А. В. Архангельский

КАНТОРОВСКАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1988

ББК 22.12
А87

УДК 513.83

Рецензенты: проф. В. Н. Латышев, проф. В. В. Федорчук

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Архангельский А. В.

А87 Канторовская теория множеств. — М.: Изд-во МГУ, 1988.—112 с.
ISBN 5—211—00080—3.

В пособии, написанном на основе лекций, читаемых автором на механико-математическом факультете МГУ, достаточно полно и доступно для начинающих изложена канторовская теория миожеств. Цель книги — научнть практической работе с множествами. Приведены основные факты арифметики кардинальных чисел, важнейшие теоремы о вполне упорядоченных множествах и ординалах, дано введение в комбннаторную теорию множеств, имеющую глубокне применения. Изложение сопровождается большим количеством задач.

Для студентов математических специальностей вузов, а также для широкого круга читателей, интересующихся основами математики.

А $\frac{1702020000\ (4309000000)—082}{077(02)—88}$ 80—88

ББК 22.12

ISBN 5—211—00080—3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Некоторые стандартные обозначения

$\varnothing$ — пустое множество.

$\mathbf{N}$ — множество всех неотрицательных целых чисел, т. е. $\mathbf{N}=\{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$.

$\mathbf{N}^+$ — множество всех положительных целых чисел, т. е. $\mathbf{N}^+=\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

$\mathbf{R}$ — множество всех вещественных чисел.

Множество $\mathbf{R}$ называется также вещественной прямой, а через $\mathbf{R}^n$ (где $n\in\mathbf{N}^+$) обозначается его n-я степень, т. е. множество всех упорядоченных n-ок $(r_1, \ldots, r_n)$ вещественных чисел.

$\mathbf{Q}$ — множество всех рациональных чисел. $\mathbf{P}$ — множество всех иррациональных чисел.

$\mathbf{R}^+$ — множество всех положительных вещественных чисел.

$I=[0, 1]$ — вещественный единичный отрезок, т. е. $I=\{x\in\mathbf{R}: 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

$\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел, т. е. $\mathbf{Z}=\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$.

В этой книге рассматриваются основные конструкции и понятия канторовской, или «наивной», теории множеств.

Первоначальное и ведущее положение в этой теории занимает идея «совокупности», «семейства», «множества».

Вот как начинает разговор о множествах с читателем академик П. С. Александров в своей элементарной и увлекательной книге [2], в которой дается введение в этот предмет.

«На каждом шагу нам приходится сталкиваться с тем трудно определимым понятием, которое выражается словом «совокупность». Например, можно говорить о совокупности людей, присутствующих в данный момент в данной комнате, о совокупности гусей, плавающих в пруду, зайцев, живущих в лесах Московской области, и т. п.

В каждом из этих случаев можно было бы вместо слова «совокупность» употребить слово «множество».

В математике постоянно приходится иметь дело с различными множествами: например, со множеством вершин или диагоналей какого-нибудь многоугольника, множеством делителей числа 30 и т. д.».

Занимаясь экономикой, политикой, социальными исследованиями, психологией, мы непременно рассуждаем о множествах тех или иных объектов реального мира или мира понятий.

Георгу Кантору принадлежит следующее основополагающее высказывание: «Множество — это соединение в целое определенных различных объектов нашей интуиции или нашего мышления. Эти объекты называются точками полученного множества».

Обсудим это положение. С рассмотрением множеств связано фундаментальное стремление науки сводить сложное к простому. Например, отрезок, прямую, окружность, эллипс, плоскость, круг при анализе многих их свойств весьма полезно рассматривать как множества элементарных, неделимых далее объектов — точек. Как геометрические места точек рассматриваются фигуры в аналитической геометрии при описании этих фигур уравнениями. Здесь идея множества привлекается для анализа уже имеющегося относительно сложного математического объекта.

Но у идеи множества есть и принципиально важная созидательная функция, направленная на образование новых множеств

из уже имеющихся объектов. С образованием новых множеств связан прежде всего фундаментальный процесс перехода от частного к общему и сопутствующий ему процесс абстрагирования. Изучение, классификация и сравнение абстрактных объектов: натуральных чисел, функций, геометрических фигур и т. д. — приводит к рассмотрению новых совокупностей: множеств абстрактных объектов.

Ярким и характерным примером проявления созидательной функции идеи совокупности является построение системы вещественных чисел как бы «из ничего», а точнее, на основе простейшей, пустой, совокупности. Определив ноль как пустое множество, мы затем строим последовательно положительные целые числа, определяя каждое следующее как совокупность всех предыдущих. Объединяя все целые числа вместе, мы совершаем тем самым первый «трансцендентный» акт собирания — получаем первую бесконечную совокупность. На основе последней обычным образом строится система рациональных чисел; привлекая множество всех подмножеств множества рациональных чисел, мы получаем возможность определить класс вещественных чисел.

Опыт современной математики и анализ ее оснований показывают, что множества служат тем основным элементарным материалом, из которого строятся все основные математические объекты. Отсюда вытекает универсальность идеи множества и языка теории множеств для математики. Более того, мощь и универсальность идеи множества, ее ключевая роль в отражении двух важнейших сторон, функций мышления — созидательной и аналитической — столь велика и несомненна, что есть все основания считать идею множества одной из самых основных и самых первоначальных форм мышления.

Важнейшей особенностью почти всех абстрактных множеств, встречающихся в математике, является их бесконечность. Это связано с характерной чертой математики — идеализацией рассматриваемых ситуаций.

Можно без преувеличения сказать, что понятие множества, совокупности, является основной формой, посредством которой мышление моделирует и анализирует идею бесконечного и тесно с ней связанную идею предельного перехода.

В созидательной функции идеи множества отражается еще одна фундаментальная черта мышления — то, что оно представляет собой процесс. И как процесс мышления нельзя представить завершенным, так и идею множества нельзя представить исчерпанной. Это демонстрирует, в частности, известный парадокс Рассела, суть которого заключается в следующем.

Предположим, что все множества (совокупности) можно представить заданными одновременно. Обозначим через Q множество всех множеств, не содержащих себя в качестве члена. Содержит ли множество Q себя в качестве члена? Если нет, то по определению Q, выписанному выше, $Q \in Q$ — получаем про-

тиворечие. Но если $Q \in Q$, то, снова по определению Q, множество Q не должно быть включено в Q в качестве члена, т. е. должно быть $Q \notin Q$. Снова получили противоречие.

Из приведенного парадокса следует, что *нельзя в рамках «наивного», т. е. не аксиоматического, подхода к понятию множества, совокупности, считать все совокупности заданными одновременно.* Это первый принцип, который мы принимаем в этой книге (принцип *А*).

Интуитивно положение можно описать следующим образом. В каждый данный «момент времени» вместо фикции — совокупностн «всех» (в том числе еще не построенных, не «созданных» и, следовательно, еще не «существующих») совокупностей нам доступна лишь совокупиость «всех уже введенных» в сферу мышления совокупностей. Разумеется, рассматривая последнюю как целое, мы образуем новый объект, новую совокупность, но это требует и нового акта мышления.

Представление о постепенном образовании совокупностей в результате мыслительной деятельности приводит нас к следующему положению.

Принцип Б. *Никакая совокупность не может быть членом себя самой.*

Интуитивно принцип А можно представить как следствие принципа Б.

В этой книге мы строим теорию множеств, исходя из интуитивного, канторовского, представления о множестве, т. е. принимая идею совокупности в качестве первоначальной «порождающей» идеи, но руководствуясь при этом принципами А и Б.

Автор не ставит себе целью дать аксиоматическое изложение теории множеств, полагая, что реальная, «наивная», теория множеств, возрождающаяся каждодневно из воплощения в математической практике первоначальной идеи множества, безгранично шире любой своей аксиоматизации.

Однако все основные факты теории множеств доказываются нами таким образом, что без большого труда эти доказательства можно записать в рамках любой известной аксиоматизации теории множеств.

Остановимся на исходных принципах, терминологии, обозначениях и конкретных соглашениях, неформально отражающих основные аксиомы теории множеств.

К числу главных исходных понятий теории множеств относится понятие *элемента множества.* Множества состоят из элементов и определяются своими элементами. Мы пишем $x \in X$, если объект x является элементом множества X, отношение $\in$ называется отношением принадлежности. Если $x \in X$, то говорят также, что x принадлежит X и что x является членом, или точкой, множества X.

Термины *«множество», «класс», «семейство»* и *«совокупность»* для нас равнозначны.

Разумеется, два множества X и Y совпадают в том и только

том случае, если они состоят из одних и тех же элементов; запись $X=Y$ означает, что множества X и Y совпадают.

Если каждый элемент множества Y является элементом и множества X, то множество Y называют *подмножеством* множества X и пишут $Y\subset X$; не исключено при этом, что $Y=X$. Если $Y\subset X$, то говорят также, что Y содержится в X или что X содержит Y, и пишут $X\supset Y$.

Подмножество Y множества X называется *собственным подмножеством* этого множества, если $Y\neq X$. Пустое множество обозначается $\varnothing$; оно характеризуется среди множеств тем, что не имеет элементов.

Если X — некоторое множество, то его подмножества часто указываются записью в фигурных скобках, а именно:

$$Y=\{x\in X:\text{ (утверждение об } x)\};$$

эта запись означает, что Y множество всех тех $x\in X$ (тех x из X), для которых сформулированнюе в скобках утверждение верно. Таким образом, $y\in Y$ в том и только том случае, если $y\in X$ и для $x=y$ утверждение в скобках выполняется. Например, если $\mathbf{R}$ — множество всех вещественных чисел, то $\mathbf{R}^+=\{x\in\mathbf{R}: x>0\}$ — его подмножество, состоящее из всех положительных чисел.

Запись в фигурных скобках можно употреблять и для формирования новых множеств (совокупностей), не предполагая, что мы действуем в пределах заданного уже множества X. Однако во всех случаях участвующее в таких определениях множеств утверждение об их членах (утверждение об x) должно быть интуитивно осмысленным — должно не вызывать сомнений, что это утверждение можно адекватно выразить на формальном языке. В частности, утверждение об x может относиться только к уже существующим объектам; в нем не должны употребляться без ограничений понятия, объем которых не определен абсолютным образом.

Например, определение $\{x: x-\text{множество}\}$ — множество всех множеств — незаконно, так как утверждение об x не имеет ясного смысла: ведь объем понятия множества не фиксирован заранее и в процессе наших построений подвержен изменениям. Однако в любой момент наших рассуждений мы можем образовать совокупность всех до сих пор введенных в рассмотрение множеств — это будет новое множество.

Через $A\cap B$ обозначается *пересечение* множеств A и B, т. е. $A\cap B=\{x: x\in A \text{ и } x\in B\}$. Пересечение множеств $A_1, \ldots, A_k$ обозначается через $A_1\cap\ldots\cap A_k$ или $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i$. *Объединение* множеств A и B есть множество $A\cup B=\{x: x\in A \text{ или } x\in B\}$. Через $A_1\cup\ldots\cup A_k$ или $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ обозначается объединение множеств $A_1, \ldots, A_k$. $A\setminus B=\{x\in A: x\notin B\}$ — *дополнение* ко множеству B во множестве A. Множество, единственным элементом которого является a, обозначается через $\{a\}$.

Иногда полезно рассматривать индексированные семейства множеств. Пусть A — множество и каждому $\alpha\in A$ поставлено в соответствие некоторое множество P_α. Говорят тогда, что задано индексированное семейство $\{P_\alpha : \alpha\in A\}$ множеств; иногда это семейство обозначают через $\{P_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Особенно часто приходится иметь дело со множествами $\bigcup\{P_\alpha : \alpha\in A\}$ и $\bigcap\{P_\alpha : \alpha\in A\}$ — объединением и пересечением индексированного семейства $\{P_\alpha\}_{\alpha\in A}$ соответственно. Если γ — индексированное или неиндексированное семейство множеств, то его объединение и пересечение обозначаются также через $\bigcup\gamma$ и $\bigcap\gamma$.

Операции объединения, пересечения и дополнения связаны следующими соотношениями, называемыми *формулами де Моргана*: каковы бы ни были множество X и индексированное семейство множеств $\{X_\alpha : \alpha\in A\}$,

$$X\setminus\bigcup\{X_\alpha : \alpha\in A\}=\bigcap\{X\setminus X_\alpha : \alpha\in A\}, \tag{1}$$

$$X\setminus\bigcap\{X_\alpha : \alpha\in A\}=\bigcup\{X\setminus X_\alpha : \alpha\in A\}. \tag{2}$$

Проверяются формулы (1) и (2) без труда; ими пользуются в теоретико-множественных рассуждениях очень часто.

Произведением множеств X и Y называется множество $X\times Y$ всех упорядоченных пар (x, y), где $x\in X$ и $y\in Y$. Произведение $X_1\times\ldots\times X_n$ конечной последовательности множеств $X_1, \ldots, X_n$ состоит из всех упорядоченных n-ок $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i\in X_i$ при $i=1, \ldots, n$. Множество $X_1\times\ldots\times X_n$ очевидным образом отождествляется со множеством $(X_1\times\ldots\times X_{n-1})\times X_n$.

Если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие некоторый элемент $f(x)$ множества Y, то говорят, что задано *отображение* $f : X\to Y$ множества X во множество Y, и называют точку $f(x)$ *образом точки* x при f. Множества X и Y называются при этом *областью определения и областью значений* отображения f. *Образ множества* $A\subset X$ при отображении $f : X\to Y$ есть множество $\{f(x) : x\in A\}\subset Y$. Множество $\{x\in X : f(x)\in B\}$ называется *прообразом множества* $B\subset Y$ при отображении $f : X\to Y$ и обозначается через $f^{-1}(B)$ или $f^{-1}B$. Мы пишем $f^{-1}y$ вместо $f^{-1}(\{y\})$ и называем множество $f^{-1}y$ прообразом точки y при отображении f.

Пусть $f : X\to Y$ — произвольное отображение. Имеют место следующие простые формулы.

Для любого семейства γ подмножеств множества Y

$$f^{-1}(\bigcup\gamma)=\bigcup\{f^{-1}(P) : P\in\gamma\}, \tag{3}$$

$$f^{-1}(\bigcap\gamma)=\bigcap\{f^{-1}(P) : P\in\gamma\}. \tag{4}$$

Каковы бы ни были множества $A\subset X$ и $B\subset Y$,

$$A\subset f^{-1}f(A), \tag{5}$$

$$ff^{-1}(B)\subset B. \tag{6}$$

Несколько более тонким является следующее соотношение. Пусть $A\subset X$, $B\subset Y$, $P\subset Y$ и $f(A)=B$. Тогда

$$f(A \cap f^{-1}P) = B \cap P. \qquad (7)$$

Отображение $f: X \to Y$ называется *инъективным*, или *вложением*, если из $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Если $f(X) = Y$, то f называют *сюръективным* отображением или *отображением на*. Отображения, одновременно инъективные и сюръективные, называют *биекциями*, или *взаимооднозначными* отображениями. Для каждого взаимооднозначного отображения $f: X \to Y$ определено обратное к нему отображение $f^{-1}: Y \to X$ правилом: произвольному элементу $y \in Y$ соответствует при f^{-1} тот (единственный) элемент x множества X, для которого $f(x) = y$.

Каждому отображению $f: X \to Y$ можно поставить в соответствие его *график*: подмножество $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ произведения $X \times Y$. Если $f(X) = Y$, то множество $\mathrm{Gr}(f)$ несет полную информацию об отображении f. Действительно, тогда X — множество всех первых элементов пар из $\mathrm{Gr}(f)$, Y — множество всех вторых элементов пар из $\mathrm{Gr}(f)$, а само отображение f заключается в том, что произвольному $x \in X$ ставится в соответствие то единственное $y \in Y$, для которого $(x, y) \in \mathrm{Gr}(f)$. Поэтому сюръективные отображения можно отождествлять с их графиками. Именно так в аксиоматической теории множеств вводится, определяется понятие отображения.

Если $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ — отображения, то определена их *композиция* $\varphi = g \circ f: X \to Z$ правилом $\varphi(x) = g(f(x)) \in Y$. Тождественное отображение множества X на себя обозначается через id_X; оно описывается формулой: $\mathrm{id}_X(x) = x$ для всех $x \in X$. Очевидно, композиция взаимооднозначного отображения и обратного к нему является тождественным отображением.

Пусть $f: X \to Y$ — отображение, M — произвольное подмножество множества X. Тогда определены отображения $f|M: M \to Y$ и $|_\circ M: M \to f(M)$ правилом: образ произвольной точки $x \in M$ совпадает с образом $f(x)$ точки x при f. Разница между отображениями $f|M$ и $f|_\circ M$ только в том, что первое рассматривается как отображение множества M во множество Y, а второе — как отображение множества M во множество $f(M)$. Отображение $f|M$ называется *сужением отображения* f на M, а отображение $f|_\circ M$ называется *строгим сужением* f на M.

Есть еще один вид сужений отображения: *сужением отображения* $f: X \to Y$ *на подмножество* B множества Y называется отображение $f|_B: f^{-1}(B) \to B$, описываемое правилом: образ произвольной точки $x \in f^{-1}(B)$ совпадает с ее образом при f. Отображение $f|_B$ обозначается также через f_B.

Последовательностью называется отображение множества $\mathbf{N}^+$ в какое-нибудь множество X; элемент множества X, отвечающий при этом отображении элементу n, называют n-м членом последовательности и обозначают буквой с индексом n, например x_n, а всю последовательность обозначают $\{x_n, n \in \mathbf{N}^+\}$ или $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}^+}$. Последовательность $\{A_n, n \in \mathbf{N}^+\}$ множеств называет-

ся *возрастающей (убывающей)*, если $A_n \subset A_{n+1}$ (если $A_{n+1} \subset A_n$) при всех $n \in \mathbf{N}^+$.

В этой книге важную роль будут играть также трансфинитные последовательности; это понятие мы определим позднее. Однако термин «последовательность», не предваренный словом «трансфинитная», всегда надо понимать обычным образом.

Произведение (декартово произведение) индексированного семейства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ множеств X_α есть множество всех отображений f множества A во множество $\bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ таких, что $f(\alpha) \in X_\alpha$ при всех $\alpha \in A$; обозначается это множество $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ или $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Если $f \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, то элемент $f(\alpha)$ множества X_α называется α-й *координатой* точки f. Точка произведения, α-я координата которой есть x_α, обозначается также $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ или $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$. При каждом $\alpha \in A$ определено отображение проектирования $\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\alpha$ произведения на α-й сомножитель правилом $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ при всех $x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Если $A = \{1, \ldots, k\}$, то, очевидно, $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = X_1 \times \ldots \times X_k$. Если $A = A_1 \cup A_2$, где $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ и $A_1 \neq \varnothing \neq A_2$, то между произведениями $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и $\left(\prod_{\alpha \in A_1} X_\alpha\right) \times \left(\prod_{\alpha \in A_2} X_\alpha\right)$ имеется каноническое взаимооднозначное соответствие (под каноническими соответствиями между множествами понимаются соответствия, которые строятся естественным способом, исходя из природы объектов этих множеств). В этом смысле мы пишем: $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \prod_{\alpha \in A_1} X_\alpha \times \prod_{\alpha \in A_2} X_\alpha$. Аналогичный смысл имеет очевидная общая формула этого рода, отвечающая любым разбиениям множества A на непустые попарно непересекающиеся подмножества.

Рассматривая произведение $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, мы не исключаем тот случай, когда различным $\alpha \in A$ отвечает в качестве X_α одно и то же множество Y. Если $X_\alpha = Y$ для всех $\alpha \in A$, то множество $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ совпадает в силу данного выше определения со множеством всех отображений множества A во множество Y; последнее обозначают через Y^A (или, что более естественно, но пока менее принято, через ${}^A Y$). Множество Y^A называют также *степенью* множества Y, точнее, Y^A есть множество Y, возведенное в степень A. Особенно важную роль в приложениях теории множеств играют степени $\mathbf{R}^A$, I^A и $\mathbf{N}^A$ вещественной прямой $\mathbf{R}$, единичного отрезка $I = [0, 1] \subset \mathbf{R}$ и множества $\mathbf{N}$ всех неотрицательных целых чисел соответственно.

Семейство множеств $\{P_\alpha : \alpha \in A\}$ называется *дизъюнктным*, если $P_{\alpha'} \cap P_{\alpha''} = \varnothing$ при $\alpha' \neq \alpha''$, $\alpha', \alpha'' \in A$.

Еще одна операция над множествами играет в дальнейшем большую роль — операция перехода к экспоненте множества.

Экспонентой $\operatorname{Exp} X$ множества X называется множество $\{A : A \subset X\}$ всех подмножеств множества X. Заметим, что экспонента $\operatorname{Exp} \varnothing$ пустого множества $\varnothing$ сама является непустым множеством, а именно множество $\varnothing$ является единственным элементом множества $\operatorname{Exp} \varnothing$. Если множество X конечно и состоит из n элементов, то множество $\operatorname{Exp} X$ тоже конечно и состоит из 2^n элементов — это легко доказывается по индукции.

* * *

Мы не ставим себе целью определить в терминах теории множеств те или иные конкретные математические объекты. Наша главная задача — научить общим правилам работы со множествами, доказать в рамках «наивного» подхода основные теоремы теории множеств, управляющие ее конструкциями.

Приступая к построению теории множеств, мы предполагаем, что в нашем распоряжении уже имеется весьма большое семейство «исходных» множеств, обозначаемое $\mathscr{M}$, включающее важнейшие с точки зрения математики конкретные множества, такие, например, как множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел.

Семейство $\mathscr{M}$ мы предполагаем замкнутым относительно всех основных теоретико-множественных операций в следующем смысле: если все множества, участвующие в операции, принадлежат $\mathscr{M}$, то и множество, получающееся в результате этой операции, принадлежит $\mathscr{M}$. В частности, предполагаются выполненными следующие условия.

1. Если $X \in \mathscr{M}$, то $\{X\} \in \mathscr{M}$.
2. Если $X \in \mathscr{M}$ и $Y \subset X$, то $Y \in \mathscr{M}$.
3. Если $X \in \mathscr{M}$, то и $\operatorname{Exp} X \in \mathscr{M}$.
4. Если $X = \bigcup \{X_\alpha : \alpha \in A\}$, где $A \in \mathscr{M}$ и $X_\alpha \in \mathscr{M}$ при всех $\alpha \in A$, то и $X \in \mathscr{M}$.
5. Если $X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}$, где $A \in \mathscr{M}$ и $X_\alpha \in \mathscr{M}$ при всех $\alpha \in A$, то и $X \in \mathscr{M}$.

Частным случаем принятого ранее общего принципа Б является условие

6. Для всех $X \in \mathscr{M}$ $X \notin X$.

Из 6 следует, что сама совокупность $\mathscr{M}$ не является элементом семейства $\mathscr{M}$. Однако это не мешает нам рассматривать ее, как мы только что сделали, объявив $\mathscr{M}$ «новым» множеством.

Удобно принять следующие соглашения.

В. *Добавляя к уже имеющимся совокупностям какое-либо новое множество, мы одновременно присоединяем и все те «новые» множества, которые должны войти, чтобы расширившееся семейство множеств удовлетворяло условиям* 1—6.

Г. *Общие принципы, относящиеся ко множествам (например, принципы* А *и* Б, *принцип сквозной цепи, формулируемый далее), а также и доказываемые на их основе теоремы распространяются не только на множества из* $\mathscr{M}$, *но и на все множества, совокупности, которые будут возникать в наших рассмотрениях.*

Например, в этом смысле надо понимать следующее утверждение, которое вытекает из 2:

7. Если $X \in \mathscr{M}$, Y — произвольная совокупность, то $X \cap Y \in \mathscr{M}$.

В связи с «подвижностью» понятия множества, отражающейся в положениях А, В и Г, важное значение приобретает следующий принцип абсолютности понятия элемента множества (т. е. абсолютности отношения принадлежности):

Д. *Объем множества* X *не меняется от появления в сфере рассмотрения новых совокупностей, т. е. во множестве* X *не появляется новых членов.*

Конечно, принцип Д является следствием нашего интуитивного представления о множествах, из Д следует, что и понятие подмножества данного множества абсолютно.

Новые множества будут возникать не только как результат «собирания» уже имеющихся множеств и объектов. В частности, мы примем следующий принцип, который позволит широко вводить новые объекты (не обязательно являющиеся множествами; впрочем, природа этих новых объектов будет безразлична):

Е. *Для произвольно данной совокупности* X *можно ввести совокупность* Y *объектов такую, что* $X \cap Y = \varnothing$, *и существует взаимооднозначное отображение* $f : X \to Y$ *множества* X *на множество* Y.

Понятие отображения трактуется нами как первоначальное (и в соответствии с принципом Д абсолютное). Вопрос о существовании отображений не ставится в зависимость от возможности задать их теми или иными формулами или алгоритмами.

Таковы наши исходные позиции при построении канторовской теории множеств; анализировать непротиворечивость и силу принятых принципов и положений в нашу задачу не входит.

По поводу описанного подхода можно возразить следующее. Введение «новых» семейств, классов оказывается связанным с мышлением конкретного индивидуума. Поэтому, начав даже с одного и того же семейства $\mathscr{M}$, разные исследователи могут прийти к совершенно разным расширениям семейства $\mathscr{M}$. Кроме того, даже с точки зрения одного исследователя объем понятия множества оказывается подвижным, неопределенным. Эти соображения перестанут действовать, если условиться, что конечная цель всех наших построений — получить теоремы об элементах класса $\mathscr{M}$, об исходных, заданных «абсолютно» множествах. Все же прочие семейства, возникающие в наших рассуждениях, можно считать лишь средством к получению этих

результатов — как мы верим, законным и, что не менее важно, не влияющим на конечный результат.

Удобно представлять себе элементы семейства $\mathcal{M}$ «реально существующими» множествами, прочие же семейства — «идеальными» объектами мышления, фикциями, необходимыми (или, во всяком случае, полезными) для построения теории множеств.

Однако интуитивно предпочтительнее (и содержательнее) другой тезис: о неединственности $\mathcal{M}$ и, следовательно, о неабсолютном характере того класса $\mathcal{M}$, к которому относится наша теория. Конечно, это внешний принцип в отличие от предыдущих, составляющих часть теории. С данным тезисом связан другой: о том, что границу класса $\mathcal{M}$ можно провести «как угодно далеко». Последнее находит выражение в принципе В Здесь видно, сколь условна с точки зрения метатеории разница между настоящими — «исходными» — множествами, существование которых обеспечено теорией с самого начала, и прочими семействами, существование которых «эфемерно» (см. в связи с этим принцип Г).

Понятия натурального и вещественного чисел считаются известными, как и связанный с ними элементарный аппарат. Другого математического багажа, по существу, от читателя не требуется.

Глава 1

СРАВНЕНИЕ МНОЖЕСТВ ПО МОЩНОСТИ

В этой главе устанавливаются основные принципы, относящиеся к сравнению множеств по мощности. В частности, доказывается, что в иерархии множеств нет наибольшего по мощности и что каждые два множества сравнимы по мощности.

Понятие кардинального числа в этой главе не вводится, однако доказательства главных фактов теории кардинальных чисел готовятся именно в данной главе. В частности, доказывается, что в любом непустом семействе множеств есть множество, наименьшее по мощности, и что квадрат каждого бесконечного множества ему равномощен.

Главным средством доказательства основных теорем является принцип сквозной цепи. Отношения этого положения к другим «трансцендентным» принципам теории множеств — аксиоме выбора, принципу вполне упорядочения и принципу максимального элемента — мы анализируем в дальнейших главах.

В этой главе аппарат вполне упорядочений роли не играет; в этом отношении наше изложение существенно отличается от традиционного. Вместо теорем о вполне упорядочениях мы пользуемся двумя естественными, интуитивно ясными фактами, относящимися к цепям множеств. Вполне упорядочениям посвящена глава 2

§ 1. Различные уровни бесконечного

Можно ли считать, что если множества X и Y бесконечны, то число элементов в них одинаково велико? Этому вопросу можно придать точный характер.

1.1.1. Определение. Множества X и Y называются *эквивалентными,* или *равномощными,* если существует взаимооднозначное отображение одного из них на другое. Пишут при этом: $X \sim Y$, или $|X| = |Y|$

Это определение относится как к конечным, так и к бесконечным множествам. Очевидно, конечные множества эквивалентны в том и только в том случае, если они содержат одинаковое число элементов. Естественно и в случае бесконечных множеств считать, что число элементов в эквивалентных множествах одинаково, а в неэквивалентных — различно.

Первый вопрос, который возникает, таков: а существуют ли неэквивалентные бесконечные множества? Ответ дается следующей теоремой фундаментальной важности.

1.1.2. Теорема (Г. Кантор [5]). *Никакое множество X неэквивалентно множеству* $\operatorname{Exp} X$ *всех подмножеств множества X, т. е. всегда*

$$X \not\sim \operatorname{Exp} X.$$

Теорема 1.1.2 вытекает из следующего несколько более общего утверждения.

1.1.3. Предложение. *Пусть X — произвольное множество и $\varphi: X \to \operatorname{Exp} X$ — любое отображение. Тогда $\varphi(X) \neq \operatorname{Exp} X$.*

Доказательство. Для каждого $x \in X$ определено множество $\varphi(x)$; при этом x может либо принадлежать, либо не принадлежать множеству $\varphi(x)$. Множество $A = \{x \in X : x \notin \varphi(x)\}$ является элементом множества $\operatorname{Exp} X$. Покажем, что $A \notin \varphi(X)$ — тем самым будет установлено, что $\varphi(X) \neq \operatorname{Exp} X$.

Возьмем любое $x \in X$. Если $x \in \varphi(x)$, то, по определению множества A, $x \notin A$ и, значит, $\varphi(x) \neq A$. Если $x \notin \varphi(x)$, то $x \in A$, и снова заключаем, что $\varphi(x) \neq A$. Итак, для всех $x \in X$ $\varphi(x) \neq A$, т. е. $A \notin \varphi(X)$.

1.1.4. Следствие. *Существуют неэквивалентные бесконечные множества.*

Доказательство. Возьмем произвольное бесконечное множество X. Множество $\operatorname{Exp} X$ тоже бесконечно и, по теореме 1.1.2, неэквивалентно множеству X.

Таким образом, отношение эквивалентности $\sim$ оказывается нетривиальным отношением в случае бесконечных множеств.

1.1.5. Предложение. *Пусть X, Y и Z — произвольные множества. Тогда:*

а) $X \sim X$;

б) *если* $X \sim Y$, *то* $Y \sim X$;

в) *если* $X \sim Y$ *и* $Y \sim Z$, *то* $X \sim Z$.

Доказательство. Тождественное отображение множества X на себя дает а). Так как обратное к взаимооднозначному отображению взаимооднозначно, то при установлении эквивалентности неважно, какое множество является областью определения, а какое — областью значений. Импликация в) имеет место, так как композиция взаимооднозначных отображений является взаимооднозначным отображением.

В случае конечных множеств, состоящих из разного числа элементов, одно из них состоит из меньшего числа элементов, чем другие.

Нам предстоит научиться сравнивать в этом смысле бесконечные множества.

1.1.6. Примеры. Множество A всех четных натуральных чисел является собственным подмножеством множества $\mathbf{N}$. Отображение $\varphi: \mathbf{N} \to A$, заданное правилом $\varphi(n) = 2n$, взаимооднозначно. Следовательно, $A \sim \mathbf{N}$. Множество $\mathbf{N}^+$ тоже эквивалентно множеству $\mathbf{N}$, так как отображение $\mathbf{N} \to \mathbf{N}^+$, при котором n соответствует число $n+1$, взаимооднозначно. Эти примеры, как и множество других, показывают, что собственное подмно-

жество A бесконечного множества B может быть эквивалентно всему множеству B. Данное обстоятельство принципиальным образом отличает количественную теорию бесконечных множеств от той же теории для конечных множеств. Поэтому в общем случае неприемлемо следующее определение: число элементов во множестве X меньше числа элементов во множестве Y, если множество X эквивалентно какому-нибудь собственному подмножеству множества Y.

Правильный подход к количественному сравнению бесконечных множеств таков.

1.1.7. Определение. Скажем, что *число элементов во множестве X меньше числа элементов во множестве Y,* или что *мощность множества X меньше мощности множества Y,* если существует подмножество Y' множества Y, эквивалентное X, но все множество Y неэквивалентно X. Условимся при этом писать: $|X|<|Y|$.

Если множества X и Y удовлетворяют какому-либо из соотношений $|X|<|Y|$ и $|X|=|Y|$, будем писать $|X|\leqslant|Y|$ и говорить, что *мощность множества X не превосходит мощности множества Y.*

Очевидно, если A — подмножество множества B, то $|A|\leqslant|B|$.

Для любых множеств A, B и C

если $|A|\leqslant|B|$ и $|B|\leqslant|C|$, то $|A|\leqslant|C|$. (1)

Доказательство импликации (1) очевидно.

1.1.8. Теорема. *Для каждого множества X $|X|<|\operatorname{Exp} X|$.*

Доказательство. Множество $Y=\{\{x\}: x\in X\}\subset\operatorname{Exp} X$ всех одноточечных подмножеств множества X эквивалентно X: отображение $\varphi: X\to Y$, заданное правилом $\varphi(x)=\{x\}$, взаимооднозначно. Но по теореме 1.1.2 все множество $\operatorname{Exp} X$ неэквивалентно X. Значит, $|X|<|\operatorname{Exp} X|$.

1.1.9. Предложение. *Для любого множества X $|X|\leqslant|X\times X|$.*

Доказательство. Если $X=\varnothing$, то это ясно. Пусть $X\neq\varnothing$. Зафиксируем $x_0\in X$. Отображение $\varphi: X\to X\times X$, описываемое формулой $\varphi(x)=(x, x_0)$, очевидно, является инъекцией.

Любые два конечные множества сравнимы по числу элементов. Возникает вопрос: любые ли бесконечные множества сравнимы по числу элементов в смысле определения 1.1.7?

Вопрос 1. Верно ли для произвольных множеств X и Y, что либо $|X|\leqslant|Y|$, либо $|Y|\leqslant|X|$?

В связи с вопросом 1 сразу встает и

Вопрос 2. Пусть множества X и Y таковы, что $|X|\leqslant|Y|$ и $|Y|\leqslant|X|$. Верно ли тогда, что $|X|=|Y|$?

Расшифруем вопрос 1: верно ли, что из любых двух множеств одно непременно эквивалентно подмножеству другого? Интуитивно ясно, что ответ должен быть положительным, однако доказательство не очевидно.

Второй вопрос расшифровывается следующим образом. Пусть множество X допускает взаимооднозначное отображение f на некоторое подмножество множества Y, а множество Y допускает взаимооднозначное отображение g на некоторое подмножество множества X. Существует ли тогда взаимооднозначное отображение множества X на множество Y? Как построить такое отображение по f и g, совершенно не ясно, хотя и здесь интуитивно ясно, что ответ должен быть положителен.

Мы ответим сейчас на второй вопрос; ответ на первый вопрос будет получен в следующем параграфе как следствие из важной теоремы.

1.1.10. Теорема (Шрёдер – Бернштейн [1]). *Пусть X и Y – множества, каждое из которых эквивалентно некоторому подмножеству другого. Тогда множества X и Y эквивалентны между собой. Иными словами, если $|X| \leqslant |Y|$ и $|Y| \leqslant |X|$, то $|Y| = |X|$.*

Доказательство. По условию существуют инъективные отображения $f: X \to Y$ и $g: Y \to X$; зафиксируем их. Отображения f и g никак не связаны между собой. Однако оказывается, что подмножеств во множестве X так много, что обязательно найдется множество $A^* \subset X$, для которого $g(Y \setminus f(A^*)) = X \setminus A^*$. Если данное равенство выполняется, то, полагая $\psi(x) = f(x)$ для всех $x \in A^*$ и $\psi(x) = g^{-1}(x)$ для всех $x \in X \setminus A^*$, мы получаем взаимооднозначное отображение $\psi: X \to Y$ множества X на множество Y – это очевидно.

Осталось найти $A^* \subset X$, для которого $g(Y \setminus f(A^*)) = X \setminus A^*$. Последнее равенство эквивалентно

$$A^* = X \setminus g(Y \setminus f(A^*)). \tag{2}$$

Для произвольного $A \subset X$ положим

$$\varphi(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A)). \tag{3}$$

Очевидно, $\varphi(A) \subset X$, т. е. φ является отображением множества $\operatorname{Exp} X$ в себя. Из (3) вытекает такое свойство отображения φ:

$$\text{если } A \subset B, \text{ то } \varphi(A) \subset \varphi(B). \tag{4}$$

Покажем, что найдется множество $A^* \subset X$, для которого выполняется соотношение (2), т. е. такое, что $\varphi(A^*) = A^*$. Это ключевой момент рассуждения.

Рассмотрим семейство

$$\mathscr{P} = \{A \subset X : \varphi(A) \subset A\}$$

и положим

$$A^* = \bigcap \mathscr{P}.$$

Пусть $A \in \mathscr{P}$. Тогда $A^* \subset A$ и в силу (4) $\varphi(A^*) \subset \varphi(A)$. Но $\varphi(A) \subset A$, так как $A \in \mathscr{P}$. Значит, $\varphi(A^*) \subset A$ для всех $A \in \mathscr{P}$, т. е.

$$\varphi(A^*) \subset \bigcap \mathscr{P} = A^*. \tag{5}$$

Снова применяя (4), выводим из (5), что $\varphi(\varphi(A^*))\subset\varphi(A^*)$. Значит,

$$\varphi(A^*)\in\mathscr{P}.$$

Отсюда следует, что $A^*\subset\varphi(A^*)$; соединяя это с (5), получаем

$$\varphi(A^*)=A^*. \tag{6}$$

Итак, искомое множество A^* оказалось экстремальным (а именно наименьшим) элементом семейства $\mathscr{P}$. Это неудивительно, так как свойство (6) множества A^* является экстремальным вариантом условия, которым было определено семейство $\mathscr{P}$.

1.1.11. Примеры. Теорема 1.1.10 — не только результат принципиального характера, но и весьма «практичное» средство доказательства эквивалентности конкретных множеств. Так, чтобы построить взаимооднозначное отображение отрезка $I=\{x\in\mathbf{R}: 0\leqslant x\leqslant 1\}$ на интервал $J=\{x\in\mathbf{R}: 0<x<1\}$, требуются некоторые усилия. Доказать же эквивалентность этих множеств на основании теоремы 1.1.10 не составляет труда. Из $J\subset I$ следует, что $|J|\leqslant|I|$. Так как любые два отрезка (с концами) эквивалентны и интервал J содержит отрезок $I'=[1/3, 2/3]$, имеем: $|I|=|I'|\leqslant|J|$. По теореме 1.1.10 тогда $|I|=|J|$.

Любые два треугольника эквивалентны (например, их можно отобразить друг на друга посредством аффинного преобразования). Очевидно, и любые два круга эквивалентны (здесь достаточно воспользоваться переносами и сжатиями (растяжениями)). Так как каждый круг содержит некоторый треугольник и каждый треугольник содержит некоторый круг, заключаем на основании теоремы 1.1.10, что любой круг эквивалентен (равномощен) любому треугольнику. Конечно, это можно доказать и непосредственно, описав соответствующие отображения.

Иногда бывает полезна следующая формулировка теоремы 1.1.10.

1.1.12. Следствие. *Ни для каких двух множеств X и Y неравенства $|X|\leqslant|Y|$ и $|Y|<|X|$ (и тем более неравенства $|X|<|Y|$ и $|Y|<|X|$) не могут выполняться одновременно.*

Доказательство. Если $|X|\leqslant|Y|$ и $|Y|<|X|$, то $|X|=|Y|$ по теореме 1.1.10, но последнее противоречит тому, что $|Y|<|X|$ (см. определение 1.1.7).

Сделаем несколько простых замечаний о подмножествах множества $\mathbf{N}$, которое играет в канторовской теории множеств важную роль как простейшее бесконечное множество с естественным порядком и операциями.

Понятие конечного множества мы считаем интуитивно ясным и относим его к числу исходных понятий. Однако можно было бы определить конечные множества как такие, которые эквивалентны какому-нибудь из множеств $\mathbf{N}_k=\{0, 1, \ldots, k\}$, где $k\in\mathbf{N}$. Можно сделать и обратное: свести понятие натурального числа к понятию конечного множества. Эта редукция осуществляется в гл. 2, где вводится понятие кардинального числа (кардина-

ла) — натуральные числа оказываются разновидностью кардиналов.

Характерное свойство бесконечного множества $\mathbf{N}$ выражает

1.1.13. Предложение. *Каждое бесконечное подмножество M множества* $\mathbf{N}$ *равномощно* $\mathbf{N}$.

Доказательство. Произвольному числу $m \in M$ поставим в соответствие число $\varphi(m)$ всех предшествующих m в M элементов (т. е. число всех $p \in M$, для которых $p < m$). Определенное так отображение $\varphi : M \to \mathbf{N}$ инъективно, так как если m_1, $m_2 \in M$ и $m_1 \neq m_2$, то либо $m_1 < m_2$, либо $m_2 < m_1$ и, следовательно, число предшественников у m_1 и m_2 в M различно. По индукции легко доказывается, что для каждого $n \in \mathbf{N}$ найдется элемент m множества $\mathbf{N}$, у которого ровно n предшественников в M. Тогда $\varphi(m) = n$ и, следовательно, $\varphi(M) = \mathbf{N}$. Итак, отображение $\varphi : M \to \mathbf{N}$ взаимооднозначно и $M \sim \mathbf{N}$.

На любые бесконечные множества предложение не распространяется: если A — бесконечное подмножество бесконечного множества X, то неверно, вообще говоря, что $A \sim X$. Более того, как мы увидим далее, только бесконечные множества, эквивалентные множеству $\mathbf{N}$, обладают свойством, указанным в предложении 1.1.13.

1.1.14. Определение. Множество называется *счетным*, если оно равномощно какому-нибудь подмножеству множества $\mathbf{N}$.

Предложение 1.1.13 можно переформулировать теперь следующим образом.

1.1.15. Предложение. *Бесконечное множество счетно в том и только том случае, если оно эквивалентно* $\mathbf{N}$.

Очевидно, каждое конечное множество счетно.

Следующее простое утверждение о счетных множествах сразу вытекает из определения 1.1.14.

1.1.16. Предложение. *Каждое подмножество счетного множества счетно.*

Не всегда счетность того или иного множества очевидна. Например, счетным является множество $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел, но доказательство этого требует некоторых усилий. Нетривиальные примеры счетных множеств будут приведены в следующих параграфах.

Мы заканчиваем этот параграф общими утверждениями об отношении эквивалентности, часто применяемыми в дальнейшем.

1.1.17. Предложение *Пусть X и Y — множества, $A \subset X$, $B \subset Y$ и $A \sim B$, $(X \setminus A) \sim (Y \setminus B)$. Тогда $X \sim Y$.*

1.1.18. Предложение. *Если X_1, X_2, Y_1 и Y_2 — множества, такие, что $|X_1| \leqslant |Y_1|$, $|X_2| \leqslant |Y_2|$ и $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, то $|X_1 \cup X_2| \leqslant |Y_1 \cup Y_2|$.*

1.1.19. Предложение. *Для любых множеств X и Y $X \times Y \sim Y \times X$.*

1.1.20. Предложение. *Если* $|X_1| \leqslant |Y_1|$ *и* $|X_2| \leqslant |Y_2|$, *то* $|X_1 \times X_2| \leqslant |Y_1 \times Y_2|$.

§ 2. Упорядоченные множества и принцип сквозной цепи

Пусть X — любое множество и $<$ — *бинарное отношение* на X, т. е. задано, для каких x, $y \in X$ соотношение $x<y$ выполняется и для каких x, $y \in X$ места не имеет — в последнем случае мы пишем $\neg(x<y)$. Отношение $<$ называется *порядком,* или *упорядочением* на X, если выполняются условия:

1) для всех $x \in X$ $\neg(x<y)$ (антирефлексивность);

2) если x, y, $z \in X$ и $x<y$, $y<z$, то $x<z$ (транзитивность).

Не требуется, чтобы любые два различных элемента множества X были сравнимы относительно порядка $<$. Например, на каждом множестве X можно определить пустой порядок, положив $x \not< y$ для всех x, $y \in X$.

1.2.1. Предложение. *Если* $<$ — *порядок на* X, *то ни для каких двух различных элементов* x, y *множества* X *соотношения* $x<y$ *и* $y<x$ *не выполняются одновременно.*

Доказательство. Если $x<y$ и $y<x$, то из условия 2) следует, что $x<x$, а последнее невозможно в силу условия 1).

Если $<$ — порядок на множестве X, то условимся писать $x \leqslant y$, когда $x<y$ или $x=y$ (т. е. x и y совпадают). Соотношение $x<y$ читается: «x меньше, чем y», а соотношение $x \leqslant y$ читается: «x меньше или равно y». В соответствии с традицией вместо $x<y$ ($x \leqslant y$) можно писать $y>x$ ($y \geqslant x$).

Порядок на X называется *линейным,* если для любых различных x, $y \in X$ либо $x<y$, либо $y<x$.

Множество называется *упорядоченным (линейно упорядоченным),* если на нем зафиксирован некоторый порядок (линейный порядок).

На некоторых множествах природа элементов этих множеств позволяет определить естественный порядок — иногда не один.

1.2.2. Примеры. Пусть $\mathscr{E}$ — некоторое семейство множеств. Порядок по включению на $\mathscr{E}$ определяется так: $A<B$, если $A \subset B$ и $A \neq B$, где A, $B \subset \mathscr{E}$. Условия 1) и 2), очевидно, выполняются. Этот порядок на $\mathscr{E}$ мы будем называть естественным. В частности, естественный порядок рассматривают на экспоненте $\operatorname{Exp} X$ произвольного множества X.

Определим теперь естественный порядок на множестве $\mathscr{F}(X)$ всех вещественных функций, определенных на множестве X, следующим образом. Пусть f, $g \in \mathscr{F}(X)$. Положим $f \lessdot g$, если $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in X$ и $f(x)<g(x)$ хотя бы для одного $x \in X$. Здесь $f(x) \leqslant g(x)$ понимается как обычное неравенство между вещественными числами. Условия 1) и 2) выполняются. На $\mathscr{F}(X)$ полезно рассматривать и другие естественные порядки.

Несколькими естественными способами можно упорядочить

декартов квадрат $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ вещественной прямой $\mathbf{R}$. Например, так. Для (x_1, y_1), $(x_2, y_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ положим $(x_1, y_1)<(x_2, y_2)$, если $x_1<x_2$ и $y_1<y_2$.

Классические примеры линейно упорядоченных множеств — множество всех вещественных чисел и любые его подмножества, в частности, множество всех целых чисел, множество всех натуральных чисел, множество всех рациональных чисел и множество всех иррациональных чисел. Порядок естественный — отвечающий величине чисел.

Можно рассматривать и порядки, никак не отражающие природу элементов множества. Таков, например, пустой порядок.

Порядок на множестве X упорядочивает и все его подмножества: если $Y\subset X$ и $y_1, y_2\in Y$, то полагаем $y_1<y_2$, если это соотношение выполняется для порядка, заданного на X. Говорят при этом, что порядок на Y определен как сужение порядка, заданного на X, но обозначают его так же, когда Y указано, двусмысленности это вызвать не может. Подмножества упорядоченного множества всегда будут упорядочиваться так.

Подмножество C упорядоченного множества X, $<$ называется *цепью*, если отношением $<$ оно упорядочено линейно. В частности, если C — семейство множеств, упорядоченное по включению, то оно является цепью в том и только том случае, если из любых двух элементов P_1 и P_2 этого семейства одно содержит другое: либо $P_1\subset P_2$, либо $P_2\subset P_1$.

Подмножество $Y\subset X$ называется *конфинальным* упорядоченному множеству $X, <$, если для каждого $x\in X$ найдется $y\in Y$ такое, что $x\leqslant y$. Например, множество $\mathbf{N}$ конфинально упорядоченному по величине множеству $\mathbf{R}$.

Элемент a подмножества A упорядоченного множества $X, <$ называется *наибольшим (наименьшим)* элементом множества A, если $x\leqslant a$ (соответственно $a\leqslant x$) для всех $x\in X$. Если наибольший (наименьший) элемент в A существует, то он единствен; обозначается он через $\max A$ (соответственно $\min A$).

Понятие наибольшего элемента не следует смешивать с понятием максимального элемента. Элемент m упорядоченного множества X, $<$ называется его *максимальным (минимальным)* элементом, если в X не существует такого элемента x, что $m<x$ (что соответственно $x<m$). Каждый наибольший элемент является максимальным, но обратное неверно: относительно пустого порядка все элементы максимальны и минимальны, но наибольшего (наименьшего) элемента в так упорядоченном множестве нет, если оно содержит хотя бы два различных элемента.

Максимальных элементов в упорядоченном множестве может быть много (все они между собой несравнимы).

Конечно, не во всяком упорядоченном множестве есть максимальные элементы. Например, их нет в упорядоченном по включению множестве всех конечных подмножеств бесконечного множества X.

Подмножество Y упорядоченного множества $X,<$ называется *ограниченным (строго ограниченным)* в $X,<$, если существует $a\in X$ такое, что $y\leqslant a$ (соответственно $y<a$) для всех $y\in Y$; элемент a называется при этом *верхней гранью (строгой верхней гранью)* множества Y в $X,<$.

Несравнимость некоторых элементов относительно порядка — черта, которая отличает нелинейный порядок от линейного. Однако степень этой несравнимости может быть различна, как это демонстрирует следующее понятие совместности. Элементы x, y упорядоченного множества $X,<$ называются *совместными* (относительно порядка $<$), если существует элемент z этого множества такой, что $x\leqslant z$ и $y\leqslant z$.

Упорядоченное множество $X,<$ называется *направленным* (порядком $<$), если любые два его элемента совместны; порядок называется при этом направлением на X.

Конечно, все линейно упорядоченные множества направлены.

Множество всех конечных подмножеств бесконечного множества X, упорядоченное отношением включения, — характерный пример направленного, но не линейно упорядоченного множества, в котором нет наибольшего элемента.

Определим теперь понятие, которому предстоит играть в дальнейшем основную роль.

1.2.3. Определение. Подмножество Y упорядоченного множества $X,<$ называется *сквозным* (в $X,<$), если не существует $x\in X$, для которого $y<x$ при всех $y\in Y$, т. е. если Y не строго ограничено в $X,<$.

Мы условимся говорить, что элемент x упорядоченного множества $X,<$ *доминирует* множество Y, если $y<x$ для всех $y\in Y$. Нас особенно будут интересовать цепи, являющиеся сквозными множествами, т. е. *сквозные цепи.* Если в упорядоченном множестве $X,<$ есть максимальный элемент a, то множество $\{a\}$ — сквозная цепь в $X,<$. Пример показывает, что сквозная цепь может быть ограниченным множеством и что сквозная цепь не обязана быть конфинальна всему упорядоченному множеству.

Если множество линейно упорядочено, то для его подмножеств понятия сквозного множества, сквозной цепи и конфинального множества становятся равносильными. Однако не во всяком упорядоченном и даже не во всяком направленном множестве есть цепь, ему конфинальная, как показывает следующий пример.

1.2.4. Пример. Пусть M — множество всех отображений множества $\mathbf{N}$ в $\mathbf{N}$. Упорядочим M следующим образом: для f_1, $f_2\in M$ положим $f_1<f_2$, если $f_1(n)<f_2(n)$ при всех $n\in\mathbf{N}$. Очевидно, $M,<$ — направленное множество. Каждая цепь C в упорядоченном множестве $M,<$ счетна. Действительно, ставя в соответствие каждой функции $f\in C$ ее значение в нуле — число $f(0)$, мы получаем взаимооднозначное отображение множества C на некоторое подмножество множества $\mathbf{N}$. Так как последнее счетно, то и C счетно. Пусть $C=\{f_n : n\in\mathbf{N}\}$. Положим $g(n)=$

$=f_n(n)+1$ для всех $n\in\mathbf{N}$. Тогда $g\in M$ и $g\not\leqslant f_n$ при всех $n\in\mathbf{N}$. Значит, цепь C неконфинальна $M,<$. Итак, в направленном множестве $M,<$ нет конфинальной цепи.

Следующий принцип, принимаемый нами в качестве аксиомы, будет основным рабочим инструментом в доказательствах.

1.2.5. Принцип сквозной цепи. *В каждом упорядоченном множестве существует сквозная цепь.*

Подчеркнем сразу, что этот принцип относится не только к элементам семейства $\mathscr{M}$ — исходным множествам, но и к тем множествам, которые возникли или появятся в наших рассуждениях.

Имеется ряд положений, эквивалентных принципу сквозной цепи: принцип максимальной цепи, аксиома выбора, принцип вполне упорядочивания, принцип максимального элемента (лемма Цорна). Какой-либо из этих принципов обязательно присутствует в любой аксиоматизации теории множеств в качестве отдельной аксиомы — из прочих аксиом теории множеств ни одно из этих положений не вытекает [10].

Доказательству эквивалентности принципа сквозной цепи ряду других «трансцендентных» утверждений этого рода будет посвящен отдельный параграф — § 5 гл. II. Здесь мы выведем из принципа сквозной цепи аксиому выбора и принцип максимального элемента и извлечем простейшие следствия из аксиомы выбора.

Замечательной чертой принципа сквозной цепи является его общность — он относится ко всем без исключения упорядоченным множествам (см. в связи с этим пример 1.2.4 и формулировку принципа максимального элемента). Интуитивно пояснить принцип сквозной цепи можно следующим образом.

Пусть $X,<$ — произвольное упорядоченное множество. В нем, несомненно, есть цепь, например, пустая. Возьмем какую-нибудь цепь C в $X,<$. Если она не является сквозной, то найдется элемент $x_C\in X$ такой, что $x<x_C$ для всех $x\in C$. Присоединив один такой элемент x_C к C, мы получаем новую, более длинную цепь: $C_1=C\cup\{x_C\}$. Если и цепь C_1 не является сквозной, то можно и ее удлинить до некоторой цепи C_2. Если этот процесс не останавливается ни на одном конечном шаге, то мы получаем растущую последовательность $C_0=C$, C_1, ... цепей в $X,<$. Очевидно, объединение $C_\omega=\bigcup\{C_n: n\in\mathbf{N}\}$ тоже будет цепью. Если и цепь C_ω несквозная, удлиним ее до цепи $C_{\omega+1}$ и т. д. Вообразить, что описанный процесс «никогда» не остановится, нельзя: ведь операцию удлинения цепи, присоединения к ней нового элемента нельзя с интуитивной точки зрения осуществить большее число раз, чем имеется элементов в X; в частности, ее нельзя осуществить $\operatorname{Exp} X$ раз. Конечно, это только интуитивное обоснование принципа сквозной цепи, а не его доказательство.

1.2.6. Аксиома выбора. *Для любого семейства γ непустых попарно не пересекающихся множеств найдется подмножество A множества $\bigcup\gamma$ (объединения семейства γ), пересека-*

ющееся с каждым элементом семейства γ *ровно по одному элементу.*

Интуитивно, в рамках принятого нами подхода, аксиома выбора представляется совершенно очевидным утверждением. Очень основательное и интересное ее обсуждение можно найти в [3].

Выведем аксиому выбора из принципа сквозной цепи. Положим $X=\bigcup\gamma$ и рассмотрим семейство $\mathscr{P}$ всех подмножеств множества X, у которых есть не более одной общей точки с каждым элементом семейства γ, такие множества будем называть *тонкими*. Пусть $<$ — упорядочение по включению на $\mathscr{P}$. Возьмем сквозную цепь C в $\mathscr{P},<$. Множество $A=\bigcup C$ — тонкое. Действительно, если x_1, $x_2\in A\cap F$ и $x_1\neq x_2$, то $x_1\in P_1$, $x_2\in P_2$, где P_1, $P_2\in C$. Так как C — цепь в $\mathscr{P},<$, то $P_1\subset P_2$ или $P_2\subset P_1$. Получаем, что большее из P_1 и P_2 множество P_i содержит две различные точки множества $F\in\gamma$, — противоречие с тем, что P_i — тонкое.

Множество A пересекается с каждым элементом семейства γ. Действительно, если $F_1\in\gamma$ и $F_1\cap A=\varnothing$, то, выбрав в непустом множестве F_1 точку x_1 и присоединив ее ко множеству A, мы получим тонкое множество $\tilde{A}$. Тогда $\tilde{A}\in\mathscr{P}$, и так как $A=\bigcup C$ является собственным подмножеством множества $\tilde{A}$, то $B<\tilde{A}$ для всех $B\in C$. Но это противоречит тому, что C — сквозная цепь в $\mathscr{P},<$.

Следовательно, множество A — искомое.

Укажем весьма удобную в техническом отношении разновидность аксиомы выбора, связанную с отображениями.

1.2.7. Аксиома выбора для индексированных семейств. *Пусть* $\xi=\{X_\alpha:\alpha\in A\}$ *— произвольное индексированное семейство непустых множеств. Найдется тогда отображение* $f:A\to\bigcup\{X_\alpha:\alpha\in A\}$ *множества* A *в объединение семейства* ξ *такое, что* $f(\alpha)\in X_\alpha$ *для всех* $\alpha\in A$.

Выведем утверждение 1.2.7 из аксиомы выбора 1.2.6. Положим $X=\bigcup\{X_\alpha:\alpha\in A\}$ и $\tilde{X}_\alpha=\{(\alpha,x):x\in X_\alpha\}$ для всех $\alpha\in A$. Тогда $\tilde{\xi}=\{\tilde{X}_\alpha:\alpha\in A\}$ — дизъюнктное семейство непустых подмножеств множества $A\times X$. В силу аксиомы 1.2.6. найдется подмножество F множества $\tilde{X}=\bigcup\{\tilde{X}_\alpha:\alpha\in A\}$, пересекающееся с каждым элементом семейства $\tilde{\xi}$ ровно по одной точке. Тогда $F\subset A\times X$ и для каждого $\alpha\in A$ существует ровно одно $x\in X$ такое, что $(\alpha,x)\in F$. Обозначим это x через $f(\alpha)$. Очевидно, $(\alpha,f(\alpha))\in\tilde{X}_\alpha$ и, значит, $f(\alpha)\in X_\alpha$. Тем самым определено отображение $f:A\to X=\bigcup\{X_\alpha:\alpha\in A\}$, для которого $f(\alpha)\in X_\alpha$ при всех $\alpha\in A$ (множество F служит графиком отображения f).

1.2.8. Предложение. *Если* $f:X\to Y$ *— отображение множества* X *на множество* Y, *то* $|Y|\leqslant|X|$.

Доказательство. Применим 1.2.7 к индексированному семейству $\{f^{-1}(y):y\in Y\}$. Существует отображение $g:Y\to X$ такое, что $g(y)\in f^{-1}(y)$ для всех $y\in Y$. Если $y_1\neq y_2$, то $f^{-1}(y_1)\cap$

$\bigcap f^{-1}(y_2)=\varnothing$ и, следовательно, $g(y_1)\neq g(y_2)$, т. е. отображение $g: Y\to X$ инъективно. Заключаем: $|Y|\leqslant|X|$.

Предложение 1.2.8 можно обратить.

1.2.9. Предложение. *Если* $|Y|\leqslant|X|$ и $Y\neq\varnothing$, *то* X *можно отобразить на множество* Y.

Доказательство. Существует подмножество $X_1\subset X$, эквивалентное Y. Зафиксируем биекцию $\varphi: X_1\to Y$, выберем точку $y_0\in Y$ и определим отображение $f: X\to Y$ правилом: $f(x)=\varphi(x)$, если $x\in X_1$, и $f(x)=y_0$, если $x\in X\setminus X_1$. Очевидно, $f(X)=Y$.

Часто пользуются не принципом сквозной цепи, а принципом максимального элемента. В идейном отношении эти два принципа почти не отличаются друг от друга, но второй из них относится не ко всем упорядоченным множествам и потому должен рассматриваться как менее фундаментальный.

Упорядоченное множество $X,<$ называется *индуктивным*, если каждая цепь C в нем ограничена.

Вещественная прямая $\mathbf{R}$ с обычным порядком — пример множества, упорядоченного неиндуктивно.

1.2.10. Принцип максимального элемента (лемма Цорна). *В каждом индуктивно упорядоченном множестве* $X,<$ *есть максимальный элемент.*

Доказательство. Возьмем какую-нибудь сквозную цепь C в $X,<$. Она ограничена в $X,<$, следовательно, найдется $x^*\in X$ такое, что $x\leqslant x^*$ для всех $x\in C$. Если $\tilde{x}\in X$ и $x^*<\tilde{x}$, то $x<\tilde{x}$ для всех $x\in C$, — в противоречии с тем, что цепь C сквозная. Значит, не существует $\tilde{x}\in X$, для которого $x^*<\tilde{x}$, т. е. x^* — максимальный элемент множества $X,<$.

§ 3. Теорема о наименьшей мощности и теорема о сравнимости

Пусть $\{X_\alpha: \alpha\in A\}$ — произвольное семейство множеств X_α и $X=\Pi\{X_\alpha: \alpha\in A\}$ — его декартово произведение. Подмножество $P\subset X$ назовем *тонким*, если при каждом $\alpha\in A$ α-е координаты x'_α и x''_α любых двух различных элементов x', x'' множества P различны: $x'_\alpha\neq x''_\alpha$. Иными словами, множество $P\subset X$ является тонким в том и только том случае, если для каждого $\alpha\in A$ сужение $\pi_\alpha|P: P\to X_\alpha$ отображения проектирования $\pi_\alpha: X\to X_\alpha$ на множество X_α инъективно, т. е. переводит различные точки множества P в различные точки множества X_α.

Приведем некоторые простые факты, относящиеся к тонким множествам.

1.3.1. *Пусть* P *и* Q — *тонкие множества в произведении* $X=\Pi\{X_\alpha: \alpha\in A\}$, *причем* $\pi_\alpha(P)\bigcap\pi_\alpha(Q)=\varnothing$ *при всех* $\alpha\in A$. *Тогда* $P\bigcup Q$ — *тонкое множество в* X.

Это очевидно.

1.3.2. *Объединение произвольной цепи* C *тонких множеств в произведении* $X=\Pi\{X_\alpha: \alpha\in A\}$ *является тонким множеством.*

Докажем это. Положим $P^*=\bigcup C$ и возьмем любые различные x', $x''\in P^*$. Найдутся P', $P''\in C$ такие, что $x'\in P'$ и $x''\in P''$. Так как C — цепь, то либо $P'\in P''$, либо $P''\subset P'$. Пусть для определенности $P'\subset P''$. Тогда x', $x''\in P''$ и P'' — тонкое множество. Поэтому если $x'\neq x''$, то $x'_\alpha=\pi_\alpha(x')\neq\pi_\alpha(x'')=x''_\alpha$ при $\alpha\in A$.

1.3.3. *Если P—тонкое множество, то $\pi_{\alpha'}(P)\sim\pi_{\alpha''}(P)$ для любых α', $\alpha''\in A$ (т. е. $|\pi_{\alpha'}(P)|=|\pi_{\alpha''}(P)|$).*

Действительно, отображение $\pi_\alpha|_\circ P: P\to\pi_\alpha(P)$ взаимооднозначно, так как P — тонкое множество. Значит, $\pi_\alpha(P)\sim P$ для всех $\alpha\in A$. Получаем: $\pi_{\alpha'}(P)\sim P\sim\pi_{\alpha''}(P)$, и так как отношение равномощности транзитивно, $\pi_{\alpha'}(P)\sim\pi_{\alpha''}(P)$.

Следующее утверждение является ключевым.

1.3.4. Предложение. *Пусть $\{X_\alpha:\alpha\in A\}$ — произвольное непустое семейство множеств и $X=\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\}$ — декартово произведение. Найдутся тогда тонкое множество $P^*\subset X$ и $\alpha^*\in A$ такие, что $\pi_{\alpha^*}(P^*)=X_{\alpha^*}$.*

Доказательство. Рассмотрим упорядоченное по включению семейство $\mathscr{P},<$ всех тонких множеств в X. Возьмем в $\mathscr{P},<$ сквозную цепь C и положим $P^*=\bigcup C$.

В силу 1.3.2 множество P^* — тонкое, т. е. $P^*\in\mathscr{P}$.

Покажем, что найдется α^*, для которого $\pi_{\alpha^*}(P)=X_{\alpha^*}$.

Предположим противное. Тогда при каждом $\alpha\in A$ можно выбрать $\tilde{x}_\alpha\in X_\alpha\setminus\pi_\alpha(P^*)$ (мы воспользовались аксиомой выбора!). Рассмотрим точку $\tilde{x}=\{\tilde{x}_\alpha:\alpha\in A\}\in X$. Для тонких множеств P^* и $\{\tilde{x}\}$ выполняется посылка утверждения 1.3.1: $\pi_\alpha(\tilde{x})\cap\cap\pi_\alpha(P^*)=\varnothing$ при всех $\alpha\in A$. Значит, множество $\tilde{P}=P^*\cup\{\tilde{x}\}$ — тонкое, т. е. $\tilde{P}\in\mathscr{P}$. Очевидно, $P\leqslant P^*<\tilde{P}$ для всех $P\in C$, т. е. цепь C несквозная. Получили противоречие.

С помощью предложения 1.3.4 легко получается следующий фундаментальный результат.

1.3.5. Теорема о наименьшем множестве. *Пусть $\{X_\alpha:\alpha\in A\}$ — произвольное непустое семейство множеств. Найдется тогда $\alpha^*\in A$ такое, что $|X_{\alpha^*}|\leqslant|X_\alpha|$ при всех $\alpha\in A$.*

Доказательство. На основании предложения 1.3.4 возьмем тонкое множество P^* в произведении $X=\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\}$ и индекс $\alpha^*\in A$, для которых $\pi_{\alpha^*}(P^*)=X_{\alpha^*}$. В силу 1.3.3 $\pi_\alpha(P^*)\sim\pi_{\alpha^*}(P^*)=X_{\alpha^*}$ при всех $\alpha\in A$. Но $\pi_\alpha(P^*)\subset X_\alpha$ и, следовательно, $|\pi_\alpha(P^*)|\leqslant|X_\alpha|$. Получаем: $|X_{\alpha^*}|=|\pi_\alpha(P^*)|\leqslant|X_\alpha|$ при всех $\alpha\in A$, т. е. α^* — искомое.

Заметим, что в формулировку теоремы 1.3.5 произведения никоим образом не входят.

Как мы увидим, теорема 1.3.5 является основой доказательств по трансфинитной индукции в канторовской теории множеств. Это обстоятельство и дает теореме 1.3.5 фундаментальное значение.

Пусть X_1 и X_2 — любые два множества. Применим к семейству $\{X_1, X_2\}$ теорему 1.3.5. Получаем: либо $|X_1|\leqslant|X_2|$, либо $|X_2|\leqslant|X_1|$. Таким образом доказана

1.3.6. Теорема о сравнимости. *Любые два множества X и Y сравнимы по мощности: либо $|X|\leqslant|Y|$, либо $|Y|\leqslant|X|$.*

На языке отношения эквивалентности теорема 1.3.6 расшифровывается так: либо X эквивалентно некоторому подмножеству множества Y, либо в X найдется подмножество, эквивалентное множеству Y.

Теорему 1.3.6 можно следующим образом уточнить.

1.3.7. Теорема. *Пусть X и Y — произвольные множества. Тогда либо $|X|\leqslant|Y|$, либо $|Y|<|X|$ (причем выполняется только одно из этих неравенств — см. 1.1.10).*

Доказательство. Пусть неравенство $|X|\leqslant|Y|$ не выполняется. Тем более тогда $|X|\neq|Y|$. Но из теоремы 1.3.6 следует, что $|Y|\leqslant|X|$. Заключаем: $|Y|<|X|$.

Из теоремы 1.3.5 вытекает любопытное

1.3.8. Следствие. *Не существует последовательности множеств $\{A_n : n\in\mathbf{N}\}$ такой, что $|A_{n+1}|<|A_n|$ при всех $n\in\mathbf{N}$.*

Доказательство. В противном случае по теореме 1.3.5 мы имели бы для некоторого $n^*\in\mathbf{N}$:

$$|A_{n^*}|\leqslant|A_{n^*+1}|<|A_{n^*}|,$$

т. е. противоречие.

Из теоремы о сравнимости следует

1.3.9. Предложение. *Пусть X и Y — множества, для которых $|X|<|Y|$, и $X_1\subset X$, $Y_1\subset Y$, $|X_1|=|Y_1|$. Тогда*

$$|X\setminus X_1|<|Y\setminus Y_1|.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда в силу теоремы 1.3.7 $|Y\setminus Y_1|\leqslant|X\setminus X_1|$. Отсюда и из равенства $|Y_1|=|X_1|$ следует, что $|Y|\leqslant|X|$ (см. утверждение 1.1.18), — в противоречии с тем, что $|X|<|Y|$ (см. 1.1.10).

Теорема о сравнимости имеет важное следствие, относящееся ко множеству $\mathbf{N}$.

1.3.10. Теорема. *Для произвольного бесконечного множества X*

$$|\mathbf{N}|\leqslant|X|. \qquad (1)$$

Доказательство. По теореме 1.3.6 либо $|\mathbf{N}|\leqslant|X|$ — и формула (1) выполняется, либо $|X|\leqslant|\mathbf{N}|$. Рассмотрим второй случай. Существует тогда подмножество M множества $\mathbf{N}$ эквивалентное X. Так как X бесконечно, то и M бесконечно. В силу предложения 1.1.13 множество M равномощно $\mathbf{N}$. Получаем: $|X|=|M|=|\mathbf{N}|$ и тем более $|\mathbf{N}|\leqslant|X|$, т. е. и во втором случае формула (1) справедлива.

Теорема 1.3.10 позволяет сказать, что $\mathbf{N}$ — наименьшее бесконечное множество.

Нам понадобится следующее утверждение, которое затем будет существенно обобщено.

1.3.11. Предложение. *Пусть X — бесконечное множество и a — любой его элемент. Тогда*

$$|X|=|X\setminus\{a\}|.$$

Доказательство. Множество $Y=X\setminus\{a\}$ бесконечно; поэтому по теореме 1.3.10 найдется бесконечное множество $A\subset Y$, равномощное $\mathbf{N}$. Но $\mathbf{N}\sim\mathbf{N}^+$. Значит, A равномощно $\mathbf{N}^+$ и $\bar{A}=A\cup\{a\}$ равномощно $\mathbf{N}$. Следовательно, $A\sim\bar{A}$. Так как $X\setminus\bar{A}=Y\setminus A$ и тем более $X\setminus\bar{A}\sim Y\setminus A$, заключаем (см. предложение 1.1.17), что $X\sim Y$.

Из 1.3.11 можно сделать следующий вывод, который, как и многое в канторовской теории множеств, имеет философский оттенок.

1.3.12. Предложение. *Множество бесконечно в том и только том случае, если оно равномощно некоторому своему собственному подмножеству.*

Укажем еще одно следствие теоремы 1.3.10, связанное с предложением 1.1.13.

1.3.13. Следствие. *Если бесконечное множество X равномощно каждому своему бесконечному подмножеству, то оно равномощно* $\mathbf{N}$.

Доказательство. По теореме 1.3.10 найдется множество $A\subset X$, равномощное $\mathbf{N}$. Множество A бесконечно и по условию равномощно X. Следовательно, $|X|=|A|=|\mathbf{N}|$.

§ 4. Предельные теоремы о мощности для цепей множеств

Теоремы, которые будут получены в этом параграфе, играют ключевую роль при построении арифметики кардинальных чисел.

Начнем с простой леммы.

1.4.1. Лемма. *Пусть C — цепь множеств, $\gamma\subset C$ и $A\in C$, причем $A\setminus\bigcup\gamma\neq\varnothing$. Тогда $\bigcup\gamma\subset A$.*

Доказательство. Возьмем любое $B\in\gamma$. Имеем: $A\setminus B\neq\varnothing$. Но C — цепь и A, $B\in C$. Значит, $B\subset A$ для всех $B\in\gamma$, т. е. $\bigcup\gamma\subset A$.

1.4.2. Теорема. *Пусть C — цепь множеств, Y — множество, для каждого $A\in C$ выполняется соотношение $|A|<|Y|$. Тогда* $|\bigcup C|\leqslant|Y|$.

Доказательство. Пусть $X=\bigcup C$ и $\pi_1: X\times Y\to X$, $\pi_2: X\times Y\to Y$ — проектирования на множители.

Подмножество $P\subset X\times Y$ назовем C-тонким, если оно тонкое (т. е. отображения $\pi_1|_\circ P: P\to\pi_1(P)$ и $\pi_2|_\circ P: P\to\pi_2(P)$ взаимооднозначны), и $\pi_1(P)=\bigcup\gamma$ для некоторого $\gamma\subset C$.

Рассмотрим упорядоченное по включению множество $\mathscr{P},<$ всех C-тонких множеств $P\subset X\times Y$. Возьмем в $\mathscr{P},<$ сквозную цепь $\mathscr{E}$ и покажем, что множество $P^*=\bigcup\mathscr{E}$ — C-тонкое. Множество P^* тонко в силу утверждения 1.3.2. Для каждого $P\in\mathscr{E}$ возьмем $\gamma_P\subset C$ такое, что $\bigcup\gamma_P=\pi_1(P)$. Для семейства $\gamma=\bigcup\{\gamma_P: P\in\mathscr{E}\}$ тогда имеем: $\gamma\subset C$ и $\bigcup\gamma=\bigcup\{\bigcup\gamma_P: P\in\mathscr{E}\}=\bigcup\{\pi_1(P): P\in\mathscr{E}\}=\pi_1(\bigcup\mathscr{E})=\pi_1(P^*)$. Итак, P^* — C-тонкое множество, т. е. $P^*\in\mathscr{P}$.

Возможны два случая.

I. $\pi_1(P^*)=X$. Тогда, так как P^* — тонкое множество, имеем: $|X|=|P^*|$ и $|P^*|\leqslant|Y|$, т. е. $|\bigcup C|=|X|\leqslant|Y|$, что и требовалось доказать.

II. $\pi_1(P^*)\neq X$. Покажем, что на самом деле этого быть не может.

Зафиксируем $\tilde{x}\in X\setminus\pi_1(P^*)$. Так как $X=\bigcup C$, найдется $\tilde{A}\in C$ для которого $\tilde{x}\in\tilde{A}$. Из $P^*\in\mathscr{E}$ в силу определения семейства $\mathscr{E}$ следует, что $\pi_1(P^*)=\bigcup\gamma$ для некоторого $\gamma\subset C$. Так как $\tilde{x}\in\tilde{A}\setminus\bigcup\gamma$ заключаем на основании леммы 1.4.1, что $\bigcup\gamma\subset\tilde{A}$, т. е. $\pi_1(P^*)\subset\tilde{A}$.

Положим $B=\tilde{A}\setminus\pi_1(P^*)$ и $T=Y\setminus\pi_2(P^*)$. Так как $|\tilde{A}|<|Y|$ и $|\pi_1(P^*)|=|P^*|=|\pi_2(P^*)|$, из утверждения 1.3.3 следует, что $|B|\leqslant|T|$, т. е. существует инъективное отображение $f: B\to T$. Множество $P'=\{(x, f(x)): x\in B\}$ (график отображения f) — тонкое. Кроме того, $\pi_1(P')=B$ и $\pi_2(P')=T$, откуда следует что $\pi_1(P^*)\cap\pi_1(P')=\varnothing$ и $\pi_2(P^*)\cap\pi_2(P')=\varnothing$. Значит, множество $\tilde{P}=P^*\cup P'$ — тонкое (см. 1.3.1). Очевидно, $\pi_1(\tilde{P})=\pi_1(P^*)\cup\pi_1(P')=\tilde{A}\in C$. Следовательно, $\tilde{P}$ является C-тонким множеством, т. е $\tilde{P}\in\mathscr{E}$. Но $P\leqslant P^*<\tilde{P}$ для всех $P\in C$, — в противоречии с тем, что цепь C — сквозная. Итак, случай II невозможен.

1.4.3. Пример. Пусть Y — произвольное бесконечное множество, $\mathbf{N}_k=\{0, \ldots, k\}=\{n\in\mathbf{N}: n\leqslant k\}$. $C=\{\mathbf{N}_k: k\in\mathbf{N}\}$. Тогда C — цепь, каждое $\mathbf{N}_k$ конечно и $|\mathbf{N}_k|<|Y|$ для всех $k\in\mathbf{N}$. Для $\mathbf{N}=\bigcup C$ из теоремы 1.4.2 получаем: $|\mathbf{N}|\leqslant|Y|$. Последнее неравенство было установлено ранее посредством другого рассуждения

1.4.4. Теорема. *Для каждого бесконечного множества X найдется цепь C его подмножеств такая, что $\bigcup C=X$ и $|Y|<|X|$ для всех $Y\in C$.*

Доказательство. Рассмотрим упорядоченное по включению семейство $\mathscr{P}=\{A\subset X: |A|<|X|\}$. Возьмем сквозную цепь $\mathscr{E}$ в $\mathscr{P},<$ и положим $A^*=\bigcup\mathscr{E}$. Покажем, что $|A^*|=|X|$. Пусть это не так. Из $A^*\subset X$ следует тогда, что $|A^*|<|X|$. Это означает, что $A^*\in\mathscr{P}$. Тем более, $X\setminus A^*\neq\varnothing$. Возьмем $a\in X\setminus A^*$ и положим $\tilde{A}=A^*\cup\{a\}$. Если A^* конечно, то $\tilde{A}$ конечно и, так как X бесконечно, $\tilde{A}\in\mathscr{P}$. Если A^* бесконечно, то $|\tilde{A}|=|A^*|<|X|$ (см. 1.3.11) и $\tilde{A}\in\mathscr{P}$. Итак, в любом случае $\tilde{A}\in\mathscr{P}$. Имеем: $A\leqslant A^*<\tilde{A}$ для всех $A\in\mathscr{E}$, — в противоречии с тем, что $\mathscr{E}$ — сквозная цепь в $\mathscr{P},<$. Итак, множества A^* и X равномощны. Возьмем взаимооднозначное отображение $\varphi: A^*\to X$. Множество A^* является объединением цепи $\mathscr{E}$ множеств меньшей мощности. Отображение φ позволяет представить аналогичным образом множество X: семейство $C=\{\varphi(A): A\in\mathscr{E}\}$, очевидно, является цепью (C — φ-копия цепи $\mathscr{E}$), $\bigcup C=\bigcup\{\varphi(A): A\in\mathscr{E}\}=\varphi(\bigcup\mathscr{E})=\varphi(A^*)=X$ и $|\varphi(A)|=|A|<|X|$ для всех $A\in\mathscr{E}$.

Цепь C, таким образом, искомая.

Ясно, что на конечные множества теорема 1.4.4 не распространяется.

§ 5. Теорема о равномощности бесконечного множества своему квадрату

В этом параграфе мы устанавливаем одну из главных теорем канторовской теории множеств. Это теорема удивительна сочетанием необычайной общности и нетривиальности, достигнутыми с помощью минимума математических средств.

1.5.1. Теорема (о квадрате). *Для каждого бесконечного множества X квадрат этого множества $X\times X$ равномощен ему самому.*

Доказательство. Предположим противное: пусть множество X бесконечно и $X\times X \not\sim X$.

Рассмотрим упорядоченное по включению семейство $\mathscr{P}$ всех бесконечных подмножеств Y множества X, квадрат которых им неравномощен:

$$\mathscr{P}=\{Y\subset X : Y \text{ бесконечно и } Y\times Y \not\sim Y\}.$$

По предположению $X\in\mathscr{P}$, т. е. семейство $\mathscr{P}$ непусто. В силу теоремы 1.3.5 найдется $Y_0\in\mathscr{P}$ такое, что

$$|Y_0|\leqslant|Y| \text{ для всех } Y\in\mathscr{P}. \tag{1}$$

Множество Y_0 бесконечно; по теореме 1.4.4 найдется цепь C подмножеств множества Y_0 такая, что $Y_0=\bigcup C$ и

$$|A|<|Y_0| \text{ для всех } A\in C. \tag{2}$$

Семейство $\mathscr{E}=\{A\times A : A\in C\}$ тоже является цепью множеств, и из $Y_0=\bigcup C$ следует, что $\bigcup\mathscr{E}=Y_0\times Y_0$.

Покажем, что для каждого $A\in C$

$$|A\times A|<|Y_0|. \tag{3}$$

Если множество A конечно, то $A\times A$ — конечное миожество и иеравенство (3) выполняется, так как множество Y_0 бесконечно. Пусть множество A бесконечно. Из соотиошений (1) и (2) следует, что $A\notin\mathscr{P}$. Это озиачает, что $A\times A\sim A$, т. е. $|A\times A|=|A|<|Y_0|$. Итак, мощность каждого элемента цепи $\mathscr{E}$ строго меньше мощности Y_0. Применяя теорему 1.4.2, получаем

$$|Y_0\times Y_0|=|\bigcup\mathscr{E}|\leqslant|Y_0|. \tag{4}$$

Но $|Y_0|\leqslant|Y_0\times Y_0|$ (см. 1.1.9). Значит, по теореме 1.1.10 $|Y_0|=|Y_0\times Y_0|$, т. е. $Y_0\sim Y_0\times Y_0$, — в противоречии с $Y_0\in\mathscr{P}$. Теорема доказана.

Из теоремы 1.5.1 и предложения 1.1.20 вытекает

1.5.2 Следствие. *Если X — бесконечное множество и Y — непустое множество, для которого $|Y|\leqslant|X|$, то*

$$|X\times Y|=|X|.$$

1.5.3. Теорема (о сумме). *Пусть $\{X_\alpha : \alpha\in A\}$ — семейство множеств, Y — множество и $|A|\leqslant|Y|$, $|X_\alpha|\leqslant|Y|$ для каждого $\alpha\in A$. Тогда для множества $X=\bigcup\{X_\alpha : \alpha\in A\}$ имеем*

$$|X| \leqslant |Y|. \tag{5}$$

Доказательство. В силу следствия 1.5.2 $|Y| = |A \times Y|$ Поэтому достаточно доказать, что

$$|X| \leqslant |A \times Y|. \tag{6}$$

Положим $Y_\alpha = \{\alpha\} \times Y$ для всех $\alpha \in A$. Так как $|X_\alpha| \leqslant |Y| = |Y_\alpha|$, существует отображение φ_α множества Y_α на множество X_α (см. 1.2.9). Отображение $\varphi : A \times Y \to X$ определим правилом $\varphi(\alpha, y) = \varphi_\alpha(\alpha, y)$ для всех $\alpha \in A$, $y \in Y$. Ясно, что $\varphi(A \times Y) = X$ Следовательно, в силу предложения 1.2.8 $|X| \leqslant |A \times Y|$.

1.5.4. Следствие. *Если множество X бесконечно и $X = X_1 \cup X_2$, то либо $|X| = |X_1|$, либо $|X| = |X_2|$.*

Доказательство. По теореме 1.3.6 либо $|X_1| \leqslant |X_2|$ либо $|X_2| \leqslant |X_1|$. Пусть для определенности $|X_1| \leqslant |X_2|$ Для $A = \{1, 2\}$ имеем: $|A| \leqslant |X_2|$. Применяя 1.5.3 (с $Y = X_2$), получаем $|X| \leqslant |X_2|$. Но $|X_2| \leqslant |X|$, так как $X_2 \subset X$. Значит, по теореме 1.1.10 $|X| = |X_2|$.

Из утверждений 1.5.1—1.5.4 можно извлечь много конкретных следствий, например такие:

1.5.5. Предложение. *Для любого $n \in \mathbf{N}^+$ и любого бесконечного множества X*

$$|X^n| = |X|. \tag{7}$$

В частности, $|\mathbf{R}^n| = |\mathbf{R}|$ и $|\mathbf{N}^n| = |\mathbf{N}|$ при всех $n \in \mathbf{N}^+$.

1.5.6. Следствие. *Множество $\mathbf{P}$ всех иррациональных чисел равномощно множеству $\mathbf{R}$ всех вещественных чисел.*

Глава 2

ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

В этой главе систематически рассматриваются вполне упорядоченные множества. Это особый тип линейно упорядоченных множеств, выделяемый требованием: в каждом непустом подмножестве есть наименьший элемент. Таковы, например, все конечные линейно упорядоченные множества и множество **N** с обычным порядком. С вполне упорядоченными множествами связаны построения по трансфинитной рекурсии и доказательства по трансфинитной индукции — уже одно это свидетельствует о фундаментальном значении данного понятия. Принципиально важен вопрос о возможности вполне упорядочить произвольное множество.

Центральное место в главе занимают вопросы сравнения вполне упорядоченных множеств посредством отображений и, в частности, теорема об их жесткости (теорема 2.2.10). Материал главы дает основу для введения и исследования кардинальных и ординальных чисел в следующей главе.

§ 1. Теорема о вполне упорядочиваемости множеств

2.1.1. Определение. Линейное упорядочение $<$ на множестве X называется *вполне упорядочением,* если выполняется условие:

для каждого непустого подмножества P множества X найдется в P наименьший относительно $<$ элемент — такое $x_0 \in P$, что $x_0 \leqslant x$ для всех $x \in P$.

Естественное упорядочение по величине натуральных чисел является вполне упорядочением на **N** — на этом основаны доказательства по математической индукции.

Как мы увидим в дальнейшем, одно из главных назначений вполне упорядочений состоит в том, чтобы дать основу рассуждениям по трансфинитной индукции и трансфинитной рекурсии. Качественное отличие трансфинитной индукции от обычной — в том, что при ней может многократно преодолеваться барьер бесконечности и что общее число шагов может быть несчетным — сколь угодно большим по мощности.

Принципиальное значение в связи со сказанным имеет вопрос: каждое ли множество может быть вполне упорядочено? (*Вполне упорядоченным множеством* будем называть множество вместе с фиксированным вполне упорядочением на нем.)

Ответ не кажется очевидным. Более того, представляется a priori неясным и следующее: каждое ли множество может быть линейно упорядочено? Важная особенность вполне упорядочений, отличающая их не только от произвольных упорядочений, но и от линейных упорядочений, состоит в том, что они почти не встречаются в натуральном виде: очень редко сама «природа» математических объектов вполне упорядочивает их (исключение — ряд натуральных чисел). Обычно вполне упорядочения «навязываются» множеству извне и не отражают внутренней структуры этого множества. Тем более значительным представляется следующий факт: каждое множество может быть вполне упорядочено. Мы докажем это одним способом в этом параграфе и другим — в § 5 гл. 2.

Первый (и важнейший) шаг — установить, что все исходные множества (т. е. все множества, являющиеся элементами исходного семейства $\mathscr{M}$) вполне упорядочиваемы.

Для каждого $X\in\mathscr{M}$ обозначим через $|X|$ класс всех множеств $Y\in\mathscr{M}$, равномощных X, т. е.

$|X|=\{Y\in\mathscr{M} : Y\sim X\}$.

Применим аксиому выбора 1.2.6 к дизъюнктному семейству $\{|X| : X\in\mathscr{M}\}$. Это дает нам семейство W, обладающее свойствами:

(a) для каждого $X\in\mathscr{M}$ найдется $Y\in W$ такое, что $X\sim Y$.

(b) если $Y, Z\in W$ и $Y\neq Z$, то $Y\not\sim Z$.

Для $Y, Z\in W$ положим $Y<Z$, если $|Y|<|Z|$.

Из теорем 1.1.10, 1.3.6, 1.3.5 и условия (b) следует, что отношение $<$ вполне упорядочивает семейство W.

Рассмотрим произвольное множество $X\in\mathscr{M}$. По теореме 1.3.6 о сравнимости либо X можно инъективно отобразить в W, либо W можно инъективно отобразить в X. Покажем, что второе невозможно.

Пусть $A\subset X$ и $W\sim A$. Тогда семейство W можно представить в виде

$$W=\{Y_\alpha : \alpha\in A\}.$$

Так как $A\in\mathscr{M}$ и $Y_\alpha\in\mathscr{M}$ при всех $\alpha\in A$, множество $Y=\bigcup\{Y_\alpha : \alpha\in A\}$ тоже принадлежит $\mathscr{M}$. Для $Z=\operatorname{Exp} Y$ тогда имеем: $Z\in\mathscr{M}$ и $|Y_\alpha|\leqslant|Y|<|Z|$ для всех $\alpha\in A$ (см. 1.1.8). С другой стороны, в силу условия (a) найдется $\alpha^*\in A$ такое, что $Y_{\alpha^*}\sim Z$, т. е. $|Y_{\alpha^*}|=|Z|$. Получили противоречие с $|Y_{\alpha^*}|<|Z|$.

Следовательно, существует инъективное отображение $f: X\to W$. Для произвольных $x_1, x_2\in X$ положим $x_1\prec x_2$, если $f(x_1)<f(x_2)$. Так как f инъективно и $<$ — вполне упорядочение на W, этим определено вполне упорядочение $\prec$ на X. Таким образом, доказана следующая фундаментальная теорема.

2.1.2. Теорема. *Каждое множество $X\in\mathscr{M}$ может быть вполне упорядочено (т. е. на нем существует хоть одно вполне упорядочение).*

Любопытно, что уже на множестве $\mathbf{R}$ всех вещественных чисел не удается указать никакого вполне упорядочения никаким «конкретным» способом: вполне упорядочение множеству $\mathbf{R}$ может быть навязано только извне, из указанных выше абстрактных соображеиий (см. [3, 10]).

Сферу действия теоремы 2.1.2 удается радикальным образом расширить, вспомнив один из наших основных прииципов.

Пусть X — произвольное семейство, не обязательно принадлежащее $\mathscr{M}$. В соответствии с принципом В можно ввести семейство $\mathscr{M}^*$ множеств, для которого выполняются условия 1—6 из Введения и вообще все сделанные нами общие предположения о классе $\mathscr{M}$, и такое, что $X\in\mathscr{M}^*$.

Заменив в доказательстве теоремы 2.1.2 класс $\mathscr{M}$ на класс $\mathscr{M}^*$, мы получаем следующий общий результат.

2.1.3. Теорема. *Каждое семейство X может быть вполне упорядочено.*

§ 2. Сравнение вполнё упорядоченных множеств. Теорема о жесткости

Пусть $X, <$ — упорядоченное множество. Подмножество $A\subset X$ называется *левым лучом* в $X, <$, если выполняется условие: для каждого $x\in A$ и каждого $y\in X$ такого, что $y<x$, непременно $y\in A$.

2.2.1. Примеры. а) Пустое множество в каждом упорядоченном множестве является левым лучом.

б) Пусть $X, <$ — произвольное упорядоченное множество и $x\in X$. Тогда миожества

$$X|_x^+=\{y\in X: y\leqslant x\} \quad \text{и} \quad X|_x=\{y\in X: y<x\}$$

являются левыми лучами в $X, <$. Этими обозначениями мы пользуемся и далее. Лучи $X|_x^+$ и $X|_x$ называются соответственно *полным* и *неполным* левыми лучами в $X, <$, *порожденнными элементом x (с концом в x)*; вместо $X|_x^+$ и $X|_x$ мы часто пишем $X|_x^+$ и $X|_x$.

в) В линейно упорядоченном множестве $X, <$ не всякий левый луч A можно представить в виде $X|_x^+$ или $X|_x$. Например, если $X=\mathbf{R}\setminus\{0\}$ и X упорядочено обычным образом, то множество $A=\{y\in\mathbf{R}: y<0\}$ — левый луч в $X, <$, но не существует $x\in X$ такого, что $A=X|_x^+$ или $A=X|_x$.

Полезно следующее простое утверждение.

2.2.2. Предложение. *Из любых двух левых лучей в линейно упорядоченном множестве один является подмножеством другого.*

Левый луч A в упорядоченном множестве $X, <$ называется *собственным*, если $A\neq X$. Один из главных фактов, относящихся ко вполне упорядоченным множествам, таков:

2.2.3. Предложение. *Для каждого собственного левого луча A во вполне упорядоченном множестве X, $<$ существует (и единствен) элемент $x\in X$ такой, что $A=X|_x$.*

Доказательство. Множество $X\setminus A$ непусто. Положим $x=\min(X\setminus A)$. Тогда если $y<x$, то $y\in A$, т. е. $X|_x\subset A$. Пусть $z\in A$. Так как $x\notin A$ и A — левый луч в X, $<$, соотношение $x\leqslant z$ не выполняется. Следовательно, $z<x$, т. е. $A\subset X|_x$. Итак, $A=X|_x$.

2.2.4. Предложение. *В каждом непустом семействе C левых лучей вполне упорядоченного множества X, $<$ существует наименьший левый луч, т. е. такое $A\in C$, что $A\subset Y$ для каждого $Y\in C$.*

Доказательство. Можно считать, что все лучи, принадлежащие C, собственные. По предложению 2.2.3 для каждого $A\in C$ существует и единствен элемент $\varphi(A)\in X$ такой, что $A=X|_{\varphi(A)}$. Множество $P=\{\varphi(A):A\in C\}$ непусто и лежит во вполне упорядоченном множестве X, $<$. Положим $x_0=\min P$ и возьмем то $A_0\in C$, для которого $\varphi(A_0)=x_0$.

Имеем: $\varphi(A_0)=x_0\leqslant\varphi(A)$ для всех $A\in C$, откуда получаем

$$A_0=X|_{\varphi(A_0)}\subset X|_{\varphi(A)}=A$$

для всех $A\in C$.

Особую важность имеет вопрос о сравнении вполне упорядоченных множеств.

Зафиксируем до конца параграфа произвольные упорядоченные множества X, $<$ и Y, $\prec$.

Отображение $f:X\to Y$ называется *строго монотонным*, если из $x_1, x_2\in X$ и $x_1<x_2$ следует, что $f(x_1)\prec f(x_2)$.

Если отображение f строго монотонно, взаимооднозначно и обратное к нему отображение f^{-1} тоже строго монотонно, то отображение f называется *подобием*.

Заданное правилом $g(n)=2n$ отображение $g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ строго монотонно, но подобием не является.

Очевидно, имеет место

2.2.5. Предложение. *Строго монотонное взаимооднозначное отображение линейно упорядоченного множества на упорядоченное множество является подобием.*

Пусть $f:X\to Z$ — биекция, $<$ — упорядочение на X и отношение $\ll$ на Z определено правилом: $z_1\ll z_2$ в том и только том случае, если $f^{-1}(z_1)<f^{-1}(z_2)$ для любых $z_1, z_2\in Z$. Тогда $\ll$ — упорядочение на Z, и отображение f является подобием упорядоченного множества X, $<$ на упорядоченное множество Z, $\ll$

Очевидно, подобия сохраняют все свойства порядка. В частности, множество, подобное линейно упорядоченному, само линейно упорядочено, а множество, подобное вполне упорядоченному, само вполне упорядочено.

Отметим, что композиция строго монотонных отображений является строго монотонным отображением и композиция подобий является подобием.

2.2.6. Предложение. *При строго монотонном отображении $f: X \to Y$ прообраз любого левого луча в Y, $\prec$ является левым лучом в X, $<$.*

Доказательство. Пусть B — левый луч в Y, $\prec$ и $A = f^{-1}(B)$. Если $a \in A$, $x \in X$ и $x < a$, то $f(x) \prec f(a) \in B$, откуда следует, что $f(x) \in B$ и $x \in f^{-1}(B) = A$. Значит, A — левый луч в X, $<$.

Напротив, образ левого луча (даже всего множества X) при строго монотонном отображении $f: X \to Y$ может не быть левым лучом в Y, $\prec$. Действительно, указанное выше отображение $g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ строго монотонно, но множество $g(\mathbf{N})$ левым лучом в $\mathbf{N}$, $<$ не является.

2.2.7. Определение. Отображение $f: X \to Y$ называется *точным,* если оно строго монотонно и $f(X)$ — левый луч в Y, $\prec$.

Очевидно, каждое подобие является точным отображением.

2.2.8. Лемма. *Если $X, <$ — вполне упорядоченное множество, то не существует в X последовательности $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ такой, что $x_{n+1} < x_n$ при всех $n \in \mathbf{N}$.*

Доказательство. Множество $A = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ имеет наименьший элемент a. Тогда $a = x_k$ при некотором $k \in \mathbf{N}$ и $x_k = a \leqslant x_{k+1}$, т. е. условие $x_{k+1} < x_k$ не выполняется.

2.2.9. Предложение. *Пусть f — строго монотонное отображение вполне упорядоченного множества $X, <$ в себя. Тогда $x \leqslant f(x)$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть нашлось $x \in X$ такое, что $f(x) < x$. Полагая $x_0 = x$ и $x_{n+1} = f(x_n)$ при $n \in \mathbf{N}$, мы получаем последовательность $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, для которой $x_{n+1} < x_n$ при всех $n \in \mathbf{N}$ — это следует из строгой монотонности отображения f. Действительно, $x_1 = f(x) < x = x_0$, откуда получаем: $x_2 = f(x_1) < f(x_0) = x_1$, $x_3 < x_2$ и т. д. (по индукции). Получили противоречие с леммой 2.2.8.

Первое основное утверждение о точных отображениях таково.

2.2.10. Теорема (о жесткости). *Пусть $f: X \to X$ — точное отображение вполне упорядоченного множества $X, <$ в себя. Тогда $f(x) = x$ для всех $x \in X$, т. е. отображение f тождественно. В частности, $f(X) = X$.*

Доказательство. Установим сначала, что $f(X) = X$. Возьмем любое $x \in X$. Отображение f строго монотонно, поэтому в силу предложения 2.2.9 $x \leqslant f(x)$. Но $f(X)$ — левый луч в $X, <$ и $f(x) \in f(X)$. Значит, $x \in f(X)$, т. е. $X \subset f(X) \subset X$ и $X = f(X)$.

Итак, f является подобием множества $X, <$ на себя (см. предложение 2.2.5).

К обратному отображению $f^{-1}: X \to X$ также применимо предложение 2.2.9. Заключаем: для всех $x \in X$ $x \leqslant f^{-1}(x)$ и в силу строгой монотонности f $f(x) \leqslant x$. Отсюда и из уже установленного неравенства $x \leqslant f(x)$ следует, что $x = f(x)$ при всех $x \in X$.

2.2.11. Пример. Отображение $g: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, где $g(r) = r^2$ при $r \in \mathbf{R}^+$, является подобием (тем более точным отображением) множества $\mathbf{R}^+$ всех положительных вещественных чисел, линейно упорядоченного естественным образом, на себя. Очевидно, g нетождественно. Мы видим, что теорема 2.2.10 на любые линейно упорядоченные множества не распространяется.

Далее часто применяются без оговорок следующие простые утверждения о левых лучах.

2.2.12. Предложение. *Пусть $X, <$ — линейно упорядоченное множество, A — левый луч в $X, <$ и $B \subset A$. Тогда множество B является левым лучом в $X, <$ в том и только том случае, если оно является левым лучом в $A, <$.*

2.2.13. Предложение. *Пусть $X, <$ — линейно упорядоченное множество и $x_1, x_2 \in X$. Тогда левый луч $X|_{x_1}$ является собственным подмножеством левого луча $X|_{x_2}$ в том и только том случае, если $x_1 < x_2$.*

2.2.14. Предложение. *Пусть f — точное отображение линейно упорядоченного множества $X, <$ в линейно упорядоченное множество $Y, \prec$. Тогда образ левого луча в $X, <$ является левым лучом в $Y, \prec$.*

Из теоремы 2.2.10 вытекает следующий результат принципиального характера:

2.2.15. Теорема о единственности. *Пусть $f: X \to Y$ и $g: X \to Y$ — два любых точных отображения вполне упорядоченного множества $X, <$ во вполне упорядоченное множество $Y, \prec$. Тогда $f \equiv g$ на X, т. е. $f(x) = g$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Положим $Y_1 = f(X)$ и $Y_2 = g(X)$. Множества Y_1 и Y_2 — левые лучи в $Y, \prec$ (так как отображения f и g — точные). Значит, либо $Y_1 \subset Y_2$, либо $Y_2 \subset Y_1$. Пусть для определенности $Y_1 \subset Y_2$.

Для каждого $y \in Y_2$ положим $\psi(y) = fg^{-1}(y) \in Y_1$. Очевидно, отображение $\psi: Y_2 \to Y_1$ строго монотонно и $\psi(Y_2) = f(X) = Y_1$ — левый луч в $Y, \prec$. Значит, ψ — точное отображение. Тогда по теореме 2.2.10 $Y_1 = \psi(Y_2) = Y_2$ и отображение ψ тождественно $\psi(y) = y$ для всех $y \in Y_2$. Но это и означает, что $f(x) = g(x)$ для всех $x \in X$.

2.2.16. Следствие. *Если вполне упорядоченные множества $X, <$ и $Y, \prec$ подобны, то подобие $f: X \to Y$ единственно*

2.2.17. Следствие. *Пусть $X, <$ и $Y, \prec$ — вполне упорядоченные множества и Y_1, Y_2 — левые лучи в $Y, \prec$, подобные $X, <$. Тогда $Y_1 = Y_2$.*

2.2.18. Предложение. *Пусть $X, <$ и $Y, \prec$ — вполне упорядоченные множества, A_1 и A — левые лучи в $X, <$, причем $A_1 \subset A$ и $A_1 \neq A$. Тогда:*

а) Если левый луч B в $Y, \prec$ подобен $A, <$, то существует левый луч B_1 в $Y, \prec$, подобный $A_1, <$ и такой, что $B_1 \subset B$, $B_1 \neq B$;

б) если луч $A_1, <$ подобен лучу B_1 в $Y, \prec$ и луч $A, <$ подобен лучу B в $Y, \prec$, то $B_1 \subset B$ и $B_1 \neq B$.

Доказательство. а) При подобии $f: A \to B$ левый луч A_1 переходит в левый луч $B_1 = f(A_1) \subset B$, причем из $A_1 \neq A$ следует, что $B_1 \neq B$ (см. предложения 2.2.14 и 2.2.17). Лучи $A_1, <$ и $B_1, \prec$ подобны.

б) В силу а) существует луч B' в $Y, \prec$, подобный лучу $A_1, <$ и такой, что $B' \subset B$ и $B' \neq B$. Из утверждения 2.2.17 следует теперь, что $B_1 = B'$. Значит, $B_1 \subset B$ и $B_1 \neq B$.

Второе основное утверждение о точных отображениях касается их существования.

2.2.19. Теорема (о прилегании шкал). *Пусть $X, <$ и $Y, \prec$ — произвольные вполне упорядоченные множества. Тогда справедливо ровно одно из следующих утверждений:*

а) существует и единственно точное отображение $f: X \to Y$, причем $f(X) \neq Y$;

b) существует и единственно точное отображение $f: Y \to X$, причем $f(Y) \neq X$;

с) существует и единственно подобие $f: X \to Y$.

Доказательство. Положим $X^* = \{x \in X$: в $Y, \prec$ существует собственный левый луч, подобный $X|_x, <\}$. Для каждого $x \in X^*$ обозначим через $\varphi(x)$ тот элемент $y \in Y$, для которого лучи $X|_x, <$ и $Y|_y, \prec$ подобны — в силу следствия 2.2.17 такое y существует и единствен. Из предложения 2.2.18 следует, что если $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in X^*$, то $\varphi(x_1) \prec \varphi(x_2)$ (строгое включение $Y|_{y_1} \subset Y|_{y_2}$ равносильно тому, что $y_1 \prec y_2$).

Кроме того, в силу предложения 2.2.18 X^* — левый луч в $X, <$.

Покажем, что и $Y^* = \varphi(X^*)$ — левый луч в $Y, \prec$. Пусть $y \in \varphi(X^*)$ и $y_1 \in Y$, $y_1 \prec y$. По определению отображения φ левый луч $Y|_y, \prec$ подобен левому лучу $X|_x, <$ для некоторого $x \in X$. Но тогда в силу предложения 2.2.18 левый луч $Y|_{y_1}, \prec$ подобен некоторому левому лучу $A, <$ в $X, <$, где $A \subset X|_x$ и тем более $A \neq X$. По предложению 2.2.3 $A = X|_{x_1}$ для некоторого $x_1 \in X$. Из определения отображения φ следует, что $\varphi(x_1) = y_1$. Итак, мы имеем подобие $\varphi: X^* \to Y^*$, причем X^* и Y^* — левые лучи в $X, <$ и $Y, \prec$ соответственно.

Покажем, что выполняется хотя бы одно из равенств $X^* = X$ и $Y^* = Y$.

Предположим противное. Тогда в силу предложения 2.2.3 найдется $x^* \in X$, для которого $X^* = X|_{x^*}$. Так как левый луч $X|_{x^*}$ подобен собственному левому лучу Y^* множества $Y, \prec$, имеем: $x^* \in X^*$. Но тогда $x^* \in X|_{x^*}$, т. е. $x^* < x^*$ — получили противоречие. Следовательно, либо $X^* = X$, либо $Y^* = Y$. Если выполняются оба равенства, то имеет место подобие $\varphi: X \to Y$. Если справедливо только первое из них, то имеем точное отображение $\varphi: X \to Y$, причем $\varphi(X) = Y^* \neq Y$.

Если справедливо только второе равенство, то отображение $\varphi^{-1}: Y \to X^*$ — подобие, причем X^* — собственный левый луч в $X, <$. То, что существует не более одного отображения f такого, как в а), b) и с), следует из предложения 2.2.15.

§ 3. Порождающие (минимальные) вполне упорядочения

2.3.1. Определение. Вполне упорядочение $<$ на множестве X называется *порождающим* (или *минимальным*), если для каждого $x\in X$ мощность множества $X|_x=\{y\in X: y<x\}$ меньше мощности всего множества X, т. е. $|X|_x|<|X|$.

Иными словами, вполне упорядочение $<$ множества X является порождающим в том и только том случае, если мощность каждого собственного левого луча в X, $<$ меньше мощности самого множества X.

Вполне упорядоченное множество $X, <$ условимся называть *шкалой*, если вполне упорядочение $<$ — порождающее.

Разумеется, на конечном множестве всякое вполне упорядочение является порождающим.

2.3.2. Теорема. *На каждом множестве X существует порождающее вполне упорядочение.*

Доказательство. По теореме 2.1.3 на X существует вполне упорядочение $<$. Если $<$ — порождающее, доказательство завершено. В противном случае множество $A=\{x\in X: |X|_x|=|X|\}$ непусто. Возьмем первый элемент $x^*=\min A$ этого множества. Если $y\in X$ и $y<x^*$, то $y\notin A$ и, значит, $|X|_y|<|X|$. С другой стороны, $|X|_{x^*}|=|X|$, так как $x^*\in A$. Следовательно, $<$ — порождающее вполне упорядочение на множестве $Y=X|_{x^*}$, равномощном множеству X. Остается «скопировать» $<$ с множества Y на все множество X посредством какой-нибудь биекции. А именно, фиксируем биекцию $\varphi: X\to Y$ и полагаем для $x_1, x_2\in X: x_1\prec x_2$ в том и только том случае, если $\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$.

Очевидно, $\prec$ — порождающее вполне упорядочение на X.

2.3.3. Теорема. *Пусть $<$ и $\prec$ — два порождающих вполне упорядочения на множестве X. Тогда множества $X, <$ и $X, \prec$ подобны (и подобие $f: X, <\to X, \prec$ единственно).*

Доказательство. По теореме 2.2.19 существует точное отображение f множества $X, <$ во множество $X, \prec$. Левый луч $f(X)$ в $X, \prec$ равномощен множеству X. Так как вполне упорядочение $\prec$ порождающее, левый луч $f(X)$ не может быть собственным, т. е. $f(X)=X$. Значит, f — искомое подобие. В силу следствия 2.2.16 подобие f единственно.

Теоремы 2.3.2. и 2.3.3 выявляют канонический характер порождающих вполне упорядочений.

С помощью порождающих вполне упорядочений удается прозрачно классифицировать совокупность всех вполне упорядоченных множеств меньшей мощности (из $\mathcal{M}$).

2.3.4. Теорема. *Пусть $X, <$ — произвольная шкала и $Y, \prec$ — любое вполне упорядоченное множество мощности меньшей мощности X. Найдется тогда $x\in X$ такое, что вполне упорядоченное множество $X|_x, <$ подобно $Y, \prec$.*

Доказательство. Применяя теорему 2.2.19, мы замечаем, что случаи a) и c) невозможны, так как $|Y|<|X|$ (точ-

нее, так как неверно, что $|X| \neq |Y|$). Следовательно, имеет место случай b): множество $Y, \prec$ подобно некоторому собственному левому лучу A множества $X, <$. В силу предложения 2.2.3 $A = X|_x$ для некоторого $x \in X$.

§ 4. Трансфинитная индукция и трансфинитная рекурсия

Одно из главных назначений вполне упорядоченных множеств — служить основой доказательств по трансфинитной индукции. Принцип трансфинитной индукции, обобщающий обычный принцип математической индукции, заключается в следующем.

2.4.1. Теорема (принцип трансфинитной индукции). *Пусть $W, <$ — вполне упорядоченное множество, и каждому $\alpha \in W$ поставлено в соответствие некоторое утверждение $P(\alpha)$, причем так, что выполняются следующие два условия:*

1) утверждение $P(0)$ верно, где 0 — первый элемент множества $W, <$;

2) если $\beta \in W$ и $P(\alpha)$ верно для всех $\alpha < \beta$, $\alpha \in W$, то $P(\beta)$ тоже верно.

Тогда $P(\alpha)$ верно при всех $\alpha \in W$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда множество M всех $\alpha \in W$, для которых $P(\alpha)$ неверно, непусто: $M \neq \varnothing$. Возьмем наименьший элемент α^* множества M. Из $\alpha^* \in M$ следует, что $P(\alpha^*)$ неверно. С другой стороны, $P(\alpha)$ верно для всех $\alpha < \alpha^*$, $\alpha \in W$, так как $\alpha^* = \min M$. Из условия 2) вытекает теперь, что утверждение $P(\alpha^*)$ верно — получили противоречие.

С применениями принципа трансфинитной индукции мы еще встретимся (см. гл. 4). Сейчас же остановимся на втором важнейшем принципе организации рассуждений, связанном со вполне упорядочениями.

2.4.2. Теорема (о построении по трансфинитной рекурсии). *Пусть $W, <$ — произвольное вполне упорядоченное множество, Y — любое множество и каждому $x \in W$ отвечает правило R_x, которое произвольному отображению $\varphi : W|_x \to Y$ ставит в соответствие определенный элемент $R_x(\varphi)$ множества Y. Тогда существует и единственно отображение $f : W \to Y$ такое, что*

$$f(x) = R_x(f|(W|_x)) \qquad (1)$$

для всех $x \in W$.

Доказательство. Если $f : W \to Y$ и $g : W \to Y$ — два различных отображения, удовлетворяющих формуле (1), то можно взять первое $x^* \in W$, для которого $f(x^*) \neq g(x^*)$. Тогда $f(x) = g(x)$ при всех $x < x^*$, $x \in W$, т. е. $f|(W|_{x^*}) = g|(W|_{x^*})$, и из (1) следует, что $f(x^*) = R_x(f|(W|_{x^*})) = R_x(g|(W|_{x^*})) = g(x^*)$ — противоречие с выбором $x^* \in W$. Следовательно, существует самое большее одно отображение $f : W \to Y$, удовлетворяющее условию (1).

Докажем теперь, что такое отображение $f : W \to Y$ существует. Рассмотрим множество A всех тех $x \in W$, для которых су-

ществует отображение $f_x: W|_x^+ \to Y$, удовлетворяющее условию

$$f_x(y) = R_y(f_x|(W|_y)) \qquad (1_x)$$

для всех $y \leqslant x$, $y \in W$.

Очевидно, множество A является левым лучом в $W, <$. Если $x_1, x_2 \in A$ и $x_1 < x_2$, то f_{x_1} — сужение отображения f_{x_2} на $W|_{x_1}$, — это следует из доказанного выше.

Поэтому существует отображение $\tilde{f}: A \to Y$ такое, что $\tilde{f}|(W|_x^+) = f_x$ для всех $x \in A$. Очевидно,

$$\tilde{f}(x) = R_x(\tilde{f}|(W|_x))$$

для всех $x \in A$. Осталось показать, что $A = W$. Предположим противное. Тогда $A = W|_{x^*}$, где $x^* = \min(W \setminus A)$. Положим $f_{x^*}(x) = \tilde{f}(x)$ для всех $x < x^*$ и $f_{x^*}(x^*) = R_{x^*}(\tilde{f})$. Отображение $f_{x^*}: W|_{x^*}^+ \to Y$, очевидно, удовлетворяет формуле (1_{x^*}). Следовательно, $x^* \in A$, в противоречии с $x^* \in W \setminus A$.

Заключаем: $A = W$ и отображение $f = \tilde{f}: W \to Y$ — искомое.

Замечание. При отображении $f: W \to Y$ образ первого элемента 0 множества W в силу данного выше определения есть $R_0(\varnothing)$ — некоторый элемент множества Y.

При построении по трансфинитной рекурсии в качестве множества Y выступает обычно семейство подмножеств какого-нибудь множества Z. Правило R_0 говорит просто, какой элемент множества Y следует поставить первому элементу 0 множества W. Пусть $x \in W$ и существует элемент $x' \in W$, непосредственно предшествующий элементу x в W, т. е. такой, что $x = x' + 1$. Правило R_x в этой ситуации может определять значение $f(x)$ по уже известному значению $f(x')$. Если элемент x — предельный в $W, <$ (т. е. не имеет непосредственно предшествующего), то связь между $f(x)$ и $f|(W|_x)$ может иметь вид: $f(x) = F(\bigcup\limits_{x' < x} f(x'))$ или $f(x) = F(\bigcap\limits_{x' < x} f(x'))$, где $F: \operatorname{Exp} Z \to \operatorname{Exp} Z$ — некоторое отображение.

Правило R_x может иметь и существенно более сложную природу. Формально в качестве R_x может выступать любое отображение в Y множества M_x всех отображений множества $W|_x$ в Y, причем отображения $R_{x'}$ и $R_{x''}$ могут совершенно не зависеть друг от друга при $x' \neq x''$.

Иногда построения по трансфинитной рекурсии называют определениями по трансфинитной рекурсии. В дальнейшем будет осуществлен ряд интересных конкретных построений этого рода.

Часто после построения по трансфинитной рекурсии отображения $f: W \to Y$ доказываются по трансфинитной индукции те или иные утверждения, зависящие от $\alpha \in W$ и относящиеся к отображению f. В конечном счете эти утверждения оказываются следствиями принятого при построении правила R_x.

§ 5. Вывод принципа сквозной цепи из аксиомы выбора

В этом параграфе мы принимаем аксиому выбора в качестве исходного положения.

2.5.1. Теорема. *В каждом упорядоченном множестве* $X, <$ *существует вполне упорядоченная сквозная цепь.*

Доказательство. Для каждой цепи A в $X, <$ обозначим через $(A)_m$ множество всех $x \in X$ таких, что $a < x$ для каждого $a \in A$. Зафиксируем на основании аксиомы выбора отображение $c : \operatorname{Exp} X \setminus \{\varnothing\} \to X$ такое, что

$$c(B) \in B \tag{1}$$

для всех непустых $B \subset X$.

Для каждой цепи A в $X, <$, для которой множество $(A)_m$ непусто, положим

$$\varphi(A) = c((A)_m). \tag{2}$$

Подмножество $A \subset X$ назовем φ-шкалой (в $X, <$), если выполняются условия:

I) $A, <$ — вполне упорядоченное множество и

II) для каждого $x \in A$ имеет место равенство

$$\varphi(A|_x) = x. \tag{3}$$

Заметим, что $(A|_x)_m$ всегда непусто, так как $x \in (A|_x)_m$.

Ключевую роль в доказательстве теоремы 2.5.1 играет следующее утверждение.

2.5.2. Предложение. *Пусть* A_1 *и* A_2 *— любые две* φ*-шкалы в* $X, <$. *Тогда либо* A_1 *является левым лучом в* $A_2, <$, *либо* A_2 *является левым лучом в* $A_1, <$.

Доказательство. Положим

$$\tilde{A} = \{x \in A_1 \cap A_2 : A_1|_x = A_2|_x\}. \tag{4}$$

Очевидно, $\tilde{A} \subset A_1$ и $\tilde{A} \subset A_2$. Покажем, что $\tilde{A}$ является левым лучом как в A_1, так и в A_2.

Пусть $x \in \tilde{A}$ и $y \in A_1$, $y < x$. Тогда $y \in A_1|_x = A_2|_x \subset A_2$ и, значит, $y \in A_1 \cap A_2$. Имеем

$$A_1|_y = (A_1|_x)|_y = (A_2|_x)|_y = A_2|_y.$$

Следовательно, $y \in \tilde{A}$. Итак, $\tilde{A}$ — левый луч в $A_1, <$ и в силу симметрии рассуждения $\tilde{A}$ — левый луч в $A_2, <$. Осталось показать, что либо $\tilde{A} = A_1$, либо $\tilde{A} = A_2$.

Предположим противное. Так как A_1 и A_2 — φ-шкалы,

$$\min(A_1 \setminus \tilde{A}) = \varphi(\tilde{A}) = \min(A_2 \setminus \tilde{A}) \text{ и}$$

$$A_1|^{x} = \tilde{A} = A_2|^{\tilde{x}},$$

где $\tilde{x} = \varphi(\tilde{A}) \in A_1 \cap A_2$. Но тогда $\tilde{x} \in \tilde{A}$ — получили противоречие. Предложение 2.5.2 доказано.

2.5.3. Предложение. *Объединение* A^* *всех* φ*-шкал в* $X, <$ *является* φ*-шкалой в* $X, <$.

Доказательство. Пусть $x \in A^*$. Найдется φ-шкала A такая, что $x \in A$. Покажем, что тогда

$$A^*|_x = A|_x. \tag{5}$$

Из $A \subset A^*$ следует, что $A|_x \subset A^*|_x$. Пусть $y \in A^*$ и $y < x$. Найдется φ-шкала A', для которой $y \in A'$. Если $A' \subset A$, то $y \in A$. Пусть $A' \not\subset A$. Тогда в силу предложения 2.5.2 A является левым лучом в $A', <$. Из $x \in A$ и $y \in A'$, $y < x$, теперь следует, что $y \in A$ Значит, $A^*|_x \subset A|_x$, и равенство (5) доказано.

Так как A — φ-шкала, из (5) получаем

$$\varphi(A^*|_x) = \varphi(A|_x) = x. \tag{6}$$

Кроме того, из (5) и предложения 2.5.2 следует, что множество $A^*, <$ вполне упорядочено. Действительно, если $x_1, x_2 \in A^*$, то найдутся φ-шкалы A_1 и A_2 такие, что $x_1 \in A_1$ и $x_2 \in A_2$. В силу предложения 2.5.2 либо $A_1 \subset A_2$, либо $A_2 \subset A_1$, т. е. либо $x_1, x_2 \in A_2$, либо $x_1, x_2 \in A_1$, и так как A_1 и A_2 — цепи в $X, <$, либо $x_1 \leqslant x_2$, либо $x_2 \leqslant x_1$. Следовательно, $A^*, <$ — линейно упорядоченное множество. Пусть $B \subset A^*$ и $B \neq \varnothing$. Зафиксируем $x \in B$ и φ-шкалу A, содержащую x.

Очевидно, достаточно найти наименьший элемент во множестве $B_0 = \{y \in A^* : y \leqslant x\}$. Но последнее в силу (5) совпадает со множеством $B' = \{y \in A : y \leqslant x\}$, которое имеет наименьший элемент как непустое подмножество вполне упорядоченного множества $A, <$.

Так как вполне упорядоченное множество $A^*, <$ удовлетворяет условию (6), оно является φ-шкалой. Предложение 2.5.3 доказано.

Из предложения 2.5.3 вытекает, что в $X, <$ имеется наибольшая φ-шкала.

Покажем, что наибольшая φ-шкала A^* в $X, <$ является сквозной цепью в $X, <$. Предположим противное. Тогда, по определению сквозной цепи, множество $(A^*)_m$ непусто и определен элемент $x^* = \varphi(A^*) = c((A^*)_m)$. Положим $C = A^* \cup \{x^*\}$. Так как $x < x^*$ для всех $x \in A^*$ и A^* вполне упорядочено, множество $C, <$ вполне упорядочено и $A^* = C|_{x^*}$, $C|_x = A^*|_x$ для всех $x \in A^*$. Имеем: $x^* = \varphi(A^*) = \varphi(C|_{x^*})$ по определению x^*; кроме того, $x = \varphi(A^*|_x) = \varphi(C|_x)$, так как A^* — φ-шкала. Следовательно, C является φ-шкалой в $X, <$, причем $C \setminus A^* \neq \varnothing$, так как $x^* \in C \setminus A^*$. Это противоречит тому, что A^* — наибольшая φ-шкала в $X, <$. Итак, φ-шкала A^* является сквозной цепью в $X, <$. Теорема 2.5.1 доказана.

Докажем еще одним способом — с помощью теоремы 2.5.1 — фундаментальное утверждение (см. теорему 2.1.3):

2.5.4. Теорема. *Каждое множество может быть вполне упорядочено.*

Доказательство. Возьмем произвольное бесконечное множество X. Существует множество Y, для которого $|X| < |Y|$ — в качестве Y можно взять $\operatorname{Exp} X$. Семейство $\mathcal{P} = \{A \subset Y : |A| \leqslant |Y|\}$ упорядочим по включению. По теореме 2.5.1 су-

ществует вполне упорядоченная сквозная цепь C в $\mathscr{P}, <$. Покажем, что $|X|<|C|$.

Предположим противное. Тогда $|C|\leqslant|X|$ (теорема 1.3.7) и $|\bigcup C|\leqslant|X|$, так как $|A|\leqslant|X|$ для всех $A\in C$ (по теореме 1.5.3). Следовательно, $|\bigcup C|<|Y|$ и тем более $Y\setminus\bigcup C\neq\varnothing$. Возьмем какое-нибудь $x^*\in Y\setminus\bigcup C$ и положим $A^*=(\bigcup C)\cup\{x^*\}$. Тогда $|A^*|=|\bigcup C|\leqslant|X|$ и, значит, $A^*\in\mathscr{P}$. Очевидно, $A<A^*$ для каждого $A\in C$, в противоречии с тем, что C — сквозная цепь в $\mathscr{P}, <$. Заключаем: $|X|<|C|$.

Но тогда X эквивалентно некоторому подмножеству C' множества C. Так как C вполне упорядочено отношением $<$, то и C' вполне упорядочено отношением $<$.

Следовательно, можно определить вполне упорядочение и на эквивалентном C' множестве X («перенося» отношение $<$ с C' на X посредством какой-нибудь биекции).

Заметим, что теорема 2.5.4 относится ко «всем» множествам, а не только ко множествам из исходного семейства $\mathscr{M}$ (см. теоремы 2.1.2 и 2.1.3).

Глава 3

КАРДИНАЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА. ОРДИНАЛЫ

В этой главе вводятся, наконец, «бесконечные числа», которые будут служить для прямой количественной характеристики множеств из $\mathscr{M}$ и множеств, эквивалентных таким множествам Теперь мы сможем говорить о числе элементов в произвольном множестве $X \in \mathscr{M}$ — это будет вполне определенный объект, обозначаемый через $|X|$. До сих пор неравенство $|X| \leqslant |Y|$, где X и Y — произвольные множества (не обязательно принадлежащие $\mathscr{M}$), имело смысл только в целом — его левая и правая части $|X|$ и $|Y|$, взятые по отдельности, не имели самостоятельного значения. Теперь такое значение выражениям $|X|$ и $|Y|$ будет придано, но не для любых множеств X, Y, а в первую очередь для тех X и Y, которые принадлежат $\mathscr{M}$. Так как не все множества заданы нам одновременно и в процессе расширения запаса множеств, с которым мы работаем, возникают все более крупные множества, не следует удивляться тому, что объекты, которыми число элементов во множестве будет «измеряться», не могут быть все введены заранее. С другой стороны, при определении операций над новыми «числами» доктрина постоянного их «возникновения» была бы крайне неудобной. Поэтому мы и ограничиваемся определением понятия числа элементов только для множеств из $\mathscr{M}$, причем выбираем путь, который не допускает автоматического распространения понятия числа элементов на новые множества.

Главная цель этой главы — построение арифметики кардинальных чисел. Предстоит определить операции над кардиналами и установить основные законы, которые управляют этими операциями.

Вводятся также порядковые числа — ординалы — и рассматриваются простейшие операции над ординалами.

§ 1. Определение кардиналов. Сравнение кардиналов по величине

3.1.1. Определение. Множество X назовем *ординарным*, если оно эквивалентно некоторому множеству из $\mathscr{M}$.

В частности, все множества из $\mathscr{M}$ ординарны. Не ординарные множества условимся называть *экстраординарными*.

3.1.2. Определение. Назовем *мощностью* ординарного множества X класс $|X|$ всех множеств из $\mathscr{M}$, эквивалентных X Таким образом,

$$|X| = \{Y \in \mathscr{M} : Y \sim X\}. \qquad (1)$$

Множества $|X|$, где $X \in \mathscr{M}$, называются *кардинальными числами*, или *кардиналами*. Семейство $\{|X| : X \in \mathscr{M}\}$ всех кардиналов обозначается через Card.

Очевидно, для каждого ординарного множества X $|X|$ — некоторый кардинал.

В этом и следующем параграфах мы изучаем класс Card: вводим на нем естественные операции и порядок, устанавливаем свойства этих операций и порядка, выделяем ряд интересных элементов класса Card.

Мощности бесконечных множеств из $\mathscr{M}$ называются *бесконечными кардиналами*. Данное выше определение кардиналов позволяет отождествить конечные кардиналы, т. е. мощности конечных множеств, с натуральными числами. Действительно, если X конечно, то существует единственное $n \in \mathbf{N}$ такое, что X эквивалентно множеству $\{0, \ldots, n-1\}$ первых n натуральных чисел. Мы отождествляем тогда $|X|$ с n.

3.1.3. Предложение. *Пусть X и Y — ординарные множества. Тогда X и Y эквивалентны в том и только том случае, если $|X|$ и $|Y|$ — один и тот же кардинал.*

Доказательство. Это прямо следует из транзитивности, симметричности и рефлексивности отношения эквивалентности и определения $|X|$ и $|Y|$.

Таким образом, если $X, Y \in \mathscr{M}$, то равенство $|X| = |Y|$, которое ранее обозначало, что множества X и Y эквивалентны, можно теперь понимать и так: в левой и правой части стоит один и тот же кардинал.

Кардиналы обычно обозначаются малыми греческими буквами τ, λ, μ и т. д. Символ τ мы будем употреблять только в этом смысле.

Определим теперь на классе Card естественное упорядочение, называемое *упорядочением по величине*.

Пусть $\lambda, \tau \in \mathrm{Card}$. Зафиксируем множества $X, Y \in \mathscr{M}$ такие, что $|X| = \lambda$ и $|Y| = \tau$. Положим $\lambda < \tau$, если $\lambda \neq \tau$ и существует подмножество Y_1 множества Y, эквивалентное X. Как всегда, неравенство $\lambda \leqslant \tau$ означает, что $\lambda < \tau$ или $\lambda = \tau$. Если $\lambda < \tau$, то будем говорить, что *кардинал λ меньше кардинала τ*.

Тривиально проверяется, что отношение $\leqslant$ на классе Card транзитивно и рефлексивно. Из теоремы 1.1.10 и определения кардиналов следует, что если $\lambda \leqslant \tau$ и $\tau \leqslant \lambda$, то $\lambda = \tau$. Отсюда вытекает, что отношение $<$ является упорядочением на классе Card. По теореме 1.3.6 для любых двух кардиналов $\lambda, \tau \in \mathrm{Card}$ либо $\lambda < \tau$, либо $\lambda = \tau$, либо $\tau < \lambda$. Значит, отношение $<$ линейно упорядочивает класс Card. Наконец, определение кардиналов позволяет переформулировать теорему 1.3.5 следующим образом: *в каждом непустом множестве кардиналов имеется наименьший кардинал*. Это означает, что отношение $<$ — вполне упорядочение на классе Card; оно называется *естественным вполне упорядочением* или *вполне упорядочением кардиналов по величине*. Итак, имеет место фундаментальный факт:

3.1.4. Теорема. *Класс* Card *всех кардиналов вполне упорядочен по величине, т. е. отношением* $<$.

Для каждого кардинала τ положим

$$\exp\tau = |\mathrm{Exp}\, X| = 2^{\tau}, \tag{2}$$

где X — любое множество такое, что $X \in \mathscr{M}$ и $|X| = \tau$. Очевидно, данное определение не зависит от произвола, допущенного при выборе X.

Теорему 1.1.8 можно теперь переформулировать так:

$$\tau < \exp\tau \tag{3}$$

для каждого $\tau \in \mathrm{Card}$.

Из (3) вытекает

3.1.5. Следствие. *Не существует наибольшего кардинала, т. е. во вполне упорядоченном множестве* Card, $<$ *нет наибольшего элемента.*

Так как класс всех кардиналов вполне упорядочен по величине, для каждого кардинала τ существует непосредственно следующий за ним кардинал, обозначаемый через τ^+, а именно:

$$\tau^+ = \min\{\lambda \in \mathrm{Card} : \tau < \lambda\}. \tag{4}$$

Формула (4) корректна в силу утверждений 3.1.4 и 3.1.5.

Обычно пользуются следующим свойством кардинала τ^+: если $\lambda \in \mathrm{Card}$ и $\tau < \lambda$, то $\tau^+ \leqslant \lambda$.

Через $\aleph_0$ обозначается наименьший из всех бесконечных кардиналов — это определение корректно в силу теоремы 3.1.4. Мы уже знаем (теорема 1.3.10), что наименьшим бесконечным кардиналом является мощность натурального ряда $\mathbf{N}$, т. е.

$$|\mathbf{N}| = \aleph_0. \tag{5}$$

Формула (4) позволяет нам определить последовательность простейших несчетных кардиналов (по индукции): полагаем $\aleph_1 = (\aleph_0)^+$, и вообще $\aleph_{n+1} = (\aleph_n)^+$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Кардинал $\aleph_1$ называется *первым несчетным кардиналом.*

3.1.6. Предложение. *Пусть* $X, <$ *— вполне упорядоченное множество мощности* τ. *Тогда для каждого кардинала* $\lambda < \tau$ *найдется* $x \in X$ *такое, что* $|X|_x| = \lambda$, *иными словами, найдется собственный левый луч в* $X, <$ *мощности* λ.

Доказательство. Множество L всех $x \in X$ таких, что мощность левого луча $X|_x$ строго меньше, чем λ, образует левый луч в $X, <$. Ясно, что в $L, <$ нет наибольшего элемента и L является объединением цепи $C = \{X|_x : x \in L\}$. По теореме 1.4.2 тогда $|L| \leqslant \lambda$ и, следовательно, L — собственный левый луч в $X, <$. Найдется $x^* \in X$, для которого $L = X|_{x^*}$. Так как $x^* \notin L$, неравенство $|L| < \lambda$ выполняться не может. Значит, $|L| = |X|_{x^*}| =$
$=$

Мы воспользуемся этим утверждением в следующем параграфе.

Один из интереснейших вопросов, связанных с данными вы-

ше определениями, таков: как связаны кардиналы $\exp \aleph_0$ и $\aleph_1$? Более общий вопрос: как связаны кардиналы τ^+ и $\exp\tau$?

Ответ крайне нетривиален. Средствами математической логики доказывается, что в рамках обычных аксиоматических систем теории множеств нельзя дать однозначный ответ на эти вопросы. Равенство $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ называется *континуум-гипотезой* и обозначается CH. Отрицание CH (обозначаемое $\neg$CH) равносильно неравенству $\aleph_1<2^{\aleph_0}$ (так как неравенство $\aleph_1\leqslant 2^{\aleph_0}$ легко следует из формул (3) и (4)). Р. Гёдель показал [10, 9], что равенство $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ не противоречит обычным аксиомам теории множеств. Много позднее П. Коэн установил [9], что этим аксиомам не противоречит и неравенство $\aleph_1<2^{\aleph_0}$. Гипотеза: «$\tau^+=\exp\tau$ для всех бесконечных кардиналов τ» — называется *обобщенной континуум-гипотезой*. Она также совместима с обычными системами аксиом теории множеств [9, 10].

Доказательства приведенных утверждений о совместимости не принадлежат канторовой теории множеств; соответственно в этой книге мы их не приводим.

§ 2. Умножение кардиналов

Мы приступаем к построению арифметики кардинальных чисел.

Произведением кардиналов τ, λ называется кардинал

$$\tau\cdot\lambda=|X\times Y|, \tag{1}$$

где X, $Y\in\mathscr{M}$ и $|X|=\tau$, $|Y|=\lambda$.

От произвола в выборе X, Y это определение не зависит, так как из $X\sim X'$ и $Y\sim Y'$ следует, что $X\times Y\sim X'\times Y'$. Кроме того, $X\times Y\in\mathscr{M}$, так как X, $Y\in\mathscr{M}$; поэтому кардинал $|X\times Y|$ определен.

Множества $X\times Y$ и $Y\times X$ эквивалентны — ставя в соответствие паре (x, y) пару (y, x), мы получаем биекцию.

Следовательно, $\tau\cdot\lambda=|X\times Y|=|Y\times X|=\lambda\cdot\tau$, т. е.

$$\tau\cdot\lambda=\lambda\cdot\tau \tag{2}$$

для всех кардиналов τ и λ.

Так как всякое бесконечное множество X эквивалентно своему квадрату (теорема 1.5.1), имеет место

3.2.1. Теорема. *Для каждого бесконечного кардинала* τ

$$\tau\cdot\tau=\tau. \tag{3}$$

Ясно, что для всех $\tau\in$Card

$$\tau\cdot 1=1\cdot\tau=\tau, \tag{4}$$

$$\tau\cdot 0=0\cdot\tau=0. \tag{5}$$

Заметим, что если $\tau=m$ и $\lambda=n$ — натуральные числа, то $\tau\cdot\lambda=m\cdot n$ — обычное произведение чисел m и n, т. е. введенная операция произведения кардиналов на множестве $\mathbf{N}\subset$Card на-

туральных чисел совпадает с обычной операцией произведения.

Очевидно, если $\tau_1 \leqslant \tau_2$ и $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, то $\tau_1 \cdot \lambda_1 \leqslant \tau_2 \cdot \lambda_2$. Отсюда и из формул (3), (4) вытекает следующее обобщение формулы (3): если $\tau \neq 0$, $\lambda \neq 0$ и хоть один из кардиналов τ, λ бесконечен, то

$$\tau \cdot \lambda = \max\{\tau, \lambda\}. \tag{6}$$

В частности, для любого бесконечного кардинала τ

$$\tau \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \tau = \tau. \tag{7}$$

По аналогии с (1) можно определить произведение любого индексированного множества кардиналов.

Назовем *произведением* $\prod\limits_{\alpha \in A} \tau_\alpha$ *семейства кардиналов* $\{\tau_\alpha : \alpha \in A\}$, где $A \in \mathscr{M}$ (или A ординарно), мощность декартова произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ семейства множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ такого, что $X_\alpha \in \mathscr{M}$ и $|X_\alpha| = \tau_\alpha$ при всех $\alpha \in A$.

От произвола в выборе $X_\alpha \in \mathscr{M}$ данное определение не зависит. Так как $A \in \mathscr{M}$ и $X_\alpha \in \mathscr{M}$ при всех $\alpha \in A$, имеем: $X = \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \in \mathscr{M}$. Следовательно, кардинал $\left|\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha\right|$ определен. Если $A \notin \mathscr{M}$, но A эквивалентно множеству $A' \in \mathscr{M}$, то надо заменить сначала индексное множество A на индексное множество A' с помощью какой-нибудь биекции. Таким образом, кардинал $\prod\limits_{\alpha \in A} \tau_\alpha$ определен корректно.

Очевидно, если все кардиналы τ_α отличны от нуля, то $\tau_\alpha \leqslant \prod\limits_{\alpha \in A} \tau_\alpha$ для всех $\alpha \in A$.

В частности, можно говорить о произведении любого конечного и любого счетного множества кардиналов.

Так как операция декартова произведения ассоциативна с точностью до канонических биекций, то и операция умножения кардинальных чисел ассоциативна. Например, если $A = B \cup C$, где $B \cap C = \varnothing$, то $\prod\limits_{\alpha \in A} \tau_\alpha = \left(\prod\limits_{\alpha \in B} \tau_\alpha\right) \cdot \left(\prod\limits_{\alpha \in C} \tau_\alpha\right)$.

С помощью операции произведения устанавливается следующий фундаментальный факт.

3.2.2. Теорема. *Для любого семейства* $\xi = \{\tau_\alpha : \alpha \in A\}$ *кардиналов такого, что* $A \in \mathscr{M}$ *или* A *ординарно, существует кардинал* τ^* *такой, что* $\tau_\alpha < \tau^*$ *для всех* $\alpha \in A$ *(т. е. семейство* ξ *строго ограничено в классе* Card, $<$).

Доказательство. Можно считать, что $\tau_\alpha \neq 0$ при всех $\alpha \in A$. Положим $\tau = \prod\limits_{\alpha \in A} \tau_\alpha$ и $\tau^* = \tau^+$. Тогда $\tau_\alpha \leqslant \tau < \tau^+ = \tau^*$ при всех $\alpha \in A$, что и требовалось.

3.2.3. Следствие. *Не существует множества* $A\in\mathcal{M}$, *эквивалентного классу* Card.

Доказательство. Предположим, что такое множество A существует. Тогда класс Card можно представить в виде

$$\mathrm{Card}=\{\tau_\alpha:\alpha\in A\}.$$

По теореме 3.2.2 существует кардинал τ^* такой, что $\tau_\alpha<\tau^*$ для всех $\alpha\in A$. Это означает, что $\tau<\tau^*$ для всех $\tau\in$Card. Но $\tau^*\in$ $\in$Card. Следовательно, $\tau^*<\tau^*$ — получили противоречие.

Из следствия 3.2.3 и теоремы 1.3.6 о сравнимости вытекает, что каждое множество $X\in\mathcal{M}$ эквивалентно некоторому подмножеству класса Card. Отсюда и из теоремы 3.1.4 вновь заключаем, что каждое множество из $\mathcal{M}$ может быть вполне упорядочено.

3.2.4. Предложение. *Для каждого кардинала* τ *множество* $\mathrm{Card}_\tau=\{\lambda\in\mathrm{Card}:\lambda<\tau\}$ *эквивалентно некоторому множеству из* $\mathcal{M}$.

Доказательство. Зафиксируем вполне упорядоченное множество $X,<$ мощности τ, $X\in\mathcal{M}$. В силу предложения 3.1.6 каждому $\lambda<\tau$ можно поставить в соответствие элемент $x=$ $=\varphi(\lambda)$ множества X такой, что мощность левого луча $X|_{\varphi(\lambda)}$ равна λ. Очевидно, если $\lambda_1\neq\lambda_2$, то $\varphi(\lambda_1)\neq\varphi(\lambda_2)$. Следовательно, отображение $\varphi:\mathrm{Card}_\tau\to X$ инъективно и $\mathrm{Card}_\tau\sim\varphi(\mathrm{Card}_\tau)$. Так как $\varphi(\mathrm{Card}_\tau)\subset X\in\mathcal{M}$, то и $\varphi(\mathrm{Card}_\tau)\in\mathcal{M}$.

Так как все множество Card неэквивалентно никакому множеству из $\mathcal{M}$, предложение 3.2.4 означает, что каноническое вполне упорядочение $<$ класса Card является минимальным.

Множество Card — пример экстраординарного (т. е. не ординарного) множества.

В отличие от множеств, принадлежащих $\mathcal{M}$, ординарные множества мы не можем все считать заданными заранее и одновременно. Действительно, появление всякого нового множества X в наших рассмотрениях ведет и к появлению нового ординарного множества — одноэлементного множества $\{X\}$. Как видно из определения мощности, ординарными являются в точности те множества, для которых понятие мощности определено. Очевидно, подмножество ординарного множества ординарно; если множество A ординарно и все X_α при $\alpha\in A$ ординарны, то и множества

$$\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\}\text{ и }\bigcup\{X_\alpha:\alpha\in A\}$$

ординарны; если X — ординарное множество, то и $\mathrm{Exp}\,X$ — ординарное множество. Другие очевидные утверждения этого рода мы опускаем.

Вполне упорядоченное множество $W,<$ назовем *почти ординарным*, если для каждого $\alpha\in W$ левый луч $W|_\alpha$ является ординарным множеством. Если, кроме того, само множество W неординарно, то скажем, что $W,<$ является *универсальной шкалой* (для $\mathcal{M}$). В частности, Card, $<$ — универсальная шкала.

3.2.5. Предложение. *Для каждого почти ординарного*

вполне упорядоченного множества $W, <$ *существует и единственно подобное отображение этого множества на некоторый левый луч* L *множества* Card, $<$, *причем* $L=\mathrm{Card}$ *в том и только том случае, если* $W, <$ *— универсальная шкала.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 2.2.19, предложением 3.2.4 и данными выше определениями.

В частности, имеет место

3.2.6. Предложение. *Для любых двух универсальных шкал существует и единственно подобие первой из них на вторую.*

Зафиксируем почти ординарное вполне упорядоченное множество $W, <$ и подобное отображение $f: W \to L$ на левый луч L в Card, $<$. Для каждого $\alpha \in W$ положим $\aleph_\alpha = f(\alpha)$. Соответствие $\alpha \to \aleph_\alpha$ называется *канонической нумерацией кардиналов вдоль* $W, <$. В силу предложения 3.2.5 каноническая нумерация определена однозначно. Очевидно, для каждого $\alpha \in W$

$$\aleph_\alpha = \min\{\tau \in \mathrm{Card} : \aleph_\beta < \tau \text{ для всех } \beta < \alpha\}. \tag{8}$$

Если множество W ординарно, то определен однозначно и кардинал $\tau \in \mathrm{Card}$, для которого $f(W) = L = \mathrm{Card}_\tau$. Этот кардинал τ естественно обозначить $\aleph(W, <)$.

§ 3. Сложение кардиналов

Пусть τ и λ — кардиналы, $X, Y \in \mathscr{M}$, $|X| = \tau$, $|Y| = \lambda$. Предположим, что $X \cap Y = \varnothing$. Назовем тогда *суммой* $\tau + \lambda$ кардиналов τ и λ мощность множества $X \cup Y$:

$$\tau + \lambda = |X \cup Y|. \tag{1}$$

Очевидно, это определение не зависит от выбора X и Y при условии, что $X \cap Y = \varnothing$ и $X, Y \in \mathscr{M}$. Кроме того, из $X, Y \in \mathscr{M}$ следует, что $X \cup Y \in \mathscr{M}$ и, значит, кардинал $|X \cup Y|$ определен.

Для любых множеств X и Y множества $X_0 = \{(x, 0) : x \in X\}$ и $Y_1 = \{(y, 1) : y \in Y\}$ не пересекаются, так как $(x, 0) \neq (y, 1)$, каковы бы ни были $x \in X$ и $y \in Y$. Но $X_0 \sim X$ и $Y_1 \sim Y$. Значит, условие $X \cap Y = \varnothing$ в данном выше определении суммы кардиналов всегда можно соблюсти.

Пусть $\{\tau_\alpha : \alpha \in A\}$ — индексированное семейство кардиналов, где A — любое ординарное множество.

Зафиксируем семейство $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ множеств такое, что: 1) X_α ординарно и $|X_\alpha| = \tau_\alpha$ для всех $\alpha \in A$, 2) $X_{\alpha'} \cap X_{\alpha''} = \varnothing$ при $\alpha' \neq \alpha''$, $\alpha', \alpha'' \in A$. Добиться выполнения условия 2) можно следующим образом. Выберем $X'_\alpha \in \mathscr{M}$ при $\alpha \in A$ так, чтобы было $|X'_\alpha| = \tau_\alpha$, и положим $X_\alpha = X'_\alpha \times \{\alpha\} = \{(x, \alpha) : x \in X'_\alpha\}$. Множество X_α ординарно, $|X_\alpha| = |X'_\alpha| = \tau_\alpha$ и $X_{\alpha'} \cap X_{\alpha''} = \varnothing$ при $\alpha' \neq \alpha''$ — условие 2) соблюдено.

Множество $X = \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ ординарно.

Положим

$$\sum_{\alpha\in A}\tau_\alpha=\sum\{\tau_\alpha:\alpha\in A\}=|X|. \tag{2}$$

От произвола в выборе семейства $\{X_\alpha:\alpha\in A\}$ это определение не зависит.

Имеют место следующие простые формулы для любых τ, $\lambda\in\mathrm{Card}$:

$$\tau+\lambda=\lambda+\tau; \tag{3}$$

$$\tau+0=\tau. \tag{4}$$

Если $\tau'_\alpha\leqslant\tau''_\alpha$ при всех $\alpha\in A$, где τ'_α, $\tau''_\alpha\in\mathrm{Card}$ и множество A ординарно, то

$$\sum_{\alpha\in A}\tau'_\alpha\leqslant\sum_{\alpha\in A}\tau''_\alpha. \tag{5}$$

Если $\tau=n$ и $\lambda=m$ — натуральные числа, то $\tau+\lambda=n+m$ — обычная сумма натуральных чисел m и n; т. е. введенная выше операция сложения кардиналов на множестве $\mathbf{N}\subset\mathrm{Card}$ совпадает с обычной операцией сложения.

Операция сложения ассоциативна: если $A=B\cup C$, где $B\cap C=\varnothing$, то $\sum_{\alpha\in A}\tau_\alpha=\sum_{\alpha\in B}\tau_\alpha+\sum_{\alpha\in C}\tau_\alpha$; это сразу вытекает из определения. Ясно, как записать закон ассоциативности сложения кардиналов в еще более общем виде.

В частности, всегда $\tau_1+(\tau_2+\tau_3)=(\tau_1+\tau_2)+\tau_3$.

3.3.1. Теорема. *Для любого бесконечного кардинала* τ

$$\tau+\tau=\tau. \tag{6}$$

Доказательство. Это — основной случай более общей формулы:

$$\tau+\lambda=\max\{\tau,\ \lambda\} \tag{7}$$

для любых кардиналов τ и λ, хотя бы один из которых бесконечен.

Последняя же является переформулировкой на язык кардиналов следующей теоремы, доказанной ранее (см. следствие 1.5.4): для любых множеств X и Y, из которых хоть одно бесконечно,

$$|X\cup Y|=\max\{|X|,\ |Y|\}.$$

Из формулы (7), в частности, следует, что

$$\tau+n=\tau+\aleph_0=\tau \tag{8}$$

для каждого бесконечного кардинала τ и любого натурального числа n.

Следующая теорема — наиболее важный общий факт о сложении кардиналов. Она получается путем тривиального перевода на язык кардиналов теоремы 1.5.3.

3.3.2. Теорема. *Пусть* $\{\tau_\alpha:\alpha\in A\}$ *— произвольное семейство кардиналов, где* A *— ординарное множество,* τ *— бесконеч-*

ный кардинал, $|A| \leqslant \tau$ *и* $\tau_\alpha \leqslant \tau$ *для всех* $\alpha \in A$. *Тогда*

$$\sum_{\alpha \in A} \tau_\alpha \leqslant \tau. \tag{9}$$

Семейство $\{\tau_\alpha : \alpha \in A\}$ кардиналов, где A — ординарное множество, условимся называть *ординарным семейством кардиналов.*

Для любого такого семейства ξ существует по теореме 3.2.2 кардинал τ' такой, что $\tau_\alpha \leqslant \tau'$ при всех $\alpha \in A$. Наименьший кардинал τ' с этим свойством называется *точной верхней гранью,* или *супремумом,* семейства $\{\tau_\alpha : \alpha \in A\}$ и обозначается через

$$\sup\{\tau_\alpha : \alpha \in A\} = \sup_{\alpha \in A} \tau_\alpha.$$

Формулу (9) можно уточнить теперь следующим образом:

$$\sum_{\alpha \in A} \tau_\alpha = \max\{|A|, \sup_{\alpha \in A} \tau_\alpha\}, \tag{9'}$$

если хоть один из кардиналов τ_α бесконечен или бесконечен кардинал $|A|$.

3.3.3. Следствие. *Пусть* $f : X \to Y$ *— отображение на, где* X *— бесконечное ординарное множество. Тогда*

$$|X| = \max\{|Y|, \sup_{y \in Y} |f^{-1}y|\}. \tag{10}$$

Доказательство. Так как $X = \bigcup\{f^{-1}(y) : y \in Y\}$, формула (10) следует из формулы (9′) и определения суммы кардиналов.

Следующая теорема является одним из важных и наиболее часто применяемых результатов кардинальной арифметики.

3.3.4. Теорема (Кёнига). *Пусть* A *— ординарное множество и для каждого* $\alpha \in A$ *заданы кардиналы* λ_α *и* μ_α, *причем* $\lambda_\alpha < \mu_\alpha$. *Тогда*

$$\sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha < \prod_{\alpha \in A} \mu_\alpha. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $X = \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ и $Y = \prod\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$, где $X_\alpha, Y_\alpha \in \mathscr{M}$, $|X_\alpha| = \lambda_\alpha$, $|Y_\alpha| = \mu_\alpha$. Требуется показать, что $|X| < |Y|$. Достаточно убедиться, что, каково бы ни было отображение $\varphi : X \to Y$, непременно $Y \neq \varphi(X)$. Рассмотрим композицию отображений

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\pi_\alpha} Y_\alpha,$$

где $\pi_\alpha : Y \to Y_\alpha$ — проектирование. Имеем:
$\pi_\alpha\varphi(X_\alpha) \subset Y_\alpha$ и $|\pi_\alpha\varphi(X_\alpha)| \leqslant |X_\alpha| = \lambda_\alpha < \mu_\alpha = |Y_\alpha|$. Значит, $\pi_\alpha\varphi(X_\alpha) \neq Y_\alpha$ и можно для каждого $\alpha \in A$ выбрать $y_\alpha^* \in Y_\alpha \setminus \pi_\alpha\varphi(X_\alpha)$. Тогда $y^* = \{y_\alpha^* | \alpha \in A\} \in Y$, и $y^* \notin \varphi(X_\alpha)$

для всех $\alpha\in A$, так как $y^*_\alpha\notin\pi_\alpha\varphi(X_\alpha)$.
Поэтому и $\varphi(X)=\varphi(\bigcup\{X_\alpha:\alpha\in A\})=\bigcup\{\varphi(X_\alpha):\alpha\in A\}\not\ni y^*$, т. е. $\varphi(X)\neq Y$.

Теорема Кёнига найдет важное применение в следующем параграфе.

§ 4. Возведение кардиналов в степень

Пусть τ и λ — произвольные кардиналы, и $\lambda\neq 0$. Зафиксируем множество $X\in\mathscr{M}$ мощности τ и множество $A\in\mathscr{M}$ мощности λ. Для каждого $\alpha\in A$ положим $X_\alpha=X$ и рассмотрим произведение $\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\}$. Множество $\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\}$ совпадает со множеством X^A всех отображений множества A во множество X. Кроме того, $X^A\in\mathscr{M}$. Положим

$$\tau^\lambda=|X^A|. \tag{1}$$

Данное определение не зависит от произвола в выборе X и A.

Говорят при этом, что кардинал τ^λ получен в результате *возведения кардинала* τ *в степень* λ.

Очевидно, $\tau^n=\underbrace{\tau\cdot\ldots\cdot\tau}_{n\text{ раз}}$ для всех $\tau\in\mathrm{Card}$ и всех $n\in\mathbf{N}^+$.

Нам понадобятся следующие элементарные утверждения, которые затем мы переведем на язык кардиналов.

3.4.1. Предложение. *Пусть A, B, C — произвольные множества и $B\cap C=\varnothing$. Тогда*

$$A^{B\cup C}\sim A^B\times A^C. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $f\in A^{B\cup C}$. Тогда $f:B\cup C\to A$ — отображение. Поставим в соответствие f его сужения $f|B:B\to A$ и $f|C:C\to A$:

$$\varphi(f)=(f|B,\ f|C)\in A^B\times A^C.$$

Отображение $\varphi:A^{B\cup C}\to A^B\times A^C$ является, как легко проверить, биекцией. Значит, $A^{B\cup C}\sim A^B\times A^C$.

Из (2) и определения операции возведения в степень вытекает, что для любых кардиналов τ, λ и μ, где $\lambda\neq 0$ и $\mu\neq 0$, справедлива формула:

$$\tau^{\lambda+\mu}=\tau^\lambda\cdot\tau^\mu. \tag{3}$$

Чтобы формула (3) оставалась справедливой и в том случае, если $\lambda=0$ или $\mu=0$, примем следующие соглашения:

$$\tau^0=1 \tag{4}$$

для каждого кардинала τ, отличного от 0, и

$$0^0=0. \tag{5}$$

3.4.2. Предложение. *Пусть A, B, C — произвольные множества. Тогда*

$$(A\times B)^C\sim A^C\times B^C. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $f\in(A\times B)^C$. Тогда $f:C\to$

$\to A\times B$ — отображение. Поставим в соответствие f пару (g, h), где g — композиция отображения f и проектирования $A\times B\to A$ и h — композиция отображения f и проектирования $A\times B\to B$.

Определенное тем самым отображение множества $(A\times B)^C$ во множество $A^C\times B^C$ является биекцией — это очевидно.

Из формулы (6) следует, что, каковы бы ни были кардиналы τ, λ и μ, выполняется равенство

$$(\tau\cdot\lambda)^\mu=\tau^\mu\cdot\lambda^\mu. \tag{7}$$

3.4.3. Предложение. *Пусть A, B, C — произвольные непустые множества. Тогда*

$$(A^B)^C=A^{B\times C}. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $f\in(A^B)^C$. Тогда $f: C\to A^B$ — отображение. Произвольной паре $(b, c)\in B\times C$ поставим в соответствие элемент $\psi(b, c)$ множества A, в который отображение $f(c): B\to A$ переводит элемент b, т. е.

$$\psi(b, c)=f(c)(b).$$

Тем самым определено отображение

$$\psi: (A^B)^C\to A^{B\times C},$$

которое, как легко проверить, является биекцией.

Из формулы (8) вытекает, что, каковы бы ни были кардиналы τ, λ и μ, выполняется соотношение

$$(\tau^\lambda)^\mu=\tau^{\lambda\cdot\mu}. \tag{9}$$

Рассмотрим множество $D=\{0, 1\}$, состоящее из двух элементов, и произвольное множество X. Каждому подмножеству P множества X поставим в соответствие его характеристическую функцию f_P — отображение множества X в D, переводящее точки из P в 1 и точки из $X\setminus P$ в 0.

Ясно, что тем самым множество $\operatorname{Exp} X$ приведено во взаимооднозначное соответствие со множеством D^X. Следовательно,

$$|\operatorname{Exp} X|=|D^X|=|D|^{|X|}=2^{|X|}.$$

Итак, имеет место

3.4.4. Предложение *Для каждого кардинала τ кардинал 2^τ равен мощности множества* $\operatorname{Exp} X$, *где* $|X|=\tau$.

Это утверждение верно и для конечных кардиналов (даже для нуля). В связи с предложением 3.4.4 кардинал 2^τ обозначают также $\exp\tau$.

3.4.5. Теорема. *Для каждого кардинала τ*

$$\tau<2^\tau. \tag{10}$$

Доказательство. Это утверждение — перевод на язык кардиналов теоремы 1.1.8.

Часто пользуются формулой

$$(2^\tau)^\tau=2^\tau \tag{11}$$

для всех бесконечных кардиналов τ.

Докажем (11). Имеем: $(2^\tau)^\tau=2^{\tau\cdot\tau}=2^\tau$ в силу формулы (9) и теоремы 3.2.1 о том, что квадрат бесконечного кардинала равен ему самому.

Очевидно, если $\tau_1\leqslant\tau_2$ и $\lambda_1\leqslant\lambda_2$, то $\tau_1^{\lambda_1}\leqslant\tau_2^{\lambda_2}$.

3.4.6. Предложение. *Пусть τ — бесконечный кардинал и λ — кардинал, для которого $2\leqslant\lambda\leqslant\tau$. Тогда*

$$\lambda^\tau=2^\tau. \tag{12}$$

Доказательство. Имеем:

$$2^\tau\leqslant\lambda^\tau\leqslant\tau^\tau\leqslant(2^\tau)^\tau=2^\tau.$$

Следовательно, $\lambda^\tau=2^\tau$.

Пусть X — произвольное ординарное множество и τ — любой кардинал. Положим

$$\operatorname{Exp}_\tau X=\{A\subset X:|A|\leqslant\tau\}, \tag{13}$$

$$\operatorname{Exp}_{<\tau} X=\{A\subset X:|A|<\tau\}. \tag{14}$$

Этими обозначениями мы пользуемся и в дальнейшем.

Зафиксируем любое множество A мощности τ и каждому отображению $f:A\to X$ поставим в соответствие множество $f(A)\subset X$. Этим определено отображение множества X^A на множество $\operatorname{Exp}_\tau X$, так как $|f(A)|\leqslant|A|\leqslant\tau$ и множество A можно отобразить на любое подмножество $Y\subset X$ такое, что $|Y|\leqslant\tau$. Заключаем (см. 1.2.8):

$$|\operatorname{Exp}_\tau X|\leqslant|X|^\tau. \tag{15}$$

3.4.7. Предложение. *Пусть X — ординарное множество мощности 2^τ, где τ — бесконечный кардинал. Тогда мощность множества $\operatorname{Exp}_\tau X$ всех подмножеств множества X, мощность которых не превосходит τ, равна 2^τ.*

Доказательство. В силу формул (15) и (11) имеем

$$|\operatorname{Exp}_\tau X|\leqslant|X|^\tau=(2^\tau)^\tau=2^\tau.$$

С другой стороны, $2^\tau=|X|\leqslant\operatorname{Exp}_\tau X$, так как множество X эквивалентно множеству $\{\{x\}:x\in X\}\subset\operatorname{Exp}_\tau X$. Значит,

$$|\operatorname{Exp}_\tau X|=2^\tau.$$

Мощность множества $\mathbf{R}$ равна $2^{\aleph_0}$. Из предложения 4.4.7 вытекает

3.4.8. Следствие. *Множество всех счетных подмножеств множества $\mathbf{R}$ равномощно $\mathbf{R}$, т. е. имеет мощность $2^{\aleph_0}$.*

В силу формулы (10) $\aleph_0<2^{\aleph_0}$. Следовательно, $\aleph_1\leqslant2^{\aleph_0}$, и вообще

$$\tau^+\leqslant2^\tau. \tag{16}$$

Но равен ли кардинал $\aleph_1$ кардиналу $2^{\aleph_0}$? Равен ли кардинал 2^τ кардиналу τ^+ (если кардинал τ бесконечен)? На эти элементарнейшие, казалось бы, вопросы нельзя дать ответ в рамках обычной теории множеств (см. § 2 гл. 3 и [9, 10]).

Не входя в противоречие с обычными системами аксиом

теории множеств, можно считать, что $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ (континуум-гипотеза), но этим аксиомам не противоречит и любое из следующих предположений: $2^{\aleph_0}=\aleph_2$, $2^{\aleph_0}=\aleph_3$, ..., $2^{\aleph_0}=\aleph_n$, ...

§ 5. Конфинальный характер кардинала. Регулярные и сингулярные кардиналы

Кардинал τ называется *изолированным,* если в семействе $\{\lambda\in\mathrm{Card}:\lambda<\tau\}$ есть наибольший кардинал, т. е. если $\tau=\mu^+$, для некоторого кардинала μ. В противном случае кардинал τ называется *предельным*. Очевидно, $\aleph_0$ — предельный кардинал а кардиналы $\aleph_1$, $\aleph_2$ — изолированные.

Если τ — изолированный кардинал, то кардинал μ, для которого $\tau=\mu^+$, определен однозначно. Этот кардинал μ обозначается через τ^-.

Можно ли представить бесконечный кардинал τ в виде суммы меньшего, чем τ, числа кардиналов, меньших, чем τ? Ответ на этот вопрос зависит, как мы увидим, от кардинала τ. Если ответ положителен, то кардинал τ называется *сингулярным* если ответ отрицателен, то кардинал τ называется *регулярным* Таким образом, кардинал τ *регулярен,* если из того, что $\tau=\sum_{\alpha\in A}\tau_\alpha$, где A — ординарное миожество и $1\leqslant\tau_\alpha<\tau$ для всех $\alpha\in A$, следует, что $|A|=\tau$.

3.5.1. Предложение. *Каждый изолированный кардинал регулярен.*

Доказательство. Предположим, что $\tau^+=\Sigma\{\tau_\alpha:\alpha\in A\}$, где $|A|<\tau^+$ и $\tau_\alpha<\tau^+$ для всех $\alpha\in A$. Тогда $|A|\leqslant\tau$ и $\tau_\alpha\leqslant\tau$ при $\alpha\in A$. По теореме 3.3.2 $\sum_{\alpha\in A}\tau_\alpha\leqslant\tau$, т. е. $\tau^+\leqslant\tau$, — получили противоречие.

В частности, регулярны кардиналы $\aleph_1$, $\aleph_2$, ..., $\aleph_n$, ...

Не все регулярные кардиналы изолированы, например, $\aleph_0$ является предельным и регулярным кардиналом, так как объединение конечного числа конечных множеств — конечное множество.

Обозначим через $\aleph_\omega$ первый кардинал, следующий за всеми $\aleph_n$, где $n\in\mathbf{N}$ (напомним, что $\aleph_{n+1}=(\aleph_n)^+$). Имеем

$$\aleph_\omega=\sup\{\aleph_n:n\in\mathbf{N}\}=\sum_{n\in\mathbf{N}}\aleph_n,$$

см § 3 гл. 3.

Так как $\aleph_n<\aleph_\omega$ для всех $n\in\mathbf{N}$ и $|\mathbf{N}|=\aleph_0<\aleph_\omega$, кардинал $\aleph_\omega$ сингулярен

Пусть τ — произвольный бесконечный кардинал. Обозначим через $\mathrm{cf}(\tau)$ минимум мощностей всех таких множеств $A\in\mathcal{M}$, что кардинал τ допускает представление вида: $\tau=\Sigma\{\tau_\alpha\cdot\alpha\in A\}$

где $\tau_\alpha < \tau$ при всех $\alpha \in A$.

Кардинал $\mathrm{cf}(\tau)$ называется *конфинальным характером*, или *конфинальностью* кардинала τ.

Например, для $\aleph_\omega = \sum_{n \in \mathbb{N}} \aleph_n$ имеем

$$\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \aleph_0. \tag{1}$$

Для каждого бесконечного кардинала τ

$$\mathrm{cf}(\tau) \leqslant \tau. \tag{2}$$

Действительно, $\tau = \Sigma\{1_\alpha : \alpha \in A\}$, где $A \in \mathfrak{M}$ и $|A| = \tau$.

Очевидно, кардинал τ регулярен в том и только том случае, если

$$\mathrm{cf}(\tau) = \tau.$$

Соответственно кардинал τ сингулярен в том и только том случае, если

$$\mathrm{cf}(\tau) < \tau.$$

3.5.2. Теорема. *Для каждого бесконечного кардинала* τ *кардинал* $\mathrm{cf}(\tau)$ *регулярен.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{cf}(\tau) = \lambda$ и

$$\tau = \Sigma\{\tau_\alpha : \alpha \in A\}, \tag{3}$$

где $\tau_\alpha < \tau$ для всех $\alpha \in A$ и $|A| = \lambda$. Предположим, что кардинал λ нерегулярен. Тогда

$$A = \bigcup\{B_\beta : \beta \in T\},$$

где $|T| < \lambda$ и $|B_\beta| < \lambda$ для каждого $\beta \in T$.

Можно считать, что $B_{\beta'} \cap B_{\beta''} = \varnothing$ при $\beta' \neq \beta''$.

В силу ассоциативности сложения кардиналов

$$\Sigma\{\tau_\alpha : \alpha \in A\} = \Sigma_{\alpha \in B_\beta}\{\tau_\alpha : \beta \in T\}. \tag{4}$$

Положим $\lambda_\beta = \sum_{\alpha \in B_\beta} \tau_\alpha$. Так как $|B_\beta| < \lambda = \mathrm{cf}(\tau)$ и $\tau_\alpha < \tau$ при $\alpha \in B_\beta$, имеем

$$\lambda_\beta < \tau$$

при всех $\beta \in T$. Но $|T| < \lambda = \mathrm{cf}(\tau)$. Значит, равенство

$$\tau = \Sigma\{\lambda_\beta : \beta \in T\}, \tag{5}$$

следующее из равенств (3) и (4), невозможно; из (5) вытекает, что $\lambda = \mathrm{cf}(\tau) \leqslant |T|$.

Регулярен ли кардинал $2^{\aleph_0}$? Можно поставить и более тонкий вопрос: чему равен $\mathrm{cf}(2^{\aleph_0})$?

3.5.3. Теорема. *Для каждого бесконечного кардинала* τ

$$\tau < \mathrm{cf}(2^\tau). \tag{6}$$

Доказательство. Предположим, что $2^\tau = \Sigma\{\lambda_\alpha : \alpha \in A\}$, где A — ординарное множество, $|A| \leqslant \tau$ и $\lambda_\alpha < 2^\tau$ при всех $\alpha \in A$. Положим $\mu_\alpha = 2^\tau$ для всех $\alpha \in A$. По теореме Кенига

$$\Sigma\{\lambda_\alpha : \alpha\in A\}<\Pi\{\mu_\alpha : \alpha\in A\},$$

т. е.

$$2^\tau<(2^\tau)^{|A|}\leqslant(2^\tau)=2^{\tau\cdot\tau}=2^\tau,$$

получили противоречие: $2^\tau<2^\tau$. Значит, $\tau<\mathrm{cf}(2^\tau)$.

3.5.4. Следствие. $\aleph_0<\mathrm{cf}(2^{\aleph_0})$.

В частности, множество $\mathbf{R}$ нельзя представить в виде объединения счетного семейства множеств, мощность каждого из которых меньше мощности $\mathbf{R}$.

Обычным аксиомам теории множеств не противоречит ни одно из следующих утверждений:

a) $2^{\aleph_0}$ — изолированный кардинал;

b) $2^{\aleph_0}$ — сингулярный кардинал;

c) $2^{\aleph_0}$ — предельный регулярный кардинал.

Введем понятие логарифма кардинала.

Пусть λ и τ — кардиналы, $\lambda>1$. Имеем: $\lambda^\tau>\tau$.

Наименьший из всех кардиналов μ таких, что $\lambda^\mu>\tau$, называется *верхним логарифмом кардинала* τ *по основанию* λ; обозначается этот кардинал $\mathrm{Log}_\lambda\tau$.

Простым логарифмом (или *логарифмом*) *кардинала* τ *по основанию* λ называется наименьший из всех кардиналов μ таких, что $\lambda^\mu\geqslant\tau$; обозначается этот кардинал через $\log_\lambda\tau$.

Следуя Д. Курепе, мы полагаем

$$p(\tau)=\mathrm{Log}_\tau(\tau) \tag{7}$$

для каждого кардинала τ.

Вместо $\mathrm{Log}_2\tau$ и $\log_2\tau$ мы пишем соответственно $\mathrm{Log}\,\tau$ и $\log\tau$.

3.5.5. Теорема. *Для каждого бесконечного кардинала* τ

$$\mathrm{cf}(\mathrm{Log}_\tau\tau)=\mathrm{Log}_\tau\tau,$$

т. е. $\mathrm{Log}_\tau\tau$ — *регулярный кардинал.*

Доказательство. Положим $\mu=\mathrm{Log}_\tau\tau$ и $\lambda=\mathrm{cf}(\mu)$. Кардинал μ имеет вид

$$\mu=\sum_{\alpha\in A}\mu_\alpha,$$

где $\mu_\alpha<\mu$ для каждого $\alpha\in A$ и $|A|<\lambda$. Тогда

$$\tau<\tau^\mu=\tau^{\left(\sum\limits_{\alpha\in A}\mu_\alpha\right)}=\prod_{\alpha\in A}\tau^{\mu_\alpha}.$$

Из $\mu_\alpha<\mu=\mathrm{Log}_\tau\tau$ следует, что $\tau^{\mu_\alpha}\leqslant\tau$ для всех $\alpha\in A$. Заключаем:

$$\tau<\prod_{\alpha\in A}\tau^{\mu_\alpha}\leqslant\tau^{|A|}\leqslant\tau^\lambda,$$

откуда получаем: $\mu=\mathrm{Log}_\tau\tau\leqslant\lambda=\mathrm{cf}(\mu)$. Всегда $\mathrm{cf}(\mu)\leqslant\mu$. Следовательно, $\mu=\mathrm{cf}(\mu)$.

Приведем теперь характеристику кардинала $\mathrm{cf}(\tau)$ в терминах вполне упорядочений.

3.5.6. Теорема. *Пусть τ — бесконечный кардинал, $X\in\mathcal{M}$, $|X|=\tau$ и $<$ — порождающее вполне упорядочение на X. Тогда*

$$\mathrm{cf}(\tau)=\min\{|A| : A\subset X \text{ и } A \text{ конфинально } X, <\}.$$

Доказательство. Пусть $A\subset X$ и A конфинально $X, <$. Для каждого $x\in X$ найдется $a\in A$ такое, что $x\leqslant a$. Следовательно,

$$X=\bigcup\{L_\alpha : \alpha\in A\},$$

где $L_\alpha=\{x\in X : x\leqslant a\}$. Но вполне упорядочение $<$ — порождающее. Значит, $|L_\alpha|<|X|=\tau$ при $\alpha\in A$. Полагая $\tau_a=|L_a|$, получаем

$$\tau\leqslant\Sigma\{\tau_\alpha : a\in A\},$$

где $\tau_\alpha<\tau$ при всех $a\in A$. Отсюда следует, что $\mathrm{cf}(\tau)\leqslant|A|$.

Рассмотрим теперь произвольное представление

$$\tau=\Sigma\{\tau_b : b\in B\},$$

где $|\tau_b|<\tau$, и покажем, что существует множество $A\subset X$, конфинальное X, $<$, для которого $|A|\leqslant|B|$.

Для каждого $b\in B$ зафиксируем множество $Y_b\in\mathcal{M}$ мощности τ_b и порождающее вполне упорядочение $<_b$ на Y_b. Поставим в соответствие произвольному $b\in B$ элемент $\varphi(b)$ множества X такой, что левый луч $X|_{\varphi(b)}$ подобен $Y_b, <_b$. Это можно сделать в силу предложения 3.1.6. Покажем, что либо множество $A=\varphi(B)$ коинфинально $X, <$, либо $\tau\leqslant|B|$, и за искомое A можно принять все X.

Пусть $|B|<\tau$ и $A=\varphi(B)$ неконфинально $X, <$. Найдется тогда $x^*\in X$, для которого $\varphi(b)<x^*$ при всех $b\in B$. Множества $X|_{\varphi(b)}$ и Y_b эквивалентны. Имеем теперь

$$\tau_b=|Y_b|=|X|_{\varphi(b)}|\leqslant|X_{x^*}|<|X|=\tau,$$

так как вполне упорядочение $<$ — порождающее.

Для $\tau'=\max\{|X|_{x^*}|, |B|\}$ выполняются соотношения: $\tau'<\tau$, $|B|\leqslant\tau'$ и $\tau_b\leqslant\tau'$ при всех $b\in B$. Следовательно, по теореме 3.3.2

$$\Sigma\{\tau_b : b\in B\}\leqslant\tau',$$

т. е, $\tau\leqslant\tau'$, в противоречии с тем, что $\tau'<\tau$. Теорема доказана.

Из теоремы 3.5.6 следует, что если $X, <$ — порождающее вполне упорядоченное миожество из $\mathcal{M}$, то кардинал $|X|$ регулярен в том и только том случае, если всякое конфинальное $X, <$ подмножество $Y\subset X$ равномощно X.

§ 6. Ординалы, сложение ординалов. Шкала ординалов

Если вполне упорядоченные множества $A', <'$ и $A'', <''$ подобны, будем писать:

$$A', <' \approx A'', <''.$$

Пусть $A, <$ — произвольное ординарное вполне упорядоченное множество. Через $P(A, <)$ условимся обозначать класс всех вполне упорядоченных множеств из $\mathcal{M}$, подобных $A, <$. Множества $P(A, <)$, где $A \in \mathcal{M}$ и $<$ — вполне упорядочение на A, называются *ординалами*, при этом говорят, что ординал $P(A, <)$ является *порядковым типом* вполне упорядоченного множества $A, <$. Класс всех ординалов обозначается через Ord. Таким образом,

$$\mathrm{Ord} = \{P(A, <) : A \in \mathcal{M} \text{ и } < \text{ — вполне упорядочение на } A\}. \quad (1)$$

Ординалы обозначаются обычно греческими буквами α, β, θ, δ и т. д. со штрихами, индексами или без них. Порядковый тип пустого множества обозначается 0.

Порядковый тип множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел, вполне упорядоченного по величине, обозначается через ω_0 или через ω. Через ω_1 обозначается порядковый тип множества мощности $\aleph_1$, наделенного порождающим вполне упорядочением.

Произвольный ординал α «реализуется» любым вполне упорядоченным множеством $A, <$, принадлежащим α. Он символизирует то общее, что есть у всех вполне упорядоченных множеств, подобных $A, <$, т. е. свойства самого порядка $<$, безотносительно к тому, какие именно объекты в этом порядке расположены. Таким образом, ординал — это порядок, составленный из пустых ячеек, на которых могут стоять те или иные объекты — безразлично какие.

Сами ординалы связаны естественным отношением порядка — отвечающим понятию точного отображения. Дадим определение.

Пусть α и β — произвольные ординалы.

Выберем вполне упорядоченные множества $(A, <) \in \alpha$ и $(B, \ll) \in \beta$ и положим $\alpha < \beta$, если $A, <$ подобно собственному левому лучу множества $B, \ll$. Как обычно, равенство ординалов α и β означает, что они совпадают. Это равносильно тому, что множества $A, <$ и $B, \ll$ подобны.

Определенное так отношение $<$ на классе Ord всех ординалов является, как легко видеть, упорядочением. В силу теоремы 2.2.19 это упорядочение линейно. Оно называется *упорядочением ординалов по величине*, или *естественным упорядочением* на Ord. Очевидно, $0 \leqslant \alpha$ для каждого $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

3.6.1. Теорема. *Упорядочение ординалов по величине является порождающим вполне упорядочением класса* Ord.

Доказательство. Пусть M — произвольное непустое множество ординалов. Зафиксируем ординал $\alpha^* \in M$ и вполне упорядоченное множество $A^*, <$ такое, что $P(A^*, <) = \alpha^*$. Положим $M_0 = \{\alpha \in M : \alpha < \alpha^*\}$. Требует рассмотрения только случай, когда $M_0 \neq \varnothing$. Для каждого $\alpha \in M_0$ найдется, по определению упорядочения $<$, элемент $\varphi(\alpha) \in A^*$ такой, что левый луч $A^*|_{\varphi(\alpha)}$ имеет порядковый тип α. В непустом подмножестве

$\varphi(M_0)$ вполне упорядоченного множества $A^*, <$ есть наименьший элемент $\varphi(\alpha_0)$. Очевидно, тогда $\alpha_0 = \min M_0 = \min M$. Итак, $<$ — вполне упорядочение.

Осталось показать, что вполне упорядочение $<$ — порождающее. Это вытекает из следующих утверждений.

3.6.2. Предложение. *Пусть $A, <$ — произвольное ординарное вполне упорядоченное множество и α — его порядковый тип. Тогда* $\mathrm{Ord}|_\alpha, <$ *подобно* $A, <$ *и, следовательно, множество* $\mathrm{Ord}|_\alpha$ *ординарно и*

$$P(\mathrm{Ord}|_\alpha, <) = \alpha. \qquad (1)$$

Доказательство. Каждому $x \in A$ поставим в соответствие ординал $\varphi(x)$ — порядковый тип множества $A|_x, <$. Ясно, что $\varphi(x) < \alpha$, т. е. $\varphi(x) \in \mathrm{Ord}|_\alpha$. Если $x_1 < x_2$, то $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$. Кроме того, для каждого ординала $\beta < \alpha$ найдется $x \in A$ такое, что $\varphi(x) = \beta$ — это следует из определения отношения $<$ на Ord. Значит, отображение $\varphi: A \to \mathrm{Ord}|_\alpha$ — сохраняющая порядок биекция между $A, <$ и $\mathrm{Ord}|_\alpha, <$ и множество $A, <$ подобно $\mathrm{Ord}|_\alpha, <$.

Заключаем: множество $\mathrm{Ord}|_\alpha$ ординарно и

$$P(\mathrm{Ord}|_\alpha, <) = P(A, <) = \alpha.$$

3.6.3. Предложение. *Множество* Ord *экстраординарно и* $|\mathrm{Ord}|_\alpha| < |\mathrm{Ord}|$ *для всех* $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

Доказательство. Предположим, что множество Ord ординарно. Тогда определен ординал $P(\mathrm{Ord}, <)$ — порядковый тип вполне упорядоченного множества $\mathrm{Ord}, <$. Для $\alpha = P(\mathrm{Ord}, <)$ имеем в силу предложения 3.6.2: $P(\mathrm{Ord}|_\alpha, <) = \alpha$. Следовательно, $P(\mathrm{Ord}, <) = P(\mathrm{Ord}|_\alpha, <)$, т. е. вполне упорядоченное множество $\mathrm{Ord}, <$ подобно своему собственному левому лучу $\mathrm{Ord}|_\alpha, <$, в противоречии с теоремой 2.2.10.

3.6.4. Следствие. *Вполне упорядоченные множества* $\mathrm{Card}, <$ *и* $\mathrm{Ord}, <$ *подобны.*

Доказательство. В силу утверждений 3.6.2, 3.6.3 и 3.2.3, 3.2.4 и то, и другое множество является универсальной шкалой, а любые две универсальные шкалы подобны (см. предложение 3.2.6).

Так как подобие между вполне упорядоченными множествами единственно (если существует), имеет место каноническая нумерация кардиналов посредством ординалов:

$$\mathrm{Card} = \{\aleph_\alpha : \alpha \in \mathrm{Ord}\}, \qquad (2)$$

где $\aleph_{\alpha'} < \aleph_{\alpha''}$ при $\alpha' < \alpha''$.

Такое представление класса Card называется *шкалой алефов.*

На множестве Ord естественно определяется операция сложения. Пусть $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$. Выберем вполне упорядоченные множества $A, <$ и $B, \ll$ так, чтобы было: $P(A, <) = \alpha$, $P(B, \ll) = \beta$ и $A \cap B = \varnothing$ — последнего всегда можно достичь (см. § 3 гл. 3). На множестве $C = A \cup B$ определим упорядочение $\prec$ требования-

ми: сужение $\prec$ на A совпадает с $<$, сужение $\prec$ на B совпадает с $\ll$ и $a \prec b$ для всех $a \in A$ и всех $b \in B$.

Очевидно, множество C ординарно и $\prec$ — вполне упорядочение на C. Порядковый тип множества C, $\prec$ называется *суммой* $\alpha+\beta$ *ординалов* α и β, т. е.

$$\alpha+\beta=P(C, \prec). \tag{3}$$

Очевидно, два конечных вполне упорядоченных множества подобны в том и только том случае, если они состоят из одного числа элементов (это легко доказывается, например, по индукции). Поэтому порядковые типы конечных множеств — *конечные ординалы* — можно отождествить с натуральными числами. В частности, 0 — это порядковый тип пустого множества, а 1 — порядковый тип множества, состоящего из одного элемента.

Ординал $\alpha+1$, получаемый по формуле (3), — это наименьший ординал, больший, чем ординал α. Мы говорим при этом, что ординал $\alpha+1$ *непосредственно следует* за α, а ординал α *непосредственно предшествует* ординалу $\alpha+1$.

Ординалы вида $\alpha+1$ называются *изолированными* ординалами. Очевидно, имеет место

3.6.5. Предложение. *Ординал α изолирован в том и только том случае, если он является порядковым типом вполне упорядоченного множества, в котором есть наибольший элемент.*

Неизолированные ординалы называются *предельными*.

Сложение ординалов в отличие от сложения кардиналов некоммутативно: почти всегда $\alpha+\beta \neq \beta+\alpha$. Действительно, всегда $\alpha \neq \alpha+1$. С другой стороны,

$$1+\alpha=\alpha \tag{4}$$

для каждого бесконечного ординала α (*бесконечными ординалами* называются порядковые типы бесконечных вполне упорядоченных множеств).

Докажем (4). Заметим, что среди бесконечных ординалов по теореме 3.6.1 должен быть наименьший.

3.6.6. Предложение. *Порядковый тип $\omega=P(\mathbf{N}, <)$ множества* $\mathbf{N}$, *упорядоченного по величине, является наименьшим бесконечным ординалом.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Каково бы ни было бесконечное вполне упорядоченное по типу α множество A, $\prec$, множество $\mathbf{N}$, $<$ подобно некоторому левому лучу множества A, $\prec$. Действительно, A, $\prec$ не может быть подобно собственному левому лучу множества $\mathbf{N}$, $<$, так как любой такой луч конечен (см. теорему 2.2.19). Заключаем:

$$\omega=P(\mathbf{N}, >) \leqslant P(A, \prec)=\alpha.$$

Для ординалов (в отличие от кардиналов) определено не-

только сложение, но и вычитание — при условии, что вычитаемое не превосходит уменьшаемого.

3.6.7. Предложение. *Пусть* α *и* β — *произвольные ординалы, для которых* $\beta \leqslant \alpha$. *Тогда существует и единствен ординал* γ *такой, что*

$$\beta + \gamma = \alpha. \tag{5}$$

Этот ординал γ *обозначают через* $\alpha - \beta$ *и говорят, что он получен вычитанием* β *из* α.

Доказательство. Существуют по определению порядка ординалов вполне упорядоченное множество $A, <$ и левый луч B в $A, <$ такие, что $P(A, <) = \alpha$ и $P(B, <) = \beta$. Множество $C = A \setminus B$ также вполне упорядочено отношением $<$.

По определению сложения ординалов для $\gamma = P(C, <)$ имеем

$$\beta + \gamma = \alpha.$$

Единственность ординала γ следует из того, что всякое подобие вполне упорядоченного множества на себя тождественно (теорема 2.2.10).

Предложения 3.6.6 и 3.6.7 влекут

3.6.8. Следствие. *Для каждого бесконечного ординала* α *существует ординал* β *такой, что*

$$\alpha = \omega + \beta. \tag{6}$$

Множество $\mathbf{N}^+, <$ подобно множеству $\mathbf{N}, <$; отображение $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^+$, где $\varphi(n) = n + 1$, является подобием. Следовательно, $P(\mathbf{N}^+, <) = P(\mathbf{N}, <) = \omega$ и из определения сложения ординалов следует, что

$$1 + \omega = \omega. \tag{7}$$

Отметим теперь простое

3.6.9. Предложение. *Сложение ординалов ассоциативно*:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \tag{8}$$

для всех $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$.

Доказательство прямо следует из определения сложения ординалов.

Теперь формула (4) доказывается легко. Пусть α — произвольный бесконечный ординал. В соответствии с 6.6.8 возьмем ординал β такой, что $\alpha = \omega + \beta$. Имеем в силу формул (8) и (7):

$$1 + \alpha = 1 + (\omega + \beta) = (1 + \omega) + \beta = \omega + \beta = \alpha, \text{ т. е. } 1 + \alpha = \alpha.$$

Очевидным образом определяется и сумма $\sum_{\alpha \in A, <} \mu_\alpha$ семейства ординалов μ_α по любому вполне упорядоченному индексному множеству $A, <$. Ассоциативность здесь имеет место в полном объеме.

Нормой $\|\alpha\|$ ординала α назовем мощность множества A, вполне упорядоченного по типу α.

Пусть τ — произвольный бесконечный кардинал. Сколько

существует ординалов нормы τ? Этот вопрос тождествен такому: сколькими существенно различными (т. е. неподобными) способами можно вполне упорядочить множество A мощности τ?

3.6.10. Предложение. *Для произвольного кардинала* τ *множество* $\mathrm{Ord}_{<\tau}=\{\alpha\in\mathrm{Ord}:\|\alpha\|<\tau\}$ *ординарно и его мощность равна* τ.

Доказательство. Зафиксируем шкалу $X, <$ мощности τ. Для каждого ординала α такого, что $\|\alpha\|<\tau$, возьмем вполне упорядоченное множество $Y_\alpha, <_\alpha$ типа α. Тогда $|Y_\alpha|<|X|$ и по теореме 2.2.19 существует $x_\alpha\in X$ такое, что левый луч $X_\alpha=X|_{x_\alpha}, <$ подобен $Y_\alpha, <_\alpha$. Отображение $\mathrm{Ord}_{<\tau}\to X$, определенное правилом: $\alpha\to x_\alpha$ для всех $\alpha\in\mathrm{Ord}_{<\tau}$ является биекцией, так как вполне упорядочение $<$ — порождающее.

Следовательно, множество $\mathrm{Ord}_{<\tau}$ ординарно и $|\mathrm{Ord}_{<\tau}|=|X|=\tau$.

Предложение 3.6.10 относится и к конечным ординалам.

3.6.11. Предложение. *Для произвольного бесконечного кардинала* τ *множество* $\mathrm{Odr}_\tau=\{\alpha\in\mathrm{Ord}:\|\alpha\|=\tau\}$ *ординарно и его мощность равна* τ^+.

Доказательство. Очевидно,

$$\mathrm{Ord}_{<\tau^+}=\mathrm{Ord}_\tau\cup\mathrm{Ord}_{<\tau}.$$

Множество $\mathrm{Ord}_{<\tau^+}$ по доказанному — ординарно, следовательно, и его подмножество Ord_τ тоже ординарно. Имеем в силу предложения 3.6.10 и теоремы 1.5.4:

$$\tau^+=|\mathrm{Ord}_{<\tau^+}|=\max_1^2\{|\mathrm{Ord}_\tau|,$$

$$|\mathrm{Ord}_{<\tau}|\}=\max\{|\mathrm{Ord}_\tau|,\tau\},$$

откуда следует, что $|\mathrm{Ord}_\tau|=\tau^+$.

Порядковые типы счетных (бесконечных) множеств называются *счетными* (*бесконечными*) *ординалами*. Из предложения 3.6.10 вытекает

3.6.12. Следствие. *Мощность множества всех счетных ординалов равна* $\aleph_1$.

Кардинал τ принято отождествлять с наименьшим ординалом нормы τ.

§ 7. Лексикографическое упорядочение, упорядочение по последней разности и умножение ординалов

Пусть $(X_1, <_1)$ и $(X_2, <_2)$ — два упорядоченных множества. Для $(x_1', x_2'), (x_1'', x_2'')\in X_1\times X_2$ положим $(x_1', x_2')<(x_1'', x_2'')$ в том и только том случае, если $x_1'<_1 x_1''$ или $x_1'=x_1''$ и $x_2'<_2 x_2''$. Так определенное отношение $<$ на $X_1\times X_2$ является линейным упорядочением; оно называется *лексикографическим упорядочением* множества $X_1\times X_2$, а упорядоченное множество

$X_1 \times X_2, <$ называется *лексикографическим произведением* упорядоченных множеств $X_1, <_1$ и $X_2, <_2$.

В данном определении важен порядок сомножителей. Очевидным образом оно распространяется на случай любого конечного числа сомножителей, взятых в определенном (линейном) порядке.

Первое из следующих утверждений очевидно.

3.7.1. Предложение. *Лексикографическое произведение линейно упорядоченных множеств является линейно упорядоченным множеством.*

3.7.2. Предложение. *Лексикографическое произведение двух (конечного числа) вполне упорядоченных множеств является вполне упорядоченным множеством.*

Чуть ниже мы докажем утверждение, равносильное предложению 3.7.2.

При определении умножения ординалов оказывается удобным пользоваться не лексикографическим произведением, а «отраженной» операцией, определяемой следующим образом.

Пусть $(X_1, <_1)$ и $(X_2, <_2)$ — два упорядоченных множества. Для $(x_1', x_2'), (x_1'', x_2'') \in X_1 \times X_2$ положим $(x_1', x_2') \prec (x_1'', x_2'')$ в том и только том случае, если $x_2' <_2 x_2''$ или $x_2' = x_2''$ и $x_1' <_1 x_1''$. Построенное так на $X_1 \times X_2$ отношение $\prec$ является упорядочением; оно называется *упорядочением по последней разности.* Упорядоченное множество $X_1 \times X_2, \prec$ называется *произведением Хаусдорфа* упорядоченных множеств $X_1, <_1$ и $X_2, <_2$. Очевидно, произведение Хаусдорфа зависит от порядка сомножителей, и правило $(x_1, x_2) \to (x_2, x_1)$ задает подобное отображение произведения Хаусдорфа $X_1 \times X_2, \prec$ на лексикографическое произведение $X_2 \times X_1, <$. В частности, утверждение 3.7.2 равносильно такому.

3.7.3. Предложение. *Произведение Хаусдорфа $X_1 \times X_2, \prec$ двух любых вполне упорядоченных множеств $X_1, <_1$ и $X_2, <_2$ является вполне упорядоченным множеством.*

Доказательство. Пусть $C \subset X_1 \times X_2$ и $C \neq \varnothing$. Через b обозначим наименьший элемент проекции множества C в X_2. Положим $C_1 = \{x \in X_1 : (x, b) \in C\}$ и $a = \min C_1$. Очевидно, (a, b) — наименьший элемент множества C.

Пусть теперь $A, \prec$ — произвольное непустое вполне упорядоченное множество и для каждого $\alpha \in A$ задано вполне упорядоченное множество $X_\alpha, <_\alpha$. Через x_α^* обозначим наименьший элемент множества $X_\alpha, <_\alpha$, и пусть

$$\sigma\Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\} = \sigma \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

— множество всех точек $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ произведения $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, отличающихся от точки $x^* = \{x_\alpha^*\}_{\alpha \in A}$ лишь на конечном множестве координат. Таким образом,

$$\sigma\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \Big\{x\in\prod_{\alpha\in A} X_\alpha : |\{\alpha\in A : x_\alpha \neq x^*_\alpha\}| < \aleph_0\Big\}. \qquad (1)$$

Множество $X=\sigma\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ называется *σ-произведением множеств* X_α (по $\alpha\in A$) *с центром в точке* $x^*=\{x^*_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Для $x\in\sigma\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ условимся обозначать через $M(x)$ множество всех $\alpha\in A$ таких, что $x_\alpha\neq x^*_\alpha$. По определению σ-произведения это множество конечно.

Если $x'=\{x'_\alpha\}\in X$ и $x''=\{x''_\alpha\}\in X$, то $L(x', x'')$ будет обозначать множество всех $\alpha\in A$, для которых $x_\alpha'\neq x_\alpha''$. Очевидно, $L(x', x'')\subset M(x')\cup M(x'')$ и, следовательно, множество $L(x', x'')$ конечно.

Если $x'\neq x''$, то $L(x', x'')\neq\varnothing$ и в $L(x', x'')$ есть наибольший элемент $\max L(x', x'')$. Пусть $\alpha^*=\max L(x', x'')$. Имеем: $x'_{\alpha^*}\neq x''_{\alpha^*}$. Если $x'_{\alpha^*}<_{\alpha^*} x''_{\alpha^*}$, то положим $x'<x''$. Полагаем также $x\not< x$ для всех $x\in X$. Этим определено отношение $<$ на множестве X. Очевидно, если $x'\neq x''$, то либо $x'<x''$, либо $x''<x'$. Проверим, что отношение $<$ транзитивно, — этим будет установлено, что $<$ — линейное упорядочение на X.

Пусть $x'<x''$ и $x''<x'''$. Положим $\alpha_1=\max L(x', x'')$ и $\alpha_2=\max L(x'', x''')$ и рассмотрим два случая.

Случай I: $\alpha_1\leqslant\alpha_2$. Имеем: $x'_{\alpha_2}\leqslant_{\alpha_2} x''_{\alpha_2}$ и $x''_{\alpha_2}<_{\alpha_2} x'''_{\alpha_2}$. Следовательно, $x'_{\alpha_2}<_{\alpha_2} x'''_{\alpha_2}$. Кроме того, $x'_\alpha=x''_\alpha=x'''_\alpha$ при $\alpha_2<\alpha$. Значит, $\alpha_2=\max L(x', x''')$ и $x'<x'''$.

Случай II: $\alpha_2<\alpha_1$. Имеем: $x''_{\alpha_1}=x'''_{\alpha_1}$ и $x'_{\alpha_1}<_{\alpha_1} x''_{\alpha_1}$. Значит, $x'_{\alpha_1}<_{\alpha_1} x'''_{\alpha_1}$. Кроме того, $x'_\alpha=x''_\alpha=x'''_\alpha$ при $\alpha_1<\alpha$. Следовательно, $\alpha_1=\max L(x', x''')$ и $x'<x'''$.

Так определенное упорядочение $<$ на X называется *упорядочением по последней разности*, а множество $X=\sigma\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ вместе с упорядочением $<$ называется *произведением Хаусдорфа* вполне упорядоченных множеств $X_\alpha, <_\alpha$ (по $A, \prec$).

3.7.4. Теорема. *Произведение Хаусдорфа* $X=\sigma\prod_{\alpha\in A} X_\alpha, <$ *вполне упорядоченных множеств* $X_\alpha, <_\alpha$ *по вполне упорядоченному множеству* $A, \prec$ *является вполне упорядоченным множеством.*

Доказательство. Предположим противное. Возьмем наименьший левый луч A_1 в $A, \prec$, для которого произведение Хаусдорфа $\sigma\prod_{\alpha\in A} X_\alpha, <$ не вполне упорядочено. Не ограничивая общности, можно считать, что $A_1=A$. Тогда для каждого

собственного левого луча A' в A, $<$ произведение $\sigma\prod_{\alpha\in A'} X_\alpha$, $<$ вполне упорядочено.

Возьмем непустое множество $P\subset X$, в котором нет наименьшего элемента, и выберем $x^n\in P$ так, чтобы было $x^{n+1}<x^n$ при $n\in\mathbf{N}^+$. Множество $M(x^1)=\{\alpha\in A: x^1_\alpha\neq x^*_\alpha\}$ конечно; положим $\tilde{\alpha}=\max M(x^1)$. Из определения порядка $<$ следует, что $x^n_\alpha=x^*_\alpha$ при $n\in\mathbf{N}^+$ и $\tilde{\alpha}\leqslant\alpha$. Множество $A\mid\tilde{\alpha}=\{\alpha\in A:\alpha<\tilde{\alpha}\}$— собственный левый луч в $A,<$. Следовательно, произведение Хаусдорфа $\tilde{X}=\sigma\prod_{\alpha<\tilde{\alpha}} X_\alpha, <$ является вполне упорядоченным множеством. По предложению 7.7.3 вполне упорядоченным множеством является тогда и произведение Хаусдорфа $\tilde{X}\times X_{\tilde{\alpha}}, \ll$ $<=\sigma\prod_{\alpha\leqslant\tilde{\alpha}} X_\alpha, <$. Но естественное проектирование $\pi:\sigma\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\to\sigma\prod_{\alpha\leqslant\tilde{\alpha}} X_\alpha$ на множестве $\{x^n: n\in\mathbf{N}^+\}$ взаимооднозначно и сохраняет порядок: $\pi(x^{n+1})<\pi(x^n)$ при $n\in\mathbf{N}^+$. Получили противоречие с тем, что $\sigma\prod_{\alpha\leqslant\tilde{\alpha}} X_\alpha$ — вполне упорядоченное множество.

Пусть $A,<$ — вполне упорядоченное множество и для каждого $\alpha\in A$ μ_α — некоторый ординал. Выберем вполне упорядоченное множество $X_\alpha, <_\alpha$, порядковый тип которого равен μ_α, и через $\mu=\prod_{\alpha\in A}\mu_\alpha$ обозначим порядковый тип произведения Хаусдорфа $\sigma\prod_{\alpha\in A} X_\alpha, <$ по $A,<$. Ординал μ, так определенный (см. теорему 3.7.4), называется *произведением вполне упорядоченного семейства* $\{\mu_\alpha:\alpha\in A\}$ *ординалов.*

Если для всех $\alpha\in A$ $\mu_\alpha=\xi$ — один и тот же ординал и порядковый тип множества $A,<$ равен η, то ординал $\prod_{\alpha\in A}\mu_\alpha$ обозначают через ξ^η и говорят, что он получен *возведением ординала* ξ *в степень* η.

Очевидно, операция произведения ординалов ассоциативна. Как легко проверить, она некоммутативна. Для любых ординалов μ, α и β справедливы

$$\mu^{\alpha+\beta}=\mu^\alpha\cdot\mu^\beta, \tag{2}$$

$$(\mu^\alpha)^\beta=\mu^{\alpha\beta}. \tag{3}$$

Вывести эти формулы из определения операции умножения и операции возведения в степень предоставляется читателю.

Глава 4

КОМБИНАТОРНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

В этой главе рассматриваются комбинаторные вопросы теории множеств. Они связаны с разбиениями произведений множеств на семейства подмножеств и возникающими здесь количественными оценками в терминах кардинальных чисел.

Сюда примыкает изучение центрированных систем множеств (§ 1). Мы доказываем, что на каждом бесконечном множестве существует максимальная центрированная система множеств (ультрафильтр) с пустым пересечением, и устанавливаем основные свойства таких систем. В § 2 рассматриваются меры Улама, существование которых связано с наличием ультрафильтров, обладающих специальным свойством. На этой основе вводится понятие неизмеримого по Уламу кардинала. Устанавливается ряд основных свойств таких кардиналов. Надо отметить, что центрированные системы играют очень важную роль в общей топологии и ее приложениях. В частности, они «работают» в теории компактных расширений, при исследовании компактности, при построении пополнений.

§ 3 и § 4 посвящены собственно комбинаторике кардиналов. Здесь излагаются начала теории, развитой Эрдешом и Радо и оказавшей большое влияние на теорию кардинальных инвариантов топологических пространств. В работах Юхаса и Хайиала дано много замечательных приложений этой теории [13, 6, 7, 16].

§ 1. Центрированные системы множеств. Фильтры и ультрафильтры

Семейство ξ подмножеств миожества X называется *центрированным,* если пересечение любого конечного числа его элементов непусто.

Очевидно, каждая цепь из непустых множеств является центрированным семейством.

Если пересечение $\bigcap\xi$ семейства ξ множеств пусто, то семейство ξ называется *свободным.*

4.1.1. Примеры. а) Зафиксируем точку $x\in X$. Семейство $\xi_x=\{A\subset X: x\in A\}$ — центрированное, но несвободиое.

б) Для $a\in\mathbf{R}$ положим $\mathbf{R}_a=\{x\in\mathbf{R}: a<x\}$. Семейство $\eta=\{\mathbf{R}_a: a\in\mathbf{R}\}$ — центрированное и свободное.

Очевидно, каждое центрированное семейство подмножеств конечного множества имеет непустое пересечение.

С понятием центрированной системы множеств тесно связаны понятия предфильтра, фильтра и ультрафильтра.

Система ξ множеств называется *предфильтром*, если все ее элементы непусты и для любых $A, B \in \xi$ найдется $C \in \xi$ такое, что $C \subset A \cap B$.

Очевидно, каждый предфильтр является центрированной системой множеств.

Пусть $\mathscr{E}$ — некоторое семейство множеств. *Фильтром* в $\mathscr{E}$ называется любое подсемейство ξ семейства $\mathscr{E}$, состоящее из непустых множеств и обладающее свойствами: 1) если $A \in \xi$ и $B \in \mathscr{E}$, $A \subset B$, то $B \in \xi$, и 2) если $A, B \in \xi$, то $A \cap B \in \xi$.

Если $\mathscr{E}$ — семейство всех подмножеств множества X, то фильтр в $\mathscr{E}$ называется *фильтром на* X, или просто фильтром (ясно, что X тогда — наибольший элемент семейства $\mathscr{E}$). Очевидно, если ξ — фильтр и $A_1, \ldots, A_k \in \xi$, то $A_1 \cap \ldots \cap A_k \in \xi$.

Каждый фильтр является предфильтром и тем более центрированной системой множеств.

Семейство η непустых множеств называется *π-базой семейства множеств* ξ, если для каждого $U \in \xi$ найдется $V \in \eta$ такое, что $V \subset U$. В этом смысле можно говорить о π-базе центрированной системы множеств предфильтра, фильтра и т. д. Семейства со счетной π-базой называются счетно порожденными.

Далее мы пишем «центрированная система на X» вместо «центрированная система подмножеств множества X».

Следующее понятие является основным.

4.1.2. Определение. Центрированная система ξ на X называется *максимальной (относительно X)*, если не существует центрированной системы η на X, для которой $\xi \subset \eta$ и $\xi \neq \eta$.

Система $\xi_x = \{A \subset X : x \in A\}$ для произвольного $x \in X$ является максимальной центрированной системой на X. Действительно, если $\xi_x \subset \eta$, то $\{x\} \in \xi_x \subset \eta$, и если η центрировано, то для любого $P \in \eta$ имеем: $P \cap \{x\} \neq \varnothing$, т. е. $x \in P$, откуда следует, что $P \in \xi_x$.

Максимальные центрированные системы вида ξ_x называются *тривиальными*.

Вопрос, существуют ли свободные максимальные центрированные системы, оказывается не только совсем нетривиальным, но и весьма важным. Прежде чем формулировать основной результат, выделим полезный вариант понятия максимальной центрированной системы.

Пусть $\mathscr{E}$ — произвольное семейство множеств. Семейство ξ называется *максимальной в $\mathscr{E}$ центрированной системой множеств*, если $\xi \subset \mathscr{E}$, семейство ξ центрировано и из $\xi \subset \eta \subset \mathscr{E}$ следует, что либо $\eta = \xi$, либо семейство η не центрировано. Если $\mathscr{E} = \operatorname{Exp} X$, то максимальная в $\mathscr{E}$ центрированная система — это максимальная центрированная система на X (т. е. относительно X).

4.1.3. Теорема. *Пусть $\mathscr{E}$ — произвольное семейство множеств и $\xi \subset \mathscr{E}$, ξ — центрированное семейство множеств. Най-*

дется тогда максимальная в $\mathscr{E}$ центрированная система $\tilde{\xi}$ множеств такая, что $\xi\subset\tilde{\xi}$.

Доказательство. Упорядочим множество $\mathscr{P}=\{\eta\subset\mathscr{E}:\eta$ — центрированная система множеств и $\xi\subset\eta\}$ естественным образом. А именно если $\eta_1, \eta_2\in\mathscr{P}$, то $\eta_1<\eta_2$ в том и только том случае, если $\eta_1\subset\eta_2$ и $\eta_1\neq\eta_2$. Возьмем сквозную цепь C в $\mathscr{P}, <$ и положим $\eta^*=\bigcup C$. Очевидно, $\eta^*\subset\mathscr{E}$.

Покажем, что система η^* центрирована.

Пусть $P_1,\ldots,P_k\in\eta$. Найдутся $\eta_1,\ldots,\eta_k\in C$ такие, что $P_i\in\eta_i$ при $i=1,\ldots,k$. Так как C — цепь, одна из систем $\eta_1,\ldots,\eta_k$ содержит все остальные. Можно считать, что $\eta_k=\eta_1\cup\ldots\cup\eta_k$. Тогда $P_1,\ldots,P_k\in\eta_k$ и, так как система η_k центрирована, пересечение $P_1\cap\ldots\cap P_k$ непусто. Покажем, что η^* — максимальная система в $\mathscr{E}$. Пусть $\tilde{\eta}\subset\mathscr{E}$, $\tilde{\eta}$ — центрированная система множеств и $\eta^*\subset\tilde{\eta}^*$, $\eta^*\neq\tilde{\eta}$. Тогда $\xi\subset\eta^*\subset\tilde{\eta}$ и, значит, $\tilde{\eta}\in\mathscr{P}$. Очевидно, $\eta\leqslant\eta^*<\tilde{\eta}$ для всех $\eta\in C$, в противоречии с тем, что цепь C — сквозная в $\mathscr{P}, <$.

4.1.4. Следствие. *На каждом бесконечном множестве X существует максимальная центрированная система с пустым пересечением (т. е. свободная).*

Доказательство. Положим

$$\xi_{\text{кон}}=\{X\setminus K: K \text{ — конечно и } K\subset X\}$$

и дополним центрированную систему $\xi_{\text{кон}}$ до максимальной центрированной системы $\tilde{\xi}$ по теореме 4.1.3. Имеем: $\bigcap\xi_{\text{кон}}=\varnothing$ и тем более $\bigcap\tilde{\xi}=\varnothing$.

Максимальные центрированные системы в $\mathscr{E}$ (на X) называются *ультрафильтрами* в $\mathscr{E}$ (*на X*).

Укажем основные свойства максимальных центрированных систем на произвольном множестве X.

4.1.5. Предложение. *Каждая максимальная центрированная система ξ на X является фильтром на X.*

Доказательство. Пусть $A, B\in\xi$. Система $\tilde{\xi}=\xi\cup\{A\cup B\}$, очевидно, центрирована, и $\xi\subset\tilde{\xi}\subset\operatorname{Exp}X$. Значит, $\tilde{\xi}=\xi$ и $A\cap B\in\xi$. Пусть $A\in\xi$ и $A\subset B\subset X$. Система $\xi\cup\{B\}$ центрирована и $\xi\subset\xi\cup\{B\}\subset\operatorname{Exp}X$. Следовательно, $\xi=\xi\cup\{B\}$, т. е. $B\in\xi$.

4.1.6. Следствие. *Если ξ — максимальная центрированная система на X, то $P_1\cap\ldots\cap P_k\in\xi$ для любого конечного числа элементов $P_1,\ldots,P_k$ системы ξ.*

4.1.7. Предложение. *Пусть ξ — максимальная центрированная система множеств на X и $A\subset X$, $A\cap P\neq\varnothing$ для каждого $P\in\xi$. Тогда $A\in\xi$.*

Доказательство. Система $\xi\cup\{A\}$ центрирована. Действительно, каковы бы ни были $P_1,\ldots,P_k, A\in\xi\cup\{A\}$ (где $P_1,\ldots,P_k\in\xi$), имеем: $P_1\cap\ldots\cap P_k\cap A=P\cap A$, где $P=P_1\cap\ldots\cap P_k\in\xi$ в силу следствия 4.1.6. Но по условию $P\cap A\neq\varnothing$. Значит, $P_1\cap\ldots\cap P_k\cap A\neq\varnothing$ — система $\xi\cup\{A\}$ центрирована. Так как $\xi\subset\xi\cup\{A\}\subset\operatorname{Exp}X$, заключаем, что $\xi=\xi\cup\{A\}$, т. е. $A\in\xi$.

Удивительным является следующее свойство ультрафильтров.

4.1.8. Предложение. *Пусть* ξ — *максимальная центрированная система на* X. *Для любого* $A\subset X$ *либо* $A\in\xi$, *либо* $X\setminus A\in\xi$.

Доказательство. Пусть нашлось $A\subset X$ такое, что $A\notin\xi$ и $X\setminus A\notin\xi$. По предложению 4.1.7 существуют P_1, $P_2\in\xi$, для которых $P_1\cap A=\varnothing$ и $P_2\cap(X\setminus A)=\varnothing$. В силу предложения 4.1.5 $P_1\cap P_2\in\xi$. С другой стороны, имеем: $X\supset P_1\cap P_2=(P_1\cap P_2)\cap A)\cup\cup(P_1\cap P_2\cap(X\setminus A))\subset(P_1\cap A)\cup(P_2\cap(X\setminus A))=\varnothing$, откуда следует, что $P_1\cap P_2=\varnothing$, в противоречии с центрированностью системы ξ.

Предложение 4.1.8 показывает, что каждая максимальная центрированная система на бесконечном множестве является очень большим семейством множеств.

4.1.9. Теорема. *Пусть* X — *бесконечное множество мощности* τ *и* ξ — *произвольная максимальная центрированная система множеств на* X. *Тогда* $|\xi|=2^\tau$.

Доказательство. Имеем: $|\operatorname{Exp}X|=2^\tau$. Каждому $A\in\xi$ поставим в соответствие множество $\varphi(A)=X\setminus A$. Этим определено отображение $\varphi:\xi\to\operatorname{Exp}X$. Очевидно, отображение φ инъективно, поэтому $|\xi|=|\varphi(\xi)|$. Из предложения 4.1.8 следует, что $\operatorname{Exp}X=\xi\cup\varphi(\xi)$. В силу следствия 1.5.4 тогда $|\operatorname{Exp}X|=|\xi|$, т. е. $|\xi|=2^\tau$.

4.1.10. Следствие. *На бесконечном множестве не существует счетных максимальных центрированных систем множеств.*

Свойства, указанные в утверждениях 4.1.5 и 4.1.6, не характеризуют максимальных центрированных систем множеств — нетрудно привести пример фильтра, не являющегося максимальной центрированной системой множеств. Напротив, предложения 4.1.7 и 4.1.8, как мы сейчас покажем, обратимы.

4.1.11. Предложение. *Пусть* ξ — *центрированная система множеств на* X *такая, что всякое множество* $A\subset X$, *пересечение которого с каждым множеством из* ξ *непусто, принадлежит* ξ. *Тогда* ξ — *максимальная центрированная система на* X.

Доказательство. Пусть $\xi\subset\eta\subset\operatorname{Exp}X$ и система η центрирована. Для каждого $A\in\eta$ и каждого $P\in\xi$ тогда имеем: $A\cap P\neq\varnothing$. Заключаем: $A\in\xi$ и $\xi=\eta$.

4.1.12. Предложение. *Пусть* ξ — *центрированная система множеств на* X *такая, что для каждого* $A\subset X$ *либо* $A\in\xi$, *либо* $X\setminus A\in\xi$. *Тогда* ξ — *максимальная центрированная система на* X.

Доказательство. Пусть $\xi\subset\eta\subset\operatorname{Exp}X$. Возьмем любое $A\in\eta$. По условию либо $A\in\xi$, либо $X\setminus A\in\xi$. Но если $X\setminus A\in\xi$, то $X\setminus A\in\eta$, $A\in\eta$ и, так как система центрирована, $(X\setminus A)\cap\cap A\neq\varnothing$ — получаем противоречие. Значит, $A\in\xi$, что и требовалось.

В дальнейшем понадобится

4.1.13. Предложение. *Если* ξ — *максимальная центрирo-*

ванная система множеств на X и $x\in\bigcap\xi$, то $\{x\}\in\xi$ и $\xi=\xi_x=\{A\subset X: x\in A\}$.

Доказательство. Если $x\in\bigcap\xi$, то $\{x\}\bigcap A\neq\varnothing$ для всех $A\in\xi$ и, следовательно, $\{x\}\in\xi$ по предложению 4.1.7. Из предложения 4.1.8 теперь вытекает, что $\xi=\{A\subset X: x\in A\}$.

4.1.14. Предложение. *Если ξ — ультрафильтр на X и $A\in\xi$, то $\xi_A=\{B\in\xi: B\subset A\}$ — ультрафильтр на A.*

Доказательство очевидно.

Приведем несколько основных фактов, относящихся к поведению центрированных систем множеств при отображениях.

4.1.15. Предложение. *Пусть $f: X\to Y$ — отображение, ξ — центрированная система на X и η — центрированная система на Y. Тогда и системы $f\xi=\{f(A): A\in\xi\}$ и $f^{-1}(\eta)=\{f^{-1}(B): B\in\eta\}$ центрированы.*

Доказательство очевидно.

4.1.16. Предложение. *Пусть $f: X\to Y$ — отображение, $f(X)=Y$ и ξ — ультрафильтр на X. Тогда:*

а) $f(\xi)=\{f(A): A\in\xi\}$ — ультрафильтр на Y и

б) $\eta=\{B\subset Y: f^{-1}(B)\in\xi\}$ — ультрафильтр на Y (совпадающий с $f(\xi)$).

Доказательство. Из $f(X)=Y$ следует, что $\eta\subset f(\xi)$. Система $f(\xi)$ центрирована в силу 4.1.15.

Остается доказать б). Возьмем любое $C\subset Y$. Имеем: $f^{-1}(C)\cup f^{-1}(Y\setminus C)=X$. Так как ξ — ультрафильтр на X, либо $f^{-1}(C)\in\xi$, либо $f^{-1}(Y\setminus C)\in\xi$. Значит, либо $C\in\eta$, либо $Y\setminus C\in\eta$, чем в силу предложения 4.1.12 (и ввиду центрированности η) доказано, что η — ультрафильтр на Y.

§ 2. Неизмеримые по Уламу кардиналы и δ-ультрафильтры

Все определения и результаты в этом параграфе относятся к ординарным множествам и семействам множеств.

Семейство множеств ξ назовем *τ-центрированным*, где τ — некоторый кардинал, если для каждого подсемейства η семейства ξ такого, что $|\eta|<\tau$, пересечение $\bigcap\eta$ непусто.

Ясно, что центрированные системы множеств — это в точности $\aleph_0$-центрированные системы. Чем больше кардинал τ, тем более сильным становится требование τ-центрированности. С другой стороны, если $\bigcap\xi\neq\varnothing$, то система τ-центрирована при любом τ. Следующий вопрос возникает естественно:

Пусть ξ — $\aleph_1$-центрированная система множеств (т. е. пересечение любого счетного подсемейства семейства ξ непусто). Верно ли тогда, что $\bigcap\xi\neq\varnothing$?

Покажем, что ответ отрицателен.

4.2.1. Пример. На множестве W мощности $\aleph_1$ зафиксируем порождающее вполне упорядочение $<$. Положим $P_\alpha=\{\beta\in W: \alpha<\beta\}$ при $\alpha\in W$. Система $\xi=\{P_\alpha: \alpha\in W\}$, очевидно, $\aleph_1$-центрирована, но $\bigcap\xi=\varnothing$.

Существует ли максимальная центрированная система, которая $\aleph_1$-центрирована, но имеет пустое пересечение? Если взять $\aleph_1$-центрированную систему с пустым пересечением и дополнить ее до максимальной центрированной системы, то последняя может оказаться уже не $\aleph_1$-центрированной. Как мы далее увидим, не всякая $\aleph_1$-центрированная система содержится в максимальной $\aleph_1$-центрированной системе.

4.2.2. Определение. Кардинал τ называется *неизмеримым (по Уламу)*, если на множестве X мощности τ всякая максимальная $\aleph_1$-центрированная система множеств имеет непустое пересечение.

В этом определении имеется в виду максимальность по отношению к свойству центрированности.

Очевидно, каждый конечный кардинал неизмерим. Если кардинал не является неизмеримым, то он называется *измеримым (по Улану)*.

Далее максимальные центрированные системы, которые $\aleph_1$-центрированы и имеют пустое пересечение, для краткости именуются *δ-ультрафильтрами.*

4.2.3. Предложение. *Если* ξ — *δ-ультрафильтр на* X *и* $A_i \in \xi$ *при* $i \in \mathbf{N}$, *то* $\bigcap\limits_{i\in\mathbf{N}} A_i \in \xi$.

Доказательство. Очевидно, что $B = \bigcap\limits_{i\in\mathbf{N}} A_i$ и произвольного $A \in \xi$ имеем: $B \cap A \neq \varnothing$. В силу предложения 4.1.7 тогда $B \in \xi$.

Название «измеримый кардинал» связано со следующим. Зафиксируем множество X.

Предположим, что дана функция $\mu : \operatorname{Exp} X \to \{0, 1\}$, т. е. каждому подмножеству A множества X поставлено в соответствие число $\mu(A)$, равное 0 или 1 и называемое *мерой множества* A, таким образом, что выполняются условия:

а) $\mu(\{x\}) = 0$ для каждого $x \in X$, т. е. мера каждого одноточечного множества равна нулю;

б) если γ — счетное семейство подмножеств множества X и $\mu(A) = 0$ для всех $A \in \gamma$, то $\mu(\bigcup\gamma) = 0$;

в) если $\mu(A) = 1$, то $\mu(X \setminus A) = 0$;

г) $\mu(X) = 1$.

Тогда μ называется *мерой Улама на* X.

Пусть μ — мера Улама на X. Тогда семейство $\xi_\mu = \{A \subset X : \mu(A) = 1\}$ является максимальной центрированной системой множеств на X, причем $\aleph_1$-центрированной. Действительно, из условия б) и формул де Моргана следует $\aleph_1$-центрированность ξ_μ.

Из б)—г) следует, что каково бы ни было множество $A \subset X$, либо $A \in \xi_\mu$, либо $X \setminus A \in \xi_\mu$. Заключаем (см. предложение 4.1.12), что ξ — максимальная центрированная система. В силу а) $\{x\} \notin \xi_\mu$ для всех $x \in X$. Значит, $\bigcap \xi_\mu = \varnothing$. Итак, ξ_μ — δ-ультрафильтр на X.

Обратно, пусть ξ — произвольный δ-ультрафильтр на X. По-

ложим $\mu(A)=1$ для $A\subset X$ в том и только том случае, если $A\in\xi$. Не составляет труда проверить, пользуясь определением δ-ультрафильтра, что μ — мера Улама на X и $\xi_\mu=\xi$.

Из проведенного рассуждения вытекает

4.2.4. Предложение. *На множестве X существует мера Улама в том и только том случае, если на X существует δ-ультрафильтр.*

4.2.5. Следствие. *Кардинал τ измерим по Уламу в том и только том случае, если на множестве X мощности τ существует мера Улама.*

Обозначим через $\mathrm{Card}(U)$ класс всех неизмеримых по Уламу кардиналов. Наша ближайшая цель — выяснить широту этого класса.

4.2.6. Предложение. *Если τ — неизмеримый кардинал и $\tau_1\in\mathrm{Card}$, $\tau_1<\tau$, то и τ_1 — неизмеримый кардинал. Иными словами, класс* $\mathrm{Card}(U)$ *составляет левый луч класса* Card.

Доказательство. Пусть X — множество мощности τ и $Y\subset X$, $|Y|=\tau_1$. Покажем, что если кардинал τ_1 измерим, то и кардинал τ измерим. Пусть ξ — δ-ультрафильтр на Y. Положим $\eta=\{A\subset X: A\cap Y\in\xi\}$. Ясно, что семейство η центрировано. Если $A\cup B=X$, то $(A\cap Y)\cup(B\cap Y)=Y$, и так как ξ — ультрафильтр на Y, либо $A\cap Y\in\xi$, либо $B\cap Y\in\xi$ (см. предложение 4.1.8). Но тогда либо $A\in\eta$, либо $B\in\eta$.

На основании предложения 4.1.12 заключаем, что η — ультрафильтр на X.

Пусть $A_i\in\eta$ при $i\in\mathbf{N}$. Тогда

$$\left(\bigcap_{i\in\mathbf{N}} A_i\right)\cap Y=\bigcap\{A_i\cap Y: i\in\mathbf{N}\}\in\xi$$

в силу предложения 4.2.3. Следовательно, $\bigcap\limits_{i\in\mathbf{N}} A_i\in\eta$ и, так как семейство η центрировано, $\bigcap\limits_{i\in N} A_i\neq\varnothing$. Значит, η — $\aleph_1$-центрированный ультрафильтр. Наконец, если $x\in\bigcap\eta$, то $\{x\}\in\eta$, так как η — ультрафильтр (см. предложение 4.1.13), и тогда $\{x\}\cap\bigcap Y\in\xi$, откуда следует, что $x\in Y$ и $x\in\bigcap\xi$, — противоречие с тем, что $\bigcap\xi=\varnothing$. Следовательно, $\bigcap\eta=\varnothing$ и η — δ-ультрафильтр на X.

4.2.7. Предложение. *Пусть ξ — δ-ультрафильтр на множестве X и $\gamma\subset\xi$, $\bigcap\gamma=\varnothing$. Тогда кардинал $|\gamma|$ измерим.*

Для доказательства нам понадобится

4.2.8. Лемма. *Пусть ξ — ультрафильтр на X, τ — бесконечный кардинал, и если $\gamma\subset\xi$, $|\gamma|\leqslant\tau$, то $\bigcap\gamma\neq\varnothing$. Тогда из $\gamma\subset\xi$ и $|\gamma|\leqslant\tau$ следует, что $\bigcap\gamma\in\xi$.*

Доказательство леммы. Положим $B=X\setminus\bigcap\gamma$. Имеем: $B\cap(\bigcap\gamma)=\varnothing$ и $|\gamma\cup\{B\}|\leqslant\tau$, $\gamma\subset\xi$, откуда следует, что $B\notin\xi$. Так как ξ — ультрафильтр на X, заключаем, что $X\setminus B\in\xi$, т. е. $\bigcap\gamma\in\xi$.

Докажем теперь 4.2.7. Предположим, что кардинал $|\gamma|$ неизмерим. Возьмем наименьший кардинал τ^*, для которого су-

ществует $\eta\subset\xi$ такое, что $|\eta|=\tau^*$ и $\bigcap\eta=\varnothing$. Тогда $\aleph_1\leqslant\tau^*=|\gamma|$ и по предложению 4.2.6 кардинал τ^* неизмерим. Зафиксируем порождающее вполне упорядочение $<$ на η.

Из леммы 4.2.8 следует, что кардинал τ^* регулярен. Действительно, если $\eta=\bigcup\limits_{\alpha\in A}\eta_\alpha$, где $|A|<\tau^*$ и $|\eta_\alpha|<\tau^*$ при $\alpha\in A$, то $\bigcap\eta_\alpha\in\xi$ по лемме 4.2.8. Тогда и $\bigcap\eta=\bigcap\limits_{\alpha\in A}(\bigcap\eta_\alpha)\in\xi$ снова в силу леммы 4.2.8.

Через Z обозначим первый элемент семейства η.

Для $z\in Z$ обозначим через $P(z)$ первый элемент вполне упорядоченного множества η, для которого $z\notin P$. Так как $\bigcap\eta=\varnothing$, элемент $P(z)$ определен корректно.

Введем на Z отношение эквивалентности $\sim$. А именно, положим $z_1\sim z_2$ в том и только том случае, если $P(z_1)=P(z_2)$.

Рассмотрим каноническое отображение $\pi\colon Z\to M$ множества Z на множество M всех классов эквивалентности $\sim$. Для каждого $P\in\eta$ положим

$$\tilde{P}=\bigcap\{P'\in\eta : P'\leqslant P\}.$$

В силу леммы 4.2.8 $\tilde{P}\in\xi$, так как

$$|\{P'\in\eta : P'\leqslant P\}|<|\eta|=\tau^*.$$

Пусть $z\in\tilde{P}$ и $z'\sim z$. Тогда $P<P(z)=P(z')$ и, значит, $z'\in\tilde{P}$. Следовательно,

$$\pi^{-1}\pi(\tilde{P})=\tilde{P}\in\xi \qquad (1)$$

для каждого $P\in\eta$.

Ясно, что $|M|\leqslant\eta$ и, значит, $|M|$ — неизмеримый кардинал (см. предложение 4.2.6). Определим семейство μ подмножеств множества M правилом:

$$\mu=\{B\subset M : \pi^{-1}(B)\in\xi\}.$$

В силу предложения 4.1.16 б) и предложения 4.1.14 μ — ультрафильтр на M. Так как ультрафильтр ξ $\aleph_1$-центрирован и прообраз пересечения равен пересечению прообразов, ультрафильтр μ также $\aleph_1$-центрирован.

В силу формулы (1) $\pi(\tilde{P})\in\mu$ для всех $P\in\eta$. Имеем $\pi^{-1}(\bigcap\{\pi(\tilde{P}) : P\in\eta\})=\bigcap\{\pi^{-1}\pi(\tilde{P}) : P\in\eta\}\subset\bigcap\{P : P\in\eta\}=\bigcap\eta=\varnothing$. Следовательно, $\bigcap\{\pi(\tilde{P}) : P\in\eta\}=\varnothing$ и тем более $\bigcap\mu=\varnothing$. Мы построили δ-ультрафильтр μ на множестве M неизмеримой мощности — противоречие. Предложение 4.2.7 доказано.

Из предложения 4.2.7 и леммы 4.2.8 вытекает

4.2.9. Предложение. *Пусть ξ — $\aleph_1$-центрированный ультрафильтр на X, $\gamma\subset\xi$ и $|\gamma|$ — неизмеримый кардинал. Тогда $\bigcap\gamma\in\xi$.*

Мы приступаем теперь к основным результатам о неизмеримых кардиналах.

4.2.10. Теорема. *Пусть $X=\bigcup\{X_\alpha : \alpha\in A\}$ — множество, где $|X_\alpha|=\tau_\alpha$ — неизмеримый кардинал для каждого $\alpha\in A$ и кардинал $|A|$ также неизмерим. Тогда $|X|$ — неизмеримый кардинал.*

Доказательство. Пусть ξ—δ-ультрафильтр на X. Возможны два случая.

I. $X_{\alpha^*}\in\xi$ для некоторого $\alpha^*\in A$. Тогда семейство $\xi_{\alpha^*}=\{A\subset X_{\alpha^*}: A\in\xi\}$ является δ-ультрафильтром на A — это очевидно. Получили противоречие с неизмеримостью кардинала $|X_\alpha|=\tau_\alpha$.

II. Для каждого $\alpha\in A$ $X_\alpha\notin\xi$. Тогда $X\setminus X_\alpha\in\xi$ при всех $\alpha\in A$ (предложение 4.1.8). Так как кардинал $|A|$ неизмерим, из предложения 4.2.9 следует, что $\bigcap\{X\setminus X_\alpha:\alpha\in A\}\in\xi$. Но $\bigcap\{X\setminus X_\alpha:\alpha\in A\}=X\setminus\bigcup\{X_\alpha:\alpha\in A\}=\varnothing$ — получили противоречие.

4.2.11. Теорема. *Если мощность множества X неизмерима, то и мощность множества* $\operatorname{Exp}X$ *неизмерима.*

Доказательство. Пусть ξ — δ-ультрафильтр на $\operatorname{Exp}X$. Для $x\in X$ положим

$$\eta_1(x)=\{A\subset X: x\in A\},$$

$$\eta_2(x)=\{A\subset X: x\notin A\}.$$

Рассмотрим множества

$$F=\{x\in X:\eta_1(x)\in\xi\},$$

$$\Phi=X\setminus F.$$

Для каждого $x\in X$ $\eta_1(x)\cup\eta_2(x)=\operatorname{Exp}X$ и $\eta_1(x)\cap\eta_2(x)=\varnothing$. Значит,

$$\Phi=\{x\in X:\eta_2(x)\notin\xi\},$$

так как ξ — ультрафильтр. Кардиналы $|\Phi|$ и $|F|$ неизмеримы, так как $|\Phi|\leqslant|X|$, $|F|\leqslant|X|$ и кардинал $|X|$ неизмерим.

Следовательно, в силу предложения 4.2.9, $A^*=\bigcap\{\eta_1(x):x\in F\}\in\xi$ и $B^*=\{\eta_2(x):x\in\Phi\}\in\xi$. Поэтому и $A^*\cap B^*\in\xi$.

Покажем, что $A^*\cap B^*=\{F\}$, т. е. что множество $A^*\cap B^*$ состоит ровно из одной точки $F\in\operatorname{Exp}X$.

Для всех $x\in\Phi=X\setminus F$ имеем $F\in\eta_2(x)$ по определению $\eta_2(x)$. Значит, $F\in B^*$. Из определения $\eta_1(x)$ следует, что $F\in\eta_1(x)$ для всех $x\in F$. Значит, $F\in A^*$ и $F\in A^*\cap B^*$. Если $Q\in A^*$, то, очевидно, $Q\supset F$. Если $Q\in B^*$, то $Q\cap\Phi=\varnothing$, т. е. $Q\subset F$. Следовательно, если $Q\in A^*\cap B^*$, то $Q=F$. Этим доказано, что $\{F\}=A^*\cap B^*\in\xi$. Но тогда $\{F\}=\bigcap\xi$ — получим противоречие.

Кардинал τ называется *сильно недостижимым,* если он несчетен, регулярен и для каждого кардинала λ, меньшего, чем τ, выполняется соотношение:

$$2^\lambda<\tau.$$

Из предложения 4.2.6 и теорем 4.2.10 и 4.2.11 вытекает

4.2.12. Теорема. *Наименьший из измеримых кардиналов, если таковые существуют, является сильно недостижимым кардиналом.*

В частности, кардиналы $\aleph_1$, $\aleph_2$, ..., $\aleph_n$, ..., $\aleph_\omega$ и кардиналы $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$ и т. д. являются неизмеримыми кардиналами по теореме 4.2.12. Теорема 4.2.12 означает, что если измеримый

кардинал существует, то он необычайно велик и построить его «снизу», «изнутри», отправляясь от $\aleph_0$ и итерируя операции возведения в степень и сложения, нельзя. Не противоречит аксиомам теории множества гипотеза: Card=Card(U). Статус отрицания этой гипотезы сложнее [10, 4].

§ 3. Почти дизъюнктные системы множеств и Δ-лемма

Семейство $\{S_\alpha : \alpha \in M\}$ множеств называется *дизъюнктным*, если $S_{\alpha'} \cap S_{\alpha''} = \varnothing$ при $\alpha', \alpha'' \in M$ и $\alpha' \neq \alpha''$.

4.3.1. Предложение. *Пусть* $\{S_\alpha : \alpha \in A\}$ *— произвольное семейство множеств. Существует тогда множество* $M \subset A$ *такое, что:*

а) *семейство* $\{S_\alpha : \alpha \in M\}$ *дизъюнктно и*

б) *множество* A *максимально в* A *по отношению к свойству а), т. е. если* $\alpha \in A \setminus M$, *то найдется* $\alpha' \in M$, *для которого* $S_\alpha \cap S_{\alpha'} \neq \varnothing$.

Иными словами, в каждом семействе множеств существует максимальное дизъюнктное подсемейство.

Доказательство. Положим $\mathscr{P} = \{M \subset A :$ семейство $\{S_\alpha : \alpha \in M\}$ дизъюнктно$\}$ и упорядочим $\mathscr{P}$ отношением включения: $M_1 < M_2$ в том и только том случае, если $M_1 \subset M_2$ и $M_1 \neq M_2$. Возьмем сквозную цепь C в $\mathscr{P}, <$ и положим $M^* = \bigcup C$. Покажем, что M^* — искомое множество.

Во-первых, $M^* \in \mathscr{P}$. Действительно, если $\alpha', \alpha'' \in M^*$, то, так как C — цепь и $\bigcup C = M^*$, найдется $M \in C$, для которого $\alpha', \alpha'' \in M$. Пусть $\alpha' \neq \alpha''$. Тогда $S_{\alpha'} \cap S_{\alpha''} = \varnothing$, так как $M \in \mathscr{P}$.

Не существует множества $\widetilde{M} \subset A$, для которого $M^* \subset \widetilde{M}$, $M^* \neq \widetilde{M}$ и семейство $\{S_\alpha : \alpha \in \widetilde{M}\}$ дизъюнктно, иначе было бы $\widetilde{M} \in \mathscr{P}$ и $M \leqslant M^* < \widetilde{M}$ для всех $M \in C$, в противоречии с тем, что цепь C является сквозной. Предложение 4.3.1 доказано.

4.3.2. Определение. Семейство $\xi = \{S_\alpha : \alpha \in B\}$ множеств называется *Δ-системой*, если для любых различных $\alpha', \alpha'' \in B$ выполняется равенство:

$$S_{\alpha'} \cap S_{\alpha''} = \bigcap \{S_\alpha : \alpha \in B\}. \tag{1}$$

Очевидно, семейство $\{S_\alpha : \alpha \in B\}$ является Δ-системой в том и только том случае, если семейство $\{S_\alpha \setminus T : \alpha \in B\}$, где $T = \bigcap \{S_\alpha : \alpha \in B\}$, дизъюнктно.

Пусть $n \in \mathbf{N}$. Обозначим через $Y(n)$ следующее утверждение.

Для каждого семейства $\{S_\alpha : \alpha \in A\}$ **множеств такого, что** $|A|$ — бесконечный регулярный кардинал и $|S_\alpha| = n$ при всех $\alpha \in A$, найдется множество $B \subset A$ такое, что $|B| = |A|$ и семейство $\{S_\alpha : \alpha \in B\}$ является Δ-системой.

4.3.3. Лемма. *Утверждение* $Y(n)$ *верно для каждого* $n \in \mathbf{N}$.

Доказательство по индукции относительно $n \in \mathbf{N}$. Если $n = 0$, то годится $B = A$. Значит, $Y(0)$ верно. Пусть $k \in \mathbf{N}$ и $Y(k)$ верно. Докажем, что верно $Y(k+1)$.

Имеем: $|S_\alpha|=k+1$ при всех $\alpha\in A$. Рассмотрим максимальное дизъюнктное подсемейство $\{S_\alpha:\alpha\in M\}$ семейства $\{S_\alpha:\alpha\in A\}$ (на основании предложения 4.3.1).

Случай I. $|M|=|A|$. Тогда подходит $B=M$.

Случай II. $|M|<|A|$. Положим $P=\bigcup\{S_\alpha:\alpha\in M\}$. Имеем

$$S_\alpha\cap P\neq\varnothing$$

для каждого $\alpha\in A$, так как $k+1\geqslant 1$ и $\{S_\alpha:\alpha\in M\}$ — максимальное дизъюнктное подсемейство семейства $\{S_\alpha:\alpha\in A\}$. Далее, $|P|\leqslant|M|\cdot(k+1)<|A|$. Для каждого $x\in P$ положим $A_x=\{\alpha\in A:x\in S_\alpha\}$. Тогда $\bigcup\{A_x:x\in P\}=A$. Но кардинал $|A|$ регулярен и $|P|<|A|$. Значит, $|A_{x^*}|=|A|$ для некоторого $x^*\in P$. Имеем $x^*\in S_\alpha$ для каждого $\alpha\in A_{x^*}$. Положим $S^0_\alpha=S_\alpha\setminus\{x^*\}$ для $\alpha\in A_{x^*}$. Так как $|S^0_\alpha|=k$ для всех $\alpha\in A_{x^*}$ и $|A_{x^*}|=|A|$ — регулярный кардинал, к семейству $\{S^0_\alpha:\alpha\in A_{x^*}\}$ применимо утверждение $Y(k)$. Найдется поэтому $B\subset A_{x^*}$ такое, что $|B|=|A_{x^*}|=|A|$ и

$$\bigcap\{S^0_\alpha:\alpha\in B\}=S^0_{\alpha'}\cap S^0_{\alpha''} \tag{2}$$

для любых различных α', $\alpha''\in B$. Очевидно, тогда

$$\bigcap\{S_\alpha:\alpha\in B\}=S_{\alpha'}\cap S_{\alpha''}\text{ при }\alpha',\ \alpha''\in B, \tag{3}$$

$\alpha'\neq\alpha''$, так как левая и правая части в (3) получаются присоединением к левой и правой части в (2) элемента x^*. Значит, B — искомое множество и $Y(k+1)$ верно.

4.3.4. Теорема. *Пусть $\{S_\alpha:\alpha\in A\}$ — семейство конечных множеств, причем $|A|$ — регулярный кардинал и $|A|>\aleph_0$. Найдется тогда множество $B\subset A$ такое, что $|B|=|A|$ и*

$$\bigcap\{S_\alpha:\alpha\in B\}=S_{\alpha'}\cap S_{\alpha''}$$

для любых различных α', $\alpha''\in B$ (т. е. семейство $\{S_\alpha:\alpha\in B\}$ является Δ-системой).

Доказательство. Положим $A_n=\{\alpha\in A:|S_\alpha|=n\}$ при $n\in\mathbf{N}$. Ясно, что $A=\bigcup\{A_n:n\in\mathbf{N}\}$. Так как $|\mathbf{N}|<|A|$ и кардинал $|A|$ регулярен, найдется $n^*\in\mathbf{N}$, для которого $|A_{n^*}|=|A|$. В силу леммы 4.3.3 для семейства $\{S_\alpha:\alpha\in A_{n^*}\}$ выполняется утверждение $Y(n^*)$. Это и дает нам искомое множество B.

4.3.5. Следствие. *Каждая несчетная система конечных множеств содержит несчетную Δ-систему.*

Полезно следующее обобщение понятия дизъюнктной системы множеств.

4.3.6. Определение. Семейство $\{S_\alpha:\alpha\in A\}$ множеств называется *почти дизъюнктным*, если пересечение $S_{\alpha'}\cap S_{\alpha''}$ конечно для любых различных α', $\alpha''\in A$.

Семейство $\xi=\{S_\alpha:\alpha\in B\}$ множеств называется *максимальным почти дизъюнктным* подсемейством семейства $\{S_\alpha:\alpha\in A\}$ множеств, если ξ почти дизъюнктно и не существует множества

$B' \subset A$ такого, что $B \subset B' \subset A$, $B \neq B'$ и семейство $\{S_\alpha : \alpha \in B'\}$ почти дизъюнктно.

4.3.7. Пример. На множестве $\mathbf{N}$ существует почти дизъюнктное семейство $\{S_\alpha : \alpha \in A\}$ подмножеств такое, что $|A| = 2^{\aleph_0}$. Очевидно, достаточно построить почти дизъюнктное семейство мощности $2^{\aleph_0}$ на множестве $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел (так как $\mathbf{N} \sim \mathbf{Q}$). Для каждого иррационального числа a зафиксируем какую-нибудь сходящуюся к a последовательность рациональных чисел и обозначим через S_a множество точек этой последовательности. Ясно, что $S_{a'} \cap S_{a''}$ — конечное множество при $a' \neq a''$. Таким образом, семейство $\{S_a : a \in \mathbf{P}\}$ (где $\mathbf{P}$ — множество всех иррациональных чисел) почти дизъюнктно, причем $|\mathbf{P}| = 2^{\aleph_0}$.

4.3.8. Теорема. *В каждом семействе $\{S_\alpha : \alpha \in A\}$ множеств найдется максимальное почти дизъюнктное подсемейство.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{P}$ — упорядоченное по включению семейство всех подмножеств $B \subset A$ таких, что семейство $\{S_\alpha : \alpha \in B\}$ почти дизъюнктно. Возьмем сквозную цепь C в $\mathscr{P}, <$ и положим $B^* = \bigcup C$. Ясно, что $B^* \subset A$ и семейство $\{S_\alpha : \alpha \in B^*\}$ почти дизъюнктно, так как любые $\alpha', \alpha'' \in B^*$ содержатся в некотором элементе B' цепи C. Если $\tilde{B} \subset A$ и $B^* \subset \tilde{B}$, $B^* \neq \tilde{B}$, то семейство $\{S_\alpha : \alpha \in \tilde{B}\}$ не почти дизъюнктно, иначе было бы $\tilde{B} \in \mathscr{P}$ и $B < \tilde{B}$ для всех $B \in C$, в противоречии с тем, что цепь C — сквозная в $\mathscr{P}, <$.

§ 4. Комбинаторные теоремы

Через $[X]^2$ условимся обозначать множество всех неупорядоченных пар $\{x', x''\}$ различных элементов множества X ($\{x', x''\} = \{x'', x'\}$). Как обычно, $\mathbf{N}$ — натуральный ряд.

4.4.1. Теорема. *Пусть $\varphi : [\mathbf{N}]^2 \to \{1, \ldots, n\}$ — произвольное отображение. Найдутся тогда бесконечное множество $M \subset \mathbf{N}$ и число $i \in \{1, \ldots, n\}$ такие, что $\varphi(\{x', x''\}) = i$ для всех $\{x', x''\} \in [M]^2$.*

Доказательство. Для $x \in \mathbf{N}$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ положим $\varphi_x^{-1}(i) = \{y \in \mathbf{N} : \varphi(\{x, y\}) = i\}$.

Пару множеств (A, B) (упорядоченную), где $A \subset \mathbf{N}$ и $B \subset \mathbf{N}$, назовем отмеченной, если выполняются условия:

а) A конечно, B бесконечно и $A \cap B = \varnothing$;

б) если $a \in A$ и $b, c \in A \cup B$, где $a < b$ и $a < c$, то

$$\varphi(\{a, b\}) = \varphi(\{a, c\}).$$

На множестве $\mathscr{P}$ всех отмеченных пар введем косой порядок: $(A', B') \ll (A'', B'')$, если $A' \subset A''$, $B'' \subset B'$ и $A'' \cap B' \neq \varnothing$.

Очевидно, если $(A', B') \ll (A'', B'')$, то A' строго содержится в A'' и B'' строго содержится в B'. Далее $<$ — обычный порядок на $\mathbf{N}$.

Покажем, что в упорядоченном множестве $\mathscr{P}, \ll$ нет максимального элемента.

Пусть $(A, B)\in\mathscr{P}$. В силу а) найдется $\tilde{x}\in B$ такое, что $a<\tilde{x}$ при всех $a\in A$. Положим $\bar{A}=A\cup\{\tilde{x}\}$.

Так как $\bigcup\{\varphi_{\tilde{x}}^{-1}(i): i=1, \ldots, n\}=\mathbf{N}\supset B$, множество $\varphi_{\tilde{x}}^{-1}(\tilde{i})\cap B$ бесконечно для некоторого $\tilde{i}\in\{1, \ldots, n\}$. Положим $\bar{B}=\varphi_{\tilde{x}}^{-1}(\tilde{i})\cap B$. Ясно, что $(\bar{A}, \bar{B})\in\mathscr{P}$ и $(A, B)\ll(\bar{A}, \bar{B})$, т. е. элемент (A, B) немаксимален в $\mathscr{P}, \ll$.

Следовательно, найдется цепь C в $\mathscr{P}, \ll$, в которой нет наибольшего (по отношению к $C, \ll$) элемента, — такой будет, например, любая сквозная цепь в $\mathscr{P}, \ll$.

Множество $H=\bigcup\{A: (A, B)\in C\}$ — объединение всех первых членов пар, вошедших в C, бесконечно и удовлетворяет условию:

если $m, k, l\in H$ и $m<k$, $m<l$, то $\varphi(\{m, k\})=\varphi(\{m, l\})$. (1)

Действительно, существует $(A^*, B^*)\in C$, для которого $m, k, l\in A^*$. В силу б) тогда $\varphi(\{m, k\})=\varphi(\{m, l\})$.

Через $H(i)$ обозначим множество всех $m\in H$, для которых существует $k\in H$ такое, что $k>m$ и $\varphi(\{m, k\})=i$. Имеем: $H=\bigcup\{H(i): i=1, \ldots, n\}$ и, значит, множество $H(i^*)$ бесконечно для некоторого $i^*\in\{1, \ldots, n\}$.

Достаточно теперь показать, что $\varphi(\{m, l\})=i^*$ при любых $m, l\in H(i^*)$, где $m\neq l$.

4 4.2. Теорема. *Пусть τ — бесконечный кардинал, X, T — множества, причем $|X|>2^\tau$ и $|T|\leqslant\tau$. Пусть дано отображение $\varphi: [X]^2\to T$ множества $[X]^2$ всех неупорядоченных пар различных элементов множества X в T. Найдется тогда множество $Z\subset X$ такое, что $|Z|>\tau$ и*

$$\varphi(\{y_1', y_2'\})=\varphi(\{y_1'', y_2''\}) \text{ для любых } \{y_1', y_2'\},$$

$$\{y_1'', y_2''\}\in[Z]^2, \text{ т. е. } |\varphi([Z]^2)|=1.$$

Доказательство. Зафиксируем множество W мощности τ^+ и порождающее вполне упорядочение $<$ на W.

По трансфинитной рекурсии для каждого $\alpha\in W$ будет определено семейство $\mathscr{P}_\alpha$ непустых подмножеств множества X таким образом, что будут выполняться условия при всех α, α', $\alpha''\in W$:

1) $\mathscr{P}_\alpha$ дизъюнктно;

2) если $A'\in\mathscr{P}_{\alpha'}$, $A''\in\mathscr{P}_{\alpha''}$ и $\alpha'<\alpha''$, то либо $A'\cap A''=\varnothing$, либо $A''\subset A'$;

3) $|\mathscr{P}_\alpha|\leqslant 2^\tau$;

4) $\bigcup\mathscr{P}_\alpha=X$.

Зафиксируем функцию выбора c на $\operatorname{Exp} X\setminus\{\varnothing\}$, т. е. каждому непустому множеству $A\subset X$ поставим в соответствие некоторую точку $c(A)\in A$.

Пусть $A\subset X$, $A\neq\varnothing$ и $t\in T$. Положим тогда

$$(A)_t=\{x\in A\setminus\{c(A)\}: \varphi(\{x, c(A)\})=t\}, \tag{2}$$

$$\gamma_A=\{\{c(A)\}, (A)_t: t\in T\}. \tag{3}$$

Очевидно, γ_A — дизъюнктное семейство множеств,

$$\cup\gamma_A = A, \tag{4}$$

$$|\gamma_A| \leqslant |T| \leqslant \tau, \tag{5}$$

и если $x, y \in A' \in \gamma_A$, где $A' \neq \{c(A)\}$, то

$$\varphi(\{x, c(A)\}) = \varphi(\{y, c(A)\}). \tag{6}$$

Для произвольного дизъюнктного покрытия $\mathscr{P}$ множества X непустыми множествами положим

$$\mathscr{P}^+ = (\mathscr{P})^+ = \cup\{\gamma_A : A \in \mathscr{P}\}. \tag{7}$$

Ясно, что $\mathscr{P}^+$ — дизъюнктное покрытие множества X непустыми множествами и $\mathscr{P}^+$ вписано в $\mathscr{P}$, т. е. каждое $A' \in \mathscr{P}^+$ содержится ровно в одном $A \in \mathscr{P}$, причем $|\mathscr{P}^+| \leqslant |\mathscr{P}| \cdot \tau$.

Приступим теперь к построению системы $\{\mathscr{P}_\alpha : \alpha \in W\}$. Далее α, α', α'' — произвольные элементы множества W.

Как обычно, элемент $\alpha \in W$ называется предельным, если у него в $W, <$ нет непосредственно предшествующего элемента.

Для $0 = \min W$ положим $\mathscr{P}_0 = \{X\}$. Пусть $\alpha^* \in W$ и для каждого $\alpha < \alpha^*$ семейство непустых подмножеств множества X уже определено, причем так, что условия 1)—4) соблюдаются для всех α, α', $\alpha'' < \alpha^*$.

Если элемент $\alpha^* \in W$ предельный, то через $\mathscr{P}_{\alpha^*}$ обозначим семейство всех непустых множеств вида $\bigcap\{A_\alpha : \alpha < \alpha^*\}$, где $A_\alpha \in \mathscr{P}_\alpha$ для каждого $\alpha < \alpha^*$. Семейство $\mathscr{P}_{\alpha^*}$ дизъюнктно, вписано в $\mathscr{P}_\alpha$ при $\alpha < \alpha^*$ и

$|\mathscr{P}_{\alpha^*}| \leqslant (2^\tau)^\tau = 2^\tau$, так как $|\bigcup\{\mathscr{P}_\alpha : \alpha < \alpha^*\}| \leqslant 2^\tau \cdot |W|_{\alpha^*}| \leqslant 2^\tau \cdot \tau = 2^\tau$.

Если элементу α^* непосредственно предшествует в $W, <$ элемент $\tilde{\alpha}$, то положим

$$\mathscr{P}_{\alpha^*} = (\mathscr{P}_{\tilde{\alpha}})^+, \tag{8}$$

см. формулу (7). Очевидно,

$$|\mathscr{P}_{\alpha^*}| = |(\mathscr{P}_{\tilde{\alpha}})^+| \leqslant |\mathscr{P}_{\tilde{\alpha}}| \cdot \tau \leqslant 2^\tau \cdot \tau = 2^\tau.$$

Кроме того, $\bigcup \mathscr{P}_{\alpha^*} = X$, $\mathscr{P}_{\alpha^*}$ дизъюнктно и вписано в $\mathscr{P}_{\tilde{\alpha}}$.

Принцип построения по трансфинитной рекурсии (см. § 4 гл. 2) позволяет считать определение семейства $\{\mathscr{P}_\alpha : \alpha \in W\}$ завершенным.

Положим $\mathscr{E} = \cup\{\mathscr{P}_\alpha : \alpha \in W\}$, $\mathscr{E}_1 = \{A \in \mathscr{E} : |A| = 1\}$ и $X_1 = \cup\mathscr{E}$. Имеем: $|\mathscr{E}_1| \leqslant |\mathscr{E}| \leqslant 2^\tau \cdot \tau^+ \leqslant 2^\tau$. Значит, $|X_1| \leqslant 2^\tau$ и $X \setminus X_1 \neq \varnothing$.

Зафиксируем $x^* \in X \setminus X_1$. В силу 4) для каждого $\alpha \in W$ можно выбрать $A_\alpha \in \mathscr{P}_\alpha$ так, чтобы было $x^* \in A_\alpha$. Из $x^* \notin X_1$ следует, что $|A_\alpha| > 1$ при всех $\alpha \in W$. Отсюда вытекает, что если $\alpha' < \alpha''$, то

$$A_{\alpha''} \subset A_{\alpha'} \setminus c(A_{\alpha'}), \tag{9}$$

см. условие 2) и формулы (3), (7). Положим

$$x_\alpha = c(A_\alpha) \quad \text{при} \quad \alpha \in W. \tag{10}$$

В силу (9)

$$x_{\alpha'} \neq x_{\alpha''} \text{ при } \alpha' \neq \alpha''. \tag{11}$$

Следовательно, мощность множества

$$Y = \{x_\alpha : \alpha \in W\}$$

равна $|W| = \tau^+$.

Пусть $\alpha < \beta_1$ и $\alpha < \beta_2$, где α, β_1, $\beta_2 \in W$. Покажем, что тогда

$$\varphi(\{x_\alpha, x_{\beta_1}\}) = \varphi(\{x_\alpha, x_{\beta_2}\}). \tag{12}$$

При $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$ имеем: $\{x_{\beta_1}, x_{\beta_2}\} \subset A_\beta$. Из $\alpha < \beta$ следует, что $A_\beta \subset A'$ для некоторого $A' \in \gamma_{A_{\alpha^*}} \setminus \{x_\alpha\}$. В силу определения семейства γ_A (см. также формулу (6)) имеем

$$\varphi(\{x_{\beta_1}, x_\alpha\}) = \varphi(\{x_{\beta_2}, x_\alpha\}); \tag{13}$$

мы учли, что $c(A_\alpha) = x_\alpha$.

Положим

$$\psi(\alpha) = \varphi(\{x_\alpha, x_\beta\}), \tag{14}$$

где β — любой элемент множества W, такой, что $\alpha < \beta$. Формула (13) показывает, что от допущенного произвола в выборе β определение $\psi(\alpha)$ не зависит. Мы получили отображение ψ: $W \to T$. Так как $|W| = \tau^+ > \tau = |T|$, существуют $M \subset W$ и $t_0 \in T$, для которых $|M| = \tau^+$ и $\psi(\alpha) = t_0$ при всех $\alpha \in M$.

Если $\alpha' \neq \alpha''$ и α', $\alpha'' \in M$, то $\varphi(\{x_{\alpha'}, x_{\alpha''}\}) = t_0$. Действительно, можно считать, что $\alpha' < \alpha''$, а тогда в силу формулы (14) $t_0 = \psi(\alpha') = \varphi(\{x_{\alpha'}, x_{\alpha''}\}) = t_0$.

Значит, $\varphi(\{x', x''\}) = t_0$ для любых различных элементов множества $Z = \{x_\alpha : \alpha \in M\}$, причем $|Z| = |M| = \tau^+$, см. (10). Теорема доказана.

В книгах [6, 13, 4] даны многочисленные применения теоремы 4.4.2.

Следующая теорема доказывается по той же схеме, что и предыдущая, но с некоторым усложнением. Кроме того, мы опираемся на теорему 4.4.2.

4.4.3. Теорема. *Пусть λ — бесконечный кардинал, $\tau = 2^\lambda$, X — множество, для которого $|X| > 2^\tau$, и T — множество такое, что $|T| \leqslant \lambda$. Пусть, кроме того, дано отображение*

$$\varphi : [X]^3 \to T,$$

где $[X]^3$ — множество всех подмножеств множества X, состоящих в точности из трех элементов. Найдется тогда множество $Z \subset X$ такое, что $|Z| > \lambda$ и

$$\varphi(K) = \varphi(K')$$

для любых K, $K' \in [Z]^3 = \{K \in [X]^3 : K \subset Z\}$.

Доказательство. Зафиксируем множество W мощности τ^+ и порождающее вполне упорядочение $<$ на W.

Для $\alpha\in W$ будут определены дизъюнктные семейства $\mathscr{P}_\alpha$ непустых подмножеств множества X с соблюдением условий:

2*) если $A'\in\mathscr{P}_{\alpha'}$, $A''\in\mathscr{P}_{\alpha''}$ и $\alpha'<\alpha''$, то либо $A''\subset A'$, либо $A'\cap A''=\varnothing$;

3*) $|\mathscr{P}_\alpha|\leqslant 2^\tau$;

4*) $\bigcup\mathscr{P}_\alpha=X$.

Фиксируем функцию выбора c на $\operatorname{Exp}X\setminus\{\varnothing\}$.

Пусть $A\subset X$, $A\neq\varnothing$ и $B\subset X$, $B\cap A=\varnothing$.

Определим отношение эквивалентности $\overset{B}{\sim}$ на A следующим образом: $x\overset{B}{\sim}y$, если $x=y$ или выполняются условия:

а) $\{x, y\}\subset A\setminus\{c(A)\}$,

б) $\varphi(x, c(A), z)=\varphi(y, c(A), z)$ для каждого $z\in B$.

При фиксированном $z\in B$ условие б) разбивает множество $A\setminus\{c(A)\}$ на не более чем $|T|=\lambda$ попарно непересекающихся подмножеств. Когда z пробегает все B, мы получаем (зависящее от B) разбиение $\xi(A)$ множества $A\setminus\{c(A)\}$ на классы эквивалентности $\overset{B}{\sim}$, причем число этих классов эквивалентности, очевидно, не превосходит $\lambda^{|B|}$: $|\xi(A)|\leqslant\lambda^{|B|}$. В частности, если $|B|\leqslant\tau$, то

$$|\xi(A)|\leqslant\lambda^\tau=2^\tau \quad (\text{так как } \lambda<\tau). \tag{15}$$

Перейдем к построению системы $\{\mathscr{P}_\alpha:\alpha\in W\}$. Положим $\mathscr{P}_0=\{X\}$, и пусть $\alpha^*\in W$ и для каждого $\alpha<\alpha^*$ дизъюнктное семейство $\mathscr{P}_\alpha$ непустых подмножеств множества X уже определено, причем так, что выполняются для α, α', $\alpha''<\alpha^*$ условия 2*), 3*) и 4*).

Если α^* — предельный элемент в $W,<$, то через $\mathscr{P}_{\alpha^*}$ обозначим семейство всех непустых множеств, представимых в виде $\bigcap\{A_\alpha:\alpha<\alpha^*\}$, где $A_\alpha\in\mathscr{P}$ при $\alpha<\alpha^*$.

Предположим теперь, что элементу α^* непосредственно предшествует в $W,<$ элемент $\tilde{\alpha}$.

Возьмем любое $A\in\mathscr{P}_{\tilde{\alpha}}$. В силу 2) при $\alpha<\tilde{\alpha}$ в $\mathscr{P}_\alpha$ есть ровно один элемент A'_α, содержащий A. Положим $B_A=\{c(A'_\alpha):\alpha<\tilde{\alpha}\}$. Тогда $|B_A|\leqslant|W|_{\tilde{\alpha}}|\leqslant\tau$. Поэтому для разбиения $\xi(A)$ множества $A\setminus\{c(A)\}$ на классы эквивалентности $\overset{B_A}{\sim}$ выполняется формула (15):

$$|\xi(A)|\leqslant 2^\tau.$$

Положим

$$\mathscr{P}_{\alpha^*}=\bigcup\{\xi(A):A\in\mathscr{P}_{\tilde{\alpha}}\}\cup\{\{c(A)\}:A\in\mathscr{P}_{\tilde{\alpha}}\}. \tag{16}$$

Ясно, что семейство $\mathscr{P}_{\alpha^*}$ дизъюнктно, состоит из непустых множеств, $\bigcup\mathscr{P}_{\alpha^*}=X$ и $|\mathscr{P}_{\alpha^*}|\leqslant 2^\tau\cdot 2^\tau=2^\tau$. Кроме того, $\mathscr{P}_{\alpha^*}$ вписано в $\mathscr{P}_{\tilde{\alpha}}$.

Определение семейства $\{\mathscr{P}_\alpha : \alpha \in W\}$ в соответствии с принципом трансфинитной рекурсии завершено.

Положим $\mathscr{E} = \bigcup\{\mathscr{P}_\alpha : \alpha \in W\}$, $\mathscr{E}_1 = \{A \in \mathscr{E} : |A| = 1\}$ и $X_1 = \bigcup \mathscr{E}_1$. Тогда $|\mathscr{E}_1| \leqslant |\mathscr{E}| \leqslant 2^\tau \cdot \tau^+ \leqslant 2^\tau$. Значит, $|X_1| \leqslant 2^\tau$ и $X \setminus X_1 \neq \varnothing$.

Зафиксируем $x^* \in X \setminus X_1$, а на основании условия 4*) выберем для каждого $\alpha \in W$ множество $A^*_\alpha \in \mathscr{P}_\alpha$ так, чтобы было $x^* \in A^*_\alpha$. Из $x^* \notin X_1$ следует, что $|A^*_\alpha| > 1$ при всех $\alpha \in W$. Отсюда получаем: если $\alpha' < \alpha''$, то

$$A^*_{\alpha''} \subset A^*_{\alpha'} \setminus c(A^*_{\alpha'}). \tag{17}$$

Положим

$$x_\alpha = c(A^*_\alpha) \text{ при } \alpha \in W. \tag{18}$$

В силу (17) имеем

$$x_{\alpha'} \neq x_{\alpha''} \text{ при } \alpha' \neq \alpha''. \tag{19}$$

Следовательно, мощность множества

$$Y = \{x_\alpha : \alpha \in W\}$$

равна $|W| = \tau^+$.

Покажем, что если $\alpha' < \alpha'' < \beta_1$ и $\alpha' < \alpha'' < \beta_2$, то

$$\varphi(\{x_{\alpha'}, x_{\alpha''}, x_{\beta_1}\}) = \varphi(\{x_{\alpha'}, x_{\alpha''}, x_{\beta_2}\}). \tag{20}$$

Имеем: $\{x_{\beta_1}, x_{\beta_2}\} \subset A^*_\beta$, где $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$. Из $\alpha'' < \beta$ следует теперь, что точки x_{β_1} и x_{β_2} лежат в одном элементе семейства $\xi^{B''}(A_{\alpha''})$, т. е., что $x_{\beta_1} \overset{B''}{\sim} x_{\beta_2}$, где $B'' = B_{A_{\alpha''}}$. Так как $\alpha' < \alpha''$, имеем: $A^*_{\alpha''} \subset A^*_{\alpha'}$ и, значит, $x_{\alpha'} \in B_{A^*_{\alpha''}}$. Пользуясь определением отношения $\overset{B}{\sim}$ (см. б)), получаем

$$\varphi(\{x_{\alpha'}, x_{\beta_1}, x_{\alpha''}\}) = \varphi(\{x_{\alpha'}, x_{\beta_2}, x_{\alpha''}\}).$$

Соотношение (20) доказано.

При всех $\alpha' < \alpha''$, $\alpha', \alpha'' \in W$ положим

$$\psi(\{x_{\alpha'}, x_{\alpha''}\}) = \varphi(\{x_{\alpha'}, x_{\alpha''}, x_\beta\}), \tag{21}$$

где β — любой элемент множества W, для которого $\alpha'' < \beta$.

В силу формулы (20) определение $\psi(\{x_{\alpha'}, x_{\alpha''}\})$ не зависит от произвола, допущенного при выборе $\beta \in W$.

Тем самым определено отображение $\psi : [Y]^2 \to T$. Так как $|Y| = \tau^+ > \tau = 2^\lambda$ и $|T| \leqslant \lambda$, по теореме 4.4.2 существует множество $Z \subset Y$, для которого $|Z| > \lambda$ и

$$\psi(B') = \psi(B'') \text{ для любых } B', B'' \in [Z]^2. \tag{22}$$

Покажем, что $\varphi(K') = \varphi(K'')$ для любых $K', K'' \in [Z]^3$. Пусть $K' = \{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}\}$ и $K'' = \{x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, x_{\beta_3}\}$ (где x_α определено формулой (18)). Можно считать, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ и $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$. Из

$\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}\} \subset Z$ и $\{x_{\beta_1}, x_{\beta_2}\} \subset Z$ следует, что $\psi(\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}\}) = \psi(\{x_{\beta_1}, x_{\beta_2}\})$. Но $\psi(\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}\}) = \varphi(\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}\})$ и $\psi(\{x_{\beta_1}, x_{\beta_2}\}) = \varphi(\{x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, x_{\beta_3}\})$.

Значит, $\varphi(K') = \varphi(K'')$. Теорема 4.4.3 доказана.

Следующий результат, являющийся следствием теоремы 4.4.2, особенно хорошо приспособлен для применений в общей топологии — в теории кардинальных инвариантов.

4.4.4. Следствие. *Пусть τ — бесконечный кардинал, X — множество, $|X| > 2^\tau$ и для каждого $x \in X$ задан предфильтр ξ_x на X так, что выполняются условия*:

а) $x \in \bigcap \xi_x$ *для всех* $x \in X$;

б) $|\xi_x| \leqslant \tau$ *для всех* $x \in X$;

в) *для любых различных* $x_1, x_2 \in X$ *найдутся* $V_1 \in \xi_{x_1}$ *и* $V_2 \in \xi_{x_2}$ *такие, что* $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Тогда найдутся $Y \subset X$ *и* $V_y \in \xi_y$ *для каждого* $y \in Y$ *такие, что* $|Y| > \tau$ *и семейство* $\{V_y : y \in Y\}$ *дизъюнктно.*

Доказательство. Зафиксируем множество T мощности τ. В силу б) T можно отобразить на ξ_x при $x \in X$. Значит, семейство ξ_x можно представить в виде:

$$\xi_x = \{V_t^x : t \in T\}.$$

Для каждого двухэлементного множества $\{x, y\} \in [X]^2$ выберем $t, s \in T$ так, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий: $V_t^x \cap V_s^y = \varnothing$ и $V_s^x \cap V_t^y = \varnothing$, и положим $\varphi(\{x, y\}) = (t, s)$.

Этим определено отображение $\varphi : [X]^2 \to T \times T$. Имеем: $|T \times T| = |T| = \tau$. По теореме 4.4.2 найдутся $Y \subset X$ и $(t^*, s^*) \in T \times T$ такие, что $|Y| > \tau$ и $\varphi(\{x, y\}) = (t^*, s^*)$ для всех $\{x, y\} \in [Y]^2$. По определению φ для любых различных $x, y \in Y$ либо

$$V_{t^*}^x \cap V_{s^*}^y = \varnothing, \text{ либо } V_{s^*}^x \cap V_{t^*}^y = \varnothing.$$

Для каждого $x \in Y$ возьмем на основании того, что ξ_x — предфильтр, элемент $W_x \in \xi_x$ такой, что

$$W_x \subset V_{t^*}^x \cap V_{s^*}^x.$$

Очевидно, имеем теперь

$$W_x \cap W_y = V_{t^*}^x \cap V_{s^*}^x \cap V_{t^*}^y \cap V_{s^*}^y = \varnothing$$

для любых различных x и y из Y.

Приведем в заключение этого параграфа общий результат, охватывающий теоремы 4.4.2 и 4.4.3.

Пусть τ — бесконечный кардинал и $r \in \mathbf{N}$. Положим $\exp^0(\tau) = \tau$ и определим $\exp^r(\tau)$ по индукции формулой

$$\exp^{k+1}(\tau) = \exp(\exp^k(\tau)).$$

Для произвольного множества X и любого $k \in \mathbf{N}$ через $[X]^k$

будет обозначаться множество всех подмножеств множества X, состоящих ровно из k элементов.

Обозначим через $\mathcal{Y}(r, \tau)$ следующее утверждение.

Пусть X и T — множества такие, что $|X|>\exp^r(\tau)$ и $|T|\leqslant\tau$. Тогда для каждого отображения $\varphi:[X]^{r+1}\to T$ найдется $Y\subset X$ такое, что $|Y|>\tau$ и $\varphi(K)=\varphi(K')$ для всех $K, K'\in[Y]^{r+1}$.

4.4.5. Теорема. *Утверждение* $\mathcal{Y}(r, \tau)$ *верно для каждого бесконечного кардинала* τ *и каждого* $r\in\mathbf{N}$.

Доказывается теорема 4.4.5 по индукции, при этом рассуждение почти полностью повторяет вывод теоремы 4.4.3 из теоремы 4.4.2 [13].

§ 5. Деревья

Деревья — особый вид упорядоченных множеств. Они воплощают фундаментальную идею ветвления.

4.5.1. Определение. Упорядоченное множество $T,<$ называется *деревом,* если для каждого $x\in T$ множество $T_x=\{y\in T: y<x\}$ всех предшествующих x в $T,<$ элементов вполне упорядочено отношением $<$.

Произвольное вполне упорядоченное множество является деревом.

Если α — ординал и $T,<$ — дерево, то множество всех $x\in T$, для которых порядковый тип множества $T|_x,<$ равен α, называется α-*м уровнем дерева* $T,<$.

Если множество T ординарно и α — ординал, норма которого равна $\operatorname{Exp} T$, то α-й уровень дерева $T,<$, очевидно, пуст. В дальнейшем рассматриваются только такие деревья $T,<$, для которых T ординарно, и наименьший ординал α, для которого α-й уровень дерева $T,<$ пуст, называется *высотой дерева* $T,<$ и обозначается через $h(T)$.

Левые лучи дерева называются его *поддеревьями.* Таким образом, множество $T'\subset T$ является поддеревом дерева $T,<$, если из $x\in T'$, $y\in T$ и $y<x$ следует, что $y\in T'$.

Множество $P\subset T$ назовем *сквозным путем в дереве* $T,<$, если P линейно упорядочено отношением $<$ и из каждого непустого уровня дерева T в P входит один элемент.

В деревьях, высота которых является непредельным ординалом, есть сквозной путь — это очевидно. Однако сквозной путь есть не во всех деревьях. Это связано с тем, что максимальная цепь дерева может не быть в нем сквозным путем, хотя, разумеется, каждый сквозной путь является максимальной цепью дерева.

Простейший пример бесконечного дерева таков.

4.5.2. Пример. Рассмотрим множество S всех конечных последовательностей из нулей и единиц: условимся при этом, что последовательность s_1 предшествует последовательности s_2, если $s_1\neq s_2$ и s_2 является продолжением s_1. Очевидно, $S,<$ —

дерево высоты ω, где ω — порядковый тип натурального ряда, причем S счетно, а все уровни дерева $S,<$ конечны.

В $S,<$ есть много сквозных путей; каждый из них имеет вид $\{f|_n : n\in\mathbf{N}\}$, где $f:\mathbf{N}\to\{0, 1\}$ — произвольная бесконечная последовательность из нулей и единиц и $f|_n$ — последовательность из первых n членов последовательности f. Отсюда следует, что множество всех сквозных путей в $S,<$ равномощно множеству $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$, т. е. мощность его равна $2^{\aleph_0}$.

К множеству S присоединим множество $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц. Полученное множество $\widetilde{S}$ упорядочим так: на S — порядок прежний, элементы из $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ друг с другом несравнимы и $g<f$, где $g\in S$ и $f\in\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$, если $g=f|_n$ для некоторого $n\in\mathbf{N}$, т. е. последовательность f продолжает g.

Получилось дерево $\widetilde{S},<$ высоты $\omega+1$; его ω-уровень есть $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ и $|\widetilde{S}| = |\{0, 1\}^{\mathbf{N}}| = 2^{\aleph_0}$.

4.5.3. Пример. Обозначим через S_1 множество всех строго убывающих конечных последовательностей натуральных чисел. Таким образом, для $s\in S_1$ имеем: $s(0)>s(1)>s(2)>\ldots$. Возьмем на S_1 порядок по включению: если $s_1, s_2\in S_1$, то $s_1<s_2$ означает, что $s_1\neq s_2$ и s_2 является продолжением s_1. Очевидно, высота дерева S_1 равна ω, но в S_1 нет сквозных путей, так как не существует бесконечных строго убывающих последовательностей натуральных чисел.

4.5.4. Теорема (Кёниг). *Если высота дерева T равна ω и каждый уровень дерева T конечен, то в T существует сквозной путь.*

Доказательство. Обозначим через T_n n-й уровень дерева T. Множество $\bigcup\limits_{i=0}^{n} T_i$ конечно, а множество T бесконечно, так как $h(T)=\omega$. Значит, бесконечно и множество $T\setminus\bigcup\limits_{i=0}^{n} T_i$. Поэтому для каждого $n\in\mathbf{N}$ непусто множество $\widetilde{T}_n$ всех $x\in T_n$, для которых бесконечно множество $\{y\in T : x<y\}$.

В упорядоченном подмножестве $\bigcup\widetilde{T}_n,<$ дерева $T,<$ возьмем сквозную цепь C. Множество C, очевидно, бесконечно; пополняя его до левого луча в $T,<$, мы получаем сквозной путь в $T,<$.

Пусть τ — бесконечный кардинал. Дерево T называется *τ-деревом*, если высота его равна наименьшему ординалу нормы τ и мощность каждого уровня меньше, чем τ.

Если кардинал τ регулярен и τ-дерево T не имеет сквозных путей, то T называют *τ-деревом Ароншайна*. Теорема Кёнига 4.5.4 означает, что $\aleph_0$-деревьев Ароншайна не существует. Напротив, $\aleph_1$-деревья Ароншайна существуют, см. теорему 4.5.6.

4.5.5. Пример. Пусть α — произвольный ординал и A — любое множество. Построим полное дерево высоты α над A следующим образом. Для каждого ординала $\beta<\alpha$ обозначим

через ${}^{\beta}A$ множество всех отображений $s: \mathrm{Ord}_{\beta} \to A$, где Ord_{β} — множество всех ординалов, меньших β. Положим

$$ {}^{<\alpha}A = \bigcup \{ {}^{\beta}A : \beta < \alpha \}. \tag{1} $$

Упорядочим ${}^{<\alpha}A$: $s_1 < s_2$, где $s_1 \in {}^{\beta_1}A$ и $s_2 \in {}^{\beta_2}A$, в том и только том случае, если $\beta_1 < \beta_2$ и отображение s_2 является продолжением отображения s_1. Получившееся дерево ${}^{<\alpha}A$, $<$ называется полным деревом над A высоты α. Если $A = \{0, 1\}$, то ${}^{<\alpha}A$ — полное бинарное дерево высоты α.

Часто деревья строятся путем выбора подходящего множества T в дереве ${}^{<\alpha}A$; так мы поступаем ниже при построении $\aleph_1$-дерева Ароншайна.

4.5.6. Теорема. *Существует $\aleph_1$-дерево Ароншайна.*

Доказательство. Мы пользуемся обозначениями из примера 4.5.5. В качестве множества A возьмем натуральный ряд $\mathbf{N}$, а в качестве ординала α — первый несчетный ординал ω_1 и рассмотрим полное дерево ${}^{<\omega_1}\mathbf{N} = \bigcup \{ {}^{<\beta}\mathbf{N} : \beta < \omega_1 \}$. Возьмем для $\beta < \omega_1$ множество $T_{\beta} \subset {}^{\beta}\mathbf{N}$ всех инъективных отображений множества Ord_{β} в $\mathbf{N}$.

Множество $T = \bigcup \{T_{\beta} : \beta < \omega_1\}$ с упорядочением из ${}^{<\omega_1}\mathbf{N}$ является деревом высоты ω_1, так как каждый счетный ординал можно инъективно отобразить в $\mathbf{N}$. Однако сквозных путей в дереве T нет: каждый такой путь отвечал бы инъективному отображению несчетного множества W в счетное множество $\mathbf{N}$.

Но в T есть, очевидно, несчетные уровни. Выделим подходящее подмножество множества T.

Для $\beta < \omega_1$ и $s, t \in {}^{\beta}\mathbf{N}$ положим $s \sim t$, если отображения $s: \mathrm{Ord}_{\beta} \to \mathbf{N}$ и $t: \mathrm{Ord}_{\beta} \to \mathbf{N}$ отличаются лишь на конечном множестве точек.

По трансфинитной индукции вдоль Ord_{ω_1} будут определены $s_{\alpha} \in {}^{\alpha}\mathbf{N}$ для всех $\alpha < \omega_1$ таким образом, что:

(i) отображение $s_{\alpha}: \mathrm{Ord}_{\alpha} \to \mathbf{N}$ инъективно;

(ii) если $\alpha < \beta < \omega_1$, то

$$ s_{\alpha} \sim s_{\beta} | \mathrm{Ord}_{\alpha}; $$

(iii) множество $\mathbf{N} \setminus s_{\alpha}(\mathrm{Ord}_{\alpha})$ бесконечно.

Если такое семейство $\{s_{\alpha} : \alpha < \omega_1\}$ уже построено, то положим

$$ T_{\alpha}^{*} = \{ t \in T_{\alpha} : t \sim s_{\alpha} \}, \tag{2} $$

$$ T^{*} = \bigcup \{ T_{\alpha}^{*} : \alpha < \omega_1 \}. \tag{3} $$

Очевидно, T^* — дерево высоты ω_1 и T_{α}^{*} — α-й уровень этого дерева. Так как α — счетный ординал, множество T_{α}^{*} счетно. Из $h(T) = \omega_1$ и $T^* \subset T$ следует, что в T^* нет сквозных путей, так как их нет в T. Таким образом, T^* — $\aleph_1$-дерево Ароншайна.

Осталось построить $s_\alpha \in {}^\alpha\mathbf{N}$ для всех $\alpha<\omega_1$ так, чтобы соблюдались условия (i)–(iii).

Полагаем $s_0=\varnothing$. Если s_α определено, возьмем любое $n\in\mathbf{N}\setminus s_\alpha(\mathrm{Ord}_\alpha)$ и определим $s_{\alpha+1}:\mathrm{Ord}_{\alpha+1}\to\mathbf{N}$ так: $s_{\alpha+1}(\alpha)=n$ и $s_{\alpha+1}(\beta)=s_\alpha(\beta)$ при $\beta<\alpha$.

Предположим теперь, что s_α определены для всех $\alpha<\gamma$, где $\gamma<\omega_1$, γ — предельный ординал. Зафиксируем последовательность $\{\alpha_n : n\in\mathbf{N}\}$ ординалов такую, что $\alpha_n<\alpha_{n+1}<\gamma$ и $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\{\alpha_n\}=\gamma$, т. е. $\bigcup\{\mathrm{Ord}_{\alpha_n} : n\in\mathbf{N}\}=\mathrm{Ord}_\gamma$. Положим $t_0=s_{\alpha_0}$. Не составляет труда определить по индукции отображения t_n: $\mathrm{Ord}_{\alpha_n}\to\mathbf{N}$ так, чтобы все они были инъективными, t_{n+1} продолжало t_n и выполнялось условие:

$$t_n\sim s_{\alpha_n} \text{ для всех } n\in\mathbf{N}.$$

Определено тогда и отображение $t:\mathrm{Ord}_\gamma\to\mathbf{N}$, для которого $t|\mathrm{Ord}_{\alpha_n}=t_n$ при всех $n\in\mathbf{N}$. Отображение t инъективно и $s_\alpha\sim t|\mathrm{Ord}_\alpha$ для всех $\alpha<\gamma$, это очевидно. Однако множество $\mathbf{N}\setminus t(\mathrm{Ord}_\gamma)$ может оказаться конечным (и даже пустым). В связи с этим примем за s_γ не само отображение t, а его некоторую модификацию. А именно, положим $s_\gamma(x)=t(x)$ для всех $x<\gamma$ таких, что $x\notin\{\alpha_n : n\in\mathbf{N}\}$, и положим $s_\gamma(\alpha_n)=t(\alpha_{2n})$ для всех $n\in\mathbf{N}$. Очевидно, отображение $s_\gamma:\mathrm{Ord}_\gamma\to\mathbf{N}$ инъективно и $\mathbf{N}\setminus s_\gamma(\mathrm{Ord}_\gamma)\supset\{t(\alpha_{2n+1}) : n\in\mathbf{N}\}$ — бесконечное множество. Теорема 4.5.6 доказана.

Антицепью в упорядоченном множестве $T,<$ называется любое его подмножество A, состоящее из попарно несравнимых элементов: каковы бы ни были x, $y\in A$, ни одно из условий $x<y$ и $y<x$ не выполняется.

Пусть τ — бесконечный кардинал.

4.5.7. Определение. Дерево T называется *τ-суслинским*, если $|T|=\tau$ и мощность каждой цепи и каждой антицепи в T строго меньше, чем τ.

4.5.8. Предложение. *Если τ — регулярный бесконечный кардинал, то каждое τ-суслинское дерево T является τ-деревом.*

Доказательство. Каждый уровень U_α дерева T является антицепью; поэтому $|U_\alpha|<\tau$ для каждого $\alpha\in\mathrm{Ord}$. Если $U_\alpha\neq\varnothing$, то для $x\in U_\alpha$ имеем: $|\{y\in T : y<x\}|=\|\alpha\|=\tau$, так как $\{y\in T : y<x\}$ — цепь.

Таким образом, $T=\bigcup\{U_\alpha : \alpha\in\mathrm{Ord}_\tau\}$, где $\mathrm{Ord}_\tau=\{\alpha\in\mathrm{Ord} : \|\alpha\|<\tau\}$. Если $U_\beta=\varnothing$ для некоторого β, где $\beta<\tau$, то получаем: $T=\bigcup\{U_\alpha : \alpha<\beta\}$. Так как число слагаемых здесь меньше, чем τ, и $|U_\alpha|<\tau$ для всех $\alpha<\beta$, получаем противоречие с тем, что $\tau=|T|$ — регулярный кардинал. Следовательно, высота дерева T равна в точности первому ординалу мощности τ.

4.5.9. Предложение. *Пусть T — дерево, высота которого — наименьший ординал мощности τ.*

Тогда следующие утверждения равносильны:

а) *в T есть сквозной путь;*

б) *в T есть цепь мощности τ.*

Доказательство. Наименьший ординал мощности τ мы обозначаем тоже через τ. Имеем: $T=\bigcup\{U_\alpha : \alpha<\tau\}$, где U_α — α-й уровень дерева T. Если P — сквозной путь в T, то каждому $\alpha<\tau$ отвечает ровно один элемент p_α уровня α: $P\cap U_\alpha=\{p_\alpha\}$. Значит, $|P|=|\{\alpha\in\mathrm{Ord}: \alpha<\tau\}|=\tau$, т. е. P — цепь мощности τ. Обратно, так как каждая цепь C в T с каждым уровнем U_α пересекается не более чем по одному элементу, из $|C|=\tau$ следует, что множество $\{\alpha : \alpha<\tau$ и $C\cap U_\alpha\neq\varnothing\}$ конфинально ординалу τ. Тогда множество $\bar{C}=\{t\in T:$ существует $c\in C$, для которого $t\leqslant c\}$ — сквозной путь в T.

Из предложений 4.5.8 и 4.5.9 вытекает

4.5.10. Предложение. *Пусть τ — регулярный кардинал. Тогда каждое τ-суслинское дерево является τ-деревом Ароншайна.*

Обратное не верно. Мы видели (теорема 4.5.6), что $\aleph_1$-дерево Ароншайна существует. Однако не противоречит обычным аксиомам теории множеств считать, что не существует $\aleph_1$-суслинских деревьев (Йенсен, см. [4, 18]). Нельзя доказать «наивно», что существует $\aleph_2$-дерево Ароншайна (Митчелл, см. [4, 18]). Однако из континуум-гипотезы можно вывести, что такое дерево есть. Совместимо с обычными аксиомами теории множеств считать, что τ-деревья Ароншайна существуют для всех несчетных регулярных кардиналов τ, не являющихся сильно недостижимыми; здесь привлекается аксиома конструктивности [4, 18].

Существование $\aleph_1$-суслинских деревьев равносильно существованию континуума Суслина [4, 12, 18].

Тонкие вопросы связаны с понятием *τ-дерева Курепы.* Так называется, для регулярного кардинала τ, любое τ-дерево, в котором имеется по крайней мере τ^+ различных сквозных путей.

Например, ординал τ является τ-деревом, но не является τ-деревом Курепы — в нем есть только один сквозной путь.

Гипотеза Курепы КН заключается в следующем: существует $\aleph_1$-дерево Курепы. Ее нельзя ни доказать, ни опровергнуть с помощью обычных аксиом теории множеств [18, 16]. Напротив, $\aleph_0$-деревья Курепы существуют — таково, например, полное бинарное дерево высоты $\aleph_0$.

С понятием τ-дерева Курепы тесно связано понятие τ-семейства Курепы.

Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества X называется *τ-семейством Курепы,* если $|X|=\tau$ — регулярный кардинал, $|\mathcal{F}|\geqslant\tau^+$ и для каждого $Y\subset X$ такого, что $|Y|<\tau$ мощность семейства $\mathcal{F}_Y=\{A\cap Y : A\in\mathcal{F}\}$ меньше, чем τ.

4.5.11. Теорема. *Пусть τ — регулярный бесконечный кардинал. Тогда τ-дерево Курепы существует в том и только том случае, если существует τ-семейство Курепы.*

Доказательство. Пусть T — τ-дерево Курепы и $\mathcal{F}$ —

множество всех его сквозных путей. Имеем: $|\mathcal{F}|\geqslant\tau^+$ и $|T|=\tau$. Покажем, что для произвольного $X\subset T$ такого, что $|X|<\tau$, мощность семейства $\mathcal{F}_X=\{A\cap X: A\in\mathcal{F}\}$ меньше, чем τ.

Так как кардинал τ регулярен и мощность каждого уровня U_β дерева T меньше, чем τ, найдется ординал $\alpha^*<\tau$, для которого $X\subset\bigcup\{U_\beta: \beta<\alpha^*\}$. Возьмем любое $A^*\in\mathcal{F}$. Имеем: $A\cap U_{\alpha^*}=\{t\}$ для некоторого $t\in U_{\alpha^*}$. Тогда $A\cap X=\{x\in X: x<t\}$. Следовательно, мощность семейства $\mathcal{F}_X=\{A\cap X: A\in\mathcal{F}\}$ не превосходит мощности множества U_{α^*}, т. е. $|\mathcal{F}_X|<\tau$.

Обратно, пусть $\mathcal{F}$ — τ-семейство Курепы на множестве X мощности τ. Зафиксируем порождающее вполне упорядоченное на X. Для каждого $x\in X$ и каждого $A\in\mathcal{F}$ возьмем на множестве $X_x=\{y\in X: y<x\}$ характеристическую функцию $f_{A,x}$ множества $A_x=\{y\in A: y<x\}$: $f_{A,x}(y)=1$ при $y\in A_x$ и $f_{A,x}(y)=0$ при $y\in X_x\setminus A_x$. Множество $T=\{f_{A,x}: A\in\mathcal{F},\ x\in X\}$ упорядочим по принципу продолжения:

$$f_{A',x'}\ll f_{A'',x''},\ \text{если } x'<x''\ \text{и}\ A_{x'}\subset A''_{x'}.$$

Очевидно, получилось дерево $T,\ll$, являющееся τ-деревом Курепы; сквозных путей в этом дереве не меньше, чем элементов в семействе $\mathcal{F}$.

§ 6. Замкнутые неограниченные множества и стационарные множества

Всюду далее в этом параграфе W — несчетное множество регулярной мощности, $\tau, <$ — порождающее вполне упорядочение на W и для каждого $x\in W$ $W_x=\{y\in W: y<x\}$. Если $A\subset W$ и A ограничено в $W,<$, то $\sup A$ — наименьший элемент x множества W, для которого $y\leqslant x$ при всех $y\in A$.

Множество $C\subset W$ назовем *замкнутым*, если для всякого $x\in W$ такого, что $C\cap W_x$ не ограничено в $W_x,<$, непременно $x\in C$. Особенный интерес представляют замкнутые неограниченные в $W,<$ множества — интуитивно их следует воспринимать как «большие» множества, как множества «меры 1». Об этом свидетельствует, в частности,

4.6.1. Предложение. *Пусть* $\eta=\{C_\beta: \beta\in A\}$ — *семейство замкнутых неограниченных множеств в* $W,<$ *и* $|A|<\tau=|W|$. *Тогда* $P=\bigcap\{C_\beta: \beta\in A\}$ — *замкнутое неограниченное множество в* $W,<$.

Доказательство. Очевидно, множество P замкнуто. Проверим, что оно не ограничено. Для каждого $\beta\in A$ возьмем отображение $f_\beta: W\to W$, где $f_\beta(x)$ — наименьший элемент множества C_β, больший, чем x для всех $x\in W$. Положим $g(x)=\sup\{f_\beta(x): \beta\in A\}$. Так как $|A|<|W|=\tau$ и τ — регулярный кардинал, определение отображения $g: W\to W$ корректно.

Определим теперь по индукции $h(x, n)$ для всех $x\in W$ и всех $n\in\mathbf{N}$ следующим образом: $h(x, 0)=x$ и $h(x, n+1)=$

$=g(h(x, n))$. Зафиксируем $x\in W$ и положим $x^*=\sup\{h(x, n): n\in\mathbf{N}\}$ — это определение корректно, так как в $W,<$ нет счетных конфинальных подмножеств. Очевидно, $x<x^*$. Множество $C_\beta\cap W_{x^*}$ не ограничено в W_{x^*} при всех $\beta\in A$ — это следует из построения. Так как все C_β замкнуты, заключаем: $x^*\in C_\beta$ для каждого $\beta\in A$, т. е. $x^*\in\bigcap\limits_{\beta\in A} C_\beta=P$. Мы доказали, что множество P не ограничено в $W,<$.

Продолжая аналогию с теорией меры, мы определим стационарные подмножества в W как те, «мера» которых не равна нулю. Точнее, назовем множество $S\subset W$ *стационарным* (в $W,<$), если $W\setminus S$ не содержит никакого замкнутого неограниченного множества, т. е. если $S\cap C=\varnothing$ для каждого замкнутого неограниченного множества C.

Из предложения 4.6.1 вытекают следующие два утверждения.

4.6.2. Предложение. *Объединение семейства мощности меньшей, чем* τ *нестационарных множеств в* W, *является нестационарным множеством.*

4.6.3. Предложение. *Если* S — *стационарное множество в* W *и* C — *замкнутое неограниченное множество в* W, *то множество* $S\cap C$ *стационарно.*

Следующее утверждение играет важную роль во многих комбинаторных рассуждениях.

4.6.4. Теорема (Фодор). *Пусть* S — *стационарное множество в* W *и* $f: S\to W$ — *такое отображение, что* $f(\alpha)<\alpha$ *для всех* $\alpha\in S$. *Тогда найдется* $\alpha\in W$, *для которого множество* $f^{-1}(\alpha)$ *стационарно.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для каждого $\alpha\in W$ найдется замкнутое неограниченное множество C_α такое, что $\alpha\notin f(C_\alpha\cap S)$. Положим $D=\{\beta\in W: \beta\in\bigcap\limits_{\alpha<\beta} C_\alpha\}$. Если $\beta_1\in D\cap S$, то для $\alpha_1=f(\beta_1)$ имеем: $\alpha_1<\beta_1$, $\beta_1\in C_{\alpha_1}$ и, значит, $\alpha_1\in f(C_{\alpha_1}\cap S)$, в противоречии с определением C_α. Следовательно, $D\cap S=\varnothing$. Однако множество D замкнуто — это проверяется тривиально. Покажем, что множество D не ограничено в W, чем будет достигнуто противоречие со стационарностью S.

Зафиксируем произвольно $x_0\in W$ и возьмем в качестве x_{n+1} любой элемент множества $\bigcap\{C_\alpha: \alpha<x_n\}$, больший, чем x_n (в силу предложения 4.6.1 множество $\bigcap\{C_\alpha: \alpha<x_n\}$ не ограничено). Ясно, что $\sup\{x_n: n\in\mathbf{N}\}\in D$, т. е. во множестве D есть элемент, больший, чем x_0. Теорема доказана.

4.6.5. Следствие. *Пусть* S — *стационарное множество в* W. *Не существует тогда инъективного отображения* $f: S\to W$ *такого, что* $f(\alpha)<\alpha$ *для всех* $\alpha\in S$.

Предположим теперь, что $|W|=\aleph_1$.

4.6.6. Теорема (*Улам*). *Если множество* $S\subset W$ *стационарно, то* S *можно разбить на* $\aleph_1$ *попарно непересекающихся стационарных множеств.*

Доказательство. При каждом $\alpha\in W$ зафиксируем некоторое отображение f_α множества $\mathbf{N}$ на множество $W_\alpha=\{\beta\in W:\beta<\alpha\}$. Положим при $\alpha\in W$ и $n\in\mathbf{N}$:

$$A_\alpha^n=S\cap\{\beta\in W:f_\beta(n)=\alpha\}.$$

При любом $n\in\mathbf{N}$ семейство $\{A_\alpha^n:\alpha\in W\}$ дизъюнктно. Для каждого $\alpha\in W$, очевидно, имеем $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}A_\alpha^n=\{\beta\in W:\alpha<\beta\}\cap S$ — стационарное множество. Поэтому в силу предложения 4.6.2 множество $A_\alpha^{n_\alpha}$ будет стационарным при некотором $n_\alpha\in\mathbf{N}$. Выберем $n^*\in\mathbf{N}$ так, чтобы множество

$$W_1=\{\alpha\in W:n_\alpha=n^*\}\text{ было несчетным.}$$

Семейство $\{A_\alpha^{n^*}:\alpha\in W_1\}$ — искомое.

Мы видим, что стационарные множества предфильтра не образуют.

Напомним, что $cf(W_\alpha,<)$ есть минимум мощностей конфинальных $W_\alpha,<$ подмножеств. Для $\alpha\in W$ положим $cf(\alpha)=cf(W_\alpha,<)$.

Следующее утверждение доставляет нам важные примеры стационарных множеств.

4.6.7. Предложение. *Пусть λ — регулярный бесконечный кардинал, $\lambda<\tau=|W|$. Тогда множество $S_\lambda=\{\alpha\in W:cf(\alpha)=\lambda\}$ стационарно.*

Доказательство. Пусть C — произвольное неограниченное множество в $W,<$. Так как $cf(\tau)=\tau>\lambda$, $|C|>\lambda$. Найдется тогда $x\in C$, для которого $|\{y\in C:y<x\}|=\lambda$. Обозначим через c_λ первый элемент множества C такой, что $|\{y\in C:y<c_\lambda\}|=\lambda$. Ясно, что $cf(c_\lambda)=\lambda$, т. е. $c_\lambda\in C\cap S_\lambda$.

4.6.8. Пример. Если $\aleph_1<\tau$, то $S_{\aleph_1}$ и $S_{\aleph_0}$ (см. 4.6.7) — непересекающиеся стационарные множества в W.

В доказательство следующей теоремы понятие стационарного множества и теорема 4.6.4 играют существенную роль.

4.6.9. Теорема (Курепа). *Пусть $T,<$ — дерево высоты $\aleph_2$ (т. е. высота T равна первому ординалу нормы $\aleph_2$), все уровни которого счетны. Тогда в $T,<$ есть сквозной путь.*

Доказательство. Пусть T_α — α-й уровень дерева T. Множество $S=\{\alpha\in\mathrm{Ord}:\alpha<\aleph_1\text{ и }cf(\alpha)=\aleph_1\}$ стационарно в $\mathrm{Ord}_{\aleph_1}$ в силу предложения 4.6.7. Для каждого $\alpha\in S$ выберем $t_\alpha\in T_\alpha$ произвольно. Найдется $s_\alpha<t_\alpha$, для которого

$$\{t\in T:s_\alpha<t\}\cap T_\alpha=\{t_\alpha\},$$

в противном случае по индукции вдоль $\mathrm{Ord}_{\aleph_1}$ в T_α строится несчетное множество (здесь используется предположение, что $\alpha\in S$). Через $\varphi(\alpha)$ обозначим порядковый тип множества $\{t\in T:t<s_\alpha\}$. Из $s_\alpha<t_\alpha\in T_\alpha$ следует, что $\varphi(\alpha)<\alpha$ для всех $\alpha\in S$.

Мы получили отображение $\varphi:S\to\mathrm{Ord}_{\aleph_2}$.

По теореме 4.6.4 найдутся $\beta<\aleph_2$ и стационарное множество A в $\mathrm{Ord}_{\aleph_2}$, $A\subset S$, для которого $\varphi(\alpha)=\beta$ при всех $\alpha\in A$. Имеем тогда: $s_\alpha\in T_\beta$ для всех $\alpha\in A$. Так как множество T_β счетно, существуют $s\in T$ и множество $B\subset A$ такие, что $|B|=\aleph_2$ и $s_\alpha=s$ для всех $\alpha\in B$. Из условия (1) следует теперь, что множество $C=\{t_\alpha:\alpha\in B\}$ является цепью в $T,<$ мощности $\aleph_2$. Тогда множество всех $t\in T$, меньших хотя бы одного элемента из C, является сквозным путем в $T,<$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ[1]

Часть I

1. Покажите, что если множества A и B равномощны, то $|A|=|B|$.

2. Пусть A — конечное множество и n — число элементов в A. Каково число элементов в $\operatorname{Exp} A$?

3. Приведите пример непустого множества, все элементы которого являются подмножествами этого множества.

4. Докажите, что множество A конечно в том и только том случае, если каждое линейное упорядочение на A является вполне упорядочением.

5. Пусть $X, <$ — вполне упорядоченное множество. При x_1, $x_2 \in X$ положим $x_1 \prec x_2$, если $x_2 < x_1$. Покажите, что $\prec$ — вполне упорядочение в том и только том случае, если множество X конечно.

6. Пусть X — бесконечное множество. Покажите, что существует множество $Y \subset X$, для которого $|X|=|Y|=|X \setminus Y|$.

7. Пусть множество X несчетно, а его подмножество A счетно. Покажите, что $|X \setminus A|=|X|$.

8. Докажите, что множество $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел счетно.

9. Покажите, что множество $\mathbf{P}$ всех иррациональных чисел равномощно множеству $\mathbf{R}$ всех вещественных чисел.

10. Покажите, что счетно множество всех интервалов на $\mathbf{R}$ с рациональными концами.

11. Покажите, что счетно множество всех полиномов от конечного числа переменных с рациональными коэффициентами.

12. Назовем восьмеркой множество точек двух касающихся внешним образом окружностей, радиусы которых могут быть различны. Покажите, что любое множество попарно непересекающихся восьмерок, лежащих на фиксированной плоскости, счетно.

13. Пусть $f: X \to Y$ — отображение, $A \subset X$ и $B \subset Y$. Покажите, что $f(A \cap f^{-1}B)=f(A) \cap B$.

14. Пусть $\{S_i : i \in \mathbf{N}\}$ — последовательность непустых конечных множеств S_i и при каждом $i \in \mathbf{N}$ задано отображение $\varphi: S_{i+1} \to S_i$. Покажите, что можно выбрать $a_i \in S_i$ так, чтобы при всех $i \in \mathbf{N}$ было: $\varphi_i(a_{i+1})=a_i$.

15. Докажите, что если каждое счетное подмножество линейно упорядоченного множества X вполне упорядочено, то и все множество X вполне упорядочено.

---

[1] Звездочкой отмечены более трудные задачи, индексом ° — задачи, до конца не решенные.

16. Пусть X — бесконечное множество и $|X|=\tau$. Покажите, что множество X можно представить в виде: $X=\bigcup\{X_\alpha : \alpha\in A\}$, где $|A|=\tau$, $|X_\alpha|=\tau$ при всех $\alpha\in A$ и $X_{\alpha'}\cap X_{\alpha''}=\varnothing$ при $\alpha'\neq\alpha''$, $\alpha', \alpha''\in A$.

17. Пусть $A, <$ — вполне упорядоченное множество. Определим упорядочение $\ll$ на квадрате $A\times A$ следующим образом. Пусть (x_1, y_1), $(x_2, y_2)\in A\times A$. Если $\max\{x_1, y_1\}<\max\{x_2, y_2\}$, то полагаем $(x_1, y_1)\ll(x_2, y_2)$. Пусть $\max\{x_1, y_1\}=\max\{x_2, y_2\}$. Положим $(x_1, y_1)\ll(x_2, y_2)$, если $x_1<x_2$ либо если $x_1=x_2$ и $y_1<y_2$.

Докажите, что $A\times A, \ll$ — вполне упорядоченное множество. Оно называется *канторовым квадратом* упорядоченного множества $A, <$.

18. Пусть $\mathbf{N}, <$ — натуральный ряд. Покажите, что канторов квадрат $\mathbf{N}\times\mathbf{N}, \ll$ множества $\mathbf{N}, <$ подобен $\mathbf{N}, <$ (см. № 17).

19. Пусть A — бесконечное множество, $<$ — порождающее вполне упорядочение на A и $A\times A, \ll$ — канторов квадрат (см. № 17) множества $A, <$. Покажите, что вполне упорядочение $\ll$ — порождающее на $A\times A$.

20. Покажите, что канторов квадрат бесконечного вполне упорядоченного множества $A, <$ подобен $A, <$, если $<$ — порождающее вполне упорядочение [6, гл. I, № 55].

21. Верно ли, что если λ и τ — кардиналы и $\lambda<\tau$, то $2^\lambda<2^\tau$?

22. Пусть λ и τ — кардиналы, $\lambda<cf(\tau)$ и кардинал τ — предельный. Покажите, что тогда

$$\tau^\lambda=\Sigma\{\mu^\lambda : \mu<\tau\}$$ [6, гл. I, № 111].

23. Покажите, что множество $\mathbf{R}$ нельзя представить в виде объединения счетного семейства множеств меньшей мощности.

24*. Пусть ξ_1 и ξ_2 — фильтры на множествах X_1 и X_2 соответственно. Скажем, что ξ_1 и ξ_2 *эквивалентны*, если существует биекция $f: X_1\to X_2$, для которой $f\xi_1=\xi_2$, т. е. $\xi_2=\{f(A) : A\in\xi_1\}$.

Покажите, что существуют неэквивалентные свободные ультрафильтры на множестве $\mathbf{N}$ [6, гл. I, № 145].

25. Существует ли несчетная цепь множеств на множестве $\mathbf{N}$?

26. Пусть k и n — натуральные числа и X — множество из n элементов. Сколько имеется в X подмножеств, состоящих ровно из k элементов?

27. Проверьте, что для любых двух множеств A и B

$$A=(A\setminus B)\cup(A\cap B).$$

28. Проверьте, что для любых множеств A, B, C и D

$$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D).$$

29. Покажите, что если A, B, C — непустые множества и $(A\times B)\cup(B\times A)=C\times C$, то $A=B=C$.

30. Пусть A, B, C и D — множества такие, что $C\subset A$, $B\subset D$ и $C\cup D\sim C$. Покажите, что тогда $A\cup B\sim A$.

31. Пусть Ox и Oy — оси декартовой системы координат на

плоскости Π и $A\subset\Pi$, A — счетное множество. Покажите, что множество A можно представить в виде:

$$A=B\cup C,$$

где B пересекается с каждой прямой, параллельной оси Ox, по конечному множеству, а C пересекается с каждой прямой, параллельной оси Oy, по конечному множеству.

32. Докажите, что мощность множества всех вещественных функций на множестве $\mathbf{R}$ равна $2^{2^{\aleph_0}}$.

33. Докажите, что множество мощности $2^{\aleph_0}$ имеет $2^{2^{\aleph_0}}$ различных подмножеств мощности $2^{\aleph_0}$.

34. Пусть X — множество мощности τ, $Z\subset X$, $|Z|=\lambda$ и μ — кардинал такой, что $\lambda<\mu<\tau$. Докажите, что найдется множество $Y\subset X$, для которого $Z\subset Y$ и $|Y|=\mu$.

35. Покажите, что существует семейство мощности $\aleph_\omega=\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\aleph_n$, состоящее из конечных множеств, никакое подмножество которого мощности $\aleph_\omega$ не является Δ-системой.

36. Покажите, что если кардинал $\tau\geqslant\aleph_0$ сингулярен, то существует τ-суслинское дерево.

37*. Пусть $W,<$ — вполне упорядоченное множество, $A\subset W$ и $x\in W$. Точку x назовем *точкой прикосновения* множества A (и напишем: $x\,б A$), если в A существует непустое подмножество B такое, что x — наименьший элемент множества W, для которого $y\leqslant x$ при всех $y\in B$. Множество A назовем *замкнутым* в $W,<$, если оно содержит все свои точки прикосновения.

Пусть $\tau=cf(W)$ — минимум мощностей конфинальных подмножеств в $W,<$. Покажите, что если $\tau>\aleph_0$, то пересечение любого семейства мощности $<\tau$ замкнутых неограниченных подмножеств множества $W,<$ является замкнутым неограниченным в $W,<$ множеством.

38. Пусть $W,<$ — вполне упорядоченное множество и $\tau=cf(W)>\aleph_0$ (см. № 37). Подмножество $X\subset W$ называется *стационарным* (в $W,<$), если оно пересекается с каждым замкнутым неограниченным подмножеством множества W, т. е. если дополнение к X не содержит никакого замкнутого неограниченного множества.

Покажите, что если $W=\cup\{X_\alpha:\alpha\in M\}$, где $|M|<\tau=cf(W)$, то хотя бы одно из множеств X_α стационарно.

39. Пусть τ — регулярный кардинал и T — дерево высоты τ (здесь τ — первый ординал нормы τ). Предположим, что существует кардинал $\lambda<\tau$ такой, что мощность каждого уровня дерева T меньше, чем λ. Тогда в T есть сквозной путь.

40. Назовем дерево T *ветвистым*, если каково бы ни было $x\in T$ множество $\{y\in T: x<y\}$ не является цепью, т. е. нелинейно упорядочено.

Покажите, что каждое ветвистое $\aleph_1$-дерево, в котором все антицепи счетны, является $\aleph_1$-суслинским деревом.

41*. Пусть $P, <$ — упорядоченное множество такое, что в каждом семействе $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$, состоящем из элементов множества P, найдутся x_i, x_j, где $i \neq j$, для которых либо $x_i < x_j$, либо $x_j < x_i$.

Покажите, что множество P можно представить в виде объединения n линейно упорядоченных (отношением $<$) подмножеств.

42*. Пусть $P, <$ — бесконечное упорядоченное множество, все антицепи в котором конечны. Покажите, что в $P, <$ существует бесконечная цепь.

43°. Пусть $P, <$ — несчетное упорядоченное множество, в котором все антицепи конечны. Верно ли, что в P есть несчетная цепь?

44°. Пусть $P, <$ — несчетное упорядоченное множество, каждое несчетное подмножество которого содержит бесконечную цепь. Верно ли, что в $P, <$ есть несчетная цепь?

45. Сколько различных линейных упорядочений существует на множестве мощности $2^{\aleph_0}$?

Часть II

Задачи этой части относятся к кардинальным инвариантам топологических пространств. Они могут служить введением в общую топологию. С тем чтобы обеспечить замкнутость изложения, мы определяем ниже ряд основных понятий общей топологии — при решении большинства задач, не помеченных звездочкой, можно обойтись этим минимумом материала. Дальнейшие сведения по общей топологии читатель найдет в [6; 7].

Пусть X — некоторое множество. Семейство $\mathcal{T}$ его подмножеств называется *топологией* на X, если $X \in \mathcal{T}$, $\varnothing \in \mathcal{T}$, пересечение любого конечного числа элементов семейства $\mathcal{T}$ принадлежит $\mathcal{T}$ и объединение любого множества элементов из $\mathcal{T}$ принадлежит $\mathcal{T}$.

Топологическое пространство $X, \mathcal{T}$ — это множество X вместе с некоторой топологией $\mathcal{T}$ на X. Обычно пространство $X, \mathcal{T}$ обозначается просто через X. Элементы топологии $\mathcal{T}$ называются *открытыми* в пространстве X множествами.

Пусть $X = (X, \mathcal{T})$ — топологическое пространство.

Замкнутыми в пространстве X множествами называются дополнения до открытых множеств, т. е. множества вида $X \setminus U$, где $U \in \mathcal{T}$. *Окрестностью* точки $x \in X$ (множества $A \subset X$) в X называется любое открытое множество, ее содержащее (содержащее A). Если $x \in X$, $A \subset X$ и каждая окрестность Ox точки x пересекается со множеством A, то говорят, что x является *точкой прикосновения* множества A, и пишут: $x \text{б} A$. Множество всех точек прикосновения множества $A \subset X$ называется *замыканием* множества A в пространстве X и обозначается через $\bar{A}$. Множество A замкнуто в том и только том случае, если $\bar{A} = A$. Очевид-

но, $A \subset \bar{A}$. Легко проверяется, что замыкание множества A всегда является замкнутым множеством.

Точка x пространства X называется *изолированной*, если $\{x\}$ — открытое множество, т. е. если $\{x\} \in \mathcal{T}$. Пространство X называется *дискретным*, если все его точки изолированные. Равносильное последнему условие: все множества открыты в X.

Семейство $\mathcal{B}$ подмножеств множества X называется *базой* пространства X, $\mathcal{T}$, если $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ и каждое открытое в X множество можно представить в виде объединения некоторого семейства множеств, принадлежащих $\mathcal{B}$.

Базой пространства X *в точке* $x \in X$ называется любое семейство γ окрестностей этой точки, удовлетворяющее условию: какова бы ни была окрестность Ox точки x, найдется $U \in \gamma$ такое, что $x \in U \subset Ox$.

Сетью пространства X называется любое семейство S подмножеств множества X такое, что для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности Ox найдется $P \in S$ такое, что $x \in P \subset Ox$.

Очевидно, база пространства — это сеть этого пространства, состоящая из открытых множеств.

Множество $A \subset X$ называется *всюду плотным* в пространстве X, если $\bar{A} = X$.

Семейство γ непустых открытых множеств называется *π-базой* пространства X *в точке* x, если каждая окрестность точки x содержит некоторый элемент семейства γ. Если γ является π-базой пространства X в каждой его точке, то γ называется *π-базой* пространства X.

Симметрикой d на множестве X называется неотрицательная вещественная функция $d: X \times X \to \mathbf{R}$, удовлетворяющая условиям: 1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ и 2) $d(x, y) = d(y, x)$ для всех x, $y \in X$. Если выполняется еще и неравенство треугольника: 3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ для всех x, y, $z \in X$, то симметрика d называется *метрикой* на X.

Пусть d — симметрика на X. Число $d(x, y)$ называется *расстоянием между точками* x, $y \in X$.

Расстоянием от точки $x \in X$ *до множества* $A \subset X$ в X, d называется число $d(x, A) = \inf \{d(x, y) : y \in A\}$.

Симметрика d порождает топологию $\mathcal{T}_d$ на множестве X по правилу: множество $U \subset X$ открыто в X, если для каждой точки $x \in U$ расстояние $d(x, X \setminus U) > 0$. Очевидно, множество $A \subset X$ замкнуто в пространстве X, $\mathcal{T}_d$ в том и только том случае, если $d(x, A) > 0$ для всех $x \in X \setminus A$.

Естественные топологии на множествах возникают не только в связи с понятием расстояния.

Пусть $X, <$ — линейно упорядоченное множество, в котором нет ни наибольшего, ни наименьшего элемента. Для любых a, $b \in X$ положим $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$.

Множество (a, b) называется *интервалом в* $X, <$ *с концами* a *и* b.

Определим топологию $\mathcal{T}_<$ на X так: множество $U \subset X$ от-

крыто в том и только том случае, если оно является объединением некоторого семейства интервалов (a, b). Семейство $\mathscr{B}=\{(a, b): a, b\in X\}$ образует базу пространства $X, \mathscr{T}_<$.

Пусть $X, \mathscr{T}$ — топологическое пространство. Если на X существует метрика d такая, что порожденная ею топология $\mathscr{T}_d$ совпадает с $\mathscr{T}$, то пространство $X, \mathscr{T}$ называется *метризуемым*. Если на X существует линейное упорядочение $<$, для которого $\mathscr{T}_<=\mathscr{T}$, то пространство $X, \mathscr{T}$ называется *линейно упорядоченным* пространством.

Открытое покрытие пространства X — это семейство γ открытых в X множеств, для которого $\bigcup\gamma=X$.

Пространство X *компактно,* если из каждого открытого покрытия пространства X можно выделить конечное покрытие.

Пространство X *финально компактно,* если из каждого открытого покрытия пространства X можно выделить счетное покрытие.

Пространство X *счетно компактно,* если из каждого счетного открытого покрытия этого пространства можно выделить конечное покрытие.

Семейство $\mu=\{U_\alpha: \alpha\in A\}$ подмножеств топологического пространства X называется *локально-конечным (дискретным)* в X, если у каждой точки $x\in X$ есть окрестность Ox, для которой множество $\{\alpha\in A: Ox\cap U_\alpha\neq\varnothing\}$ конечно (состоит не более чем из одного элемента).

Естественными ограничениями на топологические пространства являются аксиомы отделимости.

Пространство X называется:

T_1-*пространством,* если все конечные множества замкнуты в X;

T_2-*пространством,* или *хаусдорфовым,* если у любых различных точек $x, y\in X$ найдутся непересекающиеся окрестности;

T_3-*пространством,* или *регулярным,* если оно — T_1-пространство и для любого замкнутого множества $A\subset X$ и любой точки $x\in X\setminus A$ найдутся непересекающиеся открытые множества U и V такие, что $A\subset U$ и $x\in V$;

T_4-*пространством,* или *нормальным,* если оно — T_1-пространство и у любых непересекающихся замкнутых множеств A и B есть непересекающиеся окрестности.

Регулярные финально компактные пространства называются *линделефовыми* пространствами.

Пусть $X, \mathscr{T}$ — топологическое пространство и $Y\subset X$. *Сужение* $\mathscr{T}_Y$ *топологии* $\mathscr{T}$ *на множество* Y есть семейство $\{U\cap Y: U\in\mathscr{T}\}$ всех следов на Y открытых в X множеств. Очевидно, $\mathscr{T}_Y$ — топология на Y; наделенное этой топологией Y называется *подпространством* пространства $X, \mathscr{T}$.

Пусть $X, \mathscr{T}_1$ и $Y, \mathscr{T}_2$ — топологические пространства. Отображение $f: X\to Y$ называется *непрерывным отображением* первого пространства во второе, если прообраз каждого открытого в Y множества открыт в X: $\{f^{-1}V: V\in\mathscr{T}_2\}\subset\mathscr{T}_1$.

Возьмем произвольное семейство $\{X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha : \alpha \in A\}$ топологических пространств X_α, $\mathcal{T}_\alpha$ и на произведении $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ множеств X_α определим топологию $\mathcal{T}$ следующим образом. Пусть $\mathcal{B}$ — семейство всех множеств в X, представимых в виде пересечения конечного числа элементов семейства $\{f_\alpha^{-1} U_\alpha : U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \alpha \in A\}$. Тогда семейство $\mathcal{T}$ всех множеств, представимых в виде объединения некоторого множества элементов семейства $\mathcal{B}$, составляет топологию на X, называемую *топологией произведения* (или *тихоновской топологией произведения*), а пространство X, $\mathcal{T}$ называется *произведением* пространств X_α, $\mathcal{T}_\alpha$ по $\alpha \in A$; пишут при этом: $(X, \mathcal{T}) = \Pi\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ или коротко: $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Все отображения проектирования $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ непрерывны, и можно показать, что топология $\mathcal{T}$ на X — наименьшая из всех топологий, для которых это условие выполняется.

Укажем основные кардинальные инварианты топологических пространств.

Многие из даваемых ниже определений в самой своей формулировке используют фундаментальную теорему о том, что в каждом непустом множестве кардинальных чисел есть наименьший элемент.

Всюду ниже X — топологическое пространство.

Мощность $|X|$ пространства X — это мощность множества X.

Вес $w(X)$ пространства X равен минимуму мощностей баз пространства X.

Сетевой вес $nw(X)$ пространства X равен минимуму мощностей сетей пространства X.

Через $\pi w(X)$ обозначается *π-вес* пространства X, равный минимуму мощностей π-баз этого пространства.

Плотность $d(X)$ пространства X есть минимум мощностей всюду плотных в X множеств.

Число Линделефа $l(X)$ пространства X — это наименьший кардинал τ такой, что из каждого открытого покрытия пространства X можно выделить подпокрытие мощности $\leqslant \tau$.

Числом Суслина $c(X)$ пространства X называется наименьший кардинал τ такой, что мощность каждого дизъюнктного семейства непустых открытых множеств в X не превосходит τ.

Спрэд $s(X)$ пространства X — это наименьший кардинал τ, для которого мощность каждого дискретного подпространства пространства X не превосходит τ.

Экстентом $e(X)$ пространства X называется наименьший кардинал τ, для которого мощность каждого замкнутого дискретного подпространства этого пространства ие превосходит τ.

Если в X есть счетное всюду плотное множество, то пространство X называется *сепарабельным*.

Пространством с первой аксиомой счетности называется пространство, которое в каждой точке имеет счетную базу.

Через $\psi(x, X)$, где $x\in X$, обозначается минимум мощностей баз пространства X в точке x.

Через $\chi(x, X)$, где $x\in X$, обозначается минимум мощностей семейств γ открытых множеств таких, что $\bigcap\gamma=\{x\}$.

Кардинал $\chi(x, X)$ ($\psi(x, X)$) называется *характером (псевдохарактером) пространства X в точке x.* Наименьший кардинал τ такой, что $\chi(x, X)\leqslant\tau$ ($\psi(x, X)\leqslant\tau$), обозначается через $\chi(X)$ (через $\psi(X)$) и называется *характером (псевдохарактером) пространства X.*

Теснота $t(x, X)$ *пространства X в точке* $x\in X$ — это наименьший кардинал τ такой, что если $x\in\bar{A}$, то найдется множество $B\subset A$, для которого $|B|\leqslant\tau$ и $x\in\bar{B}$.

Наименьший кардинал τ, для которого $t(x, X)\leqslant\tau$ при всех $x\in X$, называется *теснотой пространства* X и обозначается $t(X)$.

Минимум мощностей π-баз пространства X в точке $x\in X$ обозначается $\pi\chi(x, X)$ и называется *π-характером пространства X в x.* Наименьший кардинал τ, для которого $\pi\chi(x, X)\leqslant\tau$ при всех $x\in X$, называется *π-характером пространства X* и обозначается $\pi\chi(X)$.

Пусть X — топологическое пространство и A — множество. Через X^A обозначается топологическое произведение $\Pi\{X_\alpha: \alpha\in A\}$, где A — множество мощности τ и $X_\alpha=X$ при всех $\alpha\in A$. *Обобщенный канторов дисконтинуум веса* τ — это пространство D^A, где $D=\{0, 1\}$ — дискретное пространство, состоящее из двух точек, и $|A|=\tau$. Далее рассматривается также пространство $\mathbf{R}^X$, где $\mathbf{R}$ — вещественная прямая с обычной топологией, порожденной метрикой или порядком. Очевидно, $\mathbf{R}^X$ — множество всех вещественных функций на X. В $\mathbf{R}^X$ выделяется подмножество $C(X)$, состоящее из всех непрерывных на пространстве X вещественных функций. Наделенное топологией подпространства топологического произведения множество $C(X)$ обозначается $C_p(X)$ и называется *пространством непрерывных вещественных функций на X в топологии поточечной сходимости.*

Пусть $X=\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ — топологическое произведение топологических пространств X_α и $x^*\in X$ — некоторая фиксированная точка, $x^*=\{x^*_\alpha\}_{\alpha\in A}$, где $x^*_\alpha\in X_\alpha$. Через $\sum\limits_{x^*}\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ обозначается тогда подпространство топологического произведения X, состоящее из всех точек $x\in X$, отличающихся от x^* лишь на счетном множестве координат. Таким образом, $\sum\limits_{x^*}\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha=$ $=\left\{x\in\prod\limits_{\alpha\in A} X_{\alpha^*}: |\{\alpha\in A: x_\alpha\neq x^*_\alpha\}|\leqslant\aleph_0\right\}$. Подпространство

$\sigma\prod_{x^*\alpha\in A} X_\alpha$ пространства X состоит из всех $x=\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ таких, что множество $\{\alpha\in A: x_\alpha\neq x_{\alpha^*}\}$ конечно. Называются пространства $\sum_{x^*}\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ и $\sigma\prod_{x^*\alpha\in A} X_\alpha$ соответственно Σ-*произведением* и σ-*произведением* пространств X_α.

Компактами называются далее компактные хаусдорфовы пространства. *Диадические компакты* — это компакты, на которые можно непрерывно отобразить пространство D^A при подходящем A.

Топологическое пространство X называется *тихоновским* (или *вполне регулярным*), если все конечные множества в X замкнуты и для каждого замкнутого в X множества A и любой точки $x\in X\setminus A$ найдется непрерывная вещественная функция $f: X\to\mathbf{R}$ такая, что $f(x)=0$ и $f(y)=1$ при всех $y\in A$.

1. Пусть X — бесконечное множество и $\mathcal{T}_{\text{fin}}=\{A\subset X: X\setminus A$ конечно или $A=\varnothing\}$. Докажите, что: а) $\mathcal{T}_{\text{fin}}$ — топология на X; б) $X, \mathcal{T}_{\text{fin}}$ — T_1-пространство; в) любые два непустые открытые в $X, \mathcal{T}_{\text{fin}}$ множества пересекаются; г) $X, \mathcal{T}_{\text{fin}}$ компактно; д) каждая точка $x\in X$ является точкой прикосновения для любого бесконечного множества $A\subset X$; е) в $X, \mathcal{T}_{\text{fin}}$ есть счетное всюду плотное множество, т. е. пространство $X, \mathcal{T}_{\text{fin}}$ сепарабельно; ж) вес пространства $X, \mathcal{T}_{\text{fin}}$ равен мощности X.

2. Чему равен π-вес пространства $X, \mathcal{T}_{\text{fin}}$, определенного в задаче 1?

3. Покажите, что для метризуемого пространства плотность, вес, число Суслина и экстент равны.

4. Всякое ли подпространство сепарабельного пространства сепарабельно?

5. Покажите, что если пространство X обладает счетной сетью, то каждое подпространство пространства X сепарабельно.

6. Покажите, что если X — пространство со счетной сетью, то из каждого открытого покрытия пространства X можно выделить счетное подпокрытие, т. е. X финально компактно.

7. Верно ли, что если в пространстве X есть счетное всюду плотное множество, то X обладает счетной сетью?

8*. Пусть X — нормальное сепарабельное пространство. Покажите, что если $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, то каждое замкнутое дискретное подпространство пространства X счетно (т. е. $e(X)\leqslant\aleph_0$).

9. Покажите, что вес (сетевой вес) подпространства всегда не превосходит веса (сетевого веса) всего пространства.

10. Пусть $f: X\to Y$ непрерывное отображение топологического пространства X на топологическое пространство Y. Верно ли тогда, что вес Y не превосходит веса X? Верно ли, что сетевой вес пространства Y не превосходит сетевого веса пространства X?

11. Покажите, что если подпространство Y пространства X всюду плотно в X, то $c(Y)=c(X)$.

12*. Пусть X — пространство со счетной базой. Верно ли, что из каждой базы $\mathscr{B}$ пространства X можно выделить счетную базу?

13*. Пусть X — пространство со счетной сетью. Верно ли, что из каждой сети S пространства X можно выделить счетную сеть?

14. Пусть $X=\bigcup\{X_\alpha : \alpha\in A\}$, где X — топологическое пространство и X_α — его подпространства, причем $nw(X_\alpha)\leqslant\tau$ для всех $\alpha\in A$, где τ — некоторый бесконечный кардинал. Предположим также, что $|A|\leqslant\tau$. Покажите, что тогда $nw(X)\leqslant\tau$.

15. Приведите пример пространства X и его подпространств Y и Z таких, что $X=Y\cup Z$, каждое из пространств Y и Z имеет счетную базу, а у пространства X счетной базы нет.

16*. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство со счетной сетью. Покажите, что тогда пространство X обладает и счетной базой.

17. Верно ли, что каждое сепарабельное пространство с первой аксиомой счетности имеет счетную базу (счетную сеть)?

18. Каждое ли пространство со счетной сетью, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, обладает счетной базой?

19. Пусть X — сепарабельное пространство. Покажите, что тогда в каждом несчетном семействе непустых открытых множеств пространства X найдется несчетное подсемейство, пересечение которого непусто.

20. Каждое ли регулярное счетное пространство имеет счетную базу?

21. Каждое ли регулярное счетное пространство обладает счетной π-базой?

22. Верно ли, что если пространство X регулярно и точка $x\in X$ является пересечением счетного семейства открытых в X множеств, то X имеет счетную базу в точке x?

23. Приведите пример нормального пространства X, для которого $\psi(X)<\chi(X)$.

24. Покажите, что если X — компактное хаусдорфово пространство, то $\psi(x, X)=\chi(x, X)$ для каждой точки $x\in X$.

25. Верно ли для произвольного компактного пространства X, что $\psi(X)=\chi(X)$?

26. Покажите, что вес пространства X не превосходит $|X|\times\chi(X)$.

27. Покажите, что всегда $\pi w(X)\leqslant d(X)\cdot\chi(X)$.

28. Пусть X — регулярное пространство и A — всюду плотное в X множество. Постройте в X базу мощности $\leqslant 2^{|A|}$.

29. Покажите, что $w(X)\leqslant 2^{d(X)}$ для каждого регулярного пространства X.

30. Пусть X — регулярное пространство и подпространство $Y\subset X$ всюду плотно в X. Покажите, что $\chi(y, Y)=\chi(y, X)$ для всех $y\in Y$.

31. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и пространство Y всюду плотно в X. Предположим, что точка $y \in Y$ является пересечением счетного семейства открытых в Y множеств (т. е. $\psi(y, Y) \leqslant \aleph_0$). Верно ли тогда, что точка x представима в виде пересечения счетного семейства открытых в X множеств?

32. Пусть $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ — топологическое произведение сепарабельных пространств X_α и $|A| \leqslant 2^{\aleph_0}$. Покажите, что пространство X тогда тоже сепарабельно (т. е. в X есть счетное всюду плотное множество).

33. Пусть $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ — топологическое произведение сепарабельных пространств X_α. Покажите, что тогда число Суслина пространства X счетно, т. е. мощность каждой системы непустых попарно непересекающихся открытых в X множеств не превосходит $\aleph_0$. (Заметьте, что на мощность A нет ограничений!)

34. Кардинал τ называется *калибром* пространства X, если каждое семейство γ мощности τ непустых открытых в X множеств содержит подсемейство γ' мощности τ, пересечение которого непусто.

Покажите, что если в пространстве X есть всюду плотное множество мощности $\leqslant \tau$, то кардинал τ^+ является калибром пространства X.

35. Точка x пространства X называется *точкой прикосновения центрированной системы множеств* ξ на X, если $x \in \bar{A}$ для всех $A \in \xi$.

Покажите, что пространство X компактно в том и только том случае, если каждая максимальная центрированная система множеств на X обладает в X точкой прикосновения.

36. Точка x пространства X называется *точкой полного накопления* для множества $A \subset X$, если каждая окрестность Ox точки x пересекается с A по равномощному с A множеству, т. е. $|Ox \cap A| = |A|$.

Покажите, что пространство X компактно в том и только том случае, если для каждого бесконечного множества $A \subset X$ в X существует точка полного накопления.

37. Пусть $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ — топологическое произведение пространств X_α, $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ — проектирование, ξ — максимальная центрированная система на X и $\xi_\alpha = \{\pi_\alpha(P) : P \in \xi\}$. Предположим, что $x_\alpha \in X_\alpha$ — точка прикосновения системы ξ_α в пространстве X_α для каждого $\alpha \in A$. Покажите, что тогда точка $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \in X$ является точкой прикосновения системы ξ в пространстве X.

38. Покажите, что топологическое произведение любого

множества компактных пространств является компактным пространством.

39. Покажите, что пространства D^A и I^A компактны для любого множества A (где $D=\{0, 1\}$ и $I=[0, 1]\subset\mathbf{R}$ — отрезок с обычной топологией). Пространства I^A называются *тихоновскими кубами.*

40. Покажите, что $\aleph_1$ является калибром пространства I^A (пространства D^A) при любом A.

41. Пусть $\aleph_1$ — калибр компактного хаусдорфова пространства X. Верно ли, что X сепарабельно?

42. Верно ли, что если регулярное пространство X сепарабельно, то $|X|\leqslant 2^{\aleph_0}$?

43. Покажите, что всегда $c(X)\leqslant d(X)\leqslant \pi w(X)$ и $d(X)\leqslant nw(X)$.

44. Если X — хаусдорфово пространство веса $\leqslant\tau$, то $|X|\leqslant 2^{2^\tau}$. Можно ли отказаться здесь от аксиомы Хаусдорфа?

45. Пусть X — хаусдорфово пространство и A — всюду плотное в X множество. Покажите, что тогда

$$|X|\leqslant \exp\exp|A|.$$

46**. Покажите, что если хаусдорфово пространство X с первой аксиомой счетности удовлетворяет условию Суслина, то $|X|\leqslant 2^{\aleph_0}$ [6, гл. II, № 131].

47. Приведите пример нормального пространства со счетной сетью, но без счетной базы [6, гл. II, № 140].

48. Пусть τ — бесконечный кардинал. Покажите, что на каждом множестве X мощности $\leqslant 2^{2^\tau}$ существует регулярная топология веса $\leqslant\tau$ [6, гл. II, № 377].

49. Пусть $X=\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, где X_α — неодноточечное хаусдорфово пространство веса $\leqslant\tau$ для каждого $\alpha\in A$ и $|A|=\tau\geqslant\aleph_0$. Покажите, что тогда вес X равен τ и характер пространства X в каждой точке равен τ.

50. Пусть $X=\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ — топологическое произведение, где $d(X_\alpha)\leqslant\tau$ для всех $\alpha\in A$, и $|A|\leqslant 2^\tau$, $\tau\geqslant\aleph_0$.

Покажите, что тогда $d(X)\leqslant\tau$.

51. Пусть $X, <$ — вполне упорядоченное множество, в котором есть наибольший элемент, наделенное порядковой топологией $\mathcal{T}_<$. Покажите, что пространство $X, \mathcal{T}_<$ компактно.

52. Пространство X называется *связным,* если в нем нет отличных от X непустых открытых в X множеств, замкнутых в X.

Покажите, что всякое линейно упорядоченное связное сепарабельное пространство обладает счетной базой [6, гл. II, № 86].

53. Верно ли, что каждое линейно упорядоченное сепарабельное пространство имеет счетную базу?

54. Верно ли, что произведение двух финально компактных

пространств финально компактно?

55. Верно ли, что произведение двух счетно компактных пространств счетно компактно?

56. Покажите, что каждое счетно компактное пространство со счетной сетью компактно.

57*. Постройте сепарабельное счетно компактное регулярное пространство, которое некомпактно.

58. Пусть X — топологическое пространство. Вполне упорядоченное подмножество $Y, <$ пространства X назовем *свободной последовательностью* в X, если для каждого $y \in Y$ выполняется условие:

$$\overline{\{y' \in Y : y' < y\}} \cap \overline{\{y' \in Y : y \leqslant y'\}} = \varnothing.$$

Покажите, что теснота $t(X)$ компактного хаусдорфова пространства X счетна в том и только том случае, если мощность каждой свободной последовательности $Y, <$ в X не превосходит $\aleph_0$ [6, гл. III, № 142].

59. Пусть X — множество мощности $\aleph_1, <$ — порождающее вполне упорядочение на X и $\mathscr{T}_<$ — порожденная им топология. Покажите, что пространство $X, \mathscr{T}_<$ счетно компактно, удовлетворяет первой аксиоме счетности, нормально, но некомпактно.

60. Пусть $\mathscr{B}_S$ — семейство всех подмножеств вещественной прямой $\mathbf{R}$ вида $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x < b\}$, где $a < b$, $a, b \in \mathbf{R}$. Через $\mathscr{T}_S$ обозначим семейство всех множеств, представимых в виде объединения некоторого множества элементов семейства $\mathscr{B}_S$. Тогда $\mathscr{T}_S$ — топология на $\mathbf{R}$ и $\mathscr{B}_S$ — ее база. Пространство $\mathbf{R}, \mathscr{T}_S$ называется *прямой Зоргенфрея*.

Покажите, что прямая Зоргенфрея является нормальным сепарабельным пространством с первой аксиомой счетности, но что в $\mathbf{R}, \mathscr{T}_S$ нет счетной сети.

61. Покажите, что прямая Зоргенфрея (см. задачу 60) финально компактна, но что ее топологический квадрат не является ни финально компактным, ни нормальным пространством.

62. Существует ли счетное компактное T_1-пространство без счетной базы? [6, гл. III, № 110].

63*. Покажите, что если компактное хаусдорфово пространство X не имеет изолированных точек, то $|X| \geqslant 2^{\aleph_0}$ [6, гл. III, № 126].

64*. Пусть выполняется континуум-гипотеза: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Покажите, что тогда каждое непустое компактное хаусдорфово пространство мощности $\leqslant 2^{\aleph_0}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности хотя бы в одной точке [6, гл. III, № 127].

65*. Покажите, что если компактное хаусдорфово пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности во всех точках, то либо $|X| \leqslant \aleph_0$, либо $|X| \geqslant 2^{\aleph_0}$ [6, гл. III, № 128].

66. Покажите, что для каждого бесконечного кардинала τ

существует компактное T_1-пространство мощности τ без изолированных точек (ср. с задачей 63).

67. Покажите, что вес компактного хаусдорфова пространства не превосходит его мощности [6, гл. III, № 107]. Верно ли это для произвольных компактных пространств?

68. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и $X=Y\cup Z$, где вес Y и вес Z не превосходят $\tau\geqslant\aleph_0$. Покажите, что тогда и вес X не больше, чем τ [6, гл. III, № 108].

69. Пусть A_τ — пространство мощности τ (где $\tau\geqslant\aleph_0$), в котором все точки изолированы, кроме одной точки a_τ, а окрестностями точки a_τ служат все множества $U\subset A_\tau$, дополнение до которых конечно. Пространство A_τ называется *суперпоследовательностью Александрова мощности* τ.

Покажите, что A_τ компактно, нормально, имеет счетную тесноту, но $\chi(A_\tau)=w(A_\tau)=|A_\tau|=c(A_\tau)=\tau$, т. е. при $\tau>\aleph_0$ пространство A_τ не удовлетворяет первой аксиоме счетности (в одной лишь точке — a_τ).

70. Покажите, что если X — компактное хаусдорфово пространство счетного спрэда, то теснота пространства X счетна.

71. Пусть X — сепарабельное пространство счетной тесноты. Покажите, что тогда каждое всюду плотное в X подпространство $Y\subset X$ сепарабельно.

72. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство счетной тесноты и $X\neq\varnothing$. Покажите, что найдутся тогда счетное множество $A\subset X$ и непустое замкнутое множество F типа G_δ в X, для которых $F\subset\bar{A}$.

73*. Пространство X называется $\aleph_0$-*монолитным*, если замыкание каждого счетного множества в X является пространством со счетной базой. Компактами называются компактные хаусдорфовы пространства.

Покажите, что каждый непустой $\aleph_0$-монолитный компакт счетной тесноты удовлетворяет первой аксиоме счетности хотя бы в одной точке.

74*. Пространство X называется *секвенциальным,* если из $x\in X$, $A\subset X$ и $x\in\bar{A}$ следует, что существует последовательность $\{x_n : n\in\mathbf{N}\}$ точек множества A, сходящаяся к x (последнее означает, что всякая окрестность точки x содержит все x_n при достаточно больших n).

Исходя из CH, покажите, что каждое непустое секвенциальное компактное хаусдорфово пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности хотя бы в одной точке

75*. Покажите, что если компактное хаусдорфово пространство X секвенциально и его число Суслина счетно, то $|X|\leqslant 2^{\aleph_0}$ [6, гл. III, № 149].

76**. Покажите, что мощность каждого компактного хаусдорфова пространства X с первой аксиомой счетности не превосходит $2^{\aleph_0}$ [6, гл. III, № 153].

77**. Пусть X — хаусдорфово финально компактное пространство. Покажите, что $|X|\leqslant 2^{\chi(X)}$.

78**. Покажите, что для каждого компактного T_1-пространства X с первой аксиомой счетности $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$.

79°. Пусть X — финально компактное T_1-пространство с первой аксиомой счетности. Верно ли, что $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$?

80*. Пусть X — регулярное финально компактное пространство, в котором каждая точка — типа G_δ. Покажите, что кардинал $|X|$ неизмерим.

81°. Пусть X — регулярное финально компактное пространство, в котором каждая точка — типа G_δ. Верно ли, что $|X| \leqslant \leqslant \exp\exp \aleph_0$? Можно ли указать «наивный» пример такого X, как выше, и мощности, большей, чем $2^{\aleph_0}$?

82**. Пусть X — хаусдорфово финально компактное пространство счетной тесноты, в котором каждая точка — типа G_δ. Покажите, что тогда $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$ [6, 13].

83**. Пусть X — компакт счетной тесноты. Покажите, что тогда пространство X имеет счетную π-базу в каждой точке $x \in X$.

84*. Покажите, что сепарабельный компакт счетной тесноты имеет счетный π-вес.

85*. Покажите, что если кардинал $\aleph_1$ является калибром компакта X счетной тесноты, то этот компакт сепарабелен.

86. Пусть X — регулярное пространство, каждое подпространство которого финально компактно. Покажите, что тогда каждое замкнутое в X множество типа G_δ, т. е. является пересечением счетного семейства открытых в X множеств.

87. Пусть X — регулярное пространство, каждое подпространство которого финально компактно. Покажите, что $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.: ОНТИ, 1934.
2. Александров П. С. Введенне в теорню множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
3. Френкель А, Бар-Хиллел И. Основания теорни множеств. М.: Мир, 1966.
4. Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств. М.: Наука, 1982.
5. Кантор Г. Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985.
6. Архангельский А. В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
7. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
8. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М : Мир, 1973.
9. Коен П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Мир, 1969.
10. Шенфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975.
11. Halmos P. Naive Set Theory. N. Y., 1960.
12. Rudin M. E. Lectures on Set Theoretic Topology. Providence, R. I., 1975.
13. Juhász I. Cardinal functions in Topology. Amsterdam, 1971.
14. Kuratowski K., Mostowski A. Set Theory. Amsterdam, 1976.
15. Comfort W. W., Negrepontis S. The Theory of Ultrafilters. Berlin, 1974.
16. Kunen K. Set Theory. Amsterdam, 1980.
17. Fremlin D. H. Consequences of Martin's Axiom. L., 1984.
18. Handbook of Set-Theoretic Topology/Ed. K. Kunen and J. E. Vaghan. Amsterdam, 1984.
19. Sierpinski W. Cardinal and ordinal numbers. Warzawa, 1965.

Учебное издание

Архангельский Александр Владимирович

КАНТОРОВСКАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Зав. редакцией *С. И. Зеленский*
Редактор *Г. Е. Горелик*
Художественный редактор *Е. М. Дёмина*
Технический редактор *Н. И. Смирнова*
Корректоры *В. П. Кададинская, Н. И. Коновалова*

ИБ № 2958

Сдано в набор 24 09 87 Подписано в печать 11 03 88 Формат 60×90/16. Бумага тип. № 3 Гарнитура литературная Печать высокая. Усл. печ. л. 7,0 Уч.-изд. л 7,21 Тираж 6670 экз. Заказ 198. Изд. № 4870. Цена 25 коп.

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.
Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы