

А.Кадич, Д.Эделен

**Калибровочная
теория
дислокаций
и дисклинаций**

Перевод с английского
А. К. Зданьски

под редакцией
А. М. Курбатова



Москва «Мир» 1987

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Введение	9
Глава 1. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР И ФЕНОМЕНОЛОГИЯ ДЕФЕКТОВ	11
§ 1.1. Историческая справка	11
§ 1.2. Феноменология	13
Глава 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ	18
§ 2.1. Краткие сведения по исчислению внешних дифференциальных форм	18
§ 2.2. Неточные формы и их свойства	21
§ 2.3. Теория минимальной связи Янга — Миллса	24
§ 2.4. Неточные поля Янга — Миллса	29
§ 2.5. Полная система уравнений для внешних форм	32
§ 2.6. Лагранжиан теории упругости и его естественная калибровочная группа	35
§ 2.7. Кинематика дефектов	37
Глава 3. КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ДЕФЕКТОВ	42
§ 3.1. Обратимость в задачи Коши в динамике дефектов	42
§ 3.2. Исходная конфигурация; пересмотр	45
§ 3.3. Матрица связности	47
§ 3.4. Концепция минимальной замены для группы $SO(3)$	49
§ 3.5. Концепция минимальной замены для группы $SO(3) \supset T(3)$	52
§ 3.6. Независимое теоретико-групповое обоснование	54
§ 3.7. Полевые переменные и наблюдаемые	58
§ 3.8. Построение лагранжиана	63
§ 3.9. Обозначения и наиболее употребительные соотношения	67
§ 3.10. Вариация по χ^i	71
§ 3.11. Вариация по Φ_a^i	73
§ 3.12. Вариация по W_a^a	75
§ 3.13. Условия интегрируемости	77
§ 3.14. Полевые уравнения динамики дефектов	80
§ 3.15. Дефекты, связанные с группой $T(3)$ или группой $SO(3)$	83
§ 3.16. Силы и тензоры энергии — импульса	85
§ 3.17. Обсуждение	89
§ 3.18. Конечные тела без дисклинаций с поверхностной нагрузкой	95

Глава 4. ЛИНЕАРИЗАЦИИ	99
§ 4.1. Скейлинг-параметр группы	99
§ 4.2. Приближенные уравнения; ε -разложение	100
§ 4.3. Однородные деформации	107
§ 4.4. Дальнее поле статической дисклинации. Статическое решение Янга и Ву	110
§ 4.5. Приближение линейной теории упругости при отсутствии дисклинаций	113
§ 4.6. Статические задачи; краевые и винтовые дислокации	118
§ 4.7. Задачи с заданной нагрузкой на границе; разложение по параметру нагружения	124
Приложение 1. АЛГЕБРА ЛИ ГРУППЫ $SO(3) \supset T(3)$	131
Приложение 2. ИНВАРИАНТНОСТЬ L_0 ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ $SO(3) \supset T(3)$	132
Приложение 3. ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЛЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ	134
Приложение 4. ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ДИНАМИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ ДЕФЕКТОВ	136
Литература	165

Научное издание

Анда Кадяч, Доминик Эделен

КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ДИСЛОКАЦИЙ И ДИСКЛИНАЦИЙ

Ст. научный редактор Г. М. Ильичева
Мл. научный редактор И. В. Герасимова
Художник И. И. Шиф
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Е. В. Алехина
Корректор Л. В. Байкова

ИБ № 5675

Сдано в набор 12.11.86. Подписано к печати 08.05.87. Формат 60×90^{1/16}.
Бумага типографская № 1. Печать высокая. Гарнитура литературная.
Объем 5,25 бум. л. Усл. печ. л. 10,50. Усл. кр.-отт. 10,88. Уч.-изд. л. 8,95.
Изд. № 1/4325. Тираж 5000 экз. Зак. № 381. Цена 1 р. 40 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

ББК 22.37
К 13
УДК 548.4

Кадич А., Эделен Д.

К 13 Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций:
Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 168 с., ил.

Книга известных математиков (Югославия, США), отражающая применение методов теории поля к исследованию современных проблем физики твердого тела. Сюда относятся задачи динамики дефектов, термодинамики тел с дефектами, теории упругости, пластичности и прочности материалов. Авторы удачно переносят методы и идеи калибровочных полей Янга—Миллса в теорию дефектов, учитывая специфику внешней и внутренней геометрии сплошной среды, что открывает совершенно новые перспективы в решении задач теории дефектов. Книга основана на оригинальных работах.

Для физиков, работающих в области теории поля, математиков-прикладников, специалистов по механике и физике твердого тела.

К $\frac{1702070000-375}{041(01)-87}$ 36—87, ч. 1

ББК 22.37

Редакция литературы по математическим наукам

© By Springer-Verlag 1983
All Rights Reserved. Authorised translation
from English language edition published
by Springer-Verlag
Berlin — Heidelberg — New York
© перевод на русский язык, «Мир», 1987

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Дислокации, впервые введенные в науку как гипотетические несовершенства в структуре реальных кристаллов, в настоящее время изучаются как реально существующие объекты, оказывающие значительное влияние на свойства материалов. Многие свойства твердых тел, такие, как прочность, пластичность, ползучесть, в первую очередь обусловлены дефектами кристаллической решетки. В теоретических исследованиях дислокаций можно выделить два подхода: микроскопический и макроскопический (континуальный). В первом из них исследуются отдельные дефекты или ансамбли дефектов и их взаимодействия со средой и изучается природа этих объектов в основном на феноменологическом (реже статистическом) уровне описания твердых тел; во втором описываются дислокации как нарушение однородности сплошной среды.

Методы классической дифференциальной геометрии давно и плодотворно используются для описания сплошной среды. Это вполне естественно, так как структура дифференцируемых многообразий удивительным образом отвечает физическим представлениям об упругих средах с непрерывным распределением внутренних напряжений. Материальная среда рассматривается как аналитическое многообразие L_3 (аффинно-метрическое многообразие), причем внешняя метрика является метрикой евклидова пространства. Такой подход фактически сопоставляет внутренние состояния твердого тела определенной внутренней геометрии. Уже первые исследователи постулировали соответствие упругой среды риманову трехмерному многообразию. Поэтому первые работы по теоретическому описанию дефектов были выполнены геометрическими методами. Первым был Кондо, который в 1950 г. указал на связь между дислокациями и неримановой геометрией, отождествив плотность дислокаций с кручением аффинно-метрического пространства. В дальнейшем этот подход играл (и до сих пор играет) наиболее существенную роль в феноменологическом описании дислокаций в твердых телах.

Появление ряда книг, посвященных геометрическому описанию дефектов и сплошной среды в целом ([1—4]), позволило адекватным образом отразить достижения в объяснении многих эффектов ползучести и прочности. Вместе с тем в последние годы важную роль стала играть теория дислокаций в полимерах и аморфных телах. Следует также ожидать резкого увеличения интереса к этой области в связи с задачами теоретического изучения сплошной среды с заранее заданными свойствами. Вероятно, именно в этих приложениях современный геометрический подход будет наиболее плодотворен, поскольку наличие дефектов, имеющих характер топологических объектов (линий, поверхностей и т. п.), превращает односвязное многообразие, соответствующее сплошной среде без дефектов, в многосвязное.

Отсутствие заметного прогресса в «геометрической» теории дефектов в течение длительного времени (с 1950 г.) можно объяснить статическим (а не динамическим) подходом к предмету, поскольку существовавшие геометрические методы позволили лишь идентифицировать плотность дислокаций с геометрическими характеристиками и не давали рецепта для построения динамики, т. е. уравнений движения, баланса энергии — импульса и тензора напряжений для распределения дислокаций.

Предлагаемая вниманию читателя книга А. Кадич и Д. Эделена в известной мере устраняет этот недостаток. Она объединяет геометрический и калибровочный подходы, столь прочно укоренившиеся в современной физике полей. Действительно, наиболее существенные успехи в физике элементарных частиц связаны с введением калибровочных полей как переносчиков взаимодействия, в то же время допускающих чисто геометрическую трактовку, — они являются связностями в главном расслоении над соответствующей базой, заданной структурной группой. В такой трактовке калибровочные поля Янга — Миллса могут восприниматься как теория бесконечной сплошной среды.

В книге рассматривается обратная ситуация, в которой калибровочные поля, структурной группой которых служит полупрямое произведение группы трансляций $T(3)$ и группы вращений $SO(3)$, привлечены для описания дефектов сплошной среды. Последовательное применение калибровочного подхода позволило авторам вывести лагранжиан для полей, описывающих дефекты сплошной среды. Полная система уравнений (являющихся в данном случае структурными уравнениями Картана) дала возможность совместно представить эволюцию напряжений в среде и динамику дефектов. Кроме того, в предложенном методе удастся одновременно характе-

ризовать как дефекты трансляции (дислокации), так и вращательные дефекты (дисклинации).

Вообще говоря, это не первый пример использования калибровочных полей в теории сплошной среды. Среди ряда приложений, известных из гидродинамики, следует отметить калибровочную теорию сверхтекучести [5], в которой была рассмотрена микроскопическая схема появления сверхтекучести.

Несмотря на существенные достижения теории, которые, по нашему мнению, отражены в данной книге, следует отметить, что пока речь идет лишь о некоторой полевой модели, а не о термодинамике сплошной среды. В связи с этим хотелось бы указать на некоторые возможности, открывающиеся на избранном авторами пути, и на дальнейшее развитие принятой ими схемы. Во-первых, в таком подходе хорошо удастся описать взаимодействие электромагнитного классического излучения со средой, содержащей дефекты, так как фактически речь идет о распространении электромагнитных волн в пространстве с заданной неевклидовой геометрией. Во-вторых, привлечение калибровочных полей, соответствующих дефектам на пространственной решетке, открывает возможность для органического слияния микро- и макроподходов. В-третьих, открытым остается вопрос описания точечных дефектов и дефектов в средах с внутренними степенями свободы, например в средах, в которых каждая частица обладает классическим спином и зарядом.

Наконец, этот подход, возможно, поможет объяснить из общих принципов критические особенности переходов между дефектами различных масштабных уровней, описание которых дается пока в рамках феноменологии [6].

Конечно, предлагаемая вниманию читателя книга, авторы которой успешно перенесли методологию калибровочных полей в теорию дефектов с учетом внутренней геометрии среды, является лишь началом геометро-калибровочного метода исследования дефектной структуры материалов. Однако мы считаем, что продолженная А. Кадич и Д. Эделеном работа поможет исследователям, разрабатывающим теоретические аспекты динамики дефектов.

А. М. Курбатов

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошных сред. Т. I. — 3-е изд. — М.: Наука, 1976.

2. Kondo K. Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering sciences by means geometry. Vol. 1. — Tokyo: Gakujutsu Bunken Fukyu-Kai, 1955.
3. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков/Пер. с англ. — М.: Наука, 1965.
4. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. Сб. ст. — Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1963.
5. Lazaridis-Dias L. A gauge theory of superfluidity. — Preprint ICTP, 1977.
6. Брагинский А. П., Ефименко С. П., Зданьски А. К., Курбатов А. М. Модели разрушения дискретных сред и адекватный анализ акустической эмиссии. — В кн.: Труды V Болгарского национального конгресса по механике. — Варна, 1985, с. 328—336.

Введение

В книге указывается, что группу $SO(3) \supset T(3)$ можно рассматривать как шестипараметрическую калибровочную группу, сохраняющую инвариантным лагранжиан теории упругости. В связи с этим для построения полной континуальной теории твердого тела, в которой учитываются поля дислокаций и дисклинаций, можно использовать универсальную конструкцию калибровочной теории Янга — Миллса. Показывается, что нарушение однородности действия группы $SO(3)$ приводит к появлению дисклинаций и вращательных дислокаций, в то время как нарушение однородности действия группы $T(3)$ соответствует возникновению трансляционных дислокаций. Строго обосновывается замена градиентов смещения компонентами тензора деформаций, а кинематической ньютоновой скорости — скоростью деформации.

Уравнения, входящие в полученную теорию, полностью исследуются; для них проводится разложение по скейлинг-параметру группы. При этом доказывается, что первый порядок приближения приводит к классической теории упругости, в то время как второй и третий позволяют включать в теорию дислокации и дисклинации соответственно. В статическом случае решения полевых уравнений в линейном приближении воспроизводят в ближней зоне поля напряжений краевой и винтовой дислокаций, причем в дальней зоне эти поля экспоненциально убывают. При изучении динамики выводятся сопряженные системы уравнений Клейна — Гордона. Получающиеся при этом дисперсионные соотношения позволяют непосредственно определить соответствующие константы связи с помощью экспериментов по фоновому рассеянию.

Так как данная теория получается из вариационного принципа, то тензор энергии — импульса является в ней хорошо определенной величиной, полная дивергенция которого равна нулю для каждого из решений полевых уравнений. Следовательно, аддитивная структура лагранжиана Янга — Миллса позволяет записать точные выражения для системы сил и потоков энергии, действующих между упругими, дислокационными и дисклинационными составляющими

соответственно. В частных случаях получаются выражения для сил Пича — Кёлера, действующих на дислокации, а также предсказывается уменьшение энергии за счет упругого отклика, что соответствует постулату Друккера в теории пластичности. Показывается, что уравнения баланса импульса и момента импульса могут быть получены как условия интегрируемости полевых уравнений.

Д-р А. Кадич
Д-р Д. Эделен

Исторический обзор и феноменология дефектов

§ 1.1. ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Дислокации были впервые открыты Вольтерра [22]¹⁾, Вайнгартеном [23] и Сомильяна [24] в рамках механики сплошных сред. Эти авторы рассматривали упругие свойства «макродислокаций» в изотропной среде. Только тридцать лет спустя этот предмет исследования приобрел дополнительное значение в свете изучения дискретной кристаллической решетки. Дислокации перестали быть математическим курьезом, когда Орован [25], Поляни [26] и Тейлор [27] предсказали существование неидеальностей кристаллов, конфигурационно соответствующих дислокациям. В 1934 г. они ввели в физику твердого тела понятие краевой дислокации — линейного дефекта кристаллической решетки. Спустя пять лет Бюргерс [28] открыл второй фундаментальный тип дислокаций — винтовые дислокации — и развил для случаев изотропной и неизотропной сред теорию, которую можно было бы назвать «упругостатикой» единичной дислокации [29].

Последующее развитие теории дислокаций можно условно разбить на три периода [30]. В первом из них, продолжавшемся вплоть до 1950 г., развивалась теория для простых дислокационных комплексов, обычно представляющих собой линейные дислокации в бесконечной изотропной среде или в конечных телах с простыми границами. Этот период включает в себя работы, выполненные итальянской школой, и затем Орованом, Поляни, Тимпом, Тейлором, Бюргерсом, а также другими авторами. Во втором периоде (с 1950 по 1965 г.) число работ по теории дефектов возросло. При этом разрабатывались в основном два направления. В первом из них изучались свойства кристаллов в свете теории дислокаций, во втором предпринимались попытки корректно сформулировать теорию дислокаций и заполнить пробел между дискретной и континуальной теориями дефектов, что оказалось важным для исследований пластической деформации материалов. И конечно, теория стала более красивой и

¹⁾ О работах Вольтерра см. также Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1982. — *Прим. ред.*

соответственно. В частных случаях получаются выражения для сил Пича — Кёлера, действующих на дислокации, а также предсказывается уменьшение энергии за счет упругого отклика, что соответствует постулату Друккера в теории пластичности. Показывается, что уравнения баланса импульса и момента импульса могут быть получены как условия интегрируемости полевых уравнений.

Д-р А. Кадич
Д-р Д. Эделен

Исторический обзор и феноменология дефектов

§ 1.1. ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Дислокации были впервые открыты Вольтерра [22]¹⁾, Вайнгартеном [23] и Сомильяна [24] в рамках механики сплошных сред. Эти авторы рассматривали упругие свойства «макродислокаций» в изотропной среде. Только тридцать лет спустя этот предмет исследования приобрел дополнительное значение в свете изучения дискретной кристаллической решетки. Дислокации перестали быть математическим курьезом, когда Орован [25], Поляни [26] и Тейлор [27] предсказали существование неидеальностей кристаллов, конфигурационно соответствующих дислокациям. В 1934 г. они ввели в физику твердого тела понятие краевой дислокации — линейного дефекта кристаллической решетки. Спустя пять лет Бюргерс [28] открыл второй фундаментальный тип дислокаций — винтовые дислокации — и развил для случаев изотропной и неизотропной сред теорию, которую можно было бы назвать «упругостатикой» единичной дислокации [29].

Последующее развитие теории дислокаций можно условно разбить на три периода [30]. В первом из них, продолжавшемся вплоть до 1950 г., развивалась теория для простых дислокационных комплексов, обычно представляющих собой линейные дислокации в бесконечной изотропной среде или в конечных телах с простыми границами. Этот период включает в себя работы, выполненные итальянской школой, и затем Орованом, Поляни, Тимпом, Тейлором, Бюргерсом, а также другими авторами. Во втором периоде (с 1950 по 1965 г.) число работ по теории дефектов возросло. При этом разрабатывались в основном два направления. В первом из них изучались свойства кристаллов в свете теории дислокаций, во втором предпринимались попытки корректно сформулировать теорию дислокаций и заполнить пробел между дискретной и континуальной теориями дефектов, что оказалось важным для исследований пластической деформации материалов. И конечно, теория стала более красивой и

¹⁾ О работах Вольтерра см. также Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1982. — *Прим. ред.*

насыщенной формальными деталями. Невозможно перечислить имена всех авторов, внесших свой вклад в лучшее понимание различных аспектов теории, и мы упомянем лишь некоторых из них: Крёнер, Эшелби, Билби, Булаф, Най, Кондо, Набарро, Мура.

Третий период охватывает годы после 1965 г. Объем настоящего параграфа не позволяет охватить все работы, появившиеся в течение следующих пятнадцати лет. Читателям, интересующимся этими вопросами, можно рекомендовать обзорную статью Крёнера [10] с подробным анализом состояния теории дефектов к текущему моменту. В этот период в теорию дислокаций и дисклинаций вводит аппарат дифференциальной геометрии. Еще в начале 50-х гг. Кондо [31] и независимо Билби, Булаф и Смит [32] установили связь между теорией дислокаций и неримановой геометрией. В этих работах плотность дислокаций играла роль картанова кручения [2].

Аппарат дифференциальной геометрии, позволяющий получить наиболее естественное и элегантное представление теории дислокаций, остающееся справедливым даже в случае больших деформаций, широко применялся в этой теории и в последующие годы. Кроме того, появилась серия фундаментальных работ, использующих при изучении динамики дефектов методы теории групп. Таким образом, теория дислокаций и дисклинаций оказалась тесно связанной с этими дисциплинами. Однако особый интерес представляют исследования, выявившие далеко идущие аналогии между этой теорией и теорией Максвелла [33], общей теорией относительности [29] и теорией Янга — Миллса [5].

Первыми объектами изучения были трансляционные дефекты кристаллов, т. е. дислокации. Дисклинации, т. е. дефекты, связанные с нарушением вращательной симметрии, сначала не привлекали особого внимания, особенно при изучении кристаллов (это связано с тем, что дисклинации очень трудно выявить экспериментально). Казалось, что для получения дисклинаций в кристаллах необходимы очень большие нагрузки, при которых кристалл расколется, и поэтому вращательные дефекты следует принимать во внимание только в областях, в которых работает континуальная теория. Однако этот тип дефектов получил полное признание при изучении полимеров, жидких кристаллов и аморфных тел.

Калибровочные построения в теории материалов с дефектами представляют собой последние достижения этой теории. Впервые в литературе они появились в работе А. А. Голембевской-Ласоты [33] в 1979 г. Затем быстро последовали три большие работы [37, 38, 5], в которых калиб-

ровочные структуры были рассмотрены более подробно. Хотя рассматриваемые калибровочные группы были строго абелевыми, они оказались более богатыми, чем калибровочная абелева группа классической электродинамики: общий случай соответствует 45-параметрической абелевой калибровочной группе. Следующий очевидный шаг заключался в исследовании свойств и структуры соответствующих калибровочных групп второго типа. Возможность использования для этой цели теории Янга — Миллса отмечалась уже в статье [5]. Детальное исследование всех этих вопросов и является предметом нашей книги.

§ 1.2. ФЕНОМЕНОЛОГИЯ

Кристаллические твердые тела часто описывают как идеально регулярную систему атомов или молекул. Реальный кристалл, однако, не столь идеален. В самом деле, многие физические и химические свойства твердых тел обуславливаются неидеальностями структуры (или дефектами) кристаллической решетки.

Дислокация является тем видом кристаллического дефекта, который изучался наиболее интенсивно, в частности для металлов и полупроводников. Дислокация представляет собой линейный дефект, хорошо известный физикам, работающим в области твердого тела, и играющий важную роль в пластической деформации металлов, а также во многих других явлениях. Дислокации связывают с трансляцией, а именно дислокация является результатом трансляции или линейного смещения одной части кристалла относительно другой.

Дефекты, связанные с вращательной симметрией, принято называть дисклинациями. В твердом теле с дисклинацией смещение части структуры относительно соседней части осуществлено посредством вращения, а не трансляции.

Дислокациям посвящено гораздо большее число работ, чем дисклинациям. Первые были обнаружены в обычных трехмерных кристаллах, в то время как дисклинации в подобных кристаллах, например образующих кристаллические структуры металлов, наблюдаются редко. Дисклинации возникают в упорядоченно ориентированных молекулах, называемых жидкими кристаллами. Кроме того, они являются важным структурным элементом во многих веществах с упорядоченной структурой, отличной от традиционных кристаллов, таких, например, как белковые оболочки вирусов [34]. Дисклинации можно наблюдать даже в узорах отпечатков пальцев, на шкурах полосатых животных, например зебры,

в плетеных изделиях. В последние годы дисклинации начали играть важную роль при изучении полимеров и аморфных тел.

Наиболее часто дефекты изучаются в контексте кристаллографической структуры, и поэтому микроструктура оказывается существенной. Однако континуальная теория дефектов, являющаяся макроскопической теорией механического состояния моно- и поликристаллических тел, также важна для исследователя, поскольку эта теория обеспечивает правильный математический формализм при трактовке многочисленных задач механики, возникающих при попытках выяснить свойства материалов, имеющих кристаллическую структуру. Континуальная теория важна также и для инженера, который хотел бы иметь возможность рассчитывать поведение материала по заданным микроскопическим свойствам. И наконец, эта теория представляет значительный интерес сама по себе, поскольку она является весьма общей и элегантной полевой теорией, которая может служить примером для других теорий поля в современной физике.

Нашей основной задачей является построение континуальной полевой теории дефектов. Следовательно, здесь мы можем не касаться феноменологии дислокаций и дисклинаций в кристаллической решетке и допускаем, что читатель достаточно знаком со всеми основными идеями динамики дефектов. Набарро [20] проводит детальное рассмотрение различных типов дефектов. Настоятельно рекомендуем читателю ознакомиться также с обзорной статьей Крёнера [10]¹⁾.

Дислокации и дисклинации можно рассматривать как топологические дефекты. Их наличие в теле изменяет топологию: односвязные области становятся многосвязными, как только в них появляются дефекты. Иначе говоря, это означает, что компоненты смещения перестают быть однозначными функциями координат при пересечении линии или поверхности дефектов. Следовательно, теория дефектов выходит за границы применимости теории упругости, которая требует однозначной определенности смещения как функции координат в каждой точке тела. И тем не менее, даже после того, как была отмечена многозначность смещения как функции координат, теория упругости широко использовалась при получении результатов в задачах для материалов с дефектами.

¹⁾ О физических аспектах теорий дислокаций см. Фридель Ж. Дислокации. — М.: Мир, 1967. — Прим. ред.

Рассмотрим двусвязное тело, представляющее собой шар с тороидальной полостью [20]. Такое тело обладает тем свойством, что произвольная замкнутая кривая, проходящая в теле, не может быть стянута в точку, оставаясь все время внутри тела. Произвольный разрез, сделанный по направлению из полости к внешней поверхности шара, устраняет это свойство, и топология тела с разрезом переходит в топологию шара. Тело может быть превращено в тело с дислокацией путем разреза, смещения двух поверхностей разреза с возможным добавлением или удалением тонкого слоя материала и, наконец, последующего соединения поверхностей с сохранением их нового положения. Выберем две соседние точки, примыкающие к поверхности разреза с противоположных сторон. Координаты этих точек отличаются лишь на бесконечно малую величину, в то время как их смещения существенно различны. В самом деле, в сечении дислокации, т. е. на поверхности разреза, смещения изменяются скачком. Относительное смещение $\delta u^i(N)$ соседних точек на противоположных сторонах разреза в точке N задается выражением [20]

$$\delta u^i(N) = b^i + d_j^i x^j(N). \quad (1.2.1)$$

Соотношение (1.2.1) описывает для абсолютно твердого тела бесконечно малое смещение точки относительно соседней точки. Компоненты d_j^i , удовлетворяющие равенствам

$$d_j^i = -d_i^j,$$

можно рассматривать как инфинитезимальные генераторы трехпараметрической группы вращений $SO(3)$. Аналогично b^i можно рассматривать как генераторы трехпараметрической группы трансляций $T(3)$. Полупрямое произведение этих двух групп дает 6-параметрическую группу $G \equiv SO(3) \supset T(3)$ всех смещений абсолютно твердого тела.

Поскольку вариации δu^i представляют собой относительные смещения точек на внешней стороне N по сравнению, скажем, с точками на внутренней стороне N , то смещения δu^i можно реализовать, допустив, что действие точечно-зависимых элементов группы G переводит внутреннюю сторону во внешнюю. Таким образом, малые смещения двух сторон N оказываются связанными между собой, если допустить, что группа G различным образом действует на различные точки, т. е. что ее действие неоднородно. Тогда неоднородность действия этой группы на порождающую точку N дается соотношением (1.2.1). Ничто не мешает нам распространить эту идею неоднородного действия группы G

на все тело — именно это мы и делаем. Мы рассматриваем неоднородность действия группы $SO(3) \supset T(3)$ глобально, а не локально.

Для дальнейшего оказываются полезными введенные Крёнером представления о внешнем и внутреннем наблюдателях [10]. Внутренний наблюдатель претерпевает деформацию вместе с телом и не может обнаружить различия между совместимыми деформациями. Внешний наблюдатель живет во «внешнем» пространстве, в котором находится тело. Внешний наблюдатель может видеть и совершать все действия, которые доступны внутреннему наблюдателю, но кроме того он может обнаружить различия между совместимыми деформациями. Следовательно, внешний наблюдатель может измерять расстояние между совместимыми деформированными состояниями, которые определяют плоские деформации и вращения. Роль внутреннего наблюдателя становится важной только тогда, когда тело насыщено дефектами: в теле без дефектов внешний наблюдатель видит совместимые искажения, внутренний наблюдатель видит только вакуум, который может быть описан евклидовой метрикой. Однако внутренний наблюдатель является тем, кто в теории дефектов воспринимает существенные физические события. Только он выделяет неинтегрируемые искажения, для которых совместимые деформации не существенны. Действительно, можно считать, что внутренний наблюдатель как бы живет в пространстве, характеризуемом неоднородным действием группы $SO(3) \supset T(3)$.

Как только мы допустим неоднородность действия структурной группы $SO(3) \supset T(3)$, от нас потребуются чрезвычайная осторожность, так как мы начинаем игру с основами ньютоновой механики. Действительно, в механике Ньютона каждая частица имеет три поступательные и три вращательные степени свободы относительно соседних частиц, так что только одна частица в данный момент времени может быть отнесена к инерционной системе отсчета. Поэтому во избежание грубых ошибок нам потребуется пересмотреть все основные положения механики Ньютона. Поиск новой основы — нелегкая задача без верного ориентира в миллиардах возможных альтернатив. К счастью, вариационные принципы и теоремы Нётер обеспечивают самосогласованный формализм, оставляющий инвариантным функционал действия при действии на него группы законов сохранения, которым должны удовлетворять все решения полевых уравнений. Если действовать дальше в том же духе, то требование инвариантности функционала действия при действии на него неоднородной группы $SO(3) \supset T(3)$ будет гарантировать

справедливость законов баланса импульса и момента импульса (законов Ньютона). Единственным действительно новым аспектом теории является вынужденное средство, а именно калибровочная конструкция Янга — Миллса, перенесенная из физики высоких энергий.

Предварительные сведения

§ 2.1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ИСЧИСЛЕНИЮ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Аппарат исчисления внешних форм, предложенный Э. Картаном, дает естественный и непосредственный базис для анализа уравнений поля в динамике дефектов, так как основными полевыми переменными теории являются дифференциальные формы. В связи с тем что не все читатели хорошо знакомы с этой дисциплиной, мы дадим краткие сведения по исчислению дифференциальных форм, определенных в четырехмерном пространстве E_4 . Для более детального ознакомления с предметом читатели могут обратиться к работам [1—4] ¹⁾.

Обозначим через E_4 четырехмерное евклидово пространство, снабженное заданными декартовыми координатами $\{X^a, a = 1, 2, 3, 4\}$. Набор из четырех индексов $J = \{a\}$ удобно разбить на набор из трех индексов $I = \{A\}$ и индекс $\{4\}$, т. е. $\{a\} = \{A, 4\}$. Мы будем также записывать компоненту X^4 как $X^4 = T$, и, таким образом, каждый элемент $\{X^a\}$ может быть теперь записан как $\{X^a\} = \{X^A, T\}$.

В дальнейшем для удобства условимся о значениях, которые мы будем придавать различным индексам. Строчные греческие буквы $\alpha, \beta, \dots$ мы будем все время использовать для обозначения переменных из набора $I = \{1, 2, 3\}$. Для этих же целей мы будем использовать прописные латинские буквы $A, B, \dots$, а также строчные, начиная с $i, j, k, \dots$. Строчные латинские буквы от a до h будут использоваться для четырехиндексного набора $J = \{1, 2, 3, 4\}$. В соглашении о суммировании по повторяющимся индексам всех четырех типов область значений, пробегаемых индексами, зависит от их типа. Так, например, выражение $W_{A\gamma\alpha_j}^a M_a^A$ следует понимать как

$$\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{a=1}^4 \sum_{A=1}^3 W_{A\gamma\alpha_j}^a M_a^A,$$

а сама эта свертка определяет некоторую величину η_j с $j = 1, 2, 3$.

¹⁾ См. также Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. — М.: ГИТТЛ, 1948 и Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964. — *Прим. ред.*

Множество всех гладких (C^∞) функций на E_4 обозначим через Λ^0 . Будем называть их скалярами или формами степени (ранга) нуль. Множество всех внешних дифференциальных форм степени N , $N = 1, 2, 3, 4$, на E_4 обозначим через $\Lambda^N(E_4)$. Множество $\Lambda^4(E_4)$ представляет собой одномерное векторное пространство всех 4-форм, определенных на E_4 вместе со своим естественным базисом $\{\pi\}$. Через π обозначим элемент объема в E_4 , который можно записать в виде

$$\pi = dX^1 \wedge dX^2 \wedge dX^3 \wedge dX^4 = \frac{1}{4!} e_{abef} dX^a \wedge dX^b \wedge dX^e \wedge dX^f, \quad (2.1.1)$$

где символ $\wedge$ используется для обозначения внешнего произведения, а e_{abef} — компоненты тензора Леви-Чивита. Трехмерный элемент объема в E_3 обозначим через $\mu = dX^1 \wedge dX^2 \wedge dX^3$ и таким образом получим

$$\pi = \mu \wedge dT. \quad (2.1.2)$$

Естественный базис для пространства $T(E_4)$, касательного к пространству E_4 , может быть задан посредством четырех линейных операторов $\{\partial_a, a = 1, 2, 3, 4\}$, $\partial_a \equiv \partial/\partial X^a$. Элемент v касательного пространства $T(E_4)$ может быть записан следующим образом:

$$v = v^a (X^b) \partial_a.$$

Дуальным для базиса $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4\}$ пространства $T(E_4)$ является естественный базис $\{dX^1, dX^2, dX^3, dX^4\}$ четырехмерного векторного пространства $\Lambda^1(E_4)$ всех 1-форм, определенных на E_4 .

Помимо более привычного естественного базиса нам необходимо ввести взаимно обратный (биективный) порождающий базис [3, 5] для векторных пространств $\Lambda^3(E_4)$ и $\Lambda^2(E_4)$. Взаимно обратный порождающий базис для $\binom{4}{3}$ -мерного векторного пространства $\Lambda^3(E_4)$ дается в виде ¹⁾

$$\pi_a = \partial_a \lrcorner \pi = \frac{1}{3!} e_{abef} dX^b \wedge dX^e \wedge dX^f, \quad a \in J, \quad (2.1.3)$$

где символ $\lrcorner$ означает операцию внутреннего (скалярного) произведения. Элементы набора $\{\pi_a\}$ обладают свойствами

$$d\pi_a = 0, \quad dX^a \wedge \pi_b = \delta_b^a \pi, \quad (2.1.4)$$

¹⁾ Отметим, что если $\Lambda^k(E_m)$ — векторное пространство k -форм на E_m , то его размерность равна $\binom{m}{k}$. — Прим. ред.

где через $d = dX^a \wedge \partial_a$ обозначен 4-мерный оператор внешнего дифференцирования. Базисом для $\binom{4}{2}$ -мерного пространства $\Lambda^2(E_4)$ всех 2-форм, определенных на E_4 , будет

$$\pi_{ab} = \partial_a \lrcorner \pi_b = \partial_a \lrcorner (\partial_b \lrcorner \pi) \quad (2.1.5)$$

для $a < b$. Эти конструкции обладают следующими свойствами:

$$\pi_{ab} = -\pi_{ba}, \quad d\pi_{ab} = 0, \quad dX^c \wedge \pi_{ab} = \delta_a^c \pi_b - \delta_b^c \pi_a. \quad (2.1.6)$$

Мы работаем с величинами, определенными в четырехмерном пространстве E_4 , в котором первые три координаты $\{X^A\}$ пространственные, а четвертая компонента временная. Таким образом, нам следует сопоставить этим величинам представление элементов $\Lambda(E_4)$, описанное выше. Четырехмерный оператор внешнего дифференцирования может быть записан в виде

$$d = dX^A \wedge \partial_A = dX^A \wedge \partial_A + dT \wedge \partial_4 = \bar{d} + dT \wedge \partial_4, \quad (2.1.7)$$

где $\bar{d} = dX^A \wedge \partial_A$ задает трехмерный оператор внешнего дифференцирования. Легко видеть, что

$$\partial_4 \lrcorner \mu = 0, \quad \partial_4 \lrcorner dT = 1, \quad \partial_A \lrcorner dT = 0, \quad \partial_A \lrcorner \mu = \mu_A,$$

где $\{\mu_A\}$ — взаимно обратный производящий базис для $\binom{3}{2}$ -мерного пространства $\Lambda^2(E_3)$. Следовательно, из (2.1.2) и (2.1.3) с учетом (2.1.7) получим

$$\pi_a = (\partial_a \lrcorner \mu) \wedge dT - \mu \wedge (\partial_a \lrcorner dT),$$

или

$$\pi_a = \delta_a^A \mu_A \wedge dT - \delta_a^4 \mu. \quad (2.1.8)$$

Теперь любая 3-форма Ψ на E_4 однозначно определяется в базисе $\Lambda^3(E_4)$ следующим образом:

$$\Psi = \Psi^a \pi_a = \Psi^A \pi_A + \Psi^4 \pi_4,$$

что в соответствии с (2.1.8) можно переписать в эквивалентном виде как

$$\Psi = \Psi^A \mu_A \wedge dT - \Psi^4 \mu. \quad (2.1.9)$$

Простыми вычислениями получаем

$$d\Psi = [\bar{d}(\Psi^A \mu_A) + \partial_4 \Psi^4 \mu] \wedge dT = (\partial_A \Psi^A + \partial_4 \Psi^4) \mu \wedge dT. \quad (2.1.10)$$

Пусть χ есть 2-форма на E_4 . Она может быть однозначно выражена через 1-форму $\rho = \rho_A dX^A$ и 2-форму $\eta = \eta^A \mu_A$ посредством соотношения

$$\chi = \rho \wedge dT + \eta = \rho_A dX^A \wedge dT + \eta^A \mu_A, \quad (2.1.11)$$

а ее внешний дифференциал будет определен выражением [5]:

$$\begin{aligned} d\chi &= (\bar{d}\rho + \partial_4\eta) \wedge dT + \bar{d}\eta = \\ &= [\bar{d}(\rho_A dX^A) + (\partial_4\eta^A)\mu_A] \wedge dT + \bar{d}(\eta^A \mu_A). \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Оператор внешнего дифференцирования d естественным путем приводит к определению двух подпространств пространства $\Lambda(E_4)$. Элемент $v \in \Lambda(E_4)$ называется *замкнутым* тогда и только тогда, когда

$$dv = 0.$$

Элемент $v \in \Lambda(E_4)$ называется *точным* тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\sigma \in \Lambda(E_4)$, что

$$v = d\sigma.$$

Совокупность всех точных (замкнутых) элементов $\Lambda(E_4)$ образует подпространство $\mathcal{Z}(E_4)$ ($\mathcal{Z}(E_4)$) над $\mathbb{R}$ (но не над $\Lambda^0(E_4)$) и [3]

$$\mathcal{Z}(E_4) \subset \mathcal{Z}(E_4).$$

Если S — область в E_4 , такая, что она может быть стянута гладким образом в точку (S — звездчатая область по отношению к одной из этих точек, называемой центром), то в силу леммы Пуанкаре

$$\mathcal{Z}(S) \subset \mathcal{Z}(S).$$

Следовательно, если $dv = 0$ на S , то на S имеется такой элемент σ , что $v = d\sigma$. Существенно, что область S является звездчатой; если это не так, то из соотношения $dv = 0$ не следует с необходимостью, что $v = d\sigma$.

Совокупность всех $(p \times q)$ -матриц, элементами которых являются внешние дифференциальные формы степени k , определенные на пространстве E_4 , обозначается через $\Lambda_{p,q}^k(E_4)$. Для обозначения матриц внешних форм используются жирные буквы. Например, $\Omega \in \Lambda_{3,1}^3(E_4)$ представляет собой матрицу-столбец 3-форм на E_4 .

§ 2.2. НЕТОЧНЫЕ ФОРМЫ И ИХ СВОЙСТВА

Классы замкнутых и точных дифференциальных форм играют очень важную роль при изучении внешних дифференциальных форм. Однако существует еще один класс

форм, существенный при анализе уравнений динамики дефектов, а именно класс неточных форм.

Пусть ω — внешняя форма степени k , которую можно записать в виде

$$\omega = \omega_{a_1 \dots a_k} (X^b) dX^{a_1} \wedge \dots \wedge dX^{a_k}. \quad (2.2.1)$$

Определим линейный оператор гомотопии H на некоторой звездчатой области S в E_4 с центром (X_0^a) по отношению к заданному координатному покрытию следующим образом:

$$H\omega = \int_0^1 \lambda^{k-1} \mathcal{R} \lrcorner \tilde{\omega}(\lambda) d\lambda, \quad (2.2.2)$$

где

$$\mathcal{R} = (X^a - X_0^a) \partial_a, \quad (2.2.3)$$

$$\tilde{\omega}(\lambda) = \omega_{a_1 \dots a_k} (X_0^b + \lambda (X^b - X_0^b)) dX^{a_1} \wedge \dots \wedge dX^{a_k}. \quad (2.2.4)$$

Несмотря на то что линейный оператор гомотопии является обычным инструментом алгебраической топологии, в исчислении внешних дифференциальных форм он, как правило, встречается только при доказательстве леммы Пуанкаре. Оператор H обладает следующими свойствами [3]:

- (а) $H: \Lambda^k(S) \rightarrow \Lambda^{k-1}(S)$, $k \geq 1$, $H\Lambda^0(S) = 0$;
- (б) $dH + Hd = I$, $k \geq 1$,
 $(Hdf)(X^a) = f(X^a) - f(X_0^a)$, $k = 0$;
- (в) $(HH\omega)(X^a) = 0$, $(H\omega)(X_0^a) = 0$;
- (г) $HdH = H$, $dHd = d$;
- (д) $\mathcal{R} \lrcorner H = 0$, $H\mathcal{R} \lrcorner = 0$.

В соответствии с (2.2.5.б) любая форма $\omega \in \Lambda^k(S)$ удовлетворяет соотношению

$$\omega = dH\omega + Hd\omega. \quad (2.2.6)$$

Элемент $\mathcal{S}(S)$, определяемый выражением

$$\omega_e = dH\omega, \quad (2.2.7)$$

является точной частью формы ω . Элементы $\Lambda^0(S)$ не содержат точной части.

Пусть

$$\omega_a = Hd\omega = \omega - \omega_e. \quad (2.2.8)$$

Согласно (2.2.5. в), $H\omega_a = 0$ и, следовательно, ω_a принадлежит ядру линейного оператора H . Элемент $\omega_a \in \Lambda^k(S)$ назовем *неточной* частью формы ω . Множество всех неточных элементов из $\Lambda^k(S)$ обозначается через $\mathcal{A}^k(S)$. Так как элементы $\Lambda^0(S)$ не имеют точной части, отождествим $\mathcal{A}^0(S)$ с нею, т. е. положим $\Lambda^0(S) = \mathcal{A}^0(S)$ (см. 2.2.5. б). Множество всех неточных форм на S обозначается через $\mathcal{A}(S)$. Существенной особенностью множества $\mathcal{A}(S)$ является то, что оно представляет собой *подмодуль*¹⁾ множества $\Lambda(S)$ и этим явно отличается от множеств $\mathcal{B}(S)$ и $\mathcal{J}(S)$. Отсюда, в частности, следует, что множество $\mathcal{A}(S)$ замкнуто относительно операции внешнего умножения. Следовательно, каждое $\mathcal{A}^k(S)$ представляет собой векторное пространство над $\Lambda^0(k)$,

$$\mathcal{A}^k(S) \wedge \mathcal{A}^m(S) \subset \mathcal{A}^{k+m}(S),$$

и внешнее произведение элементов ядра $\ker H$ принадлежит $\ker H$.

В [3] приведена теорема, гласящая, что

$$\Lambda^k(S) = d(\mathcal{A}^{k-1}(S)) \oplus \mathcal{A}^k(S), \quad k \geq 1, \quad (2.2.9)$$

или, эквивалентно,

$$\Lambda^k(S) = \mathcal{J}^k(S) \oplus \mathcal{A}^k(S),$$

и что это разложение в прямую сумму однозначно определено заданием центра области S . Если $\omega \in \Lambda^k(S)$ для $k \geq 1$, то $\omega \in \ker H$ и (2.2.5.б) дает

$$\omega = Hd\omega \quad \forall \omega \in \mathcal{A}^k(S), \quad k \geq 1. \quad (2.2.10)$$

Следовательно, *линейный оператор гомотопии является обратным по отношению к оператору внешнего дифференцирования на подмодуле $\mathcal{A}(S)$.*

Приведенные выше результаты остаются справедливыми для любой звездчатой области S произвольного дифференцируемого многообразия. Однако важно отметить, что основное многообразие, используемое в этой книге, представляет собой четырехмерное евклидово пространство E_4 , которое является звездчатым относительно любой из своих точек, выбранных в качестве центра. Поэтому если областью является все пространство E_4 , то центр (а следовательно, и оператор линейной гомотопии) может быть выбран бесконечным

¹⁾ То есть множество $\mathcal{A}(S) \subseteq \Lambda(S)$ таково, что отображение $\mathcal{A}(S) \times \mathcal{A}(S) \rightarrow \mathcal{B}(S) \subseteq \mathcal{A}(S)$ удовлетворяет условиям дистрибутивности ($x(u+v) = xu + xv$; $(x+y)u = xu + yu$), ассоциативности ($xy(v) = x(yv)$) и унитарности ($1 \cdot v = v$) $x, y \in \mathcal{A}(S)$, $u, v \in \mathcal{A}(S)$. — Прим. ред.

числом способов. Так как линейный оператор гомотопии играет главную роль в излагаемой здесь теории, важно отчетливо представлять себе, что эта теория ковариантна по отношению к выбору центра. Пусть $\Phi: E_4 \rightarrow 'E_4$ — регулярный диффеоморфизм, действующий из E_4 на $'E_4$. Тогда Φ индуцирует взаимно обратное отображение $\Phi^*: \Lambda('E_4) \rightarrow \Lambda(E_4)$. Если H определен на E_4 , то Φ индуцирует линейный оператор гомотопии $'H$ на $'E_4$ согласно соотношению [3]:

$$\Phi^* 'H = H \Phi^*, \quad (2.2.11)$$

и, таким образом, $'H = (\Phi^*)^{-1} H \Phi^*$. Если теперь допустить, что Φ — оператор трансляции, т. е. $'X^a = X^a + k^a$, то оператор $'H$ будет иметь центр в точке $(X_0^a + k^a)$. Отождествляя $'E_4$ с E_4 , получаем новый линейный оператор гомотопии $'H$ на E_4 с новым центром $(X_0^a + k^a)$.

§ 2.3. ТЕОРИЯ МИНИМАЛЬНОЙ СВЯЗИ ЯНГА — МИЛЛСА

Развиваемая в данной книге теория динамики дефектов основана на приложении к полупростым калибровочным группам ставшей к нашему времени уже классической теории Янга — Миллса. Поэтому для удобства читателей мы дадим здесь краткий обзор этой теории. Тех, кто интересуется деталями, касающимися теории Янга — Миллса, мы отсылаем к обзорным работам [6—9]¹⁾.

Рассмотрим лагранжиан $L_0(\psi, \partial\psi)$, описывающий некоторую известную систему полей ψ . Для определенности допустим, что переменные состояния могут быть записаны как компоненты матрицы-столбца ψ . Пусть G_0 — группа Ли матриц, действующих на вектор состояния $\psi(X^a)$ слева,

$$' \psi(X) = A \psi(X), \quad \partial_a A = 0, \quad A \in G_0. \quad (2.3.1)$$

Хотя обычно сразу предполагают, что группа G_0 полупростая, мы намеренно отложим это предположение до того момента, когда оно понадобится. Так как действие элемента A группы G_0 является однородным, т. е. он действует на ψ в каждой точке X в точности одним и тем же образом, то

$$\partial_a ' \psi(X) = A \partial_a \psi(X). \quad (2.3.2)$$

¹⁾ О геометрическом подходе к исследованию калибровочных полей Янга — Миллса см. также обзорную статью Даниэль М., Виоле С. М. Геометрический подход к калибровочным теориям типа Янга — Миллса. — УФН, 1982, т. 136, вып. 3, с. 371—419 и монографию Манин Ю. И. Комплексная геометрия и поля Янга — Миллса. — М.: Наука, 1985. — *Прим. ред.*

Последнее означает, что взятие частной производной и действие группы G_0 суть коммутирующие операции. Существенным аспектом теории является то, что группа G_0 представляет собой группу внутренней симметрии (калибровочную группу) теории в том смысле, что лагранжиан L_0 инвариантен по отношению к действию G_0 :

$$L_0(\psi, \partial_a \psi) = L_0(A\psi, A\partial_a \psi) = L_0(\psi, \partial_a \psi) \quad (2.3.3)$$

для всех $A \in G_0$.

Предположим, что преобразования группы G_0 зависят от точки пространства — времени. Обозначим эту новую группу через G . Тогда уравнение (2.3.1) заменяется следующим:

$$\psi'(X^b) = A(X^b)\psi(X^b). \quad (2.3.4)$$

В силу неоднородности действия группы G теперь имеем

$$\partial_a \psi' = \partial_a (A\psi) = (\partial_a A)\psi + A(\partial_a \psi) \quad (2.3.5)$$

вместо простого закона коммутации (2.3.2).

Таким образом, A не является более множителем слева и, следовательно, лагранжиан L_0 уже не инвариантен:

$$L_0(\psi', \partial_a \psi') = L_0(A\psi, (\partial_a A)\psi + A(\partial_a \psi)) \neq L_0(\psi, \partial_a \psi).$$

Отметим, что действие группы G не меняет координатного покрытия; в частности, $\psi'_{\partial_a} \equiv \partial_a \psi$ (т. е. группа G является калибровочной группой).

Ясно, что условие инвариантности лагранжиана L_0 при действии неоднородного преобразования (2.3.4) требует чего-то большего, чем простая замена $\partial_a \psi$ на $\partial_a \psi'$. Мы надеемся найти такой оператор D_a , что

$$\psi'_{D_a} = A(X)D_a \psi(X) \quad \forall A \in G. \quad (2.3.6)$$

Каждый раз, когда вектор состояния подвергается неоднородному преобразованию, мы будем определять оператор D_a и его образ ψ'_{D_a} следующим образом:

$$D_a \psi = \partial_a \psi + \Gamma_a \psi \quad (2.3.7)$$

и

$$\psi'_{D_a} = \partial_a \psi' + \Gamma_a \psi', \quad a \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (2.3.8)$$

Здесь $\{\Gamma_a\}$ — набор новых полей, так называемых компенсирующих или калибровочных полей, преобразующихся при действии группы G в соответствии с правилом

$$\Gamma_a' = A\Gamma_a A^{-1} - (\partial_a A)A^{-1} \quad \forall A \in G. \quad (2.3.9)$$

Оператор D_a называется ковариантной производной, а Γ_a являются соответствующими матрицами связности. Простые вычисления показывают, что в этом случае A снова

действует слева на $D_a\psi$ и, следовательно, соотношение (2.3.6) остается в силе. Таким образом, «минимальная» замена

$$\partial_a\psi \rightarrow D_a\psi \quad (2.3.10)$$

восстанавливает инвариантность лагранжиана L_0 , для которого мы в этом случае получаем

$$L_0(\psi, D_a\psi) = L_0(A\psi, AD_a\psi) = L_0(\psi, D_a\psi) \quad (2.3.11)$$

в соответствии с (2.3.3).

Матрицы связности Γ_a , $a \in \{1, 2, 3, 4\}$, не столь произвольны, как это может показаться. Соотношение (2.3.9) показывает, что они принимают значения в алгебре Ли G , соответствующей группе Ли G , генераторы которой являются постоянными матрицами γ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, r$. Следовательно, каждая из матриц Γ_a может быть выражена через базис алгебры G :

$$\Gamma_a = W_a^\alpha(X) \gamma_\alpha \quad (2.3.12)$$

где W_a^α — поля Янга — Миллса, связанные с неоднородным действием калибровочной группы G . Матрицы γ_α удовлетворяют правилам коммутации

$$[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] = \gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha = C_{\alpha\beta}^\epsilon \gamma_\epsilon, \quad (2.3.13)$$

где $C_{\alpha\beta}^\epsilon$ — структурные константы алгебры Ли G . Они удовлетворяют соотношениям

$$C_{\alpha\beta}^\epsilon = -C_{\beta\alpha}^\epsilon \quad (2.3.14)$$

и тождествам Якоби

$$C_{\alpha\beta}^\delta C_{\delta\gamma}^\epsilon + C_{\beta\gamma}^\delta C_{\delta\alpha}^\epsilon + C_{\gamma\alpha}^\delta C_{\delta\beta}^\epsilon = 0. \quad (2.3.15)$$

Для полупростых групп метрика Картана — Киллинга

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\gamma}^\delta C_{\beta\delta}^\gamma = C_{\beta\alpha} \quad (2.3.16)$$

задает компоненты несингулярной матрицы.

Замена (2.3.10), необходимая для инвариантности лагранжиана при неоднородном действии группы G , приводит к появлению новых полей $\{W_a^\alpha(X^b)\}$, связанных с первоначальными полями состояний $\{\psi^i(X^b)\}$ следующим образом:

$$D_a\psi = \partial_a\psi + W_a^\alpha \gamma_\alpha \psi. \quad (2.3.17)$$

Получающиеся при этом дополнительные полевые уравнения являются соотношениями для определения полей Янга — Миллса $\{W_a^\alpha\}$.

Продолжим наше рассмотрение, заменяя первоначальный лагранжиан, теперь уже $L_0(\psi, D_a\psi)$, новым лагранжианом

$$L = L_0(\psi^i, D_a\psi^i) + s_1 L_1(W_a^\alpha, \partial_b W_a^\alpha), \quad (2.3.18)$$

в котором новый член L_1 зависит лишь от потенциальных полей и их производных и удовлетворяет требованиям инвариантности при неоднородном действии калибровочной группы G . Здесь s_1 — константа связи. Вариация функционала действия по полевым переменным W_a^α порождает новые полевые уравнения для определения полей Янга — Миллса, в то время как вариация по ψ дает полевые уравнения для полей ψ , являющихся минимально взаимодействующими с полями W_a^α .

Построение G -инвариантного лагранжиана L_1 существенно упрощается, если мы перепишем (2.3.12) как матрицу 1-форм

$$\Gamma = \Gamma_a dX^a, \quad W^\alpha = W_a^\alpha dX^a, \quad \Gamma = W^\alpha \gamma_\alpha \in \Lambda_{3,3}^1(E_4), \quad (2.3.19)$$

где W^α представляет собой 1-форму потенциалов Янга — Миллса. Матрица 2-форм кривизны $\Theta \in \Lambda_{3,3}^2(E_4)$, записанная через 1-формы связности Γ , дается выражением [1, 2]

$$\Theta = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma, \quad (2.3.20)$$

и (2.3.9) показывает, что ее преобразование при действии группы G может быть записано в виде

$$\Theta' = A\Theta A^{-1}, \quad (2.3.21)$$

где мы использовали тот факт, что $d = dX^a \wedge \partial_a$. Далее, используя (2.3.13), (2.3.19) и (2.3.20), получаем

$$\Theta = F^\alpha \gamma_\alpha, \quad F^\alpha = \frac{1}{2} F_{ab}^\alpha dX^a \wedge dX^b \in \Lambda^2(E_4), \quad (2.3.22)$$

где $\{F_{ab}^\alpha\}$ — компоненты тензора поля Янга — Миллса. Явное выражение для F^α имеет вид

$$F^\alpha = dW^\alpha + \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha W^\beta \wedge W^\gamma. \quad (2.3.23)$$

Таким образом, соотношение (2.3.21) показывает, что Θ преобразуется в соответствии с сопряженным представлением группы G , а (2.3.22) и (2.3.23) указывают на то, что преобразование зависит только от полей W_a^α и их частных производных, причем по производным оно линейно. Прямая аналогия с электродинамикой и требование калибровочной инвариантности и квадратичности по производным приводят к следующей структуре члена L_1 :

$$L_1 = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta} F_{ab}^\alpha g^{ac} g^{bd} F_{cd}^\beta. \quad (2.3.24)$$

Здесь $C_{\alpha\beta}$ — компоненты формы Картана — Киллинга группы G . С этой точки зрения требование полупростоты группы G надлежащим образом гарантирует невырожденность члена L_1 лагранжиана, т. е. $\det(C_{\alpha\beta}) \neq 0$, что означает обратимость матрицы $((C_{\alpha\beta}))$. Ввиду этого описанное выше построение «минимальной замены» справедливо для произвольных матричных групп Ли при выполнении условия невырожденности. Компоненты тензора g^{ab} задаются соотношениями

$$g^{AB} = -\delta^{AB}, \quad g^{44} = 1/\zeta, \quad g^{ab} = 0 \text{ при } a \neq b. \quad (2.3.25)$$

В отличие от электродинамики в нашем случае условие равенства ζ скорости света в вакууме возникает только тогда, когда мы потребуем свойства лоренц-инвариантности для L_1 . Полезно также отметить, что выражение (2.3.24) при выполнении (2.3.25) может быть получено непосредственно из стандартных условий изотропности и однородности в классических линейных теориях сплошных сред и условий калибровочной инвариантности.

Ковариантный оператор внешнего дифференцирования D определяется следующим образом:

$$D = dX^a \wedge D_a. \quad (2.3.26)$$

Если η — матрица k -форм, для которой действие группы G выражено равенством $'\eta = A\eta$, $A \in G$, то ковариантная внешняя производная

$$D\eta = d\eta + \Gamma \wedge \eta \quad (2.3.27)$$

преобразуется при действии элемента группы G по правилу

$$'D(' \eta) = AD\eta. \quad (2.3.28)$$

Если ρ — матрица k -форм, преобразующаяся при действии группы G согласно соотношению $'\rho = \rho A^{-1}$, $A \in G$, то внешняя ковариантная производная

$$D\rho = d\rho - (-1)^k \rho \wedge \Gamma \quad (2.3.29)$$

обладает индуцированным законом преобразования

$$'D(' \rho) = (D\rho) A^{-1}. \quad (2.3.30)$$

Наконец, если $\Sigma \in \Lambda_k$ преобразуется в соответствии с сопряженным действием группы G , $'\Sigma = A\Sigma A^{-1}$, $A \in G$, то

$$D\Sigma = d\Sigma + \Gamma \wedge \Sigma - (-1)^k \Sigma \wedge \Gamma \quad (2.3.31)$$

имеет следующий закон преобразования:

$$'D(' \Sigma) = A(D\Sigma) A^{-1}, \quad (2.3.32)$$

Простые вычисления показывают, что в силу (2.3.27), (2.3.29) и (2.3.31) мы имеем

$$DD\eta = \Theta \wedge \eta, \quad (2.3.33)$$

$$DD\rho = -\rho \wedge \Theta \quad (2.3.34)$$

и

$$DD\Sigma = \Theta \wedge \Sigma - \Sigma \wedge \Theta, \quad (2.3.35)$$

где

$$\Theta = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma,$$

а η , ρ и Σ преобразуются согласно соотношениям

$$\eta' = A\eta, \quad \rho' = \rho A^{-1}, \quad \Sigma' = A\Sigma A^{-1}.$$

§ 2.4. НЕТОЧНЫЕ ПОЛЯ ЯНГА — МИЛЛСА

Как известно, задача решения уравнений Максвелла существенно упрощается подходящим выбором калибровки. Наличие аналогии с электродинамикой позволяет надеяться на подобные упрощения и в случае полей Янга — Миллса. Эти надежды могут быть в полной мере реализованы, причем, как мы покажем, строго алгебраическим путем. Здесь мы следуем соображениям, приведенным в [13, разд. 4].

Пусть G есть r -параметрическая матричная группа Ли и, как и прежде, $\{\gamma_\alpha, \alpha = 1, \dots, r\}$ — базис алгебры Ли группы G . В предыдущем параграфе мы видели, что любая матрица Γ 1-форм связности группы G принимает значения в алгебре Ли этой группы. Таким образом, любая такая матрица Γ принадлежит множеству

$$\mathcal{U} = \{W^\alpha \gamma_\alpha \mid W^\alpha \in \Lambda^1(E_4), \alpha = 1, \dots, r\}. \quad (2.4.1)$$

Действительно, отсюда следует, что любой элемент $\mathcal{U}$ может действовать как матрица 1-форм связности группы G . Далее из (2.3.9), (2.3.19) следует, что произвольный элемент A группы G генерирует преобразование

$$\Gamma' = A\Gamma A^{-1} - dAA^{-1}, \quad (2.4.2)$$

и, следовательно, можно считать, что G преобразует множество $\mathcal{U}$ по правилу (2.4.2):

$$G_\gamma: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \mid \Gamma' = A\Gamma A^{-1} - dAA^{-1}, \quad A \in G. \quad (2.4.3)$$

Таким образом, лагранжиан задачи инвариантен относительно действия группы G (т. е. калибровочно-инвариантен), а уравнения поля Эйлера — Лагранжа калибровочно-ковариантны. В соответствии с этим калибровочная группа отображает одни решения полевых уравнений в другие решения, и, следовательно, действие G_γ является отношением

эквивалентности на $\mathcal{U}$ (калибровочная эквивалентность). В этом случае пространству $\mathcal{U}$ сопоставляется пространство $\mathcal{U}/G_Y$, расслоенное отношением калибровочной эквивалентности. Поэтому для описания всего $\mathcal{U}$ нам достаточно охарактеризовать только сечение $\mathcal{H}$ этого расслоенного пространства, поскольку в этом случае $\mathcal{U}$ является совокупностью орбит $\mathcal{H}^1$).

Выберем точку P в E_4 в качестве центра построения линейного оператора гомотопии H и обозначим через Γ порождающий элемент $\mathcal{U}$. Матрица A_Γ , являющаяся решением интегрального уравнения Римана — Гревса

$$A_\Gamma = I + H(A_\Gamma \Gamma), \quad (2.4.4)$$

принадлежит G , поскольку Γ представляет собой матрицу инфинитезимальных порождающих 1-форм группы G (см. [3; с. 458 и далее]). Внешний дифференциал (2.4.4) имеет вид $dA_\Gamma = dH(A_\Gamma \Gamma)$. Однако H удовлетворяет соотношению $dH + Hd = I$, и поэтому

$$dA_\Gamma = A_\Gamma \Gamma - Hd(A_\Gamma \Gamma). \quad (2.4.5)$$

Подставив (2.4.6) в правую часть (2.4.2), получим

$$\Gamma' = (Hd(A_\Gamma \Gamma)) A_\Gamma^{-1}. \quad (2.4.6)$$

Таким образом, Γ принадлежит неточному сечению

$$\mathcal{A}_Y = \{W^\alpha v_\alpha \mid W^\alpha \in \mathcal{A}^1(E_4), \alpha = 1, \dots, r\}, \quad (2.4.7)$$

так как $Hd(A_\Gamma \Gamma)$ принадлежит множеству $\mathcal{A}_Y$, являющимся модулем неточных форм. Поэтому любой элемент $\mathcal{U}$ может быть отображен на элемент $\mathcal{A}_Y$ с помощью подходящего выбора элемента группы G . Имеем отображение

$$\pi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{A}_Y \mid \Gamma' = (A_\Gamma \Gamma - dA_\Gamma) A_\Gamma^{-1}, \quad (2.4.8)$$

$$A_\Gamma = I + H(A_\Gamma \Gamma).$$

Пусть A_1 и A_2 — элементы G , переводящие Γ_1 и Γ_2 в соответствующие неточные элементы Γ'_1 и Γ'_2 :

$$\Gamma'_1 = (A_1 \Gamma_1 - dA_1) A_1^{-1}, \quad \Gamma'_2 = (A_2 \Gamma_2 - dA_2) A_2^{-1}.$$

Тогда имеем

$$\Gamma_1 = A_1^{-1} (\Gamma'_1 A_1 + dA_1), \quad \Gamma_2 = A_2^{-1} (\Gamma'_2 A_2 + dA_2). \quad (2.4.9)$$

¹⁾ То есть фактически мы имеем дело с расслоением с пространством $\mathcal{U}$, слоем $\mathcal{H}$ и базой $\mathcal{U}/G_Y$. — Прим. ред.

Таким образом, элемент Γ_1 может быть переведен в Γ_2 посредством элемента $V \in G$ тогда и только тогда, когда V удовлетворяет соотношению $\Gamma_2 = (V\Gamma_1 - dV)V^{-1}$, т. е. тогда и только тогда, когда

$$dV = V\Gamma_1 - \Gamma_2 V. \quad (2.4.10)$$

Если мы подставим $V = A_2^{-1}CA_1$ и используем (2.4.9) для исключения Γ_1 и Γ_2 из (2.4.10), то получим следующее необходимое условие:

$$dC = C'\Gamma_1 - \Gamma_2 C. \quad (2.4.11)$$

Так как Γ_1 и Γ_2 являются неточными формами, интегрирование (2.4.11) с использованием оператора гомотопии H дает

$$C = K + H(C'\Gamma_1 - \Gamma_2 C) = K, \quad dK = 0, \quad (2.4.12)$$

где K — константа в G (т. е. K принадлежит G_0). Если этот результат снова подставить в (2.4.11), то получим явные соотношения

$$K'\Gamma_1 = \Gamma_2 K, \quad V = A_2^{-1}KA_1, \quad K \in G_0. \quad (2.4.13)$$

Два элемента $\mathcal{U}$ могут быть отображены друг в друга с помощью элемента из G тогда и только тогда, когда их образы в $\mathcal{A}_V$ являются сопряженными элементами относительно действия группы G_0 . Поэтому $\mathcal{A}_V$ определено однозначно с точностью до сопряженного действия исходной группы G_0 .

Когда элемент Γ из $\mathcal{U}$ отображается на $\mathcal{A}_V$ с помощью некоторого выбранного элемента группы G , он принимает значения в алгебре Ли неточных 1-форм Γ_a . Соответственно Γ_a удовлетворяет условиям

$$\mathcal{L} \lrcorner \Gamma_a = 0, \quad \Gamma_a(X_0^b) = 0.$$

Поэтому указанный процесс порождает набор калибровочных условий — условия неточной калибровки. Следовательно, отображение π из $\mathcal{U}$ на $\mathcal{A}_V$, осуществляемое посредством (2.4.8), можно рассматривать как требование неточной калибровки сечения $\mathcal{U}$. Полученные выше результаты показывают, что условие неточной калибровки оказывается единственным с точностью до сопряженного действия исходной группы G_0 . Соответственно неточная калибровка фиксирует Γ с точностью до сопряженного действия исходной однородной группы G_0 . Этот результат не является неожиданным, так как в противном случае заданная калибровка будет нарушаться при действии исходной однородной группы внутренних симметрий G_0 .

Начиная с этого момента, будем предполагать, что центр в E_4 фиксирован. Обозначим через H_1 и H_2 линейные

операторы гомотопии, отличающиеся выбором центров в E_4 , а через $\mathcal{A}_{Y_1}$ и $\mathcal{A}_{Y_2}$ — соответствующие неточные сечения $\mathcal{U}$, построенные описанным выше способом. Если Γ — производящий элемент $\mathcal{U}$, то

$$A_1 = I + H_1(A_1\Gamma), \quad A_2 = I + H(A_2\Gamma), \quad (2.4.14)$$

причем Γ отображается в соответствующие элементы согласно формулам

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= (A_1\Gamma - dA_1)A_1^{-1}, \quad \Gamma_1 \in \mathcal{A}_{Y_1}, \\ \Gamma_2 &= (A_2\Gamma - dA_2)A_2^{-1}, \quad \Gamma_2 \in \mathcal{A}_{Y_2}. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Тогда исключение общего члена Γ из двух этих уравнений дает

$$\Gamma_2 = (B'\Gamma_1 - dB)B^{-1}, \quad B = A_2A_1^{-1}, \quad B \in G. \quad (2.4.16)$$

Отображение друг в друга сечений $\mathcal{U}$, определенных различным выбором центров операторов гомотопии в E_4 , может быть осуществлено с помощью калибровочной группы G . Следовательно, калибровочная ковариантность теории делает ее нечувствительной к выбору центра.

Последний результат особенно важен с практической точки зрения, поскольку он позволяет нам выбирать центр в E_4 , исходя из соображений максимального упрощения расчетов. Очевидный выбор — взять в качестве центра начало координат, так как в этом случае $X_0^a = 0$. В дальнейшем мы увидим, что в действительности выбор центра соотносится с выбором точки отсчета для полей Янга — Миллса $W_a^a(X^b)$, в то время как $W_a^a(X^b)dX^a \in \mathcal{A}^1(E_4)$ фиксирует отсчет значений таким образом, чтобы в центре все они были равны нулю (напомним, что $\omega \in \mathcal{A}^1(E_4)$, т. е. $\omega(X_0^b) = 0$).

§ 2.5. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВНЕШНИХ ФОРМ

Полная система уравнений для внешних форм играет важную роль в развитии теории дефектов. Можно установить взаимно однозначное соответствие между этой системой и кинематическими уравнениями поля дефектов в твердом теле, которые будут рассмотрены в § 2.7. Таким образом, свойства калибровочных преобразований и представления полной системы уравнений для внешних форм непосредственно приводят к соответствующей информации, касающейся кинематики дефектов в твердом теле.

Совокупность внешних форм $\{\nu, \Gamma, \Sigma, \Theta\}$ с $\nu \in \Lambda_{k,1}^r(E_n)$, $\Gamma \in \Lambda_{k,k}^1(E_n)$, $\Sigma \in \Lambda_{k,1}^{r+1}(E_n)$, $\Theta \in \Lambda_{k,k}^2(E_n)$ образует полную

систему дифференциалов степени r и класса k на звездчатой области $S \subseteq E_n$ тогда и только тогда [3], когда соотношения

$$\begin{aligned} dv &= -\Gamma \wedge v + \Sigma, \\ d\Sigma &= -\Gamma \wedge \Sigma + \Theta \wedge v, \\ d\Gamma &= -\Gamma \wedge \Gamma + \Theta, \\ d\Theta &= \Theta \wedge \Gamma - \Gamma \wedge \Theta \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

удовлетворяются всюду на S (используемые здесь Γ и Θ отличаются знаком от выбранных в [3]). Если v и Γ заданы, то первое из уравнений (2.5.1) служит для определения Σ , а третье — для определения Θ , в то время как второе и четвертое уравнения выполняются тождественно. С другой стороны, если заданы Σ и Θ , то второе и четвертое уравнения (2.5.1) становятся условиями интегрируемости первого и третьего уравнений. В этом смысле система (2.5.1) является полной — все условия интегрируемости определяются подсистемой, содержащейся в самой системе, т. е. система является замкнутой относительно дифференцирования. Если $r = 1$, то уравнения (2.5.1) представляют собой структурные уравнения Картана, в которых Γ играет роль 1-формы связности, Θ — роль 2-формы кривизны, Σ — роль 2-формы кручения, в то время как v обычно соотносят с припаянной 1-формой¹⁾. Здесь мы будем пользоваться этой терминологией, хотя ее обычно используют только при описании главного расслоения, являющегося подрасслоением линейного расслоения реперов.

Как было указано в § 2.2, на звездчатой области S линейный оператор гомотопии H представляет собой оператор, обратный оператору внешнего дифференцирования на модуле неточных дифференциальных форм на S . Это замечание использовано в [3] при «интегрировании» полной системы уравнений для внешних форм, которое приводит к следующему представлению для (2.5.1):

$$v = A \{d\chi + \eta - H(\Gamma_a \wedge d\chi)\}, \quad (2.5.2)$$

$$\Sigma = A \{d\eta + \Gamma_a \wedge \eta + H(d\Gamma_a \wedge d\chi) - \Gamma_a \wedge H(\Gamma_a \wedge d\chi)\}, \quad (2.5.3)$$

$$\Gamma = A\Gamma_a A^{-1} - (dA)A^{-1}, \quad (2.5.4)$$

$$\Theta = A(d\Gamma_a + \Gamma_a \wedge \Gamma_a)A^{-1}, \quad (2.5.5)$$

¹⁾ См. работу [4] и монографию Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964. — Прим. ред.

где $A \in \Lambda_{k,k}^0(E_n)$ — ассоциированная несингулярная ориентированная матрица; $\chi \in \Lambda_{k,1}^{r-1}(E_n)$ — матрица-столбец $(r-1)$ -форм; $\eta \in \mathcal{A}_{k,1}^r$ — матрица-столбец неточных r -форм, а $\Gamma_a \in \mathcal{A}_{k,k}^1$ — квадратная $(k \times k)$ -матрица неточных 1-форм. Кроме того, A является решением линейного матричного интегрального уравнения Римана — Гревса

$$A = I - H(\Gamma A), \quad (2.5.6)$$

а χ , η и Γ_a определяются соотношениями

$$\chi = \chi_0 + H(A^{-1}\nu), \quad (2.5.7)$$

$$\eta = H(A^{-1}\Sigma), \quad (2.5.8)$$

$$\Gamma_a = H(A^{-1}\Theta A). \quad (2.5.9)$$

Ориентированная матрица полной системы внешних форм получается из решения интегрального уравнения Римана — Гревса (2.5.6) и, следовательно, однозначно определяется формой Γ . С другой стороны, здесь существует очевидное сходство между (2.5.4) и (2.4.2), за исключением того, что в (2.4.2) Γ принимает свои значения в алгебре Ли калибровочной группы G . Исходя из этого, предположим, что форма Γ в полной системе внешних форм также принимает значения в алгебре Ли калибровочной группы G . В этом случае решение интегрального уравнения Римана — Гревса (2.5.6) будет определять ориентированную матрицу, принадлежащую G . Предположим, что G действует на ν и Γ согласно следующим правилам:

$$\nu' = A\nu, \quad \Gamma' = (A\Gamma - dA)A^{-1}, \quad A \in G \quad (2.5.10)$$

(ср. (2.3.6) и (2.4.2)). Тогда (2.5.1) означает, что

$$\Sigma' = A\Sigma, \quad \Theta' = A\Theta A^{-1} \quad (2.5.11)$$

(ср. с (2.4.20)). В этих условиях дифференциальная система (2.5.1) ковариантна при действии G (т. е. калибровочно-ковариантна), если выполняются соотношения (2.5.10) и Γ принимает значения в алгебре Ли группы G .

Полная система внешних форм может быть использована в теории, развиваемой в следующей главе, двумя способами. Во-первых, эту систему можно использовать для получения общего представления решений кинематических уравнений поля динамики дефектов. В этом случае связь с калибровочной группой пока отсутствует и значения Γ (а следовательно, и Θ) будут оставаться неопределенными. Во-вторых, можно показать, что конструкция минимальной замены, связанная с основной калибровочной группой упруго деформируемых твердых тел, естественным образом приводит к опре-

делению величин $\mathbf{v}$ и Γ , образующих полную систему внешних дифференциалов, для которой справедливы соотношения (2.5.10), и значения, принимаемые Γ , принадлежат алгебре Ли калибровочной группы. Тогда калибровочная ковариантность дает возможность для дальнейших упрощений и обеспечивает такое представление форм $\mathbf{v}$, Γ , Σ и Θ , которое обобщает отображение $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}_Y$, рассмотренное выше. Данный результат позволяет исследователю применять неточную калибровку. Это существенно упрощает рассмотрение, поскольку использование условия неточности формы Γ позволяет непосредственно отождествить полевые величины и соответствующие характеристики сплошной среды в кинематике дефектов. Читателю следует особенно обратить внимание на соответствие между (2.5.4), (2.5.6) и (2.4.2), (2.4.5): Γ в (2.4.2) соответствует Γ_a в (2.5.4) и, следовательно, A_Γ в (2.4.5) совпадает, как видно из (2.5.7), с матрицей, обратной A .

§ 2.6. ЛАГРАНЖИАН ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ЕГО ЕСТЕСТВЕННАЯ КАЛИБРОВОЧНАЯ ГРУППА

В этом параграфе мы рассматриваем известную систему полей, описывающих твердое тело как классический деформируемый континуум. Поэтому исходным пунктом, на котором все будет основано, является функция Лагранжа для упругого деформируемого континуума.

Обозначим через E_3 трехмерное евклидово пространство, снабженное глобальной декартовой системой координат $\{X^1, X^2, X^3\}$, и будем считать его пространством исходных конфигураций упругих тел. Системой исходных конфигураций упругого тела является дугообразно связный или просто связный набор $\mathcal{B}$ ненулевых мер евклидова объема, содержащийся в звездчатой области S пространства E_3 . Пусть $'E_3$ — отображение E_3 , снабженное глобальной системой координат (x^1, x^2, x^3) . Связанная с этим отображением эволюция состояния упругого тела описывается диффеоморфизмом

$$\chi: \mathcal{B} \times [T_0, T_1] \rightarrow 'E_3 \times [T_0, T_1] \big|_{t=\chi^i(X^A, T)}, T=T,$$

доставляющим функционалу действия

$$\begin{aligned} A[\chi] &= \int_{T_0}^{T_1} \int_{\mathcal{B}} L_0(X^A, T, \chi^i, \partial_A \chi^i, \partial_4 \chi^i) dX^1 \wedge dX^2 \wedge dX^3 \wedge dT = \\ &= \int_{T_0}^{T_1} \int_{\mathcal{B}} L_0(X^A, T, \chi, \partial_A \chi, \partial_4 \chi) \mu \wedge dT \end{aligned}$$

стационарное значение по отношению ко всем диффеоморфизмам, удовлетворяющим тем же условиям Дирихле, причем лагранжиан L_0 удовлетворяет условиям инвариантности

$$L_0(X^A, T + a, \mathbf{A}\chi + \mathbf{b}, \mathbf{A}\partial_B\chi, \mathbf{A}\partial_4\chi) = L_0(X^A, T, \chi, \partial_B\chi, \partial_4\chi)$$

для всех $a \in \mathbb{R}$, всех $\mathbf{b}$, таких, что $d\mathbf{b} = 0$, и всех $\mathbf{A}$, для которых $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, $d\mathbf{A} = 0$. Согласно теореме Нётер [40], кинетика упругого тела получается прямо из формулировки вариационного принципа и условий инвариантности и ведет к классической теории нелинейной среды. С другой стороны, кинематика однозначно определяется диффеоморфизмом χ и следующими из него свойствами непрерывности и дифференцируемости. В самом деле, если мы положим $b^i = d\chi^i = \partial_a\chi^i dX^a$, то $db^i = 0$ и $b^1 \wedge b^2 \wedge b^3|_{T=T^*} \neq 0$. Верно и обратное: $db^i = 0$ означает, что $b^i = dHb^i$ (см. § 2.2) и, следовательно, $b^i = d\chi^i$, где $\chi^i = Hb^i + k^i$,

$$b^1 \wedge b^2 \wedge b^3|_{T=T^*} = \partial(\chi^1, \chi^2, \chi^3)/\partial(X^1, X^2, X^3)|_{T=T^*} \neq 0.$$

Поэтому существование диффеоморфизма χ обуславливает существование трех 1-форм $\{b^1, b^2, b^3\}$, таких, что $db^i = 0$, $b^1 \wedge b^2 \wedge b^3|_{T=T^*} \neq 0$, и в свою очередь обуславливается существованием этих трех форм.

Лагранжиан, описывающий теорию упругости, имеет вид

$$L_0 = \mathcal{T} - \Psi(C_{AB}), \quad (2.6.1)$$

где $\mathcal{T}$ — кинетическая энергия,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \rho d_4\chi^i \delta_{ij} d_4\chi^j, \quad (2.6.2)$$

а $\Psi(C_{AB})$ — потенциальная энергия, являющаяся функцией тензора деформаций Коши, компоненты которого задаются выражением

$$C_{AB} = \partial_A\chi^i \delta_{ij} \partial_B\chi^j. \quad (2.6.3)$$

Если мы определим компоненты 4-мерного тензора $\mathbf{C}$ как

$$C_{ab} = \partial_a\chi^i \delta_{ij} \partial_b\chi^j, \quad C_{ab} = C_{ba}, \quad (2.6.4)$$

то лагранжиан L_0 будет лишь функцией C_{ab} , т. е.

$$L_0 = L_0(C_{ab}) = \mathcal{T}(C_{44}) - \Psi(C_{AB}). \quad (2.6.5)$$

Исходная группа G_0 для теории упругости представляет собой полупрямое произведение $G_0 = \text{SO}(3)_0 \triangleright T(3)_0$ соответствующей вещественной ортогональной группы $\text{SO}(3)_0$ и группы трансляций $T(3)_0$. Покажем инвариантность (2.6.5) относительно этой группы. Действие группы G_0 на вектор состояния χ осуществляется согласно формулам

$$\chi' = \mathbf{A}\chi + \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \text{SO}(3)_0, \quad \mathbf{b} \in T(3)_0, \quad (2.6.6)$$

где A — ортогональная матрица констант и b — вектор-столбец констант. Выражение (2.6.4) может быть переписано следующим эквивалентным способом:

$$C_{ab} = \partial_a \chi^T \partial_b \chi. \quad (2.6.7)$$

Следовательно, при действии однородной группы $G_0 = SO(3)_0 \supset T(3)_0$, а именно при преобразованиях (2.6.6), в которых $AA^T = I$, $dA = 0$ и $db = 0$, компоненты тензора C преобразуются согласно правилу

$$'C_{ab} = \partial_a ' \chi^T \partial_b ' \chi = \partial_a \chi^T A^T A \partial_b \chi = C_{ab}. \quad (2.6.8)$$

Поэтому лагранжиан (2.6.5) инвариантен относительно однородного действия группы G_0 :

$$L_0('C_{ab}) = L_0(C_{ab}). \quad (2.6.9)$$

Таким образом, G_0 является инвариантной группой для лагранжиана L_0 . Каждая из однородных подгрупп $SO(3)_0$ и $T(3)_0$ группы G_0 также является инвариантной группой для лагранжиана L_0 .

§ 2.7. КИНЕМАТИКА ДЕФЕКТОВ

Физика упругого тела с дефектами (дислокациями, дисклинациями, вакансиями, включениями и т. д.) описывается с помощью рассмотрения таких текущих конфигураций тела, которые не могут быть определены из исходной конфигурации только при помощи диффеоморфизма χ . Простейшим путем их введения является замена условий $db^i = 0$, $b^1 \wedge b^2 \wedge b^3|_{\Gamma=T^*} \neq 0$ соотношениями

$$dB^i \neq 0, \quad B^1 \wedge B^2 \wedge B^3|_{\Gamma=T^*} \neq 0.$$

Если мы запишем $B^i = B_a^i dX^a$, то получим $B^i = dNB^i + HdB^i$, откуда

$$B^i = d\chi^i + HdB^i, \quad \chi^i = NB^i + k^i.$$

Таким образом, независимые 1-формы B^i приводят к появлению полностью интегрируемой части $d\chi^i$ и неточной (неинтегрируемой) части HdB^i , которая определяется 2-формой dB^i . Ясно, что часть HdB^i характеризует внутренние степени свободы конфигурации материала, т. е. наличие дефектов препятствует существованию диффеоморфизма χ , который однозначно определяет текущую конфигурацию тела.

Здесь возникают два ключевых вопроса. Во-первых, имеет место переход от точных независимых 1-форм b^i к

неточным, но по-прежнему независимым 1-формам B^i . Это не является делом вкуса; скорее такой переход является неизбежной необходимостью, если потребовать неоднородность действия группы $SO(3)_0 \triangleright T(3)_0$ с одновременным сохранением инвариантности функции Лагранжа. Используемые при этом рассуждения основываются на конструкции Янга — Миллса, рассмотренной в § 2.3. Второй вопрос связан с осмыслением и интерпретацией текущего состояния тела, которое не может быть получено из исходной конфигурации с помощью гладкого отображения. Последний вопрос будет обсуждаться в § 3.7 в терминах наблюдаемых, которые мы связываем со средой, содержащей дефекты.

Изначально ясно, что замена классической кинематики упругой среды $db^i = 0$, $b^1 \wedge b^2 \wedge b^3|_{T=T^*} \neq 0$, кинематикой среды с дефектами $dB^i \neq 0$, $B^1 \wedge B^2 \wedge B^3|_{T=T^*} \neq 0$, влечет за собой радикальное изменение привычных физических представлений. Однако это не приводит здесь к существенным трудностям для простых конструкций полной системы внешних форм, построенных из 1-форм B^i , подобных тем, которые были описаны в § 2.5 (т. е. $B^i = v^i$ в (2.5.1)). В этом случае мы приходим к структурным уравнениям Картана, естественным образом связанным с 1-формами B^i . Тогда 1-формы связности, 2-формы кривизны и кручения оказываются естественно связанными с состояниями тел, которые характеризуются соответствующими 1-формами B^i . Однако становление механики материалов с дефектами проходило путем, существенно отличным от пути, рассмотренного Картаном и описанного выше. Развитие кинематики проходило по аналогии с теорией упругости и теорией пластичности. Такой путь привел к физически естественным определениям тензорных полей первого и второго рангов, таких, как полей дислокационных и дисклинационных плотностей и потоков, спина, кручения, дисторсии и скорости дисторсии [10, 17, 18]. В настоящем параграфе представлен полный набор этих уравнений вместе с соответствующей потоковой формой уравнений баланса импульса для материалов с дефектами. Согласованность этих двух подходов будет проанализирована в § 3.1, где мы покажем, что кинематические уравнения динамики дефектов можно взаимно однозначно соотносить со структурными уравнениями Картана.

Уравнения непрерывности динамики дефектов, записанные через трехмерные внешние формы, получены в [5]:

$$\partial_4 \alpha^i = -\dot{d}J^i - S^i, \quad \partial_4 Q^i = -\dot{d}S^i, \quad d\alpha^i = Q^i, \quad \dot{d}Q^i = 0, \quad (2.7.1)$$

где $\bar{d} = d|_{T=\text{const}}$,

$$\begin{aligned}\alpha^i &= \alpha^{Ai} \mu_A - 2\text{-формы плотности дислокаций,} \\ J^i &= J_A^i dX^A - 1\text{-формы потока дислокаций,} \\ S^i &= S^{Ai} \mu_A - 2\text{-формы потока дисклинаций,} \\ Q^i &= q^i \mu - 3\text{-формы плотности дисклинаций,}\end{aligned}\tag{2.7.2}$$

а через ∂_4 обозначена частная производная по времени. Уравнения (2.7.1) можно записать через компоненты, определенные выражениями (2.7.2). В этом случае мы получим систему уравнений в явном виде

$$\begin{aligned}\partial_4 \alpha^{Ai} &= -e^{ABC} \partial_B J_C^i - S^{Ai}, \\ \partial_A \alpha^{Ai} &= q^i, \\ \partial_4 q^i &= -\partial_A S^{Ai},\end{aligned}\tag{2.7.3}$$

причем уравнение $\bar{d}Q^i = 0$ удовлетворяется тождественно, так как $\bar{d}Q^i \in \Lambda^4(E_3)$, а произвольная 4-форма на трехмерном пространстве тождественно обращается в нуль.

Кинематические полевые уравнения дефектов являются первыми интегралами системы (2.7.1) [5]. Они имеют вид

$$\partial_4 k^i = \bar{d}\omega^i - S^i, \quad \bar{d}k^i = Q^i, \quad \partial_4 \beta^i = \bar{d}V^i - J^i - \omega^i, \quad \bar{d}\beta^i = \alpha^i - k^i,\tag{2.7.4}$$

где

$$\begin{aligned}k^i &= k^{Ai} \mu_A - 2\text{-форма изгиба — кручения,} \\ \omega^i &= \omega_A^i dX^A - 1\text{-форма спина,} \\ \beta^i &= \beta_A^i dX^A - 1\text{-форма дисторсии,} \\ V^i &= 0\text{-форма скорости.}\end{aligned}\tag{2.7.5}$$

Уравнения (2.7.4) описывают внутреннее состояние тела с дефектами. Если их разрешить в базисе элементов $\{\mu_A, dX^A\}$, то мы получим, возможно, более привычное компонентное представление [17, 18]:

$$\begin{aligned}\partial_4 k^{Ai} &= -S^{Ai} + e^{ABC} \partial_B \omega_C^i, \quad \partial_A k^{Ai} = q^i, \\ \partial_4 \beta_A^i &= \partial_A V^i - J_A^i - \omega_A^i, \quad e^{ABC} \partial_B \beta_C^i = \alpha^{Ai} - k^{Ai}.\end{aligned}\tag{2.7.6}$$

Приведенная выше запись кинематических уравнений дефектов базировалась на том допущении, что основное пространство представляет собой декартово произведение $E_3 \times \mathbb{R}$ исходного трехмерного евклидова пространства E_3 и независимой временной координаты $T \in \mathbb{R}$. Хотя подобная

запись вполне удовлетворительна, некоторые внутренние структурные соотношения и аналогии с другими теориями проявляются лишь при правильной четырехмерной пространственно-временной записи основных уравнений (см. приложение 4).

Учитывая результаты по исчислению внешних форм, полученные в § 2.1, мы можем переписать уравнения (2.7.1) и (2.7.4) через переменные, определенные в четырехмерном пространстве E_4 с координатным покрытием $\{X^a\} = \{X^A, T\}$. При этом система уравнений непрерывности динамики дефектов (2.7.1) удовлетворяется тогда и только тогда [5], когда 3-формы дисклинаций

$$\Omega^i = -S^i \wedge dT + Q^i = -S^{Ai} \mu_A \wedge dT + q^i \mu \quad (2.7.7)$$

и 2-формы дислокаций

$$\mathcal{D}^i = J^i \wedge dT + \alpha^i = J_A^i dX^A \wedge dT + \alpha^{Ai} \mu_A \quad (2.7.8)$$

удовлетворяют уравнениям для внешних дифференциальных форм

$$d\Omega^i = 0, \quad d\mathcal{D}^i = \Omega^i \quad (2.7.9)$$

на области E_4 , в которой происходила пространственно-временная эволюция состояния системы. Уравнения непрерывности (2.7.9) допускают систему первых интегралов

$$\mathcal{D}^i = dB^i + \mathcal{K}^i, \quad (2.7.10)$$

где первый член может быть выражен через 1-форму скорости — дисторсии

$$B^i = V^i dT + \beta^i = V^i dT + \beta_A^i dX^A = B_a^i dX^a, \quad (2.7.11)$$

а второй через 2-форму спина — кручения

$$\mathcal{K}^i = -\omega^i \wedge dT + k^i = -\omega_A^i dX^A \wedge dT + k^{Ai} \mu_A. \quad (2.7.12)$$

Теория не является полной до тех пор, пока система уравнений поля не будет дополнена соответствующей формулировкой закона баланса импульса. Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{T}(B_A^i)$ — кинетическая энергия, а $\Psi = \Psi(B_A^i)$ — потенциальная энергия системы. Исторически закон сохранения импульса был получен следующим образом [10]: зависимость классической потенциальной энергии от градиента деформаций заменялась аналогичной зависимостью от дисторсии. Замена градиентов деформаций полем дисторсии в этом смысле является произвольной. Такая операция была бы возможна, если можно было бы обосновать допущение, состоящее в том, что интегрируемые градиенты смещений $dx^i = \partial_A x^i dX^A$ могут быть

заменены новыми величинами, дисторсиями, которые, вообще говоря, не интегрируемы при наличии дефектов. «Обоснованием» такого допущения является идея, заключающаяся в том, что «пластическая дисторсия» B_A^{Pi} не вызывает отклика напряжения и $\partial_A \chi^i = B_A^i + B_A^{Pi}$. Очевидно, что подобное допущение требует введения определенного соответствия между теориями дефектов и пластичности, способ установления которого пока еще не ясен. В развиваемой в следующей главе теории будет показано, что соотношения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(B_A^i)$ и $\Psi = \Psi(B_A^i)$ непосредственно следуют из фундаментальных принципов, а не из неочевидных ссылок на теорию пластичности.

Продолжим теперь наше рассмотрение, определяя 3-формы Z_i посредством соотношения

$$Z_i = \frac{\partial(\mathcal{T} - \Psi)}{\partial B_A^i} \pi_A = - \frac{\partial \Psi}{\partial B_A^i} \pi_A + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial B_A^i} \pi_4. \quad (2.7.13)$$

Стандартные вариационные определения отождествляют

$$p_i = \partial \mathcal{T} / \partial B_A^i \quad (2.7.14)$$

с компонентами импульса, а

$$\sigma_i^A = \partial \Psi / \partial B_A^i \quad (2.7.15)$$

с компонентами тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа. Тогда уравнения баланса импульса примут вид

$$dZ_i = (\partial_A p_i - \partial_A \sigma_i^A) \pi = 0, \quad (2.7.16)$$

3-формы Z_i могут быть записаны следующим образом:

$$Z_i = - \sigma_i^A \pi_A + p_i \pi_4 = - \sigma_i^A \mu_A \wedge dT - p_i \mu, \quad (2.7.17)$$

и соотношение (2.7.16) следует непосредственно из (2.1.9) и (2.1.10).

Для дальнейшего удобства мы перепишем уравнения (2.7.9), (2.7.10), (2.7.16) в матричном виде

$$d\Omega = 0, \quad \Omega = dD = dK, \quad (2.7.18)$$

$$D = dB + K, \quad (2.7.19)$$

$$dZ = 0, \quad (2.7.20)$$

где $B \in \Lambda_{3,1}^1(E_4)$ — вектор-столбец с элементами, представляющими собой 1-формы B^1, B^2, B^3 , $K, D \in \Lambda_{3,1}^2(E_4)$ — векторы-столбцы с элементами, являющимися 2-формами $\{\mathcal{K}^i\}$, $\{\mathcal{D}^i\}$, определенными на E_4 , $\Omega \in \Lambda_{3,1}^3(E_4)$ — вектор-столбец 3-форм $\{\Omega^i\}$ на E_4 и $Z \in \Lambda_{1,3}^3(E_4)$ — матрица-строка 3-форм $\{Z_i\}$.

Калибровочная теория дефектов

§ 3.1. ОБРАТИМОСТЬ И ЗАДАЧИ КОШИ В ДИНАМИКЕ ДЕФЕКТОВ

Континуальная теория дефектов, кратко изложенная в § 2.7, существенно отличается от общепринятой формулировки континуальных теорий. Обычные континуальные теории твердого тела требуют непрерывности и дифференцируемости отображения, переводящего исходное состояние в текущее. Последнее означает, что $d\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{K} = 0$, $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{\Omega} = 0$ и во всех случаях мы имеем $\mathbf{B} = d\chi$, где $\chi = \chi$ определяет текущее состояние посредством отображающей функции χ . При наличии дефектов эти привычные уравнения заменяются на (2.7.18) и (2.7.19):

$$d\mathbf{\Omega} = 0, \quad \mathbf{\Omega} = d\mathbf{D} = d\mathbf{K}, \quad \mathbf{D} = d\mathbf{B} + \mathbf{K}.$$

Это приводит к тому, что для описания кинематики состояний с дефектами помимо χ необходимо наличие также других ее характеристик. Поэтому первой задачей, которую необходимо решить, является задача получения такого набора переменных, который бы полностью описывал состояния с дефектами. Одна такая система известна. При этом построения как необходимой конструктивной теории, так и получаемой на ее основе кинетики становятся разумными и корректно поставленными задачами.

Рассмотрим полную систему уравнений для внешних форм в виде, заданном соотношениями (2.5.1), и положим $r = 1$, $k = 3$ и $n = 4$. Начиная с этого момента, мы отождествим следующие величины:

$$\mathbf{B} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{\Sigma}, \quad (3.1.1)$$

где $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ представляют собой матрицы 1-форм дисторсии и 2-форм дислокаций, определенные в § 2.7. В силу уравнений (2.5.1), структурных уравнений Картана и уравнений (2.7.18), (2.7.19) выбор матриц 3-форм дисклинаций в виде

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Theta} \wedge \mathbf{v} - \mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Theta} \wedge \mathbf{B} - \mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{D} \quad (3.1.2)$$

и матриц 2-форм изгиба — кручения в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{B} \quad (3.1.3)$$

тождественно удовлетворяет уравнениям динамики дефектов (2.7.18), (2.7.19). Далее, в силу того что уравнения ди-

динамики дефектов удовлетворяются тождественно при произвольном выборе величин Γ и Θ , сами эти величины пока еще не определены. Таким образом, если мы сможем найти общее представление системы (2.5.1), то сможем решить также и кинематические уравнения динамики дефектов. Из (2.5.2), (2.5.3) и (3.1.1) непосредственно следует, что соотношения (3.1.1) эквивалентны следующим представлениям:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} [d\chi + \eta - H(\Gamma_a \wedge d\chi)], \quad (3.1.4)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} [d\eta + \Gamma_a \wedge \eta + H(d\Gamma_a \wedge d\chi) - \Gamma_a \wedge H(\Gamma_a \wedge d\chi)]. \quad (3.1.5)$$

Проводя простейшие вычисления и используя (3.1.2), (3.1.3), получаем

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} (\Gamma_a - \mathbf{A}^{-1} d\mathbf{A}) \wedge [d\chi + \eta - H(\Gamma_a \wedge d\chi)] \quad (3.1.6)$$

и

$$\begin{aligned} \Omega = \mathbf{A} \{ & (d\Gamma_a + \Gamma_a \wedge \Gamma_a) \wedge [d\chi + \eta - H(\Gamma_a \wedge d\chi)] - \\ & - (\Gamma_a - \mathbf{A}^{-1} d\mathbf{A}) \wedge [d\eta + \Gamma_a \wedge \eta + H(d\Gamma_a \wedge d\chi) - \\ & - \Gamma_a \wedge H(\Gamma_a \wedge d\chi)] \}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Записанные в виде $\{\eta^i\}$ и $\{\Gamma_j^i\}$ матрицы η и Γ_a соответственно представляют собой 1-формы и могут быть выражены в базисе четырехмерного векторного пространства $\Lambda^1(E_4)$ следующим образом:

$$\eta^i = \eta_b^i dX^b, \quad \Gamma_j^i = \Gamma_{bj}^i dX^b. \quad (3.1.8)$$

Из (2.5.8), (2.5.9) вытекает, что η^i и Γ_j^i являются неточными 1-формами и, следовательно [см. (2.2.5д)], 12 + 36 функций η_b^i и Γ_{bj}^i должны удовлетворять 3 + 9 алгебраическим условиям

$$X^b \eta_b^i = 0, \quad X^b \Gamma_{bj}^i = 0, \quad (X_0^b = 0). \quad (3.1.9)$$

Уравнения (3.1.4) — (3.1.7) дают явное представление всех параметров динамики дефектов через 3 + (12 — 3) + (36 — 9) + 9 функций χ^i , η_b^i , Γ_{bj}^i и A_j^i . Таким образом, задача решения уравнений динамики дефектов эквивалентна задаче определения этих 48 функций.

Допустим на время, что мы могли бы положить матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ тождественно равной единичной матрице $\mathbf{I}$. Это привело бы к сокращению числа неизвестных функций до 39. Однако, так как теперь уравнения динамики дефектов (2.7.18), (2.7.19) удовлетворяются тождественно, мы можем оставить только три уравнения баланса импульса (2.7.20),

что, очевидно, недостаточно для определения 39 неизвестных $(\chi^i, \eta^i, \Gamma_{bi}^i)$.

Основная задача может быть упрощена дальше, если мы ограничим свое внимание материалами, свободными от дисклинаций. В этом случае мы имеем $\Omega = 0$, $K = 0$, и, так как мы положили $A = I$, соотношения (3.1.4) — (3.1.7) указывают, что, в том случае когда величина B не является точной (т. е. полностью интегрируемой), мы должны аналогичным образом положить равной нулю и форму Γ_a . Следовательно, для материалов, не имеющих дисклинаций, соотношения (3.1.4), (3.1.5) дают

$$B = d\chi + \eta, \quad D = d\eta. \quad (3.1.10)$$

Теперь легко показать, что так называемая обратная задача является корректно поставленной. Эта обратная задача формулируется так: определить матрицу 1-форм дисторсий и скоростей B при заданной плотности дислокаций и матрицу потоков 2-форм D , удовлетворяющую уравнению непрерывности $dD = 0$.

Матрица η представляет собой матрицу неточных 1-форм, а оператор гомотопии H обращает оператор внешнего дифференцирования d на модуле неточных форм [см. (2.2.5)]. Следовательно, применение оператора гомотопии H к обеим частям (3.1.10)₂ позволяет определить η , и соотношения (3.1.10) принимают вид

$$\eta = H(D), \quad B = d\chi + H(D). \quad (3.1.11)$$

Оставшиеся три неизвестные функции χ^i могут быть теперь определены из трех уравнений баланса импульса $dZ_i = 0$. Здесь, конечно, используется общепринятое основное допущение динамики дислокаций, определяющее связь между импульсом p_i и напряжением σ_i^A , записанными через элементы матрицы B , дисторсии β_i^A и скорости V^i (напомним, что, согласно (2.7.16), (2.7.17), $Z_i = -\sigma_i^A \pi_A + p_i \pi_4$ и что $dZ_i = 0$ является уравнением баланса импульса $\partial_{4p^i} - \partial_A \sigma_i^A = 0$). Явные решения некоторых статических обратных задач приводятся в литературе [10, 20, 18]. В случае статических задач наиболее часто используемым методом получения явного вида решения является метод функций Грина, применяемый к уравнению равновесия $\partial_A \sigma_i^A = 0$.

Теперь должно быть ясно, что, хотя обратная задача является корректно поставленной, задача Коши в динамике дефектов таковой не является. Последнее является простым отражением того факта, что количество уравнений для определения всех неизвестных функций, входящих в выражения

(3.1.4) — (3.1.7), недостаточно. Можно подумать, что добавление уравнения баланса энергии и применение стандартных приемов неравновесной термодинамики могут привести к корректно поставленной задаче Коши (приложение 4). Хотя подобный подход приносит частичный успех (см. [5]), он также требует введения или температуры, или энтропии и диссипативной функции. Уравнение для энергии будет служить для определения энтропии или температуры, но это не приводит к реальному упрощению, так как определение диссипативной функции термодинамических сил эквивалентно задаче обращения корректно поставленной задачи Коши. К сожалению, нет прямого указания на способ выбора диссипативной функции для материалов с дефектами.

Нашей целью в данной работе является получение системы уравнений, которая была бы достаточна для определения всех необходимых переменных из условий Коши.

§ 3.2. ИСХОДНАЯ КОНФИГУРАЦИЯ; ПЕРЕСМОТР

Вернемся к уравнениям (3.1.4) — (3.1.7). Они будут исходной точкой нашего рассмотрения, так как мы знаем, что уравнения динамики дефектов удовлетворяются тождественно, как только мы выразим $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{\Omega}$ через χ , η , Γ_a и $\mathbf{A}$. Как уже упоминалось в предыдущем параграфе, для определения χ , Γ_a , η и $\mathbf{A}$ требуется найти 48 функций. Предположим для начала, что 39 из них, определяющие χ , η и Γ_a , заданы. При этом предположении остается определить 9 функций, составляющих матрицу $\mathbf{A}$.

Концепция исходной конфигурации является фундаментальным аспектом классической механики сплошных сред, хотя существенность ее свойств часто замалчивается. Исходная конфигурация необходима и при введении количественной меры для правильно определенных относительной и абсолютной деформаций, а также для тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа, определенного относительно исходной конфигурации как мера на поверхностях. Исходная конфигурация в классической теории упругости понимается как конфигурация, в которой отсутствуют деформации и напряжения. Однако при наличии внутренних степеней свободы, как, например, в динамике дефектов, необходимо осуществить корректный пересмотр основной концепции исходной конфигурации.

Для согласованности с классической механикой сплошных сред мы потребуем, чтобы исходная конфигурация тела с внутренними степенями свободы удовлетворяла следующим условиям:

- а) отсутствие деформаций;
- б) отсутствие напряжений.

К этим условиям мы добавим еще только одно требование:

- в) отсутствие дефектов.

Это последнее требование необходимо для сохранения концепции деформации.

Тело без дефектов характеризуется интегральным откликом, $x^i = \chi^i(X^a)$, где $\{x^i\}$ — то значение координат материальной точки в текущей конфигурации, которое принимает точка, имевшая в исходной конфигурации координаты $\{X^a\}$. Эта ситуация описывается в теории материалов с дефектами с помощью следующих условий:

$$\mathbf{B} = d\chi, \quad \mathbf{D} = \mathbf{K} = \mathbf{0}, \quad \Omega = \mathbf{0}.$$

Сравнивая последние выражения с (3.1.4), мы можем заключить, что состояние, в котором дефекты отсутствуют, соответствует соотношениям

$$\Gamma_a = \mathbf{0}, \quad \eta = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Действительно, при подстановке $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ уравнение (3.1.4) при отсутствии дефектов дает

$$B^i(X^a) = A_j^i(X^a) d\chi^j(X^a), \quad (3.2.1)$$

а 1-формы $\{B^i\}$ будут определяться диффеоморфизмом

$$\chi: \mathbf{B} \times [T_0, T_1] \rightarrow {}'E_3 \times [T_0, T_1] | x^i = \chi^i(X^a, T), \quad T = T, \quad (3.2.2)$$

отображающим исходную конфигурацию тела в текущую. Хотя уравнения (3.2.1) в соответствии с теоремой Фробениуса [3, 4] означают полную интегрируемость 1-форм B^i , этого еще не достаточно для однозначного соответствия между кинематическими условиями $dB^i = 0$ для тела без дефектов и соответствующим диффеоморфизмом (3.2.2). Размышления над этими фактами приводят к выводу, что выбор матрицы $\mathbf{A}$ эквивалентен выбору представления для полевых величин B^i , $\mathcal{D}^i$, $\mathcal{K}^i$, Ω^i , так как величины Γ_a и η все еще остаются неопределенными.

Представление, которое будет использоваться в дальнейшем, задается соотношениями (3.1.4) — (3.1.7) с $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Представление, задаваемое соотношением $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, приводит к представлению для B^i

$$B^i = d\chi^i = dx^i, \quad (3.2.3)$$

имеющему место при отсутствии дефектов. Соответственно, 1-формы дисторсии — скорости в бездефектном теле образуют глобально параллельный базис 1-форм в пространстве $'E_3$ текущей конфигурации. Это позволяет нам связать

диффеоморфизм χ с произвольным состоянием дефектного тела, полагая $\chi^i(X^a) = HB^i + k^i$ (т. е. используя точную часть B^i): мы отождествляем функции $\chi^i(X^a)$ с функциями деформации полностью интегрируемой части отклика.

В следующем параграфе будет показано, что выбор $A = I$ эквивалентен требованию записи элементов матрицы связности Γ , которая входит в структурные уравнения Картана, в виде неточных 1-форм. Это напоминает рассуждение, проведенное в § 2.4, согласно которому произвольная форма из Γ в $\mathcal{U}$ может быть отображена в элемент $\mathcal{A}_\gamma$ с помощью действия калибровочной группы. В дальнейшем мы надеемся на появление новых аргументов (§ 3.6) в пользу того, что Γ принимает значения в алгебре Ли калибровочной группы $G = SO(3) \supset T(3)$ и что $B (=v)$ и Γ преобразуются при действии группы G согласно (2.5.10). В силу того что структурные уравнения Картана (2.5.1) являются калибровочно-ковариантными, мы можем заменить Γ на Γ_a без потери общности, выбирая соответствующую неточную калибровку. Как только мы найдем решения с $A = I$, мы сможем всегда осуществлять калибровочное преобразование, действуя элементом $A \in G$ и тем самым получая решения с различными калибровками. Следует, однако, отметить, что матрицы Γ_a , η и χ не будут иметь одного и того же физического смысла в различных калибровках. Ввиду этого только при неточной калибровке диффеоморфизм χ может быть отождествлен с функцией деформации, связанной с текущим состоянием, т. е. $B = A\{d\chi + \eta - H(\Gamma_a \wedge d\chi)\}$ с $dA \neq 0$ не может иметь $Ad\chi$ в качестве точной части.

Наконец, отметим, что любая ориентированная матрица A удовлетворяет интегральному уравнению Римана — Гревса $A = I - H(\Gamma A)$ и, следовательно,

$$A(X_0^a) = I,$$

так как оператор гомотопии H , действующий на оставшуюся часть, дает нуль. Соответственно матрица $A_j^i(X^a)$, которая входит в (3.2.1), постоянна тогда и только тогда, когда $A = I$, а компоненты поля B^i глобально параллельны в текущей конфигурации при отсутствии дефектов тогда и только тогда, когда $A = I$.

§ 3.3. МАТРИЦА СВЯЗНОСТИ

Согласно определению внешнего дифференцирования произведения дифференциальных форм, имеем

$$d(\Gamma_a \chi) = d\Gamma_a \chi - \Gamma_a \wedge d\chi. \quad (3.3.1)$$

Элементами матрицы Γ_a являются неточные 1-формы [см. (2.5.9)]. И так как набор $\mathcal{A}(E_4)$ всех неточных форм представляет собой модуль, произведение $\Gamma_a \chi$ также является матрицей неточных форм. Оператор гомотопии H обращает оператор дифференцирования d на модуле неточных форм [см. (2.2.5)], так что соотношение (3.3.1) влечет соотношение

$$\Gamma_a \chi = H(d\Gamma_a \chi) - H(\Gamma_a \wedge d\chi),$$

или

$$H(\Gamma_a \wedge d\chi) = H(d\Gamma_a \chi) - \Gamma_a \chi. \quad (3.3.2)$$

Тогда с учетом (3.3.2) и того, что мы условились считать $A=I$, система (3.1.4)–(3.1.7) может быть записана следующим образом:

$$B = d\chi + \Gamma_a \chi + \eta - H(d\Gamma_a \chi), \quad (3.3.3)$$

$$D = d\eta + H(d\Gamma_a \wedge d\chi) + \Gamma_a \wedge [\eta - H(d\Gamma_a \chi) + \Gamma_a \chi], \quad (3.3.4)$$

$$K = \Gamma_a \wedge [d\chi + \Gamma_a \chi + \eta - H(d\Gamma_a \chi)], \quad (3.3.5)$$

$$\Omega = (d\Gamma_a + \Gamma_a \wedge \Gamma_a) \wedge [d\chi + \Gamma_a \chi + \eta - H(d\Gamma_a \chi)] - \\ - \Gamma_a \wedge \{d\eta + H(d\Gamma_a \wedge d\chi) + \Gamma_a \wedge [\eta + \Gamma_a \chi - H(d\Gamma_a \chi)]\}. \quad (3.3.6)$$

Отметим, что матрица Γ_a неточных 1-форм встречается в B только в сочетании с вектором состояния χ и действует на χ слева (напомним, что индекс a обозначает неточную часть, а не индекс, по которому проводится суммирование). Если мы взглянем на первые два члена в правой части (3.3.3), то они напомнят нам выражение для абсолютной производной по времени $d/dt + \omega \times$ во вращающейся системе координат. Следовательно, естественно ожидать, что Γ_a относится к внутренним вращательным степеням свободы. Справедливость подобного предположения будет показана в следующем параграфе. В этом смысле все другие соотношения, которым подчиняются величины Γ_a , произвольны: они уже не могут быть связаны с каким-либо частным физическим аспектом динамики дефектов.

Прежде чем обратиться к определению величин Γ_a , нам следует убедиться в справедливости допущения, что Γ_a является матрицей *неточных* 1-форм. Прежде всего отметим, что представление (3.3.3)–(3.3.6) решения структурных уравнений Картана включает Γ_a . В то же время матрица Γ , которая входит в структурные уравнения Картана (2.3.1), представляет собой матрицу 1-форм, которые не обязательно являются неточными. Однако из представления (3.3.3) сле-

дует, что $d\chi$ является точной и, следовательно, полностью интегрируемой частью $\mathbf{B}$, в то время как остальные члены, $\Gamma_a \chi + \eta - H(d\Gamma_a \chi)$, составляют неточную часть $\mathbf{B}$. Это разложение $\mathbf{B}$ на точную и неточную части единственно [см. (2.2.5)]. Кроме того, в [5] было показано, что аддитивная 45-параметрическая калибровочная группа динамики дефектов всегда может быть использована для получения явного разложения различных членов, составляющих поля $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{Q}$. Далее ориентированная матрица $\mathbf{A}$, связанная с Γ , удовлетворяет интегральному уравнению Римана — Гревса $\mathbf{A} = \mathbf{I} - H(\Gamma \mathbf{A})$ [см. (2.5.6)]. Если $\Gamma = \Gamma_a$ — матрица неточных форм, то произведение $\Gamma_a \mathbf{A}$ также матрица неточных форм и, следовательно, принадлежит $\ker H$. Таким образом, задание $\mathbf{A}$ в виде $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ является дополнительным требованием. Действительно, условие $\Gamma = \Gamma_a$ является необходимым для того, чтобы $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Обратив существенное внимание на этот факт, мы будем опускать индекс a в матрице связности неточных 1-форм. Каждый раз, когда матрица Γ встретится нам в дальнейшем, мы будем понимать ее как элемент модуля $\mathcal{A}_{3,3}^1(E_4)$ матриц неточных 1-форм.

§ 3.4. КОНЦЕПЦИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ЗАМЕНЫ ДЛЯ ГРУППЫ $SO(3)$

В § 2.3 мы дали краткий обзор идеи минимальной замены Янга — Миллса, первоначально сформулированной для полупростой группы Ли внутренних симметрий. С другой стороны, в § 2.6 мы показали, что основной группой теории упругости является группа $G_0 = SO(3)_0 \supset T(3)_0$. Так как $SO(3)_0$ является подгруппой полупростой группы G_0 , существует возможность применения концепции минимальной замены Янга — Миллса непосредственно к подгруппе $SO(3)_0$. Читатель мог бы заметить, что этого делать нельзя, так как будет нарушена однородность действия группы $SO(3)_0$. Если не делать минимальной замены, то может нарушиться инвариантность лагранжиана теории упругости при действии группы G . Однако именно инвариантность лагранжиана при действии группы G приводит к тому, что окончательные уравнения поля, согласно теореме Нётер, однозначно связаны с законами сохранения импульса и момента импульса. Соответственно если только осуществить построение минимальной замены, то из уравнений поля будет по-прежнему следовать существование законов сохранения импульса и момента импульса, хотя однородность действия группы G_0

нарушится. Иначе говоря, нарушение однородности действия группы G_0 без проведения минимальной замены будет приводить к уравнениям поля, которые не будут описывать основных механических свойств среды.

Обозначим через γ_α матрицы констант, определяющих базис представления алгебры Ли группы $SO(3)_0$ (3×3)-матрицами. При нарушении однородности действия группы $SO(3)_0$ (т. е. при замене $'\chi(X^b) = A\chi(X^a)$ на $'\chi(X^b) = A(X^b)\chi(X^b)$) мы должны ввести матрицы 1-форм компенсирующих полей Янга — Миллса Γ_y , принимающие значения в алгебре Ли группы $SO(3)$. Это позволяет нам выразить Γ_y в виде

$$\Gamma_y = W^a \gamma_a, \quad W^a \in \Lambda^1(E_4). \quad (3.4.1)$$

Соответственно (2.3.7), (2.3.10) и (2.3.26) показывают, что минимальная замена, связанная с нарушением однородности действия $SO(3)_0$, задается соотношением

$$d\chi \rightarrow D\chi = d\chi + \Gamma_y \chi, \quad (3.4.2)$$

так как матричное представление $SO(3)$ действует на вектор состояния χ слева (см. (2.3.27)).

В динамике дефектов матрица градиентов деформаций $d\chi$ заменяется матрицей дисторсии B . Согласно (3.4.2), минимальная замена для $SO(3)$ дает

$$B = D\chi = d\chi + \Gamma_y \chi. \quad (3.4.3)$$

Сравнение представлений (3.3.3) с (3.4.3) показывает, что мы добились явного отождествления

$$\Gamma = \Gamma_y = W^a \gamma_a \quad (3.4.4)$$

и поэтому матрица η удовлетворяет соотношению

$$\eta = H(d\Gamma\chi) = H((d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma)\chi) = H(\Theta\chi). \quad (3.4.5)$$

Компоненты матрицы Γ неточных 1-форм могут быть записаны следующим образом:

$$\Gamma_j^i = W^a \gamma_{aj}^i = W_b^a \gamma_{aj}^i dX^b = \Gamma_{bj}^i dX^b, \quad W^a \in \mathcal{A}^1(E_4). \quad (3.4.6)$$

Следовательно, 27 неизвестных функций Γ_{bj}^i (напомним, что существует 36 неизвестных Γ_{bj}^i , но они должны удовлетворять 9 алгебраическим условиям $X^b \Gamma_{bj}^i = 0$) сводятся к 12 переменным W_a^i . Однако три 1-формы W^a являются неточными и поэтому функции W_b^a должны удовлетворять трем алгебраическим условиям (для $X_0^a = 0$)

$$X^b W_b^a = 0, \quad (3.4.7)$$

что приводит к сокращению числа неизвестных до 9.

Теперь с помощью (3.4.5) и (2.5.1) систему (3.3.3) — (3.3.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= d\chi + \Gamma\chi = D\chi, \\ \mathbf{D} &= (d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma)\chi = \Theta\chi, \\ \mathbf{K} &= \Gamma \wedge (d\chi + \Gamma\chi) = \Gamma \wedge D\chi, \\ \Omega &= d(\Gamma \wedge D\chi) \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

(напомним, что Θ — матрица 2-форм кривизны, связанная с Γ).

Состояния, описываемые уравнениями (3.4.8), являются состояниями, порожденными дисклинациями, так как матрица связности Γ ответственна за нарушение однородности действия группы вращения. Это станет очевидным, если мы перепишем первое уравнение (3.4.8) следующим образом:

$$\mathbf{B} = d\chi + W^a \chi_a \chi,$$

где $d\chi$ описывает интегрируемую часть дисторсии, в то время как $W^a \chi_a \chi$ описывает неинтегрируемое локальное вращение (внутренний спин), действующее на мгновенный вектор состояния.

Второе уравнение (3.4.8) показывает, что состояние, характеризующееся неоднородным действием группы SO(3), не является чисто дисклинационным состоянием, так как $\mathbf{D} \neq 0$. Напомним, что матрица $\mathbf{D}$ описывает дислокации, что непосредственно следует из (2.7.8):

$$\mathcal{D}^i = \mathcal{J}^i \wedge dT + \alpha^i,$$

где J^i суть 1-формы потока дислокаций, а α^i суть 2-формы плотности дислокаций. Действительно, из (3.4.8) следует, что дисклинации всегда порождают дислокации. При обсуждении удобно называть порождение дислокаций дисклинациями *дисклинационным источником дислокаций*. Из проведенного выше элементарного рассуждения можно сделать вывод, что существование чисто дисклинационного материала невозможно: в тех случаях, когда имеются дисклинации, с необходимостью имеются и дислокации. В то же время, как будет видно из дальнейшего, существование чисто дислокационной среды возможно. В самом деле, чисто дислокационное состояние это именно то состояние, которое обычно и рассматривается в литературе.

Читатель может заметить, что дисклинационный источник дислокаций имеет особенно простой вид:

$$\mathbf{D} = \Theta\chi,$$

поскольку 2-формы дислокаций появляются здесь из-за изменения связности группы $SO(3)$, действующей как линейный оператор на вектор состояния χ . В силу того что $\Theta = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$ и Γ — матрица неточных форм, имеем

$$D = (d\Gamma)\chi + \Gamma \wedge \Gamma\chi,$$

причем ввиду свойств модуля неточных форм элементы матрицы $\Gamma \wedge \Gamma\chi$ также суть неточные формы. Отсюда следует, что $\Gamma \wedge \Gamma\chi$ принадлежит $\ker H$ и, таким образом (см. (3.4.5)),

$$HD = H(d\Gamma\chi) = \eta.$$

В связи с этим отметим также, что соотношения $\Theta = F^a \gamma_a$, $F^a = dW^a + C^a_{\beta\delta} W^\beta \wedge W^\delta / 2$ дают

$$D = F^a \gamma_a \chi$$

и поэтому 2-формы дисклинационных источников дислокаций могут рассматриваться как линейные комбинации трех эффективных векторов состояния $\gamma_a \chi$ с коэффициентами в виде 2-форм F^a .

Мы уже подчеркивали важность условий неточности элементов W^a в матрице $\Gamma = W^a \gamma_a$. Если бы это было не так, мы могли бы, используя (2.2.56), записать соотношение

$$B = d[\chi + H(\Gamma\chi)] + Hd(\Gamma\chi),$$

в котором матрица χ не представляла бы уже полное интегрируемое смещение и все отождествления привели бы к путанице. Внимательный читатель мог бы отметить в этой связи, что в теории Янга — Миллса не делается предположения о неточности компенсирующих 1-форм Янга — Миллса W^a . Однако это обстоятельство не создает реальных затруднений, так как в § 2.4 было показано, что всегда существует такой выбор калибровки, при котором любые компенсирующие 1-формы Янга — Миллса образуют систему неточных 1-форм.

§ 3.5. КОНЦЕПЦИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ЗАМЕНЫ ДЛЯ ГРУППЫ $SO(3) \triangleright T(3)$

Начиная с этого раздела, обсуждение будет базироваться на описанной в § 2.3 теории минимальной связи. А именно, калибровочная группа выбиралась в виде полупростой группы $SO(3)$, а матрица связности Γ появлялась при нарушении однородности действия группы вращений. Мы знаем, однако, что динамика дефектов возникла из теории упругости,

в которой исходной группой является полупрямое произведение группы вращений $SO(3)_0$ и группы трансляций $T(3)_0$, т. е. $G_0 = SO(3)_0 \supset T(3)_0$. Группа G_0 не является полупростой и не имеет правильного матричного представления на пространстве интегрируемых смещений χ . Следовательно, нам требуется нетривиальное расширение теории Янга — Миллса. Важно также отметить, что действие группы $SO(3)_0$ совершенно отличается от действия группы $T(3)_0$: элементы $SO(3)_0$ действуют на χ слева мультипликативно, в то время как элементы $T(3)_0$ действуют аддитивно:

$$\chi' = A\chi + b, \quad A \in SO(3)_0, \quad b \in T(3)_0.$$

В предыдущем параграфе минимальная замена (3.4.2) рассматривалась только с точки зрения нарушения однородности действия $SO(3)_0$ и поэтому ничего не было сказано о нарушении однородности действия группы трансляций $T(3)_0$. Однако из физических соображений очевидно, что дислокации являются дефектами трансляций и могут рассматриваться как отклик на нарушение однородности действия группы трансляций. Поэтому вполне естественно исправить минимальную замену (3.4.2), сделанную только для $SO(3)$, и написать

$$d\chi \rightarrow d\chi + \Gamma\chi + \Phi. \quad (3.5.1)$$

Здесь $\Phi \in \Lambda_{3,1}^1(E_4)$ — матрица-столбец 1-форм, компенсирующий нарушение однородности действия $T(3)_0$ и, следовательно, описывающий дислокации. Тогда окончательное выражение для дисторсии примет вид

$$B = D\chi + \Phi = d\chi + \Gamma\chi + \Phi. \quad (3.5.2)$$

Дисторсия B состоит из трех вкладов: 1) вклада от полного интегрируемого отклика, $d\chi$; 2) вклада, связанного с неоднородностью действия группы вращения, $\Gamma\chi = W^\alpha \gamma_\alpha \chi$; 3) вклада из-за нарушения однородности действия группы трансляций, Φ . Сравнение (3.5.2) с (3.3.3) показывает, что первоначальное выражение для η (3.4.5) должно быть заменено на

$$\eta = H(d\Gamma\chi) + \Phi = H((d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma)\chi + d\Phi + \Gamma \wedge \Phi). \quad (3.5.3)$$

Отметим, что вектор Φ с необходимостью является элементом подмодуля $\mathcal{A}_{3,1}^1(E_4)$ неточных 1-форм. В противном случае мы могли бы написать [см. (2.2.56)]

$$\Phi = dH\phi + H d\phi$$

и тогда матрица χ перестала бы представлять полное интегрируемое смещение. В действительности выполнение требования неточности не сопряжено с возникновением реальных

трудностей, так как всегда существует аддитивная группа, с помощью которой любой данный вектор Φ может быть заменен на неточный [5].

При отсутствии дисклинаций минимальная замена (3.5.1) сводится к замене

$$d\chi \rightarrow d\chi + \Phi = B. \quad (3.5.4)$$

Из (3.4.19) и (3.1.1) получим

$$\Sigma = D = d\Phi = dB. \quad (3.5.5)$$

В этом случае Φ однозначно определяет картаново кручение Σ . Таким образом, оказалось, что наши результаты совпадают с отраженным в литературе [10, 18, 31] описанием дислокаций при помощи картанова кручения.

Выражение (3.5.2) для дисторсии является отправной точкой теории, развиваемой в данной работе. Оно дает полное описание как дислокаций, так и дисклинаций. Ввиду важности этого результата было бы удобно иметь его независимый вывод. В следующем параграфе мы займемся именно этим вопросом; точнее, осуществим непосредственное построение минимальной замены для группы $G = SO(3) \supset T(3)$ с помощью теории групп.

§ 3.6. НЕЗАВИСИМОЕ ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Вернемся ненадолго к § 2.3. При введении операторов D_b и компенсирующих полей Γ_b , преобразующихся под действием неоднородной группы G согласно соотношениям

$$\begin{aligned} (D_b \psi) &= A(D_b \psi), \\ \Gamma_b &= A \Gamma_b A^{-1} - (\partial_b A) A^{-1}, \quad A \in G, \end{aligned}$$

предполагалось, что для группы G имеет место правильное матричное представление, действующее слева на вектор состояния ψ . В § 3.4 при построении минимальной замены все оказалось просто, так как исходная группа являлась полупростой группой вращения $SO(3)$, которая действовала слева на вектор χ как матричная группа. Теперь же обсуждение, проведенное в § 2.3, показывает, что важным оказывается не свойство полупростоты группы, а существование правильного матричного представления, действующего слева на вектор состояния.

Полная группа теории упругости $G_0 = SO(3)_0 \supset T(3)_0$ и, следовательно, динамики дефектов не имеет правильного матричного представления в пространстве векторов состоя-

ния χ . Следовательно, нам необходимо найти новое пространство векторов состояний, такое, в котором группа G_0 будет допускать правильное матричное представление, действующее слева. Как только мы это сделаем, нам будет просто провести построение минимальной замены. С этой целью мы рассмотрим векторное пространство V_4 и аффинную подсистему V в V_4 , содержащую все векторы вида

$$\hat{\chi} = \left\{ \begin{matrix} \chi \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \chi^1 \\ \chi^2 \\ \chi^3 \\ 1 \end{matrix} \right\}. \quad (3.6.1)$$

Из (3.6.1) очевидно, что каждый вектор состояния χ в V_3 однозначно определяет $\hat{\chi}$ в $V \subset V_4$, причем видно и обратное. Отметим, однако, что система V не является векторным подпространством V_4 , ибо она не замкнута относительно операций на векторном пространстве. Тем не менее действие (4×4) -матриц на элементы V является хорошо определенной операцией, так как каждый элемент V принадлежит V_4 .

Обозначим через $\mathcal{M}$ набор всех (4×4) -матриц вида [14]

$$M = \begin{pmatrix} A & \{b\} \\ [0] & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6.2)$$

Здесь A — ортогональная (3×3) -матрица, $\{b\}$ — матрица-столбец размерности 3 и $[0]$ — нулевая матрица-строка размерности 3. Поскольку

$$\begin{pmatrix} A & \{b\} \\ [0] & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} \chi \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} A\chi + b \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \chi' \\ 1 \end{matrix} \right\}, \quad (3.6.3)$$

любой элемент $\mathcal{M}$ отображает V в V и реализует действие группы $SO(3) \supset T(3)$ на χ посредством ее действия на соответствующий элемент $\hat{\chi} \in V$. Если M_1 и M_2 принадлежат $\mathcal{M}$ и

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & \{b_1\} \\ [0] & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} A_2 & \{b_2\} \\ [0] & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.6.4)$$

то

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} A_1 A_2 & A_1 \{b_2\} + \{b_1\} \\ [0] & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{т. е. } M_1 M_2 \in \mathcal{M}. \quad (3.6.5)$$

Следовательно, набор $\mathcal{M}$ образует матричную группу Ли и (3.6.3) показывает, что указанная матричная группа образует правильное матричное представление $SO(3) \supset T(3)$, действующее слева на элементы аффинной системы V . Мы

достигли желаемого результата и теперь просто запишем матричную группу G для системы $\mathcal{M}$.

Инфинитезимальными генераторами матричной группы G являются

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_\alpha & \{0\} \\ [0] & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad \begin{pmatrix} 0 & \{t_i\} \\ [0] & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.6.6)$$

Здесь $\mathbf{v}_\alpha$ — инфинитезимальные генерирующие (3×3) -матрицы группы вращения $SO(3)$, а $t_i = [\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}]^T$ — инфинитезимальные генерирующие матрицы группы трансляций $T(3)$.

Теперь, имея правильное матричное представление группы G , мы можем поступить точно так же, как в § 2.3. Ковариантная внешняя производная в расширенном пространстве V_4 определяется для всех элементов V соотношением

$$\hat{D}\hat{\chi} = d\hat{\chi} + \hat{\Gamma}\hat{\chi}, \quad (3.6.7)$$

где $\hat{\Gamma}$ есть (4×4) -матрица 1-форм связности, принимающих значения в алгебре Ли группы G . Следовательно, $\hat{\Gamma}$ задается выражением

$$\hat{\Gamma} = W^\alpha \begin{pmatrix} \mathbf{v}_\alpha & \{0\} \\ [0] & 0 \end{pmatrix} + \varphi^i \begin{pmatrix} 0 & \{t_i\} \\ [0] & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6.8)$$

Здесь W^α и φ^i суть 1-формы в пространстве E_4 . Используя (3.6.1) и (3.6.8) для выражения различных величин, входящих в (3.6.7), получим

$$\hat{D}\hat{\chi} = \begin{Bmatrix} d\chi + W^\alpha \mathbf{v}_\alpha \chi + \varphi^i t_i \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D\chi + \varphi^i t_i \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.6.9)$$

Так же естественно вводятся 1-формы значений матрицы-столбца

$$\Phi = \varphi^i t_i. \quad (3.6.10)$$

Равенство (3.6.9) показывает, что конструкция минимальной замены теперь берется в виде

$$d\chi \rightarrow D\chi + \Phi = d\chi + \Gamma\chi + \Phi; \quad (3.6.11)$$

это в точности совпадает с полученным нами в предыдущем параграфе, но теперь мы уверены в справедливости этой конструкции благодаря независимому теоретико-групповому выводу.

Мы знаем, что матрица $\hat{\Gamma}$ преобразуется под действием элемента группы G , ассоциированного с матрицей M , в соответствии с правилом (см. (2.3.9))

$$\hat{\Gamma}' = M\hat{\Gamma}M^{-1} - dMM^{-1}. \quad (3.6.12)$$

Теперь (3.6.8) и (3.6.12) дают

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma} &= \begin{pmatrix} \Gamma & \varphi \\ [0] & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} A & b \\ [0] & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma & \varphi \\ [0] & 0 \end{pmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \begin{pmatrix} dA & db \\ [0] & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}b \\ [0] & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A\Gamma A^{-1} - dAA^{-1} & A\varphi - db - (A\Gamma - dA)A^{-1}b \\ [0] & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Таким образом мы получаем уже известный результат

$$\Gamma = A\Gamma A^{-1} - dAA^{-1} \quad (3.6.13)$$

и, кроме того, закон преобразования вектора φ :

$$\varphi = A\varphi - db - (A\Gamma A^{-1} - dAA^{-1})b. \quad (3.6.14)$$

Из (3.6.3), (3.6.13), (3.6.14) очевидно, что 1-формы дисторсии B преобразуются в соответствии с

$$B = d'\chi + \varphi + \Gamma'\chi = AB \quad (3.6.15)$$

и тем самым являются ковариантными величинами относительно действия группы G .

Именно теоретико-групповой вывод позволяет нам ввести полное описание нарушений однородности действия как группы вращения $SO(3)_0$, так и группы трансляций $T(3)_0$. Так как дисторсии появляются именно из-за нарушения однородности действия исходной группы G_0 , соображения, по минимальной замене дают нам следующую специфическую замену градиентов смещения в теории упругости:

$$d\chi \rightarrow B = D\chi + \varphi = d\chi + \Gamma\chi + \varphi. \quad (3.6.16)$$

В частности, мы видим, что нарушение однородности мультипликативного действия слева группы G на вектор состояния $\hat{\chi}$, реализованного с помощью матрицы связности $\hat{\Gamma}$, естественным образом приводит к сумме двух членов. Первый обусловлен мультипликативным действием слева матрицы связности Γ группы $SO(3)$ на вектор состояния χ , в то время как второй появляется в результате аддитивного действия группы трансляций $T(3)$, реализованного с помощью 1-форм φ . Следовательно, член $\Gamma\chi$ представляет неинтегрируемые внутренние вращательные степени свободы, т. е. дискликации, а член φ — неинтегрируемые внутренние поступательные степени свободы, т. е. дислокации. Таким образом, пройдя по кругу, мы получили полное совпадение с результатами предыдущего параграфа, основанными на более физических соображениях.

Из рассмотрения аффинной системы V в V_4 вытекает, что $\hat{D}\hat{\chi}$ и $\hat{\Gamma}$ преобразуются под действием группы G согласно соотношениям

$$'D'\hat{\chi} = MD\hat{\chi}, \quad '\Gamma = (M\hat{\Gamma} - dM)M^{-1}, \quad M \in G,$$

причем $\hat{D}\hat{\chi} = \{\mathbf{B}^T, 0\}^T$ и $\hat{\Gamma}$ принимают свои значения в алгебре Ли группы G . Соответственно результаты, полученные в конце § 2.5, показывают, что структурные уравнения Картана, порождаемые $\hat{D}\hat{\chi}$ и $\hat{\Gamma}$, являются калибровочно-ковариантными. Следовательно, мы можем наложить условия неточной калибровки путем подходящего выбора калибровочного преобразования. Во всех случаях, как показывает (3.6.8), 1-формы W^a и φ^i могут быть взяты неточными без потери общности.

Далее — и это более важно — в конце § 2.4 было показано, что выбор центра построения линейного оператора гомотопии можно проделать с помощью подходящего калибровочного преобразования. Таким образом, калибровочная ковариантность структурных уравнений Картана, получаемых из $\hat{D}\hat{\chi}$ и $\hat{\Gamma}$, позволяет нам выбирать любой удобный центр в E_4 без существенного изменения калибровочно-ковариантных величин, таких, как $\hat{D}\hat{\chi}$, $\hat{\Sigma}$ и $\hat{\Theta}$. Как только новый центр выбран, дальнейшие калибровочные преобразования можно использовать для получения неточной калибровки относительно нового линейного оператора гомотопии, ассоциированного с новым центром: для построения калибровочной теории дефектов можно пользоваться любым центром в E_4 . Это не означает, что значения полевых величин в выбранных точках не будут изменяться при переходе от одного центра к другому, так как очевидно, что они должны изменяться в соответствии с действием калибровочной группы. Однако такие изменения для нас несущественны, поскольку и теория, и уравнения поля будут оставаться калибровочно-ковариантными.

§ 3.7. ПОЛЕВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И НАБЛЮДАЕМЫЕ

Учитывая условия минимальной замены (3.5.1) и выбор η согласно (3.5.3), мы перепишем уравнения (3.4.8) через 27 неизвестных функций χ^i , W_a^a , φ_a^i :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= d\chi + \Gamma\chi + \varphi = D\chi + \varphi, \\ \mathbf{D} &= \Theta\chi + D\varphi, \\ \mathbf{K} &= \Gamma \wedge (D\chi + \varphi), \\ \Omega &= d(\Theta\chi + D\varphi). \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

Функции W_a^α и φ_a^i удовлетворяют алгебраическим условиям

$$X^\alpha W_a^\alpha = 0, \quad X^\alpha \varphi_a^i = 0, \quad (3.7.2)$$

так как на 1-формы W^α и φ^i наложено требование неточности. Уравнения (3.7.1) можно также переписать через элементы соответствующих матриц следующим образом:

$$\begin{aligned} B^i &= dX^i + \Gamma_j^i \chi^j + \varphi^i = d\chi^i + W_a^i \gamma_{aj}^i \chi^j + \varphi^i, \\ \mathcal{D}^i &= \Theta_j^i \chi^j + D\varphi^i = F_a^i \gamma_{aj}^i \chi^j + D\varphi^i = \\ &= (dW^a + \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^a W^\beta \wedge W^\gamma) \gamma_{aj}^i \chi^j + D\varphi^i, \\ \mathcal{X}^i &= \Gamma_j^i \wedge (D\chi^j + \varphi^j) = W_a^i \gamma_{aj}^i \wedge (D\chi^j + \varphi^j), \\ \Omega^i &= d\mathcal{D}^i. \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Отметим неразделимость «вращательных» и «трансляционных» дислокаций. А именно в выражении

$$\mathbf{B} = d\chi + (\Gamma\chi + \varphi)$$

для дисторсии вектор φ характеризует трансляционные дислокации, в то время как наличие дисклинаций, описываемых членом $\Gamma\chi$, порождает так называемые вращательные дислокации (дисклинационные источники дислокаций; см. § 3.4). Элементами квадратной матрицы Γ и вектора-столбца φ , а значит, и их суммы $\Gamma\chi + \varphi$, являются 1-формы. С помощью (2.2.5), (2.5.1) и (3.1.1) получим

$$\Gamma\chi + \varphi = \mathbf{B}_a = H d\mathbf{B} = H(\mathbf{D} - \Gamma \wedge \mathbf{B}). \quad (3.7.4)$$

Однако из $\mathbf{B}$ невозможно отдельно определить $\Gamma\chi$ и φ .

Параметры динамики дефектов, а именно дисторсии β_A^i , скорости V^i , плотности дислокаций α^{Ai} , поток дислокаций J_A^i , спин ω_A^i , изгиб — кручение k^{Ai} , плотность дисклинаций q^i , поток дисклинаций S^{Ai} явно определяются через функции χ^i , φ_a^i , W_a^α . Действительно, используя (2.7.8), (2.7.11) и (3.7.3), мы можем написать

$$\beta_A^i = \partial_A \chi^i + \gamma_{aj}^i \chi^j W_A^\alpha + \varphi_A^i, \quad V^i = \partial_4 \chi^i + \gamma_{aj}^i \chi^j W_4^\alpha + \varphi_4^i, \quad (3.7.5a)$$

$$\begin{aligned} J_A^i &= \gamma_{aj}^i [\gamma_{\alpha\beta}^a W_A^\alpha \varphi_4^j - W_4^\alpha \varphi_A^j + \chi^j (\partial_A W_4^\alpha - \partial_4 W_A^\alpha + C_{\beta\gamma}^a W_A^\beta W_4^\gamma)] + \\ &+ \partial_A \varphi_4^i - \partial_4 \varphi_A^i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^{Ai} &= \varepsilon^{ABC} \{ \partial_B \varphi_C^i - \partial_C \varphi_B^i + \gamma_{aj}^i [W_B^\alpha \varphi_C^j - \\ &- W_C^\alpha \varphi_B^j + \chi^j (\partial_B W_C^\alpha - \partial_C W_B^\alpha + C_{\beta\gamma}^a W_B^\beta W_C^\gamma)] \}. \end{aligned} \quad (3.7.5b)$$

и т. д., получая выражения, включающие дисклинационные переменные. Однако если $W_a^\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$, $a = 1, 2, 3, 4$, т. е. $\Gamma = 0$, то (3.7.1) означает, что $K = 0$ и $\Omega = 0$, и мы получаем уравнения динамики дислокаций, а именно

$$B = d\chi + \varphi, \quad D = d\varphi, \quad K = 0, \quad \Omega = 0. \quad (3.7.6)$$

Теперь нетрудно получить из (3.7.5) выражения для дислокационных переменных:

$$\begin{aligned} \beta_A^i &= \partial_A \chi^i + \varphi_A^i, \\ V^i &= \partial_4 \chi^i + \varphi_4^i, \\ J_A^i &= \partial_A \varphi_4^i - \partial_4 \varphi_A^i, \\ \alpha^{Ai} &= e^{ABC} (\partial_B \varphi_C^i - \partial_C \varphi_B^i). \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

В этом случае все определяется 15 функциями φ_a^i , χ^i , 12 из которых независимы [см. (3.7.2)]. Однако в дальнейшем мы будем искать все 27 функций φ_a^i , χ^i , W_a^α , входящих в теорию, а именно будем решать задачу, включающую и дислокации, и дисклинации. Прежде чем перейти к вариационным аспектам теории минимальной связи Янга — Миллса для полной группы $G = SO(3) \supset T(3)$, хотелось бы добавить несколько соображений о наблюдаемых.

Основными наблюдаемыми в динамике дефектов являются вектор Бюргерса для замкнутых кривых и вектор Франка, который строится для замкнутых двумерных поверхностей. В теории бездисклинационных материалов плотность дислокаций определяется вектором Бюргерса $\{b^i\}$. Однако в полной теории (т. е. при наличии дисклинаций) важную роль играет также вектор Франка $\{F^i\}$.

Пусть S_3 — произвольная трехмерная область материального тела с границей ∂S_3 — замкнутой двумерной поверхностью в E_3 . Вектор Франка, связанный с ∂S_3 , определяется следующим образом [12]:

$$F^i(\partial S_3) = \int_{\partial S_3} \alpha^i = \int_{S_3} d\alpha^i. \quad (3.7.8)$$

Вектор Бюргерса, связанный с замкнутой кривой $\partial S_2 \subset E_3$, задается выражением [12]:

$$b^i(\partial S_2) = \int_{\partial S_2} H_3(\alpha^i), \quad (3.7.9)$$

где S_2 — двумерная поверхность и через H_3 обозначен оператор гомотопии в E_3 (т. е. при $T = \text{const}$). Как следует из

(2.7.8), на гиперповерхности $T = \text{const}$ выполняется условие

$$\alpha^i = \mathcal{D}^i|_{T=\text{const}}. \quad (3.7.10)$$

Тогда из (3.7.3), (3.7.10), теоремы Стокса и того факта, что $\partial\partial \equiv 0$, мы получим выражение для вектора Франка через матрицу кривизны Θ и матрицу связности Γ :

$$F^i(\partial S_3) = \int_{\partial S_3} (\Theta_j^i \chi^j) \Big|_{T=\text{const}} + \int_{\partial S_3} (\Gamma_j^i \wedge \varphi^j) \Big|_{T=\text{const}}. \quad (3.7.11)$$

Так как элементы матриц Γ и φ суть неточные 1-формы, соотношения (2.2.5), (3.7.3), (3.7.10) показывают, что мы можем записать явное выражение для вектора Бюргерса:

$$b^i(\partial S_2) = \int_{\partial S_2} \varphi^i \Big|_{T=\text{const}} + \int_{\partial S_2} H_3(d\Gamma_j^i \chi^j) \Big|_{T=\text{const}}. \quad (3.7.12)$$

Для бездисклинационного материала, т. е. для чисто дислокационных состояний, $W^\alpha = 0$, что означает

$$F^i(\partial S_3) = 0 \quad \forall \partial S_3, \\ b^i(\partial S_2) = \int_{\partial S_2} \varphi^i \Big|_{T=\text{const}} = \int_{S_2} d\varphi^i \Big|_{T=\text{const}} \quad \forall \partial S_2.$$

Такое состояние возникает только вследствие нарушения однородности группы трансляций $T(3)$ и поэтому характеризуется «трансляционными» дислокациями, описываемыми полями φ^i . Однако, как только появляются дисклинации, вектор Бюргерса задается выражением (3.7.12). Второй член появляется в правой части (3.7.12) благодаря наличию дисклинаций. Ранее мы упоминали [см. § 3.4], что дисклинации порождают «вращательные» дислокации и их наличие непосредственно подтверждается полным выражением для вектора Бюргерса. Аналогичная ситуация возникает и в выражении (3.7.11) для вектора Франка. Конечно, в чисто дислокационных материалах вектор Франка обращается в нуль, и нет необходимости обсуждать этот случай. Однако для материалов с дисклинациями вектор Франка отличен от нуля. Первый член в правой части (3.7.11) отражает эффекты чистого вращения и определяется матрицей кривизны, действующей на вектор состояния. Второй член появляется из-за взаимодействия между трансляционными дислокациями и дисклинациями.

Член $d\chi^i$ в выражении

$$B^i = d\chi^i + W^\alpha \gamma_{\alpha j}^i \chi^j + \varphi^i \quad (3.7.13)$$

для 1-форм скорости — дисторсии не дает вклада ни в вектор Бюргерса $b^i(\partial S_2)$ для 1-кривых, ни в вектор Франка $F^i(\partial S_3)$ для 2-кривых. С другой стороны, функции $\chi^i(X^F, T)$, как неоднократно указывалось, характеризуют конфигурацию в момент времени T через координаты (X^F) исходной конфигурации. Теперь мы обоснуем эту интерпретацию с помощью непосредственного изучения.

Рассмотрим линию

$$\eta: [0, 1] \rightarrow E_4 \mid \bar{X}^A = \lambda X^A, \bar{T} = \lambda T, 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (3.7.14)$$

соединяющую точку $P_0(0, 0, 0, 0)$ с точкой $P_1(X^1, X^2, X^3, T)$. Легко видеть, что отображение η индуцирует обратимые соотношения

$$\eta^* d\bar{X}^A = X^A d\lambda, \quad \eta^* d\bar{T} = T d\lambda \quad (3.7.15)$$

1-форм на $[0, 1]$ для каждой $P_1(X^1, X^2, X^3, T)$ в E_4 . Поэтому если мы определим величины $x^i(X^a)$ как интегралы по пути

$$x^i(X^a) = \int_{0, 1} \eta^* B^i, \quad (3.7.16)$$

то

$$x^i(X^F, T) = \int_0^1 \{ \partial_a \chi^i + W_a^a \gamma_{aj}^i \chi^j + \Phi_a^i \} (\lambda X^F, \lambda T) X^a d\lambda. \quad (3.7.17)$$

Интегрирование первого члена тривиально и, следовательно,

$$x^i(X^F, T) = \chi^i(X^F, T) - \chi^i(0^F, 0) + \xi^i, \quad (3.7.18)$$

где

$$\xi^i = \int_0^1 X^a \{ \Phi_a^i + W_a^a \gamma_{aj}^i \chi^j \} (\lambda X^F, \lambda T) d\lambda. \quad (3.7.19)$$

Однако $X^a = \lambda X^a \cdot 1/\lambda = X^a(\lambda X^F, \lambda T) \cdot 1/\lambda$ и, таким образом, (3.7.19) переходит в

$$\xi^i = \int_0^1 \{ X^a \Phi_a^i + X^a W_a^a \gamma_{aj}^i \chi^j \} (\lambda X^F, \lambda T) \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (3.7.20)$$

Поэтому если 1-формы (Φ^i, W^a) удовлетворяют условиям неточной калибровки $X^a \Phi_a^i = 0$, $X^a W_a^a = 0$ для всех точек в E_4 , то они будут удовлетворять им в точках $(\lambda X^F, \lambda T)$ для всех $\lambda \in [0, 1]$ и мы получим $\xi^i = 0$.

Следовательно, (3.7.18) дает

$$x^i(X^a) = \chi^i(X^a) - \chi^i(0^a), \quad (3.7.21)$$

т. е. отображение в текущую конфигурацию получается из исходной конфигурации с помощью интегрирования 1-форм дисторсии вдоль линии.

В случае бездефектных материалов

$$x^i(X^a) = \chi^i(X^a) - \chi^i(0^a) = \int_{P_0}^{P_1} B^i = \int_{P_0}^{P_1} d\chi^i$$

для любого пути, соединяющего P_0 с P_1 , так как в этом случае $dB^i = 0$. При наличии дефектов единственным отличием будет то, что мы ограничены линиями (3.7.14) и путь, соединяющий точки P_0 и P_1 , не произволен. Однако с точки зрения макроскопической термодинамики линии (3.7.14) представляют абсолютно линейные процессы и, следовательно, предпочтительнее произвольных путей с произвольными параметрами. Действительно, эти линии являются естественным обобщением «виртуальных квазистатических процессов», которые рассматриваются при сведении уравнения сохранения энергии к первому закону термодинамики. В силу изложенного выше условия неточной калибровки $X^a \varphi_a^i = 0$, $X^a W_a^i = 0$ оказываются связанными с виртуальными квазистатическими процессами, так как и те и другие являются необходимыми и достаточными условиями получения оценок (3.7.21) из определения $x^i(X^a)$ (3.7.16) как интегралов по пути от 1-форм дисторсии при виртуальных квазистатических процессах. С другой стороны, если условия неточной калибровки не удовлетворяются, то, используя определение линейного оператора гомотопии H и (3.7.19), можно показать, что

$$\xi^i = H(\varphi^i + W^a \gamma_{aj}^i \chi^j). \quad (3.7.22)$$

Тогда из (3.7.18) непосредственно следует, что

$$x^i(X^a) = \chi^i(X^a) - \chi^i(0^a) + H(\varphi^i + W^a \gamma_{aj}^i \chi^j)(X^a), \quad (3.7.23)$$

т. е. в этом случае функции $\chi^i(X^a)$ представляют собой только «частный набор» переменных. Следовательно, *однозначное отображение в текущую конфигурацию существует при любом выборе калибровочных условий*. В случае использования неточной калибровки частный набор переменных $\chi^i(X^a)$ однозначно характеризует текущее состояние, но не наоборот.

§ 3.8. ПОСТРОЕНИЕ ЛАГРАНЖИАНА

Теория минимальной связи Янга — Миллса предполагает существование лагранжиана (см. § 2.3). Поэтому мы приступаем к построению лагранжиана, описывающего динамику

дефектов. Отправным пунктом является лагранжиан L_0 , описывающий некоторые известные поля и инвариантный относительно однородного действия исходной группы. Для наших целей естественно исходить из теории упругости с лагранжианом

$$L_0 = \mathcal{T} - \Psi(C_{AB}),$$

который инвариантен при однородном действии группы $G_0 = SO(3)_0 \triangleright T(3)_0$ (см. § 2.6). Запишем функцию L_0 для рассматриваемого здесь класса материалов в виде

$$L_0 = \frac{1}{2} \rho_0 \partial_4 \chi^i \delta_{ij} \partial_4 \chi^j - \frac{1}{8} [\lambda (e_{AB} \delta^{AB})^2 + 2\mu e_{AB} \delta^{AC} \delta^{BD} e_{CD}], \quad (3.8.1)$$

где e_{AB} — компоненты «инженерной» относительной деформации:

$$e_{AB} = C_{AB} - \delta_{AB} = \delta_A \chi^i \delta_{ij} \partial_B \chi^j - \delta_{AB}, \quad (3.8.2)$$

λ и μ — постоянные Ламе, а ρ_0 — массовая плотность вещества в исходной конфигурации (которую для удобства положим постоянной). При нарушении однородности действия группы G_0 вводятся новые компенсирующие поля W_a^i, φ_b^i . В соответствии с концепцией минимальной замены (3.5.1) и теорией, развитой в § 2.3 и 3.5, выражения (3.8.1) и (3.8.2) заменяются следующими:

$$L_0 = \frac{1}{2} \rho_0 B_A^i \delta_{ij} B_A^j - \frac{1}{8} [\lambda (E_{AB} \delta^{AB})^2 + 2\mu E_{AB} \delta^{AC} \delta^{BD} E_{CD}] \quad (3.8.3)$$

и

$$E_{AB} = B_A^i \delta_{ij} B_B^j - \delta_{AB}, \quad (3.8.4)$$

где

$$B_A^i = \partial_A \chi^i + \gamma_{aj}^i \chi^j W_a^a + \varphi_a^i. \quad (3.8.5)$$

Лагранжиан L_0 в (3.8.3) инвариантен относительно неоднородного действия группы G (см. приложение 2). Кроме того, конструкция с минимальной связью требует замены исходного лагранжиана $L_0(B^i)$ новым лагранжианом

$$L = L_0 + \bar{s} \bar{L}. \quad (3.8.6)$$

Здесь L обычно представляет собой функцию компенсирующих полей и их производных, $\bar{s}$ — константа связи, а на L наложено требование инвариантности по отношению к неоднородному действию калибровочной группы $G = SO(3) \triangleright T(3)$. Прямая аналогия с теорией минимальной связи Янга — Миллса приводит к построению лагранжиана L как инвариантной при действии группы G квадратичной функции компонент матрицы кривизны $\hat{\Theta}$, связанной с группой $G = SO(3) \triangleright T(3)$ (см. § 2.3). Из (3.6.8) и равенства

$\hat{\Theta} = d\hat{\Gamma} + \Gamma \wedge \hat{\Gamma}$ мы получим явное выражение для матрицы кривизны, соответствующее матрице связности $\hat{\Gamma}$, ассоциированной с матричным представлением группы G на аффинной системе V из V_4 :

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta & D\varphi \\ [0] & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь Θ есть (3×3) -матрица кривизны, ассоциированная с подгруппой $SO(3)$ группы G . Так как для $\hat{\Theta}$ существует определенный закон преобразования $'\hat{\Theta} = M\hat{\Theta}M^{-1}$, индуцированный действием группы G , непосредственные вычисления показывают, что

$$' \hat{\Theta} = \begin{pmatrix} ' \Theta & ' D\varphi \\ [0] & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\Theta A^{-1} & AD\varphi - A\Theta A^{-1}b \\ [0] & 0 \end{pmatrix}$$

или

$$' \Theta = A\Theta A^{-1}, \quad ' D\varphi = AD\varphi - A\Theta A^{-1}b. \quad (3.8.7)$$

Основная группа классической теории Янга — Миллса всегда является полупростой, в то время как для нашей исходной группы $SO(3) \supset T(3)$ это не так. Данное обстоятельство уже отмечалось ранее, когда трансляции b явно вводились в приведенный выше индуцированный закон преобразования для $D\varphi$. Из $' \hat{\Theta} = M\hat{\Theta}M^{-1}$ непосредственно следует, что $\text{tr}(' \hat{\Theta} \otimes ' \hat{\Theta}) = \text{tr}(\hat{\Theta} \otimes \hat{\Theta})$, а представление $\hat{\Theta}$ через Θ и $D\varphi$ дает $\text{tr}(\hat{\Theta} \otimes \hat{\Theta}) = \text{tr}(\Theta \otimes \Theta) = \text{tr}(' \Theta \otimes ' \Theta) = F^a \otimes F^b \text{tr}(\nu_a \nu_b)$. Поэтому (так как $\text{tr}(\nu_a \nu_b)$ и C_{ab} для $SO(3)$ представляют собой числовые множители) прямая аналогия с теорией Янга — Миллса дает калибровочно-инвариантный лагранжиан

$$L_2 = \frac{1}{2} C_{ab} F_{ab}^a g^{ac} g^{be} F_{ce}^b. \quad (3.8.8)$$

Здесь C_{ab} — компоненты метрики Картана — Киллинга подгруппы $SO(3)$, величины g^{ab} задаются соотношениями

$$g^{AB} = -\delta^{AB}, \quad g^{44} = 1/\xi, \quad g^{ab} = 0 \quad \text{при } a \neq b, \quad (3.8.9)$$

$$a \quad \Theta = F^a \nu_a, \quad F^a = \frac{1}{2} F_{ab}^a dX^a \wedge dX^b, \quad F_{ab}^a = \partial_a W_b^a - \partial_b W_a^a + C_{\beta\gamma}^a W_a^\beta W_b^\gamma.$$

Лагранжиан L_2 зависит только от полей W и их производных, так что здесь уже нет зависимости от полей φ . Однако невозможно построить калибровочно-инвариантные величины из одних только $D\varphi$, на что указывает появление вектора трансляций b во втором из соотношений (3.8.7). Это заставляет нас вернуться к исходным положениям, лежащим

в основе физики дефектов. Как уже было показано, 2-формы плотности и потока дислокаций $\mathcal{D}^i = \alpha^i + J^i \wedge dT$ записываются через картаново кручение, ассоциированное с 1-формами дисторсии B^i , в виде $\mathcal{D}^i = D\varphi^i + \Theta_j^i \chi^j = \Sigma^i$, что дает основание ожидать зависимость лагранжиана для материалов с дефектами от плотности и потока дислокаций. С другой стороны, поскольку $D\hat{\chi}^T = [D\chi^T, 0]$, мы видим, что $D(D\hat{\chi}) = \hat{\Theta}\hat{\chi} = \hat{\Sigma}$ и картаново кручение имеет вид $\hat{\Sigma}^T = [\Sigma^T, 0]$. При действии калибровочной группы G $\hat{\Sigma}$ преобразуется согласно правилу

$$\hat{\Sigma} = \hat{\Theta}' \hat{\chi} = M \hat{\Theta} M^{-1} M \hat{\chi} = M \hat{\Sigma},$$

и, следовательно,

$$\hat{\Sigma} = \begin{Bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{Bmatrix} = M \hat{\Sigma} = \begin{Bmatrix} A \Sigma \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A(D\varphi + \Theta \chi) \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.8.10)$$

Если группа полупростая, то Σ однозначно определяется кривизной и вектором состояния. С другой стороны, (3.8.10) показывает, что Σ и $\Theta \chi$ независимы в случае $D\varphi \neq 0$. Следовательно, независимость картанова кручения и кривизны является прямым отражением отсутствия свойства полупростоты исходной группы G . Далее, ортогональность A указывает на положительную определенность квадратичной формы $\Sigma^T \otimes \Sigma$ и ее инвариантность относительно неоднородного действия калибровочной группы G , т. е. наша задача выполнена. Так как $D = \Sigma$, $\mathcal{D}^i = \frac{1}{2} \mathcal{D}_{ab}^i dX^a \wedge dX^b$, то

$$\mathcal{D}_{ab}^i = \partial_a \varphi_b^i - \partial_b \varphi_a^i + \gamma_{\alpha\beta}^i (W_a^\alpha \varphi_b^\beta - W_b^\alpha \varphi_a^\beta + F_{ab}^\alpha \chi^\beta) \quad (3.8.11)$$

и $\mathcal{D}_{ab}^i$ имеет правильную физическую интерпретацию, а лагранжиан, описывающий влияние плотности и потока дислокаций на состояние системы, имеет вид

$$L_1 = \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathcal{D}_{ab}^i k^{ac} k^{bd} \mathcal{D}_{cd}^j. \quad (3.8.12)$$

Здесь компоненты k^{ab} тензора k задаются соотношением $k^{AB} = -\delta^{AB}$, $k^{44} = 1/y$, $k^{ab} = 0$ при $a \neq b$. (3.8.13)

Лагранжианы L_1 и L_2 не обязательно удовлетворяют требованию лоренц-инвариантности, и поэтому параметры ξ и y не могут быть сопоставлены со скоростью света в вакууме. Фактически на данном этапе мы не можем еще ничего сказать о знаках параметров y и ξ . В дальнейшем мы покажем, что для получения физически осмысленных решений необходимо потребовать положительности обоих параметров.

Отметим, что лагранжиан (3.8.12) вместе с (3.8.13) может быть также получен из обычных требований изотропности и однородности для классической теории сплошных сред с добавлением условий калибровочной инвариантности.

Теперь мы можем записать лагранжиан L , описывающий динамику дефектов и инвариантный относительно неоднородного действия полупростой калибровочной группы $G = SO(3) \supset T(3)$:

$$L = \frac{1}{2} \rho_0 B_4^i \delta_{ij} B_4^j + \frac{1}{8} [\lambda (E_{AB} \delta^{AB})^2 + 2\mu E_{AB} \delta^{AC} \delta^{BD} E_{CD}] - \\ - s_1 \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathcal{D}_{ab}^i k^{ac} k^{bd} \mathcal{D}_{cd}^j - s_2 \frac{1}{2} C_{\alpha\beta} F_{ab}^\alpha g^{ac} g^{bd} F_{cd}^\beta. \quad (3.8.14)$$

При рассмотрении этого лагранжиана следует обратить внимание на два факта. Во-первых, он естественным образом получается из лагранжиана, описывающего теорию упругости, и имеет только лишь четыре подгоночных параметра: две константы связи (s_1 и s_2) и два «параметра распространения» ($\xi = 1/g^{44}$ и $y = 1/k^{44}$). Поэтому название «минимальная связь» вполне уместно. Во-вторых, лагранжиан L (3.8.14) является простейшим лагранжианом из всех, которые можно рассматривать в динамике дефектов. Он является суммой трех лагранжианов, а именно первого

$${}_e L = \frac{1}{2} \rho_0 B_4^i \delta_{ij} B_4^j - \frac{1}{8} [\lambda (E_{AB} \delta^{AB})^2 + 2\mu E_{AB} \delta^{AC} \delta^{BD} E_{CD}], \quad (3.8.15)$$

описывающего упругие свойства материалов, второго

$${}_f L = -\frac{1}{2} s_1 \delta_{ij} \mathcal{D}_{ab}^i k^{ac} k^{bd} \mathcal{D}_{cd}^j, \quad (3.8.16)$$

описывающего дислокации, и третьего

$${}_w L = -\frac{1}{2} s_2 C_{\alpha\beta} F_{ab}^\alpha g^{ac} g^{bd} F_{cd}^\beta, \quad (3.8.17)$$

описывающего дисклинации. Наиболее сложный из них ${}_e L$ может рассматриваться как модель внутренней упругой нелинейности, лагранжианы ${}_f L$ и ${}_w L$ более или менее фиксированы конструкцией минимальной связи.

Знаки минус в лагранжианах ${}_f L$ и ${}_w L$ выбраны для удобства в дальнейшем.

§ 3.9. ОБОЗНАЧЕНИЯ И НАИБОЛЕЕ УПОТРЕБИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Прежде чем приступить к вариационным задачам в теории минимальной связи Янга — Миллса для калибровочной группы $G = SO(3) \supset T(3)$, мы напомним некоторые наиболее

употребительные выражения и запишем их несколькими способами.

Матрица связности Γ и матрица кривизны Θ , связанные с группой $SO(3)$, выражаются через инфинитезимальные матрицы γ_α группы $SO(3)_0$ следующим образом (см. § 3.4):

$$\Gamma = W^\alpha \gamma_\alpha = W^\alpha dX^\alpha \gamma_\alpha \quad (3.9.1)$$

и

$$\begin{aligned} \Theta &= F^\alpha \gamma_\alpha = \left(dW^\alpha + \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha W^\beta \wedge W^\gamma \right) \gamma_\alpha, \\ F^\alpha &= \frac{1}{2} F_{ab}^\alpha dX^a \wedge dX^b, \end{aligned} \quad (3.9.2)$$

а их компоненты задаются соответственно соотношениями

$$\Gamma_j^i = W_a^\alpha \gamma_{\alpha j}^i dX^a \quad (3.9.3)$$

и

$$\begin{aligned} \Theta_j^i &= \frac{1}{2} F_{ab}^\alpha \gamma_{\alpha j}^i dX^a \wedge dX^b, \\ F_{ab}^\alpha &= \partial_a W_b^\alpha - \partial_b W_a^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha W_a^\beta W_b^\gamma. \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

Если $\chi \in \mathcal{A}_{3,1}^0(E_4)$ — матрица-столбец с элементами $\{\chi^i\}$, являющимися функциями, которые преобразуются при действии группы G по правилу $\chi' = A\chi$, то из (2.5.27) следует

$$D\chi = d\chi + \Gamma\chi. \quad (3.9.5)$$

Это соотношение может быть переписано несколькими различными эквивалентными способами:

$$\begin{aligned} D\chi^i &= d\chi^i + \Gamma_j^i \chi^j = d\chi^i + W^\alpha \gamma_{\alpha j}^i \chi^j = D_a \chi^i dX^a, \\ D_a \chi^i &= \partial_a \chi^i + W_a^\alpha \gamma_{\alpha j}^i \chi^j. \end{aligned} \quad (3.9.6)$$

В соответствии с концепцией минимальной замены (3.5.1) 1-формы матрицы дисторсии задаются выражением

$$B = D\chi + \Phi = d\chi + \Gamma\chi + \Phi, \quad (3.9.7)$$

или в компонентной записи

$$\begin{aligned} B^i &= d\chi^i + \Gamma_j^i \chi^j + \Phi^i = B_a^i dX^a, \\ B_a^i &= \partial_a \chi^i + W_a^\alpha \gamma_{\alpha j}^i \chi^j + \Phi_a^i. \end{aligned} \quad (3.9.8)$$

Из (3.7.1), (3.8.9), (3.9.7) и (2.3.33) следует, что матрица дислокаций может быть записана в виде

$$D = \Theta\chi + D\Phi = D(D\chi + \Phi) = DB = dB + \Gamma \wedge B. \quad (3.9.9)$$

Плотность дисклинаций, поток, изгиб — кручение и спин выражаются через матрицы Γ , B и D . Из (3.7.1), (3.7.2),

(3.9.3) и (3.9.8) получим выражение для форм изгиба — кручения

$$K = \Gamma \wedge B, \quad \mathcal{K}^i = \Gamma^i_j \wedge B^j = \frac{1}{2} \mathcal{K}^i_{ab} dX^a \wedge dX^b, \quad (3.9.10)$$

где

$$\mathcal{K}^i_{ab} = \gamma^i_{aj} (W^a_{ab} B^j - W^a_{ba} B^j). \quad (3.9.11)$$

Выпишем также соотношения, определяющие формы плотности потока дисклинаций:

$$\Omega = dD, \quad \Omega^i = d\mathcal{D}^i = \frac{1}{3!} \Omega^i_{abc} dX^a \wedge dX^b \wedge dX^c. \quad (3.9.12)$$

Для удобства введем специальные обозначения для производных лагранжиана (3.8.14) по различным полям и положим

$$\bar{G}^{ab}_\alpha = \partial L / \partial F^{ab}_\alpha, \quad \bar{G}^{ab}_\alpha = -\bar{G}^{ba}_\alpha. \quad (3.9.13)$$

Величины $\bar{G}^{ab}_\alpha$ можно рассматривать как компоненты 2-форм

$$\bar{G}_\alpha = \frac{1}{2} \bar{G}^{ab}_\alpha \pi_{ab}. \quad (3.9.14)$$

Далее если мы определим 2-формы $\bar{G}^\alpha$ соотношением

$$\bar{G}^\alpha = C^{\alpha\beta} \bar{G}_\beta, \quad (3.9.15)$$

где $C^{\alpha\beta}$ — компоненты обратной метрики Картана — Киллинга для $SO(3)$, то матрица $\bar{G}$, элементами которой являются 2-формы $\bar{G}^\alpha$, может быть записана через генерирующие матрицы (генераторы) γ_α группы $SO(3)_0$ следующим образом:

$$\bar{G} = \bar{G}^\alpha \gamma_\alpha. \quad (3.9.16)$$

Из (3.8.14), (3.8.19) и (3.9.13) получим явные выражения для $\bar{G}^{ab}_\alpha$ (см. (3.9.23))

$$\bar{G}^{ab}_\alpha = -s_2 g^{ca} g^{db} C_{\alpha\beta} F_{cd}^\beta + R^{ab}_i \gamma^i_{\alpha j} \mathcal{K}^j. \quad (3.9.17)$$

Производные лагранжиана L по калибровочным полям W^a_α определяются формулой

$$\bar{\mathcal{F}}^a_\alpha = \partial L / \partial W^a_\alpha \big|_{F^{ab}_\alpha} \quad (3.9.18)$$

(т. е. при постоянных F^{ab}_α). Обозначим через $\bar{J}$ квадратную матрицу с элементами, представляющими 3-формы $\bar{\mathcal{F}}^a_\alpha$, определяемые соотношениями

$$\bar{\mathcal{F}}^a_\alpha = C^{\alpha\beta} \bar{\mathcal{F}}_\beta^a, \quad (3.9.19)$$

где

$$\bar{\mathcal{F}}_\beta^a = \bar{\mathcal{F}}^a_\beta \pi_a, \quad \bar{\mathcal{F}}^a_\beta \pi_a \in \Lambda^3(E_4). \quad (3.9.20)$$

Тогда $\bar{\mathcal{F}}$ можно записать через генерирующие матрицы γ_a :

$$\bar{\mathbf{J}} = \bar{\mathcal{F}}^a \gamma_a. \quad (3.9.21)$$

Далее

$$R_i^{ab} = \partial L / \partial \mathcal{D}_{ab}^i, \quad R_i^{ab} = -R_i^{ba}, \quad (3.9.22)$$

и мы определяем

$$R_i = \frac{1}{2} R_i^{ab} \pi_{ab}. \quad (3.9.23)$$

2-формы R_i могут рассматриваться как элементы матрицы-строки $\mathbf{R}$. Кроме того, непосредственное дифференцирование лагранжиана L (3.8.14) по $\mathcal{D}_{ab}^i$ и соотношение (3.8.11) дают

$$R_i^{ab} = -s_1 \delta_{ij} k^{ac} k^{bd} [\partial_c \Phi_d^j - \partial_d \Phi_c^j + \\ + \gamma_{\alpha k}^j (W_c^\alpha \Phi_d^k - W_d^\alpha \Phi_c^k) + \gamma_{\alpha k}^j F_{cd}^\alpha \chi^k]. \quad (3.9.24)$$

Напомним теперь определение производной L по полям дисторсии — скорости:

$$Z_i^a = \partial L / \partial B_a^i, \quad (3.9.25)$$

где

$$Z_i^A = -\sigma_i^A, \quad Z_i^4 = p_i. \quad (3.9.26)$$

Ранее мы имели [см. (2.7.13)], что

$$Z_i^a = \partial L / \partial (\partial_a \chi^i),$$

но из (3.9.8) сразу следует

$$\partial L / \partial (\partial_a \chi^i) \equiv \partial L / \partial B_a^i$$

и таким образом определение (3.9.25) согласуется с данными ранее определениями напряжения и импульса. Из (3.9.26) и (3.8.14) мы получим явное выражение для напряжений

$$\sigma_i^A = \frac{1}{2} \delta_B^A \delta_{ij} (\partial_c \chi^j + W_c^\alpha \gamma_{\alpha k}^j \chi^k + \Phi_c^j) \times \\ \times (\lambda \delta^{BC} \delta^{FD} E_{FD} + 2\mu \delta^{RB} \delta^{SC} E_{RS}) \quad (3.9.27)$$

и импульса

$$p_i = \rho_0 \delta_{ij} (\partial_4 \chi^j + W_4^\alpha \gamma_{\alpha k}^j \chi^k + \Phi_4^j). \quad (3.9.28)$$

Далее определим 3-формы Z_i соотношением

$$Z_i = Z_i^a \pi_a \quad (3.9.29)$$

и обозначим через $\mathbf{Z}$ матрицу-строку, элементами которой являются 3-формы $\{Z_i\}$.

Теперь с помощью последовательного применения (3.9.18), (3.7.3), (3.9.22), (3.9.25) получим соотношение

$$\bar{\mathcal{F}}_a^i = \gamma_{aj}^i (Z_i^a \chi^j + 2R_i^{ab} \Phi_b^j), \quad (3.9.30)$$

которое является исключительно важным, так как оно связывает дислокации, дисклинации и напряжения. Соотношение (3.9.30) может быть записано следующим эквивалентным образом:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{F}}_a^A &= (-\sigma_i^A \chi^i + 2R_i^{Ab} \Phi_b^i) \gamma_{ai}^i, \\ \bar{\mathcal{F}}_a^A &= (p_i \chi^i + 2R_i^{Ab} \Phi_b^i) \gamma_{ai}^i.\end{aligned}\quad (3.9.31)$$

§ 3.10. ВАРИАЦИЯ ПО χ^i

Уравнения, определяющие функции χ^i , W_a^a , Φ_a^i , получаются из условия, согласно которому функционал действия

$$\mathcal{A}[\chi, \Phi, W] = \int_{E_i} L(B, \Theta, \mathcal{D}) \pi \quad (3.10.1)$$

от лагранжиана L , заданного выражением (3.8.14), должен принимать стационарное значение относительно выбранных функций χ^i , W_a^a и Φ_a^i .

Вариация функционала действия $\mathcal{A}$ относительно χ^i приводит к уравнениям Эйлера — Лагранжа

$$\{\mathcal{E} | L\}_{\chi^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial \chi^i} - \partial_a \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \chi^i)} = 0. \quad (3.10.2)$$

Из (3.8.14) вместе с (3.9.25) и (3.9.8) получим

$$\frac{\partial L}{\partial \chi^i} = \frac{\partial L}{\partial B_a^i} \frac{\partial B_a^i}{\partial \chi^i} + \frac{\partial L}{\partial \mathcal{D}_{ab}^i} \frac{\partial \mathcal{D}_{ab}^i}{\partial \chi^i} = Z_j^a W_a^i \gamma_{aj}^i + R_j^{ab} F_{ab}^a \gamma_{aj}^i$$

и

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_a \chi^i)} = \frac{\partial L}{\partial B_a^i} = Z_i^a,$$

так что уравнения (3.10.2) принимают вид

$$\partial_a Z_i^a - Z_j^a W_a^i \gamma_{aj}^i = \gamma_{aj}^i F_{ab}^a R_j^{ab}. \quad (3.10.3)$$

С учетом (3.9.3) и (3.9.29) уравнения (3.10.3) можно записать через соответствующие внешние формы:

$$dZ_i + Z_j \wedge \Gamma_i^j = -2R_j \wedge \Theta_i^j. \quad (3.10.4)$$

Тогда в силу того, что матрица-строка Z преобразуется при действии на нее группы $SO(3)$ в соответствии с правилом

$$Z' = Z A^{-1}$$

(см. приложение 3), с помощью (2.3.29) при $k=3$ уравнения (3.10.4) принимают удобный калибровочный вид

$$DZ = -2R \wedge \Theta. \quad (3.10.5)$$

Предположим теперь, что $W_a^\alpha = 0$, что означает отсутствие дисклинаций, т. е. рассмотрим чисто дислокационную среду. В этом случае мы получим следующий вид уравнений (3.10.3):

$$\partial_A \sigma_i^A = \partial_i p_i. \quad (3.10.6)$$

Как известно из классической теории упругости, эти равенства представляют собой уравнения баланса импульса. Поэтому для чисто дислокационной среды уравнения (3.10.5) являются уравнениями баланса импульса. Однако если мы допустим существование дисклинаций, то в уравнениях баланса появится дополнительный член, а именно

$$\partial_A p_i - \partial_A \sigma_i^A = \gamma_{ai}' (W_4^\alpha p_i - W_A^\alpha \sigma_i^A + F_{ab}^\alpha R_i^{ab}). \quad (3.10.7)$$

Тем не менее уравнения (3.10.5) продолжают оставаться уравнениями баланса импульса для случая, когда одновременно имеются и дислокации, и дисклинации. Члены в правой части (3.10.7) можно рассматривать как силы, порожденные дефектами, которые действуют на среду. Принцип действия и противодействия предполагает, что в среде также будут возникать силы, которые действуют на дефекты. В последующих параграфах мы остановимся на этом подробнее.

Обозначим через δ_{χ^i} вариацию по переменным состояния χ^i , а через $\delta \chi^i(X^A)$ — бесконечно малое приращение функций, порождающих эту вариацию (т. е. $\chi^i(X^A) \rightarrow \chi^i(X^A) + \delta \chi^i(X^A) + o(\epsilon)^i$). Тогда χ -вариация действия (3.10.1) задается выражением

$$\delta_{\chi^i} \mathcal{A} = \int_{E_i} \{ \mathcal{E} | L \}_{\chi^i} \delta \chi^i \pi + \int_{\partial E_i} Z_i^a \delta \chi^i \pi_a. \quad (3.10.8)$$

В силу справедливости уравнений Эйлера — Лагранжа (3.10.5) для всех внутренних точек получаем

$$\delta_{\chi^i} \mathcal{A} = \int_{\partial E_i} Z_i^a \delta \chi^i \pi_a. \quad (3.10.9)$$

Это показывает, что функционал действия будет стационарен по отношению к выбору χ^i ($\partial_{\chi^i} \mathcal{A} = 0$) только при следующих дополнительных условиях:

$$(Z_i^a \delta \chi^i)|_{\partial E_i} \pi_a|_{\partial E_i} = 0. \quad (3.10.10)$$

Следовательно, должны удовлетворяться либо условия Дирихле

$$\delta\chi^i|_{\partial E_4} = 0 \quad (\chi^i|_{\partial E_4} \text{ фиксированы}), \quad (3.10.11)$$

либо однородные условия Неймана

$$(Z_i^a \pi_a)|_{\partial E_4} = 0 \quad (3.10.12)$$

(эти условия означают, что отсутствует нагружение пространственных границ и равны нулю начальный и конечный импульсы), либо комбинация (3.10.11) и (3.10.12) на различных участках границы ∂E_4 . Мы отложим обсуждение задачи с неоднородными условиями Неймана (ненулевое нагружение пространственных границ) до § 3.17.

§ 3.11. ВАРИАЦИЯ ПО Φ_a^i

Рассмотрим снова функционал действия (3.10.1). Если обозначить через $\{\zeta^i, i=1, 2, 3\}$ произвольный набор трех 1-форм, индуцирующих вариацию

$$\varphi^i \rightarrow \varphi^i + \varepsilon \zeta^i + o(\varepsilon), \quad (3.11.1)$$

то с помощью (3.7.1) получим индуцированную вариацию для $\mathcal{D}^i$, которая может быть записана как

$$\mathcal{D}^i \rightarrow \mathcal{D}^i + \varepsilon (d\zeta^i + \Gamma_j^i \wedge \zeta^j) + o(\varepsilon). \quad (3.11.2)$$

Следовательно, вариация, индуцируемая на 4-форме $L\pi$ лагранжиана, имеет вид

$$\delta(L\pi) = \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi_a^i} \delta\Phi_a^i + \frac{\partial L}{\partial \mathcal{D}_{ab}^i} \delta\mathcal{D}_{ab}^i \right) \pi. \quad (3.11.3)$$

Используя (3.11.3) совместно с (3.9.22), (3.9.25) и (3.9.8), получаем

$$\delta(L\pi) = (Z_i^a \delta\Phi_a^i + R_i^{ab} \delta\mathcal{D}_{ab}^i) \pi. \quad (3.11.4)$$

Записывая это выражение через дифференциальные формы R_i , Z_i , $\mathcal{D}^i$, имеем

$$\delta(L\pi) = -Z_i \wedge \delta\varphi^i - 2R_i \wedge \delta\mathcal{D}^i. \quad (3.11.5)$$

Вариация формы φ^i есть просто $\delta\varphi^i = \zeta^i$, и в соответствии с (3.11.2) можно записать

$$\delta\mathcal{D}^i = d\zeta^i + \Gamma_j^i \wedge \zeta^j. \quad (3.11.6)$$

Следовательно, (3.11.5) можно переписать следующим образом:

$$\delta(L\pi) = -Z_i \wedge \zeta^i - 2R_i \wedge (d\zeta^i + \Gamma_j^i \wedge \zeta^j). \quad (3.11.7)$$

Внешнее дифференцирование произведения двух форм дает

$$d(R_I \wedge \zeta^I) = dR_I \wedge \zeta^I + R_I \wedge d\zeta^I, \quad (3.11.8)$$

и, таким образом, из (3.11.7) и (3.11.8) получаем

$$\delta(L\pi) = -(Z_I + 2R_I \wedge \Gamma_I^I - 2dR_I) \wedge \zeta^I - 2d(R_I \wedge \zeta^I). \quad (3.11.9)$$

На основе фундаментальной леммы вариационного исчисления для вариационных задач с фиксированными границами получим окончательную форму уравнений Эйлера — Лагранжа относительно функций ϕ_b^i :

$$\frac{1}{2} Z_I = dR_I - R_I \wedge \Gamma_I^I. \quad (3.11.10)$$

Записанные через матрицы-строки $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{R}$ и квадратную матрицу Γ уравнения (3.11.10) принимают следующий вид:

$$\frac{1}{2} \mathbf{Z} = d\mathbf{R} - \mathbf{R} \wedge \Gamma. \quad (3.11.11)$$

Согласно приложению 3, $\mathbf{R}$ преобразуется при действии группы G по правилу $\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}$. Поэтому (2.3.29) при $k=2$ показывает, что уравнения (3.11.11) могут быть записаны также в удобной калибровке

$$\frac{1}{2} \mathbf{Z} = D\mathbf{R}. \quad (3.11.12)$$

Уравнения, записанные в виде (3.11.12), больше приспособлены для анализа феноменологии задачи. Однако при решении конкретных задач предпочтительнее запись уравнений через соответствующие компоненты

$$\partial_a R_I^{ab} - \gamma_{aI}^i W_a^a R_i^{ab} = \frac{1}{2} Z_I^b. \quad (3.11.13)$$

Эти уравнения в свою очередь эквивалентны системе двенадцати уравнений

$$\partial_a R_I^{aB} - \gamma_{aI}^i W_a^a R_i^{aB} = -\frac{1}{2} \sigma_I^B, \quad \partial_a R_I^{A4} - \gamma_{aI}^i W_a^a R_i^{A4} = \frac{1}{2} p_I. \quad (3.11.14)$$

Тот факт, что уравнения Эйлера — Лагранжа (3.11.12) удовлетворяются во всех внутренних точках E_4 , находит отражение в следующих выражениях для вариации по ϕ^i интеграла действия [см. (3.11.9)]:

$$\delta_{\phi^i} \mathcal{A} = \int_{\partial E_4} -2R \wedge_I \zeta^I = -2 \int_{\partial E_4} R_I \wedge \delta\phi^I.$$

В силу того что ϕ^I — внутренние переменные, они не могут зависеть на границе от внешних факторов. Из соотношений

$\delta\varphi^i|_{\partial E_i} = 0$, $\varphi^i|_{\partial E_i}$ задано, ясно также, что эти условия не являются калибровочно-инвариантными. Функционал действия становится стационарным по отношению к φ^i только тогда, когда мы наложим однородные условия Неймана

$$R_i|_{\partial E_i} = R_i^{ab}\pi_b|_{\partial E_i} = 0. \quad (3.11.15)$$

Так как при действии группы G R преобразуется согласно соотношению $R = RA^{-1}$ (см. приложение 3), граничные условия (3.11.15) будут калибровочно-инвариантными.

Пусть b^i — компоненты вектора Бюргерса, t^A — компоненты единичного тангенциального вектора поля семейства дислокационных линий вблизи точки на пространственной границе тела с полем единичных нормалей N_A . Тогда имеем $\mathcal{D}^i = \alpha^{iA}\mu_A = b^i t^A \mu_A$ и, следовательно, $\partial_B \varphi_C^i = b^i t^A e_{ABC}$ вблизи пространственной границы. Поэтому из (3.9.24) следует

$$R_i^{AB} = -s_1 \delta_{ij} \delta^{AF} \delta^{BD} b^j t^S e_{SFD}$$

и, таким образом,

$$R_i^{AB} \mu_B|_{\partial E_i} = -s_1 \delta_{ij} \delta^{AF} \delta^{BD} b^j t^S|_{\partial E_i} e_{SFD} N_B dS,$$

где мы положили $\mu_B|_{\partial E_i} = N_B dS$. Соответственно этому граничные условия (3.11.15) будут удовлетворяться только в том случае, когда $b^i t^S|_{\partial E_i} N^D e_{SFD} = 0$, т. е. или $b^i|_{\partial E_i} = 0$, или дислокационные линии ортогональны границе ($t^S|_{\partial E_i} N^D e_{SFD} = 0$).

§ 3.12. ВАРИАЦИЯ ПО W_a^α

Пусть $\{\eta^\alpha, \alpha = 1, 2, 3\}$ — набор трех 1-форм, индуцирующих вариацию

$$W^\alpha \rightarrow W^\alpha + \varepsilon \eta^\alpha + o(\varepsilon). \quad (3.12.1)$$

Напомним, что (см. (3.9.2))

$$F^\alpha = dW^\alpha + \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha W^\beta \wedge W^\gamma,$$

где константы $C_{\beta\gamma}^\alpha$ антисимметричны по нижним индексам. Тогда индуцируемая в F^α вариация задается соотношением

$$F^\alpha \rightarrow F^\alpha + \varepsilon (d\eta^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha W^\beta \wedge W^\gamma) + o(\varepsilon). \quad (3.12.2)$$

Для получения уравнений Эйлера — Лагранжа относительно W^α мы поступим так же, как в § 3.11. Тогда вариация, индуцируемая в 4-форме лагранжиана $L\pi$ с L , заданным

(3.8.14), при использовании (3.9.13), (3.9.14), (3.9.18) и (3.9.20) оказывается равной

$$\delta(L\pi) = -2\delta F^a \wedge \bar{G}_a + \delta W^a \wedge \bar{\mathcal{F}}_a. \quad (3.12.3)$$

Используя (3.12.1) и (3.12.2), получаем

$$\delta(L\pi) = \eta^a \wedge (-2d\bar{G}_a + 2C_{\gamma a}^\beta W^\gamma \wedge \bar{G}_\beta + \bar{\mathcal{F}}_a) - 2d(\eta^a \wedge \bar{G}_a). \quad (3.12.4)$$

Таким образом, уравнения Эйлера — Лагранжа относительно переменных W^a имеют вид

$$d\bar{G}_a - C_{\gamma a}^\beta W^\gamma \wedge \bar{G}_\beta = \frac{1}{2} \bar{\mathcal{F}}_a, \quad (3.12.5)$$

или, в записи через соответствующие компоненты,

$$\partial_a \bar{G}_\alpha^{ab} - C_{\gamma a}^\beta W_a^\gamma \bar{G}_\beta^{ab} = \frac{1}{2} \bar{\mathcal{F}}_\alpha^b. \quad (3.12.6)$$

Определим величины G_α^{ab} соотношениями

$$G_\alpha^{ab} = -s_2 \partial L_2 / \partial F_{ab}^\alpha.$$

Тогда с помощью (3.9.13) и (3.9.22) мы получим явное выражение для $\bar{G}_\alpha^{ab}$:

$$\bar{G}_\alpha^{ab} = G_\alpha^{ab} + R_i^{ab} \gamma_{\alpha i}^j \chi^j. \quad (3.12.7)$$

Подставляя в (3.12.6) выражения (3.12.7) и выражения для $\bar{\mathcal{F}}_\alpha^b$ (3.9.30) и используя уравнения дислокационного поля (3.11.13) для исключения $\partial_a R_i^{ab}$, после простых алгебраических преобразований получаем

$$\begin{aligned} \partial_a G_\alpha^{ab} - C_{\gamma a}^\beta W_a^\gamma G_\beta^{ab} &= \gamma_{\alpha i}^j R_i^{bc} (\varphi_c^j + \partial_c \chi^j) + \\ &+ \gamma_{\alpha i}^k \gamma_{\beta k}^j R_i^{cb} W_c^\beta \chi^j - C_{\beta a}^\rho \gamma_{\rho i}^j R_i^{cb} \chi^j W_c^\beta. \end{aligned} \quad (3.12.8)$$

Коммутатор генерирующих матриц $\{\gamma_\alpha\}$ определяется следующим образом:

$$[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] = C_{\alpha\beta}^\rho \gamma_\rho,$$

т. е.

$$C_{\beta a}^\rho \gamma_{\rho i}^j = \gamma_{\beta k}^i \gamma_{\alpha i}^k - \gamma_{\alpha k}^i \gamma_{\beta i}^k. \quad (3.12.9)$$

Следовательно, (3.12.8) и (3.12.9) дают окончательный вид дисклинационных уравнений

$$\partial_a G_\alpha^{ab} - C_{\gamma a}^\beta W_a^\gamma G_\beta^{ab} = \frac{1}{2} \bar{\mathcal{F}}_\alpha^b. \quad (3.12.10)$$

Здесь 3-формы $\mathcal{F}_\alpha$ определяются соотношениями

$$\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\alpha^a \pi_a = 2\gamma_{\alpha i}^j R_i^{ab} B_b^j \pi_a = -2\gamma_{\alpha i}^j R_i \wedge B^j. \quad (3.12.11)$$

Уравнения (3.12.10) могут быть записаны через соответствующие матрицы внешних дифференциальных форм следующим образом:

$$d\mathbf{G} + \mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{G} - \mathbf{G} \wedge \mathbf{\Gamma} = \frac{1}{2} \mathbf{J}. \quad (3.12.12)$$

Напомним, что $\mathbf{G} = C^{\alpha\beta} G_{\beta\gamma} \mathbf{v}_\alpha$, $\mathbf{\Gamma} = W^\alpha \mathbf{v}_\alpha$, и определим матрицу $\mathbf{J}$ так:

$$\mathbf{J} = C^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\beta\gamma} \mathbf{v}_\alpha. \quad (3.12.13)$$

Так как при действии группы $\mathbf{G}$ матрица $\mathbf{G}$ преобразуется по правилу $\mathbf{G}' = \mathbf{A} \mathbf{G} \mathbf{A}^{-1}$ (см. приложение 3 и (3.5.31) при $k=2$), то уравнение (3.12.12) принимает удобную калибровочную форму:

$$D\mathbf{G} = \frac{1}{2} \mathbf{J}. \quad (3.12.14)$$

Поля W^α также являются внутренними полями, и поэтому пространственные граничные условия могут быть заданы только как условия Неймана. Так как эти условия следуют из точной части вариации $\delta(L)$, (3.12.4) дает

$$\bar{G}_\alpha^{aB} \mu_B \big|_{\partial E_3} = 0.$$

Однако из (3.12.7) и (3.11.15) следует, что

$$\bar{G}_\alpha^{aB} \mu_B \big|_{\partial E_3} = G_\alpha^{aB} \mu_B \big|_{\partial E_3} + R_i^{aB} \gamma_\alpha^i \chi^j \mu_B \big|_{\partial E_3} = G_\alpha^{aB} \mu_B \big|_{\partial E_3},$$

и поэтому мы получаем калибровочно-инвариантные граничные условия

$$G_\alpha^{aB} \mu_B \big|_{\partial E_3} = 0. \quad (3.12.15)$$

§ 3.13. УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Выпишем уравнения, которые мы получили как условия стационарности интеграла действия (3.10.1):

$$D\mathbf{Z} = -2\mathbf{R} \wedge \mathbf{\Theta}, \quad (3.13.1)$$

$$D\mathbf{R} = \frac{1}{2} \mathbf{Z} \quad (3.13.2)$$

и

$$D\mathbf{G} = \frac{1}{2} \mathbf{J}. \quad (3.13.3)$$

Поскольку лагранжиан L в (3.8.14) калибровочно-инвариантен относительно действия группы $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(3) \supset \mathbf{T}(3)$, уравнения (3.13.1)—(3.13.3) также калибровочно-инвариантны.

Уравнения (3.13.1)—(3.13.3) нельзя решать для произвольных матриц 3-форм $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{J}$ и произвольной матрицы 1-форм $\mathbf{\Gamma}$, так как мы должны удовлетворить также усло-

виям интегрируемости

$$DDR = \frac{1}{2} DZ \quad \text{и} \quad DDG = \frac{1}{2} DJ.$$

Поскольку $DDR = -R \wedge \Theta$ и $DDG = \Theta \wedge G - G \wedge \Theta$ [см. (2.3.34) и (2.3.35)], то

$$DZ = -2R \wedge \Theta \quad (3.13.4)$$

и

$$DJ = 2(\Theta \wedge G - G \wedge \Theta). \quad (3.13.5)$$

Для уравнения (3.13.1) условия интегрируемости удовлетворяются тождественно, так как матрица 5-форм на четырехмерном пространстве тождественно обращается в нуль.

Для лагранжиана L , определенного (3.8.14), из (3.12.7) следует, что

$$\Theta \wedge G - G \wedge \Theta = 0, \quad (3.13.6)$$

т. е. условие совместности (3.13.5) упрощается:

$$DJ = dJ + \Gamma \wedge J + J \wedge \Gamma = 0. \quad (3.13.7)$$

Условия совместности (3.13.4) и (3.13.5) являются не только математической необходимостью; они несут также очень полезную информацию о физике дефектов.

Согласно (3.13.4), уравнения баланса импульса (3.13.1) можно рассматривать как прямое следствие условий совместности для уравнений дислокационных полей (3.13.2). Мы видим, что условие сохранения импульса будет сопутствовать уравнениям дислокационных полей. Тогда возникает следующий очевидный вопрос: какую роль играет сохранение момента импульса? В текущей литературе по материалам с дефектами ответа на него нет.

Прежде всего заметим, что соотношение $DJ = 0$ является прямым следствием уравнений $DG = \frac{1}{2} J$, описывающих дисклинацию, и тождества $\Theta \wedge G - G \wedge \Theta = 0$. Следовательно, равенство нулю DJ естественно связывать с вращательными степенями свободы. Далее из (3.12.13) имеем

$$J = -2C^{\alpha\beta} R\gamma_\beta \wedge B\gamma_\alpha, \quad (3.13.8)$$

и поскольку $DC^{\alpha\beta} = 0$, $D\gamma_\beta = 0$, то равенство нулю DJ эквивалентно равенству

$$0 = D(R\gamma_\beta \wedge B). \quad (3.13.9)$$

Применяя к (3.13.9) внешнее ковариантное дифференцирование и используя уравнения полей (3.13.1), (3.13.2), получаем

$$Z\gamma_\beta \wedge B + 2R\gamma_\beta \wedge DB = 0,$$

или

$$\mathbf{Z}\mathbf{v}_\beta \wedge \mathbf{B} + 2\mathbf{R}\mathbf{v}_\beta \wedge \mathbf{D} = 0, \quad (3.13.10)$$

так как $\mathbf{D} = D\mathbf{B}$.

Выражение в левой части (3.13.10) может быть записано через компоненты входящих в него матриц следующим образом:

$$Z_i v_{\beta j}^i \wedge B^j + 2R_i v_{\beta j}^i \wedge \mathcal{D}^j = 0. \quad (3.13.11)$$

Следует особо подчеркнуть появление полей дисторсий B^i , которые также являются аргументами Z_i .

Сосредоточимся пока на втором члене левой части (3.13.11). С учетом (3.8.10) и (3.9.23) мы можем написать

$$R_i v_{\beta j}^i \wedge \mathcal{D}^j = \frac{1}{4} R_i^{ab} v_{\beta j}^i \mathcal{D}_{cd}^j \pi_{ab} \wedge dX^c \wedge dX^d.$$

После простых преобразований, использующих (3.8.14), (3.9.22) и антисимметричность по индексам i и j компонент $v_{\beta j}^i$ генерирующих матриц v_β , получим

$$R_i v_{\beta j}^i \wedge \mathcal{D}^j \equiv 0. \quad (3.13.12)$$

Следовательно, (3.13.11) сводится к равенству

$$v_{\alpha j}^i Z_i \wedge B^j = 0, \quad (3.13.13)$$

которое можно записать через компоненты 3-форм Z_i и 1-форм B^j следующим образом:

$$v_{\alpha j}^i (Z_i^A B_A^j + Z_i^4 B_4^j) = 0. \quad (3.13.14)$$

Используя (3.9.25), (3.9.26) и (3.8.14), имеем

$$v_{\alpha j}^i (-\sigma_i^A B_A^j + \rho_0 \delta_{ik} B_4^k B_4^j) = 0,$$

или

$$v_{\alpha j}^i \sigma_i^A B_A^j = 0. \quad (3.13.15)$$

Таким образом, уравнения (3.13.11) упрощаются:

$$v_{\alpha j}^i \sigma_i^A \{ \partial_A \chi^j + W_A^\alpha v_{\alpha k}^j \chi^k + \Phi_A^j \} = 0. \quad (3.13.16)$$

Если дефекты отсутствуют, т. е. дисторсии полностью интегрируемы, то уравнения (3.13.16) сводятся к классической формулировке закона сохранения момента импульса

$$\sigma_i^A (\partial_B \chi^k) \partial_A \chi^j = \sigma_j^A (\partial_B \chi^k) \partial_A \chi^i, \quad (3.13.17)$$

где σ_i^A — компоненты тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа. При наличии обоих типов дефектов, дисклинаций и дис-

локаций, уравнения баланса момента импульса имеют вид

$$\sigma_i^A(B_c^k) B_A^i = \sigma_i^A(B_c^k) B_A^i. \quad (3.13.18)$$

Отметим, что плечо момента в точности совпадает с тем, которое получается с помощью конструкции минимальной замены (3.5.1):

$$d\chi \rightarrow d\chi + \Gamma\chi + \varphi = B.$$

Уравнения (3.13.17) фактически являются формулировкой свойств симметрии тензора напряжений Коши в случае отсутствия дефектов, т. е. в случае теории упругости. Неуместно говорить о напряжении Коши, когда дисторсия представляет собой неинтегрируемую форму. Однако мы все же можем определить напряжение Коши, связав его с интегрируемой частью дисторсии $d\chi$. Из (3.13.18) можно получить

$$\sigma_i^A(B_c^k) \partial_A \chi^i - \sigma_i^A(B_c^k) \partial_A \chi^i = (W_{A\alpha k}^i \chi^k + \varphi_A^i) \sigma_i^A(B_c^k) - \\ - (W_{A\alpha k}^i \chi^k + \varphi_A^i) \sigma_i^A(B_c^k) \quad (3.13.19)$$

для случая, когда имеются и дисклинации, и дислокации. Члены, стоящие в левой части (3.13.19), аналогичны членам уравнений (3.13.17). Следовательно, члены в правой части (3.13.19) можно рассматривать как комбинацию напряжений, связанных с дефектами.

Так как $\sigma_i^A = -\partial L_0 / \partial B_A^i$, то (3.13.18) переходят в уравнения $B_A^i \partial L_0 / \partial B_A^i = B_A^i \partial L_0 / \partial B_A^i$ и эти уравнения тождественно удовлетворяются вследствие того, что L_0 зависит от B_A^i только через переменные $E_{AB} = B_A^i \delta_{ij} B_B^j$. Соответственно этому уравнения поля динамики дефектов являются полностью интегрируемыми.

§ 3.14. ПОЛЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ДЕФЕКТОВ

Мы можем теперь представить полный набор полевых уравнений динамики дефектов. Они состоят из

1) уравнений эволюции

$$DZ = -2R \wedge \Theta, \quad (3.14.1)$$

$$DR = \frac{1}{2} Z, \quad (3.14.2)$$

$$DG = \frac{1}{2} J; \quad (3.14.3)$$

2) условий совместности

$$DJ = 0; \quad (3.14.4)$$

3) образующих соотношений

$$\mathbf{J} = -2C^{\alpha\beta} \mathbf{R}\mathbf{y}_\beta \wedge \mathbf{B}\mathbf{y}_\alpha, \quad (3.14.5)$$

$$Z_i = (\partial L / \partial B_a^i) \pi_a, \quad (3.14.6)$$

$$R_i = \frac{1}{2} (\partial L / \partial \mathcal{D}_{ab}^i) \pi_{ab}, \quad (3.14.7)$$

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{2} s_2 (\partial L_2 / \partial F_{ab}^\alpha) \pi_{ab} C^{\alpha\beta} \mathbf{y}_\beta, \quad (3.14.8)$$

$$\mathbf{R} = [R_1, R_2, R_3], \quad \mathbf{B} = [B^1, B^2, B^3]^T, \quad (3.14.9)$$

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \rho_0 B_4^i \delta_{ij} B_4^j - \frac{1}{8} [\lambda (E_{AB} \delta^{AB})^2 + \\ & + 2\mu E_{AB} \delta^{AC} \delta^{BD} E_{CD}] - s_1 \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathcal{D}_{ab}^i k^{ac} k^{bd} \mathcal{D}_{cd}^j - \\ & - s_2 \frac{1}{2} C_{\alpha\beta} F_{ab}^\alpha g^{ac} g^{bd} F_{cd}^\beta; \end{aligned} \quad (3.14.10)$$

4) определяющих соотношений

$$\mathbf{\Gamma} = W^a \mathbf{y}_a = W_a^\alpha \mathbf{y}_\alpha dX^a, \quad (3.14.11)$$

$$F_{ab}^\alpha = \partial_a W_b^\alpha - \partial_b W_a^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha W_a^\beta W_b^\gamma, \quad (3.14.12)$$

$$\mathbf{\Theta} = \frac{1}{2} F_{ab}^\alpha \mathbf{y}_a dX^a \wedge dX^b,$$

$$\mathcal{D}_{ab}^i = \partial_a \Phi_b^i - \partial_b \Phi_a^i + \gamma_{\alpha j}^i (W_a^\alpha \Phi_b^j - W_b^\alpha \Phi_a^j) + F_{ab}^\alpha \gamma_{\alpha j}^i \chi^j, \quad (3.14.13)$$

$$B_a^i = \partial_a \chi^i + \gamma_{\alpha j}^i W_a^\alpha \chi^j + \Phi_a^i, \quad B^i = B_a^i dX^a \quad (3.14.14)$$

и

5) уравнений для дефектов

$$\mathbf{D} = \mathbf{\Theta} \chi \wedge \bar{\mathbf{D}}, \quad \bar{\mathbf{D}} = D\Phi, \quad (3.14.15)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{B}, \quad (3.14.16)$$

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Theta} \wedge \mathbf{B} - \mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{D}. \quad (3.14.17)$$

Как и в любой теории, эти полевые уравнения поля лучше воспринимаются, если они записаны в явном виде. Когда мы подставим в (3.14.1)–(3.14.5) образующие и определяющие соотношения и положим $\partial^A \equiv \delta^{AB} \partial_B$, то в результате получим

$$\partial_4 p_i - \partial_A \sigma_i^A - \gamma_{\alpha i}^j (W_4^\alpha p_j - W_A^\alpha \sigma_j^A) = \gamma_{\alpha i}^j F_{ab}^\alpha R_j^{ab}; \quad (3.14.1a)$$

$$\begin{aligned} & \delta_{ji} \delta^{BD} (\partial^A \bar{\mathcal{D}}_{AD}^i - (1/y) \partial_4 \bar{\mathcal{D}}_{4D}^i) - \\ & - \gamma_{\alpha j}^i \delta_{ik} \delta^{BD} (\delta^{AC} W_A^\alpha \bar{\mathcal{D}}_{CD}^k - (1/y) W_4^\alpha \bar{\mathcal{D}}_{4D}^k) + \\ & + \gamma_{\alpha k}^i \delta_{ij} \delta^{BD} [\partial^4 (F_{AD}^\alpha \chi^k) - (1/y) \partial_4 (F_{4D}^\alpha \chi^k)] - \end{aligned}$$

$$-\gamma_{\alpha f}^i \gamma_{\beta m}^k \delta_{ik} \delta^{BD} \chi^m [\delta^{AC} F_{CD}^\beta W_A^\alpha - (1/y) F_{4D}^\beta W_4^\alpha] = [1/(2s_1)] \sigma_f^\beta, \quad (3.14.2a)$$

$$(1/y) (\delta_{if} \partial^A \bar{\mathcal{D}}_{A4}^i - \delta_{im} \delta^{AC} \gamma_{\alpha f}^i W_A^\alpha \bar{\mathcal{D}}_{C4}^m) + \\ + (1/y) \gamma_{\alpha k}^i [\delta_{ij} \partial^A (F_{A4}^\alpha \chi^k) - \delta_{im} \delta^{AC} \gamma_{\beta j}^m W_A^\beta F_{C4}^\alpha \chi^k] = [1/(2s_1)] p_j; \quad (3.14.2b)$$

$$\delta^{BC} [\partial^A \partial_A W_C^\rho - \partial_C \partial^A W_A^\rho - (1/\xi) \partial_4 (\partial_4 W_C^\rho - \partial_C W_4^\rho)] + \\ + \delta^{BC} C_{\beta\gamma}^\rho [W_C^\gamma \partial^A W_A^\beta + 2W_A^\beta \partial^A W_C^\gamma - W_A^\beta \delta^{EA} \partial_C W_E^\gamma] + \\ + \delta^{BC} C_{\beta\gamma}^\rho C_{\alpha\varepsilon}^\gamma [W_a^\alpha \delta^{AE} W_E^\beta W_C^\varepsilon - (1/\xi) W_4^\alpha W_4^\beta W_C^\varepsilon] = \\ = -[1/(2s_2)] C^{\rho\eta} \mathcal{F}_\eta^B, \quad (3.14.3a)$$

$$(1/\xi) \{ \partial^A \partial_A W_4^\rho - \partial_4 \partial^A W_A^\rho + C_{\beta\gamma}^\rho (W_4^\gamma \partial^A W_A^\beta + 2W_A^\beta \partial^A W_4^\gamma - \\ - W_A^\beta \delta^{AB} \partial_4 W_B^\gamma) + C_{\beta\gamma}^\rho C_{\mu\nu}^\gamma W_A^\beta \delta^{AB} W_B^\mu W_4^\nu \} = [1/(2s_2)] C^{\rho\eta} \mathcal{F}_\eta^4, \quad (3.14.3b)$$

$$\gamma_{\alpha f}^i \sigma_i^A (\partial_A \chi^f + W_A^\beta \gamma_{\beta k}^f \chi^k + \Phi_A^f) = 0; \quad (3.14.4a)$$

$$\mathcal{F}_\alpha^A = -2\gamma_{\alpha f}^i (R_i^{CA} B_C^f + R_i^{4A} B_4^f) = \\ = -2\gamma_{\alpha f}^i \{ R_i^{CA} (\partial_C \chi^f + \Phi_C^f + \gamma_{\beta k}^f W_C^\beta \chi^k) + \\ + R_i^{4A} (\partial_4 \chi^f + \Phi_4^f + \gamma_{\beta k}^f W_4^\beta \chi^k) \}, \quad (3.14.5a)$$

$$\mathcal{F}_\alpha^4 = -2\gamma_{\alpha f}^i R_i^{C4} (\partial_C \chi^f + \Phi_C^f + \gamma_{\beta k}^f W_C^\beta \chi^k). \quad (3.14.5b)$$

Образующие соотношения (3.14.6)–(3.14.9) в явном виде задаются следующим образом:

$$p_i = p_0 \delta_{if} (\partial_4 \chi^f + W_4^\alpha \gamma_{\alpha k}^f \chi^k + \Phi_4^f), \quad (3.14.6a)$$

$$\sigma_i^A = (\lambda/2) \delta^{AB} \delta_{if} (\partial_C \chi^f + W_C^\alpha \gamma_{\alpha k}^f \chi^k + \Phi_C^f) \times \\ \times (\delta^{BC} \delta^{FD} E_{FD} + (2\mu/\lambda) \delta^{RB} \delta^{SC} E_{RS}), \quad (3.14.6b)$$

где компоненты тензора «инженерных» деформаций имеют вид

$$E_{AB} = (\partial_A \chi^i + \gamma_{\alpha k}^i W_A^\alpha \chi^k + \Phi_A^i) \delta_{ij} (\partial_B \chi^j + \\ + \gamma_{\alpha k}^j W_B^\alpha \chi^k + \Phi_B^j) - \delta_{AB}, \quad (3.14.18)$$

и

$$R_I^{AB} = -s_1 \delta_{ij} \delta^{AC} \delta^{BD} [\partial_C \Phi_D^i - \partial_D \Phi_C^i + \\ + \gamma_{\alpha k}^i (W_C^\alpha \Phi_D^k - W_D^\alpha \Phi_C^k) + \gamma_{\alpha k}^i F_{CD}^\alpha \chi^k], \quad (3.14.7a)$$

$$R_I^{A4} = (1/y) s_1 \delta_{ij} \delta^{AC} [\partial_C \Phi_4^i - \partial_4 \Phi_C^i + \\ + \gamma_{\alpha k}^i (W_C^\alpha \Phi_4^k - W_4^\alpha \Phi_C^k) + \gamma_{\alpha k}^i F_{C4}^\alpha \chi^k]; \quad (3.14.7b)$$

$$G_\eta^{AB} = -s_2 C_{\eta\alpha} \delta^{CA} \delta^{DB} (\partial_C W_D^\alpha - \partial_D W_C^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha W_C^\beta W_D^\gamma), \quad (3.14.8a)$$

$$G_\eta^{A4} = (1/\zeta) s_2 C_{\eta\alpha} \delta^{CA} (\delta_C W_4^\alpha - \partial_4 W_C^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha W_C^\beta W_4^\gamma). \quad (3.14.8b)$$

§ 3.15. ДЕФЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С ГРУППОЙ $T(3)$ ИЛИ ГРУППОЙ $SO(3)$

Тело без дисклинаций — это такое тело, в котором не нарушается однородность действия группы вращений $SO(3)_0$. Поэтому в данном случае отсутствуют компенсирующие 1-формы $W^\alpha = W_\alpha^a(X^b) dX^a$ и нет необходимости рассматривать вариации по этим формам. При $W^\alpha = 0$ внешняя ковариантная производная D сводится к обычной внешней производной d . Таким образом, теория бездисклинационного тела получается из наших предварительных результатов путем замены $D \rightarrow d$ и отбрасывания всех уравнений, которые были получены в § 3.12 при вариации по W^α . Тогда мы получим следующие полевые уравнения для материалов без дисклинаций:

$$B = d\chi + \Phi, \quad Z_i = (\partial L / \partial B_a^i) \pi_a, \quad (3.15.1)$$

$$D = d\Phi, \quad R_i = (\partial L / \partial \mathcal{D}_{ab}^i) \pi_{ab}, \quad (3.15.2)$$

$$dZ = 0, \quad (3.15.3)$$

$$dR = \frac{1}{2} Z. \quad (3.15.4)$$

Так как (3.15.3) представляет собой условия интегрируемости для (3.15.4), другие условия совместности не нужны, и теория полна. С материалами без дисклинаций иметь дело гораздо проще, чем с общим случаем материалов, содержащих как дисклинации, так и дислокации. В частности, из

(3.14.6a, б), (3.14.18), (3.14.1a) и (3.14.2a, б) имеем

$$\begin{aligned} p_i &= \rho_0 \delta_{ij} (\partial_4 \chi^j + \Phi_4^j), \\ \sigma_i^A &= \frac{1}{2} \lambda \delta^{AB} \delta_{ij} (\partial_C \chi^j + \Phi_C^j) (\delta^{BC} \delta^{FD} E_{FD} + (2\mu/\lambda) \delta^{RB} \delta^{SC} E_{RS}), \end{aligned} \quad (3.15.5)$$

$$E_{AB} = (\partial_A \chi^i + \Phi_A^i) \delta_{ij} (\partial_B \chi^j + \Phi_B^j) - \delta_{AB},$$

$$\partial_4 p_i - \partial_A \sigma_i^A = 0;$$

$$s_1 \delta_{ij} \delta^{BD} [\partial^A (\partial_A \Phi_D^i - \partial_D \Phi_A^i) - (1/y) \partial_4 (\partial_4 \Phi_D^i - \partial_D \Phi_4^i)] = \frac{1}{2} \sigma_i^B, \quad (3.15.6)$$

$$(s_1/y) \delta_{ij} \partial^A (\partial_A \Phi_4^i - \partial_4 \Phi_A^i) = \frac{1}{2} p_i.$$

Если ввести смещения $u^i(X^b)$ с помощью подстановки

$$\chi^i(X^b) = \delta_A^i X^A + u^i(X^b), \quad (3.15.7)$$

то из (3.15.5) следует, что

$$E_{AB} = (\delta_A^i + \partial_A u^i + \Phi_A^i) \delta_{ij} (\delta_B^j + \partial_B u^j + \Phi_B^j) - \delta_{AB}, \quad (3.15.8)$$

$$p_i = \rho_0 \delta_{ij} (\partial_4 u^j + \Phi_4^j). \quad (3.15.9)$$

Следовательно, мы имеем 15 переменных (u^i, Φ_A^i, Φ_4^i) и 15 уравнений (3.15.6) и (3.15.5)₄ для их определения. Однако не все Φ_a^i независимы. Они должны удовлетворять трем условиям, вытекающим из неточности форм, а именно условиям

$$X^A \Phi_A^i + T \Phi_4^i = 0, \quad (3.15.10)$$

т. е. получается, что система уравнений переопределена. К счастью, из уравнений $dR_i = \frac{1}{2} Z_i$ (т. е. (3.15.6)) следуют 3 уравнения $dZ_i = 0$ (т. е. (3.15.5)₄), так что в конце концов число уравнений совпадает с числом неизвестных.

Хотя условия неточной калибровки (3.15.10) являются основой развиваемой здесь теории, тот факт, что уравнения эволюции являются калибровочно-инвариантными, позволяет использовать любую калибровку, удобную для их анализа. Если мы наложим псевдолоренцево калибровочное условие

$$0 = \partial^A \Phi_A^i - (1/y) \partial_4 \Phi_4^i = \partial_a (k^{ab} \Phi_b^i), \quad (3.15.11)$$

то система (3.15.6) сведется к системе

$$\begin{aligned} s_1 \delta_{ji} \delta^{BD} (\partial^A \partial_A \Phi_D^i - (1/y) \partial_4 \partial_4 \Phi_D^i) &= \frac{1}{2} \sigma_j^B, \\ (s_1/y) \delta_{ji} (\partial^A \partial_A \Phi_4^i - (1/y) \partial_4 \partial_4 \Phi_4^i) &= \frac{1}{2} p_j. \end{aligned} \quad (3.15.12)$$

Сразу видно, что система (3.15.12) является гиперболической при условии

$$y > 0. \quad (3.15.13)$$

Так как и уравнения баланса импульса (3.15.5)₄ являются гиперболическими, задача Коши для материалов при отсутствии дисклинаций оказывается корректно поставленной.

Допустим, что теперь нарушена однородность действия только группы вращений $SO(3)_0$. Так как $SO(3)$ — полупростая группа, при этом возникает исходная конструкция Янга — Миллса. Соответственно, положив $s_1 = 0$, $\Phi = 0$, из (3.8.14) получим

$$L = L_0 - s_2 L_2. \quad (3.15.14)$$

Варьируя по внешним полям χ^i функционал действия (3.10.1) с лагранжианом (3.15.14), получаем уравнения баланса импульса

$$DZ = 0. \quad (3.15.15)$$

Вариация по компенсирующим полям W_a^α приводит к полевым уравнениям

$$D\bar{G} = \frac{1}{2} \bar{J}. \quad (3.15.16)$$

Из (3.12.7) и (3.9.30) с учетом того, что $\Phi = 0$ и $R = 0$, получаем образующие соотношения

$$2\bar{G} = -s_2 C^{\alpha\beta} (\partial L_2 / \partial F_{ab}^\alpha) \pi_{ab} v_\beta, \quad \bar{J} = C^{\alpha\beta} Z v_\alpha \chi v_\beta. \quad (3.15.17)$$

§ 3.16. СИЛЫ И ТЕНЗОРЫ ЭНЕРГИИ — ИМПУЛЬСА

В силу того что теория получена с помощью вариационного принципа, она имеет хорошо определенный тензор энергии — импульса T_a^b , который может быть непосредственно выражен через лагранжиан, его производные и полевые переменные. Полный лагранжиан $L = L(\chi, \Phi, W, \partial_a \chi, \partial_a \Phi, \partial_a W)$ для материала с дефектами задается выражением (3.8.14) и допускает разложение на слагаемые

$$L = L_0 - s_1 L_1 - s_2 L_2. \quad (3.16.1)$$

Так как компоненты тензора энергии — импульса задаются соотношениями

$$T_b^a = \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \chi^i)} \partial_b \chi^i + \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \Phi_e^i)} \partial_b \Phi_e^i + \frac{\partial L}{\partial (\partial_a W_e^a)} \partial_b W_e^a - \delta_b^a L, \quad (3.16.2)$$

разложение на слагаемые лагранжиана L непосредственно влечет за собой разложение тензора энергии — импульса

$$T_b^a = T_{0b}^a - T_{1b}^a - T_{2b}^a. \quad (3.16.3)$$

Здесь

$$T_{0b}^a = \partial_b \chi^i \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_a \chi^i)} - \delta_b^a L_0 \quad (3.16.4)$$

— тензор энергии — импульса «упругого отклика»,

$$T_{1b}^a = s_1 \partial_b \Phi_e^i \frac{\partial L_1}{\partial (\partial_a \Phi_e^i)} + s_1 \partial_b W_e^a \frac{\partial L_1}{\partial (\partial_a W_e^a)} - s_1 \delta_b^a L_1 \quad (3.16.5)$$

— тензор энергии — импульса «дислокационного отклика», а

$$T_{2b}^a = s_2 \partial_b W_e^a \frac{\partial L_2}{\partial (\partial_a W_e^a)} - s_2 \delta_b^a L_2 \quad (3.16.6)$$

— тензор энергии — импульса «дисклинационного отклика». С учетом (3.9.13), (3.9.22) и (3.9.25) эти выражения можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{0b}^a &= Z_i^a \partial_b \chi^i - \delta_b^a L_0, \\ T_{1b}^a &= -2R_i^{ae} (\partial_b \Phi_e^i + v_{aj} \chi^j \partial_b W_e^a) - s_1 \delta_b^a L_1, \\ T_{2b}^a &= -2G_a^{ae} \partial_b W_e^a - s_2 \delta_b^a L_2. \end{aligned} \quad (3.16.7)$$

Так как любое решение полевых уравнений (3.14.1) — (3.14.3) дает

$$\partial_a T_b^a = 0,$$

то выражения (3.6.7) приводят к соотношению «баланса сил и энергии»

$$\mathcal{F}_{0b} = \mathcal{F}_{1b} + \mathcal{F}_{2b}, \quad (3.16.8)$$

где

$$\mathcal{F}_{0b} = \partial_a T_{0b}^a, \quad \mathcal{F}_{1b} = \partial_a T_{1b}^a, \quad \mathcal{F}_{2b} = \partial_a T_{2b}^a. \quad (3.16.9)$$

Используя полевые уравнения и проводя простые преобразования, получим явные выражения для энергии и сил раз-

ЛИЧНЫХ ТИПОВ:

$$\mathcal{F}_{0a} = \sigma_i^B \partial_a \Phi_B^i - p_i \partial_a \Phi_4^i + \gamma_{\alpha j}^i \chi^j (\sigma_i^B \partial_a W_B^\alpha - p_i \partial_a W_4^\alpha) + \gamma_{\alpha j}^i F_{cb}^{\alpha} R_i^{cb} \partial_a \chi^j, \quad (3.16.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{1a} = & \sigma_i^B \partial_a \Phi_B^i - p_i \partial_a \Phi_4^i - \gamma_{\alpha j}^i \chi^j Z_i^b \partial_a W_b^\alpha - \\ & - \gamma_{\alpha i}^k R_k^{ec} \{2W_e^\alpha (\partial_a \Phi_c^i + \gamma_{\beta j}^i \chi^j \partial_a W_c^\beta) - \\ & - \partial_a (W_e^\alpha \Phi_c^i - W_c^\alpha \Phi_e^i) + \partial_e (2\chi^i \partial_a W_c^\alpha) - \partial_a (\chi^i F_{ec}^\alpha)\}, \end{aligned} \quad (3.16.11)$$

$$\mathcal{F}_{2a} = -\mathcal{F}_a^b \partial_a W_b^\alpha + C_{\beta\gamma}^\eta [2C_{\alpha\eta} C^{\gamma\delta} G_\delta^{bc} W_b^\beta \partial_a W_c^\alpha + G_\eta^{bc} \partial_a (W_b^\beta W_c^\gamma)]. \quad (3.16.12)$$

При отсутствии дисклинаций (т. е. когда $W_a^\alpha = 0$) для статической задачи (т. е. когда $\Phi_4^i = 0$, $p_i = 0$), дислокационные силы $\{\mathcal{F}_{1A}\}$ обращаются в силы Пича — Кёлера [11] для бездисклинационного распределения дислокаций. Пусть $\{b^i\}$ — вектор Бюргерса, определенный выражением (3.7.12), а $\{t^A\}$ — единичный касательный вектор дислокационной линии. Тогда для статического случая имеем

$$\mathcal{D}^i|_T = \alpha^{iA} \mu_A = b^i t^A \varepsilon_{ABC} dX^B \wedge dX^C, \quad (3.16.13)$$

а из (3.7.5)₄ сразу получаем

$$\partial_B \Phi_C^i = b^i t^A \varepsilon_{ABC}. \quad (3.16.14)$$

Следовательно, (3.16.11) и (3.16.14) дают выражение для силы Пича — Кёлера:

$$\mathcal{F}_{1B} = \sigma_i^C \partial_B \Phi_C^i = -\varepsilon_{BCD} t^C (b^i \sigma_i^D). \quad (3.16.15)$$

При наличии дисклинаций уравнения (3.16.10) — (3.16.12) дают полное описание системы сил, действующих на упругое тело, дислокации и дисклинации. Следует особо подчеркнуть тот факт, что уравнения баланса сил и энергии (3.16.8) устанавливают точные динамические зависимости действия и противодействия. Например, в статике для уже рассмотренного бездисклинационного случая соотношения (3.16.10) и (3.16.11) показывают, что упругая среда вызывает силы, действующие на дислокации, которые равны и противоположно направлены силам, с которыми дислокации действуют на среду.

Если в (3.16.10) положить индекс a равным 4, то мы получим явное выражение для приращения упругой энергии. Это выражение существенно упростится, если мы ограничимся бездисклинационными средами. В этом случае с са-

мого начала опускаются поля W_a^α и получающиеся уравнения поля становятся такими же, как и в начале § 3.15. Тогда приращение упругой энергии выражается в виде

$$\mathcal{F}_{04} = \sigma_i^B \partial_4 \Phi_B^i - p_i \partial_4 \Phi_4^i. \quad (3.16.16)$$

Если мы далее допустим, что используется неточная калибровка, то дисторсия и скорость дисторсии будут задаваться формулами

$$B_A^i = \partial_A \chi^i + \Phi_A^i, \quad V^i = B_4^i = \partial_4 \chi^i + \Phi_4^i \quad (3.16.17)$$

и $\chi^i = \delta_A^i X^A + u_{\text{total}}^i$. Однако в обычном разложении на упругую и пластическую части исходная теория пластичности дает выражения $\partial_A \chi^i = B_A^i + B_A^{Pi}$, $\partial_4 \chi^i = V^i + V^{Pi}$. Сравнение с (3.16.17) показывает, что пластическая дисторсия и скорость пластической деформации связаны с полями Φ_A^i формулами

$$B_A^{Pi} = -\Phi_A^i, \quad V^{Pi} = -\Phi_4^i \quad (3.16.18)$$

соответственно. Подставляя (3.16.18) в (3.16.16), получаем

$$\mathcal{F}_{04} = -\sigma_i^A \partial_4 B_A^{Pi} + p_i \partial_4 V^{Pi}. \quad (3.16.19)$$

Величина $\sigma_i^A \partial_4 B_A^{Pi}$ является скоростью изменения работы, совершаемой пластической деформацией, или просто мощностью. Для квазистатического процесса, в котором можно пренебречь величиной $p_i \partial_4 V^{Pi}$, постулат Друккера ([36, разд. 18]), утверждающий, что скорость изменения работы пластической деформации неотрицательна, показывает, что приращение упругой энергии неположительно. Следовательно, в этом случае упругий отклик всегда уменьшает энергию дислокационных полей.

Хотя приведенные выше рассуждения не доказывают (и не опровергают) постулат Друккера, они сразу приводят к общепринятой интерпретации приращения упругой энергии $\mathcal{F}_{04}$. Отметим, что проведенное рассмотрение не ограничивается квазистатическим случаем. Действительно, выражение (3.16.19) дает точное соотношение для перехода энергии упругого отклика в энергию дислокационных полей и может быть интерпретировано как динамическое обобщение фундаментального выражения $\sigma_i^A \partial_4 B_A^{Pi}$, характеризующего квазистатический процесс. Конечно, неразумно требовать, чтобы для общего случая величина $\mathcal{F}_{04}$ была неположительна в каждой пространственно-временной точке в E_4 . Например, существуют задачи, в которых смещения и (или) дисторсии

являются волнами. Очевидным кандидатом на роль аналогичного условия в общем случае является соотношение

$$\int_{-\infty}^T \left(\int_{\mathcal{B}} \mathcal{F}_{04} \mu \right) \wedge dT \leq 0,$$

так как из него следует, что сохраняется наиболее существенное свойство пластичности, а именно необратимость. Так или иначе, ясно, что теория дает правильное расширение описания существенных сторон феноменологии пластичности через динамику дефектов в материалах.

§ 3.17. ОБСУЖДЕНИЕ

Изложение теории, приведенное в предыдущих параграфах, начиналось с замечания о некорректной постановке задачи Коши для обычных уравнений динамики дефектов. Комбинирование теории минимальной связи Янга — Миллса, общепринятых уравнений динамики дефектов и структурных уравнений Картана дало нам возможность получить полную полевую теорию для материалов с дислокациями и дисклинациями. Как отмечалось, теория Янга — Миллса состоит из двух частей: концепции минимальной замены и концепции минимальной связи. Прямым следствием построения минимальной замены является замена градиентов деформаций $\partial_4 \chi^i$ и ньютоновой скорости $\partial_4 \chi^i$ на дисторсии β_A^i и скорости дисторсии V^i согласно соотношению (3.7.5). Эта замена возникает как следствие калибровочной инвариантности, а не как результат наложения каких-либо условий. В современных работах замена градиентов деформаций дисторсиями объясняется с той точки зрения, что динамика дефектов должна быть способна описать теорию пластичности. В соответствии с этим интегрируемые смещения просто заменяются неинтегрируемыми дисторсиями, чтобы предотвратить появление «отклика напряжения» на «пластическую деформацию». Этот аргумент незаконен, так как теория пластичности пока что не выведена из теории динамики Дефектов. Столь же необоснованно выглядят законы Ньютона в динамике дефектов при замене ньютоновой скорости $\partial_4 \chi^i$ на скорость дисторсии V^i .

Используя только построение минимальной замены, мы сумели показать невозможность существования чисто дисклинационного материала (см. § 3.4). Наличие дисклинаций предполагает наличие дислокаций. Это потребовало от нас проведения различия между дислокациями, порожденными

дисклинациями (вращательными дислокациями) и трансляционными дислокациями. Последние возникают из-за неоднородного действия группы трансляций $T(3)$ и описываются полями φ_a^i . Неоднородное действие группы $SO(3)$ порождает не только дисклинации, но также и вращательные дислокации. Следовательно, полное вращение можно рассматривать как комбинацию собственно вращения и вращающего, которое может быть реализовано с помощью последовательных инфинитезимальных трансляций. Подобная ситуация имеет прямую аналогию со спином и орбитальным моментом в квантовой механике. Поэтому при нарушении однородности действия группы вращений $SO(3)$ возникают дефекты двух типов: чисто вращательные (дисклинации) и связанные с ними дефекты трансляции (вращательные дислокации). Этот эффект столь же очевиден в выражениях (3.7.11) и (3.7.12)

для векторов Бюргерса и Франка. Первый член, $\int_{\partial S_1} \varphi^i \Big|_T$, является вектором Бюргерса, связанным с чисто трансляционными дислокациями, в то время как второй, $\int_{\partial S_1} H_3(d\Gamma_i^j \chi^j) \Big|_T$,

появляется только благодаря вращательным дислокациям. Аналогично вектор Франка (3.7.11) состоит из двух слагаемых. Первое из них, $\int_{\partial S_1} (\Theta_i^j \chi^j) \Big|_T$,

связано с наличием дисклинаций, а второе, $\int_{\partial S_1} (\Gamma_i^j \wedge \varphi^j) \Big|_T$, возникает из-за дислокаций.

Можно было бы связывать вращательные дислокации с дислокационными петлями, а дисклинации рассматривать как характеристики наличия источников Франка — Рида. Такой взгляд на вещи является лишь предположением; доказательство, если оно существует, остается на будущее.

Вторая часть теории Янга — Миллса — конструкция минимальной связи — дает нам возможность построить лагранжиан, описывающий материалы с дислокациями и дисклинациями.

Динамика дефектов выросла из теории упругости. Поэтому естественно начинать с лагранжиана, описывающего упругое поведение материалов. В качестве отправной точки нами был выбран простейший лагранжиан L_0 ; теория могла бы быть построена и на основе более сложного исходного лагранжиана L_0 . В этом случае мы получили бы теории, которые описывают другие и существенно более сложные явления. В то же время лагранжианы L_1 и L_2 , заданные соответственно выражениями (3.8.12) и (3.8.8), существенным

образом фиксированы конструкцией минимальной связи. Можно, конечно, пытаться явно моделировать взаимодействие между дислокациями и дисклинациями, рассматривая дополнительные члены, но это привело бы к существенному увеличению трудностей при решении и странностям в интерпретации результатов.

Полученные из лагранжиана (3.8.14) с помощью вариационного принципа уравнения Эйлера — Лагранжа задаются соотношениями (3.14.1) — (3.14.3):

$$DZ = -2R \wedge \Theta, \quad DR = \frac{1}{2}Z, \quad DG = \frac{1}{2}J.$$

Первая система, (3.14.1), представляет собой уравнения баланса импульса. При отсутствии дисклинаций они сводятся к классической формулировке баланса импульса:

$$\partial_A \sigma_i^A = \partial_A p_i \quad (\text{т. е. } dZ = 0).$$

Однако наличие дефектов приводит к появлению сил, т. е. уравнения баланса импульса становятся неоднородными дифференциальными уравнениями. В то же время третий закон Ньютона наводит на мысль о наличии сил, которые действуют на дисклинации. Они были строго получены в § 3.16. Используя (3.16.8) и (3.16.10) — (3.16.12), мы можем выписать соотношения для баланса сил:

$$\mathcal{F}_{0A} = \mathcal{F}_{1A} + \mathcal{F}_{2A}, \quad (3.17.1)$$

$$\mathcal{F}_{0A} = [\sigma_i^B \partial_A \Phi_B^i - p_i \partial_A \Phi_4^i] + [\gamma_{\alpha j} \chi^j (\sigma_i^B \partial_A W_B^{\alpha} - p_i \partial_A W_4^{\alpha}) + \gamma_{\alpha j}^i F_{cb}^{\alpha} R_i^{cb} \partial_A \chi^j], \quad (3.17.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{1A} = & Z_i^b \partial_A \Phi_b^i - [Z_i^b \gamma_{\alpha j}^i \chi^j \partial_A W_b^{\alpha} + \\ & + \gamma_{\alpha i}^k R_k^{ec} (2W_e^{\alpha} (\partial_A \Phi_c^i + \gamma_{\beta j}^i \chi^j \partial_A W_c^{\beta}) + \\ & + \partial_A (W_e^{\alpha} \Phi_c^i - W_c^{\alpha} \Phi_e^i) - \partial_e (2\chi^i \partial_A W_c^{\alpha}) + \partial_A (\chi^i F_{ec}^{\alpha}))], \end{aligned} \quad (3.17.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2A} = & -\mathcal{F}_{\alpha}^b \partial_A W_b^{\alpha} + C_{\beta \gamma}^{\eta} [2C_{\alpha \eta} C^{\gamma \delta} G_{\delta}^{bc} W_b^{\beta} \partial_A W_c^{\alpha} + \\ & + G_{\eta}^{bc} \partial_A (W_b^{\beta} W_c^{\gamma})]. \end{aligned} \quad (3.17.4)$$

Отметим, что избыточные упругие силы $\{\mathcal{F}_{0A}\}$ точно компенсируются силами, развиваемыми средой при действии на дислокации (3.17.3) и дисклинации (3.17.4). При отсутствии дисклинаций (т. е. при $W^{\alpha} = 0$) очевидно, что силы $\{\mathcal{F}_{1A}\}$, действующие на дислокации и заданные соотношением (3.17.3), точно уравновешиваются избыточными упругими

силами $\{\mathcal{F}_{0\alpha}\}$ [см. (3.17.2)]. Нами также было показано, что в этом случае силы (3.17.3) можно отождествить с силами Пича — Кёлера, действующими на однородные поля дислокаций.

При одновременном наличии дислокаций и дисклинаций ситуация существенно усложняется. Силы (3.17.3) и (3.17.4), действующие на дефекты, можно рассматривать как силы реакции на те силы, которые появляются в правой части уравнений баланса импульса. Мы уже отождествили первый член в (3.17.3) с силами, действующими со стороны среды на дислокации. С другой стороны, при наличии дисклинаций мы провели различие между трансляционными и вращательными дислокациями. Следовательно, первый член фактически определяет силы, действующие на трансляционные дислокации, в то время как члены в квадратных скобках в (3.17.3) можно рассматривать как силы, действующие со стороны среды на вращательные дислокации.

Аналогичным образом избыточные упругие силы в (3.17.2) имеют два источника — дислокационный и дисклинационный. Отметим также, что при отсутствии дефектов избыточные упругие силы, как и следовало ожидать, обращаются в нуль ($\Phi_a^i = 0$, $W_a^\alpha = 0$).

Если в (3.16.8) и (3.16.10) — (3.10.12) мы положим $\alpha = 4$, то получим уравнение баланса энергии

$$(\mathcal{F}_0)_4 = (\mathcal{F}_1)_4 + (\mathcal{F}_2)_4.$$

Здесь $(\mathcal{F}_0)_4$ — избыток упругой энергии, накапливающейся в дефектном материале, а $(\mathcal{F}_1)_4$ и $(\mathcal{F}_2)_4$ — энергии обмена дислокаций и дисклинаций соответственно.

Обратимся теперь к эволюционным уравнениям динамики дефектов.

Уравнения (3.14.2) можно рассматривать как уравнения баланса дислокаций. Из этих уравнений видно, что при любом ненулевом напряжении переменные дислокационного поля отличны от нуля. Следовательно, можно сказать, что напряжения порождают дислокации. Действительно, как мы увидим в следующей главе, дислокации в r -м порядке приближения всегда порождаются напряжениями, определенными $(r-1)$ -м порядком приближения. Условия интегрируемости для уравнений баланса дислокаций порождают уравнения баланса импульса (3.14.1), которые явно включены в полевые уравнения динамики дефектов.

Из уравнений баланса дисклинаций (3.14.3) следует, что дислокации и дисторсии служат источниками дисклинаций; мы говорим, что дисклинации порождаются полями $\mathcal{F}_a^\alpha =$

$= \mathcal{F}_a^a(R, B)$. Необходимым условием обращения дисклинаций в нуль является следующее:

$$\mathbf{J} = 0. \quad (3.17.5)$$

В этом случае дисклинационные поля обращаются в нуль, так как они удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям с однородными начальными условиями. С помощью (3.12.13) условие (3.17.5) переводится в систему уравнений, которой должны удовлетворять ф-поля:

$$R_i^{ab} \gamma_{af}^i B_b^f = 0. \quad (3.17.6)$$

Следовательно, при отсутствии дисклинаций допустимы только такие решения уравнений (3.14.2), которые удовлетворяют условиям (3.17.6).

Условия интегрируемости (3.14.4) для уравнений баланса дисклинаций дают уравнение баланса момента импульса. Последнее является весьма существенным аспектом теории. Обычно в динамике дефектов пренебрегают условием баланса момента импульса и не используют его в уравнениях динамики. Выдвигаемые при этом аргументы сводятся к тому, что как физический закон он справедлив для любой ситуации и поэтому должен выполняться и в динамике дефектов. Однако в нашей теории уравнения баланса момента импульса представляют собой условия интегрируемости для уравнений, описывающих внутренние вращательные степени свободы, и поэтому получают явным образом из самой теории. При отсутствии дефектов наши результаты точно сводятся к классической формулировке условия баланса момента импульса (3.13.17):

$$\sigma_i^A \partial_A \chi^i = \sigma_j^A \partial_A \chi^i,$$

где σ_i^A — компоненты тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа. При наличии дислокаций и дисклинаций уравнение (3.13.17) заменяется на (3.13.18):

$$\sigma_i^A (B_c^k) B_A^j = \sigma_j^A (B_c^k) B_A^i,$$

где дисторсии B_A^j в точности совпадают с плечом момента. Тогда члены

$$\sigma_i^A (B_c^k) W_{A\alpha k}^\alpha \gamma_{\alpha k}^j \quad \text{и} \quad \sigma_i^A (B_c^k) \varphi_A^j,$$

входящие в (3.13.19) (напомним, что $B_A^j = \partial_A \chi_A^j + \varphi_A^j + W_{A\alpha k}^\alpha \gamma_{\alpha k}^j$), можно рассматривать как связанные с дисклинациями и дислокациями соответственно.

Мы видели, насколько полезной является теория Янга — Миллса при развитии полной полевой теории динамики дефектов. Так как в данной книге обе эти теории оказываются в сильной взаимной связи, можно надеяться на то, что лучшее понимание природы дефектов в материалах прольет свет на некоторые аспекты физики элементарных частиц, для которой изначально и предназначалась теория Янга — Миллса. Для очень больших плотностей энергии дисклинаций коэффициент s_2 в уравнениях баланса дисклинаций $DG = 0$ соответствует уравнениям Янга — Миллса для свободных полей в физике элементарных частиц. Мы напомним читателю, что основной группой для исходной теории Янга — Миллса является унитарная группа $SU(2)$. Для нашей цели рассмотрим подгруппу полной исходной группы динамики дефектов $G = SO(3) \supset T(3)$, а именно полупростую группу вращений $SO(3)$. Так как для исходных групп обеих теорий $SO(3)$ и $SU(2)$ имеет место изоморфизм их алгебр Ли, уравнения свободных полей Янга — Миллса и полевые уравнения динамики дисклинаций оказываются связанными между собой. Тем самым известные решения уравнений в одной теории могут быть использованы в другой. Известное статическое решение уравнения Янга — Миллса — решение Янга — Ву [16], примененное к динамике дефектов, действительно позволяет получить интересные результаты. Аналогичным образом новые решения, которые будут получены в динамике дефектов, могут прояснить существенные аспекты физики частиц.

Развиваемая в данной работе теория является теорией дефектов, непрерывно распределенных в материале. Поэтому невозможно с ее помощью дать ответы на вопросы, связанные с задачами о единичной дислокации или дисклинации. Переход от континуальной теории к дискретной очень сложен. Здесь неясным является тип сингулярности, который должны иметь внутренние полевые переменные ϕ_a^i и W_a^α для того, чтобы появилась возможность описывать единичный дефект.

Полевые переменные ϕ_a^i и W_a^α являются внутренними полевыми переменными. Поэтому они не поддаются изменениям в той степени, в какой можно выбирать и изменять внешние поля χ^i . Далее, в силу того что исходная конфигурация считается свободной от дефектов, условия Коши для W_a^α и ϕ_a^i являются нулевыми. Соответственно статическая задача может рассматриваться только как «предел больших времен» в задаче Коши. Поэтому априори нельзя предположить независимость предыстории внешних управляющих параметров.

Тот факт, что полевые переменные φ_a^i и W_a^α представляют собой внутренние переменные, имеет фундаментальное значение с совершенно другой точки зрения. Представляется общепринятым, что полевые уравнения, полученные с помощью вариационного принципа, не могут моделировать процессы, диссипативные в макроскопическом термодинамическом смысле. Фактически, как было показано в [41], существует столько независимых каналов диссипации, сколько имеется независимых внутренних переменных. В представленной здесь теории оказывается, что упругая механическая энергия частично перераспределяется во внутренние степени свободы дефектов φ_a^i и W_a^α , откуда она уже невозвратима. Таким образом, хотя данная теория выводится на основе вариационных принципов, берущих начало в теории упругости, полученные полевые уравнения начинают описывать внутренние механизмы диссипации, как только поля φ_a^i и (или) W_a^α становятся отличными от нуля.

§ 3.18. КОНЕЧНЫЕ ТЕЛА БЕЗ ДИСКЛИНАЦИЙ С ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКОЙ

Развиваемая до сих пор теория основывалась на предположении о пространственной неограниченности тел, явно проявляющемся в записи функционала действия

$$\mathcal{A}[\chi, \varphi, W] = \int_{\mathcal{B} \times [T_0, T_1]} (L_0 - s_1 L_1 - s_2 L_2) \pi,$$

в которой отсутствуют интегралы по границам, обуславливающие работу, совершаемую внешним окружением на границах тела. Хотя выше мы могли использовать такой вид функционала действия для моделирования ограниченных тел с условиями Дирихле или с однородными условиями Неймана на границе, для описания взаимодействия тела с внешним окружением такая форма записи не приспособлена и, следовательно, теорию нельзя считать полной.

Большинство проблем, представляющих практический интерес, относится к задачам без дисклинаций, поэтому мы ограничимся рассмотрением тел, свободных от дисклинаций. При отсутствии взаимодействия с внешним окружением бездисклинационные тела описываются функционалом действия

$$\mathcal{A}[\chi, \varphi] = \int_{E_s} (L_0 - s_1 L_1) \pi. \quad (3.18.1)$$

Для ограниченного тела $\mathcal{B}$ (13.8.1) переходит в

$$\mathcal{A}[\chi, \varphi] = \int_{T_0}^{T_1} \int_{\mathcal{B}} (L_0 - s_1 L_1) \pi. \quad (3.18.2)$$

Приемлемость такой формы записи для учета взаимодействия с внешним окружением достигается здесь за счет введения интеграла по точной 4-форме, так как этот интеграл можно с помощью теоремы Стокса превратить в поверхностный интеграл. Очевидно, что не любая из точных 4-форм подходит для этой цели, и результат будет зависеть от выбора уравнений Эйлера—Лагранжа во внутренних точках тела. Выбранная точная 4-форма должна оставлять инвариантными уравнения Эйлера—Лагранжа классической теории упругости, так как вся эта теория исходит из функционала действия

$$\mathcal{A}_{el}[\chi] = \int_{T_0}^{T_1} \int L_0 \pi, \quad (3.18.3)$$

из которого с помощью концепций минимальной замены и минимальной связи получается функционал (3.18.2). Точные формы, обладающие данным свойством, известны как элементы *нуль-класса* оператора Эйлера—Лагранжа [3, 39] и всегда появляются в задачах с неоднородными условиями Неймана [40].

Исходя из функционала (3.18.3) классической теории упругости, сделаем замену

$$L_0 \pi \rightarrow L_0 \pi + d(\chi^i dQ_i) = L_0 \pi + d\chi^i \wedge dQ_i, \quad (3.18.4)$$

где Q_i , $i = 1, 2, 3$, — три 2-формы на E_4 , не зависящие от переменных состояния χ^i . Следовательно, можно записать

$$Q_i = \frac{1}{2} Q_i^{ab} (X^e) \pi_{ab}, \quad Q_i^{ab} + Q_i^{ba} = 0,$$

так как $\{\pi_{ab}\}$ — базис для $\Lambda^2(E_4)$. Легко видеть, что

$$dQ_i = \partial_b Q_i^{ba} \pi_a,$$

и поэтому

$$d\chi^i \wedge dQ_i = \partial_a \chi^i \partial_b Q_i^{ba} \pi.$$

Таким образом, замена (3.18.4) ведет к следующей замене лагранжиана классической теории упругости:

$$L_0 \rightarrow L_0 + \partial_a \chi^i \partial_b Q_i^{ba}. \quad (3.18.5)$$

Поэтому при использовании конструкций минимальной замены и минимальной связи (3.18.2) заменяется новым функ-

ционалом действия

$$\mathcal{A}(\chi, \varphi) = \int_{T_0}^{T_1} \int_{\mathcal{B}} (L_0 + B_a^i \partial_b Q^{ba} - s_i L_i) \pi. \quad (3.18.6)$$

Проверка уравнений поля (3.15.1) — (3.15.4) для тел без дисклинаций показывает, что единственное изменение в результатах, связанное с заменой (3.18.2) на (3.18.6), сводится к

$$Z_i \rightarrow \hat{Z}_i = Z_i + \partial_b Q_i^{ba} \pi_a = Z_i + dQ_i. \quad (3.18.7)$$

Таким образом, мы имеем уравнения поля

$$\mathbf{B} = d\chi + \varphi, \quad \hat{Z}_i = (\partial L_0 / \partial B_a^i) \pi_a, \quad (3.18.8)$$

$$\mathbf{D} = d\varphi, \quad R_i = (\partial L / \partial \mathcal{D}_{ab}^i) \pi_{ab}, \quad (3.18.9)$$

$$d\mathbf{Z} = 0, \quad (3.18.10)$$

$$2d\mathbf{R} = \hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} + \mathbf{Q} \quad (3.18.11)$$

и граничные условия

$$(\sigma_i^A - \partial_B Q^{BA} - \partial_4 Q^{4A})|_{\partial B} N_A = 0, \quad (3.18.12)$$

$$R_i^a|_{\partial B} N_A = 0. \quad (3.18.13)$$

(Отметим, что $d\hat{Z}_i = dZ_i + d^2Q_i = dZ_i$, т. е. уравнения баланса импульса $dZ_i = 0$ остаются инвариантными.) Таким образом, изменяются только уравнения (3.18.10) и граничные условия (3.18.11).

Положим

$$S_i^A = \partial_B Q_i^{BA} + \partial_4 Q_i^{4A}, \quad P_i = -\partial_B Q_i^{B4}. \quad (3.18.14)$$

В силу того что $Q_i^{ab} + Q_i^{ba} = 0$, имеем

$$\partial_A S_i^A = \partial_4 P_i. \quad (3.18.15)$$

В то же время (3.18.11) и (3.18.12) дают

$$s_i \delta_{ji} \delta^{BD} [\partial^A (\partial_A \Phi_D^i - \partial_D \Phi_A^i) - (1/y) \partial_4 (\partial_4 \Phi_D^i - \partial_D \Phi_4^i)] = \frac{1}{2} (\sigma_j^B - S_j^B), \quad (3.18.16)$$

$$(s_i/y) \delta_{ij} \partial^A (\partial_A \Phi_4^i - \partial_4 \Phi_A^i) = \frac{1}{2} (p_i - P_i), \quad (3.18.17)$$

$$\sigma_i^A|_{\partial B} N_A = S_i^A|_{\partial B} N_A = T_i(X^E)|_{\partial B}, \quad (3.18.18)$$

$$p_i|_{T=T_0} = P_i|_{T=T_0} = p_i^0(X^A),$$

где $T_i(X^E)|_{\partial B}$ — нагрузки, заданные на поверхности тела (см. (3.15.7)). В силу (3.18.15) и (3.18.18) мы можем интер-

претировать S_i^A как тензор Пиолы — Кирхгофа, а P_i — как импульс, соответствующий упругой задаче при тех же самых внутренних и граничных условиях. Поэтому разности $\sigma_i^A - S_i^A$ можно трактовать как *эффективное напряжение Пиолы — Кирхгофа*, а $p_i - P_i$ — как *эффективный импульс*. Тогда уравнения поля (3.18.17) и (3.18.18) показывают, что *дислокационные поля в ограниченных телах определяются эффективным напряжением и импульсом*. Этот факт известен и в металловедении — дефекты в статических и квазистатических процессах движутся под действием эффективного напряжения, а не истинного напряжения σ_i^A . Единственное реальное отличие этого результата от нашего заключается в том, что у нас с тем же успехом подобная интерпретация применяется и к динамическому случаю.

Линеаризации

§ 4.1. СКЕЙЛИНГ-ПАРАМЕТР ГРУППЫ

Полевые уравнения (3.14.1)—(3.14.3) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, обладающих определенной спецификой и удобством интерпретации, но тем не менее чрезвычайно сложных для решения. Очевидно, что определенные упрощения способствовали бы более полному пониманию явлений, описываемых этими полевыми уравнениями.

До сих пор мы ничего не говорили о каких-либо единицах измерения компенсирующих полей W^a_α и φ^i_α . Нарушение однородности исходной группы $G_0 = SO(3)_0 \supset T(3)_0$ приводит к появлению дислокационных и дисклинационных полей независимо от выбора координатного представления группы. Поэтому мы имеем свободу в выборе единиц измерения дефектов. Так как поля φ^i и W^a естественным образом связаны с калибровочной группой, однородное масштабирование генераторов калибровочной группы дает способ получения требуемой калибровки.

Рассмотрим матрицу связности $\hat{\Gamma}$, ассоциированную с полной группой G :

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} W^a_\alpha & \varphi^i t_i \\ [0] & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть ε будет масштабирующим параметром группы (скейлинг-параметром). Масштабное преобразование (скейлинг) $(\varphi_\alpha, t_i) \rightarrow (\varepsilon \varphi_\alpha, \varepsilon t_i)$ генераторов калибровочной группы индуцирует масштабное преобразование

$$\hat{\Gamma} \rightarrow \varepsilon \hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \varepsilon W^a_\alpha & \varepsilon \varphi^i t_i \\ [0] & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

матрицы связности. Очевидно, что данную процедуру можно рассматривать иначе: считать, что генераторы группы φ_α и t_i остаются неизменными, а вместо этого масштабному преобразованию с параметром ε подвергаются компенсирующие поля W^a и φ^i :

$$W^a \rightarrow \varepsilon W^a, \quad \varphi^i \rightarrow \varepsilon \varphi^i. \quad (4.1.2)$$

претировать S_i^A как тензор Пиолы — Кирхгофа, а P_i — как импульс, соответствующий упругой задаче при тех же самых внутренних и граничных условиях. Поэтому разности $\sigma_i^A - S_i^A$ можно трактовать как *эффективное напряжение Пиолы — Кирхгофа*, а $p_i - P_i$ — как *эффективный импульс*. Тогда уравнения поля (3.18.17) и (3.18.18) показывают, что *дислокационные поля в ограниченных телах определяются эффективным напряжением и импульсом*. Этот факт известен и в металловедении — дефекты в статических и квазистатических процессах движутся под действием эффективного напряжения, а не истинного напряжения σ_i^A . Единственное реальное отличие этого результата от нашего заключается в том, что у нас с тем же успехом подобная интерпретация применяется и к динамическому случаю.

Линеаризации

§ 4.1. СКЕЙЛИНГ-ПАРАМЕТР ГРУППЫ

Полевые уравнения (3.14.1) — (3.14.3) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, обладающих определенной спецификой и удобством интерпретации, но тем не менее чрезвычайно сложных для решения. Очевидно, что определенные упрощения способствовали бы более полному пониманию явлений, описываемых этими полевыми уравнениями.

До сих пор мы ничего не говорили о каких-либо единицах измерения компенсирующих полей W^a_α и φ^i_a . Нарушение однородности исходной группы $G_0 = SO(3)_0 \supset T(3)_0$ приводит к появлению дислокационных и дисклинационных полей независимо от выбора координатного представления группы. Поэтому мы имеем свободу в выборе единиц измерения дефектов. Так как поля φ^i и W^a естественным образом связаны с калибровочной группой, однородное масштабирование генераторов калибровочной группы дает способ получения требуемой калибровки.

Рассмотрим матрицу связности $\hat{\Gamma}$, ассоциированную с полной группой G :

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} W^a_\alpha & \varphi^i t_i \\ [0] & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть ε будет масштабирующим параметром группы (скейлинг-параметром). Масштабное преобразование (скейлинг) $(\gamma_\alpha, t_i) \rightarrow (\varepsilon \gamma_\alpha, \varepsilon t_i)$ генераторов калибровочной группы индуцирует масштабное преобразование

$$\hat{\Gamma} \rightarrow \varepsilon \hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \varepsilon W^a_\alpha & \varepsilon \varphi^i t_i \\ [0] & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

матрицы связности. Очевидно, что данную процедуру можно рассматривать иначе: считать, что генераторы группы γ_α и t_i остаются неизменными, а вместо этого масштабному преобразованию с параметром ε подвергаются компенсирующие поля W^a и φ^i :

$$W^a \rightarrow \varepsilon W^a, \quad \varphi^i \rightarrow \varepsilon \varphi^i. \quad (4.1.2)$$

Это естественное масштабное преобразование калибровочной группы используется для введения параметра разложения ε , и в этом смысле процедура построения приближений является однозначной. Из (4.1.2) следует, что параметр ε определяет шкалу единиц для дислокаций и дисклинаций.

Генерирующие матрицы γ_α группы вращений $SO(3)$ удовлетворяют соотношениям

$$[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] = C_{\alpha\beta}^\delta \gamma_\delta,$$

где $C_{\alpha\beta}^\delta$ — структурные постоянные Ли группы $SO(3)$. Следовательно, масштабное преобразование генераторов калибровочной группы индуцирует преобразование

$$C_{\beta\gamma}^\alpha \rightarrow \varepsilon C_{\beta\gamma}^\alpha \quad (4.1.3)$$

структурных констант подгруппы $SO(3)$. Отметим, что аналогичная ситуация возникает и в теории Янга — Миллса [7], где структурные константы также умножаются на масштабирующие постоянные, которые могут быть выбраны как свободные параметры.

Компоненты несингулярной метрики $C_{\alpha\beta}$ Картана — Киллинга для подгруппы $SO(3)$ задаются через структурные константы этой подгруппы соотношением

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\delta}^\gamma C_{\beta\gamma}^\delta.$$

Следовательно, (4.1.3) означает

$$C_{\alpha\beta} \rightarrow \varepsilon^2 C_{\alpha\beta} \quad (4.1.4)$$

или

$$C^{\alpha\beta} \rightarrow (1/\varepsilon^2) C^{\alpha\beta}. \quad (4.1.5)$$

Мы можем теперь приступить к разложению по скейлинг-параметру ε . Такое разложение ввиду законов масштабного преобразования естественным образом соотносится с разложением по идентичным элементам в пространстве калибровочной группы:

$$(\gamma_\alpha, t_i) \rightarrow (\varepsilon \gamma_\alpha, \varepsilon t_i).$$

§ 4.2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ; ε -РАЗЛОЖЕНИЕ

При помощи скейлинг-параметра ε компоненты 1-форм дисторсии — скорости можно записать в виде

$$B_a^i = \partial_a \chi^i + \varepsilon f_a^i + \varepsilon \gamma_{\alpha i}^\alpha W_a^\alpha \chi^i. \quad (4.2.1)$$

Введем также вектор смещения $\{u^i\}$:

$$\chi^i(X^b) = \delta_a^i X^a + u^i(X^b). \quad (4.2.2)$$

Теперь, имея специальным образом выбранный параметр, мы проведем стандартным способом разложение функций u^i , Φ_a^i , W_a^α в ряд по степеням ϵ :

$$\begin{aligned} u^i &= {}_0u^i + \epsilon {}_1u^i + \epsilon^2 {}_2u^i + \dots, \\ \Phi_a^i &= {}_0\Phi_a^i + \epsilon {}_1\Phi_a^i + \epsilon^2 {}_2\Phi_a^i + \dots, \\ W_a^\alpha &= {}_0W_a^\alpha + \epsilon {}_1W_a^\alpha + \epsilon^2 {}_2W_a^\alpha + \dots \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Для записи полевых уравнений (3.14.1) — (3.14.3) и образующих соотношений (3.4.6) — (3.4.9) в виде соответствующих ϵ -разложений нужно проделать длинные, но простые вычисления.

В понимании явлений, связанных с дефектами, важную роль в теории играют четыре свободных параметра y , ξ , s_1 , s_2 . Постоянные y и ξ представляют собой динамические параметры; они связаны со скоростями распространения фронтов дислокаций и дисклинаций соответственно. Параметры s_1 и s_2 важны как в статическом, так и в динамическом случаях. Они могут служить соответственно как бы характеристиками энергии рождения «единичной» дислокации и «единичной» дисклинации. Отношения упругой энергии к энергии дислокаций и энергии дислокаций к энергии дисклинаций, характеризующиеся соответственно отношениями λ/s_1 и s_1/s_2 , фактически являются параметрами, которые обуславливают выбор варианта теории. Для дальнейшего положим, что оба отношения λ/s_1 и s_1/s_2 имеют порядок ϵ , т. е.

$$\lambda/s_1 \approx \epsilon (\widetilde{\lambda/s_1}) \equiv \epsilon L_1, \quad \lambda/s_2 = \epsilon^2 (\widetilde{\lambda/s_2}) \equiv \epsilon^2 L_2. \quad (4.2.4)$$

Иной выбор порядка по ϵ для λ/s_1 и s_1/s_2 приведет к появлению иных эффектов. Как и следует ожидать, другой порядок по ϵ для отношений λ/s_1 и s_1/s_2 приводит к моделям, описывающим другие физические явления.

Порядок модели мы будем определять в соответствии со степенью ϵ в разложении основных переменных B_a^i , задаваемом соотношением

$$\begin{aligned} B_a^i &= \delta_a^i + \partial_a {}_0u^i + \epsilon [\partial_a {}_1u^i + {}_0\Phi_a^i + \gamma_{aj}^i {}_0W_a^\alpha (\delta_A^j X^A + {}_0u^j)] + \\ &+ \epsilon^2 \{ \partial_a {}_2u^i + {}_1\Phi_a^i + \gamma_{aj}^i [{}_0W_a^\alpha {}_1u^j + {}_1W_a^\alpha (\delta_B^j X^B + {}_0u^j)] \} + \dots \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Следовательно, в приближении первого порядка явления описываются функциями ${}_1u^i$, ${}_0\Phi_a^i$ и ${}_0W_a^\alpha$.

Требование совпадения текущей и исходной конфигураций при $T = 0$ в низшем порядке означает, что

$${}_0\mu^i = 0. \quad (4.2.6)$$

Кроме того, так как поля ${}_0\Phi_a^i$, ${}_0W_a^\alpha$ и ${}_1W_a^\alpha$ удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям в частных производных (при соотношениях (4.2.4)) с однородными начальными условиями (напомним, что исходная конфигурация не содержит дефектов), мы получим для них только тривиальные решения

$${}_0\Phi_a^i = 0, \quad {}_0W_a^\alpha = {}_1W_a^\alpha = 0. \quad (4.2.7)$$

С учетом (4.2.6) — (4.2.7) выражение (4.2.5) переходит в выражение

$$\begin{aligned} B_a^i = & \delta_a^i + \varepsilon \partial_{a1} \mu^i + \varepsilon^2 (\partial_{a2} \mu^i + {}_1\Phi_a^i) + \\ & + \varepsilon^3 (\partial_{a3} \mu^i + {}_2\Phi_a^i + \gamma_{a/2}^i W_a^\alpha \delta_B^j X^B) + \dots \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Подчеркнем, что введенная здесь процедура аппроксимации не является обычной линеаризацией, принятой в инженерных расчетах. Мы применили приближения, основанные только на однородном масштабном преобразовании параметров группы, которое в свою очередь индуцирует ε -разложение полевых переменных.

В первом порядке приближения из всех полевых уравнений должны удовлетворяться уравнения баланса импульса

$$\partial_{41} p_i - \partial_{A1} \sigma_i^A = 0 \quad (4.2.9)$$

и образующие соотношения

$$\begin{aligned} {}_1\sigma_i^A = & (\lambda/2) (\delta_i^A \delta^{FD} {}_1E_{FD} + (2\mu/\lambda) \delta_i^S \delta^{RA} {}_1E_{RS}), \\ {}_1E_{AB} = & \delta_{B1} \partial_{A1} \mu^i + \delta_{A1} \partial_{B1} \mu^i, \\ {}_1p_i = & \rho_0 \delta_{i1} \partial_{41} \mu^i. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Отсюда очевидно, что в низшем порядке мы возвращаемся к теории упругости. Полевые переменные Φ_a^i и W_a^α , описывающие дислокации и дисклинации, в первом порядке не появляются.

Упругие напряжения ${}_1\sigma_i^A$ и импульсы ${}_1p_i$ играют роль источников в уравнениях баланса дислокаций во втором порядке приближения. Полевые уравнения динамики дефектов

во втором порядке приближения имеют вид

$$\begin{aligned}\partial_{42} p_i - \partial_{A2} \sigma_i^A &= 0, \\ \delta_{ij} \delta^{BD} [\partial^A \partial_{A1} \Phi_D^i - \partial_D \partial_{A1} \Phi_A^i - (1/y) \partial_4^j (\partial_{41} \Phi_2^i - \partial_{D1} \Phi_4^i)] &= \\ &= \frac{1}{2} L_{11} \hat{\sigma}_j^B, \\ (1/y) \delta_{ij} \partial^A (\partial_{A1} \Phi_4^i - \partial_{41} \Phi_A^i) &= [1/(2\lambda)] L_{11} p_j,\end{aligned}\quad (4.2.11)$$

а образующие соотношения задаются выражениями

$$\begin{aligned}{}_2\hat{\sigma}_i^A &= \frac{1}{2} \delta_{ij} \left\{ \delta^{AJ} \delta^{FD} {}_2E_{FD} + \frac{2\mu}{\lambda} \delta^{RA} \delta^{SI} {}_2E_{RS} + \right. \\ &\quad \left. + \partial_C {}_1u^j \left(\delta^{AC} \delta^{FD} {}_1E_{FD} + \frac{2\mu}{\lambda} \delta^{RA} \delta^{SC} {}_1E_{RS} \right) \right\}, \\ {}_2E_{AB} &= \delta_{AJ} (\partial_B {}_2u^j + {}_1\Phi_B^j) + \partial_{A1} u^i \delta_{ij} \partial_{B1} u^j + \\ &\quad + \delta_{Bi} (\partial_{A2} u^i + {}_1\Phi_A^i), \\ {}_2p_i &= \rho_0 \delta_{ij} (\partial_{42} u^j + {}_1\Phi_4^j).\end{aligned}\quad (4.2.12)$$

Здесь мы положили

$$\hat{\sigma}_i^A = (1/\lambda) \sigma_i^A. \quad (4.2.13)$$

и аналогично

$$\hat{\mathcal{F}}_a^a = (1/\lambda) \mathcal{F}_a^a. \quad (4.2.14)$$

Напряжения ${}_2\sigma_i^A$ и импульсы ${}_2p_i$ во втором порядке приближения не являются упругими; они уже учитывают наличие дислокационных полей. Члены $\partial_C {}_1u^j (\delta^{AC} \delta^{FD} {}_1E_{FD} + (2\mu/\lambda) \delta^{RA} \delta^{SC} {}_1E_{RS})$ в выражении для ${}_2\sigma_i^A$ получаются при умножении $\partial L_0 / \partial E_{RS}$ на B_F^k (в приближении второго порядка $B_F^k = \delta_F^k + \varepsilon \partial_F {}_1u^k$) и делают напряжение ${}_2\sigma_i^A$ несимметричным по индексам (i, A) . Аналогичным образом члены $\partial_{A1} u^i \delta_{ij} \partial_{B1} u^j$ в ${}_2E_{AB}$ получены из полной нелинейной деформации $B_A^i \delta_{ij} B_B^j - \delta_{AB}$. Оба этих выражения отсутствуют в обычных инженерных расчетах.

Первая система уравнений в (4.2.11) представляет собой второй порядок уточненной формулировки соотношений баланса импульса в динамике дислокаций. Вторая и третья системы в (4.2.11) служат для определения полевых переменных ${}_1\Phi_A^i$. Правые части этих уравнений известны нам по первому порядку приближений. Теперь мы можем сказать, что второй порядок приближения аппроксимирует модели дислокационной динамики.

Компенсирующие поля W_a^a (дисклинационные явления) входят в уравнения только начиная с третьего порядка

приближений. В приближении третьего порядка полевые уравнения можно записать в виде

$$\partial_{43} p_i - \partial_{A3} \sigma_i^A = 0; \quad (4.2.15)$$

$$\partial^A {}_2 \bar{\mathcal{D}}_{AD}^i - (1/y) \partial_{42} {}_2 \bar{\mathcal{D}}_{4D}^i + v_{\alpha k}^i [\partial^A ({}_2 F_{AD}^\alpha \delta_C^k X^C) - (1/y) \partial_4 ({}_2 F_{4D}^\alpha \delta_C^k X^C)] = \frac{1}{2} L_1 \delta^{ij} \delta_{DB} {}_2 \hat{\sigma}_j^B, \quad (4.2.16)$$

$$(1/y) [\partial^A {}_2 \mathcal{D}_{A4}^i + v_{\alpha k}^i \partial^A ({}_2 F_{A4}^\alpha \delta_C^k X^C)] = [1/(2\lambda)] L_1 \delta^{ij} {}_2 p_j;$$

$$\partial^A (\partial_{A2} W_C^0 - \partial_{C2} W_A^0) - (1/\xi) \partial_4 (\partial_{42} W_C^0 - \partial_{C2} W_4^0) = -\frac{1}{2} L_2 \delta_{CB} C^{\alpha\eta} {}_2 \hat{\mathcal{F}}_{\eta}^B, \quad (4.2.17)$$

$$(1/\xi) \partial^A (\partial_{A2} W_4^0 - \partial_{42} W_A^0) = \frac{1}{2} L_2 C^{\alpha\eta} {}_2 \hat{\mathcal{F}}_{\eta}^4.$$

Здесь

$$\bar{\mathcal{D}}_{ab}^i = \varepsilon^2 {}_2 \bar{\mathcal{D}}_{ab}^i + \varepsilon^3 {}_3 \bar{\mathcal{D}}_{ab}^i + \dots,$$

$$F_{ab}^\alpha = \varepsilon^2 {}_2 F_{ab}^\alpha + \varepsilon^3 {}_3 F_{ab}^\alpha + \dots$$

Образующие соотношения имеют вид

$${}_3 \sigma_i^A = \frac{1}{2} \delta_{ij} \{ \delta^{Aj} \delta^{FD} {}_3 E_{FD} + (2\mu/\lambda) \delta^{RA} \delta^{Si} {}_3 E_{RS} + \partial_{C1} u^j (\delta^{AC} \delta^{FD} {}_2 E_{FD} + (2\mu/\lambda) \delta^{RA} \delta^{SC} {}_2 E_{RS}) + (\partial_{C2} u^j + {}_1 \Phi_C^j) (\delta^{AC} \delta^{FD} {}_1 E_{FD} + (2\mu/\lambda) \delta^{RA} \delta^{SC} {}_1 E_{RS}) \}; \quad (4.2.18a)$$

$${}_3 E_{AB} = \delta_{A1} (\partial_{B3} u^j + {}_2 \Phi_3^j + v_{\alpha k}^j W_B^\alpha \delta_C^k X^C) + \partial_{A1} u^j \delta_{ij} (\partial_{B2} u^j + {}_1 \Phi_B^j) + (\partial_{A2} u^j + {}_1 \Phi_A^j) \delta_{ij} \partial_{B1} u^j + (\partial_{A3} u^j + {}_2 \Phi_A^j + v_{\alpha k}^j W_A^\alpha \delta_C^k X^C) \delta_{B1}, \quad (4.2.18b)$$

$${}_3 p_i = \rho_0 \delta_{ij} (\partial_{43} u^j + {}_2 \Phi_4^j + v_{\alpha k}^j W_4^\alpha \delta_B^k X^B);$$

$${}_2 \hat{\mathcal{F}}_a^A = - (2/L_1) v_{\alpha j}^i \delta_{ik} \delta^{jC} \delta^{AD} {}_1 \bar{\mathcal{D}}_{CD}^k, \quad (4.2.19)$$

$${}_2 \hat{\mathcal{F}}_a^4 = - [2/(yL_1)] [v_{\alpha j}^i \delta_{ik} \delta^{jC} {}_1 \bar{\mathcal{D}}_{4C}^k.$$

Из (4.2.17) и (4.2.19) мы видим, что в приближении третьего порядка дисклинации обусловлены дислокациями. Уравнения баланса дислокаций (4.2.17) представляют собой линейные уравнения в частных производных второго порядка. Отметим, что уравнения баланса импульса (4.2.15) при наличии дисклинаций в приближении третьего порядка выглядят точно так же, как и в приближениях низших порядков. Силы, обусловленные дефектами, не войдут в уравнения

до тех пор, пока мы не обратимся к приближениям не ниже четвертого порядка.

Приближения третьего порядка моделируют динамику дефектов при наличии как дислокаций, так и дисклинаций. Может быть, тот факт, что дисклинации не входят в уравнения поля до приближений третьего порядка, является существенным концептуальным препятствием, объясняющим их исключение из большинства теорий дефектов. Напомним, что предложенная процедура приближений базировалась на допущении, что энергия, требуемая для образования дисклинаций, много больше соответствующей энергии дислокаций, которая в свою очередь велика по сравнению с упругой энергией (т. е. $\lambda/s_1 \sim \varepsilon$, $s_1/s_2 \sim \varepsilon$). Без этого предположения мы получали бы модели, существенно отличающиеся от рассмотренной выше.

Уравнения баланса момента импульса в наших приближениях в первый раз встречаются во втором порядке: $\gamma_{\alpha j}^i \sigma_i^A \delta_j^i = 0$. Они просто констатируют тот факт, что тензор упругих напряжений симметричен. Однако в приближении третьего порядка переменные ϕ и χ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\gamma_{\alpha j}^i ({}_2\sigma_i^A \delta_j^i + {}_1\sigma_i^A \partial_{A1} u^j) = 0. \quad (4.2.20)$$

Приближения более высоких порядков не приносят существенно новой информации. С другой стороны, сами уравнения и образующие соотношения становятся гораздо сложнее алгебраически.

Приведенные выше уравнения значительно упрощаются в статическом случае. Фактически они сводятся к уравнениям, аналогичным уравнениям магнитостатики. Для того чтобы это показать, определим векторы Σ^i , Φ^i , M^α и P^α следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi^i &= \phi_1^i e_1 + \phi_2^i e_2 + \phi_3^i e_3, \\ \Sigma^i &= \delta^i j (\hat{\sigma}_j^1 e_1 + \hat{\sigma}_j^2 e_2 + \hat{\sigma}_j^3 e_3), \\ M^\alpha &= W_1^\alpha e_1 + W_2^\alpha e_2 + W_3^\alpha e_3, \\ P^\alpha &= C^{\alpha\beta} (\hat{\mathcal{F}}_{\beta}^1 e_1 + \hat{\mathcal{F}}_{\beta}^2 e_2 + \hat{\mathcal{F}}_{\beta}^3 e_3). \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Здесь $\{e_A\}$ — ортонормированная система базисных векторов трехмерного пространства E_3 с координатным покрытием $\{X^A\}$. С учетом выражений (4.2.21) уравнения в приближении второго порядка (4.2.11) можно переписать следующим образом:

$$\nabla \times \nabla \times {}_1\Phi^i = -\frac{1}{2} L_{11} \Sigma^i. \quad (4.2.22)$$

Аналогично в приближении третьего порядка из (4.2.16) — (4.2.17) получим статические уравнения для дислокаций:

$$\nabla \times \nabla \times {}_2\Phi^i = -\frac{1}{2}(L_{12}\Sigma^i + L_2\gamma_{\alpha k}^i \delta_C^k X_2^C \mathbf{P}^\alpha) - \mathbf{a}_\alpha^i \times \nabla \times {}_2\mathbf{M}^\alpha, \quad (4.2.23)$$

где $\mathbf{a}_\alpha^i = \delta^{kA} \gamma_{\alpha k}^i \mathbf{e}_A$, и для дисклинаций:

$$\nabla \times \nabla \times {}_2\mathbf{M}^\alpha = \frac{1}{2} L_2 {}_2\mathbf{P}^\alpha. \quad (4.2.24)$$

В приближениях более высоких порядков уравнения, получающиеся для дислокаций и дисклинаций, имеют тот же вид, что и выражения (4.2.23), (4.2.24).

Из известного тождества $\nabla \cdot (\nabla \times \nabla \times \Psi) \equiv 0$ следует, что дивергенции правых частей (4.2.23) — (4.2.24) обращаются в нуль. Аналогичные ситуации возникают и в приближениях более высоких порядков. Эти условия будут выполняться или как тождественные следствия уравнений поля и соотношений баланса, полученных в предыдущих приближениях, или как соответствующие дополнительные условия на полевые переменные. Может показаться, что мы накладываем определенные условия совместности, не следующие из исходной теории, однако это не так. Условия интегрируемости полевых уравнений для дислокаций и дисклинаций образуют соответствующие уравнения баланса импульса и момента импульса. В силу того что получающиеся при аппроксимации уравнения существенно нелинейны, нельзя считать, что условия интегрируемости сохраняются; поэтому они должны быть заново восстановлены в каждом порядке приближения.

В приближениях второго и третьего порядков условия интегрируемости уравнений (4.2.22) — (4.2.24) удовлетворяются тождественно как следствие полевых уравнений и уравнений баланса. Поэтому в приближении третьего порядка достаточно удовлетворить уравнениям баланса момента импульса (4.2.20), в то время как в приближении второго порядка единственным требованием является симметричность тензора упругих напряжений Пиолы — Кирхгофа. При отсутствии дисклинаций условия интегрируемости для уравнений (4.2.23) всегда выполняются; они эквивалентны уравнениям (4.2.11), которые уже были решены в предыдущем приближении.

Мы уже упоминали, что различный выбор ϵ -порядка для отношений λ/s_1 и s_1/s_2 приводит к моделям описания различных явлений. При том специальном выборе, который был сделан в данном параграфе, в приближении первого порядка мы возвращаемся к теории упругости. Второй порядок моделирует материалы с дислокациями, а дисклинации не

встречаются в теории вплоть до приближений третьего порядка. Мы не предполагаем проводить детальный анализ других возможностей выбора ε -порядка для отношений λ/s_1 и s_1/s_2 , но некоторые комментарии по этому поводу кажутся нам вполне уместными.

Допустим на время, что параметры λ и s_1 (коэффициенты при плотностях упругой и дислокационной энергии соответственно) являются величинами одного порядка, а s_2 много больше s_1 . Очевидно, что в этом случае переменные дислокационных полей φ_a^i и функции смещений u^i появляются в полевых уравнениях в одном и том же (низшем) порядке приближений. Отсюда следует, что даже в низшем порядке ε -разложения мы не вернемся к чисто упругой теории. Напряжения, управляющие полями дислокаций, становятся зависящими от дислокаций. Дисклинационные эффекты начинают проявляться в следующем по порядку приближении.

Таким образом, предлагаемая теория имеет широкие возможности. Она позволяет моделировать различные физические явления за счет выбора констант связи. Но как только константы связи в теории фиксированы, модель для данного физического явления определена однозначно.

§ 4.3. ОДНОРОДНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Теперь мы покажем, как сказывается на смещениях u^i , для состояний с однородными статическими деформациями наличие дислокационных полей φ_A^i . Так как нас не интересуют дисклинации, то подходящей для нашего рассмотрения моделью, описывающей упругие свойства материала, будет приближение первого порядка, рассмотренное в предыдущем разделе (т. е. в уравнение баланса напряжений входят все напряжения первого порядка, а все нагрузки приложены на границе). Это в свою очередь означает, что напряжения во втором порядке ${}_2\sigma_i^A$ обращаются в нуль. Следовательно, управляющими уравнениями в случае статической однородной деформации материалов с дислокациями являются уравнения вида

$$\partial^A \partial_{A1} \varphi_D^i - \partial_D \partial^A {}_1\varphi_A^i = \frac{1}{2} \delta^{ij} \delta_{DB} L_{11} \delta_j^B, \quad (4.3.1)$$

а образующие соотношения задаются выражениями

$${}_2\hat{\sigma}_i^A = \frac{1}{2} \delta_{ij} \{ \delta^{Aj} \text{tr} {}_2\mathbf{E} + (2\mu/\lambda) \delta^{RA} \delta^{Sj} {}_1E_{RS} + \\ + \partial_C {}_1u^j (\delta^{AC} \text{tr} {}_1\mathbf{E} + (2\mu/\lambda) \delta^{RA} \delta^{SC} {}_1E_{RS}) \} = 0. \quad (4.3.2)$$

$${}_2E_{AB} = \delta_{Aj} (\partial_B {}_2u^j + {}_1\varphi_B^j) + \partial_{A1} u^i \partial_{ik} \partial_{B1} u^k + \delta_{Bk} (\partial_A {}_2u^k + {}_1\varphi_A^k).$$

Тензоры напряжения и относительной деформации ${}_1\hat{\sigma}$ и ${}_1E$ соответственно задаются стандартными соотношениями линейной теории упругости.

Уравнения поля (4.3.1) калибровочно-инвариантны, а их решения определяются выбранной калибровкой. Поэтому мы наложим лоренцеву калибровку

$$\partial^A {}_1\Phi_A^i = 0. \quad (4.3.3)$$

Тогда уравнения (4.3.1) перейдут в уравнения

$$\nabla^2 {}_1\Phi_D^i = \frac{1}{2} \delta^{ij} \delta_{BD} L_{11} \delta_j^B. \quad (4.3.4)$$

Так как мы не наложили условий неточной калибровки, напомним читателю, что поля смещений ${}_2u^i$ не являются полными полями смещений для поправок второго порядка.

Обратимся к примеру. Рассмотрим деформацию сдвига прямоугольного блока, причем положим плоскость сдвига совпадающей с XY -плоскостью. При такой конфигурации матрица градиентов смещений задается выражением

$$((\partial_a {}_1u^i)) = \begin{pmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ a/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.5)$$

Из (4.2.9) и (4.2.10) получим матрицы относительной упругой деформации и упругого напряжения:

$${}_1E = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}_1\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \mu a & 0 \\ \mu a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.6)$$

Упругое напряжение представляет собой управляющее воздействие для полей дислокаций в приближении второго порядка. Из (4.3.4) следует, что поля ${}_1\Phi_2^1$ и ${}_1\Phi_1^2$ удовлетворяют уравнениям Пуассона

$$\nabla^2 {}_1\Phi_2^1 = \frac{1}{2} L_1 (\mu/\lambda) a, \quad \nabla^2 {}_1\Phi_1^2 = \frac{1}{2} L_1 (\mu/\lambda) a, \quad (4.3.7)$$

в то же время как остальные ϕ -поля являются решениями уравнений Лапласа.

Для наших целей нам необходимо найти решения для полей ϕ_a^i . Пусть

$$\delta = \frac{1}{2} L_1 (\mu/\lambda) a. \quad (4.3.8)$$

В качестве решений уравнений Лапласа достаточно взять тривиальные решения:

$${}_1\Phi_1^1 = {}_1\Phi_2^2 = {}_1\Phi_3^3 = {}_1\Phi_3^2 = {}_1\Phi_3^1 = {}_1\Phi_1^3 = {}_1\Phi_2^3 = 0. \quad (4.3.9)$$

Тогда единственными ненулевыми элементами матрицы ${}_1\Phi$ являются ${}_1\Phi_2^1$ и ${}_1\Phi_1^2$, которые удовлетворяют уравнениям (4.3.7) и лоренцевой калибровке (4.3.3). Если мы положим

$${}_1\Phi_2^1 = (\delta/2) X^2, \quad {}_1\Phi_1^2 = (\delta/2) Y^2, \quad (4.3.10)$$

то удовлетворим и уравнениям (4.3.7), и условиям (4.3.3). Из (4.3.2) мы получим выражения для компонент тензора относительной деформации в приближении второго порядка:

$$\begin{aligned} {}_2E_{11} &= a^2/4 + 2\partial_1 {}_2u^1, \\ {}_2E_{22} &= a^2/4 + 2\partial_2 {}_2u^2, \\ {}_2E_{33} &= 0, \\ {}_2E_{12} &= {}_2E_{21} = \partial_2 {}_2u^1 + \partial_1 {}_2u^2 + (\delta/2)(X^2 + Y^2), \\ {}_2E_{13} &= {}_2E_{31} = \partial_3 {}_2u^1, \\ {}_2E_{23} &= {}_2E_{32} = \partial_3 {}_2u^2. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Тогда условия ${}_2\sigma_i^A = 0$ дают дифференциальные уравнения для смещений ${}_2u^i$:

$$\begin{aligned} a^2/2 + 2(\partial_1 {}_2u^1 + \partial_2 {}_2u^2) + 2(\mu/\lambda)(a^2/4 + 2\partial_1 {}_2u^1 + a^2/2) &= 0, \\ a^2/2 + 2(\partial_1 {}_2u^1 + \partial_2 {}_2u^2) + 2(\mu/\lambda)(a^2/4 + 2\partial_2 {}_2u^2 + a^2/2) &= 0, \\ a^2/2 + 2(\partial_1 {}_2u^1 + \partial_2 {}_2u^2) &= 0, \\ \partial_2 {}_2u^1 + \partial_1 {}_2u^2 + (\delta/2)(X^2 + Y^2) &= 0, \\ \partial_3 {}_2u^1 &= 0, \quad \partial_3 {}_2u^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Решение системы (4.3.12) имеет вид

$${}_2u^1 = -\frac{3a^2}{8} X - \frac{\delta}{6} Y^3, \quad {}_2u^2 = -\frac{3a^2}{8} Y - \frac{\delta}{6} X^3, \quad {}_2u^3 = 0. \quad (4.3.13)$$

Мы должны отметить, что при выбранной лоренцевой калибровке 1-формы Φ^i не являются неточными. Поэтому полные интегрируемые смещения ${}_2u_{\text{tot}}^i$ в приближении второго порядка заданы в виде суммы

$${}_2u_{\text{tot}}^i = {}_2u^i + H {}_1\Phi^i. \quad (4.3.14)$$

Из (4.3.10) следует, что

$$H {}_1\Phi^1 = (\delta/6) X^2 Y, \quad H {}_1\Phi^2 = (\delta/6) X Y^2. \quad (4.3.15)$$

Наконец, мы можем написать полное интегрируемое смещение для простого сдвига при наличии дислокаций в виде

$$u_{\text{tot}}^i = \epsilon {}_1u^i + \epsilon^2 ({}_2u^i + H {}_1\Phi^i).$$

Используя (4.3.8) и (4.3.13) — (4.3.15), получаем явные выражения

$$\begin{aligned} u_{\text{tot}}^1 &= \frac{1}{2} \varepsilon a \{ Y - (3a/4) \varepsilon X + (L_1/6) (\mu/\lambda) \varepsilon Y (X^2 - Y^2) \}, \\ u_{\text{tot}}^2 &= \frac{1}{2} \varepsilon a \{ X - (3a/4) \varepsilon Y + (L_1/6) (\mu/\lambda) \varepsilon X (Y^2 - X^2) \}, \\ u_{\text{tot}}^3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

Первые и вторые члены в правых частях (4.3.16) обусловлены чисто упругим откликом; первые из них связаны с линейными упругими эффектами, а вторые — с нелинейными упругими эффектами. Третьи члены в выражениях для смещений обусловлены наличием дислокаций.

В силу (4.3.10) мы можем написать 1-формы ${}_1\varphi^i$ и их внешние производные $d{}_1\varphi^i$ следующим образом:

$$\begin{aligned} {}_1\varphi^1 &= (\delta/2) X^2 dY, & d{}_1\varphi^1 &= \delta X dX \wedge dY, \\ {}_1\varphi^2 &= (\delta/2) Y^2 dX, & d{}_1\varphi^2 &= -\delta Y dX \wedge dY. \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Тогда, используя (3.7.13), получаем выражение для вектора Бюргера

$$\{b^i(\partial S_2)\} = \delta \int_{S_2} \left\{ \begin{array}{c} X \\ -Y \\ 0 \end{array} \right\} dX \wedge dY, \quad (4.3.18)$$

который лежит в XY -плоскости.

§ 4.4. ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ СТАТИЧЕСКОЙ ДИСКЛИНАЦИИ. СТАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЯНГА И ВУ

Процедура аппроксимации, основанная на разложении по скейлинг-параметру ε калибровочной группы, эффективна в силу предположения об отсутствии дефектов в исходном состоянии. Последнее позволяет нам положить равными нулю условия Коши для полей φ_a^i и W_a^a и в случае однородных уравнений получать для них нулевые решения. Существуют, однако, и другие возможности, и одну из них мы проанализируем в этом параграфе.

Ограничим наше внимание явлениями, в которых однородность действия подгруппы трансляций не нарушается. В этом случае компенсирующие поля φ_a^i с самого начала исключаются из рассмотрения, и мы приходим к теории, определяемой дисклинационным лагранжианом $L = L_0 - s_2 L_2$. Очевидно, что мы пришли к ситуации, рассмотренной нами

в конце § 3.15, где было показано, что управляющие полевые уравнения имеют вид

$$D\bar{G} = \frac{1}{2}\bar{J}, \quad DZ = 0, \quad (4.4.1)$$

а образующие соотношения таковы:

$$\begin{aligned} 2\bar{G} &= -s_2 C^{a\beta} (\partial L_2 / \partial F_{ab}^a) \pi_{ab} \nu_\beta, \\ Z_i &= (\partial L_0 / \partial B_a^i) \pi_a, \quad \bar{J} = C^{a\beta} (Z \nu_a \chi) \nu_\beta. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Если мы теперь используем первое из соотношений (4.2.2) и запишем $\bar{G} = s_2 \hat{G}$, то (4.4.1) примет вид

$$D\hat{G} = [1/(2s_2)] \bar{J} = [1/(2s_2)] C^{a\beta} (Z \nu_a \chi) \nu_\beta. \quad (4.4.3)$$

Ограничим наше внимание областью R в E_4 , для которой все коэффициенты скалярнозначной 3-формы $Z \nu_a \chi / (2s_2)$ настолько малы, что (4.4.3) можно заменить приближенным уравнением

$$D\hat{G} \approx 0. \quad (4.4.4)$$

Однако в силу гомеоморфности групп $SO(3)$ и $SU(2)$ ¹⁾ левые уравнения $D\hat{G} = 0$ все еще являются уравнениями свободного поля Янга—Миллса (напомним, что матрица связности Γ , используемая при построении внешней ковариантной производной D , является матрицей 1-форм, определяющих связность на $SO(3)$). Поэтому мы можем непосредственно использовать известные вещественнозначные решения уравнений свободного поля Янга—Миллса, отказываясь от условия бездефектности исходной конфигурации.

Простейшим решением уравнений свободного поля Янга—Миллса является статическое решение Янга и Ву [16]:

$$W_A^a = \delta^{a\beta} \varepsilon_{\beta AB} X^B r^{-2}, \quad W_4^a = 0, \quad (4.4.5)$$

где $r^2 = (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2$. Так как $X^A W_A^a + T W_4^a = 0$, это решение уже является неточным. Если в (4.4.5) использовать подстановку 1-формы $W^a = W_A^a dX^A$, то мы получим

$$W^a = \delta^{a\beta} \varepsilon_{\beta AB} X^B r^{-2} dX^A. \quad (4.4.6)$$

¹⁾ Точнее, $SO(3)$ — гомоморфный образ $SU(2)$ при гомоморфизме $\Phi: g \rightarrow \Phi g$ с ядром $\ker \Phi = \{\pm I\}$, т. е. каждое вращение из $SO(3)$ отвечает двум операторам g и $-g$ из $SU(2)$. При этом $SO(3)$ гомеоморфна (т. е. топологически эквивалентна) вещественному проективному пространству $R(P_3^3)$, в то время как $SU(2)$ гомеоморфна пространству S^3 . — Прим. ред.

Так как в магнитостатике 1-форма векторного потенциала диполя с моментом m^i имеет вид $m^i \varepsilon_{iAB} X^B r^{-3} dX^A$, из (4.4.6) видно, что произведение компенсирующего поля W^α на r играет ту же роль, что и поле в магнитостатике диполя с единичным моментом, ориентированным в α -направлении. Тогда множитель r можно рассматривать как проявление нелинейности уравнений свободного поля Янга — Миллса, а 1-формы трех полей W^1, W^2, W^3 можно интерпретировать как состояние, аналогичное состояниям в магнитостатике для трех диполей, помещенных в начало координат, с единичными моментами, совпадающими с тремя различными пространственными осями. Точнее, поле статической дисклинации в области R рассматривается как наложение статических полей трех магнитных диполей, помещенных в начало координат. Моменты этих диполей равны единице, направлены по трем соответствующим пространственным осям координат и каждый из них умножен на r .

Теперь, когда нам известны W -поля в области R , мы можем приступить к дальнейшему рассмотрению и вычислить соответствующие поля напряжений. Для этого только необходимо решить полевые уравнения $DZ = 0$, т. е.

$$\partial_A \sigma_i^A = \gamma_{\alpha i}^j W_A^\alpha \sigma_j^A \quad (4.4.7)$$

при $p_i = 0$. Если мы положим

$$\sigma_i^A = S_i^A g(r), \quad (4.4.8)$$

то система (4.4.7) перейдет в систему

$$S_i^A (dg/dr) \partial_A r = -\gamma_{\alpha i}^j \varepsilon^{\alpha B} S_A^B S_j^A g r^{-1} \partial_B r. \quad (4.4.9)$$

Далее (4.4.9) удовлетворяет следующему выбору:

$$g(r) = g_0 r^m, \quad (4.4.10)$$

где m и S_i^A определяются из задачи на собственные значения

$$-\gamma_{\alpha i}^j \varepsilon^{\alpha B} S_A^B S_j^A = m S_i^B. \quad (4.4.11)$$

Легко видеть, что (4.4.11) удовлетворяется при

$$m = -2, \quad S_i^B = \delta_i^B, \quad (4.4.12)$$

и в этом случае из (4.4.8) получим

$$\sigma_i^A = g_0 r^{-2} \delta_i^A. \quad (4.4.13)$$

Поле напряжений в области R , получающееся при наличии поля дисклинаций (4.4.5), имеет своими главными осями оси координат и убывает как r^{-2} . Рассматривая достаточно боль-

шую область R ($r \gg a$), можно заключить, что в бесконечном теле статическая дисклинация может существовать и при отсутствии нагружения на бесконечности.

Очевидно, что все зависит от определения области R , для которой предположения (4.4.4) остаются справедливыми. Пусть Z известно на R и (4.4.13) дает $\|Z\| \approx g_0 r^{-2}$. Так как напряжения в области R ограничены, то для этой области существует постоянная k , такая, что $\|\chi\| < kr$ (заметим, что $\chi^i = \delta^i_A X^A + u^i(X^A)$). Тогда

$$\| [1/(2s_2)] Z v_\alpha \chi \| \approx [kg_0/(2s_2)] r^{-1}$$

и, следовательно, область R задается неравенством $r \gg \gg kg_0/(2s_2)$. Приближенное решение, заданное соотношениями (4.4.5) и (4.4.13), представляет собой решение для дальнего поля статической дисклинации при отсутствии нагружения на бесконечности. Поэтому, несмотря на то что ситуация вне R (т. е. в пределах ограниченной сингулярности около точки $X_1 = X_2 = X_3 = 0$) очень сложна, с помощью нашего рассмотрения можно получить дополнительную весьма полезную информацию о природе дальнего поля дисклинаций.

§ 4.5. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ОТСУТСТВИИ ДИСКЛИНАЦИЙ

В этом параграфе мы ограничим наше рассмотрение материалами, для которых дисклинации исключены с самого начала, что означает сохранение однородности действия подгруппы $SO(3)_0$. Поэтому мы будем исходить из полевых уравнений, определенных в § 3.15 для лагранжиана $L = L_0 - s_1 L_1$. Кроме того, мы применим процедуру линеаризации, обычно используемую при получении уравнений линейной теории упругости из нелинейной:

$$\chi^i = \delta^i_A X^A + u^i(X^B),$$

$$E_{AB} = \delta_{iA} (\partial_B u^i + \Phi_B^i) + \delta_{iB} (\partial_A u^i + \Phi_A^i), \quad (4.5.1)$$

$$\sigma_i^A = \lambda \delta_i^A \delta_j^R (\partial_R u^j + \Phi_R^j) + \mu (\delta_j^A \delta_i^R + \delta_i^j \delta^R_A) (\partial_R u^j + \Phi_R^j).$$

Чтобы получить в этом приближении управляющие уравнения, следует просто подставить выражения (4.5.1) в уравнения поля (3.15.5) и (3.15.6).

Предварительно следует отметить, что хотя неточные калибровочные условия ведут к заметным концептуальным упрощениям, в теории можно использовать любую другую удобную калибровку. В этом случае оказывается, что мак-

симальное упрощение полевых уравнений достигается при применении калибровочных условий, которые можно назвать псевдолоренцевыми:

$$\delta^{AB} \partial_A \Phi_B^i = (1/y) \partial_4 \Phi_4^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.5.2)$$

Полагая

$$c^2 = \mu/\rho_0, \quad \kappa^2 = \mu/(2s_1), \quad L = \lambda/\mu, \quad a^2 = y/c^2, \quad (4.5.3)$$

уравнения поля можно записать в виде

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - (1/y) \partial_4 \partial_4 - \kappa^2) \Phi_E^m - \kappa^2 (\delta_{Ej} \delta^{Rm} + L \delta_E^m \delta_j^R) \Phi_R^j = \\ = \kappa^2 (L \delta_E^m \partial_j + \delta_{Ej} \delta^{mk} \partial_k + \delta_j^m \delta_E^k \partial_k) u^j, \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

$$(\nabla^2 - (1/y) \partial_4 \partial_4 - \kappa^2 a^2) \Phi_4^i = \kappa^2 a^2 \partial_4 u^i, \quad (4.5.5)$$

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - (1/c^2) \partial_4 \partial_4) u^m + (L + 1) \delta^{mj} \partial_j \partial_i u^i = \\ = [(a^2 - 1) \delta_j^m \delta^{RA} - L \delta^{mA} \delta_j^R - \delta_j^A \delta^{mR}] \partial_A \Phi_R^j. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Прежде всего отметим, что в уравнения (4.5.4) и (4.5.6) полевые переменные Φ_4^i не входят. Если мы решим уравнения (4.5.4) и (4.5.6) для u^i , Φ_A^i , то для определения Φ_4^i можно использовать соотношения (4.5.2) и (4.5.5). Поэтому сначала сосредоточим свое внимание на системе, состоящей из (4.5.4) и (4.5.6).

Система (4.5.4) представляет собой систему уравнений Клейна — Гордона. Если мы положим $\Phi = ((\Phi_E^m))$, а через σ обозначим матрицу, элементами которой будут являться члены, стоящие в правой части уравнения (4.5.4), то из (4.5.1) видно, что σ представляет собой умноженную на $1/\mu$ матрицу тензора упругого напряжения Пиолы — Кирхгофа, вычисленную только для градиентов смещения $\partial_A u^i$. В этих обозначениях (4.5.4) примет вид

$$(\nabla^2 - (1/y) \partial_4 \partial_4 - \kappa^2) \Phi - \kappa^2 (\Phi^T + L \operatorname{tr}(\Phi) \mathbf{I}) = \kappa^2 \sigma. \quad (4.5.7)$$

Замечая, что σ — симметричная матрица, из (4.5.7) сразу получаем, что $(\nabla^2 - (1/y) \partial_4 \partial_4) (\Phi - \Phi^T) = 0$. В силу этого мы можем теперь положить $\Phi = \Phi^T$, так как антисимметричная часть Φ не дает вклада в какие-либо другие уравнения поля. Следовательно, Φ можно задать в виде

$$\Phi = \hat{\Phi} + \frac{1}{3} \eta \mathbf{I}, \quad (4.5.8)$$

где $\hat{\Phi}$ — матрица с нулевым следом, а $\hat{\Phi}$ и η удовлетворяют уравнениям

$$(\nabla^2 - (1/y) \partial_4 \partial_4 - 2\kappa^2) \hat{\Phi} = \kappa^2 (\sigma - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\sigma) \mathbf{I}), \quad (4.5.9)$$

$$(\nabla^2 - (1/y) \partial_4 \partial_4 - 2\kappa^2 (1 + \frac{3}{2} L)) \eta = \kappa^2 \operatorname{tr}(\sigma). \quad (4.5.10)$$

Следовательно, часть Φ , обладающая нулевым следом, определяется девиатором упругих напряжений $\sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \mathbf{I}$.

Разделение уравнений для φ в соответствии с представлением (4.5.8) — (4.4.10) позволяет непосредственно получить решения этих уравнений, так как скалярный оператор Клейна — Гордона, определенный на бесконечной области, при нулевых условиях Коши [35] обладает хорошо определенной функцией Грина. Поэтому поля φ могут быть записаны как однозначно определенные интегродифференциальные операторы, действующие на переменные $u^i(X^b)$. Если эти решения подставить в правую часть (4.5.6), то мы получим явную систему интегродифференциальных уравнений для u -полей. Следовательно, наличие дислокаций приводит к нелинейной системе полевых уравнений для u -полей.

Для неограниченного тела линеаризованные полевые уравнения (4.5.4) и (4.5.6) позволяют непосредственно использовать методы преобразований Фурье. Используя обычное ядро преобразования $\exp(i(k_A X^A - \omega T))$ и исключая фурье-образы полей φ из (4.5.4) и (4.5.6) с помощью (4.5.8) — (4.5.10), получаем уравнения

$$(P\delta_j^m + Qk_j k^m) \hat{U}^j = 0. \quad (4.5.11)$$

Здесь $\hat{U}^j$ — фурье-преобразование от u^j , $k^2 = \delta^{AB} k_A k_B$,

$$P = (\omega/c)^2 - k^2 + \kappa^2(a^2 - 2) G_1^{-1} k^2, \quad (4.5.12)$$

$$Q = -1 - L - \kappa^2 L(2 + 3L) G_2^{-1} + \\ + \kappa^2(a^2 - 2) \left[(L + 1) G_1^{-1} + \frac{1}{3}(2 + 3L)(G_2^{-1} - G_1^{-1}) \right], \quad (4.5.13)$$

$$G_1 = (\omega/c)^2 a^{-2} - k^2 - 2\kappa^2, \quad (4.5.14)$$

$$G_2 = (\omega/c)^2 a^{-2} - k^2 - \kappa^2(2 + 3L). \quad (4.5.15)$$

Следует особо отметить наличие строгого разделения уравнений системы при $a^2 = 2$ (т. е. при $y = 2c^2$).

Из (4.5.11) сразу следует, что нетривиальное решение получается только в том случае, когда

$$\det(P\delta_j^m + Qk_j k^m) = P^2(P + k^2 Q) = 0. \quad (4.5.16)$$

Поэтому здесь, как и в классической линейной теории упругости, возникают двойная поперечная (сдвиговая) мода, определяемая равенством $P = 0$, и одиночная продольная мода, определяемая соотношением $P + k^2 Q = 0$. Для двойной поперечной моды $P = 0$ получается дисперсионное соотношение

$$((\omega/c)^2 - k^2)((\omega/c)^2 - a^2(k^2 + 2\kappa^2)) + \kappa^2 a^2(a^2 - 2)k^2 = 0,$$

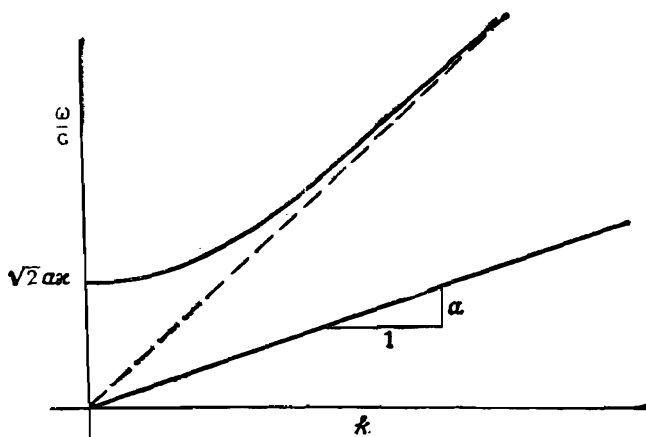


Рис. 1.

или

$$(\omega/c)^2 = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + 1) k^2 + a^2 \kappa^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - 1)^2 k^4 + 4a^2 \kappa^2 k^2 + 4a^4 \kappa^4}. \quad (4.5.17)$$

При $y < c^2$ (т. е. при $a^2 < 1$) дисперсионная кривая имеет вид, представленный на рис. 1, в то время как при $y > c^2$

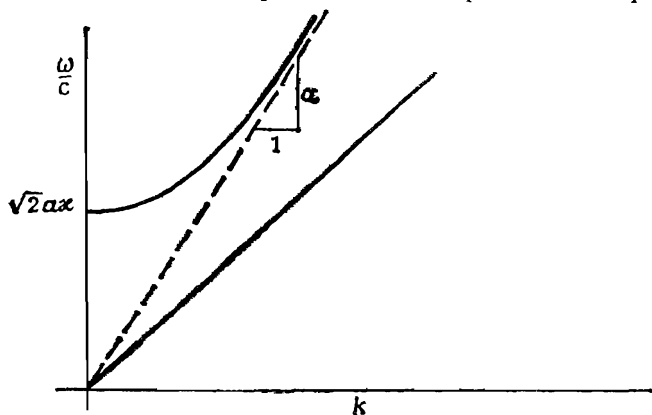


Рис. 2.

(т. е. при $a^2 > 1$) дисперсионная кривая имеет вид, приведенный на рис. 2. Так как скорость поперечных упругих волн сдвига должна быть приближенно равна c с отрицательной поправкой за счет взаимодействия, ясно, что y должно быть

больше c . Однако поскольку y определяет скорости только при очень малых длинах волн, не следует думать, что дислокации распространяются быстрее, чем волны сдвига. Анализ графика для $\sqrt{y} > c$ показывает, что групповая скорость дислокаций при малых k (при больших длинах волн) существенно меньше групповой скорости упругих поперечных волн, как это действительно и наблюдается в экспериментах. Важно также отметить, что значение вертикальной отсечки и кривизна оптической ветви при $k = 0$ позволяют определить две постоянные s_1 и y теории.

При анализе этих задач использовались псевдолоренцевы условия калибровки (4.5.2), а не условия неточной калибровки. Поэтому полевые переменные u^i нельзя отождествлять с полными интегрируемыми смещениями тела. Это легко увидеть, замечая, что 1-формы дисторсии определяются соотношениями

$$B^i = d(\delta_A^i X^A + u^i) + \varphi^i,$$

и используя равенство $\varphi^i = dH(\varphi^i) + H(d\varphi^i)$, что дает

$$B^i = d(\delta_A^i X^A + u^i + H(\varphi^i)) + H(d\varphi^i),$$

где через H обозначен линейный оператор гомотопии на E_4 . Тогда единственность разбиения $\varphi^i = dH(\varphi^i) + H(d\varphi^i)$ показывает, что полное интегрируемое поле смещений u_{tot}^i задается соотношением

$$u_{\text{tot}}^i = u^i + H(\varphi^i).$$

Аналогичным образом в силу того, что вектор Бюргерса $b_i(\partial S_2)$ определяется контурным интегралом, получаем

$$b^i(\partial S_2) = \int_{\partial S_2} \varphi^i = \int_{\partial S_2} \{dH(\varphi^i) + H(d\varphi^i)\}$$

и, поскольку интеграл по замкнутому контуру для любого регулярного полного дифференциала тождественно обращается в нуль, имеем

$$b^i(\partial S_2) = \int_{\partial S_2} H(d\varphi^i).$$

Поэтому окончательное выражение

$$B^i = d(\delta_A^i X^A + u_{\text{tot}}^i) + H(d\varphi^i)$$

однозначно разбивается на часть, включающую полный интегрируемый отклик $\chi_{\text{tot}}^i = \delta_A^i X^A + u_{\text{tot}}^i$, и часть $H(d\varphi^i)$, которая определяется наличием дислокаций. При отсутствии

дефектов или при использовании неточной калибровки полевые переменные u^i и u_{tot}^i совпадают; в противных случаях они представляют собой разные величины. Хотя это утверждение высказывалось и ранее, стоит подчеркнуть его еще раз, так как *действительным смещением материального тела, измеряемым в экспериментах, является полное смещение u_{tot}^i* .

§ 4.6. СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ; КРАЕВЫЕ И ВИНТОВЫЕ ДИСЛОКАЦИИ

Мы уже касались рассмотрения предварительно линеаризованного взаимодействия упругих и дислокационных полей в динамическом случае. Мы можем, однако, рассмотреть так называемую линеаризованную дислокационную задачу, полагая для простоты все переменные упругого смещения $u^i(X^A)$ равными нулю. Как и в большинстве теорий, подобное явление описывается с помощью построения решения, имеющего сингулярность. Ввиду этого мы снимем требование бездефектности исходной конфигурации. Если, кроме того, мы ограничимся статическим случаем, то полевые переменные $\varphi_a^i(X^A, T)$, описывающие дислокации, перестанут зависеть от времени T и $\varphi_4^i(X^A) = 0$. Полагая

$$\kappa^2 = \mu / (2s_1), \quad L = \lambda / \mu \quad (4.6.1)$$

и обозначая $\partial^A = \delta^{AB} \partial_B$, мы сведем полевые уравнения (4.5.4) — (4.5.6) к уравнениям

$$\nabla^2 \varphi_E^m - \partial_E (\partial^A \varphi_A^m) = \kappa^2 \Sigma_E^m, \quad \partial^E \Sigma_E^m = 0, \quad (4.6.2)$$

$$\Sigma_E^m = L (\delta_i^A \varphi_A^i) \delta_E^m + \varphi_E^m + \delta_{Ei} \delta^{mA} \varphi_A^i, \quad (4.6.3)$$

где соответствующий тензор напряжений задается выражением

$$\sigma_E^m = \mu \Sigma_E^m. \quad (4.6.4)$$

Здесь мы явно отказываемся от псевдолоренцевой калибровки $\partial^A \varphi_A^i = 0$, использованной в предыдущем параграфе. Это видно из наличия члена $\partial_E (\partial^A \varphi_A^i)$ в левой части (4.6.2).

Пусть e_1, e_2, e_3 — обычные единичные базисные векторы, связанные с декартовым координатным покрытием в исходной конфигурации, и пусть векторные поля φ^i и Σ^i определяются следующим образом:

$$\varphi^i = \varphi_A^i e_A, \quad \Sigma^i = \Sigma_A^i e_A. \quad (4.6.5)$$

Отсюда легко видеть, что полевые уравнения (4.6.2) эквивалентны векторным уравнениям

$$\nabla \times \nabla \times \Phi^i = -\kappa^2 \Sigma^i, \quad \nabla \cdot \Sigma^i = 0. \quad (4.6.6)$$

Тогда из известных результатов магнитостатики следует, что система (4.6.6) разрешима для произвольного вектора Σ^i , удовлетворяющего условию непрерывности $\nabla \cdot \Sigma^i = 0$.

Теперь план решения ясен. Прежде всего надо определить классы решений уравнения непрерывности $\nabla \cdot \Sigma^i = 0$, затем решить (4.6.3) для полей Φ через переменные Σ и, наконец, найти Φ как явные функции координат, решая интегрируемую систему полевых уравнений, заданную первым из соотношений (4.6.6).

До сих пор калибровка оставалась произвольной. Поэтому мы можем наложить явные условия калибровки

$$\Phi_2^1 = \Phi_1^2, \quad \Phi_3^1 = \Phi_1^3, \quad \Phi_3^2 = \Phi_2^3. \quad (4.6.7)$$

Такой выбор имеет определенное преимущество, так как сводит уравнение (4.6.3) к виду

$$\Sigma_A^m = L(\delta_i^B \Phi_B^i) \delta_A^m + 2\Phi_A^m, \quad (4.6.8)$$

и, следовательно,

$$2\Phi_A^m = \Sigma_A^m - [L/(3L+2)](\delta_i^B \Sigma_B^i) \delta_A^m.$$

Поэтому второй шаг в решении становится тривиальным. Для упрощения дальнейших вычислений введем параметр

$$a = L/(3L+2) \quad (4.6.9)$$

и получим

$$2\Phi_A^m = \Sigma_A^m - a(\delta_i^B \Sigma_B^i) \delta_A^m. \quad (4.6.10)$$

В оставшейся части этого параграфа мы ограничимся осесимметричной задачей. Возьмем в качестве выделенного направления ось Z и положим $r^2 = X^2 + Y^2$. В этом случае можно получить удобную запись уравнений, потребовав, чтобы Σ и Φ являлись симметричными матрицами с элементами Σ_A^m и Φ_A^m соответственно. Тогда очевидно, что

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_Y \\ 0 & 0 & \partial_X \\ -\partial_Y & \partial_X & 0 \end{pmatrix} f(r) \quad (4.6.11)$$

удовлетворяет уравнениям равновесия (условиям непрерывности) $\partial^A \Sigma_A^i = 0$, (т. е. $\nabla \cdot \Sigma^i = 0$). Так как в этом случае Σ — матрица с нулевым следом, то (4.6.10) дает $2\Phi = \Sigma$ и, следовательно, нам остается решить только уравнения

$\nabla \times \nabla \times \Phi^i = -2\kappa^2 \Phi^i$. Простые вычисления показывают, что полевые уравнения удовлетворяются в том случае, когда $f(r)$ удовлетворяет уравнению $\nabla^2 f = 2\kappa^2 f$, т. е. когда

$$r \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{df}{dr} - 2\kappa^2 r f = 0. \quad (4.6.12)$$

Ограничим наше внимание решениями (4.6.12), остающимися ограниченными при больших r . Наиболее общий вид решения уравнения (4.6.12), обладающий этим свойством, можно записать в виде $C_1 K_0(\sqrt{2}\kappa r)$, где K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка. Возвращаясь к (4.6.11), имеем

$$\Sigma = 2\Phi = \sqrt{2} C_1 \kappa r^{-1} K_1(\sqrt{2}\kappa r) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Y \\ 0 & 0 & X \\ -Y & X & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6.13)$$

Для ближнего поля $\sqrt{2}\kappa r \ll 1$, $K_1(\sqrt{2}\kappa r) \approx (\sqrt{2}\kappa r)^{-1}$ и из (4.6.13) получаем

$$\Sigma = 2\Phi \approx C_1 r^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Y \\ 0 & 0 & X \\ -Y & X & 0 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{2}\kappa r \ll 1. \quad (4.6.14)$$

Это выражение в точности совпадает с распределением напряжений для винтовой дислокации, расположенной вдоль оси Z [20, с. 57], если мы положим константу C_1 равной

$$C_1 = b/(2\pi). \quad (4.6.15)$$

(Напомним, что $\sigma = \mu \Sigma$.) С другой стороны, разложение для дальнего поля ($\sqrt{2}\kappa r \gg 1$) дает

$$K_1(\sqrt{2}\kappa r) \approx \sqrt{\pi/(2\sqrt{2}\kappa r)} \exp(-\sqrt{2}\kappa r),$$

и, таким образом, с учетом (4.6.15) имеем

$$\Sigma = 2\Phi = \frac{b\sqrt{\kappa}}{2\sqrt{\sqrt{2}\pi}} r^{-3/2} \exp(-\sqrt{2}\kappa r) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Y \\ 0 & 0 & X \\ -Y & X & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6.16)$$

Следует отметить, что для ближнего поля решение не зависит от константы связи κ , в то время как для дальнего поля решение имеет явную зависимость от κ и само поле убывает экспоненциально, а не как r^{-1} для поля классической винтовой дислокации. Если это решение рассматривать применительно к исходной периодической кристаллической структуре, то периодичность позволяет просто продолжить реше-

ние ближнего поля на все кристаллическое тело. С другой стороны, классическую теорию можно получить в пределе, когда константа s_1 становится очень большой, т. е. когда κ стремится к нулю. В соответствии с этим, поскольку представление ближнего поля остается справедливым для $\sqrt{2} \kappa r \ll 1$, мы получим согласование с классическим решением в пределе при κ , стремящемся к нулю. Разумеется, это решение лишено физического смысла для достаточно малой окрестности $r=0$, так как допущения, лежащие в основе линейного приближения, применяемого при инженерных расчетах, перестают быть справедливыми.

Чтобы лучше понять решение, можно выразить вектор Бюргера непосредственно через поля ϕ . С этой целью рассмотрим замкнутый круговой сектор в произвольном сечении $Z = \text{const}$ с центром на оси Z и радиусом R . Так как $\phi^i = \phi_A^i dX^A$, то из (4.6.13) и (4.6.15) следует, что для этого кругового сектора в плоскости $Z = \text{const}$ $\phi^1 = \phi^2 = 0$ и

$$\phi^3 = [b/(4\pi)] \sqrt{2} \kappa R^{-1} K_1(\sqrt{2} \kappa R) (-Y dX + X dY). \quad (4.6.17)$$

Поэтому, в силу того что вектор Бюргера для замкнутого контура определяется выражением $b^i = \oint \phi^i$, мы получим $b^1 = b^2 = 0$ и

$$b^3 = (b/2) \sqrt{2} \kappa R K_1(\sqrt{2} \kappa R). \quad (4.6.18)$$

Поэтому для ближнего поля получим

$$b^3 \approx b/2, \quad \sqrt{2} \kappa R \ll 1, \quad (4.6.19)$$

в то время как для дальнего поля

$$b^3 = [b/(2\sqrt{2})] \sqrt{\sqrt{2} \kappa R} \exp(-\sqrt{2} \kappa R), \quad \sqrt{2} \kappa R \gg 1. \quad (4.6.20)$$

Следовательно, полное решение, даваемое выражениями (4.6.14) и (4.6.15), описывает классическую винтовую дислокацию в окрестности оси Z , исчезающую для внешнего наблюдателя на достаточно большом расстоянии от оси Z .

Следующий класс задач характеризуется матрицей

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \partial_Y \partial_Y f & -\partial_Y \partial_X f & 0 \\ -\partial_Y \partial_X f & \partial_X \partial_X f & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (4.6.21)$$

где функции f и p зависят только от переменных X и Y . Очевидно, что (4.6.21) удовлетворяет условиям симметрии $\Sigma = \Sigma^T$ и условиям равновесия $\nabla \cdot \Sigma^i = 0$. Тогда непосред-

ственно из (4.6.10) следует, что

$$2\Phi = \begin{pmatrix} \partial_Y \partial_Y f - a \nabla^2 f - ap & -\partial_Y \partial_X f & 0 \\ -\partial_Y \partial_X f & \partial_X \partial_X f - a \nabla^2 f - ap & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)p - a \nabla^2 f \end{pmatrix}. \quad (4.6.22)$$

Прямое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} \partial^A \Phi_A^1 &= -a \partial_X (\nabla^2 f + p), & \partial^A \Phi_A^2 &= -a \partial_Y (\nabla^2 f + p), \\ \partial^A \Phi_A^3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.6.23)$$

Подставляя выражения (4.6.21) — (4.6.23) в уравнения полей (4.6.2), получаем условия

$$(1-a) \nabla^2 f - 2\kappa^2 f = ap, \quad (4.6.24)$$

$$(1-a) \nabla^2 p - 2\kappa^2 p = a \nabla^4 f. \quad (4.6.25)$$

Первое из них служит для определения функции p через f :

$$p = (1/a) \{ (1-a) \nabla^2 f - 2\kappa^2 f \}. \quad (4.6.26)$$

Используя это соотношение для исключения p из (4.6.25), получим для определения f уравнение

$$(\nabla^2 - M^2)(\nabla^2 - N^2)f = 0, \quad (4.6.27)$$

где M и N — параметры, связанные с исходными следующим образом:

$$M^2 = 2\kappa^2, \quad N^2 = 2\kappa^2/(1-2a) = 2\kappa^2(3L+2)/(L+2). \quad (4.6.28)$$

Очевидно, решения уравнения (4.6.27) являются более сложными, чем решения предыдущих задач, в которых необходимо было решить только уравнение $(\nabla^2 - M^2)f = 0$. Однако для ближнего поля, т. е. для $\kappa r \ll 1$, важно решить уравнение, получающееся при κ , стремящемся к нулю (т. е. при N и M , стремящихся к нулю), а именно уравнение

$$\nabla^4 f = 0, \quad \kappa r \ll 1. \quad (4.6.29)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$f = Xu(X, Y) + Yv(X, Y) + w(X, Y), \quad (4.6.30)$$

где $w(X, Y)$ — гармоническая функция, а $u(X, Y)$ и $v(X, Y)$ — сопряженные гармонические функции. Тогда из (4.6.21), (4.6.29) и (4.6.30) непосредственно следует, что распределение напряжений в ближнем поле согласуется с распределением, получающимся из известных решений для краевых дислокаций [20], если просто положить $f = C_1 Y \ln(r)$ или $f =$

$= C_2 X \ln(r)$. Следовательно, решения ближнего поля для наших полевых уравнений воспроизводят классические решения для краевых дислокаций. Некоторые ранее сделанные замечания уместны и здесь. В частности, для кристаллических веществ кристаллическая периодичность будет давать эффект периодического продолжения решения ближнего поля, т. е. это решение приложимо ко всему кристаллическому телу.

Для дальнего поля $r \gg 1$ (4.6.27) допускает следующее приближение:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - M^2\right) \left(\frac{d^2}{dr^2} - N^2\right) f(r) = 0. \quad (4.6.31)$$

Поэтому здесь появляется двухпараметрическое семейство решений, поведение которых на бесконечности характеризуется экспоненциальным убыванием. Действительно, теперь очевидно, что основные эффекты в калибровочной теории статических дислокаций возникают в первую очередь за счет замены оператора ∇^2 оператором $\nabla^2 - M^2$.

Особо отметим, что теория воспроизводит поля напряжений, связанные с наличием краевой и винтовой дислокаций, без учета связанных с ними полей смещений. В самом деле, полевые переменные u^i были приняты тождественно равными нулю. Это дает возможность провести некоторые полезные параллели. Классическая теория дислокаций описывает дислокации или определяя многозначные величины, или решая задачу на граничные значения для разрывных смещений. Линейная калибровочная теория дислокаций формулирует задачу как задачу на граничные значения при заданном нагружении и получает распределения напряжений непосредственно. С этой точки зрения полевые уравнения $\nabla^2 \Phi_E^m - \partial_E (\partial^A \Phi_A^m) = \kappa^2 \Sigma_E^m$ калибровочной теории являются заменой условий совместности линейной теории упругости.

Кроме воспроизводства распределений напряжений, связанных с краевыми дислокациями, полученные выше результаты оказываются также полезными для целого ряда задач. Прежде всего отметим, что, хотя мы и исключили переменные u^i , мы не наложили условий неточной калибровки. Следовательно, для любого данного решения полевых уравнений Φ_A^i поля полностью интегрируемого смещения восстанавливаются согласно соотношению

$$x_{\text{tot}}^i = u^i(X^B) + \delta_A^i X^A = H(\Phi_E^i dX^E), \quad (4.6.32)$$

поскольку $B_A^i dX^A = \Phi_A^i dX^A = dH(\Phi_E^i dX^E) + H(d\Phi_E^i \wedge dX^E)$. Далее если мы потребуем, чтобы функция f (а следовательно,

и функция p) была бы функцией X и Y , а не $r^2 = X^2 + Y^2$, то (4.6.21) воспроизведет поле напряжений, которое было бы естественно связывать с задачей деформирования на плоскости. Здесь, однако, имеется отличие, так как соотношения (4.6.24) и (4.6.21) показывают, что при $\kappa^2 \neq 0$ компонента σ_3^3 отличается от известной в классической теории упругости. Кроме того, функция f должна теперь удовлетворять не бигармоническому уравнению классической теории упругости, а уравнению (4.6.31). Эти различия не мешают делу. Выведенные в этом параграфе уравнения дают прямой подход к решению ряда задач с деформацией на плоскости при наличии дислокаций.

§ 4.7. ЗАДАЧИ

С ЗАДАННОЙ НАГРУЗКОЙ НА ГРАНИЦЕ; РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ПАРАМЕТРУ НАГРУЖЕНИЯ

Пусть B — ограниченное тело, границы ∂B которого нагружены заданной системой статических поверхностных нагрузок $\{T_i\}$, а $\{S_i^A, \hat{u}^i\}$ — компоненты тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа и функций смещений, которые являются решением соответствующей граничной задачи в приближении *линейной* теории упругости. К прикладываемым нагрузкам предъявляются требования кусочной гладкости и ограниченности на границе ∂B ; иначе говоря, должен существовать числовой параметр $\mathcal{T}$, имеющий размерность, равную силе на единицу площади, и такой, что $T_i = O(\mathcal{T})$. Ограничимся задачами, в которых граница ∂B достаточно гладкая, т. е. неограниченные концентраторы напряжения отсутствуют. При указанных выше условиях можно написать

$$S_i^A = \mu \hat{S}_i^A, \quad T_i = \mu \hat{T}_i, \quad \hat{S}_i^A = O(\epsilon), \quad \hat{T}_i = O(\epsilon), \\ \partial_A \hat{u}^i = O(\epsilon), \quad (4.7.1)$$

где

$$\epsilon = \mathcal{T}/\mu \quad (4.7.2)$$

представляет собой *параметр нагружения*, связанный с линейной задачей.

Так как тело ограничено, а нагрузка на поверхности задана, состояния с дислокациями, но без дисклинаций описываются уравнениями поля, выведенными в § 3.18. В настоящем параграфе мы сосредоточили свое внимание на статических задачах, т. е. задачах с $\phi_4^i = 0$ и $\{\chi^i, \phi_A^i\}$, зависящими только от координат исходной конфигурации. Тогда

получим уравнения поля

$$\partial_A \hat{\sigma}_i^A = 0, \quad \partial_A \hat{S}_i^A = 0, \quad (4.7.3)$$

$$\delta_{ji} \delta^{BD} \partial^A D_{AD}^i = [\mu / (2s_1)] (\hat{\sigma}_j^B - \hat{S}_j^B), \quad (4.7.4)$$

где s_1 — дислокационная константа связи, а граничные условия имеют вид

$$\hat{\sigma}_f^A|_{\partial B} N_A = \hat{T}_f = \hat{S}_f^A|_{\partial B} N_A, \quad D_{AB}^i|_{\partial B} N^A = 0. \quad (4.7.5)$$

В качестве образующих соотношений берем (4.7.1)₁ и соотношения

$$\sigma_i^A = \mu \hat{\sigma}_i^A, \quad D_{AB}^i = \partial_A \Phi_B^i - \partial_B \Phi_A^i, \quad (4.7.6)$$

$$B_A^i = \partial_A \chi^i + \Phi_A^i = \delta_A^i + \partial_A u^i + \Phi_A^i, \quad (4.7.7)$$

$$\hat{\sigma}_i^A = \frac{1}{2} \delta_B^A \delta_{ij} B_C^j ((\lambda/\mu) \delta^{BC} \delta^{FD} E_{FD} + 2\delta^{RB} \delta^{SC} E_{RS}), \quad (4.7.8)$$

$$E_{AB} = B_A^i \delta_{ij} B_B^j - \delta_{AB}, \quad (4.7.9)$$

$$\hat{S}_i^A = \frac{1}{2} \delta_B^A \delta_{ic} ((\lambda/\mu) \delta^{BC} \delta^{FD} \hat{E}_{FD} + 2\delta^{RB} \delta^{SC} \hat{E}_{RS}), \quad (4.7.10)$$

$$\hat{E}_{AB} = \delta_{Ai} \partial_B \hat{u}^i + \delta_{Bi} \partial_A \hat{u}^i. \quad (4.7.11)$$

Анализ этих уравнений показывает, что можно провести разложение по параметру нагружения ϵ , предполагая, что порядок величины μ/s_1 известен. В отличие от § 4.2 мы рассматриваем задачи, для которых

$$\mu/s_1 = O(1). \quad (4.7.12)$$

Следовательно, решения для изучаемых нами задач могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_i^A &= \epsilon_1 \sigma_i^A + \epsilon^2 {}_2\sigma_i^A + \epsilon^3 {}_3\sigma_i^A + \dots, \\ \hat{S}_i^A &= \epsilon_1 S_i^A, \quad \hat{T}_i = \epsilon_1 T_i, \quad \partial_A \hat{u}^i = \epsilon \partial_A u^i, \\ B_A^i &= \epsilon_1 B_A^i + \epsilon^2 {}_2B_A^i + \epsilon^3 {}_3B_A^i + \dots, \\ D_{AB}^i &= \epsilon_1 D_{AB}^i + \epsilon^2 {}_2D_{AB}^i + \epsilon^3 {}_3D_{AB}^i + \dots, \\ E_{AB} &= \epsilon_1 E_{AB} + \epsilon^2 {}_2E_{AB} + \epsilon^3 {}_3E_{AB} + \dots, \end{aligned} \quad (4.7.13)$$

где все величины с нижними индексами слева имеют порядок $O(1)$. Легко видеть, что управляющие уравнения груп-

пируются в следующие подсистемы:

$$\begin{aligned}\partial_A {}_1S_i^A &= 0, \quad {}_1S_i^A|_{\partial B} N_A = {}_1T_i, \\ \partial_A {}_1\sigma_i^A &= 0, \quad {}_1\sigma_i^A|_{\partial B} N_A = {}_1T_i, \\ \delta_{ij}\delta^{BD}\partial^A {}_1D_{AD}^i &= [\mu/(2s_1)]({}_1\sigma_j^B - {}_1S_j^B), \quad {}_1D_{AB}^i|_{\partial B} N^A = 0\end{aligned}\quad (4.7.14)$$

для уравнений первого порядка и

$$\begin{aligned}\partial_A {}_r\sigma_i^A &= 0, \quad {}_r\sigma_i^A|_{\partial B} N_A = 0, \\ \delta_{ij}\delta^{BD}\partial^A {}_rD_{AD}^i &= [\mu/(2s_1)]{}_r\sigma_j^B, \quad {}_rD_{AB}^i|_{\partial B} N^A = 0\end{aligned}\quad (4.7.15)$$

для уравнений высших порядков.

Комбинация приведенных выше уравнений показывает, что система (4.7.14) эквивалентна системе

$$\partial_A ({}_eY_i^A + {}_\Phi Y_i^A) = 0, \quad ({}_eY_i^A + {}_\Phi Y_i^A)|_{\partial B} N_A = 0, \quad (4.7.16)$$

$$\delta_{ij}\delta^{BD}\partial^A {}_1D_{AD}^i = [\mu/(2s_1)]({}_eY_j^B + {}_\Phi Y_j^B), \quad {}_1D_{AB}^i|_{\partial B} N^A = 0, \quad (4.7.17)$$

где

$$\begin{aligned}{}_eY_i^A &= \frac{1}{2}\delta_B^A\delta_{iC}((\lambda/\mu)\delta^{BC}\delta^{FD}{}_eE_{FD} + 2\delta^{RB}\delta^{SC}{}_eE_{RS}), \\ {}_\Phi Y_i^A &= \frac{1}{2}\delta_B^A\delta_{iC}((\lambda/\mu)\delta^{BC}\delta^{FD}{}_\Phi E_{FD} + 2\delta^{RB}\delta^{SC}{}_\Phi E_{RS}),\end{aligned}\quad (4.7.18)$$

причем

$$\begin{aligned}{}_eE_{AB} &= \delta_{Ai}\partial_B({}_1u^i - \bar{u}^i) + \delta_{Bi}\partial_A({}_1u^i - \bar{u}^i), \\ {}_\Phi E_{AB} &= \delta_{Ai}{}_1\Phi_B^i + \delta_{Bi}{}_1\Phi_A^i, \quad {}_1D_{AB}^i = \partial_A {}_1\Phi_B^i - \partial_B {}_1\Phi_A^i.\end{aligned}\quad (4.7.19)$$

Решение этой системы при калибровочных условиях $X^A {}_1\Phi_A^i = 0$ имеет вид

$${}_1u^i = \bar{u}^i + k^i, \quad {}_1\Phi_A^i = 0, \quad {}_1\sigma_i^A = {}_1S_i^A. \quad (4.7.20)$$

При условиях кусочной гладкости, существенных для единственности решения однородной граничной задачи (4.7.16) — (4.7.19), и калибровке $X^A \Phi_A^i = 0$ решение (4.7.20) является единственным. Следовательно, отклик в приближении первого порядка совпадает с предсказываемым линейной теорией упругости, а дислокационные эффекты не проявляются по меньшей мере до приближения второго порядка. Этот результат аналогичен полученному в § 4.2, хотя здесь условия на постоянную дислокационной связи, определяющую в разложении порядок по ϵ , слабее ($\mu/s_1 = O(1)$, а не $\mu/s_1 = O(\epsilon)$).

Результат, уже полученный при решении уравнений первого порядка, существенно упрощает уравнения в следую-

ших порядках приближения. Для начала отметим, что с учетом (4.7.13) соотношения (4.7.7) — (4.7.9) приводят теперь к выражениям

$${}_2\sigma_i^A = \frac{1}{2} \delta_{ij} \{ (\lambda/\mu) \delta^{Aj} \delta^{FD} {}_2E_{FD} + 2\delta^{RA} \delta^{Sj} {}_2E_{RS} + \\ + \partial_C \bar{u}^i ((\lambda/\mu) \delta^{AC} \delta^{FD} \bar{E}_{FD} + 2\delta^{RA} \delta^{SC} \bar{E}_{RS}) \}, \quad (4.7.21)$$

$${}_2E_{AB} = \delta_{Aj} (\partial_B {}_2u^j + {}_2\Phi_B^j) + \delta_{Bj} (\partial_A {}_2u^j + {}_2\Phi_A^j) + \\ + \partial_A \bar{u}^i \delta_{ij} \partial_B \bar{u}^i, \quad (4.7.22)$$

$${}_3\sigma_i^A = \frac{1}{2} \delta_{ij} \{ (\lambda/\mu) \delta^{Aj} \delta^{FD} {}_3E_{FD} + 2\delta^{RA} \delta^{Sj} {}_3E_{RS} + \\ + \partial_C \bar{u}^i ((\lambda/\mu) \delta^{AC} \delta^{FD} {}_3E_{FD} + 2\delta^{RA} \delta^{SC} {}_3E_{RS}) + \\ + (\partial_C {}_3u^i + {}_3\Phi_C^i) ((\lambda/\mu) \delta^{AC} \delta^{FD} \bar{E}_{FD} + 2\delta^{RA} \delta^{SC} \bar{E}_{RS}) \}, \quad (4.7.23)$$

$${}_3E_{AB} = \delta_{Aj} (\partial_B {}_3u^j + {}_3\Phi_B^j) + \delta_{Bj} (\partial_A {}_3u^j + {}_3\Phi_A^j) + \\ + \partial_A \bar{u}^i \delta_{ij} (\partial_B {}_3u^j + {}_3\Phi_B^j) + (\partial_A {}_3u^i + {}_3\Phi_A^i) \delta_{ij} \partial_B \bar{u}^i. \quad (4.7.24)$$

Для напряжений и деформаций в приближениях высших порядков получаются аналогичные выражения.

Уравнения поля (4.7.15) служат основой для установления результата, известного ранее только для тела с дислокациями при отсутствии нагрузок, приложенных к его границам: *среднее значение каждой компоненты напряжения в приближении r -го порядка равно нулю для всех $r > 1$* . Для его получения просто проинтегрируем (4.7.15)₁ по объему, занимаемому телом, и используем теорему Гаусса — Остроградского и граничные условия (4.7.15)₂, что дает

$$\int_V {}_r\sigma_j^B dV = 0. \quad (4.7.25)$$

Фактически этот результат остается справедливым и при замене напряжения в приближении r -го порядка полным эффективным напряжением. Для этого проинтегрируем уравнение поля (4.7.4) по объему, занимаемому телом, и, используя теорему Гаусса — Остроградского и граничные условия (4.7.5)₂, получим

$$\int_V (\sigma_j^B - S_j^B) dV = 0. \quad (4.7.26)$$

Анализ (4.7.21) — (4.7.24) показывает, что

$${}_r\sigma_j^B = Z_j^B + C_{jk}^{BF} (\partial_F {}_r u^k + {}_r\Phi_F^k), \quad (4.7.27)$$

где

$$C_{jk}^{BF} = (\lambda/\mu) \delta_j^B \delta_k^F + \delta_k^B \delta_j^F + \delta_{jk} \delta^{BF}$$

являются компонентами тензора податливости в линейной теории упругости, а величины, обозначенные через Z , представляют собой полиномиальные функции решений уравнений низших порядков и, следовательно, известные функции координат исходной конфигурации (X^A). Поэтому величины σ в приближении r -го порядка являются линейными функциями относительно неизвестных полей (${}_r u^i, {}_r \Phi_A^i$) и, следовательно, полевые уравнения приближений r -го порядка (4.7.15) представляют собой линейные неоднородные уравнения в частных производных со свободным членом ${}_r Z_j^B$. Если сделать подстановку

$${}_r u^i = {}_r v^i + {}_r \psi^i, \quad {}_r \Phi_A^i = {}_r \psi_A^i - \partial_A {}_r \psi^i, \quad (4.7.28)$$

то

$$\partial_F {}_r u^k + {}_r \Phi_F^k = \partial_F {}_r v^k + {}_r \psi_F^k$$

и

$${}_r D_{AB}^i = \partial_A {}_r \Phi_B^i - \partial_B {}_r \Phi_A^i = \partial_A {}_r \psi_B^i - \partial_B {}_r \psi_A^i,$$

т. е. в r -м порядке приближения полевые уравнения (4.7.15) становятся инвариантными относительно калибровочных преобразований (4.7.28) при произвольном выборе производящей функции ${}_r \psi^i$. Этот факт можно использовать для того, чтобы обеспечить выполнение калибровочных условий

$$\partial^A {}_r \psi_A^i = 0 \quad (4.7.29)$$

с помощью выбора ${}_r \psi^i$, для которых

$$\nabla^2 {}_r \psi^i = \partial^A {}_r \psi_A^i, \quad (4.7.30)$$

что приводит к явному упрощению:

$$\partial^A {}_r D_{AD}^i = \nabla^2 {}_r \psi_D^i. \quad (4.7.31)$$

Пусть H — линейный оператор гомотопии с центром в точке P , расположенной внутри тела B . Если исходные поля Φ удовлетворяют условию неточной калибровки

$$H({}_r \Phi_A^i dX^A) = 0,$$

т. е. если поля смещений u являются полями *полных* смещений, то второе из уравнений (4.7.28) дает

$${}_r \psi^i = H({}_r \psi_A^i dX^A).$$

Тогда первое из уравнений (4.7.28) дает следующее выражение для поля полного смещения:

$${}_r u^i = {}_r v^i + H({}_r \psi_A^i dX^A). \quad (4.7.32)$$

Следовательно, приближение r -го порядка определяется неоднородными линейными уравнениями поля

$$\partial^A {}_r \psi_A^i = 0, \quad (4.7.33)$$

$$-C_{jk}^{BF} \partial_B (\partial_F {}_r v^k + {}_r \psi_F^k) = \partial_B {}_r Z_j^B, \quad (4.7.34)$$

$$\delta_{it} \delta^{BD} \nabla^2 {}_r \psi_D^i - [\mu/(2s_1)] C_{jk}^B (\partial_F {}_r v^k + {}_r \psi_F^k) = [\mu/(2s_1)] {}_r Z_j^B \quad (4.7.35)$$

и граничными условиями

$$N_B C_{jk}^{BF} (\partial_F {}_r v^k + {}_r \psi_F^k) \big|_{\partial B} = -N_B {}_r Z_j^B \big|_{\partial B}, \quad (4.7.36)$$

$$N^A (\partial_A {}_r \psi_B^i - \partial_B {}_r \psi_A^i) \big|_{\partial B} = 0. \quad (4.7.37)$$

Анализ приведенной выше системы уравнений показывает, что любые функции $({}_r v^i, {}_r \psi_A^i)$, удовлетворяющие полевым уравнениям (4.7.33), (4.7.35) и граничным условиям (4.7.36), (4.7.37), тождественно удовлетворяют также и полевым уравнениям (4.7.34). Следовательно, мы имеем полностью определенную систему $3+9$ полевых уравнений (4.7.33), (4.7.35) с $3+6$ граничными условиями (4.7.36), (4.7.37), служащими для получения решений с точностью до однородных бездеформационных трансляций тела ${}_r v^i \rightarrow {}_r v^i + {}_r k^i$. Легко заметить, что и уравнения поля, и граничные условия инвариантны по отношению к таким трансляциям (в эти уравнения и условия входят не сами v , а их производные).

Альтернативный и часто используемый выбор калибровки получается, если положить

$${}_r \psi^i = {}_r u^i, \quad (4.7.38)$$

и в этом случае (4.7.28) дает

$${}_r v^i = 0, \quad {}_r \psi_A^i = {}_r \Phi_A^i + \partial_A {}_r u^i. \quad (4.7.39)$$

Тогда для поля смещений можно написать

$${}_r u^i = H({}_r \psi_A^i dX^A). \quad (4.7.40)$$

При этом полевые уравнения в приближении r -го порядка имеют вид

$$-C_{jk}^{BF} \partial_B {}_r \psi_F^k = \partial_B {}_r Z_j^B, \quad (4.7.41)$$

$$\begin{aligned} \delta_{it} \delta^{BD} \partial^A (\partial_A {}_r \psi_D^i - \partial_D {}_r \psi_A^i) - [\mu/(2s_1)] C_{jk}^{BF} {}_r \psi_F^k = \\ = [\mu/(2s_1)] {}_r Z_j^B, \end{aligned} \quad (4.7.42)$$

а граничные условия — вид

$$N_B C_{fk}^{BF} \psi_F^k \Big|_{\partial B} = - N_B Z_f^B \Big|_{\partial B}, \quad (4.7.43)$$

$$N^A (\partial_{Ar} \psi_B^i - \partial_{Br} \psi_A^i) \Big|_{\partial B} = 0. \quad (4.7.44)$$

Наконец, отметим, что любые девять функций $({}_r \psi_A^i)$, удовлетворяющие девяти полевым уравнениям (4.7.42) и 6 + 3 граничным условиям (4.7.43) и (4.7.44), будут удовлетворять полевым уравнениям (4.7.41) тождественно в каждой точке тела. Тогда r -й порядок приближения задается соотношениями

$$\delta_{fi} \delta^{BD} \partial^A (\partial_{Ar} \psi_D^i - \partial_{Dr} \psi_A^i) - [\mu / (2s_1) C_{fk}^{BF} {}_r \psi_F^k = [\mu / (2s_1) {}_r Z_f^B,$$

$$N_B C_{fk}^{BF} {}_r \psi_F^k \Big|_{\partial B} = - N_B {}_r Z_f^B \Big|_{\partial B},$$

$$N^A (\partial_{Ar} \psi_B^i - \partial_{Br} \psi_A^i) \Big|_{\partial B} = 0,$$

где функции смещений определены соотношениями

$${}_r \mu^i = H ({}_r \psi_A^i dX^A).$$

Настоящая книга частично основана на результатах диссертации одного из авторов (А. Кадич, Сараево, Югославия) «Полная теория поля для сплошной среды с дислокациями и дисклинациями» на ученую степень доктора философии (Лихайский университет, Бетлехем, США).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Алгебра Ли группы $SO(3) \supset T(3)$

Порождающие матрицы γ_α полупростой группы $SO(3)$ задаются выражениями

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а их коммутационные соотношения имеют вид

$$[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \equiv \gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha = C_{\alpha\beta}^\xi \gamma_\xi. \quad (2)$$

Здесь $C_{\alpha\beta}^\xi$ — структурные константы группы $SO(3)$. Они удовлетворяют условиям антисимметричности

$$C_{\alpha\beta}^\xi = -C_{\beta\alpha}^\xi \quad (3)$$

и тождеств Якоби

$$C_{\alpha\beta}^\delta C_{\delta\gamma}^\epsilon + C_{\beta\gamma}^\delta C_{\delta\alpha}^\epsilon + C_{\gamma\alpha}^\delta C_{\delta\beta}^\epsilon = 0. \quad (4)$$

Ненулевые структурные константы определяются соотношениями (3) и равенствами

$$C_{23}^1 = 1, \quad C_{31}^2 = 1, \quad C_{12}^3 = 1. \quad (5)$$

Тогда компоненты метрики Картана — Киллинга можно определить через структурные константы следующим образом:

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\delta}^\gamma C_{\beta\gamma}^\delta = C_{\beta\alpha} \quad (6)$$

и получить для группы вращений $SO(3)$

$$C_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (7)$$

Кроме того, в силу несингулярности метрики Картана — Киллинга в случае полупростых групп для $C^{\beta\gamma}$ (т. е. компонент обратной метрики) имеем

$$C^{\beta\gamma} = \delta^{\beta\gamma}. \quad (8)$$

а граничные условия — вид

$$N_B C_{fk}^{BF} \psi_F^k \Big|_{\partial B} = - N_B Z_f^B \Big|_{\partial B}, \quad (4.7.43)$$

$$N^A (\partial_A r \psi_B^i - \partial_B r \psi_A^i) \Big|_{\partial B} = 0. \quad (4.7.44)$$

Наконец, отметим, что любые девять функций $({}_r \psi_A^i)$, удовлетворяющие девяти полевым уравнениям (4.7.42) и 6 + 3 граничным условиям (4.7.43) и (4.7.44), будут удовлетворять полевым уравнениям (4.7.41) тождественно в каждой точке тела. Тогда r -й порядок приближения задается соотношениями

$$\delta_{fi} \delta^{BD} \partial^A (\partial_A r \psi_D^i - \partial_D r \psi_A^i) - [\mu / (2s_1) C_{fk}^{BF} {}_r \psi^k = [\mu / (2s_1) Z_f^B,$$

$$N_B C_{fk}^{BF} {}_r \psi_F^k \Big|_{\partial B} = - N_B Z_f^B \Big|_{\partial B},$$

$$N^A (\partial_A r \psi_B^i - \partial_B r \psi_A^i) \Big|_{\partial B} = 0,$$

где функции смещений определены соотношениями

$${}_r \mu^i = H({}_r \psi_A^i dX^A).$$

Настоящая книга частично основана на результатах диссертации одного из авторов (А. Кадич, Сараево, Югославия) «Полная теория поля для сплошной среды с дислокациями и дисклинациями» на ученую степень доктора философии (Лихайский университет, Бетлехем, США).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Алгебра Ли группы $SO(3) \supset T(3)$

Порождающие матрицы γ_α полупростой группы $SO(3)$ задаются выражениями

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

а их коммутационные соотношения имеют вид

$$[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \equiv \gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha = C_{\alpha\beta}^\xi \gamma_\xi. \quad (2)$$

Здесь $C_{\alpha\beta}^\xi$ — структурные константы группы $SO(3)$. Они удовлетворяют условиям антисимметричности

$$C_{\alpha\beta}^\xi = -C_{\beta\alpha}^\xi \quad (3)$$

и тождеств Якоби

$$C_{\alpha\beta}^\delta C_{\delta\gamma}^\epsilon + C_{\beta\gamma}^\delta C_{\delta\alpha}^\epsilon + C_{\gamma\alpha}^\delta C_{\delta\beta}^\epsilon = 0. \quad (4)$$

Ненулевые структурные константы определяются соотношениями (3) и равенствами

$$C_{23}^1 = 1, \quad C_{31}^2 = 1, \quad C_{12}^3 = 1. \quad (5)$$

Тогда компоненты метрики Картана — Киллинга можно определить через структурные константы следующим образом:

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\delta}^\gamma C_{\beta\gamma}^\delta = C_{\beta\alpha} \quad (6)$$

и получить для группы вращений $SO(3)$

$$C_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (7)$$

Кроме того, в силу несингулярности метрики Картана — Киллинга в случае полупростых групп для $C^{\beta\gamma}$ (т. е. компонент обратной метрики) имеем

$$C^{\beta\gamma} = \delta^{\beta\gamma}. \quad (8)$$

Порождающие матрицы t_i для группы трансляций $T(3)$ задаются равенствами

$$t = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad t_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad t_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Тогда законы умножения для генераторов γ_α и t_i имеют вид

$$\gamma_\alpha t_i = m_{\alpha i}^j t_j. \quad (10)$$

Константы $m_{\alpha i}^j$ антисимметричны по двум нижним индексам:

$$m_{\alpha i}^j = -m_{i\alpha}^j, \quad (11)$$

а их явный вид задается соотношением (11) и условиями

$$m_{23}^1 = 1, \quad m_{31}^2 = 1, \quad m_{12}^3 = 1, \quad (12)$$

причем все остальные $m_{\alpha i}^j$ равны нулю.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Инвариантность L_0

относительно действия группы $SO(3) \triangleright T(3)$

Рассмотрим векторное пространство V_4 и гиперплоскость V в V_4 , образованную всеми векторами вида

$$\hat{\chi} = \begin{Bmatrix} \chi \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \chi \in V_3. \quad (1)$$

Пусть

$$M = \begin{pmatrix} A & \{b\} \\ [0] & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

является элементом пополненного матричного представления группы $G = SO(3) \triangleright T(3)$. Действие группы G на вектор состояния $\hat{\chi}$ дается выражением

$$\hat{\chi}' = M\hat{\chi} = \begin{Bmatrix} A\chi + b \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

а индуцированное преобразование внешней ковариантной производной вектора состояния $\hat{\chi}$ имеет вид

$${}'\hat{D}\hat{\chi} = M\hat{D}\hat{\chi}, \quad (4)$$

где $\hat{D} = dX^a \wedge \hat{D}_a = d + \hat{\Gamma} \wedge$ — оператор внешнего ковариантного дифференцирования по отношению к полной группе $G = SO(3) \supset T(3)$.

Из (1) следует, что $\partial_a \hat{\chi} = \begin{Bmatrix} \partial_a \chi \\ 0 \end{Bmatrix}$ и тензор

$$\hat{C}_{ab} = \partial_a \hat{\chi}^T \partial_b \hat{\chi} = [\partial_a \chi^T, 0] \begin{Bmatrix} \partial_b \chi \\ 0 \end{Bmatrix} = \partial_a \chi^T \partial_b \chi = C_{ab} \quad (5)$$

представляет собой тензор относительных деформаций Коши. При однородном действии группы G , а именно при преобразованиях (3) вектора состояния $\hat{\chi}$ с $dA = 0$, $db = 0$ и $A^T A = I$, тензор деформаций Коши остается инвариантным, поэтому любая функция его компонент также будет инвариантна. В частности, лагранжиан теории упругости $L_0 = L_0(C_{ab})$ инвариантен относительно этих преобразований. Покажем теперь справедливость этого положения при неоднородном действии полной группы G . Если предположить, что матрица M становится зависящей от координат, т. е. $dA \neq 0$, $db \neq 0$, то можно показать, что G является инвариантной группой для лагранжиана L_0 .

В динамике дефектов градиенты деформаций $\partial_a \hat{\chi}$ заменяются дисторсиями

$$\hat{B}_a = \partial_a \hat{\chi} + \hat{\Gamma}_a \hat{\chi} = \begin{Bmatrix} \partial_a \chi + \Gamma_a \chi + \varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_a \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

При построении выражения (6) мы использовали концепцию минимальной замены для группы G . При действии группы G дисторсии преобразуются следующим образом:

$$\hat{B} = M\hat{B} = \begin{pmatrix} A & \{b\} \\ [0] & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_a \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Согласно соотношениям (5) и (6) при нарушении однородности действия группы G_0 можно написать

$$\hat{C}_{ab} = \hat{B}_a^T \hat{B}_b = B_a^T B_b = C_{ab}. \quad (8)$$

При неоднородном действии группы $SO(3) \supset T(3)$ тензор деформаций Коши преобразуется в соответствии с правилом

$${}'C_{ab} = {}'\hat{C}_{ab} = {}'\hat{B}_a^T {}'\hat{B}_b = \hat{B}_a^T M^T M \hat{B}_b.$$

что после перемножения матриц дает

$$\hat{C}_{ab} = [\mathbf{B}_a^T, 0] \left\{ \begin{matrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{B}_b \\ \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{B}_b \end{matrix} \right\} = \mathbf{B}_a^T \mathbf{B}_b = \hat{\mathbf{B}}_a^T \hat{\mathbf{B}}_b = \hat{C}_{ab}. \quad (9)$$

Следовательно, из (8) и (9) вытекает, что лагранжиан $L_0 = L_0(C_{ab})$ инвариантен,

$$L_0('C_{ab}) = L_0(C_{ab}),$$

относительно неоднородного действия группы G .

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Индукированные преобразования полевых переменных

Пусть $\mathbf{Z}$ — матрица-строка с элементами $\{Z_i\}$, определенными (3.9.25) и (3.9.29). Учитывая, что производная скалярной функции по матрице-столбцу дает матрицу-строку, мы можем символически записать (3.9.25) следующим образом:

$$\mathbf{Z} = \partial L / \partial \mathbf{B}. \quad (1)$$

При действии группы G матрица-столбец $\mathbf{B}$ преобразуется согласно правилу

$$' \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \in G. \quad (2)$$

Пусть теперь

$$' \mathbf{Z} = \partial L(' \mathbf{B}, ' \mathbf{D}, ' \boldsymbol{\Theta}) / \partial ' \mathbf{B}. \quad (3)$$

Тогда в силу инвариантности лагранжиана L при действии группы G можно написать $L(' \mathbf{B}, ' \mathbf{D}, ' \boldsymbol{\Theta}) = L(\mathbf{B}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\Theta})$ и, следовательно,

$$' \mathbf{Z} = \frac{\partial L(\mathbf{B}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\Theta})}{\partial ' \mathbf{B}} = \frac{\partial L(\mathbf{B}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\Theta})}{\partial \mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial ' \mathbf{B}}. \quad (4)$$

Из (1) и (2) сразу следует, что закон преобразования для матрицы-строки $\mathbf{Z}$ дается соотношением

$$' \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \mathbf{A}^{-1}. \quad (5)$$

Аналогично если мы положим

$$\mathbf{R} = \partial L / \partial \mathbf{D} \quad (6)$$

и используем закон преобразования матрицы-столбца

$${}'D = AD, \quad (7)$$

то матрица-строка R преобразуется в соответствии с правилом

$${}'R = RA^{-1}. \quad (8)$$

Приступим к выводу закона преобразования квадратной матрицы G , элементами которой являются $\{C^{\alpha\beta}G_{\beta}\}$. При действии группы G матрица кривизны $\Theta = F^{\alpha}\gamma_{\alpha}$ преобразуется в соответствии с правилом

$${}'\Theta = A\Theta A^{-1}. \quad (9)$$

Тогда, определяя ортогональную матрицу H_{β}^{α} соотношением

$$H_{\beta}^{\alpha}\gamma_{\alpha} = A\gamma_{\beta}A^{-1}, \quad (10)$$

можно записать закон преобразования 2-форм F^{α} в виде

$${}'F^{\alpha} = F^{\beta}H_{\beta}^{\alpha}. \quad (11)$$

Закон преобразования метрики Картана — Киллинга $C_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$C_{\delta\gamma} = {}'C_{\alpha\beta}H_{\gamma}^{\alpha}H_{\delta}^{\beta}. \quad (12)$$

Соотношение (12) играет важную роль при установлении инвариантности лагранжиана L . Соответственно закон преобразования обращенной метрики Картана — Киллинга задается соотношением

$${}'C^{\alpha\beta} = C^{\gamma\delta}H_{\gamma}^{\alpha}H_{\delta}^{\beta}. \quad (13)$$

Из (3.14.8), (11) и инвариантности лагранжиана L получаем

$${}'G_{\alpha} = G_{\beta}(H_{\alpha}^{\beta})^{-1}. \quad (14)$$

Следовательно, (10), (13) и (14) дают

$$\begin{aligned} {}'G &= {}'C^{\alpha\beta}{}'G_{\beta}\gamma_{\alpha} = C^{\gamma\delta}G_{\mu}H_{\delta}^{\beta}(H_{\beta}^{\mu})^{-1}H_{\gamma}^{\alpha}\gamma_{\alpha} = \\ &= G^{\gamma}H_{\gamma}^{\alpha}\gamma_{\alpha} = AG^{\delta}\gamma_{\delta}A^{-1} = AGA^{-1}, \end{aligned} \quad (15)$$

и закон преобразования квадратной матрицы G получен:

$${}'G = AGA^{-1}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Четырехмерная формулировка динамики и термодинамики дефектов

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные исследования уравнений динамики дефектов [33, 37, 38] обнаруживают заметное отличие ее полевых уравнений от полевых уравнений классических континуальных теорий: для полевых уравнений динамики дефектов в отличие от классических континуальных теорий допускается наличие нетривиальной абелевой калибровочной группы. Абелева калибровочная группа динамики дефектов не только нетривиальна; она оказывается гораздо богаче калибровочной группы классической электродинамики, так как в ней имеется не менее 27 независимых генераторов [38]. Такое богатство связано со взаимовлиянием трех различных явлений: геометрического отклика тела на систему нагрузок, эволюцию дислокаций в теле и эволюции дисклинаций в теле. К сожалению, принятая формулировка динамики дефектов в трех пространственных + одном временном измерениях не позволяет в явном виде разделить эти три существенно различные аспекты теории. Аналогичная ситуация возникает при формулировке электродинамики в трех пространственных + одном временном измерениях, когда полученные полевые уравнения дают смешанное описание различных эффектов. Так как формулировка электродинамики в четырехмерном пространстве — времени гораздо легче поддается анализу и систематизации, по аналогии можно надеяться, что соответствующая переформулировка динамики дефектов в четырехмерном пространстве — времени также приведет к упрощениям и разделению динамических структур, входящих в динамическое описание.

2. ПОЛЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ДЕФЕКТОВ

Обозначим через E_3 трехмерное евклидово пространство, снабженное декартовой системой координат $\{X^1, X^2, X^3\}$ и содержащее в себе исходную конфигурацию изучаемого тела. Элемент объема E_3 , обозначаемый через

$$\mu := dX^1 \wedge dX^2 \wedge dX^3, \quad (2.1)$$

является также базисом одномерного векторного пространства внешних форм степени 3 на E_3 . Естественный базис пространства, касательного к E_3 , обозначается через $\{\partial_A\} = \{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$, где $\partial_B f = \partial f / \partial X^B$, и индуцирует базис $\{\mu_A\}$ (см. [3, 38])

$$\mu_A = \partial_A \lrcorner \mu \quad (2.2)$$

для внешних дифференциальных форм степени 2 на E_3 . Эти базисные элементы обладают свойством

$$d\mu_A = 0, \quad dX^A \wedge \mu_B = \delta_B^A \mu \quad (2.3)$$

и могут рассматриваться как ориентированные элементы двумерной поверхности.

Основанием для выбора в качестве рабочих обозначений формализма исчисления внешних дифференциальных форм служит то, что этот формализм является естественным средством представления полевых теорий — динамики дефектов и электродинамики. Для большей конкретности определим следующие внешние формы для полей динамики дефектов:

$\alpha^i = \alpha^{Ai} \mu_A$ — 2-формы плотности дислокаций,

$J^i = J_A^i dX^A$ — 1-формы потока дислокаций,

$S^i = S^{Ai} \mu_A$ — 2-формы потока дисклинаций,

$\theta^i = \theta^i \mu$ — 3-формы плотности дисклинаций.

В общем случае все эти величины являются функциями как времени T , так и трех пространственных переменных X^1, X^2, X^3 . Если мы используем обозначения $\bar{d}$ для операции внешнего дифференцирования при фиксированном моменте времени T , а ∂_4 — для обозначения дифференцирования по времени T , то континуальные уравнения динамики дефектов можно записать в простом виде:

$$\partial_4 \alpha^i = -\bar{d}J^i - S^i, \quad \partial_4 \theta^i = -\bar{d}S^i, \quad (2.4)$$

$$\bar{d}\alpha^i = \theta^i, \quad \bar{d}\theta^i = 0. \quad (2.5)$$

Если эти уравнения переписать в базисных элементах $\{\mu, \mu_A\}$, то они примут эквивалентный и знакомый по литературе [10, 17, 19] вид

$$\partial_4 \alpha^{Ai} = -S^{Ai} - e^{ABC} \partial_B J_C^i, \quad \partial_4 \theta^i = -\partial_A S^{Ai}, \quad \partial_A \alpha^{Ai} = \theta^i.$$

(Отметим, что здесь второе из уравнений (2.5) не разрешено относительно нового представления. Это и не требуется, так как 4-форма на трехмерном пространстве тождественно обращается в нуль.)

Аналогичным образом введем остальные поля динамики дефектов, определив

$$\begin{aligned}\beta^i &= \beta_A^i dX^A - 1\text{-формы дисторсии,} \\ \omega^i &= \omega_A^i dX^A - 1\text{-формы спина,} \\ k^i &= K^{Ai} \mu_A - 2\text{-формы изгиба — кручения,} \\ V^i &- 0\text{-формы скорости.}\end{aligned}$$

Полевые уравнения дефектов в этих обозначениях имеют вид

$$\partial_4 k^i = \bar{d}\omega^i - S^i, \quad \bar{d}k^i = \Theta^i, \quad (2.6)$$

$$\partial_4 \beta^i = \bar{d}V^i - J^i - \omega^i, \quad \bar{d}\beta^i = \alpha^i - k^i. \quad (2.7)$$

Снова разрешая их относительно базисных элементов $\{\mu_A, dX^A\}$, получаем полевые уравнения в (возможно, наиболее привычной) компонентной записи

$$\begin{aligned}\partial_4 k^{Ai} &= -S^{Ai} + e^{ABC} \partial_B \omega_C^i, \quad \partial_A k^{Ai} = \theta^i, \\ \bar{\partial}_4 \beta_A^i &= \partial_A V^i - J_A^i - \omega_A^i, \quad e^{ABC} \partial_B \beta_C^i = \alpha^{Ai} - k^{Ai}.\end{aligned}$$

Таким образом, приведенные здесь уравнения далеко отошли от первоначального описания собственно внутреннего состояния тела с дефектами. В действительности они заменяют основные классические уравнения кинематики континуума ($\bar{d}\beta^i = 0$, $\partial_4 \beta^i = \bar{d}V^i$), в соответствии с которыми $\beta_A^i = \partial_A x^i$, $V^i = \partial_4 x^i$, причем $x^i = \chi^i(X^A, T)$ — координаты в текущей конфигурации частиц, которые в исходной конфигурации имели координаты X^A . Для получения полной теории эти уравнения следует дополнить соответствующими формулировками законов баланса импульса и энергии.

Пусть

$$\sigma_i = \sigma_i^A \mu_A - 2\text{-формы механического поверхностного нагружения,} \quad (2.8)$$

$$P_i = p_i \mu - 3\text{-формы плотности импульса,} \quad (2.9)$$

$$W = W^A \mu_A - 2\text{-форма потока полной энергии,} \quad (2.10)$$

$$E = e \mu - 3\text{-форма плотности полной энергии.} \quad (2.11)$$

Относительно коэффициентов σ_i^A , p_i , W^A , e предполагается, что они задаются в зависимости от полной системы образующих соотношений, требования к которым будут обсуждаться ниже. Пока нам необходимо только рассмотреть

уравнения для внешних дифференциалов

$$\partial_4 p_i = \bar{d}\sigma_i, \quad (2.12)$$

$$\partial_4 E = \bar{d}W. \quad (2.13)$$

Если разрешить эти уравнения в базисных элементах $\{\mu, \mu_A\}$ и использовать соотношения $\bar{d}(Y^A \mu_A) = \partial_A Y^A \mu$, непосредственно следующие из (2.3), то мы получим уравнения

$$\partial_4 p_i = \partial_A \sigma_i^A, \quad (2.14)$$

$$\partial_4 e = \partial_A W^A. \quad (2.15)$$

Отсюда ясно, что соотношения (2.12) и (2.13) являются представлением основных законов баланса импульса и полной энергии. Следует обратить особое внимание на то, что величины $\{\sigma_i^A\}$ играют роль компонент тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа, как и должно быть в действительности ввиду того, что наша формулировка использует в качестве независимых пространственных переменных координаты исходной конфигурации.

Для того чтобы выписать окончательный вид уравнений динамики дефектов, нам необходимо только отметить, что система (2.6), (2.7) образует первые интегралы системы (2.4), (2.5). Следовательно, мы имеем систему уравнений поля

$$\partial_4 P_i = \bar{d}\sigma_i, \quad \partial_4 E = \bar{d}W \quad (2.16)$$

$$\partial_4 \alpha^i = \bar{d}J^i - S^i, \quad \partial_4 \Theta^i = -\bar{d}S^i, \quad (2.17)$$

$$\bar{d}\alpha^i = \Theta^i, \quad \bar{d}\Theta^i = 0 \quad (2.18)$$

вместе с первыми интегралами

$$\partial_4 k^i = \bar{d}\omega^i - S^i, \quad \bar{d}k^i = \Theta^i, \quad (2.19)$$

$$\partial_4 \beta^i = \bar{d}V^i - J^i - \omega^i, \quad \bar{d}\beta^i = \alpha^i - k^i. \quad (2.20)$$

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

К (A, 4)-ФОРМУЛИРОВКЕ

Данная в предыдущем разделе формулировка уравнений динамики дефектов базировалась на том допущении, что исходное пространство представляет собой прямое произведение трехмерного евклидова пространства E_3 , соответствующего пространственному описанию тела, и одномерного вещественного пространства, поставленного в соответствие времени. Хотя такая пространственно + временная структура

является адекватным базисом для построения континуальных теорий и теорий материалов с дефектами, она не раскрывает некоторых внутренних структурных отношений и аналогий с той доступностью, которая возможна при правильной четырехмерной формулировке теории. Ввиду того что уравнения динамики дефектов сформулированы на языке внешних форм, их перевод в четырехмерную формулировку может быть сразу же осуществлен, как только будут получены соотношения между трехмерными и четырехмерными базисными элементами для внешних форм различных степеней.

Обозначим через E_4 четырехмерную исходную конфигурацию с декартовым покрытием $\{X^a\} = \{X^1, X^2, X^3, X^4\}$. Рассмотрим четырехэлементный индексный набор $\{a\}$, сгруппированный из трехэлементного набора и элемента 4, т. е. $\{a\} = \{A, 4\}$. Так как в дальнейшем мы будем отождествлять X^4 с T , заменим $\{a\}$ на $\{A, 4\}$, т. е. мы можем писать $\{X^a\} = \{X^A, T\}$.

Элемент объема E_4 , являющийся также и базисным элементом для 4-форм, задается выражением

$$\begin{aligned}\omega &= dX^1 \wedge dX^2 \wedge dX^3 \wedge dX^4 = \\ &= \frac{1}{4!} e_{abef} dX^a \wedge dX^b \wedge dX^e \wedge dX^f.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Таким образом, поскольку $\mu = dX^1 \wedge dX^2 \wedge dX^3$, мы получим элементарный результат

$$\omega = \mu \wedge dT. \quad (3.2)$$

Естественный базис пространства, касательного к E_4 , задается четырьмя линейными операторами $\{\partial_a, a = 1, \dots, 4\}$ с $\partial_a f = \partial f / \partial X^a$, и базис для 3-форм имеет вид

$$\pi_a = \partial_a \lrcorner \omega = \frac{1}{3!} e_{abef} dX^b \wedge dX^e \wedge dX^f, \quad a = 1, 2, 3, 4. \quad (3.3)$$

Здесь символ $\lrcorner$ используется для обозначения операции скалярного умножения (см. работу [3, приложение]). Эти базисные элементы обладают следующими свойствами:

$$d\pi_a = 0, \quad dX^a \wedge \pi_b = \delta_b^a \omega, \quad (3.4)$$

где через $d = dX^a \wedge \partial_a$ обозначен четырехмерный оператор внешнего дифференцирования.

Теперь нам следует соотнести полученные величины с теми, которые встречаются в формализме пространство + время. Из определения оператора d очевидно, что $d = dX^a \wedge \partial_a = dX^A \wedge \partial_A + dT \wedge \partial_4$, а $\bar{d} = dX^A \wedge \partial_A$. Следовательно, имеем

$$d = \bar{d} + dT \wedge \partial_4. \quad (3.5)$$

Подстановкой (3.2) в (3.3) легко получить, что

$$\pi_a = (\partial_a \lrcorner \mu) \wedge dT - \mu \wedge (\partial_a \lrcorner dT).$$

Однако $\partial_4 \lrcorner \mu = 0$, $\partial_4 \lrcorner dT = 1$, $\partial_A \lrcorner dT = 0$, $\partial_A \lrcorner \mu = \mu_A$, и поэтому

$$\pi_a = \delta_a^A \mu_A \wedge dT - \delta_a^4 \mu. \quad (3.6)$$

Так как любая 3-форма на E_4 однозначно выражается в виде

$$\Gamma = \Gamma^a \pi_a = \Gamma^A \pi_A + \Gamma^4 \pi_4,$$

то использование (3.6) позволяет сделать следующий вывод: произвольная 3-форма Γ на E_4 однозначно определяется 2-формой $\Gamma^A \mu_A$ и 3-формой $\gamma \mu = -\Gamma^4 \mu$ при помощи соотношения

$$\Gamma = \Gamma^A \mu_A \wedge dT + \gamma \mu. \quad (3.7)$$

Комбинируя (3.4), (3.5) и (3.7), можно сделать следующее дополнительное заключение: внешняя производная произвольной 3-формы Γ на E_4 , заданной соотношением (3.7), определяется через 3-формы $\bar{d}(\Gamma^A \mu_A)$ и $\partial_4 \Gamma^4 \mu$ выражением вида

$$d\Gamma = (\bar{d}(\Gamma^A \mu_A) - \partial_4 \gamma \mu) \wedge dT. \quad (3.8)$$

Базис 2-форм на E_4 задается в виде

$$\pi_{ab} = \partial_a \lrcorner \pi_b = \partial_a \lrcorner (\partial_b \lrcorner \omega) \quad (3.9)$$

и обладает следующими свойствами:

$$\pi_{ab} = -\pi_{ba}, \quad d\pi_{ab} = 0, \quad dX^c \wedge \pi_{ab} = \delta_a^c \mu_b - \delta_b^c \mu_a. \quad (3.10)$$

Если Σ является 2-формой на E_4 , то она может быть выражена однозначно в виде $\Sigma = \Sigma^{ab} \pi_{ab}$, причем $\Sigma^{ab} = -\Sigma^{ba}$. Тогда применение процедуры, использованной выше для 3-форм, приводит к следующему результату: 2-форма Σ на E_4 однозначно определяется 1-формой $\rho = \rho_A dX^A$ и 2-формой $\eta = \eta^A \mu_A$ при помощи соотношения

$$\Sigma = \rho \wedge dT + \eta = \rho_A dX^A \wedge dT + \eta^A \mu_A, \quad (3.11)$$

а ее внешняя производная задается в виде

$$\begin{aligned} d\Sigma &= (\bar{d}\rho + \partial_4 \eta) \wedge dT + \bar{d}\eta = \\ &= (\bar{d}(\rho_A dX^A) + \partial_4 \eta^A \mu_A) \wedge dT + \bar{d}(\eta^A \mu_A). \end{aligned} \quad (3.12)$$

4. ДИНАМИКА ДЕФЕКТОВ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ — ВРЕМЕНИ

Теперь просто осуществить переход к полному четырехмерному описанию динамики дефектов, сравнивая форму результатов (3.7), (3.8), (3.11) и (3.12) с полевыми уравнениями (2.16) — (2.20). Начнем с уравнения (2.16). Так как $\sigma_i = \sigma_i^A \mu_A$, $W = W^A \mu_A$ представляют собой 2-формы допустимого вида (т. е. 2-формы на E_3 с коэффициентами, зависящими от положения в E_4), а $P_i = p_i \mu$, $E = e \mu$ суть 3-формы допустимого вида, то можно использовать их для определения 3-форм напряжения — импульса

$$\mathcal{P}_i = \sigma_i \wedge dT + P_i = \sigma_i^A \mu_A \wedge dT + p_i \mu$$

и 3-формы энергии

$$\mathcal{P}_4 = W \wedge dT + E = W^A \mu_A \wedge dT + e \mu.$$

Так как внешние производные этих 3-форм заданы выражениями вида

$$d\mathcal{P}_i = (\bar{d}\sigma_i - \partial_a P_i) \wedge dT, \quad d\mathcal{P}_4 = (\bar{d}W - \partial_4 E) \wedge dT,$$

сравнение с (2.16) позволяет сделать следующее заключение: законы баланса импульса и энергии выполняются тогда и только тогда, когда 3-формы

$$\mathcal{P}_i = \sigma_i \wedge dT + P_i = \sigma_i^A \mu_A \wedge dT + p_i \mu \quad (4.1)$$

напряжения — импульса и 3-форма

$$\mathcal{P}_4 = W \wedge dT + E = W^A \mu_A \wedge dT + e \mu \quad (4.2)$$

энергии удовлетворяют уравнениям для внешних форм

$$d\mathcal{P}_i = 0, \quad d\mathcal{P}_4 = 0 \quad (4.3)$$

в той области E_4 , которую занимает тело в процессе эволюции.

В случае (2.17) и (2.18) мы рассмотрим сначала 3-формы дисклинаций

$$\Omega^i = -S^i \wedge dT + \Theta^i = -S^{Ai} \mu_A \wedge dT + \theta^i \mu.$$

Так как эти 3-формы имеют структуру, задаваемую (3.7), соотношение (3.8) дает

$$d\Omega^i = -(\bar{d}S^i + \partial_4 \Theta^i) \wedge dT.$$

Это показывает, что второе из уравнений (2.17) выполняется тогда и только тогда, когда $d\Omega^i = 0$. Далее, поскольку $\Theta^i = \theta^i \mu$, а $dX^A \wedge \mu$ тождественно равны нулю, получаем, что

$d\Theta^i = d\theta^i \wedge \mu = \partial_A \theta^i dX^A \wedge \mu$ тождественно обращаются в нуль. Таким образом, второе соотношение (2.18) выполняется тождественно, так как $\Theta^i = \theta^i \mu$. Для получения первых из уравнений (2.17) и (2.18) построим 2-формы дислокаций

$$\mathcal{D}^i = J^i \wedge dT + \alpha^i = J_A^i dX^A \wedge dT + \alpha^{Ai} \mu_A.$$

Так как эти выражения имеют вид, совпадающий с представлением (3.11), то соотношение (3.12) дает

$$d\mathcal{D}^i = (\bar{d}J^i + \partial_4 \alpha^i) \wedge dT + \bar{d}\alpha^i.$$

Используя первые из уравнений (2.17) и (2.18) для исключения $\bar{d}J^i + \partial_4 \alpha^i$ и $\bar{d}\alpha^i$, получаем

$$d\mathcal{D}^i = -S^i \wedge dT + \Theta^i.$$

Следовательно, уравнения (2.17) и (2.18) удовлетворяются тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}^i$ и Ω^i связаны соотношением $d\mathcal{D}^i = \Omega^i$.

Система полевых уравнений динамики дефектов (2.17) и (2.18) имеет решение тогда и только тогда, когда 3-формы дисклинаций

$$\Omega^i = -S^i \wedge dT + \Theta^i = -S^{Ai} \mu_A \wedge dT + \theta^i \mu \quad (4.4)$$

и 2-формы дислокаций

$$\mathcal{D}^i = J^i \wedge dT + \alpha^i = J_A^i dX^A \wedge dT + \alpha^{Ai} \mu_A \quad (4.5)$$

удовлетворяют уравнениям для внешних дифференциальных форм

$$d\Omega^i = 0, \quad d\mathcal{D}^i = \Omega^i \quad (4.6)$$

в той области E_4 , которую занимает тело в процессе эволюции.

Из четырехмерной формулировки уже вытекают полезные следствия. Выражения (4.4) и (4.5) показывают, что величины, относящиеся к дислокациям, появляются только в виде 2-форм $\mathcal{D}^i$, а величины, связанные с дисклинациями, входят только через 3-формы Ω^i . Следовательно, в четырехмерном формализме выявляется специфика и неустранимые различия между дислокационными и дисклинационными структурами, отнюдь не очевидные в трехмерной формулировке.

Можно предположить, что первые интегралы (2.19) и (2.20) системы внешних дифференциальных форм (2.17) и (2.12) получаются аналогичным образом. Покажем теперь, что это действительно так. Если разрешить (2.20) относительно J^i и α^i , что дает $J^i = \bar{d}V^i - \omega^i - \partial_4 \beta^i$, $\alpha^i = \bar{d}\beta^i + k^i$, и

подставить полученные выражения в (4.5), то получим

$$\mathcal{D}^i = (-\omega^i \wedge dT + k^i) + (\bar{d}V^i - \partial_A \beta^i) \wedge dT + \bar{d}\beta^i. \quad (4.7)$$

Следовательно, определяя 1-формы скорости — дисторсии

$$\mathcal{R}^i = V^i dT + \beta^i = V^i dT + \beta_A^i dX^A \quad (4.8)$$

и 2-формы спина — кручения

$$\mathcal{K}^i = -\omega^i \wedge dT + k^i = -\omega_A^i dX^A \wedge dT + k^{Ai} \mu_A, \quad (4.9)$$

мы видим, что в силу соотношений для внешних дифференциалов

$$\mathcal{D}^i = d\mathcal{R}^i + \mathcal{K}^i \quad (4.10)$$

система (2.20) удовлетворяется. Если взять внешнюю производную от (4.10), то мы получим соотношение $d\mathcal{D}^i = d\mathcal{K}^i$. Комбинируя его с соотношением $d\mathcal{D}^i = \Omega^i$, получаем в результате, что и система (2.19) также удовлетворяется.

Система полевых уравнений

$$d\mathcal{D}^i = \Omega^i \quad (4.11)$$

допускает систему первых интегралов

$$\mathcal{D}^i = d\mathcal{R}^i + \mathcal{K}^i, \quad (4.12)$$

где соответствующие величины выражены через 1-формы скорости — дисторсии

$$\mathcal{R}^i = V^i dT + \beta^i = V^i dT + \beta_A^i dX^A \quad (4.13)$$

и 2-формы спина — кручения

$$\mathcal{K}^i = -\omega^i \wedge dT + k^i = -\omega_A^i dX^A \wedge dT + k^{Ai} \mu_A. \quad (4.14)$$

В результате мы получили полезное разделение различных динамических переменных: с одной стороны скорости и дисторсии, а с другой спина и кручения — изгиба. Теперь эти величины входят в различные по степени внешние дифференциальные формы $\mathcal{R}^i$ и $\mathcal{K}^i$.

5. 45-ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ АБЕЛЕВА КАЛИБРОВОЧНАЯ ГРУППА И ПРОБЛЕМА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Аналогии с полевыми уравнениями электродинамики, использованные Голембевской-Ласотой [33], показали, что уравнения динамики дислокаций допускают нетривиальную систему абелевых калибровочных преобразований. Концептуальная свобода, возникающая при использовании этих ка-

либровочных преобразований, позволила проанализировать динамику дефектов в случае линейных деформаций [37] и в общем случае [38]. Позднее было установлено существование 27-параметрической абелевой калибровочной группы, для которой параметры α^i и Θ^i можно сделать инвариантными с помощью аддитивных преобразований J^i , S^i , ω^i , k^i и β^i . Было показано, что при некотором специальном выборе 27 функций возникающие изменения ведут к формализму, в котором различного рода отклики тела на воздействия могут быть представлены в виде суммы внутренних и внешних мод отклика. Как только внутренние и внешние моды получают соответствующую интерпретацию, становится возможным анализ теории с помощью неравновесной термодинамики, приводящий к хорошо определенной процедуре описания необходимых образующих соотношений теории. Поэтому для получения аналогичных результатов в четырехмерном случае требуется провести анализ калибровочных преобразований в четырехмерном формализме.

Основные уравнения поля для дефектов даются соотношениями

$$d\Omega^i = 0, \quad \Omega^i = d\mathcal{D}^i, \quad (5.1)$$

$$\mathcal{D}^i = d\mathcal{B}^i + \mathcal{K}^i, \quad d\mathcal{K}^i = \Omega^i. \quad (5.2)$$

Исходная идея использования калибровочной группы (точнее, абелевой калибровочной группы) состоит в том, что полевые переменные f^α представляются в виде суммы $\bar{f}^\alpha + g^\alpha$, в которой генераторы калибровочного преобразования g^α выбираются таким образом, чтобы новые полевые переменные $\bar{f}^\alpha$ удовлетворяли тем же самым полевым уравнениям, что и первоначальные переменные f^α . Непосредственные расчеты аналогичны проведенным в работе [38], что позволяет просто сформулировать результат.

Выбор 45 функций v_A^i , v^{Ai} , f^i , F_A^i , g^i , G_A^i , χ^i определяет такие систему 2-форм

$$v^i = v_a^i dX^A \wedge dT + v^{Ai} \mu_A, \quad (5.3)$$

систему 1-форм

$$F^i = f^i dT + F_A^i dX^A, \quad G^i = g^i dT + G_A^i dX^A \quad (5.4)$$

и систему 0-форм χ^i , что преобразования

$$\Omega^i = \bar{\Omega}^i + dv^i, \quad (5.5)$$

$$\mathcal{D}^i = \bar{\mathcal{D}}^i + v^i + dF^i, \quad (5.6)$$

$$\mathcal{B}^i = \bar{\mathcal{B}}^i + d\chi^i + F^i - G^i, \quad (5.7)$$

$$\mathcal{K}^i = \bar{\mathcal{K}}^i + v^i + dG^i \quad (5.8)$$

переводят полевые уравнения (5.1), (5.2) в полевые уравнения

$$d\bar{\Omega} = 0, \quad \bar{\Omega}^i = d\bar{\mathcal{D}}^i, \quad (5.9)$$

$$\bar{\mathcal{D}}^i = d\bar{\mathcal{R}}^i + \bar{\mathcal{K}}^i, \quad d\bar{\mathcal{K}}^i = \bar{\Omega}^i. \quad (5.10)$$

Следовательно, полевые уравнения (5.1) и (5.2) допускают 45-параметрическую калибровочную группу.

Во-первых, следует отметить, что эта калибровочная группа сведется к 27-параметрической группе, описанной в работе [38], как только мы потребуем, чтобы α^i и Θ^i были бы инвариантными (т. е. если потребовать выполнения условий $v^{Ai} = 0$, $F_A^i = 0$; см. (4.4) и (4.5)). Таким образом, все результаты, полученные в [38], непосредственно приложимы к четырехмерной формулировке теории.

Во-вторых, необходимо понимать, что наличие такой калибровочной группы указывает на изначальную неопределенность полевых уравнений (5.1) и (5.2), которая может привести к неверным заключениям. Простейшая ситуация, в которой это можно заметить, возникает при вопросе: могут ли полевые уравнения описывать дефекты, которых нет в действительности? Для ответа на него рассмотрим тело без дефектов. Такая ситуация описывается с помощью интегрируемого отклика $x^i = \psi^i(X^A, T)$, где $\{x^i\}$ — координаты материальной точки в текущей конфигурации в том случае, если в исходной конфигурации точка имела координаты $\{X^A\}$. В этом случае имеем

$$\mathcal{R}^i = d\psi^i, \quad \mathcal{D}^i = 0, \quad \mathcal{K}^i = 0, \quad \Omega^i = 0. \quad (5.11)$$

Подставляя эти соотношения в (5.5) — (5.8), получаем

$$\bar{\Omega}^i = -dv^i, \quad \bar{\mathcal{D}}^i = -d\bar{F}^i - v^i, \quad \bar{\mathcal{K}}^i = -v^i - dG^i \quad (5.12)$$

и

$$\mathcal{R}^i = d(\psi^i - \chi^i) - F^i + G^i. \quad (5.13)$$

Для каждой заданных форм v^i , F^i , G^i и χ^i мы получим явные нетривиальные выражения для $\bar{\Omega}^i$, $\bar{\mathcal{D}}^i$, $\bar{\mathcal{K}}^i$ и $\bar{\mathcal{R}}^i$, которые удовлетворяют полевым уравнениям

$$d\bar{\Omega}^i = 0, \quad \bar{\Omega}^i = d\bar{\mathcal{D}}^i,$$

$$\bar{\mathcal{D}}^i = d\bar{\mathcal{R}}^i + \bar{\mathcal{K}}^i, \quad d\bar{\mathcal{K}}^i = \bar{\Omega}^i.$$

Тогда, поскольку полевые уравнения удовлетворяются, трудно было бы утверждать, что $\bar{\Omega}^i$, $\bar{\mathcal{D}}^i$, $\bar{\mathcal{K}}^i$ и $\bar{\mathcal{R}}^i$ не описывают состояния тела с дефектами, если бы мы не знали заранее, что в действительности тело не содержит дефектов. Иначе говоря, так как решение полевых уравнений (5.1) и (5.2)

дается частными функциями, которые не позволяют отличить величины с черточками от величин без черточек (т. е. узнать, подвергалось ли решение преобразованиям (5.5) — (5.8)), то мы не можем однозначно определить, появились ли ложные дефекты в результате действия 45-параметрической калибровочной группы. Такая ситуация возникает потому, что 45-параметрическая калибровочная группа отображает решения полевых уравнений снова в решения полевых уравнений. В самом деле, очевидно, что калибровочная группа вводит любое решение полевых уравнений в семейство решений, содержащих 45 произвольных функций пространственных координат и времени. Таким образом, становится абсолютно ясно, что должна быть введена специальная процедура, с помощью которой можно было бы исключить лишние степени неопределенности. В этом смысле мы должны получить специальный набор калибровочных условий, служащих для отбора физически осмысленных решений. Для рассмотренного выше примера эти условия должны устранять возможность появления «нуль-дефектов», т. е. дефектов, связанных с бездефектными состояниями.

6. ОПЕРАТОРЫ ГОМОТОПИИ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

При поиске эффективных калибровочных условий в первую очередь необходимо отметить, что формы

$$\Omega^i = -S^i \wedge dT + \Theta^i, \quad \mathcal{D}^i = J^i \wedge dT + \alpha^i \quad (6.1)$$

характеризуют плотности и потоки дисклинаций и дислокаций, в то время как формы

$$\mathcal{K}^i = -\omega^i \wedge dT + k^i, \quad \mathcal{J}^i = V^i dT + \beta^i \quad (6.2)$$

описывают величины, возникающие как отклик системы на наличие дисклинаций и дислокаций. Поэтому кажется разумным ожидать, что эффективная система калибровочных условий должна приводить к соотношениям $\bar{\Omega}^i = \Omega^i$, $\bar{\mathcal{D}}^i = \mathcal{D}^i$. С другой стороны, преобразование (5.6) показывает, что $\mathcal{D}^i = \bar{\mathcal{D}}^i$ тогда и только тогда, когда $v^i = -dF^i$, а из (5.5) в свою очередь следует, что это влечет равенство $\Omega^i = \bar{\Omega}^i$. Таким образом, из калибровочных условий

$$v^i = -dF^i \quad (6.3)$$

следует, что

$$\Omega^i = \bar{\Omega}^i, \quad \mathcal{D}^i = \bar{\mathcal{D}}^i, \quad (6.4)$$

и упомянутые калибровочные преобразования принимают вид

$$\mathcal{K}^i = \bar{\mathcal{K}}^i - d(F^i - G^i), \quad \mathcal{B}^i = \bar{\mathcal{B}}^i + d\chi^i + F^i - G^i. \quad (6.5)$$

Таким образом, как только мы получим условия для определения F^i , G^i и χ^i , будут определены и все остальные параметры.

Ключом к решению задачи является тот факт, что $\mathcal{K}^i$ и $\bar{\mathcal{K}}^i$ удовлетворяют соотношениям $d\mathcal{K}^i = \Omega^i = \bar{\Omega}^i = \bar{\mathcal{K}}^i$, и, следовательно, большинство вопросов будет разрешено, как только мы однозначно выразим $\bar{\mathcal{K}}^i$ через Ω^i так, чтобы $d\bar{\mathcal{K}}^i = \Omega^i$. Однако именно для этого и служит оператор линейной гомотопии в исчислении внешних дифференциальных форм (относительно свойств этого оператора см. работу [3, гл. V приложения]). Пусть $\{X_0^a\} = \{X_0^a, T_0\}$ — некоторая выделенная точка в E_4 . Построим на E_4 векторное поле

$$\mathcal{H} = (X^a - X_0^a) \partial_a + (T - T_0) \partial_4 = (X^a - X_0^a) \partial_a. \quad (6.6)$$

Пусть ω — форма степени k на E_4 . Обозначим через $\tilde{\omega}(\lambda)$ однопараметрическое семейство k -форм на E_4 , получающееся из ω заменой коэффициентов формы в точке $\{X^a\}$ на соответствующие коэффициенты, рассчитанные в точке $X_0^a + \lambda(X^a - X_0^a)$. Тогда если $\Gamma = \gamma_b(X^a) dX^b$, то $\tilde{\Gamma}(\lambda) = \gamma_b(X_0^a - \lambda(X^a - X_0^a)) dX^b$. Оператор H , определенный с помощью такой конструкции выражением вида

$$H\langle\omega\rangle = \int_0^1 \mathcal{H} \tilde{\omega}(\lambda) \lambda^{k-1} d\lambda, \quad (6.7)$$

таков, что он удовлетворяет тождествам

$$\omega \equiv H\langle d\omega \rangle + dH\langle\omega\rangle, \quad \mathcal{H} \lrcorner H\langle\omega\rangle \equiv 0, \quad H\langle H\langle\omega\rangle \rangle \equiv 0. \quad (6.8)$$

Если мы имеем дифференциальное уравнение для внешней формы вида $d\omega = \alpha$, то соотношения (6.8) непосредственно дают решение

$$\omega = dH\langle\omega\rangle + H\langle\alpha\rangle, \quad (6.9)$$

в котором $H\langle\omega\rangle$ произвольно, а $H\langle\alpha\rangle$ является той частью ω , которая однозначно определяется через α с помощью соотношения $d\omega = \alpha$.

Если мы положим

$$F^i = -H\langle\mathcal{K}^i\rangle + G^i, \quad \chi^i = H\langle\mathcal{B}^i\rangle, \quad (6.10)$$

то из (6.5) получим

$$\mathcal{K}^i = \bar{\mathcal{K}}^i + dH\langle\mathcal{K}^i\rangle, \quad \mathcal{B}^i = \bar{\mathcal{B}}^i + dH\langle\mathcal{B}^i\rangle - H\langle\mathcal{K}^i\rangle,$$

или

$$\bar{\mathcal{K}}^i = \mathcal{K}^i - dH \langle \mathcal{K}^i \rangle = H \langle d\mathcal{K}^i \rangle = H \langle \Omega^i \rangle \quad (6.11)$$

и

$$\bar{\mathcal{B}}^i = \mathcal{B}^i - dH \langle \mathcal{B}^i \rangle + H \langle \mathcal{K}^i \rangle = H \langle d\mathcal{B}^i + \mathcal{K}^i \rangle = H \langle \mathcal{D}^i \rangle. \quad (6.12)$$

Таким образом, этот выбор генераторов калибровочного преобразования приводит нас к соотношениям

$$\Omega^i = \bar{\Omega}^i, \quad \mathcal{D}^i = \bar{\mathcal{D}}^i \quad (6.13)$$

и

$$\mathcal{K}^i = \bar{\mathcal{K}}^i + dH \langle \mathcal{K}^i \rangle, \quad \mathcal{B}^i = \bar{\mathcal{B}}^i + dH \langle \mathcal{B}^i \rangle - H \langle \mathcal{K}^i \rangle, \quad (6.14)$$

где величины $\bar{\mathcal{K}}^i$ и $\bar{\mathcal{B}}^i$ однозначно определяются через инвариантные величины Ω^i и $\mathcal{D}^i$ с помощью соотношений

$$\bar{\mathcal{K}}^i = H \langle \Omega^i \rangle, \quad \bar{\mathcal{B}}^i = H \langle \mathcal{D}^i \rangle. \quad (6.15)$$

Рассмотренный выше выбор калибровочных генераторных функций (калибровочных условий) обладает тем положительным свойством, что он превращает $\bar{\mathcal{K}}^i$ и $\bar{\mathcal{B}}^i$ в величины, однозначно определенные через инвариантные величины Ω^i и $\mathcal{D}^i$. Теперь остается показать, что этот выбор исключает возможность получения дефектов, которые в действительности отсутствуют. С этой целью вернемся к задаче, в которой $\mathcal{B}^i = d\psi^i$ с $x^i = \psi^i(X^A, T)$, т. е. к классической континуальной задаче. В этом случае $\mathcal{K}^i = 0$, $\mathcal{D}^i = 0$, $\Omega^i = 0$, а условия калибровки $v^i = dF^i$, $F^i = -H \langle \mathcal{K}^i \rangle + G^i$, $\chi^i = H \langle \mathcal{B}^i \rangle$ дают $v^i = -dF^i$, $F^i = G^i$, $\chi^i = H \langle d\psi^i \rangle = \psi^i - c^i$, где $c^i = \text{const}$. Поэтому из соотношений (5.5) — (5.8) следует, что $0 = \Omega^i = \bar{\Omega}^i$, $0 = \mathcal{D}^i = \bar{\mathcal{D}}^i$, $d\psi^i = \mathcal{B}^i = \bar{\mathcal{B}}^i + d\psi^i$, что означает $\bar{\mathcal{B}}^i = 0$, и $0 = \mathcal{K}^i = \bar{\mathcal{K}}^i$. Кроме того, из $\bar{\mathcal{K}}^i = H \langle \Omega^i \rangle = 0$, $\bar{\mathcal{B}}^i = H \langle \mathcal{D}^i \rangle = 0$ получим непосредственно $\bar{\mathcal{B}}^i = 0$, $\bar{\mathcal{K}}^i = 0$, что в итоге означает: калибровочные условия, приведенные выше, исключают возможность введения в теорию «нуль-дефектов».

Так как определение линейного оператора гомотопии H зависит от выбора точки $\{X_0^a\}$, может показаться, что при другом выборе все построения разрушатся. Однако это не так, и мы сейчас это продемонстрируем. Обозначим через H_0 оператор гомотопии с центром в точке $\{X_0^a\}$, а через H_1 оператор гомотопии с центром в точке $\{X_1^a\}$. Непосредственные вычисления показывают, что H_0 и H_1 связаны соотношением

$$H_1 \langle \omega \rangle = H_0 \langle \omega \rangle + \rho + d\eta, \quad (6.16)$$

где

$$\rho = -H_0 \langle H_1 \langle d\omega \rangle \rangle, \quad \eta = H_0 \langle H_1 \langle \omega \rangle \rangle \quad (6.17)$$

(см. лемму (5-7.1) в работе [3]). Из уравнений калибровочных преобразований и соотношений (6.16) и (6.17) вытекает следующее заключение: *калибровочные условия* $v^i = -dF^i$, $F^i = -H \langle \mathcal{K}^i \rangle + G^i$, $\chi^i = H \langle \mathcal{B}^i \rangle$ и следствия из них являются инвариантными по отношению к выбору точки $\{X_0^a\}$, т. е. если мы заменим H на H_1 и выберем калибровку согласно соотношениям

$$v_1^i = -dF_1^i, \quad F_1^i = -H_1 \langle \mathcal{K}^i \rangle + G_1^i, \quad \chi_1^i = H_1 \langle \mathcal{B}^i \rangle,$$

то

$$\Omega^i = \bar{\Omega}^i, \quad \mathcal{D}^i = \bar{\mathcal{D}}^i, \quad \bar{\mathcal{K}}^i = \mathcal{K}_1^i + dH_1 \langle \mathcal{K}^i \rangle, \\ \mathcal{B}^i = \bar{\mathcal{B}}^i + dH_1 \langle \mathcal{B}^i \rangle - H_1 \langle \bar{\mathcal{K}}^i \rangle, \quad \bar{\mathcal{K}}_1^i = H_1 \langle \Omega^i \rangle, \quad \bar{\mathcal{B}}_1^i = H_1 \langle \mathcal{D}^i \rangle.$$

Иначе (и, возможно, более понятно) это можно сформулировать следующим образом: *изменение выбора исходной точки построения (центра) оператора гомотопии $\{X_0^A\}$ порождает соотношения (6.16), (6.17), структура которых такова, что существует калибровочное преобразование, отображающее калибровочные условия, построенные для одного оператора гомотопии, в такие же калибровочные условия, построенные для другого оператора гомотопии.*

7. ЯВНЫЕ РАСЧЕТЫ.

СКОРОСТЬ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ И ДИСТОРСИЯ

Явные вычисления действия оператора гомотопии на различные формы очень важны. Так как выбор исходной точки $\{X_0^a\}$ не влияет на конечный результат, на что указывает инвариантность окончательных соотношений относительно изменения выбора этой точки, для упрощения мы положим $X_0^a = 0$. В этом случае (6.6) примет вид

$$\mathcal{E} = X^A \partial_A + T \partial_t. \quad (7.1)$$

Это значительно упрощает применение определения (6.7) для рассматриваемых ниже форм.

Мы начнем с формы высшей степени, а именно с формы

$$\Omega^i = -S^i \wedge dT + \Theta^i = -S^A \mu_A \wedge dT + \theta^i \mu. \quad (7.2)$$

Так как Ω^i представляет собой форму степени 3, использование (6.7) и (4.4) дает

$$H\langle\Omega^i\rangle=\int_0^1\lambda^2\{-X^B\tilde{S}^{Ai}\mu_{BA}\wedge dT+(X^A\tilde{\theta}^i-T\tilde{S}^{Ai})\mu_A\}d\lambda, \quad (7.3)$$

где

$$\mu_{BA}=\partial_B\lrcorner\mu_A=\frac{1}{2}\partial_B\lrcorner(e_{AFG}dX^F\wedge dX^G)=-e_{BAC}dX^C.$$

Поэтому если мы определим линейный интегральный оператор h_2 соотношением

$$h_2\langle\rho\rangle(X^a)=\int_0^1\lambda^2\rho(\lambda X^a)d\lambda, \quad (7.4)$$

то получим

$$H\langle\Omega^i\rangle=X^Bh_2\langle S^{Ai}\rangle e_{BAC}dX^C\wedge dT+(X^Ah_2\langle\theta^i\rangle+Th_2\langle S^{Ai}\rangle)\mu_A. \quad (7.5)$$

Для 2-форм, проводя аналогичные вычисления и используя (4.5) и (4.14), получаем

$$H\langle\mathcal{D}^i\rangle=X^Ah_1\langle J_A^i\rangle dT-(Th_1\langle J_C^i\rangle+X^Bh_1\langle\alpha^{Ai}\rangle e_{ABC})dX^C, \quad (7.6)$$

$$H\langle\mathcal{K}^i\rangle=-X^Ah_1\langle\omega_A^i\rangle dT-(-Th_1\langle\omega_C^i\rangle+X^Bh_1\langle k^{Ai}\rangle e_{BAC})dX^C, \quad (7.7)$$

где h_1 — линейный интегральный оператор:

$$h_1\langle\rho\rangle(X^A)=\int_0^1\lambda\rho(\lambda X^A)d\lambda. \quad (7.8)$$

Для 1-форм, исходя из (4.13), имеем

$$H\langle\mathcal{B}^i\rangle=Th\langle V^i\rangle+X^Ah\langle\mathcal{B}_A^i\rangle, \quad (7.9)$$

где

$$h\langle\rho\rangle(X^a)=\int_0^1\rho(\lambda X^a)d\lambda. \quad (7.10)$$

Эти результаты, а также соотношения (6.10), (6.15) и (6.16) дают следующие выражения для соответствующих форм:

$$\bar{\mathcal{K}}^i=X^Bh_2\langle S^{Ai}\rangle E_{BAC}dX^C\wedge dT+(X^Ah_2\langle\theta^i\rangle+Th_2\langle S^{Ai}\rangle)\mu_A, \quad (7.11)$$

$$\mathcal{B}^i=X^Ah_1\langle J_A^i\rangle dT-(Th_1\langle J_C^i\rangle+X^Bh_1\langle\alpha^{Ai}\rangle E_{BAC})dX^C, \quad (7.12)$$

$$\chi^i=Th\langle V^i\rangle+X^Ah\langle\beta_A^i\rangle. \quad (7.13)$$

Так как (6.14) можно переписать в эквивалентной форме

$$\mathcal{K}^i=\bar{\mathcal{K}}^i+dH\langle\mathcal{K}^i\rangle=-\omega^i\wedge dT+k^i, \quad (7.14)$$

$$\mathcal{B}^i=d\chi^i+H\langle\mathcal{D}^i-\mathcal{K}^i\rangle=V^i dT+\beta^i, \quad (7.15)$$

мы получим явное выражение для форм ω^i и k^i , а из (7.15) последуют соотношения

$$V^i = \partial_A \chi^i + X^A h_1 \langle J_A^i + \omega_A^i \rangle, \quad (7.16)$$

$$\beta_C^i = \partial_C \chi^i - T h_1 \langle J_C^i + \omega_C^i \rangle - X^B h_1 \langle \alpha^{Ai} - k^{Ai} \rangle e_{BAC}. \quad (7.17)$$

При отсутствии дефектов J_A^i , ω_A^i , α^{Ai} обращаются в нуль и (7.16), (7.17) переходят в соотношения

$$V^{Ti} = \partial_A \chi^i, \quad \beta_C^{Ti} = \partial_C \chi^i, \quad (7.18)$$

где верхний индекс T обозначает сумму, которая получается из интегрируемого смещения поля $x^i = \chi^i(X^a)$. Поэтому можно написать

$$\mathcal{B}^{Ti} = V^{Ti} dT + \beta^{Ti} = d\chi^i. \quad (7.19)$$

При наличии дефектов обычно пишут [10, 17]

$$\mathcal{B}^{Ti} = \mathcal{B}^i + \mathcal{B}^{Pi}, \quad (7.20)$$

где

$$\mathcal{B}^{Pi} = V^{Pi} dT + \beta^{Pi}, \quad (7.21)$$

причем V^{Pi} — компоненты скорости пластической деформации, а $\beta^{Pi} = \beta_C^{Pi} dX^C$ суть 1-формы пластической дисторсии. Теперь из соотношения $\beta^i = d\chi^i + H \langle \mathcal{D}^i - \mathcal{K}^i \rangle$ очевидно, что часть $H \langle \mathcal{D}^i - \mathcal{K}^i \rangle$ определяется дефектами в отличие от интегрируемой части $d\chi^i$. Действительно, если бы $d\chi^i$ определялась дефектами, то не существовало бы неопределенных параметров, которые можно было бы использовать в законах баланса импульса и энергии для того, чтобы обеспечить их выполнение. Поэтому необходимо, чтобы члены $d\chi^i$ не определялись дефектами, и в этом случае можно полагать, что $x^i = \chi^i(X^a)$ по-прежнему определяют полную деформацию тела. Это, однако, возможно только в том случае, когда мы отождествляем $d\chi^i$ и $\mathcal{B}^{Ti}$ при наличии дефектов. При подстановке в (7.20) $d\chi^i = \mathcal{B}^{Ti}$ получим

$$d\chi^i = \mathcal{B}^i + \mathcal{B}^{Pi}, \quad (7.22)$$

и сравнение с (7.15) дает явное выражение

$$\mathcal{B}^{Pi} = -H \langle \mathcal{D}^i - \mathcal{K}^i \rangle. \quad (7.23)$$

Таким образом, из (7.16), (7.17) и (7.21) следует

$$V^{Pi} = -X^A h_1 \langle \omega_A^i + J_A^i \rangle, \quad (7.24)$$

$$\beta_C^{Pi} = T h_1 \langle J_C^i + \omega_C^i \rangle + X^B h_1 \langle \alpha^{Ai} - k^{Ai} \rangle e_{BAC}. \quad (7.25)$$

Следовательно, нами показано, что *пластическая дисторсия однозначно определяется дислокационными 2-формами $\mathcal{D}^i$ и 2-формами $\mathcal{K}^i$ спина — кручения.*

Теперь возникает очень важный вывод. Из выражения (7.23) непосредственно следует, что пластическая дисторсия отсутствует всегда, когда $H\langle\mathcal{D}^i - \mathcal{K}^i\rangle = 0$, т. е. всегда, когда $\mathcal{D}^i - \mathcal{K}^i$ принадлежит ядру линейного оператора гомотопии H . Однако $d\mathcal{K}^i = \mathcal{D}^i - \mathcal{K}^i$, т. е. разность $\mathcal{D}^i - \mathcal{K}^i$ представляет собой систему точных 2-форм, в то время как соотношения $H\langle H\langle\rho\rangle\rangle \equiv 0$, $\rho \equiv dH\langle\rho\rangle + H\langle d\rho\rangle$ показывают, что пересечением точных форм и форм, принадлежащих ядру H , являются только нуль-формы (см. [3, следствие 5-6.3]). Поэтому $H\langle\mathcal{D}^i - \mathcal{K}^i\rangle = 0$ только тогда, когда $\mathcal{D}^i = \mathcal{K}^i$. Удобно называть дефекты с такими свойствами *самоуравновешенными*, так как они порождают скорости пластической деформации и пластические дисторсии, тождественно равные нулю.

Существуют нетривиальные самоуравновешенные дефекты, для которых скорость пластической деформации и пластическая дисторсия тождественно обращаются в нуль. Совокупность всех таких дефектов удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{D}^i = \mathcal{K}^i, \quad (7.26)$$

т. е.

$$J_A^i = -\omega_A^i, \quad \alpha^{Ai} = k^{Ai}. \quad (7.27)$$

Мы временно прервем наши рассуждения для того, чтобы получить результат, приводящий к некоторым упрощениям. Из уравнения (7.8) следует, что

$$X^b h_1 \langle \rho_b \rangle = \int_0^1 X^b \lambda \rho_b (\lambda X^a) d\lambda = \int_0^1 (X^b \rho_b) (\lambda X^a) d\lambda,$$

и тогда (7.10) дает

$$X^b h_1 \langle \rho_b \rangle = h \langle X^b \rho_b \rangle. \quad (7.28)$$

Если использовать этот результат в сочетании с (7.24) и (7.25), то получим

$$V^{Pi} = -h \langle X^A (J_A^i + \omega_A^i) \rangle, \quad (7.29)$$

$$\beta_C^{Pi} = h \langle T (J_C^i + \omega_C^i) + X^B (\alpha^{Ai} - k^{Ai}) e_{BAC} \rangle. \quad (7.30)$$

Следовательно, мы можем сделать следующее заключение: *если дефекты таковы, что*

$$X^A (J_A^i + \omega_A^i) = 0, \quad (7.31)$$

то скорость пластической деформации равна нулю; если дефекты таковы, что

$$T(J_A^i + \omega_A^i) = X^B(k^{Ci} - \alpha^{Ci})e_{BAC}, \quad (7.32)$$

то пластическая дисторсия равна нулю. Достаточные условия того, что хотя бы одна компонента $\mathcal{B}^{Pi}$ отлична от нуля при наличии дефектов, выражаются соотношениями $\mathcal{D}^i \neq 0$, $\mathcal{K}^i \equiv 0$ или $\mathcal{K}^i \neq 0$, $\mathcal{D}^i \equiv 0$. Оказывается, что эти выводы очень важны при интерпретации пластического отклика материалов с точки зрения механизмов, обусловленных дефектами.

Следует отметить еще один аспект, связанный с оператором гомотопии H . Этот оператор порождает операторы $h_1 \langle \rangle$, $h_2 \langle \rangle$, $h \langle \rangle$, где

$$h_k \langle \rangle (X^A, T) = \int_0^1 \lambda^k \rho(\lambda X^A, \lambda T) d\lambda. \quad (7.33)$$

Поэтому вычисления $h_k \langle \rangle$ в любой пространственно-временной точке $\{X^a\} = \{X^A, T\}$ при $T > 0$ требуют интегрирования с весом вдоль линии от точки $\{X_0^a\} = \{0^a\}$ до $\{X^A, T\}$, т. е. требуют знания значений ρ для каждого момента времени от $X^4 = 0$ до $X^4 = T$. Следовательно, теория оказывается нелокальной как в пространстве, так и во времени!

8. АНАЛОГИЯ С ЭЛЕКТРОДИНАМИКОЙ

Как уже было указано выше, свойства калибровочных преобразований полевых уравнений дефектов были впервые исследованы Голембевской-Ласотой, которая опиралась на аналогии между полевыми уравнениями электродинамики и полевыми уравнениями для дислокаций [33].

Представленная выше четырехмерная формулировка динамики дефектов позволяет нам установить точное соответствие между динамикой дефектов и электродинамикой. Этим мы сейчас и займемся. Между этими двумя теориями существуют, однако, существенные различия, и для проведения аналогий при наличии дисклиний требуется не просто обычное электромагнитное поле, а поле с магнитными зарядами и токами, причем соответствующие исходные теории абсолютно различны. Описание электродинамики с магнитными зарядами и токами взято нами из работы [42], в которой читатель может найти интересующие его подробности.

Пусть

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^A \mu_A \wedge dT - q\mu \quad (8.1)$$

обозначает 3-форму электрического заряда — тока, а

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^A \mu_A \wedge dT - g\mu \quad (8.2)$$

обозначает 3-псевдоформу магнитного заряда — тока. Законы сохранения электрического и магнитного зарядов соответственно даются уравнениями для внешних форм

$$d\mathcal{F} = 0, \quad d\mathcal{G} = 0. \quad (8.3)$$

Эти уравнения можно просто проинтегрировать и получить

$$\mathcal{F} = d\mathcal{H}, \quad \mathcal{G} = d\mathcal{F}, \quad (8.4)$$

где $\mathcal{H}$ есть 2-форма потенциала электрического заряда — тока, а $\mathcal{F}$ есть 2-псевдоформа потенциала магнитного заряда — тока. Если мы введем стандартные векторы электромагнитного поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ с помощью соотношений

$$\mathcal{H} = H_A dX^A \wedge dT - D^A \mu_A, \quad (8.5)$$

$$\mathcal{F} = -E_A dX^A \wedge dT - B^A \mu_A, \quad (8.6)$$

то из (3.11), (3.12), (8.1), (8.2) следует, что система (8.4) есть не что иное как уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial_4 \mathbf{D} = \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = q, \quad (8.7)$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} - \partial_4 \mathbf{B} = \mathbf{G}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = g \quad (8.8)$$

в случае наличия как электрического, так и магнитного зарядов. Дальнейшее интегрирование второго из соотношений (8.4) дает

$$\mathcal{F} = -d\mathcal{A} + H \langle \mathcal{G} \rangle. \quad (8.9)$$

Теперь легко видеть, что соотношения $d\mathcal{F} = 0$, $d\mathcal{G} = 0$ имеют точно такой же вид, как и соотношения $d\mathcal{P}_i = 0$, $d\mathcal{P}_4 = 0$ и $d\Omega^i = 0$. Существует одно существенное отличие между системами $d\mathcal{P}_i = 0$, $d\mathcal{P}_4 = 0$, с одной стороны, и системой $d\Omega^i = 0$ с другой. Уравнения баланса импульса и энергии должны выполняться всегда, а уравнения баланса дисклинаций нам необходимы только в том случае, когда имеются дисклинации. Кроме того, $\mathcal{F}$ представляет собой 3-форму, а $\mathcal{G}$ 3-псевдоформу, в то время как импульс и энергия ведут себя при преобразованиях как векторы и скаляры, а дисклинации, связанные с нарушением симметрии группы вращения, представляются аксиальными величинами или псевдовеличинами. Имея в виду сказанное выше, кажется разумным отождествлять 3-формы $\mathcal{P}_i$, $\mathcal{P}_4$ с четырьмя различными 3-формами электрического заряда — тока $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_4$, а 3-формы Ω^i с тремя различными 3-псевдоформами магнитного заряда — тока $\mathcal{G}^i$. Такое представление позволяет про-

вести полную аналогию между уравнениями для электромагнитного поля с магнитными зарядами и уравнениями динамики дефектов:

$$\nabla \times \mathbf{H}_t - \partial_4 \mathbf{D}_t = \boldsymbol{\sigma}_t, \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_t = -\rho_t, \quad (8.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_4 - \partial_4 \mathbf{D}_4 = \mathbf{W}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_4 = -e \quad (8.11)$$

для импульса и энергии и

$$-\nabla \times \mathbf{E} - \partial_4 \mathbf{B} = \mathbf{S}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = -\Theta \quad (8.12)$$

для дисклинаций, т. е.

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{F}_i, \quad \mathcal{P}_4 = \mathcal{F}_4, \quad \Omega^i = \mathcal{Z}^i. \quad (8.13)$$

В результате подобного отождествления можно сделать следующее заключение. *Полная аналогия между классической электродинамикой (т. е. электродинамикой без магнитных зарядов и токов) и динамикой дефектов достигается только в том случае, когда плотность и поток дисклинаций тождественно обращаются в нуль.* Ненулевые потоки или плотности дисклинаций требуют введения соответствующих ненулевых магнитных токов и зарядов.

Можно установить другие удобные для дальнейшего анализа соответствия между параметрами динамики дефектов и электродинамики, а именно

$$\mathcal{D}^i = \mathcal{F}^i. \quad (8.14)$$

Это соотношение следует из равенства $d\mathcal{D}^i = \Omega^i = \mathcal{Z}^i = d\mathcal{F}^i$. Тогда, используя (4.5) и (8.6), получим из (8.14) следующие явные соответствия между величинами рассматриваемых теорий:

$$J_A^i = -E_A^i, \quad \alpha^{Ai} = -B^{Ai}. \quad (8.15)$$

Используя (8.12) и (8.15), можно непосредственно получить набор стандартных следствий типа: дисклинации могут соприкасаться только с концами дислокаций и т. д.

Потребность в 45-параметрической абелевой калибровочной группе для динамики дефектов в отличие от 4-параметрической группы для электродинамики оказывается оправданной полученным выше соответствием между различными теориями ввиду того, что для динамики дефектов требуются три совместно действующих поля $\mathbf{E}^v$ и $\mathbf{B}$ и четыре поля $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$, причем электродинамика обычно имеет дело с заданными формами $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Z}$, в то время как динамика дефектов требует, чтобы соответствующие величины $\mathcal{P}$ и Ω получались из образующих соотношений.

При подобных рассуждениях следует соблюдать необходимую осторожность потому, что нельзя получить решения уравнений динамики дефектов, решая систему уравнений классической электродинамики. Это легко увидеть из сравнения образующих соотношений. В электродинамике образующие соотношения имеют вид $\mathbf{D} = \epsilon_0(\mathbf{E} + \text{поляризация})$, $\mathbf{H} = \mu_0^{-1}(\mathbf{B} + \text{намагниченность})$, в то время как подобные соотношения в динамике дефектов отсутствуют и вместо них можно только говорить о том, что σ является функцией меры относительной деформации, образованной величинами $\partial_A \chi^i$, получающимися из β . Таким образом, поскольку векторы σ отождествлены с векторами электрического тока, а β соответствуют векторным потенциалам, в случае точного совпадения теорий от электромагнитных полей нужно было бы потребовать, чтобы электрический ток определялся векторным потенциалом поля. Конечно, подобная ситуация не соответствует классической электродинамике.

9. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД И РЕЗУЛЬТИРУЮЩИЕ ОБРАЗУЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Полученные в разд. 2 уравнения поля служат для определения производных по времени от величин p_i , α^{Ai} , θ^i , k^{Ai} , β_A^i , и e согласно соотношениям

$$\partial_4 p_i = \partial_A \sigma_i^A, \quad \partial_4 \sigma^{Ai} = -e^{ABC} \partial_B J_C^i - S^{Ai}, \quad (9.1)$$

$$\partial_4 \theta^i = -\partial_A S^{Ai}, \quad \partial_4 k^{Ai} = e^{ABC} \partial_B \omega_C^i - S^{Ai}, \quad (9.2)$$

$$\partial_4 \beta_A^i = \partial_A V^i - J_A^i - \omega_A^i \quad (9.3)$$

и

$$\partial_4 e = \partial_A W^A. \quad (9.4)$$

При термодинамическом подходе мы сосредоточим свое внимание на последнем уравнении.

Так как e представляет собой плотность полной энергии (плотность гамильтониана), эту величину можно рассматривать как сумму плотности кинетической энергии (выраженной через импульсы p_i) и плотности потенциальной или внутренней энергии рассматриваемых динамических процессов. Для получения представления вклада внутренней энергии системы мы используем соответственным образом выбранное ограниченное равновесное термостатическое состояние, рассмотренное Батаем и Кестиниом [43]: *любое неравновесное состояние в каждый момент времени может быть с достаточной точностью аппроксимировано при помощи специальным образом выбранного ограниченного равновесного*

состояния с теми же мгновенными значениями механических переменных состояния, причем для описания мгновенных неравновесных состояний можно использовать температуру $\mathcal{T}$, удельную энтропию s и внутреннюю энергию $U(s; \dots)$. Это оправдывает следующее допущение:

$$e = e(s, p_i, \beta_A^i, \alpha^A, k^A, \theta^i). \quad (9.5)$$

Тогда термодинамическая температура определяется в соответствии с обычной процедурой, принятой в термодинамике:

$$\mathcal{T} = \partial e / \partial s, \quad (9.6)$$

а компоненты кинематической скорости определяются каноническими соотношениями для гамильтониана

$$v^i = \partial e / \partial p^i. \quad (9.7)$$

Для того чтобы использовать соотношение (9.4) в качестве основы построения неравновесной термодинамики, необходимо сделать соответствующие допущения, касающиеся вычисления величин W^A . Пусть

$$Q = Q^A \mu_A \quad (9.8)$$

обозначает 2-форму потока немеханической энергии (тепла). Так как v^i — компоненты кинематической скорости, $v^i \sigma_i^A \mu_A$ являются 2-формами мощности напряжений. Поэтому представляется разумным следующее основное допущение:

$$W^A = -Q^A + v^i \sigma_i^A, \quad (9.9)$$

т. е. 2-форму W можно представить в виде

$$W = -Q + v^i \sigma_i. \quad (9.10)$$

Следует, однако, отметить, что при получении (9.9) мы пренебрегли парами напряжений на границах тела и соответственно работой этих пар. Это действительно серьезный вопрос в том случае, когда материал содержит несамоуравновешенные дисклинации. Рассмотрение подобной ситуации мы оставим для следующих работ. Во всяком случае, мы имеем здесь вполне определенный набор основных допущений и в оставшейся части работы будем опираться именно на них.

Теперь нам осталось рассмотреть вторую часть второго закона термодинамики, а именно установить, что для всех процессов, протекающих в теле, скорость производства энтропии является неотрицательной величиной. Если подставить (9.5) с учетом (9.6) — (9.9) в соотношение (9.4) и использовать (9.1) — (9.3) для исключения производных по

времени, то непосредственные вычисления приведут к соотношению

$$\partial_A s + \partial_B \eta^B = \dot{\Theta}. \quad (9.11)$$

Здесь

$$\eta^B = \frac{1}{\mathcal{F}} \left\{ Q^B - e^{ABC} \left(\frac{\partial e}{\partial \alpha^{Ai}} J_C^i - \frac{\partial e}{\partial k^{Ai}} \omega_C^i \right) - \frac{\partial e}{\partial \theta^i} S^{Bi} \right\} \quad (9.12)$$

— компоненты вектора потока энтропии, а

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} = & -\frac{1}{\mathcal{F}} \eta^B \partial_B \mathcal{F} + \frac{1}{\mathcal{F}} \left(\sigma_i^A \partial_A v^i - \frac{\partial e}{\partial \beta_A^i} \partial_A V^i \right) + \\ & + \frac{1}{\mathcal{F}} \left\{ \frac{\partial e}{\partial \beta_C^i} - e^{ABC} \partial_B \left(\frac{\partial e}{\partial \alpha^{Ai}} \right) \right\} J_C^i + \\ & + \frac{1}{\mathcal{F}} \left\{ \frac{\partial e}{\partial \beta_C^i} + e^{ABC} \partial_B \left(\frac{\partial e}{\partial k^{Ai}} \right) \right\} \omega_C^i + \\ & + \frac{1}{\mathcal{F}} \left\{ \frac{\partial e}{\partial \alpha^{Ai}} + \frac{\partial e}{\partial k^{Ai}} - \partial_A \left(\frac{\partial e}{\partial \theta^i} \right) \right\} S^{Ai} \end{aligned} \quad (9.13)$$

— производство энтропии. Вторая часть второго закона термодинамики требует, чтобы для всех процессов, которые могут протекать в теле,

$$\dot{\Theta} \geq 0. \quad (9.14)$$

С самого начала очевидно, что мы имеем два претендента на роль поля скоростей, а именно кинематическое поле $\{v^i\}$ и поле $\{V^i\}$. Это является следствием того, что поле интегрируемых скоростей $\{V^{Ti}\}$ задается в виде суммы $\{V^i + V^{Pi}\}$ поля $\{V^i\}$ и поля скоростей пластической деформации $\{V^{Pi}\}$. Фактически, так как $\{V^{Ti}\}$ представляет собой полное поле скоростей тела, нам следует отождествить его с ньютоновой скоростью

$$v^i = V^{Ti} = V^i + V^{Pi}. \quad (9.15)$$

В этом случае мы получим

$$p^i = \rho_0 \delta_{ij} (V^j + V^{Pj}), \quad (9.16)$$

причем p^i играет роль полного импульса, входящего в уравнения баланса импульса. Для того чтобы учесть все возможности, положим

$$v^i = \partial e / \partial p^i = V^i + v^i. \quad (9.17)$$

В этом случае соотношение (9.13) переходит в соотношение

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\dot{\Theta} = & -\eta^B \partial_B \mathcal{T} + \left(\sigma_i^A - \frac{\partial e}{\partial \beta_A^i} \right) \partial_A V^i + \sigma_i^A \partial_A \gamma^i + \\ & + \left\{ \frac{\partial e}{\partial \beta_C^i} - e^{ABC} \partial_B \left(\frac{\partial e}{\partial \alpha^{Ai}} \right) \right\} J_C^i + \\ & + \left\{ \frac{\partial e}{\partial \beta_C^i} + e^{ABC} \partial_B \left(\frac{\partial e}{\partial k^{Ai}} \right) \right\} \omega_C^i + \\ & + \left\{ \frac{\partial e}{\partial \alpha^{Ai}} + \frac{\partial e}{\partial k^{Ai}} - \partial_A \left(\frac{\partial e}{\partial \Theta^i} \right) \right\} S^{Ai}.\end{aligned}\quad (9.18)$$

Это соотношение является общей формой записи производства энтропии, неотрицательность которой может быть показана с помощью образующих уравнений теории.

В динамике дефектов обычно предполагают, что возникающие напряжения связаны только с переменными β_C^i , а не с полной дисторсией $\beta_C^{Ti} = \beta_B^i + \beta_C^{Pi}$, т. е. пластическая дисторсия не дает вклада в результирующие нагрузки («пластические напряжения» отсутствуют). Следовательно, можно положить величины напряжения равными

$$\sigma_i^A = \partial e / \partial \beta_A^i, \quad (9.19)$$

что будет являться прямым обобщением существования функции энергии деформации в классической теории упругости. Подставив это выражение в (9.18), получим

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\dot{\Theta} = & -\eta^B \partial_B \mathcal{T} + \sigma_i^A \partial_A \gamma^i + \\ & + \left\{ \sigma_i^C - e^{ABC} \partial_B \left(\frac{\partial e}{\partial \alpha^{Ai}} \right) \right\} J_C^i + \\ & + \left\{ \sigma_i^C + e^{ABC} \partial_B \left(\frac{\partial e}{\partial k^{Ai}} \right) \right\} \omega_C^i + \\ & + \left\{ \frac{\partial e}{\partial \alpha^{Ai}} + \frac{\partial e}{\partial k^{Ai}} - \partial_A \left(\frac{\partial e}{\partial \Theta^i} \right) \right\} S^{Ai}.\end{aligned}\quad (9.20)$$

Здесь проявляется еще один аспект проблемы, остающийся вне рамок теории, так как до сих пор мы еще ничего не говорили о полном смещении $\chi^i(X^A, T)$. Однако мы имеем соотношения

$$v^i = V^i + \gamma^i \quad \text{и} \quad \partial_4 \chi^i = V^i + V^{Pi},$$

и, следовательно, исключение общих членов V^i приводит к равенству

$$v^i - \partial_4 \chi^i = \gamma^i - V^{Pi}. \quad (9.21)$$

С другой стороны, уравнения динамики дефектов не дают возможности доопределить функции χ^i (в силу отсутствия связи между динамическими величинами и смещениями), и мы можем использовать самое простое определение полной скорости в ньютоновой механике как производной по времени от функции полного смещения, что дает

$$v^i = \partial_4 \chi^i. \quad (9.22)$$

В итоге уравнения баланса импульса позволяют определить величины χ^i и из (9.21) следует

$$\gamma^i = V^{Pi}. \quad (9.23)$$

Подставив эти результаты в (9.20), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \dot{\Theta} = & -\eta^B \partial_B \mathcal{T} + \sigma_A^i \partial_A V^{Pi} + \\ & + \left\{ \sigma_i^C - e^{ABC} \partial_B \left(\frac{\partial e}{\partial \alpha^{Ai}} \right) \right\} J_C^i + \\ & + \left\{ \sigma_i^C + e^{ABC} \partial_B \left(\frac{\partial e}{\partial k^{Ai}} \right) \right\} \omega_C^i + \\ & + \left\{ \frac{\partial e}{\partial \alpha^{Ai}} + \frac{\partial e}{\partial k^{Ai}} - \partial_A \left(\frac{\partial e}{\partial \Theta^i} \right) \right\} S^{Ai}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Теперь легко провести идентификацию термодинамических потоков и сил, входящих в правую часть (9.24), используя для этого стандартные приемы неравновесной термодинамики [43, 44], и тем самым получить полную систему образующих соотношений. Результаты, содержащиеся в (9.24), являются до некоторой степени знаменательными, так как появление членов $\sigma_A^i \partial_A V^{Pi}$ дает простой и прямой способ введения понятия поверхности текучести, хотя до этого момента данное понятие нигде в теории не использовалось.

10. ПРИМЕРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

Теперь, для того чтобы увидеть возможности приложения теории, рассмотрим частный пример, а именно случай, в котором

$$\sigma_A^i = \partial e / \partial \beta_A^i, \quad v^i = \partial_4 \chi^i \quad (10.1)$$

и

$$e = e(s, p_i, \beta_A^i) = [1/(2\rho_0)] p_i \delta^{ij} p_j + \rho_0 U(s, \beta_A^i). \quad (10.2)$$

Поэтому $\partial e / \partial \alpha^{Ai} = 0$, $\partial e / \partial k^{Ai} = 0$, $\partial e / \partial \Theta^i = 0$, и из (9.7) и (10.1) следует, что $p_i = \rho_0 \delta_{ij} \partial_4 \chi^j$. Если мы, кроме того, предположим, что в теле отсутствуют дисклинационные эффекты,

то можем положить $S^{Ai} = 0$, $\omega_A^i = 0$, $\theta^i = 0$ и тогда (9.12) и (9.24) дают

$$\mathcal{T}\eta^A = Q^A, \quad (10.3)$$

$$\mathcal{T}\dot{\Theta} = -\eta^B \partial_B \mathcal{T} + \sigma_i^A \partial_A V^{Pi} + \sigma_i^C J_C^i. \quad (10.4)$$

Если мы выберем

$$Q^B = -K^{BC} \partial_C \mathcal{T}, \quad (10.5)$$

то из (10.3) следует, что $-\eta^B \partial_B \mathcal{T} = (1/\mathcal{T}) K^{BC} \partial_B \mathcal{T} \partial_C \mathcal{T}$

является положительной величиной при условии, что $((K^{BC}))$ — положительно определенная матрица, и тогда (10.5) представляет собой не что иное как закон Фурье для теплопроводности. Для простоты мы будем пренебрегать эффектами теплопроводности, как это обычно и делается в большинстве теорий пластического состояния. Полагая в связи с этим $K^{BC} = 0$, получаем, что (10.4) принимает вид

$$\mathcal{T}\dot{\Theta} = \sigma_i^A \partial_A V^{Pi} + \sigma_i^C J_C^i. \quad (10.6)$$

Далее соотношения $\partial_A \chi^i = \beta_A^i + \beta_A^{Pi}$, $\partial_A \chi^i = V^i + V^{Pi}$ дают $\beta_A^i = \partial_A \chi^i - \beta_A^{Pi}$, $V^i = \partial_A \chi^i - V^{Pi}$. Таким образом, поскольку здесь $\omega_A^i = 0$, (9.3) приводит к соотношениям

$$\partial_A \beta_A^{Pi} = J_A^i + \partial_A V^{Pi}, \quad (10.7)$$

и скорость, с которой совершается работа, связанная с пластической дисторсией, задается в виде

$$\sigma_i^A \partial_A \beta_A^{Pi} = \sigma_i^A (J_A^i + \partial_A V^{Pi}) = \mathcal{T}\dot{\Theta} \geq 0. \quad (10.8)$$

Постулат Друккера в дифференциальной форме [36] эквивалентен утверждению, согласно которому скорость, с которой совершается работа, связанная с пластической дисторсией, неотрицательна. Рассмотренная здесь модель удовлетворяет постулату Друккера всегда, когда остается справедливой вторая часть второго закона термодинамики ($\dot{\Theta} \geq 0$).

Как известно [36], постулат Друккера подразумевает существование и выпуклость поверхности нагружения и связанный с ней закон пластического течения. Аналогичные результаты можно получить и непосредственно, используя приемы неравновесной термодинамики. Основной задачей в этом случае является установление неотрицательности формы

$$\mathcal{T}\dot{\Theta} = \sigma_i^A (J_A^i + \partial_A V^{Pi}). \quad (10.9)$$

Как только мы зададим e , мы сразу находим $\sigma_i^A = \partial e / \partial \beta_A^i$, так что можно отождествить σ_i^A с термодинамическими силами. Тогда соответствующие термодинамические потоки,

определяемые соотношением (10.9), будут $J_A^i + \partial_A V^{Pi} = \partial_4 \beta_A^{Pi}$. Результат, полученный в работе [45, теорема В], показывает, что величина $J_A^i + \partial_A V^i$ для выполнения условия $\dot{\Theta} \geq 0$ должна быть такой и только такой, чтобы существовали неотрицательная функция $u(\sigma_i^A; \mathcal{T}, \dots)$ и скалярнозначная функция $\phi(\sigma_i^A; \mathcal{T}, \dots)$, для которых

$$\sigma_i^A \partial \phi / \partial \sigma_i^A \geq 0, \quad (10.10)$$

и, кроме того, совокупность функций U_A^i , таких, что

$$\sigma_i^A U_A^i = 0, \quad (10.11)$$

и поэтому

$$J_A^i + \partial_A V^{Pi} = u \{ \partial \phi / \partial \sigma_i^A + U_A^i \}. \quad (10.12)$$

Подставляя эти выражения обратно в (10.10), получаем

$$u \sigma_i^A \partial \phi / \partial \sigma_i^A = \mathcal{T} \dot{\Theta},$$

и, следовательно,

$$u = \frac{\mathcal{T} \dot{\Theta}}{\sigma_j^B \partial \phi / \partial \sigma_j^B}. \quad (10.13)$$

Поэтому (10.12) дает

$$J_A^i + \partial_A V^{Pi} = \frac{\mathcal{T} \dot{\Theta}}{\sigma_j^B \partial \phi / \partial \sigma_j^B} \{ \partial \phi / \partial \sigma_i^A + U_A^i \}, \quad (10.14)$$

и (10.7) переходит в закон пластического течения

$$\partial_4 \beta_A^{Pi} = \frac{\mathcal{T} \dot{\Theta}}{\sigma_j^B \partial \phi / \partial \sigma_j^B} \{ \partial \phi / \partial \sigma_i^A + U_A^i \}. \quad (10.15)$$

Если мы предположим, что недиссипативная часть U_A^i выражения $J_A^i + \partial_A V^{Pi}$ тождественно равна нулю (так это обычно и принимается), то (10.15) допускает более простую запись:

$$\partial_4 \beta_A^{Pi} = \frac{\mathcal{T} \dot{\Theta}}{\sigma_j^B \partial \phi / \partial \sigma_j^B} \partial \phi / \partial \sigma_i^A = J_A^i + \partial_A V^{Pi}. \quad (10.16)$$

В этом случае $\phi(\sigma_i^A; \mathcal{T}, \dots) = \text{const}$ определяет мгновенную поверхность нагружения, существование которой подразумевает, что вторая часть второго закона термодинамики выполняется.

Важно отметить, что $\dot{\Theta}$ появляется в соотношениях (10.14)–(10.16) как при нагружении, так и при разгрузке ввиду того, что $\dot{\Theta}$ будет тождественно обращаться в нуль при разгрузке только в том случае, когда процесс разгрузки оказывается обратимым. Далее, поскольку из (10.10) следует, что при разгрузке ϕ будет убывать, процесс разгрузки

можно промоделировать функцией

$$\dot{\Theta} = F(\varphi; \dots), \quad \partial_A \varphi \geq 0; \quad \dot{\Theta} = 0, \quad \partial_A \varphi < 0, \quad (10.17)$$

где F принимает положительные значения и монотонно возрастает по φ при любых значениях других аргументов.

С дислокационной точки зрения имеется один еще неразрешенный аспект модели ввиду того, что соотношение (10.14) служит только для определения суммы $J_A^i + \partial_A V^{Pi}$ и поэтому члены J_A^i и $\partial_A V^{Pi}$ нельзя разделить. Один очевидный выход состоит в том, чтобы соотнести $\partial_A V^{Pi}$ с точной частью в правой части (10.7), рассматривая его как коэффициент 1-формы. Тогда J_A^i можно сопоставить неточной части.

Другая возможность — взять $\partial_A V^{Pi}$ в виде

$$\partial_A V^{Pi} = \frac{\mathcal{T} \dot{\Theta}}{\sigma_j^B \partial \varphi / \partial \sigma_j^B} U_A^i, \quad (10.18)$$

где $\dot{\Theta}$, φ и U_A^i выбраны теперь таким образом, чтобы гарантировать выполнение соотношения (10.11) и условий, которые фактически означают, что левая часть (10.18) является градиентом некоторой функции по переменным X . Тогда имеет место удачное представление, гарантирующее условие

$$\sigma_i^A \partial_A V^{Pi} \equiv 0, \quad (10.19)$$

следующее из (10.11) и дающее для потока дислокаций

$$J_A^i = \frac{\mathcal{T} \dot{\Theta}}{\sigma_j^B \partial \varphi / \partial \sigma_j^B} \partial \varphi / \partial \sigma_i^A. \quad (10.20)$$

В этих предположениях *градиент скорости пластической деформации является недиссипативной величиной* в том смысле, что $\sigma_i^A \partial_A V^{Pi}$ дает нулевой вклад в производство энтропии во всех допустимых процессах. Величину $\varphi(\sigma_i^A; \mathcal{T}, \dots)$ можно теперь интерпретировать как *потенциал потока дислокаций*, и соотношение (10.20) устанавливает прямую связь между напряженным состоянием и производством энтропии, связанным с потоком дислокаций; *поток дислокаций ортогонален поверхности $\varphi = \text{const}$ в пространстве напряжений*.

Наконец, так как в процессе упругой разгрузки $\dot{\Theta} = 0$, поток дислокаций в этом случае будет обращаться в нуль.

Хотя сделанные выше замечания выглядят обнадеживающе, их недостаточно для внесения полной ясности. В самом деле, может оказаться, что ответ на вопрос о том, как разделить величины J_A^i и $\partial_A V^{Pi}$, будет зависеть от того, какое именно явление моделирует предлагаемая теория, и, следовательно, предстоит еще рассмотреть отдельные задачи для материалов с различными откликами на воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Słobodziński W. Exterior forms and their applications. — Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1970.
2. Cartan E. Les systems differentials extérieurs et leurs applications géométriques. — Paris: Hermann, 1945. [Имеется перевод: Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрическое приложение. — М.: Изд-во МГУ, 1962.]
3. Edelen D. G. B. Isovector methods for equations of balance. — *Alphen aan den Rijn (Netherlands): Sijthoff and Noordhoff*, 1980.
4. Sternberg S. Lectures on differential geometry. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964. [Имеется перевод: Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.]
5. Edelen D. G. B. — *Int. J. Engng Sci.*, 1980, v. 18, p. 1095.
6. Yang C. N., Mills R. L. — *Phys. Rev.*, 1954, v. 96, p. 191.
7. Actor A. — *Rev. Mod. Phys.*, 1979, v. 51, p. 461.
8. Drechsler W., Mayer M. E., Fiber bundle techniques in gauge theories, Lecture Notes in Physics, No. 67. — Berlin: Springer, 1977.
9. Yang C. N. — In: *Proceedings of the Sixth Hawaii Topical Conference in Particle Physics*. Ed. by P. N. Dodson, Jr. University of Hawai and Manoa, Honolulu. 1975.
10. Kröner E. Continuum theory of defects. Series of Lectures held at the Summer School on the Physics of Defects, Les Houches 1980 (в печати).
11. Peach M., Koehler J. S. — *Phys. Rev.*, 1950, v. 80, p. 436.
12. Edelen D. G. B. — *Int. J. Engng Sci.*, 1979, v. 17, p. 441.
13. Edelen D. G. B. — *Ann. Phys. (N. Y.)*, 1981, v. 133, p. 286.
14. Rogula D. Trends in applications of pure mathematics to mechanics. Ed. by S. Fishera. — London: Pitman, 1976, p. 311.
15. Eshelby J. D. — *J. Elasticity*, 1975, v. 5, p. 321.
16. Yang C. N., Wu T. T. Properties of matter under unusual conditions. Ed. by H. Mark and S. Fernbach. — New York: Interscience Publishers, 1969.
17. Kossecka E. — *Arch. Mech.*, 1975, v. 5, p. 79.
18. Zorawski M. Theory mathématique des dislocations. — Paris: Dunod, 1967.
19. Kröner E. Dislocations and continuum mechanics. — *AMR*, 1962.
20. Nabarro F. R. N. Theory of crystal dislocations. — Oxford: Oxford University Press, 1967.
21. Weertman J., Weertman J. R., Elementary dislocation theory. — New York: Macmillan, 1964.
22. Volterra V. — *Ann. Ecole Norm. Super.*, 1907, t. 24, p. 401.
23. Weingarten G. — *Atti Accad. naz. Lincei Rend., Cl. Sci. fis., mat., natur.*, 1901, t. 5, p. 57.
24. Somigliana C. — *Atti Accad. naz. Lincei Rend., Cl. Sci. fis., mat., natur.*, 1914, t. 23, p. 463.
25. Orowan E. — *Z. Phys.*, 1934, Bd 89, S. 605.
26. Polanyi M. — *Z. Phys.*, 1934, Bd 89, S. 660.
27. Taylor G. I. — *Proc. Roy. Soc.*, 1934, v. 145A, p. 362.

можно промоделировать функцией

$$\dot{\Theta} = F(\varphi; \dots), \quad \partial_{\varphi}\varphi \geq 0; \quad \dot{\Theta} = 0, \quad \partial_{\varphi}\varphi < 0, \quad (10.17)$$

где F принимает положительные значения и монотонно возрастает по φ при любых значениях других аргументов.

С дислокационной точки зрения имеется один еще неразрешенный аспект модели ввиду того, что соотношение (10.14) служит только для определения суммы $J_A^i + \partial_A V^{Pi}$ и поэтому члены J_A^i и $\partial_A V^{Pi}$ нельзя разделить. Один очевидный выход состоит в том, чтобы соотнести $\partial_A V^{Pi}$ с точной частью в правой части (10.7), рассматривая его как коэффициент 1-формы. Тогда J_A^i можно сопоставить неточной части.

Другая возможность — взять $\partial_A V^{Pi}$ в виде

$$\partial_A V^{Pi} = \frac{\mathcal{T} \dot{\Theta}}{\sigma_j^B \partial \varphi / \partial \sigma_j^B} U_A^i, \quad (10.18)$$

где $\dot{\Theta}$, φ и U_A^i выбраны теперь таким образом, чтобы гарантировать выполнение соотношения (10.11) и условий, которые фактически означают, что левая часть (10.18) является градиентом некоторой функции по переменным X . Тогда имеет место удачное представление, гарантирующее условие

$$\sigma_i^A \partial_A V^{Pi} \equiv 0, \quad (10.19)$$

следующее из (10.11) и дающее для потока дислокаций

$$J_A^i = \frac{\mathcal{T} \dot{\Theta}}{\sigma_j^B \partial \varphi / \partial \sigma_j^B} \partial \varphi / \partial \sigma_i^A. \quad (10.20)$$

В этих предположениях *градиент скорости пластической деформации является недиссипативной величиной* в том смысле, что $\sigma_i^A \partial_A V^{Pi}$ дает нулевой вклад в производство энтропии во всех допустимых процессах. Величину $\varphi(\sigma_i^A; \mathcal{T}, \dots)$ можно теперь интерпретировать как *потенциал потока дислокаций*, и соотношение (10.20) устанавливает прямую связь между напряженным состоянием и производством энтропии, связанным с потоком дислокаций; *поток дислокаций ортогонален поверхности $\varphi = \text{const}$ в пространстве напряжений*.

Наконец, так как в процессе упругой разгрузки $\dot{\Theta} = 0$, поток дислокаций в этом случае будет обращаться в нуль.

Хотя сделанные выше замечания выглядят обнадеживающе, их недостаточно для внесения полной ясности. В самом деле, может оказаться, что ответ на вопрос о том, как разделить величины J_A^i и $\partial_A V^{Pi}$, будет зависеть от того, какое именно явление моделирует предлагаемая теория, и, следовательно, предстоит еще рассмотреть отдельные задачи для материалов с различными откликами на воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ślebodziński W. Exterior forms and their applications. — Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1970.
2. Cartan E. Les systems differentials extérieurs et leurs applications géométriques. — Paris: Hermann, 1945. [Имеется перевод: Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрическое приложение. — М.: Изд-во МГУ, 1962.]
3. Edelen D. G. B. Isovector methods for equations of balance. — *Alphen aan den Rijn (Netherlands): Sijthoff and Noordhoff*, 1980.
4. Sternberg S. Lectures on differential geometry. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964. [Имеется перевод: Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.]
5. Edelen D. G. B. — *Int. J. Engng Sci.*, 1980, v. 18, p. 1095.
6. Yang C. N., Mills R. L. — *Phys. Rev.*, 1954, v. 96, p. 191.
7. Actor A. — *Rev. Mod. Phys.*, 1979, v. 51, p. 461.
8. Drechsler W., Mayer M. E., Fiber bundle techniques in gauge theories, Lecture Notes in Physics, No. 67. — Berlin: Springer, 1977.
9. Yang C. N. — In: *Proceedings of the Sixth Hawaii Topical Conference in Particle Physics*. Ed. by P. N. Dodson, Jr. University of Hawai and Manoa, Honolulu. 1975.
10. Kröner E. Continuum theory of defects. Series of Lectures held at the Summer School on the Physics of Defects, Les Houches 1980 (в печати).
11. Peach M., Koehler J. S. — *Phys. Rev.*, 1950, v. 80, p. 436.
12. Edelen D. G. B. — *Int. J. Engng Sci.*, 1979, v. 17, p. 441.
13. Edelen D. G. B. — *Ann. Phys. (N. Y.)*, 1981, v. 133, p. 286.
14. Rogula D. Trends in applications of pure mathematics to mechanics. Ed. by S. Fishera. — London: Pitman, 1976, p. 311.
15. Eshelby J. D. — *J. Elasticity*, 1975, v. 5, p. 321.
16. Yang C. N., Wu T. T. Properties of matter under unusual conditions. Ed. by H. Mark and S. Fernbach. — New York: Interscience Publishers, 1969.
17. Kossecka E. — *Arch. Mech.*, 1975, v. 5, p. 79.
18. Zorawski M. *Theory mathématique des dislocations*. — Paris: Dunod, 1967.
19. Kröner E. Dislocations and continuum mechanics. — *AMR*, 1962.
20. Nabarro F. R. N. *Theory of crystal dislocations*. — Oxford: Oxford University Press, 1967.
21. Weertman J., Weertman J. R., *Elementary dislocation theory*. — New York: Macmillan, 1964.
22. Volterra V. — *Ann. Ecole Norm. Super.*, 1907, t. 24, p. 401.
23. Weingarten G. — *Atti Accad. naz. Lincei Rend., Cl. Sci. fis., mat., natur.*, 1901, t. 5, p. 57.
24. Somigliana C. — *Atti Accad. naz. Lincei Rend., Cl. Sci. fis., mat., natur.*, 1914, t. 23, p. 463.
25. Orowan E. — *Z. Phys.*, 1934, Bd 89, S. 605.
26. Polanyi M. — *Z. Phys.*, 1934, Bd 89, S. 660.
27. Taylor G. I. — *Proc. Roy. Soc.*, 1934, v. 145A, p. 362.

28. Burgers J. M. — Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch., 1939, v. 42, p. 293, 378.
29. Kröner E. Theory of crystal defects. Ed. by B. Gruber. Proc. Summer School Hrazany 1964. — Czech. Acad. of Sci., 1966.
30. Hirth J. G. Mathematical theory of dislocations. Ed. by T. Mura. — ASME, 1969.
31. Kondo K. — In: Proc. 2nd Japan Congr. Appl. Mech., 1952, p. 41.
32. Bilby B. A., Bullough R., Smith E. — Proc. Roy. Soc. London, 1955, v. A231, p. 263.
33. Gołbiewska-Lasota A. A. — Int. J. Engng. Sci., 1979, v. 17, p. 329.
34. Harris W. F. — South African J. Sci., 1978, v. 74.
35. Morse P. M., Feshbach H. Methods of theoretical physics. — New York: McGraw-Hill, 1953. [Имеется перевод: Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1, Т. 2. — М.: ИЛ, 1958, 1960.]
36. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: ГИТТЛ, 1956.
37. Gołbiewska-Lasota A. A., Edelen D. G. B. — Int. J. Engng. Sci., 1979, v. 17, p. 335.
38. Edelen D. G. B. — Int. J. Engng. Sci., 1979, v. 17, p. 441.
39. Edelen D. G. B. — Int. J. Solids Structures, 1981, v. 17, p. 729.
40. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961.
41. Edelen D. G. B. — Int. J. Engng. Sci., 1976, v. 14, p. 1013.
42. Edelen D. G. B. — Ann. Phys. (N. Y.), 1978, v. 112, p. 366.
43. Bataille J., Kestin J. — J. Non-Equilib. Thermodyn., 1976, v. 1, p. 25.
44. Edelen D. G. B. — J. Non-Equilib. Thermodyn., 1977, v. 2, p. 205.
45. Bataille J., Edelen D. G. B., Kestin J. — Int. J. Engng. Sci., 1979, v. 17, p. 563.