предметов»), содержит в себе всю Вселенную.

2. Можно поступить иначе: взять класс всех «предметов» и выбрать из него те, которые обладают какой-нибудь особенностью, не свойственной всему классу. В этом случае говорят об о т л и ч и т е л ь н о й особенности выделенного класса. Класс всех предметов по отношению к классу предметов, обладающих определенной особенностью, является р о д о м, а класс предметов, обладающих определенной особенностью по отношению к классу всех предметов — в и д о м. Присущая более узкому классу особенность называется его в и д о в ы м о т л и ч и е м.

Поскольку весь процесс классификации производится мысленно, мы можем выполнять его независимо от того, существует ли в действительности предмет, обладающий данной особенностью, или нет. Если такой предмет существует, мы будем называть соответствующий класс р е а л ь н ы м, или н е п у с т ы м. В противном случае мы будем называть класс в о о б р а ж а е м ы м, или п у с т ы м.

Представим себе, например, что из класса всех предметов мы выбрали те, которые обладают особенностями «материальные, искусственные, состоящие из домов и улиц», образовав тем самым реальный класс «городов». В этом случае класс «предметов» можно рассматривать как *род*, класс «городов» — как *вид*, а «материальные, искусственные, сос-

7*

тоящие из домов и улиц» — как *видовое отличие* класса городов. Точно так же можно выбрать предметы, обладающие особенностями «весящие одну тонну и такие, что любой ребенок без труда может их поднять». Тогда мы построили *пустой* класс предметов, «весящих одну тонну и таких, что любой ребенок без труда может их поднять».

3. Возможен и третий вариант. Рассмотрим некоторый класс, отличный от класса всех предметов, и выберем из него те и только те элементы, которые обладают какой-нибудь особенностью, не присущей всем элементам класса. Эту особенность можно назвать отличительной особенностью образовавшегося в результате иашего отбора более узкого класса. В данном случае весь класс рассматриваемых элементов следует считать родом по отношению к более узкому классу элементов, обладающих интересующей нас особенностью. По отношению ко всему классу более узкий класс будет являться видом, а особенность, по которой мы отобрали его элементы,— его видовым отличием.

Рассмотрим, например, класс городов и вообразим, что мы отобрали из них те, которые обладают признаком «имеющие газовое освещение». Образуем из них непустой класс «городов, имеющих газовое освещение». В этом случае «все города» можно считать *родом*, «города, имеющие газовое освещение» — *видом*, а сам признак «имеющие газовое освещение» — *видовым отличием* последнего класса. Заменив в этом примере «имеющие газовое освещение» иа «вымощенные золотом», мы получили бы *пустой* класс «городов, вымощенных золотом».

Класс, содержащий лишь *один* элемент, называется единичным. Например, класс «городов с населением в 4 миллиона человек» содержит лишь *один* элемент, а именно «Лондон», и поэтому является единичным.

Таким образом, любой отдельный предмет, названный так, что его можно отличить от всех остальных предметов, вполне допустимо рассматривать как класс, содержащий один-единственный элемент. Так, «Лондон» можно рассматривать как класс, выбранный из более широкого класса «городов» и обладающий видовым отличием «имеющий население в 4 миллиона человек».

Класс, содержащий два или большее число членов, иногда полезно рассматривать как *один предмет*. При этом он может обладать особенностью, которой не обладает ни один из его элементов в отдельности. Например, класс «солдаты десятого полка», рассматриваемый как единое целое, то есть как *один предмет*, может обладать признаком «построен в каре», которым не обладает ни один из его элементов в отдельности.

## *Глава III*

## РАЗБИЕНИЕ НА ПОДКЛАССЫ

### § 1. Предварительные замечания

Разбиением называется процесс мышления, при котором мы рассматриваем некоторый класс предметов и в своем воображении делим его на два или на большее число подклассов.

Возьмем, например, класс «книг» и представим себе, что мы разбили его на два подкласса: «переплетенные книги» и «непереплетенные книги»,— или на три подкласса: «книги ценой менее одного шиллинга», «книги ценой в один шиллинг» и «книги ценой более одного шиллинга»,— или же на двадцать шесть подклассов: «книги, названия которых начинаются на букву A», «книги, названия которых начинаются на букву B» и т. д.

Класс, получающийся в результате некоторого разбиения, мы будем называть *ко-классом* относительно любого класса, полученного в результате того же разбиения. Например, класс «переплетенных книг» можно рассматривать как ко-класс относительно каждого из двух классов: «переплетенных книг» и «непереплетенных книг».

Таким образом, любой класс, возникающий в результате любого разбиения, является ко-классом по отношению к самому себе. Например, класс «переплетенных книг» по отношению к самому себе может рассматриваться как ко-класс.

### § 2. Дихотомия

Рассмотрим теперь некоторый класс. Предположим, что мы выделили из него вполне определенный подкласс. Тогда, очевидно, *дополнение* (то есть элементы всего класса, не принадлежащие выделенному подклассу) *не обладает* видовым отличием последнего. Следовательно, дополнение подкласса можно рассматривать как *другой* подкласс, видовое отличие которого получается прибавлением отрицательной частицы «не» к видовому отличию первого подкласса. Можно считать, что исходный класс состоит из двух подклассов, обладающих *противоположными* (или, как еще говорят, *контрадикторными*) видовыми отличиями. Такое разбиение называется дихотомией. Например, дихотомией является разбиение класса всех книг на два подкласса с видовыми отличиями «старые» и «нестарые».

Производя дихотомическое разбиение, мы иногда можем столкнуться со следующим обстоятельством. Интересующие нас признаки в обыденной речи могут иметь довольно расплывчатый смысл, и решить тогда, *какой* из предметов принадлежит *одному* классу и *какой другому*, бывает нелегко. В таких случаях необходимо принять *произвольное соглашение* относительно того, где кончается один класс и где начинается другой. Например, при разбиении книг на «старые» и «нестарые» мы можем условиться считать все книги, напечатанные до 1801 года, «старыми», а все остальные — «нестарыми».

Впредь при разбиении любого класса предметов на два подкласса с противоположными видовыми отличиями мы будем считать, что любое из этих отличий эквивалентно другому, взятому с отрицанием «не». Так, если «книги» разбиты на «старые» и «новые», то признак «старые» считается эквивалентным признаку «неновые», а признак «новые» — признаку «нестарые».

Разбив при *дихотомии* какой-нибудь класс на два подкласса, мы можем каждый из подклассов в свою очередь разбить на два подкласса. Повторяя этот процесс снова и снова, при каждом разбиении мы будем удваивать число подклассов. Например, подразделив книги на «старые» и «новые» (то есть «нестарые»), мы можем затем разбить каждый из подклассов на «английские» и «иностранные» (то есть «неанглийские») и получить таким образом четыре класса:

1) старые английские;
2) старые иностранные;
3) новые английские;
4) новые иностранные.

Если бы мы сначала произвели разбиение на «английские» и «иностранные», а затем — на «старые» и «новые», то получили бы следующие четыре класса:

1) английские старые;
2) английские новые;
3) иностранные старые;
4) иностранные новые.

Нетрудно заметить, что эти четыре класса совпадают с полученными при первом разбиении.

## *Глава IV*

## ИМЕНА

Слово «предмет», выражающее идею предмета *без* какой бы то ни было особенности, означает *любой* отдельный предмет. Всякое другое слово (или сочетание слов), выражающее идею предмета, *наделенного* той или иной особенностью, означает *любой* предмет, обладающий указанной особенностью, то есть означает произвольный элемент класса, по отношению к которому данная особенность является *отличительной*.

Такое слово (или сочетание слов) называется и м е н е м. Если имя означает некий предмет, то про такое имя говорят, что оно есть имя этого предмета. Например, слова «предмет», «сокровище», «город» и фразы «ценный предмет», «материальный искусственный предмет, состоящий из домов и улиц», «город с газовым освещением», «город, вымощенный золотом», «старые английские книги» суть имена предметов.

Подобно тому как класс называется *непустым* или *пустым* в зависимости от того, содержит ли он какие-то элементы или нет, имена также подразделяются на *непустые* и *пустые* в зависимости от того, существуют ли в действительности или нет те предметы, которые эти имена означают. Например, «город с газовым освещением» — *непустое* имя, «город, вымощенный золотом» — *пустое* имя.

Каждое имя выражается либо одним существительным, либо сочетанием слов, состоящим из существительного и одного или нескольких определений (или фраз, играющих роль определений).

Всякое имя, за исключением имени «предмет», обычно можно выразить в трех различных формах:

а) существительного «предмет» и одного или нескольких определений (или сочетаний слов, играющих роль определений), выражающих идеи признаков;

б) существительного, выражающего идею предмета, которому присущи некоторые признаки, и одного или нескольких определений (или сочетаний слов, используемых в качестве определений), выражающих идеи других признаков;

в) существительного, выражающего идею предмета, наделенного *всеми* признаками.

Так, фраза «Материальные живые предметы, принадлежащие к животному миру и имеющие две руки и две ноги» есть имя, выраженное в форме «а». Объединив существительное «предметы» с определениями «материальные, живые, принадлежащие к животному миру» в новом существительном «животные», мы получим фразу «животные, имеющие две руки и две ноги», которая представляет собой имя, означающее тот же предмет, что и раньше, но записанное в форме «б». Наконец, если всю фразу объединить в одно слово и ввести новое существительное «человек», то получится имя, выражающее то же, что и в первом и во втором случаях, но представленное в форме «в».

Имя, выражаемое существительными во *множественном* числе, может означать либо

1) элементы класса, *рассматриваемые как отдельные предметы*, либо

2) весь класс в целом, *рассматриваемый как один предмет*.

Например, когда я говорю: «Некоторые солдаты десятого полка высокого роста» или «Солдаты десятого полка известны своей храбростью», я употребляю имя «солдаты десятого полка» *в первом смысле*, то есть так, как если бы я указывал на каждого из них *в отдельности* и говорил: «Этот солдат десятого полка высокого роста», «Тот солдат десятого полка известен своей храбростью» и т. д. Когда же я говорю: «Солдаты десятого полка построены в каре», то я употребляю эту фразу *во втором смысле*. Точно так же я мог бы сказать: «*Десятый полк* построен в каре».

## *Глава V*

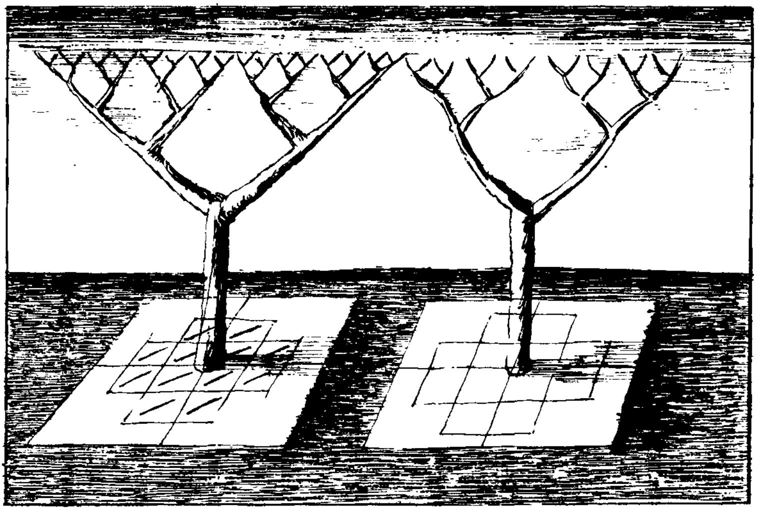
## ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Ясно, что каждый член любого *вида* есть *в то же время* член того *рода*, из которого мы выделили данный вид, и, следовательно, обладает *видовым отличием*, присущим данному виду. Таким образом, каждый член любого вида может быть назван именем, состоящим из двух частей: одна часть означает имя члена того *рода*, которому принадлежит данный вид, вторая — его *видовое отличие*. Такое имя называется определением (дефиницией) членов данного вида. Дать такое имя — значит определить любой член рассматриваемого вида. Например, «сокровище» можно определить как «ценная вещь». В этом случае «вещь» следует считать *родом*, а «ценная» — *видовым отличием*.

Читатель может самостоятельно поупражняться в придумывании определений. Для этого достаточно взять имя любого, часто встречающегося предмета (например, «дом», «дерево», «нож»), попытаться определить его, а затем проверить свой ответ по толковому словарю.

# *Книга II*

# СУЖДЕНИЯ



## *Глава I*

## ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СУЖДЕНИЯХ

### § 1. Предварительные замечания

Слово «некоторые» всюду будет употребляться в смысле «один (одна, одно) или несколько».

Слово «суждение» в обычной речи означает *любое* слово (или сочетание слов), несущее в себе какую-то информацию (и не отличается от слов «предложение», «высказывание»). Например, слово «да» и «нет», так же как и сочетания слов «Вы должны мне пять фартингов!», «Ничего подобного!», являются суждениями в обычном смысле. Такие слова, как «Ой!», «Никогда!» и такие словосочетания, как «Принеси-ка мне ту книгу», «Какую книгу ты имеешь в виду?», на первый взгляд не несут в себе никакой информации, однако нетрудно преобразовать их в эквивалентную форму, уже содержащую определенную *информацию*, например «Я очень удивилась», «Я никогда не соглашусь с этим», «Приказываю тебе принести ту книгу», «Я хочу знать, какую книгу ты имеешь в виду».

Однако суждения, о которых пойдет речь в первой части «Символической логики», имеют особую форму. Мы будем называть ее нормальной формой суждений. Если какое-нибудь суждение, необходимое нам в процессе доказательства, еще не имеет нормальной формы, то его необходимо привести к нормальной форме, прежде чем мы сможем им воспользоваться.

Суждение, приведенное к нормальной форме, утверждает относительно двух классов, называемых субъектом суждения и предикатом суждения, либо

1) что *некоторые* элементы субъекта являются элементами предиката; либо

2) что *ни один* элемент субъекта не является элементом предиката; либо

3) что *все* элементы субъекта являются элементами предиката.

Субъект и предикат суждения называются его терминами.

Два суждения, содержащие *одну и ту же* информацию, называются эквивалентными. Так, эквивалентны суждения «Я вижу Джона» и «Джон видим мной».

## § 2. Нормальная форма суждения

Суждение, приведенное к нормальной форме, состоит из четырех частей, а именно:

1) сло́ва «некоторые», либо словосочетания «ни один (одна, одно)», либо сло́ва «все» (эти слова говорят нам, *сколько* элементов субъекта являются элементами предиката, и называются знаком количества);

2) имени субъекта;

3) глагола «суть» (или «есть»), который называется связкой;

4) имени предиката.

## § 3. Различные типы суждений

Суждение, которое начинается со слова «некоторые», называется частным. Его принято обозначать буквой

I*. Частным это суждение называется потому, что относится не ко всему субъекту, а лишь к его *части*.

Суждение, которое начинается со слов «ни один (одна, одно)», называется общеотрицательным суждением. Его принято обозначать буквой Е.

Суждение, которое начинается со слова «все», называется общеутвердительным суждением. Его принято обозначать буквой А.

Общими последние два суждения называются потому, что они относятся ко *всему* своему субъекту. Суждение, субъект которого является *единичным* классом, также следует считать *общим*. Рассмотрим, например, суждение «Джон болен». Из него, разумеется, следует, что существует *индивидуум*, которого имеет в виду говорящий, называя его именем «Джон», и что все слушатели *знают*, кого говорящий имеет в виду. Следовательно, класс всех «людей, которых имеет в виду говорящий, когда произносит имя «Джон», состоит лишь из одного элемента. Таким образом, суждение «Джон болеи» эквивалентно суждению «*Все* люди, которых говорящий имеет в виду, когда он произносит имя «Джон», больны».

Суждения бывают двух видов: суждения существования и суждения отношения.

## *Глава II*

## СУЖДЕНИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Суждение существования (или экзистенциальное суждение) в нормальной форме имеет в качестве субъекта класс «реально существующих предметов».

Знаком количества в суждении существования служат слова «некоторые» или «ни один (одна, одно)». Хотя знак количества в суждении существования и говорит нам, *сколько* реально существующих предметов являются элементами его предиката, он не сообщает нам их точное число. По существу знак количества принимает здесь лишь *два* значения (мы приводим их в порядке возрастания): «0» и «1 или больше».

* В традиционной логике буквой I принято обозначать лишь частиоутвердительные суждения. Частноотрицательные суждения обозиачают буквой О.— *Прим. перев.*

Суждение называется суждением существования потому, что в нем содержится утверждение *о реальности* (то есть *реальном существовании*) или *нереальности, вымышленности*, его предиката. Например, суждение «Некоторые существующие предметы — честные люди» утверждает, что класс «честных людей» реален, то есть непуст. Это суждение имеет *нормальную* форму, но может быть также выражено в любой из следующих форм:

1) Честные люди существуют.
2) Некоторые честные люди существуют.
3) Класс «честные люди» существует (непуст).
4) Есть честные люди.
5) Есть некоторые честные люди.

Аналогично суждение «Ни один реально существующий предмет не есть человек ростом в 50 футов» утверждает, что класс «людей ростом в 50 футов» пуст, *нереален*. Это суждение также имеет *нормальную* форму, но может быть выражено в любой из следующих форм:

1) Людей ростом в 50 футов не существует.
2) Не существует ни одного человека ростом в 50 футов.
3) Класс «люди ростом в 50 футов» не существует (пуст).
4) Нет ни одного человека ростом в 50 футов.
5) Нет людей ростом в 50 футов.

## *Глава III*

## СУЖДЕНИЯ ОТНОШЕНИЯ

### § 1. Предварительные замечания

Суждение отношения рассматриваемого нами типа имеет в качестве терминов два вида одного и того же рода. Имя каждого из этих видов выражает идею некоторого признака, отсутствующую в имени другого вида.

Например, суждение «Некоторые купцы — скупцы» относится к числу суждений именно такого типа. Действительно, и «купцы», и «скупцы» являются видами одного и того же рода «люди». Имя «купцы» выражает идею признака «занимающиеся куплей-продажей», имя «скупцы» — идею признака «скупые», и идея признака, выражаемая именем одного вида, отсутствует в имени другого.

Суждение же «Некоторые собаки — сеттеры» не принадлежит к числу суждений отношения нужного типа, потому что, хотя «собаки» и «сеттеры» являются видами одного и того же рода «животных», не существует такого признака, идея которого содержалась бы в имени «сеттеры» и не содержалась в имени «собаки».

Род, которому принадлежат оба вида, называется «в с е л е н н о й р а с с м о т р е н и я», или просто «в с е л е н н о й». Знаком количества в этом случае могут быть слова «некоторые», «ни одного (одна, одно)» или «все». Хотя знак количества говорит нам, *сколько* элементов субъекта суждения отношения являются в *то же время* элементами предиката, он не сообщает нам *точное* число таких элементов. Знак количества в суждении отношения по существу принимает лишь *три* значения (приводим их в порядке возрастания): «0», «1 или несколько» и «число всех элементов субъекта».

Название «суждение отношения» рассматриваемый тип суждений получил потому, что в нем утверждается существование *некоторого отношения* между терминами суждения.

## § 2. Приведение суждения отношения к нормальной форме

Чтобы привести суждение отношения к нормальной форме, необходимо произвести следующие действия.

1. Установить, что является *субъектом суждения* (то есть установить, *о каком классе идет речь*).

2. Если глагол, управляемый субъектом, отличается от глагола «суть» (или «есть»), то заменить его сочетанием слов, начинающимся с «суть» (или «есть»).

3. Установить, что является *предикатом суждения* (то есть установить, о каком классе утверждается, что он содержит *«некоторые»*, *«все»* или не содержит *ни одного* элемента субъекта).

4. Если имя каждого термина *выражено полностью* (то есть если оно содержит существительное), то определять «Вселенную» нет необходимости. Если же хотя бы одно из имен выражено *не полностью* и содержит лишь признаки, то необходимо определить «Вселенную», чтобы затем подставить ее имя в качестве существительного.

5. Установить знак количества.

6. Полученные сведения расположить в следующем порядке:

знак количества,
субъект,
связка,
предикат.

Рассмотрим эти правила на примерах.

I

*Некоторые яблоки неспелые.*

1) Субъект суждения — «яблоки».

2) Глагол (подразумевается) — «суть».

3) Предикат — «неспелые...» (Поскольку существительное не указано и мы не решили, с какой «Вселенной» нам предстоить иметь дело, приходится оставлять пробел.)

4) Пусть «Вселенной» будет класс «фрукты».

5) Знак количества — «некоторые».

6) Суждение принимает форму
*Некоторые | яблоки | суть | неспелые фрукты.*

II

*Счастлив человек, не знающий, что такое зубная боль.*

1) Субъект, очевидно, это «человек, не знающий и т. д.». (Обратите внимание, что в этом предложении сначала идет предикат.) На первый взгляд субъект кажется *единичным*, но при более глубоком рассмотрении мы убеждаемся в ином: единственное число вовсе не означает, что существует только *один* такой человек. Следовательно, сочетание слов «человек, не знающий и т. д.» эквивалентно сочетанию «все люди, не знающие...»

2) Глагол здесь опущен. Вводим связку «суть».

3) Предикат — «счастливые ...»

4) Вселенная» — «люди».

5) Знак количества — «все».

6) Суждение принимает форму
*Все | люди, не знающие, что такое зубная боль, | суть | счастливые люди.*

## § 3. Суждение, начинающееся со слова «все», как двойное суждение

Как мы уже знаем, суждение отношения, начинающееся со слова «все», утверждает, что «*Все* элементы субъекта являются элементами предиката». В этом утверждении как часть того, что оно нам сообщает, содержится более узкое суждение: «*Некоторые* элементы субьекта являются элементами предиката». Например, ясно, что суждение «*Все* банкиры — богатые люди» содержит в себе более узкое суждение «*Некоторые* банкиры — богатые люди».

Возникает вопрос: какова *остальная* часть информации, передаваемой нам этим суждением? Чтобы ответить на него, рассмотрим сначала более узкое суждение «*Некоторые* элементы субъекта являются элементами предиката». Предположим, что никакими другими сведениями мы не располагаем. Спрашивается, что еще нам необходимо знать, чтобы мы могли высказать суждение «*Все* элементы субъекта являются элементами предиката». Предположим, например, что суждением «*Некоторые* банкиры — богатые люди» исчерпывается вся имеющаяся в нашем распоряжении информация. Мы можем спросить себя о том, какое *еще* суждение необходимо *добавить* к первому, чтобы в итоге получить суждение «*Все* банкиры — богатые люди».

Пусть «Вселенная» (то есть род, видами которого являются субъект и предикат) с помощью *дихотомии* разделена на два подкласса, а именно:

1) предикат;

2) класс, видовое отличие которого *противоположно* (*контрадикторно*) видовому отличию предиката.

Например, можно считать, что род «люди», видами которого являются и «банкиры», и «богатые люди», разделен на два подкласса: «богатые люди» и «бедные люди».

Нам известно, что *каждый* элемент субъекта является (как было показано на стр. 200) элементом «Вселенной». Следовательно, *каждый* элемент субъекта принадлежит либо классу 1, либо классу 2. Так, нам известно, что *каждый* банкир есть элемент рода «людей». Следовательно, *каждый* банкир принадлежит либо классу «богатых людей», либо классу «бедных людей».

Итак, мы установили, что в рассматриваемом случае некоторые элементы субъекта приинадлежат классу 1. Что *еще* необходимо знать, чтобы утверждать, что классу 1 принадлежат все элементы субъекта? Очевидно, что *ни один* из них не принадлежит классу 2, то есть что ни один из них не принадлежит классу, видовое отличие которого *противоположно* видовому отличию предиката. Пусть, например, нам известно, что *некоторые* банкиры принадлежат классу «богатых людей». Какие еще сведения необходимы нам для того, чтобы распространить это утверждение *на всех* банкиров? Очевидно, следующие: мы должны быть уверенными в том, что *ни один* из банкиров не принадлежит классу «*бедных* людей».

Таким образом, суждение отношения, начинающееся со слова «все», есть *двойное* отношение: оно эквивалентно *двум* суждениям (то есть несет в себе ту же информацию, что и они):

1) «*Некоторые* элементы субъекта являются элементами предиката».

2) «*Ни один* элемент субъекта не есть элемент класса, видовое отличие которого *противоположно* видовому отличию предиката».

Например, суждение «*Все* банкиры — богатые люди» есть *двойное* суждение, эквивалентное следующим *двум* суждениям:

1) «*Некоторые* банкиры — богатые люди».

2) «*Ни один* банкир не (есть) *бедный* человек».

## § 4. Какое заключение следует из суждения отношения относительно реальности его терминов?

Прежде всего отметим, что излагаемые ниже правила *произвольны* и применимы лишь к настоящей книге.

Условимся впредь считать, что суждение отношения, начинающееся со слова «некоторые», утверждает *реальное существование* предметов, которые, будучи элементами субъекта, в то же время являются элементами предиката. Иначе говоря, мы будем интерпретировать суждение отношения, начинающееся со слова «некоторые», как утверждение о том, что *некоторые реально существующие предметы* являются *одновременно* элементами *обоих* терминов суждения. Отсюда следует, что и *каждый* термин такого суждения, взятый в отдельности, реален (непуст).

Суждение отношения, начинающееся со слов «ни один (одна, одно)», впредь следует понимать как утверждение о том, что *ни один реально существующий предмет*, принадлежащий классу-субъекту, не является элементом предиката, то есть что *ни один реально существующий предмет* не является *одновременно* элементом *обоих* терминов суждения. Из такого утверждения нельзя вывести никакого заключения относительно *реальности* каждого из терминов в отдельности. Например, суждение «Ни одна русалка не модистка» следует понимать в том смысле, что *ни один реально существующий предмет* не является «русалкой-модисткой». Однако из него не следует никаких заключений относительно *реальности* или *нереальности* каждого из двух классов «русалок» и «модисток» в отдельности. В данном случае субъект — *пустой* (нереальный) класс, а предикат — *непустой* (реальный) класс.

Суждение отношения, начинающееся со слова «все», содержит (см. § 3) аналогичное суждение, начинающееся со слова «некоторые». Следовательно, его необходимо понимать как суждение, утверждающее *реальность каждого* из своих терминов в отдельности. Например, суждение «Все гиены — свирепые животные» содержит суждение «Некоторые гиены — свирепые животные». Таким образом, из него следует, что *каждый* из двух классов — «гиен» и «свирепых животных» — в отдельности *реален* (то есть *непуст*).

## § 5. Перевод суждения отношения в одно или несколько суждений существования

Суждение отношения, начинающееся со слова «некоторые», утверждает, как мы видели, что *некоторые реально существующие предметы*, принадлежат субъекту суждения, являются в то же время элементами предиката. Следовательно, суждение отношения, начинающееся со слова «некоторые», утверждает, что *некоторые реально существующие предметы* являются одновременно элементами субъекта и предиката, то есть что некоторые реально существующие предметы являются элементами класса предметов, обладающих *всеми* признаками субъекта и предиката.

Таким образом, чтобы перевести суждение отношения в суждение существования, необходимо «*реально существующие предметы*» взять в качестве *нового субъекта*, а предметы, обладающие *всеми* признаками субъекта и предиката,— в качестве *нового предиката.*

Аналогичным образом происходит перевод суждения отношения, начинающегося со слов «ни один (одна, одно)».

Суждение отношения, начинающееся со слова «все» (как показано в § 3), эквивалентно *двум* суждениям: одному — начинающемуся со слова «некоторые», другому — начинающемуся со слов «ни один». Как переводится в суждение существования каждое из этих соотношений, мы уже знаем.

Проиллюстрируем наши правила на примерах.

I

*Некоторые яблоки неспелые.*

Элементы суждения существования расположены в следующем порядке:

«некоторые» — знак количества,

«реально существующие предметы» — субъект,

«суть» — связка,

«неспелые яблоки» — предикат, то есть

*Некоторые | реально существующие предметы | суть | неспелые яблоки.*

II

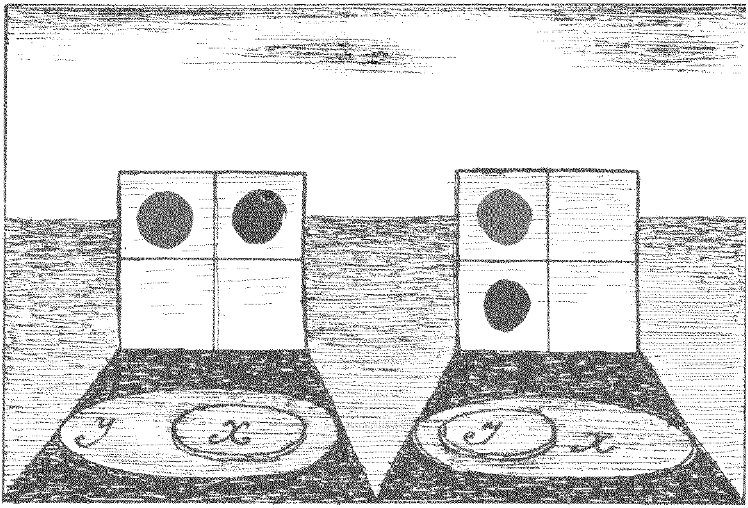
*Ни один ягненок не имеет обыкновения курить сигары.*

После перевода:

*Ни один | реально существующий предмет | не есть | ягненок, имеющий обыкновение курить сигары.*

# *Книга III*

# ДВУХБУКВЕННАЯ ДИАГРАММА




## *Глава I*

## СИМВОЛЫ И КЛЕТКИ

Во-первых, предположим, что изображенная ниже диаграмма служит «вместилищем» для определенного класса предметов, который мы избрали «Вселенной рассмотрения», или, более кратко, просто «Вселенной».

| | |
|---|---|
| $xy$ | $xy'$ |
| $x'y$ | $x'y'$ |

Во-вторых, предположим, что мы выделили некоторую *особенность* (ее можно обозначить буквой $x$) и разделили весь класс предметов, для которых предназначена диаграмма, на два меньших подкласса с видовыми отличиями $x$ и не-$x$ (последнее можно обозначить $x'$). Условимся считать, что *северная* половина диаграммы отведена одному подклассу (который мы будем называть «классом $x$-предметов», или «$x$-классом»), а *южная* половина — другому (его мы будем называть «классом $x'$-предметов», или «$x'$-классом»). Пусть, например, $x$ означает «старые», тогда $x'$ означает «новые». Разделим все книги на два класса с видовыми отличиями «старые» и «новые» и отведем для «*старых* книг» *северную* половину диаграммы, а для «*новых*» — *южную.*

В-третьих, предположим, что мы выбрали другую особенность (обозначим ее буквой $y$), разбили $x$-класс на два подкласса с видовыми отличиями $y$ и $y'$ и отвели для одного из подклассов (его мы будем называть «$xy$-классом») северо-*западную* клетку, а для другого (его естествеино назвать «$xy$-классом») — северо-*восточную* клетку. Например, можно условиться, что $y$ означает «английские». Тогда $y'$ будет означать «иностранные (неанглийские)». Подразделим все «старые книги» на два класса с видовыми отличиями «английские» и «иностранные» и отведем северо-*западную* клетку для «старых *английских* книг», а северо-*восточную* клетку — для «старых *иностранных* книг».

В-четвертых, предположим, что мы точно таким же образом разбили $x'$-класс и отвели юго-*западную* клетку для $x'y$-класса и юго-*восточную* — для $x'y'$-класса. Например, можно предположить, что мы разбили «новые книги» на два класса — «новые *английские* книги» и «иовые *иностранные* книги» — и отвели юго-*западную* клетку для первого из них и юго-*восточную* — для второго.

Ясно, что если бы мы начали с разбиения всего класса на $y$- и $y'$-классы, а затем перешли к разбиению по признакам $x$ и $x'$, то в результате получились бы *те же* четыре класса. Следовательно, вся *западная* половина диаграммы отводится $y$-классу, а вся *восточная* — $y'$-классу. Так, при рассмотрении предыдущего примера мы обнаружили бы, что вся *западная* половина диаграммы отведена «английским книгам», а вся *восточная* — «иностранным книгам».

Четыре различных класса книг распределились бы по четырем клеткам диаграммы следующим образом:

| | |
|---|---|
| Старые английские книги | Старые иностранные книги |
| Новые английские книги | Новые иностранные книги |

Читатель не должен упускать из виду, что, говоря об «$x$-предметах», мы понимаем «предметы» в смысле той *особой разновидности* предметов, для которой предназначена вся диаграмма. Например, если мы говорим: «Пусть Вселенной будут книги», то понимать это нужно в том смысле, что вся наша диаграмма содержит только книги. Если $x$ означает в этом случае «старые», то выражение «$x$-предметы» будет означать «старые книги».

Не следует переходить к следующей главе до тех пор, пока вы не научитесь, *не задумываясь*, называть особенность, приписанную любой из клеток, перечисленных в правом столбце таблицы 1.

ТАБЛИЦА 1

| Особенности классов | Соответствующие классам клетки или части диаграммы |
|---|---|
| $x$ | Северная половина диаграммы |
| $x'$ | Южная половиниа диаграммы |
| $y$ | Западная половина диаграммы |
| $y'$ | Восточная половина диаграммы |
| $xy$ | Северо-западная клетка |
| $xy'$ | Северо-восточная клетка |
| $x'y$ | Юго-западная клетка |
| $x'y'$ | Юго-восточная клетка |

Столь же необходимо уметь, *не задумываясь*, называть клетки, соответствующие особенностям, перечисленным в левом столбце той же таблицы.

Если вам захочется проверить, насколько прочно вы все усвоили, то лучше всего передать книгу в руки вашего «гениального» друга и, оставив себе лишь пустую диаграмму, попросить его «*погонять*» вас по таблице. Чем более хитрую тактику изберет ваш гениальный друг, тем лучше. Вопросы и ответы должны быть примерно такими:

*Вопрос*. Каким признаком обладает западная половина?

*Ответ*. $Y$.

*Вопрос*. Часть доски для $xy'$?

*Ответ*. Северо-восточная клетка.

*Вопрос.* Каким признаком обладает юго-западная клетка?

*Ответ.* $x'y$

и т. д., и т. п.

Попрактиковавшись немного, вы сможете отвечать на вопросы вашего гениального друга, не прибегая к помощи пустой диаграммы, поскольку научитесь видеть ее *мысленно* («своим мысленным взором, Горацио!»). Достигнув *этого* уровня, вы можете спокойно приступать к чтению следующей главы.

## *Глава II*

## ФИШКИ

Условимся считать, что красная фишка, поставленная на любую клетку, означает: «Эта клетка *занята*» (то есть «В этой клетке имеется по крайней мере один предмет»). Условимся также, что *красная* фишка, стоящая на границе между двумя клетками, означает: «Половина диаграммы, образуемая этими двумя клетками, занята, но какая именно из двух клеток занята — неизвестно». Следовательно, красную фишку, стоящую на границе между двумя клетками, можно интерпретировать так: «По крайней мере одна из этих двух клеток занята, но возможно, что заняты обе клетки». Наши остроумные американские кузины говорят о человеке, который не знает, в какую из двух политических партий ему вступить, что он «с и д и т н а с т е н к е». Это выражение как нельзя лучше подходит к такой позиции красной фишки.

Наконец, условимся считать, что *черная* фишка, стоящая на клетке, означает: «Эта клетка *пуста*» (то есть «В этой клетке *ничего нет*»).

Рекомендуем читателю обзавестись 4 красными и 5 черными фишками.

## *Глава III*

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СУЖДЕНИЙ НА ДИАГРАММЕ

### § 1. Предварительные замечания

Впредь, формулируя такие суждения, как «Некоторые $x$-предметы существуют» или «Ни один $x$-предмет не существует», я буду опускать слово «предметы» (читатель при желании может его подставить сам) и записать их так: «Некоторые $x$ существуют» или «Ни один $x$ не существует». Замечу еще раз, что слово «предметы» употребляется здесь в особом смысле, подробное разъяснение которого дано на стр. 214.

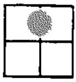
Суждение, содержащее *лишь одну* из букв, используемых в качестве символов различных признаков, называется однобуквенным. Таковы, например, суждения «Некоторые $x$ существуют», «Ни один $y'$ не существует» и т. д.

Суждение, содержащее две буквы, называется двухбуквенным. Таковы, например, суждения «Некоторые $xy'$ существуют», «Ни один $x$ не есть $y$» и т. д.

О суждении говорят, что оно записано в терминах входящих в него букв независимо от того, имеют ли эти буквы штрих или нет. Например, о суждениях «Некоторые $xy'$ существуют», «Ни один $x'$ не есть $y$» и т. д. можно сказать, что они записаны *в терминах* $x$ и $y$.

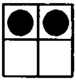
## § 2. Представление суждений существования на диаграмме

Прежде всего рассмотрим суждение «Некоторые $x$ существуют». Обратите внимание, что это суждение (как мы уже объясняли на стр. 205) эквивалентно суждению «Некоторые реально существующие предметы суть $x$-предметы». Оно утверждает, что в северной половине диаграммы находится по крайней мере *один* предмет, то есть что северная половина диаграммы занята. На диаграмме мы можем изобразить эту ситуацию, поставив *красную* фишку на границу между двумя клетками, образующими северную половину диаграммы.



В примере с книгами такое положение красной фишки означало бы: «Некоторые старые книги существуют».

Рассмотрим далее суждение «Ни один $x$ не существует». Оно говорит нам, что в северной половине диаграммы *ничего нет*, то есть что северная половина диаграммы *пуста*, или что обе клетки — северо-западная и северо-восточная,— образующие северную половину диаграммы, *пусты*. Следовательно, это суждение на диаграмме мы можем изобразить, поставив по черной фишке на северо-западную и северо-восточную клетки:

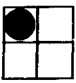


Читатель, может быть, думает, что достаточно было бы поставить *одну черную* фишку на границу между клетками, образующими северную половину диаграммы, рассуждая, по-видимому, так: «Раз *красная* фишка, «сидящая на стенке», означает «Эта половина диаграммы занята», то почему бы черной фишке, «сидящей на стенке», не означать «Эта половина диаграммы пуста»?» Такое рассуждение неверно. Мы видели, что *красная* фишка, поставленная на границу между двумя клетками, означает: «По крайней мере *одна* из этих двух клеток *занята*, возможно, что заняты обе клетки». Следовательно, черная фишка означала бы: «По крайней мере одна из этих двух клеток *пуста*, возможно, что пусты *обе* клетки». Мы же хотим изобразить на диаграмме ситуацию, когда обе клетки *заведомо пусты*, а это можно сделать, лишь поставив *по одной черной* фишке на *каждую* из клеток. В примере с книгами пустая северная половина диаграммы означала бы: «Ни одна старая книга не существует».

Рассмотрим далее суждение «Некоторые *xy* существуют». В нем утверждается, что в северо-западной клетке имеется по крайней мере *один* предмет, то есть что северо-западная клетка *занята.* Эту ситуацию мы изобразим, поставив на северо-западную клетку красную фишку:

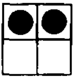
В примере с книгами суждению «Некоторые *xy* существуют» соответствует суждение «Некоторые старые английские книги существуют».

Рассмотрим далее суждение «Ни один *xy* не существует». В нем утверждается, что в северо-западной клетке *ничего* нет, то есть что северо-западная клетка *пуста.* Эту ситуацию на диаграмме мы можем изобразить, поставив на северо-западную клетку *черную* фишку:



В примере с книгами суждение «Ни один *xy* не существует» имеет вид суждения «Ни одна старая английская книга не существует».

Мы видели, что суждение «Ни один *x* не существует» можно изобразить на диаграмме, поставив на ее северную половину *две* черные фишки: по одной на каждую клетку.



Мы также видели, что эти две черные фишки, если рассматривать их *порознь*, означают *два* суждения: «Ни один *xy* не существует» и «Ни один *xy'* не существует».

Следовательно, суждение «Ни один *x* не существует» — *двойное* и эквивалентно *двум* следующим суждениям: «Ни один *xy* не существует» и «Ни один *xy'* не существует». В примере с книгами суждение «Ни один *x* не существует» означало бы «Ни одна старая книга не существует».

Из сказанного следует, что последнее суждение принадлежит к числу *двойных* суждений и эквивалентно *двум* следующим: «Ни одна старая *английская* книга не существует» и «Ни одна старая *иностранная* книга не существует».

### § 3. Представление суждений отношения на диаграмме

Начнем с суждения «Некоторые *x* суть *y*». Оно утверждает, что по крайней мере *один* предмет, находящийся на *северной* половине диаграммы, находится одновременно и на *западной* половине. Следовательно, он должен находиться на территории, принадлежащей одновременно и северной, и западной половинам, то есть на *северо-западной клетке*. Отсюда мы заключаем, что северо-западная клетка *занята*. На диаграмме эту ситуацию можно изобразить, поставив на северо-западную клетку *красную* фишку:

Обратите внимание на то, что *субъект* суждения указывает, какой из двух половин диаграммы мы можем воспользоваться, а *предикат* суждения — на какую клетку (то есть на какую часть) рассматриваемой половины мы должны поставить красную фишку. В примере с книгами суждение «Некоторые *x* суть *y*» имеет вид «Некоторые старые книги английские».

Рассмотрим далее суждение «Некоторые *y* суть *x*». В нем утверждается, что по крайней мере *один* предмет, находящийся на *западной* половине диаграммы, находится также и на ее *северной* половине. Следовательно, он должен лежать в клетке, *общей* для той и другой половины, то есть в *северо-западной* клетке. Эту ситуацию мы можем изобразить на диаграмме, поставив на северо-западную клетку *красную* фишку:

В примерах с книгами это суждение имело бы вид: «Некоторые английские книги старые».

Итак, мы видим, что одна диаграмма

позволяет представить не менее трех суждений, а именно:

1) «Некоторые *xy* существуют»,
2) «Некоторые *x* суть *y*»,
3) «Некоторые *y* суть *x*».

Следовательно, эти три суждения эквивалентны.

В примере с книгами тремя перечисленными суждениями являются суждения:

1) «Некоторые старые английские книги «существуют»,
2) «Некоторые старые книги английские»,
3) «Некоторые английские книги старые».

Два эквивалентных суждения «Некоторые *x* суть *y*» и «Некоторые *y* суть *x*» называются **обратными**, а переход от одного из них к другому — **обращением суждения**.

Предположим, что нам необходимо обратить суждение «Некоторые яблоки неспелые». Прежде всего необходимо выбрать «Вселенную» (пусть ею будут, например, «фрукты») и дополнить суждение, введя существительное «фрукты» в предикат, после чего оно примет вид: «Некоторые яблоки — (суть) неспелые фрукты». Затем мы должны обратить суждение, поменяв местами его термины. В результате получится суждение «Некоторые неспелые фрукты — яблоки».

Аналогично можно представить на диаграмме три «трио» эквивалентных суждений. Полный набор из *четырех* трио имеет следующий вид:

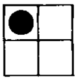
1) «Некоторые $xy$ существуют» = «Некоторые $x$ суть $y$» = «Некоторые $y$ суть $x$»,

2) «Некоторые $xy'$ существуют» = «Некоторые $x$ суть $y'$» = «Некоторые $y'$ суть $x$»,

3) «Некоторые $x'y$ существуют» = «Некоторые $x'$ суть $y$» = «Некоторые $y$ суть $x'$»,

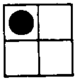
4) «Некоторые $x'y'$ существуют» = «Некоторые $x'$ суть $y'$» = «Некоторые $y'$ суть $x'$».

Рассмотрим далее суждение «Ни один $x$ не есть $y$». В нем утверждается, что ни один предмет, находящийся на *северной* половине, не находится в то же время на *западной* половине. Следовательно, в клетке, принадлежащей *одновременно* северной и западной половинам диаграммы, то есть в *северо-западной* клетке, нет ничего. То же самое можно выразить иначе, сказав, что северо-западная клетка *пуста*. Эту ситуацию мы можем изобразить, поставив на северо-западную клетку *черную* фишку:



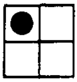
В нашем излюбленном примере с книгами суждение «Ни один $x$ не есть $y$» звучит так: «Ни одна старая книга не английская».

Рассмотрим теперь суждение «Ни один $y$ не есть $x$». В нем утверждается, что ни один предмет, находящийся на *западной* половине диаграммы, не находится одновременно на *северной* ее половине. Следовательно, в клетке, принадлежащей одновременно северной и западной половинам, ничего нет, эта клетка *пуста*. Эту ситуацию мы можем изобразить, поставив на северо-западную клетку *черную* фишку:



В «книжном» примере суждению «Ни один $y$ не есть $x$» отвечает суждение «Ни одна английская книга не старая».

Мы видим, что *одна* диаграмма



позволяет представить не менее *трех* суждений, а именно:

1) «Ни один $xy$ не существует»,
2) «Ни один $x$ не есть $y$»,
3) «Ни один $y$ не есть $x$».

Следовательно, *эти* три суждения эквивалентны.

В уже знакомом примере с книгами такими тремя суждениями будут:

1) «Ни одна старая английская книга не существует»,
2) «Ни одна старая книга не английская»,
3) «Ни одна английская книга не старая».

Два эквивалентных суждения — «Ни один $x$ не есть $y$» и «Ни один $y$ не есть $x$» — называются *обратными.*

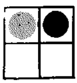
Предположим, что нам необходимо обратить суждение «Ни один дикобраз не разговорчив». Выбрав «Вселенную» (например, «животные»), пополним суждение — добавим существительное «животные» в предикат, в результате чего получится суждение «Ни один дикобраз не есть разговорчивое животное». Обратим это суждение, поменяв местами его термины. Обращенное суждение будет иметь вид: «Ни одно разговорчивое животное не есть дикобраз».

Аналогичным образом можно представить на диаграмме и три родственных трио эквивалентных суждений. Полный набор из четырех трио имеет следующий вид:

1) «Ни один $xy$ не существует» = «Ни один $x$ не есть $y$» = «Ни один $y$ не есть $x$»,
2) «Ни один $xy'$ не существует» = «Ни один $x$ не есть $y'$» = «Ни один $y'$ не есть $x$»,
3) «Ни один $x'y$ не существует» = «Ни один $x'$ не есть $y$» = «Ни один $y$ не есть $x'$»,
4) «Ни один $x'y'$ не существует» = «Ни один $x'$ не есть $y'$» = «Ни один $y'$ не есть $x'$».

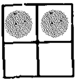
Рассмотрим далее суждение «Все $x$ суть $y$».

Мы знаем (см. стр. 209), что это — *двойное* суждение, эквивалентное *двум* суждениям: «Некоторые $x$ суть $y$» и «Ни один $x$ не есть $y'$». Как представить каждое из них иа диаграмме, нам уже известно:



Обратите внимание на то, что в данном суждении *субъект* суждения решает, *какой из половин* диаграммы мы должны воспользоваться, а *предикат* суждения уточняет, на *какую из клеток* выбранной половины надлежит поставить красную фишку.

Рассмотрим, наконец, двойное суждение «Некоторые $x$ суть $y$, и некоторые $x$ суть $y'$». Как представить на диаграмме каждую его часть, нам уже известно. В результате мы получаем диаграмму



Читателю вновь придется обратиться к своему гениальному другу, чтобы тот с пристрастием допросил его по таблицам II и III.

ТАБЛИЦА II

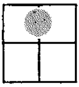
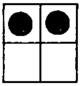
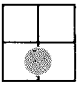
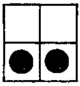
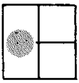
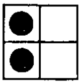
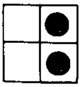
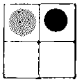
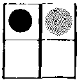
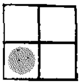
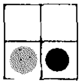
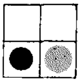
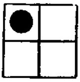
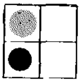
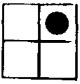
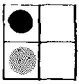
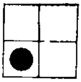
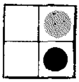
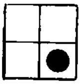
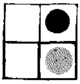
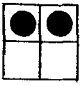
| | | | |
|---|---|---|---|
| Некоторые $x$ существуют |  | Ни один $x$ не существует |  |
| Некоторые $x'$ существуют |  | Ни один $x'$ не существует |  |
| Некоторые $y$ существуют |  | Ни один $y$ не существует |  |
| Некоторые $y'$ существуют |  | Ни один $y'$ не существует |  |

ТАБЛИЦА III

| | | | |
|---|---|---|---|
| Некоторые $xy$ существуют =<br>= Некоторые $x$ суть $y$ =<br>= Некоторые $y$ суть $x$ |  | Все $x$ суть $y$ |  |
| Некоторые $xy'$ существуют=<br>= Некоторые $x$ суть $y'$ =<br>= Некоторые $y'$ суть $x$ |  | Все $x$ суть $y'$ |  |
| Некоторые $x'y$ существуют=<br>= Некоторые $x'$ суть $y$ =<br>= Некоторые $y$ суть $x'$ |  | Все $x'$ суть $y$ |  |
| Некоторые $x'y'$ существуют=<br>= Некоторые $x'$ суть $y'$ =<br>= Некоторые $y'$ суть $x'$ |  | Все $x'$ суть $y'$ |  |
| Ни один $xy$ не существует=<br>= Ни один $x$ не есть $y$ =<br>= Ни один $y$ не есть $x$ |  | Все $y$ суть $x$ |  |
| Ни один $xy'$ не существует=<br>= Ни один $x$ не есть $y'$ =<br>= Ни один $y'$ не есть $x$ |  | Все $y$ суть $x'$ |  |
| Ни один $x'y$ не существует=<br>= Ни один $x'$ не есть $y$ =<br>= Ни один $y$ не есть $x'$ |  | Все $y'$ суть $x$ |  |
| Ни один $x'y'$ не существует=<br>= Ни один $x'$ не есть $y'$ =<br>= Ни один $y'$ не есть $x'$ |  | Все $y'$ суть $x'$ |  |
| Некоторые $x$ суть $y$,<br>и<br>некоторые $x$ суть $y'$ |  | Некоторые $y$ суть $x$,<br>и<br>Некоторые $y$ суть $x'$ |  |
| Некоторые $x'$ суть $y$,<br>и<br>некоторые $x'$ суть $y'$ |  | Некоторые $y'$ суть $x$,<br>и<br>некоторые $y'$ суть $x'$ |  |

У *инквизитора* должны быть таблицы, у *жертвы* — лишь чистая диаграмма и фишки, с помощью которых он будет изображать различные суждения, называемые его приятелем: «Некоторые $y$ существуют», «Ни один $y'$ не есть $x'$», «Все $x$ суть $y$», и т. д. и т. п.

## *Глава IV*

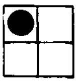
## ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДВУХБУКВЕННОЙ ДИАГРАММЫ С РАССТАВЛЕННЫМИ НА НЕЙ ФИШКАМИ

Предположим, что на лежащей перед нами диаграмме фишки уже расставлены. Задача состоит в том, чтобы выяснить, какому суждению (или каким суждениям) отвечает создавшаяся позиция. Поскольку метод решения сводится к обращению всех рассуждений, приведенных в предыдущей главе, мы, естественно, можем прийти лишь к тем результатам, которые в ней уже изложены.

Начнем с *красной* фишки, стоящей на северо-западной клетке:

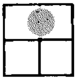
Мы уже знаем, что такая позиция соответствует любому из трех эквивалентных суждений: «Некоторые $xy$ существуют» = «Некоторые $x$ суть $y$» = «Некоторые $y$ суть $x$».

Предположим теперь, что в анализируемой нами позиции на северо-западной клетке стоит черная фишка



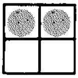
Как известно, эта позиция означает любое из трех эквивалентных суждений: «Ни один $xy$ не существует» = «Ни один $x$ не есть $y$» = «Ни один $y$ не есть $x$».

Предположим, далее, что *красную* фишку мы обнаружили стоящей на границе между двумя клетками северной половины диаграммы



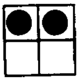
Мы знаем, что эта позиция означает суждение «Некоторые $x$ существуют».

Рассмотрим теперь случай, когда на северной половине диаграммы стоят *две красные* фишки — по одной на каждой клетке:



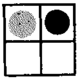
Мы знаем, что такая позиция отвечает *двойному* суждению «Некоторые $x$ суть $y$, и некоторые $x$ суть $y'$».

Пусть теперь на северной половине диаграммы — по одной в каждой клетке — стоят две *черные* фишки:



Этот случай, как известно, отвечает суждению «Ни один $x$ не существует».

Предположим, наконец, что на северной половине диаграммы стоят *красная и черная* фишки: *красная* — на северо-*западной* клетке, *черная* — на северо-*восточной*:



Мы знаем, что этой ситуации отвечает суждение «Все $x$ суть $y$». (Обратите внимание на то, что *субъект суждения* определяется той *половиной* диаграммы, на которой стоят фишки, а *предикат* — той клеткой, которая занята *красной* фишкой.)

И снова вам придется обратиться к вашему гениальному другу и попросить его проэкзаменовать вас по таблицам II и III. На этот раз вам придется не только *представлять* на диаграмме различные суждения, но и *интерпретировать* диаграммы, на которых ваш приятель расставит фишки.

Вопросы и ответы могут выглядеть примерно так:

*Вопрос.* Изобразите на диаграмме суждение «Ни один $x'$ не есть $y'$».

*Ответ.* Черная фишка на юго-восточной клетке.

*Вопрос.* Что означает красная фишка, стоящая на восточной половине диаграммы?

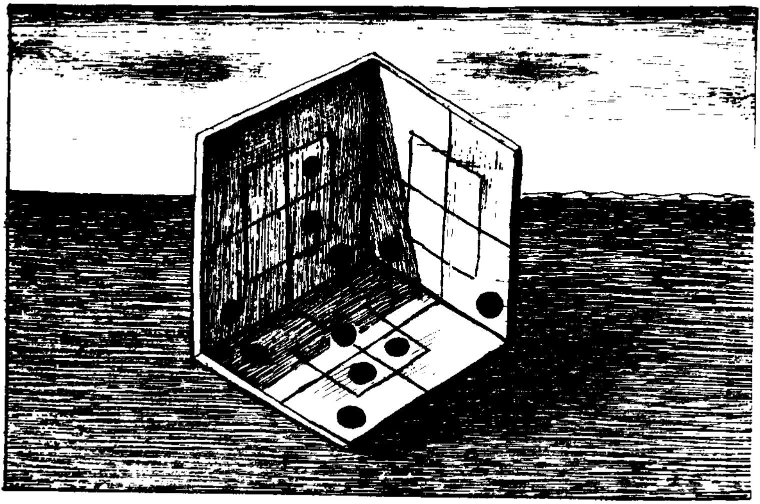
*Ответ.* «Некоторые $y'$ существуют».

*Вопрос.* Изобразите на диаграмме суждение «Все $y'$ суть $x$».
*Ответ.* Красная фишка на северо-восточной клетке, черная — на юго-восточной.
*Вопрос.* Что означает черная фишка, стоящая на юго-западной клетке?
*Ответ.* «Ни один $x'y$ не существует» = «Ни один $x'$ не есть $y$» = «Ни один $y$ не есть $x'$».
И т. д. и т. п.

Сначала экзаменующийся будет нуждаться в диаграмме и фишках, но очень скоро научится обходиться без них, отвечая с закрытыми глазами или устремив взгляд в пространство.

# *Книга IV*

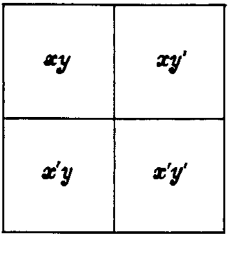
# ТРЕХБУКВЕННАЯ ДИАГРАММА

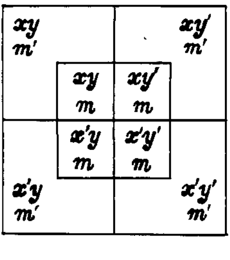


## *Глава I*

## СИМВОЛЫ И КЛЕТКИ

Во-первых, условимся считать, что ниже *слева* изображена та самая двухбуквенная диаграмма, которой мы уже неоднократно пользовались в книге III. Начертим на ней *внутренний квадрат* и превратим ее в *трехбуквенную* диаграмму. Каждая из четырех клеток исходной (двухбуквенной) диаграммы разобьется при этом на две части, поэтому трехбуквенная диаграмма всего будет содержать 8 клеток. Такая диаграмма показана справа.



Во-вторых, предположим, что мы выбрали некоторый признак или совокупность признаков (то есть то, что ранее мы называли *особенностью*) $m$ и разбили $xy$-класс на два подкласса с видовыми отличиями $m$ и $m'$. Для одного из подклассов (который мы будем называть «классом $xym$-предметов», или «$xym$-классом») отведем *внутреннюю* северо-западную клетку, для другого (который мы будем называть «классом $xym'$-предметов», или «$xym'$-классом») — *внешнюю* северо-западную клетку (*«уголок»*). Так, в примере с книгами мы могли бы выбрать в качестве $m$ признак «переплетенные». Тогда $m'$ означал бы признак «непереплетенные», и класс «старые английские книги» оказался бы разбитым на два подкласса: «старые английские переплетенные книги» и «старые английские непереплетенные книги». Одному из подклассов ($xym$) мы отвели бы внутреннюю северо-западную клетку, другому — ($xym'$) — внешнюю.

В-третьих, предположим, что мы произвели аналогичное разбиение над $xy'$-, $x'y$- и $x'y'$-классами и в каждом случае *внутреннюю* клетку сопоставили с тем классом, который обладает признаком $m$, а *внешнюю* — с тем классом, который обладает призиаком $m'$. В примере с книгами мы подразделили бы класс «новые английские книги» на два подкласса: «новые английские переплетенные книги» и «новые английские непереплетенные книги». Первому из них мы сопоставили бы внутреннюю юго-западную, а второму — внешнюю юго-западную клетки. Вполне очевидно, что при таком соответствии между клетками и признаками *внутренний квадрат* отвечает $m$-классу, а окаймляющая его *внешняя полоса* — $m'$-классу. В примере с книгами *внутренний квадрат* соответствует «переплетенным книгам», *внешняя полоса* — «непереплетенным книгам».

Ознакомившись с трехбуквенной диаграммой, читатель должен научиться мгновенно отыскивать ту ее часть, которая отвечает любой наперед заданной паре признаков, или ту ее клетку, которая соответствует любому конкретному набору из трех признаков. Полезно придерживаться при этом следующих правил.

1. Расположить признаки в порядке $x$, $y$, $m$.

2. Взять *первый* из упорядоченных признаков и отыскать ту часть трехбуквенной диаграммы, которая ему соответствует.

3. Затем взять *второй* признак и найти ту *часть* уже найденной (в п. 2) части, которая соответствует ему.

4. Поступить аналогично с *третьим* признаком, если таковой имеется.

Предположим, что требуется найти часть диаграммы, соответствующую признаку *ym*. Мы говорим себе: «Приз-

ТАБЛИЦА IV

| Признак класса | Часть диаграммы или клетка, соответствующая признаку |
|---|---|
| $x$ | Северная половина |
| $x'$ | Южная половина |
| $y$ | Западная половина |
| $y'$ | Восточная половина |
| $m$ | Внутренний квадрат |
| $m'$ | Внешняя полоса |
| $xy$ | Северо-западная четверть |
| $xy'$ | Северо-восточная четверть |
| $x'y$ | Юго-западная четверть |
| $x'y'$ | Юго-восточная четверть |
| $xm$ | Внутренняя часть северной половины |
| $xm'$ | Внешняя часть северной половины |
| $x'm$ | Внутренняя часть южной половины |
| $x'm'$ | Внешняя часть южной половины |
| $ym$ | Внутренняя часть западной половины |
| $ym'$ | Внешняя часть западной половины |
| $y'm$ | Внутренняя часть восточной половины |
| $y'm'$ | Внешняя часть восточной половины |
| $xym$ | Внутренняя часть северо-западной четверти |
| $xym'$ | Внешняя часть северо-западной четверти |
| $xy'm$ | Внутренняя часть северо-восточной четверти |
| $xy'm'$ | Внешняя часть северо-восточной четверти |
| $x'ym$ | Внутренняя часть юго-западной четверти |
| $x'ym'$ | Внешняя часть юго-западной четверти |
| $x'y'm$ | Внутренняя часть юго-восточной четверти |
| $x'y'm'$ | Внешняя часть юго-восточной четверти |

наком $y$ обладает *западная* половина, а признаком $m$ — *внутренняя* часть западной половины диаграммы».

Еще один пример. Предположим, что требуется найти клетку, обладающую признаком $x'ym'$. Мы говорим себе: «Признаком $x'$ обладает южная половина диаграммы, признаком $y$ — *западная* часть южной половины, то есть юго-западная четверть диаграммы, а признаком $m'$ — *внешняя* часть юго-западной четверти».

Читателю придется обратиться к своему гениальному другу и попросить, чтобы тот снова выступил в роли экзаменатора и погонял его по таблице IV.

Экзамен должен протекать в духе следующего диалога.

*Вопрос.* Каким признаком обладает внутренняя часть южной половины диаграммы?

*Ответ.* $x'm$.

*Вопрос.* Какая часть диаграммы отвечает признаку $m'$?

*Ответ.* Внешняя полоса.

*Вопрос.* Каким признаком обладает внешняя часть северо-восточной четверти диаграммы?

*Ответ.* $xy'm'$.

*Вопрос.* Какая часть таблицы обладает признаком $ym$?

*Ответ.* Внутренняя часть западной половины.

*Вопрос.* Каким признаком обладает южная половина диаграммы?

*Ответ.* $x'$.

*Вопрос.* Какая клетка обладает признаком $x'y'm$?

*Ответ*: Внутренняя часть юго-восточной четверти.

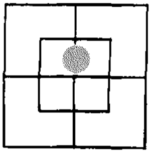
И т. д. и т. п.

## *Глава II*

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СУЖДЕНИЙ В ТЕРМИНАХ $x$ И $m$ ИЛИ $y$ И $m$

### § 1. Представление суждений существования в терминах $x$ и $m$ или $y$ и $m$

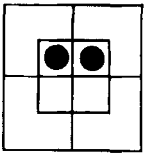
Начнем с суждения «Некоторые $xm$ существуют». Напомним, что в развернутом виде, как уже объяснялось, это суждение формулируется так: «Некоторые реально существующие предметы суть $xm$-предметы». В нем утверждается, что во внутренней части северной половины имеется по крайней мере *один* предмет, то есть что эта часть диаграммы *занята.* Подобную ситуацию мы изобразим, поставив *красную* фишку на границу между клетками, образующими занятую часть диаграммы:



В примере с книгами соответствующее суждение означало бы: «Некоторые старые переплетенные книги существуют» или «Некоторые старые переплетенные книги есть (на самом деле)».

Аналогичным образом можно изобразить на диаграмме и семь других суждений того же типа: «Некоторые $xm'$ существуют», «Некоторые $x'm$ существуют», «Некоторые $x'm'$ существуют», «Некоторые $ym$ существуют», «Некоторые $ym'$ существуют», «Некоторые $y'm$ существуют» и «Некоторые $y'm'$ существуют».

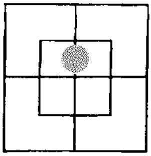
Рассмотрим далее суждение «Ни один $xm$ не существует». В нем утверждается, что во внутренней части северной половины *ничего нет* или что эта часть диаграммы *пуста.* Такую ситуацию мы изобразим, поставив на внутреннюю часть северной половины диаграммы две *черные* фишки — по одной на каждую клетку:



Шестнадцать суждений существования (названные и семь других того же типа) — вот все, что нам понадобится изображать на диаграмме.

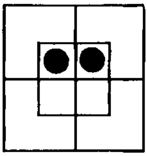
## § 2. Представление суждений отношения в терминах $x$ и $m$ или $y$ и $m$

Начнем с двух суждений: «Некоторые $x$ суть $m$» = «Некоторые $m$ суть $x$». Известно, что каждое из них эквивалентно суждению существования «Некоторые $xm$ существуют». Как изобразить его на диаграмме, мы уже знаем:

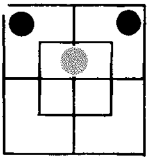


То же в терминах $x$ и $m$ или $y$ и $m$ можно сказать и о семи аналогичных парах суждений.

Рассмотрим, далее, пару обратных суждений: «Ни один $x$ не есть $m$» = «Ни один $m$ не есть $x$». Каждое из них эквивалентно суждению существования «Ни один $xm$ не существует», которое мы уже умеем изображать на диаграмме:



Рассмотрим теперь суждение «Все $x$ суть $m$». Известно (см. стр. 209), что это — *двойное* суждение и что оно эквивалентно *двум* суждениям: «Некоторые $x$ суть $m$» и «Ни один $x$ не есть $m'$», каждое из которых мы уже умеем изображать на диаграмме.

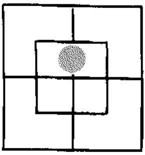


Суждения отношения перечисленного выше типа (всего их 32) — единственные, которые мы должны уметь изображать на нашей диаграмме.

И снова вам придется обратиться к своему гениальному другу и попросить, чтобы он проэкзаменовал вас по таблицам V, VI, VII, VIII.

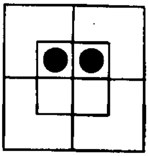
На столе перед «жертвой» не должно быть ничего, кроме чистой (незаполненной) трехбуквенной диаграммы, одной красной и двух черных фишек. С их помощью жертва должна изображать на диаграмме различные суждения, которые будет называть «инквизитор», например «Ни один $y'$ не есть $m$», «Некоторые $xm'$ существуют» и т. д. и т. п.

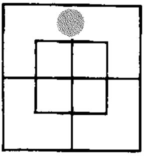
ТАБЛИЦА V



Некоторые $xm$ существуют =
= Некоторые $x$ суть $m$ =
= Некоторые $m$ суть $x$

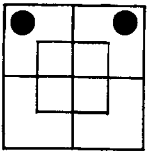
Ни один $xm$ не существует =
= Ни один $x$ не есть $m$ =
= Ни один $m$ не есть $x$

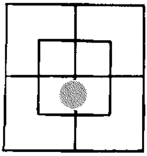




Некоторые $xm'$ существуют =
= Некоторые $x$ суть $m'$ =
= Некоторые $m'$ суть $x$

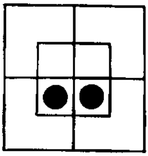
Ни один $xm'$ не существует =
= Ни один $x$ не есть $m'$ =
= Ни один $m'$ не есть $x$

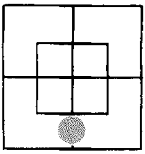




Некоторые $x'm$ существуют =
= Некоторые $x'$ суть $m$ =
= Некоторые $m$ суть $x'$

Ни один $x'm$ не существует =
= Ни один $x'$ не есть $m$ =
= Ни один $m$ не есть $x'$





Некоторые $x'm'$ существуют =
= Некоторые $x'$ суть $m'$ =
= Некоторые $m'$ суть $x'$

Ни один $x'm'$ не существует =
= Ни один $x'$ не есть $m'$ =
= Ни один $m'$ не есть $x'$

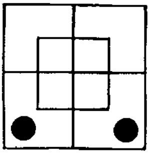
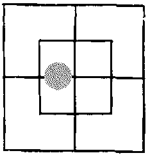
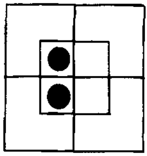


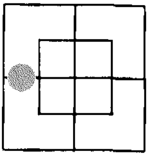
ТАБЛИЦА VI



Некоторые $ym$ существуют=
= Некоторые $y$ суть $m$ =
= Некоторые $m$ суть $y$

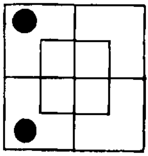
Ни один $ym$ не существует=
= Ни один $y$ не есть $m$ =
= Ни один $m$ не есть $y$

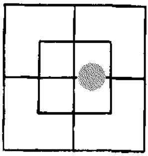




Некоторые $ym'$ существуют=
= Некоторые $y$ есть $m'$ =
= Некоторые $m'$ есть $y$

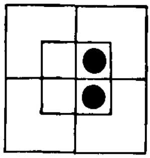
Ни один $ym'$ не существует=
= Ни один $y$ не есть $m'$=
= Ни один $m'$ не есть $y$

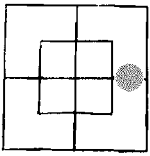




Некоторые $y'm$ существуют=
= Некоторые $y'$ суть $m$ =
= Некоторые $m$ суть $y'$

Ни один $y'm$ не существует=
= Ни один $y'$ не есть $m$=
= Ни один $m$ не есть $y'$





Некоторые $y'm'$ существуют=
= Некоторые $y'$ суть $m'$ =
= Некоторые $m'$ суть $y'$

Ни один $y'm'$ не существует=
= Ни один $y'$ не есть $m'$=
= Нн одни $m'$ не есть $y'$

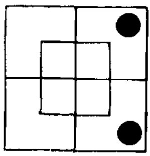


ТАБЛИЦА VII

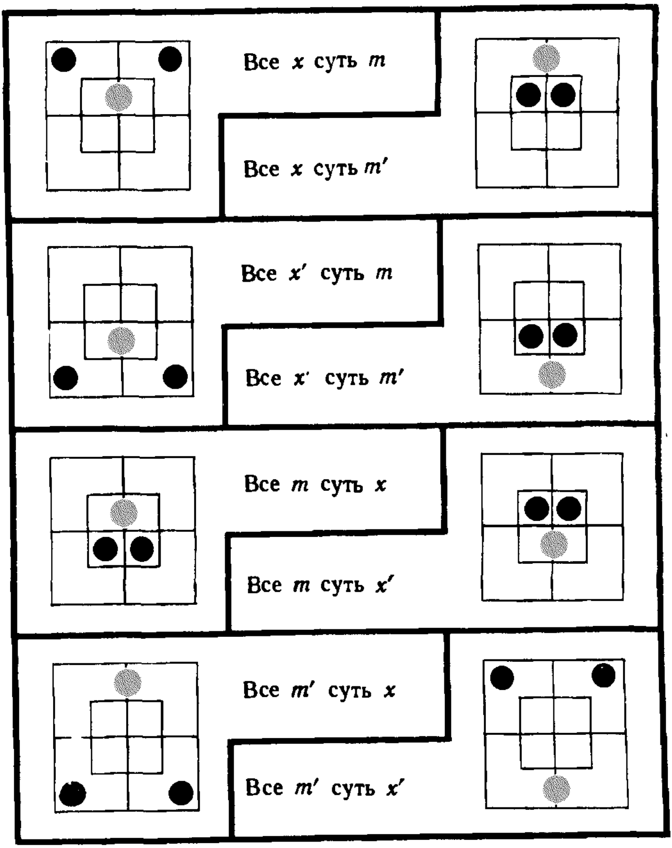
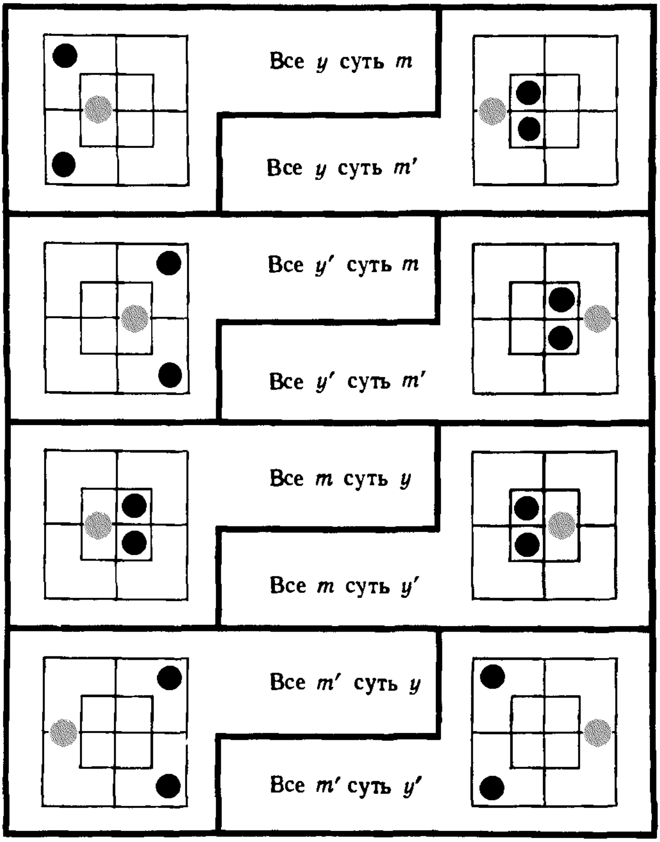

Все $x$ суть $m$
Все $x$ суть $m'$
Все $x'$ суть $m$
Все $x'$ суть $m'$
Все $m$ суть $x$
Все $m$ суть $x'$
Все $m'$ суть $x$
Все $m'$ суть $x'$

ТАБЛИЦА VIII



## Глава III

### ОДНОВРЕМЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НА ОДНОЙ ДИАГРАММЕ ДВУХ СУЖДЕНИЙ ОТНОШЕНИЯ: ОДНОГО — В ТЕРМИНАХ $x$ И $m$, ДРУГОГО — В ТЕРМИНАХ $y$ И $m$.

Читателю рекомендуется не расставлять фишки на диаграмме, а вычерчивать для себя маленькие диаграммки и ставить в соответствующих клетках цифры 1 и 0. Единица будет означать *красную* фишку, иначе говоря, суждение «Здесь имеется по крайней мере *один* предмет», а нуль — *черную*, иначе говоря, суждение «Здесь *ничего* нет». (Мы же иа своих диаграммах по-прежнему будем пользоваться красными и черными фишками.)

Одно из двух суждений, которые мы будем изображать на диаграмме, всегда будет в терминах $x$ и $m$, а другое — в терминах $y$ и $m$. Если какое-нибудь из суждений начинается со слова «все», то его необходимо предварительно разбить на *два* эквивалентных ему суждения. Если же на одной и той же диаграмме требуется представить два суждения, из которых одно начинается со слова «некоторые», а другое — со слов «ни один», то *первым* следует изобразить *отрицательное* суждение. Иногда это позволит нам избежать такого положения, когда единицу сначала приходится «усаживать на стенку», а затем сдвигать в одну из клеток.

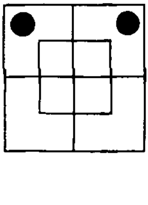
Разберем несколько примеров.

I

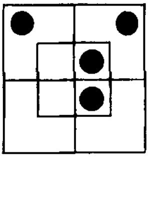
*Ни один $x$ не есть $m'$.*
*Ни один $y'$ не есть $m$.*

Представим сначала на диаграмме суждеиие „Ни один $x$ не есть $m'$“. У иас получится диаграмма $a$. Представив на ней суждение „Ни один $y'$ не есть $m$“, получим диаграмму $b$.

$a$



$b$

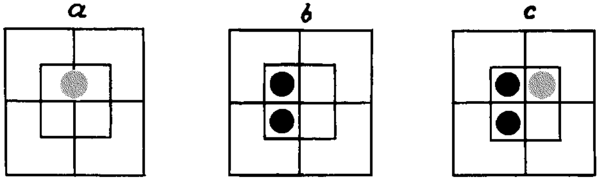


II

*Некоторые $m$ суть $x$.*
*Ни один $m$ не суть $y$.*

Если бы мы, пренебрегая правилами, начали с суждения ,,Некоторые *m* суть *x*'', то у нас получилась бы диаграмма *a*. Взяв затем суждение ,,Ни один *m* не есть *y*'', утверждающее, что внутренняя северо-западная клетка *пуста*, мы должны были бы снять единицу со стенки (поскольку выбор между *двумя* клетками произведен) и поставить ее во внутреннюю северо-восточную клетку, как показано на диаграмме *c*.

Начав с суждения ,,Ни одно *m* не есть *y*'', мы избавимся от всех этих хлопот (см. диаграмму *b*). Взяв *затем* суждение ,,Некоторые *m* суть *x*'', нам уже нет необходимости усаживать единицу на стенку: единица *сразу* же отправляется в северо-восточную клетку, как на диаграмме *c*.



**III**

*Ни один x' не есть m'.*

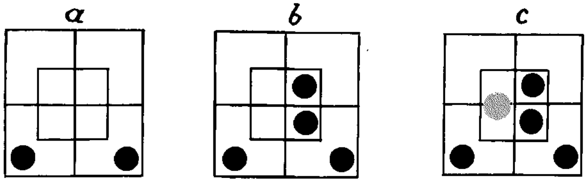
*Все m суть y.*

Прежде всего необходимо разбить второе суждение на *два* других суждения, которым оно эквивалентно. Таким образом, мы получаем *три* суждения:

1) *Ни один x' не есть m',*
2) *Некоторые m суть y,*
3) *Ни один m не есть y',*

которые необходимо представить на диаграмме. Рассмотрим их по порядку одно за другим.

Начнем с суждения 1 — ,,Ни один *x'* не есть *m'*''. Оно отвечает диаграмме *a*. Представив на ней суждение 3, а именно ,,Ни одно *m* не есть *y*'', получим диаграмму *b*. На этот раз единице, соответствующей суждению 2 (,,Некоторые *m* суть *y*''), не остается ничего другого, как сидеть на стенке, ибо у нас нет нуля, который мог бы заставить ее слезть оттуда! В результате мы получаем диаграмму *c*.



**IV**

*Все m суть x.*

*Все y суть m.*

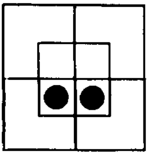
Разбив *оба* суждения в соответствии с правнлами, мы получим *четыре* суждения, которые требуется представить на днаграмме:

1) *Некоторые m суть x*,
2) *Ни одно m не есть x'*,
3) *Некоторые y суть m*,
4) *Ни один y не есть m'*.

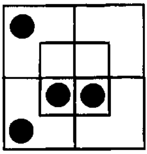
Рассмотрим их в последовательиости 2, 4, 1, 3.

Взяв суждение 2 („Ни один *m* не есть *x'*“), получим диаграмму *a*. Представив на ней суждеине 4 („Ни один *y* не есть *m'*“), получим днаграмму *b*. Взяв затем суждеине 1 („Некоторые *m* суть *x*“), мы должиы были бы посадить едииицу иа стеику. Поэтому мы берем вместо суждеиия 1 суждение 3 („Некоторые *y* суть *m*“) и получаем диаграмму *c*. После этого иеобходимость в суждении 1 вообще отпадает, поскольку, посаднв единицу иа стенку, мы не узиаем ничего иового. Диаграмма *c уже* говорит иам, что „Некоторые *m* суть *x*“.

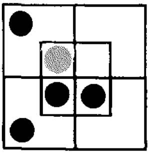
*a*



*b*



*c*



## *Глава IV*

## ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТРЕХБУКВЕННОЙ ДИАГРАММЫ С РАССТАВЛЕННЫМИ НА НЕЙ ФИШКАМИ ИЛИ ЦИФРАМИ В ТЕРМИНАХ *x* И *y*

Пусть задана трехбуквенная диаграмма с расставленными на ней фишками или нулями и единицами. Требуется узнать, какое суждение отношения в терминах *x* и *y* представлено на ней.

Для *начинающего* лучше всего начертить рядом с трехбуквенной диаграммой двухбуквенную и попытаться перенести на нее все сведения, которые он только сможет извлечь из трехбуквенной диаграммы. Прочесть искомые суждения по двухбуквенной диаграмме уже не составит для него труда. Немного попрактиковавшись, он научится обходиться и без двухбуквенной диаграммы и читать готовый ответ прямо по исходной трехбуквенной диаграмме.

Чтобы перенести информацию с трехбуквенной диаграммы на двухбуквенную, необходимо соблюдать следующие правила:

1. Исследовать «содержимое» северо-западной четверти трехбуквенной диаграммы.

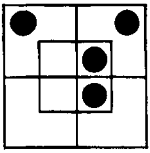
2. Если эта четверть содержит единицу *хотя бы в одной* из клеток, то она, несомненно, считается занятой, и вы можете поставить единицу в северо-западной клетке двухбуквенной диаграммы.

3. Если же эта четверть содержит *два* нуля — по одному в каждой из своих клеток, то она *заведомо пуста*, и в северо-западную клетку двухбуквенной диаграммы вы можете поставить нуль.

4. Аналогичные операции необходимо проделать с северо-восточной, юго-западной и юго-восточной четвертями трехбуквенной диаграммы.

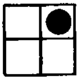
Рассмотрим в качестве примеров трехбуквенные диаграммы, полученные в четырех примерах предыдущей главы.

I



В северо-западиой четверти лишь *одна* из двух клеток пуста (помечеиа чериой фишкой), поэтому мы ие знаем, *пуста* или *занята* северо-западиая клетка двухбуквенной диаграммы и, следовательно, ие можем поставить в нее ни нуля, ни единицы.

В северо-восточиой четверти трехбуквенной диаграммы мы обнаруживаем *два* нуля, поэтому *эта* четверть заведомо *пуста*. Так мы и пометим на двухбуквеииой диаграмме

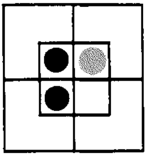


В юго-западиой четверти вообще иет никаких цифр — ни иулей, ни едииии.

В юго-восточиой четверти стоит одии иуль, ио этого иедостаточио, чтобы можно было сказать что-ннбудь определениое о юго-восточиой клетке двухбуквеииой диаграммы.

Итак, окончательиый результат гласит: „Нн один $x$ не есть $y$", или „Ни один $y$ ие есть $x$" (как вам больше иравится).

II



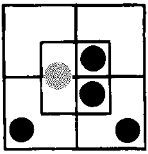
Информация, содержащаяся в северо-западной четверти, недостаточна для каких-либо выводов о северо-западной клетке двухбуквенной диаграммы.

В северо-восточной четверти мы обнаруживаем единицу. Это означает, что четверть *занята*. Следовательно, в северо-восточную клетку двухбуквенной диаграммы мы можем вписать единицу:

Информация в юго-западной четверти слишком скудна, чтобы ею можно было воспользоваться. В юго-восточной четверти никакой информации вообще не содержится.

Следовательно, в итоге мы получаем суждение, которое можно прочитать двояким способом: и как ,,Некоторые $x$ суть $y'$'', и как ,,Некоторые $y'$ суть $x$''.

III

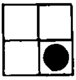


Относительно северо-западной четверти мы не располагаем *никакой* информацией. (Единица, ,,сидящая на стенке'', не может ничем нам помочь до тех пор, пока мы не узнаем, по *какую* сторону она намеревается спрыгнуть!)

Информация относительно северо-восточной четверти диаграммы недостаточна, чтобы ею можно было воспользоваться.

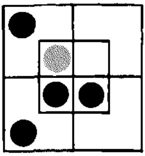
То же можно сказать и относительно юго-западной четверти.

Юго-восточная четверть — единственная, из которой мы можем извлечь нужную информацию: она заведомо *пуста*. На двухбуквенной диаграмме мы с уверенностью можем отметить, что и ее юго-восточная клетка *пуста*.



В результате мы получаем суждение: либо ,,Ни один $x'$ не есть $y'$'', либо ,,Ни один $y'$ не есть $x'$''. Каким из них воспользоваться — дело вкуса

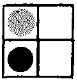
IV



Северо-западная четверть этой диаграммы *занята*, несмотря на нуль, стоящий в ее внешней части. Поэтому в северо-западную клетку двухбуквенной диаграммы мы впишем единицу:

Относительно северо-восточной четверти мы не располагаем никакими сведениями.

Юго-западная четверть заведомо *пуста*, поэтому в юго-западную клетку двухбуквенной диаграммы мы впишем нуль:

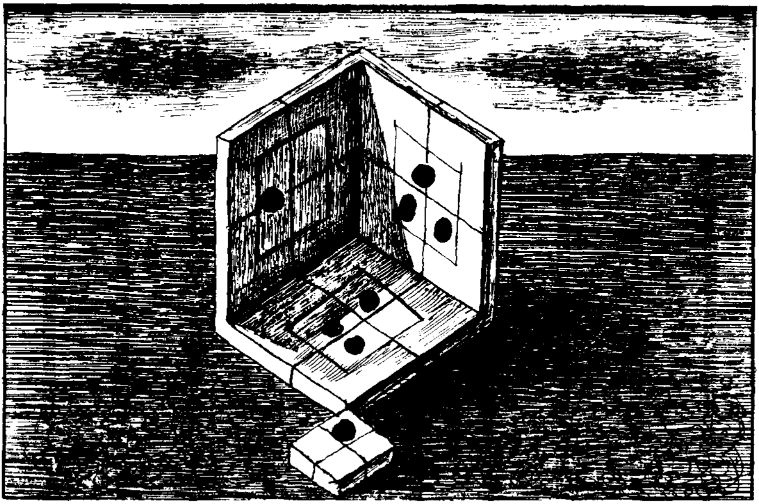


Относительно юго-восточной четверти сведений недостаточно.

Результат можно сформулировать в виде суждения: ,,Все $y$ суть $x$''.

# *Книга V*

## СИЛЛОГИЗМЫ



### *Глава I*

### ВВЕДЕНИЕ

Говорят, что три двухбуквенных суждения образуют силлогизм, если:

1) все шесть их терминов являются видами, принадлежащими к одному и тому же роду;

2) любые два из суждений содержат два ко-класса* относительно разбиения по какому-то из признаков;

3) все три суждения связаны между собой так, что если бы два первых суждения были истинными, то и третье суждение было бы истинным.

Род, видом которого является каждый из шести терминов, называется «Вселенной рассмотрения», или просто «Вселенной». Первые два суждения называются посылками, третье — заключением. Пары терминов, отвечающих ко-классам в разбиении по какому-то

* Определение ко-класса см. в главе III книги IV.—*Прим. перев.*

признаку и входящих в посылки, называются исключаемыми; остальные пары терминов называются оставляемыми.

О заключении силлогизма принято говорить, что оно следует из посылок. Перед ним обычно ставят слово «следовательно» или отделяют его от посылок горизонтальной чертой.

Исключаемыми термины названы потому, что их *исключают*, и они не входят в заключение силлогизма. Оставляемыми термины названы потому, что их *оставляют*, и они входят в заключение.

Необходимо иметь в виду, что ответ на вопрос, будет ли данное заключение *следовать* из посылок, *не зависит* от истинности или ложности того или иного суждения, входящего в силлогизм, а определяется исключительно *взаимосвязью между суждениями*.

Рассмотрим, например, силлогизм:

Ни один $x$-предмет не есть $m$-предмет;
Ни один $y$-предмет не есть $m'$-предмет.
Ни один $x$-предмет не есть $y$-предмет.

Как мы уже знаем (см. стр. 215), его можно записать в следующем виде:

Ни один $x$ не есть $m$;
Ни один $y$ не есть $m'$.
Ни один $x$ не есть $y$.

Первое и второе суждения содержат ко-классы $m$ и $m'$, первое и третье — ко-классы $x$ и $x'$ и, наконец, второе и третье — ко-классы $y$ и $y'$. Таким образом, эти суждения связаны между собой так (в этом мы убедимся позже), что если бы первые два из них были истинными, то и третье суждение также было бы истинным.

Следовательно, эти три суждения образуют *силлогизм*. Два суждения — «Ни один $x$ не есть $m$» и «Ни один $y$ не есть $m'$» — служат *посылками* силлогизма, суждение «Ни один $x$ не есть $y$» — его *заключением*. *Исключаемыми* являются термины $m$ и $m'$, *оставляемыми* — термины $x$ и $y$.

Итак, три исходных суждения можно записать в виде силлогизма:

Ни один $x$ не есть $m$;
Ни один $y$ не есть $m'$.
Ни один $x$ не есть $y$.

В качестве второго примера рассмотрим трио суждений:

Все кошки знают французский язык;
Некоторые цыплята — кошки.
Некоторые цыплята знают французский язык.

Если эти суждения записать в нормальной форме, то они примут следующий вид:

Все кошки — существа, знающие французский язык,
Некоторые цыплята — кошки.
Некоторые цыплята — существа, знающие французский язык.

Все шесть терминов в этом случае являются видами, принадлежащими к роду «существ».

Первое и второе суждения содержат ко-классы «кошки» и «кошки», первое и третье — ко-классы «существа, понимающие французский язык» и «существа, понимающие французский язык» и, наконец, второе и третье суждения — ко-классы, «цыплята» и «цыплята». Следовательно (это будет доказано на стр. 248), эти три суждения связаны между собой так, что если бы первые два из них были истинными, то и третье суждение было бы истинным. (По случайному стечению обстоятельств первые два суждения на *нашей* планете, строго говоря, не являются истинными. Однако ничто не мешает им быть истинными на какой-нибудь *другой* планете, например на *Марсе* или *Юпитере*. Там же, где истинны первые два суждения, истинно и третье. Обитатели такой планеты вполне могли бы нанимать цыплят в гувернеры и извлекать из этого (*между прочим*) еще одну выгоду, не известную в Англии: всякий раз, когда в доме иссякнет запас провизии, обед можно было бы готовить из гувернера!)

Итак, рассматриваемые нами три суждения образуют *силлогизм*. Род «существ» служит его «Вселенной», два суждения «Все кошки знают французский язык» и «Некоторые цыплята — кошки» — его *посылками*, суждение «Некоторые цыплята знают французский язык» — *заключением*. *Исключаемыми* являются термины «кошки» и «кошки», *оставляемыми* — термины «существа, знающие французский язык» и «цыплята».

Таким образом, исходные три суждения можно записать так:

Все кошки знают французский язык,
Некоторые цыплята — кошки.

---

Некоторые цыплята знают французский язык.

## *Глава II*

## ЗАДАЧИ НА СИЛЛОГИЗМЫ

### § 1. Предварительные замечания

Если термины суждения выражены *словами*, то суждение называется конкретным. Если же термины суждения выражены *буквами*, то суждение называется абстрактным. Чтобы преобразовать суждения из конкретной формы в абстрактную, мы фиксируем *Вселенную*, рассматриваем каждый термин как один из ее *видов* и выбираем буквенное обозначение для *видового отличия*, присущего этому виду.

Пусть, например, требуется привести к абстрактной форме суждение «Некоторые солдаты храбрые». В качестве Вселенной мы можем выбрать множество людей, а «солдат» и «храбрых людей» рассматривать как виды, принадлежащие роду «людей». Пусть $x$ означает отличительный признак (например, «военные») «солдаты», а $y$ — «храбрые». Тогда суждение можно записать в следующем виде: «Некоторые военные люди — храбрые люди», то есть как суждение «Некоторые $x$-люди суть $y$-люди», или, опуская слово «люди» (по этому поводу см. объяснения на стр. 216), как «Некоторые $x$ суть $y$».

Мы не будем каждый раз проделывать все операции столь подробно и обычно, указав Вселенную («люди») и значения «$x$-солдаты» и «$y$-храбрые», будем сразу же заменять конкретное суждение «Некоторые солдаты храбрые» абстрактным суждением «Некоторые $x$ суть $y$».

Задачи, которые мы будем решать, делятся на два типа.

1. Даны два суждения отношения, содержащие два ко-класса. Требуется установить, какое заключение следует из этих суждений, если принять их за посылки силлогизма.

2. Даны три суждения отношения, из которых любые два содержат по два ко-класса. Предположив, что эти суждения образуют силлогизм, проверить, следует ли третье суждение из первых двух и если следует, то является ли заключение *полным*.

Рассмотрим каждый из этих типов задач в отдельности.

## § 2. Задачи первого типа

*Вывод заключения из двух суждений отношения, содержащих два ко-класса и принимаемых за посылки силлогизма*

Правила решения таких задач сводятся к следующему:

1. Определить Вселенную.

2. Составить словарь так, чтобы $m$ и $m$ (или $m$ и $m'$) отвечали одной паре ко-классов, а $x$ (или $x'$) и $y$ (или $y'$) — двум другим парам ко-классов.

3. Записать приведенные в условии задачи посылки в абстрактной форме.

4. Представить обе посылки на одной трехбуквенной диаграмме.

5. Проверить, какое *еще* суждение (если таковое вообще существует) в терминах $x$ и $y$ представлено на диаграмме.

6. Записать это суждение в конкретной форме.

Ясно, если посылки, сформулированные в условии задачи, были бы истинными, то и обнаруженное на диаграмме суждение *также* было бы истинным. Поэтому его можно считать *заключением*, следующим из данных посылок.

Рассмотрим несколько примеров.

### I

*Ни один мой сын не мошенник.*
*К честному человеку люди всегда относятся с уважением.*

Выбрав «людей» в качестве Вселенной, приведем эти два суждения к следующему виду:

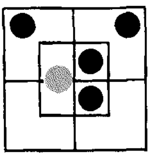
Ни один мой сын не мошенник (нечестный человек).
Всех честных людей уважают (другие люди).

Составим наш словарик: пусть $m$ = честные, $x$ = мои сыновья, $y$ = пользующиеся уважением. (Обратите внимание на то, что выражение „$x$ = мои сыновья“ служит сокращенной формой выражения „$x$ = видовому отличию «моих сыновей», рассматриваемых как вид, принадлежащий роду «люди».)

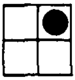
Теперь мы должны представить оба суждения в абстрактной форме:

Ни один $x$ не есть $m'$.
Все $m$ суть $y$.

Пользуясь приемами, описанными на стр. 237, представим эти суждения на трехбуквенной диаграмме.



Теперь, следуя правилам, изложенным на стр. 240, перенесем всю информацию, которую мы только сможем извлечь из трехбуквенной диаграммы, на двухбуквенную диаграмму:



Полученный результат можно сформулировать и как „Ни один $x$ не есть $y'$", и как „Ни один $y'$ не есть $x$" (обе формы одинаково допустимы). Обращаясь к словарику, выберем ту из них, которая звучит лучше. Предположим, что мы остановили свой выбор на суждении „Ни один $x$ не есть $y'$". В конкретной форме оно будет звучать так:

*Ни к одному из моих сыновей никто никогда не относится без уважения.*

II

*Все кошки знают французский язык.*
*Некоторые цыплята — кошки.*

Выбрав „живые существа" в качестве Вселенной, запишем суждения в виде:

Все кошки — живые существа, знающие французский язык.
Некоторые цыплята — кошки.

Теперь мы уже можем составить словарик: $m$ = кошки, $x$ = знающие французский язык, $y$ = цыплята.

В абстрактной форме наши суждения будут выглядеть так:

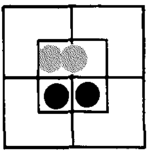
Все $m$ суть $x$.
Некоторые $y$ суть $m'$.

Чтобы представить их на трехбуквенной диаграмме, разобьем первое из суждений на два суждения, которым оно эквивалентно, и получим три суждения:

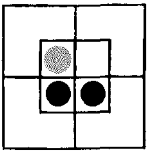
1) Некоторые $m$ суть $x$.
2) Ни одно $m$ не есть $x'$.
3) Некоторые $y$ суть $m$.

Согласно правилам, приведенным на стр. 237, эти суждения следует наносить на диаграмму в таком порядке: 2, 1, 3.

Проделав все необходимые операции, мы получили бы следующий результат:

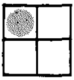


Поэтому наносить суждения на диаграмму удобнее в другом порядке, а именно 2, 3, 1. Представив на диаграмме суждения 2 и 3, мы получим



Относительно суждения 1 можно вообще не беспокоиться, поскольку суждение ,,Некоторые $m$ суть $x$'' *уже* представлено на диаграмме.

Перенеся все сведения на двухбуквенную диаграмму, мы увидим следующую картину:



Полученный результат можно сформулировать и как ,,Некоторые $x$ суть $y$'', и как ,,Некоторые $y$ суть $x$''.

Справившись в словаре, остановим свой выбор на суждении «Некоторые $y$ суть $x$», или, в конкретной форме, *Некоторые цыплята знают французский язык.*

### III

*Все, кто предстал перед судом на его прошлой выездной сессии и был признан виновным, приговорены к заключению.*

*Некоторые из тех, кто был приговорен к заключению, были также приговорены к каторжным работам.*

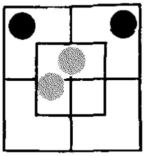
Пусть Вселенной будут ,,те, кто предстал перед судом на его прошлой выездной сессии'', $m$ = приговоренные к заключению, $x$ = признанные виновными, $y$ = приговоренные к каторжным работам. Тогда исходные посылки, записанные в абстрактной форме, будут иметь вид:

Все $x$ суть $m$.
Некоторые $m$ суть $y$.

Разобьем первое суждение на два:

1) Некоторые $x$ суть $m$.
2) Ни один $x$ не есть $m'$.
3) Некоторые $m$ суть $y$.

Нанесем их на трехбуквенную диаграмму в последовательности 2, 1, 3 и получим следующий результат:



В этом случае мы не можем вывести никакого заключения.

Глядя на *одни лишь* посылки, вы могли бы подумать, что заключением должно быть суждение «Некоторые из тех, кого признали виновным, приговорены к каторжным работам». Но такое заключение *не*верно, если говорить о той выездной сессии суда, которую я придумал.

—Как *неверно*! — воскликните вы.— А кого же приговорили к заключению и к каторжным работам, как не тех, кто был признан виновным? Иначе как их можно было вообще осудить?

Тем не менее все произошло именно так, как я сказал. Было три разбойника с большой дороги, совершивших ограбление. Представ перед судом, они сразу же *признали себя* виновными. Присяжным не пришлось выносить вердикта, поскольку виновность преступников не вызывала сомнений.

А теперь я еще раз кратко повторю уже рассмотренные три задачи, но в форме, которой надлежит следовать при самостоятельном решении других задач.

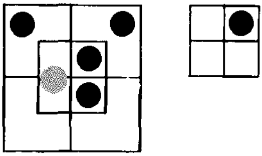
I

*Ни один мой сын не мошенник.*

*К честному человеку люди всегда относятся с уважением.*

Вселенная — «люди», $m$ = честные, $x$ = мои сыновья, $y$ = пользующиеся уважением.

Ни один $x$ не есть $m'$.
Все $m$ суть $y$.



Следовательно, «Ни один $x$ не есть $y'$», или

*Ни к одному из моих сыновей никто никогда не относится без уважения.*

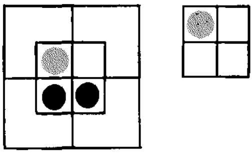
II

*Все кошки знают французский язык.*

*Некоторые цыплята — кошки.*

Вселенная — «живые существа», $m$ = кошки, $x$ = знающие французский язык, $y$ = цыплята.

Все $m$ суть $x$.
Некоторые $y$ суть $m$.



Следовательно, «Некоторые $y$ суть $x$», то есть

*Некоторые цыплята знают французский язык.*

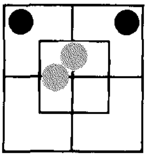
III

*Все, кто предстал перед судом на его прошлой выездной сессии и был признан виновным, приговорены к заключению.*

*Некоторые из тех, кто был приговорен к заключению, были также приговорены к каторжным работам.*

Вселенная — «те, кто предстал перед судом на его прошлой выездной сессии», $m$ = приговоренные к заключению, $x$ = признанные виновными, $y$ = приговоренные к каторжным работам.

Все $x$ суть $m$.
Некоторые $m$ суть $y$.



Заключения нет.

## § 3. Задачи второго типа

***Проверка правильности и полноты заключения силлогизма, образованного тремя суждениями отношения, из которых любые два содержат по два ко-класса.***

Правила решения таких задач сводятся к следующему:

1. С помощью метода, изложенного на стр. 247, найти заключение (если таковое существует), следующее из посылок, входящих в условие задачи.

2. Если из посылок никакого заключения не следует, сказать об этом.

3. Если из посылок в условии задачи заключение следует, то сравнить его с заключением, приведенным в условии задачи, и сделать соответствующий вывод.

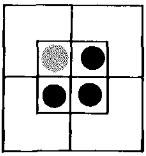
В качестве образца, которому читатель должен следовать при самостоятельном решении задач, я приведу в кратчайшей форме решение шести задач.

### I

*Все солдаты сильные.*
*Все солдаты храбрые.*
*Некоторые сильные люди храбры.*

Вселенная — «люди», $m$ = солдаты, $x$ = сильные, $y$ = храбрые.

Все $m$ суть $x$.
Все $m$ суть $y$.
Некоторые $x$ суть $y$.



Следовательно, «Некоторые $x$ суть $y$».
Заключение в условии задачи правильно.

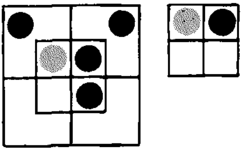
## II

*Я восхищен этими картинами.*

*Когда что-нибудь меня восхищает, мне хочется разглядеть это «что-нибудь» особенно внимательно.*

*Некоторые из этих картин я хочу разглядеть особенно внимательно.*

Вселенная — «предметы», $m$ = то, что восхищает меня, $x$ = эти картины, $y$ = предметы, которые я хочу разглядеть особенно внимательно.



Все $x$ суть $m$.
Все $m$ суть $y$.
Некоторые $x$ суть $y$.
Следовательно, «Все $x$ суть $y$».

Такнм образом, сформулнрованное в условни задачи заключение *неполно. Полное* заключение имеет форму суждения «*Все* эти картины я хочу разглядеть особеино внимательно».

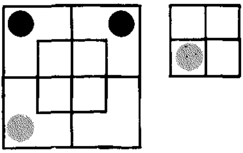
## III

*Лишь тот, кто храбр, достоин славы.*

*Некоторые хвастуны — трусы.*

*Некоторые хвастуны недостойны славы.*

Вселенная — «люди», $m$ = храбрые, $x$ = достойные славы, $y$ = хвастуны.



Нн однн $m'$ не есть $x$.
Некоторые $y$ суть $m'$.
Некоторые $y$ суть $x'$.

Следовательно, «Некоторые $y$ суть $x'$».
Таким образом, заключение, приведенное в условии задачи, правильно.

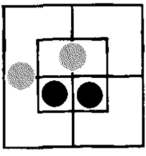
## IV

*Все солдаты умеют маршировать.*

*Некоторые маленькие дети — не солдаты.*

*Некоторые маленькие дети не умеют маршировать.*

Вселенная — «люди», $m$ = солдаты, $x$ = умеющне маршировать, $y$ = маленькие детн.



Все $m$ суть $x$.
Некоторые $y$ суть $m'$.
Некоторые $y$ суть $x'$.

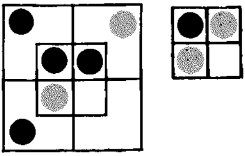
Заключеиня нет.

## V

*Все эгоистичные люди неприятны окружающим.*
*Все обязательные люди приятны окружающим.*
*Все обязательные люди неэгоистичны.*

Вселенная — «люди», $m$ = приятные окружающнм, $x$ = эгонстичные, $y$ = обизательные.

Все $x$ суть $m'$.
Все $y$ суть $m$.
Все $y$ суть $x'$.



Следовательно, «Все $x$ суть $y'$»,
«Все $y$ суть $x'$».

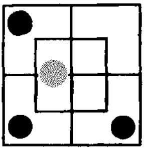
Таким образом, заключение в условии задачи *неполно. Полное* заключение содержит еще одно суждение: «Все эгонстичные люди необязательны».

## VI

*Никому из тех, кто хочет ехать поездом, кто не может достать экипаж и кто не имеет времени, чтобы спокойно дойти до станции, не миновать пробежки.*
*Эти туристы намереваются ехать поездом, но не могут достать экипаж, зато у них достаточно времени, чтобы спокойно дойти до станции.*
*Этим туристам не придется бежать.*

Вселенная — «те, кто хочет ехать поездом и не может достать экипаж», $m$ = имеющие достаточно времени, чтобы спокойно дойти до станции, $x$ = те, кому нужно бежать, $y$ = эти туристы.

Ни одно $m'$ не есть $x'$.
Все $y$ суть $m$.
Все $y$ суть $x'$.



Заключения нет.

Вот *еще один* удобный случай, любезный читатель, чтобы разыграть твоего невинного друга. Предложите ему силлогизм, сформулированный в условии задачи, и спросите, что он думает о заключении.

Скорее всего он ответит:

— Оно абсолютно правильно! А если твоя драгоценная книга утверждает, будто оно неправильно, не верь ей! Ведь не думаешь же ты, что этим туристам придется бежать, чтобы успеть на поезд? Если бы *я* был одним из них и знал, что *посылки* истинны, то мне было бы *совершенно* ясно, что бежать не придется, и *я бы преспокойно отправился на станцию пешком*!

На это вы должны возразить:

— А если за тобой погонится бешеный бык?

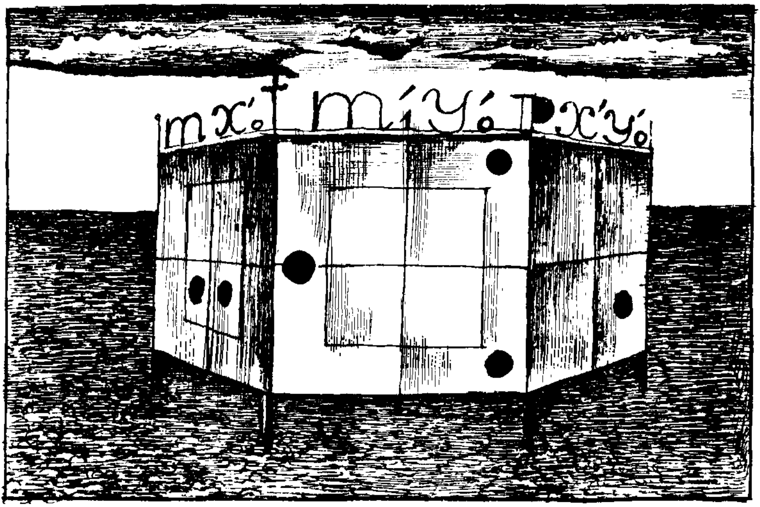
В ответ на такое замечание ваш друг скажет примерно следующее:

— Гм! Минуточку! Я подумаю.

И тут настанет удобный момент для того, чтобы разъяснить ему удобный способ проверки правильности силлогизма: если можно придумать обстоятельства, которые, не влияя на истинность *посылок*, сделают *заключение* ложным, то силлогизм *неправилен*.

# *Книга VI*

# МЕТОД ИНДЕКСОВ




## *Глава I*

## ВВЕДЕНИЕ

Условимся считать, что $x_1$ означает «Некоторые реально существующие предметы обладают признаком *x*», или (более кратко) «Некоторые *x* существуют». Пусть $xy_1$ означает «Некоторые *xy* существуют» и т. д. Такие суждения мы будем называть «р е а л ь н о с т я м и». (Если выражение содержит две буквы, то не имеет ни малейшего значения, какая из них стоит *первой*: $xy_1$ означает в точности то же самое, что и $yx_1$. Об этом не следует забывать.)

Пусть $x_0$ означает суждение «Ни один реально существующий предмет не обладает признаком *x*», или (более кратко) «Ни один *x* не существует», выражение $xy_0$ — суждение «Ни один *xy* не существует» и т. д. Такие суждения мы будем называть « х и м е р а м и».

Условимся считать, что знак † означает «и». Таким образом, $ab_1 \dagger cd_0$ должно означать «Некоторые *ab* существуют, и ни одно *cd* не существует».

Условимся также считать, что знак **P** означает, что «из суждения, стоящего слева от знака, если оно истинно, следует суждение, стоящее справа от знака».

Так, $x_0$ **P** $xy_0$ должно означать «Из суждения «Ни один $x$ не существует», если оно истинно, следует суждение «Ни один $xy$ не существует».

Если каждая из двух букв имеет штрихи или, наоборот, ни одна из двух букв не имеет штрихов, то говорят, что эти две буквы «одного знака». Если же одна из букв имеет штрих, а другая не имеет, то говорят, что эти буквы имеют «различные знаки».

## *Глава II*

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СУЖДЕНИЙ ОТНОШЕНИЯ

Начнем с суждения «Некоторые $x$ суть $y$». Как мы уже знаем (см. стр. 219), оно эквивалентно суждению существования «Некоторые $xy$ существуют». Следовательно, в наших обозначениях оно имеет вид $xy_1$.

Аналогично можно записать и три однотипные пары обратных суждений.

Рассмотрим теперь суждение «Ни один $x$ не есть $y$». Как мы уже знаем (см. стр. 221), оно эквивалентно суждению существования «Ни один $xy$ не существует». Следовательно, в наших обозначениях оно имеет вид $xy_0$. Разумеется, обратное суждение «Ни один $y$ не есть $x$» записывается точно *так же*: $xy_0$.

Аиалогичным образом выглядят в новых обозначениях и три однотипные пары обратных заключений.

Рассмотрим, далее, суждение «Все $x$ суть $y$». Ясно, что двойное суждение существования «Некоторые $x$ существуют, и ни один $xy'$ не существует» говорит нам, что некоторые $x$-предметы существуют, но *ни один из них* не обладает признаком $y'$. Это означает, что *все* $x$-предметы обладают признаком $y$, то есть «Все $x$ суть $y$». Отсюда ясно, что этому двойному суждению соответствует выражение $x_1$ † $xy_0$ и что точно так же же записывается суждение «Все $x$ суть $y$».

Утверждение о том, что суждение «Все $x$ суть $y$» эквивалентно двойному суждению «Некоторые $x$ существуют, и ни один $xy'$ не существует», может вызвать недоумение у читателя, помнящего, что на стр. 221 утверждалось нечто иное. Мы говорили там, что оно эквивалентно двойному суждению «Некоторые $x$ суть $y$, и ни один $x$ не есть $y'$»

(то есть «Некоторые $xy$ существуют, и ни один $xy'$ не существует»). Объясняется это тем, что суждение «Некоторые $xy$ существуют» содержит *избыточную информацию*. Для наших целей достаточно более узкого суждения «Некоторые $x$ существуют».

То же выражение можно записать в еще более кратком виде: $x_1y_0'$, поскольку действие каждого *индекса* распространяется от того места, где он стоит, *до начала* всего выражения.

При переводе суждения, начинающегося со слова «все», из абстрактной формы в индексную или наоборот полезно иметь в виду, что предикат *изменяет* свой *знак*. Так, суждение «Все $y$ суть $x$» в новых обозначениях имеет вид $y_1x_0$— предикат, бывший $x'$, стал $x$, то есть изменил свой знак. Еще пример. Выражение $x_1y_0'$ в абстрактной форме имеет вид суждения «Все $x'$ суть $y$». Здесь предикат также изменил свой знак: был $y'$, стал $y$.

## *Глава III*

## СИЛЛОГИЗМЫ

### § 1. Представление силлогизмов

Мы уже знаем, как записать с помощью индексов каждое из трех суждений, образующих силлогизмы. После того как это сделано, необходимо лишь расположить все три полученных выражения в строку, вставить между посылками знак †, а перед заключением — знак **P**. Так, силлогизм

Ни один $x$ не есть $m'$,
Все $m$ суть $y$.
______________________
Ни один $x$ не есть $y'$

можно представить в виде

$$xm_0' \dagger m_1 y_0' \,\mathbf{P}\, xy_0'.$$

При переводе суждения из конкретной формы в индексную первое время удобно переводить его сначала *в абстрактную* форму и лишь затем записывать с помощью индексных обозначений. Приобретя небольшой опыт, читатель сможет без труда переводить конкретные суждения непосредственно в индексную форму.

## § 2. Формулы для решения задач на силлогизмы

Коль скоро мы установили с помощью диаграмм, какое заключение следует из данной пары посылок, и записали силлогизм в индексных обозначениях, мы получили *формулу*, позволяющую сразу, без диаграмм, выводить заключение из любой другой пары посылок, имеющих *ту же* индексную форму. Например, выражение

$$xm_0 \dagger ym'_0 \mathbf{P}\, xy_0$$

есть формула, позволяющая выводить заключение из любых двух посылок вида

$$xm_0 \dagger ym'_0\,.$$

Предположим, что мы рассматриваем суждения

«Ни один обжора не здоров».
«Ни один нездоровый человек не силен»,

считая их посылками силлогизма. Выбрав «людей» в качестве «Вселенной рассмотрения» и положив $m$=здоровые, $x$ = обжоры, $y$ = сильные, представим суждения в абстрактной форме:

«Ни один $x$ не есть $m$».
«Ни один $m'$ не есть $y$».

В индексных обозначениях их можно записать так:

$$xm_0 \dagger m'y_0.$$

Следовательно, эти посылки тождественны посылкам в нашей *формуле*. Отсюда мы сразу получаем заключение

$$xy_0,$$

или, в абстрактной форме,

«Ни один $x$ не есть $y$».

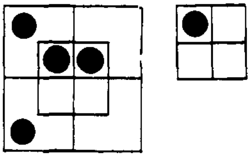
В конкретной форме это заключение звучит так: «Ни один обжора не силен».

Теперь я возьму три различные формы, которые могут принимать пары силлогизмов, и с помощью диаграмм раз и навсегда выведу из них заключения. В результате я получу некоторые весьма полезные формулы, которые в дальнейшем буду называть фигура I, фигура II и фигура III.

**Фигура I.** К фигуре I относится любая пара посылок, состоящая из суждений-химер и содержащая исключаемые термины различных знаков.

В простейшем случае посылки фигуры I имеют вид

$$xm_0 \dagger ym'_0.$$



Следовательно, $xy_0$.

Мы видим, что и заключение является суждением-химерой, а оставляемые термины сохраняют свои знаки. Это правило, как мы убедимся, справедливо для *любой* пары посылок, удовлетворяющей перечисленным выше условиям. Читатель может убедиться в этом сам, рассмотрев с помощью диаграмм несколько вариантов посылок, например следующие:

$m_1x_0 \dagger ym'_0$ (откуда **P** $xy_0$),

$xm'_0 \dagger m_1y_0$ (откуда **P** $xy_0$),

$x'm_0 \dagger ym'_0$ (откуда **P** $x'y_0$),

$m_1x'_0 \dagger m_1y'_0$ (откуда **P** $x'y'_0$).

Если *в посылках* утверждается, что какой-то из оставляемых членов существует, то и *в заключении* можно утверждать, что он существует. Таким образом, фигура I делится на два *варианта*:

а) в заключении силлогизма делается утверждение о существовании *одного* оставляемого члена;

б) в заключении силлогизма делается утверждение о существовании *обоих* оставляемых членов.

Читателю рекомендуется самостоятельно рассмотреть с помощью диаграмм примеры того и другого вариантов:

$m_1x_0 \dagger y_1m'_0$ (откуда следует, что $y_1x_0$),

$x_1m'_0 \dagger m_1y_0$ (откуда следует, что $x_1y_0$),

$x'_1m_0 \dagger y_1m'_0$ (откуда следует, что $x'_1y_0 \dagger y_1x'_0$).

Итак, полезно запомнить формулу

$$xm_0 \dagger ym_0' \mathbf{P}\, xy_0$$

со следующими двумя правилами:

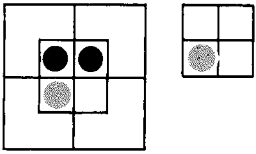
1) *из двух суждений-химер с исключаемыми терминами различных знаков следует суждение-химера, в котором оба сохраняемых термина имеют те же знаки, что и в посылках.*

2) *если в посылках делается утверждение о существовании какого-нибудь из оставляемых терминов, то и в заключении силлогизма можно утверждать, что этот сохраняемый термин существует.*

**Фигура II.** К фигуре II относится любая пара посылок, состоящая из одного суждения-химеры и одного суждения-реальности и содержащая исключаемые термины одинаковых знаков.

В простейшем случае такая пара посылок имеет вид

$$xm_0 \dagger ym_1.$$



Следовательно, $x'y_1$.

Мы видим, что заключение в этом случае является суждением-реальностью, а оставляемый термин-химера изменил свой знак.

Это правило, как нетрудно видеть, справедливо для *любой* пары посылок, относящихся к фигуре II. Читатель может убедиться в этом, рассмотрев с помощью диаграмм несколько пар посылок, относящихся к фигуре II, например:

$x'm_0 \dagger ym_1$ (откуда $\mathbf{P}\ xy_1$),

$x_1m_0' \dagger y'm_1'$ (откуда $\mathbf{P}\ x'y_1'$),

$m_1x_0 \dagger y'm_1$ (откуда $\mathbf{P}\ x'y_1'$).

Формула, которую полезно запомнить, имеет в этом случае вид

$$xm_0 \dagger ym_1 \mathbf{P}\ x'y_1.$$

Пользуясь ею, не следует забывать и о правиле: *из суждения-химеры и суждения-реальности с исключаемыми терминами одинаковых знаков следует суждение-химера, в котором оставляемый термин-химера имеет иной знак, чем в посылке.*

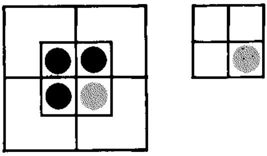
Это правило есть не что иное, как словесное выражение формулы.

**Фигура III.** К фигуре III относится любая пара посылок, состоящая из двух суждений-химер, в которых утверждается существование исключаемых терминов с одинаковыми знаками.

В простейшем случае пара посылок, относящаяся к фигуре III, имеет вид

$$xm_0 \dagger ym_0 \dagger m_1.$$

(Обратите внимание, что утверждение о существовании термина $m$ *выделено*, поэтому несущественно, *в какую* из двух посылок входит термин $m$. Приведенная выше формула охватывает, таким образом, три случая: $m_1x_0 \dagger ym_0$, $xm_0 \dagger m_1y$ и $m_1x_0 \dagger m_1y_0$.)



Следовательно, $x' y'_1$.

Мы видим, что заключением в этом случае является суждение-реальность и что *оба* оставляемых термина изменили свой знак. Правило справедливо для *любой* пары посылок, принадлежащих к фигуре III. Читатель может убедиться в этом, рассмотрев с помощью диаграмм несколько примеров:

$x' m_0 \dagger m_1 y_0$ (откуда **P** $xy'_1$),

$m'_1 x_0 \dagger m' y'_0$ (откуда **P** $x' y_1$),

$m_1 x'_0 \dagger m_1 y'_0$ (откуда **P** $xy_1$).

Формула, которую полезно запомнить, имеет следующий вид:

$$xm_0 \dagger ym_0 \dagger m_1 \,\mathbf{P}\, x' y'_1 .$$

Правило (по существу пересказ формулы) на этот раз звучит так: *из двух суждений-химер, в которых утверждается существование исключаемых терминов одного знака, следует заключение-реальность, в котором оба сохраняемых термина имеют иной знак, чем в посылках.*

Чтобы читателю было легче запомнить особенности и формулы трех фигур, я свел их в одну таблицу.

ТАБЛИЦА IX

Фигура I

$$xm_0 \dagger ym'_0 \mathrm{P} xy_0$$

Из двух химер с исключаемыми терминами различных знаков следует химера, в которой оба сохраняемых термина имеют те же знаки, что и в посылках.

Если в посылках делается утверждение о существовании какого-нибудь из оставляемых терминов, то и в заключении силлогизма можно утверждать, что этот сохраняемый термин существует.

---

Фигура II

$$xm_0 \dagger ym_1 \mathrm{P} x'y_1$$

Из химеры и реальности с исключаемыми терминами одинаковых знаков следует химера, в которой оставляемый термин имеет иной знак, чем в посылках.

---

Фигура III

$$xm_0 \dagger ym_0 \dagger m_1 \mathrm{P} x'y'_1$$

Из двух химер, в которых утверждается существование исключаемых терминов одного знака, следует реальность, в которой оба сохраняемых термина имеют иной знак, чем в посылках.

---

Пользуясь этими формулами, рассмотрим несколько задач на силлогизмы, которые ранее (в книге V, гл. II) решили с помощью диаграмм. При самостоятельном решении задач читатель может использовать эти примеры в качестве образцов.

I

*Ни один мой сын не мошенник.*

*К честному человеку люди всегда относятся с уважением.*

Вселенная — «люди», $m$ = честные, $x$ = мои сыновья, $y$ = пользующиеся уважением.

$$xm'_0 \dagger m_1 y'_0 \mathrm{P} xy'_0 \qquad \text{(фигура Iб)},$$

то есть

*Ни к одному из моих сыновей никто никогда не относится без уважения.*

II

*Все кошки знают французский язык.*

*Некоторые цыплята — кошки.*

Вселенная — «живые существа», $m$ = кошки, $x$ = знающие французский язык, $y$ = цыплята.

$$m_1 x_0' \dagger y m_1 \mathbf{P}\, x y_1 \qquad \text{(фигура II)},$$

то есть

*Некоторые цыплята знают французский язык.*

III

*Все солдаты сильные.*

*Все солдаты храбрые.*

*Некоторые сильные люди храбры.*

Вселенная — «люди», $m$ = солдаты, $x$ = сильные, $y$ = храбрые.

$$m_1 x_0' \dagger m_1 y_0' \mathbf{P}\, x y_1 \qquad \text{(фигура III)},$$

то есть заключение силлогизма правильно.

IV

*Я восхищен этими картинами.*

*Когда что-нибудь восхищает меня, мне хочется разглядеть это «что-нибудь» особенно внимательно.*

Вселенная — «предметы», $m$ = то, что восхищает меня, $x$ = эти картины, $y$ = предметы, которые я хочу разглядеть особенно внимательно.

$$x_1 m_0' \dagger m_1 y_0' \mathbf{P}\, x_1 y_0' \qquad \text{(фигура Ia)}.$$

Следовательно, заключение $xy_1$ *неполно*; *полное* заключение формулируется так:

*Все эти картины я хочу разглядеть особенно внимательно.*

V

*Лишь тот, кто храбр, достоин славы.*

*Некоторые хвастуны — трусы.*

*Некоторые хвастуны не достойны славы.*

Вселенная — «люди», $m$ = храбрые, $x$ = достойные славы, $y$ = хвастуны.

$$m' x_0 \dagger y m_1 \mathbf{P}\, x' y_1 \qquad \text{(фигура II)}.$$

Заключение силлогизма правильно.

VII

*Никому из тех, кто хочет ехать поездом, кто не может достать экипаж и кто не имеет времени, чтобы спокойно дойти до станции, не миновать пробежки.*

*Эти туристы намереваются ехать поездом, но не могут достать экипаж, зато у них достаточно времени, чтобы спокойно дойти до станции.*

*Этим туристам не придется бежать.*

Вселенная — «те, кто хочет ехать поездом и не может достать экипаж», $m$ = имеющие достаточно времени, чтобы спокойно дойти до станции, $x$ = те, кому нужно бежать, $y$ = эти туристы.

$$m' x'_0 \dagger y_1 m'_0 .$$

Эта формула не подходит ни к одной из трех фигур. Следовательно, необходимо обращаться к методу диаграмм, что мы и сделали на стр. 253.

Заключения нет.

Примечание. Одно из излюбленных возражений, выдвигаемых протяв логики ее недругами, состоит в том, что силлогизм не имеет доказательной силы, поскольку якобы содержит логическую ошибку, известную под названием *предвосхищения основания* («утверждается то, что еще требуется доказать»): по их мнению, заключение силлогизма целиком входит в *одну* из посылок.

Столь грозное (на первый взгляд) возражение ясно, просто и изящно опровергается тремя диаграммами, из которых видно, что в каждой из трех фигур заключение в действительности содержится в *двух* взятых вместе посылках и каждая из посылок вносит в заключение свою долю.

Так, если мы возьмем фигуру I, то посылка $xm_0$ «опустошает» *внутреннюю* клетку северо-западной четверти диаграммы, в то время как посылка $ym_0$ «опустошает» *наружную* клетку той же четверти. Следовательно, для того чтобы пустой была вся северо-западная четверть диаграммы и мы могли вывести заключение $xy_0$, необходимы *обе* посылки.

Рассмотрим, далее, фигуру II. Посылка $xm_0$ указывает, что внутренняя клетка северо-западной четверти пуста. Посылка $ym_1$ утверждает лишь, что внутренняя часть западной половины диаграммы занята и *где-то* на ней может стоять единица. Не будь у нас *других* сведений, мы не могли бы решить, в какую из клеток следует вписать единицу и последнюю пришлось бы отправлять «на стенку». Лишь после того, как другая посылка сообщит, что пуста *верхняя* из двух клеток, образующих внутреннюю часть западной половины, мы чувствуем себя вправе поставить единицу в нижнюю клетку и тем самым вывести заключение $x'y_1$.

Наконец, при рассмотрении фигуры III суждение «Некоторые существуют» позволяет вписать единицу в *какую-то* из клеток внутреннего квадрата, оставляя широкий простор для выбора стенки, на которой должна сидеть наша единица. Чтобы исключить северную половину внутреннего квадрата, необходимо воспользоваться посылкой $xm_0$; чтобы исключить западную половину — посылкой $ym_0$. Следовательно, чтобы «загнать» единицу во внутреннюю часть северо-восточной четверти диаграммы и таким образом вывести заключение $x'y_1'$, необходимо использовать *обе* посылки.

## § 3. Логические ошибки

Любое рассуждение, которое *подводит* нас, создавая видимость доказательства там, где его в действительности нет, может быть названо логической ошибкой. Сейчас нас будет интересовать ошибка особого рода. Она состоит в том, что из пары суждений, претендующих на роль посылок в некоем силлогизме, нельзя вывести никакого заключения.

Если каждое из «подозреваемых» суждений принадлежит к типу *I*, *E* или *A* (а других суждений мы не рассматриваем), то ошибку можно обнаружить с помощью метода диаграмм: для этого достаточно нанести суждения-кандидаты в посылки на трехбуквенную диаграмму и заметить, что из нее нельзя извлечь никаких сведений, которые можно было бы представить на двухбуквенной диаграмме.

Но представим себе, что мы используем метод *индексов* и нам встретилась пара суждений, содержащих логическую ошибку. Как в этом случае обнаружить, что из псевдопосылок не следует заключения?

Мне кажется, что лучше всего поступить с *ошибками* так, как мы уже поступили с силлогизмами, то есть выбрать некоторые формы пар суждений, нанести их раз и навсегда на трехбуквенную диаграмму, убедиться, что заключение из них не следует, и, назвав их *формулами ошибок*, выписать отдельно аналогично тому, как ранее мы выписали три *формулы силлогизмов*.

Однако, если бы обе серии формул были записаны *одним и тем же* способом, например по методу индексов, то возникла бы опасность их смешения. Чтобы избежать недоразумений, я предлагаю записывать формулы *для ошибок словами* и называть их не формулами, а формами.

Итак, с помощью метода диаграмм мы установим три формы ошибок, которые понадобятся нам в дальнейшем:

1) ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается;

2) ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью;

3) ошибка двух посылок-реальностей;

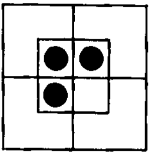
Рассмотрим каждую из форм в отдельности и убедимся, что ни в одной из них из посылок не следует заключение.

1. Ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых

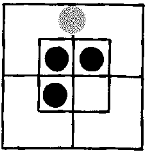
не утверждается. Ясно, что ни одно из суждений-посылок не может быть *реальностью*, поскольку суждения рассматриваемых типов утверждают, что оба их термина *существуют* (см. стр. 210). Следовательно, оба суждения — *химеры*. Это означает, что их можно представить в виде формулы $xm_0 \dagger ym_0$ (с $x_1$, $y_1$ или без $x_1$, $y_1$).

На трехбуквенной диаграмме пары суждений, относящиеся к этой форме логических ошибок, выглядят так:

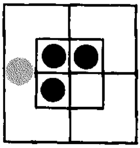
$xm_0 \dagger ym_0$



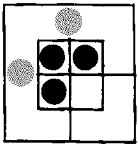
$x_1m_0 \dagger ym_0$



$xm_0 \dagger y_1m_0$

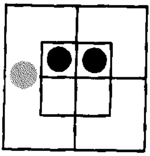


$x_1m_0 \dagger y_1m_0$

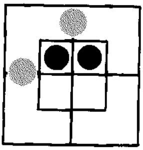


2. Ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью. Суждения, образующие две посылки, в этом случае можно представить формулой $xm_0 \dagger ym_1'$ (с $x_1$ или $m_1$ или без $x_1$ или $m_1$). Если такие суждения нанести на трехбуквеиную диаграмму, то получится следующее:

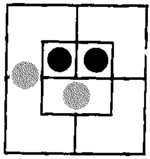
$xm_0 \dagger ym_1'$



$x_1m_0 \dagger ym_1'$



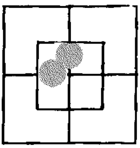
$m_1x_0 \dagger ym_1'$



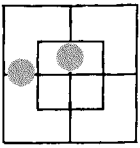
3. Ошибка двух посылок-реальностей. Посылки этого типа можно представить либо в виде $xm_1 \dagger ym_1$, либо в виде $xm_1 \dagger ym_1'$.

На трехбуквенной диаграмме они выглядят так:

$xm_1 \dagger ym_1$



$xm_1 \dagger ym_1'$



## § 4. Метод обнаружения ошибки в данной паре суждений

Предположим, что у нас имеются два суждения отношения, содержащие пару ко-классов, и мы хотим установить, какое заключение (если таковое существует) из них следует. Мы записываем оба суждения, если это необходимо, в индексной форме, а затем действуем по следующему плану:

1. Рассматриваем индексы, чтобы узнать, являются ли данные суждения:

а) двумя химерами;

б) химерой и реальностью;

в) двумя реальностями.

2. Если данные суждения образуют пару химер, мы приступаем к изучению исключаемых терминов суждений, чтобы установить, какие у них знаки: одинаковые или различные.

Если знаки исключаемых терминов *различны*, то перед нами фигура I и мы обращаемся к изучению оставляемых терминов, чтобы узнать, что именно утверждается: *существование* лишь одного из них или обоих. Если утверждается существование одного оставляемого термина, то перед нами фигура I а; если двух — то I б.

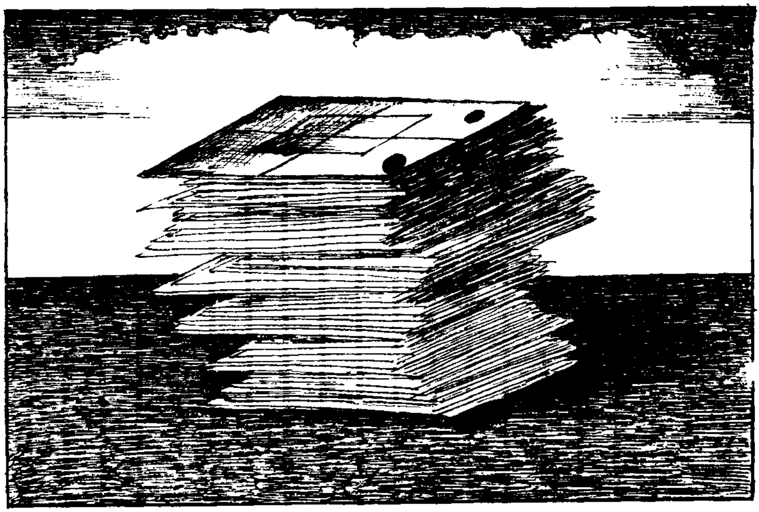
Если исключаемые термины суждений *одного знака*, то мы изучаем их, чтобы узнать, утверждается ли существование любого из них или нет. В первом случае мы имеем дело с фигурой III, во втором — с ошибкой исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.

3. Если одно суждение — реальность, а другое — химера, то мы рассматриваем их исключаемые термины, чтобы установить, одного ли или различных они знаков. Если исключаемые термины *одного знака*, то мы имеем дело с фигурой II; если разных знаков — с ошибкой исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.

4. Если оба суждения — реальности, то мы имеем дело с ошибкой двух посылок-реальностей.

# *Книга VII*

# СОРИТЫ



## *Глава I*

### ВВЕДЕНИЕ

Представим себе, что у нас имеется набор из трех или большего числа двухбуквенных суждений, все термины которых являются видами одного и того же рода. Суждения эти связаны между собой так, что, взяв определенную пару суждений, мы получим заключение, присоединив к нему новое суждение — другое заключение и т. д. до тех пор, пока не переберем все суждения, входящие в набор. Ясно, что если бы суждения исходного набора были истинными, то и окончательное заключение было бы истинным.

Такой набор вместе с присоединенным к нему последним заключением называется соритом. Исходный набор суждений называется посылками, каждое из промежуточных заключений — частным заключением, последнее заключение — полным заключением, или просто заключением. Род, видами которого являются все термины, мы будем называть

Вселенной рассмотрения, или кратко — Вселенной, сорита; исключаемые термины входящих в сорит силлогизмов — его исключаемыми терминами, а два оставшихся термина, вошедших в его заключение,— оставляемыми терминами сорита. (Заметим, что каждое *частное* заключение содержит один или два *исключаемых* термина, но в *полное* заключение входят лишь *оставляемые* термины).

О заключении говорят, что оно следует из посылок. Перед ним обычно либо ставят слово «следовательно», либо отделяют его от посылок горизонтальной чертой. Подчеркнем, что вопрос о том, *следует ли* данное заключение из посылок, не зависит от *фактической* истинности или ложности любого из суждений, входящих в сорит, а определяется исключительно *взаимосвязью между суждениями*.

В качестве примера сорита рассмотрим следующий набор из 5 суждений:

1. Ни одно $a$ не есть $b'$.
2. Все $b$ суть $c$.
3. Все $c$ суть $d$.
4. Ни одно $e'$ не есть $a'$.
5. Все $h$ суть $e'$.

Взяв первое и второе суждения, получим заключение «Ни одно $a$ не есть $c'$». Взяв его вместе с третьим суждением, получим заключение «Ни одно $a$ не есть $d'$». Из него и четвертого суждения следует заключение «Ни одно $d'$ не есть $e'$». Из последнего, взятого вместе с пятым суждением, следует заключение «Все $h$ суть $d$». Таким образом, если бы исходные суждения были истинными, то и полученное заключение было бы истинным.

Итак, исходные 5 суждений вместе с суждением «Все $h$ суть $d$» образуют *сорит*. Исходные суждения служат *посылками* сорита, суждение «Все $h$ суть $d$» — его *заключением*; $a$, $b$, $c$, $e$ — *исключаемыми терминами* сорита, а $d$ и $h$ — его *оставляемыми терминами*.

Весь сорит в целом можно представить в следующем виде:

Ни одно $a$ не есть $b'$;
Все $b$ суть $c$;
Все $c$ суть $d$;
Ни одно $e'$ не есть $a'$;
Все $h$ суть $e'$.

---

Все $h$ суть $d$.

В этом сорите тремя частными заключениями служат суждения «Ни одно $a$ не есть $c'$», «Ни одно $a$ не есть $d'$», «Ни одно $d'$ не есть $e'$». При другом расположении посылок частные заключения могли бы быть иными. Например, если бы мы брали суждения в последовательности 4, 1, 5, 2, 3, то частными заключениями были бы суждения «Ни одно $c'$ не есть $b'$», «Все $h$ суть $b$», «Все $h$ суть $c$». Всего в этом сорите имеется девять частных заключений. Найти их мы предоставляем читателю в качестве интересной задачи.

## *Глава II*

## ЗАДАЧИ НА СОРИТЫ

### § 1. Предварительные замечания

Задачи, которые нам предстоит решать, формулируются следующим образом: «Дано три или большее число суждений отношения. Приняв их за посылки, установить, какое заключение (если таковое существует) из них следует».

Пока мы ограничимся лишь теми задачами, которые можно решать с помощью формул фигуры I (см. стр. 259). Задачи, требующие для своего решения *иных* формул, слишком трудны для начинающих.

Задачи рассматриваемого нами типа можно решать с помощью любого из двух методов:

1) метода отдельных силлогизмов;

2) метода подчеркивания.

Рассмотрим каждый из методов в отдельности.

### § 2. Решение соритов методом отдельных силлогизмов

Правила, которых надлежит придерживаться при решении задач методом отдельных силлогизмов, сводятся к следующему.

1. Выбрать «Вселенную».

2. Составить словарь буквенных обозначений $a$, $b$, $c$, ... и т. д. для терминов суждений.

3. Записать суждения в индексной форме.

4. Выбрать два суждения, содержащие два ко-класса, и использовать их в качестве посылок силлогизма.

5. Найти по формуле заключение силлогизма.

6. Среди посылок выбрать такую, которая вместе с

полученным заключением второго силлогизма образовала бы посылки силлогизма.

7. Пользуясь формулой, найти заключение второго силлогизма.

8. Продолжать этот процесс до тех пор, пока не будут исчерпаны все посылки.

9. Представить последнее заключение, которое является полным заключением сорита в конкретной форме.

В качестве примера рассмотрим следующий набор посылок:

1. Все полисмены в этой округе ужинают у нашей кухарки.
2. Человек с длинными волосамн не может не быть поэтом.
3. Амос Джадд никогда не сидел в тюрьме.
4. Все кузены иашей кухарки любят холодную баранину.
5. В этой округе нет других поэтов, кроме полисменов.
6. С нашей кухаркой не ужииает никто, кроме ее кузенов.
7. Все люди с короткими волосами сидели в тюрьме.

Вселенная — «людн», $a$ = Амос Джадд, $b$ = кузены нашей кухарки, $c$ = сидевшие в тюрьме, $d$ = с длинными волосами, $e$ = любящие холодную баранину, $h$ = поэты, $k$ = полисмены этой округи, $l$ = ужииающие с иашей кухаркой.

Представим исходные посылки в иидексной форме. Для этого прежде всего следует представить нх в абстрактной форме:

1. Все $k$ суть $l$.
2. Ни однн $d$ ие есть $h'$.
3. Все $a$ суть $c$.
4. Все $b$ суть $e$.
5. Ни один $k'$ не есть $h$.
6. Ни один $b'$ ие есть $l$.
7. Все $d'$ суть $c$.

Представить абстрактные суждения в *индексной* форме ие составляет уже никакого труда:

1) $k_1 l'_0$, 5) $k' h_0$,

2) $d h'_0$, 6) $b' l_0$,

3) $a_1 c_0$, 7) $d'_1 c'_0$.

4) $b_1 e'_0$,

Найдем теперь две посылки, из которых следует заключение. Для этого возьмем первую посылку и будем перебирать по порядку все остальные до тех пор, пока не дойдем до посылки, которая вместе с первой образует фигуру I. Такой посылкой, как нетрудно видеть, будет посылка 5 ($k$ — исключаемый термин). Следовательно, первым будет силлогизм

$$\begin{array}{r} 1)\ k_1 l'_0 \\ 5)\ k' h_0 \\ \hline 8)\ l' h_0 \end{array}$$

Возьмем заключение $l'h_0$ и подыщем ему пару среди оставшихся шести посылок. Искомым суждением окажется посылка 2 ($h$ — исключаемый термин), поэтому наш второй силлогизм будет иметь вид:

$$\begin{array}{r}
8)\ l'\,h_0 \\
\underline{2)\ d\,h'_0} \\
9)\ l'\,d_0
\end{array}$$

Посылки 1, 5 и 2 мы уже использовали, поэтому пару для заключения $l'd_0$ необходимо искать среди оставшихся посылок. Взяв посылку 6, получим третий силлогизм:

$$\begin{array}{r}
9)\ l'\,d_0 \\
\underline{6)\ b'\,l_0} \\
10)\ db'_0
\end{array}$$

Какая посылка образует пару с $db'_0$? Очевидно, посылка 4. Четвертый силлогизм имеет вид:

$$\begin{array}{r}
10)\ db'_0 \\
\underline{4)\ b_1e'_0} \\
11)\ de'_0
\end{array}$$

Присоединив к заключению 11 посылку 7, получим

$$\begin{array}{r}
11)\ de'_0 \\
\underline{7)\ dc'_0} \\
12)\ e'c'_0
\end{array}$$

Наконец, взяв заключение 12 и посылку 3, построим последний силлогизм

$$\begin{array}{r}
12)\ e'\,c'_0 \\
\underline{3)\ a\ {}_1c_0} \\
a_1\,e'_0
\end{array}$$

Переведем полное заключение сначала в *абстрактную*:

«Все $a$ суть $e$»,

а затем в *конкретную* форму:

«Амос Джадд любит холодную баранину».

Разумеется, при решении задач столь подробные объяснения совершенно излишни. На листке бумаги обычно остается лишь запись вроде следующей:

$$\begin{array}{llll} 1)\ k_1 l'_0, & & 5)\ k' h_0, \\ 2)\ d h'_0, & & 6)\ b' l_0, \\ 3)\ a_1 c_0, & & 7)\ d'_1 c'_0. \\ 4)\ b_1 e'_0, & & \end{array}$$

$$\frac{\begin{matrix}1)\ k_1 l'_0\\ 5)\ k' h_0\end{matrix}}{8)\ l' h_0}\qquad \frac{\begin{matrix}8)\ l' h_0\\ 2)\ d h'_0\end{matrix}}{9)\ l' d_0}\qquad \frac{\begin{matrix}9)\ l' d_0\\ 6)\ b' l_0\end{matrix}}{10)\ d b'_0}$$

$$\frac{\begin{matrix}10)\ d b'_0\\ 4)\ b_1 c'_0\end{matrix}}{11)\ d e'_0}\qquad \frac{\begin{matrix}11)\ d e'_0\\ 7)\ d'_1 c'_0\end{matrix}}{12)\ e' c'_0}\qquad \frac{\begin{matrix}12)\ e' c'_0\\ 3)\ a_1 c_0\end{matrix}}{a_1 e'_0}$$

Необходимо подчеркнуть, что при решении сорита по этому методу начинать можно с *любой* посылки.

## § 3. Решение соритов методом подчеркивания

Рассмотрим пару посылок

$$xm_0 \dagger ym_0,$$

из которых следует заключение $xy_0$.

Чтобы получить $xy_0$, мы должны, как явствует из формулы, исключить $m$ и $m'$ и написать $x$ и $y$ рядом, в одном выражении.

Условимся считать буквы $m$ и $m'$ исключениыми и читать оба выражения как одно. Тогда из двух посылок у нас в точности получится *заключение*, и нам не придется выписывать его отдельно.

Исключенные буквы будем *подчеркивать*: первую букву — *одной чертой*, вторую — *двумя*. Тогда исходные посылки примут вид

$$x\underline{m}_0 \dagger y\underline{\underline{m}}'_0,$$

и читать их надо будет как $xy_0$.

Выписывая посылки для подчеркивания, удобно опускать *все индексы*: нули можно и без того считать стоящими у всех выражений, а из единиц нас будут интересовать лишь те, которые стоят у букв, входящих в *полное* заключение (ибо зачем нам знать, утверждается ли что-либо *о существовании* терминов, которые *все равно* будут исключены). Эти единицы нетрудно восстановить по исходному выражению.

Рассмотрим решение сорита методом подчеркивания более подробно на примере из § 2.

Исходные данные

$$\overset{1}{k_1 l'_0} \dagger \overset{2}{d h'_0} \dagger \overset{3}{a_1 c_0} \dagger \overset{4}{b_1 e'_0} \dagger \overset{5}{k' h_0} \dagger \overset{6}{b' l_0} \dagger \overset{7}{d'_1 c_0}.$$

Читателю рекомендуется взять листок бумаги и выписать для себя это решение. Первая строка записи будет состоять из исходных данных, вторая будет составляться мало-помалу в процессе решения.

Прежде всего выпишем первую посылку, сохранив порядковый номер, стоящий над ней, но опустив все индексы. Затем мы должны найти посылку, которая «согласуется» с первой, то есть содержит либо $k'$, либо $l$. Просматривая посылки слева направо, мы обнаружим, что такой посылкой является посылка 5, и присоединим ее к первой, поставив между ними знак $\dagger$.

Чтобы вывести заключение, необходимо исключить из посылок 1 и 5 термины $k$ и $k'$, а то, что при этом получится, представить в виде одного выражения. *Подчеркнем* $k$ одной чертой, а $k'$ — двумя и получим $l'h$.

Теперь нам нужно найти посылку, содержащую либо $l$, либо $h'$. Просматривая посылки одну за другой, мы обнаруживаем, что этому условию удовлетворяет посылка 2, и присоединяем ее к ранее выписанным.

Три посылки-химеры (1, 5, 2) в действительности эквивалентны выражению $l'h \dagger dh'$, из которого необходимо исключить термины $h$ и $h'$, а то, что получится, записать в виде одного выражения. *Подчеркнем* $h$ и $h'$. У нас останется $l'd$.

Найдем посылку, содержащую либо $l'$, либо $d$. Такой посылкой оказывается посылка 6.

Четыре посылки-химеры, стоящие теперь во второй строке, эквивалентны выражению $l'd \dagger b'l$. Подчеркнув $l$ и $l'$, получим $db'$.

Ищем посылку, содержащую либо $d$, либо $b'$. Это будет посылка 4. Подчеркнув $b$ и $b'$, получим заключение $de'$.

После этого нам необходимо найти посылку, содержащую либо $d'$, либо $e$. Такой посылкой является посылка 7. Подчеркнув $d$ и $d'$, получим заключение $e'c'$.

Теперь нам нужно найти посылку, содержащую либо $e$, либо $c$. Такой посылкой является посылка 3 (можно сказать, *должна быть* посылка 3, ибо других посылок не осталось).

Подчеркнув $c'$ и $e$, мы обнаружим, что все длинное выражение эквивалентно $e'a$. Поэтому $e'a$ можно рассматривать как *заключение* сорита и присоединить к цепочке посылок знаком **P**.

Здесь мы должны вернуться к исходным данным и проверить, не содержится ли в них утверждение *о существовании* $e'$ или $a$. Утверждение о существовании $a$ мы обнаружим в посылке 3. Добавив этот факт к заключению, запишем последнее в виде $\mathbf{P}\, e'a_0 \dagger a_1$, то есть $\mathbf{P}\, a_1e_0'$, или «Все $a$ суть $e$».

Если читатель строго следовал всем указаниям, у него должна получиться следующая запись решения:

$$\overset{1}{k_1 l'_0} \dagger \overset{2}{dh'_0} \dagger \overset{3}{a_1 c_0} \dagger \overset{4}{b_1 e'_0} \dagger \overset{5}{k' h_0} \dagger \overset{6}{b' l_0} \dagger \overset{7}{d'_1 c'_0};$$

$$\overset{1}{\underline{k}\,\underline{l^1}} \dagger \overset{5}{\underline{\underline{k'}}\,\underline{h}} \dagger \overset{2}{\underline{d}\,\underline{\underline{h'}}} \dagger \overset{6}{\underline{b'}\,\underline{\underline{l}}} \dagger \overset{4}{\underline{\underline{be'}}} \dagger \overset{7}{\underline{\underline{d'}}\,\underline{c'}} \dagger \overset{3}{a\,\underline{\underline{c}}}\,\mathbf{P}\, e'a_0 \dagger a_1,$$

то есть $\mathbf{P}\, a_1e_0'$, или «Все $a$ суть $e$».

Рекомендую читателю взять еще один листок бумаги, переписать исходные данные и попытаться самостоятельно решить сорит, начав с какой-нибудь другой посылки. Если не удастся прийти к заключению $a_1e_0'$, то я настоятельно советую взять еще один (третий по счету) листок бумаги и *начать все сначала*!

Чтобы дать читателю образец, достойный подражания, я кратко рассмотрю решение сорита из 5 посылок.

1. Я чрезвычайно дорожу всем, что дарит мне Джон.
2. Ничего, кроме этой кости, не придется по вкусу моей собаке.
3. Я очень берегу то, чем особенно дорожу.
4. Эта кость — подарок от Джона.
5. Вещи, которые я очень берегу, я не даю своей собаке.

Вселенная — «вещи», $a$ = подаренные мне Джоном, $b$ = даваемые мной собаке, $c$ = которыми я особенно дорожу, $d$ = которые приходятся по вкусу моей собаке, $e$ = которые я очень берегу, $h$ = эта косточка.

$$\overset{1}{a_1 c'_0} \dagger \overset{2}{h' d_0} \dagger \overset{3}{c_1 e'_0} \dagger \overset{4}{h_1 a'_0} \dagger \overset{5}{e_1 b_0};$$

$$\overset{1}{\underline{a}\,\underline{c'}} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{c}}\,\underline{e'}} \dagger \overset{4}{\underline{h}\,\underline{\underline{a'}}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{h'}}\,d} \dagger \overset{5}{\underline{\underline{e}}\,b}\ \mathbf{P}\ db_0,$$

то есть «Ничто из того, что я даю моей собаке, не приходится ей по вкусу», или «Моя собака *недовольна* тем, что я ей даю!»

Обратите внимание на то, что при решении сорита методом подчеркивания начинать можно с *любой* посылки. Например, мы могли бы начать с посылки 5. Тогда вторая строка (решение) выглядела бы так:

$$\overset{5}{\underline{e}\,b} \dagger \overset{3}{\underline{c}\,\underline{\underline{e'}}} \dagger \overset{1}{\underline{a}\,\underline{\underline{c'}}} \dagger \overset{4}{\underline{h}\,\underline{\underline{a'}}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{h'}}\,d}\ \mathbf{P}\ bd_0.$$

Читатель, который успешно преодолел все приводившиеся до сих пор примеры и, подобно Александру Македонскому, жаждет «новых миров для покорения», может израсходовать свою энергию на следующие 17 экзаменационных билетов. Отвечать более чем на один билет в день не рекомендуется.

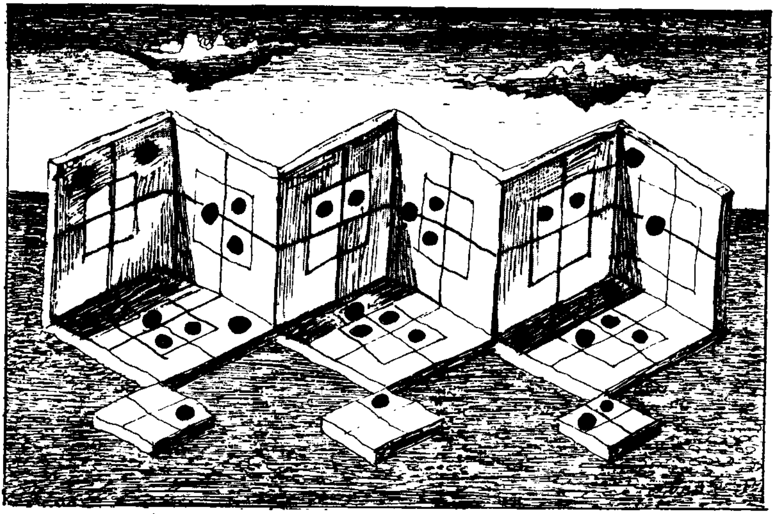
I. Что такое класс и классификация?
II. Что такое род, вид и видовое отличие?
III. Что такое пустой и непустой классы?
IV. Что такое разбиение? В каких случаях классы называются ко-классами?
V. Что такое дихотомия? Какое произвольное соглашение иногда приходится принимать при дихотомии?
VI. Что такое определение?
VII. Что такое субъект и предикат суждения? Что такое нормальная форма суждения?
VIII. Какие суждения обозначаются буквами $I$, $E$ и $A$?
IX. Что называется нормальной формой суждения существования?
X. Что такое «Вселенная рассмотрения»?
XI. Что можно утверждать относительно существования терминов в суждении отношения?
XII. Объясните смысл выражеиия «сидеть на стенке».
XIII. Что такое обратные суждеиия?

XIV. Что такое конкретные и абстрактные суждения?
XV. Что такое силлогизм? Что называется посылками силлогизма и его заключением?
XVI. Что такое сорит? Что называется посылками сорита, его частными заключениями и его полным заключением?
XVII. Что такое «Вселенная рассмотрения»? Исключаемые и оставляемые термины силлогизма? сорита?

Проверив свои знания, читатель сможет проверить свое умение пользоваться ими, решив по одной-две задачи из каждого параграфа главы I следующей кииги.

# *Книга VIII*

# ПРИМЕРЫ, ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ



## *Глава I*

## ПРИМЕРЫ

### § 1. Привести к нормальной форме следующие суждения отношения:

1. Я совершил прогулку.
2. Я чувствую себя лучше.
3. Никто не читал этого письма, кроме Джона.
4. Ни вы, ни я не стары.
5. Ни одно жирное животное не может бегать быстро.
6. Лишь тот, кто храбр, достоин славы.
7. Никто не выглядит поэтически, если он не бледен.
8. Некоторые судьи вспыльчивы.
9. Я никогда не пренебрегаю важными делами.
10. То, что трудно, требует внимания.
11. Всего, что неполезно, следует избегать.
12. Все законы, принятые на прошлой неделе, относятся к налогообложению.
13. Логика всегда ставила меня в тупик.
14. Некоторые блюда, если их плохо приготовить, вредны для здоровья.

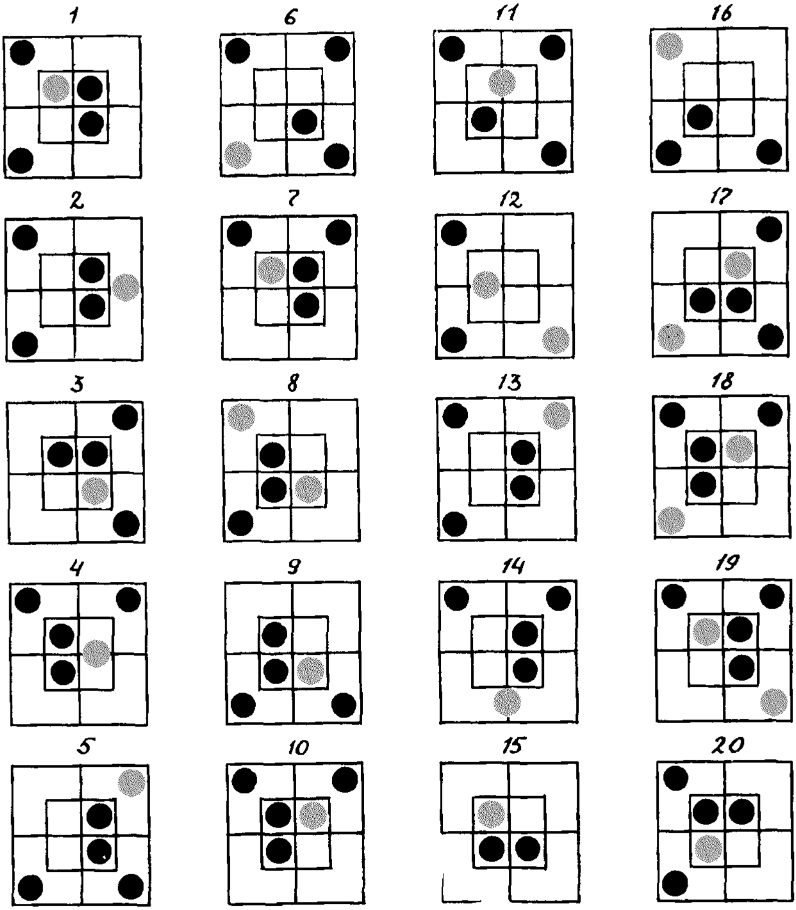
15. От скучных книг клонит в сон.
16. Если человек начеку, ему нетрудно распознать мошенника.
17. Вы и я начеку.
18. Некоторые лысые люди носят парики.
19. Тем, кто очень занят, некогда жаловаться.
20. Ни одна загадка не интересует меня, если ее можно решить.

## § 2. Представить на одной трехбуквенной диаграмме пару абстрактных суждений (одно суждение — в терминах $x$ и $m$, другое — в терминах $y$ и $m$)

1. Ни один $x$ не есть $m$.
   Ни одно $m'$ не есть $y$.
2. Ни один $x'$ не есть $m'$.
   Все $m'$ суть $y$.
3. Некоторые $x'$ суть $m$.
   Ни одно $m$ не есть $y$.
4. Все $m$ суть $x'$.
   Все $m'$ суть $y'$.
5. Все $m'$ суть $x$.
   Все $m'$ суть $y'$.
6. Все $x'$ суть $m'$.
   Ни один $y'$ не есть $m$.
7. Все $x$ суть $m$.
   Все $y'$ суть $m'$.
8. Некоторые $m'$ суть $x'$.
   Ни одно $m$ не есть $y$.
9. Все $m$ суть $x'$.
   Ни одно $m$ не есть $y$.
10. Ни одно $m$ не есть $x'$.
    Ни один $y$ не есть $m'$.
11. Ни один $x'$ не есть $m'$.
    Ни одно $m$ не есть $y$.
12. Некоторые $x$ суть $m$.
    Все $y'$ суть $m$.
13. Все $x'$ суть $m$.
    Все $m$ суть $y$.
14. Некоторые $x$ суть $m'$.
    Все $m$ суть $y$.
15. Ни одно $m'$ не есть $x'$.
    Все $y$ суть $m$.
16. Все $x$ суть $m'$.
    Ни один $y$ не есть $m$.

17. Некоторые $m'$ суть $x$.
Ни одно $m'$ не есть $y'$.
18. Все $x$ суть $m'$.
Некоторые $m'$ суть $y'$.
19. Все $m$ суть $x$.
Некоторые $m$ суть $y'$.
20. Ни один $x'$ не есть $m'$.
Некоторые $y$ суть $m$.

## § 3. Следующие трехбуквенные диаграммы перевести на язык суждений в терминах $x$ и $y$:



## § 4. Приняв каждую из следующих пар абстрактных суждений за посылки силлогизма, вывести заключение

1. Ни одно $m$ ие есть $x'$.
   Все $m'$ суть $y$.
2. Ни одно $m'$ не есть $x$.
   Некоторые $m'$ суть $y'$.
3. Все $m'$ суть $x$.
   Все $m'$ суть $y'$.
4. Ни один $x'$ не есть $m'$.
   Все $y'$ суть $m$.
5. Некоторые $m$ суть $x'$.
   Ни одии $y$ не есть $m$.
6. Ни один $x'$ не есть $m$.
   Ни одио $m$ не есть $y$.
7. Ни одно $m$ не есть $x'$.
   Некоторые $y'$ суть $m$.
8. Все $m'$ суть $x'$.
   Ни одно $m'$ не есть $y$.
9. Некоторые $x'$ суть $m'$.
   Ни одно $m$ не есть $y'$.
10. Все $x$ суть $m$.
    Все $y'$ суть $m'$.
11. Ни одно $m$ не есть $x$.
    Все $y'$ суть $m'$.
12. Ни один $x$ не есть $m$.
    Все $y$ суть $m$.
13. Все $m'$ суть $x$.
    Ни один $y$ не есть $m$.
14. Все $m$ суть $x$.
    Все $m'$ суть $y$.
15. Ни одии $x$ не есть $m$.
    Нн одно $m'$ ие есть $y$.
16. Все $x$ суть $m'$.
    Все $y$ суть $m$.
17. Ни один $x$ не есть $m$.
    Все $m'$ суть $y$.
18. Ни один $x$ не есть $m'$.
    Ни одио $m$ не есть $y$.
19. Все $m$ суть $x$.
    Все $m$ суть $y'$.
20. Ни одно $m$ не есть $x$.
    Все $m'$ суть $y$.

## § 5. Приняв каждую из следующих пар конкретных суждений за посылку силлогизма, вывести заключение

1. Я совершил прогулку.
   Я чувствую себя лучше.
2. Никто не читал этого письма, кроме Джона.
   Никто из тех, кто не читал этого письма, не знает его содержания.
3. Те, кто не стар, любят ходить пешком.
   Ни вы, ни я не стары.
4. Ваш курс всегда честен.
   Ваш курс — лучшая политика.
5. Ни одио жирное животное не может бегать быстро.
   Некоторые гончие бегают быстро.
6. Некоторые из тех, кто достоин славы, получают иаграду.
   Лишь тот, кто храбр, достоин славы.
7. Конфеты сладкие.
   Некоторые сласти очень нравятся детям.
8. Джон находится в этом доме.
   Все, кто находится в этом доме, больиы.
9. Зоитик — очень иужная вещь в путешествии.
   Отправляясь в путешествие, все лишнее следует оставлять дома.
10. Музыка, которую можно услышать, вызывает колебания воздуха.
    Музыка, которую нельзя услышать, не стоит того, чтобы за нее платили деньги.
11. В некоторые праздничные дни идет дождь.
    Дождлнвые дни навевают тоску.
12. Ни один француз ие любит пудинга.
    Все англичане любят пудинг.
13. Ни одну фотографию, иа которой девушка хмурится или неестественно улыбается, нельзя счнтать удачной.
    Ни один фотограф не может удержаться, чтобы ие снять девушку нахмуренной или неестественно улыбающейся.
14. Все бледные люди флегматичны.
    Ни о ком нельзя сказать, что у него поэтическая внешность, если он не бледен.
15. Ни один старый скряга не жизнерадостен.
    Некоторые старые скряги тощи.
16. Те, кто сохраняет самообладание, ие вспыльчивы.
    Некоторые судьи вспыльчнвы.

17. Все свиньи жирные.
Нн одно животное, вскормленное на ячменном отваре, не жирно.

18. Все непрожорливые кроликн черные.
Ни один старый кролик не склоиен к воздержанию в пище.

19. Некоторые картины свидетельствуют о зрелости их авторов.
Незрелый художннк не напишет ничего подлинно ценного.

20. Я никогда не пренебрегаю важными делами.
Ваше дело не имеет особой важности.

21. Некоторые уроки трудны.
То, что трудно, требует особого внимания.

22. Все умные люди пользуются всеобщей любовью.
Все обязательные люди пользуются всеобщей любовью.

23. Невнимательному человеку ничего не стоит допустить оплошность.
Ни один внимательный человек не забывает о своем обещании.

24. Свиньн ие летают.
Свиньи прожорливы.

25. Все солдаты отлично маршируют.
Некоторые дети — не солдаты.

26. Ни один свадебный пирог не полезен.
Всего, что не полезно, следует избегать.

27. Джон трудолюбив.
Ни один трудолюбивый человек не несчастен.

28. Ни один философ не тщеславен.
Некоторые тщеславные люди — ие игроки.

29. Некоторые закоиы о налогах несправедливы.
Все законы, принятые на прошлой неделе, относятся к налогообложению.

30. Ни один военный не пишет стнхов.
Ни один из моих жильцов ие штатский.

31. Ни одно лекарство не приятно на вкус.
Александрийский лист — лекарство.

32. Некоторые циркуляры не доставляют удовольствия.
Ни одно письмо, в котором содержится какая-нибудь просьба, не доставляет удовольствия.

33. Все британцы отважны.
Ни один моряк не хвастун.

34. Ничто разумное никогда не ставило меня в тупик.
Логика ставит меня в тупик.

35. Некоторые свиньи дикие.
Все свиньи жирные.

36. Все осы злые.
Всех злых существ необходимо остерегаться.

37. Ни один старый кролик не прожорлив.
Все черные кролнки прожорливы.

38. Некоторые яйца сварены вкрутую.
Нет такого яйца, которое нельзя было бы разбнть.

39. Ни одиа антилопа не безобразиа.
Изящиые создання радуют взгляд.

40. Все каиарейки, получающие достаточное колнчество корма, поют громко.
Ни одна канарейка не иастроена меланхолически, если она поет громко.

41. Некоторые стихи оригинальны.
Нн одна оригинальная работа не делается без вдохновения.

42. Ни в одной из исследованных до сих пор стран не обитают драконы.
Неисследованиые страны пленяют воображение.

43. Нн один кусок угля не бел.
Ни один негр не бел.

44. Ни один мост не сделан из сахара.
Некоторые мосты живопнсны.

45. Ни один ребенок не терпелив.
Ни однн нетерпеливый человек не может сидеть спокойно.

46. Нн одно четвероногое не может свистеть.
Некоторые кошки — четвероиогие.

47. Скучные люди невыносимы.
Вы скучный человек.

48. Некоторые устрицы молчаливы.
Нн одно молчаливое созданье не забавно.

49. Канарейки, которые не поют громко, несчастливы.
Ни одна канарейка, получающая достаточное количество корма, не поет негромко.

50. Все мои сестры простужены.
Никто не может петь, если он простужен.

51. Все, что сделано из золота, драгоценно.
Некоторые шкатулки драгоценны.

52. Некоторые секретари — птицы.
Все секретари заняты полезным делом.

53. Все мои кузины несправедливы.
Все судьи справедливы.

54. Боль подтачивает силы.
Никакая боль не желательна.

55. Все лекарства имеют отвратительный вкус.
Александрийский лист — лекарство.

56. Некоторые нелюбезные замечания вызывают раздражение.
Ни одно критическое замечание не любезно.

57. Ни у одного высокого человека нет курчавых волос.
У негров курчавые волосы.

58. Все философы рассуждают логично.
Человек, не умеющий рассуждать логично, всегда упрям.

59. Джон трудолюбив.
Все трудолюбивые люди счастливы.

60. Эти блюда великолепно приготовлены.
Некоторые блюда, если их плохо приготовить, вредны для здоровья.

61. Книга с захватывающим сюжетом не подходит для чтения легко возбудимым людям.
От скучных книг клонит в сон.

62. Ни одна свинья не летает.
Все свиньи прожорливы.

63. Если человек начеку, он не даст провести себя мошеннику.
Вы и я начеку.

64. Некоторые сны ужасны.
Ни один барашек не внушает ужаса.

65. Ни одному лысому созданью не нужна расческа.
Ни у одной ящерицы нет волос.

66. Все битвы сопровождаются страшным шумом.
То, что происходит без шума, может ускользнуть от внимания.

67. Все мои кузины несправедливы.
Ни один судья не несправедлив.

68. Все яйца можно разбить.
Некоторые яйца сварены вкрутую.

69. Предубежденным людям нельзя доверять.
Некоторые непредубежденные люди не пользуются симпатией у окружающих.

70. Ни один властный человек не популярен.
Она властный человек.

71. Некоторые лысые люди носят парик.
У всех ваших детей чудесные собственные волосы.

72. Ни одного омара нельзя считать неразумным.
Ни одно разумное существо не станет ждать невозможного.

73. Ни один кошмарный сон не приятен.
Неприятные ощущения не желательны.

74. Ни один пирог со сливами не полезен.
Некоторые полезные вещи вкусны.

75. Того, что вкусно, не следует опасаться.
Некоторые сорта варенья вкусны.

76. Все утки при ходьбе переваливаются с боку на бок.
То, что переваливается при ходьбе с боку на бок, не изящно.

77. Эти бутерброды вкусны.
Ничто из того, что лежит на этом блюде, не вкусно.

78. Ни один богатый человек не просит милостыню.
Тем, кто небогат, следует соразмерять расходы с доходами.

79. Пауки ткут паутину.
Некоторые существа, не ткущие паутины,— дикари.

80. В некоторых из этих магазинов немного народу.
В магазине, где много народу, неуютно.

81. Предусмотрительные путешественники всегда имеют при себе деньги на мелкие расходы.
Непредусмотрительные путешественники теряют багаж.

82. Некоторые сорта герани красного цвета.
Все эти цветы красные.

83. Ни одна из моих кузин не справедлива.
Все судьи справедливы.

84. Занятые люди никогда не жалуются.
Недовольные люди всегда жалуются.

85. Ни одна из моих кузин не справедлива.
Ни один судья не несправедлив.

86. Все трезвенники любят сахар.
Ни один соловей не пьет вина.

87. Ни одна загадка не интересует меня, если ее можно решить.
Все эти загадки неразрешимы.

88. Все ясные объяснения удовлетворительны.
Некоторые извинения неудовлетворительны.

89. Все пожилые леди любят поговорить.
Все добродушные леди любят поговорить.

90. Ни один добрый поступок не беззаконен.
То, что законно, можно делать без колебаний.

91. Ни один ребенок не любит прилежно заниматься.
Среди детей нет скрипачей-виртуозов.

92. Все монеты достоинством в один шиллинг круглые.
Все эти монеты круглые.

93. Ни один честный человек не мошенничает.
Ни одному нечестному человеку нельзя верить.

94. Ни один из моих мальчиков не умен.
Ни одна из моих девочек не жадна.

95. Все шутки для того и предназначены, чтобы смешить людей.
Ни один парламентский акт не шутка.

96. Ни одно богатое приключениями путешествие не останется забытым.
Путешествия без приключений не стоят того, чтобы им посвящали книги.

97. Все мои мальчики непослушны.
Все мои девочки недовольны.

98. Ни одна приятная неожиданность не вызывает у меня чувства досады.
Ваш визит для меня приятная неожиданность.

## § 6. Проверить, являются ли следующие тройки абстрактных суждений силлогизмами

1. Некоторые $x$ суть $m$. Ни одно $m$ не есть $y'$. Некоторые $x$ суть $y$.
2. Все $x$ суть $m$. Ни один $y$ не есть $m'$. Ни один $y$ не есть $x'$.
3. Некоторые $x$ суть $m'$. Все $y'$ суть $m$. Некоторые $x$ суть $y$.
4. Все $x$ суть $m$. Ни один $y$ не есть $m$. Все $x$ суть $y'$.
5. Некоторые $m'$ суть $x'$. Ни одно $m'$ не есть $y$. Некоторые $x'$ суть $y'$.
6. Ни один $x'$ не есть $m$. Все $y$ суть $m'$. Все $y$ суть $x'$.
7. Некоторые $m'$ суть $x'$. Все $y'$ суть $m'$. Некоторые $x'$ суть $y'$.
8. Ни одно $m'$ не есть $x'$. Все $y'$ суть $m'$. Все $y'$ суть $x$.
9. Некоторые $m$ суть $x'$. Ни одно $m$ не есть $y$. Некоторые $x'$ суть $y'$.
10. Все $m'$ суть $x'$. Все $m'$ суть $y$. Некоторые $y$ суть $x'$.
11. Все $x$ суть $m'$. Некоторые $y$ суть $m$. Некоторые $y$ суть $x'$.
12. Ни один $x$ не есть $m$. Ни одно $m'$ не есть $y'$. Ни один $x$ не есть $y'$.
13. Ни один $x$ не есть $m$. Все $y'$ суть $m$. Все $y'$ суть $x$.
14. Все $m'$ суть $x'$. Все $m'$ суть $y$. Некоторые $y$ суть $x'$.
15. Некоторые $m$ суть $x'$. Все $y$ суть $m'$. Некоторые $x'$ суть $y'$.
16. Ни один $x'$ не есть $m$. Все $y'$ суть $m'$. Некоторые $y'$ суть $x$.
17. Ни одно $m'$ не есть $x$. Все $m'$ суть $y'$. Некоторые $x'$ суть $y'$.
18. Ни один $x'$ не есть $m$. Некоторые $m$ суть $y$. Некоторые $x$ суть $y$.
19. Некоторые $m$ суть $x$. Все $m$ суть $y$. Некоторые $y$ суть $x'$.
20. Ни один $x'$ не есть $m'$. Некоторые $m'$ суть $y'$. Некоторые $x$ суть $y'$.

## §. 7 Проверить, являются ли следующие тройки конкретных суждений силлогизмами

1. Ни об одном враче нельзя сказать, что он восторженная натура.
Вы натура восторженная.
Вы не врач.

2. Словари полезны.
Полезные книги высоко ценятся.
Словари высоко ценится.

3. Ни один скряга не альтруист.
Никто, кроме скряг, не станет собирать скорлупу от яиц.
Ни один альтруист не собирает скорлупу от яиц.

4. Некоторые эпикурейцы не отличаются щедростью.
Все мои дядюшки щедры.
Мои дядюшки ие эпикурейцы.

5. Золото тяжелое.
Ничто, кроме золота, не сможет заставить его замолчать.
Ничто легкое не сможет заставить его замолчать.

6. Некоторые здоровые люди тучны.
Нн один нездоровый человек не силен.
Некоторые тучные людн не снльны.

7. Я почерпнул эти сведения из газеты, не гнушающейся слухами.
Все газеты, не гнушающиеся слухами, распространяют небылицы.
Это была небылнца.

8. Некоторые галстуки безвкусны.
Все, сделанное со вкусом, приводнт меня в восторг.
Я не в восторге от некоторых галстуков.

9. Ои никогда не поет больше часа.
Если пение продолжается более часа, окружающим надоедает слушать.
Его пеиие окружающим не надоедает слушать.

10. Некоторые свечи дают очень мало света.
Свечн для того и предназначены, чтобы давать свет.
Некоторые вещи, предназначенные для того, чтобы давать свет, дают его очень мало.

11. Все, кто всерьез хочет учиться, должны упорно работать.
Некоторые из этих мальчиков работают упорно.
Некоторые из этих мальчиков всерьез хотят учиться.

12. Все львы свирепы.
Некоторые львы не пьют кофе.
Некоторые живые существа, пьющие кофе, не свнрепы.

13. Ни один скряга не щедр.
Некоторые старикн скупы.
Некоторые старики — скряги.

14. Ни одно ископаемое животное не может быть несчастно в любви.
Устрица может быть несчастна в любвн.
Устрицы — не ископаемые животные.

15. Необразованные люди обо всем судят поверхностно.
Все студенты — народ образованный.
Ни один студент не судит обо всем поверхностно.

16. Все козлята прыгают.
Ни одно молодое животное не здорово, если оно не прыгает.
Все козлята здоровы.

17. Плохо управляемые предприятия не приносят прибыли.
Железнымн дорогами никогда не управляют плохо.
Все железные дороги приносят прибыль.

18. Ни один профессор не невежествен.
Все невежественные люди тщеславны.
Ни один профессор не тщеславен.

19. Благоразумный человек избегает встречи с гиеной.
Ни одного банкира нельзя обвинить в неблагоразумии.
Ни один банкир не упустит случая избежать встречи с гиеной.

20. Все осы злы.
Ни один щенок не зол.
Щенки — не осы.

21. Ни один бездельник не станет знаменитостью.
Некоторые художники — не бездельники.
Некоторые художники станут знаменитостями.

22. Все эти конфеты — шоколадные помадки.
Все эти конфеты восхитительны на вкус.
Шоколадные помадки восхитительны на вкус.

23. Ни одна горячая сдоба не полезна.
Все булочки с изюмом неполезны.
Булочки с изюмом — не сдоба.

24. Некоторые анонимные сообщения ложны.
Все сообщения, авторы которых известны, заслуживают доверия.
Некоторые ложные сообщения не заслуживают доверия.

25. Некоторые подушки мягкие.
Ни одна кочерга не мягкая.
Некоторые кочерги — не подушки.

26. В неправдоподобные истории трудно поверить.
Ни одна из его историй не правдоподобна.
Ни в одну из его историй не легко поверить.

27. Ни один вор не является честным человеком.
Некоторых нечестных людей уличают в неблаговидных поступках.
Некоторых воров уличают в неблаговидных поступках.

28. Ни одна сдобная булочка не полезна.
Все, что выпечено из теста и пышно, не полезно.
Все сдобные булочки пышны.

29. Ни одна птица, кроме павлина, не гордится своим хвостом.
Некоторые птицы, гордящиеся своим хвостом, не могут петь.
Некоторые павлины не могут петь.

30. Тепло успокаивает боль.
Ничто из того, что не успокаивает боли, не полезно при зубной боли.
Тепло полезно при зубной боли.

31. Ни один банкрот не богат.
Некоторые купцы — не банкроты.
Некоторые купцы богаты.

32. Скучные люди невыносимы.
Ни одного скучного человека не упрашивают остаться, когда он собирается уходить из гостей.
Ни одного невыносимого человека не упрашивают остаться, когда он собирается уходить из гостей.

33. Все разумные люди ходят ногами.
Все неразумные люди ходят на голове.
Ни один человек не ходит на голове и ногах.

34. Ни одна ручная тележка не комфортабельна.
Ни один некомфортабельный экипаж не пользуется популярностью.
Ни одна ручная тележка не пользуется популярностью.

35. Ни одна лягушка не имеет поэтической внешности.
Некоторые утки выглядят прозаично.
Некоторые утки — не лягушки.

36. Ни один император не зубной врач.
Всех зубных врачей боятся дети.
Ни одного императора дети не боятся.

37. Сахар сладкий.
Соль несладкая.
Соль — не сахар.

38. Каждый орел умеет летать.
Некоторые свиньи не умеют летать.
Некоторые свиньи — не орлы.

## § 8. Предположив, что каждый из приводимых далее наборов абстрактных суждений является набором посылок сорита, найти заключение*

**1**

1. Ни одно $c$ не есть $d$.
2. Все $a$ суть $d$.
3. Все $b$ суть $c$.

**2**

1. Все $d$ суть $b$.
2. Ни одно $a$ не есть $c'$.
3. Ни одно $b$ не есть $c$.

**3**

1. Все $b'$ суть $a$.
2. Ни одно $a$ не суть $d$.
3. Все $b$ суть $c$.

**4**

1. Ни одно $c$ не есть $d$.
2. Все $b$ суть $c$.
3. Ни одно $a$ не есть $d'$.

**5**

1. Все $d$ суть $e$.
2. Все $c$ суть $a$.
3. Ни одно $b$ не есть $d'$.
4. Все $e$ суть $a'$.

**6**

1. Все $c$ суть $b$.
2. Все $a$ суть $e$.
3. Все $d$ суть $b'$.
4. Все $a'$ суть $c$.

**7**

1. Ни одно $b$ не есть $c$.
2. Все $e$ суть $h$.
3. Все $a$ суть $b$.
4. Ни одно $d$ не есть $h$.
5. Все $e'$ суть $c$.

* В конце раздела даны указания, позволяющие увеличить число примеров.

**8**

1. Ни одно $d$ не есть $h'$.
2. Ни одно $c$ не есть $e$.
3. Все $h$ суть $b$.
4. Ни одно $a$ не есть $d'$.
5. Ни одно $b$ не есть $e'$.

**9**

1. Все $h'$ суть $k'$.
2. Ни одно $b'$ не есть $a$.
3. Все $c$ суть $d$.
4. Все $e$ суть $h'$.
5. Ни одно $d$ не есть $k'$.
6. Ни одно $b$ не есть $c'$.

**10**

1. Все $a$ суть $d$.
2. Все $k$ суть $b$.
3. Все $e$ суть $h$.
4. Ни одно $a'$ не есть $b$.
5. Все $d$ суть $c$.
6. Все $h$ суть $k$.

**11**

1. Ни одно $e$ не есть $k$.
2. Ни одно $b'$ не есть $m$.
3. Ни одно $a$ не есть $c'$.
4. Все $h'$ суть $e$.
5. Все $d$ суть $k$.
6. Ни одно $c$ не есть $b$.
7. Все $d'$ суть $l$.
8. Ни одно $h$ не есть $m'$.

**12**

1. Все $n$ суть $m$.
2. Все $a'$ суть $e$.
3. Ни одно $c'$ не есть $l$.
4. Все $k$ суть $r'$.
5. Ни одно $a$ не есть $h$.
6. Ни одно $d$ не есть $l'$.
7. Ни одно $c$ не есть $n$.
8. Все $e$ суть $b$.
9. Все $m$ суть $r$.
10. Все $h$ суть $d$.

Примечание. В каждом примере в § 8 и 9 решение можно начинать с любой посылки. Следовательно, различных решений (разумеется, приводящих к одному и тому же полному заключению) существует столько, сколько посылок имеется в примере.

## § 9. Предположив, что каждый из приводимых далее наборов конкретных суждений является набором посылок сорита, найти заключение

**1**

1. Малые дети неразумны.
2. Тот, кто может укрощать крокодилов, заслуживает уважения.
3. Неразумные люди не заслуживают уважения.

Вселенная — «люди», $a$ = способные укротить крокодилов, $b$ = малые дети, $c$ = не заслуживающие уважения, $d$ = разумные.

**2**

1. Мои кастрюли — единственные из принадлежащих мне вещей, которые сделаны из олова.
2. Все *ваши* подарки чрезвычайно полезны.
3. Ни от одной из моих кастрюль нет никакой пользы.

Вселенная — «мои вещи», $a$ = сделанные из олова, $b$ = мои кастрюли, $c$ = полезные, $d$ = ваши подарки.

3

1. Ни одна из молодых картофелин не была поджарена.
2. Все картофелины на этой тарелке съедобны.
3. Ни одна жареная картофелина не съедобна.

Вселенная — «картофелины», $a$ = жареные, $b$ = съедобные, $c$ = на этой тарелке, $d$ = молодые.

4

1. Ни одна утка не танцует вальс.
2. Ни один офицер не откажется протанцевать вальс.
3. У меня нет другой птицы, кроме уток.

Вселенная — «живые существа», $a$ = утки, $b$ = моя домашняя птица, $c$ = офицеры, $d$ = желающие танцевать вальс.

5

1. Всякий, кто находится в здравом уме, может заниматься логикой.
2. Ни один лунатик не может быть присяжным заседателем.
3. Ни один из *ваших* сыновей не может заниматься логикой.

Вселенная — «люди», $a$ = способные заниматься логикой, $b$ = те, кто может быть присяжным заседателем, $c$ = находящиеся в здравом уме, $d$ = ваши сыновья.

6

1. В этой коробке нет моих карандашей.
2. Ни один из моих леденцов — не сигара.
3. Вся моя собственность, не находящаяся в этой коробке, состоит из сигар.

Вселенная — «мои вещи», $a$ = сигары, $b$ = в этой коробке, $c$ = карандаши, $d$ = леденцы.

7

1. Ни одного опытного человека нельзя считать некомпетентным.
3. Дженкинс всегда допускает грубые ошибки в работе.
3. Ни один компетентный человек не допустит грубых ошибок в работе.

Вселенная — «люди», $a$ = всегда допускающие грубые ошибки в работе, $b$ = компетеитные, $c$ = опытные, $d$ = Дженкинс.

8

1. Ни один терьер не блуждает среди знаков Зодиака.
2. То, что не блуждает среди знаков Зодиака, не может быть кометой.
3. Только у терьера хвост колечком.

Вселенная — «предметы», $a$ = кометы, $b$ = имеющие хвост колечком, $c$ = терьеры, $d$ = блуждающие среди знаков Зодиака.

9

1. Никто не станет выписывать газету «Таймс», если он не получил хорошего образования.
2. Ни однн дикобраз не умеет читать.

3. Те, кто не умеет читать, не получили хорошего образования.

Вселенная — «живые существа», $a$ = умеющие читать, $b$ = дикобразы, $c$ = выписывающие газету «Таймс», $d$ = получившие хорошее образование.

**10**

1. Все пудинги вкусны.
2. Это блюдо — пудинг.
3. Ни одно вкусное блюдо не полезно.

Вселенная — «блюда», $a$ = вкусные, $b$ = пудинги, $c$ = это блюдо, $d$ = полезные.

**11**

1. Когда мой садовник рассуждает на военные темы, его стоит послушать.
2. Никто не может помнить битву при Ватерлоо, если он не очень стар.
3. Того, кто не помнит битву при Ватерлоо, не стоит слушать, когда он рассуждает на военные темы.

Вселенная — «люди», $a$ = те, кто может помнить битву при Ватерлоо, $b$ = мой садовник, $c$ = тот, кого стоит слушать, когда он рассуждает на военные темы.

**12**

1. Все колибри имеют яркое оперение.
2. Ни одна крупная птица не питается нектаром.
3. Птицы, которые не питаются нектаром, имеют неяркое оперение.

Вселенная — «птицы», $a$ = колибри, $b$ = крупные, $c$ = питающиеся медом, $d$ = с ярким оперением.

**13**

1. Все утки в этой деревне, имеющие метку «Б», принадлежат миссис Бонди.
2. Утки в этой деревне не носят кружевных воротничков, если не принадлежат миссис Бонди.
3. У миссис Бонди в этой деревне нет серых уток.

Вселенная — «утки в этой деревне», $a$ = принадлежащие миссис Бонди, $b$ = имеющие метку «Б», $c$ = серые, $d$ = носящие кружевные воротнички.

**14**

1. Вся старая посуда на этой полке имеет трещины.
2. Ни один горшок на этой полке не новый.
3. Все, что стоит на этой полке, пригодно для хранения воды.

Вселенная — «посуда на этой полке», $a$ = не протекающая, $b$ = имеющая трещины, $c$ = горшки, $d$ = старые.

### 15

1. Все незрелые фрукты неполезны.
2. Все эти яблоки созрели.
3. Ни один фрукт, выросший в тени, не зрелый.

Вселенная — «фрукты», $a$ = выросшие в тени, $b$ = зрелые, $c$ = эти яблоки, $d$ = полезные.

### 16

1. Щенок, не желающий лежать спокойно, всегда будет вам благодарен, если вы предложите ему скакалку.
2. Хромой щенок не скажет вам спасибо, если вы предложите ему скакалку.
3. Никто, кроме хромых щенят, не станет ткать.

Вселенная — «щенята», $a$ = те, кто станет ткать, $b$ = те, которые благодарны за скакалку, $c$ = хромые, $d$ = желающие лежать спокойно.

### 17

1. Ни одно имя в этом списке не годится для героя романа.
2. Имена, начинающиеся с гласной, всегда мелодичны.
3. Ни одно имя не годится для героя романа, если оно начинается с согласной.

Вселенная — «имена», $a$ = начинающиеся с гласной, $b$ = стоящие в этом списке, $c$ = мелодичные, $d$ = подходящие герою романа.

### 18

1. Все члены палаты общин находятся в полном рассудке.
2. Ни один член парламента, носящий титул пэра, не станет участвовать в скачках на мулах.
3. Все члены палаты лордов носят титул пэра.

Вселенная — «члены парламента», $a$ = члены палаты общин, $b$ = находящиеся в полном рассудке, $c$ = те, кто может принять участие в скачках на мулах, $d$ = носящие титул пэра.

### 19

1. Ни один из товаров, который был куплен и оплачен, не находится более в продаже в этом магазине.
2. Ни один из этих товаров нельзя вынести из магазина, если на нем нет ярлычка с надписью «Продано».
3. Ни на одном из этих товаров нет ярлычка с надписью «Продано», если он не куплен и не оплачен.

Вселенная — «товары в этом магазине», $a$ = те, которые можно вынести из магазина, $b$ = купленные и оплаченные, $c$ = те, на которых есть ярлычок с надписью «Продано», $d$ = находящиеся в продаже.

## 20

1. Ни один акробатический трюк, не объявленный в программе циркового представления, никогда ие исполнялся.
2. Ни один акробатический трюк не возможен, если он включает в себя четверное сальто.
3. Ни один невозможный акробатический трюк никогда не стоит в программе циркового представления.

Вселенная — «акробатические трюки», $a$ = объявленные в программе циркового представления, $b$ = исполияемые в цирке, $c$ = включающие в себя четверное сальто, $d$ = возможные.

## 21

1. Никто из тех, кто действительно ценит Бетховена, не стаиет шуметь во время исполнения «Луиной сонаты».
2. Морские свинки безнадежно невежественны в музыке.
3. Те, кто безнадежно невежествен в музыке, не станут соблюдать тишину во время исполнения «Лунной сонаты».

Вселенная — «живые существа», $a$ = морские свинки, $b$ = безнадежно невежественные в музыке, $c$ = соблюдающие тишину во время исполнения «Луиной сонаты», $d$ = действительно ценящие Бетховена.

## 22

1. Яркие цветы всегда благоухают.
2. Я ие люблю цветы, выросшие ие на открытом воздухе.
3. Ни один цветок, выросший на открытом воздухе, не имеет бледиой окраски.

Вселеиная — «цветы», $a$ = яркие, $b$ = выросшие на открытом воздухе, $c$ = благоухающие.

## 23

1. Ораторы, рассчитывающие на внешний эффект, слишком много думают о себе.
2. Находиться в обществе хорошо информированных людей приятно.
3. Находиться в обществе людей, которые слишком много думают о себе, неприятно.

Вселенная — «люди», $a$ = люди, в обществе которых приятно находиться, $b$ = хорошо информированные, $c$ = ораторы, бьющие на виешний эффект, $d$ = слишком много о себе думающие.

## 24

1. Ни одного мальчика моложе 12 лет не принимают в эту школу на полный пансион.
2. У всех прилежных мальчиков рыжие волосы.
3. Ни один из мальчиков, приходящих в школу только на занятия, не учит греческий язык.
4. Никто, кроме мальчиков моложе 12 лет, не любит бить баклуши.

Вселенная — «мальчики, учащиеся в этой школе», $a$ = зачисленные на полный пансион, $b$ = прилежные, $c$ = изучающие греческий язык, $d$ = рыжие, $e$ = моложе 12 лет.

### 25

1. Мой доктор разрешает мне есть лишь не очень калорийные блюда.
2. То, что я могу есть, вполне подходит для ужина.
3. Свадебные пироги всегда очень калорийны.
4. Мой доктор разрешает мне есть все, что подходит для ужина.

Вселенная — «продукты питания», $a$ = что я могу есть, $b$ = то, что разрешает мне есть доктор, $c$ = подходящие для ужина, $d$ = очень калорийные, $e$ = свадебный пирог.

### 26

1. Дискуссии в нашем клубе вряд ли разбудят британского льва, если брать их под контроль сразу же, как только они становятся слишком шумными.
2. Неумело направляемые дискуссии угрожают спокойствию в стенах нашего клуба.
3. Дискуссии, проходящие под председательством Томкинса, вполне могут разбудить британского льва.
4. Умело направляемые дискуссии в нашем клубе неизменно берутся под контроль, как только они становятся слишком шумными.

Вселенная — «дискуссии в нашем клубе», $a$ = те, которые берутся под контроль, когда они становятся слишком шумными, $b$ = угрожающие спокойствию в стенах нашего клуба, $c$ = проходящие под председательством Томкинса, $d$ = вполне способные разбудить британского льва, $e$ = умело направляемые.

### 27

1. Все мои сыновья стройны.
2. Никто из моих детей не здоров, если он не делает утренней зарядки.
3. Все обжоры среди моих детей страдают ожирением.
4. Ни одна из моих дочерей не делает утренней зарядки.

Вселенная — «мои дети», $a$ = страдающие ожирением, $b$ = обжоры, $c$ = здоровые, $d$ = сыновья, $e$ = делающие утреннюю зарядку.

### 28

1. Вещи, продаваемые на улице, не имеют особой ценности.
2. Только дрянь можно купить за грош.
3. Яйца большой гагарки представляют большую ценность.
4. Лишь то, что продается на улице, и есть настоящая дрянь.

Вселенная — «вещи», $a$ = вещи, которым грош цена, $b$ = яйца большой гагарки, $c$ = дрянь, $d$ = продаваемые на улице, $e$ = имеющие большую ценность.

### 29

1. Ни у одной продаваемой здесь книги, кроме тех книг, которые выставлены на витрине, нет золоченого обреза.
2. Все авторские издания снабжены красным ярлычком.

3. Все книги с красными ярлычками продаются по цене от 5 шиллингов и выше.
4. Лишь авторские издания выставляются на витрине.

Вселенная — «продаваемые здесь книги», $a$ = авторские издания, $b$ = с золоченым обрезом, $c$ = с красным ярлычком, $d$ = выставленные на витрине, $e$ = продаваемые по цене от 5 шиллингов и выше.

**30**

1. Кровоостанавливающие средства, действие которых нельзя проверить, сплошное шарлатанство.
2. К настойке календулы не следует относиться с презрением.
3. Все лекарства, способные остановить кровотечение, когда вы порежете палец, полезны.
4. Все шарлатанские кровоостанавливающие средства достойны презрения.

Вселенная — «кровоостанавливающие средства», $a$ = способные остановить кровотечение, $b$ = достойные презрения, $c$ = = шарлатанские, $d$ = настойка календулы, $e$ = полезные в тех случаях, когде вы порежете палец.

**31**

1. Ни один из встреченных в море, но оставшихся незамеченным предметов — не русалка.
2. Встреченные в море предметы, о которых делается запись в вахтенном журнале, стоят того, чтобы их запомнить.
3. В моих путешествиях мне никогда не доводилось видеть ничего такого, что стоило бы запомнить.
4. О встреченных в море и замеченных предметах делается запись в вахтенном журнале.

Вселенная — «встреченные в море предметы», $a$ = те, о которых делается запись в судовом журнале, $b$ = русалки, $c$ = виденные мной, $d$ = замеченные, $e$ = сто́ящие того, чтобы их запомнить.

**32**

1. Единственные книги в этой библиотеке, которые я не рекомендую читать, безнравственны по своему содержанию.
2. Все книги в твердых переплетах обладают выдающимися литературными достоинствами.
3. Все романы вполне нравственны по своему содержанию.
4. Я не рекомендую вам читать ни одну из книг в мягкой обложке.

Вселенная — «книги в этой библиотеке», $a$ = в твердом переплете, $b$ = нравственного содержания, $c$ = рекомендуемые мной для чтения, $d$ = романы, $e$ = обладающие выдающимися литературными достоинствами.

### 33

1. Ни одна птица, кроме страуса, не достигает 9 футов роста.
2. В этом птичнике иет птиц, которые принадлежали бы кому-нибудь, кроме меня.
3. Ни один страус не питается пирогами с начинкой.
4. У меня нет птиц, которые бы достигали 9 футов роста.

Вселенная — «птицы», $a$ = находящиеся в этом птичнике, $b$ = питающиеся пирогами с начинкой, $c$ = мои, $d$ = 9 футов роста, $e$ = страусы.

### 34

1. Ни одна интересная поэма не останется ие признанной людьми с тонким вкусом.
2. Ни одиа современная поэма не свободна от аффектации.
3. Все ваши поэмы написаны о мыльных пузырях.
4. Ни одна аффектированная поэма не находит признания у людей с тоиким вкусом.
5. Ни одна древняя поэма не написана о мыльиых пузырях.

Вселенная — «поэмы», $a$ = аффектированные, $b$ = древние, $c$ = интересные, $d$ = написанные о мыльных пузырях, $e$ = получившие признание у людей с тонким вкусом, $h$ = написанные вами.

### 35

1. Все плоды на этой выставке, которые не будут удостоены награды, являются собственностью организационного комитета.
2. Ни один из представленных мной персиков не удостоен награды.
3. Ни один из плодов, распроданных после закрытия выставки, не был иезрелым.
4. Ни один из спелых плодов ие был выращен в теплице.
5. Все плоды, принадлежавшие организационному комитету выставки, были распроданы после ее закрытия.

Вселенная — «плоды, представленные на этой выставке», $a$ = принадлежавшие организационному комитету, $b$ = удостоенные награды, $c$ = выращенные в теплице, $d$ = мои персики, $e$ = спелые, $h$ = распроданные после закрытия выставки.

### 36

1. Те, кто нарушает свои обещання, не заслуживают доверия.
2. Любители выпнть очень общительны.
3. Человек, выполняющий свои обещания, честен.
4. Ни один трезвенник не ростовщик.
5. Тому, кто очень общителен, всегда можно верить.

Вселенная — «люди», $a$ = честные, $b$ = ростовщики, $c$ = нарушающие свон обещания, $d$ = заслуживающие доверия, $e$ = очень общительные, $h$ = любители выпить.

### 37

1. Котенок, который любит рыбу, поддается дрессировке.
2. Котенок без хвоста не станет играть с гориллой.
3. Котята с усамн всегда любят рыбу.

4. У котенка, поддающегося дрессировке, не бывает зеленых глаз.
5. Если у котенка нет хвоста, то у него нет и усов.

Вселенная — «котята», $a$ = с зелеными глазами, $b$ = любящие рыбу, $c$ = с хвостами, $d$ = поддающиеся дрессировке, $e$ = с усами, $h$ = котята, которые станут играть с гориллой.

**38**

1. Все выпускники Итона в этом колледже играют в крикет.
2. Никто, кроме преподавателей, не обедает за верхним столом.
3. Ни один из тех, кто играет в крикет, не умеет грести.
4. Все *мои* друзья в этом колледже — выпускники Итона.
5. Все преподаватели — прекрасные гребцы.

Вселенная — «люди этого колледжа», $a$ = играющие в крикет, $b$ = обедающие за верхним столом, $c$ = выпускники Итона, $d$ = мои друзья, $e$ = прекрасные гребцы, $h$ = преподаватели.

**39**

1. Ни один из имеющихся здесь моих ящиков я не рискну открыть.
2. Мой письменный стол сделан из палисандрового дерева.
3. Все мои ящики, за исключением тех, которые находятся здесь, покрыты лаком.
4. Нет ни одного моего ящика, который я бы не рискнул открыть, если только он не полон живых скорпионов.
5. Все мои ящики из палисандрового дерева покрыты лаком.

Вселенная — «мои ящики», $a$ = ящики, которые я рискну открыть, $b$ = полные живых скорпионов, $c$ = находящиеся здесь, $d$ = сделанные из палисандрового дерева, $e$ = покрытые лаком, $h$ = письменные столы.

**40**

1. Все авторы литературных произведений, постигшие природу человека, умные люди.
2. Ни одного автора нельзя считать истинным поэтом, если он не способен волновать сердца людей.
3. Шекспир написал «Гамлета».
4. Ни один автор, не постигший природу человека, не способен волновать сердца людей.
5. Только истинный поэт мог написать «Гамлета».

Вселенная — «авторы литературных произведений», $a$ = способные волновать сердца людей, $b$ = умные, $c$ = Шекспир, $d$ = истинные поэты, $e$ = постигшие природу человека, $h$ = автор «Гамлета».

**41**

1. Я с отвращением отношусь ко всему, что не может служить мостом.
2. Все, что можно воспеть в стихах, для меня приятный подарок.
3. Радуга не выдержит веса тачки.

4. Все, что может служить мостом, выдержит вес тачки.
5. Я бы не принял в качестве подарка то, что вызывает у меня отвращение.

Вселенная — «предметы», $a$ = способные выдержать вес тачки, $b$ = то, что я приму в подарок, $c$ = вызывающие у меня отвращение, $d$ = радуги, $e$ = то, что может служить мостом, $h$ = то, что можно воспеть в стихах.

## 42

1. Если я решаю логическую задачу без ворчанья, то можно быть уверенным, что она мне понятна.
2. Посылки в этих соритах расположены не в том порядке, как в привычных мне задачах.
3. Ни одна легкая задача не вызывает у меня головной боли.
4. Я не могу понять задач, в которых посылки расположены не в том порядке, к которому я привык.
5. Я никогда не ворчу на задачу, если от нее у меня не болит голова.

Вселенная — «логические задачи, которые я решаю», $a$ = задачи, в которых посылки расположены в привычном мне порядке, $b$ = легкие, $c$ = задачи, на которые я ворчу, $d$ = вызывающие у меня головную боль, $e$ = эти сориты, $h$ = понятные мне задачи.

## 43

1. Любая моя мысль, которую нельзя выразить в виде силлогизма, поистине смешна.
2. Моя мечта о сдобных булочках ие стоит того, чтобы ее записывать на бумаге.
3. Ни одну мою несбыточную мечту нельзя выразить в виде силлогизма.
4. Мне не приходило в голову ни одной действительно смешной мысли, о которой бы я не сообщил своему поверенному.
5. Я только и мечтаю, что о сдобных булочках.
6. Я никогда не высказывал своему поверенному ни одной мысли, если она не стоила того, чтобы ее записать на бумаге.

Вселенная — «мои мысли», $a$ = те из них, которые можно выразить в виде силлогизма, $b$ = мечты о сдобных булочках, $c$ = сбывшиеся, $d$ = мои мечты, $e$ = поистине смешные, $h$ = мысли, о которых я сообщаю своему повереиному, $k$ = мысли, сто́ящие того, чтобы их записать на бумагу.

## 44

1. Ни одна из представленных здесь картин, кроме батальных, не представляет ценности.
2. Ни одна из картин, вывешенных без рам, не покрыта лаком.
3. Все батальные картины написаны маслом.
4. Все распроданные картины представляют ценность.
5. Все картины английских мастеров покрыты лаком.
6. Все картины, которые были вывешены в рамах, проданы.

Вселенная — «представленные здесь картины», $a$ = батальные, $b$ = принадлежащие кисти английских мастеров, $c$ = в рамах, $d$ = написанные маслом, $e$ = проданные, $h$ = представляющие ценность, покрытые лаком.

**45**

1. Животные, которые не брыкаются, всегда невозмутимы.
2. У осла нет рогов.
3. Буйвол всегда может перебросить вас через ограду.
4. Животных, которые не брыкаются, не легко проглотить.
5. Животное, у которого нет рогов, не может перебросить вас через ограду.
6. Все животные, кроме буйвола, легко приходят в ярость.

Вселенная — «животные», $a$ = животные, которые могут перебросить вас через ограду, $b$ = буйволы, $c$ = ослы, $d$ = животные, которых легко проглотить, $e$ = легко приходящие в ярость, $h$ = с рогами, $k$ = брыкающиеся.

**46**

1. Никто не забудет причесаться, если он отправляется на бал.
2. Нельзя сказать, что человек выглядит превосходно, если он неопрятен.
3. Курильщики опиума утрачивают контроль над собой.
4. Причесанный человек выглядит превосходно.
5. Никто не наденет белых лайковых перчаток, если он не отправляется на бал.
6. Человек всегда неопрятен, если он утратил контроль над собой.

Вселенная — «люди», $a$ = собирающиеся на бал, $b$ = причесанные, $c$ = сохраняющие контроль над собой, $d$ = превосходно выглядящие, $e$ = курильщики опиума, $h$ = опрятные, $k$ = надевшие белые лайковые перчатки.

**47**

1. Ни один муж, дарящий жене новые платья, не может быть несговорчивым.
2. Аккуратный муж всегда возвращается домой к чаю.
3. Жене нелегко содержать в порядке одежду мужа, если он имеет обыкновение вешать свою шляпу на газовый рожок.
4. Хороший муж всегда дарит своей жене новые платья.
5. Ни один муж не может не быть несговорчивым, если жена не следит за его одеждой.
6. Неаккуратный муж всегда вешает свою шляпу на газовый рожок.

Вселенная — «мужья», $a$ = всегда возвращающиеся домой к чаю, $b$ = всегда дарящие своим женам новые платья, $c$ = несговорчивые, $d$ = хорошие, $e$ = вешающие шляпу на газовый рожок, $h$ = мужья, за одеждой которых жена следит, $k$ = аккуратные.

**48**

1. Все, что не слишком безобразно, можно держать в гостиной.
2. То, что покрыто налетом соли, никогда не бывает абсолютно сухим.

3. То, что покрыто влагой, не следует держать в гостиной.
4. Купальные кабинки у моря всегда покрыты налетом соли.
5. Ничто сделанное из перламутра не может быть слишком безобразным.
6. Все, что стоит у самого моря, покрывается налетом соли.

Вселенная — «вещи», $a$ = слишком безобразные, $b$ = купальные кабинки, $c$ = покрытые налетом соли, $d$ = стоящие у самого моря, $e$ = сделанные из перламутра, $h$ = абсолютно сухие, $k$ = вещи, которые можно держать в гостиной.

**49**

1. Я не называю день «несчастливым», если Робинсон вежлив со мной.
2. Среды всегда бывают пасмурными днями.
3. Если люди берут с собой зонты, день никогда не бывает солнечным.
4. Единственный день недели, когда Робинсон невежлив со мной,— среда.
5. Всякий возьмет с собой зонт, если идет дождь.
6. Мои «счастливые» дни неизменно оказываются солнечными.

Вселенная — «дни», $a$ = дни, которые я называю «счастливыми», $b$ = пасмурные, $c$ = дни, когда люди берут с собой зонты, $d$=дни, когда Робинсон вежлив со мной, $e$ = дождливые, $h$ = дни, которые оказываются солнечными, $k$ = среды.

**50**

1. Ни одна акула не сомневается, что она прекрасно вооружена.
2. К рыбе, не умеющей танцевать менуэт, относятся без почтения.
3. Ни одна рыба не будет вполне уверена в том, что она прекрасно вооружена, если у нее нет трех рядов зубов.
4. Все рыбы, кроме акул, очень добры к детям.
5. Ни одна крупная рыба не умеет танцевать менуэт.
6. К рыбе, имеющей три ряда зубов, следует относиться с почтением.

Вселенная — «рыбы», $a$ = умеющие танцевать менуэт, $b$ = вполне уверенные, что они прекрасно вооружены, $c$ = рыбы, к которым относятся без почтения, $d$ = имеющие 3 ряда зубов, $e$ = большие рыбы, $h$ = добрые к детям, $k$ = акулы.

**51**

1. Все человечество, за исключением моих лакеев, обладает известной долей здравого смысла.
2. Лишь дети могут питаться одними сладостями.
3. Лишь тот, кто играет в «классы», знает, что такое настоящее счастье.
4. Ни у одного ребенка нет ни капли здравого смысла.
5. Ни один машинист не играет в «классы».
6. Ни об одном моем лакее нельзя сказать, что он не знает, в чем заключается настоящее счастье.

Вселенная — «человеческие существа», $a$ = машинисты, $b$ = обладающие здравым смыслом, $c$ = играющие в «классы», $d$ = знающие, что такое настоящее счастье, $e$ = живущие на одних сладостях, $h$ = детн, $k$ = мои лакеи.

52

1. Я люблю всех животных, которые принадлежат мне.
2. Собаки грызут кости.
3. Ни одно животное я не пускаю к себе в кабинет, если оно не «служит», когда его об этом попросят.
4. Все животные во дворе принадлежат мне.
5. Всем животным, которых я люблю, разрешается входить ко мне в кабинет.
6. Единственные животные, которые «служат», если их попросить,— собаки.

Вселенная — «животные», $a$ = животные, которых я впускаю в свой кабинет, $b$ = животные, которых я люблю, $c$ = собаки, $d$ = грызущие кости, $e$ = животные во дворе, $h$ = мои, $k$ = животные, которые «служат» , когда их попросят.

53

1. Животные всегда испытывают смертельную обиду, если я не обращаю на них внимання.
2. Те животные, которые принадлежат мне, находятся на той площадке.
3. Ни одно животное не сможет отгадать загадку, если оно не получило соответствующего образования в школе-интернате.
4. Ни одно животное на той площадке не барсук.
5. Если животное испытывает смертельную обиду, оно носится с бешеной скоростью и воет.
6. Я никогда не обращаю внимания на животных, которые не принадлежат мне.
7. Ни одно животное, получившее соответствующее образование в школе-интернате, не станет носиться с бешеной скоростью и выть.

Вселенная — «животные», $a$ = способные разгадывать загадки, $b$ = барсуки, $c$ = находящиеся на той площадке, $d$ = испытывающие смертельную обиду, если не обратить на них внимания, $e$ = мои, $h$ = животные, на которых я обращаю внимание, $k$ = получившие соответствующее образование в школе-интернате, $l$ = носящиеся с бешеной скоростью и воющие.

54

1. Все письма в этой комнате, на которых проставлена дата отправления, написаны на голубой бумаге.
2. Ни одно из писем, кроме тех, которые составлены в третьем лице, не написаны черными чернилами.
3. Я не регистрирую тех писем, которые не могу прочитать.
4. Ни в одном из писем, написанных на одной страничке, не пропущена дата.
5. Все неперечеркнутые письма написаны черными чернилами.
6. Все письма, написанные Брауном, начинаются со слов «Уважаемый сэр!»

7. Все письма, написанные на голубой бумаге, зарегистрированы мной.
8. Ни одно из писем, написанных более чем на одной странице, не перечеркнуто.
9. Ни одно из писем, начинающихся со слов «Уважаемый сэр!», не написано в третьем лице.

Вселенная — «письма в этой комнате», $a$ = начинающиеся со слов «Уважаемый сэр!», $b$ = перечеркнутые, $c$ = датированные, $d$ = зарегистрированные мной, $e$ = написанные черными чернилами, $h$ = составленные в третьем лице, $k$ = письма, которые я могу прочитать, $l$ = написанные на голубой бумаге, $m$ = на одной страничке, $n$ = написанные Брауном.

**55**

1. Единственные животные в этом доме — кошки.
2. Любое животное можно приручить, если оно любит глядеть на луну.
3. Если животное вызывает у меня отвращение, я стараюсь держаться от него подальше.
4. Ни одно животное не плотоядно, если оно не бродит по ночам.
5. Ни одна кошка не упустит случая поймать мышь.
6. Я не пускаю к себе в кабинет животных, кроме тех, которые находятся в этом доме.
7. Кенгуру не поддаются приручению.
8. Лишь плотоядные животные ловят мышей.
9. Животные, которых я не пускаю к себе в кабинет, вызывают у меня отвращение.
10. Животные, которые бродят по ночам, любят смотреть на луну.

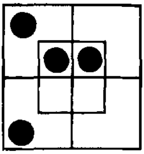
Вселенная — «животные», $a$ = животные, от которых я стараюсь держаться подальше, $b$ = плотоядные, $c$ = кошки, $d$ = вызывающие у меня отвращение, $e$ = находящиеся в этом доме, $h$ = кенгуру, $k$ = охотящиеся на мышей, $l$ = любящие смотреть на луну, $m$ = бродящие по ночам, $n$ = поддающиеся приручению, $r$ = животные, которых я пускаю к себе.

# Глава II

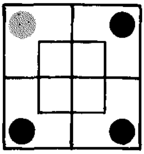
## ОТВЕТЫ

### Ответы к § 2

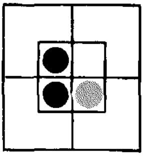
1



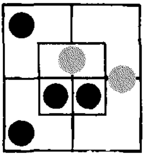
2



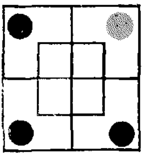
3



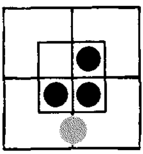
4



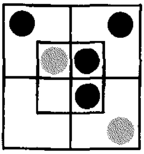
5



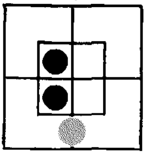
6



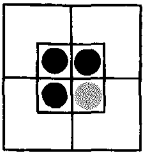
7



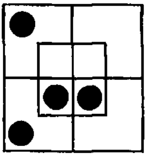
8



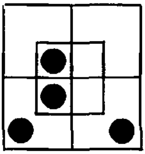
9



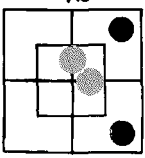
10



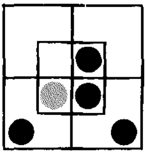
11



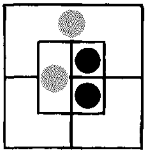
12



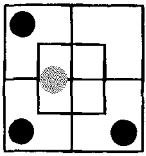
13



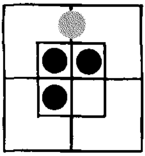
14



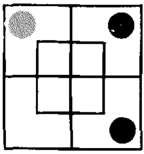
15



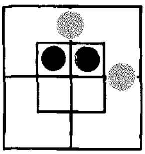
16



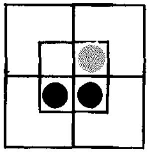
17



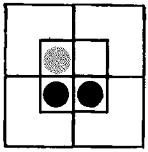
18



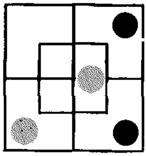
19



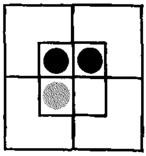
20



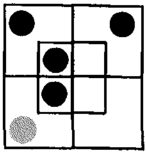
21



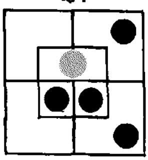
22



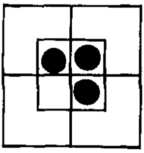
23



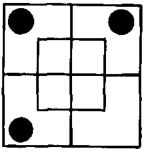
24



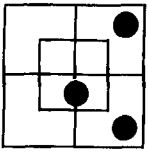
25



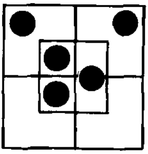
26



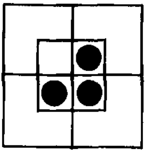
27



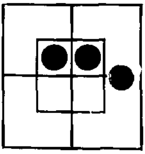
28



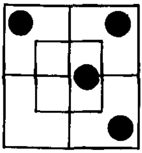
29



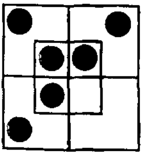
30



31



32



## Ответы к § 3

1. «Некоторые *xy* существуют», нли «Некоторые *x* суть *y*», «Некоторые *y* суть *x*».
2. Данных нет.
3. Все *y′* суть *x′*.
4. «Ни один *xy* не существует» и т. д. (см. ответ к примеру
5. Все *y′* суть *x*.
6. Все *x′* суть *y*.
7. Все *x* суть *y*.
8. Все *x′* суть *y′*, и все *y* суть *x*.
9. Все *x′* суть *y′*.
10. Все *x* суть *y′*.
11. Данных нет.
12. «Некоторые *x′y′* существуют» и т. д.
13. «Некоторые *x′y* существуют» и т. д.
14. «Ни один *xy′* не существует» и т. д.
15. «Некоторые *xy* существуют» и т. д.
16. Все *y* суть *x*.
17. Все *x′* суть *y*, и все *y′* суть *x*.
18. Все *x* суть *y′*, и все *y* суть *x′*.
19. Все *x* суть *y*, и все *y′* суть *x′*.
20. Все *y* суть *x′*.

## Ответы к § 5

Ответы к задачам 1—11 см. в § 2, а к задачам 12—23 — в главы III.

24. Некоторые прожорливые животные не летают.
25. Заключение вывести нельзя. Ошибка исключаемых терм разных знаков с посылкой-реальностью.
26. Всех свадебных пирогов следует избегать.
27. Джон счастлив.
28. Некоторые не игроки — не философы.
29. Заключение вывести нельзя. Ошибка исключаемых терм разных знаков с посылкой-реальностью.

30. Ни один из моих жильцов не пишет стихов.
31. Александрийский лист неприятен на вкус.
32. Заключение вывести нельзя. Ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.
33. Заключение вывести нельзя. Ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.
34. Логика не разумна.
35. Некоторые дикие животные жирные.
36. Всех ос необходимо остерегаться.
37. Все черные кролики молоды.
38. Некоторые круто сваренные предметы можно разбить.
39. Ни одна антилопа не огорчает взгляда.
40. Все канарейки, получающие достаточное количество корма, жизнерадостны.
41. Некоторые стихи пишутся не без вдохновенья.
42. Ни одна страна, в которой обитают драконы, не может не пленять воображение.
43. Заключение вывести нельзя. Ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.
44. Некоторые живописные сооружения выполнены не из сахара.
45. Ни один ребенок не может сидеть спокойно.
46. Некоторые кошки не могут свистеть.
47. Вы невыносимы.
48. Некоторые устрицы не очень забавны.
49. Канарейки, не получающие достаточное количество корма, несчастливы.
50. Мои сестры не могут петь.
51. Заключение вывести нельзя. Ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.
52. Некоторые птицы заняты полезным делом.
53. Ни одна из моих кузин не судья, и ни один судья — не моя кузина.
54. Кое-что из того, что подтачивает силы, нежелательно.
55. Александрийский лист имеет отвратительный вкус.
56. Заключение вывести нельзя. Ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.
57. Среди негров нет людей высокого роста.
58. Некоторые упрямые люди не философы.
59. Джон счастлив.
60. Некоторые вредные для здоровья блюда здесь не представлены (то есть выражение «эти блюда» к ним неприменимо).
61. Ни одна книга не подходит для чтения легко возбудимым людям, если от нее не клонит в сон.
62. Некоторые прожорливые животные не могут летать.
63. Вы и я не дадим провести себя мошеннику.
64. Некоторые сны — не барашки.
65. Ни одной ящерице не нужна расческа.
66. Некоторые вещи из числа тех, что могут ускользнуть от внимания, не битвы.
67. Ни одна моя кузина не судья.
68. Некоторые сваренные вкрутую вещи можно разбить.
69. Заключение вывести нельзя. Ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.

70. Она не популярна.
71. Некоторые люди, носящие парик,— не ваши дети.
72. Ни один омар не станет ждать невозможного.
73. Ни один кошмарный сон не желателен.
74. Некоторые вкусные вещи — не пироги со сливами.
75. Некоторых сортов варенья не следует опасаться.
76. Все утки не изящны.
77. Заключение вывести нельзя. Ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.
78. Ни одному человеку, просящему милостыню, не следует забывать о необходимости соразмерять свои расходы с доходами.
79. Некоторые дикари — не пауки.
80. Заключение вывести нельзя. Ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.
81. Ни один путешественник, не имеющий при себе денег на мелкие расходы, не может удержаться, чтобы не потерять багаж.
82. Заключение вывести нельзя. Ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.
83. Ни один судья — не моя кузина.
84. Те, кто занят, не жалуются, и те, кто жалуется, не заняты.
85. Ни одна из моих кузин — не судья.
86. Ни один соловей не относится к сахару с отвращением.
87. Заключение вывести невозможно. Ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.
88. Некоторые извинения нельзя считать ясными объяснениями.
89. Заключение вывести нельзя. Ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.
90. Добрые поступки можно совершать без колебаний.
91. Заключение вывести нельзя. Ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.
92. Заключение вывести нельзя. Ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.
93. Ни одному мошеннику нельзя верить.
94. Ни один из моих умных детей не жаден.
95. Некоторые вещи, предназначенные для того, чтобы смешить людей,— не парламентские акты.
96. Ни одно путешествие, которое будет забыто, не стоит того, чтобы посвящать ему книгу.
97. Ни один из моих послушных детей не недоволен.
98. Ваш визит не вызывает у меня чувства досады.

# *Глава III*

# РЕШЕНИЯ

## § 1. Нормальная форма суждения отношения

*Решения некоторых задач из § 1*
*(остальные задачи решаются аналогично)*

1. Вселенная — «люди». «Я» можно рассматривать как класс людей, обладающих признаком «обозначаемые именем я». Назовем его классом всех «я». Ясно, что этот класс не может содержать более одного члена. Следовательно, знаком количества в данном суждении

будет слово «все». Сказуемое «совершил прогулку» заменим выражением «суть люди, совершившие прогулку». В нормальной форме исходное суждение запишется

«все» . . . . . . . . . . . . . *знак количества*
«я» . . . . . . . . . . . . . *субъект суждения*
«суть» . . . . . . . . . . . *связка*
«люди, совершившие прогулку» . . . *предикат суждения*

или кратко:

Все |«я»|суть| люди, совершившие прогулку.

6. Вселенная — «люди». Субъект суждения — класс всех нехрабрых людей. Заменив глагол выражением со связкой «есть», получим нормальную форму суждения:

Ни один |нехрабрый человек| |не есть| человек, достойный славы.

10. Вселенная — «дела». Выражение «то, что трудно», очевидно, эквивалентно выражению «все трудные дела». Нормальная форма суждения:

Все| трудные дела |суть| дела, требующие особого внимания.

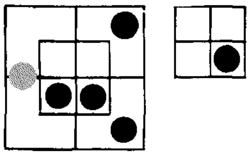
16. Вселенная — «люди». Субъект суждения, очевидно, — «люди, находящиеся начеку»; выражение «если человек начеку» надлежит понимать как утверждение, относящееся ко *всем* таким людям. Нормальная форма суждения:

Все | люди, которые находятся начеку, |суть| те люди, которые не дадут провести себя мошеннику.

## § 2. Метод диаграмм

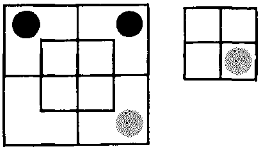
*Решения задач 1-12 из § 4*

1.



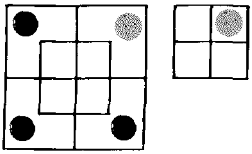
Следовательно, «Ни один $x'$ не есть $y'$».

2.

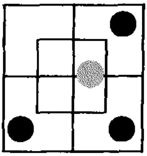


Следовательно, «Некоторые $x$ суть $y'$».

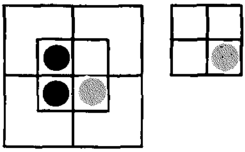
3.



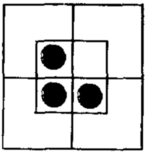
Следовательно, «Некоторые $x$ суть $y'$».

4. 

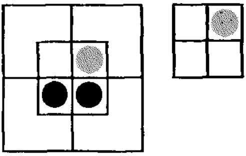
Заключение вывести нельзя.

5. 

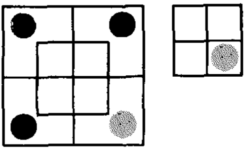
Следовательно,
«Некоторые $x'$ суть $y'$».

6. 

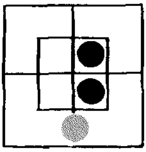
Заключение вывести нельзя.

7. 

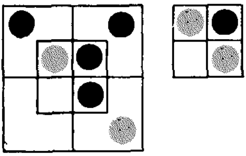
Следовательно,
«Некоторые $x$ суть $y'$».

8. 

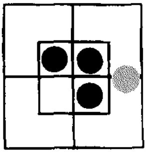
Следовательно,
«Некоторые $x'$ суть $y'$».

9. 

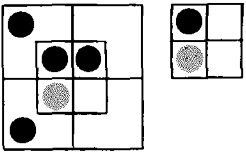
Заключение вывести нельзя.

10. 

Следовательно,
«Все $x$ суть $y'$», «Все $y'$ суть $x'$».

11 

Заключение вывести нельзя.

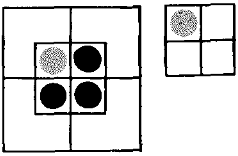
12. 

Следовательно, «Все $y$ суть $x'$».

*Решения задач 1—11 из § 5*

1. Вселенная — «люди», $m$ = класс всех «я», $x$ = люди, которые совершили прогулку, $y$ = люди, чувствующие себя лучше.

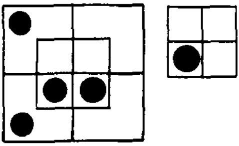
«Все $m$ суть $x$.
Все $m$ суть $y$».



Следовательно, «Некоторые $x$ суть $y$».
Или в конкретной форме: «Некоторые из тех, кто совершил прогулку, чувствуют себя лучше».

2. Вселенная — «люди», $m$ = те, кто читал это письмо, $x$ = класс Джонов, $y$ = те, кто знает содержание письма.

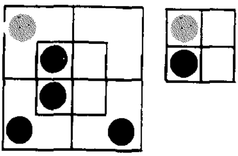
«Ни один $x'$ не есть $m$.
Ни один $m'$ не есть $y$».



Следовательно, «Ни один $x'$ не есть $y$».
Или в конкретной форме: «Никто, кроме Джона, не знает содержания этого письма».

3. Вселенная — «люди», $m$ = старые, $x$ = те, кто любит ходить пешком, $y$ = вы и я.

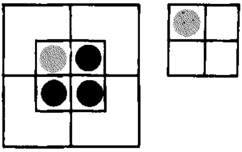
«Все $m'$ суть $x$.
Все $y$ суть $m'$».



Следовательно, «Все $y$ суть $x$».
*Или в конкретной форме:* «Вы и я любим ходить пешком».

4. Вселенная — «курсы» (линии поведения), $m$ = ваши, $x$ = честные, $y$ = курсы, являющиеся лучшей политикой.

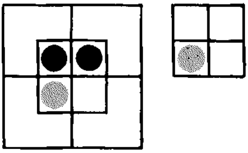
«Все $m$ суть $x$.
Все $m$ суть $y$».



Следовательно, «Некоторые $x$ суть $y$».
Или в конкретной форме: «Честность — иногда лучшая политика».

5. Вселенная — «животные», $m$ = которые могут бегать быстро, $x$ = жирные, $y$ = гончие.

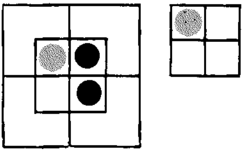
«Ни один $x$ не есть $m$.
Некоторые $y$ суть $m$».



Следовательно, «Некоторые $y$ суть $x'$».
Или в конкретной форме: «Некоторые гончие не жирны».

6. Вселенная — «люди», $m$ = те, кто достоин славы, $x$ = те, кто получает награду, $y$ = храбрые.

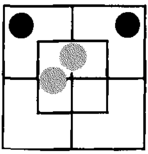
«Некоторые $m$ суть $x$.
Ни один $y'$ не есть $m$».



Следовательно, «Некоторые $y$ суть $x$».
Или в конкретной форме :«Некоторые храбрецы получают награду».

7. Вселенная — «вещи», $m$ = сладкие, $x$ = конфеты, $y$ = те, что нравятся детям.

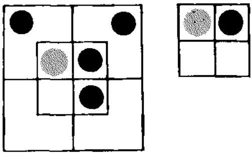
«Все $x$ суть $m$.
Некоторые $m$ суть $y$».



Заключение вывести нельзя.

8. Вселенная — «люди», $m$ = находящиеся в этом доме, $x$ = класс Джонов, $y$ = больные.

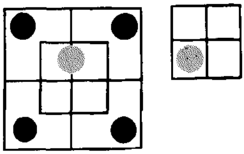
«Все $x$ суть $m$.
Все $m$ суть $y$».



Следовательно, «Все $x$ суть $y$».
Или в конкретной форме: «Джон болен».

9. Вселенная — «вещи», $m$ = нужные (полезные) в путешествии, $x$ = зонты, $y$ = вещи, которые следует оставлять дома.

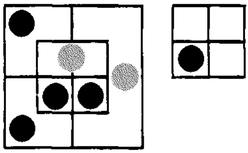
«Все $x$ суть $m$.
Все $m'$ суть $y$».



Следовательно, «Некоторые $x'$ суть $y$».
Или в конкретной форме: «Некоторые вещи — не зонты, отправляясь в путешествие, следует оставлять дома».

10. Вселенная — «музыка», $m$ = музыка, которую можно услышать, $x$ = музыка, вызывающая колебания воздуха, $y$ = стоящая того, чтобы за нее платили деньги.

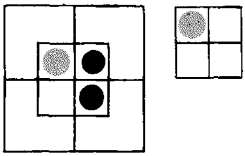
«Все $m$ суть $x$.
Все $m'$ суть $y$».



Следовательно, «Ни один $x'$ не есть $y$».
Или в конкретной форме: «Музыка, не вызывающая колебаний воздуха, не стоит того, чтобы за нее платить деньги».

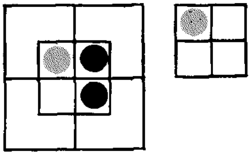
11. Вселенная — «дни», $m$ = дождливые, $x$ = праздничные, $y$ = наводящие тоску.

«Некоторые $x$ суть $m$.
Все $m$ суть $y$».

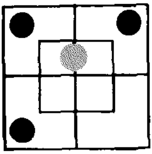


Следовательно, «Некоторые $x$ суть $y$».
Или в конкретной форме: «Некоторые праздничные дни наводят тоску».

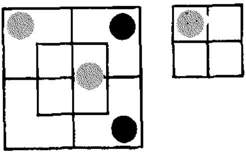
*Решения задач 1—10 из § 6*

1. 

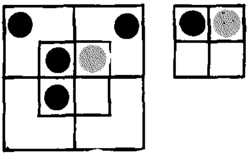
Следовательно, заключение правильно.

2. 

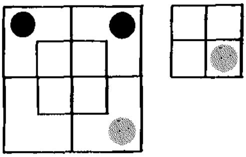
Заключение вывести нельзя.

3. 

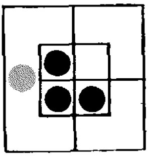
Следовательно, заключение правильно.

4. 

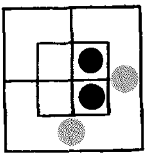
Следовательно, заключение правильно.

5. 

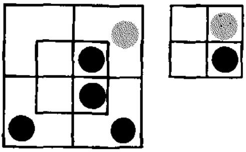
Следовательно, заключение правильно.

6. 

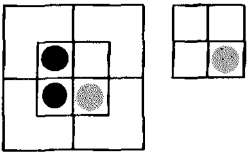
Заключение вывести нельзя.

7. 

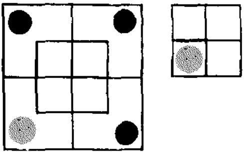
Заключение вывести нельзя.

8. 

Следовательно,
заключенне правнльно.

9. 

Следовательно,
заключение правильио.

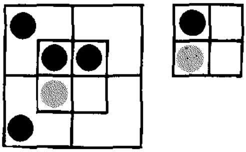
10. 

Следовательно,
заключенне правильно.

*Решения задач 1—6 из § 7*

1. Вселенная — «людн», $m$ = восторженные натуры, $x$ = врачи, $y$ = вы.

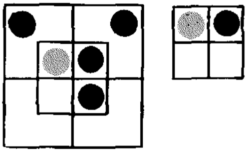
«Ни однн $x$ не есть $m$.
Все $y$ суть $m$.
Все $y$ суть $x'$».



Следовательно, «Все $y$ суть $x'$».
Такнм образом, предложенное заключенне правильно.

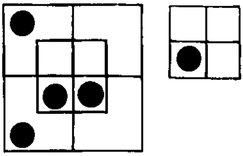
2. Вселенная — «книги», $m$ = полезные, $x$ = словарн, $y$ = высокоценнмые.

«Все $x$ суть $m$.
Все $m$ суть $y$.
Все $x$ суть $y$».



Следовательно, «Все $x$ суть $y$».
Такнм образом, предложенное заключенне правнльно.

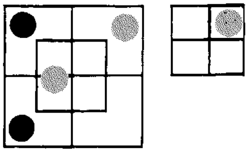
3. Вселенная — «люди», $m$ = скрягн, $x$ = эгонсты (не альтрунсты), $y$ = те, кто собирает скорлупу от янц.



«Ни один $m$ не есть $x'$.
Ни один $m'$ не есть $y$.
Ни один $x'$ не есть $y$».

Следовательно, «Ни один $x'$ не есть $y$».
Таким образом, предложенное заключение правильно.

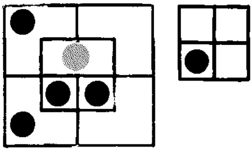
4. Вселенная — «люди», $m$ = щедрые, $x$ = эпикурейцы, $y$ = мои дядюшки.



«Некоторые $x$ суть $m'$.
Все $y$ суть $m$.
Все $y$ суть $x'$».

Следовательно, «Некоторые $x$ суть $y'$».
Таким образом, предложенное заключение ошибочно. Правильное заключение: «Некоторые эпикурейцы не мои дядюшки».

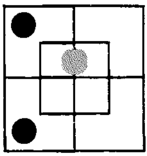
5. Вселенная — «предметы», $m$ = золото, $x$ = тяжелое, $y$ = предметы, которые могут заставить его замолчать.



«Все $m$ суть $x$.
Ни одно $m'$ не есть $y$.
Ни один $x'$ не есть $y$».

Следовательно, «Ни один $x'$ не есть $y$».
Таким образом, предложенное заключение правильно.

6. Вселенная — «люди», $m$ = здоровые, $x$ = тучные, $y$ = сильные.



«Некоторые $m$ суть $x$.
Ни одно $m'$ не есть $y$.
Некоторые $x$ суть $y'$».

Заключение вывести нельзя.

## § 3. Метод индексов

*Решения задач из § 4*

1. $mx'_0 \dagger m'_1 y'_0 \mathsf{P} x' y'_0$ (фигура I), то есть «Ни один $x'$ не есть $y'$».

2. $m'x_0 \dagger m'y'_1 \mathsf{P} x' y'_1$ (фигура II), то есть «Некоторые $x'$ суть $y'$».

3. $m'_1 x'_0 \dagger m'_1 y_0 \mathsf{P} xy'_1$ (фигура III), то есть «Некоторые $x$ суть $y'$».

4. $x'm'_0 \dagger y'_1 m'_0$. (Ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.)

5. $mx'_1 \dagger ym_0 \mathsf{P} x'y'_1$ (фигура II), то есть «Некоторые $x'$ суть $y'$».

6. $x'm_0 \dagger my_0$. (Ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.)

7. $mx'_0 \dagger y'm_1 \mathsf{P} xy'_1$ (фигура II), то есть «Некоторые $x$ суть $y'$».

8. $m'_1 x_0 \dagger m'y_0 \mathsf{P} x'y'_1$ (фигура III), то есть «Некоторые $x'$ суть $y'$».

9. $x'm'_1 \dagger my_0$. (Ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.)

10. $x_1 m'_0 \dagger y'_1 m_0 \mathsf{P} x_1 y'_0 \dagger y'_1 x_0$ (фигура Iб), то есть «Все $x$ суть $y$, и все $y'$ суть $x'$».

11. $mx_0 \dagger y'_1 m_0$. (Ошибка исключаемых терминов, существование которых не утверждается.)

12. $xm_0 \dagger y_1 m'_0 \mathsf{P} y_1 x_0$ (фигура Iа), то есть «Все $y$ суть $x'$».

13. $m'_1 x'_0 \dagger ym_0 \mathsf{P} x'y_0$ (фигура I), то есть «Ни один $x'$ не есть $y$».

14. $m_1 x'_0 \dagger m'_1 y'_0 \mathsf{P} x'y'_0$ (фигура I), то есть «Ни один $x'$ не есть $y'$».

15. $xm_0 \dagger m'y_0 \mathsf{P} xy_0$ (фигура I), то есть «Ни один $x$ не есть $y$».

16. $x_1 m_0 \dagger y_1 m'_0 \mathsf{P} (x_1 y_0 \dagger y_1 x_0)$ (фигура Iб), то есть «Все $x$ суть $y'$, и все $y$ суть $x'$».

17. $xm_0 \dagger m'_1 y'_0 \mathsf{P} xy'_0$ (фигура I), то есть «Ни один $x$ не есть $y'$».

18. $xm'_0 \dagger my_0 \mathsf{P} xy_0$ (фигура I), то есть «Ни один $x$ не есть $y$».

19. $m_1 x'_0 \dagger m_1 y_0 \mathsf{P} xy'_1$ (фигура III), то есть «Некоторые $x$ суть $y'$».

20. $mx_0 \dagger m'_1 y'_0 \mathsf{P} xy'_0$ (фигура I), то есть «Ни один $x$ не есть $y'$».

### *Решения силлогизмов 12—23 из § 5*

12. Вселенная — «люди», $m$ = те, кто любит пудинг, $x$ = французы, $y$ = англичане.

$xm_0 \dagger y_1 m'_0 \mathsf{P} y_1 x_0$ (фигура I), то есть «Англичане — не французы».

13. Вселенная — «портреты девушек», $m$ = фотографии, на которых девушки хмурятся или неестественно улыбаются, $x$ = удачные, $y$ = фотографические.

$mx_0 \dagger ym'_0 \mathsf{P} xy_0$ (фигура I), то есть «Ни одну фотографию девушки нельзя считать удачной».

14. Вселенная — «люди», $m$ = бледные, $x$ = флегматичные, $y$ = с поэтичной внешностью.

$m_1 x'_0 \dagger m'y_0 \mathsf{P} x'y_0$ (фигура I), то есть «Ни о ком нельзя сказать, что у него поэтичная внешность, если он не флегматичен»

15. Вселенная — «люди», $m$ = старые скрягн, $x$ = жинерадостные, $y$ = тощие.
$mx_0 \dagger my_1 \mathsf{P} x'y_1$ (фигура II), то есть «Некоторые тощне особы не жнзнерадостны».

16. Вселенная — «люди», $m$ = вспыльчивые, $x$ = сохраняющне самообладанне, $y$ = судьи.
$xm_0' \dagger ym_1' \mathsf{P} x'y_1$ (фигура II), то есть «Некоторые судьн теряют самообладание».

17. Вселенная — «животные», $m$ = жнрные, $x$ = свиньи, $y$ = вскормленные на ячменном отваре.
$x_1m_0' \dagger ym_0 \mathsf{P} x_1y_0$ (фнгура Ia), то есть «Свнней вскармливают не на ячменном отваре».

18. Вселенная — «кролнкн», $m$ = прожорливые, $x$ = черные, $y$ = старые.
$m_1' x_0' \dagger ym_0' \mathsf{P} xy_1'$ (фигура III), то есть «Некоторые черные кролнкн не старые».

19. Вселенная — «пронзведення искусства», $m$ = свндетельствующие о зрелости нх авторов, $x$ = картнны, $y$ = представляющне подлинную ценность.
$xm_1' \dagger my_0$. (Ошибка исключаемых термнов разных знаков с посылкой-реальностью.)

20. Вселенная — «дела», $m$ = важные, $x$ = которыми я пренебрегаю, $y$ = ваши.
$mx_0 \dagger y_1m_0$. (Ошибка исключаемых термннов одного знака, существованне которых не утверждается.)

21. Вселенная — «предметы», $m$ = трудные, $x$ = урокн, $y$ = требующие особого внимания.
$xm_1 \dagger m_1y_0' \mathsf{P} xy_1$ (фигура II), то есть «Некоторые урокн требуют особого внимания».

22. Вселенная — «люди», $m$ = пользующиеся всеобщей любовью, $x$ = умные, $y$ = обязательные.
$x_1m_0' \dagger y_1m_0'$. (Ошибка нсключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.)

23. Вселенная — «люди», $m$ = внимательные, $x$ = способные допустить оплошность, $y$ = забывающие о своих обещаннях.
$m_1' x_0' \dagger my_0 \mathsf{P} x'y_0$, то есть «Тому, кто забывает о свонх обещаниях, ничего не стоит допустить оплошность».

*Решения задач из § 6*

1. $xm_1 \dagger my_0' \mathsf{P} xy_1$ (фигура II).
Заключение правильно.

2. $x_1m_0' \dagger ym_0'$. (Ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.)

3. $xm_1' \dagger y_1'm_0' \mathsf{P} xy_1$ (фнгура II). Заключенне правнльно.

4. $x_1 m'_0 \dagger y m_0 \mathsf{P} x_1 y_0$ (фигура Iа). Заключение правильно.
5. $m' x'_1 \dagger m' y_0 \mathsf{P} x' y'_1$ (фигура II). Заключение правильно.
6. $x' m_0 \dagger y_1 m_0$. (Ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.)
7. $m' x'_1 \dagger y'_1 m_0$. (Ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.)
8. $m' x'_0 \dagger y'_1 m_0 \mathsf{P} y'_1 x'_0$ (фигура Iа). Заключение правильно.
9. $m x'_1 \dagger m y_0 \mathsf{P} x' y'_1$ (фигура II). Заключение правильно.
10. $m'_1 x_0 \dagger m'_1 y'_0 \mathsf{P} x' y_1$ (фигура III). Заключение правильно.
11. $x_1 m_0 \dagger y m_1 \mathsf{P} x' y_1$ (фигура II). Заключение правильно.
12. $x m_0 \dagger m' y'_0 \mathsf{P} x y'_0$ (фигура I). Заключение правильно.
13. $x m_0 + y'_1 m'_0 \mathsf{P} y'_1 x_0$ (фигура Iа). Заключение правильно.
14. $m'_1 x_0 \dagger m'_1 y_0 \mathsf{P} x' y_1$ (фигура III). Заключение правильно.
15. $m x'_1 \dagger y_1 m_0 \mathsf{P} x' y'_1$ (фигура II). Заключение правильно.
16. $x' m_0 \dagger y_1 m_0$. (Ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.)
17. $m' x_0 \dagger m'_1 y_0 \mathsf{P} x' y'_1$ (фигура III). Заключение правильно.
18. $x' m_0 \dagger m y_1 \mathsf{P} x y_1$ (фигура II). Заключение правильно.
19. $m x'_1 \dagger m_1 y'_0 \mathsf{P} x' y_1$ (фигура II). Заключение правильно.
20. $x' m'_0 \dagger m' y'_1 \mathsf{P} x y'_1$ (фигура II). Заключение правильно.

## *Решения задач из § 7*

1. Вселенная — «люди», $m$ = восторженные, $x$ = врачи, $y$ = вы.

   $x m_0 \dagger y_1 m'_0 \mathsf{P} y_1 x_0$ (фигура Iа). Заключение правильно.

2. Вселенная — «книги», $m$ = полезные, $x$ = словари, $y$ = высокоценимые.

   $x_1 m'_0 \dagger m_1 y'_0 \mathsf{P} x_1 y'_0$ (фигура Iа). Заключение правильно.

3. Вселенная — «люди», $m$ = скряги, $x$ = эгоисты, $y$ = собирающие яичную скорлупу.

   $m x'_0 \dagger m' y_0 \mathsf{P} x' y_0$ (фигура I). Заключение правильно.

4. Вселенная — «личности», $m$ = щедрые, $x$ = эпикурейцы, $y$ = мои дядюшки.

   $x m'_1 \dagger y_1 m'_0 \mathsf{P} x y'_1$ (фигура II). Заключение ошибочно. Правильное заключение: «Некоторые эпикурейцы не мои дядюшки».

5. Вселенная — «предметы», $m$ = золотые, $x$ = тяжелые, $y$ = те, которые смогут заставить его замолчать.
$m_1x'_0 \dagger m'y_0 \mathrm{P} x'y_0$ (фигура I). Заключение правильно.

6. Вселенная — «люди», $m$ = здоровые, $x$ = тучные, $y$ = сильные.
$mx_1 \dagger m'y_0$. Заключение вывести нельзя. (Ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.)

7. Вселенная — «печатные издания», $m$ = газеты, $x$ = печатное издание, в котором я это прочитал, $y$ = распространяющие небылицы.
$x_1m'_0 \dagger m_1y'_0 \mathrm{P} x_1y'_0$ (фигура Ia). Заключение ошибочно. Правильное заключение: «Печатное издание, из которого я почерпнул эти сведения, занимается распространением небылиц».

8. Вселенная — «вещи», $m$ = сделанные со вкусом, $x$ = галстуки, $y$ = восхищающие меня.
$xm'_1 \dagger m_1y'_0$. Заключение вывести нельзя. (Ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.)

9. Вселенная — «пение», $m$ = продолжающееся более часа, $x$ = *его* пение, $y$ = пение, которое окружающим надоедает слушать.
$x_1m_0 \dagger m_1y'_0 \mathrm{P} x'y_1$ (фигура III). Заключение ошибочно. Правильное заключение: «В некоторых случаях окружающим надоедает слушать не его пение».

10. Вселенная — «вещи», $m$ = свечи, $x$ = дающие мало света, $y$ = = предназначенные для того, чтобы давать свет.
$mx_1 \dagger m_1y'_0 \mathrm{P} xy_1$ (фигура II). Заключение правильно.

11. Вселенная — «личности», $m$ = упорно работающие, $x$ = желающие учиться, $y$ = эти мальчики.
$x_1m'_0 \dagger ym_1$. (Ошибка исключаемых терминов разных типов с посылкой-реальностью.)

12. Вселенная — «живые существа», $m$ = львы, $x$ = свирепые, $y$ = = пьющие кофе.
$m_1x'_0 \dagger my'_1 \mathrm{P} xy'_1$ (фигура II). Заключение ошибочно. Правильное заключение: «Некоторые свирепые существа не пьют кофе».

13. Вселенная — «люди», $m$ = щедрые, $x$ = скряги, $y$ = старики.
$xm_0 \dagger ym'_1$. Заключение вывести нельзя. (Ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.)

14. Вселенная — «животные» (когда-либо существовавшие на Земле), $m$ = несчастные в любви, $x$ = ископаемые, $y$ = устрицы.
$xm_0 \dagger y_1m'_0 \mathrm{P} y_1x_0$ (фигура Ia). Заключение правильно.

15. Вселенная — «люди», $m$ = образованные, $x$ = судящие обо всем поверхностно, $y$ = студенты.
$m'_1x'_0 \dagger y_1m'_0 \mathrm{P} xy'_1$ (фигура III). Заключение ошибочно. Правильное заключение: «Некоторые люди, судящие обо всем поверхностно, не студенты».

16. Вселенная — «молодые животные», $m$ = прыгающие, $x$ = козлята, $y$ = здоровые.

$x_1 m_0' \dagger m' y_0$. Заключение вывести нельзя. (Ошибка исключаемых термннов одного знака, существование которых не утверждается.)

17. Вселенная — «предприятия», $m =$ плохо управляемые, $x =$ приносящие прибыль, $y =$ железные дороги.
$m_1 x_0 \dagger y_1 m_0 \mathrm{P} x' y_1'$ (фигура III). Заключение ошнбочно. Правильное заключенне: «Некоторые предпрнятня, не являющиеся железными дорогами, не прнносят прибыли».

18. Вселенная — «люди», $m =$ невежественные, $x =$ профессора, $y =$ тщеславные.
$x m_0 \dagger m_1 y_0' \mathrm{P} x' y_1$ (фигура III). Заключение ошибочно. Правильное заключение: «Некоторые тщеславные люди — не профессора».

19. Вселенная — «люди», $m =$ благоразумные, $x =$ избегающие встречи с гиеной, $y =$ банкиры.
$m_1 x_0' \dagger y m_0' \mathrm{P} x' y_0$ (фигура I). Заключение правильно.

20. Вселенная — «живые существа», $m =$ незлые, $x =$ осы, $y =$ щенки.
$x_1 m_0 \dagger y m_0' \mathrm{P} x_1 y_0$. (фнгура Ia). Заключение неполно. Полное заключение: «Осы не щенки».

21. Вселенная — «личности», $m =$ бездельники, $x =$ знаменитости, $y =$ художники.
$m x_0 \dagger y m_1'$. Заключенне вывестн нельзя. (Ошибка нсключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.)

22. Вселенная — «продукты питания», $m =$ эти конфеты, $x =$ шоколадные помадки, $y =$ имеющие восхитительный вкус.
$m_1 x_0' \dagger m_1 y_0' \mathrm{P} x y_1$ (фигура III). Заключение ошибочно. Оно шире правильного, которое гласит: «*Некоторые* шоколадные помадки восхнтнтельны на вкус».

23. Вселенная — «съедобные вещи», $m =$ полезные, $x =$ горячие сдобы, $y =$ булочки с изюмом.
$x m_0 \dagger y_1 m_0$. Заключение вывести нельзя. (Ошибка исключаемых термннов, существованне которых не утверждается.)

24. Вселенная — «сообщення», $m =$ сообщення, авторы которых известны, $x =$ соответствующие истине, $y =$ заслуживающие доверня.
$m' x_1' \dagger m_1 y_0'$. Заключенне вывести нельзя. (Ошнбка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.)

25. Вселенная — «домашняя утварь» $m =$ мягкая, $x =$ подушка, $y =$ кочережки.
$x m_1 \dagger y m_0 \mathrm{P} x y_1'$ (фигура II). Заключение ошибочно. Правильное заключение: «Некоторые подушки — не кочережки».

26. Вселенная — «нстории», $m =$ правдоподобные, $x =$ те, в которые легко поверить, $y =$ историн, которые рассказывает он.
$m_1' x_0 \dagger y m_0 \mathrm{P} x y_0$ (фигура I). Заключение правильно.

27. Вселенная — «люди», $m$ = честные, $x$ = воры, $y$ = уличаемые в неблаговидных поступках.
$xm_0 \dagger m'y_1$. Заключение вывести нельзя. (Ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.)
28. Вселенная — «хлебобулочные изделия», $m$ = полезные, $x$ = сдобные булочки, $y$ = пышные.
$xm_0 \dagger y_1m_0$. Заключение вывести нельзя. (Ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.)
29. Вселенная — «птицы», $m$ = гордящиеся своим хвостом, $x$ = павлины, $y$ = певчие птицы.
$x'm_0 \dagger my'_1 \mathbf{P} xy'_1$ (фигура II). Заключение правильно.
30. Вселенная — «лечебные процедуры», $m$ = успокаивающие боль, $x$ = тепло, $y$ = полезные при зубной боли.
$x_1m'_0 \dagger m'y_0$. Заключение вывести нельзя. (Ошибка исключаемых терминов одного знака, существование которых не утверждается.)
31. Вселенная — «деловые люди», $m$ = банкроты, $x$ = богатые, $y$ = = купцы.
$mx_0 \dagger ym'_1$. Заключение вывести нельзя. (Ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.)
32. Вселенная — «люди», $m$ = скучные, $x$ = невыносимые, $y$ = те, кого просят остаться, когда они собираются уходить из гостей.
$m_1x'_0 \dagger my_0 \mathbf{P} xy'_1$ (фигура III). Заключение ошибочно. Правильное заключение: «Некоторых невыносимых людей не упрашивают остаться, когда они собираются уходить из гостей».
33. Вселенная — «люди», $m$ = разумные, $x$ = ходящие ногами, $y$ = ходящие на голове.
$m_1x'_0 \dagger m'_1 y'_0 \mathbf{P} x'y'_0$ (фигура I). Заключение ошибочно. Правильное заключение: «Ни один человек не ходит ни вниз головой, ни вверх ногами».
34. Вселенная — «экипажи», $m$ = комфортабельные, $x$ = ручные тележки, $y$ = пользующиеся популярностью.
$xm_0 \dagger m'x_0 \mathbf{P} xy_0$ (фигура I). Заключение правильно.
35. Вселенная — «живые существа», $m$ = обладающие поэтической внешностью, $x$ = лягушки, $y$ = утки.
$xm_0 \dagger ym'_1$. Заключение вывести нельзя. (Ошибка исключаемых терминов разных знаков с посылкой-реальностью.)
36. Вселенная — личности, $m$ = зубные врачи, $x$ = императоры, $y$ = личности, которых боятся дети.
$xm_0 \dagger m_1y'_0 \mathbf{P} x'y_1$ (фигура III). Заключение ошибочно. Правильное заключение: «Кое-кто из людей, которых боятся дети, не императоры».
37. Вселенная — «бакалейные товары», $m$ = сладкие, $x$ = сахар, $y$ = соль.
$x_1m'_0 \dagger y_1m_0 \mathbf{P} (x_1y_0 \dagger y_1x_0)$ (фигура Iб). Заключение неполно: пропущено суждение «Сахар — не соль».
38. Вселенная — «живые существа», $m$ = умеющие летать, $x$ = орлы, $y$ = свиньи.
$x_1m'_0 \dagger ym'_1 \mathbf{P} x'y_1$ (фигура II). Заключение правильно.

## Решения задач из § 8

1. $\overset{1}{cd_0} \dagger \overset{2}{a_1d_0'} \dagger \overset{3}{b_1c_0'}$; $\overset{1}{\underline{c}\,\underline{d}} \dagger \overset{2}{a\,\underline{\underline{d'}}} \dagger \overset{3}{b\underline{\underline{c'}}}\ \mathbf{P}\, ab_0 \dagger a_1 \dagger b_1$, то есть $\mathbf{P}\, a_1b_0 \dagger b_1a_0$.

2. $\overset{1}{d_1b_0'} \dagger \overset{2}{ac_0'} \dagger \overset{3}{bc_0}$; $\overset{1}{d\underline{b'}} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{b}}\,\underline{c}} \dagger \overset{2}{a\underline{\underline{c'}}}\ \mathbf{P}\, da_0 \dagger d_1$, то есть $\mathbf{P}\, d_1a_0$.

3. $\overset{1}{b_1'a_0'} \dagger \overset{2}{ad_0} \dagger \overset{3}{b_1c_0'}$; $\overset{1}{\underline{b'}\,\underline{a'}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{a}}d_0} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{b}}c'}\ \mathbf{P}\, dc_0'$.

4. $\overset{1}{cd_0} \dagger \overset{2}{b_1c_0'} \dagger \overset{3}{ad_0'}$; $\overset{1}{\underline{c}\,\underline{d}} \dagger \overset{2}{b\underline{\underline{c'}}} \dagger \overset{3}{a\underline{\underline{d'}}}\ \mathbf{P}\, ba_0 \dagger b_1$, то есть $\mathbf{P}\, b_1a_0$.

5. $\overset{1}{d_1e_0'} \dagger \overset{2}{c_1a_0'} \dagger \overset{3}{bd_0'} \dagger \overset{4}{e_1a_0}$; $\overset{1}{\underline{d}\,\underline{e'}} \dagger \overset{3}{b\underline{\underline{d'}}} \dagger \overset{4}{\underline{\underline{e}}\,\underline{a}} \dagger \overset{2}{c\underline{\underline{a'}}}\ \mathbf{P}\, bc_0 \dagger c_1$, то есть $\mathbf{P}\, c_1b_0$.

6. $\overset{1}{c_1b_0'} \dagger \overset{2}{a_1e_0'} \dagger \overset{3}{d_1b_0} \dagger \overset{4}{a_1'c_0'}$; $\overset{1}{\underline{c}\,\underline{b'}} \dagger \overset{3}{d\underline{\underline{b}}} \dagger \overset{4}{\underline{a'}\,\underline{\underline{c'}}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{a}}e'}\ \mathbf{P}\, de_0' \dagger d_1$, то есть $\mathbf{P}\, d_1e_0'$.

7. $\overset{1}{bc_0} \dagger \overset{2}{e_1h_0'} \dagger \overset{3}{a_1b_0'} \dagger \overset{4}{dh_0} \dagger \overset{5}{e_1'c_0'}$; $\overset{1}{\underline{b}\,\underline{c}} \dagger \overset{3}{a\underline{\underline{b'}}} \dagger \overset{5}{\underline{e'}\,\underline{\underline{c'}}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{e}}\,\underline{h'}} \dagger \overset{4}{d\underline{h}}\ \mathbf{P}\, ad_0 \dagger a_1$, то есть $\mathbf{P}\, a_1d_0$.

8. $\overset{1}{dh_0'} \dagger \overset{2}{ce_0} \dagger \overset{3}{h_1b_0'} \dagger \overset{4}{ad_0'} \dagger \overset{5}{be_0'}$; $\overset{1}{\underline{d}\,\underline{h'}} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{h}}\,\underline{b'}} \dagger \overset{4}{a\underline{\underline{d'}}} \dagger \overset{5}{\underline{\underline{b}}\,\underline{e'}} \dagger \overset{2}{c\underline{\underline{e}}}\ \mathbf{P}\, ac_0$.

9. $\overset{1}{h_1k_0} \dagger \overset{2}{b'a_0} \dagger \overset{3}{c_1d_0'} \dagger \overset{4}{e_1h_0} \dagger \overset{5}{dk_0'} \dagger \overset{6}{bc_0'}$; $\overset{1}{\underline{h'}\,\underline{k}} \dagger \overset{4}{e\underline{\underline{h}}} \dagger \overset{5}{\underline{d}\,\underline{\underline{k'}}} \dagger \overset{3}{\underline{c}\,\underline{\underline{d'}}} \dagger \overset{6}{\underline{b}\,\underline{\underline{c'}}} \dagger$
$\dagger \overset{2}{\underline{\underline{b'}}a}\ \mathbf{P}\, ea_0 \dagger e_1$, то есть $\mathbf{P}\, e_1a_0$.

10. $\overset{1}{a_1d_0'} \dagger \overset{2}{k_1b_0'} \dagger \overset{3}{e_1h_0'} \dagger \overset{4}{a'b_0} \dagger \overset{5}{d_1c_0'} \dagger \overset{6}{h_1k_0'}$;

$\overset{1}{\underline{a}\,\underline{d'}} \dagger \overset{4}{\underline{\underline{a'}}\,\underline{b}} \dagger \overset{2}{\underline{k}\,\underline{\underline{b'}}} \dagger \overset{5}{\underline{\underline{d}}c'} \dagger \overset{6}{\underline{h}\,\underline{\underline{k'}}} \dagger \overset{3}{e\underline{\underline{h'}}}\ \mathbf{P}\, c'e_0 + e_1$, то есть $\mathbf{P}\, e_1c_0'$.

11. $\overset{1}{ek_0} \dagger \overset{2}{b'm_0} \dagger \overset{3}{ac_0'} \dagger \overset{4}{h_1'e_0'} \dagger \overset{5}{d_1k_0'} \dagger \overset{6}{cb_0} \dagger \overset{7}{d_1'l_0'} \dagger \overset{8}{hm_0'}$;

$\overset{1}{\underline{e}\,\underline{k}} \dagger \overset{4}{\underline{h'}\,\underline{\underline{e'}}} \dagger \overset{5}{\underline{d}\,\underline{\underline{k'}}} \dagger \overset{7}{\underline{\underline{d'}}\,l'} \dagger \overset{8}{\underline{h}\,\underline{\underline{m'}}} \dagger \overset{2}{\underline{b'}\,\underline{\underline{m}}} \dagger \overset{6}{\underline{c}\,\underline{\underline{b}}} \dagger \overset{3}{a\underline{\underline{c'}}}\ \mathbf{P}\, l'a_0$.

12. $\overset{1}{n_1m_0'} \dagger \overset{2}{a_1'e_0'} \dagger \overset{3}{c'l_0} \dagger \overset{4}{k_1r_0} \dagger \overset{5}{ah_0'} \dagger \overset{6}{dl_0'} \dagger \overset{7}{cn_0'} \dagger \overset{8}{e_1b_0'} \dagger \overset{9}{m_1r_0'} \dagger \overset{10}{h_1d'}$; $\overset{1}{\underline{n}\,\underline{m'}} \dagger$

$\dagger \overset{7}{\underline{c}\,\underline{\underline{n}}} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{c'}}\,\underline{l}} \dagger \overset{6}{\underline{d}\,\underline{\underline{l'}}} \dagger \overset{9}{\underline{\underline{m}}\,\underline{r'}} \dagger \overset{4}{k\underline{\underline{r}}} \dagger \overset{10}{\underline{h}\,\underline{\underline{d'}}} \dagger \overset{5}{\underline{a}\,\underline{\underline{h'}}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{a'}}\,\underline{e'}} \dagger \overset{8}{\underline{\underline{e}}\,b'}\ \mathbf{P}\, kb_0' \dagger k_1$, то есть $\mathbf{P}\, k_1b_0'$.

## *Решения задач из § 9*

1 2 3 1 3 2

1. $b_1d_0 \dagger ac_0 \dagger d'_1c'_0$; $b\underline{d} \dagger \underline{\underline{d'}}\ \underline{c'} \dagger a\underline{\underline{c}}\ \mathbf{P}\ ba_0 \dagger b_1$, то есть $\mathbf{P}\ b_1a_0$, то есть «Малые дети не могут укрощать крокодилов».

1 2 3 1 3 2

2. $a_1b'_0 \dagger d_1c'_0 \dagger bc_0$; $a\underline{b'} \dagger \underline{\underline{b}}\underline{c} \dagger d\underline{\underline{c'}}\ \mathbf{P}\ ad_0 \dagger d_1$, то есть $\mathbf{P}\ d_1a_0$, то есть «Ваши подарки сделаны не из олова».

1 2 3 1 3 2

3. $da_0 \dagger c_1b'_0 \dagger a'b_0$; $d\underline{a} \dagger \underline{\underline{a'}}\ \underline{b} \dagger c\underline{\underline{b'}}\ \mathbf{P}\ dc_0 \dagger c_1$, то есть $\mathbf{P}\ c_1d_0$, то есть «Все картофелины на этом блюде старые».

1 2 3 1 2 3

4. $ad_0 \dagger cd'_0 \dagger b_1a'_0$; $\underline{a}\ \underline{d} \dagger c\underline{\underline{d'}} \dagger b\underline{\underline{a'}}\ \mathbf{P}\ cb_0 + b_1$, то есть $\mathbf{P}\ b_1c_0$, то есть «Среди моей домашней птицы нет офицеров».

1 2 3 1 2 3

5. $c_1a'_0 \dagger c'b_0 \dagger da_0$; $\underline{c}\ \underline{a'} \dagger \underline{\underline{c'}}b \dagger d\underline{\underline{a}}\ \mathbf{P}\ bd_0$, то есть «Ни один из ваших сыновей не годится в присяжные заседатели».

1 2 3 1 3 2

6. $cb_0 \dagger da_0 \dagger b'_1a'_0$; $c\underline{b} \dagger \underline{\underline{b'}}\ \underline{a'} \dagger d\underline{\underline{a}}\ \mathbf{P}\ cd_0$, то есть «Ни один из моих карандашей не леденец».

1 2 3 1 3 2

7. $cb'_0 \dagger d_1a'_0 \dagger ba_0$; $c\underline{b'} \dagger \underline{\underline{b}}\ \underline{a} \dagger d\underline{\underline{a'}}\ \mathbf{P}\ cd_0 \dagger d_1$, то есть $\mathbf{P} d_1c_0$, то есть «Дженкинс неопытен».

1 2 3 1 2 3

8. $cd_0 \dagger d'a_0 \dagger c'b_0$; $\underline{c}\ \underline{d} \dagger \underline{\underline{d'}}a \dagger \underline{\underline{c'}}b\ \mathbf{P}\ ab_0$, то есть «Ни у одной кометы нет хвоста колечком».

1 2 3 1 3 2

9. $d'c_0 \dagger ba_0 \dagger a'_1d_0$; $\underline{d'}c \dagger \underline{a'}\ \underline{\underline{d}} \dagger b\underline{\underline{a}}\ \mathbf{P}\ cb_0$, то есть «Ни один дикобраз не выписывает газету „Таймс“».

1 2 3 1 2 3

10. $b_1a'_0 \dagger c_1b'_0 \dagger ad_0$; $\underline{b}\ \underline{a'} \dagger c\underline{\underline{b'}} \dagger \underline{\underline{a}}d\ \mathbf{P}\ cd_0 \dagger c_1$, то есть $\mathbf{P}\ c_1d_0$, то есть «Это блюдо не полезно».

1 2 3 1 3 2

11. $b_1c'_0 \dagger d'a_0 \dagger a'c_0$; $b\underline{c'} \dagger \underline{a'}\ \underline{\underline{c}} \dagger d'\underline{\underline{a}}\ \mathbf{P}\ bd'_0 \dagger b_1$, то есть $\mathbf{P}\ b_1d'_0$, то есть «Мой садовник очень стар».

1 2 3 1 3 2

12. $a_1d'_0 \dagger bc_0 \dagger c'_1d_0$; $a\underline{d'} \dagger \underline{c'}\ \underline{\underline{d}} \dagger b\underline{\underline{c}}\ \mathbf{P}\ ab_0 \dagger a_1$, то есть $\mathbf{P}\ a_1b_0$, то есть «Все колибри очень малы».

1 2 3 1 2 3

13. $b_1a'_0 \dagger b'_1d_0 \dagger ca_0$; $\underline{b}\ \underline{a'} \dagger \underline{\underline{b'}}d \dagger c\underline{\underline{a}}\ \mathbf{P}\ dc_0$, то есть «Ни одна серая утка в этой деревне не носит кружевных воротничков».

1 2 3 1 2 3

14. $d_1b'_0 \dagger cd'_0 \dagger ba_0$; $\underline{a}\ \underline{b'} \dagger c\underline{\underline{d'}} \dagger \underline{\underline{b}}a\ \mathbf{P}\ ca_0$, то есть «Ни один горшок на этой полке не пригоден для хранения воды».

15. $\overset{1}{b'_1d_0} \dagger \overset{2}{c_1d'_0} \dagger \overset{3}{ab_0}$; $\overset{1}{\underline{b'}\,\underline{d}} \dagger \overset{2}{c\underline{\underline{d'}}} \dagger \overset{3}{a\underline{\underline{b}}}\ \mathbf{P}\ ca_0 \dagger c_1$, то есть $\mathbf{P}\ c_1a_0$, то есть «Эти яблоки выросли на солнце».

16. $\overset{1}{d'_1b'_0} \dagger \overset{2}{c_1b_0} \dagger \overset{3}{c'a_0}$; $\overset{1}{d'\underline{b'}} \dagger \overset{2}{\underline{c}\,\underline{\underline{b}}} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{c'}}a}\ \mathbf{P}\ d'a_0 \dagger d'_1$, то есть $\mathbf{P}\ d'_1a_0$, то есть «Щенки, которые не могут лежать спокойно, не станут ткать».

17. $\overset{1}{bd'_0} \dagger \overset{2}{a_1c'_0} \dagger \overset{3}{a'd_0}$; $\overset{1}{b\underline{d'}} \dagger \overset{2}{\underline{a'}d} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{a}}c'}\ \mathbf{P}\ bc'_0$, то есть «Ни одно имя в этом списке не мелодично».

18. $\overset{1}{a_1b'_0} \dagger \overset{2}{dc_0} \dagger \overset{3}{a'_1d'_0}$; $\overset{1}{\underline{a}\,b'} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{a}}\,\underline{d'}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{d}}c}\ \mathbf{P}\ b'c_0$, то есть «Ни один член парламента не станет участвовать в скачках на мулах, если он в полном рассудке».

19. $\overset{1}{bd_0} \dagger \overset{2}{c'a_0} \dagger \overset{3}{b'c_0}$; $\overset{1}{\underline{b}\,d} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{b'}}\,\underline{\underline{c}}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{c'}}a}\ \mathbf{P}\ da_0$, то есть «Ни один товар, который еще находится в продаже, нельзя выносить из этого магазина».

20. $\overset{1}{a'b_0} \dagger \overset{2}{cd_0} \dagger \overset{3}{d'd_0}$; $\overset{1}{\underline{a'}\ b} \dagger \overset{3}{\underline{d'}\underline{\underline{a}}} \dagger \overset{2}{c\underline{\underline{d}}}\ \mathbf{P}\ bc_0$, то есть «Ни один акробатический трюк, включающий в себя четверное сальто, никогда не исполнялся в цирке».

21. $\overset{1}{dc'_0} \dagger \overset{2}{a_1b'_0} \dagger \overset{3}{bc_0}$; $\overset{1}{d\underline{c'}} \dagger \overset{3}{\underline{b}\,\underline{\underline{c}}} \dagger \overset{2}{a\underline{\underline{b'}}}\ \mathbf{P}\ da_0 \dagger a_1$, то есть $\mathbf{P}\ a_1d_0$, то есть «Морские свинки никогда не были подлинными ценителями Бетховена».

22. $\overset{1}{a_1d'_0} \dagger \overset{2}{b'_1c_0} \dagger \overset{3}{ba'_0}$; $\overset{1}{\underline{a}d'} \dagger \overset{3}{\underline{b}\,\underline{\underline{a'}}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{b'c}}}\ \mathbf{P}\ d'c_0$, то есть «Ни один цветок без запаха мне не нравится».

23. $\overset{1}{c_1d'_0} \dagger \overset{2}{ba'_0} \dagger \overset{3}{d_1a_0}$; $\overset{1}{c\underline{d'}} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{d}}\,\underline{a}} \dagger \overset{2}{b\underline{\underline{a'}}}\ \mathbf{P}\ cb_0 \dagger c_1$, то есть $\mathbf{P}\ c_1b_0$, то есть «Ораторы, рассчитывающие на внешний эффект, не очень хорошо информированы».

24. $\overset{1}{ea_0} \dagger \overset{2}{b_1d'_0} \dagger \overset{3}{a'_1c_0} \dagger \overset{4}{e'b'_0}$; $\overset{1}{\underline{\underline{e}}\,\underline{a}} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{a'}}c} \dagger \overset{4}{\underline{\underline{e'}}\ \underline{b'}} \dagger \overset{2}{b\underline{\underline{d'}}}\ \mathbf{P}\ \overset{2}{cd'_0}$, то есть «Никто, кроме рыжих мальчиков, не изучает в этой школе греческий язык».

25. $\overset{1}{b_1d_0} \dagger \overset{2}{ac'_0} \dagger \overset{3}{e_1d'_0} \dagger \overset{4}{c_1b'_0}$; $\overset{1}{\underline{b}\,\underline{d}} \dagger \overset{3}{e\underline{\underline{d'}}} \dagger \overset{4}{\underline{c}\,\underline{\underline{b'}}} \dagger \overset{2}{a\underline{\underline{c'}}}\ \mathbf{P}\ ea_0 \dagger e_1$, то есть $\mathbf{P}\ e_1a_0$, то есть «Свадебный пирог всегда был мне противопоказан».

26. $\overset{1}{ad_0} \dagger \overset{2}{e'_1b'_0} \dagger \overset{3}{c_1d'_0} \dagger \overset{4}{e_1a'_0}$; $\overset{1}{\underline{a}\,\underline{d}} \dagger \overset{3}{c\underline{\underline{d'}}} \dagger \overset{4}{\underline{e}\,\underline{\underline{a'}}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{e'}}b'}\ \mathbf{P}\ cb'_0 + c_1$, то есть $\mathbf{P}\ c_1b'_0$,

то есть «Дискуссии, происходящие под председательством Томкиса, угрожают спокойствию в стенах нашего клуба».

1 2 3 4 1 3 4 2

27. $d_1a_0 \dagger e'c_0 \dagger b_1a'_0 \dagger d'e_0$; $\underline{d}\,\underline{a} \dagger b\underline{\underline{a'}} \dagger \underline{\underline{d'}}\,\underline{e} \dagger \underline{\underline{e'}}c \;\mathbf{P}\; bc_0 \dagger b_1$, то есть $\mathbf{P}\; b_1c_0$, то есть «Все мои дети-обжоры не здоровы».

1 2 3 4 1 3 4 2

28. $d_1e_0 \dagger c'a_0 \dagger b_1e'_0 \dagger c_1d'_0$; $\underline{d}\,\underline{e} \dagger b\underline{\underline{e'}} \dagger \underline{c}\,\underline{d'} \dagger \underline{\underline{c'}}a \;\mathbf{P}\; ba_0 \dagger b_1$, то есть $\mathbf{P}\; b_1a_0$, то есть «Яйцо большой гагарки за грош не купишь».

1 2 3 4 1 4 2 3

29. $a'b_0 \dagger a_1c'_0 \dagger c_1e'_0 \dagger a'd_0$; $\underline{d'}b \dagger \underline{a'}\,\underline{\underline{d}} \dagger \underline{\underline{a}}\,\underline{c'} \dagger \underline{\underline{c}}e' \;\mathbf{P}\; be'_0$, то есть «Ни одна продаваемая здесь книга не имеет золоченого обреза, если она не идет по цене от 5 шиллингов и выше».

1 2 3 4 1 3 4 2

30. $a'_1c'_0 \dagger d_1b_0 \dagger a_1e'_0 \dagger c_1b'_0$; $\underline{a'}\,\underline{c'} \dagger \underline{\underline{ae'}} \dagger \underline{\underline{c}}\,\underline{b'} \dagger d\underline{\underline{b}} \;\mathbf{P}\; e'd_0 \dagger d_1$, то есть $\mathbf{P}\; d_1e'_0$, то есть «Порезав палец, вы убедитесь, что настойка календулы полезна».

1 2 3 4 1 4 2 3

31. $d'b_0 \dagger a_1e'_0 \dagger ec_0 \dagger d_1a'_0$; $\underline{d'}b \dagger \underline{\underline{d}}\,\underline{a'} \dagger \underline{\underline{a}}\,\underline{e'} \dagger \underline{\underline{e}}\,c \;\mathbf{P}\; bc_0$, то есть «*Мне* никогда не доводилось встречать в море русалок».

1 2 3 4 1 3 4 2

32. $c'_1b_0 \dagger a_1e'_0 \dagger d_1b'_0 \dagger a'_1c_0$; $\underline{c'}\,\underline{b} \dagger d\underline{\underline{b'}} \dagger \underline{a'}\,\underline{\underline{c}} \dagger \underline{\underline{ae'}} \;\mathbf{P}\; de'_0 \dagger d_1$, то есть $\mathbf{P}\; d_1e'_0$, то есть «Все романы в этой библиотеке обладают выдающимися литературными достоинствами».

1 2 3 4 1 3 4 2

33. $e'd_0 \dagger c'a_0 \dagger eb_0 \dagger d'c_0$; $\underline{e'}\,\underline{d} \dagger \underline{\underline{e}}b \dagger \underline{\underline{d'}}\,\underline{c} \dagger \underline{\underline{c'}}a \;\mathbf{P}\; ba_0$, то есть «Ни одна птица в этом птичнике не питается пирогами с начинкой».

1 2 3 4 5 1 4 2 5 3

34. $ce'_0 \dagger b'a'_0 \dagger h_1d'_0 \dagger ae_0 \dagger bd_0$; $c\underline{e'} \dagger \underline{a}\,\underline{\underline{e}} \dagger \underline{b'}\,\underline{\underline{a'}} \dagger \underline{\underline{b}}\,\underline{d} \dagger h\underline{\underline{d'}} \;\mathbf{P}\; ch_0 \dagger h_1$, то есть $\mathbf{P} h_1c_0$, то есть «Все *ваши* поэмы не интересны».

1 2 3 4 5 1 2 5 3 4

35. $b'_1a'_0 \dagger db_0 \dagger he'_0 \dagger ec_0 \dagger a_1h'_0$; $\underline{b'}\,\underline{a'} \dagger d\underline{\underline{b}} \dagger \underline{\underline{a}}\,\underline{h'} \dagger \underline{\underline{h}}\,\underline{e'} \dagger \underline{\underline{e}}c \;\mathbf{P}\; dc_0$, то есть «Ни один из моих персиков не был выращен в теплице».

1 2 3 4 5 1 3 5 2 4

36. $c_1d_0 \dagger h_1e'_0 \dagger c'_1a'_0 \dagger h'b_0 \dagger e_1d'_0$; $\underline{c'}\,\underline{d} \dagger \underline{\underline{c'}}a \dagger \underline{e}\,\underline{\underline{d'}} \dagger \underline{h}\,\underline{\underline{e'}} \dagger \underline{\underline{h'}}b \;\mathbf{P}\; a'b_0$, то есть «Ни один ростовщик не бывает нечестным».

1 2 3 4 5 1 3 4 5 2

37. $ad'_0 \dagger c'h_0 \dagger e_1a'_0 \dagger db_0 \dagger e'c_0$; $\underline{a}\,\underline{d'} \dagger \underline{\underline{e}}\,\underline{\underline{a'}} \dagger \underline{\underline{d}}b \dagger \underline{\underline{e'}}\,\underline{c} \dagger \underline{\underline{c'}}h \;\mathbf{P}\; bh_0$, то есть «Ни один котенок с зелеными глазами не станет играть с гориллой».

1 2 3 4 5 1 3 4 5 2

38. $c_1a'_0 \dagger h'b_0 \dagger ae_0 \dagger d_1c'_0 \dagger h_1e'_0$; $\underline{c}\,\underline{a'} \dagger \underline{\underline{a}}\,\underline{e} \dagger d\underline{\underline{c'}} \dagger \underline{h}\,\underline{\underline{e'}} \dagger \underline{\underline{h'}}b \;\mathbf{P}\; db_0 \dagger d_1$, то есть $\mathbf{P}\; d_1b_0$, то есть «Все *мои* друзья обедают за нижним столом».

39. $\overset{1}{ca_0} \dagger \overset{2}{h_1d'_0} \dagger \overset{3}{c'_1e'_0} \dagger \overset{4}{b'a'_0} \dagger \overset{5}{d_1e_0}$; $\overset{1}{\underline{c}\,\underline{a}} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{c'}}\,\underline{e'}} \dagger \overset{4}{b'\underline{\underline{a'}}} \dagger \overset{5}{\underline{d}\,\underline{\underline{c}}} \dagger \overset{2}{h\underline{\underline{d'}}}\ \mathbf{P}\ b'h_0 \dagger h_1$, то есть $\mathbf{P}\, h_1b'_0$, то есть «Мой письменный стол полон живых скорпионов».

40. $\overset{1}{e_1b'_0} \dagger \overset{2}{a'd_0} \dagger \overset{3}{c'h'_0} \dagger \overset{4}{e'a_0} \dagger \overset{5}{d'h_0}$; $\overset{1}{\underline{e}b'} \dagger \overset{4}{\underline{\underline{e}}\,\underline{a}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{a'}}\,\underline{d}} \dagger \overset{5}{\underline{\underline{d'}}\,\underline{h}} \dagger \overset{3}{c\underline{h'}}\ \mathbf{P}\ b'c_0 \dagger c_1$, то есть $\mathbf{P}\, c_1b'_0$, то есть «Шекспир был умным человеком».

41. $\overset{1}{e'_1c'_0} \dagger \overset{2}{hb'_0} \dagger \overset{3}{d_1a_0} \dagger \overset{4}{e_1a'_0} \dagger \overset{5}{c_1b_0}$; $\overset{1}{\underline{e'}\,\underline{c'}} \dagger \overset{4}{\underline{\underline{e}}\,\underline{a'}} \dagger \overset{3}{d\underline{\underline{a}}} \dagger \overset{5}{\underline{\underline{c}}\,\underline{b}} \dagger \overset{2}{h\underline{b'}}\ \mathbf{P}\ dh_0 \dagger d_1$, то есть $\mathbf{P}\, d_1h_0$, то есть «Радугу не стоит воспевать в стихах».

42. $\overset{1}{c'_1h'_0} \dagger \overset{2}{e_1a_0} \dagger \overset{3}{bd_0} \dagger \overset{4}{a'_1h_0} \dagger \overset{5}{d'c_0}$; $\overset{1}{\underline{c'}\,\underline{h'}} \dagger \overset{4}{\underline{a'}\,\underline{\underline{h}}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{e}}\,\underline{\underline{a}}} \dagger \overset{5}{\underline{d'}\,\underline{\underline{c}}} \dagger \overset{3}{b\,\underline{d}}\ \mathbf{P}\ eb_0 \dagger e_1$, то есть $\mathbf{P}\, e_1b_0$, то есть «Эти сориты очень трудные».

43. $\overset{1}{a'_1e'_0} \dagger \overset{2}{bk_0} \dagger \overset{3}{c'a_0} \dagger \overset{4}{eh'_0} \dagger \overset{5}{d_1b'_0} \dagger \overset{6}{k'h_0}$; $\overset{1}{\underline{a'}\,\underline{e'}} \dagger \overset{3}{c'\underline{\underline{a}}} \dagger \overset{4}{\underline{\underline{e}}\,h_0} \dagger \overset{6}{\underline{k'}\,\underline{\underline{h}}} \dagger \overset{2}{\underline{b}\,\underline{k}} \dagger \overset{5}{d\underline{b'}}\ \mathbf{P}\ c'd_0 \dagger d_1$, то есть $\mathbf{P}\, d_1c'_0$, то есть «Все мои мечты сбылись».

44. $\overset{1}{a'_1h_0} \dagger \overset{2}{c'k_0} \dagger \overset{3}{a_1d'_0} \dagger \overset{4}{e_1h'_0} \dagger \overset{5}{b_1k'_0} \dagger \overset{6}{c_1e'_0}$; $\overset{1}{\underline{a'}\,\underline{h}} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{a}}\,d'} \dagger \overset{4}{\underline{e}\,\underline{\underline{h'}}} \dagger \overset{6}{\underline{c}\,\underline{\underline{e'}}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{c'}}\,\underline{k}} \dagger \overset{5}{\underline{b}k'}\ \mathbf{P}\ d'b_0 \dagger b_1$, то есть $\mathbf{P}\, b_1d'_0$, то есть «Все представленные здесь картины англнйских мастеров написаны маслом».

45. $\overset{1}{k'_1e_0} \dagger \overset{2}{c_1h_0} \dagger \overset{3}{b_1a'_0} \dagger \overset{4}{kd_0} \dagger \overset{5}{h'a_0} \dagger \overset{6}{b'_1e'_0}$; $\overset{1}{\underline{k'}\,\underline{e}} \dagger \overset{4}{\underline{\underline{k}}d} \dagger \overset{6}{\underline{b'}\,\underline{\underline{e}}} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{b}}\,\underline{a'}} \dagger \overset{5}{\underline{h'}\,\underline{\underline{a}}} \dagger \overset{2}{c\underline{h}}\ \mathbf{P}\ dc_0 \dagger c_1$, то есть $\mathbf{P}\, c_1d_0$, то есть «Проглотить осла — дело нелегкое».

46. $\overset{1}{ab'_0} \dagger \overset{2}{h'd_0} \dagger \overset{3}{e_1c_0} \dagger \overset{4}{b_1d'_0} \dagger \overset{5}{a'k_0} \dagger \overset{6}{c'_1h_0}$; $\overset{1}{\underline{a}\,\underline{b'}} \dagger \overset{4}{\underline{\underline{b}}\,\underline{d}} \dagger \overset{2}{\underline{h'}\,\underline{\underline{d}}} \dagger \overset{5}{\underline{\underline{a'}}k} \dagger \overset{6}{\underline{c'}\,\underline{\underline{h}}} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{e}}c}\ \mathbf{P}\ ke_0 \dagger e_1$, то есть $\mathbf{P}\, e_1k_0$, то есть «Курильщики опиума никогда не носят белых лайковых перчаток».

47. $\overset{1}{bc_0} \dagger \overset{2}{k_1a'_0} \dagger \overset{3}{eh_0} \dagger \overset{4}{d_1b'_0} \dagger \overset{5}{h'c'_0} \dagger \overset{6}{k'_1e'_0}$; $\overset{1}{\underline{b}\,\underline{c}} \dagger \overset{4}{d\underline{b'}} \dagger \overset{5}{\underline{h'}\,\underline{\underline{c'}}} \dagger \overset{3}{\underline{e}\,\underline{\underline{h}}} \dagger \overset{6}{\underline{k'}\,\underline{\underline{e'}}} \dagger \overset{2}{\underline{k}\,a'}\ \mathbf{P}\ da'_0 \dagger d_1$, то есть $\mathbf{P}\, d_1a'_0$, то есть «Хороший муж всегда возвращается домой к чаю».

48. $\overset{1}{a'_1k'_0} \dagger \overset{2}{ch_0} \dagger \overset{3}{h'k'_0} \dagger \overset{4}{b_1d'_0} \dagger \overset{5}{ea_0} \dagger \overset{6}{d_1c'_0}$; $\overset{1}{\underline{a'}\,\underline{k'}} \dagger \overset{3}{\underline{h'}\,\underline{\underline{k}}} \dagger \overset{2}{\underline{c}\,\underline{\underline{h}}} \dagger \overset{6}{\underline{d}\,\underline{\underline{c'}}} \dagger \overset{4}{b\underline{\underline{d'}}} \dagger$

$\dagger\, \overset{5}{c\underline{\underline{a}}}\ \mathbf{P}\ be_0 \dagger b_1$, то есть $\mathbf{P}\ b_1e_0$, то есть «Купальные кабинкн никогда не делают из перламутра».

49\. $\overset{1}{da'_0} \dagger \overset{2}{k_1b'_0} \dagger \overset{3}{c_1h_0} \dagger \overset{4}{d'_1k'_0} \dagger \overset{5}{e_1c'_0} \dagger \overset{6}{a_1h'_0}$; $\overset{1}{\underline{d}\,\underline{a'}} \dagger \overset{4}{\underline{\underline{d'}}\,\underline{k'}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{k}}\,b'} \dagger \overset{6}{\underline{\underline{a}}\underline{h'}} \dagger \overset{3}{\underline{c}\,\underline{\underline{h}}} \dagger \overset{5}{e\underline{\underline{c'}}}\ \mathbf{P}\ b'e_0 \dagger e_1$, то есть $\mathbf{P}\ e_1b'_0$, то есть «Дождливые дии пасмурны».

50\. $\overset{1}{kb'_0} \dagger \overset{2}{a'_1c'_0} \dagger \overset{3}{d'b_0} \dagger \overset{4}{k'_1h'_0} \dagger \overset{5}{ea_0} \dagger \overset{6}{d_1c_0}$; $\overset{1}{\underline{k}\,\underline{b'}} \dagger \overset{3}{\underline{d'}\,\underline{\underline{b}}} \dagger \overset{4}{\underline{\underline{k'}}\,\underline{h'}} \dagger \overset{6}{\underline{\underline{d}}\,\underline{c}} \dagger \overset{2}{\underline{a'}\underline{\underline{c'}}} \dagger \overset{5}{e\underline{\underline{a}}}\ \mathbf{P}\ h'e_0$, то есть «Ни одна большая рыба не бывает недоброй по отношению к детям».

51\. $\overset{1}{k'_1b'_0} \dagger \overset{2}{eh'_0} \dagger \overset{3}{c'd_0} \dagger \overset{4}{hb_0} \dagger \overset{5}{ac_0} \dagger \overset{6}{kd'_0}$; $\overset{1}{\underline{k'}\,\underline{b'}} \dagger \overset{4}{\underline{h}\,\underline{\underline{b}}} \dagger \overset{2}{e\underline{\underline{h'}}} \dagger \overset{6}{\underline{\underline{k}}\,\underline{d'}} \dagger \overset{3}{\underline{c'}\,\underline{\underline{d'}}} \dagger \overset{5}{a\underline{\underline{c}}}\ \mathbf{P}\ ea_0$, то есть «Ни один машинист не пнтается одними сладостями».

52\. $\overset{1}{h_1b'_0} \dagger \overset{2}{c_1d'_0} \dagger \overset{3}{k'a_0} \dagger \overset{4}{e_1h'_0} \dagger \overset{5}{b_1a'_0} \dagger \overset{6}{k_1c'_0}$; $\overset{1}{\underline{h}\,\underline{b'}} \dagger \overset{4}{e\underline{h'}} \dagger \overset{5}{\underline{\underline{b}}\,\underline{a'}} \dagger \overset{3}{\underline{k'}\,\underline{\underline{a}}} \dagger \overset{6}{\underline{\underline{k}}\,\underline{\underline{c'}}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{c}}d'}\ \mathbf{P}\ ed'_0 \dagger e_1$, то есть $\mathbf{P}\ e_1d'_0$, то есть «Все животные в этом дворе грызут кости».

53\. $\overset{1}{h'_1d'_0} \dagger \overset{2}{e_1c'_0} \dagger \overset{3}{k'a_0} \dagger \overset{4}{cb_0} \dagger \overset{5}{d_1l'_0} \dagger \overset{6}{e'h_0} \dagger \overset{7}{kl_0}$; $\overset{1}{\underline{h}\,\underline{d'}} \dagger \overset{5}{\underline{\underline{d}}\,\underline{l'}} \dagger \overset{7}{\underline{k}\ \underline{\underline{l}}} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{k'}}a} \dagger \overset{6}{\underline{e'}\,\underline{\underline{h}}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{e}}\,\underline{c'}} \dagger \overset{4}{\underline{\underline{c}}\,b}\ \mathbf{P}\ ab_0$, то есть «Ни один барсук не может отгадать загадки».

54\. $\overset{1}{c_1l'_0} \dagger \overset{2}{h'e_0} \dagger \overset{3}{kd_0} \dagger \overset{4}{mc'_0} \dagger \overset{5}{b'_1e'_0} \dagger \overset{6}{n_1a'_0} \dagger \overset{7}{l_1d'_0} \dagger \overset{8}{m'b_0} \dagger \overset{9}{ah_0}$; $\overset{1}{\underline{c}\,\underline{l'}} \dagger \overset{4}{\underline{m}\,\underline{\underline{c'}}} \dagger \overset{7}{\underline{\underline{l}}\,\underline{d'}} \dagger \overset{3}{k\underline{\underline{d}}} \dagger \overset{8}{\underline{\underline{m'}}\,\underline{b}} \dagger \overset{5}{\underline{\underline{b'}}\,\underline{e'}} \dagger \overset{2}{\underline{h'}\,\underline{\underline{e}}} \dagger \overset{9}{\underline{a}\,\underline{h}} \dagger \overset{6}{n\underline{\underline{a'}}}\ \mathbf{P}\ kn_0$, то есть «Я не могу прочитать ни одно из писем, написанных Брауном».

55\. $\overset{1}{e_1c'_0} \dagger \overset{2}{l_1n'_0} \dagger \overset{3}{d_1a'_0} \dagger \overset{4}{m'b_0} \dagger \overset{5}{ck'_0} \dagger \overset{6}{e'r_0} \dagger \overset{7}{h_1n_0} \dagger \overset{8}{b'k_0} \dagger \overset{9}{r'_1d'_0} \dagger \overset{10}{m_1l'_0}$; $\overset{1}{\underline{e}\,\underline{c'}} \dagger \overset{5}{\underline{\underline{c}}\,\underline{k'}} \dagger \overset{6}{\underline{\underline{e'}}\,\underline{r}} \dagger \overset{8}{\underline{b'}\,\underline{\underline{k}}} \dagger \overset{4}{\underline{m'}\,\underline{\underline{b}}} \dagger \overset{9}{\underline{\underline{r'}}\,\underline{d'}} \dagger \overset{3}{\underline{\underline{d}}a'} \dagger \overset{10}{\underline{\underline{m}}\,\underline{l'}} \dagger \overset{2}{\underline{\underline{l}}\,\underline{n'}} \dagger \overset{7}{h\underline{\underline{n}}}\ \mathbf{P}\ a'h_0 \dagger h_1$, то есть «Я всегда стараюсь держаться подальше от кенгуру».

# ПРИЛОЖЕНИЕ, АДРЕСОВАННОЕ ПРЕПОДАВАТЕЛЯМ

## § 1. Введение

Некоторые вопросы слишком трудны для того, чтобы их можно было обсуждать с *учащимися*, тем не менее их совершенно необходимо разъяснять всем *преподавателям*, в руки которых может попасть эта книга. Такое разъяснение позволит последним лучше понять, в чем состоит мой символический метод и чем он отличается от многих уже известных методов.

Вот эти трудные вопросы:

1) утверждения о существовании субъекта, вытекающие из суждений;

2) употребление выражения «не есть» (или «не суть») в качестве связки;

3) теория, согласно которой «две отрицательные посылки ничего не доказывают»;

4) метод кругов Эйлера;

5) метод диаграмм Венна;

6) мой метод диаграмм;

7) решение силлогизмов с помощью различных методов;

8) мой метод рассмотрения силлогизмов и соритов;

9) краткий обзор содержания II и III частей «Символической логики».

## § 2. Утверждение о существовании субъекта суждения, вытекающее из самого суждения

Авторы и редакторы учебников логики, следующие проторенными путями (в дальнейшем я буду называть их «логиками», надеясь, что в этом нет ничего обидного), занимают в этом вопросе, как мне кажется, излишне робкую позицию. О связке суждения они говорят, затаив дыхание, будто связка — живое разумное существо, способиое по своему усмотрению изрекать, что именно она желает означать в том или ином случае, а нам, жалким человеческим существам, не остается ничего другого, кроме как слепо повиноваться ее монаршей воле.

В противоположность этому мнению я считаю, что *любой* автор *любой* книги имеет полное право придавать *любое* значение, какое только ему вздумается, *любому* слову или выражению, которое он вознамерится употребить. Если в начале своей книги автор скажет: «Под словом „черное" я всегда буду понимать „белое", а под словом „белое" — „черное"» — мне останется лишь принять его условие, сколь бы неразумным оно ни казалось.

Вопрос о том, можно ли считать или нет, что в суждениях содержатся утверждения о существовании субъектов суждений, по моему мнению, надлежит решать точно таким же образом. Я придерживаюсь того мнения, что каждый автор волен избирать свое собственное правило, лишь бы оно не было внутренне противоречивым и согласовывалось с общепринятыми законами логики.

В соответствии с этим мы рассмотрим некоторые *логически* возможные точки зрения, выясним, какие из них наиболее *удобны*, а затем я, используя предоставленную мне свободу выбора, укажу, на какой из них я намерен остановиться.

Суждения *тех типов*, которые мы будем рассматривать, начинаются со слов «некоторые», «все» и «ни один». Обычно их принято обозначать буквами *I*, *A* и *E*.

Суждение типа *I* можно понимать двояко: считать, что оно содержит утверждение о существовании своего субъекта или *не* содержит такого утверждения. (Говоря о существовании, я, разумеется, имею в виду тот тип существования, который отвечает природе субъекта. Так, два суждения: «*Мечты существуют*» и «*Мачты существуют*» — означают два совершенно различных типа существования. *Мечта* — это совокупность идей и существует *лишь в воображении того, кто мечтает*, в то время как *мачта* — это сложное сооружение из дерева и металла и существует *на палубе корабля*.)

Предположим сначала, что суждение *I* утверждает существование своего субъекта. Тогда необходимо предположить, что и суждение *A* утверждает существование *своего* субъекта, ибо суждение типа *I* содержится в суждении *A*.

Итак, суждения *I* и *A* утверждают, что их субъекты существуют. Остается ли при этом у нас свобода выбора предположения относительно суждения $E$? Я отвечаю: «Нет, не остается. Мы вынуждены предположить, что в суждении $E$ *не* содержится утверждения о существовании субъекта суждения». Доказать это можно следующим образом.

Пусть суждение $E$ утверждает, что его субъект существует. Тогда, обозначив признаки буквами $x$, $y$ и $z$, мы видим, что если суждение «Ни один $xy$ не суть $z$» истинно, то некоторые предметы с признаками $x$ и $y$ существуют, то есть «Некоторые $x$ суть $y$».

Мы также знаем, что тот же результат получится, если истинным будет суждение «Некоторые $xy$ суть $z$». Но суждения «Ни один $xy$ не есть $z$» и «Некоторые $xy$ суть $z$» противоположны, вследствие чего одно из них *должно* быть истинным. Следовательно, полученный результат *всегда* верен, то есть суждение «Некоторые $x$ суть $y$» *всегда* истинно, что и требовалось доказать!

Примечание. Читателю, которому доводилось изучать формальную логику, может показаться, что рассуждения, проводимые нами применительно к суждениям $I$ и $E$, равным образом применимы и к суждениям $I$ и $A$ (поскольку в обычных учебниках суждения «Все $xy$ суть $z$» и «Все $xy$ суть не-$z$» рассматриваются как противоположные). Иначе говоря, у такого читателя может появиться мысль о том, что в действительности рассуждать следовало бы так:

Итак, пусть суждения $I$ и $A$ содержат утверждения о существовании своих субъектов. Тогда, если суждение «Все $xy$ суть $z$» истинно, то существуют предметы, обладающие признаками $x$ и $y$, то есть истинно суждение «Некоторые $x$ суть $y$».

Известно, что тот же самый результат получается и в случае, если истинно суждение «Некоторые $xy$ суть не-$z$». Но поскольку эти суждения противоположны, то одно из них *должно* быть истинным. Следовательно, полученный результат является *всегда* истинным, то есть суждение «Некоторые $x$ суть $y$» *всегда* истинно! Поскольку такой вывод абсурден, из него следует, что суждение $I$ не содержит утверждения о существовании своего субъекта.

Подробно этот вопрос будет рассмотрен во второй части «Символической логики». Здесь же я приведу лишь соображения, которые, как мне кажется, неопровержимо доказывают ошибочность мнения о том, будто суждения $A$ и $I$ противоположны (хотя этого мнения придерживаются традиционные учебники логики).

Рассмотрим отношения, существующие между классом $xy$ и двумя классами: $z$ и не-$z$. Возможны *четыре* ситуации:

1) некоторые $xy$ суть $z$, и некоторые $xy$ суть не-$z$;
2) некоторые $xy$ суть $z$, и ни один $xy$ не есть не-$z$;
3) ни один $xy$ не есть $z$, и некоторые $xy$ суть не-$z$;
4) ни один $xy$ не есть $z$, и ни один $xy$ не есть не-$z$.

Второе из этих четырех суждений эквивалентно суждению «Все $xy$ суть $z$», третье — суждению «Все $xy$ суть не-$z$» и четвертое — суждению «Ни один $xy$ не существует».

Вряд ли кто-нибудь станет отрицать, что из *четырех* перечисленных случаев, каждый из которых *априори возможен*, один должен отвечать *истинному* суждению, а три остальных — *ложным* суждениям.

Следовательно, суждением, противоположным суждению 2, является суждение «Либо суждение 1, либо суждение 3, либо суждение 4 истинно». Но суждение «Либо суждение 1, либо суждение 3 истинно» эквивалентно суждению «Некоторые $xy$ суть не-$z$», а утверждение «Суждение 4 истинно» эквивалентно суждению «Ни один $xy$ не существует». Следовательно, суждение, противоположное суждению «Все $xy$ суть $z$», можно представить в виде альтернативного суждения «Либо некоторые $xy$ суть не-$z$, либо ни один $xy$ не существует», но отнюдь не в виде категорического суждения «Некоторые $y$ суть не-$z$».

Итак, мы видим, что предположение о том, что суждение типа $I$ содержит утверждение о существовании своего субъекта, с необходимостью приводит к тому, что суждение $A$ также содержит аналогичное утверждение, а суждение $E$ не содержит его. Это лишь первая из различных логически одинаково допустимых точек зрения.

Предположим теперь, что суждение $I$ *не* содержит утверждения о существовании своего субъекта и, кроме того, что суждение $E$ такое утверждение (относительно своего субъекта) содержит. Тогда суждение «Ни один $x$ не есть $y$» означает «Некоторые $x$ существуют, и ни один из них не есть $y$», то есть «Все $x$ суть не-$y$». Последнее суждение относится к типу $A$. Разумеется, нам известно, что из суждения «Все $x$ суть не-$y$» следует суждение «Ни один $x$ не есть $y$». Но два суждения, обладающие тем свойством, что из первого суждения следует второе, а из второго — первое, *эквивалентны*. Таким образом, всякое суждение $A$ эквивалентно суждению $I$ и, следовательно, содержит утверждение о существовании своего субъекта.

Итак, нашу *вторую* логически возможную точку зрения можно сформулировать так: «Утверждение о существовании субъекта суждения содержится в суждениях $E$ и $A$, но не содержится в суждении $I$».

Ясно, что эта точка зрения не является внутренне противоречивой и согласуется с общеизвестными логическими истинами. Однако если мы задумаем *проверить*, насколько она применима к реальной жизни, то, по-видимому, обнаружим, что она плохо согласуется с действительностью и, приняв ее, мы обрекли бы людей, мягко выражаясь, на большие неудобства.

В качестве примера я хочу привести короткий диалог, состоявшийся у меня с моим другом Джонсом, который вознамерился открыть новый клуб с уставом, основанным на строго *логических* принципах.

Автор. А, Джонс! Ну, как ваш новый клуб? Открытие уже состоялось?

Джонс (*радостно потирая руки*). Рад сообщить вам, что некоторые из членов клуба (обратите внимание, я говорю лишь некоторые) — миллионеры! Купаются в золоте, дружище!

Автор. Это великолепно. А сколько членов уже вступило в клуб?

Джонс (*удивленно*). Ни одного. Клуб еще не открылся. Почему вы думаете, что открытие уже состоялось?

Автор. Как почему? Вы же сами сказали, что некоторые члены вашего клуба...

Джонс (*с презрением*). По-видимому, вы не учли того обстоятельства, что устав нашего клуба основан на строго логических принципах. *Частное* суждение не содержит утверждения о существовании своего субъекта. Я хотел лишь сказать, что в устав клуба мы включили правило, согласно которому прием в члены клуба запрещен до тех пор, пока среди кандидатов не наберется по крайней мере трех с годовым доходом, превышающим 10 тысяч фунтов стерлингов!

Автор. Ах вот что! Теперь понятно. А какие еще правила включены в устав вашего клуба?

Джонс. Согласно другому правилу, в члены клуба не принимаются лица, которые были семь раз осуждены как фальшивомонетчики.

Автор. Надеюсь, вы не будете утверждать, что такие лица реально существуют?

Джонс. Наоборот, именно это я и утверждаю! Разве вы не знаете, что общеотрицательное суждение содержит *утверждение о существовании* своего субъекта? Мы внесли в устав это правило лишь после того, как убедились, что в действительности имеется несколько таких лиц.

Читатель может теперь сам судить, насколько хорошо согласуется с реальной жизнью вторая из названных выше логически возможных точек зрения. Думаю, он согласится со мной, что точка зрения Джонса относительно того, какие утверждения о существовании субъектов содержатся в суждениях *I*, *A* и *E*, приводит к определенным неудобствам.

Предположим теперь (в-третьих), что суждения *I* и *E* не содержат утверждений о существовании своих субъектов.

Предположение о том, что два суждения «Некоторые *x* суть *y*» и «Ни один *x* не есть не-*y*» *не* содержат утверждений о существовании своих предикатов, с необходимостью влечет за собой предположение о том, что суждение «Все *x* суть *y*» также не содержит утверждения о существовании своего предиката. Действительно, было бы нелепо предполагать, что, взятые вместе, два суждения утверждают нечто большее, чем те же два суждения, взятые в отдельности.

Итак, третья (и последняя) из логически возможных точек зрения состоит в том, что ни суждение *I*, ни суждение *E*, ни суждение *A* не содержат утверждений о существовании субъектов.

Сторонники этой точки зрения интерпретируют суждение «Некоторые *x* суть *y*» как «Если бы *x* существовали, то некоторые из них были бы *y*» (суждения *E* и *A* интерпретируются ими аналогичным образом).

Что касается суждения типа *A*, то нетрудно доказать, что подобная интерпретация противоречит принятым правилам логики.

Рассмотрим модус силлогизма Darapti*, который по общему признанию правилен. Он имеет вид:

Все *m* суть *x*.
Все *m* суть *y*.

---

Некоторые *y* суть *x*.

В соответствии с третьей точкой зрения входящие в силлогизм суждения надлежит интерпретировать следующим

* Модус — разновидность (от лат. *modus* — мера, образ, способ). Петр Испанский (ставший впоследствии папой Иоанном XXI) предложил для обозначения модусов мнемонические слова, в которых гласные указывали число и тип (*A, O, I* или *E*) содержащихся в силлогизме суждений. В средние века эти слова были объединены в латинское стихотворение:

*Barbara, Celarent, Darii, Ferio que prioris,*
*Cesare, Camestres, Festino, Baroko, secundae,*
*tertia, Darapti, Disamis, Datisi, Felapton;*
*Bocardo, Ferison habet, quarta insuper addit*
*Bramanlip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison.*

— *Прим. перев.*

образом:

Если бы $m$ существовали, то они все были бы $x$.
Если бы $m$ существовали, то они все были бы $y$.

Если бы $y$ существовали, то некоторые из них были бы $x$.

То, что такое заключение не следует из посылок, превосходно объяснил Кейнс в своей «Формальной логике»*. Его объяснение столь ясно и кратко, что я привожу его здесь дословно:

«*Из суждения нельзя вывести никаких утверждений относительно существования его субъекта или его предиката.*

Возьмем, например, модус силлогизма Darapti:

Все $M$ суть $P$.
Все $M$ суть $S$.

Некоторые $S$ суть $P$.

Условимся считать, что $S$, $M$ и $P$ означают соответственно меньший, средний и больший термины силлогизма. Тогда из заключения будет следовать, что если существуют какие-то $S$, то существуют и некоторые $P$. Следует ли такое же заключение из посылок? Если следует, то силлогизм правилен, в противном случае — неправилен.

Из написанного под чертой заключения следует, что если $S$ существует, то и $P$ существует. Но в соответствии с посылками $S$ может существовать и тогда, когда ни $M$, ни $P$ не существуют. Таким образом, утверждение, содержащееся в заключении силлогизма, не подтверждается посылками».

Для *меня* рассуждения Кейнса вполне ясны и убедительны. Однако для «пущей ясности» я могу представить приведенный выше (псевдо-) силлогизм в конкретной форме, чтобы даже не искушенный в логике читатель мог до конца в нем разобраться.

Предположим, что некто основал мужскую школу, в которой действует правило: «Все ученики первого (старшего) класса должны изучать французский и греческий

* J. N. Keynes, Studies and exercises in formal logic, including a generalisation of logical processes in their applications to complex inferences, London, 1884.

языки и латынь. Все ученики второго класса должны изучать только греческий язык. Все ученики третьего класса должны изучать только латынь». Предположим также, что в третьем и во втором классе уже учатся несколько мальчиков, но ни один ученик еще не достиг первого класса. Ясно, что во всей школе нет учеников, которые бы изучали французский язык, однако из правил мы знаем, что произошло бы в том случае, если бы такие ученики нашлись.

Опираясь на исходные данные, сформулируем следующие два суждения:

«Если бы какие-то мальчики изучали французский язык, то все они изучали бы и греческий язык».

«Если бы какие-то мальчики изучали французский язык, то все они изучали бы и латынь».

«Логики» считают, что заключение в этом случае имеет вид суждения.

«Если бы какие-то мальчики изучали латынь, то некоторые из них изучали бы и греческий».

Но тогда мы имеем две *истинные* посылки и одно *ложное* заключение (ибо нам известно, что в школе *есть* мальчики, изучающие латынь, и *ни один* из них не изучает греческий). Следовательно, приведенное выше рассуждение неправильно.

Аналогичным образом можно показать, что неэкзистенциальная интерпретация нарушает правильность модусов Disamis, Datisi, Felapton и Fresison.

Некоторые из «логиков», несомненно, возразят мне: «Мы не последователи Олдрича*! Почему мы должны отвечать за правильность силлогизмов столь древнего автора, как Олдрич?»

Прекрасно. Чтобы доставить удовольствие моим «друзьям»-логикам (с какой зловещей интонацией употребляется подчас слово «друг»! «Я должен поговорить с вами, мой юный *друг*,— говорит милейший доктор Берч,— лучше всего это сделать в моей библиотеке в 9 часов утра. Пожалуйста, *не* опаздывайте!»), повторяю, чтобы доставить им удовольствие, я выдвину *еще одно* обвинение против «неэкзистенциальной» интерпретации суждений.

Дело в том, что эта интерпретация делает невозможным обычное обращение частноутвердительных суждений.

---

* Р. Олдрич (родился в конце XV века) — английский богослов и философ.— *Прим. перев.*

*Всякий* логик, независимо от того, является ли он последователем Олдрича или нет, считает твердо установленным тот факт, что суждение «Некоторые *x* суть *y*» вполне «законным» образом можно обратить, перевести в суждение «Некоторые *y* суть *x*».

Можно ли считать столь же ясным, что и обращение суждения «Если бы какие-то *x* существовали, то некоторые из них были бы *y*», то есть замена его суждением «Если бы какие-нибудь *y* существовали, то некоторые из них были бы *x*», не менее законно? Я думаю, что нельзя.

Великолепной иллюстрацией только что обнаруженного нового пробела в теории логиков может служить уже приводившийся пример — мужская школа с «пустым» (несуществующим) первым классом.

Предположим, что среди школьных правил есть еще одно, а именно: «Ученикам каждого класса, занявшим первое и второе места по успеваемости, в конце учебного года вручаются награды». Оно позволяет нам утверждать (в том смысле, в каком употребили бы это слово логики), что «некоторые мальчики в первом классе получат награды», ибо (согласно теории логиков) последнее утверждение означает просто, что «если бы в первом классе были ученики, то некоторые из них получили бы награды».

Обратное суждение формулируется, разумеется, так: «Некоторые мальчики из тех, что получат награды, учатся в первом классе». По мнению логиков, оно означает: «Если бы какие-то мальчики должны были получить награды, то некоторые из них учились бы в первом классе» (то есть в классе, который, как нам известно, *пуст*).

Итак, из двух взаимно-обратных суждений первое несомненно истинно, второе столь же несомненно ложно.

Видеть, как бьющий по шару сбивает свои собственные воротца, всегда грустно. Нам жаль его как человека и собрата, но как *игроку в крикет* мы можем сказать ему лишь одно: «Аут!»

Итак, среди всех мыслимых точек зрения, которые мы здесь рассмотрели, логически непротиворечивы лишь две:

суждения *I* и *A* содержат утверждения о существовании своих субъектов, суждение *E* не содержит такого утверждения;

суждения *E* и *A* содержат утверждения о существовании своих субъектов, суждение *I* не содержит.

*Вторая* из этих возможностей, как было показано, приводит к множеству неудобств, если ее применять на практике. *Первая* реализована в этой книге (см. стр. 209).

Примечание. Относительно утверждений о существовании субъектов суждения, содержащихся в самом суждении, среди логиков имеются и *другие* мнения, о которых мы ничего не говорили.

Согласно одному из них, суждение «Некоторые *x* суть *y*» надлежит интерпретировать не как «Некоторые *x существуют* и являются *y*» и не как «Если *бы x* (иксы) существовали, то некоторые из них *были бы y* (игреками)», а лишь как суждение «Некоторые *x могут быть y*», то есть признаки *x* и *y совместимы*. Согласно этой теории, фраза «Некоторые из братьев Джонса жулики» ничуть не оскорбительна для Джонса, поскольку в ответ на его негодующий вопрос: «Как вы смеете оскорблять моих братьев, невежда?» — можно было бы спокойно возразить: «Это — всего лишь допущение о том, что некоторые из ваших братьев *могли бы быть* жуликами». Однако я сомневаюсь, чтобы подобное «объяснение» было способно утихомирить ярость Джонса!

Согласно другой теории, из суждения «Все *x* суть *y*» *иногда* следует, а *иногда* не следует, что *x* действительно существует. Не обращаясь к *конкретной* форме суждения, мы не можем заранее сказать, как именно надлежит интерпретировать это суждение. В пользу такой теории, казалось бы, говорит наш опыт, однако принятие ее сопряжено со столь большими трудностями, что я счел за благо даже не упоминать о ней в первой части «Символической логики», которую мне хотелось сделать как можно более доступной для *начинающих*.

## § 3. Употребление выражения «не есть» («не суть») в качестве связки

Как лучше сказать: «Зубная боль — не (есть) то, о чем стоило бы мечтать» или «Зубная боль — (есть) то, о чем не стоило бы мечтать»? «Некоторые из моих знакомых — не (суть) такие люди, с которыми мне хотелось бы встречаться» или «Некоторые из моих знакомых — (суть) такие люди, с которыми мне не хотелось бы встречаться»? Именно это мы сейчас и обсудим.

Речь пойдет не о том, что правильно и что неправильно с точки зрения логики: обе формы вопроса имеют одинаковый смысл, и выбор одной из них — дело *вкуса*. Однако мне кажется, что и в этом случае логики занимают излишне робкую позицию. Всякий раз, когда перед самым поднятием занавеса они торопливо отделывают последние детали в расположении составных частей суждения и связка — резонер весьма суетливый — задает им вопрос: «Следует ли мне взять отрицание «не» себе или вы присоедините его к предикату?» — они с излишней готовностью и подобострастием кэбмена отвечают: «Как прикажете, сэр!» В результате отрицание «не», как правило, достается жадной связке, хотя ее гораздо удобнее включать в предикат, и между суждениями, совершенно одинаковыми по смыслу, появляется ненужная дифференциация. Рассматривать два *утвердительных* суждения «Некоторые люди щедрые» и «Некоторые люди жадные», разумеется, проще, чем переводить второе из них в суждение «Некоторые люди — (суть) нещедрые (люди)» и рассматривать его как *отрицательное* суждение.

Дело в том, что у логиков каким-то образом развилась крайне *патологическая* боязнь признаков с отрицанием. Она-то и заставляет логиков, словно испуганных детей, зажмуривать глаза всякий раз, когда им случается встретить какое-нибудь ужасное суждение, вроде «Все не-$x$ суть $y$», и, таким образом, исключать из их системы множество весьма полезных форм силлогизмов.

Под влиянием этого неразумного страха они утверждают, будто при дихотомии *отрицательная* часть слишком велика, чтобы ее можно было рассматривать, и каждый предмет удобнее считать либо принадлежащим *положительной* части, либо исключенным из нее. Я не могу признать их довод убедительным: в действительности нередко все обстоит как раз наоборот. В подтверждение своих слов я осмелюсь задать вам, дорогой читатель, один вопрос личного характера. Представим себе, что вы должны разделить своих знакомых на две группы: на людей, с которыми вы хотели бы встречаться, и людей, встреча с которыми для вас нежелательна. *Не кажется ли вам*, что вторая группа оказалась бы гораздо многочисленней, чем первая?

В символической логике настолько удобно рассматривать разбиение класса предметов по какому-либо признаку на два подкласса (при дихотомии) и относить каждый предмет исходного класса либо к одному подклассу, либо к другому, что я избрал именно этот путь. Думаю, что мой выбор не вызовет возражений у читателей «Символической логики».

## § 4. Теория, согласно которой «две отрицательные посылки ничего не доказывают»

Эту теорию я считаю еще одним пунктом помешательства логиков, столь же патологическим, как и их паническая боязнь отрицательных признаков.

Наиболее убедительным опровержением этой теории служат *противоречащие* примеры.

Рассмотрим следующие пары суждений:

«Ни один из моих мальчиков не тщеславен.

Ни одна из моих девочек не жадна».

«Ни один из моих мальчиков не умен.

Только умный мальчик мог бы решить эту задачу».

«Ни один из моих мальчиков не окончил школу.

Некоторые из моих мальчиков не поют в хоре».

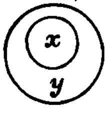
(Последнее суждение в *моей* системе надлежит рассматривать как *утвердительное*, ибо я читаю его как «Некоторые из моих мальчиков (*суть*) не хористы». Логики же сочтут его отрицательным суждением, ибо для них оно будет звучать как «Некоторые из моих мальчиков *не* (*суть*) хористы.)

Если вы, дорогой читатель, подробно рассмотрев все три пары посылок, обнаружите, что не можете вывести заключение ни из одной из них, мне не останется ничего другого, как повторить слова, сказанные персонажем в одной пьесе: «Вам придется поверить в то, в чем мы искренне убеждены».

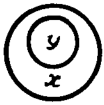
П р и м е ч а н и е. Заключения имеют вид следующих трех суждений.
«Никто из моих мальчиков и девочек не жаден».
«Ни один из моих мальчиков не мог бы решить эту задачу».
«Некоторые мальчики, не окончившие школу, не поют в хоре».

## § 5. Метод кругов Эйлера

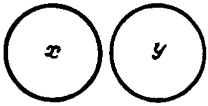
Первоначально диаграммы использовались для представления одних лишь *суждений*. В хорошо известном методе кругов Эйлера каждый круг означает некоторый класс предметов, а диаграмма состоит из двух кругов, с помощью которых наглядно изображаются отношения между двумя классами (включение, пересечение и т. д.).



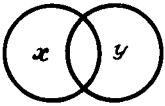
Так, на диаграмме, показанной на рис. 1, изображены два класса, обладающие соответственно признаками $x$ и $y$ и находящиеся между собой в таком отношении, что одновременно истинны следующие суждения: «Все $x$ суть $y$», «Ни один $x$ не есть не-$y$», «Некоторые $x$ суть $y$», «Некоторые $y$ суть не-$x$», «Некоторые не-$y$ суть не-$x$» и, разумеется, суждения, обратные четырем последним.




Аналогично для диаграммы, изображенной на рис. 2, истинны следующие суждения: «Все $y$ суть $x$», «Ни один $y$ не есть не-$x$», «Некоторые $y$ суть $x$», «Некоторые $x$ суть не-$y$», «Некоторые не-$x$ суть не-$y$» и, разумеется, суждения, обратные четырем последним.




Для диаграммы на рис. 3 истинны суждения: «Все $x$ суть не-$y$», «Все $y$ суть не-$x$», «Ни один $x$ не есть $y$», «Некоторые $x$ суть не-$y$», «Некоторые $y$ суть не-$x$», «Некоторые не-$x$ суть не-$y$», а также суждения, обратные четырем последним.




Для диаграммы на рис. 4 истинны суждения: «Некоторые $x$ суть $y$», «Некоторые $x$ суть не-$y$», «Некоторые не-$x$ суть $y$», «Некоторые не-$x$ суть не-$y$» и суждения, обратные им.

Обратите внимание, что все диаграммы Эйлера содержат утверждение «Некоторые не-$x$ суть не-$y$». По-видимому, Эйлеру никогда не приходило в голову, что это утверждение *иногда* может оказаться ложным!

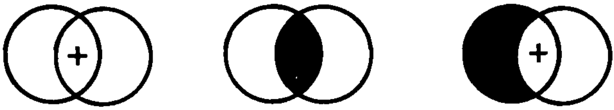
Еще одно замечание. Чтобы изобразить суждение «Все $x$ суть $y$», достаточно взять *первую* диаграмму (рис. 1). Аналогично, чтобы изобразить суждение «Ни один $x$ не-есть $y$», достаточно взять *третью* диаграмму (рис. 3). Но для того чтобы изобразить любое *частное* суждение, необходимо взять по крайней мере *три* диаграммы (рис. 1—3)— иначе мы не учтем все возможные случаи, а для того чтобы изобразить суждение «Некоторые не-$x$ суть не-$y$» — все *четыре* диаграммы.

## § 6. Метод диаграмм Венна

Обозначим не-$x$ через $x'$.

Метод диаграмм Венна обладает большим преимуществом перед методом кругов Эйлера.

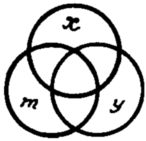
Венн с помощью диаграммы, показанной на рис. 4, изображает любое отношение между $x$ и $y$, заштриховывая ту часть диаграммы, относительно которой известно, что она *пуста*, и отмечая знаком «плюс» ту часть, о которой известно, что она *занята*. Как выглядят суждения «Некоторые $x$ суть $y$», «Ни один $x$ не есть $y$» и «Все $x$ суть $y$», показано на рис. 5.




Нетрудно видеть, что из четырех классов с отличительными признаками $xy$, $xy'$, $x'y$ и $x'y'$ лишь *трем* отвечают «клетки» конечных размеров, *четвертому* же отводится вся остальная часть бесконечной плоскости!

Последнее обстоятельство привело бы к серьезным затруднениям, если бы мы попытались изобразить на диаграмме Венна суждение «Ни один $x'$ не есть $y'$». Сам Венн *однажды* столкнулся с этой непосильной задачей, но мастерски избежал трудности, сделав простое подстрочное примечание: «Не следует стараться заштриховывать всю внешнюю часть диаграммы».

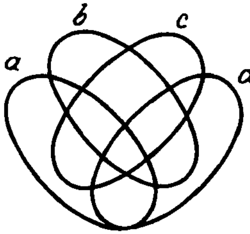
Чтобы представить *одновременно два* суждения (с общим термином), необходимо взять трехбуквенную диаграмму. Именно такие диаграммы использовал Венн (рис. 6).



В этом случае для размещения восьми классов с отличительными признаками *xym*, *xym'* и т. д. у нас имеется лишь семь клеток конечных размеров.

«Если суждения содержат четыре термина, — пишет Венн,—то наиболее простая и симметричная диаграмма получится, по-видимому, в том случае, если взять четыре эллипса и расположить их на плоскости так, чтобы они пересекались надлежащим образом». Однако при этом получается лишь *пятнадцать* клеток конечных размеров (рис. 7).

Для *пяти* букв «простейшая диаграмма, которую я смог придумать,— говорит Венн,— изображена на рис. 8 (небольшой эллипс в центре следует считать принадлежащим той части плоскости, которая лежит *вне* эллипса *c*, то есть считать, что четыре куска, на которые рассекают его эллипсы *a* и *e*, лежат внутри эллипсов *b* и *d*, но не внутри эллипса *c*). Рисовать такую диаграмму не так просто, как хотелось бы, однако не следует упускать из виду и альтернативу: не будь такой диаграммы, нам пришлось бы рассматривать пять терминов и все их комбинации. Иначе говоря, мы столкнулись бы с довольно неприятной задачей: нам нужно было бы выписать или представить каким-то другим способом все 32 комбинации 5 терминов».



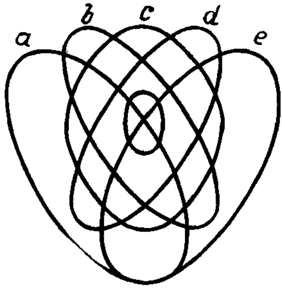



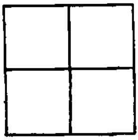

Диаграмма на рис. 8 содержит 31 конечную клетку.

Для шести букв Венн предлагает использовать *две пяти*буквенные диаграммы: одну — для суждений, содержащих *f*, другую — для суждений, содержащих не-*f*, то есть *f'* (остальные буквы берутся во всех возможных комбинациях). «При этом мы получим необходимые 64 клетки»,— утверждает Венн. Однако его метод в действительности дает лишь 62 конечные клетки и *одну* бесконечную, в которой должны разместиться два класса *a'b'c'd'e'f* и *a'b'c'd'e'f'*. Дальше *шести* букв Венн не идет.

## § 7. Мой метод диаграмм

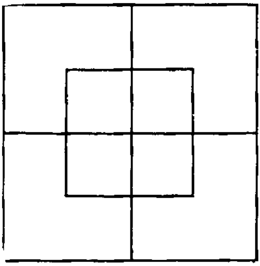
Мой метод диаграмм *напоминает* метод Венна, поскольку я также сопоставляю клетки различным классам и отмечаю, *пусты* клетки или *заняты*, но *отличается* от метода Венна, поскольку *Вселенной рассмотрения* я также сопоставляю *конечную* часть плоскости. Таким образом, класс, который у Венна свободно разгуливал по бесконечной плоскости, у меня с ужасом обнаруживает, что он скручен, связан и заключен в клетку конечных размеров, как и всякий другой класс! Кроме того, я использую прямолинейные фигуры вместо *криволинейных* и отмечаю *занятую* клетку единицей (означающей, что в данной клетке имеется по крайней мере *один* предмет), а *пустую* — нулем (означающим, что в соответствующей клетке нет *ни одного* предмета).

Для *двух* букв я использую диаграмму



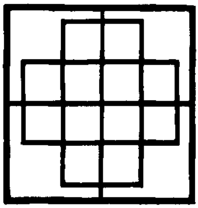
Северная ее половина соответствует признаку $x$, южная — признаку не-$x$ (или $x'$), западная — признаку $y$ и восточная — признаку $y'$. Таким образом, северо-западная клетка содержит $xy$-класс, северо-восточная — $xy'$-класс и т. д.

Для *трех* букв я разбиваю уже имеющиеся четыре клетки, вводя на диаграмме *внутренний* квадрат.



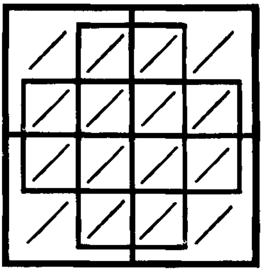
Ему я приписываю признак $m$, а *внешней* полосе — признак $m'$! При этом я получаю *восемь* клеток, которые необходимы для размещения восьми классов с отличительными признаками $xym$, $xym'$ и т. д.

Ничего сложнее этой диаграммы в настоящей книге я не использую, однако можно пойти и дальше.



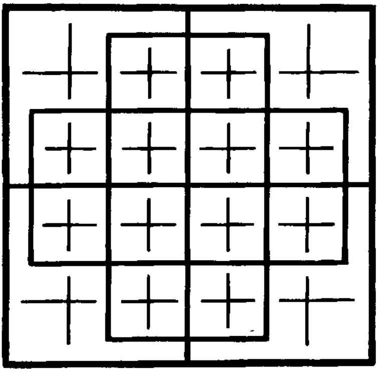
Для *четырех* букв (обозначим их *a*, *b*, *c* и *d*) диаграмма будет выглядеть так, как показано на рис. 9. Северной ее половине я сопоставлю признак *a* (разумеется, *остальная* часть диаграммы получает при этом признак *a′*), западной половине — признак *b*, горизонтальному прямоугольнику — признак *c* и вертикальному — признак *d*. Всего я получаю 16 клеток.

Для *пяти* букв (к четырем уже имеющимся добавляется буква *e*) я разделяю каждую из 16 клеток предыдущей диаграммы *диагональю* и *верхней* половине приписываю признак *e*, а *нижней* — *e′* (рис. 10). Правда, при этом возникает



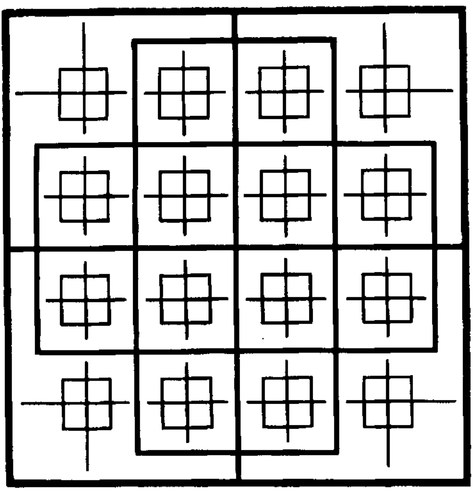
известное неудобство, поскольку *e*-класс в отличие от четырех других классов нельзя собрать в «одном загоне». Однако найти элементы *e*-класса не составляет никакого труда, а стереть диагонали лишь немногим труднее, чем стереть линии, отвечающие любому другому классу. Общее число клеток равно 32.

Для *шести* букв (новой буквой является не *f*, а *h*, поскольку я избегаю букв с закругленными хвостиками) я вместо диагоналей провожу две линии крест-накрест и сопоставляю 4 клетки, на которые распадается каждая из 16 клеток диаграммы на рис. 9, четырем классам *eh*, *eh'*, *e'h* и *e'h'* (рис. 11). Общее число клеток равно 64.



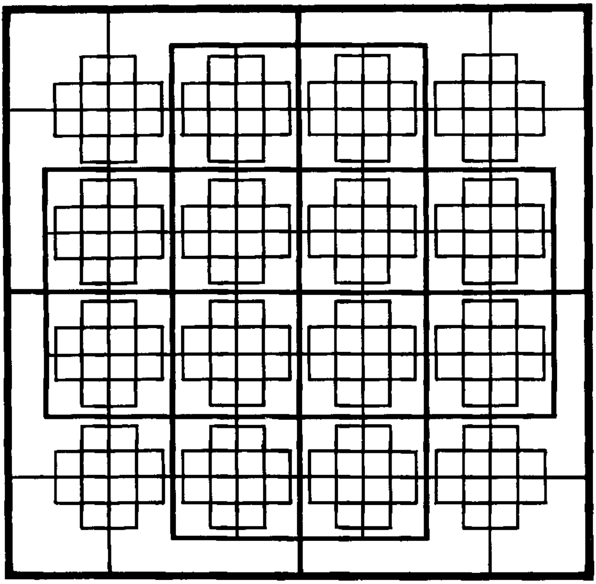
Для *семи* букв (добавляется буква *k*) я, помимо двух линий, проведенных крест-накрест, рисую маленькие квадратики. Внутренность всех 16 квадратиков я сопоставляю *k*-классу, а то, что лежит вне квадратиков,— *k'*-классу. Таким образом, 8 маленьких клеток, на которые разбивается каждая из 16 больших клеток диаграммы, оказываются отведенными 8 классам *ehk*, *ehk'* и т. д. Всего семибуквенная диаграмма содержит 128 клеток.

Для *восьми* букв (добавляется буква *l*) я помещаю в каждую из 16 клеток *решетку*, которая в миниатюре вос-



производит контуры всей диаграммы, и аналогично тому, как в 16 клетках большой диаграммы были размещены 16 классов *abcd*, *abcd'* и т. д., «расквартировываю» по 16 маленьким клеткам каждой из решеток 16 классов *ehkl*, *ehkl'* и т. д. Например, в северо-западном углу диаграммы займут места 16 классов *abc'd'ehkl*, *abc'd'eh'kl'* и т. д. Всего восьмибуквенная диаграмма содержит 256 клеток (рис. 12).

Для *девяти* букв я располагаю рядом две восьмибуквенные диаграммы и отвожу одну из них признаку *m*, а другую — признаку *m'*. Общее число клеток при этом достигает 512.



Наконец, для *десяти* букв я составляю квадрат из четырех восьмибуквенных диаграмм (рис. 13) и каждой из них сопоставляю по одному из 4 классов *mn*, *mn'*, *m'n* и *m'n'*. Общее число клеток при этом равно 1024.

## § 8. Решение силлогизмов с помощью различных методов

Различия между изложенными выше методами решения силлогизмов лучше всего продемонстрировать, взяв какой-нибудь конкретный пример и решив его по очереди каждым из методов. В качестве пробного камня я предлагаю взять пример 28 на стр. 000:

«Ни один философ не тщеславен».
«Некоторые тщеславные люди — не игроки».

«Некоторые люди, не играющие в азартные игры, не философы».

1. Решение обычным методом. Из посылок в том виде, как они сформулированы, нельзя вывести никакого заключения, поскольку они обе отрицательны.

Однако, слегка видоизменив или *перелицевав* меньшую посылку, мы можем записать ее следующим образом:

«Некоторые тщеславные люди суть не игроки»

и получить заключение, воспользовавшись модусом Fresison:

«Ни один философ не тщеславен».
«Некоторые тщеславные люди (суть) — не игроки».

«Некоторые люди, не играющие в азартные игры, не игроки и не философы».

Для проверки можно воспользоваться другим модусом— Ferio:

«Ни один тщеславный человек не философ.
Некоторые люди, не играющие в азартные игры, тщеславны.

Некоторые люди, не играющие в азартные игры, не философы».

Правильность модуса Ferio следует непосредственно из аксиомы *De Omni et Nullo**.

2. Символическое представление. Прежде чем мы перейдем к обсуждению других методов решения, наш силлогизм необходимо перевести в *абстрактную* форму.

Выберем «людей» в качестве нашей «Вселенной» н положим $x$-философы, $m$ = тщеславные, $y$ = игроки.

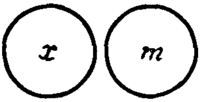
Тогда силлогизм можно записать в следующем виде:
Ни один $x$ не есть $m$.
Некоторые $m$ суть $y'$.

Некоторые $y'$ суть $x'$.

* Из всего и ничто (*лат.*).

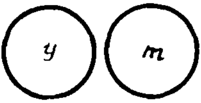
3. Решение методом кругов Эйлера. Для большей посылки необходимо взять лишь *одну* диаграмму, представленную на рис. 14.

1

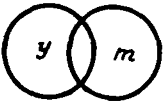



Для меньшей посылки понадобятся *три* диаграммы, которые показаны на рис. 15.

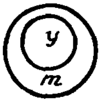
2




3

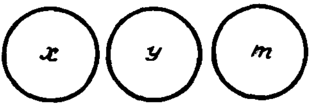



4

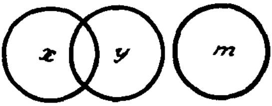



Комбинируя всеми возможными способами бо́льшую и меньшую посылки, получаем *девять* диаграмм (рис. 16).

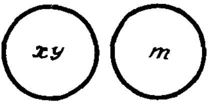
5



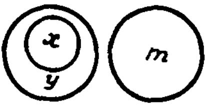

6



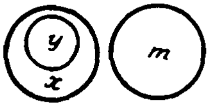

7



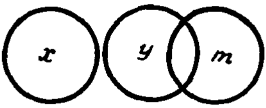

8



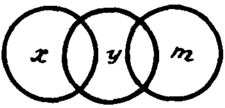

9



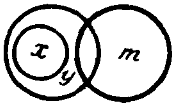

10



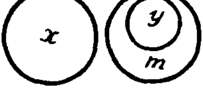

11




12




13

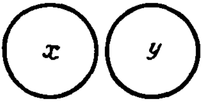


При этом диаграммы *1* и *2* (рис. 14 и 15) порождают диаграммы *5—9* (рис. 16), диаграммы *1* и *3* (рис. 14 и 15) порождают диаграммы *10—12* (рис. 16) и, наконец, диаграммы на рис. 1 и 4 порождают диаграмму *13* (рис. 16).

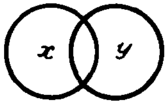
Из девяти диаграмм на рис. 16 мы должны, исключив средний термин *m*, найти отношение между *x* и *y*. На диаграммах *5*, *6* и *13* классы *x* и *y* взаимно-исключающие, или раздельные; диаграммы *6* и *11* выражают отношение частичного включения; на диаграмме *7* классы *x* и *y* совпадают. На диаграммах *8* и *12* класс *x* полностью включен в класс *y*, на диаграмме *9* — наоборот, класс *y* полностью включен в класс *x*.

Итак, мы получаем 5 двухбуквенных диаграмм, показанных на рис. 17. Единственное суждение, общее для всех

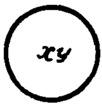
14



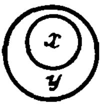

15



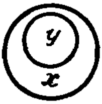

16




17



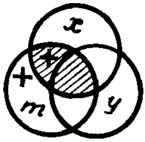

18




пяти диаграмм, можно сформулировать так: «Некоторые не-*y* суть не-*x*», то есть «Некоторые люди, не играющие в азартные игры, не философы» — результат, который Эйлер, полагавший, по-видимому, что суждения такого вида всегда *истинны*, вряд ли счел бы *ценным*!

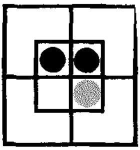
4. Решение методом диаграмм Венна. Следующее решение любезно сообщил мне сам Венн.

«Меньшая посылка утверждает, что некоторые элементы класса *my'* должны остаться. Отметим эти элементы крестиком (рис. 18). Бóльшая посылка утверждает, что все элементы класса *xm* должны быть уничтожены — сотрем их.



Далее, поскольку какие-то $my'$ должны были остаться, ими, очевидно, должны быть $my'x'$. Иначе говоря, в классе $my'x'$ должны существовать какие-то элементы. Отсюда, исключая $m$, находим $y'x'$. На обычном языке это означает, что «Некоторые $y'$ суть $x'$», или «Некоторые люди, не играющие в азартные игры, не философы».

5. Решение моим методом диаграмм. Первая посылка утверждает, что ни один $xm$ не существует. Следовательно, та часть диаграммы, которая отвечает признаку $xm$, пуста, и мы отмечаем это, ставя в каждую из ее клеток по нулю.



Вторая посылка утверждает, что некоторые $my'$ существуют. Следовательно, часть диаграммы, отвечающая признаку $my'$, занята, и мы отмечаем это, поставив красную фишку в единственную вакантную клетку.

Единственная информация, которую можно извлечь из заполненной диаграммы относительно $x$ и $y$, состоит в том, что часть диаграммы, отведенная признаку $x'y'$, *занята*, то есть некоторые $x'y'$ существуют.

Следовательно, «Некоторые $x'$ суть $y'$», то есть «Некоторые нефилософы не играют в азартные игры».

6. Решение моим методом индексов.

$$xm_0 \dagger my'_1 \mathbf{P}\, x'y'_1,$$

то есть «Некоторые нефилософы не играют в азартные игры».

## § 9. Мой метод рассмотрения силлогизмов и соритов

Из всех странных вещей, с которыми приходится сталкиваться на страницах традиционных учебников формальной логики, наибольшее недоумение вызывает, по-видимому, резкий контраст между отношением их авторов к рассмотрению силлогизмов и соритов. Подробно перечисляя не менее *девятнадцати* разновидностей *силлогизмов* (каждая из которых в отдельности справедлива лишь при соблюдении особых, невыносимо скучных правил, а все вместе составляют почти бесполезный для практических целей аппарат, поскольку многие заключения неполны, а вполне законные формы силлогизмов приданы незаслуженному забвению), логики ограничивают *сориты* лишь *двумя* детски простыми формами, зато удостаивают последние специальных *названий*, полагая, очевидно, что других форм соритов не существует.

Я обнаружил, что 19 признанных разновидностей *силлогизмов* и многочисленные формы силлогизмов, обойденные вниманием логиков, можно разбить на *три* фигуры, каждая из которых справедлива при соблюдении весьма простого правила. Поэтому единственный вопрос, на который приходится отвечать читателю при решении 98 примеров, приведенных на стр. 282—287 этой книги, формулируется так: «Какой из фигур I, II или III принадлежит данный силлогизм?»

Единственными двумя разновидностями *соритов*, признаваемыми традиционными учебниками формальной логики, являются *аристотелевский* сорит, в котором посылками служат общеутвердительные суждения *A*, расположенные так, что предикат предшествующей посылки служит субъектом следующей посылки, и *гоклениевский* сорит, в котором посылки следуют в обратном порядке. Гокленнй, по-видимому, первым обратил внимание на тот поразительный факт, что изменение порядка следования посылок не влияет на правильность силлогизма, и применил свое открытие к сориту. Очевидно, Гокленнй был человеком *того же* типа, как и тот возвышенный гений, который впервые заметил, что четырежды пять и пятью четыре — одно и то же (для подобного предположения у нас имеются достаточно веские основания). Поэтому к нему в полной мере применимы слова, сказанные кем-то (я думаю, что их автором был Эдмунд Йетс*) о Туппере**: «Человек этот в большей мере, чем все его современники, был наделен даром замечать очевидное!»

В этой книге я с самого начала оставил без внимания обе названные ребяческими (чтобы не сказать инфантиль-

* Эдмунд Йетс — английский романист и издатель журналов. Любопытно, что именно он помог Чарльзу Л. Додгсону выбрать ставший впоследствии знаменитым псевдоним Льюис Кэррол.— *Прим. перев.*

** Мартин Туппер — автор поэмы «Общеизвестная философия». Льюису Кэрролу принадлежит пародия на нее.— *Прим. перев.*

ными!) формы соритов и не только свободно использовал суждения $E$, но и специально располагал посылки в случайном порядке, предоставляя читателю в качестве самостоятельного упражнения строить из посылок цепочку правильных силлогизмов и, таким образом, находить решение. При этом в качестве первого звена читатель мог выбирать *любую* посылку.

Из любопытства я составил список всех возможных цепочек из посылок аристотелевского сорита:

1) Все $a$ суть $b$.
2) Все $b$ суть $c$.
3) Все $c$ суть $d$.
4) Все $d$ суть $e$.
5) Все $e$ суть $h$.

Все $a$ суть $h$,

в которых любые два соседних суждения можно рассматривать как посылки некоего силлогизма, и обнаружил, что всего таких цепочек *шестнадцать*: 12345, 21345, 23145, 23415, 23451, 32145, 32415, 32451, 34215, 34251, 34521, 43215, 43251, 43521, 45321, 54321. Из них лишь первая и последняя удостоены специальных названий. Остальные же *четырнадцать*, впервые перечисленные лишь в конце XIX века скромным автором данной книги, остаются безымянными!

## § 10. Краткий обзор II и III частей «Символической логики» *

Во II части я хочу рассмотреть некоторые из вопросов, затронутых в настоящем приложении, а именно: утверждения о существовании субъекта суждения, вытекающие из самих суждений; использование *отрицательной* связки и теорию, согласно которой «из двух отрицательных посылок не следует никакого заключения». Я намереваюсь также расширить круг силлогизмов, введя в рассмотрение суждения, содержащие альтернативы (такие, как «Не все $x$ суть $y$»), суждения, содержащие 3 или большее число терминов (например, суждение «Все $ab$ суть $c$», из которого, если присоединить к нему суждение «Все $bc'$ суть $d$», следует заключение «Некоторые $d$ суть $h'$») и т. д. Я хочу

* См. примечание на стр. 193.

рассмотреть сориты, содержащие посылки-реальности, а также *весьма* головоломные вопросы, связанные с условными суждениями и дилеммами. Надеюсь, что мне удастся выйти за пределы, которыми обычно ограничиваются наши школьные и университетские учебники, и предоставить читателю возможность решать задачи, не уступающие и даже превосходящие по сложности те, с которыми ему приходится сталкиваться в настоящее время на экзаменах по логике.

В III части я надеюсь рассмотреть множество интереснейших и малоизвестных вопросов, подчас даже не упоминаемых в существующих ныне ученых трактатах. К их числу относятся разложение суждений на составные элементы (читатель, которому никогда не доводилось слышать об этой отрасли логики, может испробовать свои силы и попытаться самостоятельно найти *дополнительное* суждение, которое необходимо для того, чтобы из суждения «Некоторые *a* суть *b*» получить суждение «Некоторые *a* суть *bc*»), решение числовых и геометрических задач, построение задач и решение силлогизмов и соритов, содержащих более сложные суждения, чем те, о которых я упоминал, говоря о части II.

В заключение я хочу привести 9 задач, характерных для II части. Пусть читатель попытается найти их решение — полное заключение, не прибегая к какому-нибудь методу, использующему символические обозначения.

Может быть, уместно объяснить здесь, что́ я понимаю под *полным* заключением силлогизма или сорита. И в силлогизме, и в сорите я различаю термины двух типов: те, которые *можно* исключить (например, средний термин силлогизма), я называю исключаемыми; те, которые *нельзя* исключить, я называю оставляемыми. Заключение я называю *полным* в том и только в том случае, если в нем содержатся *все* отношения между одними лишь оставляемыми терминами, которые можно вывести из посылок.

1

Все ученики некоторой школы каждый вечер собираются в одной большой комнате. Среди них имеются представители не менее пяти национальностей: англичане, шотландцы, валлийцы, ирландцы и немцы. Один из старших ребят, которым поручено присматривать за порядком в младших классах (большой любитель приключенческих романов Уилки Коллинза), очень наблюдателен. Обо всем (или почти обо всем), что происходит в школе, он старательно ведет записи в дневнике, надеясь своими заметками помочь разоблачению преступника, если вдруг произойдет таинственное убийство. Вот некоторые из его записей.

«1. Всякий раз, когда одни англичане поют «Правь, Британия», а другие не поют, старшим ребятам, следящим за порядком в младших классах, не до сна.

2. Всякий раз, когда некоторые из шотландцев танцуют рил, а некоторые из ирландцев дерутся, некоторые из валлийцев едят гренки по-валлийски.

3. Всякий раз, когда все немцы играют в шахматы, некоторые из членов школьной сборной по крикету не смазывают свои биты.

4. Всякий раз, когда часть старших ребят, наблюдающих за порядком в младших классах, спят, а часть не спят, некоторые из ирландцев дерутся.

5. Всякий раз, когда некоторые немцы играют в шахматы и ни один из шотландцев не танцует рил, некоторые из валлийцев не едят гренки по-валлийски.

6. Всякий раз, когда некоторые из шотландцев не танцуют рил, а некоторые из ирландцев не дерутся, некоторые из немцев играют в шахматы.

7. Всякий раз, когда некоторые из старших ребят, наблюдающих за порядком в младших классах, бодрствуют, а некоторые из валлийцев едят гренки по-валлийски, никто из шотландцев не танцует рил.

8. Всякий раз, когда некоторые из немцев не играют в шахматы, а некоторые из валлийцев не едят гренки по-валлийски, никто из ирландцев не дерется.

9. Всякий раз, когда все англичане поют «Правь, Британия», а некоторые из шотландцев не танцуют рил, никто из немцев не играет в шахматы.

10. Всякий раз, когда некоторые из англичан поют «Правь, Британия», а некоторые из старших ребят, наблюдающих за порядком в младших классах, спят, некоторые ирландцы не дерутся.

11. Всякий раз, когда некоторые из старших ребят, наблюдающих за порядком в младших классах, не спят, а некоторые из членов сборной школы по крикету не смазывают свои биты, некоторые шотландцы танцуют рил.

12. Всякий раз, когда некоторые англичане поют «Правь, Британия», а некоторые шотландцы не танцуют рил...»

На этом записи внезапно обрываются. Требуется закончить предложение (если это возможно).

Примечание. При решении этого сорита необходимо иметь в виду, что суждение «Все $x$ суть $y$» двойное и эквивалентно суждению «Некоторые $x$ суть $y$, и ни один $x$ не есть $y'$» (см. стр. 000).

II

1. Логика, который ест за ужином свиные отбивные, по-видимому, ждет проигрыш за карточным столом.

2. Игрока, не обладающего волчьим аппетитом, по-видимому, ждет проигрыш за карточным столом.

3. Человек, у которого дурное настроение вызвано тем, что он уже проиграл кучу денег и, по всей видимости, проиграет еще, всегда просыпается в 5 часов утра.

4. У человека, который не играет в карты и не ест за ужином свиные отбивные, волчий аппетит.

5. Жизнерадостному человеку, который ложится спать раньше 4 часов утра, следовало бы лучше взять кэб и совершить прогулку.

6. Человек, обладающий волчьим аппетитом, не проигравший денег в карты и не просыпающийся в 5 часов утра, всегда ест за ужином свиные отбивные.

7. Логику, которому грозит проигрыш за карточным столом, следовало бы лучше взять кэб и совершить прогулку.

8. Серьезному игроку, у которого дурное настроение, хотя он и не проиграл денег, проигрыш не грозит.

9. Человек, не играющий в карты и не обладающий волчьим аппетитом, всегда жизнерадостен.

10. Жизнерадостному логику, если он серьезен, не грозит проигрыш за карточным столом.

11. Человеку, обладающему волчьим аппетитом, если он серьезен, нет необходимости брать кэб и совершать прогулку.

12. Игрок, у которого дурное настроение, хотя ему и не грозит проигрыш за карточным столом, не ложится спать до 4 часов утра.

13. Человеку, который проиграл в карты кучу денег и не ест за ужином свиные отбивные, следовало бы лучше взять кэб и совершить прогулку, если только он не просыпается в 5 часов утра.

14. Игроку, который ложится спать раньше 4 часов утра, нет необходимости брать кэб и совершать прогулку, если только у него нет волчьего аппетита.

15. Человек, обладающий волчьим аппетитом и находящийся в дурном настроении, хотя ему и не грозит проигрыш за карточным столом,— заядлый игрок.

Вселенная — «люди», $a$ = серьезные, $b$ = люди, которые едят за ужином свиные отбивные, $c$ = игроки, $d$ = люди, просыпающиеся в 5 часов утра, $e$ = проигравшие в карты деньги, $h$ = обладающие волчьим аппетитом, $k$ = люди, которых по всей видимости ожидает проигрыш за карточным столом, $l$ = жизнерадостные, $m$ = логики, $n$ = люди, которым лучше взять кэб и совершить прогулку, $r$ = сидящие до 4 часов утра.

Примечание. В этой задаче предложения, начинающиеся со слова «хотя», надлежит рассматривать как существенные части тех суждений, в состав которых они входят, то есть так, как если бы эти предложения начинались с союза «и».

### III

1. Если стоит прекрасная погода, я говорю своему приятелю по кличке Лягушонок: «Что это ты так расфуфырился, старина?»

2. Всякий раз, когда я не напоминаю Лягушонку о том, что он должен мне 10 фунтов стерлингов, и он начинает важничать, как индюк, его матушка заявляет: «Рано ему еще ходить на свидания с девушками!»

3. Стоило волосам Лягушонка перестать виться, как он забросил свой великолепный жилет ярчайшей расцветки.

4. Всякий раз, когда я поднимаюсь на империал омнибуса, чтобы спокойно выкурить там сигару, я неизменно обнаруживаю, что мой портсигар пуст.

5. Когда мой портной присылает мне счет и я напоминаю Ля-

гушонку о тех десяти фунтах стерлингов, которые он мне должен, Лягушонок не ухмыляется, как гиена.

6. Когда очень жарко, столбик ртути в термометре поднимается высоко.

7. Если стоит прекрасная погода, мне не хочется курить и Лягушонок ухмыляется, как гиена, я не решаюсь намекать на то, что он разодет, как павлин.

8. Если портной присылает мне счет и у меня нет денег, я напоминаю Лягушонку о том, что он должен мне 10 фунтов стерлингов.

9. Курс принадлежащих мне железнодорожных акций стремительно повышается!

10. Если у меня нет денег и я, заметив, что на Лягушонке его знаменитый жилет неописуемой расцветки, беру на себя смелость напомнить о тех десяти фунтах стерлингов, которые он мне должен, атмосфера накаляется до предела.

11. Если собирается идти дождь и Лягушонок ухмыляется, как гиена, я могу обойтись без сигары.

12. Если столбик ртути в термометре стоит высоко, то зонтик можно оставить дома.

13. Когда Лягушонок надевает свой умопомрачительный жилет, но не важничает, как индюк, я спокойно выкуриваю свою сигару.

14. Когда я говорю Лягушонку, что он разоделся, как павлин, он ухмыляется, как гиена.

15. Когда у меня есть деньги, на голове Лягушонка красуется множество локонов и он не важничает, как индюк, я отправляюсь на империал.

16. Когда курс моих железнодорожных акций повышается, на дворе холодно и собирается идти дождь, я спокойно закуриваю сигару.

17. Когда матушка Лягушонка разрешает ему пойти на свидание с девушкой, он становится сам не свой от радости и надевает жилет неописуемо яркой расцветки.

18. Если собирается идти дождь, я спокойно курю свою сигару и Лягушонок не собирается на свидание с девушкой, вам лучше прихватить с собой зонтик.

19. Если курс моих железнодорожных акций повышается и Лягушонок ходит сам не свой от радости, то мой портной непременно пришлет мне счет.

20. Если на дворе холодно, столбик ртути в термометре стоит низко, я ничего не говорю Лягушонку о том, что он разрядился, как павлин, и на лице его нет ни тени ухмылки, то у меня пропадает охота курить сигару!

## IV

1. Всякий, кто может быть членом парламента и не произносит нескончаемых речей, может считаться благотворителем.

2. Умные люди, умеющие ясно излагать свои мысли, получили хорошее образование.

3. Женщина, способная хранить тайну, заслуживает похвал.

4. Люди, занимающиеся благотворительной деятельностью, но не использующие свое влияние для благих целей, не годятся в члены парламента.

5. Люди, которых следует ценить на вес золота и которые заслуживают всяческих похвал, всегда скромны.

6. Благотворители, использующие свое влияние для благих целей, заслуживают похвал.

7. Люди, не пользующиеся популярностью и не заслуживающие того, чтобы их ценили на вес золота, не могут хранить тайну.

8. Люди, способные произносить нескончаемые речи и стать членами парламента, заслуживают похвал.

9. Всякий, кто умеет хранить тайну и скромен, являет собой пример благотворителя, память о котором переживет века.

10. Женщина, занимающаяся благотворительной деятельностью, всегда пользуется популярностью.

11. Люди, которых следует ценить на вес золота, которые произносят одну за другой нескончаемые речи и о которых память переживет века,— те самые люди, чьи фотографии висят в витринах всех лавочек.

12. Неумная и необразованная женщина не годится в члены парламента.

13. Всякий, кто умеет хранить тайну и не склонен произносить нескончаемые речи, разумеется, не пользуется популярностью.

14. Умный человек, пользующийся влиянием и использующий его во имя благих целей, является благотворителем.

15. Скромный благотворитель не принадлежит к числу тех людей, чьи фотографии украшают витрины всех лавочек.

16. Людей, которые умеют хранить тайну и используют своё влияние для благих целей, следует ценить на вес золота.

17. Тот, кто не умеет ясно выражать свои мысли и не оказывает влияния на других, заведомо не женщина.

18. Люди, пользующиеся популярностью и достойные похвал, либо занимаются благотворительной деятельностью, либо скромны.

Вселенная — «люди», $a$ = умеющие хранить тайну, $b$ = умные, $c$ = произносящие нескончаемые речи, $d$ = заслуживающие похвал, $e$ = люди, чьи фотографии выставлены в витринах всех лавочек, $h$ = умеющие ясно выражать свои мысли, $k$ = годные в члены парламента, $l$ = влиятельные, $m$ = люди, память о которых не умрет в веках, $n$ = пользующиеся популярностью, $r$ = занимающиеся благотворительностью, $s$ = скромные, $t$ = использующие свое влияние в благих целях, $v$ = получившие хорошее образование, $w$ = женщины, $z$ = ценимые на вес золота.

## V

Шестеро друзей вместе со своими женами остановились в одной гостинице. Каждый день они отправлялись на прогулку группами, которые отличались одна от другой по численности и составу участников. Чтобы внести в прогулки как можно больше разнообразия, друзья условились придерживаться следующих правил.

1. Если Экрс оказывается в одной группе со своей женой, Барри — со своей, а Иден — с миссис Холл, то Коул должен идти на прогулку вместе (то есть в одной группе) с миссис Дикс.

2. Если Экрс оказывается в одной группе со своей женой, Холл — со своей, а Барри — с миссис Холл, то Дикс не должен идти вместе с миссис Иден.

3. Если Коул, Дикс и их жены оказываются в одной группе, а Экрс идет на прогулку не вместе с миссис Барри, то Иден не должен идти вместе с миссис Холл.

4. Если Экрс попадает в одну группу со своей женой, Дикс — со своей, а Барри и миссис Коул оказываются в различных группах, то Иден сопровождает на прогулке миссис Холл.

5. Если Иден попадает в одну группу со своей женой, Холл — со своей, а Коул — с миссис Дикс, то Экрс не должен быть в одной группе с миссис Барри.

6. Если Барри, Коул и их жены оказываются в одной группе, а Иден и миссис Холл попадают в различные группы, то Дикс должен сопровождать на прогулке миссис Иден.

Докажите, что в любой день по крайней мере одна супружеская пара оказывается не в одной группе.

## VI

После того как шестеро друзей, о которых говорилось в задаче V, вернулись из путешествия, трое из них — Барри, Коул и Дикс — условились с двумя другими друзьями — Ленгом и Миллом — обедать вместе. Памятуя о том, сколько удовольствия доставил им придуманный ранее свод правил о прогулках, друзья уговорились есть бифштекс, руководствуясь следующими правилами.

1. Если Барри берет соль, то либо Коул, либо Ленг берут только одну из специй — соль или горчицу; если же Берри берет горчицу, то либо Дикс не берет ни соли, ни горчицы, либо Милл берет обе специи.

2. Если Коул берет соль, то лнбо Барри берет только одну из специй, либо Милл не берет ни одной из них; если же Коул берет горчицу, то либо Дикс, либо Ленг берут обе специи.

3. Если Дикс берет соль, то либо Барри не берет ни одной специи, либо Коул берет и соль, и горчицу; если же Дикс берет горчицу, то либо Ленг, либо Милл не берут ни одной из специй.

4. Если Ленг берет соль, то либо Баррн, либо Дикс берут лишь одну из специй; если же Ленг берет горчицу, то либо Коул, либо Мнлл не берут ни соли, нн горчнцы.

5. Если Милл берет соль, то либо Барри, либо Ленг берут обе специи; если же Милл берет горчицу, то лнбо Коул, либо Дикс берут только одну из спецнй.

Проверьте, совместимы ли эти правила, и если да, то какие варианты возможны.

Примечание. В этой задаче предполагается, что фраза «Если Барри берет соль» охватывает два возможных случая:

1) Барри берет только соль;

2) Барри берет и соль, и горчицу.

Аналогичный смысл вкладывается и в другие условные предложения того же тнпа.

Точно так же предполагается, что фраза «Либо Коул, либо Ленг берут лишь одиу из двух спецнй» охватывает три возможных случая.

1) Коул берет либо соль, либо горчицу, Ленг берет либо обе специи одновременно, либо ни одной из ннх;

2) Коул берет соль и горчицу или не берет ни того, ни другого, а Ленг берет лишь одну из специй;

3) Коул берет лишь одну из специй, и Ленг берет лишь одну из специй.

В указанном смысле надлежит понимать и все остальные фразы того же типа. Кроме того, молчаливо предполагается, что каждое правило заканчивается словами «и наоборот». Таким образом, первое правило, если его записать полностью, включает в себя дополнение: «И если Коул или Ленг берут лишь одну из специй, то Барри берет соль».

## VII

1. Братья, вызывающие всеобщее восхищение, склонны к застенчивости.

2. Если два человека одинакового роста придерживаются противоположных политических взглядов и у одного из них имеются горячие сторонники, то имеются они и у другого.

3. На братьев, которые избегают общества, приятно смотреть, когда они идут рядом.

4. Всякий раз, когда вам удается найти двух людей с различными политическими взглядами и хоть один из них не будет уродом, вы можете быть уверены в том, что на этих людей приятно смотреть, когда они идут рядом.

5. Хоть один из уродов, на которых приятно смотреть, когда они идут рядом, застенчив.

6. Братья, которые придерживаются различных политических взглядов и обладают (по крайней мере один из них) приятной внешностью, не станут напускать на себя важный вид.

7. Джон не любит вращаться в обществе, но не напускает на себя важный вид.

8. Братья, склонные к застенчивости, хотя не все из них обладают приятной внешностью, обычно не любят бывать в обществе.

9. Люди одинакового роста, не напускающие на себя важного вида, не страдают застенчивостью.

10. Люди, придерживающиеся одинаковых взглядов на искусство, хотя они и расходятся во взглядах на политику, и не являющиеся (по крайней мере один из них) уродами, неизменно вызывают всеобщее восхищение.

11. Люди, которые придерживаются противоположных взглядов на искусство и не вызывают всеобщего восхищения, всегда напускают на себя важный вид.

12. Братья одинакового роста всегда расходятся во взглядах на политику.

13. Двое людей приятной наружности, из которых по крайней мере один не вызывает всеобщего восхищения и по крайней мере один не застенчив, непременно будут различного роста.

14. На братьев, не страдающих застенчивостью, из которых по крайней мере один не любит бывать в обществе, неприятно смотреть, когда они идут рядом.

Примечание. См. примечание к задаче II.

## VIII

1. Отец вполне может быть слугой своего сына.

2. Тот, кто по своему положению стоит ниже дядюшки, является должником племянника.

3. Никто не является кредитором отца врага своего друга.

4. Кредиторы сына всегда преследуют отца.

5. Тот, кто по своему положению уступает хозяину сына, в то же время занимает более высокое положение, чем отец.

6. Внук того, кто младше, не доводится племянником тому, кто старше.

7. Никто не преследует слугу того, кто по своему положению стоит ниже друга своего врага.

8. Друг того, кто по своему положению стоит выше хозяина преследуемого,— враг преследователя.

9. Враг того, кто преследует слугу отца,— друг сына.

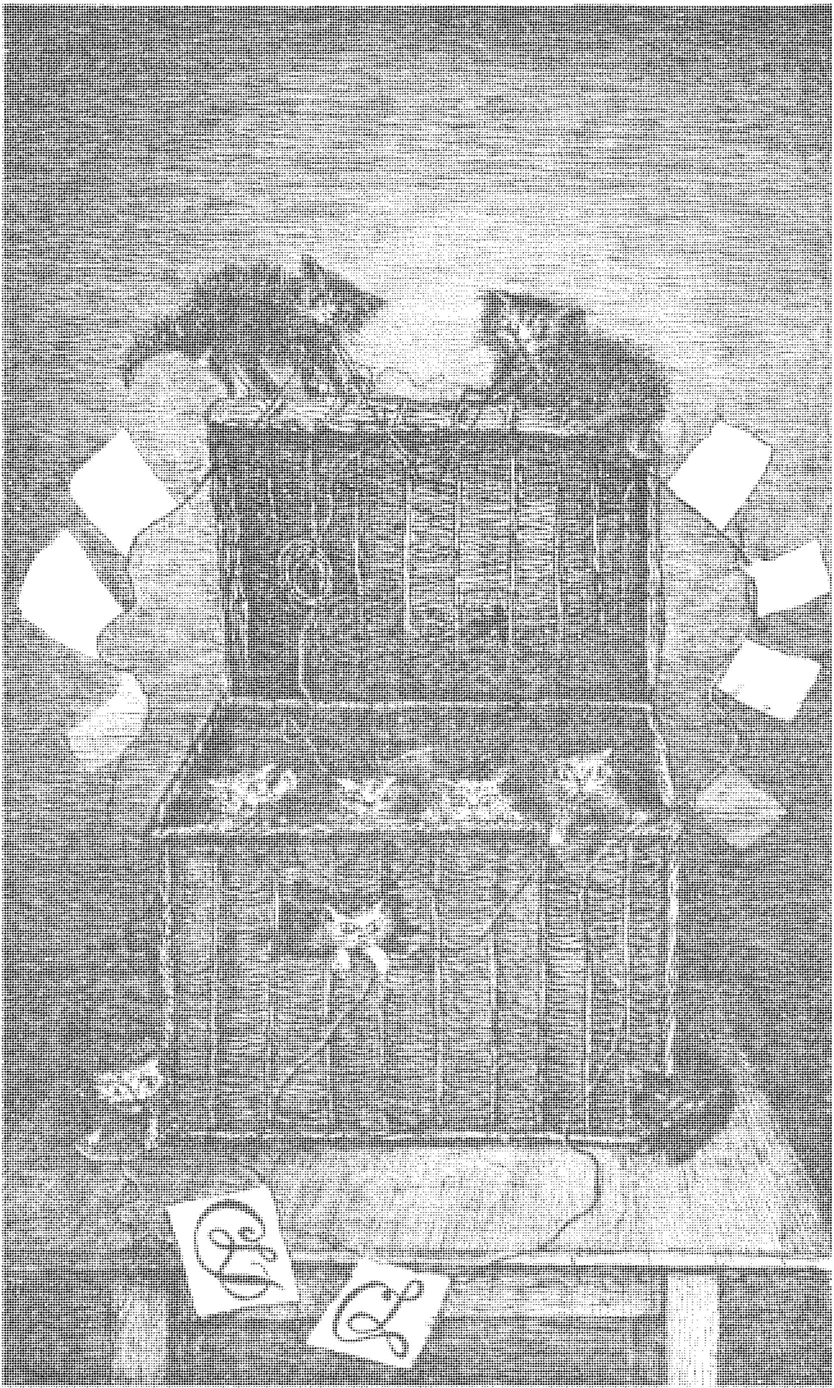
Что можно сказать о правнуках?

Примечание. Предполагается, что все люди, о которых говорится в условии задачи, живут в одном городе и любые два из них либо враждуют, либо дружат друг с другом. Известно также, что каких бы двух жителей мы ни взяли, один из них будет по возрасту старше другого и кто-то из двух будет занимать более высокое положение в обществе, чем другой. Кроме того, внутри некоторых пар жителей существуют отношения «кредитор и должник», «отец и сын», «слуга и хозяин», «преследователь и преследуемый», «дядюшка и племянник».

## IX

«Не терпит жирного Джек Спрэт,
А постного — жена.
Но вместе, что им ни подай,
Съедают все до дна».

Рассмотрим это четверостишие как задачу на решение сорита, приняв третью и четвертую строку за заключение, правильность которого требуется проверить. В качестве посылок разрешается использовать не только утверждения, содержащиеся в первых двух строках, но также и любое утверждение, которое разумно считать подразумевающимся в этих строках.



# РАЗНЫЕ РАЗНОСТИ, ИЛИ MISCELLANEA CARROLLIANA

## ТРУДНОСТИ И ПАРАДОКСЫ

### Трудность первая*. Где происходит смена дат?

Половина земного шара (или около того) всегда освещена Солнцем. По мере вращения Земли освещенный участок перемещается с места на место и рано или поздно достигает любой точки земного шара.

Предположим, что в Лондоне сейчас наступил вторник. Через час-другой вторник наступит на западе Англии. Не будь морей и океанов, мы могли бы, следуя по пятам за вторником**, совершить кругосветное путешествие и через 24 часа вернуться снова в Лондон. *Как известно*, в Лондоне через 24 часа после вторника наступает среда. Спрашивается, где, в каком месте земного шара, один день недели сменяется другим? Где вторник (как, впрочем, и любой другой день недели) перестает быть самим собой?

* Сформулирована 18-летним Кэрролом в 1850 г. — *Прим. перев.*

** Лучше всего представлять себе это так. Вы идете по Земле вслед за Солнцем и по пути спрашиваете у местных жителей, какой день недели у них наступил. Трудность, о которой идет речь, станет очевидной, если предположить, что Земля всюду заселена и все ее обитатели говорят на одном языке.

На практике указанной нами трудности не возникает по той простой причине, что значительная часть кругосветного путешествия, совершаемого каждым днем недели, приходится не на сушу, а на море, а что именно делает в открытом море тот или иной день недели, никому не известно. Кроме того, обитатели земного шара говорят на великом множестве языков, вследствие чего любая попытка проследить за названием дня недели по всей Земле обречена на неудачу. Но разве нельзя мысленно представить себе, что с поверхности Земли исчезли моря и океаны, а все ее обитатели заговорили на одном языке? К чему бы это привело, понять чрезвычайно трудно. Может быть, исчезло бы всякое различие между днями недели, неделями, месяцами и т. д.* и мы говорили бы: «Битва при Ватерлоо произошла сегодня, часов этак с 2 000 000 назад». Может быть, нам пришлось бы провести на поверхности земного шара некую воображаемую линию, при переходе через которую происходила бы смена дат. В этом случае обитатель одного дома, просыпаясь, говорил бы: «О-хо-хо**, вот вторник и наступил!», а обитатель соседнего дома, расположенного в нескольких милях к западу от первого за воображаемой линией, просыпался бы на две-три минуты позже со словами: «О-хо-хо, вот среда и наступила!» О том, какая неразбериха царила бы в домах, оказавшихся на самой линии смены дат, вряд ли нужно говорить: каждое утро их обитатели ссорились бы между собой из-за того, как следует называть наступивший день. Третьей возможности я не вижу, разве что предоставить каждому называть любой день недели, как ему вздумается.

Мысль о том, что жизнь на Земле, лишенной морей и океанов, была бы сопряжена с известными трудностями, высказывалась и раньше, например автором замечательной поэмы «Если б Земля стала грушей...»***. Однако, поскольку поэта волновали лишь трудности добывания питьевой воды (которые бы, несомненно, возникли), он не смог уделить должного внимания интересующей нас проблеме.

---

* Сознавая всю нереальность подобного предположения, мы выдвигаем его лишь в качестве рабочей гипотезы.

** Восклицание, обычно произносимое при пробуждении. Как правило, сопровождается зевотой и потягиванием.

*** «Если б Земля стала грушей,
Все океаны — сушей,
В реках чернила были,
Что бы тогда мы пили?»

Всякое разумное решение изложенной выше трудности будет воспринято с благодарностью.

### Трудность вторая. Какие часы лучше?

Какие часы лучше: те, что показывают точное время раз в году, или те, что показывают точное время дважды в сутки? «Конечно, вторые! — ответите вы.— Какие тут могут быть сомнения?» Прекрасно, читатель, пусть будет по-вашему, а пока пойдем дальше.

У меня имеется двое часов: одни вообще не идут, другие отстают на минуту в сутки. Каким из них вы отдадите предпочтение? «Ну, конечно же, тем, что отстают». Великолепно! А теперь заметьте: часы, отстающие на минуту в сутки, должны отстать на 12 часов, или 720 минут, прежде чем они снова покажут точное время. Следовательно, такие часы показывают точное время лишь раз в два года. Часы же, которые стоят, показывают точное время всякий раз, когда наступает час, указываемый положением их стрелок, а это происходит дважды в сутки. Итак, одно противоречие в своих высказываниях вы уже допустили.

«Но что толку от того, что стоящие часы дважды в сутки показывают точное время,— возразите вы,— если нельзя сказать, когда это происходит?» Почему нельзя?

Представьте себе, что часы остановились ровно в восемь часов (утра или вечера — неважно). Разве не ясно, что в восемь часов утра и в восемь часов вечера они будут показывать точное время? И так будет всякий раз, когда наступит восемь часов утра или восемь часов вечера. «Это-то мне ясно»,— ответите вы*. Прекрасно! Но тогда вы второй раз противоречите себе. Постарайтесь выйти из затруднения, по возможности не впадая в новые противоречия.

---

* Вы могли бы и не сдаваться так легко, а вместо этого задать вопрос: «Откуда я узнаю, что наступило восемь часов утра (или вечера)? По моим часам этого не скажешь!» Терпение, дорогой читатель, терпение! Вам известно, что, когда наступает восемь часов утра или восемь часов вечера, ваши часы показывают точное время. Не сводите поэтому глаз с часов, и *в тот момент, когда они покажут точное время*, вы сможете с уверенностью сказать, что наступило восемь часов (чего именно — утра или вечера, — мы не уточняем, поскольку отличить утро от вечера не так уж сложно). «Но...» — попытаетесь возразить вы. Вот так-то, дорогой читатель: чем дольше вы будете спорить, тем больше вы будете запутываться. Благоразумнее прекратить спор и признать себя побежденным.

# ЧТО ЧЕРЕПАХА СКАЗАЛА АХИЛЛУ

Ахилл догнал Черепаху и с удобством расположился у нее на спине.

— Итак, наше состязание окончено? — спросила Черепаха.— Вам все-таки удалось преодолеть всю дистанцию, хотя она и состояла из бесконечной последовательности отрезков, и достичь финиша? А ведь, по правде говоря, я думала, будто какой-то мудрец доказал, что сделать этого нельзя.

— Почему нельзя? — возразил Ахилл. — Еще как можно! Да что можно — уже *сделано*! *Solvitur ambulando**. Видите ли, длина отрезков неограниченно *убывала* и поэтому...

— А если бы длина отрезков неограниченно *возрастала*? — перебила его Черепаха.— Что тогда?

— Тогда я бы не сидел *там, где я сижу*, — скромно ответствовал Ахилл,— а вы к этому времени уже успели бы несколько раз обойти вокруг земного шара.

— Стоит ли обольщаться несбыточными надеждами? И без того тяжко. Я почти расплющена: вес-то у вас немалый! — заметила Черепаха.— Если позволите, я лучше расскажу вам о состязании на *другую* дистанцию. Боль-

* Решено мимоходом (*лат.*).

шинство людей ошибочно полагают, будто в *этом* состязании их отделяют от финиша лишь два-три шага. В действительности же, чтобы добраться до финиша, необходимо преодолеть бесконечно много этапов, и каждый последующий этап длиннее предыдущего.

— С превеликим удовольствием! — с жаром воскликнул греческий воин, доставая из шлема огромный блокнот и карандаш (в те далекие времена *карманы* были лишь у очень немногих греческих воинов).— Я весь внимание! И пожалуйста, говорите *помедленнее*: ведь *стенографию* еще не изобрели!

— О, первая аксиома Евклида! — мечтательно промолвила Черепаха.— Что может быть прекрасней тебя? И добавила, обращаясь к Ахиллу:

— Вы любите «Начала» Евклида?

— Безумно! Вряд ли можно сильнее восхищаться трактатом, который не выйдет в свет в течение *еще* нескольких столетий!

— Прекрасно! Мы воспользуемся рассуждением, содержащимся в первой аксиоме. Нам понадобятся лишь *два* шага и выведенные из них заключения. Для удобства последующих ссылок обозначим суждения *A*, *B* и *Z*. Итак, будьте любезны записать в свой блокнот следующее:

*A*) Равные одному и тому же равны и между собой.
*B*) Две стороны *этого* треугольника равны одному и тому же.
*Z*) Две стороны *этого* треугольника равны между собой.

Надеюсь, читатели и почитатели Евклида согласятся, что заключение *Z* логически следует из посылок *A* и *B* и всякий, кто сочтет истинными посылки *A* и *B*, *должен* будет признать истинным и заключение *Z*. Не так ли?

— Несомненно! С вашим утверждением согласится любой школьник младшего класса — разумеется, не раньше чем будут изобретены школы, а для этого придется подождать какие-нибудь две тысячи лет.

— А что если какой-нибудь читатель *не* признает посылки *A* и *B* истинными? Сможет ли он тем не менее считать истинным заключение *Z*?

— Ну что же, найтись такой читатель вполне может. Рассуждать он станет примерно так: «Я считаю истинным условное суждение «Если $A$ и $B$ истинны, то $Z$ истинно», но не считаю истинными суждения $A$ и $B$». Такой читатель поступит мудро, если оставит Евклида и займется футболом.

— А не может ли встретиться другой читатель, утверждающий, что он признает истинность суждений $A$ и $B$, но не считает истинным условное суждение?

— Разумеется, может. Ему также лучше всего было бы заняться футболом.

— И *ни один* из этих читателей *пока* не должен считать заключение $Z$ истинным в силу логической необходимости? — продолжала Черепаха.

— *Пока* еще не должен,— подтвердил Ахилл.

— Тогда я попрошу вас рассматривать *меня* как представителя *второй* категории читателей и с помощью логических доводов заставить меня признать истинность заключения $Z$.

— Черепаха, играющая в футбол... — начал было Ахилл, но Черепаха поспешно прервала его:

— ... была бы, конечно, необычным зрелищем. Не будем уклоняться от главного. Сначала истинность заключения $Z$, потом футбол!

— Итак, если я правильно понял, мне вменяется в обязанность заставить вас признать истинность суждения $Z$,— задумчиво проговорил Ахилл.— Занимаемая вами позиция сводится к следующему. Вы признаете истинность суждений $A$ и $B$, но *не* признаете истинность условного суждения...

— Нам будет удобнее разговаривать, если мы обозначим условное суждение $C$,— предложила Черепаха.

— Хорошо,— согласился Ахилл.— Итак, вы не признаете истинность суждения

$C$) «Если $A$ и $B$ истинны, то $Z$ должно быть истинным».

— Такова моя позиция в настоящее время,— подтвердила Черепаха.

— Тогда я вынужден попросить вас признать истинность $C$.

—Я так и сделаю,— сказала Черепаха,— как только вы запишете суждение $C$ в свой блокнот. В нем уже есть какие-нибудь записи?

— Всего лишь несколько заметок,— ответил Ахилл, лихорадочно перелистывая страницы,— о различных памятных событиях... о битвах, в которых я отличился.

— Я вижу множество чистых страниц! — радостно воскликнула Черепаха. — Они нам *все* понадобятся! (Ахилл содрогнулся от ужаса.) Запишите, пожалуйста:

*A*) Равные одному и тому же равны между собой.

*B*) Две стороны этого треугольника равны одному и тому же.

*C*) Если *A* и *B* истинны, то *Z* должно быть истинным.

*Z*) Две стороны этого треугольника равны между собой.

— Последнее суждение вам следовало бы обозначить буквой *D*, а не *Z*,— сказал Ахилл.— Оно идет непосредственно за тремя первыми суждениями. Если вы считаете истинными суждения *A*, *B* и *C*, то вам *не остается ничего другого*, как признать истинность суждения *Z*.

— Почему вы считаете, что я непременно должна признать истинность суждения *Z*?

— Потому, что оно логически следует из *A*, *B* и *C*. Если *A*, *B* и *C* истинны, то *Z должно* быть истинным. Надеюсь, против этого вы не станете возражать?

— Если *A*, *B* и *C* истинны, то *Z должно* быть истинным,— задумчиво повторила Черепаха.— А ведь это — *новое* условное суждение! И если я не убеждена в его истинности, то могу считать истинными *A*, *B* и *C*, *по-прежнему* не признавая истинным *Z*. Правильно?

— Правильно,— подтвердил герой,— хотя я должен сказать, что эдакое упрямство выглядит *очень* странным. Однако, поскольку и такое *возможно*, я вынужден просить вас признать истинность еще одного условного суждения.

— С удовольствием! Я охотно признаю истинность этого суждения, как только вы запишете его в свой блокнот. Обозначим его *D*. Итак,

*D*) «Если *A*, *B* и *C* истинны, то *Z* должно быть истинным».

Записали?

— Записал! — радостно воскликнул Ахилл, и карандаш его быстро забегал по бумаге.— Наконец мы подошли к финишу нашего логического состязания! Уж теперь-то, признав истинность суждения *A*, *B*, *C* и *D*, вы, *конечно*, признаете истинность заключения *Z*!

— Разве это так уж необходимо? — с невинным видом спросила Черепаха.— Попробуем разобраться. Я признаю истинность суждений $A$, $B$, $C$ и $D$. Но что, если я *по-прежнему* не признаю истинность заключения $Z$?

— Тогда Логика возьмет вас за горло и *вынудит* сделать это! — торжествующе ответил Ахилл.— Логика скажет вам: «У вас не осталось другого выхода. После того, как вы признали истинность суждений $A$, $B$, $C$ и $D$, вы *должны* признать истинность заключения $Z$!» Итак, как вы видите, иного выхода у вас нет.

— То, что сказала мне Логика, следовало бы *записать*,— заметила Черепаха. — Внесите, пожалуйста, в свой блокнот условное суждение, которое мы обозначим $E$:

> $E$) «Если $A$, $B$, $C$ и $D$ истинны, то $Z$ должно быть истинным».

До тех пор пока я не соглашусь признать истинность суждения $E$, мне нет необходимости признавать истинность суждения $Z$, поэтому суждение $E$ нам просто *необходимо*. Вы согласны?

— Согласен,— ответил Ахилл с оттенком печали в голосе.

В этот момент неотложные дела в банке вынудили рассказчика оставить счастливую пару. Лишь через несколько месяцев ему довелось снова проходить мимо того места, где беседовали Ахилл и Черепаха. Ахилл по-прежиему сидел на спине у многотерпеливой Черепахи и что-то писал в почти заполненном блокноте. Приблизившись, рассказчик услышал, как Черепаха сказала:

— Записали последнее условное суждение? Если я не сбилась со счета, оно должно быть тысяча первым. Осталось еще несколько миллионов. Я хочу попросить вас о личном одолжении. Вы не будете возражать, если я прочту вам короткие стишки собственного сочинения? В качестве смягчающего обстоятельства я прошу иметь в виду те споры, которые вызовет среди логиков XIX века наша беседа.

— Читайте что угодно! — с отчаянием воскликнул несчастный воин, закрывая лицо руками. И Черепаха продекламировала:

> «Ахиллесову пяту
> Указуют все не ту.
> Череп — ах! — трещит от дум:
> У Ахилла хилый ум!»

## АЛЛЕН, БРАУН И КАРР

— Ты не занят? — спросил дядя Джим у дяди Джо.— Тогда пойдем со мной в парикмахерскую к Аллену. Пока я буду бриться, ты прогуляешься.

— С удовольствием,— согласился дядя Джо.— И малыша, кстати, прихватим с собой.

Малышом, как вы уже, наверное, и сами догадались, дядюшки называют меня. Мне уже исполнилось *пятнадцать* лет (и *три* месяца!), но напоминать об этом дяде Джо бесполезно. От него только и слышишь: «Иди, малыш, поиграй в кубики! Не хочешь? Ну, тогда реши кубическое уравнение!» — или еще что-нибудь в этом же роде. Вчера он попросил меня привести пример общеутвердительного суждения. Я сказал: «Все дядюшки любят отпускать дурацкие шуточки». Ох как ему не понравилось! Но это все так, между прочим, а когда я услышал, что дядюшки возьмут меня с собой на прогулку, то здорово обрадовался. Мне очень нравится слушать, как дядюшки препираются между собой, «разделывая (по их же собственному выражению) логику под орех». Уж в чем в чем, а в этом, смею вас заверить, они здорово поднаторели.

— Высказанное тобой суждение логически не следует из сделанного мной предложения,— заявил дядя Джим.

— А я и не утверждаю, что оно следует,— возразил дядя Джо.— Я просто воспользовался логической операцией *Reductio ad Absurdum**.

— И при этом совершил логическую ошибку *Illiciti Processi, непозволительно расширив объем меньшего термина*! — засмеялся дядя Джим.

---

* Приведение к нелепости (*лат.*) (как способ доказательства).

Они всегда так прохаживаются по моему адресу, стоит мне только пойти с ними. Как будто нельзя придумать ничего остроумнее, чем называть меня *меньшим термином*!

Немного спустя, когда мы уже подходили к парикмахерской, дядя Джим сказал:

— Надеюсь, Карр сейчас работает. Браун очень уж нерасторопен, а у Аллена с тех пор, как он переболел лихорадкой, трясутся руки.

— Можешь не сомневаться, Карр находится сейчас в парикмахерской. В этом нет ни малейших сомнений,— заметил дядя Джо.

— Держу пари на шесть пенсов, что Карра сейчас там нет,— не утерпев, вмешался в разговор я.

— Держи лучше язык за зубами,— посоветовал дядя Джо, но, увидев по моей скептической ухмылке, что его слова меня не убедили, поспешно добавил:

— То, что Карр находится сейчас в парикмахерской, я могу доказать *логически*. Это факт, а не игра случая.

— Доказать *логически*! — насмешливо фыркнул дядя Джим.— Что ж! Давай, выкладывай свои *доказательства*! Я в них не очень-то верю!

— Предположим для ясности, что Карра в парикмахерской *нет*, и посмотрим, к чему приводит подобное предположение, — начал дядя Джо.— Свое доказательство я буду проводить с помощью *Reductio ad Absurdum*.

— Ничего другого я от тебя и не ждал! — проворчал дядя Джим.— Ни разу не слышал ни одного *твоего* рассуждения, которое не приводило бы к какой-ннбудь нелепости!

— Я оставляю без ответа твои недостойные выпады и приступаю к доказательству, — невозмутимо произнес дядя Джо.— Итак, предположим, что Карра в парикмахерской нет. Согласен ли ты с тем, что если Аллен *также* отсутствует, то работать должен *Браун*?

— Если это можно назвать работой,— ехидно заметил дядя Джим.— Я не стану бриться у Брауна! Уж очень он долго копается.

— Терпение — одно из тех поистине неоценимых достоинств... — начал было длинную тираду дядя Джо, но дядя Джим прервал его:

— *Доказывай*,— сказал он,— *а не читай мораль*.

— Будь по-твоему. Так как, ты согласен с моим доводом? — повторил свой вопрос дядя Джо.— Напоминаю.

Я предположил, что Карра в парикмахерской нет. Отсюда следует, что если нет Аллена, то в парикмахерской *должен* быть Браун.

— Конечно, должен,— кивнул головой дядя Джим, — иначе в парикмахерской не останется ни одного мастера.

— Итак, мы видим, что отсутствие в парикмахерской Карра приводит к появлению некоторого условного суждения с основанием «Аллена нет в парикмахерской» и следствием «Браун находится в парикмахерской». Мы видим также, что, пока Карр отсутствует, это условное сужденне остается в силе.

— Ну, и остается. Что дальше? — нетерпеливо спросил дядя Джим.

— Надеюсь, ты не станешь возражать, если я скажу, что истинность условного суждения (под которой я понимаю *правильность логической связи* между основанием условного суждения и его следствием) ни в малейшей степени не зависит от того, истинно ли *в действительности* его основание, и даже от того, *может ли* оно быть истинным. Так, условное суждение «Все были бы очень удивлены, если бы ты смог добежать отсюда до Лондона за пять минут» истннно независимо от того, можешь ли ты добежать отсюда до Лондона за пять минут или нет.

— Не могу,— признался дядя Джим.

— А теперь рассмотрим *другое* условное суждение. Что ты мне вчера сказал об Аллене?

— Я сказал, что с тех пор как Аллен перенес лихорадку, он стал бояться выходить из дому один и всегда берет с собой Брауна,— напомнил дядя Джим.

— Вот именно,— обрадовался дядя Джо,— а это означает, что условное суждение «Если в парикмахерской нет Аллена, то нет и Брауна» *всегда* истинно. Согласен?

— *Предположим*, что ты прав,— ответил дядя Джим, явно начиная нервничать.

— Следовательно,— продолжал рассуждать дядя Джо,— если Карра в парикмахерской нет, то у нас имеются два условных суждения: во-первых, «Если в парикмахерской нет Аллена, то есть Браун» и, во-вторых, «Если в парикмахерской нет Аллена, то нет и Брауна», причем оба суждения истинны! В то же время, как нетрудно видеть, эти условные суждения несовместимы и *не исключено*, что они не могут быть истиииыми одновременно.

— Не могут? — переспросил дядя Джим.

— А откуда им мочь? — ответил дядя Джо.— Каким образом одно и то же основание может доказывать два противоречащих следствия? Надеюсь, ты согласишься с тем, что суждения «Браун находится в парикмахерской» и «Брауна в парикмахерской нет» противоречат одно другому?

— С *этим* я согласен,— вынужден был призиать дядя Джим.

— Тогда я могу подвести итог своих рассуждений, — торжествующе заявил дядя Джо. — Если Карра в парикмахерской нет, то оба сформулированных мной условных суждения истинны. Вместе с тем мы знаем, что они не могут быть истинными в одно и то же время. Следовательно, мы пришли к противоречию! А это и означает, что Карр *непременно* должен быть в парикмахерской. Не правда ли, великолепный пример *Reductio ad Absurdum*?

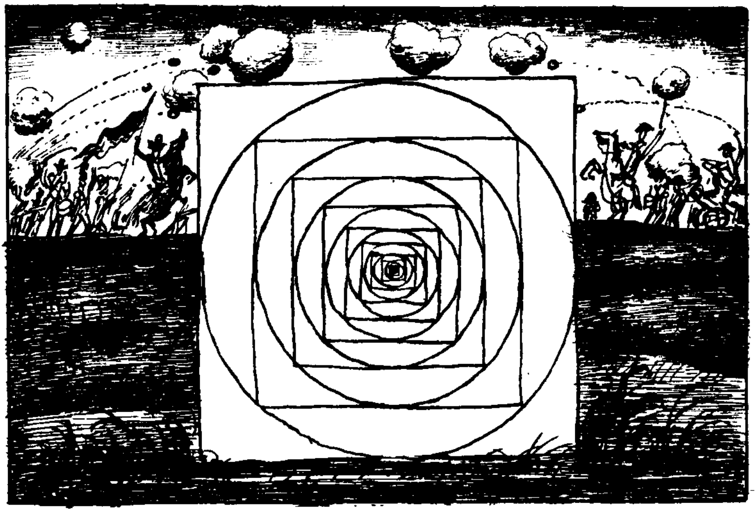
Дядя Джим имел озадаченный вид. Немного погодя он собрал все свое мужество и решился спросить:

— Мне не очень ясно, что ты там говорил о *несовместимости* условных суждений. Почему они не могут быть истинными одновременно? Если бы оба условных суждения были истинными, то, на мой взгляд, это лишь означало бы, что «*Аллен* находится в парикмахерской». Я, разумеется, не отрицаю, что следствия этих двух условных суждений — «Браун находится в парикмахерской» и «Брауна в парикмахерской нет» — несовместимы. Но почему бы нам не сформулировать другие условные суждения? «Если в парикмахерской нет Аллена, то нет и Брауна», «Если и Карр, и Аллен отсутствуют, то в парикмахерской остается Браун». При этом мы приходим к противоречию, которое означает, что Карр и Аллен не могут уходить из парикмахерской *одновременно*. Но коль скоро в парикмахерской находится Аллен, я не вижу, что мешает Карру покинуть свой пост.

— Мой дорогой, но не имеющий ни малейшего представления о логике брат! — возразил дядя Джо. (Когда дядя Джо, обращаясь к вам, начинает со слов «мой дорогой», можете не сомневаться, что за этим последует какая-нибудь гадость!) — Разве тебе не ясно, что, формулируя второе условное суждение, ты неправильно расчленил его на основание и следствие? Его основанием служит просто суждение «Карр отсутствует», а следствием — вспомогательное условное суждение «Если Аллен отсутствует, то в парикмахерской остается Браун». И должен сказать, что это необычайно абсурдное следствие, совершенно несовместимое с первым условным суждением, которое, как мы знаем, *всегда* истинно и гласит: «Если в парикмахерской нет Аллена, то нет и Брауна». Поскольку причиной возникшего противоречия служит гипотеза «Карра в парикмахерской нет», отсюда следует *единственно* возможное заключение: *«Карр сейчас находится в парикмахерской»*.

Я затрудняюсь сказать, сколько еще времени мог бы продолжаться спор между моими дядюшками. Думаю, что каждый из них мог бы проспорить без передышки часов по шесть кряду. Но именно тут мы подошли к двери парикмахерской и, войдя в нее, увидели...

# ПРЕДИСЛОВИЕ К КНИГЕ «ПРОСТЫЕ ФАКТЫ О КВАДРАТУРЕ КРУГА», ОСТАВШЕЙСЯ НЕНАПИСАННОЙ



Предположим, что возник спор о подробностях битвы при Ватерлоо и что члены некоторого Общества любителей жарких дебатов жаждут узнать точное время, когда прусский корпус Бюлова появился на поле брани. Участники спора, разделяющие теорию, согласно которой интересующее Общество событие произошло незадолго до 6 часов вечера или вскоре после 6 часов вечера, несомненно, будут выслушаны с должным вниманием. Но что скажут члены Общества своему собрату, который вознамерится доказать, будто корпус Бюлова был введен в сражение в 4 часа дня *девятнадцатого* июня? Разве не воскликнут они в один голос: «Если в Истории есть хоть один факт, более достоверный, нежели другие, так это именно то, что битва при Ватерлоо произошла восемнадцатого июня (1815 года). Выходить за пределы этого дня просто нелепо! Мы не можем терять понапрасну время и выслушивать того, кто ие признает общепринятых *фактов*, относящихся к интересующему нас предмету».

Именно такую позицию я предлагаю занять и по отношению к теориям «квадратурщиков». Говоря о «квадратурщиках», я понимаю под этим термином всех, кто пытается вычислить точное значение отношения площади круга к квадрату его радиуса.

Математики единодушно считают, что отношение площади круга к квадрату радиуса круга весьма близко к 3,14159 (в действительности столь близко, что число 3,14159 слишком мало, а число 3,1416 слишком велико для истинного значения интересующего нас отношения). Отсюда следует, что всякий, кто предложит теорию, согласно которой отношение площади круга к квадрату радиуса немного меньше или немного больше числа 3,14159 — например, равно 3,14161 или 3,14158,— вправе рассчитывать на внимание слушателей.

Иное дело «квадратурщик», которому вздумалось бы доказать, что указанное отношение равно 4½. «Милостивый государь! — воскликнули бы мы.— Если есть в геометрии хоть один факт, более достоверный, нежели иные, так это то, что площадь круга меньше площади описанного вокруг него квадрата и больше площади вписанного в него квадрата. Площадь описанного квадрата равна учетверенному квадрату радиуса круга, площадь же вписанного квадрата — удвоенному квадрату радиуса. Выходить за эти пределы бессмысленно! Мы не можем терять понапрасну время и выслушивать того, кто не признает общепризнанных фактов, относящихся к интересующему нас предмету».

Сказанного более чем достаточно, чтобы опровергнуть теорию любого «квадратурщика», у которого площадь круга превосходит площадь квадрата, построенного на радиусе круга, более 4 или менее 2 раз, и писать для этого еще специальную книжку, пусть даже небольшую, было совершенно излишним. Но обычно предлагаемые «квадратурщиками» числа не столь далеки от истинного, и, для того чтобы опровергнуть их теории указанным выше способом, приходится указывать вместо 2 и 4 гораздо более узкие допустимые пределы отношения площади круга к квадрату его радиуса.

Выяснилось, что вычислять допустимые пределы можно с помощью одних лишь простейших математических фактов, оспаривать которые было бы по существу ничуть не лучше, нежели отрицать равенство «дважды два — четыре».

Измерение площади круга само по себе — задача непростая, и метод, которым было получено приближенное значение отношения площади круга к квадрату его радиуса, равное 3,14159, нельзя назвать ни легким, ни быстрым. Любой «квадратурщик», которому мы заявили бы, что он не может рассчитывать на наше внимание до тех пор, пока не опровергнет результатов существующей теории, с полным основанием мог бы возразить: «Если говорить о потере времени, то гораздо разумнее *вам* затратить несколько минут на изучение моей теории и указать на ее уязвимые места (если вам удастся их обнаружить), чем *мне* посвятить несколько месяцев или даже лет разбору ваших сложнейших выкладок».

«А почему бы вам,— могут спросить меня,— не ограничиться просто опровержением теории каждого «квадратурщика», с которым вам приходится сталкиваться? Доказательства, приводимые «квадратурщиками», редко бывают длинными, редко выходят за пределы элементарной геометрии и заведомо содержат грубые логические ошибки, поскольку заранее известно, что они должны быть неверными».

Все это так, но, во-первых, «квадратурщик» менее всего склонен выслушивать опровержение столь милой его сердцу теории, ибо после долгих часов, проведенных им в созерцании результата собственных трудов, он убежден в правильности своей теории не меньше, чем в реальности своего существования, и, во-вторых, такой «индивидуальный» подход потребовал бы новых аргументов для каждого нового «квадратурщика», в то время как я в этой маленькой книжке надеялся дать ответ, в равной мере применимый ко всем, кто когда-либо вздумает пробовать свои силы на скользком поприще поисков квадратуры круга.

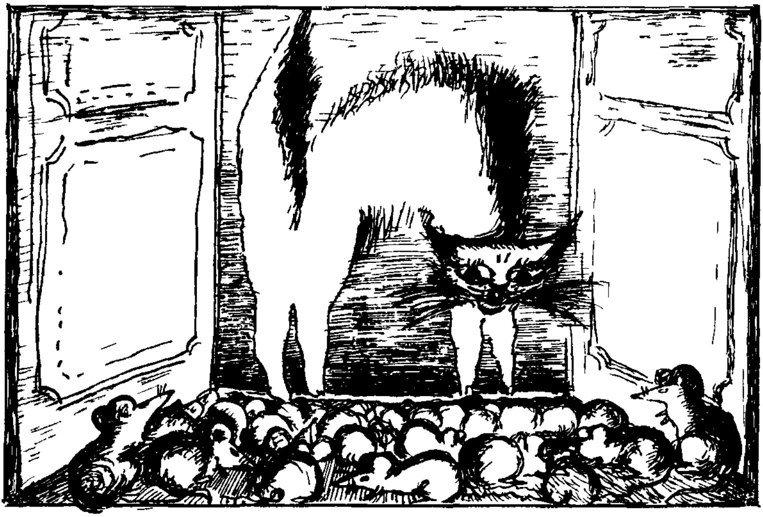
В общих чертах мой план состоит в следующем. Прежде всего я намереваюсь перечислить те элементарные истины, на которые в дальнейшем придется ссылаться. Затем с помощью очень простых методов (отнюдь не пытаясь измерять *площадь круга*, а лишь измеряя площадь некоторых вписанных и описанных *прямолинейных фигур*) я докажу, что, каким бы ни было точное значение отношеиия площади круга к квадрату его радиуса, оно, во всяком случае, заключено между 3,1413 и 3,1417.

Я надеюсь, что для любого «квадратурщика», теория которого приводит к значению отношения, лежащему вне указанных пределов, моя книжка послужит достаточно убедительным ответом. Он не сможет пожаловаться на то, что излагаемые в ней доказательства слишком длинны или вследствие сложности недоступны его пониманию. Если он хочет, чтобы его теорию, противоречащую мнению всего света, выслушали, то сначала ему придется опровергнуть правильность приведенных выше допустимых пределов.

Отвергнув любую из перечисленных в начале книги прописных истин, «квадратурщик» лишит себя права быть выслушанным, поскольку истины эти столь же незыблемы, как и равенство дважды два — четыре. Дальнейшее обсуждение его теории было бы пустой тратой времени. Приняв же эти истины, «квадратурщик» вынужден будет подчинитьcя железной логике и признать правильность указанных выше пределов. Метод, использованный мной для получения допустимых пределов, позволит «квадратурщику» без труда продолжить вычисления и получить новые пределы. Каждая последующая пара пределов отстоит друг от друга на меньшее расстояние, чем предыдущая, поэтому даже если предложенное «квадратурщиком» значение отношения площади круга к квадрату радиуса и оказалось внутри допустимых пределов 3,1413 и 3,1417, последующие уточненные значения пределов могут доказать полную непригодность предложенного значения.

Вычисление точного значения числа π (так принято обозначать отношение площади круга к площади квадрата, построенного на его радиусе) во все века неизменно оказывалось тем *ignis fatuus**, который увлек за собой сотни, если не тысячи, несчастных математиков, затративших бесценные годы в тщетной надежде решить задачу, не поддававшуюся усилиям предшественников, и тем снискать себе бессмертие. Я льщу себя надеждой, что эта маленькая книжка попадет в руки тех, кто, соблазненный обманчивым блеском огонька, устремился на его поиски, и поможет им сэкономить немало времени и труда, которые в противном случае были бы затрачены напрасно.

* Блуждающий огонек (*лат.*).



### Кошки и мышки

Кошка съедает мышку за одну минуту. За сколько времени кошка съест 60 000 мышек?

*Ответ.* Не скоро. Я лично думаю, что мышки скорее съедят кошку.

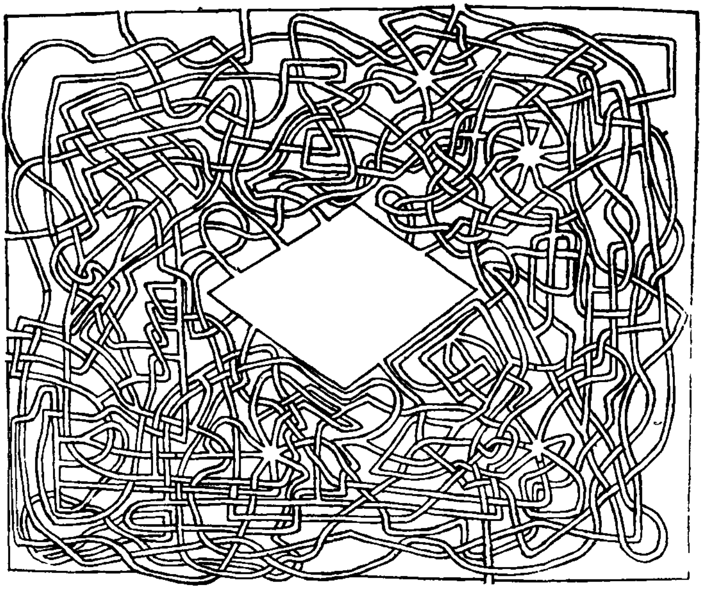
### Состязания по бегу

Трем бегунам $A$, $B$ и $C$ предстоит принять участие в забеге на четверть мили. Всякий раз, когда $A$ случается бежать с $B$, он каждые 100 ярдов отстает от $B$ на 10 ярдов. Всякий раз, когда $B$ бежит с $C$, он каждые 100 ярдов опережает $C$ на 10 ярдов. Как следует выпускать бегунов со старта, чтобы линию финиша они пересекли одновременно?

### Приятное разнообразие

В женской школе учатся $X$ девочек. Каждый день девочек выстраивают по $Y$ человек в ряд и выводят на прогулку. В течение скольких дней смогут девочки разнообразить унылое шествие, следя за тем, чтобы ни одна из них не шла рядом с одной и той же девочкой дважды?

## Лабиринт



Этот лабиринт юный Кэррол, который тогда еще был только Додгсоном, нарисовал для развлечения своих домашних. Сумеете ли вы выбраться из него?

## Золотоискатели

Трн золотоискателя, работая в течение 10 дней по 6 часов в день, могут добыть золота на 80 фунтов стерлннгов, если им будет встречаться в среднем по 2 самородка на каждый кубический ярд породы.

Как часто встречаются самородки на другом участке, где два золотоискателя, работая в течение 9 дней по 5 часов в день, могут добыть золота на 90 фунтов стерлингов? Известно, что каждый золотоискатель первой артели в работе стоил двух золотоискателей второй артелн, зато каждый золотоискатель второй артели старался за троих, средняя величина самородков на втором участке была вдвое больше, чем на первом, а цеиы на золото поднялись на 50 процентов.

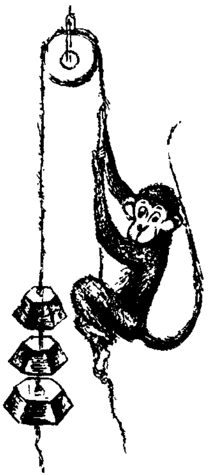
## Любовь к искусству

Одному человеку очень хотелось попасть в театр. Билет стоил 1 шиллинг 6 пенсов*, а денег у этого человека было всего лишь 1 шиллинг. Подумав, человек решил заложить свой шиллинг у ростовщика. Ростовщик внимательно осмотрел монету и, убедившись, что она не фальшивая, дал человеку под залог 9 пенсов.

С 9 пенсами и квитанцией на 1 шиллинг в кармане человек вышел от ростовщика и повстречал на улице приятеля, которому предложил купить квитанцию. Приятель, решив, что сделка выгодна, купил квитанцию за 9 пенсов. Теперь у человека было 9 пенсов, полученных от ростовщика, и 9 пенсов, вырученных от продажи квитанции. Этой суммы ему как раз хватило, чтобы купить билет в театр.

Спрашивается, кто и сколько потерял в результате всех операций?

*Ответ*. Вы, конечно, думаете, что в убытке остался приятель завзятого театрала и что потерял он 6 пенсов? Мой юный друг! Ваш ответ неверен, но делает вам честь, ибо показывает, что вы не имеете ни малейшего представления о том, как действуют ростовщики: ведь в своем решении вы исходили из того, будто ростовщики занимаются своим ремеслом бескорыстно!



## Обезьяна и груз

Через блок, прикрепленный к потолку, переброшен канат. На одном конце каната висит обезьяна, к другому прикреплен груз, вес которого в точности равен весу обезьяны. Предположим, что обезьяна начала взбираться вверх по канату. Что произойдет при этом с грузом?

## Трудная переправа

Четырем джентльменам и их женам необходимо переправиться через реку в лодке, которая вмещает не

* См. примечание на стр. 43.

более двух человек. Каждый джентльмен может оставить свою жену на берегу лнбо в одиночестве, либо в обществе других дам. Кроме того, после каждой переправы кто-то должен пригонять лодку назад, чтобы ею могли воспользоваться те, кто еще не успел переправиться.

Каким образом произвести переправу?*

### Логическая задача

Найдите заключение следующего сорита:

1. Всякий, кто не танцует на туго натянутом канате и не ест пирожков за однн пенс, стар.
2. Со свиньями, которые временами испытывают головокружение, обращаются почтительно.
3. Разумный человек, отправляясь в путешествие на воздушном шаре, берет с собой зонтик.
4. Не следует завтракать в присутствии посторонних тому, кто имеет смешной вид и ест пирожки за один пенс.
5. Юные существа, отправляющиеся в путешествие на воздушном шаре, временами испытывают головокруженне.
6. Жирные существа, имеющие смешной вид, могут завтракать при посторонннх, если только они не танцуют на туго натянутом канате.
7. Нн одно разумное существо не станет танцевать на туго натянутом канате, если оно временами испытывает головокружение.
8. Свинья с зонтиком имеет смешной вид.
9. Все, кто не танцует на туго натянутом канате и с кем обращаются почтительно, жирны.

*Ответ.* Ни один разумный поросенок не отправится путешествовать на воздушном шаре.

---

* Эта задача Кэррола — иесколько усложненный вариант известной головоломки о волке, козе и капусте. Интересно заметить, что в старинном русском сборнике заннмательных задач «Гадательная арифметика для забавы н удовольствня» (Спб., 1789) приводится близкий вариант той же задачи (№ 29) с тремя парами. Вот как формулирует эту задачу неизвестный автор:

«Три ревнивых мужа, пришедши с женами своими к берегу реки, нашли при оном лодку, в которую по ее малости более двух человек вмещаться не могло. Почему спрашивается, как бы через реку переехать сим шести человекам так, чтобы ни одна жена с чужим мужем не переезжала и нн на котором берегу не оставалась».— *Прим. перев.*

## Загадки из Страны Чудес

### *Палка*

Ровно два фунта весила палка,
И хоть пилить мне ее было жалко,
Семь раз отмерив, я на восьмой
По меткам прошелся острой пилой.
Все восемь восьмушек по весу равны
И внешне похожи, как капли воды.
Но возникает вопрос непростой.
Сколько же весу в восьмушке такой?

(Все говорят, что восьмушка весит четверть фунта, но это неверно.)

### *Король и мудрецы*

Когда король обнаружил, что казна его почти пуста и оставшиеся деньги придется расходовать *весьма* экономно, он сразу же решил прогнать как можно больше своих советников-мудрецов. Их у короля было великое множество. Все мудрецы, как один, имели весьма представительную внешность, благородные седины и носили роскошные мантии из зеленого бархата с золотыми пуговицами. Единственное, что можно *было бы* поставить им в вину,— это противоречивость советов, которые они давали королю по любому вопросу, и чрезмерное пристрастие к яствам и питиям с королевского стола (аппетит у всех мудрецов был превосходный!).

Выяснилось, однако, что по древнему закону, нарушить который не мог ни один король, при дворе всегда должно находиться столько мудрецов, чтобы среди них непременно нашлось

«семь слепых на оба глаза,
двое слепых на один глаз,
пять зрячих на оба глаза и
девять зрячих на один глаз».

Сколько мудрецов пришлось королю оставить при дворе, чтобы не нарушить требования закона?

### *Разгадки*

Вес опилок мал, но все же
Опилки что-то весят тоже.
Вы ж 2 на 8 разделили,
А про опилки позабыли.

Хоть суров закон, но он
Королем был обойден:

Кто хитер, сумеет ловко
Обойти закон уловкой.
Семь слепых и зрячих пять
Дважды стал король считать.
Мысли ход своей чудак
Объяснить изволил так:
«Тот, кто слеп на оба глаза,
Явно слеп на глаз один.
Тот, кто видит в оба сразу,
Может видеть и одним».
Дальше ясно все без слов
Лишь шестнадцать мудрецов
Остается при дворе
Наносить урон казне.

## Дерзкий побег

Пленная королева вместе со своим сыном и дочерью заперты в каморке на самом верху высокой башни. Снаружи у их окна прикреплен блок, через который перекинута веревка. На каждом конце веревки висит по корзине. Вес обеих корзин совершенно одинаков. С помощью этого нехитрого приспособления и найденного в темнице груза пленникам удалось благополучно бежать. Если вес груза в верхней корзине превышает вес груза в нижней корзине более чем на 15 фунтов, спуск становится опасным для жизни, поскольку развивается слишком большая скорость. Члены королевской семьи сумели не только справиться с этим затрудиеиием (при спуске никто из них не пострадал), но и так хорошо продумалн свои действия, что вес груза в одной корзине все время превышал вес груза в другой корзине не менее чем на 15 фунтов.

Разумеется, всякий раз, когда одна корзина опускалась вниз, другая поднималась вверх.

Каким образом удалось бежать королеве и ее детям?

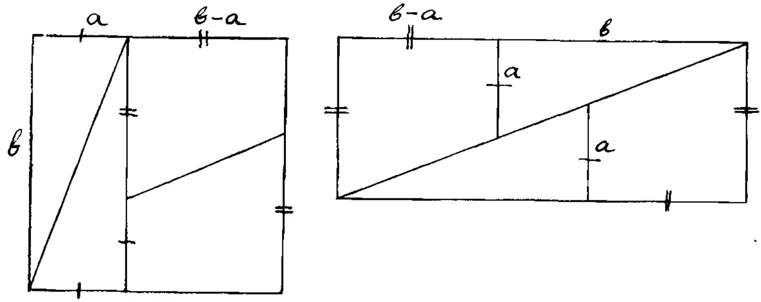
Королева весила 195 фунтов, дочь — 165 фунтов, сын — 90. Вес груза — 75 фунтов.

Если вы справились с этой задачей, попробуйте свои силы на следующем более сложном ее варианте.

В темнице вместе с королевой находились не только ее сын, дочь и груз, но и свинья весом в 60 фунтов, собака весом в 45 фунтов и кошка весом в 30 фунтов. Спускать четвероногих нужно с теми же предосторожностями, что и людей. Вес можно опускать с любой скоростью.

Еще одна сложность заключается в том, что кому-то надо класть животных в корзины н вынимать их оттуда.

## Геометрический парадокс




Шахматную доску 8 × 8 разрезают так, как показано на рисунке ($a = 3$, $b = 8$), и, переставив части, получают прямоугольник, состоящий уже... нз 13 × 5 = 65 клеток.

*Найти размеры всех квадратных шахматных досок, которые можно разрезать аналогичным способом и, переставив части, получить прямоугольник с кажущимся приращением площади в 1 клетку.*

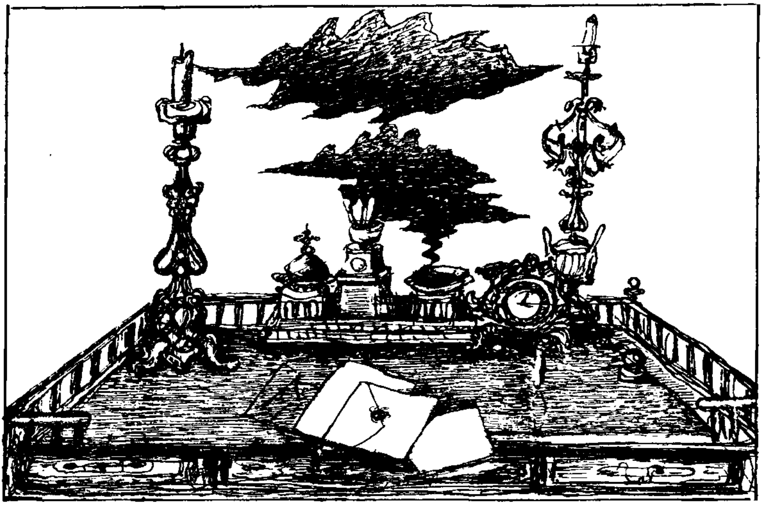
*Ответ.* Формула общего члена $U_n$ последовательности, любые два последовательных члена которой могут служить размерами $a$ н $b$, дающимн решение парадокса, будет

$$U_n = \frac{(3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}},$$

а таблица значений $a$ и $b$ для первых $n$:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 3 | 8 | 21 |
| $b$ | 3 | 8 | 21 | 55 |

# ИЗ ПИСЕМ К ДЕТЯМ



У нас стоит такая ужасная жара, что я совсем ослабел и не могу даже держать в руках перо, а если бы н мог, то толку все равно было бы мало: все чернила испарились и превратились в черное облако. Оно плавало по комнате, пачкая стены и потолок так, что на ннх не осталось ни одного светлого пятнышка. Сегодня стало несколько прохладнее, и немного чернил выпало на дне чернильницы в виде черного снега.

От этой жары я впал в меланхолию и сделался очень раздражительным. Подчас мне едва удается сдерживать себя. За примером далеко ходить не надо. Не далее как несколько минут назад ко мне с визитом пришел епископ Оксфордский. С его стороны это было очень любезно, и он, бедняга, не имел в виду ничего дурного. Но когда я увидел своего гостя, то настолько вышел из себя, что швырнул ему в голову тяжелую книгу. Боюсь, что книга его сильно ударила. [П р и м е ч а н и е. То, о чем я тебе рассказал, не совсем верно, поэтому верить всему сказанному не нужно. В следующий раз не верь ничему так быстро. Ты хочешь знать почему? Сейчас объясню. Если ты будешь стараться верить всему, то мышцы твоего разума устанут, а ты сама ослабеешь настолько, что уже не сможешь поверить даже в самые простые вещи. Всего лишь на прошлой неделе один мой приятель решил поверить в Мальчика с пальчик. После долгих усилий это ему удалось, но какой ценой! У него *не осталось* даже *сил* поверить в то, что на улице идет дождь — хотя это была абсолютная правда,— и он выбежал из дому без шляпы и зонтика! В результате его волосы серьезно намокли, и один локон почти двое суток никак не хотел принимать нужный вид. (*Примечание.* Боюсь, что *кое-что* из сказанного *не* вполне верно...).]

Твой друг

*Чарлз Л. Додгсон*

Давным-давно жила-была маленькая девочка, и был у нее ворчливый старый дядюшка — соседи звали его Скрягой (что они хотели этим сказать, я не знаю). Как-то раз эта маленькая девочка пообещала своему дяде переписать для него сонет, который мистер Розетти написал о Шекспире, и своего обещания, *как ты знаешь*, не выполнила. Нос у бедного дядюшки стал расти все длиннее и длиннее, а характер — портиться все сильнее и сильнее. Но почтальон день за днем проходил *мимо* дверей дядюшки, а сонета все не было...

Здесь я прерву свой рассказ, чтобы объяснить, как люди в те далекие дни отправляли письма. Ворот и калиток тогда еще не было, и поэтому столбы у ворот и калиток не должны были стоять на одном месте и *носились* вперед и назад, где им только вздумается. Если кому-нибудь нужно было послать письмо, то он просто прикреплял его к столбу, который несся в подходящем направлении (правда, иногда столбы ни с того ни с сего меняли направление, и тогда возникала ужасная путаница), а тот, кто получал письмо, говорил, что оно «доставлено *письмоносцем*».

Все делалось очень просто в те давние дни. Если у кого-то было много денег, он просто клал их в банку, закапывал ее под забором, говорил: «У меня деньги *в банке*» — и больше ни о чем не беспокоился.

А как путешествовали в те далекие времена! Вдоль дорог тогда стояли шесты. Люди влезали на них и старались удержаться на самой макушке как можно дольше, а потом (обычно это происходило *очень* скоро) падали оттуда. Это и называлось *путешествовать*.

Но вернемся к нашему рассказу о плохой девочке. Заканчивается он, как и следовало ожидать, тем, что пришел большой серый ВОЛК и... Нет, я не в силах продолжать. От девочки не осталось ничего, кроме 3 маленьких косточек. Что и говорить, грустная история!

Твой любящий друг
*Ч. Л. Додгсон*

Дорогая Мэри!

Я с большим удовольствием отправился бы в Лондон и снова увидел всех вас и Снежинку*, если бы у меня было время, но, к сожалению, его у меня нет. Кстати сказать, теперь твоя очередь навестить меня. Я твердо помню, что в последний раз гостем был я. Как только ты приедешь в Оксфорд, найти мои апартаменты не составит никакого труда. Что же касается *расстояния*, то от Оксфорда до Лондона оно такое же, как от Лондона до Оксфорда. Если в твоем учебнике географии об этом ничего не говорится, то он безнадежно устарел и тебе лучше раздобыть другой учебник.

Я долго ломал голову над тем, почему ты называешь себя противной девчонкой за то, что долго мне не писала. Противная девчонка? Как бы не так! Что за глупости? Стал бы я называть себя противным, если бы не писал тебе лет этак с 50? Ни за что! Я бы начал свое письмо, как обычно:

> «Дорогая Мэри!
>
> Пятьдесят лет назад ты спрашивала, что делать с котенком, у которого заболели зубы, а я только сейчас вспомнил об этом. За пятьдесят лет боль могла пройти, но если же зубы у котенка все еще болят, то сделай следующее. Выкупай котенка в заварном креме, затем дай ему 4 подушечки для булавок, вываренных в сургуче, а кончик его хвоста окуни в горячий кофе. Боль как рукой снимет! Это средство еще никогда не подводило».

Поняла? *Вот* как надо писать письма...

Твой любящий друг
*Чарлз Л. Додгсон*

---

* Котенка.— *Прим. перев.*

Я очень занят: ведь мне приходится писать целые груды и даже полные тележки писем. Я так устаю, что ложусь спать ровно через минуту после того, как встану, а иногда даже за минуту до того, как встану! Слышала ли ты, чтобы кто-нибудь когда-нибудь *так* уставал?..

Дорогая Эдит!

Обратила ли ты внимание на того джентльмена со странной внешностью, который сидел в одном купе со мной, когда я уезжал из Донкастера? Я имею в виду джентльмена вот с таким  носом (как называются такие носы, я не знаю) и вот такими  глазами. Он все время косил одним глазом в окно, когда я высовывался, чтобы прошептать тебе в ушко: «До свиданья» (кстати, я забыл, где именно расположено твое ушко, но помню, что нашел его где-то над подбородком), и, как только поезд тронулся, джентльмен сказал мне:

— Кажется, о.о.о.

Разумеется, я сразу понял, что это означает «Она очень огорчена», и ответил:

— Еще бы! Ведь я сказал, что собираюсь как-нибудь приехать сюда еще раз.

Джентльмен от радости принялся потирать руки (и потирал их примерно полчаса), улыбаться от уха до уха (я имею в виду не от *одного* уха до *другого*, а от *одного* уха вокруг всей головы *до того же самого* уха) и, наконец, сказал:

— С. с. с. с.

Сначала я подумал, что он просто шипит, как змея, и не обратил на это никакого внимания, но потом мне пришло в голову, что джентльмен хотел сказать:

— Смиритесь, сударь, стоит ли стенать?

Поэтому я улыбнулся и ответил:

— С. с. с. (что, разумеется, означало «Совершенно справедливо, сэр!»)

Но джентльмен меня не понял и заявил весьма сердитым тоном:

— Не шипите на меня! Вы что: кошка или паровой котел? С. с.

Я понял, что последнее означало «Смолкните совсем», и ответил джентльмену:

— С.

Ты, конечно, сразу догадалась, что это означает «Слушаюсь», но джентльмен ответил очень странно:

— У вас не голова, а к.чан к.пусты.

Я не смог понять, что он хотел этим сказать, и поэтому ничего ему не ответил. Думаю, что лучше всего рассказать тебе обо всем сразу же, чтобы ты могла сообщить в полицию или предпринять любые другие меры, которые сочтешь необходимыми. Я ничуть не сомневаюсь, что моего попутчика зовут ХТАЙД ББЕДЖ (не правда ли, это очень странное имя?).

Преданный тебе
*Льюис Кэррол*

Бедная моя девочка!

Я не буду больше писать тебе таких трудных писем.

Неужели ты и в самом деле не смогла догадаться, что имел в виду джентльмен, когда он сказал мне «У вас не голова, а к.чан к.пусты»? Представь, что мы сидим с тобой за столом и я говорю тебе:

— Эдит, милая, моя чашк. пуста. Налей-к. мне еще к. к. о.?

Теперь ты догадалась? Нет? Тогда прочти предыдущую строчку еще раз и попытайся все-таки догадаться.

Я хочу сказать тебе еще кое-что. Пожалуйста, не думай, будто в ответ на свои письма я жду от тебя длинных писем. Мне очень нравится писать тебе, но я вовсе не хочу причинять тебе много хлопот с ответами. В следующий раз, когда ты останешься одна и тебе захочется получить от меня письмо, ты только сообщи мне об этом. А я буду очень рад получить от тебя хотя бы такое письмецо:

*«Дорогой мистер Додгсон!*
*Остаюсь любящей Вас Эдит».*

Ведь даже из такой коротенькой записочки я смогу извлечь нечто ценное, например узнаю, что ты все еще «остаешься любящей меня» Эдит, поскольку ты вполне могла бы написать *«не любящая Вас Эдит»*.

Неизменно любящий тебя
*Ч. Л. Додгсон*

Дорогая Мэри!

Передай мой привет и наилучшие пожелания Лили по случаю ее дня рождения. 21 год — возраст *весьма* юный. Так по крайней мере кажется *мне*. Подумать только, что в прошлом году я был вдвое, а *еще раньше* — втрое старше Лили! Когда именно я был втрое старше Лили, попытайся решить сама. Для тех, кто любит такие вещи, это — прекрасная арифметическая задача!

... Мою фамилию следует писать с буквой «г» в середине, то есть «Додгсон». Всякий, кто пишет ее так же, как фамилию этого несчастного (я имею в виду Председателя Комитетов при Палате общин*), оскорбляет меня *глубоко* и *навсегда*! Подобную небрежность я могу *простить*, но *никогда не смогу забыть*. Если же ты неправильно напишешь мою фамилию еще раз, я буду звать тебя «...ейнор»**. Смогла бы ты быть счастливой, имея такое имя?

Что же касается танцев, то я, милая девочка, *никогда* не танцую, если мне не дают возможности делать это *на свой особенный манер*. Бесполезно пытаться описывать, *как* я танцую, словами — это надо видеть. В доме, где я пытался танцевать в последний раз, провалился пол. Правда, он был довольно шатким: балки имели в толщину всего лишь каких-нибудь шесть дюймов (такие тоненькие палочки вряд ли можно называть балками). Нет, если уж танцевать *на мой манер*, то каменные своды гораздо надежнее. Случалось ли тебе когда-нибудь видеть, как в зоопарке носорог и гиппопотам пытаются вместе танцевать менуэт? Очень трогательное зрелище!

Любящий тебя друг
*Льюис Кэррол*

Какие вы нехорошие девочки! Во всей истории,

* В то время этот пост занимал Дж. Дж. Додсон.— *Прим. перев.*

** Девочку, которой адресовано письмо, звали Гейнор Симпсон.— *Прим. перев.*

даже если мы обратимся к временам Нерона и Гелиогабала, вряд ли найдется еще один пример детей, которые были бы такими бессердечными и так же забывали возвращать взятые книжки. Думаю, что ни Нерон, ни Гелиогабал никогда не забывали возвращать взятые книжки. В этом я совершенно уверен, потому что ни Нерон, ни Гелиогабал никогда не брали в руки ни одной книжки. В этом я также совершенно уверен, ибо в те дни книжек еще не печатали.

Удивительная история приключилась со мной вчера в половине пятого. Трое неизвестных постучали ко мне в дверь и попросили их впустить. Как ты думаешь, кого я увидел, открыв дверь?

Ни за что не догадаешься! Трех кошек! Разве не удивительная история? Кошки были драные, взъерошенные. Я схватил первое, что попалось под руку (а попалась мне скалка), изо всех сил трахнул по кошкам и расплющил их в лепешку! Так им и надо!

Кошки стали плоскими-плоскими, как засушенные цветы, но я не оставил их лежать на земле. Нет! Я поднял их и вообще старался вести себя с ними как можно более предупредительно. Вместо спальни я предложил им портфель. В обычной кровати им было бы неудобно: ведь они стали такими тонкими. Но между листами промокательной бумаги кошки чувствовали себя наверху блаженства. Вместо подушки каждой кошке я предложил перочистку. Устроив своих гостей, я отправился спать, но сначала дал им три звонка, чтобы они могли позвонить, если им ночью что-нибудь понадобится.

Как ты знаешь, у меня есть три звонка. В первый (самый большой) звонят, когда обед *почти* готов, во второй (который еще больше первого) звонят, когда обед *совсем* готов, а в третий (который превосходит первый и второй, вместе взятые) звонят все время, пока я обедаю. Я объяснил кошкам, что как только им что-нибудь понадобится, следует позвонить в звонок, и они звонили во *все* звонки *всю* ночь напролет. Я подумал, что, может быть, им что-нибудь понадобилось, но мне очень хотелось спать, и я не стал вставать.

Утром я подал кошкам на завтрак студень из крысиных хвостиков и мышку с маслом, и они остались очень недовольны. А когда я отправился погулять, кошки вытащили из шкафа все мои книги и разложили их на полу, чтобы мне удобно было читать. Все книжки они открыли на пятидесятой странице, ибо считали, что начинать лучше всего именно с нее. Жаль только, что кошки нашли бутылочку с клеем и попытались приклеить картинки к потолку (им казалось, что это должно мне понравиться). Случайно капельки клея попали на книги, страницы склеились, и я уже никогда не смогу прочитать, что написано на пятидесятой странице ни в одной из них!

Но поскольку кошки хотели сделать мне приятное, я, разумеется, на них ничуть не рассердился. Более того, в награду я дал каждой кошке по ложке чернил. Правда, чернила кошкам пришлись не по вкусу, и они вместо того, чтобы поблагодарить меня, стали строить ужасные гримасы, но поскольку это были не просто чернила, а награда, кошкам все же пришлось выпить по полной ложке чериил. Одна из них стала совсем черной, хотя сначала была совсем белой.

Им очень хотелось отведать вареного пеликана, но я где-то слышал, что вареного пеликана кошкам есть вредно. Поэтому я сказал: «Ступайте к Агнес Хьюз, и, если окажется, что вам можно есть вареного пеликана, она непременно угостит вас этим блюдом».

Затем я пожал всем кошкам лапки, пожелал им доброго пути и вывел их через трубу на крышу. Уходить от меня им очень не хотелось.

Дорогая Эдит!

Как отвратительно ты ведешь себя! Сказать, что твое поведение ложится несмываемым позором на все человечество, значит не сказать ничего! Сказать, что всякого, виновного в столь отвратительном поведении, следовало бы сослать на самые дальние окраины цивилизованного мира (например, в Уимблдон) или заключить в тюрьму, сумасшедший дом или, что гораздо хуже, отправить *в школу для девочек*, означало бы назначить вполне заслуженную меру наказания!

— Что все это значит? — спросишь ты.— Что я такого *сделала*?

Ничего. В этом-то я как раз тебя и обвиняю. Твоя вина не в том, что ты *что-то сделала*, а в том, что ты *ничего не сделала*. Чтобы найти подходящее сравнение для столь бесчеловечного поведения, нам пришлось бы вернуться ко временам Нерона! Именно тогда, когда ты должна была побеспокоиться и разузнать, как ты обещала, полное имя Луи Эллиот, чтобы я мог послать ей «Алису», а Генри «Зазеркалье», ты по своей лени предпочитаешь вести жизнь жабы или боа-констриктора, не делая решительно *ничего*!

Могу я спросить у тебя, для чего, по-твоему, нужны маленькие девочки? Что толку от них, если они не выполняют своих обещаний и не стараются быть полезными? Гораздо лучше в таком случае обзавестись действительно полезными каминными решетками или тележками.

Полулюбящий тебя
*Льюис Кэррол*

Уважаемая мисс Эдит Джебб!

Испросив у Ваших высокочтимых родителей разрешение направить Вам несколько строк в ту знаменательную пору, когда Вы совершенствуете свои знания в Уимблдоне, я берусь за перо в надежде, что Ваша достойнейшая наставница, прочитав мое письмо, не найдет в нем ничего предосудительного, что могло бы помешать Вам ознакомиться с его содержанием. Я глубоко убежден, что с моего пера не сорвется, пусть даже случайно, ни одного замечания, способного хоть на миг возмутить плавное течение тех глубоких мыслей, которые Ваша превосходнейшая наставница, несомненно, стремится пробудить в Вас. Тернист путь учения, и одоление его — му́ка (но не мука̀, ибо последнее слово имеет несколько *иное* значение), но я надеюсь, что для Вас он будет усыпан розами. Как приятно бродить, построившись парами, по тенистым переулкам Уимблдона и шептать про себя: «Береги честь смолоду. Под лежачий камень вода не течет». Не сомневаюсь, что Ваша наставница, наделенная всеми мыслимыми добродетелями, услышав, сколь похвальное направление приняли Ваши мысли, не преминет поставить Вам высший балл, а бал, как я должен заметить, представляет собой зрелище, которого юная девушка, пользующаяся подобно Вам, уважаемая мисс Джебб, всеми благами просвещения, всячески должна избегать. Зрелище это весьма легкомысленно и непристойно, и я не буду задерживать Вашего внимания на его отвратительных подробностях. Зато сколь приятно, сидя с одной из соучениц под раскидистым («тенистым») дубом, нашептывать друг другу немецкие глаголы неправильного спряжения! Даже чтение французского словаря с конца к началу может стать Вашим *любимым* занятием, коль скоро Вам выпало редкое счастье ощущать на себе неусыпное внимание мудрой наставницы! Приношу Вам свои глубочайшие извинения за слово, неожиданно сорвавшееся с моего пера и встречающееся лишь в романах, романсах, книгах, читаемых легкомысленными девушками, но никогда — в этом я абсолютно уверен! — не произносимое в стенах, где Вы имеете счастье находиться под бдительным оком несравненной леди, воплощающей в себе Вашего «наставника, философа и друга!» Остаюсь, уважаемая мисс Эдит, преданный Вам

*Льюис Кэррол*

P. S. Не откажите в любезности передать мой почтительный привет Вашим родителям, когда Вы возымеете желание написать им письмо.

Дорогая Гертруда!

Должен тебя огорчить: если ты будешь каждый раз посылать мне по почте на один поцелуй больше, чем в предыдущем письме, у нас *ничего* не получится. Дело в том, что письма становятся все тяжелее и тяжелее и платить за них приходится все больше и больше. Когда почтальон принес мне последнее письмо от тебя, он выглядел очень мрачным.

— С вас причитаются два фунта стерлингов, сэр! — сказал он.— Доплата за *лишний* вес, сэр!

(Мне *кажется*, что он самую малость преувеличил. Он частенько заставляет меня платить по два *фунта*, когда я считаю, что платить нужно всего лишь два *пенса*.)

— Пожалуйста, мистер почтальон! — сказал я, изящно встав перед ним на колено. (Я очень хочу, чтобы ты как-нибудь увидела, как я преклоняю колени перед почтальоном. Это незабываемое зрелище!) — Прошу извинить меня за столь тяжелое письмо. Оно от одной маленькой девочки.

— Всего лишь от маленькой девочки? — прорычал почтальон.— Интересно, из чего сделаны маленькие девочки?

— Из сахара и пряностей,— начал было объяснять я,— и все это пере...

— Я не это имею в виду,— перебил меня почтальон.— Я хочу сказать: что хорошего в маленьких девочках, если они посылают такие тяжелые письма?

— Согласен с вами,— печально ответил я,— хорошего в них *не так уж много*.

— Постарайтесь впредь не получать таких писем,— угрюмо посоветовал почтальон, — по крайней мере от этой девочки. Я ее *отлично знаю. Это очень плохая девочка*.

Вряд ли почтальон сказал правду. Я не думаю, что он видел тебя хоть раз, и ты вовсе не плохая девочка. Но я пообещал ему, что мы не станем посылать друг другу много писем.

— Всего лишь какие-нибудь две тысячи четыреста семьдесят писем. Что-нибудь вроде этого,— сказал я ему.

— Так мало? — удивился почтальон.— Это пустяки! Я хотел сказать, чтобы вы не посылали друг другу *много* писем.

Поэтому теперь мы должны будем с тобой считать наши письма и, как только дойдем до двух тысяч четырехсот семидесяти, прекратим переписку, если только почтальон не разрешит нам писать дальше.

Любящий тебя друг
*Льюис Кэррол*

Милая Дороти!

...Сейчас, когда прошло достаточно времени (год или два, больше или меньше — какая разница?) и ты оправилась после визита ко мне, я беру на себя смелость спросить, не будешь ли ты свободна вечером в ближайшую субботу и если да, то можно ли мне зайти за тобой в 6½ часов и пригласить на один из моих больших званых обедов.

*Число* гостей пусть тебя не пугает: их будет ровно 0,99999... . Не стану спорить, выглядит оно очень внушительно, но бесконечные периодические дроби теряют все свое величие, если превратить их в обыкновенные!

Две вещи следует иметь в виду.

Во-первых, не обязательно одевать вечернее платье. Сам я буду одет в утренний костюм, почему же мои гости должны больше считаться с приличиями, чем хозяин? (Я терпеть не могу церемоний!)

Во-вторых, что ты обычно пьешь за обедом? Дамы, бывающие у меня в гостях, в основном предпочитают лимонад из бочки, но ты можешь выбрать любой из следующих напитков:

1) лимонад в бутылках;
2) имбирный лимонад;
3) пиво;
4) воду;
5) молоко;
6) уксус;
7) чернила.

Никто из моих гостей до сих пор не выбирал ни № 6, ни № 7.

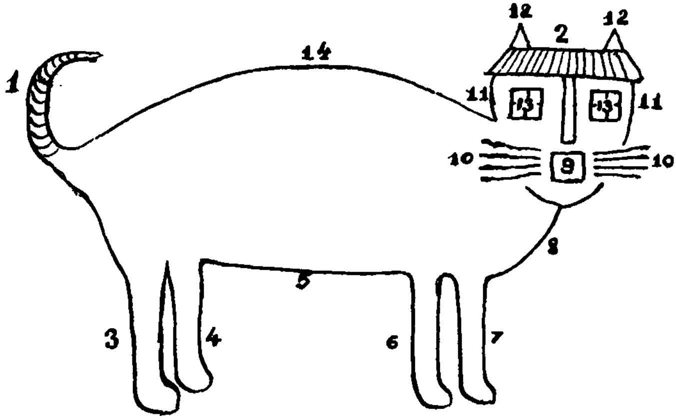
Дорогая Гертруда!

Ты, наверное, опечалишься, удивишься и, может быть, даже не поверишь, когда узнаешь, какой странной болезнью я заболел с тех пор, как ты уехала. Я послал за доктором и, когда он пришел, сказал ему: «Дайте мне какого-нибудь лекарства от усталости». Доктор возмутился: «Что за глупости! Вам не требуется никакого лекарства! Отправляйтесь-ка лучше спать!» Но я ответил: «Нет, у меня не такая усталость, при которой нужно спать. У меня усталость *на лице*». Доктор слегка нахмурился и сказал: «Вы правы. У Вас устал *нос*. Те, кто задирает нос кверху, очень любят спорить». Я не согласился с доктором: «Нет, нос у меня не устал. Может быть, волосы устали?» Доктор нахмурился еще больше и сказал: «*Теперь* мне все понятно. Вы так плохо играли на фортепиано, что волосы у Вас встали дыбом, а поскольку это нелегко, то они очень устали». «Нет,— поспешил я заверить доктора,— я не играл на фортепиано и не убежден, что у меня устали именно волосы. Скорее, усталость ощущается где-то между носом и подбородком». Доктор стал совсем хмурым и спросил меня: «Не ходили ли Вы на подбородке?» «Нет»,— ответил я. «Не знаю, что и думать,— сказал доктор,— это очень серьезный случай в моей практике. Может быть, у Вас устали губы?» «Ну конечно же! — закричал я.— Именно губы». Доктор сделался очень мрачным и сказал: «Вам не следовало раздавать столько поцелуев». «Но ведь я послал лишь один поцелуй своей знакомой — маленькой девочке»,— возразил я. «Постарайтесь припомнить поточнее. Вы уверены, что это был лишь *один* поцелуй?» Я подумал и ответил: «Может быть, их было *одиннадцать*». «Вам не следует посылать ей ни одного поцелуя больше до тех пор, пока Ваши губы не отдохнут»,— сказал доктор. «Что же мне делать? — спросил я,— ведь я должен этой девочке еще сто восемьдесят два поцелуя». Доктор так опечалился, что слезы брызнули у него из глаз, и посоветовал: «Пошлите их в коробочке». И тут я вспомнил о маленькой коробочке, которую некогда купил в Дувре и думал подарить *какой-нибудь* маленькой девочке. Я уложил все поцелуи в коробочку и отправил ее по почте. Напиши, получила ли ты их или оии потерялись по дороге.

Любящий тебя
*Ч. Л. Додгсон*

Дорогая Ада! (Ведь уменьшительное от твоего имеии Ада? Аделаида — очень красивое имя, но когда человек ужасно заият, ему иекогда писать такие длинные слова, в особенности если сначала еще нужно с полчаса вспомииать, как они пишутся, а затем пойти и справиться по словарю, правильно ли ты его написал, а словарь, коиечно, оказывается в соседней комиате на самом верху книжного шкафа, где он пролежал долгие месяцы и почти скрылся под толстым слоем пыли, так что сначала еще нужно взять тряпку и вытереть его, но при этом поднимается такая туча пыли, что ты чуть не задыхаешься, и уже после того, когда, наконец, удается разобраться, где собствеиио словарь и где пыль, нужно еще вспомнить, где стоит буква А — в начале или в конце алфавита, ибо ты твердо помнишь, что она, во всяком случае, находится не в середине его, затем выясияется, что страницы словаря пропылились настолько, что иа них трудно что-либо разобрать, и, прежде чем перевериуть очередную страницу, нужно еще пойти и сначала вымыть руки, причем мыло скорее всего куда-то затерялось, кувшин пуст, а полотенца нет вообще н, чтобы найти эти вещи, необходимо потратить не один час, а затем пойти и купить новый кусок мыла — я думаю, что, узнав обо всех этих трудностях, ты не станешь возражать, если я буду называть тебя уменьшительным именем и, обращаясь к тебе, говорнть: «Дорогая Ада!») В прошлом письме ты сообщила, что хотела бы иметь мой портрет. Посылаю тебе его. Надеюсь, что он тебе понравится.

Очеиь любящнй тебя друг
*Льюис Кэррол*




## МИСТЕР К. И МИСТЕР Т.

У мистера К (*1*) был большой друг — мистер Т. (*2*). Решил как-то раз мистер К. навестить своего друга и заодно посмотреть его новый дом. Дорогу мистер К. знал не очень хорошо и поэтому решил пойти по тропинке, о которой только и было известно, что ведет она в нужную сторону. Тропинка эта шла по крутому косогору и была очень скользкой. Мистер К. благополучно спустился почти до самого низа, как вдруг оступился и упал в грязь (*3*). Другой бы на его месте пал духом, но не таков был мистер К. Он быстро поднялся и принялся карабкаться по тропинке, но — увы! — не успел пройти и нескольких ярдов, как снова упал в грязь (*4*). Но и это не смутило мистера К. Перемазавшись с ног до головы, он вскарабкался вверх и — о радость! — оказался на прекрасной прямой дороге (*5*). Однако мистер К. пошел по ней чуть скорее, чем следовало, прямая дорога быстро кончилась, дальше идти снова пришлось по скользкой тропинке, и он снова упал (*6*). Мистер К. очень рассердился на себя за свою оплошность и с удвоенной энергией стал взбираться наверх, но едва лишь выбрался на дорогу, как поскользнулся и упал еще раз (*7*). Дальше тропинка шла по очень крутому склону, но мистер К. сумел одолеть его (*8*) и очень обрадовался, когда увидел перед собой дом мистера Т. Парадная дверь (*9*) дома смотрела прямо на мистера К. Из дома навстречу мистеру К. вышел мистер Т. и сказал: «Вы только взгляните, какие прекрасные цветы растут в моем саду (*10*), как красиво построен мой дом (*11*). Камины у меня в комнатах ннкогда не дымят, потому что трубы (*12*) в моем доме просто великолепные». Затем мистер Т. повел мистера К. в дом и показал ему, какой прекрасный вид открывается из окон (*13*). Друзья сели пить чай и долго беседовали. Мистер Т. спросил у мистера К., какой дорогой тот добирался к нему, а когда мистер К. рассказал о своих приключениях, мистер Т. заметил: «Идтн надо было совсем другой дорогой. Я покажу вам более короткий путь». Так мистер Т. и сделал. И тогда мистер К. узнал, что назад к его дому ведет очень удобная дорога, прямая и ннчуть не скользкая.

Дорогая Уинни!

Поскольку ты очень устала от чтения этого длинного-предлинного письма, я кончаю писать и ставлю подпись.

Любящий тебя
*Ч. Л. Додгсон*

P. S. Ты даже не представляешь, как трудно мне было написать «Уиннн» вместо «мисс Стивенс» и «любящий тебя» вместо «преданный Вам».

P. P. S. Я надеюсь, что через год-другой мне удастся выкроить время н пригласить тебя еще на одну прогулку. Правда, к тому времени Время начнет «оставлять морщины на твоем безоблачном челе», но какое это имеет значение? Чем почтенней возраст того, с кем идешь на прогулку, тем более юным выглядншь сам. Мне будет приятно услышать, как люди станут шепотом спрашнвать друг у друга:

— Кто этот милый мальчик, который идет рядом вон с той дряхлой старушкой? Он заботится о ней так трогательно, словно она его прабабушка!

P. P. P. S. На этом писать кончаю, так как очень тороплюсь.

Мой дорогой Берти!

Я был бы очень рад исполнить твою просьбу и написать тебе, но мне мешает несколько обстоятельств. Думаю, когда ты узнаешь, что это за обстоятельства, ты поймешь, почему я никак не смогу написать тебе письмо.

Во-первых, у меня нет чернил. Не веришь? Ах, если бы ты видел, какие чернила были в мое время! (Во времена битвы при Ватерлоо, в которой я принимал участие простым солдатом.) Стоило лишь налить немного черил на бумагу, как они сами писали все что нужно! А те чернила, которые стоят на моем столе, настолько глупы, что, даже если ты начнешь писать слово, они все равно не сумеют его закончить!

Во-вторых, у меня нет времени. Не веришь? Ну что ж, не верь! Ах, если бы ты знал, какое время было в мое время! (Во времена битвы при Ватерлоо, в которой я командовал полком.) В сутках тогда было 25 часов, а иногда 30 или даже 40 часов!

В-третьих (и это самое важное), я очень не люблю детей. Почему, я не знаю, но в одном я уверен: я терпеть не могу детишек точно так же, как другие не терпят кресло-качалку или пудинг с изюмом! Не веришь? Я так и думал, что ты не поверишь. Ах, если бы ты видел, какие дети были в мое время! (Во времена битвы при Ватерлоо, в которой я командовал всей английской армией. Звали меня тогда герцогом Веллингтоном, но потом я подумал, что иметь столь длинное имя — дело слишком хлопотное, и изменил его на «мистер Додгсон». Это имя я выбрал себе потому, что в середине его стоит та же буква, с которой начинается слово «герцог».) Теперь ты и сам видишь, что написать тебе я никак не могу.

... Надеюсь, ты не будешь разочарован, не получив письма от

Любящего тебя друга
*Ч. Л. Додгсона*

Дорогая Нелла!

КАК! Ты не хочешь ждать 18 лет? Странно!

Ведь как только пройдет 17 лет 11 месяцев и 3 недели, тебе останется ждать лишь одну неделю. А что такое неделя? Поскольку решить столь трудную загадку почти невозможно, я скажу тебе ответ (только, пожалуйста, не говори никому): неделя — это семь дней!

Часовщик сообщил мне, что на изготовление часов ему потребуется 18 лет и 5 дней, но я сказал: «Нельзя ли побыстрее?» — и дал ему понять, что тебе очень не хотелось бы ждать еще и 5 дней. Узнав об этом, часовщик пообещал приложить все усилия, чтобы закончить часы к концу восемнадцатилетнего срока.

Иметь собственные часы будет очень удобно: если Эдит когда-нибудь бросит свои часы в тебя, ты сможешь бросить свои часы в нее. И те, и другие часы разобьются, а поскольку новых часов я тебе не подарю, все кончится ко всеобщему удовольствию...

Любящий тебя дядя
*Чарлз Л. Додгсон*

Дорогая Иза!

Я очень рад, что ты шлешь мне в письме миллионы объятий и поцелуев от себя, Нелли и Эмси. Но прошу тебя, подумай, сколько времени отняло бы такое количество объятий и поцелуев у твоего старого и очень занятого дядюшки! Попробуй обнимать и целовать Эмси в течение одной минуты по часам, и ты убедишься, что делать это быстрее, чем 20 раз в минуту, нельзя. «Миллионы» же означают по крайней мере 2 миллиона.

2 000 000 (объятий и поцелуев) : 20 = 100 000 (минут).

100 000 (мннут) : 60 = 1666 (часов).

1666 (часов) : 12 = 138 (дней, считая, что день продолжается 12 часов).

138 (дней) : 6 = 23 (неделн).

Я не мог бы обнимать и целовать вас больше чем по 12 часов в сутки н не хотел бы проводить за этим занятием воскресенья. В итоге, как ты видишь, на миллионы объятий и поцелуев мне прншлось бы затратить 23 недели тяжелой работы. Нет, милая моя девочка, я просто не в состоянии столь расточнтельно расходовать свое время.

... Передай мои наилучшие пожелания своей маме, $^1/_2$ поцелуя Нелли, $\frac{1}{200}$ поцелуя Эмси, а $\frac{1}{2\,000\,000}$ поцелуя возьми себе. Остаюсь искренне любящий тебя дядюшка

*Ч. Л. Додгсон*

Ч. Л. Д. дядюшке тебя любящему — внуку его, а ему не салфетку послала и забыла об этом ты, с тех пор прошли которые, лет 80 или 70 за что, лишь жаль. Любила очень его ты, что неудивительно, и старичком приятным очеиь был он. Ему только предназначаться могла салфетка поэтому. Дедушка мой был Додгсоном дядей единственииым и, не родился еще я в то время ведь. Сам догадался я — Додгсона для дяди красивое очень кое-что сделаю я: про себя сказал ты, к работе приступая, что о том, а салфетку вышила ты давно-давным, что узнал я от нее. Иза сказала об этом мне? Предназначалась она для кого, узнал я как, знаешь. Сохранилась прекрасно эта салфеточка. Дедушки для моего вышила ты, которую салфеточку изящную в подарок от тебя получить было мне приятно как! Нелли дорогая моя

Как неразборчиво ты пишешь! Я долго ломал голову над тем, что бы такое могли означать каракули в конце твоего письма, и мне стало казаться, будто там написано: «Целую сто раз подряд и шлю отпечаток своего пальчика». Но так как в твоем письме этого никак не могло быть, я, поразмыслив, догадался, что там, должно быть, написано совсем другое: «Шлю тебе целую корзину котят и полный мешок перчаток». И тогда я понял, что ты мне послала.

И лишь только я успел дочитать твое письмо, как вошла миссис Дайер (так зовут квартирную хозяйку) и сообщила, что почтальон доставил мне огромный мешок и корзину. В доме поднялось такое мяуканье, будто коты со всего города вздумали вдруг прийти ко мне в гости!

— Миссис Дайер,— попросил я,— если Вам не трудно, сосчитайте, пожалуйста, сколько предметов находится в мешке и в корзине.

Миссис Дайер вышла на несколько минут и, вернувшись, сообщила:

— В мешке 500 пар перчаток, в корзине 250 котят!

— О! — воскликнул я.— Значит, в мешке 1000 перчаток! В четыре раза больше, чем котят! Конечно, это очень любезно со стороны Мэгги, но почему она прислала столько перчаток? У меня же нет 1000 рук.

— Нет,— подтвердила миссис Дайер.— У Вас на 998 рук меньше.

На следующий день я все же придумал, что мне делать. Прихватив с собой корзину, я отправился прямо в местную приходскую школу (если ты помнишь, эта школа для девочек) и спросил у директрисы:

— Сколько девочек сегодня у вас в школе?

— Ровно 250, сэр!

— И все они очень хорошо вели себя весь день?

— Лучше и быть не может, сэр!

Тогда я со своей корзиной встал у двери, и, как только девочка выходила из школы, я тут же совал ей в руки маленького пушистого котенка! Сколько было радости! Девочки стали гладить котят и, танцуя от радости, побежали домой, а котята от удовольствия замурлыкали громко-громко!

На следующее утро я отправился к школе еще до ее открытия, чтобы узнать у девочек, как котята вели себя ночью. Девочки пришли в школу, плача и всхлипывая, руки и лица их были исцарапаны, а котят, чтобы те не могли больше царапаться, бедным девочкам пришлось завернуть в фартуки. Сквозь слезы девочки еле смогли проговорить:

— Котята царапались всю ночь, всю но-очь!

И тогда я сказал себе:

— Какая умная девочка Мэгги! Теперь мне понятно, для чего она прислала все эти перчатки и почему их в четыре раза больше, чем котят!

А затем я сказал девочкам:

— Не плачьте, ступайте и прилежно занимайтесь, а когда уроки кончатся, я встречу вас у дверей школы и вы увидите то, что вы увидите!

Вечером, когда занятия закончились и девочки стали выбегать из школы, держа котят, все еще завернутых в фартуки, я уже стоял наготове со своим большим мешком, и, как только маленькая девочка показывалась в дверях, я тотчас же совал ей в руки две пары перчаток! Девочки развернули фартуки и вытащили из них котят. Котята сердито фыркали и шипели, а когти их были выпущены и торчали во все стороны, как иглы у дикобраза. Но не успели котята оцарапать девочек, как почувствовали, что их когти погрузились в теплые и мягкие перчатки! Котята сразу же успокоились, стали совсем ручными и снова замурлыкали.

Девочки, танцуя от радости, побежали домой, а наутро, все так же танцуя, прибежали в школу. Все царапины у девочек зажили, и девочки хором сказали мне: «Котята вели себя хорошо!»

Если какому-нибудь котенку нужно было поймать одну мышку, он снимал одну перчатку с одной лапки. Если он хотел поймать две мышки, то снимал две перчатки. Если он хотел поймать три мышки, то снимал три перчатки, а если котенок хотел поймать четыре мышки, то снимал все перчатки. Но как только котята кончали ловить мышек, они сразу же снова надевали перчатки, ибо знали, что без перчаток девочки не будут их любить.

## СОДЕРЖАНИЕ




Льюис Кэррол

ИСТОРИЯ
С УЗЕЛКАМИ

Редактор А. Г. Белевцева
Переплет художника С. И. Мухина
Художественный редактор Ю. Л. Максимов
Технические редакторы
Е. С. Потапенкова и А. Г. Резоухова

Сдано в набор 22/I 1973 г.
Подписано к печати 17/VIII 1973 г.
Бумага офсетная № 1 $84\times108^1/_{32}=6{,}38$ бум. л.
усл. печ. л. 21,42, уч.-изд. л. 25,14
Изд. № 12/6525. Цена 1 р. 56 к.
Издательство «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ярославский полиграфкомбинат «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Ярославль, ул. Свободы, 97.