В.П. Маслов, М.В. Федорюк

Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 4
Введение 5

Часть I

Квантование поля скоростей (канонический оператор)

§ 1. Метод стационарной фазы. Преобразование Лежандра 36
§ 2. Псевдодифференциальные операторы 56
§ 3. Уравнение Гамильтона — Якоби. Система Гамильтона 76
§ 4. Лагранжевы многообразия и канонические преобразования 106
§ 5. Преобразование Фурье λ-псевдодифференциального оператора (переход в p-представление) 123
§ 6. Предканонический оператор (квантование поля скоростей в малом) 130
§ 7. Индекс кривой на лагранжевом многообразии 146
§ 8. Канонический оператор (квантование поля скоростей в целом) 159
§ 9. Квантование поля скоростей в целом. Высшие приближения 176

Часть II

Квазиклассическое приближение для нерелятивистских и релятивистских уравнений квантовой механики

§ 10. Задача Коши с быстро осциллирующими начальными данными для скалярных гамильтонианов 181
§ 11. Матричные гамильтонианы 201
§ 12. Квазиклассическая асимптотика задачи Коши для уравнения Шредингера 232
§ 13. Асимптотические серии собственных значений (правило квантования Бора) 258
§ 14. Квазиклассические приближения для релятивистского уравнения Дирака 281
Литература 292

ВВЕДЕНИЕ

1. Различные задачи математической и теоретической физики приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными, которые содержат малый параметр при старших производных. Для построения приближенных решений таких уравнений издавна применяются асимптотические методы.

В последние десятилетия асимптотические методы линейной математической физики переживают период расцвета. Сфера действия этих методов расширяется: они не только продолжают применяться в традиционных разделах математической физики, но и оказывают существенное влияние на развитие общей теории дифференциальных уравнений с частными производными. В последнее время выяснилось, что существует единый подход к целому ряду задач, которые на первый взгляд весьма далеки друг от друга. Именно, одни и те же методы применяются к задаче об исследовании особенностей элементарных решений дифференциальных уравнений, к вопросам локальной разрешимости дифференциальных уравнений, к исследованию асимптотики решения задачи Коши с быстро осциллирующими начальными данными, к задаче о распространении разрывов фундаментального решения гиперболического уравнения, к задаче о рассеянии в квазиклассическом приближении для уравнений квантовой механики, к построению высокочастотной асимптотики задач теории дифракции волн, к задачам об асимптотике собственных значений и собственных функций дифференциальных операторов, к исследованию особенностей решений дифференциальных уравнений с частными производными с аналитическими коэффициентами и к другим задачам.

В настоящей книге излагается один из основных асимптотических методов линейной математической физики — метод канонического оператора и приводится ряд приложений метода к конкретным задачам. Этот метод позволяет построить асимптотику в целом решения задачи

Коши с быстро осциллирующими начальными данными, решения задачи о поле точечного источника в неоднородной среде в коротковолновом приближении и решений ряда других задач. Мы надеемся, что возможности метода канонического оператора далеко не исчерпаны; в частности, этот метод, несомненно, найдет применение к краевым задачам математической физики.

Метод канонического оператора является отражением глубокого дуализма волна — частица: в квазиклассическом приближении квантовомеханические величины описываются в терминах классической механики, а законы волновой оптики переходят в законы геометрической оптики. Математическим эквивалентом этого дуализма служит двойственность, связывающая преобразование Фурье и касательные преобразования.

В основе метода канонического оператора лежат идеи, восходящие к П. Дебаю, Г. Биркгофу [73], В. А. Фоку [62], С. Л. Соболеву [52], Ж. Лере [34] и многим другим математикам и физикам.

Во введении к настоящей книге мы постарались, отвлекаясь от необходимых, но достаточно громоздких, технических деталей, изложить все основные идеи, методы и результаты настоящей книги.

2. Типичным примером задач, которые рассматриваются в настоящей книге, является задача Коши с быстро осциллирующими начальными данными для уравнения Шредингера

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi, \tag{0.1}$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x)\exp\left[\frac{i}{h}S_0(x)\right]. \tag{0.2}$$

Здесь $x \in \mathbf{R}^n$, функции $V(x)$, $S_0(x)$ вещественнозначны и бесконечно дифференцируемы, функция $\psi_0(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, т. е. финитна и бесконечно дифференцируема. Требуется вычислить асимптотику решения задачи (0.1), (0.2) при $h \to +0$ и при $x \in \mathbf{R}^n$, $0 \leqslant t \leqslant T$, т. е. за любое конечное время T.

Соответствующие асимптотические формулы носят название *«квазиклассическое приближение»* или *«квазиклассическая асимптотика»*.

Обобщая эту задачу, рассмотрим уравнение

$$L(x, \lambda^{-1}D_x)\,u(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \tag{0.3}$$

во всем пространстве $\mathbf{R}^n$. Здесь $\lambda > 0$ — большой параметр, L — дифференциальный оператор

$$L(x, \lambda^{-1}D_x) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x)\,(\lambda^{-1}D_x)^\alpha$$

и приняты стандартные обозначения: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $\alpha_j \geqslant 0$ — целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$,

$$D_x = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

$$D_x^\alpha = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

Функция

$$L(x, p) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x)\,p^\alpha$$

называется *символом* оператора L (здесь $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$).

Уравнение Шредингера (0.1), очевидно, имеет вид (0.3), где $\lambda = h^{-1}$:

$$L(t, x, E, p) = E + \frac{h^2}{2m}\langle p, p\rangle + V(x)$$

(E — двойственная к t переменная). Угловыми скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ здесь и далее обозначается скалярное произведение (неэрмитово).

Многие уравнения математической физики также имеют вид (0.3), например уравнение Гельмгольца — уравнение волновой оптики и волновой акустики:

$$(\Delta + k^2 n^2(x))\,u(x) = 0.$$

В данном случае $k = \lambda$, а символ L (после деления на k^2) имеет вид

$$L(x, p) = -\langle p, p\rangle + n^2(x).$$

Асимптотические (при $k \to +\infty$) формулы для решений уравнения Гельмгольца называются *коротковолновыми* (или *высокочастотными*) *асимптотиками*.

Вид (0.3) имеют также система уравнений Максвелла, система Дирака, система линейной теории упругости и многие другие.

Нас интересует асимптотика при $\lambda \to +\infty$ некоторого решения уравнения (0.3) во всем пространстве $\mathbf{R}_x^n$. Не будем пока уточнять постановку задачи; в качестве примера можно представить себе задачу о рассеянии для уравнения Гельмгольца.

Начнем с еще более простой задачи о построении асимптотического решения при $\lambda \to +\infty$ уравнения (0.3) в некоторой области пространства $\mathbf{R}_x^n$. Решив эту локальную задачу, можно затем попытаться сшить из локальных решений решение в целом.

Задача о построении асимптотики решений, как известно, состоит из двух частей: 1) построение формального асимптотического решения; 2) строгое обоснование полученной асимптотики.

Методы решения этих двух задач, как правило, абсолютно различны, и во введении будет рассматриваться только первая из них.

Сделаем еще одно замечание с тем, чтобы не возвращаться к этому вопросу.

Замечание. Коэффициенты оператора L предполагаются бесконечно дифференцируемыми при всех $x \in \mathbf{R}^n$, а в случае надобности — финитными или же быстро выходящими на константы при $|x| \to \infty$. Символ $L(x, p)$ вещественнозначен. Далее, во введении мы позволим себе излагать все факты на уровне общего положения, т. е. писать утверждения, которые становятся математически корректными после добавления естественных предположений. Корректное изложение всех этих фактов и составляет содержание настоящей книги.

3. Будем искать решение уравнения (0.3) в виде формального ряда

$$u(x, \lambda) = \exp[i\lambda S(x)] \sum_{j=0}^{\infty} (i\lambda)^{-j} \varphi_j(x), \tag{0.4}$$

где $S(x)$, $\varphi_j(x)$ — неизвестные функции. Если коэффициенты оператора L постоянны, то уравнение (0.3) имеет точные решения в виде плоских волн

$$u(x, \lambda) = \exp[i\lambda \langle x, p\rangle],$$

где p — постоянный вектор. Функцию (0.4) можно интерпретировать как искаженную плоскую волну.

Этот метод — искать решение в виде (0.4) — издавна, еще со времен Грина и Лиувилля (1837 г.), был известен в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Для уравнений с частными производными этот метод был предложен знаменитым английским физиком и математиком П. Дебаем в 1911 г., а также Вентцелем, Бриллюэном, Крамерсом для задач кантовой механики (метод ВКБ).

Подставим ряд (0.4) в уравнение (0.3), сократим на экспоненту $\exp(i\lambda S)$ обе части полученного уравнения и приравняем к нулю коэффициенты при степенях $(i\lambda)^0$, $(i\lambda)^{-1}$. Коэффициент при $(i\lambda)^0$ равен $L(x, \partial S(x)/\partial x)\varphi_0(x)$; отсюда находим, что

$$L\left(x, \frac{\partial S(x)}{\partial x}\right) = 0. \qquad (0.5)$$

Для уравнения Шредингера уравнение (0.5) есть уравнение Гамильтона — Якоби классической механики:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla_x S)^2 + V(x) = 0. \qquad (0.6)$$

Решение уравнения (0.6) есть классическое *действие*.

Уравнение (0.5) будем называть *уравнением Гамильтона — Якоби* или *характеристическим уравнением*, отвечающим уравнению (0.3). Для уравнения Гельмгольца характеристическое уравнение есть известное из геометрической оптики уравнение *эйконала*:

$$(\nabla S(x))^2 = n^2(x).$$

Функцию $S(x)$ — решение уравнения Гамильтона — Якоби — будем называть *характеристикой* оператора L или *действием* (по аналогии с уравнением (0.6)). Мы рассматриваем только вещественные характеристики. Иными словами, уравнение

$$L(x, p) = 0,$$

где $p = (p_1, \ldots, p_n)$, должно определять C^∞-многообразие максимальной возможной размерности $2n-1$ в пространстве $\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_p$.

Уравнение Гамильтона — Якоби (0.5) есть нелинейное уравнение с частными производными первого порядка. Такое уравнение может либо вовсе не иметь решений без особенностей во всем пространстве $\mathbf{R}_x^n$, либо класс таких решений может оказаться весьма бедным. Например, всякое решение уравнения эйконала $(\nabla S(x))^2 = 1$, принадлежащее $C^\infty(\mathbf{R}_x^n)$, является линейной функцией x. Это и есть та основная трудность, с которой мы сталкиваемся при попытке построить асимптотическое решение в целом — во всем пространстве. Нельзя построить решение в целом в виде ряда (0.4) — для построения решения в целом требуются новые идеи.

Начнем с исследования уравнения Гамильтона — Якоби (0.5). Чтобы выделить единственное решение, поставим задачу Коши на $(n-1)$-мерном многообразии $x = f(y)$, $y \in U$, где U — область в $\mathbf{R}_y^{n-1}$:

$$S(x) = S_0(y). \tag{0.7}$$

Одним из самых замечательных достижений анализа является сведение интегрирования задачи Коши (0.6), (0.7) для нелинейного уравнения первого порядка с частными производными к интегрированию задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial L(x, p)}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial L(x, p)}{\partial x} \tag{0.8}$$

с данными Коши

$$x|_{t=0} = x^0(y), \qquad p|_{t=0} = p^0(y), \qquad y \in U. \tag{0.9}$$

Здесь $x^0(y) = f(y)$, а $p^0(y)$ будет указано ниже. Систему (0.8) будем называть *системой Гамильтона*, ассоциированной с оператором L, или *бихарактеристической системой*. Фазовые траектории системы Гамильтона $\{x = x(t, y),\ p = p(t, y)\}$ в *фазовом пространстве* $\mathbf{R}_{x,p}^{2n}$ будем называть *бихарактеристиками* уравнения (0.3) или просто *траекториями*, а их проекции $x = x(t, y)$ на $\mathbf{R}_x^n$ — *лучами*. Ниже мы используем ряд известных фактов из теории уравнений с частными производными и из классической механики (см. [4], [13], [16], [26], [51], [52]). Переменные x будем называть *координатами*, переменные p — *импульсами*.

Вдоль бихарактеристики имеем

$$dS = \langle p, dx \rangle. \tag{0.10}$$

Причина, в силу которой решение $S(x)$ задачи Коши (0.6), (0.7) может оказаться негладкой функцией, такова. Фазовые траектории гамильтоновой системы не пересекаются в силу теоремы существования и единственности для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. (Пусть, для простоты, решение задачи Коши (0.8), (0.9) существует и бесконечно дифференцируемо при всех $t \in \mathbf{R}$.) Однако проекции бихарактеристик на x-пространство, т. е. лучи $x = x(t, y)$, могут пересекаться, касаться, собираться в одну точку и т. д. Поясним более подробно, к чему это приводит. Функция S, в силу (0.7), (0.10), имеет вид

$$S(x(t,y)) = S_0(y) + \int_0^t \left\langle p, \frac{dx}{d\tau} \right\rangle d\tau,$$

где интеграл берется вдоль траектории $x = x(t, y)$, $p = p(t, y)$. Таким образом, S — гладкая функция в «криволинейных координатах» (t, y). Если соответствие $x \leftrightarrow x(t, y)$ взаимно однозначно, то вместо координат $(x_1, \ldots, x_n)$ можно ввести координаты $(t, y_1, \ldots, y_{n-1})$. Для этого необходимо отличие от нуля якобиана

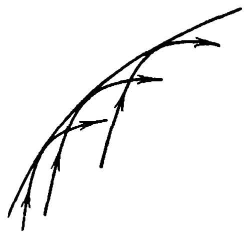

Рис. 1.

$$J(t, y) = \det \frac{\partial x(t, y)}{\partial(t, y)}.$$

При $t = 0$ этот якобиан отличен от нуля, что будет показано ниже; однако вовсе не обязательно, чтобы якобиан $J(t, y)$ был отличен от нуля при всех (t, y). В точках, где $J = 0$, переменные $(t, y_1, \ldots, y_{n-1})$ являются негладкими или неоднозначными фукциями от $(x_1, \ldots, x_n)$, так что S будет негладкой или неоднозначной функцией от x. В оптике принято называть многообразия, на которых $J(t, y) = 0$, *каустиками* семейства лучей $x = x(t, y)$ $(y \in U,\ t \in \mathbf{R})$, а точки на луче $x = x(t, y^0)$, в которых $J(t, y^0) = 0$, — *фокальными* точками (рис. 1).

Итак, существование каустик семейства лучей $x = x(t, y)$ есть препятствие к построению асимптотики вида (0.4) в целом.

4. Заметим, что хотя семейство лучей $x = x(t, y)$ имеет каустики, семейство траекторий $x = x(t, y)$, $p =$

$= p(t, y)$ не имеет каустик. Пусть g^t — *сдвиг за время* t вдоль траекторий; в частности, $g^t(x^0(y), p^0(y)) = (x(t, y), p(t, y))$. Данные Коши (0.9) определяют $(n-1)$-мерное многообразие Λ_0^{n-1} в фазовом пространстве. Это многообразие вовсе не является произвольным: необходимым условием согласования задач Коши для уравнения Гамильтона — Якоби и для системы Гамильтона является, в силу (0.10), так называемое «условие полоски»:

$$\langle p^0(y), dx^0(y)\rangle = dS_0(y), \qquad y \in U.$$

Это условие означает, что дифференциальная 1-форма

$$\omega^1 = \langle p, dx\rangle = \sum_{j=1}^{n} p_j\, dx_j \tag{0.11}$$

замкнута (т. е. $d\omega^1 \equiv 0$) на начальном многообразии Λ_0^{n-1}.

Многообразия в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}_{x,p}$, на которых замкнута форма ω^1, т. е.

$$d\omega^1 = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dx_j = 0, \tag{0.12}$$

называются *лагранжевыми многообразиями* и являются важнейшим объектом аналитической механики. Иными словами, лагранжево многообразие — это такое многообразие, на котором $\int \langle p, dx\rangle$ *не зависит от пути* (локально). Как известно из аналитической механики, сдвиг g^t сохраняет форму $\omega^2 = d\omega^1$, так что при сдвиге вдоль фазовых траекторий лагранжево многообразие переходит в лагранжево. В частности, многообразие $\Lambda_t^n = g^t\Lambda_0^{n-1}$ лагранжево. Более того, «трубка траекторий», т. е. множество

$$\Lambda^n = \bigcup_{-\infty < t < \infty} g^t\Lambda_0^{n-1},$$

есть $(n+1)$-мерное лагранжево многообразие. Для простоты будем считать его односвязным (рис. 2).

Лагранжево многообразие вложено в $2n$-мерное пространство $\mathbf{R}^{2n}_{x,p}$, которое будем называть *фазовым пространством*. Введем обозначение $r = (x, p)$ для точек фазового пространства.

Лагранжево многообразие Λ^{n+1} и есть тот основной классический объект, который ассоциирован с квантовым объектом — оператором L:

$$L(x, \lambda^{-1}D_x) \leftrightarrow \Lambda^n.$$

Мы поставим во главу угла не уравнение Гамильтона — Якоби, а его решение $S(x)$ и лагранжево многообразие Λ^n.

На лагранжевом многообразии (односвязном) Λ^n однозначно определена функция

$$S(r) = S(r^0) + \int_{r^0}^{r} \langle p, dx \rangle. \qquad (0.12')$$

(Здесь $r^0, r \in \Lambda^n$, точка r^0 фиксирована, интеграл берется по любому пути на Λ^n, соединяющему точки r^0 и r.)

Если точка $r = (x, p) \in \Lambda^n$ лежит вблизи начального многообразия Λ_0^{n-1}, то p однозначно выражается через x: $p = p(x)$. Поэтому $S(r) = S(x)$ $(r = (x, p(x)))$; для краткости мы обозначаем одной и той же буквой S и функцию $S(r)$, определенную на многообразии Λ^n, и действие $S(x)$. Но функция $S(r)$, в отличие от $S(x)$, определена глобально. Функция $S(r)$ является своеобразным «аналитическим продолжением» функции $S(x)$, а многообразие Λ^n — это аналог римановой поверхности для функции $S(x)$.

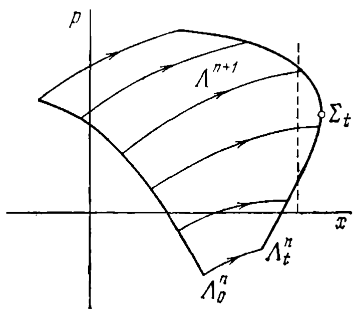

Рис. 2.

Положим $\Lambda_T^n = \Lambda^n \cap \{0 \leqslant t \leqslant T\}$ — это кусок трубки траекторий. До тех пор, пока Λ_T^n диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}_x^n$, функция $S(x)$ является гладкой, а функцию $S(r)$ можно рассматривать как функцию от x.

Лагранжево многообразие Λ^n обладает следующим замечательным свойством: в качестве локальных координат на Λ^n всегда можно взять либо x, либо p, либо набор

$$(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}), \quad (\alpha) = (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}), \quad (\beta) = (\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_{n-k}}),$$

не содержащий сопряженных координат и импульсов (т. е. пар вида (x_j, p_j)). Следовательно, локально $S(r)$ есть функция либо от x, либо от p, либо от $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$. В окрестности точки $r \in \Lambda^n$, которая не проектируется диффеоморфно на $\mathbf{R}_x^n$, можно перейти либо в *p-представление* (т. е. взять в качестве координат импульсы p), либо в смешанное (x, p)-представление $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$. Переход в p-представление осуществляется с помощью *преобразования Лежандра*.

Теперь наша задача заключается в том, чтобы перейти в p-представление (или в смешанное координатно-импульсное представление) в исходном уравнении (0.3).

5. Для того чтобы знать приближенное решение уравнения (0.3), например, с точностью до $O(\lambda^{-1})$, необходимо найти функцию $\varphi_0(x)$ (см. (0.4)). Для функции $\varphi_0(x)$ получаем уравнение

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x}, \frac{\partial L(x, p)}{\partial p} \right\rangle + \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x, p)}{\partial p_j \partial p_k} \times \\ \times \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x_j \partial x_k} \varphi_0(x) = 0, \quad (0.13)$$

где $p = \partial S(x)/\partial x$. Рассмотрим это уравнение вдоль луча $x = x(t, y)$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial p} \right\rangle = \frac{d\varphi_0}{dt},$$

где d/dt — производная в силу системы Гамильтона (0.8), так что (0.13) — это обыкновенное дифференциальное уравнение вдоль луча $x = x(t, y)$ (при фиксированном y). Оно называется *уравнением переноса*. Применяя известную формулу Лиувилля, получаем, что уравнение переноса имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{J}} \frac{d}{dt} \left(\sqrt{J} \varphi_0\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x, p)}{\partial x_j \partial p_j} \varphi_0 = 0, \quad (0.14)$$

где $x = x(t, y)$, $p = p(t, y)$, $J = J(t, y)$. Отсюда немедленно вытекают два важнейших факта.

1. Справедлива *формула коммутации*

$$L(x, \lambda^{-1}D_x)\left[\frac{\varphi}{\sqrt{J}}\exp(i\lambda S)\right]= \\ =\exp(i\lambda S)\frac{1}{\sqrt{J}}\left[L(x, p)\varphi+\frac{1}{i\lambda}R_1\varphi+O(\lambda^2)\right] \\ (\lambda\to+\infty), \quad (0.15)$$

где R_1 — оператор первого порядка:

$$R_1=\frac{d}{dt}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x, p)}{\partial x_j\,\partial p_j}, \quad (0.16)$$

и $p=\partial S(x)/\partial x$ в формулах (0.15), (0.16).

2. Главный член асимптотики решения $u(x, \lambda)$ имеет вид

$$v(x, \lambda)=\varphi_0(y)\sqrt{\frac{J(0, y)}{J(t, y)}}\exp\left[i\lambda\left(S_0(y)+\int_0^t\langle p, dx\rangle\right)-\right. \\ \left.-\frac{1}{2}\int_0^t\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x, p)}{\partial x_j\,\partial p_j}dt\right]. \quad (0.17)$$

Здесь $x=x(t, y)$, $p=p(t, y)$.

Более точно, формула (0.17) определяет *формальное асимптотическое решение* уравнения (0.3) (т. е. $Lv=O(\lambda^{-2})$, где v — правая часть формулы (0.17), и v имеет порядок $O(1)$).

Как видно из формулы (0.17), главный член асимптотики решения уравнения в частных производных (0.3) выписывается в терминах классической механики — его можно вычислить, если известно решение задачи Коши (0.9) для системы Гамильтона (0.8). По этой причине, в частности, асимптотические формулы типа (0.17) носят название «квазиклассическое приближение».

Выше уже была установлена связь между функцией S и лагранжевым многообразием Λ^n; установим аналогичную связь между якобианом $J(t, y)$ и многообразием Λ^n. Точка $r=(x, p)\in\Lambda^n$ параметризуется переменными (t, y); положим $r(t, y)=(x(t, y), p(t, y))$. Введем на Λ^n объем $d\sigma^n(r)$ по формуле

$$d\sigma^n(r(t, y))=dt\,dy.$$

Объем $d\sigma^n$ инвариантен относительно динамической системы (0.8). Имеем

$$|J(t, y)| = \left| \frac{dx}{d\sigma^n(r)} \right|.$$

Введем на Λ^n (в предположении, что Λ^n диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}_x^n$) оператор

$$(K_{\Lambda^n}\varphi(r))(x) = \sqrt{\left|\frac{d\sigma^n(r)}{dx}\right|} \exp\left[i\lambda \int_{r^0}^{r} \langle p, dx\rangle\right] \varphi(x), \tag{0.18}$$

где $r = (x, p)$, $r^0 \in \Lambda^n$ — фиксированная точка. Тогда, в силу (0.15), (0.16), справедлива формула коммутации

$$[L(x, \lambda^{-1}D_x) K_{\Lambda^n}\varphi(r)](x) = \\ = K_{\Lambda^n}\left[L(x, p)\varphi(r) + \frac{1}{i\lambda} R_1\varphi(r)\right](x) + O(\lambda^{-2}), \tag{0.19}$$

или, коротко,

$$\mathscr{L}K = K\left(L| + \frac{1}{i\lambda} R_1\right) \tag{0.19'}$$

с точностью до $O(\lambda^{-2})$. Прокоммутировав $\mathscr{L}$ с K, получаем значительно более простой оператор $L + \frac{1}{i\lambda}R_1$, чем исходный оператор $\mathscr{L}$, так как L есть оператор умножения на функцию $L(x, p)$, а R_1 — дифференциальный оператор первого порядка.

Теперь задачу о построении асимптотического решения уравнения (0.3) можно решать так: будем искать решение в виде

$$u = K\left(\varphi_0 + \frac{1}{i\lambda}\varphi_1 + \quad\right). \tag{0.20}$$

Применение формулы коммутации (0.19) дает уравнения

$$L(x, p) = 0, \qquad R_1\varphi_0 = 0$$

и т. д. Первое уравнение — алгебраическое, второе — уравнение переноса, т. е. обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка вдоль фазовой траектории системы Гамильтона.

Итак, в случае, когда Λ^n диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}_x^n$, процедура построения асимптотического решения

имеет вид

$$\underset{\text{кв}}{\mathscr{L}} \to \underset{\text{кл}}{\Lambda^n} \to K_{\Lambda^n}.$$

Здесь $\mathscr{L}$ — квантовый объект, Λ^n — классический объект, K_{Λ^n} — квазиклассический объект.

Приведенные выше результаты изложены в §§ 1—4.

6. Перейдем к p-представлению в исходном уравнении (0.3). Заметим прежде всего, что оператор L можно представить в виде

$$L(x, \lambda^{-1}D_x)\, u(x) = F^{-1}_{\lambda,\, p\to x} L(x, p)\, F_{\lambda,\, x\to p} u(x). \quad (0.20')$$

Здесь $F_{\lambda,\, x\to p}$ есть *λ-преобразование Фурье*:

$$F_{\lambda,\, x\to p} u(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^{n/2} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \exp\left[-i\lambda \langle x, p\rangle\right] u(x)\, dx,$$

$$\sqrt{i} = e^{i\pi/4}.$$

Следуя Фейнману, будем записывать оператор (0.20′) в виде $L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x)$, т. е. сначала производится дифференцирование, а затем умножение на функции от x (см. (0.3)).

Формулу (0.20′) примем в качестве определения *λ-псевдодифференциального оператора* (λ = п.д.о.). Если символ $L(x, p)$ — полином по переменным p, то оператор $\mathscr{L} = L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x)$ — дифференциальный. В противном случае оператор $\mathscr{L}$ не является дифференциальным, однако сохраняет, при подходящем выборе класса символов (см. § 2), ряд важных свойств дифференциального оператора. В частности, при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$\mathscr{L}\left[\varphi(x) \exp(i\lambda S(x))\right] \sim \exp\left[i\lambda S(x)\right] \sum_{j=0}^{\infty} (i\lambda)^{-j} \varphi_j(x),$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $S \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, S — вещественнозначная функция (в случае дифференциального оператора ряд обрывается). Это позволяет искать асимптотическое решение уравнения (0.3) в виде (0.4) и в том случае, когда $\mathscr{L}$ является не дифференциальным, а λ-псевдодифференциальным оператором.

В настоящей книге рассматриваются λ-псевдодифференциальные операторы с символами класса T_+^m. Опишем этот класс, для простоты, в случае, когда символ $L(x, p)$ не зависит от λ. Функция $L(x, p) \in T_+^m$, если эта функция бесконечно дифференцируема при всех $(x, p) \in \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^n$ и если справедливы оценки

$$|D_x^\alpha D_p^\beta L(x, p)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|)^m (1+|p|)^m$$

$$(x, p) \in \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^m,$$

для любых мультииндексов α, β.

Объединение $\bigcup\limits_{m \in \mathbf{R}} T_+^m$ всех классов T_+^m обозначим через T_+. В частности, если $L(x, p)$ — полином степени не выше, чем m, то $L \in T_+^m$, так что дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами содержатся среди рассматриваемых нами операторов. Далее, дифференциальные операторы с коэффициентами, достаточно быстро стабилизирующимися при $|x| \to \infty$, также принадлежат классу T_+. Кроме того, класс T_+ содержит операторы сдвига, т. е. операторы вида

$$\mathscr{L}f(x) = f(x+h),$$

где $h \in \mathbf{R}^n$ — постоянный вектор. Символ L такого оператора равен $\exp[i\langle x, h\rangle]$ и принадлежит классу T_+^0.

В § 2, теорема 2.12, доказано, что композиция λ-псевдодифференциальных операторов (с символами класса T_+) есть снова λ-псевдодифференциальный оператор с символом класса T_+.

Будем искать решение уравнения (0.3) в виде λ-преобразования Фурье от функции $v(p, \lambda)$:

$$u(x, \lambda) = F_{\lambda,\, p\to x}^{-1} v(p, \lambda).$$

Подставляя в уравнение (0.3) и применяя слева оператор $F_{\lambda,\, p\to x}$, получаем уравнение (0.3) в p-представлении:

$$\widetilde{\mathscr{L}} v(p, \lambda) = 0,$$

где обозначено

$$\widetilde{\mathscr{L}} = F_{\lambda,\, x\to p} L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x) F_{\lambda,\, p\to x}^{-1}. \tag{0.21}$$

Оператор $\widetilde{\mathscr{L}}$ будем называть *преобразованием Фурье оператора* $\mathscr{L}$. Нетрудно видеть, что

$$\widetilde{\mathscr{L}} = L(-\lambda^{-1}\overset{1}{D}_p, \overset{2}{p}).$$

Если $\mathscr{L}$ имеет вид (0.3), то

$$\widetilde{\mathscr{L}}v = \sum_{|\alpha|=0}^{m} (-\lambda^{-1}D_p)^{\alpha} (a_{\alpha}(p)\, v).$$

Оператор $\widetilde{\mathscr{L}}$ есть снова λ-п.д.о., т. е. класс λ-п.д.о. инвариантен относительно λ-преобразований Фурье. Поэтому частное асимптотическое решение уравнения (0.3). можно искать в виде λ-преобразования Фурье от быстро осциллирующей экспоненты, т. е. от ряда вида (0.3):

$$u(x, \lambda) = F^{-1}_{\lambda,\, p\to x}\left[\exp\left(i\lambda \widetilde{S}(p)\right) \sum_{j=0}^{\infty} (i\lambda)^{-j}\, \widetilde{\varphi}_j(p)\right]. \qquad (0.22)$$

Аналогично можно искать решение в виде λ-преобразования Фурье по части переменных.

Новый класс асимптотических решений вида (0.22) и позволяет решить задачу о построении асимптотики решения уравнения (0.3) в целом. Коротко процедуру построения решения можно описать так. Если над областью $\Omega \subset \mathbf{R}^n_x$ лежат только такие области («листы») лагранжева многообразия Λ^n, которые диффеоморфно проектируются на Ω, то решение u равно сумме экспонент вида (0.4) (по числу листов). Если область Ω содержит каустику, то в окрестности каустики решение имеется в виде экспоненты в p-представлении (т. е. имеет вид (0.22) либо аналогичный, где λ-преобразование Фурье берется по части переменных). Из этих кусков сшивается асимптотическое решение в целом.

Исследуем более подробно структуру решения в p-представлении. Поскольку $\widetilde{\mathscr{L}}$ есть снова λ-п.д.о., то ясно, что для решения v уравнения $\widetilde{\mathscr{L}}v = 0$ справедлива формула вида (0.17). Формула коммутации вида (0.19), очевидно, имеет место и в p-представлении.

При использовании p-представления мы немедленно сталкиваемся с проблемой выбора представления. Именно, пусть Λ^n диффеоморфно проектируется и на $\mathbf{R}^n_x$, и на $\mathbf{R}^n_p$. Поэтому асимптотическое решение можно искать в виде (0.4) и в виде (0.22). Как связаны между собой эти представления решения?

Чтобы разобраться в этом, вычислим асимптотику λ-преобразования Фурье быстро осциллирующей экспоненты. Пусть функция $\varphi(x) \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, функция $S(x) \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$

и функция $S(x)$ вещественнозначна, $F = F_{\lambda,\, x\to p}$. Применяя метод стационарной фазы (см. § 1), получаем

$$F\left[\varphi(x)\left|\det\frac{\partial p(x)}{\partial x}\right|^{1/2}\exp(i\lambda S(x))\right](p) =$$
$$= \exp\left(-\frac{i\pi m}{2}\right)\varphi(x(p))\left|\det\frac{\partial x(p)}{\partial p}\right|^{1/2}\times$$
$$\times\exp(i\lambda\widetilde{S}(p)) + O(\lambda^{-1}). \qquad (0.23)$$

В этой формуле $p = \frac{\partial S(x)}{\partial x}$, $\widetilde{S}(p)$ — функция, двойственная по Юнгу к функции $S(x)$ $\left(\text{так что } x = \frac{\partial\widetilde{S}(p)}{\partial p}\right)$, и $m = \operatorname{inerdex}\frac{\partial x(p)}{\partial p}$. Матрица $\frac{\partial x(p)}{\partial p} = \frac{\partial^2\widetilde{S}(p)}{\partial p^2}$ — симметрическая, $\operatorname{inerdex} A$ — отрицательный индекс инерции (число отрицательных собственных значений) вещественной симметрической матрицы A.

При выводе асимптотической формулы (0.23) предполагается, что матрица $S''_{xx}(x)$ невырождена на $\operatorname{supp}\varphi$.

Формула (0.23) выражает еще один интересный факт: λ-преобразование Фурье локализованной быстро осциллирующей экспоненты снова является локализованной быстро осциллирующей экспонентой. Действительно, λ-преобразование Фурье функции $\varphi\exp(i\lambda S)$, где φ — финитная гладкая функция и $\det S''_{xx}\neq 0$ на $\operatorname{supp}\varphi$, имеет вид $\widetilde{\varphi}\exp(i\lambda\widetilde{S}) + O(\lambda^{-1})$, где $\widetilde{\varphi}$ — финитная функция.

Исходя из этого результата, введем оператор на Λ^n:

$$(\widetilde{K}_{\Lambda^n}\varphi(r))(x) =$$
$$= F^{-1}_{\lambda,\,p\to x}\left(\sqrt{\left|\frac{d\sigma^n(p)}{dp}\right|}\exp\left[i\lambda\left(\int_{r^0}^{r}\langle p, dx\rangle -\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\langle x(p), p\rangle\right)\right]\varphi(r)\right)(x). \quad (0.24)$$

Здесь $r = (x, p)$ и $x = x(p)$ — уравнение многообразия Λ^n. Нетрудно проверить, что справедлива формула коммутации

$$\widetilde{\mathcal{L}}\widetilde{K} = \widetilde{K}\left(L + \frac{1}{i\lambda}R_1\right) \qquad (0.19'')$$

(с точностью до $O(\lambda^{-2})$). Вычисляя асимптотику интеграла (0.24) по методу стационарной фазы, получаем связь между K и $\widetilde{K}$:

$$\widetilde{K}\varphi = e^{-i\pi m/2} K\varphi + O(\lambda^{-1}). \tag{0.25}$$

Здесь m — целое число,

$$m = \operatorname{inerdex} \frac{\partial x(p)}{\partial p}.$$

Итак, с точностью до множителя $e^{i\pi m/2}$ (и с точностью до слагаемого порядка $O(\lambda^{-1})$) имеем $K = \widetilde{K}$. Аналогично обстоит дело и в том случае, когда Λ^n диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}^n_x$ и на $\mathbf{R}^n_{p_{(\alpha)},\, x_{(\beta)}}$. Мы изложили результаты §§ 5, 6 настоящей книги.

Очевидно, что число m (см. (0.25)) достаточно знать *по модулю 4, так как* $e^{2\pi i} = 1$. *Сравнение различных* представлений для решения приводит к некоторому целочисленному инварианту mod 4. Именно, пусть Λ^n диффеоморфно проектируется на лагранжевы координатные плоскости $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$ и $(p_{(\widetilde{\alpha})}, x_{(\widetilde{\beta})})$. Тогда во всех неособых точках $r \in \Lambda^n$ (т. е. таких, окрестности которых диффеоморфно проектируются на $\mathbf{R}^n_x$) имеем

$$\operatorname{inerdex} \frac{\partial x_{(\alpha)}(r)}{\partial p_{(\alpha)}} \equiv \operatorname{inerdex} \frac{\partial x_{(\widetilde{\alpha})}(r)}{\partial p_{(\widetilde{\alpha})}} \pmod 4.$$

7. Построим асимптотическое решение уравнения (0.3) в целом. Устроим покрытие многообразия Λ^n картами $\{\Omega_j\}$, в каждой из которых в качестве локальных координат можно взять либо x, либо p, либо специальный набор $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$, не содержащий сопряженных координат и импульсов. Устроим C^∞-разбиение единицы: $1 \equiv \equiv \sum\limits_j e_j(r)$, $\operatorname{supp} e_j \subset \Omega_j$, и рассмотрим функцию

$$(K^{r^0}_{\Lambda^n}\varphi(r))(x) = \sum_j c_j K(\Omega_j)(e_j(r)\varphi(r))(x). \tag{0.26}$$

Здесь $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda^n)$, c_j — некоторые постоянные. Оператор $K(\Omega_j)$ имеет вид (0.18), если x — координаты в Ω_j, вид (0.24), если p — координаты в Ω_j, и аналогичный вид (6.3), если координаты в Ω_j суть $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$. Многообразие Λ^n предполагается односвязным (иначе $\int \langle p, dx\rangle$ может зависеть от пути).

Остается объяснить выбор постоянных c_j. Мы выберем их так, чтобы для оператора $K = K_{\Lambda^n}^{r^0}$ была справедлива формула коммутации

$$\mathscr{L}K\varphi = K\left(L\varphi + \frac{1}{i\lambda} R_1\varphi\right) + O(\lambda^{-2}). \tag{0.27}$$

Пусть, для простоты, атлас $\{\Omega_j\}$ состоит из двух карт Ω_1, Ω_2, их пересечение $\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ является областью, функция $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{12})$. Далее, пусть $L(x, p) = 0$, $L''_{x_j p_j}(x, p) = 0$ на Λ^n, $1 \leqslant j \leqslant n$. Положим $K_j = K(\Omega_j)$. Имеем из (0.19), (0.19′)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}K\varphi &= \mathscr{L}\,(c_1K_1(e_1\varphi) + c_2K_2(e_2\varphi)) = \\ &= \frac{1}{i\lambda}\left(c_1K_1\left(\frac{d}{dt}(e_1\varphi)\right) + c_2K_2\left(\frac{d}{dt}(e_2\varphi)\right)\right) + O(\lambda^{-2}) = \\ &= \frac{1}{i\lambda}K\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \frac{1}{i\lambda}\left[c_1K_1\left(\frac{de_1}{dt}\varphi\right) + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + c_2K_2\left(\frac{de_2}{dt}\varphi\right)\right] + O(\lambda^{-2}).\end{aligned}$$

Для того чтобы формула коммутации была справедлива, необходимо и достаточно, чтобы выражение в квадратных скобках имело порядок $O(\lambda^{-1})$. Из (0.25) имеем при $\psi \in C_0^\infty(\Omega_{12})$

$$K_2\psi = e^{\frac{i\pi m}{2}}K_1\psi + O(\lambda^{-1}),$$

так что выражение в квадратных скобках равно

$$K_1\left[\left(c_1\frac{de_1}{dt} + c_2e^{\frac{i\pi m}{2}}\frac{de_2}{dt}\right)\varphi\right] + O(\lambda^{-1}).$$

Следовательно, должна выполняться тождество

$$c_1\frac{de_1}{dt} + c_2e^{\frac{i\pi m}{2}}\frac{de_2}{dt} \equiv 0$$

в Ω_{12}. Так как $e_1 + e_2 \equiv 1$ в Ω_{12}, то $\frac{de_1}{dt} + \frac{de_2}{dt} \equiv 0$, и поэтому

$$c_1 - c_2e^{\frac{i\pi m}{2}} = 0.$$

Это и есть необходимое условие сшивки.

Анализ процедуры сшивки показывает, что коэффициент c_j выражается через величину

$$\operatorname{ind} l(r^0, r).$$

Здесь $l[r^0, r]$ — путь, соединяющий неособые точки $r^0 \in \Lambda^n$ и $r \in \Omega_j$, индекс ind — некоторое целое число. Подробное определение и свойства индекса ind, который был введен одним из авторов настоящей книги [38], [39], приведены в § 7.

Если $\operatorname{ind} l = 0$ для любого замкнутого пути l на Λ^n, то формула (0.26) определяет оператор

$$K_{\Lambda^n}^{r^0}\colon C_0^\infty(\Lambda^n) \to C^\infty(\mathbf{R}_x^n) \quad (\operatorname{mod} O(\lambda^{-1})),$$

который называется *каноническим оператором*.

Важнейшим свойством канонического оператора является формула коммутации (0.27).

При таком построении канонический оператор K определен с точностью до $O(\lambda^{-1})$ (при $\lambda \to +\infty$). Это означает, что при замене атласа, разбиения единицы и локальных координат в картах функция $(K\varphi(r))(x)$ заменяется функцией $(\tilde{K}\varphi(r))(x) = (K\varphi(r))(x) + O(\lambda^{-1})$. Можно уточнить конструкцию канонического оператора так, чтобы он был определен с точностью до $O(\lambda^{-N})$, где $N \geqslant 1$ — любое фиксированное число (см. § 9).

Остановимся более подробно на структуре канонического оператора. Фиксируем многообразие Λ^n, отмеченную точку $r^0 \in \Lambda^n$, а также карты Ω_j, координаты в этих картах и разбиение единицы. Через $\Sigma(\Lambda^n)$ обозначим *множество особых точек* (относительно проектирования на $\mathbf{R}_x^n$) многообразия Λ^n. В окрестностях таких точек нельзя в качестве локальных координат выбирать координаты $x_1, \ldots, x_n$. Далее, пусть $\pi_x\Sigma(\Lambda^n)$ (или, коротко, $\pi_x\Sigma$) — проекция множества $\Sigma(\Lambda^n)$ на $\mathbf{R}_x^n$, которую будем называть *каустикой*. Рассмотрим функцию

$$u(x, \lambda) = (K\varphi(r))(x, \lambda),$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda^n)$, $K = K_{\Lambda^n}^{r^0}$.

1) Пусть $\pi_x \operatorname{supp} \varphi$ — проекция носителя функции φ на $\mathbf{R}_x^n$ и $U \subset \mathbf{R}_x^n$ — область, которая не пересекается

с $\pi_x \operatorname{supp} \varphi$. Тогда

$$u(x, \lambda) = O(\lambda^{-1}) \qquad (\lambda \to +\infty)$$

равномерно по $x \in U$.

Таким образом, функция $K\varphi$ локализована в окрестности $\pi_x \operatorname{supp} \varphi$ при $\lambda \gg 1$.

2) Пусть точка $x^0 \in \pi_x \operatorname{supp} \varphi$, но точка x^0 не лежит на каустике. Пусть, для простоты, в точку x^0 проектируется только конечное число $r^1, r^2, \ldots, r^N$ точек многообразия Λ^n. Тогда

$$u(x^0, \lambda) = \sum_{j=1}^{N} c_j \exp\left(i\lambda \int_{r^0}^{r^j} \langle p, dx\rangle\, \varphi(r^j) + O(\lambda^{-1})\right),$$

где $c_j \neq 0$. Таким образом, $(K\varphi)(x^0)$ есть сумма быстро осциллирующих экспонент, если точка x^0 не лежит на каустике.

3) Наконец, пусть точка $x^0 \in \pi_x \operatorname{supp} \varphi$ и лежит на каустике. Пусть, для простоты, имеется ровно одна точка $r^0 \in \Lambda^n$, которая проектируется в точку x^0. Если в окрестности точки r^0 можно на Λ^n выбрать локальные координаты $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$, то, с точностью до множителя, по модулю равного единице, имеем при x, близких к x^0,

$$u(x, \lambda) = F^{-1}\left[\sqrt{\left|\frac{d\sigma^n}{dp_{(\alpha)}\, dx_{(\beta)}}\right|}\, \varphi(r) \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left(i\lambda \int_{r^0}^{r} \langle p, dx\rangle - \langle x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}), p_{(\alpha)}\rangle\right)\right]. \qquad (0.28)$$

Здесь $F^{-1} = F^{-1}_{\lambda, p_{(\alpha)} \to x_{(\alpha)}}$, многообразие Λ^n задается уравнениями

$$x_{(\alpha)} = x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}), \quad p_{(\beta)} = p_{(\beta)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}).$$

Таким образом, в окрестности каустической точки x^0 функция $K\varphi$ есть преобразование Фурье быстро осциллирующей экспоненты (т. е. континуальная сумма быстро осциллирующих экспонент).

Интеграл (0.28) можно записать в виде

$$u(x, \lambda) = \lambda^{k/2} \int_{\mathbf{R}^k} \psi(p_{(\alpha)}, x) \exp(i\lambda S)\, dp_{(\alpha)}, \qquad (0.28')$$

где переменные x играют роль параметров, $S=S(p_{(\alpha)}, x)$ — вещественнозначная функция. Стационарные точки фазы S (как функции от переменных $p_{(\alpha)}$ при фиксированном x) определяются из уравнения

$$x_{(\alpha)} = x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}).$$

Нетрудно проверить, что если точка x не лежит на каустике, то соответствующие стационарные точки $p_{(\alpha)} = p_{(\alpha)}(x)$ фазы S невырождены и асимптотика интеграла (0.28) вычисляется с помощью метода стационарной фазы. Если же точка x лежит на каустике, то соответствующая стационарная точка фазы S вырождена. В этом случае явное вычисление асимптотики интеграла представляет большие трудности; можно утверждать только, что

$$u(x, \lambda) \sim \mathrm{const}\cdot\lambda^r (\ln \lambda)^m \qquad (\lambda \to +\infty),$$

где $r > 0$ — рациональное число, m — целое число. В частности, функция $(K\varphi)(x, \lambda)$ растет при $\lambda \to +\infty$, если точка x лежит на каустике. Этот факт (резкое возрастание интенсивности света в точках фокусировки лучей) издавна известен в оптике. Еще Архимед сжег римский флот в Сиракузах, использовав параболическое зеркало, составленное из отполированных медных щитов.

Однако интерес представляет не поведение функции $u(x, \lambda)$ в фиксированной каустической точке x^0, а асимптотические формулы, равномерные по x (при $\lambda \to +\infty$) в некоторой окрестности каустической точки x^0. Такие формулы удается пока что получить только в простейших случаях. Например, пусть многообразие Λ^n задается уравнениями в окрестности точки $p = 0$, $x = 0$:

$$x_1 = p_1^2, \quad p_j = \partial S/\partial x_j \qquad (j \geqslant 2),$$

где $S = S(p_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^\infty$ при малых $|p_1|$, $|x_j|$. Тогда интеграл (0.28) — однократный, $p_{(\alpha)} = p_1$ и фазовая функция S имеет вид

$$S = -(2/3)\,p_1^3 + x_1 p_1.$$

В этом случае главный член асимптотики интеграла $u(x, \lambda)$ (при малых $|x|$) выражается через функцию

Эйри — Фока

$$v(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\left(\alpha t+\frac{t^3}{3}\right)\right]dt.$$

Однако даже при $n=1$ асимптотика интеграла $u(x, \lambda)$ в окрестности каустики не выражается через известные специальные функции. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть канонический оператор, отвечающий кривой $x=p^k$ ($k\geqslant 3$) на плоскости (см. § 8).

Задачу об исследовании асимптотики канонического оператора вблизи каустических точек можно поставить так: можно ли свести вычисление асимптотики интегралов вида (0.28′) к вычислению некоторых эталонных интегралов? Решению этой задачи предшествует задача об исследовании особенностей лагранжевых многообразий (т. е. о структуре множества $\Sigma(\Lambda^n)$). В размерностях $n\leqslant 5$ особенности лагранжевых многообразий полностью расклассифицированы в работе [3], и в этом случае асимптотика $u(x, \lambda)$ выражается через эталонные интегралы, т. е. через новые специальные функции (см. §§ 7, 8). Однако сами эти специальные функции в настоящее время мало исследованы.

8. Перейдем ко второй части настоящей книги. В этой части канонический оператор применяется для построения асимптотики решений следующих задач.

I. Асимптотика решения задачи Коши с быстро осциллирующими начальными данными для λ-псевдодифференциальных уравнений.

II. Задача о рассеянии в квазиклассическом приближении (при $h\to+0$) для стационарного уравнения Шредингера.

III. Задача об отыскании асимптотики некоторых серий собственных значений и собственных функций λ-псевдодифференциальных самосопряженных операторов.

Именно, в § 10 рассматривается задача Коши

$$\begin{gathered}\hat{L}\psi\equiv\lambda^{-1}D_t\psi+H(t, x, \lambda^{-1}D_x)\psi=0,\\ \psi|_{t=0}=\psi_0(x)\exp[i\lambda S_0(x)],\end{gathered}\tag{0.29}$$

где $x\in\mathbf{R}^n$. Для простоты рассматривается случай, когда символ $H(t, x, p)$ не зависит от λ. Функция $\psi_0(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, функция $S_0(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и вещественнозначна, символ H — вещественнозначная функция класса C^∞. Для удобства читатель может считать, например, что $\hat{L}$ — дифференциальный оператор, коэффициенты которого при производных по переменным x_j являются полиномами от x или быстро стабилизируются на бесконечности. Примером задачи Коши вида (0.29) служит задача Коши (0.1), (0.2) для уравнения Шредингера с потенциалом $V(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Требуется построить асимптотику решения задачи Коши (0.29) в целом за любое конечное время T (т. е. при $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbf{R}^n$).

С задачей (0.29) естественным образом ассоциировано лагранжево многообразие Λ_0^n размерности n в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}_{x,p}$. Это многообразие задается уравнениями

$$x = y, \quad p = \partial S_0(y)/\partial y, \qquad y \in \mathbf{R}^n,$$

и диффеоморфно проектируется на координатное пространство $\mathbf{R}^n_x$. Задаче (0.29) отвечает система Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{0.30}$$

Пусть g^t — сдвиг вдоль траекторий этой системы за время t. Решение системы Гамильтона с данными Коши $(x, p)|_{t=0} \in \Lambda_0^n$ обозначим $\{x(t, y), p(t, y)\}$.

Сдвиг g^t переводит лагранжево многообразие Λ_0^n в лагранжево многообразие $\Lambda_t^n = g^t\Lambda_0^n$. Если $T > 0$ достаточно мало, то при $0 \leqslant t \leqslant T$ многообразия Λ_t^n диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}^n_x$. В этом случае (т. е. при построении асимптотики решения задачи Коши в малом) можно просто искать приближенное решение в виде ряда (0.4), т. е.

$$\psi(t, x, \lambda) = \exp[i\lambda S(t, x)] \sum_{j=0}^{N} (i\lambda)^{-j} \psi_j(t, x).$$

Функция $S(t, x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0,$$

и данные Коши определяются из (0.29):

$$S|_{t=0} = S_0(x).$$

Функция $S(t, x)$ имеет вид

$$S(t, x) = S_0(y) + \int_0^t \left[\left\langle p, \frac{dx}{dt} \right\rangle - H \right] dt. \tag{0.31}$$

В этой формуле $x = x(t, y)$, интеграл берется вдоль траектории гамильтоновой системы (0.30).

Для функции ψ_0 получаем уравнение переноса (ср. (0.14))

$$\frac{1}{\sqrt{J}} \frac{d}{dt} (\sqrt{J}\, \psi_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x\, \partial p} \psi_0.$$

Здесь J — якобиан:

$$J(t, y) = \det \frac{\partial x(t, y)}{\partial y},$$

$\dfrac{\partial^2 H}{\partial x\, \partial p} = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial p_j}$. Выберем данные Коши следующим образом:

$$\psi_0 |_{t=0} = \psi_0(x).$$

Тогда

$$\psi_0(t, x) = \sqrt{\frac{J(0, y)}{J(t, y)}} \exp\left[\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 H}{\partial x\, \partial p} dt \right] \psi_0(y), \tag{0.32}$$

где $x = x(t, y)$ и интеграл берется вдоль фазовой траектории.

Таким образом, функция

$$v(t, x, \lambda) = \exp[i\lambda S(t, x)]\, \psi_0(t, x),$$

где S, ψ_0 определяются из соотношений (0.31), (0.32), точно удовлетворяет данным Коши (0.29) и удовлетворяет уравнению (0.29) с точностью до $O(\lambda^{-2})$ (т. е. $\hat{L}v = O(\lambda^{-2})$). Рассматривая следующие приближения, можно получить функцию v^N, которая точно удовлетворяет данным Коши и удовлетворяет уравнению (0.29) с точностью до $O(\lambda^{-N})$ при любом $N \geqslant 2$.

В том случае, когда символ H не зависит от t и порождает самосопряженный оператор в $L_2(\mathbf{R}^n)$, можно строго доказать близость истинного решения ψ и приближенного решения v^N в норме $L_2(\mathbf{R}^n)$ (см. предложение 10.3).

Таким образом, вычисление асимптотики решения задачи Коши (0.29) за малое время t сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (системы Гамильтона). При этом асимптотические формулы для решений выписываются в терминах классической механики.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Пусть M — некоторое множество в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}_{x,\,p}$. Далее, пусть $\Pi_T(M)$ — множество, заполненное траекториями за время $0 \leqslant t \leqslant T$, которые в момент времени $t = 0$ выходят из M. Иными словами, $\Pi_T(M) = \bigcup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} g^t M$ (трубка траекторий). Возьмем в качестве M множество

$$M = \{(x,\ p) \in \mathbf{R}^{2n}\colon\ x \in \operatorname{supp}\psi_0,\quad p = \partial S_0(x)/\partial x\}.$$

Тогда $\operatorname{supp} v(t,\ x,\ \lambda)$ содержится в *трубке лучей* $\Pi_{T,\,x}(M)$ — это проекция трубки траекторий $\Pi_T(M)$ на x-пространство. Этот факт сохраняется и для всех более высоких приближений v^N.

Начальные данные

$$\psi\,|_{t=0} = \psi_0(x)\exp[i\lambda S(x)]$$

можно интерпретировать как волновой пакет, локализованный на $\operatorname{supp}\psi_0$. При $\lambda \gg 1$ эволюция этого волнового пакета происходит по законам классической механики; в частности, носитель $\operatorname{supp}\psi(t,\ x,\ \lambda)$ перемещается с изменением t вдоль трубки лучей (если пренебречь величинами порядка $O(\lambda^{-1})$). В этом смысле обычно употребляется выражение «квантовая механика переходит в классическую при $h \to 0$».

Формула (0.32) сохраняет силу до тех пор, пока якобиан $J(t,\ y)$ не обращается в нуль, или, иными словами, до тех пор, пока лагранжевы многообразия Λ^n_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, диффеоморфно проектируются на $\mathbf{R}^n_x$. В точках, в которых якобиан J обращается в нуль, приближение вида (0.32) неверно.

Чтобы построить асимптотическое решение в целом, т. е. за любое конечное время T, воспользуемся техникой канонического оператора. Заметим прежде всего, что, выбрав на начальном многообразии Λ^n_0 объем $d\sigma^n(x) = dx$, можно данные Коши (0.29) выразить через канонический оператор:

$$\psi\,|_{t=0} = e^{i\gamma}\,(K_{\Lambda^n_0}\psi_0(r))(x).$$

Здесь $\psi_0(r) = \psi_0(x)$, $r = (x, p(x))$ и $\gamma = \lambda S(x^0)$, где $r^0 = (x^0, p(x^0))$ — отмеченная точка на многообразии Λ_0^n. Действительно,

$$\int_{r_0}^{r} \langle p, dx\rangle = \int_{r^0}^{r} \langle \partial S_0(x)/\partial x, dx\rangle = S_0(x) - S_0(x^0).$$

(Здесь $r = (x, p(x))$ и из (0.18) следует представление начальных данных через канонический оператор $K_{\Lambda_0^n}$.) На лагранжевом многообразии Λ_t^n выберем объем $d\sigma_t^n$, индуцированный объемом $d\sigma^n$ на Λ_0^n и фазовым потоком g^t. Используя формулу коммутации (0.27), нетрудно показать, что функция

$$v(t, x, \lambda) = e^{i\lambda\delta} K_{\Lambda_t^n} \tilde{\psi} \tag{0.33}$$

точно удовлетворяет данным Коши (0.29) и удовлетворяет уравнению (0.29) с точностью до $O(\lambda^{-2})$. Функции $\delta, \tilde{\psi}$ легко выражаются через ψ_0, L (см. § 10); более подробно формула (0.33) будет выписана ниже для уравнения Шредингера.

Грубо говоря, этот результат можно сформулировать так: если начальные данные имеют вид

$$\psi|_{t=0} = K_{\Lambda_0^n}\psi_0,$$

то асимптотика решения в момент времени t дается формулой

$$\psi|_t = K_{\Lambda_t^n}\psi$$

с точностью до некоторого множителя.

В нефокальных точках можно выписать более простые асимптотические формулы. Приведем эти формулы для уравнения Шредингера, т. е. для задачи (0.1), (0.2). Фиксируем нефокальную точку (t^0, x^0), и пусть y^1, ., y^N — все точки такие, что $x(t^0, y^j) = x^0$ (т. е. луч, который в момент времени $t = 0$ выходит из точки y^j, за время $t = t^0$ приходит в точку x^0). Тогда при $h \to +0$

$$\psi(t^0, x^0) = \sum_{j=1}^{N} \psi_0(y^j) \sqrt{\left|\frac{J(0, y^j)}{J(t^0, y^j)}\right|} \times \\ \times \exp\left(\frac{i}{h} S_j - \frac{i\pi}{2}\mu_j\right) + O(h). \tag{0.34}$$

Здесь

$$S_j = S_0(y^j) + \int_0^{t_0} (\dot{x}^2/2 - V(x))\,dt,$$

μ_j — *индекс Морса* луча $x = x(t, y^j)$, $0 \leqslant t \leqslant t^0$, который в данном случае равен числу нулей (с учетом их кратности) якобиана $J(t, y^j)$ на луче. Таким образом, μ_j равно числу касаний луча $x = x(t, y^j)$ за время $0 \leqslant \leqslant t \leqslant t^0$ с каустикой семейства лучей $\{x = x(t, y)\}$. В простейшем случае, когда $N = 2$ и якобиан J имеет ровно один, и притом простой, нуль на одном из этих лучей, а на другом $J \neq 0$, формула (0.34) обычно интерпретируется так: «при переходе через каустику фаза меняется на $-\pi/2$».

Задача Коши для уравнения Шредингера рассмотрена в § 12.

По-прежнему (как и при малых временах) асимптотическое решение $v(t, x, \lambda)$ (см. (0.33)) задачи Коши (0.29) локализовано в окрестности трубки лучей $\Pi_{T,x}(M)$. Именно,

$$v(t, x, \lambda) = O(\lambda^{-1}) \qquad (\lambda \to +\infty)$$

вне любой фиксированной окрестности этой трубки. Отметим еще раз, что в § 10 построена асимптотика решения задачи Коши в целом, т. е. при всех $x \in \mathbf{R}^n$ и за любое конечное время T.

В § 11 рассматривается задача Коши (0.29) для системы уравнений (ψ есть N-вектор, H есть эрмитова $(N \times N)$-матрица) в предположении, что собственные значения h_α матрицы H имеют постоянную кратность. Общая схема построения асимптотики такая же, как и для скалярных уравнений; отметим только некоторые новые обстоятельства. Системе (0.29) отвечает уже не одно, а $m \geqslant 1$ уравнений Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + h_\alpha\left(t, x, \frac{\partial S_\alpha}{\partial x}\right) = 0$$

(по числу различных собственных значений h_α матрицы H). Соответственно задаче Коши (0.29) отвечает m систем Гамильтона и m лагранжевых многообразий $\Lambda^n_{t,\alpha}$. Существенно усложняются уравнения переноса, в особенности в том случае, когда матрица H имеет кратные корни. Эти уравнения приведены в § 11. В случае системы происходит *поляризация* начального волнового пакета. Именно, пусть все собственные значения матрицы H — простые при всех $(t,\ x,\ p)$. Тогда пространство $\mathbf{R}^N$ разлагается в прямую сумму N инвариантных подпространств матрицы H при любых $(t,\ x,\ p)$; соответственно начальный вектор ψ^0 представляется в виде суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} \psi^{0j}$ собственных векторов матрицы $H\ (0,\ x,\ p)$, где $p = \partial S_0\ (x)/\partial x$. Асимптотика решения, в первом приближении, есть сумма быстро осциллирующих экспонент (при малых временах; при больших временах — сумма канонических операторов, действующих на векторы ψ^{0j} вида $\exp\ (i\lambda S_j)\ \psi^j$, где ψ^j — собственный вектор матрицы H). Таким образом, исходный волновой пакет $\psi\ |_{t=0}$ распадается на N волновых пакетов, каждый из которых движется по траекториям своей гамильтоновой системы.

В § 14 рассматривается уравнение Дирака (это система из четырех уравнений первого порядка по переменным t, x, и матрица H имеет два двукратных собственных значения). С помощью полученных в § 11 результатов получена асимптотика решения задачи Коши (0.29) для системы Дирака. Показано, что спиновая поляризация имеет классический предел при $h \to 0$.

Кроме того, в § 14 приведен иной, чем в § 11, подход к выводу уравнений переноса.

Задача о рассеянии для уравнения Шредингера при $h \to 0$ рассмотрена в § 12; при этом мы ограничились только формулировками результатов, полученных в [27].

Задача III рассматривается в § 13. Именно, рассматривается уравнение

$$\mathscr{A}\ (h)\ \psi = E\psi, \tag{0.35}$$

где $\mathscr{A}\ (h)$ — самосопряженный оператор в $L_2\ (\mathbf{R}^n)$ с чисто дискретным спектром, порожденный h^{-1}-псевдодифференциальным формально симметричным оператором

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\,[L\,(\overset{2}{x},\ \overset{1}{hD_x}) + L\,(\overset{1}{x},\ \overset{2}{hD_x})]$$

с вещественнозначным и гладким символом $L\ (x,\ p)$.

Хорошо известна колоссальная разница между одномерными и многомерными задачами на собственные значения. Рассмотрим, для сравнения, две такие задачи:

$$-\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad x \in \mathbf{R},$$
$$-\Delta\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \ (n \geqslant 2).$$

Собственные функции принадлежат $L_2(\mathbf{R}^n)$. Пусть $V(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $V(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$; тогда спектр каждой из этих задач чисто дискретен. При $n = 1$ для достаточно широких классов потенциалов вычислена и асимптотика собственных значений E_m при $m \to +\infty$, и асимптотика собственных функций ψ_m. Для собственных значений справедлива асимптотическая формула

$$\int\limits_{V(x)<E_m} \sqrt{E_m - V(x)}\, dx = m\pi + \pi/2 + o(1) \quad (m \to \infty).$$

При $n \geqslant 2$ для собственных значений получена аналогичная асимптотическая формула, однако сколько-нибудь общие результаты об асимптотике собственных функций отсутствуют. Более того, даже в тех случаях, когда задача допускает разделение переменных, удается получить квазиклассические асимптотические формулы только для некоторых специальных серий собственных функций. Под *квазиклассической асимптотикой* понимается асимптотическая формула, написанная в терминах классической механики (т. е. все входящие в эту формулу величины выражаются через характеристики некоторого семейства фазовых траекторий).

По-видимому, попросту не существует квазиклассической асимптотики всех собственных функций (с большими номерами) уже для уравнения Шредингера.

Вернемся к задаче (0.35). Чтобы получить информацию о спектре этой задачи, достаточно построить *почти собственную функцию* (см. лемму 13.1), т. е. приближенное решение уравнения (0.35). Это делается с помощью конструкции канонического оператора. Пусть дано компактное лагранжево многообразие Λ^n, лежащее на множестве уровня $L(x, p) = E = \mathrm{const}$ символа L, функция $\varphi \in C^\infty(\Lambda^n)$. Пусть это многообразие инвариантно относительно сдвигов вдоль траекторий динамической системы, ассоциированной с символом L. Рассмотрим выражение $(K\varphi(r))(x)$ при фиксированном $h = \lambda^{-1}$, где $K = K_{\Lambda^n}$. Выражение $K\varphi$ является, вообще говоря, неоднозначной функцией x, так как интеграл $\int\limits_{r^0}^{r} \langle p, dx \rangle$ может зависеть от пути интегрирования. Кроме того, индекс $\operatorname{ind} l\,[r^0, r]$ также может быть ненулевым.

Выясняется следующее: для того чтобы выражение $u = (K\varphi)(x)$ было однозначной функцией x (при фиксированном h), необходимо и достаточно, чтобы

$$h^{-1} \oint\limits_{\gamma} \langle p, dx \rangle - \frac{\pi}{2} \operatorname{ind} \gamma = 2\pi m, \tag{0.36}$$

где m — целое число, для любого замкнутого пути γ, лежащего на многообразии Λ^n. Пусть $H_1(\Lambda^n, \mathbf{Z})$ — одномерная группа гомологий многообразия Λ^n с целочисленными коэффициентами, p_1 — ее размерность. Тогда достаточно, чтобы соотношения (0.36) выполнялись для всех базисных циклов $\gamma_1, \ldots, \gamma_{p_1}$ группы $H_1(\Lambda^n, \mathbf{Z})$. Если $p_1 = 1$, то соотношения (0.36) выполняются для некоторого дискретного набора значений h. Если $p_1 \geqslant 2$, то соотношения (0.36) могут не выполняться ни для одного значения h. Очевидно, что всем соотношениям (0.36) (при $\gamma = \gamma_1, \ldots, \gamma_{p_1}$) можно удовлетворить, если имеется семейство компактных лагранжевых многообразий $\{\Lambda^n(\alpha)\}$, гладко зависящее от p_1 параметров $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p_1})$. В этом случае можно построить серию почти собственных функций оператора $\mathscr{A}(h)$, что позволяет доказать асимптотику некоторой серии собственных значений оператора $\mathscr{A}(h)$ (теорема 13.3). Однако не удается строго доказать близость этих почти собственных функций к истинным собственным функциям. В качестве примера в § 13 рассмотрена задача на собственные значения для оператора Лапласа — Бельтрами на сфере в $\mathbf{R}^n$.

Аналогичная конструкция в случае уравнения Шредингера была построена ранее Дж. Келлером [75]. Далее, в настоящей книге не рассматриваются краевые задачи для уравнений с частными производными. Асимптотические серии собственных значений и собственных функций оператора $-c^2(x)\,\Delta$ в ограниченной области в $\mathbf{R}^n$ с нулевыми условиями Дирихле или Неймана на границе исследованы в работах [5], [76].

В настоящей книге не рассматриваются задачи дифракции электромагнитных, акустических и других волн; этим вопросам посвящены монографии [1], [5], [6], [7], [11].

Метод канонического оператора за последнее время получил развитие в ряде работ (см. [8], [27] — [30], [42] — [45]). Кроме перечисленных выше задач, этот метод применяется в задаче о распространении разрывов решения задачи Коши для гиперболических уравнений; об этом кратко сказано в § 10, где приведены также литературные ссылки.

В настоящей книге мы не делаем попытки изложить или даже привести обзор всего многообразия асимптотических методов линейной математической физики, а ставим своей задачей изложить только один из этих методов — метод канонического оператора. В частности, здесь не нашли отражения алгебраические идеи Ж. Лере, существенно развивающие метод канонического оператора.

ЧАСТЬ I

КВАНТОВАНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ (КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР)

§ 1. Метод стационарной фазы. Преобразование Лежандра

Квазиклассическое приближение приводит к интегралам от быстро осциллирующих функций. Асимптотика таких интегралов вычисляется с помощью метода стационарной фазы. В этом параграфе приведена сводка основных формул метода стационарной фазы, а также определение и основные свойства преобразования Лежандра.

1. Метод стационарной фазы. Приведем основные результаты об асимптотике быстро осциллирующих интегралов вида

$$\int \varphi(x) \exp(i\lambda S(x))\, dx,$$

где λ — большой вещественный параметр. Пусть $\mathbf{R}_\lambda^\pm$ — полуоси $\lambda \geqslant 1$, $\lambda \leqslant -1$. Здесь $\varphi(x)$, $S(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, функция $S(x)$ вещественнозначна, функция $\varphi(x)$ финитна. Точка x^0 называется *критической* (или *стационарной*) точкой функции $S(x)$, если $\partial S(x^0)/\partial x = 0$; критическая точка невырождена, если $\det \partial^2 S(x^0)/\partial x^2 \neq 0$.

Теорема 1.1. *Пусть функция $S(x)$ имеет на* $\operatorname{supp}\varphi$ *единственную, и притом невырожденную, критическую точку x^0. Тогда при λ вещественных, $|\lambda| \geqslant 1$, и при любом целом $N \geqslant 1$*

$$I(\lambda) \equiv \int \varphi(x) \exp(i\lambda S(x))\, dx = \\ = \lambda^{-n/2} \exp(i\lambda S(x^0)) \sum_{j=0}^{N-1} a_j(\varphi, S)\, \lambda^{-j} + R_N(\lambda). \qquad (1.1)$$

Здесь $a_j(\varphi, S) = (P_j\varphi)(x^0)$, где P_j — линейный дифференциальный оператор порядка $2j$ с коэффициентами из класса C^∞. Для остаточного члена имеет место оценка

$$|R_N(\lambda)| \leqslant C_N \lambda^{-\frac{n}{2}-N} \|\varphi\|_{C^{\beta}(\mathbf{R}^n)}, \qquad (1.2)$$

где $\beta = \beta(N) < \infty$. *Здесь*

$$\sqrt{\lambda} > 0,\ \lambda > 0; \qquad \sqrt{\lambda} = i\,|\sqrt{\lambda}|,\ \lambda < 0. \tag{1.3}$$

Доказательство см. [60], теорема 2.2; в [60] содержится обзор литературы по методу стационарной фазы.

Хорошо известно, что именно стационарные точки вносят основной вклад в асимптотику быстро осциллирующего интеграла.

Пусть A — вещественная симметрическая невырожденная $(n \times n)$-матрица. Введем обозначения: $\operatorname{sgn} A$ — сигнатура квадратичной формы с матрицей A, $\operatorname{inerdex} A$ — индекс инерции матрицы A. Если ν_+ — число положительных, ν_- — число отрицательных собственных значений матрицы A, то

$$\operatorname{sgn} A = \nu_+ - \nu_-, \quad \operatorname{inerdex} A = \nu_-,$$

$$\operatorname{sgn} A + 2\operatorname{inerdex} A = n.$$

Формула (1.1) дает асимптотическое разложение интеграла $I(\lambda)$ при $\lambda \to \pm\infty$. Главный член асимптотики имеет вид

$$I(\lambda) \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \left|\det \frac{\partial^2 S(x^0)}{\partial x^2}\right|^{-1/2} \times$$
$$\times \varphi(x^0) \exp\left[i\lambda S(x^0) + \frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}\frac{\partial^2 S(x^0)}{\partial x^2}\right] \quad (\lambda \to +\infty). \tag{1.4}$$

Коэффициенты разложения (1.1) определяются по формуле ([60]), теорема 2.3)

$$I(\lambda) = b_n \lambda^{-n/2} \exp[i\lambda S(x^0)] \sum_{j=0}^{N} (\lambda^{-j}/j!)\, L^j (\varphi(x) \times$$
$$\times \exp[i\lambda S(x, x^0)])\,|_{x=x^0} + \lambda^{-\alpha_N} R_N^*(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbf{R}_\lambda^+. \tag{1.5}$$

Здесь

$$L = \frac{i}{2}\left\langle \left(\frac{\partial^2 S(x^0)}{\partial x^2}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle,$$

$$S(x, x^0) = S(x) - S(x^0) - \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial^2 S(x^0)}{\partial x^2}(x - x^0), (x - x^0) \right\rangle,$$

$$b_n = (2\pi)^{n/2} \left|\det \frac{\partial^2 S(x^0)}{\partial x^2}\right|^{-1/2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}\frac{\partial^2 S(x^0)}{\partial x^2}\right),$$

$$\alpha_N = \frac{n}{2} + N + 1 - \left[\frac{2N+2}{3}\right] \tag{1.6}$$

и для остаточного члена справедлива оценка при $\lambda \geqslant 1$

$$|R_N^*(\lambda)| \leqslant C_N \|\varphi\|_{C^\gamma(\mathbf{R}^n)}, \tag{1.7}$$

где $\gamma = \gamma(N) < \infty$.

Асимптотические разложения (1.1), (1.5) можно дифференцировать любое число раз по λ, с аналогичной оценкой остаточного члена.

В одномерном случае имеются более точные формулы и оценки ([60], теорема 2.1).

Однако теоремой 1.1 в чистом виде редко приходится пользоваться, так как в приложениях $I(\lambda)$ обычно зависит от дополнительных медленно меняющихся параметров ω, где $\omega \in \mathbf{R}^k$. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^k_\omega$ — конечная область. По аналогии с символом Э. Ландау «O» введем

Определение 1.2. Функция $u(\omega, \lambda)$ *принадлежит классу* $O_m^+(\Omega)$, если выполнены условия:

1) $u(\omega, \lambda) \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}_\lambda^+)$.

2) Для любого компакта $K \subset \Omega$, для любого мультииндекса α и для любого целого $\beta \geqslant 0$

$$|D_\omega^\alpha D_\lambda^\beta u(\omega, \lambda)| \leqslant C_{\alpha,\beta,K} \lambda^{m+|\alpha|} \quad (\omega \in K,\ \lambda \in \mathbf{R}_\lambda^+). \tag{1.8}$$

Аналогично вводится класс $O_m^-(\Omega)$ $(\lambda \in \mathbf{R}_\lambda^-)$. Типичным примером функции класса $O_m^\pm(\Omega)$ служит функция

$$u(\omega, \lambda) = \lambda^m \varphi(\omega) \exp(i\lambda S(\omega)),$$

где φ, $S \in C^\infty(\Omega)$ и функция S вещественнозначна.

Положим $O_{-\infty}^\pm(\Omega) = \bigcap\limits_{m=-\infty}^{+\infty} O_m^\pm(\Omega)$. Справедливо

Предложение 1.3. *Имеют место вложения*

1) $O_{m_1}^+(\Omega) + O_{m_2}^+(\Omega) \subset O_m^+(\Omega), m = \max(m_1, m_2)$.
2) $O_{m_1}^+(\Omega)\, O_{m_2}^+(\Omega) \subset O_{m_1+m_2}^+(\Omega)$.
3) $\lambda O_m^+(\Omega) \subset O_{m+1}^+(\Omega)$.
4) $D_\omega^\alpha O_m^+(\Omega) \subset O_{m+|\alpha|}^+(\Omega)$.
5) $D_\lambda^\beta O_m^+(\Omega) \subset O_m^+(\Omega)$.

Аналогичные вложения имеют место для классов $O_m^-(\Omega)$.

Доказательство очевидно.

Рассмотрим интеграл

$$I(\lambda, \omega) = \int \varphi(x, \omega, \lambda) \exp[i\lambda S(x, \omega)]\, dx. \tag{1.9}$$

Сформулируем дифференциальные условия на функции φ, S.

1) $\varphi \in C^\infty(G \times \Omega \times R_\lambda^+)$, $S \in C^\infty(G \times \Omega)$, функция S вещественнозначна.

2) Существует компакт $K \subset G$ такой, что проекция π_x (supp φ) на $\mathbf{R}_x^n$ содержится в K.

3) Для любых мультииндексов α, β, γ

$$|D_x^\alpha D_\omega^\beta D_\lambda^\gamma \varphi(x, \omega, \lambda)| \leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda^{m-\gamma}$$

при $(x, \omega, \lambda) \in G \times \Omega \times \mathbf{R}_\lambda^+$, где m — фиксированное число.

Сформулируем условия на стационарную точку, т. е. на решение уравнения

$$\frac{\partial S(x, \omega)}{\partial x} = 0. \tag{1.10}$$

4) При каждом $\omega \in \Omega$ функция $S(x, \omega)$ имеет единственную критическую точку $x = x^0(\omega) \in \Omega$.

5) $\inf\limits_{\Omega} |\mu_j(\omega)| \geqslant \delta > 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$; $\mu_j(\omega)$ — собственные значения матрицы $\dfrac{\partial^2 S(x^0(\omega), \omega)}{\partial x^2}$.

Теорема 1.4. *Пусть условия* 1)—5) *выполнены. Тогда для* $I(\lambda, \omega)$ *при* $(\lambda, \omega) \in \mathbf{R}_\lambda^+ \times \Omega$ *справедливо разложение при любом целом* $N \geqslant 1$:

$$I(\lambda, \omega) = \lambda^{-n/2} \exp[i\lambda S(x^0(\omega), \omega)] \times \\ \times \sum_{j=0}^{N-1} a_j(\varphi, S; \omega) \lambda^{-j/2} + R_N(\lambda, \omega). \tag{1.11}$$

Здесь $a_j = [P_j(\omega, x, D_x)\varphi]$ *при* $x = x^0(\omega)$, *где* P_j — *линейные дифференциальные операторы порядка* $2j$ *с коэффициентами класса* C^∞ *Остаточный член* $R_N(\omega, \lambda) \in \in O^+_{m-n/2-N}(\Omega)$.

Главный член асимптотики имеет вид (если $\varphi(x^0(\omega), \omega, \lambda) \neq 0$ *при* $\lambda \gg 1$)

$$I(\lambda, \omega) \sim (2\pi/\lambda)^{n/2} \varphi(x, \omega, \lambda) \times \\ \times \exp[i\lambda S(x, \omega)] \left| \det \frac{\partial^2 S(x, \omega)}{\partial x^2} \right|^{-1/2} \times \\ \times \exp\left[\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial^2 S(x, \omega)}{\partial x^2}\right)\right]\Bigg|_{x=x^0(\omega)}. \tag{1.12}$$

Справедлива также формула типа (1.5) (*с оценкой остаточного члена типа* (1.7)).

Доказательство следует из [60] (теорема 2.4). Точно такая же формула имеет место, если условия теоремы 1.4 выполнены при $\lambda \in \mathbf{R}_\lambda^-$ и ветвь $\sqrt{\lambda}$ выбрана в соответствии с (1.3).

2. λ-преобразование Фурье. Будем использовать преобразование Фурье, зависящее от вещественного параметра $\lambda \neq 0$:

$$(F_{\lambda,\, x\to p} u(x))(p) = \left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^{n/2} \int \exp[-i\lambda\langle x, p\rangle]\, u(x)\, dx. \quad (1.13)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$(F_{\lambda,\, p\to x}^{-1} v(p))(x) = \left(\frac{\lambda}{-2\pi i}\right)^{n/2} \int \exp[i\lambda\langle x, p\rangle]\, v(p)\, dp. \quad (1.14)$$

Здесь $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$, $\sqrt{-i} = e^{-i\pi/4}$ — ветвь $\sqrt{\lambda}$ (см. (1.3)). Аналогично вводится λ-преобразование Фурье по части переменных.

В § 2 нам понадобится

Лемма 1.5. *Пусть* $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $S(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, *функция* $S(x)$ *вещественнозначна. Пусть* $M(\varphi, S) = \{p\colon p = \partial S(x)/\partial x,\ x \in \operatorname{supp}\varphi\}$ *и* $G(p) \subset \mathbf{R}_p^n$ — *область такая, что* $G(p) \cap M(\varphi, S) = \varnothing$. *Тогда для любого целого* $N \geqslant 0$ *и для любого мультииндекса* α

$$|D_p^\alpha[(F_{\lambda,\, x\to p}(\varphi(x)\exp(i\lambda S(x))))(p)]| \leqslant$$
$$\leqslant C_{N,\alpha} |\lambda|^{-N} (1+|p|)^{-N}, \qquad \lambda \in \mathbf{R}_\lambda^\pm, \qquad p \in G(p). \quad (1.15)$$

Доказательство. Воспользуемся формулой

$$e^{i\lambda S(x)} = \frac{1}{i\lambda} L(e^{i\lambda S(x)}), \quad (1.16)$$

$$L = \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad a_j(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x_j} \left| \frac{\partial S(x)}{\partial x} \right|^{-2}$$

где $S(x)$ — достаточно гладкая функция и $\nabla S(x) \neq 0$. Тогда

$$F_{\lambda,\, x\to p}(\varphi(x)\exp(i\lambda S(x))) =$$
$$= \left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^{n/2} \frac{i}{\lambda} \int \varphi_1(x, p) \exp[i\lambda(S(x) - \langle x, p\rangle)]\, dx, \quad (1.17)$$

$$\varphi_1 = {}^tL\varphi, \qquad {}^tL = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(x).$$

Имеем

$$0 < C_1(1+|p|) \leqslant \left|\frac{\partial S_1(x)}{\partial x} - p\right| \leqslant C_2(1+|p|),$$

$$\left| D_x^\alpha \left(\frac{\partial S(x)}{\partial x} - p\right)\right| \leqslant C$$

при $x \in \operatorname{supp} \varphi$, $p \in G$, $|\alpha| > 0$. Следовательно, при $\lambda \in \mathbf{R}_\lambda^\pm$, $p \in G$ левая часть (1.17) не превосходит по модулю величины $C\,|\lambda|^{n/2-1}(1+|p|)^{-1}$. Снова применяя (1.16), получаем (1.15) при $|\alpha| = 0$. Дифференцирование по p приводит к интегралу того же вида.

Обычное преобразование Фурье переводит пространство Шварца S в себя; λ-преобразование Фурье переводит в себя пространство Шварца S_λ^+ (или S_λ^-), зависящее от параметра λ.

Пространство $S_\lambda^+(\mathbf{R}_x^n)$, по определению, состоит из функций $u(x, \lambda) \in C^\infty(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_x^n)$ таких, что для любых мультииндексов α, β при $x \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}_\lambda^+$ выполняется оценка $|x^\beta D_x^\alpha u(x, \lambda)| \leqslant C_{\alpha\beta}\lambda^{|\alpha|}$. Аналогично вводится *пространство* $S_\lambda^-(\mathbf{R}_x^n)$.

Предложение 1.6. *Если* $u(x, \lambda) \in S_\lambda^+(\mathbf{R}_x^n)$, *то*

$$\lambda^{-n/2} F_{\lambda,\, x\to p}\, u(x, \lambda) \in S_\lambda^+(\mathbf{R}_p^n).$$

Аналогичное утверждение справедливо для $u \in S_\lambda^-(\mathbf{R}_x^n)$ и для $F_{\lambda,\, p\to x}^{-1}$. Предложение доказывается стандартным интегрированием по частям.

3. Преобразование Лежандра. Рассмотрим вначале одномерный случай. Пусть Γ: $y = S(x)$ — выпуклая достаточно гладкая кривая на плоскости. При таком способе задания каждой точке Γ ставится в соответствие пара чисел $(x, S(x))$. Проведем через каждую точку кривой касательную. Полученное семейство прямых на плоскости однозначно определяет кривую Γ, и Γ является огибающей этого семейства. Поэтому в качестве новых координат каждой точки Γ можно взять пару чисел, которые однозначно определяют касательную к Γ в этой точке. Уравнение касательной к Γ в точке $(x_0, S(x_0))$ имеет вид

$$y = S'(x_0)\,x + (S(x_0) - x_0 S'(x_0)),$$

так что пара $(S'(x_0), S(x_0) - x_0 S'(x_0))$ однозначно определяет точку $(x_0, S(x_0)) \in \Gamma$. Введем новую независимую переменную

$$p = S'(x) \tag{1.18}$$

и новую функцию

$$\widetilde{S}(p) = xp - S(x). \tag{1.19}$$

В этой формуле $x = x(p)$ есть функция от p, определенная уравнением (1.18). Преобразование

$$L:\ (x,\ S(x)) \to (p,\ \widetilde{S}(p)), \tag{1.20}$$

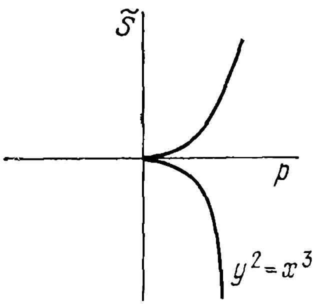

Рис. 3.

задаваемое формулами (1.18), (1.19), называется *преобразованием Лежандра* или *касательным преобразованием*. Функция $\widetilde{S}(p)$ называется *двойственной по Юнгу* к функции $S(x)$.

В силу выпуклости функции $S(x)$ соответствие между x и p взаимно однозначно (пусть, для простоты, $S(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$). Из (1.18), (1.19) следует, что

$$d\widetilde{S}(p) = \widetilde{S}'(p)\,dp = \\ = x\,dp + p\,dx - S'(x)\,dx = x\,dp,$$

так что $\widetilde{S}'(p) = x$, и полученные формулы приобретают симметричный вид:

$$p = S'(x), \quad x = \widetilde{S}'(p), \quad S(x) + \widetilde{S}(p) = xp. \tag{1.21}$$

Если кривая Γ не является строго выпуклой, то преобразование Лежандра имеет особенности.

Пример 1. $S(x) = (1/3)x^3$. Функция $\widetilde{S}(p) = \pm(2/3)p^{3/2}$ неоднозначна (ее график — «клюв», рис. 3).

Пример 2. $S(x) = (1/4)x^4$, $\widetilde{S}(p) = (3/4)p^{4/3}$. Функция S выпукла всюду, но не является строго выпуклой в точке $x = 0$; функция $\widetilde{S}$ имеет особенность в точке $p(0) = 0$, а именно: $\widetilde{S}''(0) = \infty$.

Преобразование Лежандра *инволютивно*, т. е. $L^2 = I$ (I — тождественное преобразование) — см. (1.21). Далее, если кривая $y = S(x)$ выпукла, то кривая $q = \widetilde{S}(p)$ также выпукла, поскольку $d\widetilde{S}'(p)/dp = 1/S''(x) > 0$. Кроме того, $S''(x)\,\widetilde{S}''(p) = 1$.

В случае многих переменных преобразование Лежандра задается аналогично (1.18), (1.19), где $x, p \in \mathbf{R}^n$:

$$p = \partial S(x)/\partial x, \quad \widetilde{S}(p) = \langle x, p\rangle - S(x), \tag{1.22}$$

или, в симметричной форме,

$$\begin{gathered} p = \partial S(x)/\partial x, \quad x = \partial \widetilde{S}(p)/\partial p, \\ S(x) + \widetilde{S}(p) = \langle x, p\rangle. \end{gathered} \tag{1.23}$$

Приведем основные свойства преобразования Лежандра (см. [15], [26], [63]). Пусть G — область в $\mathbf{R}_x^n$, функция $S(x) \in C^\infty(G)$ и многообразие $x_{n+1} = S(x)$, $x \in G$, имеет отличную от нуля гауссову кривизну, т. е.

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} \right\| \neq 0, \quad x \in G. \tag{1.24}$$

Тогда, по теореме об обратной функции, уравнение $p = \partial S(x)/\partial x$ задает диффеоморфизм некоторых достаточно малых окрестностей U_0, V_0 точек x^0, $p^0 = \partial S(x^0)/\partial x$ соответственно и $\widetilde{S}(p) \in C^\infty(V_0)$. Ниже $x \in U_0$, $p \in V_0$.

1) Преобразование Лежандра инволютивно — см. (1.23).

2) Справедливо тождество

$$\frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \widetilde{S}(p)}{\partial p^2} = I. \tag{1.25}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} dx &= d(\partial \widetilde{S}(p)/\partial p) = \partial^2 \widetilde{S}(p)/\partial p^2\, dp, \\ dp &= \partial^2 S(x)/\partial x^2\, dx. \end{aligned}$$

3) Гауссова кривизна многообразия $p_{n+1} = \widetilde{S}(p)$, $p \in V_0$, отлична от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 \widetilde{S}(p)}{\partial p^2} \right\| \neq 0, \quad p \in V_0, \tag{1.26}$$

и это многообразие выпукло, если выпукло многообразие $x_{n+1} = S(x)$, $x \in U_0$. Следует из 2).

Пример 3. $S(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$, где A — вещественная невырожденная симметрическая матрица. Тогда

$$p = Ax, \quad \widetilde{S}(p) = \frac{1}{2}\langle A^{-1}p, p\rangle.$$

Аналогично вводится преобразование Лежандра по части переменных. Преобразование Лежандра называется также *касательным преобразованием.*

Установим связь между λ-преобразованием Фурье и преобразованием Лежандра. Пусть выполнены условия:

1) $S(x) \in C^{\infty}(U)$, $\varphi(x) \in C_0^{\infty}(U)$, функция $S(x)$ вещественнозначна (U — область в $\mathbf{R}_x^n$).

2) Отображение $x \to p = \partial S(x)/\partial x$ есть диффеоморфизм U на V $\mathbf{R}_p^n$.

Тогда справедлива

Теорема 1.7. *При любом целом* $N \geqslant 1$, $p \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}_\lambda^+$ *имеем*

$$[F_{\lambda,\, x\to p}(\varphi(x)\exp(i\lambda S(x)))](p) = \\ = \exp\left[i\lambda\tilde{S}(p) - \frac{i\pi}{2}\,\mathrm{inerdex}\,\frac{\partial^2 S(x(p))}{\partial x^2}\right] \times \\ \times \left|\det\frac{\partial^2 S(x(p))}{\partial x^2}\right|^{-1/2}\Big(\varphi(x(p)) + \\ + \sum_{k=1}^{N}\lambda^{-k}(R_k\varphi)(p)\Big) + R_{-N}(p, \lambda). \qquad (1.27)$$

Остаточный член $R_{-N} \in O_{-N}^{+}(\mathbf{R}_p^n)$.

Замечание 1.8. Описание операторов R_k дано в теореме 1.4. Разложение (1.27) можно дифференцировать любое число раз по p и по λ с сохранением равномерной по p, λ оценки остаточного члена. Далее, если G — внешность области $G' \supset \{p\colon\ p = \partial S(x)/\partial x,\ x \in \operatorname{supp}\varphi\}$, то для остаточного члена имеет место более точная оценка (1.15).

Доказательство теоремы 1.7. Левая часть (1.27) равна

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^{n/2}\int \varphi(x)\exp[i\lambda(S(x) - \langle x, p\rangle)]\,dx.$$

Стационарные точки функции, стоящей в экспоненте, определяются из уравнения $\partial S(x)/\partial x = p$; в силу условия 2) стационарная точка $x = x(p)$ единственна при $x \in U$ и невырождена. В этой точке $S(x, p) - \langle p, x(p)\rangle = \tilde{S}(p)$.

Применим метод стационарной фазы (теорему 1.4); роль ω играет p, а в качестве Ω возьмем V. Тогда существование разложения по степеням λ^{-1} и оценка остаточного члена следуют из теоремы 1.4. Вычислим предэкспоненциальный множитель в главном члене асимптотики. При $\lambda > 0$ он равен

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^{n/2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}\varphi(x)\left|\det\frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2}\right|^{-1/2}\times$$
$$\times\exp\left[\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}\frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2}\right]\Bigg|_{x=x(p)}=$$
$$=\varphi(x)\left|\det\frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2}\right|^{-1/2}\exp\left[\frac{i\pi}{4}\left(\operatorname{sgn}\frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2}-n\right)\right]\Bigg|_{x=x(p)},$$

что дает нам (1.27).

Следствие 1.9. *В условиях теоремы* 1.7 *имеем*

$$\left[F_{\lambda,\,x\to p}(\varphi(x))\left|\det\frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2}\right|^{1/4}\exp(i\lambda S(x))\right](p)=$$
$$=\varphi(x(p))\exp[i\lambda\widetilde{S}(p)]\left|\det\frac{\partial^2\widetilde{S}(p)}{\partial p^2}\right|^{1/4}\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{i\pi}{2}\operatorname{inerdex}\frac{\partial^2 S(x(p))}{\partial x^2}\right]+R_{-1}(p,\lambda). \qquad (1.28)$$

Оценка остаточного члена та же, что и в теореме 1.7.

Доказательство следует из (1.27) и (1.25).

Формула (1.28) допускает следующую интересную интерпретацию. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^{2n}=\mathbf{R}^n_x\times\times\mathbf{R}^n_p$ многообразие

$$\Lambda^n=\left\{(x,p)\colon\ x\in U,\ p=\frac{\partial S(x)}{\partial x}\right\}.$$

В условиях теоремы 1.7 уравнение Λ^n можно записать в виде

$$\Lambda^n=\left\{(x,p)\colon x=\frac{\partial\widetilde{S}(p)}{\partial p},\ p\in V\right\},$$

так что в качестве координат на Λ^n можно взять или x, или p. Пусть x — координаты на Λ^n; тогда

$$\det\frac{\partial p(x)}{\partial x}=\det\frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2},$$

и аналогично, если p — координаты на Λ^n, то

$$\det\frac{\partial x(p)}{\partial p}=\det\frac{\partial^2\widetilde{S}(p)}{\partial p^2}.$$

Тогда формула (1.28) примет симметричный вид:

$$\left[F_{\lambda,\,x\to p}(\varphi(x))\left|\det\frac{\partial p(x)}{\partial x}\right|^{1/2}\exp(i\lambda S(x))\right](p)\sim$$
$$\sim\varphi(x(p))\left|\det\frac{\partial x(p)}{\partial p}\right|^{1/2}\exp[i\lambda\widetilde{S}(p)]\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\operatorname{inerdex}\frac{\partial x(p)}{\partial p}\right)\qquad(1.29)$$

с точностью до членов порядка $O(\lambda^{-1})$.

Симметрия формулы (1.29) является следствием унитарности преобразования фурье. Действительно,

$$F(\varphi(x)\exp(i\lambda S(x)))=\widetilde{\varphi}(p)\exp(i\lambda\widetilde{S}(p))$$

(здесь $F=F_{\lambda,x\to p}$, $\lambda\gg 1$ и члены порядка $O(\lambda^{-1})$ отброшены. Следовательно,

$$\int|\varphi(x)|^2\,dx=\int|\widetilde{\varphi}(p)|^2\,dp.$$

Если функция $\varphi(x)$ локализована в окрестности точки x, то функция $\widetilde{\varphi}(p)$ локализована в окрестности точки $p=p(x)$, т. е.

$$|\varphi(x)|^2\,dx=|\widetilde{\varphi}(p)|^2\,dp.$$

Отсюда следует, что

$$|\varphi(x)|\sqrt{\left|\frac{dx}{dp}\right|}=|\widetilde{\varphi}(p)|\sqrt{\left|\frac{dp}{dx}\right|}$$

(ср. с (1.29)).

4. Метод стационарной фазы для абстрактных функций. Изложенные в п. 1 результаты об асимптотике интегралов от быстро осциллирующих функций можно распространить на интегралы вида

$$\Phi(A)=\int_{\mathbf{R}^n}\exp[iAS(x)]\,\varphi(x)\,dx.\qquad(1.30)$$

Здесь A — оператор, $A\colon B\to B$, где B — банахово пространство; точные условия на оператор A будут сформулированы ниже. Далее, всюду в дальнейшем предполагается, что выполнены условия:

Ф1.1. Функция $S(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и вещественнозначна.

Ф1.2. Функция $\varphi(x)\in C_0^\infty(B)$.

Здесь $C_0^\infty(B)$ — класс функций $\varphi\colon \mathbf{R}_x^n\to B$ со значениями в банаховом пространстве B, которые бесконечно дифференцируемы при $x\in\mathbf{R}^n$ и финитны.

Для интегралов вида (1.30) получим асимптотические разложения, аналогичные тем, которые были получены для интегралов вида (1.1). Все доказательства проводятся по той же схеме, что и для интегралов вида (1.1) (ср. [55], [60]).

Введем обозначения: $D(A)$ — область определения, $\sigma(A)$ — спектр и $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A. Введем условие

A 1.1. Оператор A является инфинитезимальным оператором сильно непрерывной группы $\{\exp(itA)\}$ ограниченных операторов на оси $-\infty < t < +\infty$.

Из этого условия вытекают следующие факты ([18], [21]). Существует $\omega > 0$ такое, что

$$\|\exp(itA)\| \leqslant Me^{\omega|t|}, \qquad t \in \mathbf{R}, \tag{1.31}$$

где постоянная M не зависит от t. Спектр $\sigma(A)$ содержится в полосе $|\operatorname{Im}\mu| < \omega$ комплексной плоскости μ. Резольвента $R_\mu(A) = (\mu I - A)^{-1}$ оператора A (I — единичный оператор) является голоморфной операторнозначной функцией μ вне полосы $|\operatorname{Im}\mu| \leqslant \omega$ и удовлетворяет оценкам

$$\|R_\mu(A)\| \leqslant C_\varepsilon(1 + |\mu|)^{-1} \tag{1.32}$$

в области $|\operatorname{Im}\mu| \geqslant \omega + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Кроме того, справедливы формулы

$$\int_0^\infty \exp(-\mu t + iAt)\,dt = -iR_{-i\mu}(A) \qquad (\operatorname{Re}\mu > \omega), \tag{1.33}$$

$$\int_{-\infty}^0 \exp(-\mu t + iAt)\,dt = iR_{-i\mu}(A) \qquad (\operatorname{Re}\mu < -\omega). \tag{1.33'}$$

В частности, при $|\operatorname{Re}\varepsilon| > \omega$ оператор $(A + i\varepsilon I)^{-1}$ существует и ограничен.

Пример 4. Рассмотрим оператор $A = d/d\tau$ в гильбертовом пространстве $B = L_2(-\infty, \infty)$. Группа $\{\exp(itA)\}$ есть унитарная группа сдвигов

$$\exp\left(it\frac{d}{d\tau}\right) f(\tau) = f(\tau + t).$$

Спектр $\sigma(A)$ совпадает с вещественной осью $-\infty < \mu < \infty$. Область определения $D(A)$ оператора $A = d/dt$ состоит из функций $f(\tau) \in L_2(-\infty, \infty)$, абсолютно непрерывных и таких, что $f'(\tau) \in L_2(-\infty, \infty)$. Оператор $(A + i\varepsilon I)^{-1}$ существует и ограничен при любом ε, не лежащем на мнимой оси.

Пусть $N \geqslant 1$ — целое число, тогда функции $f(\tau) \in D(A^N)$ являются гладкими (все производные $f^{(k)}(\tau)$ до порядка $k = N - 1$ включительно абсолютно непрерывны). Кроме того, $D((A + i\varepsilon)^N) = D(A^N)$.

Лемма 1.10. *Пусть условия* Ф.1.1, Ф.1.2 *и* А 1.1 *выполнены и*

$$\operatorname{grad} S(x) \neq 0, \qquad x \in \operatorname{supp} \varphi. \tag{1.34}$$

Тогда при любом целом $N \geqslant 1$

$$\Phi(A) \in D(A^N). \tag{1.35}$$

Доказательство. Воспользуемся тождеством $\exp[i(A + i\varepsilon) I) S(x)] =$

$$= (A + i\varepsilon I)^{-1} L \exp[i(A + i\varepsilon I) S(x)],$$

$$L = -i \,|\nabla S(x)|^{-2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S(x)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

где $|\operatorname{Re} \varepsilon| > \omega$. Интегрируя по частям и учитывая финитность функции $\varphi(x)$, получаем

$$\Phi(A) = (A + i\varepsilon I)^{-N} \int \exp[i(A + i\varepsilon I) S(x)]\, {}^tL^N (e^{\varepsilon S(x)} \varphi(x)),$$

где ${}^tL$ — формально сопряженный с L оператор. Последний интеграл, в силу условия А 1.1, принадлежит пространству B, так что $\Phi(A) \in D(A^N)$. Лемма доказана.

В частности, если $A = d/d\tau$, $B = L_2(-\infty, \infty)$, то $\Phi(A)$ есть бесконечно дифференцируемая функция от τ (в условиях леммы 1.10).

Теперь исследуем случай, когда фаза $S(x)$ имеет на $\operatorname{supp} \varphi$ невырожденные стационарные точки. В силу леммы 1.10 достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда имеется только одна стационарная точка. Доказательство формулы (1.1) основано на следующих двух фактах: на лемме Морса и на формуле

$$\int_0^\infty \exp(ix^2 A)\, dx = \frac{1}{2} e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \qquad (\operatorname{Im} A \geqslant 0). \tag{1.36}$$

Здесь $A \neq 0$ — число, ветвь $\sqrt{A}$ выбрана в полуплоскости $\operatorname{Im} A \geqslant 0$ так, что $\sqrt{A} > 0$ при $A > 0$.

Лемма Морса [44]. *Пусть функция $S(x)$ вещественнозначна и бесконечно дифференцируема в окрестности точки x^0, которая является невырожденной критической точкой функции $S(x)$. Тогда существуют окрестности U, V точек $x = x^0$, $y = 0$ и диффеоморфизм φ: $V \to U$ класса C^∞ такие, что*

$$(S \circ \varphi)(y) = S(x^0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j^2. \tag{1.37}$$

Здесь μ_j — собственные значения матрицы $S''_{xx}(x^0)$, $\det \varphi'(0) = 1$.

Чтобы иметь возможность получить аналог формулы (1.1) для интегралов вида (1.30), необходимо доказать операторный аналог формулы (1.36).

Лемма 1.11. *Пусть оператор A удовлетворяет условию А 1.1. Тогда при $\operatorname{Re} \varepsilon > \omega$ оператор*

$$(A + i\varepsilon I)^{-1/2} = \frac{2e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp[it^2(A + i\varepsilon I)]\, dt \tag{1.38}$$

есть ограниченный оператор, действующий из B в B, и справедливо соотношение

$$[(A + i\varepsilon I)^{-1/2}]^2 g = (A + i\varepsilon I)^{-1} g \tag{1.39}$$

при любом $g \in B$.

Доказательство. Так как по условию

$$\| \exp[it^2(A + i\varepsilon I)] \| \leqslant M \exp[t^2(\omega - \operatorname{Re} \varepsilon)]$$

и $\operatorname{Re} \varepsilon > \omega$, то интеграл (1.38) сходится по норме и является ограниченным оператором (из B в B). Перемножив два интеграла вида (1.38), получим двукратный сходящийся по норме интеграл

$$[(A + i\varepsilon I)^{-1/2}]^2 = -\frac{4i}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp[i(t^2 + \tilde{t}^2)(A + i\varepsilon I)]\, dt\, d\tilde{t}.$$

Переходя к полярным координатам (r, φ) и учитывая формулу (1.33), получаем

$$[(A+i\varepsilon I)^{-1/2}]^2 = -\frac{4i\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty \exp\left[ir^2(A+i\varepsilon I)\right] r\,dr =$$

$$= -i\int_0^\infty \exp\left[i(A+i\varepsilon I)\rho\right] d\rho = (A+i\varepsilon I)^{-1}.$$

Лемма доказана.

Следствие 1.12. *Пусть условия леммы* 1.11 *выполнены и* $\operatorname{Re}\varepsilon < -\omega$. *Тогда справедлива формула*

$$\int_0^\infty \exp\left[-i(A+i\varepsilon I)t^2\right] dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}(A+i\varepsilon I)^{-1/2}. \quad (1.40)$$

Замечание 1.13. Пусть условие A 1.1 выполнено,

$$\|\exp(itA)\| \leqslant M, \qquad t \in \mathbf{R},$$

и $\sigma(A)$ не содержит полуоси $(-\infty, \delta]$, $\delta > 0$. Тогда справедлива формула

$$A^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4}\int_0^\infty \exp(it^2A\,dt). \quad (1.41)$$

Оператор $A^{-1/2}\colon B \to B$ ограничен, и $(A^{-1/2})^2 g = A^{-1}g$ для любого $g \in B$.

Точно так же доказывается

Лемма 1.14. *Пусть условие* A 1.1 *выполнено*, $\operatorname{Re}\varepsilon > \omega$ *и* $j \geqslant 0$ — *целое число. Тогда*

$$\int_0^\infty \exp\left[i(A+i\varepsilon I)t^2\right] t^j\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)\exp\left[\frac{i\pi}{4}(j+1)\right](A+i\varepsilon I)^{-(j+1)/2}. \quad (1.42)$$

Лемма 1.15. *Пусть условие* A 1.1 *выполнено*, $\operatorname{Re}\varepsilon > \omega$, $\delta > 0$, $j \geqslant 0$ — *целое число*, $g \in B$. *Тогда при* *любом целом* $N \geqslant 0$ *справедливо разложение*

$$\int_0^\delta \exp[i(A+i\varepsilon I)t^2]\,t^j\,dt\cdot g =$$
$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)\exp\left[\frac{i\pi}{4}(j+1)\right](A+i\varepsilon I)^{-(j+1)/2}g +$$
$$+\exp[i(A+i\varepsilon I)\delta^2]\sum_{k=1}^{N} c_k(A+i\varepsilon I)^{-k}g + g_N, \qquad (1.43)$$

где $g_N \in D(A^{N+1})$, c_k — *постоянные*.

Доказательство. Представим интеграл по отрезку $[0, \delta]$ в виде разности интегралов по полуосям $[0, \infty)$ и $[\delta, \infty)$. Для первого из этих интегралов справедлива формула (1.42); второй интеграл проинтегрируем по частям:

$$\int_\delta^\infty \exp[i(A+i\varepsilon I)t^2]\,t^j\,dt\cdot g =$$
$$= -\frac{i}{2}(A+i\varepsilon I)^{-1}\exp[i(A+i\varepsilon I)t^2]\,t^{j-1}g\,\Big|_\delta^\infty +$$
$$+ i(A+i\varepsilon I)^{-1}\int_\delta^\infty \exp[i(A+i\varepsilon I)t^2]\frac{d}{dt}(t^{j-1})\,dt\cdot g. \qquad (1.44)$$

Так как

$$\|\exp[i(A+i\varepsilon I)t^2]\| \leqslant M\exp[(-\mathrm{Re}\,\varepsilon+\omega)t^2]$$

и $\mathrm{Re}\,\varepsilon > \omega$, то внеинтегральная подстановка при $t = +\infty$ обращается в нуль. Интеграл в правой части равенства (1.44) сходится по норме; следовательно, последнее слагаемое в формуле (1.44) принадлежит $D(A)$. Продолжая интегрирование по частям, получаем (1.43).

Замечание 1.16. Пусть $A = d/d\tau$, $B = L_2(-\infty, \infty)$. Тогда разложение (1.43) есть асимптотическое разложение по гладкости функции $\Phi(A)$ ($\Phi(A)$ — интеграл из (1.43)), так как остаточный член g_N принадлежит области определения оператора $d/d\tau^{N+1}$.

Получим основную формулу метода стационарной фазы в одномерном случае.

Лемма 1.17. *Пусть условия* Ф 1.1, Ф 1.2, *А* 1.1 *выполнены*, $\mathrm{Re}\,\varepsilon > \omega$. *Тогда при любом целом* $N \geqslant 1$

справедливо разложение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(iAx^2)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= (A+i\varepsilon I)^{-1/2} \sum_{k=0}^{N} (A+i\varepsilon I)^{-k} a_k + g_N, \qquad (1.45)$$

где $a_k \in B$, $g_N \in D(A^{N+1})$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(A) = \int_0^{\infty} \exp[ix^2(A+i\varepsilon I)]\,\varphi_\varepsilon(x)\,dx,$$

где обозначено $\varphi_\varepsilon(x) = \exp(\varepsilon x^2)\,\varphi(x)$. Функция $\varphi_\varepsilon(x)$ финитна.

Пусть функция $\varphi(x)$ имеет нуль порядка m в начале координат. Интегрируя по частям, получаем

$$\Phi(A) = \frac{1}{2i}(A+i\varepsilon I)^{-1} \frac{\varphi_\varepsilon(x)}{x}\Big|_{x=0} -$$

$$-\frac{1}{2i}(A+i\varepsilon I)^{-1} \int_0^{\infty} \exp[ix^2(A+i\varepsilon I)]\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi_\varepsilon(x)}{x}\right) dx.$$

Если $m \geqslant 2$, то $\left.\frac{\varphi_\varepsilon(x)}{x}\right|_{x=0} = 0$, последний интеграл есть элемент пространства B, так что $\Phi(A) \in D(A)$. Повторяя интегрирование по частям, получаем, что $\Phi(A) \in D(A^k)$, где $k = \left[\frac{m}{2}\right] - 1$.

Представим функцию $\varphi_\varepsilon(x)$ в виде

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{N} \varphi_j x^j + \psi_N(x), \qquad \varphi_j \in B;$$

тогда функция $\psi_N \in C^\infty(B)$ и имеет нуль порядка $N+1$ в начале координат. Введем срезающую скалярную функцию $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, тождественно равную 1 в окрестности $|x| < \delta$ начала координат, и рассмотрим интеграл

$$\tilde{\Phi}(A) = \int_0^{\infty} \exp(iAx^2)\,\varphi(x)\,\chi(x)\,dx.$$

В силу леммы 1.10 имеем

$$\Phi(A)-\tilde{\Phi}(A)\in D(A^N)$$

при любом целом $N\geqslant 0$. Действительно,

$$\Phi(A)-\tilde{\Phi}(A)=\int_0^\infty \exp(iAx^2)\,\varphi(x)\,(1-\chi(x))\,dx,$$

функция $\varphi(x)(1-\chi(x))\in C_0^\infty(B)$ и тождественно равна нулю при $|x|<\delta$, так что фаза $S(x)=x^2$ не имеет стационарных точек на носителе этой функции. Имеем

$$\tilde{\Phi}(A)=\sum_{j=0}^{N}\int_0^\infty \exp[i(A+i\varepsilon I)x^2]\,x^j\chi_\varepsilon(x)\,\varphi_j\,dx+$$
$$+\int_0^\infty \exp[i(A+i\varepsilon I)x^2]\,x^j\psi_N(x)\,\chi_\varepsilon(x)\,dx, \tag{1.46}$$

где $\chi_\varepsilon(x)=\chi(x)\exp(\varepsilon x^2)$. Фиксируем $M\geqslant 1$; тогда при достаточно большом N (порядка $2M$) имеем по доказанному выше, что последний интеграл в (1.46) принадлежит $D(A^M)$.

Далее,

$$\int_0^\infty \exp[i(A+i\varepsilon)x^2]\,x^j\chi_\varepsilon(x)\,dx=$$
$$=\int_0^\delta \exp[i(A+i\varepsilon I)x^2]\,x^j\,dx+$$
$$+\int_\delta^\infty \exp[i(A+i\varepsilon I)x^2]\,x^j\chi_\varepsilon(x)\,dx.$$

Для интегралов по отрезку $[0,\delta]$ справедлива формула (1.43). Интеграл по полуоси $[\delta,\infty]$ проинтегрируем по частям; тогда получим выражение

$$-\frac{i}{2}(A+i\varepsilon I)^{-1}x^j\exp[i(A+i\varepsilon I)x^2]\,\big|_{x=\delta}+$$
$$+\frac{i}{2}(A+i\varepsilon I)^{-1}\int_\delta^\infty \exp[i(A+i\varepsilon I)x^2]\,\frac{d}{dx}\left(x^{j-1}\chi_\varepsilon(x)\right)dx.$$

Будем интегрировать по частям далее и заметим, что внеинтегральная подстановка в интеграле по полуоси $[\delta, \infty)$ сократится со слагаемыми вида $c_k \exp[i(A+\varepsilon I)\delta^2] \times \times ((A+i\varepsilon I)\delta^2)^{-k}$, входящими в разложение (1.43) интеграла по отрезку $[0, \delta]$. Напомним, что функция $\chi(x)$ финитна и что $\chi(x) \equiv 1$ при $|x| \leqslant \delta$.

Тем самым доказано, что

$$\int_0^\infty \exp[i(A+i\varepsilon I)x^2]\, x^j \varphi_j \chi_\varepsilon(x)\, dx = c(A+i\varepsilon I)^{-(j+1)/2}\varphi_j + \tilde{g}_M,$$

где $\tilde{g}_M \in D(A^M)$ и $M \geqslant 1$ можно взять любым, $c = \mathrm{const}$. Окончательно получаем разложение

$$\Phi(A) = \sum_{k=0}^{M} (A+i\varepsilon I)^{-(k+1)/2}\psi_k + h_M,$$

где $h_M \in D(A^{M+1})$ и $M > 0$ можно взять любым.

Явные формулы для коэффициентов ψ_k мы не приводим; они точно такие же, как и в случае интегралов вида $\int_0^\infty \varphi(x) \exp(i\lambda x^2)\, dx$, где $\lambda \to +\infty$.

Аналогичное разложение справедливо для интеграла вида $\Phi(A)$, взятого по полуоси $(-\infty, 0]$. Далее, нетрудно проверить, что при суммировании этих разложений слагаемые, содержащие целые степени оператора $(A + + i\varepsilon I)^{-1}$, сокращаются, и мы получаем разложение (1.45).

Аналогично доказывается

Лемма 1.18. *При условиях леммы* 1.17 *и при* $\mathrm{Re}\,\varepsilon < -\omega$ *справедливо разложение* (1.45) *для интеграла*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iAx^2)\,\varphi(x)\, dx = \sum_{k=0}^{N} (A - i\varepsilon I)^{-k-1/2} b_k + g_N, \qquad (1.47)$$

где $b_k \in B$, $g_N \in D(A^{N+1})$.

Рассмотрим n-кратный интеграл (1.30) и получим аналог теоремы 1.1.

Теорема 1.19. *Пусть условия* Ф 1.1, Ф 1.2 *и* А 1.1 *выполнены, функция* $S(x)$ *имеет на* $\mathrm{supp}\,\varphi$ *ровно одну, и притом невырожденную, стационарную точку* x^0. *Тогда при* $\mathrm{Re}\,\varepsilon > \omega$ *и при любом целом* $N \geqslant 0$ *справедливо* *разложение*

$$\Phi(A) = \exp[iAS(x^0)](A+i\varepsilon I)^{-\nu_+/2} \times$$
$$\times (E - i\varepsilon I)^{-\nu_-/2}\Big[\sum_{0\leq k+l\leq N}(A+i\varepsilon I)^{-k}(A-i\varepsilon I)^{-l}a_{kl}\Big] + g_N, \tag{1.48}$$

где $a_{kl}\in B$, *остаточный член* $g_N \in D\left(A^{N+\left[\frac{n}{2}\right]+1}\right)$.

Здесь ν_+ — число положительных, ν_- — число отрицательных собственных значений матрицы $S''_{xx}(x^0)$.

Доказательство. В силу леммы 1.10 можно считать, что supp φ содержится в сколь угодно малой (но фиксированной) окрестности точки x^0. По лемме Морса можно сделать гладкую замену переменных $x = f(y)$ такую, что $x^0 = f(0)$ и что функция $(S\circ\varphi)(y)$ будет квадратичной формой (1.37). Таким образом,

$$\Phi(A) = \exp[iAS(x^0)]\int_V \exp\left(\frac{iA}{2}\sum_{j=1}^{n}\mu_j y_j^2\right)\tilde{\varphi}(y)\,dy), \tag{1.49}$$

где V — окрестность точки $y = 0$,

$$\tilde{\varphi}(y) = (\varphi\circ f)(y)\det f'(y).$$

К интегралу (1.49) будем последовательно применять метод стационарной фазы (т. е. леммы 1.17 и 1.18) по переменным $y_1, y_2, \quad y_n$. Рассмотрим интеграл

$$\Phi_1(A) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{iA}{2}\mu_1 y_1^2\right)\tilde{\varphi}(y)\,dy_1.$$

Если $\mu_1 > 0$, то по лемме 1.17 этот интеграл допускает разложение (1.45), коэффициенты которого — финитные гладкие функции от переменных $y_2, \quad ., y_n$. В случае $\mu_1 < 0$ применима лемма 1.18. Затем полученное разложение умножим на $\exp\left(\frac{i}{2}\mu_2 A y_2^2\right)$, проинтегрируем по переменной y_2 и применим лемму 1.17 или лемму 1.18 в зависимости от знака μ_2. Продолжая этот процесс, получаем разложение (1.48).

Главный член разложения (1.48) имеет вид

$$\Phi(A) = c\exp[iAS(x^0)](A+i\varepsilon I)^{-\nu_+/2}(A-i\varepsilon I)^{-\nu_-/2}\varphi(x^0) + g_1,$$

где $g_1 \in D\,(A^{[\frac{n}{2}]+1})$ и

$$c = (2\pi)^{n/2}\,|\det S''_{xx}(x^0)|^{-1/2} \exp\left[\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} S''_{xx}(x^0)\right].$$

Развитый в этом пункте метод стационарной фазы для абстрактных функций применяется при исследовании распространения разрывов решения задачи Коши [38], [40].

§ 2. Псевдодифференциальные операторы

Пусть L — дифференциальный оператор, зависящий от большого параметра λ и λ так входит в оператор, что при каждой производной $\partial/\partial x_j$ имеется множитель — малый параметр λ^{-1}. Применяя оператор L к функции $\varphi \exp(i\lambda S)$, получаем

$$L\,[\varphi(x) \exp(i\lambda S(x))] = \exp(i\lambda S(x))\, Q(x, \lambda^{-1}),$$

где Q — полином по переменной λ^{-1}.

В этом параграфе вводится понятие λ-псевдодифференциального оператора (п. д. о.), которое является обобщением понятия дифференциального оператора. Необходимость такого обобщения выяснится в § 5. Приведенная выше формула действия дифференциального оператора на функцию $\varphi \exp(i\lambda S)$ при больших λ переносится и на λ-псевдодифференциальный оператор (если S — вещественнозначная, φ — финитная функции), с той лишь разницей, что Q будет уже не полиномом от λ^{-1}, а асимптотическим рядом по степеням λ^{-1}.

1. Определение λ-псевдодифференциального оператора. Пусть $L(x, p)$, $u(x)$ — скалярные функции. Следуя Фейнману, будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{gathered} L(\overset{2}{x}, \overset{1}{D}_x)\, u(x) = F^{-1}_{p\to x} L(x, p)\, F_{x\to p} u(x), \\ L(\overset{1}{x}, \overset{2}{D}_x)\, u(x) = F^{-1}_{p\to x} (F_{x\to p} L(x, p)\, u(x)). \end{gathered} \tag{2.1}$$

Индексы 1 и 2 показывают, какой из операторов x, D_x в выражении $L(x, D_x)$ действует первым и какой действует вторым. Например, если $L(x, p) = a(x)\,p_j$, то

$$L(\overset{2}{x}, \overset{1}{D_x})\,u(x) = -ia(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j},$$

$$L(\overset{1}{x}, \overset{2}{D_x})\,u(x) = -i\frac{\partial}{\partial x_j}(a(x)\,u(x)).$$

Операторы вида (2.1) называются *псевдодифференциальными операторами* (п. д. о.); функция $L(x, p)$ называется *символом* п. д. о. Теория п. д. о. построена в работах [25], [68].

Операторы $L(\overset{2}{x}, \overset{1}{D_x})$ и $L^*(\overset{1}{x}, \overset{2}{D_x})$, где L^* — оператор с символом $\overline{L(x, p)}$, являются формально сопряженными:

$${}^tL(\overset{2}{x}, \overset{1}{D_x}) = L^*(\overset{1}{x}, \overset{2}{D_x}).$$

Это означает, что

$$(L(\overset{2}{x}, \overset{1}{D_x})\,\varphi, \psi) = (\varphi, L^*(\overset{1}{x}, \overset{2}{D_x})\,\psi)$$

для любых функций $\psi(x)$, $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ при соответствующих условиях на символ (см. ниже), где скалярное произведение имеет вид

$$(\varphi, \psi) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx.$$

В частности, оператор

$$\mathscr{L} = L(\overset{1}{x}, \overset{2}{D_x}) + L^*(\overset{2}{x}, \overset{1}{D_x})$$

является формально симметричным.

Мы будем рассматривать п. д. о., зависящие от вещественного параметра $\lambda \neq 0$. Формально λ-п. д. о. вводится по формуле

$$L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D_x};\ (i\lambda)^{-1})\,u(x) = \\ = F^{-1}_{\lambda, p\to x}L(x, p;\ (i\lambda)^{-1})F_{\lambda, x\to p}u(x). \quad (2.2)$$

При $\lambda = 1$ мы получаем обычный п. д. о. Функция $L(x, p;\ (i\lambda)^{-1})$ называется *символом* λ-п. д. о. (2.2). При этом

$$L(x, p;\ (i\lambda)^{-1}) \to L(x, p;\ 0)$$

при $\lambda \to \infty$. Точные условия на символ будут приведены ниже.

Мы рассматриваем операторы вида (2.2), зависящие от параметра λ, по той причине, что многие уравнения математической физики содержат параметр λ, который входит в уравнения именно так, как в (2.2).

Пример 2.1. Уравнение Шредингера:

$$ih\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi(x, t) + V(x)\psi(x, t). \qquad (2.3)$$

Это уравнение описывает движение нерелятивистской квантовой частицы массы m в поле с потенциальной энергией $V(x)$. Полагая $h = \lambda^{-1}$, получаем д. о. вида (2.2) с символом

$$L(x, t, p, E) = E + \frac{1}{2m}\langle p, p\rangle + V(x).$$

Здесь E — двойственная переменная к t (энергия).

Пример 2.2. Уравнение Гельмгольца:

$$(\Delta + k^2n^2(x))\,u(x) = 0. \qquad (2.4)$$

Это уравнение описывает распространение световых (а также электромагнитных и акустических) волн частоты k в среде с коэффициентом преломления $n^2(x)$. Разделив обе части уравнения на k^2 и полагая $\lambda = k$, получаем д. о. вида (2.2) с символом $L(x, p) = -\langle p, p\rangle + n^2(x)$.

Пример 2.3. Рассмотрим разностную схему

$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{h^2} = \alpha^2\,\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \qquad (2.5)$$

для волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$, где $u_m^n = u\left(\frac{hn}{2}; \frac{hm}{2}\right)$ и $\alpha > 0$, $h > 0$. Используя формулу $e^{hd/dx}f(x) = f(x+h)$ и аналогичную формулу для $f(t + \alpha h)$, получим уравнение

$$\left[\sin^2\left(\frac{h}{2}D_t\right) - \alpha^{-2}\sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}D_x\right)\right]u(x) = 0,$$

которое дает нам разностную схему, если значения u взять в точках сетки. Это уравнение имеет вид

$$L(\lambda^{-1}D_t,\ \lambda^{-1}D_x)\,u = 0, \qquad h = \lambda^{-1},$$

где L есть λ-п. д. о. с символом $L(x, t, p_1, p_0) = \sin^2(p_0/2) - a^{-2}\sin^2(ap_1/2)$.

Опишем класс символов.

Определение 2.4. Функция $L(x, p)$ *принадлежит классу* T^m, если выполнены условия:

1) $L(x, p) \in C^\infty(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^n)$.

2) Для любых мультииндексов α, β

$$|D_x^\alpha D_p^\beta L(x, p)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|^m(1+|p|)^m,$$
$$(x, p) \in \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^n. \tag{2.6}$$

Таким образом, функция $L(x, p)$ растет на бесконечности не быстрее полинома по x и по p и дифференцирование L по x и по p не меняет порядка роста. Примеры символов класса T^m: 1) полиномы от (x, p) степени m; 2) символ из примера 2.3.

Переменные x и p в символе T^m равноправны.

Замечание. Класс T^m отличается от классов Хёрмандера $S^m_{\rho,\delta}$ (дифференцирование по p символа $L \in S^m_{\rho,\delta}$ уменьшает порядок роста L по p). Это различие обусловлено задачами, которые мы рассматриваем.

Определение 2.5. Функция $L(x, p; (i\lambda)^{-1})$ *принадлежит классу* T_+^m, если выполнены условия:

1) $L(x, p; (i\lambda)^{-1}) \in C^\infty(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^n \times \mathbf{R}_\lambda^+)$.

2) При любом целом $N \geqslant 0$

$$L(x, p; (i\lambda)^{-1}) = \sum_{k=0}^{N}(i\lambda)^{-k}L_k(x, p) + \lambda^{-N-1}R_N(x, p; (i\lambda)^{-1}). \tag{2.7}$$

Здесь $L_k \in T^m$ и для любых мультииндексов α, β и для любого целого $\gamma \geqslant 0$

$$|D_x^\alpha D_p^\beta D_\varepsilon^\gamma R_N(x, p, \varepsilon)]| \leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|x|)^m(1+|p|)^m, \qquad \varepsilon = (i\lambda)^{-1} \tag{2.8}$$

при $(x, p, \lambda) \in \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^n \times \mathbf{R}_\lambda^+$.

Аналогично вводится класс T^m. Типичным примером символа класса T_+^m служит функция $L = \sum_0^N (i\lambda)^{-k} \times L_k(x, p)$, где $L_k \in T_+^m$. В частности, из определения 2.5

следует, что

$$| D_x^\alpha D_p^\beta L(x,\ p;\ (i\lambda)^{-1}) | \leqslant \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|)^m(1+|p|)^m, \qquad (x,\ p,\ \lambda)\in \mathbf{R}_x^n\times\mathbf{R}_p^n\times\mathbf{R}_\lambda^+. \tag{2.8'}$$

Если

$$L(x,\ p;\ (i\lambda)^{-1})\in T_+^m,$$

то

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}\in T_+^m,\quad \frac{\partial}{\partial p_j}L\in T_+^m,\qquad x_jL\in T_+^{m+1},\qquad p_jL\in T_+^{m+1}.$$

2. Действие λ-псевдодифференциального оператора на быстро осциллирующую экспоненту. Наша ближайшая цель — получить какие-либо (частные) формальные асимптотические при $\lambda\to\pm\infty$ решения уравнения вида

$$L(\overset{2}{x},\ \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ (i\lambda)^{-1})\,u(x,\ \lambda)=0.$$

Если $Lu=\sum\limits_0^m a_k(\lambda^{-1}D_x)^k u,\ x\in\mathbf{R}^1$ и коэффициенты a_k постоянны, то решения можно искать в виде $\exp(i\lambda S(x))$. Более того, в случае простых корней характеристического уравнения всякое решение будет линейной комбинацией экспоненциальных решений. Руководствуясь этим примером, будем искать решение в виде формального ряда

$$\exp[i\lambda S(x)]\sum_0^\infty (i\lambda)^{-k}\varphi_k(x).$$

При этом необходимо выяснить, как действует λ-п. д. о. на быстро осциллирующую экспоненту, т. е. на функцию вида $\varphi(x)\exp[i\lambda S(x)]$.

Пусть $x\in\mathbf{R}^1$; тогда

$$\left(\frac{1}{i\lambda}\frac{d}{dx}\right)\exp[i\lambda S(x)]=S'(x)\exp[i\lambda S(x)],$$

$$\left(\frac{1}{i\lambda}\frac{d}{dx}\right)^2\exp[i\lambda S(x)]= =\left[(S'(x))^2+\frac{1}{i\lambda}S'(x)S''(x)\right]\exp[i\lambda S(x)].$$

Нетрудно показать по индукции, что

$$\left(\frac{1}{i\lambda}\frac{d}{dx}\right)^m (\exp[i\lambda S(x)]) =$$
$$= \exp[i\lambda S(x)]\left[(S'(x))^m + \frac{m(m-1)}{2i\lambda}(S'(x))^{m-1}S''(x) + O(\lambda^{-2})\right].$$

Применяя формулу Лейбница, получаем

$$\left(\frac{1}{i\lambda}\frac{d}{dx}\right)^m [\varphi(x)\exp(i\lambda S(x))] =$$
$$= \exp[i\lambda S(x)]\left[(S'(x))^m\varphi(x) + \frac{m}{i\lambda}(S'(x))^{m-1}\varphi'(x) + \frac{m(m-1)}{2i\lambda}(S'(x))^{m-2}S''(x)\varphi(x) + \sum_{j=2}^{m}(i\lambda)^{-j}(R_j\varphi)(x)\right],$$

где R_j — дифференциальный оператор порядка j. Символ оператора $\left(\frac{1}{i\lambda}\frac{d}{dx}\right)^m$ есть $L(p) = p^m$, и так как $dL/dp = mp^{m-1}$, $d^2L/dp^2 = m(m-1)p^{m-2}$, то мы получаем для данного оператора

$$L(\lambda^{-1}D_x)[\varphi(x)\exp(i\lambda S(x))] = \exp(i\lambda S(x))\left[L(S'(x))\varphi(x) + \frac{1}{i\lambda}\frac{dL(S'(x))}{dp}\varphi'(x) + \frac{1}{2i\lambda}\frac{d^2L(S'(x))}{dp^2}S''(x)\varphi(x) + \quad\right].$$

Эта формула остается в силе для дифференциального оператора $L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x)$ с переменными коэффициентами, так как мы вначале дифференцируем по x, а затем умножаем полученные выражения на функции от x. Наконец, поскольку операторы $\partial/\partial x_j$, $\partial/\partial x_k$ на гладких функциях перестановочны, то имеет место формула

$$L(x, \lambda^{-1}D_x; (i\lambda)^{-1})[\varphi(x)\exp(i\lambda S(x))] =$$
$$= \exp(i\lambda S(x))\sum_{j=0}^{m}(i\lambda)^{-j}R_j(x, D_x)\varphi(x), \qquad (2.9)$$

где R_j — линейные д. о. порядка j. В частности, если L — дифференциальный оператор порядка m, коэффициенты которого — полиномы от $(i\lambda)^{-1}$, то

$$(R_0\varphi)(x) = L\left(x, \frac{\partial S(x)}{\partial x}; 0\right)\varphi(x), \qquad (2.10)$$

$$(R_1\varphi)(x) = \left\langle \frac{\partial L(x, \partial S(x)/\partial x, 0)}{\partial p}, \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right\rangle + \\ + \left[\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L(x, \partial S(x)/\partial x; 0)}{\partial p^2} \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L\left(x, \frac{\partial S(x)}{\partial x}; \varepsilon\right)\Big|_{\varepsilon=0}\right]\varphi(x). \qquad (2.11)$$

Теорема 2.6. *Пусть символ* $L(x, p; (i\lambda)^{-1}) \in T_+^m$, $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $S(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ *и функция* $S(x)$ *вещественнозначна. Тогда при* $\lambda \geqslant 1$ *и при любом целом* $N \geqslant 0$

$$L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x, (i\lambda)^{-1})[\varphi(x)\exp(i\lambda S(x))] = \\ = \exp(i\lambda S(x)) \sum_{j=0}^{N} (i\lambda)^{-j} R_j(x, D_x)\varphi(x) + O_{-N-1}(x, \lambda). \quad (2.12)$$

Здесь $R_j(x, D_x)$ — *линейный дифференциальный оператор порядка* $\leqslant j$ *с коэффициентами из класса* $C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Для остаточного члена имеет место оценка

$$|D_x^\alpha O_{-N-1}(x, \lambda)| \leqslant C_r \lambda^{-N-1+|\alpha|}(1+|x|)^{-r}, \qquad (2.12')$$

где $r > 0$ — *любое*, $x \in \mathbf{R}^n$. *Для* R_0, R_1 *справедливы формулы* (2.10), (2.11).

Доказательство. Пусть $u(x, \lambda)$ — левая часть (2.12). Тогда

$$u(x, \lambda) = \\ = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int \exp[i\lambda\langle x, p\rangle] L(x, p; (i\lambda)^{-1}) I(p, \lambda)\, dp, \quad (2.13)$$

$$I(p, \lambda) = \int \varphi(x)\exp[i\lambda S(x) - \langle x, p\rangle]\, dx.$$

Пусть $M = \{p\colon p = \partial S(x)/\partial x,\ x \in \operatorname{supp}\varphi\}$ и $G(p) \subset \mathbf{R}_p^n$ — внешность конечной области, $\overline{G(p)} \cap M = \varnothing$. Устроим C^∞-разбиение единицы: $\eta_1(p) + \eta_2(p) = 1$, $p \in \mathbf{R}^n$, где $\eta_1(p)$ — финитная функция, $\operatorname{supp}\eta_2(p) \subset G(p)$, и соответственно положим $u(x, \lambda) = u_1(x, \lambda) + u_2(x, \lambda)$. Далее, применяя формулу (1.16), получаем при $x \neq 0$

$$u_2(x, \lambda) = \\ = -\frac{1}{i\lambda |x|^2} \int \exp[i\lambda \langle x, p\rangle] \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_j} (I(p, \lambda) L(x, p))\, dp.$$

Следовательно, при $|x| \geqslant 1$

$$|u_2(x, \lambda)| \leqslant C\lambda^{-N}(1 + |x|)^{m-1},$$

где $N \geqslant 0$ — любое. Снова применяя (1.16) и учитывая полученную выше оценку для $|u_2|$, находим, что

$$|u_2(x, \lambda)| \leqslant C_N\lambda^{-N}(1 + |x|)^{-N}, \quad x \in \mathbf{R}^n$$

при любом $N \geqslant 0$ и что такие же оценки верны для всех производных от u_2 по x. Далее,

$$u_1(x, \lambda) = \\ = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int L(x, p; (i\lambda)^{-1})\, \varphi(y)\, \eta_1(p) \exp[i\lambda\psi(x, y, p)]\, dy\, dp,$$

$$\psi(x, y, p) = \langle x - y, p\rangle + S(y), \tag{2.14}$$

и этот интеграл берется по конечной области в $\mathbf{R}_y^n \times \mathbf{R}_p^n$. Пусть $x \in K$. Применим теорему 1.4. Функция ψ (как функция от y, p) имеет единственную стационарную точку $Q(x)$: $y = x$, $p = \partial S(x)/\partial x$. Пусть $H(x)$ — матрица из вторых производных по переменным (y, p) функции ψ в точке $Q(x)$, т. е. $H = \left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial y_j \partial p_k}\right\|$, $1 \leqslant j$, $k \leqslant n$. Тогда $\det H(x) = (-1)^n$, $\operatorname{sgn} H(x) = 0$ и собственные значения матрицы $H(x)$ равны ± 1. Далее,

$$\psi(x, Q(x)) = S(x).$$

Если $|x| \leqslant R$, то из теоремы 1.4 мы получаем (2.12), (2.12′). Если $R > 0$ достаточно велико, то интеграл для u_1 не содержит стационарных точек и в силу леммы 1.5

$$|u_1(x, \lambda)| \leqslant C_N\lambda^{-N}(1 + |x|)^{-N}, \quad |x| \geqslant R,$$

где $N \geqslant 0$ — любое; аналогичная оценка выполняется для всех производных u_1 по x. Тем самым (2.12) доказано.

Следствие 2.7. *Асимптотическое разложение* (2.12) *можно дифференцировать по* x *и по* λ *любое число раз. Теорема* 2.6 *без изменений переносится на случай* $L \in T^m$.

Если K — компакт в $\mathbf{R}^n_x$, то формула (2.12) дает асимптотическое разложение функции

$$L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x; (i\lambda)^{-1})[\varphi(x)\exp(i\lambda S(x))]$$

в асимптотический ряд по степеням $(i\lambda)^{-1}$ при $\lambda \to +\infty$ равномерно по $x \in K$. Из (2.12) следует, что это разложение имеет вид

$$\exp[-i\lambda S(x)]\, L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x; (i\lambda)^{-1})(\exp[i\lambda S(x)]\,\varphi(x)) \sim$$
$$\sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\lambda^{-|\alpha|}}{\alpha!}\partial_p^\alpha L\left(x, \frac{\partial S(x)}{\partial x}; (i\lambda)^{-1}\right) \times$$
$$\times D_y^\alpha(\varphi(x)\exp[i\lambda S(x, y)])\,|_{y=x},$$

где обозначено

$$S(x, y) = S(x) - S(y) - \left\langle \frac{\partial S(x)}{\partial x}, \quad x - y \right\rangle.$$

Для классических п. д. о. асимптотическое разложение функции $u(x, \lambda) = L(\overset{2}{x}, \overset{1}{D}_x)[\exp(i\lambda S)\,\varphi(x)]$ было получено в [68].

Замечание 2.8. Формула (2.12) справедлива при менее жестких условиях на символ.

Предложение 2.9. *Пусть* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — *конечная область*, $L(x, p; (i\lambda)^{-1}) \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^n_p \times \mathbf{R}^+_\lambda)$, *функция* L *имеет разложение* (2.7) *и условие* (2.8) *выполнено при* $(x, p, \lambda) \in K \times \mathbf{R}^n_p \times \mathbf{R}^+_\lambda$ *с константой, зависящей от* α, β, γ, K, *для произвольного компакта* $K \subset \Omega$. (*Этот класс обозначим символом* $T^m_+(\Omega)$.) *Тогда теорема* 2.7 *остается в силе, если* $S(x) \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$; *остаточный член* $O_{-N-1}(x, \lambda) \in O^+_{-N-1}(\Omega)$.

Это предложение следует из доказательства теоремы 2.6. Аналогично формулируется результат для класса $T^m_-(\Omega)$.

Пусть область Ω и функции $\varphi(x)$, $S(x)$ те же, что и выше, и функции $\varphi(x)$, $S(x)$ фиксированы. Положим

$$M(S, \varphi) = \left\{p:\ p = \frac{\partial S(x)}{\partial x}, \quad x \in \operatorname{supp}\varphi\right\}.$$

Предложение 2.10. *Пусть условия определения* 2.5 *выполнены при* $(x, p) \in \Omega \times \overline{U(p)}$ *и* $D_x^\alpha L(x, p; (i\lambda)^{-1}) \in$

$\in \mathscr{L}_1\,(U\,(p))$ *для любого мультииндекса* α *и для любого* $x \in \Omega$. (*Здесь* $U\,(p)$ — *область, содержащая* $M\,(S,\ \varphi)$.) *Тогда все заключения теоремы* 2.6 *остаются в силе.*

Доказательство. Устроим разбиение единицы: $\eta_1\,(p) + \eta_2\,(p) = 1$, $p \in \mathbf{R}^n$, где $\eta_1\,(p)$ — финитная функция, $\operatorname{supp}\eta\,(p) \subset u_1\,(p)$ и $\eta_1\,(p) \equiv 1$ на $M\,(S,\ \varphi)$. Пусть Q_j есть λ-п. д. о. с символом $L\,(x,\ p;\ (i\lambda)^{-1})\,\eta_j\,(p)$. Из доказательства теоремы 2.6 следует, что формула (2.12) имеет место для функции $Q_1\,(\varphi e^{i\lambda S})$. Далее, $Q_2\,(\varphi e^{i\lambda S})$ имеет вид (2.13), и так как $\partial S\,(x)/\partial x \neq p$ при $\lambda \geqslant 1$, $p \in \operatorname{supp}\eta_1$, то $|\,D_p^\alpha L\,(p,\ \lambda)\,| \leqslant C_{N\ \alpha}\lambda^{-N}(1 + |\,p\,|)^{-}$ при $\lambda \geqslant 1$, $p \in \operatorname{supp}\eta_1$. Следовательно,

$$|\,Q_2\,(\varphi e^{i\lambda S})\,(x)\,| \leqslant C_N\lambda^{-N}\int |\,L\,(x,\ p;\ (i\lambda)^{-1})\,|\,\eta_1\,(p)\,(1 + |\,p\,|)^{-N}\,dp \leqslant C'_N\,(x)\,\lambda^{-N}$$

при любом x.

Например, если $L = |\,p\,|$, то достаточно потребовать, чтобы $\partial S\,(x)/\partial x \neq 0$ при $x \in \operatorname{supp}\varphi$.

Точно так же, как и теорема 2.6, доказывается

Теорема 2.11. *Все утверждения теоремы* 2.6 *остаются в силе для оператора* $L\,(\overset{1}{x},\ \lambda^{-1}\overset{2}{D}_x;\ (i\lambda)^{-1})$, *с той лишь разницей, что*

$$(R_1\varphi)\,(x) = \left\langle \frac{\partial L\,(x,\ \partial S\,(x)/\partial x;\ 0)}{\partial p},\ \frac{\partial\varphi\,(x)}{\partial x}\right\rangle + \left[\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L\,(x,\ \partial S\,(x)\,\partial x;\ 0)}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2 S\,(x)}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}L\left(x,\ \frac{\partial S\,(x)}{\partial y};\ \varepsilon\right)\Big|_{\varepsilon=0} + \operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L\,(x,\ \partial S/\partial x;\ 0)}{\partial x\,\partial p}\right)\right]\varphi\,(x). \tag{2.15}$$

Отметим, что

$$L\left(\overset{1}{x},\ -\frac{1}{\lambda}\overset{2}{D}_x;\ (i\lambda)^{-1}\right)[\varphi\,(x)\exp\,(i\lambda S\,(x))] = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n\iint L\,(y,\ p;\ (i\lambda)^{-1})\,\varphi\,(y)\exp\,[i\lambda\,(S\,(y) + \langle p,\ x-y\rangle)]\,dp\,dy. \tag{2.16}$$

3. Композиция λ-псевдодифференциальных операторов. Пусть $\mathscr{T}_+^m$ — класс всех λ-п. д. о. с символами класса T_+^m и $\mathcal{T}$ — объединение всех классов $\mathcal{T}_+^m$. Очевидно, что $\mathcal{T}_+^m$, $\mathcal{T}$ — линейные пространства над полем $\mathbf{C}$. Покажем, что класс $\mathcal{T}$ является алгеброй, т. е. что композиция двух λ-п. д. о. есть λ-п. д. о. В качестве области определения для всех λ-п. д. о. выбирается пространство $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Теорема 2.12. *Пусть $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ — λ-псевдодифференциальные операторы классов $\mathcal{T}_+^{N_1}$, $\mathcal{T}_+^{N_2}$ соответственно. Тогда их произведение $\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1$ есть λ-псевдодифференциальный оператор класса $\mathcal{T}_+^{N_1+N_2}$.*

Замечание. Эта теорема не вытекает из известных теорем о композиции псевдодифференциальных операторов [25], [68]. Дело в том, что в цитированных работах рассматриваются иные классы символов L: эти классы таковы, что дифференцирование символа $L(x, p)$ по переменным p уменьшает рост символа при $|p| \to \infty$. Именно, требуется, чтобы для любого компакта $\mathcal{K} \subset \mathbf{R}_x^n$ и для любых мультииндексов α, β с некоторой константой $C_{\alpha,\beta,\mathcal{K}}$ выполнялись оценки

$$|D_x^\alpha D_p^\beta L(x, p)| \leqslant C_{\alpha,\beta,\mathcal{K}}(1+|p|)^{m-|\beta|}, \qquad x \in \mathcal{K}, \quad p \in \mathbf{R}^n.$$

Имеются и другие обобщения этих классов, однако они не содержат в себе класс T_+^m даже в том случае, когда символ L не зависит от λ.

При доказательстве теоремы 2.12 нам понадобится более широкий класс λ-псевдодифференциальных операторов, чем класс T_+^m. А именно, рассмотрим λ-п. д. о., символы которых имеют разный рост по x и по p при $|x| \to \infty$ и при $|p| \to \infty$. Введем

Определение 2.13. Функция $L(x, p; (i\lambda)^{-1})$ *принадлежит классу* $T_+^{m_1, m_2}$, если выполнены условия:

1) $L(x, p; (i\lambda)^{-1}) \in C^\infty(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^n \times \mathbf{R}_\lambda^+)$.

2) Для любых мультииндексов α, β и для любого целого числа $\gamma \geqslant 0$ выполняются оценки

$$|D_x^\alpha D_p^\beta D_\varepsilon^\gamma L(x, p; \varepsilon)| \leqslant D_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|x|)^{m_1}(1+|p|)^{m_2} \tag{2.17}$$

при $(x, p, \lambda) \in \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^n \times \mathbf{R}_\lambda^+$.

3) При любом целом $N \geqslant 0$ справедливо разложение

$$L(x, p; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k L_k(x, p) + \varepsilon^{N+1} L_{N+1}(x, p; \varepsilon). \tag{2.18}$$

Для функций L_k, L_{N+1} выполняются условия 1), 2) (для L_k — при $\lambda = 0$).

Обозначим через $\mathcal{T}_+^{m_1, m_2}$ класс всех λ-п. д. о. с символами, принадлежащими классу $T_+^{m_1, m_2}$.

Примером символа класса $T_+^{m_1, m_2}$ служит функция

$$L(x, p) = (1+|x|^2)^{m_1/2}(1+|p|^2)^{m_2/2}\exp[i(\langle x, a\rangle + \langle p, b\rangle)], \quad (2.19)$$

где a, b — постоянные n-векторы. При $n = 1$ и при целых m_1, $m_2 \geqslant 0$ простейшим примером служит функция

$$L(x, p) = x^{m_1}p^{m_2}\exp[i(x+p)].$$

Приступим к доказательству теоремы 2.12. Для определенности ограничимся случаем, когда операторы дифференцирования действуют первыми, т. е. операторы $\mathcal{L}_j$ имеют вид

$$\mathcal{L}_j = L_j(\overset{2}{x}, \overset{1}{\lambda^{-1}D_x}; \varepsilon).$$

Здесь и далее $\varepsilon = (i\lambda)^{-1}$.

Лемма 2.14. *Пусть операторы $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ принадлежат классам $\mathcal{T}_+^{m_1, k_1}$ и $\mathcal{T}_+^{m_2, k_2}$ соответственно, и пусть $m_1 < -n$, $k_2 < -n$. Пусть функция $u(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Тогда справедлива формула*

$$(\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1 u)(x) = F^{-1}_{\lambda, p\to x}L(x, p; \varepsilon)F_{\lambda, x\to p}u(x), \quad (2.20)$$

где функция L равна

$$L(x, p; \varepsilon) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int \exp[i\lambda\langle p-\tilde{p}, \tilde{x}-x\rangle] \times$$
$$\times L_2(x, \tilde{p}; \varepsilon)L_1(\tilde{x}, p; \varepsilon)\,d\tilde{x}\,d\tilde{p}. \quad (2.21)$$

Доказательство. Из определения λ-п. д. о. (см. (2.2)) имеем

$$(\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1 u)(x) = \frac{\lambda^{(3n)/2}}{(-2\pi i)^{n/2}(2\pi)^n}\int \exp[i\lambda(\langle\tilde{p}, x-\tilde{x}\rangle +$$
$$+\langle p, \tilde{x}\rangle)]L_2(x, \tilde{p}; \varepsilon)L_1(\tilde{x}, p; \varepsilon)\tilde{u}(p)\,dp\,d\tilde{x}\,d\tilde{p}, \quad (2.22)$$

где интеграл берется по всему пространству $\mathbf{R}_p^n \times \mathbf{R}_{\tilde{x}}^n \times \mathbf{R}_{\tilde{p}}^n$ и $\tilde{u}(p) = F_{\lambda, x\to p}u(x)$. Функция $\tilde{u}(p)$ убывает быстрее любой степени $|p|$ при $|p|\to\infty$. Если $m_1 <$

$< -n$, $k_2 < -n$, то интеграл (2.22) сходится абсолютно. Меняя порядок интегрирования, получаем формулы (2.20), (2.21).

Лемма 2.15. *Пусть условия леммы 2.14 выполнены. Тогда функция* $L(x, p; \varepsilon)$, *заданная формулой* (2.21), *принадлежит классу* $\mathcal{T}_{+}^{m_1+m_2,\, k_1+k_2}$.

Доказательство. Сделаем в интеграле (2.21) замену переменных $\tilde{x} = y + x$, $\tilde{p} = q + p$; тогда

$$L(x, p; \varepsilon) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int \exp[-i\lambda\langle y, q\rangle] \times \\ \times L_1(y+x, p; \varepsilon) L_2(x, q+p; \varepsilon)\, dy\, dq. \qquad (2.23)$$

Фазовая функция $S = -\langle y, q\rangle$ имеет единственную стационарную точку $y = 0$, $q = 0$. Устроим C^∞-разбиение единицы: $1 = \eta_1(y, q) + \eta_2(y, q)$ в $\mathbf{R}^{2n}_{y,q}$. Здесь η_1 — финитная функция, равная 1 в окрестности начала координат. Соответственно разобьем интеграл (2.23) на два: $L = L^{(1)} + L^{(2)}$ (подынтегральное выражение в $L^{(j)}$ отличается от подынтегрального выражения в (2.23) множителем η_j).

Интеграл $L^{(2)}$ оценим с помощью интегрирования по частям, а к интегралу $L^{(1)}$ применим метод стационарной фазы. Интегрируя по частям с учетом тождества ($S = -\langle y, q\rangle$)

$$\exp(i\lambda S) = i\lambda^{-1} M(\exp(i\lambda S)), \qquad (2.24)$$

$$M = (|q|^2 + |y|^2)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \left(q_j \frac{\partial}{\partial y_i} + y_j \frac{\partial}{\partial q_j}\right),$$

получаем

$$L^{(2)} = i\lambda^{n-1}(2\pi)^{-n} \int \exp(i\lambda S)\, {}^tM(L_1 L_2 \eta_2)\, dy\, dq.$$

Здесь ${}^tM$ — формально сопряженный с M оператор и аргументы всех функций те же, что и в (2.23).

Имеем, в силу (2.24),

$${}^tM = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \frac{\partial}{\partial y_j} + b_j \frac{\partial}{\partial q_j}\right) + c.$$

Здесь функции a_j, b_j имеют порядок $O(r^{-2})$ при $r = \sqrt{|y|^2 + |q|^2} \to \infty$, $c = O(r^{-1})$, и эту асимптотику можно дифференцировать любое число раз (т. е. $D_y^\alpha a_j = O(r^{-2-|\alpha|})$ при $r \to \infty$ и т. д.). Далее, класс $T_+^{m,k}$ инвариантен относительно операторов дифференцирования D_{x_j}, D_{p_j}, D_ε, что следует непосредственно из определения 2.13.

По условию

$$|L_1L_2| \leqslant C(1+|y+x|^2)^{\frac{m_1}{2}}(1+|p|^2)^{\frac{k_1}{2}} \times \\ \times (1+|x|^2)^{\frac{m_2}{2}}(1+|q+p|^2)^{\frac{k_2}{2}} \equiv CQ. \quad (2.25)$$

Эта оценка и все последующие имеют место при всех вещественных x, p, y, q и при $\lambda \geqslant 1$. Для всех производных функции L_1L_2 справедливы оценки вида (2.25), только с другими постоянными C.

В силу установленных выше свойств коэффициентов оператора ${}^tM$ и оценки (2.25) имеем

$$|{}^tM(L_1L_2\eta_2)| \leqslant CQ(1+r^2)^{-1/2}$$

при $(q, y) \in \operatorname{supp} \eta_2$ (напомним, что $r \geqslant r_0 > 0$ на $\operatorname{supp} \eta_2$), и такие же оценки справедливы для всех производных функции ${}^tM(L_1L_2)$. Аналогично доказывается, что

$$|{}^tM^j(L_1L_2\eta_2)| \leqslant CQ(1+r^2)^{-j/2} \quad (2.26)$$

и все производные функции ${}^tM^j(L_1L_2\eta_2)$ допускают такие же оценки. Для краткости все константы, входящие в оценки, обозначаем одной и той же буквой C.

Воспользуемся неравенством Питре [25]:

$$2(1+|\xi+\eta|^2) \geqslant \frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2},$$

где $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$. Имеем $(m_1 < 0)$

$$(1+|x+y|^2)^{\frac{m_1}{2}} \leqslant C(1+|x|^2)^{\frac{m_1}{2}}(1+|y|^2)^{-\frac{m_1}{2}}.$$

Следовательно,

$$Q \leqslant C(1+|x|^2)^{\frac{m_1+m_2}{2}}(1+|p|^2)^{\frac{k_1+k_2}{2}}(1+|y|^2)^{-\frac{m_1}{2}}(1+|q|^2)^{-\frac{m_2}{2}} \quad (2.27)$$

Напомним, что интегрирование в формуле (2.23) производится по переменным y, q. После интегрирования по частям для подынтегрального выражения получаем оценку вида (2.27), да еще с множителем $\lambda^{-j}(1+|y|^2+|q|^2)^{-j/2}$, где $j\geqslant 0$ — любое. Поэтому, если взять j достаточно большим и проинтегрировать эту оценку по переменным $dy\,dq$, то для функции $L^{(2)}$ получим оценку

$$|L^{(2)}|\leqslant C\lambda^{-j}(1+|x|^2)^{\frac{m_1+m_2}{2}}(1+|p|^2)^{\frac{k_1+k_2}{2}} \tag{2.28}$$

Здесь $j\geqslant 0$ — любое. Точно такие же оценки, в силу доказанного выше, справедливы и для всех производных функции $L^{(2)}$, так что, очевидно, $L^{(2)}\in T_+^{m_2,\,k_2}$.

Рассмотрим интеграл $L^{(1)}$, который берется по ограниченной области, так как функция η_1 финитна.

Положим

$$f=L_1(y+x,\ p;\ \varepsilon)\,L_2(x,\ q+p;\ \varepsilon)\,\eta_1(y,\ q).$$

По формуле Тейлора имеем

$$f=\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant N} f_{\alpha\beta}(x,\ p)\,y^\alpha q^\beta+f_N. \tag{2.29}$$

Фазовая функция $S=-\langle y,\ q\rangle$ в интеграле $L^{(1)}$ имеет единственную, и притом невырожденную, стационарную точку $y=0$, $q=0$. Применяя метод стационарной фазы (теорема 1.1), получаем, что интегралы

$$J_{\alpha\beta}=\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n\int \exp(i\lambda S)\,y^\alpha q^\beta\eta_1(y,\ q)\,dy\,dq$$

при $\lambda\to+\infty$ имеют вид $J_{\alpha\beta}=\lambda^{-|\alpha|-|\beta|}$ (асимптотический ряд по степеням λ^{-1}). Далее, функции $f_{\alpha\beta}$ пропорциональны производным $D_x^\alpha D_p^\beta\,(L_1(x,\ p;\ \varepsilon)\,L_2(x,\ p;\ \varepsilon))$ и поэтому принадлежат классу $T_+^{m_1+m_2,\,k_1+k_2}$. Следовательно, все функции

$$f_{\alpha\beta}J_{\alpha\beta}^{+}\in T_+^{m_1+m_2,\,k_1+k_2}.$$

Используя интегральную формулу для остаточного члена f_N в формуле (2.29), получаем, что

$$f_N=\sum_{|\alpha|+|\beta|=N+1} y^\alpha q^\beta g_{\alpha\beta}(x,\ p,\ y,\ q;\ \varepsilon),$$

где для функций $g_{\alpha\beta}$ при $(y,\ q)\in\operatorname{supp}\eta_1$ справедливы оценки

$$|g_{\alpha\beta}|\leqslant C(1+|x|^2)^{\frac{m_1+m_2}{2}}(1+|p|^2)^{\frac{k_1+k_2}{2}}$$

и такие же оценки (с другими константами) имеют место для всех производных функций $g_{\alpha\beta}$. Используя тождество (2.24) и интегрируя по частям, получаем

$$\tilde{J}_{\alpha\beta}=\int y^{\alpha}q^{\beta}\eta_1 \exp(i\lambda S)\,dy\,dq=$$
$$=i\lambda^{-j}\int \exp(i\lambda S)\,{}^tM^j\,(y^{\alpha}q^{\beta}g_{\alpha\beta}\eta_1)\,dy\,dq.$$

Коэффициенты оператора ${}^tM^j$ имеют вид $\varphi\cdot r^{-2j}$, где φ — полином от переменных y, q, а функция $y^{\alpha}q^{\beta}$ имеет нуль порядка $N+1$ в начале координат. Поэтому при фиксированном j и при $N\geqslant Mj$ достаточно большом функция ${}^tM^j\,(y^{\alpha},\ q^{\beta}g_{\alpha\beta}\eta_1)$ есть сумма производных функции $g_{\alpha\beta}$ с коэффициентами, которые являются непрерывными функциями от y, q в окрестности начала координат. Отсюда вытекает оценка (2.28) для интеграла $\tilde{J}_{\alpha\beta}$ и для всех его производных по переменным x, p при $j\leqslant j(N)$, где $j(N)\to+\infty$ при $N\to\infty$.

Тем самым для функции $L^{(1)}$ доказано существование представления (2.18) и оценка (2.17) при $\gamma=0$. Имеем

$$L^{(1)}=\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant N} J_{\alpha\beta}+\left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^n\sum_{|\alpha|+|\beta|=N+1}\tilde{J}_{\alpha\beta}.$$

Интегралы $J_{\alpha\beta}$ разлагаются в асимптотические ряды по степеням $\varepsilon=(i\lambda)^{-1}$, которые можно дифференцировать почленно (теорема 1.1). Далее, $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}=i\lambda^2\frac{\partial}{\partial\lambda}$, так что производная по ε интеграла $\tilde{J}_{\alpha\beta}$ есть интеграл такого же вида, умноженный на λ^2. Так как при достаточно большом N для интеграла $\tilde{J}_{\alpha\beta}$ справедлива оценка (2.28), где $j=-2-n$, то $\left|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\tilde{J}_{\alpha\beta}\right|\leqslant C$ при таком N. Тем самым оценка (2.17) для функции $L^{(1)}$ доказана при $\gamma=1$; аналогично проводится оценка при всех $\gamma\geqslant 2$.

Тем самым доказано, что $L^{(1)}\in T^{m_1+m_2,\,k_1+k_2}$, что в сочетании с оценкой (2.28) для функции $L^{(2)}$ доказывает, что $L\in T_{+}^{m_1+m_2,\,k_1+k_2}$.

Доказательство теоремы 2.12 мы сведем к случаю, рассмотренному в лемме 2.15. Для этого необходимо преобразовать композицию $\mathscr{L}_2\mathscr{L}_1$ так, чтобы уменьшить порядок роста символа L_1 по x и уменьшить порядок роста символа L_2 по p. Предварительно установим еще одно важное свойство λ-псевдодифференциальных операторов.

Теорема 2.16. *Пусть оператор* $\mathcal{L} \in \mathcal{T}_{+}^{m,k}$, *функция* $u(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. *Тогда для любых мультииндексов* α *и для любого целого числа* $N \geqslant 0$ *справедливы оценки*

$$|D_x^\alpha(\mathcal{L}u)(x)| \leqslant C_{\alpha, N}(1+|x|)^{-N} \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\ \lambda \geqslant 1). \quad (2.30)$$

Таким образом, функция $\mathcal{L}u$ *убывает при* $|x| \to \infty$ *быстрее любой степени* $|x|$ *вместе со всеми производными.*

Доказательство. Устроим разбиение единицы класса C^∞ в $\mathbf{R}_x^n$: $\eta_1(x) + \eta_2(x) \equiv 1$, где функция $\eta_1(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $\eta_1(x) \equiv 1$ в окрестности точки $x = 0$. Тогда $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, где $\mathcal{L}_j$ — оператор с символом $\eta_j L$. Имеем

$$(\mathcal{L}_2 u)(x) = \left(\frac{\lambda}{-2\pi i}\right)^{n/2} \int \exp[i\lambda\langle x, p\rangle]\, \eta_2(x) L(x, p; \varepsilon)\, \tilde{u}(p)\, dp. \quad (2.31)$$

Воспользуемся тождеством

$$\exp[i\lambda\langle x, p\rangle] = \frac{1}{i\lambda} A(\exp[i\lambda\langle x, p\rangle]),$$

$$A = |x|^{-2} \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial}{\partial p_k}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$(\mathcal{L}_2 u)(x) = -\left(\frac{\lambda}{-2\pi i}\right)^{n/2} \frac{(i\lambda)^{-1}}{|x|^2} \int \exp[i\lambda\langle x, p\rangle]\, \eta_2(x) \times$$
$$\times \left[\sum_{k=1}^{n} \left(x_k \frac{\partial}{\partial p_k} L(x, p)\, \tilde{u}(p) + x_k \frac{\partial \tilde{u}(p)}{\partial p_k}\right)\right] dp. \quad (2.32)$$

Так как функции $\partial L/\partial p_j \in T_{+}^{m,k}$, а функция $\tilde{u}(p)$ убывает при $|p| \to \infty$ быстрее любой степени $|p|$ вместе со всеми производными, то

$$|(\mathcal{L}_2 u)(x)| \leqslant \lambda^{\frac{n}{2}-1} (1+|x|)^{m-1}.$$

Продолжая интегрирование по частям, получаем оценку (2.30) для функции $\mathcal{L}_2 u$. Более того, в правой части этой оценки можно добавить множитель λ^{-N} (при $\lambda \geqslant 1$).

Функция $\mathscr{L}_1 u$ имеет вид (2.31), где следует заменить $\eta_2(x)$ на $\eta_1(x)$. Подынтегральная функция финитна по x, так как $\eta_1(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Далее, для функции $\widetilde{u}(p)$ справедливы оценки $|\widetilde{u}(p)| \leqslant C_N |p|^{-N}\lambda^{-N}$ при $|p| \geqslant 1$, $\lambda \geqslant 1$, при любом целом $N \geqslant 0$ (лемма 1.5), и такие же оценки справедливы для всех производных этой функции. Поэтому можно считать, что символ L финитен по p, т. е. что $L \equiv 0$ при $|p| \geqslant 1$.

Следовательно,

$$(\mathscr{L}_1 u)(x) = \\ = \eta_1(x)\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int\int \exp[i\lambda\langle x-y,\ p\rangle] L(x,\ p;\ \varepsilon)\, u(y)\, dy\, dp,$$

где интеграл берется по конечной области в $\mathbf{R}_y^n \times \mathbf{R}_p^n$. Применяя метод стационарной фазы (теорема 1.4), получаем, что последний интеграл является ограниченной функцией x при $\lambda \geqslant 0$, и из финитности функции η_1 вытекает оценка (2.30) для функции $\mathscr{L}_1 u$ при $|\alpha| = 0$. Чтобы получить оценку (2.30) при $|\alpha| \geqslant 1$, перепишем формулу для $\mathscr{L}_1$ в виде

$$(\mathscr{L}_1 u)(x) = \\ = \eta_1(x)\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int\int \exp[-i\lambda\langle \widetilde{y},\ p\rangle] L(x,\ p;\ \varepsilon)\, u(\widetilde{y}+x)\, d\widetilde{y}\, dp$$

и заметим, что дифференцирование этого интеграла по x приводит к интегралу того же вида. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.12. В силу теоремы 2.16 функция $(\mathscr{L}_1 u)(x)$ убывает быстрее любой степени $|x|$ при $|x| \to \infty$, $\lambda \geqslant 1$. Поэтому композиция $\mathscr{L}_2(\mathscr{L}_1 u)(x)$ определена. Действительно,

$$\mathscr{L}_2(\mathscr{L}_1 u)(x) = \\ = \left(\frac{\lambda}{-2\pi i}\right)^{n/2} \int \exp[i\lambda\langle x,\ p\rangle] L_2(x,\ p;\ \varepsilon)\, \widetilde{\mathscr{L}_1 u(p)}\, dp;$$

функция $\widetilde{\mathscr{L}_1 u(p)}$ при $\lambda \geqslant 1$ убывает быстрее любой степени $|p|$ при $|p| \to \infty$, так что последний интеграл сходится абсолютно. Перепишем этот интеграл в виде

$$(\mathscr{L}_2\mathscr{L}_1 u)(x) = \left(\frac{\lambda}{-2\pi i}\right)^{n/2} \int \exp[i\lambda\langle x,\ p\rangle] \times \\ \times L_2^{(N)}(x,\ p;\ \varepsilon)\, \widetilde{(-\lambda^{-2}\Delta_{\widetilde{x}}+1)^N (\mathscr{L}_1 u)(\widetilde{x})}\, dp,$$

где $L_2^{(N)}(x, p;\ \varepsilon) = L_2(x, p;\ \varepsilon)(1 + |p|^2)^{-N}$, и $N > 0$ выберем достаточно большим. Символ $L_2^{(N)}$ принадлежит классу $T_+^{m_2, k_2 - N}$. Функция $(\mathcal{L}_1 u)(x)$ имеет вид (2.31), где $L = L_1$, $\eta_2 \equiv 1$, так что

$$(-\lambda^{-2}\Delta_x + 1)^N (\mathcal{L}_1 u)(x) = (\mathcal{L}_1^{(-2N)} u)(x),$$

где $\mathcal{L}_1^{(-2N)}$ есть λ-п. д. о. с символом класса $T_+^{m_1+2N, k_1}$. Итак,

$$\mathcal{L}_2 \mathcal{L}_1 u = \mathcal{L}_2^{(N)} \mathcal{L}_1^{(-2N)} u,$$

где оператор $\mathcal{L}_2^{(N)}$ удовлетворяет условиям леммы 2.15. Чтобы иметь возможность применить эту лемму к композиции $\mathcal{L}_2^{(N)} \mathcal{L}_1^{(-2N)}$, необходимо уменьшить рост символа $L_1^{(-2N)}$ по x. Для этого, как и в доказательстве теоремы 2.16, представим оператор $\mathcal{L}_1^{(-2N)}$ в виде $\mathcal{L}_1^{(-2N)} = \mathcal{L}_{11} + \mathcal{L}_{12}$, где $\mathcal{L}_{11}$ — оператор с финитным по x символом, а символ L_{12} оператора $\mathcal{L}_{12}$ тождественно равен нулю при $|x| \leqslant 1$. Применяя к функции $(\mathcal{L}_{12}u)(x)$ ту же процедуру, которая была применена в доказательстве теоремы 2.16 к функции $(\mathcal{L}_{12}u)(x)$, получаем (см. (2.32)), что

$$(\mathcal{L}_{12}u)(x) = \left(\frac{\lambda}{-2\pi i}\right)^{n/2} \int \exp\left[i\lambda\langle x, p\rangle\right] \eta_2(x) \times \\ \times \sum_{|\alpha|=0}^{M} L_{12}^{(\alpha)}(x, p;\ \varepsilon)(i\lambda)^{-|\alpha|} D_p^\alpha \tilde{u}(p)\, dp.$$

Здесь $M \geqslant 1$ — достаточно большое целое число, а символы $L_{12}^{(\alpha)} \in T^{m_1 - q, k_1}$, где $q \geqslant 1$ может быть сделано сколь угодно большим за счет увеличения M.

Для композиции $\mathcal{L}_2^{(N)} \mathcal{L}_{11}$ теорема вытекает из леммы 2.15; точно так же эта лемма применима к композициям $\mathcal{L}_2^{(N)} \mathcal{L}_{12}^{(\alpha)}$, где $\mathcal{L}_{12}^{(\alpha)}$ и есть λ-п. д. о. с символом $L_{12}^{(\alpha)}$. Однако операторы $\mathcal{L}_2^{(N)} \mathcal{L}_{12}^{(N)}$ действуют не на функцию $u(x)$, а на функцию $x^\alpha u(x)$, где $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Из финитности функции u следует, что если $\mathcal{L}$ есть λ-п. д. о. с символом L класса $T_+^{m, k}$, то

$$\mathcal{L}(x^\alpha u(x)) = (\tilde{\mathcal{L}} u)(x),$$

где $\tilde{\mathcal{L}}$ есть λ-п. д. о. с символом класса $T_+^{m+|\alpha|, k}$. Для доказательства этого факта достаточно в формуле вида (2.31) для λ-п. д. о. проинтегрировать по частям по dp.

Итак, доказано, что композиция $\mathscr{L}_2\mathscr{L}_1$ двух λ-п. д. о. есть снова λ-п. д. о. с символом класса $T^{m,\,k}$ при некоторых m, k. Вычисляя порядки рассмотренных выше операторов $\mathscr{L}_2^{(N)}$, $\mathscr{L}_{12}^{(\alpha)}$ и учитывая лемму 2.15, нетрудно показать, что $m = m_1 + m_2$, $k = k_1 + k_2$.

Из доказательства теоремы 2.12 вытекает более общий результат.

Теорема 2.17. *Пусть* $\mathscr{L}_j \in \mathscr{T}_+^{m_j,\,k_j}$, $j = 1, 2$. *Тогда композиция* $\mathscr{L}_2\mathscr{L}_1 \in \mathscr{T}_+^{m,\,k}$, $m = m_1 + m_2$, $k = k_1 + k_2$.

Приведем формулы для композиции двух λ-псевдодифференциальных операторов.

Теорема 2.18. *Пусть λ-псевдодифференциальные операторы* $\mathscr{L}_j$, $j = 1, 2$, *принадлежат классам* $\mathscr{T}_+^{m_j,\,k_j}$, *причем операторы дифференцирования действуют первыми. Тогда символ L оператора* $\mathscr{L} = \mathscr{L}_2\mathscr{L}_1$ *имеет вид*

$$L_2(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ \varepsilon)\,[L_1(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ \varepsilon)\,u(x)] = \\ = [L^0(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x) + \varepsilon L^1(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x)]\,u\,(x) + \\ + \varepsilon^2 L^3(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ \varepsilon)\,u(x). \tag{2.33}$$

Здесь $\varepsilon = (i\lambda)^{-1}$, *оператор* $\mathscr{L}^3 \in \mathscr{T}_+^{m_1+m_2,\,k_1+k_2}$ *и*

$$L^0(x, p) = L_1(x, p;\ 0)\,L_2(x, p, 0), \tag{2.34}$$

$$L^{(1)}(x, p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L_2(x, p;\ 0)}{\partial p_j}\,\frac{\partial L_1(x, p;\ 0)}{\partial x_j} + \left.\frac{\partial L_1(x, p;\ \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \tag{2.35}$$

Доказательство. Представление (2.33) вытекает из теоремы 2.17 и определения 2.13. Остается доказать формулы (2.34) и (2.35). Подействуем оператором $\mathscr{L}$ на быстро осциллирующую экспоненту $u = \varphi(x) \times \exp[i\lambda S(x)]$, где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $S \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и фаза $S(x)$ вещественнозначна. Тогда, в силу теоремы 2.6, имеем

$$(\mathscr{L}u)(x) = \exp[i\lambda S(x)]\,[R_0\varphi + \varepsilon R_1\varphi + O(\varepsilon^2)] \\ (\varepsilon \to 0). \tag{2.36}$$

Оценка $O(\varepsilon^2)$ равномерна по x на любом компакте. Функции $R_0\varphi$, $R_1\varphi$ имеют вид (2.10), (2.11), где L — символ оператора $\mathscr{L}$.

Теперь к функции u последовательно применим операторы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Имеем

$$(\mathcal{L}_1 u)(x) = \exp[i\lambda S(x)]\,[R_0^1\varphi + \varepsilon R_1^1\varphi] + O(\varepsilon^2) \qquad (\varepsilon \to 0),$$

где функции $R_j^1\varphi$ определяются по символу L_1 с помощью формул (2.10), (2.11). Остаточный член в последней формуле принадлежит классу $O_{-2}^{+}(x, \lambda)$ (теорема 2.6), так что

$$|\,\mathcal{L}_2 O(\varepsilon^2)\,| \leqslant C\,|\,\varepsilon\,|^2$$

при $x \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \geqslant 1$. Следовательно,

$$(\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1 u)(x) = \exp[i\lambda S(x)]\,[\mathcal{L}_2(R_0^1\varphi + \varepsilon R_1^1\varphi)] + O(\varepsilon^2) =$$
$$= \exp[i\lambda S(x)]\,[R_0^2(R_0^1\varphi) + \varepsilon R_0^2(R_1^1\varphi) + \varepsilon R_1^{2'}(R_0^1\varphi)] + O(\varepsilon^3)$$
$$(\varepsilon \to 0).$$

Сравнивая эту формулу с формулой (2.36), получаем

$$R_0\varphi = R_0^2 R_0^1\varphi, \quad R_1\varphi = R_2^0 R_1^1\varphi + R_1^2(R_0^1\varphi) \qquad (2.37)$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Следовательно,

$$L^0(x, p) = L_1(x, p;\ 0)\,L_2(x, p;\ 0),$$

где $p = \partial S(x)/\partial x$. Так как в качестве S можно взять любую линейную функцию, то формула (2.34) доказана.

Заметим, что тождества (2.37) имеют один и тот же вид и для λ-дифференциальных, и для λ-псевдодифференциальных операторов. Следовательно, достаточно доказать формулу (2.37) для λ-дифференциальных операторов $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, а в этом случае формулы (2.33) — (2.35) вытекают из формулы Лейбница.

Точно так же доказывается формула композиции в том случае, когда порядок действия дифференцирования и умножения в операторах $\mathcal{L}_j$ иной, чем в (2.33).

§ 3. Уравнение Гамильтона — Якоби. Система Гамильтона

Частное формальное асимптотическое решение уравнения $L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}D_x)\,u = 0$ ищем в виде

$$u(x, \lambda) = \varphi(x)\exp[i\lambda S(x)].$$

Тогда функция $S(x)$ удовлетворяет *уравнению Гамильтона — Якоби*

$$L\left(x, \frac{\partial S(x)}{\partial x}\right) = 0,$$

которое является характеристическим для уравнения $Lu = 0$. Характеристическим уравнением для уравнения Шредингера является уравнение Гамильтона — Якоби классической динамики; уравнению Гельмгольца отвечает уравнение эйконала.

Задача Коши для уравнения Гамильтона — Якоби эквивалентна задаче Коши для *системы Гамильтона*

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial L(x,\ p)}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial L(x,\ p)}{\partial x}.$$

Начальные данные образуют в фазовом пространстве $(x,\ p)$ многообразие размерности $n-1$: $x = x^0(\alpha)$, $p = p^0(\alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. Пусть $(x(t,\ \alpha),\ p(t,\ \alpha))$ — решение задачи Коши этой системы.

Предэкспонента $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению переноса, т. е. обыкновенному линейному дифференциальному уравнению первого порядка вдоль луча $x = x(t,\ \alpha)$. Применение формулы Лиувилля дает главный член асимптотики в малом:

$$u(x)=\sqrt{\frac{J(0,\ \alpha)}{J(t,\ \alpha)}}\exp\left[i\lambda S(x)+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 L(x,\ p)}{\partial x_j\,\partial p_j}dt'\right].$$

Здесь якобиан $J(t,\ \alpha) = \det\dfrac{\partial x(t,\ \alpha)}{\partial t\,\partial\alpha}$ характеризует изменение площади сечения лучевой трубки. Эта формула пригодна, вообще говоря, только при малых $|t|$.

1. Характеристическое уравнение (уравнение Гамильтона — Якоби). Рассмотрим уравнение

$$L(\overset{1}{x},\ \lambda^{-1}\overset{2}{D}_x;\ (i\lambda)^{-1})\,u(x)=0. \tag{3.1}$$

Нас интересуют формальные асимптотические решения этого уравнения при $\lambda\to\pm\infty$. Пусть G — конечная область в $\mathbf{R}^n_x$.

Определение 3.1. Функция $u(x,\ \lambda)\in O_0^+(G)$ называется *решением уравнения* (3.1) *по модулю* $O^+_{-m}(G)$ $\times$ $\times$ $(\mathrm{mod}\ O^+_{-m}(G))$, если $Lu(x,\ \lambda)\in O^+_{-m}(G)$.

В работах по асимптотическим методам в теории дифференциальных уравнений в этом случае пишут, что «$u(x,\ \lambda)$ есть асимптотическое решение уравнения (3.1) с точностью до $O(\lambda^{-m})$ при $\lambda\to+\infty$». Будем искать частное решение $\mathrm{mod}\, O^+_{-1}(G)$ в виде

$$u(x, \lambda) = \varphi(x) \exp[i\lambda S(x)]. \tag{3.2}$$

Из теоремы 2.6 и формулы (2.10) следует

Предложение 3.2. *Пусть символ* $L(x, p; (i\lambda)^{-1}) \in T^m_+$, *функция* $S(x) \in C^\infty(G)$ *и вещественнозначна, функция* $\varphi(x) \in C_0^\infty(G)$. *Пусть* $S(x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$L(x, \partial S(x)/\partial x; 0) = 0, \qquad x \in G. \tag{3.3}$$

Тогда функция (3.2) *есть решение уравнения* (3.1) $\mathrm{mod}\, O^+_{-1}(G)$.

Уравнение (3.3) будем называть *характеристическим уравнением* (или *уравнением Гамильтона — Якоби*) для уравнения (3.1). Введем

Определение 3.3. Вещественнозначная функция $S(x)$ называется *λ-характеристикой* λ-п. д. о. $L(\overset{1}{x}, \lambda^{-1}\overset{2}{D}_x; (i\lambda)^{-1})$, если для любой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(G)$

$$L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x; (i\lambda)^{-1})[\varphi(x) \exp(i\lambda S(x))] = O(\lambda^{-1}) \quad (\lambda \to +\infty) \tag{3.4}$$

при каждом фиксированном $x \in G$. λ-характеристика $S(x)$ удовлетворяет характеристическому уравнению.

Замечание 3.4. В общей теории уравнений с частными производными принято другое определение характеристики (см., например, [71]). Именно, функция $S(x) \in C^\infty(G)$ называется *характеристикой* дифференциального оператора L, если она удовлетворяет уравнению

$$L^0(x, \partial S(x)/\partial x) = 0, \tag{3.5}$$

где L^0 — главная часть оператора L (т. е. старшая однородная часть полинома $L(x, p)$ от переменных p).

Это определение эквивалентно следующему: функция $S(x)$ есть характеристика оператора L, если для любой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(G)$ выполняется соотношение

$$L(\overset{2}{x}, \overset{1}{D}_x)[\varphi(x) \exp[i\lambda S(x))] = \lambda^m O(\lambda^{-1})$$

при $x \in G$, $\lambda \to +\infty$, где m — порядок оператора L.

Пример 3.5. Характеристические уравнения для уравнения Шредингера (2.3) и для уравнения Гельмгольца (2.4) имеют соответственно вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+V(x)=0, \tag{3.6}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2=n^2(x). \tag{3.7}$$

Первое из них есть уравнение Гамильтона — Якоби, описывающее движение классической частицы массы m в поле с потенциальной энергией $V(x)$. Второе есть уравнение геометрической оптики (уравнение эйконала), описывающее распространение света в среде с показателем преломления $n^2(x)$. Решение уравнения (3.6) в классической механике называется *действием*, решение уравнения (3.7) называется в оптике *эйконалом.*

Если же воспользоваться определением характеристики (3.5), то характеристики этих уравнений удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{\partial S(t,\,x)}{\partial x}\right)^2=0, \qquad \left(\frac{\partial S(x)}{\partial x}\right)^2=0$$

соответственно. В частности, уравнение Гельмгольца не имеет вещественных характеристик, отличных от тождественной постоянной, а характеристики уравнения Шредингера имеют вид $S = S(t)$. Согласно (3.5) характеристики уравнения Шредингера совпадают с характеристиками уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u,$$

которое резко отличается по своим свойствам от уравнения Шредингера.

Физики де-факто считают характеристиками уравнений Шредингера и Гельмгольца именно решения уравнения Гамильтона — Якоби (3.6) и уравнения эйконала (3.7), так как именно эти уравнения описывают соответствие между квантовой и классической механикой и между волновой и геометрической оптикой.

Понятие характеристики дифференциального (или псевдодифференциального) оператора неоднозначно и определяется тем классом задач, которые для этого оператора рассматриваются. Для рассматриваемого нами класса задач пригодно определение (3.4), но не (3.5).

Предложение 3.6. *λ-характеристики для λ-псевдодифференциальных операторов*

$$L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x; (i\lambda)^{-1}), \quad L(\overset{1}{x}, \lambda^{-1}\overset{2}{D}_x; (i\lambda)^{-1})$$

совпадают.

2. Бихарактеристики. Уравнение (3.3) есть нелинейное уравнение в частных производных первого порядка. Из классического анализа известно, что интегрирование этого уравнения сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial L(x, p; 0)}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial L(x, p; 0)}{\partial x}. \tag{3.8}$$

Эту систему будем называть *бихарактеристической системой* или *системой Гамильтона* для оператора $L(x, D_x; (i\lambda)^{-1})$.

Введем следующую терминологию. Пространство $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_p$ будем называть *фазовым пространством*. Пусть $x = x(t)$, $p = p(t)$, $t \in I = (t_1, t_2)$,— решение системы Гамильтона. Кривую $\{(x, p): x = x(t), p = p(t), t \in I\}$ в фазовом пространстве назовем *бихарактеристикой*, а ее проекцию на $\mathbf{R}^n_x$, т. е. кривую $\{x: x = x(t), t \in I\}$,— *лучом* или *траекторией*. Эта терминология заимствована из геометрической оптики и классической механики (см. пример 3.5) и находится в следующем соответствии с общепринятой:

бихарактеристика $\leftrightarrow$ бихарактеристическая полоска,
луч (траектория) $\leftrightarrow$ бихарактеристика.

Всюду в § 3 предполагается, что выполнено условие

L 3.1. Функция $L(x, p; 0) \in C^\infty(\mathbf{R}^n_n \times \mathbf{R}^n_p)$ и вещественнозначна.

Приведем ряд известных [13], [16], [26], [51] свойств системы Гамильтона. Напомним, что *скобкой Пуассона* (f, g) скалярных функций $f(x, p)$, $g(x, p)$ называется функция

$$(f, g)(x, p) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial p} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle.$$

Предложение 3.7. *Производная функции $f(x, p)$ в силу системы Гамильтона равна скобке Пуассона (f, L).*

Функция $L(x, p; 0)$ *является первым интегралом системы Гамильтона.*

Доказательство. Производная $\dot{f}(x, p)$ функции $f(x, p)$, в силу системы Гамильтона, равна

$$\dot{f}(x, p) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial p} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial L}{\partial x} \right\rangle = (f, L)(x, p).$$

Так как $\dot{L} = (L, L) = 0$, то $L(x, p; 0)$ есть первый интеграл.

Предложение 3.8. *Пусть* $S(x)$ — *решение характеристического уравнения в области* $G \ni x^0$ *и* $\Gamma = \{(x, p)\colon x = x(t),\ p = p(t),\ t \in I \ni 0\}$ *есть бихарактеристика, отвечающая начальным данным*

$$x|_{t=0} = x^0, \qquad p|_{t=0} = \frac{\partial S(x^0)}{\partial x}. \tag{3.9}$$

Тогда при $(x, p) \in \Gamma$ *имеем*

$$p = \frac{\partial S(x)}{\partial x}, \tag{3.10}$$

$$\frac{dS(x)}{dt} = \left\langle p(t), \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle. \tag{3.11}$$

Доказательство. Все рассмотрения производятся при $t \in I = (-\delta, \delta)$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial L(y, \partial S(y)/\partial y; 0)}{\partial p}, \quad y|_{t=0} = x^0 \tag{3.12}$$

и положим

$$q(t) = (S \circ y)(t). \tag{3.12'}$$

Решение задачи (3.12) существует и единственно при $t \in I$. Покажем, что $(y(t), q(t))$ — решение системы Гамильтона (3.8) при $t \in I$; тогда из (3.12), (3.12′) и единственности решения задачи Коши мы получим (3.10). Дифференцируя (3.12) по t и дифференцируя тождество $L\left(x, \frac{\partial S(x)}{\partial x}; 0\right) = 0$ по x, получаем

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{\partial^2 S(y(t))}{\partial x^2} \frac{\partial L(y(t), q(t); 0)}{\partial p},$$

$$\frac{\partial L\left(x, \frac{\partial S(x)}{\partial x}; 0\right)}{\partial x} + \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} \frac{\partial L\left(x, \frac{\partial S(x)}{\partial x}; 0\right)}{\partial p} = 0.$$

Подставляя $x = y(t)$ в последнее соотношение, получаем

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{\partial L(y(t),\ q(t);\ 0)}{\partial p_{\mathrm{j}}},$$

т. е. второе из уравнений (3.8).

Далее, вдоль Γ имеем

$$\frac{dS(x,\ t)}{dt} = \left\langle \frac{\partial S(x(t))}{\partial x},\ \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle = \left\langle p(t),\ \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle,$$

откуда следует (3.10).

3. Задача Коши на плоскости. Поставим задачу Коши для уравнения (3.3) на плоскости $x_n = 0$. Так как это уравнение нелинейное, то, вообще говоря, недостаточно задать $S(x)$ при $x_n = 0$. Положим $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $p' = (p_1, \ldots, p_{n-1})$. *Задачей Коши* для уравнения Гамильтона — Якоби назовем следующую задачу: найти решение уравнения, удовлетворяющее данным Коши

$$S|_{x_n=0} = S_0(x'), \quad x' \in U', \tag{3.13}$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{x_n=0} = p^0(x'), \quad x' \in U'. \tag{3.14}$$

Здесь U' — окрестность точки $x' = 0'$ и $S_0(x')$, $p^0(x')$ — заданные вещественнозначные функции класса $C^\infty(U')$.

Функции $S_0(x')$, $p^0(x')$ должны удовлетворять условиям согласования: при $x' \in U'$

$$L(x',\ 0,\ p^0(x');\ 0) = 0, \tag{3.15}$$

$$\langle p^0(x'),\ dx' \rangle = dS_0(x'). \tag{3.16}$$

Последнее условие называется *условием полоски* [26], [51].

Задачу (3.3), (3.13), (3.14) с условиями согласования (3.15), (3.16) будем называть *лагранжевой задачей Коши* (см. § 4).

Лемма 3.9. *Пусть*

$$\frac{\partial L(0,\ p_n(0');\ 0)}{\partial p_n} \neq 0. \tag{3.17}$$

Тогда решение лагранжевой задачи Коши существует и единственно в некоторой окрестности точки $x = 0$.

Доказательство. Положим $y = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, и пусть $\{x(t, y),\ p(t, y)\}$ — решение задачи Коши

$$x|_{t=0} = (y,\ 0), \qquad p|_{t=0} = p^0(y) \tag{3.18}$$

для системы Гамильтона (3.8). Это решение существует и единственно при $t \in I(y) \ni 0$, если интервал $I(y)$ достаточно мал. В окрестности точки $x = 0$ в качестве локальных координат можно выбрать (y, t), поскольку якобиан $J(t, y) = \det \frac{\partial x(t, y)}{\partial(t, y)}$ в точке $t = 0$, $y = 0$ равен $\frac{\partial L(0, p^0(0'), 0)}{\partial p_n} \neq 0$ (см. (3.17), (3.18)).

Если $S(x)$ — решение лагранжевой задачи Коши, то вдоль траектории системы Гамильтона имеем

$$\frac{dS}{dt} = \left\langle p, \frac{dx}{dt} \right\rangle$$

(предложение 3.8). Поэтому положим

$$S(x(t, y)) = S_0(y) + \int_0^t \left\langle p(y, \tau), \frac{dx(y, \tau)}{d\tau} \right\rangle d\tau. \tag{3.19}$$

Функция $S(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки $x = 0$ и удовлетворяет условиям (3.13), (3.14). Далее, при малых t, y

$$L(x(t, y), p(t, y); 0) = 0. \tag{3.20}$$

Действительно, L является первым интегралом системы (3.8), а при $t = 0$ (3.20) выполняется в силу (3.13). Покажем, что

$$p(t, y) = \frac{\partial S(x(t, y))}{\partial x}. \tag{3.21}$$

Тогда из (3.20) получим, что $S(x)$ есть решение (3.3). Положим $S_1(t, y) = S(x(t, y))$; тогда равенство (3.21) эквивалентно системе

$$\begin{gathered} \frac{\partial S_1}{\partial t} - \left\langle p, \frac{\partial x}{\partial t} \right\rangle = 0, \\ M_j \equiv \frac{\partial S_1}{\partial y_j} - \left\langle p, \frac{\partial x}{\partial y_j} \right\rangle = 0, \\ 1 \leqslant j \leqslant n-1, \end{gathered} \tag{3.21'}$$

где $x = x(t, y)$, $p = p(t, y)$, $S_1 = S_1(x, y)$. Первое из равенств (3.21′) следует из (3.19). Дифференцируя по y_j первое равенство (3.21′) и дифференцируя по t остальные равенства, получаем

$$\frac{\partial^2 S_1}{\partial t\,\partial y_j}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_k}{\partial y_j}\frac{\partial x_k}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}p_k\frac{\partial^2 x_k}{\partial t\,\partial y_j}=0,$$

$$\frac{\partial M_j}{\partial t}=\frac{\partial^2 S_1}{\partial t\,\partial y_j}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_k}{\partial t}\frac{\partial x_k}{\partial y_j}-\sum_{k=1}^{n}p_k\frac{\partial^2 x_k}{\partial t\,\partial y_j}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial M_j}{\partial t}=\left\langle\frac{\partial p}{\partial y_j},\ \frac{\partial x}{\partial t}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial p}{\partial t},\ \frac{\partial x}{\partial y_j}\right\rangle=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y_j}L\,(x\,(t,\ y),\ p\,(t,\ y);\ 0)=0$$

в силу (3.20). Так как

$$M_j\,(0,\ y)=\frac{\partial S_1\,(t,\ y)}{\partial y_j}-\left\langle p\,(t,\ y),\ \frac{\partial x\,(t,\ y)}{\partial y_j}\right\rangle\Big|_{t=0}=$$
$$=\frac{\partial S_0\,(y)}{\partial y_j}-p_j^0\,(y)=0$$

в силу (3.13), то $M_j\,(t,\ y)\equiv 0$, и (3.21) доказано.

Тем самым существование решения задачи Коши доказано. Докажем единственность. Пусть $S\,(x)$ — построенное выше решение и $S_1\,(x)$ — некоторое другое решение задачи Коши. Так как $\frac{\partial S_1\,(0)}{\partial x}=\frac{\partial S\,(0)}{\partial x}$ и выполнено (3.14), то $\frac{\partial S_1(x',\ 0)}{\partial x}=p^0\,(x')$. Если из точки $(x',\ 0,\ p^0\,(x'))$ выпустить бихарактеристику, то вдоль нее $p\,(x)=\frac{\partial S\,(x)}{\partial x}$, $p\,(x)=\frac{\partial S_1\,(x)}{\partial x}$ в силу предложения 3.8. Поэтому $S_1\,(x)$ совпадает с правой частью (3.19), т. е. с $S\,(x)$.

4. Уравнение переноса. Рассмотрим уравнение (3.1), где $L\in T_+^m$ (или T_-^m). Наша цель — построить формальные асимптотические (ф. а.) решения этого уравнения с точностью до $O\,(\lambda^N)$ $(\lambda\to+\infty)$ при любом N. Нам понадобится известная формула Лиувилля [4], [51], [52]; приведем ее доказательство. Рассмотрим автономную вещественную систему из n уравнений

$$\frac{dx}{dt}=f\,(x),\tag{3.22}$$

где, для простоты, $f(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n_x)$. Пусть $x(t, \alpha) \in C^\infty(I \times V)$ есть $(n-1)$-параметрическое семейство решений системы, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}_\alpha$, V — область в $\mathbf{R}^{n-1}_\alpha$, I — интервал $|t| < \delta$. Положим

$$J(t, \alpha) = \det \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial(t, \alpha)}. \tag{3.23}$$

Теорема 3.10. *Пусть $J(t, \alpha) \neq 0$ при $(t, \alpha) \in I \times V$. Тогда имеет место формула Лиувилля*

$$\frac{d}{dt} \ln J(t, \alpha) = \mathrm{Sp}\, \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, \alpha)). \tag{3.24}$$

Доказательство. Если матрица $A(t) \in C^1(I)$ и невырождена при $t \in I$, то

$$\frac{d}{dt} \ln J(t, \alpha) = \mathrm{Sp}\left(A^{-1}(t) \frac{dA(t)}{dt}\right). \tag{3.25}$$

Имеем из (3.22)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial(t, \alpha)}\right) = \frac{\partial f(x(t, \alpha))}{\partial x} \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial(t, \alpha)}.$$

Подставляя это выражение в (3.25) и учитывая, что $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$, получаем формулу Лиувилля (3.24).

Рассмотрим неавтономную вещественную систему из n уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{3.26}$$

где, для простоты, $f(t, x) \in C^\infty(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)$. Пусть $x(t, \alpha) \in C^\infty(I \times V)$ есть n-параметрическое семейство решений системы (3.26), где I — интервал $|t| < \delta$, $\alpha \in \mathbf{R}^n_\alpha$, V — область в $\mathbf{R}^n_\alpha$. Положим

$$J_1(t, \alpha) = \det \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha}. \tag{3.27}$$

Тогда справедлива формула Лиувилля

$$\frac{d}{dt} \ln J_1(t, \alpha) = \mathrm{Sp}\, f'_x(x(t, \alpha)), \tag{3.28}$$

если $J_1(t, \alpha) \neq 0$ при $(t, \alpha) \in I \times V$. Доказательство то же, что и выше.

Будем искать решение уравнения (3.1) $\mathrm{mod}\, O^{\pm}_{2}(\Omega)$ в виде

$$u(x, \lambda) = \varphi(x) \exp(i\lambda S(x)). \tag{3.29}$$

Подставляя его в (3.1) и применяя (2.10) — (2.12), получаем, что функции φ, S должны удовлетворять уравнениям

$$L\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}; 0\right) = 0, \tag{3.30}$$

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial L\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}; 0\right)}{\partial p} \right\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}; 0\right)}{\partial p} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)\varphi(x) + \\ + \left.\frac{\partial L\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}; \varepsilon\right)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varphi(x) = 0. \tag{3.31}$$

Уравнение (3.31) называется *уравнением переноса*.

Сформулируем условия на символ L. Напомним условие L 3.1: функция $L(x, p; 0)$ принадлежит $C^\infty_{\ldots}$ и вещественнозначна при всех вещественных x, p.

L 3.2. $L(x, p; (i\lambda)^{-1}) \in T^m_+$.

L 3.3. Функция $L(x, p; (i\lambda)^{-1})$ вещественнозначна при $x \in \mathbf{R}^n$, $p \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \geqslant 1$.

Рассмотрим задачу Коши для системы Гамильтона (3.8):

$$\begin{aligned} x_{t=0} &= x^0(\alpha), \\ p|_{t=0} &= p^0(\alpha), \qquad \alpha \in U. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}_\alpha$, U — область в $\mathbf{R}^{n-1}_\alpha$, $\{x\colon x = x^0(\alpha)\}$ есть C^∞-многообразие размерности $(n-1)$ в $\mathbf{R}^n_x$ и выполнено условие согласования

$$\langle p^0(\alpha), dx^0(\alpha)\rangle = 0, \qquad \alpha \in U. \tag{3.33}$$

Следующее условие на символ L и на данные Коши сформулируем в терминах бихарактеристик.

L 3.4. Задача Коши (3.8), (3.31) имеет единственное решение $\{x(t, \alpha), p(t, \alpha)\}$ при $(t, \alpha) \in I \times U$, $I = (-\delta, +\delta)$, и отображение

$$(t, \alpha) \to x(t, \alpha), \ (t, \alpha) \in I \times U \tag{3.34}$$

есть диффеоморфизм.

Положим

$$S(x(t, \alpha)) = S_0(x^0(\alpha)) + \int_0^t \left\langle p(\tau, \alpha), \frac{dx(\tau, \alpha)}{d\tau} \right\rangle d\tau, \tag{3.35}$$

где $S_0(x^0(\alpha)) \in C^\infty(U)$. Тогда функция $S(x) \in C^\infty(\Omega)$, где $\Omega = \{x\colon x = x(t, \alpha);\ (t, \alpha) \in I \times U\}$, и является решением характеристического уравнения при $x \in \Omega$.

Теорема 3.11. *Пусть условия L 3.1 — L 3.4 выполнены. Тогда функция*

$$u(x, \lambda) = \frac{\varphi_0(\alpha)\sqrt{|J(0, \alpha)|}}{\sqrt{|J(t, \alpha)|}} \exp[i\lambda S(x(t, \alpha))] \times$$
$$\times \exp\left(\int_0^t \left[\frac{1}{2} \operatorname{Sp} \frac{\partial^2 L(x(\tau, \alpha), p(\tau, \alpha); 0)}{\partial x\, \partial p} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial L(x(\tau, \alpha), p(\tau, \alpha), \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right] d\tau\right) \qquad (3.36)$$

является решением уравнения (3.1) $\operatorname{mod} O_{-2}^{\pm}(\Omega)$.

Здесь S, J определяются из (3.35), (3.23), $\varphi_0(\alpha)$ — *произвольная функция класса $C^\infty(U)$, и $x = x(t, \alpha)$.*

Доказательство. Подставим (3.36) в (3.1). Тогда уравнение (3.29) будет выполнено. Обозначим через L^0, $\frac{\partial L^0}{\partial x}$, $\frac{\partial L^0}{\partial (i\lambda)^{-1}}$ и т. д. значения этих функций в точке $\left(x, \frac{\partial S}{\partial x};\ 0\right)$. Имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left\langle \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}, \frac{\partial L^0}{\partial p}\right\rangle, \qquad x = x(t, \alpha).$$

Поэтому уравнение (3.31) вдоль луча $x = x(t, \alpha)$ (при α фиксированном) примет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} + \left[\frac{1}{2} \operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L^0}{\partial p^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)\varphi + \frac{\partial L^0}{\partial (i\lambda)^{-1}}\varphi\right] = 0. \qquad (3.37)$$

Применяя формулу Лиувилля (3.24) к системе $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial L^0}{\partial p}$, получаем

$$\frac{d}{dt} \ln J = \operatorname{Sp}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L^0\left(x, \frac{\partial S}{\partial x};\ 0\right)}{\partial p}\right)\right) =$$
$$= \operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L^0}{\partial p^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right) + \operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L^0}{\partial x\, \partial p}\right)$$

Следовательно, уравнение (3.37) можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{J}} \frac{d}{dt}(\sqrt{J}\,\varphi) = \left(\left(\frac{1}{2} \operatorname{Sp} \frac{\partial^2 L^0}{\partial x\, \partial p}\right) - \frac{\partial L^0}{\partial [(i\lambda)^{-1}]}\right)\varphi. \qquad (3.38)$$

Интегрируя это уравнение, получаем (3.36).

Рассмотрим оператор с симметричным символом.

Теорема 3.12. *Пусть условия теоремы 3.11 выполнены. Тогда функция*

$$u(x, \lambda) = \frac{\varphi_0(\alpha)\sqrt{|J(0, \alpha)|}}{\sqrt{|J(t, \alpha)|}} \exp(i\lambda S(x)) \tag{3.39}$$

является решением уравнения

$$[L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x) + L(\overset{1}{x}, \lambda^{-1}\overset{2}{D}_x)]\, u(x, \lambda) = O(\operatorname{mod} O^{+}_{-2}(\Omega)). \tag{3.40}$$

Доказательство. В силу (2.15) уравнение переноса (3.37) в данном случае примет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L^0}{\partial p^2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L^0}{\partial x\, \partial p}\right)\varphi = 0. \tag{3.41}$$

Повторяя доказательство теоремы 3.11, получим для φ уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{J}}\frac{d}{dt}(\sqrt{J}\varphi) = 0.$$

Замечание. Рассмотрим в фазовом пространстве n-мерное многообразие $\Lambda^n = \{(x, p)\colon x = x(t, \alpha),\ p = p(t, \alpha),\ \alpha \in V,\ t \in I\}$. Элемент объема на Λ^n имеет вид $d\sigma^n(x) = a(x)\,dx$. Потребуем, чтобы этот объем был инвариантен относительно сдвигов вдоль фазовых траекторий; тогда $(a \circ x)(t, \alpha) = b(\alpha)$. Следовательно,

$$\frac{d\sigma^n(x)}{dx} = \frac{J(0, \alpha)}{J(t, \alpha)} \qquad (x = x(t, \alpha)),$$

так что формула (3.39) принимает вид (при $\psi(\alpha) \equiv 1$)

$$u(x, \lambda) = \sqrt{\left|\frac{d\sigma^n(x)}{dx}\right|}\exp(i\lambda S(x)). \tag{3.39'}$$

5. Задача Коши. Рассмотрим λ-псевдодифференциальный оператор с выделенной производной по t:

$$L = \lambda^{-1}D_t + H(t, \overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x; (i\lambda)^{-1}), \tag{3.42}$$

где $t \in [0, +\infty)$, $x \in \mathbf{R}^n$ и H есть λ-п. д. о. В операторе H переменная t играет роль параметра. Рассмотрим задачу Коши с быстро осциллирующими начальными данными:

$$Lu(t, x) = 0, \tag{3.43}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x)\exp(i\lambda S_0(x)), \tag{3.44}$$

где $u_0(x) \in C^\infty(\mathbf{R}_x^n)$, $S_0(x) \in C^\infty(\mathbf{R}_x^n)$ и функция $S_0(x)$ вещественнозначна.

Уравнение Гамильтона — Якоби для L имеет вид

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S(t, x)}{\partial x}; 0\right) = 0. \tag{3.45}$$

Из системы Гамильтона имеем $\frac{dt}{d\tau} = 1$, где τ — параметр вдоль бихарактеристики, так что можно отождествить τ с t, и система Гамильтона имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(t, x, p; 0)}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(t, x, p; 0)}{\partial x}, \tag{3.46}$$

$$\frac{dS}{dt} = \left\langle p, \frac{\partial H(t, x, p; 0)}{\partial p}\right\rangle - H(t, x, p; 0), \tag{3.47}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dE}{d\tau} = -\frac{\partial H(t, x, p; 0)}{\partial t}, \tag{3.48}$$

где E — двойственная к t переменная. Система (3.46) замкнута, и, более того, если решение этой системы известно, то можно найти функцию S из (3.47). Поэтому мы отбросим уравнения (3.48), а систему (3.46) будем называть *укороченной системой Гамильтона* для оператора L. Таким образом, мы будем рассматривать бихарактеристики не в $(2n+2)$-мерном фазовом пространстве (x, t, p, E), а в $2n$-мерном фазовом пространстве (x, p).

Сформулируем условия на оператор H.

H 3.1. Функция $H(t, x, p; (i\lambda)^{-1}) \in C^\infty$ при $t \geqslant 0$, $(x, p) \in \mathbf{R}^{2n}$, $\lambda \geqslant 1$, и вещественнозначна.

H 3.2. При каждом фиксированном $t \geqslant 0$ функция $H(x, p, t; (i\lambda)^{-1}) \in T_+^m(\mathbf{R}_x^n)$, где m не зависит от t. Оценки (2.6) выполняются с константами $C_{\alpha\beta}(t)$, причем их можно выбрать так, что $\sup\limits_{t\in[0, T]} C_{\alpha\beta}(t) < \infty$ для любого $T > 0$ и для любых фиксированных α, β.

H 3.3. Задача Коши

$$x|_{t=0} = y, \quad p|_{t=0} = \frac{\partial S_0(y)}{\partial y}, \qquad y \in \mathbf{R}_x^n, \tag{3.49}$$

для системы (3.46) имеет, и притом единственное, решение

$$\{x(t, y), p(t, y)\} \in C^\infty([0, T] \times \mathbf{R}_y^n).$$

Будем искать решение задачи Коши (3.43), (3.44) в виде формального ряда

$$u(t, x) = \exp(i\lambda S(t, x)) \sum_{0}^{\infty} \varphi_k(t, x)(i\lambda)^{-k}. \qquad (3.50)$$

Тогда для $S(t, x)$ получим уравнение (3.45) и данные Коши

$$S|_{t=0} = S_0(x), \qquad (3.51)$$

а для φ_k — данные Коши

$$\varphi_0|_{t=0} = u_0(x), \quad \varphi_j|_{t=0} = 0, \quad j \geqslant 1. \qquad (3.52)$$

Лемма 3.13. *Пусть* $\varphi(x, t)$, $S(x, t) \in C^\infty([0, T] \times \mathbf{R}^n_x)$, *функция* S *вещественнозначна, функция* $\varphi(0, t) = 0$ *при* $x \geqslant a$, $t \in [0, T]$. *Пусть символ оператора* L *удовлетворяет условиям* H 3.1—H 3.3. *Тогда при любом целом* $N \geqslant 1$

$$L(\overset{2}{t}, \overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x, \lambda^{-1}\overset{2}{D}_x; (i\lambda)^{-1})(\varphi(t, x)\exp(i\lambda S(t, x))) =$$

$$= \exp(i\lambda S(t, x)) \sum_{j=0}^{N} (i\lambda)^{-j}(R_j\varphi)(t, x) + \varphi_{N+1}(t, x, \lambda). \qquad (3.53)$$

Для остаточного члена имеет место оценка

$$|D_x^\alpha D_t^\beta \varphi_{N+1}(t, x, \lambda)| \leqslant C_{\alpha, \beta, K}\lambda^{-N-1+|\alpha|+\beta} \qquad (3.54)$$

для любых мультииндексов α, β *при* $|\lambda| \geqslant 1$, $t \in [0, T]$, $x \in K \in \mathbf{R}^n_x$ (K — *компакт*). R_j *являются дифференциальными операторами по переменным* x *порядка* $\leqslant 2j$ *с коэффициентами из класса* $C^\infty([0, T] \times \mathbf{R}^n_x)$.

Доказательство следует из теоремы 2.6.

Положим теперь

$$S(t, x(t, y)) = \int_0^t \Big[\Big\langle p(\tau, y'), \frac{dx(\tau, y)}{d\tau}\Big\rangle -$$

$$- H(\tau, x(\tau, y), p(\tau, y); 0)\Big] d\tau + S_0(y), \qquad (3.55)$$

$$J(t, y) = \det\frac{\partial x(t, y)}{\partial y}. \qquad (3.56)$$

Введем обозначение: $\frac{d\varphi}{dt}$ — производная функции $\varphi(x, t)$ в силу системы (3.42), т. е.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Big\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial p}\Big\rangle. \qquad (3.57)$$

Лемма 3.14. *Пусть отображение*

$$(t, y) \to x(t, y), \qquad t \in [0, T], \ y \in \mathbf{R}_y^n, \tag{3.58}$$

есть диффеоморфизм и функция S *имеет вид* (3.55). *Пусть условия* H 3.1 — H 3.3 *выполнены. Тогда*

$$R_0\varphi \equiv 0, \tag{3.59}$$

$$(R_1\varphi)(t, x(t, y)) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{J}} \frac{d}{dt}(\sqrt{J}\varphi) - \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 H^0}{\partial x\, \partial p}\right)\varphi + \left.\frac{\partial H(t, x, p, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varphi. \tag{3.60}$$

Здесь $\varphi = \varphi(t, x)$, $x = x(t, y)$, $p = p(t, y)$.

Доказательство. Имеем из (2.10)

$$R_0\varphi \equiv \left(\frac{\partial S}{\partial t} + H^0\right)\varphi \equiv 0,$$

так как S удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби. Далее, из (2.11) имеем

$$(R_1\varphi)(t, x) =$$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial H^0}{\partial p} \right\rangle + \left[\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 H^0}{\partial p^2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right) + \left.\frac{\partial H^0}{\partial (i\lambda)^{-1}}\right|_{i\lambda^{-1}=0}\right]\varphi.$$

Применяя формулу Лиувилля (3.28) к неавтономной системе

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H^0}{\partial p},$$

тем же способом, что и в теореме 3.11, получаем (3.60).

Пусть функция $S(t, x)$ имеет вид (3.55):

$$\varphi_0(t, x(t, y)) = u_0(y)\frac{\sqrt{J(0, y)}}{\sqrt{J(t, y)}} \times$$
$$\times \exp\left[\left(\int_0^t \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 H^0}{\partial x\, \partial p}\right) - \left.\frac{\partial H^0}{\partial (i\lambda)^{-1}}\right|_{i\lambda^{-1}=0}\right) dt\right]. \tag{3.61}$$

Функции $\varphi_j(x, t)$ при $j \geqslant 1$ являются решениями задачи Коши

$$\begin{aligned} &R_1\varphi_1 = -R_2\varphi_0, \quad \varphi_1|_{t=0} = 0, \\ &R_1\varphi_2 = -R_2\varphi_1 - R_3\varphi_0, \quad \varphi_2|_{t=0} = 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &R_1\varphi_j = -R_2\varphi_{j-1} - \ldots - R_{j+1}\varphi_0, \quad \varphi_j|_{t=0} = 0. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Теорема 3.15. *Пусть выполнены условия* H 3.1—H 3.3 *и отображение* (3.58) *есть диффеоморфизм. Тогда функция*

$$u_N(t, x, \lambda) = \exp(i\lambda S(t, x)) \sum_{j=0}^{N} (i\lambda)^{-j} \varphi_j(t, x) \quad (3.63)$$

удовлетворяет данным Коши (3.44) *и при* $t \in [0, T]$, $x \in \mathbf{R}_x^n$

$$Lu_N(t, x, \lambda) = \psi_{N+1}(t, x, \lambda), \quad (3.64)$$

где для ψ_{N+1} *выполняются оценки* (3.54).

Доказательство. Функции $S(t, x)$, $\varphi(t, x)$ удовлетворяют условиям леммы 3.14, так что формула (3.53) имеет место для функции u_N. В силу (3.62) и выбора функции S имеем

$$Lu_N = \exp(i\lambda S(t, x))(i\lambda)^{-N} R(\varphi_0, \ldots, \varphi_N) + \chi_{N+1}(t, x, \lambda) \equiv$$
$$\equiv \overset{0}{\chi}_{N+1}(t, x, \lambda) + \chi_{N+1}(t, x, \lambda),$$

где для χ_{N+1} выполняется оценка (3.54). Далее, $R(\varphi_0, \ldots, \varphi_N)$ есть сумма линейных дифференциальных операторов конечного порядка, действующих на функции $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$, которые, в силу (3.62), принадлежат $C^\infty([0, \tau] \times \mathbf{R}_x^n)$. Функция $u_0(x)$ финитна, и в силу (3.61) имеем $\varphi_0(t, x(t, y)) \equiv 0$ при $t \in [0, T]$, $y \notin \operatorname{supp} u_0(y)$ (т. е. $\varphi_0 \equiv 0$ вне полосы П (рис. 4), которая заполняется лучами $x = x(t, y)$, $t \in [0, T]$, $y \in \operatorname{supp} u_0(y)$). Поэтому $R_j\varphi_0 \equiv 0$ вне П при всех j.

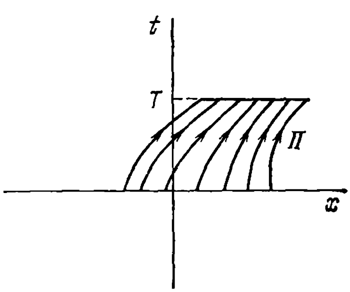

Рис. 4.

Так как $\varphi_j|_{t=0} = 0$, $j \geqslant 1$, то из (3.62) получаем, что $\varphi_j(t, x) \equiv 0$ вне П при всех j. Следовательно, для функции $\overset{0}{\chi}_{N+1}(t, x, \lambda)$ выполняются оценки (3.54). Теорема доказана.

Эта конструкция теряет силу в том случае, если $J(t, y)$ обращается в нуль.

6. Примеры. Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$(\Delta + k^2 n^2(x))\, u(x) = 0.$$

В данном случае характеристическим уравнением является *уравнение эйконала* (3.7) — уравнение геометрической оптики изотропной среды. Поверхности уровня $S(x) = \text{const}$ называются *волновыми фронтами* или поверхностями постоянной фазы.

Система Гамильтона имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = 2p, \quad \frac{dp}{dt} = -\nabla n^2(x), \tag{3.65}$$

функция S определяется из уравнения

$$\frac{dS}{dt} = 2n^2(x), \tag{3.65'}$$

где t — параметр вдоль траектории. Проекция фазовой траектории $(x(t), p(t))$ на x-пространство является *световым лучом*. В частности, $x(t)$ удовлетворяет системе Ньютона

$$\ddot{x} + \nabla n^2(x) = 0.$$
159

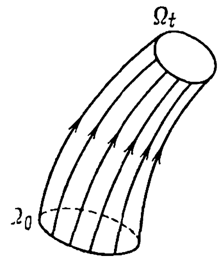

Рис. 5.

Световые лучи ортогональны волновым фронтам; это следует из соотношений $dx/dt = p$, $p = \partial S/\partial x$ и из ортогональности градиента к поверхности уровня.

Главный член асимптотики решения уравнения Гельмгольца имеет, в силу (3.36′), вид

$$u_0(x, k) = \psi(\alpha)\sqrt{\frac{J(0, \alpha)}{J(t, \alpha)}}\exp(ikS(x)).$$

Предэкспоненту в этой формуле можно вычислить из закона сохранения потока световой энергии. Возьмем какой-либо участок Ω_0 волнового фронта $S(x) = c_0$, положим $t = 0$ на этом участке и выпустим семейство лучей. Мы получим так называемую *трубку лучей* (рис. 5). Пусть $u(x, k) = A(x, k)\exp(ikS(x))$; световая энергия, проходящая через бесконечно малый участок Ω_0, равна $|u|^2 S(\Omega_0) = |A|^2 S(\Omega_0)$, где $S(\Omega_0)$ — площадь Ω_0. В силу закона сохранения эта величина равна $|A|^2 S(\Omega_t)$ при любом t, где площадка Ω_t получена из Ω_0 сдвигом на t вдоль лучей трубки. Следовательно,

$$\frac{|A(t, \alpha)|^2}{|A(0, \alpha)|^2} = \frac{S(\Omega_0)}{S(\Omega_t)} \approx \frac{J(0, \alpha)}{J(t, \alpha)},$$

что и дает искомое выражение для предэкспоненты.

Рассмотрим более подробно случай постоянного коэффициента преломления $n^2(x) = 1$. Тогда

$$(\Delta + k^2)\, u(x) = 0,$$

а уравнение эйконала и система Гамильтона принимают вид

$$(\nabla S(x))^2 = 1, \tag{3.66}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2p, \quad \frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 2.$$

Решение системы Гамильтона с данными Коши при $t = 0$ имеет вид

$$x(t) = 2tp(0) + x(0), \quad p(t) = p(0),$$
$$S(t) = 2t + S(0),$$

так что и фазовые траектории, и лучи являются прямыми линиями. Возьмем в $\mathbf{R}^n$ гладкое ориентируемое многообразие M^{n-1} размерности $n-1$, заданное уравнениями $x = x^0(\alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in U$, где U — область в $\mathbf{R}^{n-1}_\alpha$. Многообразие M^{n-1} может быть компактным или некомпактным. Положим

$$S(x) \equiv 0, \qquad x \in M^{n-1}.$$

Чтобы поставить задачу Коши для уравнения эйконала, необходимо задать еще $\nabla S(x)$ на M^{n-1}. Так как $S(x) \equiv 0$ на M^{n-1}, то все производные функции S по касательным переменным равны нулю, и уравнение эйконала на M^{n-1} принимает вид $\left(\frac{\partial S}{\partial \nu}\right)^2 = 1$, где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по направлению единичной нормали к M^{n-1}. Фиксируем в каждой точке $x \in M^{n-1}$ единичную нормаль ν_x, непрерывно зависящую от x, и положим

$$\frac{\partial S}{\partial \nu_x} = 1, \qquad x \in M^{n-1}.$$

Тем самым задача Коши для уравнения эйконала полностью поставлена. Соответствующая лагранжева задача Коши для системы Гамильтона имеет вид

$$x|_{t=0} = x^0(\alpha), \quad p|_{t=0} = p^0(\alpha), \qquad \alpha \in U.$$

Вектор $p^0(\alpha)$ совпадает, по построению, с вектором единичной нормали ν_x в точке $x = x^0(\alpha)$. Решая задачу

Коши, получаем

$$x(t, \alpha) = 2tp^0(\alpha) + x^0(\alpha), \quad p = p^0(\alpha), \tag{3.67}$$
$$S(x(t, \alpha)) = 2t.$$

Отсюда вытекает, что волновые фронты являются *эквидистантными поверхностями*. Действительно, взяв точку $x = x^0(\alpha)$ на волновом фронте $S(x) \equiv 0$ и сдвинув ее на расстояние h вдоль нормали, получим точку на волновом фронте $S(x) = h$.

Уравнения (3.67) задают эйконал $S(x)$ в параметрической форме: выражая (t, α) через x из первого уравнения, получаем $t = t(x)$, $\alpha = \alpha(x)$, так что $S(x) = 2t(x)$. Функция $S(x)$ является гладкой и однозначной функцией от x, если якобиан $J(t, \alpha) \neq 0$, где обозначено

$$J(t, \alpha) = \det \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial (t, \alpha)}.$$

Пусть в $\mathbf{R}^n_x$ имеется $(n - 1)$-параметрическое семейство кривых: $x = x(t, \alpha)$, $t \in [T_1, T_2]$, $\alpha = (\alpha_1, \quad \alpha_{n-1})$. *Каустикой* этого семейства называется множество точек, в которых $J(t, \alpha) = 0$. *Фокальной точкой* кривой $x = x(t, \alpha)$ называется точка $x^0 = x(t_0, \alpha^0)$ такая, что $J(t_0, \alpha^0) = 0$. Если это семейство есть семейство световых лучей, то главный член коротковолнового приближения обращается в бесконечность на каустике, так что приближение геометрической оптики непригодно вблизи каустик [32].

Из геометрической интерпретации волновых фронтов следует, что если волновой фронт $S(x) = 0$ является строго выпуклым гладким компактным многообразием, то при малых $|t|$ волновые фронты обладают этим же свойством, а эйконал $S(x)$ является функцией класса C^∞. Однако при увеличении t это свойство не сохраняется.

Пример 3.16. Рассмотрим для уравнения эйконала

$$(\nabla S(x))^2 = 1$$

задачу Коши

$$S(x) \equiv 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \nu} = 1, \quad x \in S^{n-1},$$

где S^{n-1} — единичная сфера $|x| = 1$, $\partial/\partial\nu$ — производная по внутренней нормали к S^{n-1}. Задача Коши для системы Гамильтона имеет вид $x|_{t=0} = \omega$, $p|_{t=0} = -\omega$, где $\sum_{j=1}^{n} \omega_j^2 = 1$, откуда

$$x(t, \omega) = (1 - 2t)\,\omega, \quad S = 2t,$$

так что

$$S(x) = 1 \pm |x|$$

и эйконал оказывается неоднозначной функцией. Лучевая картина такова: каждая точка движется со скоростью 2 по лучу, и при $t = 1/2$ все лучи приходят в точку $x = 0$ — происходит фокусировка лучей. Волновой фронт $S(x) = 2t$ при $0 < t < 1/2$ является сферой радиуса $1 - 2t$ с центром в точке $x = 0$, а при $t = 1/2$ волновой фронт вырождается в точку $x = 0$. Из геометрического смысла якобиана следует, что отношение $J(0, \alpha)/J(t, \alpha)$ равно отношению площадей сфер радиусов 1 и $1 - 2t$, т. е. равно $|x|^{-n+1}$. Следовательно, уравнение Гельмгольца имеет ф. а. решение u, главный член асимптотики u_0 которого равен

$$u_0(x, k) = |x|^{-\frac{n-1}{2}} \exp(-ik|x|)$$

и которое является сходящейся к центру волной. Это ф. а. решение равномерно по x в любой конечной области, не содержащей точки $x = 0$.

Отметим еще, что точка $x = 0$ — фокус семейства лучей — является особой точкой эйконала $S(x)$.

Рассмотрим фазовые траектории данной задачи. Имеем

$$x(t) = (1 - 2t)\,\omega, \quad p(t) = -\omega, \quad \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2 = 1.$$

Пусть g^t — сдвиг вдоль траекторий за время t, $\Lambda_t = g^t \Lambda_0$, где Λ_0 — начальное многообразие $x = \omega$, $p = -\omega$, $\omega \in S^{n-1}$. Многообразие Λ_t есть сфера размерности $n - 1$, лежащая на n-плоскости $x = (2t - 1)\,p$; оно диффеоморфно проектируется на x-пространство при $t \neq 1/2$ и диффеоморфно проектируется на p-пространство при всех t. Проекция многообразия $\Lambda_{1/2}$ на $\mathbf{R}_x^n$ есть точка $x = 0$ (фокус).

Объединение $\Lambda^n = \bigcup_{-\infty < t < \infty} \Lambda_t$ также является n-мерным C^∞-многообразием; это многообразие лагранжево (см. § 4). Λ^n лежит на «цилиндре» $|p| = 1$ и задается уравнением

$$p=\frac{\partial S(x)}{\partial x}\ (S(x)=1-|x|),\qquad x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$$

при $x\neq 0$. Далее, $\Lambda^n\setminus\Lambda_{1/2}$ диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}_x^n$. Многообразие $\Lambda_{1/2}=\{(x, p)\colon x=0,\ |p|=1\}$ называется циклом особенностей (относительно проектирования на $\mathbf{R}_x^n$) лагранжева многообразия Λ^n.

Для этого примера характерно следующее.

1) Семейство траекторий в фазовом пространстве $\mathbf{R}_{x,p}^{2n}$, порожденное лагранжевой задачей Коши, не имеет особенностей (т. е. оно образует n-мерное C^∞-многообразие Λ^n, а его сечение Λ_t в момент времени t является $(n-1)$-мерным C^∞-многообразием).

2) Семейство лучей (проекций фазовых траекторий на $\mathbf{R}_x^n$) имеет особенности.

Эта ситуация является характерной для большинства рассматриваемых нами задач.

Пример 3.17. Рассмотрим семейство траекторий (3.67); данные Коши для уравнения эйконала $(\nabla S(x))^2=1$ поставлены по-прежнему на некотором $(n-1)$-мерном C^∞-многообразии M^{n-1}, так что $S(x)=0$, $x\in M^{n-1}$. Пусть

$$M^{n-1}=\{x\colon x=x^0(\alpha),\ \alpha\in U\},\ \alpha=(\alpha_1,\qquad \alpha_{n-1}),$$

U — область в $\mathbf{R}_\alpha^{n-1}$; вектор $p^0(\alpha)$ совпадает с единичной нормалью к M^{n-1} в точке $x=x^0(\alpha)$. Кроме того,

$$\operatorname{rank}\frac{\partial x^0(\alpha)}{\partial\alpha}=n-1,\qquad \alpha\in U.$$

Рассмотрм в фазовом пространстве $\mathbf{R}_{x,p}^{2n}$ множества

$$\Lambda_t=\{(x, p)\colon x=x(t, \alpha),\ p=p(t, \alpha),\ \alpha\in U\},$$

где $x(t, \alpha)$, $p(t, \alpha)$ определяются из (3.67), и их объединение $\Lambda^n=\bigcup\limits_{-\infty<t<\infty}\Lambda_t$. Множество Λ_t получено из начального многообразия Λ_0 сдвигом за время t вдоль фазовой траектории. Покажем, что Λ_t, Λ^n являются C^∞-многообразиями размерностей $n-1$, n соответственно. Имеем из (3.67)

$$\frac{\partial(x, p)}{\partial\alpha}=\left(2t\frac{\partial p^0}{\partial\alpha}+\frac{\partial x^0}{\partial\alpha},\ \frac{\partial p^0}{\partial\alpha}\right),$$

так что ранг этой матрицы равен

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial x^0}{\partial \alpha}, \frac{\partial p^0}{\partial \alpha}\right) = n-1, \qquad \alpha \in U,$$

так как

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial x^0}{\partial \alpha}\right) = n-1$$

по условию. Следовательно, Λ_t есть $(n-1)$-мерное C^∞-многообразие. Далее, матрица

$$\frac{\partial(x, p)}{\partial(t, \alpha)} = \begin{Vmatrix} p^0 & 2t\dfrac{\partial p^0}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial x^0}{\partial \alpha} \\ 0 & \dfrac{\partial p^0}{\partial \alpha} \end{Vmatrix}$$

и один из ее миноров порядка n равен определителю

$$\Delta(\alpha) = \det\left\| p^0(\alpha)\, \frac{\partial x^0}{\partial \alpha_1} \ldots \frac{\partial x^0}{\partial \alpha_{n-1}} \right\|$$

(все векторы — столбцы). Так как векторы $\partial x^0/\partial \alpha_j$ линейно независимы и лежат в касательной плоскости к M^{n-1}, а вектор $p^0(\alpha)$ ортогонален к M^{n-1}, то $\Delta(\alpha) \neq 0$, $\alpha \in U$. Следовательно,

$$\operatorname{rank} \frac{\partial(x, p)}{\partial(t, \alpha)} = n,$$

так что Λ^n есть n-мерное C^∞-многообразие. Многообразие Λ^n в данном примере есть нормальный векторный пучок NM^{N-1}.

Однако семейство лучей $x = x(t, \alpha)$, $\alpha \in U$, $-\infty < t < \infty$, имеет особенности; единственным исключением является тот случай, когда M^{n-1} есть $(n-1)$-плоскость, т. е. $S(x)$ — линейная функция.

Как известно из дифференциальной геометрии [44], множество точек, в которых $J(t, \alpha) = 0$, для семейства (3.67) совпадает с геометрическим местом центров кривизны многообразия M^{n-1}. Если $x = x(t, \alpha^0)$ — один из лучей, то точка $x(t, \alpha^0)$ лежит на каустике тогда и только тогда, когда расстояние от точки $x(0, \alpha^0)$ до точки $x(t_0, \alpha^0)$ равно k_l^{-1}, где k_l — одна из главных кривизн многообразия M^{n-1} в точке $x = x^0(\alpha^0)$. В случае общего положения, когда каустика состоит из $n-1$ гладкого многообразия (которые могут пересекаться между собой), луч $x = x(t, \alpha^0)$ касается каустики в фокальных точках.

Из этого примера вытекает следующий факт: уравнение эйконала $(\nabla S(x))^2 = 1$ не имеет никаких решений класса $C^\infty(\mathbf{R}_x^n)$, за исключением линейной функции

$$S(x) = C + \langle x, \xi\rangle, \quad \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = 1.$$

Пример 3.18. Рассмотрим среду с линейным коэффициентом преломления $n^2(x) = x_1$. Полагая $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, $p' = (p_2, \ldots, p_n)$, получаем следующую систему Гамильтона:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2p_1, \quad \frac{dx'}{dt} = 2p', \quad \frac{dp_1}{dt} = -1, \quad \frac{dp'}{dt} = 0.$$

Решение лагранжевой задачи Коши

$$x|_{t=0} = x^0(\alpha), \quad p|_{t=0} = p^0(\alpha)_1, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in U$$

имеет вид

$$\begin{aligned} x_1(t, \alpha) &= -2t^2 + 2p_1^0(\alpha)\,t + x_1^0(\alpha), \\ p_1(t, \alpha) &= -2t + p_1^0(\alpha), \\ x'(t, \alpha) &= 2tp^{0\prime}(\alpha) + x^{0\prime}(\alpha), \\ p'(t, \alpha) &= p^{0\prime}(\alpha). \end{aligned}$$

Следовательно, лучи являются квадратичными параболами, а эйконал равен

$$S(x(t, \alpha)) = S_0(\alpha) - \frac{4}{3}t^3 + 2p_1^0(\alpha)\,t^2 + tx_1^0(\alpha).$$

Пример 3.19. Рассмотрим уравнение, не содержащее переменной x явно:

$$L(\lambda^{-1}D_x)\,u(x) = 0.$$

Система Гамильтона имеет вид

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial L(p)}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = 0,$$

так что фазовые траектории и лучи являются прямыми линиями:

$$x(\tau) = \tau \left.\frac{\partial L(p)}{\partial p}\right|_{p=p(0)} + x(0), \qquad p(\tau) = p(0).$$

Пример 3.20. Рассмотрим уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t,\ x,\ \frac{\partial S}{\partial x}\right)=0. \tag{3.45'}$$

Введем *двухточечную характеристическую функцию* $S(t,\ x,\ t',\ x')$ [4], [31], где $x\in\mathbf{R}^n$, $x'\in\mathbf{R}^n$. По определению эта функция равна действию вдоль луча, соединяющего точки x и x' Именно, пусть $(x(\tau),\ p(\tau))$ — решение укороченной гамильтоновой системы

$$\frac{dx}{d\tau}=\frac{\partial H}{\partial p},\qquad \frac{dp}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial x},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$x(t)=x,\qquad x(t')=x' \tag{3.68}$$

Тогда, по определению,

$$S(t,\ x;\ t',\ x')=\int_t^{t'}[\langle p,\ dx\rangle-H\,d\tau], \tag{3.69}$$

где $p=p(\tau)$, $x=x(\tau)$, $H=H(\tau,\ x(\tau),\ p(\tau))$.

В частности, уравнению (3.6) отвечает функция

$$S(t,\ x;\ t',\ x')=\int_t^{t'}\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2(\tau)-V(x(\tau))\right]d\tau, \tag{3.70}$$

где $x(\tau)$ — решение следующей краевой задачи для уравнения Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{d\tau^2}=-\nabla V(x),\qquad x(t)=x,\quad x(t')=x'. \tag{3.70'}$$

В классической механике действие S определяется как интеграл

$$S=\int_{t_0}^{t_2}L\,dt$$

по классической траектории (L — функция Лагранжа). При таком определении действие является функцией от траектории (функционалом). Приведенная выше трактовка действия, восходящая к Гамильтону, состоит в том, что *действие рассматривается как функция от координат* (включая время). Если фиксировать начальный момент времени t' и начальную точку x', то двухточечная характеристическая функция будет функцией от (t, x): $S = S(t, x)$. Она вычисляется следующим образом: из точки x' в момент времени t' выпускаются все лучи (т. е. с различными начальными импульсами), среди них ищется тот, который за время $t - t'$ попадет в точку x (рис. 6), и затем вычисляется действие (интеграл $\int_{t'}^{t} L\,dt$) по этому лучу.

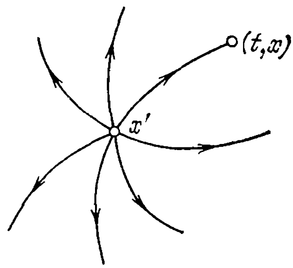

Рис. 6

Вопрос о существовании двухточечной функции в целом нетривиален, так как краевая задача (3.68) может не быть однозначно разрешимой. Существование и гладкость этой функции можно гарантировать, если точки x, x' достаточно близки друг к другу. Ниже мы предполагаем, что функция $S(t, x; t', x')$ однозначна и бесконечно дифференцируема по совокупности переменных в некоторой области пространства $(t, x; t', x')$.

Установим важнейшие свойства функции S. Проварьируем выражение (3.69) по переменным t, x, t', x'; полученный в результате вариации интеграл равен нулю, так как он берется вдоль луча. Следовательно,

$$\delta S = \langle p, \delta x\rangle - H\,\delta t\,\Big|_{(t, x)}^{(t', x')}.$$

Отсюда вытекают соотношения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S}{\partial x} = -p(t), \quad \frac{\partial S}{\partial x'} = p(t'), \\ &\frac{\partial S}{\partial t} = H(\tau, x(\tau), p(\tau))\,|_{\tau=t}, \\ &\frac{\partial S}{\partial t'} = -H(\tau, x(\tau), p(\tau))\,|_{\tau=t'}. \end{aligned} \tag{3.71}$$

В частности, функция S удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t'} + H\left(t', x', \frac{\partial S}{\partial x'}\right) = 0$$

(по переменным конечной точки луча (t', x')) и сопряженному уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} - H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0$$

(по переменным начальной точки луча (t, x)).

Для одномерного уравнения Ньютона имеем [54]

$$V(x) = 0, \quad S(t, x; t', x') = \frac{m(x'-x)^2}{2(t'-t)};$$

$$V(x) = -Fx, \quad S(t, x; t', x') =$$
$$= \frac{m(x'-x)^2}{2(t'-t)} + \frac{1}{2}F(x'+x)(t'-t) - \frac{F(t'-t)^3}{24}; \qquad (3.72)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2, \quad S(t, x; t', x') =$$
$$= m\omega\left[(x^2+x'^2)\cos\omega(t'-t) - 2xx'\right](2\sin\omega(t'-t))^{-1}.$$

Последняя формула справедлива только при $0 < (t' - t) < \pi$.

Рассмотрим еще один пример: частица с зарядом e и массой m движется в постоянном внешнем магнитном поле B, направленном по оси z. Тогда лагранжиан L равен

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{Be}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

где c — скорость света в вакууме, а для S имеет место формула [54]

$$S(t, r; t', r') = \frac{m\omega}{2}\left[\frac{(z'-z)^2}{t'-t} + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega}{2}\operatorname{ctg}\frac{\omega(t'-t)}{2}\left((x'-x)^2 + (y'-y)^2 + \omega(xy' - x'y)\right)\right], \qquad (3.72')$$

где $\omega = \dfrac{Be}{mc}$, $r = (x, y, z)$.

Отметим еще одно важное свойство двухточечной характеристической функции. Рассмотрим определитель

$$Y(t', x') = \det\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial x'}. \qquad (3.73)$$

Лемма 3.21. *Определитель* (3.73) *удовлетворяет уравнению неразрывности*

$$\frac{\partial Y}{\partial t'} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x'_j}\left(Y\frac{\partial H}{\partial p'_j}\right) = 0. \qquad (3.74)$$

Доказательство. Из (3.71) имеем $\frac{\partial S}{\partial x} = -p(t)$, так что

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x\, \partial x'} = -\frac{\partial p(t)}{\partial x'} = -\left(\frac{\partial x'}{\partial p(t)}\right)^{-1}$$

Фиксируем начальную точку x и начальный момент времени t, а начальный импульс $p(t)$ считаем переменным. Тогда решение системы Гамильтона зависит от параметров $p(t) = \alpha = (\alpha_1, \quad \alpha_n)$, так что

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x\, \partial x'} = -\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\right)^{-1}$$

По теореме Лиувилля имеем

$$\frac{d}{dt} \ln J(t, \alpha) = \operatorname{div}_{x'} \frac{\partial H}{\partial p'},$$

где $J(t, \alpha) = \det \left\| \frac{\partial x'}{\partial \alpha} \right\|$, так что

$$\frac{dJ}{dt} = J \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{\partial H}{\partial p'_j}\right).$$

Так как $Y = J^{-1}$, то

$$\frac{dY}{dt} + Y \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{\partial H}{\partial p'_j}\right) = 0. \qquad (3.74')$$

Далее, d/dt есть полная производная (производная в силу системы), так что

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial Y}{\partial x'}, \frac{dx'}{dt} \right\rangle$$

Поскольку $\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'}$, то из (3.74′) следует (3.74).

Пример 3.22. Уравнение квантовомеханического осциллятора в $\mathbf{R}^n$ имеет вид

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m} \Delta\psi + \frac{m\omega^2}{2} \langle x, x \rangle. \qquad (3.75)$$

Соответствующая укороченная система Гамильтона линейна:

$$m \frac{dx}{dt} = p, \qquad \frac{dp}{dt} = -m\omega^2 x. \qquad (3.76)$$

Решение этой системы с данными Коши

$$x|_{t=0} = x^0, \qquad p|_{t=0} = p^0$$

имеет вид

$$\begin{aligned} x &= -\frac{p^0}{m\omega}\sin\omega t + x^0\cos\omega t, \\ p &= p^0\cos\omega t + m\omega x^0\sin\omega t. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Если система единиц выбрана так, что $m\omega = 1$, то

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I\cos\omega t & I\sin\omega t \\ -I\sin\omega t & I\cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ p^0 \end{pmatrix} = g^t \begin{pmatrix} x^0 \\ p^0 \end{pmatrix},$$

т. е. g^t есть поворот в фазовом пространстве (здесь I — единичная $(n \times n)$-матрица). Функции $L_j(x, p) = x_j^2 + \frac{p_j^2}{m^2\omega^2}$ являются первыми интегралами системы (3.76), так что проекция фазовой траектории на 2-плоскость (x_j, p_j) движется по эллипсу

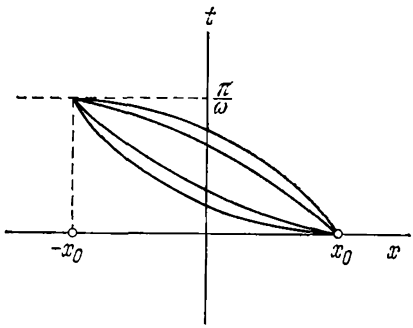

Рис. 7

$$x_j^2 + \frac{p_j^2}{m^2\omega^2} = x_j^{0\,2} + \frac{p_j^{0\,2}}{m^2\omega^2}, \tag{3.78}$$

а фазовая траектория лежит на n-мерной поверхности T^n, которая задана уравнениями (3.78), $1 \leqslant j \leqslant n$. При $m\omega = 1$ поверхность T^n является n-мерным тором, а фазовая траектория есть окружность, лежащая на этом торе, поскольку движение точки периодично с периодом $T = 2\pi/\omega$. Все фазовое пространство $R^{2n}_{x,p}$ расслаивается на n-мерные торы, инвариантные относительно сдвигов вдоль траекторий динамической системы (3.76).

Начало координат $x = 0$, $p = 0$ является устойчивым положением равновесия типа «n-мерного центра».

Из (3.77) следует, что

$$x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -x^0, \qquad p\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -p^0.$$

Это означает, что все лучи в $\mathbf{R}^n_x$, выходящие из точки x_0, собираются в точку $-x^0$ (рис. 7), т. е. происходит фокусировка лучей. Решение $x(\tau)$ краевой задачи

$$x(t)=x, \qquad x(t')=x'$$

имеет вид (если $\sin\omega(t'-t)\neq 0$)

$$x(\tau)=\frac{1}{\sin\omega(t'-t)}\left[x'\sin\omega(\tau-t)-x\sin\omega(\tau-t')\right], \tag{3.79}$$

а двухточечная характеристическая функция $S(t, x;\ t', x')$ вычислена ранее (см. (3.72)). В частности,

$$\det\left(-\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial x'}\right)=\left(\frac{m\omega}{\sin\omega(t'-t)}\right)^n \tag{3.80}$$

Отметим, что функция S имеет особенности при $t-t'=k\pi$, т. е. в фокальных точках.

Пример 3.23. Рассмотрим уравнение Шредингера

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{h^2}{2}\Delta\psi+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j^2\psi=0, \tag{3.81}$$

где числа $\varepsilon_j=\pm 1$. Линейный осциллятор моделирует движение частицы вблизи устойчивого положения равновесия; потенциал $\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j^2$, очевидно, моделирует потенциальную функцию вблизи невырожденного экстремума $x=0$. Поскольку гамильтонова система в этом примере, как и в предыдущем, распадается на n подсистем, то достаточно исследовать систему на плоскости вида

$$\frac{dx}{dt}=p, \qquad \frac{dp}{dt}=x.$$

Решение этой системы с данными Коши $x(0)=x^0$, $p(0)=p^0$ имеет вид

$$x(t)=p^0\operatorname{sh}t+x^0\operatorname{ch}t,$$
$$p(t)=p^0\operatorname{ch}t+x^0\operatorname{sh}t,$$

функция p^2-x^2 является первым интегралом системы. Фазовая траектория есть гипербола $p^2-x^2={p^0}^2-{x^0}^2$, а преобразование g^t (сдвиг вдоль траектории за время t) есть гиперболический поворот. Положение равновесия $x=0$, $p=0$ является седлом. Решение краевой задачи

$$x(t)=x, \quad x(t')=x'$$

имеет вид

$$x(\tau) = \frac{1}{\operatorname{sh}(t'-t)} [x' \operatorname{sh}(\tau - t) - x \operatorname{sh}(\tau - t')],$$

а двухточечная характеристическая функция равна

$$S(t, x; t', x') = \frac{1}{2\operatorname{sh}(t'-t)} [(x^2 + x'^2) \operatorname{ch}(t'-t) - 2xx'].$$

В данном примере двухточечная функция S определена и бесконечно дифференцируема при всех t, x, t' x' если $t \neq t'$

Следовательно, гамильтонова система, отвечающая уравнению (3.81), имеет первые интегралы $p_j^2 + \varepsilon_j x_j^2$, $1 \leqslant j \leqslant n$, а фазовое пространство распадается на инвариантные (относительно g^t) n-мерные многообразия Λ^n, которые задаются уравнениями

$$p_j^2 + \varepsilon_j x_j^2 = C_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

где C_j — постоянные. Если среди чисел ε_j есть отрицательные, то многообразия Λ^n некомпактны.

Приведенные выше примеры носят иллюстративный характер и достаточно просты. В качестве других примеров можно было бы взять любую интегрируемую задачу классической механики.

§ 4. Лагранжевы многообразия и канонические преобразования

Квазиклассическое приближение для решений уравнения (3.1) приводит к системе Гамильтона (3.8) в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}_{x,p}$. Как известно из классической механики, фазовый поток g^t (т. е. сдвиг вдоль траектории гамильтоновой системы за время t) сохраняет дифференциальную форму

$$\omega^2 = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dx_j.$$

Такие преобразования фазового пространства называются *каноническими*. Линейные канонические преобразования являются симплектическими.

С классической механикой тесно связан замечательный класс многообразий в фазовом пространстве, на которых

$\int \langle p, dx \rangle$ не зависит от пути (локально). Здесь

$$\langle p, dx \rangle = \sum_{j=1}^{n} p_j \, dx_j.$$

Такие многообразия называются *лагранжевыми*. Размерность лагранжева многообразия не превосходит n. Класс лагранжевых многообразий инвариантен относительно классической динамики: если многообразие Λ лагранжево, то сдвинутое многообразие $g^t \Lambda$ также лагранжево.

Наибольший интерес представляют лагранжевы многообразия максимальной размерности n. Если такое (односвязное) многообразие Λ^n однозначно проектируется на x-пространство, то оно задается уравнением

$$p = \frac{\partial S(x)}{\partial x};$$

очевидно, что

$$S = \int \langle p, dx \rangle.$$

Если, кроме того, Λ^n однозначно проектируется на p-пространство, то оно задается уравнением

$$x = \frac{\partial \widetilde{S}(p)}{\partial p}$$

При этом отображение

$$(x, S(x)) \to (p, \widetilde{S}(p))$$

есть преобразование Лежандра, так что функции $S(x)$, $\widetilde{S}(p)$ двойственны по Юнгу. Итак, в классической механике переход из x-представления в p-представление (т. е. переход из пространства координат в пространство импульсов) есть касательное преобразование.

Лагранжевы многообразия обладают еще одним важнейшим свойством: в качестве локальных координат всегда можно выбрать набор

$$x_{i_1}, \quad \ldots, \quad x_{i_k}, \; p_{j_1}, \quad \ldots, \quad p_{j_{n-k}},$$

не содержащий сопряженных координат и импульсов (т. е. пар вида (x_j, p_j)).

Одна из важнейших конструкций n-мерных лагранжевых многообразий такова. Поставим задачу Коши для уравнения Гамильтона — Якоби (3.3); она индуцирует задачу Коши для системы Гамильтона, т. е. $(n-1)$-мерное многообразие Λ^{n-1} (лагранжево) в фазовом пространстве. Его сдвиги за время t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, заполняют n-мерное многообразие Λ^n, которое является лагранжевым (трубка траекторий). Эта конструкция естественным образом возникает при построении квазиклассического приближения.

Настоящий параграф посвящен изложению приведенных выше фактов.

1. Симплектическая геометрия. Пусть $\mathbf{R}^{2n}$ — фазовое пространство, т. е. $2n$-мерное вещественное арифметическое пространство

$$\mathbf{R}^{2n} = \{r\},\ r = (x,\ p),\ x = (x_1, \qquad x_n),\ p = (p_1, \qquad p_n).$$

Введем в $\mathbf{R}^{2n}$ евклидову структуру, задаваемую скалярным квадратом

$$\langle r,\ r\rangle = \langle x,\ x\rangle + \langle p,\ p\rangle,$$

и симплектическую структуру, задаваемую *кососкалярным произведением*

$$[r^1,\ r^2] = \langle p^1,\ x^2\rangle - \langle x^1,\ p^2\rangle = \sum_{i=1}^{n} (p_i^1 x_i^2 - p_i^2 x_i^1). \tag{4.1}$$

При этом

$$[r^1,\ r^2] = -[r^2,\ r^1],$$
$$[r^1,\ r^2] = \langle Jr^1,\ r^2\rangle, \tag{4.2}$$
$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

где 0, I — нулевая и единичная $(n \times n)$-матрицы.

Переменные x_j, p_j будем называть *сопряженными*.

Определение 4.1. Плоскость $\lambda \subset \mathbf{R}^{2n}$ называется *лагранжевой*, если $[r^1,\ r^2] = 0$ для любых r^1, $r^2 \in \lambda$. Гладкое многообразие Λ в фазовом пространстве называется *лагранжевым*, если все его касательные плоскости лагранжевы.

Предложение 4.2. *Размерность лагранжевой плоскости* $\leqslant n$.

Доказательство. Так как $J^2 = -I_{2n}$, то для того, чтобы плоскость λ была лагранжевой, необходимо и достаточно, чтобы плоскости λ и $J\lambda$ были ортогональны. Поскольку $\dim \lambda = \dim J\lambda$, то $\dim \lambda \leqslant n$.

Отсюда следует также, что максимальное число линейно независимых попарно косоортогональных векторов в фазовом пространстве равно n.

Пример 4.3. Любая прямая в $\mathbf{R}^2$, проходящая через начало координат, является лагранжевой. Любая гладкая кривая в $\mathbf{R}^2$ является лагранжевым многообразием.

Пример 4.4. Разобъем множество $(1, 2, \ldots, n)$ на два непересекающиеся подмножества $(\alpha) - \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, $(\beta) = \{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$, $k + l = n$.

Пусть $\lambda^n (p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$ — плоскость $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$, т. е. $x_{(\alpha)} = 0$, $p_{(\beta)} = 0$. Плоскость $\lambda^n (p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$ лагранжева. В частности, плоскости $x = 0$ и $p = 0$ лагранжевы.

Среди переменных x_i, p_j, $i \in (\alpha)$, $j \in (\beta)$, нет сопряженных.

Плоскости $\lambda^n (p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$ будем называть *координатными лагранжевыми плоскостями.* Их всего 2^n. Фундаментальное свойство лагранжевых n-плоскостей описывает

Лемма 4.5. *Всякая лагранжева n-плоскость трансверсальна одной из координат лагранжевых плоскостей.*

Доказательство [2]. Пусть λ — данная плоскость, σ — плоскость $x = 0$ и $\lambda_0 = \lambda \wedge \sigma$, $\dim \lambda_0 = k < n$. Тогда λ_0 в σ трансверсальна одной из C_n^k координатных плоскостей $\tau = \lambda (p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}) \cap \sigma$, где (α) состоит из k элементов, так что $\lambda_0 \cap \sigma \cap \lambda (p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}) = 0$. Докажем, что плоскость λ трансверсальна $\lambda (p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}) = \lambda'$

По условию $\lambda_0 + \tau = \sigma$. Так как λ и λ' лагранжевы, то $[\lambda, \lambda_0] = 0$ (так как $\lambda_0 \subset \lambda$) и $[\lambda', \tau] = 0$ (так как $\tau \subset \lambda'$). Следовательно, $[\lambda \cap \lambda', \sigma] = 0$. Но наибольшее число попарно косоортогональных независимых векторов в $\mathbf{R}^{2n}$ равно n. Поэтому n-плоскость σ — максимальная себе косоортогональная плоскость, так что $\lambda \cap \lambda' \subset \sigma$. Итак, $(\lambda \cap \lambda') \subseteq (\lambda \cap \sigma) \cap (\lambda' \cap \sigma) = \lambda_0 \cap \tau = 0$, что и требовалось доказать.

Из этой леммы вытекает

Предложение 4.6. *Пусть Λ^n есть n-мерное лагранжево многообразие в $\mathbf{R}^{2n}$. Тогда достаточно малая окрестность каждой точки $r \in \Lambda^n$ диффеоморфно проектируется на одну из координатных лагранжевых плоскостей. Лагранжева n-плоскость $p = x$ («диагональ») трансверсальна ко всем лагранжевым координатным плоскостям.*

Определение 4.7. Линейное отображение $g\colon \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ называется *симплектическим*, если оно сохраняет кососкалярное произведение

$$[gr^1,\ gr^2] = [r^1,\ r^2] \tag{4.3}$$

для любых $r^1,\ r^2 \in \mathbf{R}^{2n}$.

Из этого определения следует, что *симплектические преобразования переводят лагранжевы плоскости в лагранжевы*. Из (4.2) следует

Предложение 4.8. *Пусть* $\mathcal{G}$ *— матрица линейного отображения* $g\colon \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ *в исходном ортонормированном базисе в* $\mathbf{R}^{2n}$. *Для того чтобы отображние* g *было симплектическим, необходимо и достаточно, чтобы*

$$^t\mathcal{G}J\mathcal{G} = J. \tag{4.4}$$

$(n \times n)$-матрица $\mathcal{G}$, удовлетворяющая условию (4.4), называется *симплектической*. Из (4.4) следует, что $\mathcal{G}$ невырождена, $\det \mathcal{G} = \pm 1$. Симплектические преобразования образуют группу; она называется *симплектической* и обозначается через $\mathrm{Sp}\,(n)$.

Приведем без доказательства некоторые сведения из симплектической геометрии (см., например, [4], [14]). Пусть $\{e^j, f^k\}$, $1 \leqslant j,\ k \leqslant n$,— базис из $2n$ векторов e^j, f^k в $\mathbf{R}^{2n}$. Этот базис называется *симплектическим*, если

$$[e^i,\ e^j] = [f^i,\ f^j] = 0, \quad [e^j,\ f^k] = \delta_{jk}. \tag{4.5}$$

Например, базис из координатных векторов $e^j = \{x_i = \delta_{ij},\ p_i = 0\}$, $f^k = \{x_i = 0,\ p_i = \delta_{ik}\}$ является симплектическим. Как и в евклидовой геометрии, справедливы следующие утверждения:

1) Симплектические преобразования (и только они) переводят любой симплектический базис в симплектический.

2) Любой симплектический базис можно перевести в любой симплектический базис с помощью симплектического преобразования.

3) Если имеется m, $1 \leqslant m < n$, векторов e^j и векторов f^k, удовлетворяющих условию (4.5), то этот набор $\{e^j, f^k\}$ можно дополнить до симплектического базиса в $\mathbf{R}^{2n}$.

4) Матрица симплектического преобразования в любом симплектическом базисе является симплектической.

2. Каноническое преобразование. Введем в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ дифференциальные формы

$$\omega^1 = \langle p, dx\rangle \equiv \sum_{j=1}^{n} p_j\,dx_j,$$
$$\omega^2 = dp \wedge dx \equiv \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dx_j. \tag{4.5'}$$

Ясно, что $d\omega^1 = \omega^2$, $d\omega^2 = 0$.

Пусть U, V — области в $\mathbf{R}^{2n}$. Все рассматриваемые ниже отображения предполагаются бесконечно дифференцируемыми.

Определение 4.9. Диффеоморфизм $g\colon U \to V$ называется *каноническим преобразованием*, если он сохраняет форму ω^2, т. е.

$$g^*\omega^2 = \omega^2. \tag{4.6}$$

Обозначим $(x', p') = g(x, p)$, тогда (4.6) примет вид

$$dp' \wedge dx' = dp \wedge dx. \tag{4.6'}$$

Множество всех канонических преобразований $g\colon U \to U$ образует группу.

Формы ω^2, $\omega^4 = \omega^2 \wedge \omega^2$, ..., $\omega^{2n} = \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^2$ (n раз) являются *инвариантами* канонического преобразования. Так как ω^{2n} с точностью до постоянного множителя совпадает с фазовым объемом $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n$, то *каноническое преобразование сохраняет фазовый объем* (теорема Лиувилля).

Далее, так как

$$[r^1, r^2] = \omega^2(r^1, r^2), \tag{4.7}$$

то из определения 4.9 следует

Предложение 4.10. *Преобразование g является каноническим (в малом) тогда и только тогда, когда его матрица Якоби*

$$g' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x'}{\partial x} & \dfrac{\partial x'}{\partial p} \\ \dfrac{\partial p'}{\partial x} & \dfrac{\partial p'}{\partial p} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

симплектична.

Правая часть формулы (4.7) — это значение формы ω^2 на паре векторов r^1, r^2. По определению дифференциальной формы имеем (здесь $r=(x, p)$)

$$dp_i(r)=p_i, \qquad dx_i(r)=x_i,$$

$$(dp_i \wedge dx_i)(r^1, r^2)=\begin{vmatrix} dp_i(r^1) & dp_i(r^2) \\ dx_i(r^1) & dx_i(r^2) \end{vmatrix}=p_i^1x_i^2-p_i^2x_i^1.$$

Следовательно,

$$\omega^2(r^1, r^2)=\sum_{i=1}^{n} p_i^1x_i^2-p_i^2x_i^1=[r^1, r^2].$$

Пример 4.11. Тождественное преобразование $x^1=x$, $p'=p$ является каноническим.

Пример 4.12. 1) Преобразование $x_1'=p_1$, $p_1'=-x_1$, $x_j'=x_j$, $p_j'=p_j$, $j\geqslant 2$, является каноническим.

2) Пусть $\{(\alpha), (\beta)\}$ — разбиение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на два непересекающихся подмножества (α), (β). Преобразование

$$x'_{(\alpha)}=p_{(\alpha)}, \qquad p'_{(\beta)}=-x_{(\beta)}$$

есть произведение преобразований того же вида, что и в п. 1), и поэтому является каноническим.

Пример 4.13. Отображение $g\colon W\to W'$ задаваемое формулами

$$x=\varphi(x'), \qquad p'={}^t\left(\frac{\partial\varphi(x')}{\partial x'}\right)p, \tag{4.9}$$

является каноническим преобразованием, так как $\langle p', dx'\rangle=\langle p, dx\rangle$. Здесь W, W' — малые окрестности точек (x^0, p^0), (x'^0, p'^0) соответственно, $x^0=\varphi(x^0)$,

$$p'^0={}^t\left(\frac{\partial\varphi(x'^0)}{\partial x'}\right)p^0 \quad \text{и} \quad \det\frac{\partial\varphi(x'^0)}{\partial x'}\neq 0.$$

Пример 4.14. Преобразование

$$x'=Sx, \qquad p'=Sp, \tag{4.10}$$

где S — вещественная ортогональная матрица, является каноническим. Такое преобразование называется *поворотом фазового пространства*.

Инвариантом канонических преобразований является скобка Пуассона. *Скобка Пуассона* двух скалярных функций $f(x, p)$, $h(x, p)$ равна, по определению,

$$(f, h)(x, p)=-[\nabla_{x,p}f, \nabla_{x,p}h]=\left\langle\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial p}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial h}{\partial x}\right\rangle. \tag{4.11}$$

Каноническое преобразование g сохраняет скобку Пуассона, т. е.

$$(f, h)(x, p) = (f', h')(x, p). \tag{4.12}$$

Здесь $f'(x', p') = f(x, p)$, где $(x', p') = g(x, p)$, т. е. (4.12) имеет вид

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial p} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial h}{\partial x} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f'}{\partial x}, \frac{\partial h'}{\partial p} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f'}{\partial p}, \frac{\partial h'}{\partial x} \right\rangle. \tag{4.12'}$$

Обратно, если преобразование сохраняет скобку Пуассона, то оно (в малом) является каноническим. Поэтому необходимое и достаточное условие того, чтобы преобразование $(x', p') = g(x, p)$ было каноническим, можно записать в виде

$$\begin{gathered} (x'_i, x'_j) = (p'_i, p'_j) = 0, \\ (x'_i, p'_j) = \delta_{ij} \end{gathered} \tag{4.13}$$

или, подробнее,

$$\begin{gathered} \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_j}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial x'_i}{\partial p_\alpha} \frac{\partial x'_j}{\partial x_\alpha} \right) = 0, \\ \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial p'_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial p'_j}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial p'_i}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p'_j}{\partial x_\alpha} \right) = 0, \\ \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial p'_j}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial x'_i}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p'_j}{\partial x_\alpha} \right) = \delta_{ij}. \end{gathered} \tag{4.13'}$$

Диффеоморфизм $\varphi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ определяется заданием n функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Каноническое преобразование замечательно тем, что оно полностью определяется заданием одной функции (так называемой *производящей функции*).

Предложение 4.15. 1) *Пусть U — односвязная область в фазовом пространстве, $g\colon U \to V$ — каноническое преобразование. Тогда существует функция $S(x, p) \in C^\infty(U)$ такая, что*

$$\langle p', dx' \rangle - \langle p, dx \rangle = -dS. \tag{4.14}$$

2) *Если* g: $U \to V$ *есть диффеоморфизм и* (4.14) *выполнено, то* g — *каноническое преобразование* (*односвязность не требуется*).

Доказательство. 1-форма $\eta = \langle p', dx' \rangle - \langle p, dx \rangle$ замкнута, в силу (4.14) и по лемме Пуанкаре $\eta = -dS$. Доказательство 2) очевидно.

По функции $S = S(x, p)$ трудно в явном виде восстановить каноническое преобразование. Если же в качестве независимых переменных можно выбрать (x, x') (т. е. p, p' — функции от (x, x')), то из (4.14) находим

$$p = \frac{\partial S(x, x')}{\partial x}, \qquad p' = -\frac{\partial S(x, x')}{\partial x'}. \tag{4.15}$$

Все последующие рассмотрения этого пункта носят локальный характер. Если

$$\det \frac{\partial^2 S(x, x')}{\partial x\, \partial x'} \neq 0, \tag{4.16}$$

то, по теореме о неявной функции, можно из первого соотношения (4.15) выразить x' через (x, p): $x' = x'(x, p)$. Подставляя x' во второе соотношение, выражаем p' через (x, p):

$$p' = \frac{\partial S(x, x')}{\partial x}\bigg|_{x'=x'(x,\, p)}.$$

Функция $S(x, x')$, удовлетворяющая соотношению (4.14), называется *производящей функцией канонического преобразования*. Например, для преобразования $x' = p$, $p' = -x$ имеем $S = \langle x, x' \rangle$.

Введем производящую функцию, зависящую от других наборов переменных. Пусть из $4n$ переменных x, p, x', p', связанных соотношением $(x', p') = g(x, p)$, можно выбрать $2n$ независимых переменных $x_{(\alpha)}$, $p_{(\beta)}$, $x'_{(\alpha')}$, $p'_{(\beta')}$. Здесь $(\alpha) \cup (\beta) = \{1, 2, \ldots, n\}$, $(\alpha) \cap (\beta) = \varnothing$; аналогично определяются (α'), (β'). Среди этого набора переменных нет сопряженных. Пусть S в (4.14) есть функция от заданного набора переменных. Тогда

$$\langle p'_{(\alpha')}, dx'_{(\alpha')}\rangle - \langle x'_{(\beta')}, dp'_{(\beta')}\rangle - \langle p_{(\alpha)}, dx_{(\alpha)}\rangle + \langle x_{(\beta)}, dp_{(\beta)}\rangle =$$
$$= -dS_1(x_{(\alpha)}, p_{(\beta)}, x'_{(\alpha')}, p'_{(\beta')}), \tag{4.17}$$
$$S_1 = S - \langle x'_{(\beta')}, p'_{(\beta')}\rangle + \langle x_{(\beta)}, p_{(\beta)}\rangle.$$

В этом случае функция S_1 называется *производящей функцией* канонического преобразования, которое восстанавливается по S_1 с помощью соотношений

$$\begin{aligned} p'_{(\alpha')} &= -\frac{\partial S_1}{\partial x'_{(\alpha')}}, & x'_{(\beta')} &= \frac{\partial S_1}{\partial p'_{(\beta')}}; \\ p_{(\alpha)} &= \frac{\partial S_1}{\partial x_{(\alpha)}}, & x_{(\beta)} &= -\frac{\partial S_1}{\partial p_{(\beta)}}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Приведем ряд известных сведений из аналитической механики [4], [14], [17], [63].

Теорема 4.16. *Каноническое преобразование переводит гамильтонову систему в гамильтонову.*

Именно, если $(x', p') = g(x, p)$, то система Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial L(x, p)}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial L(x, p)}{\partial x} \tag{4.19}$$

в новых переменных имеет вид

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial L'(x', p')}{\partial p'}, \qquad \frac{dp'}{dt} = -\frac{\partial L'(x', p')}{\partial x'}, \tag{4.20}$$

где $L'(x', p') = L(x, p)$ (т. е. L' есть старая функция Гамильтона в новых переменных).

Доказательство. Пусть $r = (x, p)$ (все векторы — столбцы). Тогда система (4.19) имеет вид

$$\frac{dr}{dt} = J\frac{\partial L}{\partial r}. \tag{4.19'}$$

Далее,

$$\frac{dr'}{dt} = g'\frac{dr}{dt}, \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = {}^t g' \frac{\partial L'}{\partial r'},$$

так что

$$\frac{dr'}{dt} = g' J {}^t g' \frac{\partial L'}{\partial r'}.$$

Так как $J^{-1} = -J$, то из (4.4) следует, что $g'J^tg' = J$, и мы получаем $\dfrac{dr'}{dt} = J\dfrac{\partial L'}{\partial r'}$

Пусть g^t — сдвиг вдоль траектории гамильтоновой системы (4.19) за фиксированное время t, т. е.

$$g^t(x^0, p^0) = \{x(t; x^0, p^0), p(t; x^0, p^0)\}, \tag{4.21}$$

где $\{x(t;\ x^0,\ p^0),\ p(t;\ x^0,\ p^0)\}$ — решение системы (4.19) с данными Коши

$$x|_{t=0} = x^0, \qquad p|_{t=0} = p^0. \tag{4.22}$$

Отображение g^t: $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ называется *фазовым потоком*. Мы предполагаем, что $L(x, p) \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ и, для простоты, что каждое решение этой системы существует при всех t. В противном случае приводимый ниже результат справедлив в малом (т. е. при малых $|t|$ и в малой области в $\mathbf{R}^{2n}$).

Теорема 4.17. *Отображение g^t является каноническим преобразованием (при каждом фиксированном t).*

Доказательство. Преобразование g^t задается формулой (4.21). Положим $r^0 = (x^0, p^0)$ и

$$A = \frac{\partial g^t}{\partial r^0} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x^0} & \dfrac{\partial x}{\partial p^0} \\ \dfrac{\partial p}{\partial x^0} & \dfrac{\partial p}{\partial p^0} \end{Vmatrix}.$$

Требуется доказать, что

$${}^T\!AJA = J \tag{4.4'}$$

при всех t, где ${}^T\!A$ — транспонированная по отношению к A матрица.

При $t = 0$ имеем $A = I_n$, так что соотношение (4.4') выполняются. Покажем, что левая часть этого соотношения не зависит от t; тем самым теорема будет доказана. Дифференцируя уравнение Гамильтона (4.19') по переменным r^0, получаем уравнение

$$\frac{dA}{dt} = JL''_{rr}A.$$

Следовательно,

$$\frac{d\,{}^T\!A}{dt} = -{}^T\!AL''_{rr}J,$$

так как ${}^T\!J = -J$ и матрица L''_{rr} симметрична. Дифференцируя по t левую часть равенства (4.4'), получаем

$$\frac{d}{dt}({}^T\!AJA) = -{}^T\!AL''_{rr}J^2A + {}^T\!AJ^2L''_{rr}A = 0,$$

так как $J^2 = I_{2n}$. Теорема доказана.

Этот факт можно также доказать с помощью интегрального инварианта Пуанкаре — Картана [4], [22]. Пусть Γ — простой замкнутый гладкий контур в $\mathbf{R}^{2n}$. Тогда

$$\oint\limits_{\Gamma} \langle p, dx\rangle = \oint\limits_{g^t\Gamma} \langle p, dx\rangle. \tag{4.22'}$$

Пусть $(x', p') = g^t(x, p)$; тогда

$$\oint\limits_{g^t\Gamma} \langle p, dx\rangle = \oint\limits_{\Gamma} \langle p', dx\rangle,$$

и из (4.22') следует, что $dp' \wedge dx' = dp \wedge dx$.

3. Канонические преобразования и лагранжевы многообразия. Из (4.1) и определения 4.7 следует, что многообразие является лагранжевым тогда и только тогда, когда на нем замкнута форма $\omega^1 = \langle p, dx\rangle$. Отсюда вытекает

Теорема 4.18. *Каноническое преобразование переводит лагранжево многообразие в лагранжево.*

Нам понадобится также

Предложение 4.19. *Пусть Λ^{n-1} есть лагранжево C^∞-многообразие такое, что $L(x, p) \equiv \mathrm{const}$ на Λ^{n-1}. Пусть отображение*

$$g^t\colon \Lambda^{n-1} \to g^t\Lambda^{n-1}$$

есть диффеоморфизм при каждом $t \in [0, T]$ и

$$\Lambda^n = \bigcup_{0<t<T} g^t\Lambda^{n-1}$$

есть C^∞-многообразие размерности n. Тогда многообразие Λ^n лагранжево.

Доказательство. Многообразия $g^t\Lambda^{n-1}$ лагранжевы. Пусть $r^0 = \{x(t^0;\ x^0, p^0), p(t^0;\ x^0, p^0)\}$, где $t^0 \in (0, T)$, $(x^0, p^0) \in \Lambda^{n-1}$, и λ^n, λ^{n-1} — касательные плоскости к Λ^n, $g^t\Lambda^{n-1}$ в точке r^0. Тогда $\lambda^{n-1} \subset \lambda^n$ и вектор $\eta^0 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t}\right)$ в точке (t^0, x^0, p^0) трансверсален к λ^{n-1} в λ^n. Следовательно, всякий вектор $\eta \in \lambda^n$ имеет вид $\eta = \xi + C\eta^0$, где $\xi \in \lambda^{n-1}$, $C = \mathrm{const}$. Покажем, что $[\eta^0, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \lambda^{n-1}$; тогда λ^n — лагранжева плоскость, и предложение будет доказано. Пусть $(\alpha_1, \quad \alpha_n)$ — локальные координаты на $g^{t_0}\Lambda^{n-1}$ в окрестности точки r^0; тогда векторы $\xi^j = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_j}, \frac{\partial p}{\partial \alpha_j}\right)$ образуют базис в $\mathbf{R}^{2n}$. Имеем

$$[\xi^j, \eta^0] = -\frac{\partial}{\partial \alpha_j} L(x(t, \alpha), p(t, \alpha)) = 0,$$

так как $\{x(t, \alpha), p(t, \alpha)\}$ — решение системы Гамильтона, а $L(x, p)$ — ее первый интеграл.

Это предложение дает основную конструкцию n-мерных лагранжевых многообразий. Именно, задача Коши для уравнения Гамильтона — Якоби индуцирует $(n-1)$-мерное начальное многобразие Λ^{n-1}, которое является лагранжевым. Его сдвиги вдоль траекторий системы Гамильтона заполняют n-мерное лагранжево многообразие. Если g^t удовлетворяет условиям предложения 4.19 при всех $t \in \mathbf{R}$, то

$$\Lambda^n = \bigcup_{t \in \mathbf{R}} g^t \Lambda_0^{n-1}$$

есть лагранжево многообразие, инвариантное относительно g^t.

В частности, рассмотренные в конце § 3 примеры дают ряд лагранжевых многообразий.

Следующие факты уточняют локальную структуру n-мерного лагранжева многообразия Λ^n. Рассмотрим многообразие, которое диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}_x^n$.

Т е о р е м а 4.20. *Пусть многообразие Λ^n задается уравнением*

$$p = p(x), \qquad x \in G,$$

где G — односвязная область в $\mathbf{R}_x^n$. Для того чтобы Λ^n было лагранжевым, необходимо и достаточно существование такой скалярной функции $S(x)$, что

$$p = \frac{\partial S(x)}{\partial x}, \qquad x \in G. \tag{4.23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$S(x) = \int_{x^0}^{x} \langle p(x), dx \rangle.$$

Для того чтобы этот интеграл не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы

$$dp(x) \wedge dx = 0.$$

Если $p(x)$ имеет вид (4.23), то это условие выполняется и Λ^n лагранжево; если Λ^n лагранжево, то интеграл не зависит от пути интегрирования.

Заметим, что если многообразие Λ^n имеет вид (4.23), то оно лагранжево, даже если Λ^n неодносвязно.

Выясним локальную структуру произвольного лагранжева многообразия Λ^n.

Пусть, как обычно, (α), (β) — разбиение множества $(1, \ldots, n)$ на непересекающиеся множества.

Теорема 4.21. *Пусть многообразие Λ^n задается уравнениями*

$$x_{(\alpha)} = x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}),\quad p_{(\beta)} = p_{(\beta)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}),\quad (p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}) \in G,$$

где G — односвязная область в $\mathbf{R}^k_{x_{(\alpha)}} \times \mathbf{R}^{n-k}_{p_{(\beta)}}$. Для того чтобы Λ^n было лагранжевым, необходимо и достаточно существование такой скалярной функции $S(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$, что

$$x_{(\alpha)} = -\frac{\partial S}{\partial p_{(\alpha)}},\qquad p_{(\beta)} = \frac{\partial S}{\partial x_{(\beta)}}. \tag{4.24}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию на Λ^n:

$$S = \int\limits_{(x^0,\,p^0)}^{(x,\,p)} \langle p, dx\rangle - \langle x_{(\alpha)}, p_{(\alpha)}\rangle.$$

Пусть Λ^n лагранжево; тогда интеграл $\int \langle p, dx\rangle$ не зависит от пути, так что

$$dS = \langle p_{(\beta)}, dx_{(\beta)}\rangle - \langle x_{(\alpha)}, dp_{(\alpha)}\rangle \tag{4.25}$$

и S есть, по условию, функция от $p_{(\alpha)}$, $x_{(\beta)}$. Отсюда следует (4.24). Обратно, если выполнено (4.24), то имеет место (4.25), так что

$$d[S + \langle x_{(\alpha)}, p_{(\alpha)}\rangle] = \langle p, dx\rangle$$

и форма ω^1 замкнута на Λ^n.

Функция S, задающая лагранжево многообразие Λ^n (см. (4.23), (4.24)), называется также *производящей функцией* этого многообразия; она определяется по Λ^n с точностью до аддитивной постоянной, если Λ^n односвязно.

Предложение 4.22. *Пусть Λ^n — лагранжево многообразие, и пусть достаточно малая окрестность U точки $r^0 = (x^0, p^0) \in \Lambda^n$ диффеоморфно проектируется на*

$\mathbf{R}^n_x$ *и на плоскость* $\lambda^n\,(p_{(\alpha)},\,x_{(\beta)})$. *Если* $S\,(x)$, $\widetilde{S}\,(p_{(\alpha)},\,x_{(\beta)})$ — *соответствующие производящие функции, то отображение*

$$(x,\,S\,(x))\to((p_{(\alpha)},\,x_{(\beta)}),\;\;-\widetilde{S}\,(p_{(\alpha)},\,x_{(\beta)}))\qquad(4.26)$$

есть преобразование Лежандра по переменным $x_{(\alpha)}$.

Доказательство. С точностью до несущественной аддитивной постоянной имеем

$$S\,(x)=\int\limits_{r^0}^{r(x,\,p)}\langle p,\,dx\rangle,$$

$$\widetilde{S}\,(p_{(\alpha)},\,x_{(\beta)})=\int\limits_{r^0}^{r(x,\,p)}\langle p,\,dx\rangle-\langle x_{(\alpha)},\,p_{(\alpha)}\rangle,$$

так что

$$S\,(x_{(\alpha)},\,x_{(\beta)})-\widetilde{S}\,(p_{(\alpha)},\,x_{(\beta)})=\langle x_{(\alpha)},\,p_{(\alpha)}\rangle.$$

Из доказательства теоремы 4.21 следует, что

$$x_{(\alpha)}=-\frac{\partial\widetilde{S}\,(p_{(\alpha)},\,x_{(\beta)})}{\partial p_{(\alpha)}},$$

и наше предложение доказано. Кроме того,

$$\det\frac{\partial^2 S\,(r^0)}{\partial x^2_{(\alpha)}}\neq 0,\qquad \det\frac{\partial^2\widetilde{S}\,(r^0)}{\partial p^2_{(\alpha)}}\neq 0\qquad(4.27)$$

в точке $(x^0,\,p^0)$.

4. Лагранжева задача Коши. Рассмотрим уравнение Гамильтона — Якоби

$$L\,(x,\,\partial S\,(x)/\partial x)=0\qquad(4.28)$$

с вещественнозначным символом $L\,(x,\,p)\in C^\infty\,(\mathbf{R}^{2n})$. В § 3 была рассмотрена лагранжева задача Коши для этого уравнения с данными на плоскости; теперь зададим начальные данные на многообразии. Лагранжева задача Коши для уравнения (4.28) ставится следующим образом.

1) Задается лагранжево многообразие Λ^{n-1} размерности $n-1$ такое, что

$$L\,(x,\,p)=0,\quad(x,\,p)\in\Lambda^{n-1}\qquad(4.29)$$

и Λ^{n-1} диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}^n_x$. —

2) Задаются начальные данные: при $x \in \pi_x \Lambda^{n-1}$ (проекция Λ^{n-1} на $\mathbf{R}^n_x$) имеем

$$S(x) = S_0(x), \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial S(x)}{\partial x} = p(x), \qquad (x, p(x)) \in \Lambda^{n-1}. \tag{4.31}$$

3) Ставится условие согласования

$$dS_0(x) = \langle p(x), dx \rangle, \qquad x \in \pi_x \Lambda^{n-1}. \tag{4.32}$$

Теорема 4.23. *Пусть $r^0 = (x^0, p^0) \in \Lambda^{n-1}$ и выполнено условие: вектор $\frac{\partial L(r^0)}{\partial p}$ трансверсален к $\pi_x (T\Lambda^{n-1})(r^0)$. Тогда в малой окрестности точки x^0 решение лагранжевой задачи Коши существует и единственно.*

Доказательство. Мы сведем эту теорему к предложению 3.8. Пусть $r^0 = 0$ и Λ^{n-1} задается уравнениями

$$x_n = \varphi(x_1, \quad x_{n-1}), \; p = \psi(x_1, \quad x_{n-1})$$

в окрестности точки 0. Тогда $S_0 = S_0(x_1, \quad x_{n-1})$. Сделаем замену переменных

$$x' = h(x), \quad p_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_k} p_k, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{4.33}$$

где $x'_j = x_j$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $x'_n = x_n - \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Это преобразование есть диффеоморфизм в малой окрестности начала координат; он является каноническим (пример 4.13) и переводит $(S, L, S_0, \Lambda^{n-1})$ в $(S', L', S'_0, \Lambda'^{n-1})$. Здесь

$$S'(x) = S(x), \quad L'(x', p') = L(x, p), \quad S'_0(x') = S_0(x),$$

так что если $S(x)$ удовлетворяет уравнению (4.28), то

$$L'\left(x', \frac{\partial S'(x')}{\partial x'}\right) = 0. \tag{4.34}$$

Положим $y = (x'_1, \quad ., x'_{n-1})$; тогда лагранжево многообразие Λ'^{n-1} имеет вид

$$\Lambda'^{n-1} = \left\{ (x', p') = \left(y, 0; \frac{\partial \psi(y)}{\partial y}, p'_n(y)\right), y \in V \right\},$$

что доказывается так же, как и теорема 4.20. Здесь V — окрестность точки $y = 0$. При этом

$$L'\left(y, 0, \frac{\partial \psi(y)}{\partial y}, p'_n(y)\right) \equiv 0, \qquad y \in V. \tag{4.35}$$

Из условия согласования (4.32) следует, что

$$\frac{\partial\psi(y)}{\partial y}=\frac{\partial S_0'(y)}{\partial y},$$

$y\in V$, и наша задача принимает тот же вид, что и в предложении 3.8:

$$S'(y,0)=S_0'(y),\qquad \frac{\partial S'(y,0)}{\partial x_n'}=p_n'(y),\qquad y\in V.$$

Покажем, что

$$\frac{\partial L}{\partial p_n'}\neq 0\qquad \left(x'=0,\ p'=\left(\frac{\partial S_0'(0)}{\partial y}\right),\ p_n'(0)\right). \tag{4.36}$$

Тогда все условия предложения 3.8 будут выполнены. Имеем

$$\frac{\partial L'(x',p')}{\partial p_n'}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L(x,p)}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial p_n'}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L(x,p)}{\partial p_k}\frac{\partial x_n'}{\partial x_k}$$

в силу (4.33). При $x'=0$, $p'=(0,p_n'(0))$ имеем

$$\frac{\partial L'}{\partial p_n'}=-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial L(r^0)}{\partial p_k}\frac{\partial\varphi(x_1^0,\ \ldots,\ x_{n-1}^0)}{\partial x_k}+\frac{\partial L(r^0)}{\partial p_n}\neq 0;$$

в силу условия теоремы $\dfrac{\partial L}{\partial p_n'}\neq 0$, так как вектор $\left(-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1},\qquad -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}},\ 1\right)$ ортогонален к $\pi_x T\Lambda^{n-1}(r^0)$.

5. **Обобщение понятия лагранжева многообразия.** Пусть M^n есть n-мерное C^∞-многообразие размерности n и T^*M^n — его касательный пучок. Пусть $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ — локальные координаты на M^n; тогда $T^*M^n=\bigcap\limits_{x\in M^n}T^*M_x^n$ и элементами $T^*M_x^n$ являются 1-формы $\eta_x=\sum\limits_{j=1}^{n}p_j\,dx_j$ на M^n, т. е. $\eta_x\colon TM_x^n\to\mathbf{R}$, где TM_x^n — касательное пространство к M^n в точке x. Введем на T^*M^n локальные координаты (p,x), $p=(p_1,\qquad p_n)$ и рассмотрим 1-*форму* на T^*M^n

$$\omega^1=\langle p,dx\rangle. \tag{4.37}$$

Заметим, что общий вид 1-формы на T^*M^n следующий:

$$\theta^1=\sum_{j=1}^{n}a_j(p,x)\,dx_j+\sum_{j=1}^{n}b_j(p,x)\,dp_j.$$

Форма ω^1 определена корректно. Действительно, если x' — новые локальные координаты на M^n, $x = \varphi(x')$, то

$$(p, x) \to (p', x'), \quad p'_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x')\, p_k.$$

Следовательно,

$$\langle p', dx' \rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k(x')}{\partial x'_j}\, dx'_j \right) = \langle p, dx \rangle.$$

Введем 2-*форму* на M^n

$$\omega^2 = d\omega^1. \tag{4.38}$$

В локальных координатах

$$\omega^2 = \langle dp, dx \rangle.$$

Определение 4.24. Векторы $\xi, \eta \in T_\alpha(T^*, M)$ называются *кососортогональными*, если $\omega^2(\xi, \eta) = 0$.

Определение 4.25. C^∞-подмногообразие $\Lambda^k \subset T^*M^n$ (размерности k) называется *лагранжевым*, если любые два касательных вектора к Λ^k кососортогональны.

Из леммы 4.5 следует, что в качестве локальных координат в окрестности точки на лагранжевом многообразии можно выбрать $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$.

Пусть H: $T^*M \to \mathbf{R}$ есть вещественнозначная функция класса C^∞ на кокасательном пучке и X, Y — векторные поля класса C^∞ на T^*M^n.

Определение 4.26. *Гамильтоновой системой* на T^*M^n с гамильтонианом H называется векторное поле X_H на T^*M^n такое, что

$$\omega^2(X_H Y) = -dH(Y) \tag{4.39}$$

для любого $Y \in T(T^*(M^n))$.

В локальных координатах

$$X_H = \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle.$$

Траектории поля X_H являются решениями системы Гамильтона (4.19).

Пусть g_H^t: $T^*M^n \to T^*M^n$ — фазовый поток, индуцированный полем X_H. Тогда g_H^t сохраняет форму ω^2.

§ 5. Преобразование Фурье λ-псевдодифференциального оператора (перехода в p-представление)

Наша задача — построить ф. а. решение уравнения (3.1) в целом, т. е. во всем пространстве $\mathbf{R}_x^n$. Первым этапом построения квазиклассического приближения в целом является отыскание гладкого всюду в $\mathbf{R}_x^n$ решения $S(x)$

уравнения Гамильтона — Якоби (3.3). Однако это уравнение — нелинейное и может вовсе не иметь гладких во всем пространстве решений, за исключением тривиальных; такого рода примеры были приведены в конце § 3. Следовательно, при построении ф. а. решений в целом нельзя обойтись решениями вида (3.2).

Основным является следующее соображение [38]: основным объектом, связанным с уравнением Гамильтона — Якоби, следует считать не функцию $S(x)$, а лагранжево многообразие Λ^n. Задание функции S в некоторой области $\Omega \subset \mathbf{R}_x^n$ эквивалентно заданию «куска» лагранжева многообразия в фазовом пространстве:

$$p = \frac{\partial S(x)}{\partial x}, \qquad x \in \Omega.$$

Продолжим это многообразие, т. е. сдвинем его точки вдоль траекторий системы Гамильтона; мы получим гладкое лагранжево многообразие Λ^n (при соответствующих оговорках).

Итак, пусть лагранжево многообразие Λ^n не имеет особенностей. Это лагранжево многообразие является своеобразной «римановой поверхностью» функции S.

Пусть лагранжево многообразие Λ^n не имеет особенностей; однако связанная с ним функция $S = \int \langle p, dx \rangle$ тем не менее может иметь особенности. Именно, производящая функция S лагранжева многообразия Λ^n имеет особенности в тех точках $(x, p) \in \Lambda^n$, окрестности которых плохо проектируются на x-пространство. Но в таких точках можно выбрать другие локальные координаты на Λ^n, например, перейти в p-представление. Естественно рассмотреть в p-представлении и оператор L. Этот переход осуществляется с помощью преобразования Фурье. Перейдем к p-представлению в уравнении

$$L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x)\, u(x) = f(x),$$

т. е. положим

$$u(x) = F^{-1}_{\lambda,\, p \to x} \tilde{u}(p), \quad f(x) = F^{-1}_{\lambda,\, p \to x} \hat{f}(p).$$

Тогда уравнение примет вид

$$(F_{\lambda,\, x \to p} L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x)\, F^{-1}_{\lambda,\, p \to x})\, \hat{u}(p) = \hat{f}(p).$$

Полученный оператор есть исходный оператор в p-представлении и снова есть λ-п. д. о.; именно, он имеет вид

$$L(-\lambda^{-1}\overset{2}{D}_p, \overset{1}{p}).$$

Частные ф. а. решения уравнения

$$L(-\lambda^{-1}\overset{2}{D}_p, \overset{1}{p})\,\hat{u}(p)=0$$

снова можно искать в виде (3.2) (с заменой x на p). В последующих параграфах будет показано, что, комбинируя такие решения, можно получить ф. а. решение уравнения (3.1) в целом.

1. Частичные преобразования Фурье и λ-п. д. о. Устроим разбиение множества $(1, 2, \ldots, n)$ на два непересекающихся множества (α), (β): $(\alpha)=(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $(\beta)=(\beta_1, \ldots, \beta_l)$, где $k+l=n$, $\alpha_i \neq \beta_j$ при всех i, j (одно из множеств (α), (β) может быть пустым). Положим $x=(x_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$, $x_{(\alpha)}=(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_k})$ и аналогично положим $p=(p_{(\alpha)}, p_{(\beta)})$. Введем обозначения

$$\langle x_{(\alpha)}, p_{(\alpha)}\rangle=\sum_{j=1}^{k} x_{\alpha_j}p_{\alpha_j}, \quad dx_{(\alpha)}=dx_{\alpha_1}\ldots dx_{\alpha_k}$$

и аналогичные обозначения

$$\langle x_{(\beta)}, p_{(\beta)}\rangle, \; dx_{(\beta)}, \; dp_{(\alpha)}, \; dp_{(\beta)}.$$

Введем λ-преобразование Фурье по части переменных:

$$(F_{\lambda, x_{(\alpha)}\to p_{(\alpha)}}u(x))(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})= \\ =\left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^{k/2}\int \exp[-i\lambda\langle x_{(\alpha)}, p_{(\alpha)}\rangle]\,u(x)\,dx_{(\alpha)}, \tag{5.1}$$

где, как обычно, $\sqrt{i}=e^{i\pi/4}$. Тогда обратное преобразование имеет вид

$$(F^{-1}_{\lambda, p_{(\alpha)}\to x_{(\alpha)}}v(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}))(x)= \\ =\left(\frac{\lambda}{-2\pi i}\right)^{k/2}\int \exp[i\lambda\langle x_{(\alpha)}, p_{(\alpha)}\rangle]\,v(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})\,dp_{(\alpha)}. \tag{5.2}$$

Пусть $L(x, p; (i\lambda)^{-1})$ — полином от (x, p) с коэффициентами, гладкими по λ^{-1} при $\lambda \geqslant 1$. Тогда из известных свойств преобразования Фурье вытекает, что

$$F_{\lambda,\, x_{(\alpha)}\to p_{(\alpha)}} L\,(\overset{2}{x},\ \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ (i\lambda)^{-1})\, F^{-1}_{\lambda,\, p_{(\alpha)}\to x_{(\alpha)}} u\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)}) =$$

$$= L\,(-\lambda^{-1}\overset{2}{D}_{p_{(\alpha)}},\ \overset{2}{x}_{(\beta)},\ \overset{1}{p}_{(\alpha)},\ \lambda^{-1}\overset{1}{D}_{x_{(\beta)}};\ (i\lambda)^{-1})\, u\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)}). \quad (5.3)$$

Предложение 5.1. *Пусть символ* $L\,(x,\,p) \in T^m_{\pm}\,(R^n_x)$. *Тогда левая часть формулы* (5.3) *определяет линейный оператор из* $C_0^\infty\,(\mathbf{R}^{n-k}_{p_{(\alpha)}} \times \mathbf{R}^k_{x_{(\beta)}})$ *в* $C^\infty\,(\mathbf{R}^{n-k}_{p_{(\alpha)}} \times \mathbf{R}^k_{x_{(\beta)}})$.

Доказательство очевидно. Формулу (5.3) примем в качестве определения оператора

$$L\,(-\lambda^{-1}\overset{2}{D}_{p_{(\alpha)}},\ \overset{2}{x}_{(\beta)},\ \overset{1}{p}_{(\alpha)},\ \lambda^{-1}\overset{1}{D}_{x_{(\beta)}};\ (i\lambda)^{-1})$$

и будем называть его *λ-преобразованием Фурье* λ-п. д. о. $L\,(\overset{2}{x},\ \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ (i\lambda)^{-1})$ по переменным $x_{(\alpha)}$.

2. Новый класс частных асимптотических решений. Рассмотрим уравнение

$$L\,(\overset{2}{x},\ \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ (i\lambda)^{-1})\, u\,(x) = 0. \quad (5.4)$$

Всюду в дальнейшем в этом параграфе предполагается, что $L\,(x,\,p;\ (i\lambda)^{-1}) \in T^m_{\mp}\,(\mathbf{R}^n)$ для некоторого m.

В § 3 мы построили класс формальных асимптотических решений уравнения (5.4) вида

$$u\,(x,\,\lambda) = \varphi\,(x)\exp\,(i\lambda S\,(x)).$$

Формула (5.3) позволяет построить класс формальных асимптотических решений вида

$$u\,(x,\,\lambda) =$$
$$= F^{-1}_{\lambda,\, p_{(\alpha)}\to x_{(\alpha)}}\,(\varphi\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})\exp\,[i\lambda S\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})]). \quad (5.5)$$

Вначале мы формально проведем выкладки, а затем приведем строгое утверждение. Будем искать решение уравнения (5.4) в виде

$$u\,(x,\,\lambda) = F^{-1}_{\lambda,\, p_{(\alpha)}\to x_{(\alpha)}}\,(v\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)},\ \lambda)). \quad (5.6)$$

Подставим (5.6) в (5.4) и применим слева оператор $F_{\lambda,x_{(\alpha)}\to p_{(\alpha)}}$. Тогда, используя формулу (5.3), получим уравнение

$$L\,(-\lambda^{-1}\overset{2}{D}_{p_{(\alpha)}},\ \overset{2}{x}_{(\beta)},\ \overset{1}{p}_{(\alpha)},\ \lambda^{-1}\overset{1}{D}_{x_{(\beta)}};\quad (i\lambda)^{-1})\,v\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)},\ \lambda)=0. \tag{5.7}$$

Но это уравнение имеет тот же вид, что и (5.4) (т. е. в левой части снова стоит λ — п. д. о.), и мы, как и в § 3, можем искать формальное асимптотическое решение в виде

$$v\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)},\ \lambda)=\varphi\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})\exp\,[i\lambda S\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})]. \tag{5.8}$$

Подставляя в (5.6), получаем (5.7). Этот класс ф. а. решений впервые был построен в [38], [39].

Т е о р е м а 5.2. *Пусть символ* $L\,(x,\ p;\ (i\lambda)^{-1})\in T^m_+\,(\mathbf{R}^n_x)$, *функция* $S\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})$ *вещественнозначна*,

$$\varphi\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})\in C_0^\infty\,(\mathbf{R}^{n-k}_{p_{(\alpha)}}\times\mathbf{R}^k_{x_{(\beta)}}),$$

$$S\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})\in C^\infty\,(\mathbf{R}^{n-k}_{p_{(\alpha)}}\times\mathbf{R}^k_{x_{(\beta)}}).$$

Тогда при $\lambda\geqslant 1$ *и при любом целом* $N\geqslant 0$

$$\begin{aligned}L\,(\overset{2}{x},\ \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ (-i\lambda)^{-1})\,F^{-1}_{\lambda,\ p_{(\alpha)}\to x_{(\alpha)}}\,(\varphi\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})\times\\ \times\exp\,[i\lambda S\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})])=\\ =F^{-1}_{\lambda,\ p_{(\alpha)}\to x_{(\alpha)}}\,[\exp\,(i\lambda S\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)}))\sum_{j=0}^{N-1}(i\lambda)^{-j}R_j\varphi\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})]+\\ +O_{-N}].\end{aligned} \tag{5.9}$$

Здесь R_j *— линейный дифференциальный оператор порядка* $\leqslant j$ *с коэффициентами класса* C^∞ *(зависящими от* S*). Остаточный член* $O^+_{-N}\in O^+_{-N}\,(\mathbf{R}^k_{p_{(\alpha)}}\times\mathbf{R}^{n-k}_{x_{(\beta)}})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $v\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})$ бесконечно дифференцируема и финитна по всем своим аргументам. Тогда, в силу (5.3),

$$\begin{aligned}L\,(\overset{2}{x},\ \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ (i\lambda)^{-1})\,F^{-1}_{\lambda,\ p_{(\alpha)}\to x_{(\alpha)}}v\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})=\\ =F^{-1}_{\lambda,\ p_{(\alpha)}\to x_{(\alpha)}}\widetilde{\mathscr{L}}v\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)}),\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\widetilde{\mathscr{L}}=L\,(-\lambda^{-1}\overset{1}{D}_{p_{(\alpha)}},\ \overset{2}{x}_{(\beta)},\ \lambda^{-1}\overset{1}{D}_{x_{(\beta)}},\ \overset{2}{p}_{(\alpha)}).$$

Пусть v имеет вид (5.8). Применяя теоремы 2.6, 2.11, получаем разложения

$$\tilde{\mathscr{L}}v = e^{i\lambda S}\sum_{0}^{N-1}(i\lambda)^{-j}R_j\varphi + M_N(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}; (i\lambda)^{-1}).$$

Утверждение теоремы относительно остаточного члена следует из (2.12′).

Выпишем первые два члена разложения (5.9):

$$R_0\varphi = L^0\varphi, \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} R_1\varphi = \left\langle \frac{\partial L^0}{\partial x_{(\alpha)}}, \frac{\partial\varphi}{\partial p_{(\alpha)}}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial L^0}{\partial p_{(\beta)}}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_{(\beta)}}\right\rangle - \\ -\frac{1}{2}\Bigg[\operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L^0}{(\partial x_{(\alpha)})^2}\frac{\partial^2 S}{(\partial p_{(\alpha)})^2}\right) + \operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L^0}{(\partial p_{(\beta)})^2}\frac{\partial^2 S}{(\partial x_{(\beta)})^2}\right) - \\ -2\operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L^0}{\partial x_{(\alpha)}\,\partial p_{(\beta)}}\frac{\partial^2 S}{\partial p_{(\alpha)}\,\partial x_{(\beta)}}\right) - 2\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2 L^0}{\partial x_{\alpha_j}\,\partial p_{\beta_j}}\Bigg]\varphi + \\ + \left(\frac{\partial L}{\partial (i\lambda)^{-1}}\right)_0\varphi. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Здесь

$$L^0 = L\left(-\frac{\partial S(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}{\partial p_{(\alpha)}}, x_{(\beta)}, p_{(\alpha)}, \frac{\partial S(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}{\partial x_{(\beta)}}; 0\right) \tag{5.13}$$

Производная $\left(\frac{\partial L}{\partial (i\lambda)^{-1}}\right)_0$ берется при $(i\lambda)^{-1} = 0$ и при тех же значениях x, p, что и L^c.

3. Уравнение переноса. Введем обозначение

$$\tilde{L}(x, p; (i\lambda)^{-1}) = L(-x_{(\alpha)}, x_{(\beta)}, p_{(\alpha)}, p_{(\beta)}; (i\lambda)^{-1}). \tag{5.14}$$

Уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$L^0 = 0. \tag{5.15}$$

Положим

$$x' = (p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}), \quad p' = (x_{(\alpha)}, p_{(\beta)}). \tag{5.16}$$

Тогда система Гамильтона для уравнения (5.15) имеет вид

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial\tilde{L}'(x', p'; 0)}{\partial p'}, \quad \frac{dp'}{dt} = -\frac{\partial\tilde{L}(x', p'; 0)}{\partial x'}, \tag{5.17}$$

$$\tilde{L}'(x', p'; 0) = \tilde{L}(x, p; 0).$$

Применяя формулу Лиувилля (3.23) к системе

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{\partial\tilde{L}(x',\ \partial S/\partial x';\ 0)}{\partial p'},$$

получаем, что

$$\frac{d}{dt}\ln J=\operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L^0}{\partial p'^2}\frac{\partial^2 S}{\partial x'^2}\right)+\operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L^0}{\partial x'\,\partial p'}\right),$$

где

$$J=\det\frac{\partial(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})}{\partial(x_{(\alpha)},\ p_{(\beta)})}. \tag{5.18}$$

Далее,

$$\left\langle\frac{\partial L^0}{\partial p'},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right\rangle=\dot{\varphi},$$

где $\dot{\varphi}$ — производная в силу системы (5.17). Следовательно, уравнение $R\varphi=0$ примет вид

$$\frac{d}{dt}(\varphi\sqrt{J})=-(\varphi\sqrt{J})\left(\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\frac{\partial^2\tilde{L}^0}{\partial x'\,\partial p'}+\left.\frac{\partial\tilde{L}^0}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right). \tag{5.19}$$

Сформулируем результат, аналогичный теореме 3.10. Пусть U — область в $\mathbf{R}^{n-1}$, $\{x'\colon x'=x'^0(\gamma)\}$ — C^∞-многообразие размерности $n-1$ в $\mathbf{R}^n_x$. Рассмотрим задачу Коши

$$x'|_{t=0}=x'^0(\gamma),\quad p'|_{t=0}=p'^0(\gamma),\qquad \gamma\in U \tag{5.20}$$

с условием согласования (3.32), и пусть выполнены условия 1)—3) теоремы 3.10 (последнее — применительно к задаче Коши (5.19), (5.20)).

Пусть $\Omega(x_{(\beta)})$ — малая окрестность точки $x_{(\beta)}=x^0_{(\beta)}(\gamma^0)$ и $\Omega\subset\mathbf{R}^n_x$ — малая окрестность точки $(x^0_{(\alpha)},\ x^0_{(\beta)}(\gamma^0))$, где $x^0_{(\alpha)}$ — любое. Положим

$$S(p_{(\alpha)}(t,\ \gamma),\ x_{(\beta)}(t,\ \gamma))=S_0(p^0_{(\alpha)}(\gamma),\ x^0_{(\beta)}(\gamma))+\int_0^t\left[\left\langle p_{(\beta)}(t',\ \gamma),\ \frac{dx_{(\beta)}(t',\ \gamma)}{dt'}\right\rangle-\left\langle x_{(\alpha)}(t',\ \gamma),\ \frac{dp_{(\alpha)}(t',\ \gamma)}{dt'}\right\rangle\right]dt' \tag{5.21}$$

При малых t эта функция будет решением класса C^∞ уравнения (5.15).

Теорема 5.3. *Пусть выполнены условия* 1)—3) *теоремы* 3.10 (*последнее — для задачи Коши* (5.19), (5.20)).

Тогда функция

$$u(x, \lambda) = F^{-1}_{\lambda, p_{(\alpha)} \to x_{(\alpha)}} \frac{\varphi_0(\gamma) \sqrt{|J(0, \gamma)|}}{\sqrt{J(t, \gamma)}} \times$$
$$\times \exp \left[i\lambda S(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}) - \int_0^t \left[\frac{1}{2} \operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L^0}{\partial x\, \partial p} \right) - \frac{\partial L^0}{\partial (i\lambda)^{-1}} \bigg|_{(i\lambda)^{-1}=0} \right] dt' \right] \tag{5.22}$$

является решением уравнения (3.1) $\operatorname{mod} O^{+}_{-2}(\Omega)$.

Функция S есть решение уравнения Гамильтона — Якоби (5.15), $\varphi_0(\gamma)$ — произвольная функция класса $C^\infty(U)$.

Все функции $x_{(\alpha)}$, $p_{(\beta)}$, $p_{(\alpha)}$, $x_{(\beta)}$ в правой части (5.22) являются решениями задачи Коши (5.19), (5.20), (т. е. $x_{(\alpha)} = x_{(\alpha)}(t, \gamma)$ и т. д.); t, γ таковы, что $x_{(\beta)}(t, \gamma) = x_{(\beta)}$.

Доказательство теоремы следует из (5.19) и теоремы 5.2.

К уравнениям переноса мы вернемся еще в § 11 и в § 14.

§ 6. Предканонический оператор (квантование поля скоростей в малом)

Итак, в предыдущих параграфах были построены формальные асимптотические решения уравнения (3.1), которые имеют вид быстро осциллирующей экспоненты либо в x-представлении, либо в p-представлении, либо в смешанном представлении. Каждое такое ф. а. решение ассоциировано с лагранжевым многообразием Λ^n максимальной размерности в фазовом пространстве. Теперь в качестве отправной точки рассмотрения возьмем это многообразие. Наша задача — построить ф. а. решение в целом, сшивая всевозможные ф. а. решения, индуцированные многообразием Λ^n. При сращивании ф. а. решений следует, прежде всего, учитывать, что одно и то же решение может иметь различные представления (например, Λ^n может диффеоморфно проектироваться и на x-пространство, и на p-пространство). Согласованию этих представлений и посвящен настоящий параграф.

1. Эвристические соображения. Задача о построении квазиклассической асимптотики уравнений квантовой механики или, вообще, уравнений вида

$$L(x, \lambda^{-1}D_x)\, u(x) = 0$$

приводит, как мы выяснили в предыдущих параграфах, к «классическому» объекту — лагранжеву многообразию Λ^n в фазовом пространстве. Теперь мы проквантуем этот объект классической механики (поле скоростей), т. е. построим оператор K, отвечающий многообразию Λ^n (канонический оператор).

В настоящем параграфе рассматривается случай, когда лагранжево многообразие Λ^n диффеоморфно проектируется на одну из лагранжевых координатных плоскостей. Соответствующий оператор K будем называть *предканоническим оператором.*

Пусть многообразие Λ^n диффеоморфно проектируется на x-пространство. Введем оператор

$$K\colon L^2_{\sigma^n}(\Lambda^n) \to L^2(\mathbf{R}^n_x)$$

по формуле

$$(K\varphi)(x) = \sqrt{\left|\frac{d\sigma^n}{dx}\right|}\exp[i\lambda S(x)]\,\varphi(x). \tag{6.1}$$

Этот оператор назовем *предканоническим оператором*. Здесь $d\sigma^n$ — объем на Λ^n, $S(x)$ — производящая функция лагранжева многообразия, т. е. оно задается уравнением $p = \dfrac{\partial S(x)}{\partial x}$ и норма в L^2_σ задается формулой

$$\|\varphi\|^2 = \int\limits_{\Lambda^n} |\varphi|^2\, d\sigma^n.$$

Оператор K является унитарным:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n_x} |K\varphi|^2\, dx = \int\limits_{\Lambda^n} |\varphi|^2\, d\sigma^n.$$

Далее, справедлива формула коммутации

$$L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x)\, K\varphi = K\,[L(x, p)\,\varphi + O(\lambda^{-1})],$$

где точка $(x, p) \in \Lambda^n$. Таким образом, λ-п. д. о. переходит в оператор умножения на функцию (символ оператора) с точностью до $O(\lambda^{-1})$.

Если символ оператора $\hat{L}$ равен нулю на многообразии Λ^n, то

$$L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D_x}) K\varphi = O(\lambda^{-1}),$$

т. е. функция $u = K\varphi$ есть формальное асимптотическое решение уравнения $\hat{L}u = 0$ с точностью до $O(\lambda^{-1})$. Таким образом, с помощью предканонического оператора можно строить формальные асимптотические решения уравнения $\hat{L}u = 0$.

Пусть Λ^n диффеоморфно проектируется также и на p-пространство. Перейдем в p-представление. Тогда уравнение многообразия Λ^n примет вид $x = -\dfrac{\partial \tilde{S}(p)}{\partial p}$, где функции $S(x)$, $\tilde{S}(p)$ двойственны по Юнгу. Заметим, что функция $\varphi(r)$, где r — точка Λ^n, может одновременно рассматриваться и как функция от x, и как функция от p. Пусть $n = 1$ для простоты. Применяя метод стационарной фазы (§ 1), получаем (в предположении, что $S''_{xx}(x) \neq 0$)

$$(F_{\lambda,\, x\to p}(K\varphi)(x))(p) =$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi i}} \int \exp(-i\lambda xp + i\lambda S(x))\, \varphi(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{i}} e^{\pm \frac{i\pi}{4}} e^{i\lambda \tilde{S}(p)} \varphi(x(p)) \frac{1}{\sqrt{|S''(x(p))|}} \sqrt{\left|\frac{d\sigma}{dx}\right|} + O(\lambda^{-1}), \tag{6.1'}$$

где $x(p)$ — решение уравнения $S'_x(x) = p$.

Сравнивая формулы (6.1) и (6.1′), получаем, далее,

$$|S''_{xx}(x(p))| = \sqrt{\left|\frac{dp}{dx}\right|}.$$

Следовательно, в p-представлении предканонический оператор K имеет вид

$$(K\varphi)(x) = e^{i\gamma} F^{-1}_{\lambda,\, x\to p} \left(\sqrt{\left|\frac{d\sigma}{dp}\right|} \exp(i\lambda \tilde{S}(p))\, \varphi(x(p)) \right),$$

$$\gamma = \text{const}, \tag{6.1''}$$

с точностью до слагаемого порядка $O(\lambda^{-1})$.

Аналогичный вид имеет предканонический оператор в смешанном представлении.

2. Предканонический оператор. Приведем обозначения, которые будут использованы в этом и последующих параграфах.

1) Λ^n — лагранжево C^∞-многообразие размерности n в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n} = \{x, p\}$.

2) r — точка Λ^n, $(x(r), p(r))$ — ее координаты.

3) $d\sigma^n$ — дифференциальная форма степени n и класса C^∞ на Λ^n (объем).

4) $\Sigma(\Lambda^n)$ — цикл особенностей (см. определение 6.1).

5) $C_0^\infty(\Lambda^n)$ — множество всех C^∞-отображений $\varphi\colon \Lambda^n \to C^\infty$ с компактными носителями.

6) (α), (β) — непересекающиеся множества, в сумме дающие множество $(1, 2, \ldots, n)$. Далее, $x_{(\alpha)} = (x_{(\alpha_1)}, \ldots, x_{(\alpha_k)})$ и т. д.

7) $l[r^1, r^2]$ — гладкая кривая на Λ^n, $\partial l = r^2 - r^1$.

Введем следующие предварительные понятия: каноническая карта, неособая каноническая карта, канонический атлас.

Канонической картой называется односвязная область $\Omega \subset \Lambda^n$, которая диффеоморфно проектируется на одну из лагранжевых координатных плоскостей $\{p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}\}$. Координаты $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$ назовем *фокальными координатами* карты.

Определение 6.1. Точка $r^0 \in \Lambda^n$ называется *неособой* (относительно проектирования на $\mathbf{R}_x^n$), если некоторая ее окрестность диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}_x^n$, и *особой* в противном случае. Множество всех особых точек обозначим через $\Sigma(\Lambda^n)$.

Каноническая карта Ω называется *неособой*, если все ее точки неособые.

Каноническим атласом на лагранжевом многообразии Λ^n называется набор $\{\Omega^i\}$, где Ω^i — канонические карты, такой, что: 1) $\{\Omega^i\}$ есть счетное покрытие, 2) каждый компакт $F \subset \Lambda^n$ покрывается конечным числом карт.

Существование канонических атласов следует из леммы 4.5.

Пусть Ω — каноническая карта. При $r \in \Omega$ интеграл

$$\int_{r^0}^{r} \langle p', dx' \rangle,$$

по определению, берется по пути

$$l\,[r^0,\ r\,(\Omega)] + l\,[r\,(\Omega),\ r],$$

где r^0 — фиксированная точка карты, и последний путь лежит в Ω. Так как форма $\langle p,\ dx\rangle$ замкнута на Λ^n, то этот интеграл есть однозначная функция класса $C^\infty\,(\Omega)$.

Введем *оператор* K, действующий из $C_0^\infty\,(\Omega)$ в $C^\infty\,(\mathbf{R}_x^n)$.

1) Ω — неособая карта. Положим (см. (6.1′))

$$(K\varphi)\,(x) = \sqrt{\left|\frac{d\sigma^n\,(r\,(x))}{dx}\right|}\,\varphi\,(r\,(x))\exp\left(i\lambda\int_{r_0}^{r(x)}\langle p',\ dx'\rangle\right). \tag{6.2}$$

Здесь $\dfrac{d\sigma^n\,(r\,(x))}{dx}$ есть производная меры $d\sigma^n$ по мере dx в точке $r\,(x)$. В локальных координатах x имеем $d\sigma^n\,(r\,(x)) = a\,(x)\,dx$, так что

$$\left|\frac{d\sigma^n\,(r\,(x))}{dx}\right| = |\,a\,(x)\,|.$$

2) Ω — особая карта с фокальными координатами $(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})$. Каждая точка $r\in\Omega$ имеет вид

$$r = r\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)}) = \\ = (x_{(\alpha)}\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)}),\ x_{(\beta)},\ p_{(\alpha)},\ p_{(\beta)}\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})),$$

где $x_{(\alpha)},\ p_{(\beta)}$ — заданные функции. Положим

$$(K\varphi)\,(x) = F^{-1}_{\lambda,\ p_{(\alpha)}\to x_{(\alpha)}}\left[\varphi\,(r\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})\sqrt{\left|\frac{d\sigma^n\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})}{dp_{(\alpha)}\,dx_{(\beta)}}\right|}\,\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[i\lambda\left(\int_{r^0}^{r(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})}\langle p',\ dx'\rangle - \langle x_{(\alpha)}\,(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)}),\ p_{(\alpha)}\rangle\right)\right]\right]. \tag{6.3}$$

Подынтегральная функция зависит от переменных $(x_{(\alpha)},\ x_{(\beta)},\ p_{(\alpha)})$, так что интеграл есть функция от $x_{(\alpha)}$, $x_{(\beta)}$, т. е. от x. Заметим, что стоящая под знаком экспоненты функция является преобразованием Лежандра функции $S\,(x)$ (с точностью до знаков).

Построенный оператор зависит, помимо $\{\Lambda^n,\ r^0,\ d\sigma^n\}$ и $\{\Omega,\ l\,[r^0,\ r]\}$, еще и от выбора локальных координат в Ω, так как в одной и той же карте можно, вообще говоря, по-разному выбирать фокальные координаты. Например, Ω может однозначно проектироваться на $\mathbf{R}_x^n$ и на $\mathbf{R}_p^n$.

Мы покажем, что при $\lambda \to +\infty$ различные представления оператора K отличаются лишь постоянным множителем, с точностью до $O(\lambda^{-1})$. Этот множитель приведет нас к понятию индекса кривой на лагранжевом многообразии (см. § 7).

Будем писать $K = K(\Omega, (p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}))$ (т. е. в качестве фокальных координат в Ω выбраны $p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}$). Рассмотрим отображение

$$K(\Omega, (p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})): C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\lambda^+)/O_{-1}^+(\mathbf{R}_x^n). \quad (6.4)$$

Класс $O_{-1}^+(\mathbf{R}_x^n)$ мы ввели в § 1.

Лемма 6.2. *Пусть Ω — неособая карта и Ω диффеоморфно проектируется на плоскость $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$. Тогда при $\lambda \geqslant 1$ для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем*

$$(K(\Omega, x)\varphi)(x) = \exp\left(-\frac{i\pi}{2}\operatorname{inerdex}\frac{\partial x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}{\partial p_{(\alpha)}}\right)\times$$
$$\times (K(\Omega; p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})\varphi)(x) \pmod{O_{-1}^+(\mathbf{R}_x^n)}. \quad (6.5)$$

Доказательство. Функция $[K(\Omega; p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})\varphi](x)$ равна правой части (6.3). Применим к этому интегралу метод стационарной фазы. Пусть $\tilde{S}(p_{(\alpha)}; x)$ — функция, стоящая в экспоненте. Рассмотрим ее при фиксированном x. Тогда

$$d\tilde{S} = \langle p_{(\alpha)}, dx_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})\rangle +$$
$$+ \langle x_{(\alpha)} - x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}), dp_{(\alpha)}\rangle - \langle p_{(\alpha)}, dx_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})\rangle =$$
$$= \langle x_{(\alpha)} - x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}), dp_{(\alpha)}\rangle,$$

так что

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial p_{(\alpha)}} = x_{(\alpha)} - x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}). \quad (6.6)$$

Стационарные точки определяются из уравнения $\partial\tilde{S}/\partial p_{(\alpha)} = 0$, и, в силу условий на Ω и (6.6), это уравнение имеет единственное решение $p_{(\alpha)} = p_{(\alpha)}(x)$. Именно, уравнение Ω можно записать в виде $p = p(x) = (p_{(\alpha)}(x), p_{(\beta)}(x))$; это и дает искомое решение. В стационарной точке имеем

$$\tilde{S}_{\text{ст}} = \int_{r^0}^{r(x)} \langle p', dx'\rangle,$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial p_{(\alpha)}} = -\left.\frac{\partial x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}{\partial p_{(\alpha)}}\right|_{p_{(\alpha)} = p_{(\alpha)}(x)};$$

следовательно,

$$\operatorname{sgn}\frac{\partial^2\widetilde{S}}{\partial p^2_{(\alpha)}} = -\operatorname{sgn}\frac{\partial x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}{\partial p_{(\alpha)}},$$

и поэтому

$$\operatorname{sgn}\frac{\partial^2\widetilde{S}}{\partial p^2_{(\alpha)}} = -\operatorname{sgn}\frac{\partial x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}{\partial p_{(\alpha)}} = 2\operatorname{inerdex}\frac{\partial x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}{\partial p_{(\alpha)}} - k,$$

где k — число компонент вектора (α).

Наконец,

$$dx = \pm\det\frac{\partial x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}{\partial p_{(\alpha)}}\, dp_{(\alpha)}\, dx_{(\beta)},$$

так что

$$\sqrt{\left|\frac{d\sigma^n(r(x))}{dp_{(\alpha)}\, dx_{(\beta)}}\right| \left|\frac{\partial x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}{\partial p_{(\alpha)}}\right|} = \sqrt{\left|\frac{d\sigma^n(r(x))}{dx}\right|}.$$

Применяя теорему 1.4, получаем, что

$$(K(\Omega;\, p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})\,\varphi)(x) = \exp\left(\frac{i\pi}{2}\operatorname{inerdex}\frac{\partial x_{(\alpha)}}{\partial p_{(\alpha)}}\right)\sqrt{\left|\frac{d\sigma^n(r(x))}{dx}\right|}\,\varphi(r(x)) \times$$
$$\times\exp\left(i\lambda\int_{r^0}^{r}\langle p', dx'\rangle\right) + \psi(x, \lambda), \qquad (6.5')$$

где $\varphi\in O^{+}_{-1}(\mathbf{R}^n_x)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Оценка остаточного члена в (6.5′)

$$|\psi(x;\lambda)| \leqslant C\lambda^{-1}$$

на каждом компакте $K\subset\mathbf{R}^n$ равномерна по φ, принадлежащим ограниченному множеству в $C_0^\infty(\Omega)$. Это следует из [60].

Лемма 6.3. *Пусть карта Ω диффеоморфно проектируется на лагранжевы плоскости $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$ и $(p_{(\widetilde{\alpha})}, x_{(\widetilde{\beta})})$. Тогда при $\lambda\geqslant 1$ для любой функции $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ имеем*

$$(K(\Omega;\,(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}))\,\varphi)(x) = e^{\frac{i\pi m}{2}}K(\Omega;\, p_{(\widetilde{\alpha})}, x_{(\widetilde{\beta})})(\varphi+\lambda^{-1}\psi)(x). \qquad (6.7)$$

Здесь m — целое число, не зависящее от φ и от точки $r \in \Omega$.

Доказательство. Пусть

$$K = K(\Omega;\ p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)}), \quad \widetilde{K} = K(\Omega;\ p_{(\widetilde{\alpha})},\ x_{(\widetilde{\beta})}).$$

Имеем

$$\begin{aligned}(K\varphi)(x) &= F^{-1}_{\lambda,\, p_{(\alpha)} \to x_{(\alpha)}} \varphi(r) \sqrt{\left|\frac{d\sigma^n(r)}{dp_{(\alpha)}\, dx_{(\beta)}}\right|} \exp(i\lambda S),\\ (\widetilde{K}\varphi)(x) &= F^{-1}_{\lambda,\, p_{(\widetilde{\alpha})} \to x_{(\widetilde{\alpha})}} \varphi(r) \sqrt{\left|\frac{d\sigma^n(r)}{dp_{(\widetilde{\alpha})}\, dx_{(\widetilde{\beta})}}\right|} \exp(i\lambda \widetilde{S}),\end{aligned} \tag{6.8}$$

где S, $\widetilde{S}$ определяются из (6.3). Покажем, что

$$F_{\lambda,\, x_{(\widetilde{\alpha})} \to p_{(\widetilde{\alpha})}} (K\varphi)(x) = \\ = \exp\left(\frac{i\pi N}{2}\right) \exp(i\lambda \widetilde{S})\, \varphi(r) \sqrt{\left|\frac{d\sigma^n}{dp_{(\widetilde{\alpha})}\, dx_{(\widetilde{\beta})}}\right|} + \chi(p_{(\widetilde{\alpha})},\ x_{(\widetilde{\beta})},\ \lambda), \tag{6.9}$$

где N — целое число, не зависящее от φ и от точки $r \in \Omega$, а остаточный член χ таков, что

$$\chi \in O^{+}_{-1}(\mathbf{R}^{\widetilde{k}}_{p(\widetilde{\alpha})} \times \mathbf{R}^{n-\widetilde{k}}_{x(\widetilde{\beta})}). \tag{6.10}$$

Тем самым лемма будет доказана.

Пусть ψ — левая часть (6.9). Тогда

$$\psi = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{(k+\widetilde{k})/2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}(k-\widetilde{k})\right) \times \\ \times \int\int \exp(i\lambda \widetilde{\widetilde{S}})\, \varphi(r) \sqrt{\left|\frac{d\sigma^n(r)}{dp_{(\alpha)}\, dx_{(\beta)}}\right|}\, dp_{(\alpha)}\, dx_{(\widetilde{\alpha})}, \tag{6.11}$$

где интеграл понимается как повторный: сначала по $dp_{(\alpha)}$, затем по $dx_{(\widetilde{\alpha})}$.

Применим метод стационарной фазы; вначале ограничимся формальными выкладками, а затем приведем обоснование.

I. Формальный вывод. Среди чисел $\alpha_j \in (\alpha)$, $\widetilde{\alpha}_k \in (\widetilde{\alpha})$ могут быть одинаковые. Устроим разбиение на непересекающиеся множества

$$\{1, 2, \quad n\} = (a) \cup (b) \cup (c) \cup (d)$$

так, чтобы

$$(\alpha) = (a) \cup (b), \qquad (\widetilde{\alpha}) = (a) \cup (c).$$

Тогда

$$(\beta)=(c)\cup(d),\qquad (\tilde\beta)=(b)\cup(d).$$

Уравнение многообразия Ω, по условию, можно записать в виде

$$\begin{aligned}&x_{(a)}=\varphi_{(a)}(\xi),\quad x_{(b)}=\varphi_{(b)}(\xi),\\ &p_{(c)}=\varphi_{(c)}(\xi),\quad p_{(d)}=\varphi_{(d)}(\xi),\\ &\xi=(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})\end{aligned}\tag{6.12}$$

или в виде

$$\begin{aligned}&x_{(a)}=\tilde\varphi_{(a)}(\tilde\xi),\qquad x_{(c)}=\tilde\varphi_{(c)}(\tilde\xi),\\ &p_{(b)}=\tilde\varphi_{(b)}(\tilde\xi),\qquad p_{(d)}=\tilde\varphi_{(d)}(\tilde\xi),\\ &\tilde\xi=(p_{(\tilde\alpha)},\ x_{(\tilde\beta)}).\end{aligned}\tag{6.12'}$$

Чтобы избежать путаницы в обозначениях, поставим звездочки над всеми значащими переменными (по которым не производится интегрирование), например:

$$\xi=(p_a,\ p_b,\ x_c,\ x_d^*),\qquad \tilde\xi=(p_b,\ p_c^*,\ x_b^*,\ x_d^*).$$

Фазовая функция $\tilde{\tilde S}$ имеет вид

$$\tilde{\tilde S}=\int_{r^0}^{r}\langle p',\ dx'\rangle+\langle\varphi_{(\alpha)}(\xi)-x_{(\alpha)},\ p_{(\alpha)}\rangle+\langle x_{(\tilde\alpha)},\ p^*_{(\tilde\alpha)}\rangle,$$

где $r=r(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})$. Следовательно,

$$\begin{aligned}d\tilde{\tilde S}=\langle\varphi_{(\beta)}(\xi),\ dx_{(\beta)}\rangle+\langle x_{(\alpha)}-\varphi_{(\alpha)}(\xi),\ dp_{(\alpha)}\rangle+\\ +\langle p_{(\alpha)},\ dx_{(\alpha)}\rangle-\langle p^*_{(\tilde\alpha)},\ dx_{(\tilde\alpha)}\rangle.\end{aligned}\tag{6.13}$$

Функция $\tilde{\tilde S}$ зависит от переменных $p_{(a)},\ p_{(b)},\ x_{(a)},\ x_{(c)}$, по которым производится интегрирование в интеграле (6.11), и от значащих переменных, которые играют роль параметров. В силу соотношения (6.13) дифференциал $\tilde{\tilde S}$, как функции от переменных интегрирования (при фиксированных значениях значащих переменных), равен

$$\begin{aligned}d\tilde{\tilde S}=\langle x_{(a)}-\varphi_{(a)}(\xi),\ dp_{(a)}\rangle+\langle x_{(b)}-\varphi_{(b)}(\xi),\ dp_{(b)}\rangle+\\ +\langle p_{(a)}-p^*_{(a)},\ dp_{(a)}\rangle+\langle\varphi_{(c)}(\xi)-p^*_{(c)},\ dx_{(c)}\rangle.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\tilde{S}}}{\partial p_{(a)}} &= x_{(a)} - \varphi_{(a)}(\xi),\\
\frac{\partial \tilde{\tilde{S}}}{\partial p_{(b)}} &= x_{(b)} - \varphi_{(b)}(\xi),\\
\frac{\partial \tilde{\tilde{S}}}{\partial x_{(a)}} &= p_{(a)} - p^*_{(a)},\\
\frac{\partial \tilde{\tilde{S}}}{\partial x_{(c)}} &= \varphi_{(c)}(\xi) - p^*_{(c)}.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Стационарные точки функции $\tilde{\tilde{S}}$ определяются из системы

$$\begin{aligned}
&\varphi_{(b)}(p_{(a)}, p_{(b)}, x_{(c)}, x^*_{(d)}) = x^*_{(b)},\\
&\varphi_{(c)}(p_{(a)}, p_{(b)}, x_{(c)}, x^*_{(d)}) = p^*_{(c)},
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
&p_{(a)} = p^*_{(a)},\\
&x_{(a)} = \varphi_{(a)}(p_{(a)}, p_{(b)}, x_{(c)}, x^*_{(d)}).
\end{aligned} \tag{6.15'}$$

Имеем $p_{(a)} = p^*_{(a)}$. При любых

$$(p^*_{(a)}, p^*_{(c)}, x^*_{(b)}, x^*_{(d)}) \in \pi(p_{(\tilde{\alpha})}, x_{(\tilde{\beta})})\,\Omega$$

(проекция Ω на плоскость $(p_{(\tilde{\alpha})}, x_{(\tilde{\beta})})$) система (6.15) имеет единственное решение

$$\begin{aligned}
p_{(b)} &= \tilde{\varphi}_{(b)}(p^*_{(a)}, p^*_{(c)}, x^*_{(b)}, x^*_{(d)}),\\
x_{(c)} &= \tilde{\varphi}_{(c)}(p^*_{(a)}, p^*_{(c)}, x^*_{(b)}, x^*_{(d)}),
\end{aligned} \tag{6.16}$$

где $\tilde{\varphi}_{(b)}$, $\tilde{\varphi}_{(c)}$ — функции из (6.12′), что следует из условия леммы. Тогда второе из уравнений (6.15′) однозначно определяет $x_{(a)}$, а именно:

$$x_{(a)} = \tilde{\varphi}_{(a)}(p^*_{(a)}, p^*_{(c)}, x^*_{(b)}, x^*_{(d)}). \tag{6.16'}$$

Таким образом, стационарная точка $Q = Q(p^*_{(\tilde{\alpha})}, x^*_{(\tilde{\beta})})$ единственна и значение фазы $\tilde{\tilde{S}}$ в этой точке равно

$$\tilde{\tilde{S}}(Q) = \int\limits_{r_Q}^{r(p^*_{(\tilde{\alpha})}, x^*_{(\tilde{\beta})})} \langle p', dx'\rangle - \langle \tilde{\varphi}_{(\tilde{\alpha})}(p^*_{(\tilde{\alpha})}, x^*_{(\tilde{\beta})}), p^*_{(\tilde{\alpha})}\rangle = \tilde{S}, \tag{6.17}$$

Следовательно, значение $\tilde{\tilde{S}}(Q)$ совпадает с функцией $\tilde{S}$, входящей в определение оператора $\tilde{K}$ (см. (6.8)).

Пусть $A(Q)$ — матрица из вторых производных функции $\tilde{\tilde{S}}$ в точке Q. Тогда, в силу (6.14),

$$A(Q)=\left\|\begin{matrix} -\dfrac{\partial\varphi_{(a)}}{\partial p_{(a)}} & -\dfrac{\partial\varphi_{(a)}}{\partial p_{(b)}} & I & -\dfrac{\partial\varphi_{(a)}}{\partial x_{(c)}} \\ -\dfrac{\partial\varphi_{(b)}}{\partial p_{(a)}} & -\dfrac{\partial\varphi_{(b)}}{\partial p_{(b)}} & 0 & -\dfrac{\partial\varphi_{(b)}}{\partial x_{(c)}} \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial\varphi_{(c)}}{\partial p_{(a)}} & \dfrac{\partial\varphi_{(c)}}{\partial p_{(b)}} & 0 & \dfrac{\partial\varphi_{(c)}}{\partial x_{(c)}} \end{matrix}\right\|. \tag{6.18}$$

Здесь I, 0 — единичные и нулевые матрицы, порядок которых ясен из этой формулы, и все производные взяты в точке Q. Отсюда находим, что

$$|\det A(Q)|=\left|\det\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi_{(b)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}{\partial p_{(b)}} & \dfrac{\partial\varphi_{(b)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}{\partial x_{(c)}} \\ \dfrac{\partial\varphi_{(c)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}{\partial p_{(b)}} & \dfrac{\partial\varphi_{(c)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}{\partial x_{(c)}} \end{matrix}\right\|\right|. \tag{6.19}$$

Последний определитель отличен от нуля всюду в Ω. Действительно, в Ω в качестве координат можно взять $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$ и $(p_{(\tilde{\alpha})}, x_{(\tilde{\beta})})$, так что якобиан

$$\left|\det\frac{\partial(p_{(\alpha)}, x_{(\alpha)})}{\partial(p_{(\tilde{\alpha})}, x_{(\tilde{\alpha})})}\right|=\left|\det\frac{\partial(x_{(b)}, p_{(c)})}{\partial(x_{(c)}, p_{(b)})}\right|\neq 0$$

всюду в Ω. Следовательно, при $r\in\Omega$

$$\det A(Q)\neq 0,\quad \operatorname{sgn} A(Q)=\text{const}. \tag{6.20}$$

Кроме того, на любом компакте $F\subset\pi(p_{(\tilde{\alpha})}, x_{(\tilde{\beta})})\,\Omega$ имеем

$$\inf_{Q\in\Omega}(\lambda_j(A(Q)))>0$$

при всех j, что следует из непрерывности собственных значений симметрической матрицы $A(Q)$ и (6.20).

Выпишем главный член асимптотики ψ при $\lambda\to\infty$. Для этого необходимо вычислить гессиан фазовой функции в стационарной точке (см. § 1). Так как порядок матрицы

$A(Q)$ равен $k+\widetilde{k}$, то

$$\frac{\pi}{4}(k-\widetilde{k}+\operatorname{sgn} A(Q))=\frac{\pi}{2}(k-\operatorname{inerdex} A(Q))=\frac{N}{2}, \qquad (6.21)$$

где N — целое число, не зависящее от Q, φ.

Далее, из (6.19) получаем

$$\sqrt{\left|\frac{d\sigma(r(Q))}{dp_{(\alpha)}\,dx_{(\beta)}}\right|}\cdot\frac{1}{\sqrt{|\det A(Q)|}}=\sqrt{\left|\frac{d\sigma(r(Q))}{dp_{(\widetilde{\alpha})}\,dx_{(\widetilde{\beta})}}\right|}, \qquad (6.22)$$

так что в силу теоремы 1.4 асимптотика интеграла ψ (см. (6.11)) имеет вид

$$\psi=\exp(i\lambda\widetilde{S}(Q))\exp\left(\frac{i\pi N}{2}\right)\sqrt{\left|\frac{d\sigma(r(Q))}{dp_{(\widetilde{\alpha})}\,dx_{(\widetilde{\beta})}}\right|}\varphi(r(Q))+$$
$$+\chi(p_{(\widetilde{\alpha})}, x_{(\widetilde{\beta})}, \lambda), \qquad (6.23)$$

где $\chi=O(\lambda^{-1})$ при $\lambda\to+\infty$.

II. О б о с н о в а н и е. Если $|x_{(\widetilde{\beta})}|>M$ и M достаточно велико, то при $\lambda\leqslant 1$

$$|D_x^{\gamma}(K\varphi)(x)|\leqslant C_{N,\gamma}\lambda^{-N}(1+|x|)^{-N}, \qquad (6.24)$$

где $N\geqslant 0$ — любое и γ — любой мультииндекс. Действительно, стационарные точки интеграла $(K\varphi)(x)$ находятся из уравнения (см. (6.6))

$$x_{(\alpha)}=\varphi_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}). \qquad (6.25)$$

Если $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})\in\operatorname{supp}\varphi(r)$, то $x_{(\beta)}$ конечно и множество всех $x_{(\beta)}$ вида (6.25) ограничено. Оценка (6.24) следует из леммы 1.5.

Устроим разбиение единицы: $\eta_1(x)+\eta_2(x)=1$, $x\in\mathbf{R}^n$, где функция $\eta_1(x)$ финитна и $\eta_1(x)\equiv 1$ при $|x|\leqslant 2M$. Соответственно положим (см. (6.11)) $\psi=$ $=\psi_1+\psi_2$. Тогда

$$|\psi_1(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})|\leqslant C_N\lambda^{-N}$$

($\lambda\geqslant 1$, N — любое). Интегрированием по частям по $dx_{(\widetilde{\alpha})}$ (см. (1.16)) нетрудно показать, что при $\lambda\geqslant 1$

$$|D^{\gamma}_{p_{(\widetilde{\alpha})}}D^{\gamma'}_{x_{(\widetilde{\beta})}}\psi_1|\leqslant C_{N,\gamma,\gamma'}\lambda^{-N}(1+|p_{(\widetilde{\alpha})}|)^{-N}(1+|x_{(\widetilde{\beta})}|)^{-N},$$

где γ, γ', $N\geqslant 0$ — любые. Следовательно, функция

$$F^{-1}_{\lambda,\, p_{(\widetilde{\alpha})}\to x_{(\widetilde{\alpha})}}\psi_1\in O^{+}_{-k}(\mathbf{R}^n_x)$$

при любом $k > 0$ (т. е. имеет порядок $O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda \to +\infty$). Поэтому остается исследовать интеграл ψ_1, который берется в конечных пределах по всем переменным $dp_{(\alpha)}dx_{(\widetilde{\alpha})}$. Но в этом интеграле при $|p_{(\widetilde{\alpha})}| \geqslant M$ нет стационарных точек, лежащих на носителе подынтегральной функции, если M достаточно велико. В силу леммы 1.5 имеем

$$|D^{\gamma}_{p_{(\widetilde{\alpha})}}\psi_1| \leqslant C_{N,\gamma}(1+|p_{(\widetilde{\alpha})}|)^{-N}\lambda^{-N}$$

при $|p_{(\widetilde{\alpha})}| \geqslant 2M$, где $N \geqslant 0$, γ — любые. При $|p_{(\widetilde{\alpha})}| \leqslant \leqslant 2M$ применима теорема 1.4, что в сочетании с (6.24) дает (6.10).

Лемма 6.4. *Пусть карта Ω диффеоморфно проектируется на лагранжевы плоскости $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$ и $(p_{(\widetilde{\alpha})}, x_{(\widetilde{\beta})})$. Тогда величина*

$$\operatorname{inerdex}\frac{\partial x_{(\alpha)}(r)}{\partial p_{(\alpha)}} - \operatorname{inerdex}\frac{\partial x_{(\widetilde{\alpha})}(r)}{\partial p_{(\widetilde{\alpha})}} \pmod 4$$

постоянна для всех неособых точек $r \in \Omega$.

Доказательство. Применяя (6.5) к выражениям $(K(\Omega;\ p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})\,\varphi)(x)$, $(K(\Omega;\ p_{(\widetilde{\alpha})},\ x_{(\widetilde{\beta})})\,\varphi)(x)$ в неособой точке $r \in \Omega$ и сравнивая с (6.7), получаем, что

$$m = \operatorname{inerdex}\frac{\partial x_{(\alpha)}}{\partial p_{(\alpha)}} - \operatorname{inerdex}\frac{\partial x_{(\widetilde{\alpha})}}{\partial p_{(\widetilde{\alpha})}} + 4k,$$

где k — целое число. В силу леммы 6.3 эта величина не зависит от r.

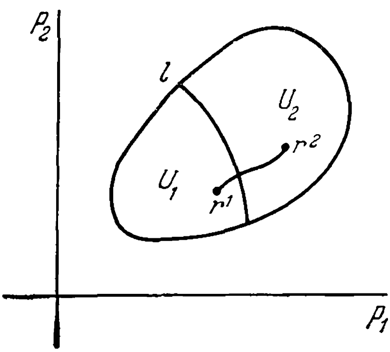

Рис. 8.

Поясним утверждение леммы 6.4. Пусть $n = 2$ (для простоты) и особая карта Ω диффеоморфно проектируется на плоскость p. Пусть проекция l цикла особенностей $\Sigma(\Lambda^2)$ разбивает проекцию U карты Ω на две области U_1 и U_2 (рис. 8). Возьмем любые две точки r^1, $r^2 \in U$ такие, что $r^j \in U_j$, и рассмотрим целое число

$$m = \operatorname{inerdex}\frac{\partial x(r^2)}{\partial p} - \operatorname{inerdex}\frac{\partial x(r^1)}{\partial p}$$

Это число не зависит от выбора точек r^1, r^2. Действительно, матрица $\frac{\partial x(p)}{\partial p}$ (здесь $x = x(p)$ — уравнение карты Ω) не выраждена при $p \notin l$ и из связности области U_1 вытекает, что $\operatorname{inerdex} \partial x(p)/\partial p \equiv \equiv \mathrm{const}$ при $p \in U_1$. Аналогично, $\operatorname{inerdex} \partial x(p)/\partial p \equiv \mathrm{const}$ при $p \in U_2$.

Пусть теперь та же карта Ω диффеоморфно проектируется на плоскость (p_1, x_2), и пусть проекция $\tilde{l}$ цикла особенностей точно так же разбивает проекцию $\tilde{U}$ карты Ω на две области $\tilde{U}_1$ и $\tilde{U}_2$. Рассмотрим целое число

$$\tilde{m} = \operatorname{inerdex} \frac{\partial x_2(r^2)}{\partial p_2} - \operatorname{inerdex} \frac{\partial x_2(r^1)}{\partial p_2}$$

где точка $r^1 \in \tilde{U}_1$, точка $r^2 \in \tilde{U}_2$. Это число не зависит от выбора точек r^1, r^2. В данном случае утверждение леммы 6.4 состоит в том, что числа m и $\tilde{m}$ совпадают по модулю 4:

$$m = \tilde{m} \pmod 4.$$

Таким образом, целое число $\frac{\partial x_{(\alpha)}(r^2)}{\partial p_{(\alpha)}} - \frac{\partial x_{(\alpha)}(r^1)}{\partial p_{(\alpha)}}$ не зависит от выбора фокальных координат в особой карте.

Отметим еще одно важное следствие из леммы 6.4. Если в особой карте Ω можно выбрать фокальные координаты $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$, то матрица $\partial x_{(\alpha)}/\partial p_{(\alpha)}$ симметрична. Этот факт является следствием того, что многообразие Λ^n лагранжево, и не имеет места для произвольных многообразий. Пусть, например, карта Ω диффеоморфно проектируется на p-пространство; тогда уравнение этой карты имеет вид $x = -\partial S(p)/\partial p$. Следовательно, $\partial x/\partial p = -\partial^2 S(p)/\partial p^2$, и из симметричности матрицы S''_{pp} вытекает симметричность матрицы $\partial x/\partial p$ в этом случае.

Определение лагранжева многообразия формально никак не связано с динамикой; то же самое относится и к понятию предканонического оператора. Однако при исследовании асимптотики решений дифференциальных уравнений, содержащих большой параметр, возникают лагранжевы многообразия, инвариантные относительно динамики, т. е. такие лагранжевы многообразия, которые расслаиваются на траектории гамильтоновой системы, ассоциированной с уравнением (см. § 3). Для таких многообразий можно более наглядно пояснить, что такое предканонический оператор.

Пусть в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ задано $(n-1)$-мерное лагранжево многообразие Λ^{n-1}, а многообразие Λ^n — это трубка траекторий некоторой гамильтоновой системы, выпущенных при $t = 0$ из начального многообразия Λ^{n-1}. Будем предполагать, что условия предложения 4.19 выполнены; тогда Λ^n — лагранжево многообразие. В качестве функции $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda^n)$ возьмем такую функцию, которая тождественно равна нулю вне некоторой меньшей трубки траекторий T, лежащей на Λ^n; для наглядности мы апеллируем к весьма условному рис. 9.

Точки, лежащие на Λ^n, имеют вид $x = x(t, \alpha)$, $p = p(t, \alpha)$, где t — параметр вдоль траектории (время), а $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ — локальные координаты на начальном многообразии Λ^{n-1} (оно задается уравнениями вида $x = x^0(\alpha)$, $p = p^0(\alpha)$). В качестве объема $d\sigma$ выберем объем, инвариантный относительно фазового потока; положим для определенности $d\sigma = dt\, d\alpha$. Далее, пусть многообразие Λ^n (оно же карта Ω) диффеоморфно проектируется на p-пространство. Будем предполагать, что цикл особенностей $\Sigma(\Lambda^n)$ есть гладкая кривая и что ее проекция на R^n_x — каустика семейства лучей $x = x(t, \alpha)$ — также является гладкой кривой (это предположение относится к изображенному на рис. 9 случаю $n = 2$). Возьмем карту Ω_1, которая диффеоморфно проектируется на R^2_x и лежит, для определенности, на «верхнем листе» многообразия Λ^2; отмеченную точку r^0 также возьмем на верхнем листе.

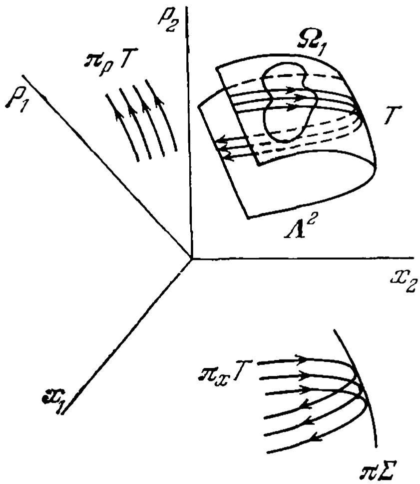

Рис. 9.

Предканонический оператор K_1, отвечающий карте Ω, возьмем в виде (6.2):

$$(K_1\varphi(r))(x) = \sqrt{\left|\frac{d\sigma}{dx}\right|}\exp[i\lambda S(r)]\,\varphi(r), \qquad r = (x, p).$$

Здесь $S(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \langle p, dx\rangle$ и, как обычно, r — точка лагранжева многообразия с координатами (x, p). Учитывая выбор объема $d\sigma$, получаем

$$(K_1\varphi(r))(x) = \sqrt{\left|\frac{J(0, \alpha)}{J(t, \alpha)}\right|}\exp[i\lambda S(r)]\,\varphi(r), \qquad r = (x, p).$$

Здесь $J(t,\alpha) = \det\dfrac{\partial x(t,\alpha)}{\partial(t,\alpha)}$.

Фазовая функция S достаточно подробно обсуждалась в предыдущих параграфах; теперь мы более подробно рассмотрим предэкспоненту. Далее, установим связь между предканоническим оператором и формальными асимптотическими решениями уравнения вида (3.1). Эта предэкспонента $\sqrt{\left|\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\right|}$ связана со следующими геометрическими объектами: с трубкой траекторий T в фазовом пространстве, с трубкой лучей $\pi_x T$ в x-представлении ($\pi_x T$ — проекция трубки T на R_x^n) и с трубкой лучей $\pi_p T$ в p-представлении (это проекция трубки T на p-пространство).

1. Пусть $L(x, p)$ — гамильтониан рассматриваемой динамической системы, $L(x, p) \equiv 0$ на Λ^n, и пусть, для простоты, соответствующий λ-п. д. о. симметричен (см. (3.40)). Тогда при любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ функция $(K\varphi)(x)$ есть ф. а. решение уравнения (3.1) с точностью до $O(\lambda^{-1})$ при $x \in \pi_x\Omega$. Это вытекает из теоремы 3.12.

2. По построению функция $\varphi(r)$ локализована в том смысле, что $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в трубке траекторий T. Из этого факта и определения предканонического оператора вытекает, что функция $(K\varphi)(x)$ также локализована, причем $\operatorname{supp} K\varphi$ содержится в проекции $\pi_x T$ трубки траекторий T.

3. Перейдем в p-представление, т. е. рассмотрим предканонический оператор K_2, отвечающий той же карте Ω_1, но в p-представлении (см. (6.3)). Имеем, с точностью до численного множителя,

$$(K_2\varphi(r))(x) = F^{-1}\left[\varphi(r)\sqrt{\left|\frac{d\sigma}{dp}\right|}\exp(i\lambda\widetilde{S}(r))\right](x),$$

где $F^{-1} = F^{-1}_{\lambda, p\to x}$,

$$\widetilde{S}(r) = \int_{r^0}^{r}\langle p', dx'\rangle - \langle x(p), p\rangle.$$

Учитывая выбор объема $d\sigma$, получаем

$$(K_2\varphi(r))(x) = F^{-1}\left[\varphi(r)\sqrt{\left|\frac{\widetilde{J}(0, \alpha)}{\widetilde{J}(t, \alpha)}\right|}\exp(i\lambda\widetilde{S}(r))\right](x),$$

где $\widetilde{J}(t, \alpha) = \dfrac{\partial p(t, \alpha)}{\partial(t, \alpha)}$.

Как показано в лемме 6.2, $(K_2\varphi)(x) = c\,(K_1\varphi)(x) + O(\lambda^{-1})$, $c = \mathrm{const}$. Более того, вне проекции $\operatorname{supp}\varphi$ на x-пространство выполняется оценка

$$|(K_2\varphi)(x)| \leqslant c_N\lambda^{-N}(1 + |x|)^{-N}$$

при любом целом N (лемма 1.5), где c_N — постоянная, т. е. функция $(K_2\varphi)(x)$ убывает при $|x| \to \infty$ и при $\lambda \to \infty$ быстрее любой степени $|x|$ и быстрее любой степени λ.

Назовем *p-представлением* функции ее x-преобразование Фурье. Как видно из сравнения этих приведенных выше формул, если формальное асимптотическое решение в x-представлении локализовано в окрестности проекции $\pi_x T$ трубки траекторий T, то в p-представлении это же ф. а. решение локализовано в окрестности p-проекции $\pi_p T$ трубки T (рис. 9).

4. На языке геометрической оптики величина $\left|\dfrac{d\sigma}{dx}\right|$ есть интенсивность трубки лучей [32]. Перенося эту же терминологию в p-представление, получаем, что интенсивность трубки лучей

в p-представлении есть $\left|\frac{d\sigma}{dp}\right|$, что лишний раз подтверждает симметрию между x- и p-представлениями.

Наконец, в точках, лежащих на каустике $\pi_x T$, интенсивность бесконечна (так как $d\sigma/dx = 0$ в x-представлении). Однако интенсивность в p-представлении конечна, и потому естественно перейти в p-представление при отыскании асимптотики решений.

§ 7. Индекс кривой на лагранжевом многообразии

Проблема построения формальных асимптотических решений в целом, т. е. сшивание такого решения из локальных, приводит к понятию индекса пути на лагранжевом многообразии. В этом параграфе приведено определение индекса, его основные свойства и геометрическая интерпретация.

1. Определение индекса. Пусть Λ^n — лагранжево многообразие, $\{\Omega_i\}$ — канонический атлас на Λ^n. Введем

Условие 7.1.

$$\dim \Sigma\,(\Lambda^n) \leqslant n-1.$$

Это условие выполняется для лагранжевых многообразий общего положения (теорема 7.6).

Пусть канонические карты Ω_i, Ω_j имеют фокальные координаты $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$ и $(p_{(\tilde{\alpha})}, x_{(\tilde{\beta})})$ соответственно, и пусть $r \in \Omega_i \cap \Omega_j$ — неособая точка.

Определение 7.2. *Индексом пары карт* Ω_i, Ω_j *называется число*

$$\gamma\,(\Omega_i \cap \Omega_j) = \operatorname{inerdex} \frac{\partial x_{(\alpha)}(r)}{\partial p_{(\alpha)}} - \operatorname{inerdex} \frac{\partial x_{(\tilde{\alpha})}(r)}{\partial p_{(\tilde{\alpha})}}. \qquad (7.1)$$

Если $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$, то $\gamma\,(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0$.

Предложение 7.3. *Индекс γ есть одномерный целочисленный коцикл* mod 4 *на* Λ^n.

Доказательство. В силу леммы 6.4 число $\gamma\,(\Omega_i \cap \Omega_j)$ не зависит ни от выбора r, ни от выбора локальных координат в картах Ω_i, Ω_j по mod 4, так что γ определяет 1-коцепь на Λ. В силу (7.1) γ есть 1-коцикл.

Если имеется цепочка карт Ω_{i_0}, Ω_{i_1}, Ω_{i_2}, Ω_{i_s} на Λ^n (т. е. пересечения $\Omega_{i_j} \cap \Omega_{i_{j+1}}$ непусты), то *индексом этой цепочки* мы назовем число

$$\gamma\,(\Omega_{i_0}, \Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_s}) = \\ = \gamma\,(\Omega_{i_0} \cap \Omega_{i_1}) + \gamma\,(\Omega_{i_1} \cap \Omega_{i_2}) + \ldots + \gamma\,(\Omega_{i_{s-1}} \cap \Omega_{i_s}). \qquad (7.2)$$

Пусть $l(r', r'')$ — гладкая кривая на Λ^n, $\partial l = r'' - r'$ и r', r'' — неособые точки. Введем *индекс пути* $\operatorname{ind} l$. Это понятие было введено одним из авторов настоящей книги [38], [39].

Определение 7.4. Пусть $l \subset \Omega$, где Ω — каноническая карта с фокальными координатами $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$. Тогда

$$\operatorname{ind} l(r', r'') = \operatorname{inerdex} \frac{\partial x_{(\alpha)}(r'')}{\partial p_{(\alpha)}} - \operatorname{inerdex} \frac{\partial x_{(\alpha)}(r')}{\partial p_{(\alpha)}}. \tag{7.3}$$

Если Ω — неособая карта, то мы полагаем $\operatorname{ind} l = 0$.

Для произвольного пути *индекс* определяется по аддитивности:

$$\operatorname{ind} l(r', r'') = \sum_{j=0}^{s} \operatorname{ind} l(r^j, r^{j+1}). \tag{7.4}$$

Здесь $r^0 = r'$, $r^{s+1} = r''$, и точки r^0, r^1, разбивают l на пути $l(r^k, r^{k+1})$, удовлетворяющие условиям определения 7.4.

Заметим, что *индекс кривой* $l(r', r'')$ зависит только от структуры кривой l в сколь угодно малой окрестности пересечения этой кривой с циклом особенностей $\Sigma(\Lambda^n)$. Действительно, если удалить из кривой l любую ее дугу $\tilde{l}$, лежащую в неособой карте, то индекс полученной кривой будет равен $\operatorname{ind} l$; это следует из того, что $\operatorname{ind} \tilde{l} = 0$, и из аддитивности индекса.

Предложение 7.5. *Индекс* $\operatorname{ind} (\operatorname{mod} 4)$ *пути на лагранжевом многообразии является целочисленным гомотопическим инвариантом.*

Наметим доказательство. Если путь l лежит в одной канонической карте, то, в силу леммы 6.4 $\operatorname{ind} l$ не зависит от выбора фокальных координат в Ω. Если $l \in \Omega_i \cap \Omega_j$, то $\operatorname{ind} l$ не зависит от того, определим ли мы его с помощью карты Ω_i или карты Ω_j (предложение 7.3). Отсюда с помощью стандартной техники [65] можно получить, что для произвольного пути $\operatorname{ind} l$ не зависит от способа разбиения пути l. Далее, если l лежит в одной карте U, то при малой деформации пути его индекс, очевидно, не меняется; более того, один из концов (или даже оба) можно непрерывно двигать внутри U, оставляя концы неособыми. Следовательно, $\operatorname{ind} l$ есть гомотопический инвариант. Строгое доказательство см. в [2], [45].

2. Некоторые свойства индекса.

Теорема 7.6 [2]. *Сколь угодно малым поворотом лагранжево многообразие Λ^n можно привести в «общее положение» относительно проектирования $\pi(x)$ на $\mathbf{R}_x^n$, так что будут справедливы следующие утверждения:*

1) *$\Sigma(\Lambda^n)$ состоит из открытого $(n-1)$-мерного многообразия $\Sigma'(\Lambda^n)$, на котором ранг $d\pi(x)$ равен $n-1$, и границы $\Sigma(\Lambda^n) - \Sigma'(\Lambda^n)$ имеют размерности $< n-2$.*

Поэтому $\Sigma(\Lambda^n)$ определяет $(n-1)$-мерный (неориентированный) цикл в Λ^n.

2) *Этот цикл $\Sigma(\Lambda^n)$ лежит в Λ^n двусторонне.*

Положительную сторону $\Sigma(\Lambda^n)$ можно выбрать следующим образом.

3) *В окрестности точки $M \in \Sigma(\Lambda^n)$ многообразие Λ^n задается n уравнениями вида*

$$x_k = x_k(p_k, x_{\hat{k}}), \qquad p_{\hat{k}} = p_{\hat{k}}(p_k, x_{\hat{k}}),$$

где $\hat{k} = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$ при некотором k, $1 \leqslant k \leqslant n$. В окрестности такой точки $\Sigma(\Lambda^n)$ задается уравнением $\partial x_k/\partial p_k = 0$.

4) *При переходе через $\Sigma'(\Lambda^n)$ величина $\partial x_k/\partial p_k$ меняет знак. За положительную сторону $\Sigma'(\Lambda^n)$ примем ту, где $\partial x_k/\partial p_k > 0$.*

5) *Это определение положительной стороны корректно, т. е. не зависит от того, какой из координатных систем p_k мы пользуемся.*

Начиная с этого места, мы предполагаем, что Λ^n — лагранжево многообразие общего положения.

Доказательство теоремы см. [2].

Пусть концы кривой $l(r', r'')$ неособые, т. е. $r', r'' \notin \Sigma(\Lambda^n)$ и $l(r', r'')$ трансверсальна циклу особенностей.

Определение 7.7 [2]. *Индексом кривой* $\operatorname{ind}\gamma(M_1, M_2)$ *на лангранжевом многообразии* называется индекс пересечения кривой $\gamma(M_1, M_2)$ с циклом особенностей $\Sigma'(\Lambda^n)$, т. е. число ν_+ точек перехода с отрицательной стороны на положительную минус число ν_- точек перехода с положительной стороны на отрицательную:

$$\operatorname{ind}\gamma(M_1, M_2) = \nu_+ - \nu_-. \tag{7.5}$$

Предложение 7.8. *Определения индекса 7.4 и 7.7 совпадают.*

Действительно, рассмотрим кривую $l\,[r', r'']$ такую, что:

1) l лежит внутри особой карты Ω;

2) точки r' r'' лежат по разные стороны от цикла особенностей;

3) l трансверсальна к Σ' (Λ^n) и пересекается с Σ' (Λ^n) ровно в одной точке.

Тогда, по определению 7.7, $\operatorname{ind} l = \pm 1$; пусть $\operatorname{ind} l = +1$ для определенности. Выберем в Ω фокальные координаты так, как это сделано в теореме 7.6, п. 3), $k = 1$. Тогда

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(r'') = +1, \qquad \operatorname{sgn} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(r') = -1,$$

$$\operatorname{inerdex} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(r'') - \operatorname{inerdex} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(r') = +1,$$

т. е. значения индекса $\operatorname{ind} l$, вычисленные с помощью определений 7.4 и 7.7, совпадают.

Аналогично рассматривается случай $\operatorname{ind} l = -1$. Отсюда следует совпадение определений 7.4 и 7.7.

Из известных топологических свойств индекса пересечения следует

Теорема 7.9. *Индекс* ind *пути на лагранжевом многообразии общего положения является целочисленным гомотопическим инвариантом.*

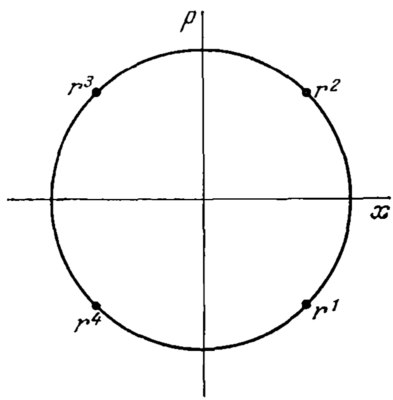

Рис. 10.

В работе [2] показано, что индекс замкнутой кривой на лагранжевом многообразии есть характеристический класс Грассмана. В настоящем параграфе мы ограничиваемся тем, что приводим простейшие определения и простейшие вычислительные формулы для индекса; различные алгебраические и топологические вопросы, связанные с понятием индекса ind, рассмотрены в работах [2], [8], [45]—[48], [64], [85].

Вычисление индекса пути, лежащего на таком лагранжевом многообразии, является простой задачей. Пусть, например, Λ^1 — окружность $x^2 + p^2 = 1$ (рис. 10). Вычислим индексы путей $l_1 = l(r^1, r^2)$, $l_2 = l(r^2, r^3)$, $l_3 = l(r^3, r^4)$, $l_4 = l(r^4, r^1)$ и $\operatorname{ind} \Lambda^1$ (окружность ориентирована против часовой стрелки). В точках r^1, r^2, r^3, r^4 имеем $\operatorname{sgn} \frac{\partial x}{\partial p} = +1, -1, +1, -1$ соответственно. Поэтому $\operatorname{ind} l_1 = +1$. Далее, путь l_2 лежит в неособой карте, так что $\operatorname{ind} l_2 = 0$; при этом совершенно безразлично, какие знаки имеет функция $\partial x/\partial p$ на концах пути l_2. Аналогично, $\operatorname{ind} l_3 = +1$; $\operatorname{ind} l_4 = 0$, $\operatorname{ind} \Lambda^1 = +2$.

Индекс пути на лагранжевом многообразии определяется вне всякой связи с динамикой; индекс является топологическим инвариантом и никак не связан с траекториями гамильтоновой системы. Однако лагранжевы многообразия, возникающие при отыскании асимптотики решений дифференциальных уравнений, всегда связаны с некоторой гамильтоновой системой и расслаиваются на траектории этой системы. Поэтому наибольший интерес для задач математической физики представляют лагранжевы многообразия, инвариантные относительно классической динамики, и мы рассмотрим примеры именно такого рода.

3. Примеры.

Пример 7.10. На плоскости $\mathbf{R}^2$ лагранжево многообразие Λ^1 общего положения — это гладкая кривая, касательная к которой параллельна оси p только в конечном числе точек.

Пример 7.11. Рассмотрим уравнение эйконала

$$(\nabla S(x))^2 = 1 \tag{7.6}$$

на плоскости $x = (x_1, x_2)$ и задачу Коши

$$S|_\Gamma = 0, \qquad \left.\frac{\partial S}{\partial n}\right|_\Gamma = 1, \tag{7.7}$$

где Γ — парабола $x_2^2 = 2ax_1$ $(a > 0)$, $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали к Γ. Система Гамильтона имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = 2p, \quad \frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 2. \tag{7.8}$$

Решая задачу Коши, получаем

$$p_1 = -\frac{a}{(a^2+\alpha^2)^{1/2}}, \quad p_2 = \frac{\alpha}{(a^2+\alpha^2)^{1/2}}, \tag{7.9}$$

$$x_1 = -\frac{2at}{(a^2+\alpha^2)^{1/2}} + \frac{\alpha^2}{2a}, \quad x_2 = \frac{2at}{(a^2+\alpha^2)^{1/2}} + \alpha, \quad s = 2t.$$

Эти уравнения дают нам параметрическое представление лагранжева многообразия Λ^2 $(-\infty < t,\ \alpha < +\infty)$. Это многообразие диффеоморфно проектируется на плоскость $(x_1,\ p_2)$, так как

$$\det\frac{\partial(x_1,\ p_2)}{\partial(\alpha,\ t)} = 2a^3(a^2+\alpha^2)^{-2} \neq 0,$$

и является C^∞-многообразием.

Цикл особенностей Σ находится из уравнения

$$\det\frac{\partial(x_1,\ x_2)}{\partial(\alpha,\ t)} = 0,$$

что дает нам следующее соотношение между α и t:

$$2a^2t + (a^2 + \alpha^2)^{3/2} = 0.$$

Отсюда получаем уравнение Σ:

$$x_1 = a + \frac{3\alpha^2}{2a}, \qquad x_2 = \frac{\alpha^3}{a^2},$$

$$p_1 = -\frac{a}{\sqrt{a^2+\alpha^2}}, \qquad p_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{a^2+\alpha^2}}, \qquad -\infty < \alpha < +\infty.$$

Так как $\frac{dp_2}{d\alpha} = a^2(a^2 + \alpha^2)^{3/2} \neq 0$, то Σ — кривая класса C^∞ и многообразие Λ^2 находится в общем положении Проекция $\pi\Sigma$ цикла Σ на плоскость $(x_1,\ x_2)$ есть полукубическая парабола

$$\Pi\Sigma: x_2^2 = \frac{8}{27a}(x_1 - a)^3 \tag{7.10}$$

и является эволютой исходной параболы. Последний факт следует из общих соображений (см. пример 3.17).

Из (7.9) получаем, что Λ^2 задается уравнениями

$$x_2 = \frac{p_2}{(1-p_2^2)^{1/2}}\left(a - x_1 + \frac{ap_2^2}{2(1-p_2^2)}\right),$$

$$p_1 = -(1-p_2^2)^{1/2}, \tag{7.11}$$

где $x_1 \in \mathbf{R}$, $-1 < p_2 < 1$. Отсюда находим, что на Λ^2

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_2} = (1-p_2^2)^{-5/2}\left(a - x_1 + x_1p_2^2 + \frac{ap_2^2}{2}\right). \tag{7.12}$$

Вычислим индекс двух конкретных кривых на Λ^2 (рис. 11),

1) Кривая $l(r_1, r_2)$ задается уравнениями (7.9), где $\alpha = 0$, $-2a \leqslant t \leqslant 0$, т. е. $p_1 = -1$, $p_2 = 0$, $x_1 = -2t$, $x_2 = 0$ и точке r_1 отвечает $t = 0$. Проекция l_1 на x-плоскость есть отрезок $[0, 2a]$. Из (7.12) находим, что

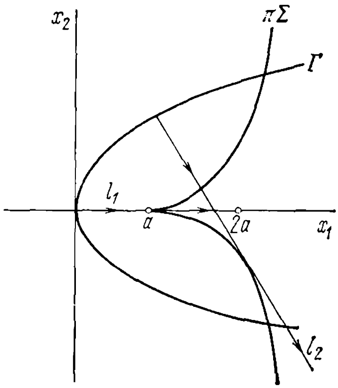

Рис. 11.

$$\left.\frac{\partial x_2}{\partial p_2}\right|_{r_1} = a > 0,$$

$$\left.\frac{\partial x_2}{\partial p_2}\right|_{r_2} = -a < 0.$$

Следовательно, $\operatorname{ind} l = -1$.

2) Кривая $l(r_1, r_2)$ задается уравнениями (7.9), где $\alpha = \alpha_0 > 0$ и $-t_0 \leqslant t \leqslant 0$. Проекция l_1 на x_2-плоскость есть отрезок πl с началом в точке $x_1 = \alpha^2/2a$, $x_2 = \alpha$, лежащей на верхней половине исходной параболы, и с концом в точке

$$x_1 = \frac{\alpha^2}{2a} + \frac{2at}{(a^2 + \alpha^2)^{1/2}}, \quad x_2 = \frac{2\alpha t_0}{(a^2 + \alpha^2)^{1/2}} + \alpha.$$

Выберем $t_0 > 0$ достаточно большим; тогда отрезок πl будет касаться кривой $\pi\Sigma$ и точки πr_1, πr_2 будут лежать по разные стороны от точки касания. Из (7.12) находим, что $\left(p_2 = \frac{\alpha}{(\alpha^2 + x^2)^{1/2}}\right)$

$$\left.\frac{\partial x_2}{\partial p_2}\right|_{r_1} = a\,(1 - p_2^2)^{-5/2} > 0, \quad \left.\frac{\partial x_2}{\partial p_2}\right|_{r_2} = $$

$$= (1 - p_2^2)^{-5/2}\left(a - \frac{2a^3 t_0}{(a^2 + \alpha^2)}\right) < 0$$

при $t_0 \gg 1$. Следовательно, $\operatorname{ind} l = -1$.

Таким образом, индекс луча, который касается каустики $\pi\Sigma$, равен ± 1 (в зависимости от ориентации луча).

Заметим еще, что особенность каустики («клюв») в данном примере отвечает точке, в которой кривизна волнового фронта максимальна. Действительно, вершина «клюва» расположена в центре круга кривизны, который касается вершины параболы. Если вместо параболы взять гладкую кривую Г, то точкам максимума кривизны этой кривой также будут отвечать «клювы» каустики.

С точки зрения геометрической оптики парабола Г является волновым фронтом построенного семейства лучей (так как эйконал $S(x)$ постоянен на Г). Кривая $\pi\Sigma$ является каустикой этого семейства лучей. Каустика $\pi\Sigma$ имеет особенность («клюв») в точке $x_1 = a$, $x_2 = 0$ (рис. 11).

4. Лагранжевы особенности (каустики). Структура цикла особенностей $\Sigma(\Lambda^n)$ лагранжевых многообразий общего положения исследована в работе [3], и, в частности, получена полная классификация особенностей при $n < 6$. Сформулируем эти результаты для лагранжевых многообразий размерностей $n = 1, 2, 3$.

Пусть, как обычно, $(\alpha) \cup (\beta) = \{1, \ldots, n\}$ есть разбиение множества $(1, \ldots, n)$ на пересекающиеся. Обозначим символом $S(x_{(\beta)}, p_{(\alpha)})$ производящую функцию лагранжева многообразия Λ^n; его уравнение задается формулами

$$p_{(\beta)} = \frac{\partial S}{\partial x_{(\beta)}}, \qquad x_{(\alpha)} = -\frac{\partial S}{\partial p_{(\alpha)}}. \tag{7.13}$$

Т е о р е м а 7.12 [3]. *Лагранжево многообразие Λ^n можно малым шевелением (в классе лагранжевых отображений) превратить в такое, что в окрестности каждой из своих точек оно будет приводиться лагранжевой эквивалентностью к одной из следующих нормальных форм:*

при $n = 1$

$$A_1:\quad S = p_1^2,\qquad A_2:\quad S = \pm p_1^3;$$

при $n = 2$, кроме того, еще

$$A_3:\quad S = \pm p_1^4 + x_2 p_1^2;$$

при $n = 3$, кроме того, еще

$$A_4:\quad S = \pm p_1^5 + x_3 p_1^3 + x_2 p_1^2,$$
$$D_4:\quad S = \pm p_1^2 p_2 \pm p_2^3 + x_3 p_2^2.$$

(Здесь предполагается, что начало координат перенесено в рассматриваемую точку.)

При $n = 1$, в случае A_1, лагранжево многообразие в окрестности точки $x_1 = 0$, $p_1 = 0$ задается уравнением $x_1 = -2p_1$ и диффеоморфно проектируется на ось x_1. Аналогично, точка типа A_1 не принадлежит циклу особенностей при всех n.

Пусть $n = 1$, начало координат — точка типа A_2, Ω — ее малая окрестность. Тогда уравнение многообразия имеет вид

$$x_1 = \mp 3p_1^2$$

(рис. 3). Если записать уравнение в виде $p_1 = \frac{\partial S(x_1)}{\partial x_1}$, то $S(x_1) \sim \text{const}\,(\mp x_1)^{3/2}$ при $x_1 \to 0$.

При $n = 2$, для точки типа A_3, уравнение лагранжева многообразия имеет вид (в случае знака плюс)

$$x_1 = -4p_1^3 - 2p_1x_2, \quad p_2 = p_1^2$$

в окрестности начала координат. Проекция $\pi\Sigma(\Lambda^2)$ цикла особенностей на x_2-плоскость имеет вид

$$27x_1^2 = 8x_2^3, \tag{7.14}$$

т. е. это кривая типа «клюва». Локально, при малых x, эта кривая устроена так же, как проекция цикла особенностей в примере 7.11. Точно так же устроена кривая $\pi\Sigma(\Lambda^2)$ в случае знака минус.

5. Связь с индексом Морса. Рассмотрим гамильтонову систему

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x} \tag{7.15}$$

с вещественным гамильтонианом $H \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, и пусть $\{x(t, y), p(t, y)\}$ — решение лагранжевой задачи Коши

$$x|_{t=0} = x^0(y), \quad p|_{t=0} = p^0(y), \qquad y \in U. \tag{7.16}$$

Здесь U — область в $\mathbf{R}_y^n$ и $\Lambda^n = \{(x, p): x = x^0(y), p = p^0(y), y \in U\}$ есть лагранжево C^∞-многообразие размерности n. Будем предполагать также, что выполнено усиленное условие Лежандра:

$$\frac{\partial^2 H(x, p)}{\partial p^2} > 0, \qquad (x, p) < \mathbf{R}^{2n}. \tag{7.17}$$

Пусть $x(y; 0, t)$ есть траектория $x = x(y,\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$,

$$J(\tau, y) = \det \frac{\partial x(\tau, y)}{\partial y}. \tag{7.18}$$

Точки на этой траектории, в которых якобиан обращается в нуль, называются *фокальными*; кратность фокальной точки, по определению, равна кратности нуля якобиана.

Фокальная точка называется *простой*, если якобиан в этой точке имеет простой нуль. Морс [83] доказал, что кратность нуля якобиана $J(t, y^0)$ в фокальной точке равна корангу матрицы $\dfrac{\partial x(t^0, y^0)}{\partial y}$.

Морс [83] ввел понятие индекса μ траектории l: $x = x(y; 0, t)$ с нефокальными концами. Индекс Морса μ равен числу фокальных точек на траектории l с учетом их кратности. Имеется обширная литература, связанная с индексом Морса ([44], [53] и др.).

Покажем, что индекс Морса μ траектории l равен индексу ind траектории, лежащей на некотором лагранжевом многообразии размерности $n+1$ в $(2n+2)$-мерном фазовом пространстве, проекция которой на $\mathbf{R}^n_x$ совпадает с траекторией l.

Рассмотрим $(2n+2)$-мерное фазовое пространство $\mathbf{R}^{2n+2} = \{(x_0, x); (p_0, p)\}$ и множество

$$M^{n+1} = \{(x_0, p_0, x, p): x_0 = \tau,\ p_0 = -H(x, p),\\ x = x(\tau, y),\ p = p(\tau, y);\ 0 \leqslant \tau \leqslant t,\ y \in \Omega\}.$$

Если выполнены условия предложения 4.19 (т. е., в частности, $H(x^0(y), p^0(y)) = M \equiv \mathrm{const}$), то M^{n+1} есть лагранжево C^∞-многообразие в $\mathbf{R}^{2n+2}$ размерности $n+1$. Рассмотрим на M^{n+1} кривую γ_t:

$$\gamma_t = \{(x_0, p_0, x, p): x_0 = \tau,\ p_0 = -H(x, p),\\ x = x(\tau, y^0),\ p = p(\tau, y^0),\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\}.$$

Теорема 7.13. *Пусть выполнены сформулированные выше условия. Тогда*

$$\operatorname{ind}\gamma_t = \mu(r(y^0, 0, t)). \tag{7.19}$$

Доказательство. Если $J(t^0, y^0) \neq 0$, то точка на M^{n+1}, в которой $x_0 = t^0$, $x = x(t^0, y^0)$, является неособой относительно проектирования на $\mathbf{R}^{n+1}_{x_0, x}$. На траектории $x(y; 0, t)$ имеется не более чем конечное число фокальных точек [44]. В силу аддитивности индексов ind μ, достаточно рассмотреть случай, когда траектория $r(y^0, 0, t)$ содержит ровно одну фокальную точку $x = x(t^0, y^0)$. Мы ограничимся случаем простой фокальной точки; общий случай рассмотрен в [38], гл. 8, § 2. Покажем, что $\operatorname{ind}\gamma_t = +1$; тем самым теорема будет доказана.

Так как ранг матрицы $\dfrac{\partial x(t^0, y^0)}{\partial y}$ равен $n-1$, то можно, не ограничивая общности, считать, что $\det \dfrac{\partial x'(t^0, y^0)}{\partial y'} \neq 0$, где $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, $y' = (y_2, \ldots, y_n)$. Локальными координатами на M^{n+1} являются (t, y). В окрестности точки $Q^* \in M^{n+1}$, отвечающей (t^0, y^0), в качестве части локальных координат можно взять (x', t). Так как M^{n+1} лагранжево, то, в силу леммы 4.5, в качестве локальных координат в окрестности точки Q^* можно взять (t, p_1, x'). Уравнение цикла особенностей $\Sigma(M^{n+1})$ в окрестности точки Q^* имеет, таким образом, вид $\partial x_1/\partial p_1 = 0$, где $x_1 = x_1(x^0, p_1, x')$. Точка Q^* принадлежит циклу особенностей, так как его уравнение можно задать в виде $\det \dfrac{\partial (x^0, x)}{\partial (t, y)} = 0$, т. е. $J(t, y) = 0$.

Введем вместо y параметры $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\{y = y^0\} \leftrightarrow \{\alpha = 0\}$ такие, что $\det \left.\dfrac{\partial \alpha}{\partial y}\right|_{\alpha=0} \neq 0$. Тогда $J(t^0, 0)$ будет иметь простой нуль. Именно, положим при малых $|y - y^0|$

$$p_1(t^0, y) = \alpha_1, \quad x'(t^0, y) = \alpha' = (\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n).$$

Тогда

$$x_1(t^0, y) = \varphi_1(t^0, \alpha), \; p'(t^0, y) = \varphi'(t^0, \alpha), \; \varphi' = (\varphi_2, \ldots, \varphi_n).$$

Обозначим через $\{x(t, \alpha), p(t, \alpha)\}$ решение системы Гамильтона с данными Коши

$$p_1|_{t=t^0} = \alpha, \quad x'|_{t=t^0} = \alpha', \quad x_1|_{t=t^0} = \varphi_1(t^0, \alpha),$$
$$p'|_{t=t^0} = \varphi'(t^0, \alpha), \qquad \alpha \in V,$$

где V — малая окрестность точки $\alpha = 0$. Нам достаточно рассмотреть дуги кривых γ_t и $x(t, \alpha)$ при $(t - t^0) \leqslant \delta$, где $\delta > 0$ сколь угодно мало; пусть $\gamma_{t,\delta}$ — указанная дуга кривой γ_t. Из (7.15) находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_1(t, \alpha)}{\partial \alpha_1}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H(x, p)}{\partial p_1 \partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_j}, \tag{7.20}$$

где $x = x(t, \alpha)$, $p = p(t, \alpha)$. Уравнение цикла особенностей в окрестности точки Q^* имеет вид $\det \dfrac{\partial (x_0, x)}{\partial (t, \alpha)} = 0$, т. е. $\det \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = 0$. Так как $\dfrac{\partial x_j(t^0, 0)}{\partial \alpha_k} = \delta_{jk}$; $j = 2, \ldots, n$; $k = 1, \ldots$, и $Q^* \in \Sigma(M^{n+1})$, то $\dfrac{\partial x_1(t^0, 0)}{\partial \alpha_1} = 0$. Сделаем линейное каноническое преобразование в фазовом пространстве:

$$\begin{aligned} &p_0^* = p_0, \quad p_1^* = p_1, \quad p_j^* = p_j - a_j p_1, \qquad j = 2, \ldots, \\ &x_0^* = x_0, \quad x_1^* = x_1 + \sum_{j=0}^{n} a_j x_j, \quad x_j^* = x_j, \qquad j = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{7.21}$$

где $a_j = \dfrac{\partial p_j(t^0, 0)}{\partial \alpha_1}$ Тогда

$$H(x, p) \to H^*(x^*, p^*), \quad M^{n+1} \to M^{*n+1},$$

многообразие M^{*n+1} лагранжево. Условие (7.17) выполнено для H^*, и система Гамильтона примет вид

$$\frac{dx^*}{dt} = \frac{\partial H^*(x^*, p^*)}{\partial p^*}, \qquad \frac{dp^*}{dt} = -\frac{\partial H^*(x^*, p^*)}{\partial x^*}.$$

В силу выбора a_j имеем при $t = t^0$, $\alpha = 0$

$$\begin{gathered} \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial x_j^*}{\partial \alpha_k} = \delta_{jk}, \quad j = 2, \qquad k = 1, 2, \\ \frac{\partial p_j^*}{\partial \alpha_1} = 0, \quad j = 2, \quad n, \quad \frac{\partial p_1^*}{\partial \alpha_1} = 1. \end{gathered} \tag{7.22}$$

Поэтому из (7.20) находим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1}\right)_{t=t^0,\ \alpha=0} = \frac{\partial^2 H^*(x, p)}{\partial p_1^2}, \qquad x = x(t^0, 0), \quad p = p(t^0, 0),$$

и в силу условия (7.17) имеем

$$A = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1}\right)\Bigg|_{t=t^0,\ \alpha=0} > 0. \tag{7.23}$$

Уравнение цикла особенностей $\Sigma(M^{*n+1})$ имеет, в силу (7.21), вид $\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_1^*} = 0$. Далее, вдоль $\gamma_{l,\delta}^*$ имеем

$$\frac{\partial x_1^*(t, 0)}{\partial \alpha_1} = (t - t^0) A + O((t - t^0)^2). \tag{7.24}$$

Локальными координатами на M^{*n+1} в окрестности точки Q^{**}, отвечающей $Q^* \in M^{*n+1}$, являются (p^*, x'^*), так что $x_1^* = \varphi_1^*(p_1^*, x'^*)$. Имеем

$$\frac{\partial \varphi_1^*(p^*, x'^*)}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial x_1(t, \alpha)}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial p_1^*}\frac{\partial p_1^*}{\partial \alpha_1} + \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x_j^*}\frac{\partial x_j^*}{\partial \alpha_1}$$

В силу (7.22) имеем

$$\frac{\partial p_1^*(t, 0)}{\partial \alpha_1} = 1 + O(t - t^0), \qquad \frac{\partial x_j^*(t, 0)}{\partial \alpha_1} = O(t - t^0)$$

и из (7.24) находим

$$\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial p_1^*} = A(t - t_0)(1 + O(t - t^0))$$

вдоль γ_l^* при малых $t - t^0$. Следовательно, $\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_1^*} > 0$ при $t > t^0$ на $\gamma_{l\delta}^*$ и $\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_1^*} < 0$ при $t < t^0$ на $\gamma_{l\delta}^*$, так что $\operatorname{ind} \gamma_{l\delta}^* = +1$.

Пусть Λ^n — лагранжево многообразие $x = x^0(y)$, $p = p^0(y)$, $y \in U$ (см. (7.16)), и $g^t\colon \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ — фазовый поток, индуцированный системой Гамильтона (7.15).

Следствие 7.14. *Для любой кривой* $l \in \Lambda^n$

$$\operatorname{ind} g^t l - \operatorname{ind} l = \mu(g^\tau r^+) - \mu(g^\tau r^-), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t, \tag{7.25}$$

где r^- *— начальная,* r^+ *— конечная точка кривой* l *и* $g^\tau r^\pm$ *— траектории концов кривой* l.

Доказательство. Четырехугольник l, $g^\tau r^+$, $g^t l$, $g^\tau r^-$ (рис. 12) на M^{n+1} гомологичен нулю, так что его индекс равен нулю, и из теоремы 7.14 следует (7.25).

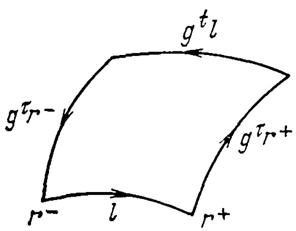

Рис. 12.

Пример 7.15. Рассмотрим гамильтонову систему, отвечающую квантовомеханическому осциллятору (пример 3.6); пусть $m = 1$, $\omega = 1$. Начальные данные выберем в виде

$$x|_{t=0} = x^0 = (\tilde{y}, 0), \quad p|_{t=0} = p^0, \quad \tilde{y} \in \mathbf{R}^{n-1},$$

где $\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, p^0 — постоянный вектор, $p_n^0 \neq 0$. Тогда фазовые траектории задаются уравнениями (см. (3.77))

$$x_k = p_k^0 \sin t - y_k \cos t, \qquad p_k = p_k^0 \cos t + y_k \sin t, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1;$$

$$x_n = p_n^0 \sin t, \qquad p_n = p_n^0 \cos t.$$

Якобиан $J(t, \tilde{y}) = \det \dfrac{\partial x(t, \tilde{y})}{\partial(t, \tilde{y})}$ в данном случае равен

$$J(t, \tilde{y}) = (-1)^{n-1} p_n^0 (\cos t)^n.$$

Фокальными точками луча $l(y)$: $x = x(t, \tilde{y})$ являются точки, в которых якобиан J обращается в нуль, т. е. $t_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Заметим, что при $t = t_k$ все лучи собираются в одну точку $x = (-1)^k p^0$ независимо от начальных данных x^0, т. е. происходит полная фокусировка лучей. Кратность нуля якобиана J при $t = t_k$ равна n. Пусть $l(\tilde{y})$ — луч $x = x(t, \tilde{y})$, $0 \leqslant$

$\leqslant t \leqslant \pi$; тогда его индекс Морса равен n: $\mu(l(\widetilde{y})) = n$. В данном примере гамильтониан H имеет вид $H = p^2 + x^2$, так что усиленное условие Лежандра (7.17) выполнено, и по теореме 7.13 имеем $\operatorname{ind} l(\widetilde{y}) = n$.

§ 8. Канонический оператор (квантование поля скоростей в целом)

Объекту классической механики — лагранжеву многообразию Λ^n — ставится в соответствие квантовый объект — канонический оператор K_{Λ^n}:

$$\Lambda^n \to K_{\Lambda^n}.$$

Этот оператор «сшивается» из предканонических операторов.

Если символ $L(x, p) \equiv 0$ на Λ^n и если это многообразие инвариантно относительно динамической системы $dx/dt = \partial L/\partial p$, $dp/dt = -\partial L/\partial x$, то справедлива формула коммутации

$$L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D_x}) K_{\Lambda^n}\varphi(x) =$$

$$= \frac{1}{i\lambda} K_{\Lambda^n} \left(\frac{d}{dt} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x, p)}{\partial x_j \partial p_j}\right)\varphi + O(\lambda^{-2}),$$

где d/dt — производная вдоль траектории. В частности, для симметричных операторов $\hat{L}$ имеем

$$\hat{L} K_{\Lambda^n}\varphi = \frac{1}{i\lambda} K_{\Lambda^n} \frac{d\varphi}{dt} + O(\lambda^{-2}).$$

Таким образом, оператор $\hat{L}$ с помощью канонического оператора преобразуется в оператор дифференцирования вдоль траектории.

1. Определение канонического оператора. *Канонический оператор*

$$K_{\Lambda^n}^{r^0}\colon C_0^\infty(\Lambda^n) \to C^\infty(\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_\lambda^+) \tag{8.1}$$

определяется заданием следующих объектов:

1) Лагранжева многообразия Λ^n с n-мерным объемом $d\sigma^n$ и с отмеченной точкой r^0.

Мы предполагаем, что $\dim \Sigma(\Lambda^n) \leqslant n-1$, что всегда имеет место для лагранжева многообразия общего положения.

2) Канонического атласа $\{\Omega_j\}$ и разбиения единицы: $1=\sum e_j(r)$. При этом $e_j \in C_0^\infty(\Lambda^n)$, $0 \leqslant e_j \leqslant 1$ и $\operatorname{supp} e_j \in \Omega_k$, $k=k(j)$. Напомним обозначение: $r=(x, p)$ — точка многообразия Λ^n.

Пусть Ω_i — карта с фокальными координатами $\{p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}\}$, функция $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_i)$. Введем оператор, который отличается от предканонического оператора только числовым множителем (ср. (6.3)):

$$(K_{\Lambda^n}^{r^0}(\Omega_i)\varphi)=\exp\left\{-\frac{i\pi}{2}\operatorname{Ind} l(r^0, r)\right\}\times$$
$$\times F^{-1}_{\lambda, p_{(\alpha)}\to x_{(\beta)}}\left|\frac{d\sigma(r(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}))}{dp_{(\alpha)}\,dx_{(\beta)}}\right|^{1/2}\varphi(r(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}))\times$$
$$\times\exp\left\{i\lambda\left(\int_{r^0}^{r(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}\langle p', dx'\rangle-\langle x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}), p_{(\alpha)}\rangle\right)\right\}. \qquad (8.2)$$

Здесь $C(r)$ — цепочка карт $\{\Omega_{j_k}\}$, $0\leqslant k\leqslant s$ такая, что $\Omega_{j_0}\ni r^0$, $j_s=i$ и $\gamma(C(r))$ — ее индекс.

Канонический оператор (8.1) введем по формуле

$$(K_{\Lambda^n}^{r^0}\varphi)(x)=\sum_j (K_{\Lambda^n}^{r^0}(\Omega_j)(e_j\varphi))(x). \qquad (8.3)$$

Таким образом, оператор K_{Λ^n} зависит от выбора канонического атласа, от выбора фокальных координат в картах и от разбиения единицы.

Очевидно, что формула (8.3) определяет неоднозначную функцию от x, так как и интеграл $\int_{r^0}^{r}\langle p, dx\rangle$, и индекс $\operatorname{ind} l(r^0, r)$ могут зависеть от выбора пути, соединяющего точки r^0 и r. Для того чтобы формула (8.3) задавала однозначную функцию, необходимо, чтобы интеграл $\int_{r^0}^{r}\langle p, dx\rangle$ и индекс $\operatorname{ind} l(r^0, r)$ не зависели от выбора пути, соединяющего точки r^0, r.

2. Инвариантность канонического оператора.

Теорема 8.1. *Для того чтобы канонический оператор не зависел (с точностью до $O(\lambda^{-1})$):*

а) *от выбора канонического атласа и от выбора фокальных координат в картах;*

б) *от разбиения единицы,*
необходимо и достаточно, чтобы:

1) $\int\limits_l \langle p, dx\rangle = 0$ *по любому замкнутому пути;*

2) $\operatorname{ind} l = 0$ *для любого замкнутого пути.*

Таким образом, введенный в § 7 характеристический класс должен быть тривиален.

Доказательство. Необходимость этих условий очевидна. Докажем достаточность.

Фиксируем карту Ω_j и фокальные координаты $\{p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}\}$ в ней. Покажем, что оператор (8.2) зависит только от карты Ω_j. По условию $\int\limits_{r^0}^{r} \langle p, dx\rangle$ не зависит от пути интегрирования, а величина $\gamma(C(r))$ при $r \in \Omega_j$ не зависит от выбора цепочки путей. Положим $\gamma(C(r)) = \gamma$, $r \in \Omega_j$. В силу леммы 6.4 оператор (8.2) не зависит от выбора фокальных координат в карте Ω_j. Следовательно, формула (8.3) задает отображение (8.1). Построенный оператор зависит, вообще говоря, от выбора канонического атласа и от разбиения единицы; обозначим его через $K(\{\Omega_j\}, \{e_j\})$.

Докажем независимость K от разбиения единицы при фиксированном атласе $\{\Omega_j\}$. Пусть $\{f_k\}$ — другое разбиение единицы. Для каждого k существует $j(k)$ такое, что $\operatorname{supp} f_k \subset \Omega_{j(k)}$. Если $\operatorname{supp} f_k$ содержится в нескольких картах $\Omega_{j_1(k)}, \Omega_{j_2(k)}, \ldots$, то в качестве $j(k)$ мы выбираем любое из чисел $j_1(k), j_2(k), \ldots$ Положим $K_0 = K(\{\Omega_j\}, \{e_j\})$ (т. е. оператор $K(\{\Omega_j\}, \{e_j\})$ определяется по каноническому атласу $\{\Omega_j\}$ и по разбиению единицы $\{e_j\}$); для краткости аргументы у функций мы опустим. Имеем

$$K_0\varphi = \sum_j K(\Omega_j)(e_j\varphi),$$

$$K_1\varphi = \sum_k K(\Omega_{j(k)})(f_k\varphi),$$

где $K(\Omega_j)$ — предканонические операторы (см. (8.2)). Так как $f_k = \sum\limits_j e_j f_k$, то

$$K_1\varphi = \sum_j \Big(\sum_k K(\Omega_{j(k)})(e_j f_k \varphi)\Big). \tag{8.4}$$

Докажем, что

$$\sum_k K(\Omega_{j(k)})(e_j f_k \varphi) = K(\Omega_j)(e_j \varphi). \tag{8.4'}$$

Так как $e_j = \sum\limits_k e_j f_k$, то

$$K(\Omega_j)(e_j\varphi) = \sum_k K(\Omega_j)(e_j f_k \varphi). \tag{8.4''}$$

Если $\psi \in C_0^\infty(\Lambda^n)$ и $\operatorname{supp}\psi \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, то по лемме 6.4 $K(\Omega_1)\psi = K(\Omega_2)\psi$ (напомним, что все равенства берутся $\operatorname{mod} O_{-1}^{+}(\mathbf{R}_x^n)$). Следовательно, $K(\Omega_j)(e_j f_k \varphi) = K(\Omega_{j(k)}) \times \times (e_j f_k \varphi)$, и из (8.4″) вытекает (8.4′). Подставляя (8.4′) в (8.4), получаем, что $K_0 = K_1$.

Докажем независимость K от выбора канонического атласа. Пусть даны два канонических атласа $\{\Omega_j\}$, $\{\theta_k\}$ и соответствующие им разбиения единицы $\{e_j\}$, $\{f_k\}$. Положим $K_0 = K(\{\Omega_j\}, \{e_j\})$, $K_1 = K(\{\theta_k\}, \{f_k\})$. Введем атлас из карт $U_{jk} = \Omega_j \cap \theta_k$, соответствующее разбиение единицы g_{jk} и оператор $K_2 = K(\{U_{jk}\}, \{g_{jk}\})$. По доказанному выше $K_0 = K(\{\Omega_j\}, \{g_{jk}\})$, $K_1 = = K(\{\theta_k\}, \{f_k\})$. Если множество U_{jk} непусто и $\operatorname{supp}\psi \in \in U_{jk}$, то, по лемме 6.3,

$$K(\Omega_j)(\psi) = K(U_{jk})(\psi),$$

откуда следует, что $K_0 = K_2$. Аналогично $K_1 = K_2$.

3. Формулы коммутации. Канонический оператор позволяет построить ф.а. решение в целом для уравнений вида (3.1). Центральным местом в методе канонического оператора является формула коммутации λ-псевдодифференциального оператора L и канонического оператора K, которая, грубо говоря, выглядит так:

$$LK = K\widetilde{L}.$$

Структура прокоммутированного оператора $\widetilde{L}$ является существенно более простой, чем структура оператора L. Всюду в дальнейшем предполагается, что лагранжево многообразие Λ^n удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 8.1.

Теорема 8.2. *Справедлива формула коммутации*

$$L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x, (i\lambda)^{-1}) K_{\Lambda^n}\varphi = K_{\Lambda^n}(L(x, p; 0)\varphi) + \lambda^{-1}\psi. \qquad (8.5)$$

Здесь L есть λ-п.д.о. с символом из класса $T_+^m(\mathbf{R}_x^n)$, функция $\varphi \in C_{0;}^{\infty}(\Lambda^n)$ и функция $\psi \in O_0^+(\Lambda^n)$.

Доказательство. Пусть $\Omega \subset \Lambda^n$ — каноническая карта, $K_{\Lambda^n}(\Omega)$ — предканонический оператор и $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Пусть Ω — неособая карта. Тогда $K_{\Lambda^n}(\Omega)$ имеет вид (6.1), т. е. $K_{\Lambda^n}\varphi = \exp(i\lambda S(x)) \left| \frac{d\sigma}{dx} \right|^{1/2}\varphi$. По теореме 2.6 имеем

$$\hat{L}K_{\Lambda^n}(\Omega)\varphi = \\ = \exp(i\lambda S(x)) \left| \frac{d\sigma}{dx} \right|^{1/2} L\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, 0\right)\varphi + \lambda^{-1}\psi = \\ = K_{\Lambda^n}(\Omega)(L(x, p, 0)\varphi) + \lambda^{-1}\psi, \qquad (8.6)$$

так как $p = \partial S(x)/\partial x$ на Λ^n и остаточный член $\psi \in O_0^+(\mathbf{R}^n)$.

Пусть Ω — особая карта с фокальными координатами $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$. Тогда $K_{\Lambda^n}(\Omega)$ имеет вид (6.3) и

$$\hat{L}K_{\Lambda^n}(\Omega)\varphi = \\ = F^{-1}_{\lambda, p_{(\alpha)}\to x_{(\alpha)}} L(-\lambda^{-1}\overset{2}{D}_{p_{(\alpha)}}, \overset{2}{x}_{(\beta)}, \overset{1}{p}_{(\alpha)}, \overset{1}{D}_{x_{(\beta)}}, i\lambda^{-1}) \times \\ \times \left| \frac{d\sigma(r)}{dp_{(\alpha)}\,dx_{(\beta)}} \right|^{1/2} \exp(i\lambda S(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}))\,\varphi(r),$$

где $r = r(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$. Функция S имеет вид

$$S(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}) = \int_{r^0}^{r} \langle p, dx\rangle - \langle p_{(\alpha)}, x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})\rangle,$$

так что

$$\frac{\partial S}{\partial p_{(\alpha)}} = -x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}), \qquad \frac{\partial S}{\partial x_{(\alpha)}} = p_{(\alpha)}.$$

Применяя теорему 5.2, получаем, что

$$\hat{L}K_{\Lambda^n}(\Omega)\varphi =$$

$$= F^{-1}_{\lambda,\, p_{(\alpha)}\to x_{(\alpha)}}\left(\left|\frac{d\sigma(r)}{dp_{(\alpha)}\,dx_{(\beta)}}\right|^{1/2}\exp\left(i\lambda S\left(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}\right)\right)\varphi(r)\times\right.$$

$$\left.\times L\left(x_{(\alpha)}\left(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}\right), x_{(\beta)}, p_{(\alpha)}, p_{(\beta)}\left(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}\right), 0\right)+\lambda^{-1}\psi\right),$$

где остаточный член $\psi \in O_0^+(\Lambda^n)$. Следовательно, формула (8.6) остается в силе.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda^n)$. Тогда (8.5) следует из (8.6) и (8.3). В теореме 8.1 формула коммутации была установлена в случае, когда операторы дифференцирования действуют первыми, а операторы умножения на независимые переменные — вторыми. Точно такая же формула справедлива и тогда, когда указанные операторы действуют в обратном порядке.

Следствие 8.3. *В условиях теоремы* 8.2 *справедлива формула коммутации*

$$L\left(\overset{1}{x}, \lambda^{-1}\overset{2}{D}_x;\ (i\lambda^{-1})\right)\left(K_{\Lambda^n}\varphi\right)(x) =$$

$$= K_{\Lambda^n}\left(L(x, p, 0)\,\varphi(x)+\lambda^{-1}\psi\right), \qquad (8.7)$$

где $\psi \in O_0^+(\Lambda^n)$.

Таким образом,

$$\hat{L}K\varphi = KR\varphi + O(\lambda^{-1}),$$

где R *— оператор умножения на функцию* $L(x, p, 0)$.

Получим формулу коммутации в случае, когда лагранжево многообразие инвариантно относительно сдвига вдоль траекторий гамильтоновой системы оператора L.

Теорема 8.4. *Пусть оператор* L *и лагранжево многообразие* Λ^n *удовлетворяют условиям теоремы* 8.2 *и условиям*:

1) *Функция* $L(x, p, 0)$ *вещественнозначна, и уравнение*

$$L(x, p, 0) = 0 \qquad (8.8)$$

определяет в фазовом пространстве C^∞*-многообразие* $M^{2n-1}(L)$ *размерности* $2n-1$.

2) $\Lambda^n \subset M^{2n-1}(L)$.

3) *Многообразие* Λ^n *и объем* $d\sigma^n$ *инвариантны относительно динамической системы*

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial L(x, p, 0)}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial L(x, p, 0)}{\partial x}. \tag{8.9}$$

4) *При любых начальных данных* $(x, p)\in M^{2n-1}(L)$ *решение системы* (8.9) *существует при всех* $t\in \mathbf{R}$, *единственно и бесконечно дифференцируемо.*

Тогда справедлива формула коммутации

$$L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ (i\lambda)^{-1})(K_{\Lambda^n}\varphi(r))(x)=$$
$$=\frac{1}{i\lambda}K_{\Lambda^n}\left(\frac{d}{dt}-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L(x, p; 0)}{\partial x\,\partial p}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial L(x, p, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\right)\varphi+\lambda^{-2}\chi(x), \tag{8.10}$$

где $\chi\in O_0(\Lambda^n)$.

Здесь d/dt — производная в силу системы Гамильтона (8.9), т. е.

$$\frac{d\varphi(r)}{dt}=$$
$$=-\left\langle\frac{\partial L(x, p, 0)}{\partial x_{(\alpha)}}, \frac{\partial\varphi(r)}{\partial p_{(\alpha)}}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial L(x, p, 0)}{\partial p_{(\beta)}}, \frac{\partial\varphi(r)}{\partial x_{(\beta)}}\right\rangle, \tag{8.11}$$

если окрестность точки $r\in\Lambda^n$ диффеоморфно проектируется на плоскость $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$.

Доказательство. 1. Пусть r^0 — неособая точка. Построим лагранжево C^∞-многообразие Λ^{n-1} размерности $n-1$ такое, что $r^0\in\Lambda^{n-1}$ и Λ^{n-1} трансверсально к траекториям системы (8.9). Будем считать, что $\Lambda^{n-1}=\{(x, p): x=x^0(y), p=p^0(y), y\in U\}$, где U — область в $\mathbf{R}^{n-1}_y$. Пусть $x=x^0(y, t)$, $p=p^0(y, t)$ — решение задачи Коши $x|_{t=0}=x^0(y)$, $p|_{t=0}=p^0(y)$ для системы (8.9). Выберем $\delta>0$, U настолько малыми, чтобы множество

$$\Omega=\{(x, p): x=x(t, y),\ p=p(t, y),\quad y\in U,\ |t|<\delta\}$$

было неособой канонической картой на Λ^n, и пусть $\pi_x\Omega$ — проекция Ω на $\mathbf{R}^n_x$. Тогда

$$d\sigma^n(r(x))=a(x)\,dx=a(x(t, y))\,J(t, y)\,dt\,dy,$$

где обозначено

$$J(t, y)=\det\frac{\partial x(t, y)}{\partial(t, y)}.$$

Так как объем $d\sigma^n$ инвариантен относительно сдвигов вдоль бихарактеристик, то функция $a(x(t, y)) J(t, y)$ зависит только от y. Таким образом, объем имеет вид $d\sigma^n = b(y)\, dt\, dy$, $b(y) > 0$. Следовательно,

$$\left| \frac{d\sigma^n(x)}{dx} \right|^{1/2} = \frac{(b(y))^{1/2}}{(J(t, y))^{1/2}}. \tag{8.12}$$

Пусть $K_{\Lambda^n}(\Omega)$ — предканонический оператор, отвечающий карте Ω (см. § 6), и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда $K\varphi = \sqrt{\left|\frac{d\sigma}{dx}\right|}\, e^{i\lambda S}\varphi$. Применяя теорему 2.6 и учитывая, что $L(x, p, 0) \equiv 0$ на Λ^n, получаем

$$L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ (i\lambda)^{-1})(K_{\Lambda^n}\varphi(r))(x) =$$

$$= \frac{1}{i\lambda} \exp(i\lambda S(x)) R_1(\psi(x)) + \lambda^{-2}\chi(x, \lambda), \tag{8.13}$$

где $\chi \in O_0^+(\pi\Omega)$. Здесь обозначено

$$S(x) = \int_{r^0}^{r} \langle p, dr \rangle, \qquad \psi(x) = \left| \frac{d\sigma^n}{dx} \right|^{1/2} \varphi(x).$$

Из (3.39) следует, что

$$(R_1\psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{J}} \frac{d}{dt}\left(\sqrt{J}\,\psi(x)\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial^2 L(x, p; 0)}{\partial x\, \partial p}\right)\psi(x) + \frac{\partial L(x, p; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\psi(x), \tag{8.14}$$

$$x = x(t, y).$$

Так как, в силу (8.12), $\psi(x) = \sqrt{b(y)}\,\frac{\varphi(x)}{\sqrt{J}}$, то окончательно

$$(R_1\psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{J}}\left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial^2 L(x, p; 0)}{\partial x\, \partial p}\right)\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial L(x, p; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\varphi\right),$$

и теорема доказана для оператора $K_{\Lambda^n}(\Omega)$, отвечающего неособой карте Ω.

2. Пусть $r^0 \in \Lambda^n$ — особая точка, некоторая окрестность которой диффеоморфно проектируется на коорди-

натную лагранжеву плоскость $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$. Тем же способом, что и в 1, построим каноническую карту $\Omega \ni r^0$, в которой можно ввести фокальные координаты $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$, и пусть $K_{\Lambda^n}(\Omega)$ — предканонический оператор, отвечающий этой карте (см. § 6). Положим

$$J(t, y) = \det \frac{\partial (p_{(\alpha)}(t, y), x_{(\beta)}(t,y))}{\partial (t, y)}.$$

Из инвариантности объема $d\sigma^n$ относительно сдвигов вдоль бихарактеристик следует, что

$$\left| \frac{d\sigma^n(r)}{dp_{(\alpha)}\, dx_{(\beta)}} \right|^{1/2} = \frac{\sqrt{b(y)}}{\sqrt{J(t, y)}},$$

где $b(y) > 0$. Из (8.13) и (5.10) следует, что

$$L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ (i\lambda)^{-1})(K_{\Lambda^n}\varphi(r))(x) =$$

$$= F^{-1}_{\lambda, p_{(\alpha)}\to x_{(\alpha)}} L(-\lambda^{-1}\overset{2}{D}_{p_{(\alpha)}}, \overset{2}{x}_{(\beta)}, \overset{1}{p}_{(\beta)}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_{x_{(\alpha)}}\ (i\lambda)^{-1})(\psi \exp i\lambda S),$$

где обозначено

$$\psi = \left| \frac{d\sigma}{dp_{(\alpha)}\, dx_{(\beta)}} \right|^{1/2} \varphi, \quad S(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}) =$$

$$= \int_{r^0}^{r} \langle p, dx\rangle - \langle p_{(\alpha)}, x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})\rangle \tag{8.15}$$

(см. (6.2)). Применяя теорему 5.2, получаем, что

$$L(K_{\Lambda^n}\varphi)(x) =$$

$$= F^{-1}_{\lambda, p_{(\alpha)}\to x_{(\alpha)}} \left[\exp(i\alpha S)\left(R_0\psi + \frac{1}{i\lambda} R_1\psi\right) + \lambda^{-2}\chi\right] \tag{8.16}$$

где $\chi \in O_0^+(\Omega)$. Имеем из (5.11)

$$R_0\psi = L\left(-\frac{\partial S}{\partial p_{(\alpha)}}, x_{(\beta)}, p_{(\alpha)}, \frac{\partial S}{\partial x_{(\beta)}};\ 0\right)\psi.$$

Из вида функции S следует, что

$$\frac{\partial S(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}{\partial p_{(\alpha)}} = -x_{(\alpha)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}),$$

$$\frac{\partial S(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})}{\partial x_{(\beta)}} = p_{(\beta)}(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)}),$$

так что на Λ^n
$$R_0\psi = L(x,\ p;\ 0)\,\psi = 0$$
в силу условия 2). В силу (5.12), (5.13) оператор R_1 имеет вид
$$R_1\psi = \left\langle \frac{\partial L_1^0(x',\ p';\ 0)}{\partial p'},\ \frac{\partial\psi(x')}{\partial x'}\right\rangle + \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial^2 L_1^0(x',\ p';\ 0)}{\partial p'^2}\,\frac{\partial^2 S(x')}{\partial x'^2}\right) - \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial^2 L_1^0(x',\ p';\ 0)}{\partial x'\,\partial p'}\right) + \left.\frac{\partial L_1^0(x',\ p',\ \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right]\psi. \tag{8.17}$$

Здесь $x' = (p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)})$, $p' = (x_{(\alpha)},\ p_{(\beta)})$, $L_1^0(x',\ p';\ 0) = L(-x_{(\alpha)},\ x_{(\beta)},\ p;\ 0)$ и нуль наверху означает, что значение $\partial L_1/\partial p'$ и т. д. взяты в точке $(x'^0,\ p'^0) = (p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)},\ -\partial S/\partial p_{(\alpha)},\ \partial S/\partial x_{(\beta)})$ (т. е. в точке $(x,\ p) = (x_{(\alpha)}\ (p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)}),\ x_{(\beta)},\ p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)}\ (p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)}))$ на Λ^n). Из системы Гамильтона (8.9) следует, что
$$\frac{dp_{(\alpha)}}{dt} = \frac{\partial L_1^0(x_1',\ p';\ 0)}{\partial x_{(\alpha)}},\qquad \frac{dx_{(\beta)}}{dt} = \frac{\partial L_1^0(x',\ p',\ 0)}{\partial p_{(\beta)}}. \tag{8.18}$$

Поэтому
$$\left\langle \frac{\partial L_1^0(x',\ p';\ 0)}{\partial p},\ \frac{\partial\psi}{\partial x'}\right\rangle = -\left\langle \frac{\partial L_1^0(x',\ p';\ 0)}{\partial x_{(\alpha)}},\ \frac{\partial\psi}{\partial p_{(\alpha)}}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial L_1^0(x',\ p';\ 0)}{\partial p_{(\beta)}},\ \frac{\partial\psi}{\partial p_{(\beta)}}\right\rangle = \frac{d\psi}{dt},$$
где d/dt — производная в силу системы (8.9). Применяя формулу Лиувилля (3.28) к системе (8.18), получаем, что выражение в квадратных скобках в (8.17) равно
$$\frac{d}{dt}(\ln J) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial^2 L(x,\ p;\ 0)}{\partial x\,\partial p}\right) + \left.\frac{\partial L(x,\ p;\ \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Окончательно получаем
$$(R_1\psi)(p_{(\alpha)},\ x_{(\beta)}) = \frac{1}{(J)^{1/2}}\,\frac{d}{dt}\left((J)^{1/2}\psi\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial^2 L(x,\ p;\ 0)}{\partial x\,\partial p}\right)\psi + \left.\frac{\partial L(x,\ p;\ \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Учитывая формулы (8.14), (8.15), получаем (8.10).

3. Из того, что (8.10) справедливо для предканонических операторов, и представления (8.5) вытекает теорема, если учесть еще следующее замечание. Пусть $r^* \in \Delta^n$

и $\Omega_{j_1}, \ldots, \Omega_{j_s}$ — все канонические карты такие, что $\bar{\Omega}_{j_l} \ni r^*$. Тогда

$$\sum_{l=1}^{s} e_{j_l}(r) \equiv 1, \qquad \sum_{l=1}^{s} \frac{d}{dt}(e_{j_l}(r)) \equiv 0$$

в окрестности точки r^*, так что

$$\sum_{l=1}^{s} \left[K_{\Lambda^n}(\Omega_{j_l}) \left(\frac{de_{j_l}(r)}{dt} \varphi(r) \right) \right](x) =$$
$$= \left[K_{\Lambda^n}(\Omega_{j_l}) \left(\sum_{l=1}^{s} \frac{de_{j_l}(r)}{dt} \varphi(r) \right) \right](x) + O(\lambda^{-1}) = O(\lambda^{-2})$$

(мы опускаем указание на локальные координаты в Ω_{j_l}).

Следствие 8.5. *В условиях теоремы* 8.4 *справедлива формула*

$$\frac{1}{2} [L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ (i\lambda)^{-1}) + L(\overset{1}{x}, \lambda^{-1}\overset{2}{D}_x,\ (i\lambda)^{-1})] (K_{\Lambda^n}\varphi)(x) =$$
$$= \frac{1}{i\lambda} \left(K_{\Lambda^n} \left(\frac{d}{dt} + \frac{\partial L(x, p, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} \right) \varphi(r) + \lambda^{-1}\chi \right)(x).$$

Рассмотрим важный частный случай теоремы 8.4. Пусть

$$L = \lambda^{-1}D_t + H(t, \overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ (i\lambda)^{-1}), \tag{8.19}$$

где оператор H удовлетворяет условиям Н 3.1 — Н 3.3 из § 3, п. 5. Положим $x' = (x^0, x)$, $p' = (E, p)$, где $x^0 = t$, E — двойственная к t переменная (энергия), и рассмотрим систему Гамильтона, отвечающую L, в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n+2}$ с координатами (x', p'):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(t, x, p;\, 0)}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(t, x, p;\, 0)}{\partial x}; \tag{8.20}$$
$$\frac{dx_0}{dt} = 1, \qquad \frac{dE}{dt} = -\frac{\partial H(t, x, p;\, 0)}{\partial t}.$$

Пусть $g^t\colon \mathbf{R}^{2n+2} \to \mathbf{R}^{2n+2}$ — оператор сдвига вдоль траекторий системы (8.20). Построим $(n+1)$-мерное лагранжево многообразие Λ^{n+1} в $\mathbf{R}^{2n+2}$, инвариантное относительно динамической системы (8.20).

Пусть Λ_0^n есть лагранжево n-мерное C^∞-многообразие в $\mathbf{R}^{2n+2}$ с n-мерным объемом $d\sigma_0(x, p)$.

Положим

$$\Lambda^n = \{(x'\ p):(x, p) \in \Lambda^n, t=0,\ E = -H(0, x, p; 0)\} \qquad (8.21)$$

Тогда Λ^n есть n-мерное лагранжево C^∞-многообразие в $\mathbf{R}^{2n+2}$. Пусть $r^0\ (x,\ p)$ — точка на Λ^n, где $(x',\ p')$ имеют вид (8.21). Далее, в силу предложения 4.19 множество

$$\Lambda^{n+1} = \bigcup_{0<t<+\infty} g^t \Lambda^n \qquad (8.22)$$

есть лагранжево C^∞-многообразие в $\mathbf{R}^{2n+2}$ размерности $(n+1)$. В качестве $(n+1)$-мерного объема на Λ^{n+1} выберем

$$d\sigma\ (g^t\ (r\ (x,\ p))) = dt\ d\sigma_0\ (r\ (x,\ p)).$$

Таким образом, мы построили $(n+1)$-мерное лагранжево многообразие Λ^{n+1}, инвариантное относительно динамической системы (8.20), и $(n+1)$-мерный объем $d\sigma$, также инвариантный относительно этой динамической системы. Пусть Λ_0^n — односвязное многообразие, тогда Λ^{n+1} — односвязное многообразие и $\oint\limits_\gamma \langle p',\ dx' \rangle = 0$ для любого замкнутого пути γ, лежащего на многообразии, Λ^n. В силу теоремы 8.4 имеем

$$(\lambda^{-1}D_t + H\ (t,\ x,\ p;\ (i\lambda)^{-1}))\ K_{\Lambda^n}\varphi =$$
$$= (i\lambda)^{-1}\ K_{\Lambda^n} \left(\frac{d}{dt} - \operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 H\ (t,\ x,\ p;\ 0)}{\partial x\ \partial p}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial H\ (t,\ x,\ p;\ \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right)\varphi. \qquad (8.23)$$

Значение функции в правой части этого равенства берется в точке $g^t\ (r\ (x,\ p))$ и d/dt — производная в силу системы (8.20), т. е.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial H}{\partial p} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial p},\ \frac{\partial H}{\partial x} \right\rangle + \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial t}. \qquad (8.24)$$

При выводе формулы (8.23) мы учли, что $\dfrac{\partial^2 L\ (x,\ p,\ t;\ 0)}{\partial p^0 \partial t} \equiv$ $\equiv 0$ и что $p^0 + H\ (t,\ x,\ p;\ 0) \equiv 0$ на Λ^n.

4. Канонический оператор на римановом многообразии. Этот оператор строится по той же схеме, что и ранее, и мы ограничимся кратким описанием конструкции и изложением результатов. Пусть

M есть n-мерное риманово многообразие класса C^∞ с метрическим тензором $g = (g_{ij})$ и TM, T^*M — его касательное и кокасательное расслоения, π: $T^*M \to M$ — проекция. Если $q = (x^1, \ldots, x^n)$ — локальная система координат в области (открытом связном подмножестве) $U \subset M$, то

$$(x, p) = (x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n),$$

где $p_i = \partial/\partial x^i$ образуют систему локальных координат в области $V = \pi^{-1}(U)$ на T^*M. Здесь стандартным образом отождествлены $T^{**}M$ и TM.

На многообразии T^*M инвариантно определена 2-форма ω^2, которая в локальных координатах имеет вид $\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i$. Два вектора ξ, $\eta \in T_\alpha T^*M$ называются *косоортогональными*, если $\omega^2(\xi, \eta) = 0$. Здесь $\alpha \in T^*M$. Подмногообразие $\Lambda \subset T^*M$ называется *лагранжевым*, если любые два касательных вектора к Λ косоортогональны. Ниже рассматриваются только n-мерные лагранжевы многообразия $\Lambda^n \subset T^*M$.

В качестве локальных координат в окрестности любой точки $r^0 \in \Lambda^n$ можно взять один из наборов $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$. Понятие канонического атласа остается прежним.

Пусть $d\sigma^n(r)$ — гладкий n-мерный объем на Λ^n. *Предканонический оператор* в канонической карте $\Omega \subset \Lambda^n$ с фокальными координатами $(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$ определяется по формуле

$$(K\varphi)(x) = F^{-1}_{\lambda, p_{(\alpha)} \to x_{(\alpha)}} \times$$
$$\times \left[\varphi(r) \sqrt{\left|\frac{d\sigma^n(r)}{dp_{(\alpha)}\, dx^{(\beta)}}\right|} (\det \tilde{g}(r))^{-1/4} \exp(i\lambda \tilde{S}(r))\right]. \qquad (8.25)$$

Здесь $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $r = r(p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$, функция $\tilde{S}$ точно та же, что и функция под знаком экспоненты в (6.3), и $\tilde{g}(r) = (g \circ \pi)(r)$. Формулы (8.25) и (6.3), очевидно, совпадают, если $M = \mathbf{R}^n_x$.

Канонический оператор на Λ^n строится по предканоническим операторам точно так же, как и ранее; доказательство его инвариантности остается прежним. Формула коммутации (8.10) в данном случае принимает вид

$$L(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D_x}; (i\lambda)^{-1})(K_{\Lambda^n}\varphi(r))(x) =$$
$$= \frac{1}{i\lambda} K_{\Lambda^n} \left(\frac{d}{dt} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x, p; 0)}{\partial x^j\, \partial p_j} - \frac{1}{4}\frac{d}{dt}(\ln(\det \tilde{g})) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial L}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right)\varphi(r)(x) + \lambda^{-2}\chi(x, \lambda). \qquad (8.26)$$

5. О структуре канонического оператора. Приведем более явные формулы для значений $(K_{\Lambda^n}\varphi)(x)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda_0^n)$.

1. Точка $x^0 \in \mathbf{R}^n$ не лежит на каустике (каустика — это проекция $\pi_x\Sigma$ (Λ^n) цикла особенностей на $\mathbf{R}^n_x$). Здесь имеются две возможности.

А. $$x^0 \notin \pi\Lambda^n.$$

Тогда
$$(K_{\Lambda^n}\varphi)(x) = O(\lambda^{-1}) \qquad (\lambda \to \infty)$$
равномерно по x из некоторой окрестности Ω точки x^0. В § 9 будет показано, что, подправив канонический оператор, можно получить соотношение
$$(K_{\Lambda^n}\varphi)(x) = O(\lambda^{-N}) \qquad (\lambda \to +\infty) \qquad (8.27)$$
при любом целом $N > 0$.

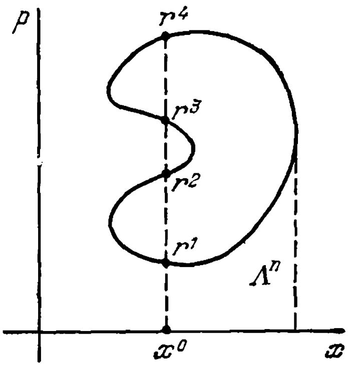

Рис. 13.

С точки зрения геометрической оптики точка x^0 в случае 1, A лежит в области тени.

В. $$x^0 \in \pi\Lambda^n.$$

Будем предполагать, что только конечное число точек $r^1, \ldots, r^s \in \Lambda^n$ проектируются в точку x^0: $\pi r^j = x^0$ (рис. 13). Тогда окрестность Ω точки x^0 можно выбрать так, чтобы окрестности Ω_j точек r^j диффеоморфно проектировались на Ω: $\pi\Omega_j = \Omega$, $1 \leqslant j \leqslant s$, так что Ω_j — неособые канонические карты. Поэтому операторы $K(\Omega_j)$ можно взять в виде (6.2), т. е. они являются операторами умножения на функцию. Следовательно, при $x \in \Omega$ имеем
$$(K_{\Lambda^n}\varphi)(x) = \sum_{j=1}^{s} \exp\left[-\frac{i\pi}{2}\operatorname{ind} l(r^0, r^j)\right] \sqrt{\left|\frac{d\sigma^n(r^j(x))}{dx}\right|} \times$$
$$\times \exp\left[i\lambda \int_{r^0}^{r^j(x)} \langle p, dx\rangle\right] \varphi(r^j)(x) + O(\lambda^{-1}). \qquad (8.28)$$

Таким образом, канонический оператор в случае B равен сумме быстро осциллирующих экспонент.

2. Точка x^0 лежит на каустике (т. е. $x^0 \in \pi\Sigma(\Lambda^n)$).

Допустим для простоты, что прообраз $\pi^{-1}U$, где U — малая окрестность точки x^0, содержится в одной канонической карте Ω. Далее, будем считать, что начало координат перенесено в точку $r(x^0)$ и что $r^0 \in \Omega$. Согласно формуле (6.3) $K\varphi$ есть λ-преобразование Фурье быстро осциллирующей экспоненты, и в общем случае трудно привести более точную информацию о структуре канонического оператора. Однако это возможно для некоторых особенностей общего положения.

А. Особенность типа A_2 (см. § 7). В этом случае в качестве фокальных координат можно выбрать координаты $(p_1, x_2, \ldots, x_n)$. Многообразие Λ^n в окрестности начала координат задается уравнениями

$$x_1 = p_1^2, \qquad p' = \frac{\partial S_0(x')}{\partial x'},$$

где $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, $p' = (p_2, \ldots, p_n)$. Положим $S_0(0) = 0$. Далее,

$$\int_{r^0}^{r(x)} \langle p, dx\rangle - \langle x_1(p_1), p_1\rangle = S_0(x') - \frac{2}{3}p_1^3.$$

Следовательно,

$$(K\varphi)(x) = \exp[i\lambda S_0(x')]\, F^{-1}_{\lambda, p_1\to x_1} \times$$
$$\times \left[(\varphi\circ r)(p_1, x')\sqrt{\left|\frac{d\sigma^n(p_1, x')}{dp_1\, dx'}\right|}\exp\left(-\frac{2}{3}ip_1^3\right)\right]. \tag{8.29}$$

Последний интеграл равен

$$\sqrt{-\frac{\lambda}{2\pi i}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\sqrt{\left|\frac{d\sigma^n}{dp_1\, dx'}\right|}\exp\left[i\lambda\left(p_1x_1 - \frac{2}{3}p_1^3\right)\right]dp_1. \tag{8.30}$$

Фазовая функция $p_1x_1 - (^2/_3)\,p_1^3$ в этом интеграле точно такая же, как и в интеграле Эйри — Фока:

$$v(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\right]dt.$$

Асимптотика интеграла (8.30) при $\lambda \to +\infty$, равномерная по x_1, при малых x_1 выражается через функции Эйри — Фока [57].

Именно, в окрестности начала координат справедлива асимптотическая формула

$$(K\varphi)(x)=e^{i\pi/4}2^{-5/6}\lambda^{1/6}(f_{+}+f_{-})\,v\,(-2^{-1/3}\lambda^{2/3}x_1)+$$
$$+e^{-i\pi/4}2^{-7/6}\lambda^{-1/6}\frac{f_{+}-f_{-}}{\sqrt{x_1}}\,v'(-2^{-1/3}\lambda^{2/3}x_1)+O(\lambda^{-1}). \quad (8.31)$$

Здесь $f_{\pm}$ — значения функции $\left(\varphi\sqrt{\left|\frac{d\sigma^n}{dp_1dx'}\right|}\right)(r)$ в точках $r^{\pm}=(\pm\sqrt{x_1}, x_2, \ldots, x_n)$. В частности, при $x_1=0$ главный член асимптотики равен $\operatorname{const}\varphi(0)\lambda^{1/6}$, т. е. функция $(K\varphi)(x)$ растет вблизи каустики при $\lambda\to+\infty$.

Рассмотренная выше особенность типа A_2 является наиболее простой и является особенностью общего положения (см. § 7). Рассмотрим в качестве примера уравнение эйконала $(\nabla S(x))^2=1$, отвечающее уравнению Гельмгольца $(\Delta+k^r)\,u(x)=0$ при $n=2$.

Пусть $S(x)$ — решение уравнения эйконала; линия $S(x)=\mathrm{const}$ является волновым фронтом некоторого семейства лучей. Точкам, в которых достигается локальный максимум кривизны волнового фронта, отвечают особенности каустики. Если x^0 — одна из таких точек, причем x^0 — невырожденная точка максимума (это означает, что x^0 не является точкой перегиба волнового фронта), то ей отвечает «клюв» каустики (рис. 3). Он расположен в центре круга кривизны, который касается волнового фронта в точке x^0. Для волнового фронта, имеющего вид параболы, этот факт был установлен в § 7, пример 7.11; аналогично проводится доказательство и в общем случае.

Пусть в окрестности точки $r^0=(x^0, p^0)\in\Omega$ можно выбрать фокальные координаты $(p_1, x_2, \ldots, x_n)$ так, что предканонический оператор K можно определить как λ-преобразование Фурье только по одной переменной p_1. Покажем, что даже в этом случае функция $K\varphi$ не выражается через функцию Эйри — Фока или какую-либо другую специальную функцию. Пусть $n=1$, для простоты, и лагранжево многообразие Λ^1 задается уравнением

$$\Lambda^1: x=p^k/k, \quad p\in\mathbf{R}, \quad (8.32)$$

где $k\geqslant 3$ — целое число. Заметим, что такое многообразие ассоциировано с обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{i\lambda}\frac{d}{dx}\right)^k y = xy. \tag{8.33}$$

Действительно, в этом случае уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$x = p^k, \qquad p = \frac{dS(x)}{dx}.$$

Лагранжево многообразие — кривая Λ^1 — диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}_p^n$. Имеем

$$\frac{d\sigma}{dp} = \frac{ds}{dp} = \sqrt{1 + p^{2k-2}}$$

(ds — длина дуги кривой Λ^1). Далее (здесь $r = (x, p)$, $r^0 = (0, 0)$),

$$S(r) = \int_{r^0}^{r} \langle p, dx\rangle - \langle x(p), p\rangle = -\frac{k}{k+1}p^{k+1}.$$

Канонический оператор $K = K_{\Lambda^1}$ можно взять в виде (6.3), т. е.

$$(K\varphi(r))(x) = F^{-1}_{\lambda, p\to x}\left(\sqrt{\left|\frac{d\sigma}{dp}\right|}\exp(i\lambda S(r))\,\varphi_0(r(p))\right) =$$
$$= \sqrt{-\frac{\lambda}{2\pi i}}\int \sqrt[4]{1 + p^{k-2}}\,(\varphi\circ r)(p)\times$$
$$\times \exp\left[i\lambda\left(-\frac{k}{k+1}p^{k+1} + xp\right)\right]dp. \tag{8.34}$$

Асимптотика интеграла вида (8.34) при $\lambda \to +\infty$ вычислена в [55]. Мы ограничимся описанием качественной картины.

Стационарные точки фазовой функции находятся из уравнения

$$kp^k = x. \tag{8.35}$$

Пусть $x \neq 0$ фиксировано. Если k нечетно, то уравнение (8.35) имеет одно вещественное решение и асимптотика интеграла (8.34) равна вкладу от стационарной точки $p = (x/k)^{1/k}$. Если же k четно, то при $x > 0$ имеются две вещественные стационарные точки $p = \pm (x/k)^{1/k}$ и асимптотика интеграла (8.34) равна сумме вкладов от этих точек.

При $x < 0$ все стационарные точки невещественны, так что $(K\varphi)(x) = O(\lambda^{-\infty})$ $(\lambda \to +\infty)$.

В. Особенность типа A_3 (см. § 7). В качестве фокальных координат можно выбрать координаты $(p_1, x_2, \quad x_n)$, и уравнение многообразия Λ^n имеет вид

$$x_1 = -4p_1^3 - 2p_1x_2, \quad p_2 = p_1^2, \quad p_j = \frac{\partial S_0(x_3, \ldots, x_n)}{\partial x_j}, \quad 3 \leqslant j \leqslant n.$$

Ограничимся случаем $n = 2$. Тогда

$$(K\varphi)(x) = \\ = F_{\lambda, p_1 \to x_1}^{-1}\left[(\varphi \circ r)(p_1, x_2)\sqrt{\left|\frac{d\sigma}{dp_1}\right|}\exp\left[i\lambda\left(p_1^4 + 2p_1^2x_2\right)\right]\right]. \tag{8.36}$$

Следовательно, асимптотика $(K\varphi)(x)$ при $\lambda \to +\infty$ выражается через эталонный интеграл вида

$$\sqrt{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\lambda\left(p^4 + 2p^2x_2 + px_1\right)\right]dp, \tag{8.37}$$

который, однако, не выражается через специальные функции. Заметим еще, что

$$(K\varphi)(0) \sim \text{const}\,\varphi(0)\,\lambda^{1/4} \qquad (\lambda \to +\infty).$$

Интеграл (8.37) сам является новой специальной функцией, которая естественно возникает в трехмерных задачах оптики и квантовой механики.

§ 9. Квантование поля скоростей в целом. Высшие приближения

1. Высшие приближения в одной карте. В настоящем параграфе, следуя [29], [40], мы построим канонический оператор не с точностью до $O(\lambda^{-1})$, как в § 8, а с точностью до $O(\lambda^{-m})$ ($m > 0$ — любое) и соответственно уточним формулу коммутации (8.10). Будем предполагать, что условия теоремы 8.4 выполнены.

Уточним прежде всего определение *канонического оператора*. Пусть Ω — каноническая карта на лагранжевом многообразии Λ^n, точка $r^0 \in \Omega$. Пусть в качестве локальных координат в Ω можно выбрать координаты $I =$

$= (p_{(\alpha)}, x_{(\beta)})$ и координаты $\tilde{I} = (p_{(\tilde{\alpha})}, x_{(\tilde{\beta})})$. Тогда на функциях $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ канонический оператор можно определить либо формулой

$$K(\Omega, I)\varphi = e^{i\delta} F^{-1}_{\lambda, p_{(\alpha)}\to x_{(\alpha)}} \left[\varphi \left| \frac{d\sigma}{dp_{(\alpha)}\, dx_{(\beta)}} \right|^{1/2} \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left[i\lambda \int_{r0}^{r} \langle p', dx'\rangle - \langle x_{(\alpha)}, p_{(\alpha)}\rangle \right]\right], \qquad (9.1)$$

где аргументы всех функций те же, что и в (6.3), либо формулой $K(\Omega, \tilde{I})\varphi$; число δ определяется аналогично (8.2). Как показано в § 6,

$$K(\Omega, \tilde{I})\varphi = K(\Omega, I)[\varphi + O(\lambda^{-1})] \qquad (\lambda \to +\infty).$$

Лемма 9.1. *Пусть в канонической карте Ω можно выбрать локальные координаты I и $\tilde{I}$. Тогда для любого целого $M \geqslant 1$ существует такой дифференциальный оператор*

$$V(I, \tilde{I}) = 1 + \sum_{j=1}^{M-1} (i\lambda)^{-j} V^j(I, \tilde{I}), \qquad (9.2)$$

что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$K(\Omega, \tilde{I})\varphi = K(\Omega, I)\, V(I, \tilde{I})\varphi \ (\mathrm{mod}\, O^{+}_{-M}(\Omega)). \qquad (9.3)$$

Здесь V^j — линейные дифференциальные операторы порядка $2j$ в пространстве $C_0^\infty(\Omega)$ с коэффициентами класса $C^\infty(\Omega)$, причем V^j не зависят от M.

Доказательство, по существу, уже содержится в доказательстве леммы 6.3. Именно, при вычислении асимптотики интеграла ψ (см. (6.11)) мы ограничились главным членом. Как показано в этой лемме, ψ есть интеграл по конечной области в пространстве $(p_{(\alpha)}, x_{(\tilde{\alpha})})$ с финитной подынтегральной функцией, с точностью до слагаемого класса O^{+}_{-k} при любом $k \geqslant 0$. Выписывая следующие члены асимптотического разложения, получаем в силу теоремы 1.1, что (см. (6.23))

$$\psi = \exp\left[i\lambda \tilde{S}(Q) + \frac{i\pi N}{2} \right] \sqrt{\left| \frac{d\sigma}{dp_{(\tilde{\alpha})}\, dx_{(\tilde{\beta})}} \right|} \times$$

$$\times \left[\varphi(r(Q)) + \sum_{j=1}^{M-1} (i\lambda)^{-j} W^j \varphi\right] + \chi_M,$$

где $(F^{-1}_{\lambda,\ p(\widetilde{\alpha})\to x(\widetilde{\alpha})}\chi_M) \in O^{+}_{M}(\mathbf{R}^n_x)$ (мы сохранили обозначения леммы 6.4). В силу теоремы 1.1 операторы W^j обладают теми же свойствами, что и V^j, и отличаются от искомых операторов V^j числовым множителем.

Л е м м а 9.2. *Пусть Ω — каноническая карта с координатами I, и пусть условия теоремы 8.4 выполнены. Тогда для любого целого $M \geqslant 1$ существует дифференциальный оперетор*

$$R_L(\Omega,\ I) = (i\lambda)^{-1}\,[R_L^0 + \sum_{j=1}^{M-1}(i\lambda)^{-j}R_L^j(\Omega,\ I)] \tag{9.4}$$

такой, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ справедлива формула коммутации

$$\begin{aligned} L(\overset{2}{x},\ \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ (i\lambda)^{-1})\,K(\Omega,\ I)\,\varphi = \\ = K(\Omega,\ I)\,R_L(\Omega,\ I)\,\varphi \bmod O^{+}_{-M}(\Omega). \end{aligned} \tag{9.5}$$

Здесь R_L^j — линейные дифференциальные операторы порядка $j+1$ с коэффициентами класса $C^\infty(\Omega)$, а R_L^0 — оператор переноса.

Для доказательства достаточно в формуле (8.16) выписать не два, а M членов асимптотического разложения, полученного в теореме 5.2, и учесть, что операторы R_j в разложении (5.9) являются линейными однородными дифференциальными операторами.

Следует заметить, что явное вычисление операторов $V(I,\ \widetilde{I})$ и $R_L(\Omega,\ I)$ приводит к весьма громоздким формулам.

2. Высшие приближения в целом. Пусть $\Lambda = \Lambda^n$ есть n-мерное лагранжево C^∞-многообразие в фазовом пространстве. Напомним, что условия теоремы 8.4 выполнены. Фиксируем точку $r^0 \in \Lambda$, канонический атлас $\{\Omega_j\}$, локальные координаты I_j каждой из карт Ω_j и фиксируем разбиение единицы $\{e_j\}$. Построим канонический оператор по формуле (8.2):

$$K_\Lambda\varphi = \sum_j K(\Omega_j,\ I_j)\,\varphi,$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda)$. Пусть оператор

$$L = -i\lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial t} + H(t,\ x,\ \lambda^{-1}D_x,\ (i\lambda)^{-1})$$

удовлетворяет условиям теоремы 8.4.

Теорема 9.3. *На многообразии Λ существуют такие дифференциальные операторы $V^l = V^l(H)$ порядка j, что на функциях $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda)$ при любом целом $M \geqslant 1$ справедливо равенство*

$$\left(-i\lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial t}+H\right)K_\Lambda\varphi = K_\Lambda\left(\sum_{l=1}^{M-1}\lambda^{-l}V^l\right)\varphi \ (\mathrm{mod}\, O^+_{-M}(\Lambda)).$$

Доказательство. Имеем, в силу леммы 9.2,

$$LK_\Lambda\varphi = \sum_j K(\Omega_j,\ I_j)\, R_L(\Omega_j,\ I_j)(e_j\varphi) \,\mathrm{mod}\, O^+_{-M}(\Lambda). \tag{9.6}$$

Преобразуем правую часть этого равенства к виду (9.5). Следуя [30], введем оператор $B^j = \sum_k V(I_j,\ I_h)\,e_k$ в пространстве $C_0^\infty(\Omega_j)$. В силу (9.2) имеем

$$B^j = 1+\sum_{l=1}^{M-1} B_l^j\lambda^{-l},\qquad B_l^j = \sum_k V^l(I_j,\ I_k)\,e_k.$$

Оператор B_l^j является дифференциальным оператором порядка l с коэффициентами класса $C^\infty(\Omega_j)$. Будем искать формальный правый обратный оператор $(B^j)^{-1}$ в виде $(B^j)^{-1} = 1+\sum_{l=1}^{M-1}\widetilde{B}_l^j\lambda^{-l}$, где $\widetilde{B}_l^j$ — дифференциальные операторы порядка l с коэффициентами из класса $C^\infty(\Omega_j)$. Для этого рассмотрим формальное уравнение $B^j\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}\widetilde{B}_l^j\lambda^{-l}\right) = 1$ и приравняем нулю коэффициенты при степенях λ^{-m}, $m = 1, \ldots, N-1$. Мы получим рекуррентную систему уравнений, из которой последовательно найдем операторы $\widetilde{B}_l^j$, $l = 1, 2, \ldots, N-1$. Построенный таким образом оператор $(B^j)^{-1}$ будет удовлетворять равенству

$$B^j(B^j)^{-1} = 1+\chi^{-M}\sum_{l=0}^{M-2}\lambda^{-l}\widetilde{\widetilde{B}}{}_l^j,$$

где $\widetilde{\widetilde{B}}{}_l^j$ = дифференциальные операторы порядка l с коэффициентами из класса $C^\infty(\Omega_j)$.

Домножая в формуле (9.5) функции $R_L(e_j\varphi)$ слева на $B_j(B_j)^{-1}$ и используя соотношение (9.3), получаем

$$\sum_j K(\Omega_j, I_j) R_L(\Omega_j, I_j)(e_j\varphi) =$$

$$= \sum_j K(\Omega_j, I_j)\Bigl(\sum_k V(I_j, I_k) e_k \times$$

$$\times \Bigl(\sum_m V(I_j, I_m)\Bigr)^{-1} R_L(\Omega_j, I_j) e_j\varphi \,(\mathrm{mod}\, O^{+}_{-M}(\Lambda)\Bigr) =$$

$$= \sum_k K(\Omega_k, I_k) e_k \Bigl\{\sum_j \Bigl(\sum_m V(I_j, I_m) e_m\Bigr)^{1} \times$$

$$\times R_L(\Omega_j, I_j) e_j\Bigr\} \varphi \,(\mathrm{mod}\, O^{+}_{-M}(\Lambda)).$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, по построению можно представить в виде $1 + \sum_{l=1}^{M-1} \lambda^{-l} Q_j^l$, где Q_j^l — дифференциальные операторы, что и доказывает теорему.

Заметим, что формула коммутации (9.5), в отличие от формулы (8.10), доказана для фиксированного канонического атласа и для фиксированного разбиения единицы.

З а м е ч а н и е. Если supp φ не содержит особых точек, то формулы коммутации упрощаются; например, формула (8.5) примет вид

$$\hat{L}K\varphi = KL\varphi + O(\lambda^{-1}).$$

В дальнейшем будем, для краткости, использовать именно такую, упрощенную запись формул коммутации.

ЧАСТЬ II

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ И РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

§ 10. Задача Коши с быстро осциллирующими начальными данными для скалярных гамильтонианов

Рассматривается задача Коши

$$[\lambda^{-1}D_t + H(t, x, \lambda^{-1}D_x)]\, u = 0,$$
$$u|_{t=0} = u_0(x)\exp[i\lambda S_0(x)],$$

где $S_0(x)$ — вещественнозначная функция. Данные Коши индуцируют n-мерное лагранжево многообразие Λ_0^n в фазовом пространстве (x, p). Асимптотика решения этой задачи Коши «в малом», т. е. за малое время t, была построена в § 3. В настоящем параграфе будет построена асимптотика решения задачи Коши «в большом», т. е. за любое конечное время T $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

Асимптотика решения задачи Коши в целом строится по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_0^n & \xrightarrow{g^t} & g^t\Lambda_0^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{\Lambda_0^n} & \xrightarrow{L_t} & K_{g^t\Lambda_0^n} = u. \end{array}$$

Здесь g^t — сдвиг вдоль траекторий динамической системы с гамильтонианом H. Таким образом, асимптотика решения $u(t, x)$ при $\lambda \to +\infty$ выражается через канонический оператор $K_{g^t\Lambda_0^n}$, ассоциированный с лагранжевым многообразием $g^t\Lambda_0^n$, которое получено сдвигом за время t начального многообразия Λ_0^n.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши

$$Lu(t, x) = 0, \tag{10.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x)\exp[i\lambda S_0(x)] \tag{10.2}$$

с быстро осциллирующими начальными данными. Здесь L есть скалярный λ-п.д.о. вида

$$L = \lambda^{-1} D_t + H(t, \overset{2}{x}, \lambda^{-1} \overset{1}{D}_x; (i\lambda)^{-1}), \tag{10.3}$$

$t \geqslant 0$, $x \in \mathbf{R}^n$; H есть λ-п.д.о. В операторе H переменная t играет роль параметра. Относительно начальных данных предполагается, что $u_0(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $S_0(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, функция $S_0(x)$ вещественнозначна.

Будем предполагать, что выполнено условие

H 10.1. Символ $H(t, x, p; (i\lambda)^{-1})$ вещественнозначен при $-\infty < t < \infty$, $\lambda \geqslant 1$, $(x, p) \in \mathbf{R}^{2n}$ и принадлежит классу $T_t^m(\mathbf{R}_x^n)$ при каждом фиксированном t, $0 \leqslant t \leqslant T$, где m не зависит от t. Постоянные $C_{\alpha\beta}$ в оценке (2.6) можно выбрать не зависящими от t.

Выбор начальных данных (10.2) не случаен и диктуется существом задачи. Не для всяких начальных данных асимптотика решения будет описываться в терминах классической механики, т. е. в терминах уравнения Гамильтона — Якоби.

Требуется, чтобы начальные условия удовлетворяли *принципу соответствия*, т. е. чтобы при $h = \lambda^{-1} \to 0$ все квантовомеханические величины, имеющие физический смысл, переходили в классические. В частности, импульс $p = -\lambda^{-1} D_x u$ должен иметь классический предел при $\lambda \to +\infty$. Для начальных данных вида (10.2) это условие выполняется:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-1} D_x u \big|_{t=0} = u_0(x) \frac{\partial S_0(x)}{\partial x}.$$

Более общие начальные данные будут рассмотрены ниже.

Очевидно, что не всякие начальные данные удовлетворяют принципу соответствия. Если, например, рассмотреть для свободного уравнения Шредингера

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

задачу Коши

$$\psi \big|_{t=0} = \varphi(x) \exp\left(\frac{ix}{h^2}\right), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}),$$

где $\varphi \not\equiv 0$, то среднее значение импульса, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\overline{\psi}(t, x)\, ih \frac{\partial\psi(t, x)}{\partial x}\, dx,$$

будет стремиться к бесконечности при $h \to 0$.

Данные Коши (10.2) обладают следующим замечательным свойством: они индуцируют n-мерное лагранжево многообразие

$$\Lambda_0^n = \left\{(x, p)\colon\ p = \frac{\partial S_0(x)}{\partial x},\ x \in \mathbf{R}^n\right\}$$

в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}_{x,\,p}$. Выберем в качестве объема на Λ_0^n форму $d\sigma^n(x) = dx$ и фиксируем точку $r^0 = (x^0, p^0) \in \Lambda_0^n$. Тогда данные Коши (10.2) примут вид

$$u|_{t=0} = \exp\,[i\lambda S(x^0)\, K_{\Lambda_0^n} u_0(x)], \tag{10.2'}$$

где K — канонический оператор, отвечающий неособой карте (см. (6.2)),

Естественным обобщением задачи Коши (10.1), (10.2) служит задача с начальными данными

$$u|_{t=0} = K_{\Lambda_0^n} u_0(x), \tag{10.4}$$

где $u_0 \in C_0^\infty(\Lambda_0^n)$, K — канонический оператор. Такие данные Коши будем называть *каноническими*. Данные Коши вида (10.4) образуют более широкий класс, чем данные Коши вида (10.2), так как канонический оператор не сводится к оператору умножения на функцию.

Система Гамильтона, отвечающая оператору L, имеет вид (см. § 3)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(t, x, p; 0)}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(t, x, p; 0)}{\partial x}. \tag{10.5}$$

Далее,

$$\frac{dS}{dt} = \left\langle p, \frac{dH(t, x, p; 0)}{dp}\right\rangle - H(t, x, p; 0), \tag{10.6}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial H(t, x, p; 0)}{\partial t}, \qquad \frac{dt}{dt} = 1, \tag{10.7}$$

где E — двойственная к t переменная. Система (10.5) — это укороченная система Гамильтона; именно, вместо $(2n+2)$-мерного фазового пространства (t, x, E, p) мы рассматриваем $2n$-мерное фазовое пространство (x, p).

Данные Коши (10.2) индуцируют лагранжеву задачу Коши

$$x\,|_{t=0} = y, \quad p\,|_{t=0} = \frac{\partial S_0(y)}{\partial y}, \qquad y \in \mathbf{R}^n_y \tag{10.8}$$

для системы Гамильтона (10.5). Множество $\Lambda^n_0 = \{(x, p): x = y,\ p = \frac{\partial S_0(y)}{\partial y},\ y \in \mathbf{R}^n\}$ есть n-мерное лагранжево C^∞-многообразие в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$, которое диффеоморфно проектируется на x-пространство.

Метод построения квазиклассической асимптотики канонической задачи Коши описывает следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n_0 & \xrightarrow{g^t} & g^t\Lambda^n_0 \\ \Big\downarrow \text{кв} & & \Big\downarrow \\ K_{\Lambda^n_0} & \xrightarrow{L_t} & K^{g^t}_{g^t\Lambda^n_0} = u(t). \end{array}$$

(Несущественные для понимания множители, вроде $\exp\,[i\lambda S_0(x)]$, опущены.)

1. Квантовый объект — гамильтониан L — индуцирует классический объект — систему Гамильтона — и сдвиг g^t.

2. Канонические данные Коши для уравнения (10.1) — это пара (Λ^n_0, u_0), где Λ^n_0 есть n-мерное лагранжево многообразие в фазовом пространстве, u_0 — функция на Λ^n_0.

3. Эволюция во времени многообразия Λ^n_0 происходит по законам классической механики. Именно, сдвиг вдоль траекторий системы Гамильтона g^t: $\Lambda^n_0 \to g^t\Lambda^n_0$, где $g^t\Lambda^n_0$ также является n-мерным лагранжевым C^∞-многообразием.

4. Теперь мы возвращаемся от классических объектов к квантовым. По начальным данным (Λ^n_0, u_0) строим канонический оператор $K_{\Lambda^n_0}$. Эволюция функции $K_{\Lambda^n_0} u_0$ (т. е. данных Коши) во времени происходит в силу оператора L_t. а эволюция ее асимптотики — в силу оператора g^t, т. е. $u_0(x) \to u(t, x) \approx K_{g^t\Lambda^n_0} u_0$. Точные формулы приведены ниже (см. (10.17)).

Другой подход связан с рассмотрением полного $(2n+2)$-мерного фазового пространства. Данные Коши (10.2) порождают n-мерное лагранжево многообразие

$\widetilde{\Lambda}_0^n$ в $(2n+2)$-мерном фазовом пространстве с координатами (t, x, E, p). Именно,

$$\widetilde{\Lambda}_0^n = \{(\widetilde{x}, \widetilde{p}): (x, p) \in \Lambda_0^n, \ t=0, \ E = -H(0, x, p; 0)\},$$

где $\widetilde{x} = (t, x)$, $\widetilde{p} = (E, p)$. Пусть $G^t: \mathbf{R}^{2n+2} \to \mathbf{R}^{2n+2}$ — оператор сдвига вдоль траекторий полной гамильтоновой системы (10.5), (10.7). Тогда множество

$$\Lambda^{n+1} = \bigcup_{-\infty<t<\infty} G^t \widetilde{\Lambda}_0^n$$

есть лагранжево $(n+1)$-мерное многообразие в $\mathbf{R}^{2n+2}$, если выполнены условия предложения 4.19. Многообразие Λ^{n+1} по построению инвариантно относительно сдвигов вдоль траекторий полной гамильтоновой системы. Асимптотика решения задачи Коши (10.1), (10.2) может быть получена с помощью канонического оператора $K_{\Lambda^{n+1}}$.

2. Асимптотика решения задачи Коши. Помимо условия H 10.1, введем условие

H 10.2. Решение задачи Коши (10.8) для системы Гамильтона (10.5) существует и бесконечно дифференцируемо в слое Π_T: $y \in \mathbf{R}^n$, $0 \leqslant t < T$.

Построим асимптотику решения задачи Коши (10.1), (10.2). Отметим, что мы построим ф.а. решение, т. е. функцию, которая точно удовлетворяет данным Коши и приближенно удовлетворяет уравнению $Lv = O(\lambda^{-2})$. Строгое обоснование асимптотической формулы требует оценки нормы обратного оператора; в простейшем случае эта оценка будет получена в п. 3. Рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса

$$\frac{d\varphi}{dt} - M\varphi = 0, \qquad \varphi|_{t=0} = u_0(y), \tag{10.9}$$

где обозначено:

$$M = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H^0}{\partial x_j \partial p_j} - \frac{\partial H^0}{\partial \varepsilon}, \quad H^0 = H(t, x, p; 0), \tag{10.10}$$

и в этих формулах $x = x(t, y)$, $p = p(t, y)$ (т. е. точка (x, p) лежит на фазовой траектории, которая в начальный момент времени $t = 0$ проходит через точку $\left(y, \frac{\partial S_0(y)}{\partial y}\right)$).

Решение этой задачи имеет вид

$$\varphi = \exp\left(\int_0^t M\,dt'\right) u_0(y). \tag{10.11}$$

Здесь и далее

$$\frac{\partial H^0}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} H(t,\ x,\ p)\,|_{\varepsilon=0}.$$

Так как $u_0(y)$ — финитная функция, то при $0 \leqslant t \leqslant T$ функция φ отлична от нуля только на компакте $\mathscr{F}_T$ в фазовом пространстве: $\mathscr{F}_T = \bigcup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} g^t r$, где $r = \left(y,\ \frac{\partial S_0(y)}{\partial y}\right)$, $y \in \operatorname{supp} u_0$.

Рассмотрим $(n+1)$-мерное лагранжево многообразие Λ^{n+1} в фазовом пространстве $(t,\ x,\ E,\ p)$ и введем обозначения:

$$r(y) = \left(y,\ \frac{\partial S_0(y)}{\partial y}\right), \qquad r_t(y) = g^t r(y),$$

$$\tilde{r}(y) = (0,\ -H(0,\ r^0(y);\ 0),\ r^0(y)),$$

$$r^0 = r(y^0), \qquad \tilde{r}^0 = \tilde{r}(y^0),$$

где y^0 — фиксированная точка. В качестве объема на Λ^{n+1}, инвариантного относительно сдвига G^t, выберем

$$d\sigma^{n+1}(G^t\tilde{r}(y)) = dt\,dy.$$

Рассмотрим функцию

$$v(t,\ x) = \exp\,[i\lambda S_0(x^0)]\,K_{\Lambda^{n+1}}\varphi, \tag{10.12}$$

где φ определяется из (10.11), при $0 \leqslant t \leqslant T$. Как было отмечено выше, функция φ отлична от нуля только на некотором компакте $\tilde{\mathscr{F}}_T$, проекция которого на $\mathbf{R}^{2n}_{x,\,p}$ совпадает с $\mathscr{F}_T$. Выберем разбиение единицы, по которому строится канонический оператор на Λ^{n+1}, так, чтобы только конечное число функций e_j было отлично от нуля на $\tilde{\mathscr{F}}_T$; тогда функция v будет тождественно равна нулю вне некоторого компакта $\tilde{\tilde{\mathscr{F}}}_T$ в $\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_t$. Далее, $\operatorname{supp} u_0$ можно заключить в неособую карту и определить канонический оператор в ней по простейшей формуле (6.2).

Теорема 10.1. *Функция* v, *заданная формулой* (10.12), *удовлетворяет начальному условию* (10.2). *Далее,*

$$Lv = \lambda^{-2}\psi(t, x, \lambda) \tag{10.13}$$

и при $\lambda \geqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$ *и при любом целом* $N \geqslant 0$ *выполняется оценка*

$$|\psi(t, x, \lambda)| \leqslant C_N (1 + |x|)^{-N}. \tag{10.14}$$

Доказательство. Имеем

$$v(0, x, \lambda) = \exp[i\lambda S_0(x^0)] K_{\Lambda^{n+1}}\varphi|_{t=0} =$$

$$= \exp\left[i\lambda(S_0(x^0)) + \int_{\tilde{r}^0}^{\tilde{r}(y)} (\langle p, dx\rangle - H\,dt)\right]\varphi|_{t=0} =$$

$$= \varphi|_{t=0} = u_0(y).$$

Здесь мы воспользовались тем, что интеграл

$$\int \langle p, dx\rangle - H\,dt, \tag{10.15}$$

взятый по кривой, лежащей на Λ^{n+1}, не зависит от пути интегрирования, так что в качестве кривой, соединяющей точки $\tilde{r}^0$, $\tilde{r}(y)$, можно взять путь, на котором $t = 0$. Тогда (здесь и далее $y^0 = x^0$)

$$\int_{\tilde{r}^0}^{\tilde{r}(y)} \langle p, dx\rangle = \int_{\tilde{r}^0}^{\tilde{r}(y)} dS_0(y) = S_0(y) - S_0(y^0).$$

Далее, из формулы коммутации (8.10) и из того, что функция φ удовлетворяет уравнению переноса (10.9), следует, что

$$LK_{\Lambda^{n+1}}\varphi = O(\lambda^{-2})$$

равномерно по $x \in \mathbf{R}^n$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Более точная оценка (10.14) вытекает из финитности функции φ по переменным x, p и из теорем 2.6, 5.2 и леммы 6.3.

Выразим функцию v через канонические операторы $K_{\Lambda_t^n}$ (рис. 2); это дает более обозримые асимптотические формулы для v. Производящая функция $\tilde{S}$, ассоциированная с многообразием Λ^{n+1}, имеет вид (10.15). Лагранжево многообразие Λ_t^n параметризуется параметрами y. Пусть $\tilde{r}_t(y) = G^t\tilde{r}(y)$. В силу независимости интеграла (10.15) от пути интегрирования на Λ^{n+1} имеем

$$\int_{\tilde{r}^0}^{\tilde{r}_t(y)} (\langle p, dx\rangle - H\,dt) = \int_{\tilde{r}^0}^{\tilde{r}_t(y^0)} (\langle p, dx\rangle - H\,dt) + \int_{r_t(y^0)}^{r_t(y)} \langle p, dx\rangle, \quad (10.16)$$

где первый интеграл в правой части берется вдоль фазовой траектории в $\mathbf{R}^{2n+2}$, а второй — вдоль кривой, лежащей на Λ_t^n. Первый из этих интегралов есть функция только от t, последний есть действие на многообразии Λ_t^n.

Далее, в определение канонических операторов $K_{\Lambda_t^n}$, $K_{\Lambda^{n+1}}$ входит индекс кривой. Заменяя, как и выше, кривую на Λ^{n+1}, соединяющую точки $\tilde{r}^0$ и $\tilde{r}_t(y)$, суммой двух кривых, получаем в силу аддитивности индекса и односвязности рассматриваемых многообразий, что индекс этой кривой равен

$$\operatorname{ind}\tilde{\gamma}[\tilde{r}^0, \tilde{r}_t(y^0)] + \operatorname{ind}\gamma[\tilde{r}_t(y^0), \tilde{r}_t(y)].$$

Последний индекс естественным образом войдет в оператор $K_{\Lambda_t^n}$, а первый даст численный множитель. Окончательно получаем следующую «рабочую» асимптотическую формулу:

$$v(t, x, \lambda) = e^{i\delta}K_{\Lambda_t^{n+1}}\varphi, \quad (10.17)$$

$$\delta = \lambda\left[S_0(y^0) + \int_{\tilde{r}^0}^{\tilde{r}_t(y^0)} (\langle p, dx\rangle - H\,dt) - \frac{\pi}{2}\operatorname{ind}\tilde{\gamma}[\tilde{r}^0, \tilde{r}_t(y^0)]\right].$$

Замечание 10.2. Очевидно, что теорема 10.1 остается в силе, если условия H 10.1, H 10.2 выполнены при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Замечание 10.3. Теорема 10.1 остается в силе для лагранжевой задачи Коши (10.1), (10.2′) с функцией $u_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Следствие 10.4. *Пусть условия теоремы 10.1 выполнены и $\hat{H}$ — оператор с симметричным символом:*

$$\hat{H} = \frac{1}{2}[H(t, \overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x) + H(t, \overset{1}{x}, \lambda^{-1}\overset{2}{D}_x)].$$

Тогда

$$v(t, x, \lambda) = e^{i\delta} K_{\Lambda_t^n} u_0. \tag{10.18}$$

Приведем явную формулу для ф. а. решения в нефокальных точках. Введем условие

H 10.3. Пусть точка (t, x) такова, что имеется конечное число фазовых траекторий, проекции которых (лучи) в момент времени t приходят в точку x, и точка (t, x) нефокальная.

Это означает, что задача

$$X|_{\tau=0} = y, \qquad P|_{\tau=0} = \frac{\partial S_0(y)}{\partial y}, \qquad X|_{\tau=t} = x \tag{10.19}$$

для гамильтоновой системы (10.5) разрешима при конечном числе значений $y = y^j$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Обозначим соответствующие фазовые траектории так:

$$l_j(t, x) = \{X = X(\tau, y^j),\ P = P(\tau, y^j),\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\},$$

так что $X(t, y^j) = x$. Положим

$$J(t, y) = \det \frac{\partial X(t, y)}{\partial y}; \tag{10.20}$$

тогда $J(t, y^j) \neq 0$ по условию. Введем обозначения:

$$S_j(t, x) = S_0(y^j) + \int_0^t (\langle p, dx\rangle - H\,dt'), \tag{10.21}$$

где интеграл берется вдоль траектории $l_j(t, x)$,

$$m_j(t, x) = \operatorname{ind} l_j(t, x). \tag{10.22}$$

Теорема 10.5. *При условиях* *H* 10.1 — *H* 10.3 *ф. а. решение задачи Коши* (10.1), (10.2) *имеет вид*

$$v(t, x, \lambda) = \sum_{j=1}^N \frac{\varphi_j(t, x)}{\sqrt{|J(t, y^j)|}} \times \\ \times \exp\left[i\lambda S_j(t, x) - \frac{i\pi}{2} m_j(t, x)\right]. \tag{10.23}$$

Здесь $\varphi_j(t, x)$ определяется по формуле (10.13), где интеграл берется по фазовой траектории $l_j(t, x)$.

Доказательство следует из (10.17) и определения канонического оператора.

3. Об оценке обратного оператора. В п. 2 было построено формальное асимптотическое решение задачи Коши (10.1), (10.2). Именно была построена функция S (см. (10.17)), которая удовлетворяет данным Коши, а при подстановке в уравнение (10.1), дает малую невязку (т. е. $< v = O(\lambda^{-1})$ при $\lambda \to +\infty$). Однако остается открытым вопрос: будет ли «приближенное решение» v близко к истинному решению u?

Этот вопрос является и крайне важным, и крайне трудным. Имеются примеры, когда дифференциальное уравнение имеет формальное асимптотическое решение, но не существует никакого истинного решения с такой асимптотикой [20].

Приведем один результат, позволяющий получить строгое обоснование асимптотики, т. е. позволяющий доказать близость ф. а. решения и истинного решения. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $A: \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ — самосопряженный оператор с областью определения $D(A)$, $f(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — функция со значениями в $\mathscr{H}$ и функция $\|f(t)\|$ непрерывна при $0 \leqslant t \leqslant T$. Рассмотрим задачу Коши (см. [66])

$$\begin{gathered} i\frac{du}{dt} = Au + f(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0) = u_0 \in D(A). \end{gathered} \tag{10.24}$$

П р е д л о ж е н и е 10.6. *Решение задачи Коши* (10.24) *существует, единственно и удовлетворяет оценке*

$$\|u(t)\| \leqslant \|u_0\| + \int_0^t \|f(\tau)\|\, d\tau \tag{10.25}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из явного вида решения

$$u(t) = \exp(-itA)u_0 + \int_0^t \exp[i(\tau - t)A] f(\tau)\, d\tau$$

и унитарности оператора $\exp(i\alpha A)$ при $\alpha \in \mathbf{R}$.

4. Задача Коши с быстро осциллирующими начальными данными и разрывы фундаментальных решений гиперболических систем. Рассмотрим строго гиперболическую систему из N уравнений с частными производными

$$\mathscr{L}u(t, x) = f(t, x). \tag{10.26}$$

Здесь $u = (u_1, \ldots, u_N)$ (вектор-столбец), $x \in \mathbb{R}^n$, f — вектор-столбец,

$$\mathscr{L} = L(\overset{2}{x}, \overset{1}{D_t}, \overset{1}{D_x}) \tag{10.27}$$

и L есть $(N \times N)$-матрица. Предполагается, что выполнено условие

L 10.1. Элементы матрицы-функции $L(x, p_0, p)$ являются полиномами степени $\leqslant m$ от переменных $(p_0, p) \in \mathbb{R}_{p_0} \times \mathbb{R}_p^n$ с коэффициентами класса $C^\infty(\mathbb{R}_x^n)$. Коэффициент при p_0^m есть единичная $(N \times N)$-матрица I.

Таким образом, символ L равен

$$L(x, p_0, p) = p_0^m I + \sum_{k=0}^{m-1} p_0^k L_k(x, p),$$

где матрицы L_k — полиномы от p с коэффициентами класса $C_0^\infty(\mathbb{R}_x^n)$.

Сформулируем условие строгой гиперболичности системы (10.26) (см. L 10.2). Пусть $L^0(x, p_0, p)$ — старшая однородная часть матрицы $L(x, p_0, p)$, т. е.

$$L(x, p_0, p) = L^0(x, p_0, p) + L^1(x, p_0, p),$$

где элементы матрицы L^0 — однородные полиномы степени m от переменных (p_0, p), а элементы матрицы L^1 — полиномы степени $\leqslant m - 1$ от тех же переменных.

L 10.2. Уравнение

$$\Delta(x, p_0, p) \equiv \det L^0(x, p_0, p) = 0 \tag{10.28}$$

относительно p_0 при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}$ имеет ровно mN корней $p_{0j} = p_{0j}(x, p)$. Все эти корни вещественны и различны при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}$.

В частности, из этого условия вытекает, что все корни $p_{0j}(x, p)$, $1 \leqslant j \leqslant mN$, бесконечно дифференцируемы при $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}$. Корни $p_{0j}(x, p)$ являются однородными функциями от p порядка 1.

Примером строго гиперболического уравнения ($N = 1$) является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(x)\,\Delta u,$$

где коэффициент $c(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $c(x) \geqslant \delta > 0$ при $x \in \mathbb{R}^n$. Если добавить к волновому оператору дифференциальный оператор первого порядка

$$a(x)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + d(x)$$

с гладкими коэффициентами, то полученное уравнение также будет строго гиперболическим.

Необходимо, кроме того, ввести требование, чтобы условие строгой гиперболичности выполнялось равномерно по переменным x. Напомним также, что в настоящей книге рассматриваются дифференциальные операторы с символами класса T. Наиболее просто формулируемым (но и наиболее грубым) условием такого рода является условие

L 10.3. Существует $a > 0$ такое, что матрица $L(x, p_0, p)$ не зависит от x при $|x| \geqslant a$ и однородна по переменным (p_0, p).

Достаточно вместо условия L 10.3 потребовать, например, чтобы коэффициенты (при степенях p_0, p матрицы L) достаточно быстро выходили на постоянные при $|x| \to \infty$ и чтобы достаточно большое число их производных стремилось к нулю при $|x| \to \infty$. Предельный символ $L(\infty, p_0, p)$, разумеется, обязан быть строго гиперболическим.

Поставим задачу Коши для уравнения (10.27):

$$D_t^k u\Big|_{t=0} = u_k(x), \qquad 0 \leqslant k \leqslant m-1. \tag{10.29}$$

Теория задачи Коши для гиперболических уравнений развита в работах [84], [78], [17]. Нам понадобится только один, сравнительно грубый факт.

Пусть данные Коши — $u_k(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, а правая часть $f(t, x) \in C^\infty$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbf{R}^n$. Тогда (при условиях L 10.1—L 10.3) решение задачи Коши (10.26), (10.29) существует, единственно и бесконечно дифференцируемо при $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbf{R}^n$.

Система (10.26) не содержит большого параметра λ, однако через некоторое время таковой параметр появится.

Введем понятие *матрицы Грина* $G(t, x, x^0)$ задачи Коши (или просто матрицы Грина) для оператора $\mathscr{L}$. *Матрицей Грина* называется $(N \times N)$-матрица $G(t, x, x^0)$, которая удовлетворяет однородному (матричному) уравнению

$$\mathscr{L}G = 0 \tag{10.30}$$

при $x \in \mathbf{R}^n$, $t > 0$ и данным Коши

$$\begin{aligned} D_t^k G\Big|_{t=0} &= 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant m-2; \\ D_t^{m-1} G\Big|_{t=0} &= \delta(x - x^0) I. \end{aligned} \tag{10.31}$$

Здесь $x^0 \in \mathbf{R}^n$, I — единичная $(N \times N)$-матрица и δ есть дельта-функция Дирака. Если $\mathscr{L}$ — скалярный оператор ($N = 1$), то G — скалярная функция, которая называется *фундаментальным решением* задачи Коши [13].

Матрица Грина G является обобщенной функцией. Можно рассматривать G как функционал над пространством $D = C_0^\infty(\mathbf{R}_x^n)$ (матрица G продолжена нулем в полупространство $t < 0$), зависящий от t как от параметра. Наша задача — исследовать разрывы матрицы Грина.

Пусть $G^0(t, x, x^0)$ есть $(N \times N)$-матрица, которая удовлетворяет уравнению

$$\mathscr{L}G^0 = f(t, x) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in \mathbf{R}^n) \tag{10.32}$$

и данным Коши

$$D_t^k G^0\Big|_{t=0} = u_k(x), \qquad 0 \leqslant k \leqslant m-2;$$
$$D_t^{m-2} G^0\Big|_{t=0} = \delta(x-x^0) I + u_{m-1}(x). \tag{10.33}$$

Если все функции $u_k(x)$, $f(t, x) \in C^\infty$ (при $x \in \mathbf{R}^n$, $0 \leqslant t \leqslant T$), то разность

$$G(t, x, x^0) - G^0(t, x, x^0) \in C^\infty$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbf{R}^n$. Действительно, разность $\widetilde{G} = G - G^0$ удовлетворяет уравнению (10.32) и данным Коши (10.29). Поэтому, как мы уже отмечали выше, из теории гиперболических уравнений вытекает, что $\widetilde{G} \in C^\infty$ в слое $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbf{R}^n$.

Таким образом, структура особенностей матрицы Грина G точно такая же, как и у матрицы G^0, и исследование особенностей матрицы Грина сводится к построению матрицы G^0. При построении матрицы G^0 мы ограничимся формальной схемой. Покажем, как связаны между собой фундаментальное решение G задачи Коши и решения задачи Коши с быстро осциллирующими начальными данными.

Пусть $u(t, x, p, x^0)$ — решение задачи Коши (при $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbf{R}^n$)

$$\mathscr{L}u = f(t, x, p),$$
$$D_t^k u\Big|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant m-2,$$
$$D_t^{m-1} u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \exp[i\langle p, x-x^0\rangle]. \tag{10.34}$$

Здесь $p \in \mathbf{R}^n$, $x^0 \in \mathbf{R}^n$, точка x^0 фиксирована, матрица-функция $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $\varphi(x) \equiv I$ в некоторой окрестности точки x^0. Матричная функция f будет указана ниже.

Введем обобщенную функцию $G^0(t, x, x^0)$ по формуле

$$G^0(t, x, x^0) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \eta(p) u(t, x, p, x^0)\, dp. \tag{10.35}$$

Функция $\eta(p)$ — скалярная, $\eta(p) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, равна нулю при $|p| \leqslant a$, равна единице при $|p| \geqslant a$, и η — функция только от $|p|$. Тогда разность $\widetilde{G} = G - G^0$ удовлетворяет уравнению

$$\mathscr{L}\widetilde{G} = g(t, x) \tag{10.36}$$

и данным Коши

$$D_t^k \widetilde{G}\Big|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant m-2;$$
$$D_t^{m-2} \widetilde{G}\Big|_{t=0} = \varphi_{m-1}(x). \tag{10.37}$$

Матричная функция $\varphi_{m-1}(x)$ равна (интегралы берутся по $\mathbf{R}_p^n$)

$$\varphi_{m-1}(x) = \delta(x-x^0) I - (2\pi)^{-n} \varphi(x) \int \eta(p) \exp[i\langle p, x-x^0\rangle]\, dp =$$
$$= (2\pi)^{-n} \int (1-\eta(p)) \exp[i\langle p, x-x^0\rangle]\, dp,$$

поскольку

$$\delta(x-x^0)=(2\pi)^{-n}\int \exp[i\langle p, x-x^0\rangle]\,dp,$$

а матричная функция $\varphi(x)\equiv I$ при x, близких к x^0. Функция $(1-\eta(p))\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, так что $\varphi_{m-1}(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Лемма 10.7. *Пусть при* $|p|\geqslant a$, $0\leqslant t\leqslant T$, $x\in\mathbf{R}^n$ *выполняются оценки*

$$|D^\alpha_{(t,x)}f(t, x, p)|\leqslant C_\alpha|p|^{-n-\varepsilon}, \tag{10.38}$$

где $\varepsilon>0$, *для любого мультииндекса* α. *Тогда матричная функция*

$$G(t, x, x^0)-G^0(t, x, x^0)\in C^\infty$$

при $0\leqslant t\leqslant T$, $x\in\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Из условия (10.38) следует, что правая часть уравнения (10.36)

$$g(t, x)=(2\pi)^{-n}\int f(t, x, p)\,dp$$

бесконечно дифференцируема при $0\leqslant t\leqslant T$, $x\in\mathbf{R}^n$. Данные Коши (10.37) принадлежат $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, и утверждение леммы вытекает из строгой гиперболичности оператора $\mathscr{L}$.

Формула (10.35) описывает структуру особенностей матрицы Грина G, так как разность $G-G^0=\widetilde{G}\in C^\infty$. Чтобы завершить конструкцию матрицы G^0, остается исследовать асимптотику решения задачи Коши с быстро осциллирующими начальными данными (10.34).

Роль большого параметра играет $|p|$. Введем большой параметр в оператор $\mathscr{L}$. Поделим оператор $\mathscr{L}$ на $|p|^m$, тогда он примет вид

$$|p|^{-m}\mathscr{L}=\sum_{k=0}^{m}(i|p|)^{-k}L^k(\overset{2}{x}, |p|^{-1}\overset{1}{D_t}, |p|^{-1}\overset{1}{D_x}), \tag{10.39}$$

где $L^k(x, p_0, p)$ — однородные матричные полиномы степени $m-k$ от переменных (p_0, p). Символ $|p|$-дифференциального оператора

$$\hat{L}=|p|^{-m}\mathscr{L} \tag{10.40}$$

равен

$$L(x, p_0, p)=\sum_{k=0}^{m}(i|p|)^{-k}L^k(x, p_0, p), \tag{10.41}$$

и принадлежит классу T_+^0 (см. условия L 10.1—L 10.3).

Заметим, что в данных Коши (10.34) можно считать, что $|p|\geqslant a$ (см. (10.35)). Число $a>0$ может быть выбрано сколь угодно большим, но фиксированным.

Построим ф. а. решение задачи Коши (10.34) для уравнения $\hat{L}u=0$ (т. е. для уравнения $\mathscr{L}u=0$) с точностью до $O(|p|^{-M})$, где $M>n$. Именно, найдем матричную функцию $u(t, x, p, x^0)$, которая точно удовлетворяет данным Коши (10.34) и удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}u=|p|^{-M}f_M(t, x, p),$$

где $f_M \in O_{0,T}$. Классы $O_{s,T}$ были введены в п. 2 настоящего параграфа. Тогда все условия леммы 10.7 будут выполнены, а матричная функция G^0, заданная формулой (10.35), будет иметь те же особенности, что и матрица Грина G.

Остается, используя явные асимптотические формулы для решений $u(t, x, p, x^0)$, получить явные формулы для особенностей матричной функции G^0 (т. е. для особенностей матрицы Грина G). Мы ограничимся только качественными рассмотрениями; явные формулы для особенностей см. в [26], [38], [40], [52]. Подробная библиография по данному вопросу имеется в [10].

В § 11 приведены асимптотические формулы для решения задачи Коши с быстро осциллирующими начальными данными при $m = 1$, т. е. для систем первого порядка. При малых $t \geqslant 0$ решение u есть сумма слагаемых вида

$$u = \sum_{\alpha=1}^{N} u^\alpha, \qquad u^\alpha(t, x, p, x^0) =$$
$$= \sum_{j=0}^{k} (i|p|)^{-j} \psi_j^\alpha(t, x, \omega) \exp[iS_\alpha(t, x, p)]. \tag{10.42}$$

Здесь $\omega = p/|p|$, функции S_α — однородные функции p степени 1. Функция S_α является решением задачи Коши

$$\frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + h_\alpha\left(x, \frac{\partial S_\alpha}{\partial x}\right) = 0,$$
$$S_\alpha\big|_{t=0} = \langle x - x^0, p\rangle,$$

где $h_\alpha(x, q)$ — корни уравнения

$$\det L^0(x, -h, q) = 0.$$

Возьмем одно из слагаемых (10.42), отвечающее значению $j = 0$ и подставим в интеграл (10.35). Тогда получим интеграл

$$\int_{\mathbf{R}^n} \exp[iS_\alpha(t, x, p)]\, \psi_0^\alpha(t, x, p/|p|)\, \eta(p)\, dp \tag{10.43}$$

с быстро осциллирующей фазовой функцией S_α. Особенности этого интеграла содержатся в проекции на $R^{n+1}_{t,x}$ множества $\{(t, x, p)\colon \partial S_\alpha/\partial p = 0\}$. Аналогичные выражения получаются при подстановке остальных членов суммы (10.42) в интеграл (10.35).

Покажем, где расположены особенности матрицы Грина G. С системой (10.1) ассоциированы N систем Гамильтона (напомним, что мы рассматриваем случай $m = 1$):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} = -\frac{\partial h_\alpha}{\partial p^\alpha}, \qquad \frac{\partial p^\alpha}{\partial \tau} = \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\alpha},\\ &\frac{\partial t^\alpha}{\partial \tau} = 1, \qquad \frac{\partial p_0^\alpha}{\partial \tau} = 0, \end{aligned} \tag{10.44}$$

где $1 \leqslant \alpha \leqslant N$. Данные Коши, которые индуцированы задачей Коши (10.34), имеют вид

$$x^\alpha\big|_{\tau=0}=y, \quad p^\alpha\big|_{\tau=0}=p,$$
$$t^\alpha\big|_{\tau=0}=0, \quad p_0^\alpha\big|_{\tau=0}=-h_\alpha(y,\,p), \qquad y\in \operatorname{supp}\varphi.$$

Фиксируем направление ω вектора p. Пусть $\Pi_T^\alpha(p)$ — область в фазовом пространстве, заполненная траекториями системы с номером α, при $0\leqslant\tau\leqslant T$ (трубка траекторий), $\Pi_T(p)=\bigcup\limits_{\alpha=1}^{N}\Pi_T^\alpha(p)$ и $\widetilde{\Pi}_T(p)$ — проекция объединения трубок траекторий $\Pi_T(p)$ на $\mathbf{R}^{n+1}_{t,x}$. Таким образом, $\widetilde{\Pi}_T(p)$ — это объединение трубок лучей ($1\leqslant\alpha\leqslant N$), которые при $t=0$ выходят из $\operatorname{supp}\varphi$.

Как показано в § 11, решение u задачи Коши (10.34) убывает быстрее любой степени $|p|$ при $|p|\to\infty$ вне любой фиксированной окрестности трубки $\widetilde{\Pi}_T(\omega)$ (равномерно по $t\in[0,\ T]$ и по x, лежащим на компакте, а также равномерно по ω). Следовательно, матрица $G^0\in C^\infty$ вне $\bigcup\limits_{\omega\in S^n}\widetilde{\Pi}_T(\omega)$. Напомним, что матричная функция $\varphi(x)$ (см. (10.34)) — любая такая матричная функция $\varphi(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, что $\varphi(x)\equiv I$ в окрестности точки x^0, так что $\operatorname{supp}\varphi$ может лежать в сколь угодно малой окрестности точки x^0.

Поэтому особенности матрицы Грина при $0\leqslant t\leqslant T$, $x\in\mathbf{R}^n$ содержатся в множестве $\mathcal{K}_T$, которое строится следующим образом. Поставим для каждой из систем (10.44) задачу Коши

$$x^\alpha\big|_{\tau=0}=x^0, \qquad p^\alpha\big|_{\tau=0}=p,$$
$$t^\alpha\big|_{\tau=0}=0, \qquad p_0^\alpha\big|_{\tau=0}=-h_\alpha(x^0,\,p),$$

где $|p|\geqslant 1$. Тогда $\mathcal{K}_T$ — это объединение проекции на $\mathbf{R}^{n+1}_{t,x}$ всех траекторий ($1\leqslant\alpha\leqslant N$) за время $0\leqslant\tau\leqslant T$, где p пробегает $\mathbf{R}^n$.

Аналогичный результат справедлив для гиперболических систем любого порядка m.

Рассмотрим в качестве примера волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\,\Delta u,$$

где $c>0$ — постоянная. Система Гамильтона имеет вид

$$\frac{dx}{d\tau}=2cp, \qquad \frac{dp}{d\tau}=0, \qquad \frac{dt}{d\tau}=-2p_0, \qquad \frac{dp_0}{d\tau}=0.$$

Поставим задачу Коши

$$x\big|_{\tau=0}=x^0, \quad p\big|_{\tau=0}=p, \quad t\big|_{\tau=0}=0, \quad p_0\big|_{\tau=0}=p_0,$$

где $p_0^2=c^2p^2$; тогда лучи имеют вид

$$x=x^0+2\tau cp, \qquad t=-2\tau p_0.$$

Исключая τ, получаем известный результат: множество особенностей фундаментального решения волнового уравнения содержится в световом конусе

$$(x - x^0)^2 = c^2t^2.$$

5. **Разрывы матрицы Грина, коротковолновая асимптотика резольвенты стационарной задачи, асимптотика решений нестационарной задачи при $t \to +\infty$.** Рассмотрим следующие три вопроса.

I. *Асимптотика по гладкости матрицы Грина нестационарной задачи.*

II. *Коротковолновая асимптотика (при $k \to +\infty$) резольвенты стационарной задачи.*

III. *Асимптотика решений нестационарной задачи при $t \to +\infty$.*

Задача I была рассмотрена выше, в п. 4. Оказывается, что цикл задач I, II, III может быть исследован по следующей схеме:

$$\mathrm{I} \to \mathrm{II} \to \mathrm{III}.$$

Рассмотрим задачу Коши (10.26), (10.29) и соответствующую стационарную задачу

$$(\mathscr{L}_k u)(x) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{10.45}$$

Оператор

$$\mathscr{L}_k = L(\overset{2}{x}, k, \overset{1}{D_x}) \tag{10.46}$$

получен из оператора $\mathscr{L}$ заменой $D_t \to k$.

Приведем некоторые эвристические соображения. Пусть $G(t, x, x^0)$ — матрица Грина задачи Коши, продолженная нулем в полупространство $t < 0$. Формально применяя преобразование Фурье по переменной t, получаем, что матрица-функция

$$\widetilde{G}(x, k, x^0) = \int_0^\infty e^{-ikt} G(t, x, x^0)\, dt$$

удовлетворяет уравнению

$$\mathscr{L}_k \widetilde{G} = \delta(x - x^0) I.$$

Пусть точки x, x^0 фиксированы, тогда $\widetilde{G}$ при $k \gg 1$ есть интеграл от быстро осциллирующей функции. Асимптотику этого интеграла можно вычислять, применяя метод стационарной фазы. При этом основной вклад в асимптотику интеграла $\widetilde{G}$ вносят, как известно, особенности матрицы Грина $G(t, x, x^0)$ (как функции от t).

Тем самым формально устанавливается связь между разрывами матрицы Грина задачи Коши G и коротковолновой асимптотикой матрицы Грина $\widetilde{G}$ стационарной задачи.

Строгое обоснование такой прямолинейной схемы наталкивается на серьезное препятствие — это вопрос о сходимости интеграла, представляющего матрицу $\widetilde{G}$, т. е. вопрос об асимптотике матрицы Грина G при $t \to +\infty$. Эта трудность настолько велика, что указанная простая схема почти никогда не применяется.

Изложим результаты работы [10], относящиеся к задачам I—III. В этой работе приведен подробный обзор результатов, относящихся к задачам I—III, и содержится обширная библиография.

Помимо условий L 10.1—L 10.3, вводятся следующие условия. Пусть $\Delta(x, p_0, p) = \det L^0(x, p_0, p)$. Уравнению (10.26) отвечает система Гамильтона

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{\partial\Delta}{\partial p_0}, \qquad \frac{dx}{d\tau}=\frac{\partial\Delta}{\partial p}, \qquad \frac{dp_0}{d\tau}=0, \qquad \frac{dp}{d\tau}=-\frac{\partial\Delta}{\partial x} \tag{10.47}$$

в $(2n+2)$-мерном фазовом пространстве с координатами (t, x, p_0, p). Введем дополнительные условия.

L 10.5. Для любого $x \in \mathbf{R}^n$

$$\Delta(x, 0, p) \neq 0$$

при $p \neq 0$.

Это условие эквивалентно эллиптичности оператора $\mathscr{L}_k$.

L 10.5. Траектории гамильтоновой системы (10.47), которые выпущены из шара $|x| \leqslant a$ и на которых $\Delta = 0$, уходят на бесконечность.

Точнее, для любого $R < \infty$ существует $T(R) < \infty$ такое, что траектории системы (10.45) с данными Коши

$$t(0)=0, \quad x(0)=x^0, \quad p_0(0)=p_0^0, \quad p(0)=p^0,$$

где $|x^0| \leqslant a$, $\Delta(x^0, p_0^0, p^0) = 0$, лежат при $t \geqslant T(R)$ в области $|x| \leqslant R$. Число a указано в условии L 10.3.

Из этих условий вытекает, что разрывы матрицы Грина $G(t, x, x^0)$, где $|x^0| \leqslant a$, уходят на бесконечность при $t \to +\infty$.

Обозначим через $H^s(\Omega)$ пространство С. Л. Соболева функций в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, производные которых до порядка s суммируемы с квадратом. Ниже всегда $s \geqslant 0$ — целое. Точно так же обозначаются пространства вектор-функций и матриц-функций, все элементы которых принадлежат пространству $H^s(\Omega)$.

Введем резольвенту R_k стационарной задачи и исследуем ее аналитические свойства (по параметру k). Рассмотрим оператор R_k (резольвенту)

$$R_k\colon H^s(\mathbf{R}^n) \to H^{s+m}(\mathbf{R}^n)$$

в полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$. Этот оператор действует по формуле

$$R_k f = u,$$

где $f \in H^s(\mathbf{R}^n)$, а u — решение уравнения $\mathscr{L}_k u = f$, принадлежащее $H^{s+m}(\mathbf{R}^n)$. В полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$ резольвента R_k является конечно-мероморфной функцией k [9].

Все точки вещественной оси k принадлежат непрерывному спектру резольвенты, так что оператор R_k не продолжается аналитически из верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$ в нижнюю. С резольвентой R_k можно связать такой оператор $\hat{R}_k$, который допускает аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость.

Пусть $H^s_a \subset H^s(\mathbf{R}^n)$ — пространство функций, тождественно равных нулю при $|x| \geqslant a$. Введем оператор

$$\hat{R}_k\colon H^s_a \to H^s \quad (|x| \leqslant b),$$

где $b \geqslant a$ — фиксированная постоянная. По определению

$$\hat{R}_k f(x) \equiv R_k f(x) \quad (|x| \leqslant b),$$

если функция $f(x) \in H^s_a$. Оператор $\hat{R}_k$ получается, таким образом, из резольвенты R_k, если сузить ее область определения с $H^s(\mathbf{R}^n)$ до H^s_a и расширить область значений с $H^{s+m}(\mathbf{R}^n)$ до $H^{s+m}(|x| \leqslant \leqslant b)$.

Оператор $\hat{R}_k$ продолжается на всю комплексную плоскость как *конечно-мероморфная* функция, если n нечетно (n — размерность пространства), и на риманову поверхность функции $\ln k$, если n четно [9].

Получим асимптотику оператора $\hat{R}_k$ при $|k| \to \infty$ в области

$$U_{\alpha,\beta} = \{k\colon |\operatorname{Im} k| < \alpha \ln |\operatorname{Re} k| - \beta\},$$

где α, β — постоянные. Точнее, будет получена асимптотика функции $\hat{R}_k f$, где функция f принадлежит пространству H^s_a (т. е. финитна). Асимптотику ядра резольвенты $G(x, x^0, k)$ при таком подходе получить не удается.

Построим матрицу $G_M(t, x, x^0)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\mathscr{L} G_M = f_M(t, x, x^0), \qquad t > 0,$$

и данным Коши

$$D_t^j G_M \big|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leqslant \quad \leqslant m-2;$$

$$D_t^{m-1} G_M \big|_{t=0} = \delta(x - x^0) I.$$

Здесь $f_M \in C^M$ ($M \geqslant 2$) по переменным (t, x, x^0) и при любом $R > 0$

$$G_M(t, x, x^0) \equiv 0 \qquad (|x| \leqslant R, \quad t \geqslant t(R) + 1).$$

Число $T(R)$ определено в условии L 10.5.

Очевидно, что в качестве G_M можно взять матрицу-функцию

$$G_M(t, x, x^0) = G^0(t, x, x^0)\, h(t, x),$$

где $h \in C^\infty$ при $t \geqslant 0$, $x \in \mathbf{R}^n$, $h \equiv 1$ при $t < T(R) + 1/2$ и $h \equiv 0$ при $t > T(R) + 1$, а конструкция матрицы G^0 указана в п. 4. Матрица G^0 строится с помощью канонического оператора.

Обозначим через $\hat{R}_{M,k}$ преобразование Фурье интегрального оператора с ядром G_M, т. е.

$$\hat{R}_{M,k}\varphi = \int_0^\infty \int_{|x^0| \leqslant a} G_M(t, x, x^0)\, \varphi(x^0)\, e^{ikt}\, dx^0\, dt, \tag{10.48}$$

где интеграл понимается в смысле обобщенных функций. Оказывается, что оператор $\hat{R}_{M,k}\colon H^s_a \to H^{s+m}(|x| \leqslant b)$ близок к оператору $\hat{R}_k$ при $|k| \to \infty$, $k \in U_{\alpha,\beta}$.

Теорема 1. *Пусть n нечетно. Если M достаточно велико, то оператор $\hat{R}_{M,k}$ ограничен при всех k и является целой функцией k. При $|k| \gg 1$ выполняются оценки*

$$\| \hat{R}_{M,k} f \|_{s+m-j,(b)} \leqslant C |k|^{1-j} \exp(\gamma |\operatorname{Im} k|) \| f \|_{s,a}, \quad 0 \leqslant j \leqslant m+1, \tag{10.49}$$

где γ — постоянная. При $k \in U_{\alpha,\beta}$ выполняются оценки

$$\| (\hat{R}_k - \hat{R}_{M,k}) f \|_{s+m-j,(b)} \leqslant C |k|^{-j} \exp(\gamma |\operatorname{Im} k|) \| f \|_{s,a}. \tag{10.50}$$

Здесь $\| f \|_{s,a}$, $\| f \|_{s,(b)}$ — нормы в пространствах H^s_a, $H^s(|x| \leqslant b)$ соответственно и оценка (10.50) справедлива при некоторых α, β, $\gamma > 0$. Аналогичные результаты получены при n четном.

Эта теорема дает асимптотику функции $(\hat{R}_k f)(x)$ (т. е. решения уравнения (10.45) с финитной правой частью $f \in H^s_a$), когда $k \to \infty$ в области вида $U_{\alpha,\beta}$, а x лежит на компакте $|x| \leqslant b$. В частности, оценки (10.49), (10.50) в сочетании с формулой (10.48) дают асимптотику при $k \to +\infty$ резольвенты $(R_k f)(x)$ на компакте $|x| \leqslant b$.

Кроме того, теорема 1 позволяет вычислить асимптотику (при $t \to +\infty$) решения задачи Коши для однородного уравнения (10.26) с финитными начальными данными. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered} \mathcal{L} u = 0; \ D_t^k u \big|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant m-2; \\ D_t^{m-1} u \big|_{t=0} = \varphi(x), \end{gathered} \tag{10.51}$$

где $\varphi(x) \in H^s_a$.

Пусть n нечетно; тогда оператор $\hat{R}_k$ в каждой полосе $c_1 < \operatorname{Im} k < c_2$ конечной ширины имеет не более конечного числа полюсов.

Теорема 2. *Пусть n нечетно, на прямой $\operatorname{Im} k = q$ нет полюсов оператора $\hat{R}_k$. Тогда справедливо асимптотическое разложение для решения задачи Коши* (10.51):

$$u(t, x) = -i \sum_{\operatorname{Im} k_j < q} \operatorname*{res}_{k=k_j} (\hat{R}_k \varphi(x) e^{-ikt}) + u_q(t, x). \tag{10.52}$$

Для остаточного члена справедлива оценка

$$\| u_q \|_{s+m,(b)} \leqslant c_q e^{qt} \| \varphi(x) \|_{s,a}. \tag{10.3}$$

Оценки (10.52), (10.53) имеют место при $t \geqslant t_0 \gg 1$, так что формула (10.52) дает асимптотическое разложение решения u при $t \to +\infty$.

Заметим, что сумма в правой части формулы (10.52) состоит из конечного числа слагаемых.

Аналогичные результаты получены при четной размерности пространства.

Теорема 2 выводится из теоремы 1 следующим образом. С помощью формулы обращения преобразования Лапласа получаем, что

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-ikt} R_k \varphi(x)\, dk,$$

где $c > 0$ таково, что оператор $\hat{R}_k$ не имеет полюсов при $\operatorname{Im} k \geqslant c$. В силу оценок, полученных в теореме 2, контур интегрирования можно двигать параллельно вещественной оси, так что функция u равна интегралу по прямой $\operatorname{Im} k = q < c$ и сумме вычетов подынтегрального выражения, лежащих в полосе $c < \operatorname{Im} k < q$. Строгое обоснование этих соображений приводит к теореме 2.

Аналогичные результаты получены в [10] для смешанной задачи для нестационарного уравнения (10.26) и для соответствующего стационарного уравнения. Именно, рассматривается задача (10.26), (10.29) при $t > 0$, $x \in \Omega$, где Ω — внешность ограниченной области в $\mathbf{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. На $\partial\Omega$ поставлены краевые условия

$$B(x, D_t, D_x)\, u(t, x) = 0 \qquad (t > 0,\ x \in \partial\Omega), \tag{10.54}$$

где B есть $\left(\frac{mN}{2} \times N\right)$-матрица из дифференциальных операторов порядка $\leqslant m - 1$ с коэффициентами класса $C^\infty(\partial\Omega)$. Предполагается, что краевая задача для стационарного уравнения

$$\mathscr{L}_k v = f,\ x \in \Omega; \quad B(x, k, D_x)\, v = \varphi,\ x \in \partial\Omega,$$

является коэрцитивной задачей с параметром хотя бы для одного луча $k = \rho e^{i\varphi_0}$ $(0 < \rho < \infty,\ 0 < \varphi_0 < \pi)$; подробнее см. [9]. Условия L 10.1—L 10.4 по-прежнему предполагаются выполненными. Вместо условия L 10.5 (которое является требованием на поведение траекторий гамильтоновой системы, ассоциированной с оператором $\mathscr{L}$) вводится условие, смысл которого состоит в следующем. Пусть $G(t, x, x^0)$ — матрица Грина смешанной задачи (т. е. G удовлетворяет однородному уравнению, однородным краевым условиям и данным Коши (10.31)). Требуется, чтобы разрывы матрицы Грина G уходили на бесконечность при $t \to +\infty$.

В [10] получена также асимптотика решения задачи о рассеянии в квазиклассическом приближении для стационарного уравнения Шредингера с финитным потенциалом.

§ 11. Матричные гамильтонианы

В этом параграфе рассматривается задача Коши с быстро осциллирующими начальными данными для систем уравнений. Предполагается, что характеристики соответствующих операторов вещественны и имеют постоянную кратность. Получены уравнения переноса и построена асимптотика решения задачи Коши в большом.

1. Уравнение Гамильтона — Якоби. Пусть u есть N-вектор (столбец) $u(x) = (u_1(x), \quad u_N(x))$, $x \in \mathbf{R}^n$, и L есть $(N\times N)$-матрица с элементами $L_{jk}(x,\ p;\ (i\lambda)^{-1})$. Рассмотрим систему из N уравнений

$$L(\overset{2}{x},\ \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x;\ (i\lambda)^{-1})\,u=0. \tag{11.1}$$

Будем предполагать всюду в этом пункте, что выполнено условие

L 11.1. Символ оператора L принадлежит классу T_+^m (см. определение 2.5), т. е. все элементы L_{jk} матрицы $L(x,\ p;\ (i\lambda)^{-1})$ принадлежат классу T_+^m с одним и тем же m.

Будем искать ф. а. решение уравнения (11.1) в виде формального ряда

$$u(x,\ \lambda)=\exp\,[i\lambda S(x)]\sum_{m=0}^{\infty}(i\lambda)^{-m}\varphi^m(x). \tag{11.2}$$

Применяя теорему 2.6 к операторам L_{jk}, получаем $\exp(-i\lambda S)\,L(\varphi\exp(i\lambda S))=$

$$=R_0\varphi+(i\lambda)^{-1}R_1\varphi+O_{-2}(x,\ \lambda). \tag{11.3}$$

Операторы R_0, R_1 имеют вид

$$(R_0\varphi)(x)=L\left(x,\frac{\partial S(x)}{\partial x};\ 0\right)\varphi(x),$$

$$(R_1\varphi)(x)=\frac{\partial L}{\partial p}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+\frac{1}{2}\operatorname{Sp}(S''_{xx}(x)\,L''_{pp})\,\varphi(x)+\frac{\partial L}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\varphi(x), \tag{11.4}$$

где значение матрицы L берется в точке $\left(x,\ \dfrac{\partial S(x)}{\partial x};\ 0\right)$. Напомним, что $R_0\varphi$, $R_1\varphi$ — это N-векторы (столбцы). Для симметрии мы сохраним те же обозначения, что и для скалярных гамильтонианов. В покомпонентной записи имеем

$$(R_1\varphi)_m=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L_{mj}}{\partial p_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k,\ m=1}^{n}\frac{\partial^2L_{mj}}{\partial p_k\,\partial p_m}\frac{\partial^2S}{\partial x_k\,\partial x_m}\varphi_j+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial L_{mj}}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\varphi_j. \tag{11.4'}$$

Пусть $L_m=(L_{m1},\ \ldots,\ L_{mN})$ есть m-я строка матрицы L; тогда формула (11.4′) примет более компактный вид:

$$(R_1\varphi)_m=\frac{\partial L_m}{\partial p}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left(S''_{xx}\frac{\partial^2L_m}{\partial p^2}\varphi\right)+\frac{\partial L_m}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\varphi. \tag{11.4''}$$

Здесь $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ — матрица Якоби, $\frac{\partial^2 L}{\partial p^2}$ — тензор $\left(\text{т. е. } \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}\right),\ 1 \leqslant j,\ k \leqslant n, \text{ и } \left(\frac{\partial^2 L}{\partial p^2}\right)_{jk} = \frac{\partial^2 L}{\partial p_j \partial x_k}\right)$

Введем обозначения: $f(x, p)$, $f^*(x, p)$ — соответственно правый и левый нуль-векторы матрицы $L^0 = L(x, p; 0)$ (f — столбец, f^* — строка), т. е.

$$L^0 f(x, p) = 0, \quad f^*(x, p) L^0 = 0. \tag{11.5}$$

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n_x$. Нас интересуют ф. а. решения уравнения (11.1) при $\lambda \to +\infty$, $x \in \Omega$. Будем искать такое решение в виде

$$u(x, \lambda) = \exp[i\lambda S(x)]\,\varphi(x). \tag{11.6}$$

Подставляя u в уравнение (11.1) и приравнивая нулю коэффициент при λ^0 в выражении $e^{-i\lambda S} L e^{i\lambda S}\varphi$, получаем, в силу (11.3), (11.4), уравнение

$$L\left(x, \frac{\partial S(x)}{\partial x}; 0\right) \varphi(x) = 0. \tag{11.7}$$

Следовательно, при $x \in \Omega$ имеем

$$\Delta\left(x, \frac{\partial S(x)}{\partial x}\right) = 0, \tag{11.8}$$

где обозначено $\Delta(x, p) = \det L(x, p; 0)$. Это уравнение есть *уравнение Гамильтона — Якоби*, ассоциированное с оператором L.

Предложение 11.1. *Пусть функция $S(x) \in C^\infty(\Omega)$ вещественнозначна и удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби* (11.8) *в области Ω. Пусть вектор-функция $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ является правым нуль-вектором матрицы $L\left(x, \frac{\partial S(x)}{\partial x}; 0\right)$ при $x \in \Omega$. Тогда вектор-функция* (11.6) *есть решение уравнения* (11.1).

Нуль-вектор $\varphi(x)$, очевидно, определен неоднозначно; например, если $\sigma(x)$ — любая скалярная функция, то $\sigma(x)\varphi(x)$ есть нуль-вектор матрицы $L\left(x, \frac{\partial S(x)}{\partial x}; 0\right)$. Нормировка нуль-вектора $\varphi(x)$ (точнее, базиса в подпространстве нуль-векторов) находится при вычислении следующего члена асимптотики решения.

Аналогичные рассуждения проведем для эволюционной системы из N уравнений

$$Lu \equiv [I\lambda^{-1}D_t + H(t, \overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x; (i\lambda)^{-1})]\, u(t, x) = 0. \qquad (11.9)$$

Здесь $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$, $u = (u_1, \ldots, u_N)$ (вектор-столбец), H есть $(N \times N)$-матрица с элементами H_{jk}, I есть единичная матрица порядка N. Пусть H_{jk} удовлетворяют условию L 11.1. Поставим задачу Коши

$$u|_{t=0} = \exp[i\lambda S_0(x)]\, u^0(x), \qquad (11.10)$$

где $S_0 x \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $u^0(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})^n$ и функция S_0 вещественнозначна. Ф. а. решение задачи Коши (11.9), (11.10) будем искать в виде

$$u(t, x, \lambda) = \\ = \exp[i\lambda S(t, x)]\, [\varphi^0(t, x) + (i\lambda^{-1})\, \varphi^1(t, x) + \ldots] \qquad (11.11)$$

Из (11.8) следует, что функция S должна удовлетворять уравнению Гамильтона — Якоби

$$\det \left\| I\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}; 0\right) \right\| = 0. \qquad (11.12)$$

Мы будем рассматривать случай, когда собственные значения $h_\alpha(t, x, p)$ матрицы $H(t, x, p; 0)$ различны или же имеют постоянную кратность. Тогда фазовая функция S будет удовлетворять одному из уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial t} + h_\alpha\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0, \qquad (11.13)$$

которые также будем называть *уравнениями Гамильтона — Якоби*. Далее, пусть $f^\alpha(t, x, p)$, $f^{*\alpha}(t, x, p)$ — соответственно правый и левый собственные векторы матрицы $H(t, x, p; 0)$. Если S удовлетворяет уравнению (11.13), то вектор-функция $\varphi^0(t, x)$ будет правым собственным вектором матрицы $H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}; 0\right)$, т. е.

$$H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}; 0\right)\varphi^0 = h_\alpha \varphi^0. \qquad (11.14)$$

2. Уравнения переноса. Рассмотрим уравнение (11.1). В этом пункте предполагается, что символ $L(x, p; \varepsilon)$

веществен при вещественных x, p, ε и что уравнение

$$\Delta(x, p) = 0 \tag{11.15}$$

определяет C^∞-многообразие размерности $2n-1$ в фазовом пространстве. Все построения носят локальный характер (т. е. в малой окрестности некоторой точки (x^0, p^0)). Все нуль-векторы также выбираются вещественными.

Система Гамильтона, отвечающая уравнению (11.15), имеет вид

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial\Delta}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial\Delta}{\partial x}. \tag{11.16}$$

Вектор-функция $R_1\varphi$ содержит выражение $\frac{\partial L}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ (см. (11.4)), в то время как производная вектор-функции $\varphi(x)$ в силу системы Гамильтона (11.16) равна $\frac{\partial\Delta}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \dot{\varphi}$. Установим связь между производными $\frac{\partial L}{\partial p_j}$ и $\frac{\partial\Delta}{\partial p_j}$. Рассмотрим вначале случай, когда матрица $L(x, p; 0)$ имеет простой нуль-вектор.

Лемма 11.2 [26]. *Пусть*

$$\Delta(x^0, p^0) = 0, \qquad \frac{\partial\Delta(x^0, p^0)}{\partial p} \neq 0 \tag{11.17}$$

и $\operatorname{rank} L(x, p; 0) = N - 1$ *в некоторой окрестности точки* (x^0, p^0). *Тогда существует постоянная* C *такая, что*

$$f^* \frac{\partial L}{\partial p_j} f = C\frac{\partial\Delta}{\partial p_j}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{11.18}$$

в точке (x^0, p^0).

Доказательство. Фиксируем $x = x^0$. Уравнение (11.15), в силу условия (11.17), определяет C^∞-многообразие M размерности $n-1$ в окрестности точки p^0. Пусть $A_{ij}(p)$ — алгебраическое дополнение к элементу $L_{ij}(x^0, p; 0)$. По условию хотя бы одно из чисел $A_{ij}(p^0)$ отлично от нуля; пусть $A_{i_0j_0}(p^0) \neq 0$. Тогда вектор f с компонентами $A_{i_01}(p)$, $A_{i_0N}(p)$ является правым нуль-вектором матрицы $L(x^0, p; 0)$ при p, близких к p^0, $p \in M$, принадлежит классу C^∞ и отличен от нуля. Правый нуль-вектор, по условию, единствен с точностью до множителя; аналогичные утверждения справедливы для левого нуль-вектора $f^*(p)$. Дифференцируя по p

тождества $\Delta = 0$, $Lf = 0$ (при $p \in M$) и умножая последнее на f^* слева, получаем соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\Delta}{\partial p_j} dp_j = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} f^* \frac{\partial L}{\partial p_j} f\, dp_j = 0.$$

Второе из этих соотношений выполняется при $p = p^0$ для всех dp_j, связанных первым соотношением. Так как, в силу условия (11.17), среди дифференциалов dp_j имеется ровно $n - 1$ независимых, то коэффициенты $f^* \frac{\partial L}{\partial p_j} f$ при дифференциалах dp_j пропорциональны коэффициентам $\frac{\partial\Delta}{\partial p_j}$.

Эта лемма допускает обобщение на случай характеристик постоянной кратности.

Лемма 11.3 [26]. *Пусть в окрестности точки* (x^0, p^0)

1) *уравнение* (11.17) *эквивалентно уравнению* $\Delta_0(x, p) = 0$, *где* $\frac{\partial\Delta_0(x^0, p^0)}{\partial p} \neq 0$;

2) *существует базис* $\{f^1(x, p), \ldots, f^k(x, p)\}$ *класса* C^∞ *правого нуль-пространства матрицы* $L(x, p; 0)$.

Тогда существует постоянная C *такая, что*

$$f^{*\alpha} \frac{\partial L}{\partial p_j} f^\beta = C \frac{\partial\Delta_0}{\partial p_j} \qquad (11.19)$$

при всех $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, k\}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *где* $\{f^{*1}, \ldots, f^{*k}\}$ — *базис левого нуль-пространства матрицы* $L(x, p; 0)$.

Доказательство полностью аналогично доказательству предыдущей леммы.

Подставляя (11.2) в уравнение (11.1), получаем рекуррентную систему уравнений

$$R_0\varphi^0 = 0, \qquad R_0\varphi^k = -R_1\varphi^{k-1} - R_2\varphi^{k-2} - \ldots - R_k\varphi^0. \qquad (11.20)$$

Первое из этих уравнений мы уже проанализировали; исследуем остальные. Именно покажем, что эти уравнения приводят к уравнениям переноса вдоль траекторий гамильтоновой системы (11.16). Эти уравнения оказываются более сложными, чем для скалярных гамильтонианов. Дальнейшие рассмотрения носят локальный характер.

Пусть функция $S(x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби в окрестности точки x^0 и в окрестности точки (x^0, p^0), $p^0 = \partial S(x^0)/\partial x$, выполнены условия леммы 11.2, т. е. S — простая характеристика. Пусть $f(x)$, $f^*(x)$ — правый и левый нуль-векторы матрицы $L^0 = L(x, \partial S(x)/\partial x;\ 0)$ класса C^∞ при x, близких к x^0. Тогда

$$\varphi^0(x) = \sigma(x) f(x), \tag{11.21}$$

где σ — скалярная функция. Рассмотрим уравнение

$$R_0\varphi^1(x) = -R_1\varphi^0(x). \tag{11.22}$$

При фиксированном x имеем систему из n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$, причем определитель этой системы равен нулю. Для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$f^*(x) R_1\varphi^0(x) = 0 \tag{11.23}$$

(в окрестности точки x^0). Следовательно, функция $\sigma(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\sigma}{\partial x_k} f^* \frac{\partial L}{\partial p_k} f + M_1\sigma = 0, \tag{11.24}$$

$$M_1 = \sum_{k=1}^{n} f^* \frac{\partial L}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{1}{2} f^* \operatorname{Sp}(S''_{xx}L''_{pp}) f + f^* \frac{\partial L}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} f \tag{11.25}$$

(обозначения те же, что и в (11.4)). Пусть $(x(\tau), p(\tau))$ — решение системы (11.16); тогда

$$\frac{d}{d\tau}(\sigma \circ x)(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\sigma}{\partial x_k} \frac{\partial\Delta}{\partial p_k}.$$

В силу леммы 11.2 имеем

$$f^* \frac{\partial L}{\partial p_k} f = C(x) \frac{\partial\Delta}{\partial p_k} \tag{11.26}$$

(значения f^*, f берутся в точке x, значения производных от L, Δ — в точке $(x, \partial S(x)/\partial x; 0)$). Следовательно, уравнение (11.24) вдоль траектории $x = x(\tau)$, $p = p(\tau)$ имеет вид

$$C\frac{d\sigma}{d\tau} + M_1\sigma = 0. \tag{11.27}$$

Выпишем главный член ф. а. решения уравнения (11.1). Пусть на некотором гладком многообразии M размерности $n-1$ в $\mathbf{R}_x^n$ заданы согласованные значения S, ∇S (т. е. уравнение (11.8) выполняется в окрестности M). Рассмотрим лагранжеву задачу Коши

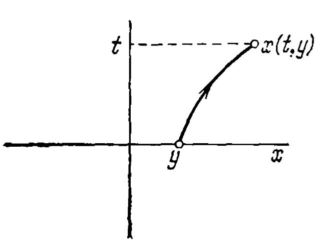

Рис. 14.

$$x|_{\tau=0} = x^0, \quad p|_{\tau=0} = p^0 = \frac{\partial S(x^0)}{\partial x}, \quad x^0 \in M,$$

для гамильтоновой системы (11.16), пусть $x(\tau; x^0)$, $p(\tau; x^0)$ — решение этой задачи Коши. В качестве $f(x)$ возьмем произвольный правый нуль-вектор матрицы $L(x, \partial S(x)/\partial x; 0)$. Тогда главный член ф. а. решения уравнения (11.1) (вблизи M) имеет (см. (11.6)) вид

$$u(x, \lambda) = \exp\left[i\lambda S(x) - \int_0^\tau C^{-1}M_1\,d\tilde{\tau}\right] f(x). \tag{11.28}$$

Здесь C, M_1 определяются из (11.18), (11.25) и интеграл берется вдоль фазовой траектории такой, что $x(\tau, x^0) = x$ (рис. 14).

3. Задача Коши (11.9), (11.10) в малом. Основная задача, которая нас интересует,— это задача Коши (11.9), (11.10). В этом случае формулы сильно упрощаются, так как оператор L является оператором первого порядка по переменной t. Введем условие

L 11.2. Матрица $H^0 = H(t, x, p; 0)$ эрмитова при $t \geqslant 0$, $(x, p) \in \mathbf{R}^{2n}$.

Последующие рассмотрения носят *локальный характер* — действие происходит в малой окрестности U фиксированной точки $Q_0 = (t_0, x^0, p^0)$. Введем условие

L 11.3. Собственные значения $h_\alpha(Q_0)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$, различны.

Тогда в малой окрестности U собственные значения h_α бесконечно дифференцируемы и существует ортонормированный базис $\{f^\alpha(t, x, p)\}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$, из собственных векторов матрицы H^0.

Уравнению Гамильтона — Якоби (11.13) отвечает система Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial h_\alpha}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial h_\alpha}{\partial x}. \tag{11.29}$$

Получим уравнения переноса. Подставляя (11.11) в эволюционное уравнение (11.9) и приравнивая нулю коэффициент при λ^{-1}, получаем уравнение

$$R_0\varphi^1 = -R_1\varphi^0, \tag{11.30}$$

$$R_0 = I\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}; 0\right).$$

Если функция S удовлетворяет уравнению (11.13), то $\det R_0 = 0$, φ^0 — собственный вектор, отвечающий собственному значению h_α. Фиксируем (гладкий) собственный вектор f^α. Тогда

$$\varphi^0 = \sigma f^\alpha,$$

где σ — скалярная функция, так как h_α — простое собственное значение. Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (11.30) является условие

$$\langle f^\alpha, R_1\sigma f^\alpha\rangle = 0. \tag{11.31}$$

Оператор R_1 имеет вид

$$R_1\varphi = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right] +$$

$$+\left[\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_j\,\partial p_k} + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}\right]\varphi = \tilde{R}_1\varphi + \tilde{\tilde{R}}_1\varphi, \tag{11.32}$$

где $H = H(t, x, p; 0)$, $p = \partial S/\partial x$. Преобразуем уравнение (11.31). Введем определитель

$$J_\alpha(t, x) = \det\frac{\partial x^\alpha(t, y)}{\partial y}. \tag{11.33}$$

Здесь $\{x^\alpha(t, y), p^\alpha(t, y)\}$ — решение гамильтоновой системы (11.29) с данными Коши

$$x|_{t=0} = y, \qquad p|_{t=0} = \frac{\partial S_0(y)}{\partial y}. \tag{11.34}$$

Уравнение (11.31) и есть искомое уравнение; именно, докажем аналог леммы 3.14 для системы уравнений.

Лемма 11.4. *Пусть условия* L 11.1 — 11.3 *выполнены*, $\sigma = \sigma(t, x)$ — *скалярная функция*, *вектор-функция* f^α *такова*, *что* $\langle f^\alpha, f^\alpha \rangle \equiv 1$. *Тогда*

$$\langle f^\alpha, R_1(\sigma f^\alpha)\rangle = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{2}\frac{d}{dt}\ln J_\alpha + M_\alpha \sigma. \tag{11.35}$$

Здесь d/dt — *производная в силу системы Гамильтона* (11.29),

$$M_\alpha = \sum_{j=1}^{n}\left\langle f^\alpha, \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial h_\alpha}{\partial p_j}\right)\frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j}\right\rangle - \\ - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial x_j\,\partial p_j} + \left\langle f^\alpha, \left.\frac{\partial H}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} f^\alpha\right\rangle + \left\langle f^\alpha, \frac{df^\alpha}{dt}\right\rangle, \tag{11.36}$$

$$H = H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}; 0\right).$$

Доказательство. Вектор-функция f^α имеет вид $f^\alpha = f^\alpha(t, x, p)$, где $p = \dfrac{\partial}{\partial x} S(t, x)$, т. е. является сложной функцией от x. Символом D_{x_j} обозначим полную производную по переменной x_j, т. е.

$$D_{x_j} f^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f^\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial^2 S}{\partial x_j\,\partial x_k}.$$

В формулу (11.32) входят полные производные. Далее, если $\varphi = \varphi(t, x, p)$ есть скалярная функция или вектор-функция, то ее производная в силу системы Гамильтона (11.29) имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h_\alpha}{\partial p_j} D_{x_j}\varphi$$

(здесь $p = \partial S/\partial x$).

Установим некоторые алгебраические тождества. Дифференцируя тождество

$$H(t, x, p; 0) f^\alpha(t, x, p) = h_\alpha(t, x, p) f^\alpha(t, x, p)$$

по переменной p_j, получаем

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial h_\alpha}{\partial p_j}\right) f^\alpha = (h_\alpha - H) \frac{\partial f^\alpha}{\partial p_j}. \tag{11.37}$$

В этом и последующих тождествах t, x, p — независимые переменные. Умножая тождество (11.37) скалярно на f^β, получаем

$$\left\langle f^\beta, \frac{\partial H}{\partial p_j} f^\alpha \right\rangle = \frac{\partial h_\alpha}{\partial p_j} \delta_{\alpha\beta} + (h_\alpha - h_\beta) \left\langle f^\beta, \frac{\partial f^\alpha}{\partial p_j} \right\rangle. \tag{11.38}$$

Дифференцируя исходное тождество по переменным p_j, p_k и умножая скалярно на f^β, получаем

$$\left\langle f_\beta, \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} f^\alpha \right\rangle = \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial p_j \partial p_k} \delta_{\alpha\beta} + \left\langle f^\beta, \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right) \frac{\partial f^\alpha}{\partial p_k} \right\rangle + \\ + \left\langle f^\beta, \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right) \frac{\partial f^\alpha}{\partial p_j} \right\rangle. \tag{11.39}$$

Имеем

$$R_1(\sigma f^\alpha) = A(\sigma) f^\alpha + B\sigma,$$

где обозначено:

$$A(\sigma) = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} D_{x_j} \sigma,$$

$$B = \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} D_{x_j} f^\alpha + \frac{1}{2} \sum_{j,\, k=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} f^\alpha + \left.\frac{\partial H}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} f^\alpha$$

Учитывая тождество (11.38), получаем

$$\langle f^\alpha, A(\sigma) f^\alpha \rangle = \frac{d\sigma}{dt}.$$

При вычислении выражения $\langle f^\alpha, B \rangle$ воспользуемся формулой Лиувилля (§ 3)

$$\frac{d}{dt} \ln J_\alpha = \sum_{j,\, k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial p_j \partial p_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial x_j \partial p_j},$$

тождеством

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{\cdot}^{\alpha}}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \, \partial x_k} = D_{x_k} f^{\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_k} f^{\alpha}$$

и тождеством (11.39). Тогда получим, что

$$\langle f^{\alpha}, B\rangle = \Big\langle f^{\alpha}, \ \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} D_{x_j} f^{\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,\,k=1}^{n} \frac{\partial^2 h_{\alpha}}{\partial p_j \, \partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \, \partial x_k} + \sum_{j\,,k=1}^{n} \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial p_j} \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \, \partial x_k} -$$

$$- \sum_{j,\,k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \, \partial x_k} + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} f^{\alpha} \Big\rangle =$$

$$= \Big\langle f^{\alpha} \ \ \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial p_j} D_{x_j} f^{\alpha} \Big\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2} \Big[\frac{dt}{dt} \ln J_{\alpha} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \, h_{\alpha}}{\partial x_j \, \partial p_j} \Big] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \Big\langle f^{\alpha} \ \ \Big(\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial p_j} \Big) \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x_j} \Big\rangle + \Big\langle f^{\alpha}, \ \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} f^{\alpha} \Big\rangle .$$

Учитывая формулу для производной $\frac{df^{\alpha}}{dt}$ в силу системы Гамильтона, получаем (11.35), (11.36).

Пусть условия L 11.1, L 11.2 по-прежнему выполнены, а вместо условия L 11.3′ введем условие

L 11.3″. В окрестности U точки Q_0 матрица H имеет собственное значение $h\,(t,\ x,\ p)$ постоянной кратности $\varkappa$, и существует ортонормированный базис $\{f^{\alpha}\}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant \varkappa$, из собственных векторов, отвечающих собственному значению h, класса $C^{\infty}(U)$.

В частности, это условие выполняется для уравнения Дирака (§ 14).

Тогда всякий собственный вектор f, отвечающий собственному значению h, может быть представлен в виде

$$f = \sum_{\alpha=1}^{\varkappa} \sigma_{\alpha} f^{\alpha},$$

где σ_α — скалярные функции. В этом случае вместо скалярного уравнения переноса мы получим систему уравнений для функций σ_α. Именно, справедлива

Лемма 11.5. *Пусть условия* L 11.1, L 11.2, L 11.3′ *выполнены. Тогда*

$$\langle f^\beta,\ R_1(\sigma f^\alpha)\rangle = \delta_{\alpha\beta}\left(\frac{d}{dt}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln J\right)\sigma + M_{\alpha\beta}\sigma, \tag{11.40}$$

$$1\leqslant\alpha,\quad \beta\leqslant\varkappa,$$

$$M_{\alpha\beta} = \left\langle f^\beta,\ \frac{df^\alpha}{dt}\right\rangle + \sum_{j=1}^{n}\left\langle f^\beta,\ \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial h}{\partial p_j}\right) f^\alpha\right\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 h}{\partial x_j\,\partial p_j} + \left\langle f^\beta,\ \left.\frac{\partial H}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} f^\alpha\right\rangle. \tag{11.41}$$

Доказательство этой леммы следует из доказательства леммы 11.4. Система уравнений переноса имеет вид

$$\left(\frac{d}{dt}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln J\right)\sigma_\beta + \sum_{\alpha=1}^{\varkappa} M_{\alpha\beta}\sigma_\alpha = 0,\qquad 1\leqslant\beta\leqslant\varkappa.$$

Будем искать частное ф. а. решение системы (11.9) в виде

$$u^\alpha(t,\ x,\ \lambda) = \exp\,[i\lambda S_\alpha(t,\ x)]\sum_{k=0}^{m}(i\lambda)^{-k}\,\varphi^{k\alpha}(t,\ x), \tag{11.42}$$

где S_α — решение уравнения (11.13). Ф. а. решение задачи Коши (11.9), (11.10) будет представлено в виде суперпозиции таких частных ф. а. решений. В случае системы возникают два новых обстоятельства, которых нет в скалярном случае.

1. Первое приближение находится с помощью уравнения для второго приближения.

Действительно, выше мы видели, что при вычислении φ^0 необходимо воспользоваться уравнением (11.30).

2. Чтобы получить ф. а. решение с точностью до $O(\lambda^{-2})$, необходимо знать два приближения.

Действительно, если ограничиться только главным членом, то

$$e^{-i\lambda S_\alpha}L\left(e^{i\lambda S_\alpha}\varphi^{0\alpha}\right) = \frac{1}{i\lambda}R_1\varphi^{0\alpha} + O(\lambda^{-2})$$

и $R_1\varphi^{0\alpha} \neq 0$. Поэтому ф. а. решение с точностью до $O(\lambda^{-2})$ следует взять в виде

$$u^\alpha = \exp[i\lambda S_\alpha]\left(\varphi^{0\alpha} + \frac{1}{i\lambda}\varphi^{1\alpha}\right). \qquad (11.43)$$

Для скалярного уравнения можно положить $\varphi^{1\alpha} \equiv 0$.

Введем следующие условия.

Условие L 11.3′ заменим более сильным:

L 11.3. Собственные значения матрицы $H(t, x, p; 0)$ различны при $0 \leqslant t \leqslant T$, $(x, p) \in \mathbf{R}^{2n}$

L 11.4. Задача Коши (11.29), (11.34) имеет, и притом единственное, решение

$$\{x^\alpha(t, y), p^\alpha(t, y)\} \in C^\infty([0, T] \times \mathbf{R}_y^n).$$

L 11.5. Отображение $(t, y) \to x^\alpha(t, y)$, $t \in [0, T]$, $y \in \mathbf{R}_y^n$ есть диффеоморфизм.

Символом $O_{-M,T}$ обозначим класс вектор-функций $\psi(t, x; (i\lambda)^{-1})$ таких, что

1) $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}_x^n \times [0, T] \times \mathbf{R}_\lambda^+)$;

2) для любых мультииндексов α, β и для любого целого q справедливы оценки

$$\| D_x^\alpha D_t^\beta \psi(t, x; (i\lambda)^{-1}) \| \leqslant C_{\alpha,\beta,q}\lambda^{-M+|\alpha|+\beta}(1+|x|)^{-q} \qquad (11.44)$$

при $\lambda \geqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbf{R}^n$, где постоянные C не зависят от t, x, λ.

Оценка (11.44)—уточненный аналог оценки (3.54). Примером вектор-функции $\psi \in O_{-M,T}$ служит

$$\psi = \lambda^{-M}\exp[i\lambda S(t, x)]\,\varphi(t, x),$$

где S — вещественнозначная функция класса C^∞ при $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbf{R}^n$, φ — вектор-функция, φ также бесконечно дифференцируема и $\varphi(t, x) \equiv 0$ при $|x| \geqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Если, кроме того, все производные функции S ограничены при $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbf{R}^n$, то в качестве φ можно взять такую вектор-функцию, что

$$\| D_x^\alpha D_t^\beta \varphi(t, x) \| \leqslant C_{\alpha,\beta,M}(1+|x|)^{-M}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbf{R}^n$ и при любых α, β, M.

Будем, для краткости, говорить, что вектор-функция $u(t, x, \lambda)$ есть ф. а. решение системы (11.9) с точностью до $O(\lambda^{-M})$, если

$$[\lambda^{-1}D_t I + H(t, \overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x; (i\lambda)^{-1})]\, u = \psi^M \in O_{-M,\,T}. \quad (11.45)$$

Построим частные ф. а. решения системы (11.9) при условиях L 11.1—L 11.5.

Вначале будет описана процедура построения ф. а. решения, а затем мы сформулируем соответствующую теорему.

1. Функция $S_\alpha(t, x)$, входящая в формулу (11.42), определяется как решение уравнения (11.13) с данными Коши

$$S_\alpha(0, x) = S(x). \quad (11.46)$$

По условию $S_\alpha \in C^\infty$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbf{R}^n$.

2. Покажем теперь, как вычислить вектор-функцию $\varphi^{0\alpha}$ (см. (11.42)).

Пусть $\{f^\alpha(t, x, p)\}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$, — ортонормированный базис (при каждых фиксированных (t, x, p)) в $\mathbf{R}^n$ класса C^∞ при $0 \leqslant t \leqslant T$, $(x, p) \in \mathbf{R}^{2n}$, состоящий из собственных векторов матрицы $H(t, x, p; 0)$. Выберем эти вектор-функции так, чтобы все вектор-функции $f^\alpha(0, x, \partial S(x)/\partial x)$ были финитными. Возьмем $\varphi^{0\alpha}$ в виде

$$\varphi^{0\alpha}(t, x) = \sigma_\alpha(t, x)\, f^\alpha(t, x, p),$$

где $p = \partial S_\alpha(t, x)/\partial x$, σ_α — неизвестная скалярная функция. Тогда $R_0\varphi^{0\alpha} \equiv 0$. Из (11.31) и леммы 11.4 для σ_α получаем *уравнение переноса*:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{dt} + \frac{\sigma_\alpha}{2}\frac{d\ln J_\alpha}{dt} + M_\alpha\sigma_\alpha = 0. \quad (11.35')$$

Задавая некоторые данные Коши при $t = 0$ и решая это уравнение, получаем

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\frac{J_\alpha(0, y)}{J_\alpha(t, y)}}\exp\left[-\int_0^t M_\alpha\, d\tau\right]\sigma_\alpha(0, y).$$

Таким образом, главный член асимптотики имеет вид

$$u^{\alpha 0}(t, x, \lambda) =$$

$$= \exp[i\lambda S_\alpha(t, x)]\sqrt{\frac{J_\alpha(0, y)}{J_\alpha(t, y)}}\exp\left[-\int_0^t M_\alpha\, d\tau\right]\sigma_\alpha|_{t=0} \times$$

$$\times f^\alpha(t, x, p). \quad (11.47)$$

В этой формуле $x = x^\alpha(t, y)$, $p = p^\alpha(t, y)$ (это решение задачи Коши (11.29), (11.34) для гамильтоновой системы, якобиан J_α и функция M_α определяются из (11.33), (11.36)).

Отметим, что $u^{0,\alpha}(t, x, \lambda) \equiv 0$ вне множества

$$x = x^\alpha(t, y),\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ y \in \operatorname{supp} f^\alpha(0, y, \partial s(y)/\partial y), \tag{11.48}$$

т. е. вне множества, которое заполняется траекториями, выпущенными из носителя вектор-функции $f^\alpha|_{t=0}$. Гладкость вектор-функции $u^{0,\alpha}$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \geqslant 1$ очевидна.

3. Теперь вычислим следующие члены разложения (11.42). Подставляя (11.42) в (11.9) и приравнивая нулю коэффициенты при степенях λ^{-1}, получаем рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned} R_0\varphi^{1\alpha} &= -R_1\varphi^{0\alpha}, \\ R_0\varphi^{2\alpha} &= -R_1\varphi^{1\alpha} - R_2\varphi^{0\alpha}, \end{aligned} \tag{11.49}$$

В скалярном случае R_0 — это оператор умножения на функцию, и $R_0 \equiv 0$, если S_α — решение уравнения Гамильтона — Якоби; в векторном случае $R_0 \not\equiv 0$.

Вычислим $\varphi^{1\alpha}$. Имеем

$$\varphi^{1\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N} C^1_{\alpha\beta} f^\beta \tag{11.50}$$

Имеем $R_0 f^\beta = (h_\beta - h_\alpha) f^\beta$. Умножая первое из уравнения (11.49) скалярно на f^β, получаем

$$C^1_{\alpha\beta} = \frac{\langle f^\beta, R_1\varphi^{0\alpha}\rangle}{h_\alpha - h_\beta}, \qquad \beta \neq \alpha. \tag{11.50$'$}$$

Здесь, как и в (11.47), значения функций и вектор-функций берутся в точке $(t, x^\alpha(t, y), p^\alpha(t, y))$. В силу того, что вектор-функции $f^\beta(0, x, \partial s(x)/\partial x)$ финитны, имеем $|h_\alpha - h_\beta| \geqslant C > 0$ на множестве, заданном условиями (11.48), так что C^1_α — гладкие функции.

4. Значение коэффициента $C^1_{\alpha\alpha}$ остается неизвестным. Если мы хотим ограничиться ф. а. решением с точностью до $O(\lambda^{-2})$, то можно положить $C^1_{\alpha\alpha} \equiv 0$. При построении более точного ф. а. решения коэффициент $C^1_{\alpha\alpha}$ определяется из следующего приближения.

Необходимым и достаточным условием разрешимости второго из уравнений (11.49) является

$$\langle f^\alpha, R_1\varphi^{1\alpha}\rangle + \langle f^\alpha, R_2\varphi^{0\alpha}\rangle = 0,$$

так что

$$\langle f^\alpha, R_1(C^1_{\alpha\alpha}f^\alpha)\rangle = g^{1\alpha},$$

где

$$g^{1\alpha} = -R_2\varphi^{0\alpha} - R_1\sum_{\beta\neq\alpha} C^1_{\alpha\beta}f^\beta$$

есть известная вектор-функция и $g^{1\alpha} \equiv 0$ вне множества (11.48), т. е. вне проекции на $\mathbf{R}^{n+1}_{t,x}$ трубки траекторий, выпущенной из supp f^α. В силу леммы 11.4 полученное соотношение есть уравнение переноса (обыкновенное дифференциальное уравнение вдоль траектории):

$$\frac{dC^1_{\alpha\alpha}}{dt} + \frac{1}{2}C^1_{\alpha\alpha}\frac{d\ln J_\alpha}{dt} + M_\alpha C^1_{\alpha\alpha} = g^{1\alpha}.$$

Задавая финитные данные Коши $C^1_{\alpha\alpha}\,|_{t=0}$, находим $C^1_{\alpha\alpha}$ вдоль траектории.

Таким образом, процедура отыскания членов ф. а. решения такова. Имеем

$$\varphi^{k\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N} C^k_{\alpha\beta}f^\beta$$

Коэффициенты $C^k_{\alpha\beta}$, $\alpha\neq\beta$, находятся из алгебраических соотношений (см. (11.50′)), а коэффициенты $C^k_{\alpha\alpha}$ — из уравнений переноса, причем для вычисления $C^k_{\alpha\alpha}$ необходимо использовать уравнение для $(k+1)$-го приближения. Тем самым доказана

Теорема 11.6. *Пусть условия L 11.1 — L 11.5 выполнены, $S(x)\in C^\infty$, $\{f^\alpha(0, x, \partial S(x)/\partial x\}$, $1\leqslant\alpha\leqslant N$,— финитные собственные вектор-функции класса C^∞ матрицы $H(0, x, \partial S(x)/\partial x;\ 0)$.*

Тогда для любого целого $M\geqslant 1$ существует ф. а. решение с точностью до $O(\lambda^{-M})$ системы (11.9) *вида* (11.42).

Это означает, что для u^α справедливо соотношение (11.45).

Отметим, что все вектор-функции $\varphi^{k\alpha}\in C^\infty$ при $x\in\mathbf{R}^n$, $0\leqslant t\leqslant T$, и тождественно равны нулю вне множества, заданного соотношениями (11.48).

Главный член асимптотики дается формулой (11.47), а ф. а. решение с точностью до $O(\lambda^{-2})$ имеет вид (11.43).

Рассмотрим задачу Коши (11.9), (11.10).

Теорема 11.7. *Пусть условия* L 11.1 — L 11.5 *выполнены,* $S(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $u^0(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. *Тогда для любого целого* $M \geqslant 1$ *существует вектор-функция* u^M, *которая является решением системы* (11.9) *с точностью до* $O(\lambda^{-M})$ *и имеет вид*

$$u^M(t, x, \lambda) = \sum_{\alpha=1}^{N} u^{\alpha M}(t, x, \lambda), \tag{11.51}$$

где решения $u^{\alpha M}$ *имеют вид* (11.42). *Вектор-функция* u^M *удовлетворяет данным Коши* (11.10):

$$u^M|_{t=0} = \exp[i\lambda S(x)]\, u^0(x).$$

Вектор-функции $u^{\alpha M}$ *обладают теми же свойствами, что и в теореме* 11.6. *Кроме того,* $u^M(t, x, \lambda) \equiv 0$ *вне множества*

$$x = x^\alpha(t, y),\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ y \in \operatorname{supp} u^0(y).$$

Доказательство. Вектор-функция u^M вида (11.51), в силу теоремы 11.6, является ф. а. решением системы (11.9) с точностью до $O(\lambda^{-M})$. Остается удовлетворить данным Коши, используя произвол в выборе ф. а. решений $u^{\alpha M}$. Имеем

$$u^M|_{t=0} = \exp[i\lambda S(x)] \sum_{k=0}^{M} (i\lambda)^{-k} \psi^k(x),$$

$$\psi^0(x) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sigma_\alpha f^\alpha|_{t=0},$$

$$\psi^k(x) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{N} (C_{\alpha\beta}^k f^\beta)|_{t=0} \qquad (k \geqslant 1).$$

Так как векторы $\{f^\alpha|_{t=0}\}$ образуют гладкий ортонормированный базис в $\mathbf{R}^N$ при любом x, то, полагая при $t=0$

$$\sigma_\alpha|_{t=0} = \langle u^0(x), f^\alpha|_{t=0}\rangle,$$

получаем $\psi^0(x) = u^0(x)$. При этом $\sigma_\alpha|_{t=0} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Чтобы удовлетворить данным Коши, остается добиться того, чтобы $\psi^k(x) \equiv 0$ при $k \geqslant 1$. Из уравнения $\psi^1(x) \equiv 0$ получаем соотношения

$$\sum_{\alpha=1}^{N} C^1_{\alpha\beta}\big|_{t=0} \equiv 0, \qquad 1 \leqslant \beta \leqslant N.$$

Напомним, что по известным σ_α, f^α коэффициенты $C^1_{\alpha\beta}$, $\alpha \neq \beta$, определяются однозначно, а коэффициенты $C^1_{\alpha\alpha}$ удовлетворяют уравнениям переноса, однако данные Коши можно задавать произвольно. Полагая

$$C^1_{\beta\beta}\big|_{t=0} = -\sum_{\alpha\neq\beta} C^1_{\alpha\beta}\big|_{t=0}, \qquad 1 \leqslant \beta \leqslant N,$$

получаем, что $\psi^1(x) \equiv 0$. Существенно, что коэффициент $C^1_{\beta\beta}\big|_{t=0} \equiv 0$ вне носителя вектор-функции $u^0(x)$. Продолжая эти рассуждения, получаем ф. а. решение, для которого данные Коши удовлетворяются точно.

Пример 11.1. Рассмотрим систему первого порядка, не зависящую от t:

$$[\lambda^{-1} I D_t + \lambda^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_j(x) D_{x_j} + B(x)]\, u = 0. \qquad (11.52)$$

Здесь $A_j(x)$, $B(x)$ — вещественные симметрические матрицы.

В этом случае формула (11.47) для главного члена асимптотики упрощается, так как векторы f^α можно выбрать не зависящими от t и так как $H_{p_j p_k} \equiv 0$. Поэтому главный член асимптотики имеет вид

$$u^{0\alpha} = \exp[i\lambda S_\alpha] \sqrt{\frac{J_\alpha(0, y)}{J_\alpha(t, y)}}\, \sigma_\alpha\big|_{t=0} \times$$
$$\times \exp\left[\int_0^t \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial x_j\, \partial p_j} - \sum_{j=1}^{n} \left\langle f^\alpha, A_j(x) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j}\right\rangle\right) dt'\right] f^\alpha. \qquad (11.53)$$

Аргументы всех функций и вектор-функций те же, что и в (11.47).

Приведем аналог леммы 11.4 для оператора L, в котором изменен порядок действия операторов x_j, D_{x_j}.

Лемма 11.8. *Пусть условия леммы 11.4 выполнены и оператор имеет вид*

$$L = \lambda^{-1}D_t + H(t, \overset{1}{x}, \lambda^{-1}\overset{2}{D}_x; (i\lambda^{-1})). \qquad (11.52')$$

Тогда справедлива формула (11.35), *где функция* M_α *имеет вид*

$$M_\alpha = \left\langle f^\alpha, \frac{df^\alpha}{dt}\right\rangle + \sum_{j=1}^{n} \left\langle f^\alpha, \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_j}\right)\frac{\partial f^\alpha}{\partial p_j}\right\rangle + \\ + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial x_j\,\partial p_j} + \left\langle f^\alpha, \left.\frac{\partial H^0}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} f^\alpha\right\rangle. \qquad (11.53')$$

Доказательство. Пусть R_1^0 — оператор (11.32), а R_1 — аналогичный оператор, отвечающий гамильтониану (11.52'). Тогда, в силу (2.11), (2.15),

$$R_1\varphi = R_1^0\varphi + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_j\,\partial p_j}\varphi.$$

Дифференцируя тождество (11.38) по x_k, получаем

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_j\,\partial x_k} f^\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x_k} + \frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial p_j} + \\ + H\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial p_j\,\partial x_k} = \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial p_j\,\partial x_k} f^\alpha + \frac{\partial h_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial h_\alpha}{\partial x_k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial p_j} + h_\alpha\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial p_j\,\partial x_k}.$$

Умножая это тождество скалярно на f^α, получаем тождество

$$\left\langle f^\alpha, \frac{\partial^2 H}{\partial p_j\,\partial x_k} f^\alpha\right\rangle + \left\langle f^\alpha, \left(\frac{\partial(H - h_\alpha)}{\partial p_j}\right)\frac{\partial f^\alpha}{\partial x_k}\right\rangle + \\ + \left\langle f^\alpha, \frac{\partial(H - h_\alpha)}{\partial x_k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial p_j}\right\rangle = \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial p_j\,\partial x_k}. \qquad (11.54)$$

Из этой формулы и леммы 11.4 следует (11.53').

4. Асимптотика задачи Коши (11.9), (11.10) в целом. С этой задачей Коши связаны N лагранжевых n-мерных многообразий

$$\Lambda^n_{t,\alpha} = \{(x, p): x = x^\alpha(t, y),\ p = p^\alpha(t, y),\ y \in \mathbf{R}^n\}, \\ 1 \leqslant \alpha \leqslant N,$$

в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ и N лагранжевых многообразий

$$\Lambda_\alpha^{n+1} = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant T} \Lambda_{t,\alpha}^n$$

размерности $n+1$ в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n+2}$ с координатами (t, x, E, p) (E — двойственная к t переменная). Мы сохраним те же обозначения, что и в § 10, добавляя всюду индекс α (номер многообразия). Пусть G_α^t — оператор сдвига вдоль траекторий гамильтоновой системы

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial h_\alpha}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial h_\alpha}{\partial x}, \quad \frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dE}{d\tau} = -\frac{\partial h_\alpha}{\partial t}. \tag{11.55}$$

Рассмотрим лагранжево многообразие Λ_α^{n+1}; оно строится по гамильтониану $h_\alpha(t, x, p)$ так же, как и в § 8, п. 3.

Получим формулу коммутации для оператора L и канонического оператора $K_\alpha = K_{\Lambda_\alpha^{n+1}}^{r^0}$. Пусть многообразия Λ_β^{n+1} и собственные значения h_β, $1 \leqslant \beta \leqslant N$, удовлетворяют условиям теоремы 8.4, условия L 11.1 — L 11.4 выполнены,

Теорема 11.9. *Пусть f: $\Lambda_\alpha^{n+1} \to \mathbf{R}^N$ есть вектор-функция класса C^∞ и проекция* $\operatorname{supp} f$ *на $\mathbf{R}_{x,p}^{2n}$ содержится в некотором компакте при всех $t \in [0, T]$. Тогда справедлива формула коммутации*

$$LK_\alpha f = K_\alpha \sum_{j=0}^{m} (i\lambda)^{-j} R_j f + O_{-m-1,T} \tag{11.56}$$

при любом целом $m \geqslant 0$. Здесь R_j — дифференциальные операторы на Λ_α^{n+1} порядка $\leqslant j$, с коэффициентами из класса $C^\infty(\Lambda_\alpha^{n+1})$, не зависящими от λ. Далее,

$$R_0 f = (H^0 - h_\alpha I) f. \tag{11.57}$$

Если $f = \sigma_\alpha f^\alpha$, где σ_α — скалярная функция класса $C^\infty(\Lambda_\alpha^{n+1})$, $\langle f^\alpha, f^\alpha \rangle \equiv 1$, то

$$\begin{gathered} R_0(\sigma^\alpha f^\alpha) = 0, \\ \langle f^\alpha, R_1(\sigma_\alpha f^\alpha)\rangle = \frac{d\sigma_\alpha}{dt} + M_\alpha \sigma_\alpha, \end{gathered} \tag{11.58}$$

где функция M_α имеет вид (11.36).

Во всех этих формулах $f = f(t, x, p)$, где точка $(x, p) \in \in \Lambda^n_{t,\alpha}$.

Эта теорема играет точно такую же роль для систем, что и теорема 8.4 для скалярных уравнений.

В формулах (11.56) — (11.58) *заключено основное содержание настоящего параграфа.*

Доказательство теоремы 11.9. Приведем доказательство для предканонических операторов; после этого переход к каноническому оператору совершается так же, как и в п. 3 доказательства теоремы 8.4.

Учитывая инвариантность многообразия Λ^{n+1}_α относительно сдвигов вдоль траекторий динамической системы (11.55), выберем канонический атлас специальным образом. Именно, пусть Ω — карта на $\Lambda^n_{t_0,\alpha}$, которая диффеоморфно проектируется на лагранжеву плоскость $p_{(\gamma)}$, $x_{(\delta)}$ (здесь $(\gamma) \cup (\delta) = \{1, 2, \ldots, n\}$, множества (γ), (δ) не пересекаются). Тогда карты $g^t\,\widetilde{\Omega}$ обладают этим же свойством, если $|t - t_0| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, а $\widetilde{\Omega}$ — карта на $\Lambda^n_{t_0,\alpha}$, которая содержится в Ω вместе со своим замыканием. В качестве канонического атласа на Λ^{n+1}_α выберем атлас из карт, проекции которых на $\mathbf{R}^{2n}_{x,p}$ имеют вид $\bigcup\limits_{|t-t_0|<\varepsilon} g^t\widetilde{\Omega}$.

1. Докажем формулу коммутации в неособой карте. Пусть Ω — неособая карта, т. е. в качестве координат на Ω можно взять переменные (t, x). В соответствии с вышеизложенным Ω можно взять в виде

$$x = x^\alpha(t, y), \qquad p = p^\alpha(t, y),$$

$$E = E_0 - \int\limits_0^t \frac{\partial h_\alpha}{\partial \tau}\, d\tau, \qquad t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon, \quad y \in \widetilde{\Omega}.$$

Здесь $\widetilde{\Omega}$ — область в $\mathbf{R}^n_y$, $\{x^\alpha, p^\alpha\}$ — решение системы (11.29) с данными Коши $x|_{t=0} = x^0(y)$, $p|_{t=0} = p^0(y)$, где точка $(x^0(y), p^0(y)) = \Lambda^n_{t_0,\alpha}$. Точки $r \in \Omega$ параметризуются переменными (t, y): $r = r(t, y)$. Предканонический оператор K в карте Ω, с точностью до несущественного числового множителя, имеет вид

$$(K\varphi(r))(t, x) = \exp(i\lambda S)\sqrt{\frac{J_\alpha(t_0, y)}{J_\alpha(t, y)}}\,(\varphi \circ r)(t, x)$$

(все индексы у оператора K, для краткости, опущены). Здесь

$$S=\int_{t_0}^{t}(\langle p^\alpha, dx^\alpha\rangle - h_\alpha\, dt'),$$

интеграл берется вдоль бихарактеристики, S — в точке $r=(t,\ x^\alpha(t,\ y),\ E,\ p^\alpha(t,\ y))$. Имеем

$$\frac{\partial S_\alpha}{\partial t}=-h_\alpha(t,\ x,\ p)$$

в карте Ω. Пусть вектор-функция $f\in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда, в силу (11.3), (11.4),

$$LKf=\exp(i\lambda S)\sqrt{\frac{J_\alpha(t_0,\ y)}{J_\alpha(t,\ y)}}\left(R_0f+\frac{1}{i\lambda}R_1f\right)+O_{-2,\,T},$$

$$R_0f=\left(I\frac{\partial S}{\partial t}+H\right)f=(H-h_\alpha I)f.$$

Здесь и далее $H=H(t,\ x,\ p;\ 0)$, точка $(x,\ p)\in\Lambda^n_{t,\ \alpha}$. Если $f=\sigma_\alpha f^\alpha$, то из леммы 11.4 следует (11.58). Мы ограничимся первыми двумя членами разложения (11.56); существование этого разложения с любым числом членов вытекает из § 9. В дальнейшем также ограничимся первыми двумя членами.

2. Пусть Ω — особая карта, и пусть в качестве координат на Ω можно взять переменные $(t,\ p)$. Соотношения (11.56), (11.57) доказываются точно так же, как и выше. Соотношение (11.57) мы получим, комбинируя лемму 11.8 и формулы для преобразования Фурье λ-п. д. о.

Имеем

$$K\varphi=F^{-1}\left(\sqrt{\frac{\widetilde{J}_\alpha(t_0,\ \widetilde{y})}{\widetilde{J}_\alpha(t,\ \widetilde{y})}}\exp(i\lambda\widetilde{S})\,\varphi\right)\tag{11.59}$$

где $F^{-1}=F^{-1}_{\lambda,\ p\to x}$, функция $\widetilde{S}$ и якобиан $\widetilde{J}_\alpha$ будут указаны ниже. В силу (5.3) имеем

$$LF^{-1}=F^{-1}\widetilde{L},$$

$$\widetilde{L}=\lambda^{-1}D_t+H(t,\ -\lambda^{-1}\overset{1}{D}_p,\ \overset{2}{p};\ (i\lambda)^{-1}).$$

Заметим, что порядок действия операторов дифференцирования и умножения на функцию иной, чем в исходном операторе

$$L = \lambda^{-1} D_t + H(t, \overset{1}{x}, \lambda^{-1} \overset{2}{D}_x; (i\lambda)^{-1}).$$

Функция $\widetilde{S}$ зависит от переменных (t, p). Ее явный вид в данном месте несуществен. Важно только, что эта функция удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial t} + h_\alpha \left(t, -\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial p}, p \right) = 0.$$

Сделаем в системе Гамильтона (11.29) замену

$$\widetilde{x} = p, \qquad \widetilde{p} = -x \tag{11.60}$$

и положим

$$\widetilde{h}_\alpha (t, \widetilde{x}, \widetilde{p}) = h_\alpha (t, x, p). \tag{11.61}$$

Система (11.29) отвечает уравнению Гамильтона — Якоби (11.13), и $p = \partial S/\partial x$ на траекториях этой системы (см. (3.10)). Переменная t играет роль параметра.

Преобразование (11.60) — каноническое; по теореме 4.16 при таком преобразовании система Гамильтона (11.29) снова переходит в систему Гамильтона с гамильтонианом $\widetilde{h}_\alpha$. Для наглядности выпишем все уравнения параллельно; здесь $S = S(t, x)$, $\widetilde{S} = \widetilde{S}(t, p)$ и, в силу (11.60), (11.61),

$$\widetilde{h}_\alpha (t, x, p) = h_\alpha (t, p, -x). \tag{11.61'}$$

Следующая таблица иллюстрирует двойственность x- и p-представлений.

x-представление	p-представление
$\dfrac{\partial S}{\partial t} + h_\alpha \left(t, x, \dfrac{\partial S}{\partial x} \right) = 0$	$\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial t} + \widetilde{h}_\alpha \left(t, -\dfrac{\partial S}{\partial p}, p \right) = 0$
$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial h_\alpha}{\partial p}, \quad \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial h_\alpha}{\partial x}$	$\dfrac{d\widetilde{x}}{dt} = \dfrac{\partial \widetilde{h}_\alpha}{\partial \widetilde{p}}, \quad \dfrac{d\widetilde{p}}{dt} = -\dfrac{\partial \widetilde{h}_\alpha}{\partial \widetilde{x}}$
на траектории	на траектории
$p = \dfrac{\partial S}{\partial x}$	$\widetilde{p} = \dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial \widetilde{x}}$

Для более полной симметрии запишем уравнения Гамильтона —Якоби и операторы L, $\widetilde{L}$ в виде

$\frac{\partial S}{\partial t}+h_\alpha(t, x, p)=0$	$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial t}+\widetilde{h}_\alpha(t, \widetilde{x}, \widetilde{p})=0$
$L=\lambda^{-1}D_t+\hat{H}(t, \overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{p}; \varepsilon)$	$\widetilde{L}=\lambda^{-1}D_t+\hat{\widetilde{H}}(t, \overset{1}{\widetilde{x}}, \lambda^{-1}\overset{2}{\widetilde{p}}; \varepsilon)$
$p=D_x$	$\widetilde{p}=D_{\widetilde{x}}$

где символы H, $\widetilde{H}$ связаны тем же соотношением, что и h_α, $\widetilde{h}_\alpha$:

$$\widetilde{H}(t, \widetilde{x}, \widetilde{p}; \varepsilon)=H(t, x, p; \varepsilon). \tag{11.61''}$$

Применяя лемму 11.8 $\left(\text{в данном случае } \widetilde{J}_\alpha = = \det \frac{\partial \widetilde{x}^\alpha(t, \widetilde{y})}{\partial \widetilde{y}}\right.$, аналогично $\left.(11.33)\right)$, получаем из (11.53) для оператора M_α выражение

$$M_\alpha=-\sum_{j=1}^{n}\left\langle \widetilde{f}^\alpha, \frac{\partial(h_\alpha-\widetilde{H})}{\partial \widetilde{x}_j}\frac{\partial \widetilde{f}^\alpha}{\partial \widetilde{p}_j}\right\rangle+ \\ +\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 \widetilde{h}_\alpha}{\partial \widetilde{x}_j\,\partial \widetilde{p}_j}+\left\langle \widetilde{f}^\alpha, \left.\frac{\partial \widetilde{H}^0}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\widetilde{f}^\alpha\right\rangle.$$

Далее, в силу (11.60), (11.61′), (11.61″) имеем

$$\frac{\partial^2 \widetilde{h}_\alpha(t, \widetilde{x}, \widetilde{p})}{\partial \widetilde{x}_j\,\partial \widetilde{p}_j}=-\frac{\partial^2 h_\alpha(t, x, p)}{\partial x_j\,\partial p_j},$$

$$-\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{x}_j}\frac{\partial \widetilde{f}^\alpha}{\partial \widetilde{p}_j}=\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j}.$$

Напомним, что в окрестности каждой неособой точки карты $\Omega\subset\Lambda_\alpha^{n+1}$ в качестве локальных координат можно выбрать либо (t, x), либо (t, p) и что точки

$$(t, x, E, p), \qquad (t, \widetilde{x}, \widetilde{E}, \widetilde{p})$$

определяют одну и ту же точку на Λ_α^{n+1}, если

$$p=\frac{\partial S_\alpha(t, x)}{\partial x}, \qquad \widetilde{x}=p, \qquad \widetilde{p}=\frac{\partial \widetilde{S}_\alpha(t, p)}{\partial p}.$$

3. Точно так же исследуется случай, когда в качестве локальных координат в карте Ω можно взять t, часть переменных x и часть переменных p. Именно, пусть $\{1, 2, \ldots, n\} = (\delta) \cup (\gamma)$, множества (δ), (γ) не пересекаются и $(t, p_{(\delta)}, x_{(\gamma)})$ — локальные координаты в карте Ω, $F^{-1} = F^{-1}_{\lambda, p_{(\delta)} \to x_{(\delta)}}$, оператор K имеет вид (11.59). Сделаем каноническое преобразование

$$\tilde{x}_k = p_k, \quad \tilde{p}_k = -x_k, \quad k \in (\delta),$$
$$\tilde{x}_k = x_k, \quad \tilde{p}_k = p_k, \quad k \in (\gamma),$$

так что

$$\tilde{x} = (p_{(\delta)}, x_{(\gamma)}), \quad \tilde{p} = (-x_{(\delta)}, p_{(\gamma)}),$$

и положим, как и в (11.61), (11.61′),

$$\tilde{h}_\alpha(t, \tilde{x}, \tilde{p}) = h_\alpha(t, x, p),$$
$$\tilde{H}(t, \tilde{x}, \tilde{p}; 0) = H(t, x, p; 0).$$

Тогда полученные на стр. 223 формулы останутся в силе, с той лишь разницей, что

$$\tilde{L} = \lambda^{-1} D_t + L(\lambda^{-1} \overset{2}{D}_{\tilde{x}_{(\delta)}}, \overset{2}{\tilde{x}}_{(\gamma)}, \overset{1}{\tilde{p}}_{(\gamma)}, \lambda^{-1} \overset{1}{D}_{x_{(\delta)}}; (i\lambda)^{-1}).$$

Именно, по переменным $\tilde{x}_{(\delta)}$ и $\tilde{x}_{(\gamma)}$ операторы умножения на функцию и дифференцирования действуют в разном порядке, так что при вычислении M_α необходимо использовать и лемму 11.4, и лемму 11.8. Но, как мы уже убедились выше, в пп. 1, 2, слагаемые, составляющие функцию M_α, инвариантны относительно порядка, в котором действуют указанные операторы, так что формула (11.36) остается в силе.

Рассмотрим задачу Коши

$$u|_{t=0} = u^0(x) \exp[i\lambda S_0(x)] \tag{11.62}$$

для системы (11.9), где, как обычно, функция $S_0(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и вещественнозначна, вектор-функция $u^0(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Пусть $\{f^\alpha(t, x, p)\}$ — ортонормированный базис из собственных векторов матрицы $H(t, x, p, 0)$ класса C^∞ при $0 \leqslant t \leqslant T$, $(x, p) \in \mathbf{R}^{2n}$. Тогда, как показано в доказательстве теоремы **11.7**, вектор-функция $u^0(x)$ разлагается по собственным векторам $f^\alpha|_{t=0} =$

$= f^{\alpha}(0, x, \partial S_0(x)/\partial x)$:

$$u^0(x) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sigma_\alpha(x) f^\alpha |_{t=0}, \tag{11.63}$$

где $\sigma_\alpha(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Соответственно задача Коши распадается на N задач Коши

$$u^{0\alpha}|_{t=0} = \sigma_\alpha(x) f^\alpha |_{t=0}. \tag{11.64}$$

Решение задачи (11.9), (11.62) есть сумма решений задач (11.9), (11.64). Напомним, что условия L 11.1 — L 11.4 выполнены и что все лагранжевы многообразия Λ_α^{n+1}, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$, удовлетворяют условиям теоремы 8.4.

Теорема 11.10. *Пусть выполнены сформулированные выше условия. Тогда для любого $M \geqslant 1$ существует вектор-функция $u^{\alpha M}(t, x, \lambda)$, которая точно удовлетворяет данным Коши* (11.64) *и удовлетворяет уравнению* (11.9) *с точностью до $O(\lambda^{-M})$, т. е.*

$$Lu^{\alpha M} \in O_{-M,\,T}. \tag{11.65}$$

Это ф. а. решение имеет вид

$$u^{\alpha M}(t, x, \lambda) = \exp[i\lambda S_0(y^0)] \overset{\sim 0}{K}{}^{\alpha}_{r\,\Lambda_\alpha^{n+1}} \sum_{j=0}^{M} (i\lambda)^{-j} \varphi^{\alpha j} \tag{11.66}$$

(обозначения те же, что и в (10.12)).

Выпишем главный член асимптотики:

$$\varphi^{\alpha 0}(t, x, p) = \exp\left(-\int_0^t M_\alpha\, d\tau\right) \sigma_\alpha(y) f^\alpha(t, x, p). \tag{11.67}$$

В этой формуле $x = x^\alpha(t, y)$, $p = p^\alpha(t, y)$ (это решение задачи Коши (11.29), (11.34) для гамильтоновой системы), а функция M_α имеет вид (11.36).

Отметим, что все вектор-функции $\varphi^{\alpha j}$ тождественно равны нулю на Λ_α^{n+1} вне «полосы», вырезаемой бихарактеристиками, т. е. при каждом $t \in [0, T]$ они отличны от нуля только в тех точках, проекции которых на $\mathbf{R}^{2n}_{x,\,p}$ содержатся в множестве

$$\{(x, p)\colon\ x = x^\alpha(t, y),\ p = p^\alpha(t, y),\ y \in \operatorname{supp} \sigma_\alpha\}.$$

Доказательство. Будем искать ф. а. решение в виде (11.67). По формуле коммутации (11.56) имеем (здесь $K_\alpha = K^{r\overset{0}{\alpha}}_{\Lambda^{n+1}_\alpha}$)

$$LK_\alpha u^{\alpha M} = K_\alpha \sum_{j=0}^{M} \varepsilon^j \Big(\sum_{k=0}^{M-j} \varepsilon^k R_k \varphi^{\alpha M} \Big) + O_{-S-1,\,T}, \qquad \varepsilon = (i\lambda)^{-1}.$$

Будем последовательно приравнивать нулю коэффициенты при степенях ε. Имеем $R_0\varphi^{\alpha 0} = 0$, т. е. $\varphi^{\alpha 0} = \sigma_\alpha f^\alpha$. Для функции σ_α получаем уравнение переноса

$$\frac{d\sigma_\alpha}{dt} + M_\alpha \sigma_\alpha = 0$$

и поставим данные Коши

$$\sigma_\alpha|_{t=0} = \overset{0}{\sigma}_\alpha;$$

получим (11.67). Последующие приближения находятся по той же схеме, что и в доказательстве теоремы 11.7.

Главный член асимптотики можно также записать в виде (10.17), где следует заменить H на h_α и Λ^n_t на $\Lambda^n_{t,\,\alpha}$.

5. Характеристики постоянной кратности. Выведем уравнения переноса в случае, когда уравнение (11.15) имеет корни постоянной кратности. Рассмотрим уравнение (11.1) с символом $L(x,\ p;\ (i\lambda)^{-1})$, удовлетворяющим условию L 11.1. Пусть $h_j(x,\ p)$ — собственные значения матрицы $L(x,\ p;\ 0)$. Введем следующие предположения.

1) Кратность собственного значения $h_1(x,\ p)$ равна k и не зависит от $(x,\ p) \in \mathbf{R}^{2n}$.

2) Множество M_1: $h_1(x,\ p) = 0$ есть C^∞-многообразие размерности $2n-1$ в $\mathbf{R}^{2n}_{x,\ p}$. Функция $h_1(x,\ p)$ вещественнозначна в окрестности этого множества.

3) Собственное значение h_1 изолировано в следующем смысле: существуют постоянные $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ такие, что

$$|h_j(x,\ p)| \geqslant \delta_0$$

при всех $(x,\ p)$ таких, что $|h_1(x,\ p)| \leqslant \varepsilon_0$, и при всех $j \neq 1$.

4) При $|h_1(x,\ p)| < \varepsilon_0$ резольвента $(\mu I - L(x,\ p;\ 0))^{-1}$ имеет (при фиксированных $(x,\ p)$) простой полюс в точке $h_1(x,\ p)$.

Последнее условие означает, что нормальная жорданова форма матрицы $L(x,\ p;\ 0)$ не имеет жордановых клеток, отвечающих собственному значению в окрестности многообразия $h_1 = 0$.

Лемма 11.11. *Пусть условия* 1) — 4) *выполнены. Тогда существует матрица* $\widetilde{L}(x, p)$ *из класса* $C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ *такая, что*

$$\widetilde{L}(x, p)\,L(x, p; 0) = L(x, p; 0)\,\widetilde{L}(x, p) = h_1(x, p)\,I,$$
$$\widetilde{L}^2 = L. \tag{11.67'}$$

Здесь I — единичная $(N \times N)$-матрица.

Доказательство. Фиксируем точку (x^0, p^0) такую, что $h_1(x^0, p^0) = 0$, и ее замкнутую окрестность U, в которой $|h_1(x, p)| \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ будет указано ниже. В силу условия 4) имеем

$$(\mu I - L(x, p; 0))^{-1} = \frac{A(x, p)}{\mu - h_1(x, p)} + B(\mu, x, p)$$

при $(x, p) \in U$. Матрица B голоморфна по μ при

$$|\mu - h_1(x, p)| \leqslant \min_{j \neq 1} |h_1(x, p) - h_j(x, p)|,$$

так как полюсы резольвенты совпадают с собственными значениями матрицы $L(x, p; 0)$. Положим $\varepsilon = \delta_0/4$ и выберем ρ такое, что $\varepsilon < \rho < \delta_0 - \varepsilon$. Тогда резольвента голоморфна на окружности $|\mu| = \rho$ при любых фиксированных $(x, p) \in U$. Действительно, на этой окружности $|\mu - h_1(x, p)| \geqslant \rho - \varepsilon > 0$, а при $j \neq 1$

$$|\mu - h_j(x, p)| \geqslant$$
$$\geqslant |h_j(x, p) - h_1(x, p)| + |\mu| - |h_1(x, p)| \geqslant$$
$$\geqslant \delta_0 + \rho - \varepsilon > 0.$$

Имеем

$$A(x, p) = \operatorname*{res}_{\mu = h_1(x, p)} (\mu I - L(x, p; 0))^{-1} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\mu| = \rho} (\mu I - L(x, p; 0))^{-1}\, d\mu,$$

откуда следует, что $A(x, p) \in C^\infty(U)$. Действительно, матрица $(\mu I - L)^{-1}$ бесконечно дифференцируема по переменным (μ, x, p) при $|\mu| = \rho$, $(x, p) \in U$ в силу выбора ρ, U. Из известных свойств вычета резольвенты [18] вытекает, что

$$L(x, p; 0)\,A(x, p) = A(x, p)\,L(x, p; 0), \qquad A^2 = A.$$

Положим $\widetilde{L}(x, p) = A(x, p)$ в области $|h_1(x, p)| < \varepsilon$, а затем продолжим эту матричную функцию на $\mathbf{R}^{2n}_{x,\,p}$ с сохранением гладкости.

Заметим, что в дальнейшем нам понадобится существование матрицы $\widetilde{L}(x, p)$ класса C_0^∞ только в малой окрестности некоторой точки (x^0, p^0), $h_1(x^0, p^0) = 0$.

Пусть условия леммы 11.11 выполнены. Построим по гамильтониану $h_1(x, p)$ лагранжево многообразие Λ^n (конструкция и условия на гамильтониан те же, что и в теореме 8.4) и канонический оператор $K = K^{r^0}_{\Lambda^n}$.

Теорема 11.12. *Пусть выполнены сформулированные выше условия и* $f\colon \Lambda^n \to \mathbf{R}^N$ *есть матричная функция класса* $C_0^\infty(\Lambda^n)$. *Тогда справедлива формула коммутации* (11.56) *с остаточным членом класса* $O^+_{-m-1}(\mathbf{R}^n_x)$. *Далее,*

$$R_0 = L^0 = L(x, p;\ 0),$$

$$\widetilde{L}R_1\widetilde{L} = \left(\frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 h_1(x, p)}{\partial x_j\,\partial p_j} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial p_j}\frac{\partial L^0}{\partial x_j} + \frac{\partial L^0}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right)\widetilde{L}. \qquad (11.68)$$

Здесь $d/d\tau$ — производная в силу гамильтоновой системы

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial h_1}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial h_1}{\partial x}$$

и $\widetilde{L}(x, p)$ — построенная в лемме 11.11 матрица.

Доказательство теоремы сводится к доказательству формулы (11.68). Поскольку оценки для остаточных членов уже были получены ранее, то мы пишем просто $O(\varepsilon^k)$, $\varepsilon = (i\lambda)^{-1}$, не уточняя смысл символа O. Далее, выберем матрицу-функцию $\widetilde{L}(x, p) \in C_0^\infty$ с носителем, сосредоточенным в окрестности некоторой точки (x^0, p^0), для которой $h_1(x^0, p^0) = 0$. Напомним, что $h_1(x, p) \equiv 0$ на Λ^n. Имеем

$$LK = \varepsilon KR_1 + O(\varepsilon^2),$$

так что

$$LK\widetilde{L} = \varepsilon KR_1\widetilde{L} + O(\varepsilon^2),$$

где $\widetilde{L}$ — оператор умножения на матрицу $\widetilde{L}(x, p)$. Пусть $\hat{\widetilde{L}}$ — оператор $\widetilde{L}(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x)$, тогда

$$\hat{\widetilde{L}}LK\widetilde{L} = \varepsilon K\widetilde{L}R_1\widetilde{L} + O(\varepsilon^2). \tag{11.69}$$

Теперь сгруппируем операторы иначе:

$$\hat{\widetilde{L}}LK\widetilde{L} = (\hat{\widetilde{L}}L)(K\widetilde{L}).$$

В силу (2.33) — (2.35) имеем

$$\hat{\widetilde{L}}L = \hat{h}_1 I + \varepsilon\hat{Q} + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\hat{Q} = Q(\overset{2}{x}, \lambda^{-1}\overset{1}{D}_x)$$

есть λ-п. д. о. с символом

$$Q(x, p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\widetilde{L}(x, p)}{\partial p_j}\frac{\partial L(x, p; 0)}{\partial x_j} + \frac{\partial L}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}. \tag{11.70}$$

Воспользуемся формулой коммутации для скалярного оператора $\hat{h}_1$ (см. теорему 8.4); тогда получим, что

$$\hat{h}_1 K = \varepsilon K\left(I\left(\frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 h_1}{\partial x_j\,\partial p_j}\right)\right) + O(\varepsilon^2).$$

Следовательно,

$$\hat{\widetilde{L}}LK\widetilde{L} = \varepsilon K\left(I\left(\frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 h_1}{\partial x_j\,\partial p_j}\right) + Q\right)\widetilde{L} + O(\varepsilon^2). \tag{11.71}$$

Сравнивая правые части формул (11.69) и (11.71), получаем

$$\widetilde{L}R_1\widetilde{L} = \left(\frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 h_1}{\partial x_j\,\partial p_j}\right)\widetilde{L} + Q\widetilde{L}.$$

Тем самым формула (11.68) доказана.

В § 14 будет рассмотрен еще один вариант уравнений переноса, отвечающих системе (11.1).

§ 12. Квазиклассическая асимптотика задачи Коши для уравнения Шредингера

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение Шредингера

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{h^2}{2m}\Delta\psi+V(x)\psi \qquad (12.1)$$

и поставим задачу Коши

$$\psi|_{t=0}=\psi_0(x)\,e^{\frac{i}{h}S_0(x)} \qquad (12.2)$$

Здесь $x\in\mathbf{R}^n$, $S_0(x)$ — вещественнозначная функция.

Уравнение (12.1) описывает движение нерелятивистской квантовой частицы массы m в потенциальном поле с потенциальной энергией $V(x)$. Потенциал $V(x)$ предполагается вещественным.

Рассмотрим оператор L: $L_2(\mathbf{R}^n)\to L_2(\mathbf{R}^n)$ с областью определения $D(L)=C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, действующий по формуле

$$L\psi=-\frac{h^2}{2m}\Delta\psi+V(x)\psi.$$

Оператор L симметричен:

$$(L\psi_1,\ \psi_2)=(\psi_1,\ L\psi_2)$$

для любых $\psi_{1,\,2}\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$, где скалярное произведение $(\cdot,\ \cdot)$ имеет вид

$$(\psi,\varphi)=\int\limits_{\mathbf{R}^3}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx.$$

При некоторых условиях на потенциал $V(x)$ минимальный симметрический оператор L можно расширить до самосопряженного оператора A: $L_2(\mathbf{R}^n)\to L_2(\mathbf{R}^n)$ с плотной в $L_2(\mathbf{R}^n)$ областью определения $D(A)$. Достаточным условием является, например, следующее [66]:

$$V(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n),\quad \inf_{x\in\mathbf{R}^n}V(x)>-\infty.$$

Тогда уравнение Шредингера можно записать в виде

$$ih\frac{d\psi}{dt}=A\psi. \qquad (12.3)$$

Мы ограничимся потенциалами $V(x) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, где $\mathscr{S}$ — пространство Шварца. Нас интересует асимптотика решения задачи Коши (12.1), (12.2) при $h \to 0$ в области $x \in \mathbf{R}^n$, $0 \leqslant t \leqslant T$ Уравнение (12.1) можно записать в виде

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} + H(\overset{2}{x}, h\overset{1}{D}_x)\psi = 0, \tag{12.1'}$$

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x), \tag{12.4}$$

где $p^2 = \langle p, p\rangle$. Левая часть уравнения (12.1′) есть h^{-1}-псевдодифференциальный оператор с символом $-E + H(x, p)$, где E — двойственная к t переменная.

Применим развитую в § 10 схему к уравнению Шредингера. Уравнение Гамильтона — Якоби, отвечающее уравнению Шредингера, есть уравнение Гамильтона — Якоби классической механики

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla_x S)^2 + V(x) = 0. \tag{12.5}$$

Функция S является *классическим действием*.

Укороченная система Гамильтона, отвечающая уравнению Шредингера, имеет вид

$$m\frac{dx}{dt} = p, \qquad \frac{dp}{dt} = -\nabla V(x). \tag{12.6}$$

Эта система эквивалентна системе Ньютона

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla V(x). \tag{12.7}$$

Полная система Гамильтона получается добавлением к системе (12.6) системы

$$\frac{dt}{dt} = 1, \qquad \frac{dE}{dt} = 0, \tag{12.8}$$

а функция S удовлетворяет уравнению

$$\frac{dS}{dt} = \frac{p^2}{2m} - V(x).$$

Если $x = x(\tau)$, $p = p(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$, есть решение системы Гамильтона (12.6), то вдоль траектории действие вычисляется по формуле

$$S(x(t)) = S(x(0)) + \int_0^t \left[\frac{1}{2m} p^2(\tau)\, d\tau - V(x(\tau))\right] d\tau \qquad (12.9)$$

или же

$$S(x(t)) = S(x(0)) + \int_0^t \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2(\tau) - V(x(\tau))\right] d\tau, \qquad (12.9')$$

где $x(\tau)$ — решение системы Ньютона (12.7).

Задаче Коши (12.1), (12.2) отвечают лагранжевы задачи Коши

$$x|_{t=0} = y, \quad p|_{t=0} = \frac{\partial S_0(y)}{\partial y}, \qquad y \in \mathbf{R}^n \qquad (12.10)$$

для укороченной системы Гамильтона (12.6) и

$$\begin{gathered} x|_{t=0} = y, \quad p|_{t=0} = \frac{\partial S_0(y)}{\partial y}, \quad t|_{t=0} = 0, \\ E|_{t=0} = E_0, \qquad y \in \mathbf{R}^n \end{gathered} \qquad (12.11)$$

для системы Гамильтона (12.6), (12.8).

Множество, заданное уравнением (12.10), есть лагранжево n-мерное C^∞-многообразие Λ_0^n в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}_{x,\,p}$; множество (12.11) — лагранжево n-мерное многообразие $\widetilde{\Lambda}_3^n$ в $(2n+2)$-мерном фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n+2}$.

Так как потенциал $V(x) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, то решение поставленных выше задач Коши существует в целом, т. е. при $-\infty < t < \infty$.

2. Асимптотика решения задачи Коши в малом. Положим, как обычно,

$$J(t, y) = \det \frac{\partial x(t, y)}{\partial y}, \qquad (12.11')$$

где $(x(t, y),\ p(t, y))$ — решение задачи Коши (12.6), (12.10).

Асимптотика решения задачи Коши (11.1), (11.2) непосредственно вытекает из результатов § 10. Однако для данной конкретной задачи можно получить более простые формулы и для главного члена асимптотики, и для последующих приближений. Всюду в дальнейшем предполагается, что выполнено условие

Ш 12.1. Функции $S_0(x)$, $V(x)$ вещественнозначны и

$$S_0(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n), \qquad \psi_0(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

При этом условии решение задачи Коши (12.1), (12.2) существует, единственно и принадлежит $C^\infty(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_t)$ при каждом фиксированном $h \neq 0$ [66].

Получим характеристическое представление уравнения Шредингера в малом (формула (12.14)). Введем множества

$$\Pi(M) = \{(t, x, p): x = x(t, y), \quad p = p(t, y), \quad -\infty < t < \infty, \ y \in M\},$$

$$\Pi_T(M) = \Pi(M) \cap \{0 \leqslant t \leqslant T\},$$

где M — некоторое множество в $\mathbf{R}_y^n$ (рис. 4).

Множество $\Pi(M)$ — это полоска, заполненная бихарактеристиками, для которых $x|_{t=0} \in M$ (трубка траекторий). Обозначим через $\Pi_x(M)$, $\Pi_{T,x}(M)$ проекции полосок $\Pi(M)$, $\Pi_T(M)$ на $\mathbf{R}_{t,x}^{n+1}$. Если множество M компактно, то множества $\Pi_T(M)$, $\Pi_{T,x}(M)$ компактны в пространствах $\mathbf{R}^{2n+1}$, $\mathbf{R}^{n+1}$ соответственно.

Лемма 12.1. *Пусть условие Ш 21.1 выполнено и M — шар $|y| \leqslant R$. Тогда существует $T = T(R) > 0$ такое, что*

1) $J(t, y) \in C^\infty$, $|J(t, y)| \geqslant \delta > 0$ *при* $0 \leqslant t \leqslant T$, $y \in M$, *где J — якобиан* (12.11′);

2) *решение $S(t, x)$ задачи Коши $S(0, x) = S_0(x)$ для уравнения Гамильтона — Якоби* (12.5) *существует, единственно и бесконечно дифференцируемо при $(t, x) \in \Pi_{T,x}(M)$.*

Доказательство. В силу условия *Ш* 12.1 вектор-функция

$$x = x(t, y) \in C^\infty(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_y^n),$$

так что якобиан $J(t, y)$ бесконечно дифференцируем при всех t, y. Так как $J(0, y) \equiv 1$, то утверждение вытекает из компактности шара M. По теореме о неявной функции уравнение $x = x(t, y)$ относительно y однозначно разрешимо и имеет единственное решение $y = \varphi(t, x)$ класса C^∞ в окрестности любой точки (t_0, y^0), где $0 \leqslant t_0 \leqslant T$, $|y^0| \leqslant R$. Так как M — компакт, то, применяя лемму Гейне — Бореля, получаем, что $y = \varphi(t, x) \in C^\infty$ при $(t, x) \in$

$\in \Pi_{T_1,\ x}(M)$, $0 < T_1 \leqslant T$. Следовательно,

$$p = p(t, y) = \tilde{p}(t, \varphi(t, x)) = \tilde{p}(t, x) \in C^\infty$$

при тех же t, x и функция $S(t, x)$, заданная формулой (12.9), бесконечно дифференцируема в полоске $\Pi_{T_1,\ x}(M)$ (рис. 4). Эта функция является решением задачи Коши, как показано в § 3.

В полоске $\Pi_{T,\ x}(M)$, таким образом, можно ввести криволинейные координаты (t, y) (рис. 14) вместо координат (t, x). Положим

$$\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{J(t, y)}} e^{\frac{i}{h} S(t, x)} \varphi(t, x) \tag{12.12}$$

(S определяется из (12.9), где $x = x(t, y)$). Далее, положим

$$\varphi(t, x(t, y)) = \tilde{\varphi}(t, y). \tag{12.13}$$

Лемма 12.2. *Пусть T, M те же, что и в лемме 12.1. Тогда в полоске $\Pi_{T,\ x}(M)$ уравнение Шредингера имеет вид*

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}(t, y)}{\partial t} = -\frac{ih}{2m}\sqrt{J(t, y)}\,\Delta_x \frac{\tilde{\varphi}(t, y)}{\sqrt{J(t, y)}} \tag{12.14}$$

Заметим, что по отношению к лучевым координатам y оператор Лапласа Δ_x есть оператор в криволинейных координатах

$$\Delta_x\tilde{\varphi}(t, y) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_k}\right)^2\tilde{\varphi}.$$

Доказательство. Подставляя выражение (12.12) и используя формулу

$$\Delta(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_2\Delta\varphi_1 + 2\langle\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2\rangle + \varphi_1\Delta\varphi_2,$$

получаем после сокращения на $e^{\frac{i}{h}S}$ уравнение

$$\frac{ih}{\sqrt{J}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{m}\langle\nabla\varphi, \nabla S\rangle\right] + \frac{h^2}{2m}\Delta\left(\frac{\varphi}{\sqrt{J}}\right) =$$
$$= \frac{\varphi}{\sqrt{J}}\left[\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{m}(\nabla S)^2 + V\right] + ih\varphi\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{J}}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{m}\left\langle\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{J}}\right), \nabla S\right\rangle - \frac{1}{2m}\frac{1}{\sqrt{J}}\Delta S\right], \tag{12.15}$$

где $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$. Правая часть этого уравнения равна нулю: коэффициент при h^0 равен нулю, так как действие S удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби, а коэффициент при h равен нулю, так как J удовлетворяет уравнению переноса.

Заметим, что можно было бы не выписывать явный вид правой части уравнения (12.15); достаточно знать, что она имеет вид $a\varphi + hb\varphi$, где a, b — функции, не зависящие от φ. Действительно, функция (12.12) при $\varphi \equiv 1$ есть решение уравнения Шредингера с точностью до $O(h^2)$, как показано в § 3, теорема 3.15, так что $a \equiv 0$, $b \equiv 0$. Наконец,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{m}\langle\nabla\varphi, \nabla S\rangle = \frac{d\tilde{\varphi}(t, y)}{dt},$$

где $\frac{d}{dt}$ — производная в силу системы Гамильтона (12.6), и лемма доказана.

Введем пространство $C_T(L_2)$, которое является замыканием бесконечно дифференцируемых при $|t| \leqslant T$, $x \in \mathbf{R}^n$ и финитных по x при каждом фиксированном $t \in [-T, T]$ функций $\varphi(t, x)$ по норме

$$\|\varphi(t, x)\|_{C_T(L_2)} = \max_{|t|\leqslant T}\|\varphi(t, x)\|_{L_2(\mathbf{R}^n)} = \max_{|t|\leqslant T}\left(\int_{\mathbf{R}^n}|\varphi(t, x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

Теорема 12.3. *Пусть условие Ш 12.1 выполнено и $T > 0$ достаточно мало. Тогда решение задачи Коши* (12.1), (12.2) *имеет вид*

$$\psi(t, x, h) = \frac{1}{\sqrt{J(t, y)}}\exp\left[\frac{i}{h}S(t, x)\right]\sum_{k=0}^{N}(ih)^k\psi_k(t, x) + R_{N+1}(t, x, h). \tag{12.16}$$

Здесь $N \geqslant 1$ — любое целое число; остаточный член удовлетворяет оценке

$$\|R_{N+1}(t, x, h)\|_{C_T(L_2)} \leqslant C_N h^{N+1} \tag{12.17}$$

при $0 < h \leqslant h_0$, где $h_0 > 0$ достаточно мало.

Явные выражения для функций ψ_k (в этих формулах $x = x(t, y)$ и интегралы берутся по траекториям *гамильтоновой системы* (12.9)) *имеют вид*

$$\psi_0(t, x) = \psi_0(y), \tag{12.18}$$

$$\psi_{k+1}(t, x) = \int_0^t \sqrt{J(t, y)}\,\Delta_x\left(\frac{\psi_k(t, x(t, y))}{\sqrt{J(t, y)}}\right) dt.$$

Все функции $\psi_k(t, x)$ *бесконечно дифференцируемы в полоске* $\Pi_{T,\,x}(\operatorname{supp}\psi_0)$ *и равны нулю вне этой полоски.*

Доказательство. В силу условия (12.1), леммы 12.1 и теоремы 3.15 при любом $N \geqslant 1$ существует функция

$$\psi_{N+1}(t, x, h) = \sum_{k=0}^{N+1} (ih)^k \tilde{\psi}_k(t, x),$$

которая удовлетворяет данным Коши (12.2) и такова, что

$$L\psi_{N+1} = f_N \in O_{-N-2,\,T}, \quad L = ih\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h^2}{2m}\Delta - V.$$

Если функция $f \in O_{-k,\,T}$, то

$$\|f\|_{C_T(L_2)} \leqslant Ch^k,$$

что следует из определения класса $O_{-k,\,T}$ (§ 10).

Запишем уравнение Шредингера в виде (12.3); тогда

$$ih\frac{d\psi_{N+1}}{dt} - A\psi_{N+1} = f_N.$$

Из предложения 10.3 следует, что

$$\|\psi - \psi_{N+1}\|_{C_T(L_2)} \leqslant h^{-1}C_N\|f_N\|_{C_T(L_2)} \leqslant C'_N h^{N+1},$$
$$0 < h \leqslant h_0,$$

так как $f_N \in O_{-N-2,\,T}$. А поскольку

$$\|\tilde{\psi}_{N+1}(t, x)\|_{C_T(L_2)} < \infty,$$

то

$$\|\psi - \psi_N\|_{C_T(L_2)} \leqslant \tilde{C}_N h^{N+1}.$$

Тем самым установлена оценка (12.17) для остаточного члена.

Остается доказать, что $\tilde{\psi}_k \equiv \psi_k J^{-1/2}$, т. е. что $\tilde{\psi}_k J^{1/2}$ имеет вид (12.18). Поскольку существование асимптотиского разложения уже установлено и асимптотическое разложение по степеням h единственно, то можно ограничиться формальными выкладками при доказательстве формулы (12.18). Положим

$$\psi = J^{-1/2} e^{\frac{i}{h}S} \sum_{k=0}^{N} (ih)^k \psi_k.$$

Подставим в уравнение Шредингера и после сокращения на $e^{\frac{i}{h}S}$ приравняем нулю коэффициенты при степенях h. Используя характеристическое представление (12.12) для уравнения Шредингера, получаем рекуррентную систему уравнений

$$\frac{\partial\tilde{\psi}_0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial t} + Q\tilde{\psi}_0 = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial\tilde{\psi}_{j+1}}{\partial t} + Q\tilde{\psi}_j = 0,$$

$$Q = \sqrt{J}\,\Delta_x \frac{1}{\sqrt{J}}.$$

Здесь $\tilde{\psi}_j(t, y) = \psi_j(t, x(t, y))$. Данные Коши задаются следующим образом:

$$\tilde{\psi}_0(0, y) = \psi_0(y), \quad \tilde{\psi}_j(0, y) = 0, \quad j \geqslant 1.$$

Решая последовательно эти задачи Коши, получаем (12.18). Из этой формулы вытекает гладкость функций ψ_k в полоске $\Pi_{T,\,x}$ и их равенство нулю вне этой полоски.

Теорема 12.3 есть строгое доказательство известного физического факта: *квазиклассическая волновая функция квантовомеханической частицы сосредоточена вблизи классической траектории*. Действительно, если ψ — решение задачи Коши (12.1), (12.2), то из теоремы 12.3 следует, что $|\psi|^2$ есть величина порядка 1 в лучевой трубке $\Pi_{T,\,x}$, заполненной классическими траекториями, и что $|\psi|^2$ убывает быстрее любой степени h при $h \to 0$ вне лучевой трубки. Это означает, что вероятность нахождения частицы вне лучевой трубки сколь угодно мала при малых h.

3. Асимптотика решения задачи Коши в большом. Ниже предполагается, что выполнено условие *Ш* 12.1 и условие *Ш* 12.2. Множества $\Lambda_t^n = g^t \Lambda_0^n$ (при $0 \leqslant t \leqslant T_0$) и $\Lambda_{T_0}^{n+1} = \bigcup_{0<t<T_0} \Lambda_t^n$ являются C^∞-многообразиями.

Из предложения 4.19 вытекает, что $\Lambda_{T_0}^{n+1}$ есть лагранжево многообразие размерности $n+1$.

Теорема 12.4. *Пусть условия Ш 12.1, Ш 12.2 выполнены при* $0 < T < T_0$; *тогда решение задачи Коши* (12.1), (12.2) *имеет вид*

$$\psi(t, x, h) = K_{\Lambda_T^{n+1}} \sum_{k=0}^{N} (ih)^k \psi_k + R_{N+1}(t, x, h). \quad (12.19)$$

Для остаточного члена справедлива оценка (12.17). *Функции* $\psi_k \in C^\infty(\Lambda_T^{n+1})$ *и равны нулю вне полоски* Π_T $(\operatorname{supp}\psi_0)$.

Доказательство этой теоремы вытекает из существования ф. а. решения $\tilde\psi$

$$ih\frac{d\tilde\psi}{dt} - A\tilde\psi = f_N \in O_{-N-2,\,T},$$

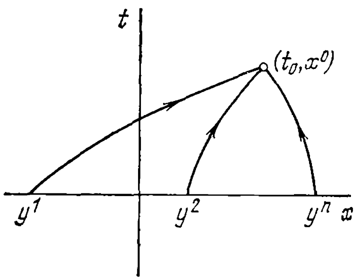

Рис. 15.

доказанного в § 10, теорема 10.1, и из оценки обратного оператора (предложение 10.3).

Приведем асимптотические формулы для решений уравнения Шредингера в нефокальных точках. Пусть $x = x(t, y)$ — траектория системы (12.6). Точка t_0 называется *фокусом* на траектории $x = x(t, y)$, если $J(t_0, y) = 0$.

Выпишем асимптотику решения задачи Коши (12.1), (12.2) в нефокальных точках. Фиксируем t_0, точку $x^0 \in \mathbf{R}^n$, и пусть $y^j \in \mathbf{R}^n$, $j = 1, 2, \quad N = N(x^0)$,— все такие точки, что

$$x(t_0, y^j) = x^0. \quad (12.20)$$

Число таких точек y^j конечно, если точка (t_0, x^0) нефокальная [83] (рис. 15). Напомним (см. § 7), что индекс Морса μ траектории (с нефокальными концами) равен числу фокальных точек на траектории с учетом их кратностей.

Из теорем 12.3, 10.2 вытекает

Теорема 12.5. *Пусть точка* (t_0, x^0) *нефокальная. Тогда*

$$\psi(t_0, x^0, h) = \sum_{j=1}^{N} \psi_0(y^j) \left|\det\frac{\partial x(t_0, y^j)}{\partial y}\right|^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\left[\frac{i}{h} S_j(t_0, x^0) - \frac{i\pi}{2}\mu_j\right] + O(h) \qquad (h \to 0). \quad (12.21)$$

Здесь $S_j(t_0, x^0)$ — действие вдоль классической траектории, соединяющей точки y^j, x^0, т. е.

$$S_j(t_0, x^0) = S_0(y^j) + \int_0^{t_0} \left(m\frac{\dot{x}^2}{2} - U(x)\right) dt,$$

где интеграл берется по такой траектории, что

$$x|_{t=0} = y^j, \qquad x|_{t=t_0} = x^0,$$

и μ_j — индекс Морса этой траектории.

В качестве примера рассмотрим квантовомеханический осциллятор

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + \frac{1}{2}\langle x, x\rangle\psi, \tag{12.22}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$. Фундаментальное решение $G(t, x, y)$ задачи Коши для уравнения (12.22), т. е. решение с данными Коши

$$G|_{t=0} = \delta(x-y),$$

вычисляется в явном виде [54]:

$$\begin{aligned} G(t, x, y) &= (2\pi hi\sin t)^{-n/2}\exp\left[\frac{i}{h}S(t, x; 0, y)\right], \\ S(t, x; 0, y) &= \frac{1}{2\sin t}\left[(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle)\cos t - 2\langle x, y\rangle\right]. \end{aligned} \tag{12.23}$$

Напомним, что S — это двухточечная характеристическая функция, т. е. действие вдоль луча $x = X(\tau)$ такого, что

$$X(0) = y, \qquad X(t) = x$$

(см. (3.72)). Отметим еще, что формула (12.23) справедлива только при $0 < t < \pi/2$.

Следовательно, при $0 < t < \pi/2$ имеет место такое представление для решения задачи Коши:

$$\psi(t, x) = \int_{\mathbf{R}_y^n} G(t, x, y)\,\psi(0, y)\,dy, \tag{12.24}$$

если $\psi(0, y) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x)\exp\left(\frac{i}{h}\langle p^0, x\rangle\right), \tag{12.25}$$

где $\psi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $p^0 \neq 0$ — фиксированный вектор, и выпишем асимптотические формулы для решения задачи Коши (12.22), (12.25). Система Гамильтона имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = p, \qquad \frac{dp}{dt} = -x;$$

данные Коши для этой системы, индуцированные данными Коши (12.25), имеют вид

$$x|_{t=0} = y, \qquad p|_{t=0} = p^0, \qquad y \in \mathbf{R}^n.$$

Решение задачи Коши для системы Гамильтона дается формулами (см. пример 3.22, § 3)

$$x = p^0 \sin t + y \cos t, \qquad p = p^0 \cos t - y \sin t. \tag{12.26}$$

Якобиан $J(t, y) = \dfrac{\partial x(t, y)}{\partial y}$ равен

$$J(t, y) = (\cos t)^n$$

и обращается в нуль при $t = t_k = k\pi + \pi/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Формула (12.26), где y пробегает $\mathbf{R}^n$, задает лагранжево C^∞-многообразие Λ_t^n в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}_{x,p}$. Это многообразие диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}^n_x$ при $t \neq t_k$. При $t = t_k$ имеем

$$\Lambda^n_{t_k} = \{(x, p)\colon x = (-1)^k p^0,\ p = (-1)^{k+1} y,\ y \in \mathbf{R}^n\},$$

т. е. многообразие $\Lambda^n_{t_k}$ есть n-плоскость, параллельная координатной лагранжевой плоскости p. Это многообразие диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}^n_p$.

Исследуем семейство лучей $x = x(t, y)$, $y \in \mathbf{R}^n$. Если $t = t_k$, то

$$x(t_k, y) = (-1)^k p^0$$

при всех y, т. е. все лучи собираются в одну точку — происходит фокусировка лучей (рис. 7). Если же $t \neq t_k$, то в любую точку $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ за время t приходит ровно один луч $x = x(t, y)$, где y определяется из соотношения

$$y = \frac{\tilde{x} - p^0 \sin t}{\cos t} \tag{12.27}$$

(см. также (3.69)). Выпишем асимптотические формулы для решения задачи Коши (12.22), (12.25) при $t \neq t_k$. Действие

S равно $S(t, x) = S(t, x; 0, y)$, где y определяется из (12.27), так что

$$S(t, x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} t (\langle p^0, p^0 \rangle - \langle x, x \rangle). \tag{12.28}$$

1) $0 < t < \pi/2$. За время t в данную точку x приходит ровно один луч; так как на этом луче нет фокальных точек, то его индекс равен нулю. Следовательно, из (12.21) получаем

$$\psi(t, x) = (\cos t)^{-n/2} \exp\left[\frac{i}{h} S(t, x)\right] \psi\left(\frac{x - p^0 \sin t}{\cos t}\right) + O(h) \tag{12.29}$$

$$\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right),$$

где S имеет вид (12.28).

2) $\pi/2 < t < 3\pi/2$. В этом случае в каждую точку за время t по-прежнему приходит ровно один луч, но на этом луче $x = x(\tau, y)$ имеется фокальная точка при $\tau = \pi/2$. Кратность нуля якобиана $J = (\cos \tau)^n$ равна n, так что индекс Морса μ для этого луча равен n (§ 7). Из (12.21) получаем

$$\psi(t, x) = |\cos t|^{-n/2} e^{-i\pi n/2} \exp\left[\frac{i}{h} S(t, x)\right] \times$$
$$\times \psi_0\left(\frac{x - p^0 \sin t}{\cos t}\right) + O(h) \tag{12.30}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}\right).$$

3) $\frac{\pi}{2} + k\pi < t < \frac{\pi}{2} + (k + 1)\pi, \quad k \geqslant 0.$

Из аддитивности индекса Морса следует, что индекс луча, приходящего за время t в точку x, равен $n(k + 1)$, так что

$$\psi(t, x) = |\cos t|^{-n/2} \exp\left[\frac{i}{h} S(t, x)\right] e^{-i\pi n(k+1)/2} \times$$
$$\times \psi_0\left(\frac{x - p^0 \sin t}{\cos t}\right) + O(h) \tag{12.31}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} < k\pi < t < \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right).$$

Остаточный член $O(h)$ принадлежит классу $O_{-1, T}(\mathbf{R}^n)$ во всех формулах (12.29) — (12.31).

Рассмотренный пример замечателен в том отношении, что мы имеем возможность непосредственно проверить асимптотические формулы. Именно, пусть $0 < t < \pi/2$; тогда решение задачи Коши (12.22), (12.25) имеет вид

$$\psi(t, x) = (2\pi h i \sin t)^{-n/2} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \exp\left[\frac{i}{h}\widetilde{S}(t, x, y)\right]\psi_0(y)\,dy,$$

$$\widetilde{S} = S(t, x;\, 0, y) + \langle p^0, y\rangle.$$

Вычислим асимптотику этого интеграла при фиксированном t и при $h \to 0$ методом стационарной фазы (§ 1). Стационарные точки функции $\widetilde{S}$ (как функции от y) определяются из уравнения $\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y} = 0$, откуда находим, что стационарная точка $y = y(t, x)$ единственна и имеет вид

$$y = \frac{x - p^0 \sin t}{\cos t}$$

(ср. с (12.27)). Значение функции $\widetilde{S}$ в стационарной точке равно

$$\widetilde{S}_{\text{ст}} = S(t, x),$$

где $S\ (t, x)$ имеет вид (12.28). Теперь вычислим $\frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2}$. Имеем

$$\frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2} = I \operatorname{ctg} t,$$

так что в стационарной точке

$$\det \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2} = (\operatorname{ctg} t)^n, \qquad \operatorname{sgn} \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2} = n.$$

По формуле (1.4) получаем (значения всех функций берутся в стационарной точке)

$$\psi(t, x) = (2\pi i h \sin t)^{-n/2} \left|\det \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2}\right|^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\left[\frac{i}{h}\widetilde{S} + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2}\right]\psi_0\,[1 + O(h)],$$

что совпадает с правой частью формулы (12.20). Точно так же можно провести проверку и для данных Коши (12.2).

Этот пример имеет еще одно интересное приложение. Из формул (12.23), (12.24) следует, что если $\psi(t, x)$ —

решение задачи Коши (12.22), (12.2), то

$$\psi\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)=(2\pi hi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\exp\left[\frac{i}{h}S_0(x)\right]\psi_0(y)\,dy. \quad (12.32)$$

Но этот интеграл — это интеграл вида (1.1), т. е. интеграл от произвольной быстро осциллирующей функции. Оказывается, что можно получить асимптотическое разложение для интеграла (12.32) и явные выражения для коэффициентов при степенях h с помощью квазиклассической асимптотики решения задачи Коши (12.22), (12.2). Это сделано в [42].

Приведем асимптотические формулы для функции Грина $G(t,\ x,\ y)$. Рассмотрим краевую задачу для классического уравнения Ньютона:

$$m\frac{d^2X}{dt^2}=-\frac{\partial V(X)}{\partial X},\qquad X(0)=y,\qquad X(t)=x. \quad (12.33)$$

Пусть решение $X(\tau;\ t,\ x,\ y)$ этой задачи единственно. Действие вдоль классической траектории равно

$$S(t,\ x,\ y)=\int\limits_0^t\left[\frac{m\dot{X}^2}{2}-V(X(\tau;\ t,\ x,\ y))\right]d\tau. \quad (12.34)$$

Фиксируем $y\in\mathbf{R}^n$, и пусть решение задачи (12.33) единственно при всех $x\in\mathbf{R}^n$ и при всех $t\in[0,\ T]$. На потенциал $V(x)$ налагаются те же условия, что и в п. 1. Тогда квазиклассическая асимптотика функции Грина имеет вид [35], [36]

$$G(t,\ x,\ y)=(2\pi ih)^{-n/2}\sqrt{\left|\det\frac{\partial^2S}{\partial x\,\partial y}\right|}\times$$
$$\times\exp\left[\frac{i}{h}S(t,\ x,\ y)\right][1+hz]. \quad (12.35)$$

Для функции $z=z(t,\ x,\ y;\ h)$ имеет место оценка

$$\|z\|_{L_2(\mathbf{R}^n)}\leqslant C$$

при $0\leqslant t\leqslant T$, $x\in\mathbf{R}^n$, $0<h\leqslant 1$.

Если потенциал $V(x)$ — квадратичная функция, то асимптотическая формула (12.35) (при $z\equiv 0$) дает точную функцию Грина (при $0\leqslant t\leqslant T$, где T *определяется по потенциалу* V).

На больший интервал времени асимптотику функции Грина можно продолжить, используя известную формулу свертки:

$$G(t_1+t_2,\ x,\ y)=\int\limits_{\mathbf{R}^n}G(t_2,\ x,\ y)\,G(t_1,\tilde{y},\ y)\,d\tilde{y}.$$

Асимптотику последнего интеграла можно вычислить с помощью метода стационарной фазы.

Пусть при фиксированных t, y краевая задача (12.33) имеет конечное число различных решений $X_k(\tau;\ t,\ x,\ y)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$, и пусть $S_k(t,\ x,\ y)$ — действие вдоль k-го решения. Тогда асимптотика функции Грина имеет вид

$$G(t,\ x,\ y) = (2\pi i h)^{-n/2}\left[\sum_{k=1}^{N}\left|\det\frac{\partial^2 S_k}{\partial x\,\partial y}\right|^{1/2}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(\frac{i}{h}S_k(t,\ x,\ y) - \frac{i\pi}{2}\mu_k\right) + O(h)\right], \tag{12.36}$$

где μ_k — индекс Морса k-й траектории. При этом предполагается, что концы каждой траектории не являются фокальными точками.

4. Квазиклассическая асимптотика функции Грина для стационарного уравнения Шредингера. Рассмотрим стационарное уравнение Шредингера:

$$h^2\Delta_x G + (E - V(x))\,G = \delta(x - x^0). \tag{12.37}$$

Здесь x, $x^0 \in \mathbf{R}^n$, точка x^0 фиксирована, потенциал $V(x)$ — вещественнозначная функция класса $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $E > 0$ — постоянная,

$$E - V(x) \geqslant a > 0, \qquad x \in \mathbf{R}^n. \tag{12.38}$$

Пусть потенциал $V(x)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, а именно, для любого мультииндекса α справедлива оценка

$$|D_x^\alpha V(x)| \leqslant C_\alpha(1 + |x|)^{-|\alpha| - 2}, \qquad x \in \mathbf{R}^n. \tag{12.39}$$

На бесконечности поставим условия излучения Зоммерфельда:

$$\begin{gathered} G(x,\ x^0) = O(|x|^{(1-n)/2}), \\ \frac{\partial G}{\partial |x|} + i\sqrt{\frac{E}{h}}\,G = o(|x|^{(1-n)/2}) \qquad (|x| \to \infty), \end{gathered} \tag{12.40}$$

Как известно, решение задачи (12.37), (12.40) существует и единственно при сформулированных выше условиях на потенциал. Это решение есть ψ-функция пучка частиц, вылетающих с энергией E из источника, расположенного в точке x^0, и движущихся в потенциальном поле с потенциальной энергией $V(x)$. Эту же задачу можно интерпретировать как задачу о вычислении поля точечного источника света в неоднородной среде с коэффициентом преломления $n^2(x) = E - V(x)$, с волновым числом $k = h^{-1}$. Условие (12.38) в этом случае означает, что коэффициент преломления $n^2(x)$ всюду положителен, т. е. что в среде отсутствует поглощение.

В одномерном случае задача о рассеянии хорошо изучена. Исследованы даже столь тонкие вопросы, как задача о квазистационарных уровнях, задача о надбарьерном отражении (см. [37], [49], [57], [59]).

При $n \geqslant 2$ задача о рассеянии является значительно более сложной.

В этом пункте изложены без доказательств строгие результаты, полученные в [27] методом канонического оператора.

С уравнением (12.37) ассоциированы уравнение Гамильтона — Якоби

$$(\nabla S(x))^2 = E - V(x) \tag{12.41}$$

и система Гамильтона

$$\frac{dx}{d\tau} = 2p, \qquad \frac{dp}{d\tau} = -\nabla V(x). \tag{12.42}$$

Поставим следующую задачу Коши для системы Гамильтона:

$$p^2|_{\tau=0} = E - V(x^0), \qquad x|_{\tau=0} = x^0. \tag{12.43}$$

Напомним, что гамильтониан $H(x, p) = p^2 + V(x)$ является первым интегралом системы Гамильтона (см. § 3), так что

$$p^2 + V(x) \equiv E \tag{12.44}$$

на любом решении $\{x(\tau), p(\tau)\}$ задачи Коши (12.42), (12.43).

Физическая интерпретация данных Коши (12.43) такова: из точки x^0 в момент «времени» $\tau = 0$ выпускаются все лучи, под всеми возможными углами, которые имеют энергию E. Укажем лагранжево многообразие, ассоциированное с задачей (12.37), (12.40). Начальные импульсы $p|_{\tau=0}$ заполняют сферу $S^{n-1} = \{p \in \mathbf{R}^n: p^2 = E - V(x^0)\}$. Пусть $\theta = (\theta_1, \theta_3, \ldots, \theta_{n-1})$ — угловые координаты на сфере; обозначим через $\{x(\tau, \theta), p(\tau, \theta)\}$ решение задачи (12.42), (12.43) такое, что начальный импульс $p(0, \theta)$ имеет угловые координаты θ. Всюду в оставшейся части этого параграфа предполагается, что выполнено условие

Ш 12.3. Потенциал $V(x)$ удовлетворяет условиям (12.38), (12.39), и система (12.42) не имеет *финитных движений*.

Последнее условие означает, что при любом $x^0 \in \mathbf{R}^n$

$$\lim_{\tau \to +\infty} |x(\tau, \theta)| = \infty$$

при всех $\theta \in S^{n-1}$. Тогда множество

$$\Lambda^n = \{(x, p) \in \mathbf{R}^{2n}: x = x(\tau, \theta),\ p = p(\tau, \theta),\ \theta \in S^{n-1},\ 0 < \tau < \infty\} \tag{12.45}$$

есть лагранжево C^∞-многообразие размерности n с краем

$$\partial\Lambda^n = \{(x, p) \in \mathbf{R}^{2n}: x = x^0,\ p^2 = E - V(x^0)\}.$$

Асимптотика функции Грина $G(x, x^0)$ при $h \to 0$ строится с помощью канонического оператора K_{Λ^n}, отвечающего многообразию Λ^n.

При построении асимптотики функции Грина возникает осложнение, связанное с тем, что функция $G(x, x^0)$ имеет особенность в точке $x = x^0$, и потому асимптотика G имеет разный характер в окрестности $U = \{x \in \mathbf{R}^n: |x - x^0| < \varepsilon\}$ точки x^0 и вне этой окрестности. В дальнейшем $\varepsilon > 0$ фиксировано, но достаточно мало.

Приближенную функцию Грина $G_N(x, x^0)$ будем искать в виде

$$G_N(x, x^0) = G_N^0(x, x^0) + G_N^1(x, x^0), \tag{12.46}$$

где $G_N^1 \equiv 0$ при $x \in U$, а функция G_N^0 сосредоточена в окрестности точки x^0.

1. Конструкция *сингулярной части* G_N^0 функции Грина.

Функция G_N^0 строится с помощью нестационарного уравнения Шредингера. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = h^2\Delta\psi + n^2(x)\psi, \tag{12.47}$$

$$\psi|_{t=0} = \frac{-ih^{n-1}}{(2\pi)^n}\exp\left[\frac{i}{h}\langle p, x\rangle\right], \tag{12.48}$$

где $n^2(x) = E - V(x)$, $p \in \mathbf{R}^n$. Пусть $\psi(t, x, p)$ — решение этой задачи. Так как

$$\delta(x - x^0) = (2\pi h)^{-n}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\exp\left[\frac{i}{h}\langle p, x - x^0\rangle\right]dp,$$

то формальное применение преобразование Фурье приводит к следующей формуле:

$$G(x, x^0) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} dp \int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{i}{h}\langle p, x^0\rangle\right]\psi(t, x, p)\,dp.$$

Мы уже обсуждали связанные с таким формальным подходом трудности в § 10, п. 5. Кроме того, мы собираемся построить асимптотику функции Грина только в малой окрестности U точки x^0. В этой окрестности все лучи —«почти прямые», так что естественными координатами в U являются переменные (τ, θ), если $0 \leqslant \tau \leqslant t_0$ и $t_0 \ll 1$.

Введем срезающую функцию $\eta(t) \in C^\infty$ при $t = 0$, равную 1 при малых t и равную нулю при $t \geqslant t_0$. Обозначим через ψ_N ф. а. решение задачи Коши (12.48) с точностью до $O(|p|^{-N})$ (конструкцию ψ_N см. ниже) и положим

$$G_N^0(x, x^0) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} dp \int\limits_0^\infty dt\eta(t)\psi_N(t, x, p)\exp\left[-\frac{i}{h}\langle p, x^0\rangle\right]. \tag{12.49}$$

Формально этот интеграл расходится; стандартными способами, которые применяются к интегралам от быстро осциллирующих функций, его можно регуляризовать.

Функция $G_N^0 \in C^\infty$ в малой проколотой окрестности точки x^0.

Остается получить явные формулы для функций ψ_N, что сводится к построению асимптотики (при $h \to 0$, $|p| \geqslant 1$) задачи Коши (12.49) в малом. Из результатов § 10 вытекает, что

$$\psi_N(t, x, p) = \exp\left[\frac{i}{h}S(t, x, p)\right]|J|^{1/2}\sum_{j=0}^{N}(-ih)^j\varphi_j(t, x, p). \tag{12.50}$$

Действие S является решением задачи Коши

$$\frac{\partial S}{\partial t}+(\nabla S)^2+n^2(x)=0, \qquad S\,|_{t=0}=\langle x,\ p\rangle$$

и является однородной функцией от переменных p степени 1. Далее, J — якобиан:

$$J=\det\frac{\partial x(t,\ y,\ p)}{\partial y}, \tag{12.51}$$

где $x=x(t,\ y,\ p)$ — решение задачи Коши для системы Ньютона:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\nabla n^2(x), \quad x\,|_{t=0}=y, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=p. \tag{12.52}$$

Тем самым конструкция сингулярной части функции Грина завершена.

Как видно из формул (12.49) — (12.52), функция G_N^0 выражается через решения динамической системы (12.52). Эта функция в области U удовлетворяет уравнению

$$[h^2\Delta+n^2(x)]\,G_N^0=\delta(x-x^0)+h^{N+1}f_N(x,\ h),$$

где $f_N\in C^\infty$, и удовлетворяет оценкам

$$|\,D_x^\alpha f_N\,|\leqslant C_\alpha h^{-|\alpha|}$$

при $x\in U$.

2. Асимптотика функции G_N^0 вне сингулярности.

Интеграл (12.49) имеет особенность при $x=x^0$, и его поведение в непосредственной окрестности точки x^0 весьма сложное. Однако если отступить от этой точки, то G_N^0 будет быстро осциллирующей функцией. Это можно показать, применив метод стационарной фазы к интегралу (12.49). Эта асимптотика выражается в терминах лагранжева многообразия Λ^n (см. (12.45)) и динамической системы (12.42). Введем действие

$$S(x,\ x^0)=\int_{r^0}^{r}\langle p,\ dx\rangle. \tag{12.53}$$

Интеграл берется по кривой, которая лежит на Λ^n и соединяет точки $r^0=(x^0,\ p^0)$, $r=(x,\ p)$, и p^0 — любая такая точка, что $p(^0)^2=n^2(x^0)$ (т. е. x^0, x — проекции точек r^0, r на x-пространство). Пока x находится в малой окрестности U точки x^0, функция S однозначна. Далее, введем якобиан

$$J(x,\ x^0)=\left.\frac{dx}{d\omega\,d\tau}\right|_{\tau=t}. \tag{12.54}$$

Здесь $x=x(\tau,\ \theta)$ (луч),

$$d\omega=\sin^{n-2}\theta_1 \qquad \sin\theta_{n-2}\,d\theta_1 \qquad d\theta_{n-1}$$

и $x(t,\ \theta)=x$ (т. е. луч проходит через точку x). Время $t\in(0,\ t_0)$, точка $x\in U$, так что такой луч единствен при малых t_0, θ.

Окончательно получаем асимптотическую формулу ($h \to +0$)

$$G_N^0(x, x^0) = h^{-\frac{n+1}{2}} (n(x^0))^{\frac{n-2}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}(n+1)} |J(x, x^0)|^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \exp\left[\frac{i}{h} S(x, x^0)\right]\left[1 + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x, x^0) h^j + O(h^{m+1})\right]. \qquad (12.55)$$

Эта формула справедлива в области $U \setminus U_0$, где U_0 — меньшая, чем U, окрестность точки x^0; функция $\varphi_j \in C^\infty(U \setminus U_0)$.

3. Конструкция функции G_N^1.

Эта функция выражается через канонический оператор K_{Λ^n}, отвечающий лагранжеву многообразию Λ^n (см. (12.45)).

Пусть Λ_1^n — часть многообразия Λ^n, лежащая над областью $\mathbf{R}_x^n \setminus V$, и V — окрестность точки x^0, лежащая строго внутри выбранной выше окрестности U. Многообразие Λ_1^n — неограниченное. Тем не менее его можно покрыть конечным числом канонических карт в силу отсутствия финитных движений (условие *Ш* 123 и быстрого стремления потенциала $V(x)$ к нулю при $|x| \to \infty$. Это позволяет ввести канонический оператор $K_{\Lambda_1^n}$ по тем же формулам, что и в § 8. Объем $d\sigma^n$ на Λ_1^n выбирается так:

$$d\sigma^n = d\omega\, d\tau.$$

Этот объем инвариантен относительно сдвигов вдоль траекторий системы (12.35).

Функция G_N^1 задается формулой

$$G_N^1(x, x^0) = K_{\Lambda_1^n}\left[\rho\left(g_0 + \frac{h}{i} g_1 + \ldots + \left(\frac{h}{i}\right)^N g_N\right)\right]. \qquad (12.56)$$

Здесь ρ — срезающая функция, равная 1 на Λ_1^n и равная 0 в окрестности края $\partial\Lambda^n$. Функции g_j строятся по найденным выше функциям φ_j (см. (12.51)).

Имеет место следующая

Теорема 6. *При* $x \in \mathbf{R}^n$, $0 < h \leqslant 1$, *справедлива оценка*

$$|G(x, x^0) - G_N(x, x^0)| \leqslant Ch^{N-n}(1 + |x|)^{\frac{1-n}{2}} \qquad (12.57)$$

В заключение приведем асимптотическую формулу для функции Грина в нефокальной точке. Пусть $\tilde{x} \neq x^0$ — нефокальная точка. Тогда существует конечное число лучей

$$x = x(\tau, \theta^j), \qquad 1 \leqslant j \leqslant k,$$

которые проходят через точку $\tilde{x}$, т. е.

$$x(\tau_j, \theta^j) = \tilde{x}$$

при некотором τ_j. Введем обозначения: $S_j(\tilde{x}, x^0)$ — действие вдоль j-го луча, $\mu_j(\tilde{x})$ — индекс j-го луча и J_j — якобиан (12.54), вычисленный при $\tau=\tau_j$, $\theta=\theta^j$. Для функции G справедлива формула

$$G(x,\ x^0)=d_n h^{(n-7)/2}\sum_{j=1}^{k}|J_j|^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{i}{h}S_j(\widetilde{x},\ x^0)+\frac{i\pi}{2}\mu_j(\widetilde{x})\right]+O(h), \qquad (12.58)$$

где d_n — постоянная:

$$d_n=2\sqrt{\pi}\left(\frac{E-V(x^0)}{2\pi}\right)^{n/2-1}\exp\left[i(n+1)\frac{\pi}{4}\right].$$

5. Метод стационарной фазы и асимптотика решения задачи Коши в малом. Изложим здесь метод, предложенный Ле Ву Ань для получения следующих членов разложения по степени $h=\lambda^{-1}$ интеграла (1.1) (ТМФ 25, № 2, 1975)

$$I(h)=\frac{1}{(2\pi h)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{i}{h}\Phi(x)}\varphi(x)\,dx, \qquad x=x_1,\ \ldots,\ x_n,$$

где $\Phi(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\quad \varphi(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Суть метода заключается в том, что коэффициенты a_{ij} для свободного уравнения Шредингера

$$ih\frac{\partial\psi(x,\ t)}{\partial t}=\sum_{i,\,j}a_{ij}\frac{\partial^2\psi(x,\ t)}{\partial x_i\,\partial x_j}, \qquad (12.59)$$

подбираются так, чтобы для некоторого начального условия решение этого уравнения в точке $x=0$, $t=1$ совпадало бы с исследуемым интегралом и, с другой стороны, при $0\leqslant t\leqslant 1$ был бы применим для нахождения асимптотического разложения решения уравнения (12.59) метод ВКБ (т. е. бихарактеристики не имели бы фокальных точек).

Пусть $x=\xi^k$ — изолированная простая стационарная точка функции

$$\Phi(x)\colon\ \operatorname{grad}\Phi(\xi^k)=0, \qquad \det C(\xi^k)=0,$$

где $C(x)=\|\Phi_{x_ix_j}(x)\|$. Имеет место следующая важная для дальнейшего

Л е м м а. *Пусть Ω_ε^k — ε-окрестность точки ξ^k,*

$$X^k(x_0,\ t)\overset{\text{def}}{=}2tC^{-1}(\xi^k)\,\nabla\Phi(x_0)+(1-t)\,x_0.$$

Тогда при достаточно малом ε и $t\geqslant 0$ $J(x_0,\ t)\overset{\text{def}}{=}\det\left\|\frac{\partial X_i^k}{\partial x_{0j}}\right\|\neq$ $\neq 0$ и существует единственное гладкое решение $x_0=x_0^k(x,\ t)$ уравнения $x=X^k(x_0,\ t)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением доказывается, что $J(\xi^k, t) = \det \left\| \frac{\partial X_i^k}{\partial x_{0j}} \right\|_{x_0=\xi^k} = (t+1)^n$. Отсюда следует утверждение.

Введем обозначения:

$$\left(\frac{1}{1-A}\right)_N = \sum_{k=0}^{N} A^k,$$

$$R_k\psi(x, t) = \int_0^t \sqrt{J(x_0^k(x, \tau), \tau)}\,(\nabla, C^{-1}(\xi^k)\nabla)\frac{\psi(x, \tau)}{\sqrt{J(x_0^k(x, \tau), \tau)}}\,d\tau,$$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, где $J(x_0, t)$ и $x_0^k(x, t)$ определены в лемме.

Теорема. *Пусть в области* $\operatorname{supp}\varphi(x)$ *имеются* s *изолированных простых стационарных точек* $\xi^1, \xi^2, \quad \xi^s$ *функции* $\Phi(x)$ (*т. е.* $\nabla\Phi(\xi^k) = 0$, $\det C(\xi^k) \neq 0$, $k = 1, \ldots, s$, $C(x) = \| \Phi_{x_ix_j}(x) \|$). *Тогда для любого* $N \geqslant 1$ *справедливо выражение*

$$I(h) = \sum_{k=1}^{s} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}n}\exp\left\{-i\frac{\pi}{2}(\operatorname{inerdex} C(\xi^k))\right\} e^{\frac{i}{h}\Phi(\xi^k)}}{\sqrt{|\det C(\xi^k)|}} \times$$
$$\times\left(\varphi(\xi^k) + ih\left[\left(\frac{1}{1-ihR_k}\right)_N R_k e_k(x_0^k(x, t))\,\varphi(x_0^k(x, t))\right]_{\substack{x=0\\ t=1}}\right) +$$
$$+ Z_h + O(h^\infty), \qquad (12.60)$$

где $e_k(x)$ *принадлежат* C_0^∞ *и таковы, что* $e_k(x) \equiv 1$ *при* $x = \xi^k$ *и равно нулю при* x, *лежащем вне достаточно малой окрестности точки* ξ^k, *а остаточный член имеет вид*

$$Z_h = \sum_{k=1}^{s} h^{N+1}\int_0^1 \frac{1}{(\pi h)^{n/2}(1-\tau)^{n/2}2^{n/2}} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{4h(1-\tau)}((-\eta), C(\xi^k)(-\eta))\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{h}\left[(\nabla\Phi(x_0^k(\eta, \tau)), C^{-1}(\xi^k)\nabla\Phi(x_0^k(\eta, \tau)))\tau +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{4}(\tau-1)(x_0^k(\eta, \tau), C(\xi^k)x_0^k(\eta, \tau))\right]\right\}\exp\left\{\frac{i}{h}\Phi(x_0^k(\eta, \tau))\right\} \times$$
$$\times (\nabla, C^{-1}(\xi^k)\nabla)\frac{R_k^N\varphi(x_0^k(\eta, \tau))\,e_k(x_0^k(\eta, \tau))}{\sqrt{J(x_0^k(\eta, \tau), \tau)}}\,d\eta\,d\tau, \qquad (12.61)$$

причем $|Z_h| \leqslant Ch^{N-[n/2]}$, $N > [n/2]$.

Доказательство. Из леммы следует, что при $x_0^k \in \in \operatorname{supp} e_k(x)$ $J(x_0^k, t) \neq 0$. Мы всегда можем найти такое разбиение единицы, что

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{s} \varphi(x) e_k(x) + \sum_{j=s+1}^{s_1} \varphi(x) e_j(x),$$

причем $\xi^k \in \operatorname{supp} e_j(x)$, $k = 1, \ldots, s$, $j = s+1, \ldots, s_1$. Поэтому задача сводится к нахождению асимптотики интегралов

$$I_k(h) = \frac{1}{(2\pi h)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h}\Phi(x)} \varphi(x) e_k(x)\, dx, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Интегрируя по частям, получаем, что при $k > s$ интеграл $I_k(h)$ равен $o(h^\infty)$. Рассмотрим случай $k \leqslant s$. Для получения асимптотики мы воспользуемся квазиклассической асимптотикой решения задачи Коши свободного уравнения Шредингера вида

$$i\, \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -h\,(\nabla, C^{-1}(\xi^k)\,\nabla)\, \psi(x, t). \tag{12.62}$$

Нетрудно убедиться (непосредственной подстановкой), что точное решение этой задачи имеет вид (здесь λ_j^k — собственные значения $C(\xi^k)$)

$$\psi(x, t) = \frac{\exp\left\{-i\frac{\pi}{4}\left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname{sgn}\lambda_j^k\right)\right\}}{(\pi t h)^{n/2}\, 2^n} \times$$

$$\times \sqrt{|\det C(\xi^k)|} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{4ht}(x-\eta)\, C(\xi^k)\,(x-\eta)\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{h} S_0^k(\eta)\right\} \varphi(\eta)\, e_k(\eta)\, d\eta, \qquad \eta = \eta_1, \ldots, \eta_n. \tag{12.63}$$

Положим $S_0^k(x) = \Phi(x) - {}^1/_4\,(x, C(\xi^k)\,x)$. Нетрудно видеть, что тогда искомый интеграл будет выражаться через решение $\psi(x, t)$ следующим образом:

$$I_k(h) = \frac{\exp\left\{i\frac{\pi}{4}\left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname{sgn}\lambda_j^k\right)\right\} 2^{n/2}}{\sqrt{|\det C(\xi^k)|}}\, \psi(0, 1). \tag{12.64}$$

Нам остается найти асимптотику решения задачи (12.62) при $t = 1$, $x = 0$. Эта последняя асимптотика может быть найдена в силу леммы по стандартному методу ВКБ. Действительно, после замены

$$\psi(x,\ t,\ h) = i^{\frac{i}{h} S^k(x,\ t)} \varphi(x,\ t,\ h), \tag{12.65}$$

где $S^k(x,\ t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial S^k(x,\ t)}{\partial t} + (\nabla S^k(x,\ t),\ C^{-1}(\xi^k)\nabla S^k(x,\ t)) = 0, \tag{12.66}$$

$$S^k|_{t=0} = S_0^k(x) = \Phi(x) - {}^1/_4(x,\ C(\xi^k)\,x),$$

получим уравнение

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} + 2i(\nabla S,\ C^{-1}(\xi^k)\nabla\varphi) + i\varphi(\nabla,\ C^{-1}(\xi^k)\nabla S) + \\ + h(\nabla,\ C^{-1}(\xi^k)\nabla\varphi) = 0. \tag{12.67}$$

Решение задачи (12.66) имеет вид

$$S^k(x,\ t) = (\nabla\Phi(x_0^k),\ C^{-1}(\xi^k)\nabla\Phi(x_0^k))\,t - \\ - {}^1/_4(t-1)(x_0^k,\ C(\xi^k)\,x_0^k) + \Phi(x_0^k(x,\ t)), \tag{12.68}$$

где $x_0^k = x_0^k(x,\ t)$ есть решение уравнения

$$x = 2tC^{-1}(\xi^k)\operatorname{grad}\Phi(x_0^k) + (1-t)\,x. \tag{12.69}$$

В силу леммы $J(x_0^k,\ t) = \det\left\|\dfrac{\partial X_i^k}{\partial x_{0j}}\right\| \neq 0$ при $t \geqslant 0$, $x_0^k \in \operatorname{supp} e_k(x)$; поэтому это решение существует, а значит, стандартный метод ВКБ применим.

Решение уравнения (12.67) ищется в виде

$$\varphi(x,\ t,\ h) = \frac{1}{\sqrt{J(x_0^k(x,\ t)\,t)}}\sum_{\nu=1}^{N} h^\nu\varphi_\nu(x,\ t). \tag{12.70}$$

Тогда для определения $\varphi_\nu(x,\ t)$ получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d\varphi_0}{d\tau} = 0, \qquad \varphi_0|_{\tau=0} = \varphi(x_0^k)\,e_k(x_0^k), \tag{12.71}$$

$$i\frac{d\varphi_\nu}{d\tau} = -\sqrt{J(x_0^k(x,\ t),\ t)}\,(\nabla,\ C^{-1}(\xi^k)\nabla)\frac{\varphi_{\nu-1}}{\sqrt{J(x_0^k(x,\ t),\ t)}},$$

где

$$\frac{d}{d\tau} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} + 2(\nabla S,\ C^{-1}(\xi^k)\nabla).$$

Отсюда следует, что $\varphi_0(x,\ t) = \varphi(x_0^k(x,\ t))\,e_k(x_0^k(x,\ t))$, а для любого $N \geqslant 1$ φ_ν определяются по формуле

$$\varphi_\nu(x,\ t) = (i)^\nu R_k^\nu\varphi(x_0^k(x,\ t))\,e_k(x_0^k(x,\ t)), \tag{12.72}$$

поэтому

$$\psi_N(x, t, h) = \frac{\exp\left\{\frac{i}{h} S^k(x, t)\right\}}{\sqrt{J(x_0^k(x, t), t)}} \Big[e_k(x_0^k(x, t))\, \varphi(x_0^k(x, t)) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{N} (ihR_k(x_0^k)^{\nu} e_k(x_0^k(x, t))\, \varphi(x, t)) \Big] =$$

$$= \frac{\exp\left\{\frac{i}{h} S^k(x, t)\right\}}{\sqrt{J(x^k(x, t), t)}} \Big[\varphi(x_0^k(x, t))\, e_k(x_0^k(x, t)) +$$

$$+ ih \left(\frac{1}{1 - ihR_k}\right)_N R_k e_k(x_0^k(x, t))\, \varphi(x_0^k(x, t)) \Big]. \qquad (12.73)$$

Докажем теперь, что функция $\psi_N(x, t, h)$ действительно определяет асимптотику решения задачи (12.62). Эта функция удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \psi_N}{\partial t} = -h(\nabla, C^{-1}(\xi^k)\nabla)\psi_N - h^{N+1} e^{\frac{i}{h} S^k(x, t)} (\nabla, C^{-1}(\xi^k)\nabla) \times$$

$$\times \frac{\varphi_N}{\sqrt{J(x_0^k(x, t), t)}}, \qquad \psi_N|_{t=0} = \varphi(x)\, e^{\frac{i}{h} S^k(x)}$$

следовательно, $\tilde{\psi}(x, t, h) = \psi_N(x, t, h) - \psi(x, t)$ есть решение задачи

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}(x, t, h)}{\partial t} = -h(\nabla, C^{-1}(\xi^k)\nabla)\tilde{\psi}(x, h, h) -$$

$$- h^{N+1} e^{\frac{i}{h} S^k(x, t)} (\nabla, C^{-1}(\xi^k)\nabla) \frac{\varphi_N}{\sqrt{J}}, \qquad \tilde{\psi}|_{t=0} = 0. \qquad (12.74)$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\tilde{\psi}(x, t) = h^{N+1} \int_0^t \times$$

$$\times \frac{e \exp\left\{-i\frac{\pi}{4}\left(\sum_j^n \operatorname{sign} \lambda_j^k\right)\right\} \sqrt{|\det C(\xi^k)|}}{(\pi h)^{n/2}(t-\tau)^{n/2}\, 2^n} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{4h(t-\tau)}(x-\eta)\, C(\xi^k)\,(x-\eta)\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{h}\left[(\nabla\Phi(x_0^k(\eta,\tau)),\ C^{-1}(\xi^k)\nabla\Phi(x_0^k(\eta,\tau)))\tau+\right.\right.$$
$$\left.\left.+{}^1/_4(\tau-1)(x_0^k(\eta,\tau),\ C(\xi^k)x_0^k(\eta,\tau))\right]\right\}\exp\left\{\frac{i}{h}\Phi(x_0^k(\eta,\tau))\right\}\times$$
$$\times(\nabla,\ C^{-1}(\xi^k)\nabla)\frac{R_h^N\varphi(x_0^k(\eta,\tau))\,e_k(x_0^k(\eta,\tau))}{\sqrt{J(x_0^k(\eta,\tau),\tau)}}\,d\eta\,d\tau. \qquad (12.75)$$

Это решение может быть представлено также в виде

$$\widetilde{\psi}(x,\ t,\ h)=h^{N+1}\int_0^t e^{i(\nabla,C^{-1}(\xi^k)\nabla)(t-\tau)}e^{\frac{i}{h}S^k(x,\tau)}\times$$
$$\times(\nabla,\ C^{-1}(\xi^k)\nabla)\frac{\varphi_N(x_0^k(x,\tau))}{\sqrt{J(x_0^k(x,\tau),\tau)}}\,d\tau.$$

А так как $\|e^{iHt}\|=\|e^{i(\nabla,\ C^{-1}(\xi^k)\nabla)t}\|=1$, то

$$\|\widetilde{\psi}(x,\ t,\ h)\|\leqslant h^{N+1}\int_0^t\left\|(\nabla,\ C^{-1}(\xi^k)\nabla)\frac{\varphi_N(x_0^k(x,\tau))}{\sqrt{J(x_0^k(x,\tau))}}\right\|d\tau\leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\,th^{N+1}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x}=h^{N+1}\int_0^t e^{i(\nabla,\ C^{-1}(\xi^k)\nabla)(t-\tau)}\frac{\partial}{\partial x}\times$$
$$\times\left(e^{\frac{i}{h}S^k(x,\tau)}(\nabla,\ C^{-1}(\xi^k)\nabla)\frac{\varphi_N(x_0^k(x,\tau))}{\sqrt{J(x_0^k(x,\tau))}}\right)d\tau=$$
$$=ih^N\int_0^t e^{i(\nabla,\ C^{-1}(\xi^k)\nabla)(t-\tau)}\frac{\partial S^k(x,\tau)}{\partial x}\times$$
$$\times\left(e^{\frac{i}{h}S^k(x,\tau)}(\nabla,\ C^{-1}(\xi^k)\nabla)\frac{\varphi_N(x_0^k(x,\tau))}{\sqrt{J(x_0^k(x,\tau))}}\right)d\tau+$$
$$+h^{N+1}\int_0^t e^{i(\nabla,\ C^{-1}(\xi^k)\nabla)(t-\tau)}e^{\frac{i}{h}S^k(x,\tau)}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nabla,\ C^{-1}(\xi^k)\nabla)\frac{\varphi_N(x_0^k(x,\tau))}{\sqrt{J(x_0^k(x,\tau))}}\right]d\tau,$$

то

$$\left\| \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial x} \right\| \leqslant \text{const}\, th^N.$$

Аналогично

$$\left\| \frac{\partial^j \widetilde{\psi}}{\partial x^j} \right\| \leqslant \text{const}\, th^{N+1-j}.$$

Поэтому

$$\| \widetilde{\psi} \|_{W_2^j} \leqslant \text{const}\, tN^{N+1-j}.$$

В силу теоремы вложения

$$\text{Max}\, | \widetilde{\psi} | \leqslant c \| \widetilde{\psi} \|_{W_2^{[n/2]+1}} \leqslant c_1 th^{N-[n/2]}.$$

Из (12.75) и (12.64) получим и остаточный член Z_h. Из (12.64) и (12.73) для интеграла получим разложение

$$I_k(h) = \sum_{k=1}^{s} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}n} \exp\left\{ i\frac{\pi}{4}\left(n - \sum_j^n \operatorname{sgn} \lambda_j^k\right)\right\} 2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{|\det C(\xi^k)|}\sqrt{J(x_0^k(0, 1), 1)}} \times$$

$$\times e^{\frac{i}{h}S(0,1)} \left[\varphi(x_0^k(x, t))\, e_k(x_0^k(x, t)) + ih\left(\frac{1}{1 - ihR_k}\right)_N \times \right.$$

$$\left. \times R_k e(x_0^k(x, t))\, \varphi(x_0^k(x, t)) \right]_{\substack{x=0\\t=1}} + Z_h.$$

Из (12.69) в точке $x = 0$, $t = 1$ получим $\nabla\Phi(x_0^k) = 0$, но при $x \in \in \operatorname{supp} e_k(x)$ $\nabla\Phi(x) = 0$ в единственной точке $x = \xi^k$. Отсюда $x_0^k(0, 1) = \xi^k$.

Из леммы получим

$$J(x_0^k(x, t), t)\Big|_{\substack{x=0\\t=1}} = J(\xi^k, 1) = 2^n,$$

кроме того,

$$S(0, 1) = [{}^1/_4 (C(\xi^k)\, x_0^k,\ C^{-1}(\xi^k)\, C(\xi^k)\, x_0^k) -$$

$$- {}^1/_4 (x_0^k,\ C(\xi^k)\, x_0^k) + \Phi(x_0^k)]_{\substack{x=0\\t=1}} = \Phi(\xi^k).$$

Отсюда следуют требуемые разложения.

§ 13. Асимптотические серии собственных значений (правило квантования Бора)

С помощью канонического оператора построены специальные асимптотические серии собственных значений и почти собственных функций самосопряженных дифференциальных операторов в $L_2(\mathbf{R}^n)$.

1. Постановка задачи. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $A\colon H \to H$ — линейный оператор. Напомним определение спектра $\sigma(A)$ оператора A. Точка λ_0 называется точкой *спектра* оператора A, если существует последовательность векторов $f_m \in D(A)$, $m = 1, 2,$ такая, что

$$\|f_m\| \geqslant C > 0, \quad \|(A - \lambda_0) f_m\| = \varepsilon_m \to 0 \quad (m \to \infty).$$

Векторы f_m называются *почти собственными векторами* оператора A. Если A — самосопряженный оператор и известен его почти собственный вектор, то можно получить информацию о спектре оператора A. Справедлива известная

Лемма 13.1. *Пусть $A\colon H \to H$ — самосопряженный оператор, $f \in D(A)$ и*

$$\|f\| \geqslant C > 0, \quad \|(A - \lambda) f\| \leqslant \varepsilon. \tag{13.1}$$

Тогда

$$d(\lambda) \leqslant \varepsilon/C, \tag{13.2}$$

где $d(\lambda)$ — расстояние от точки λ до спектра $\sigma(A)$.

Доказательство. Так как оператор A самосопряжен, то

$$\|(A - \lambda)^{-1}\| \leqslant 1/d(\lambda).$$

Если $\lambda \in \sigma(A)$, то $d(\lambda) = 0$ и неравенство (13.2) очевидно. Если $\lambda \notin \sigma(A)$, то

$$C \leqslant \|f\| = \|(A-\lambda)^{-1}(A-\lambda) f\| \leqslant$$
$$\leqslant \|(A-\lambda)^{-1}\| \, \|(A-\lambda) f\| \leqslant \frac{\varepsilon}{d(\lambda)},$$

что и доказывает оценку (13.2).

Из неравенства (13.2) вытекает, что на отрезке $\left[\lambda - \frac{\varepsilon}{C}, \lambda + \frac{\varepsilon}{C}\right]$ имеются точки спектра оператора A.

В этом параграфе исследуется поведение при $h \to +0$ дискретного спектра семейства самосопряженных операторов $A(h)$, действующих в гильбертовом пространстве H. Здесь $h \in (0, h_0)$, $h_0 > 0$; области определения операторов $A(h)$ не зависят от h. Предполагается, что спектр $\sigma(A(h))$ оператора $A(h)$ при каждом фиксированном $h \in (0, h_0)$ чисто дискретен и состоит из собственных значений $\{E_j(h)\}$. Нас интересует асимптотическое поведение спектра $\sigma(A(h))$ при $h \to +0$.

Поясним постановку задачи на примере одномерного уравнения Шредингера

$$-h^2\psi'' + V(x)\psi = E\psi.$$

Здесь

$$H = L_2(R), \qquad A(h) = -h^2\frac{d^2}{dx^2} + V(x),$$

функция $V(x)$ вещественнозначна, непрерывна и стремится к $+\infty$ при $|x| \to \infty$. Тогда при каждом фиксированном $h > 0$ спектр $\sigma(A(h))$ чисто дискретен и состоит из простых собственных значений

$$E_0(h) < E_1(h) < \qquad < E_m(h) < \ldots \to +\infty.$$

Спектр оператора $A(0)$ (это оператор умножения на функцию $V(x)$) непрерывен и заполняет полуось $[V_0, +\infty)$, $V_0 = \min\limits_{x \in R} V(x)$.

Будем следить только за той частью спектра $\sigma(A(h))$, которая попадает в фиксированный интервал $I = [E_0, E_1]$, $V_0 < E_0 < E_1$. Для простоты рассмотрим спектр осциллятора $V(x) = x^2/4$. Тогда спектр точно вычисляется и имеет вид

$$E_m(h) = \left(m + \frac{1}{2}\right)h, \qquad m = 0,\ 1,\ 2,$$

На этом примере хорошо видны два обстоятельства.

1) С уменьшением h число $N(h)$ точек спектра $\sigma(A(h))$, попадающих в интервал I, неограниченно возрастает: $N(h) \sim \frac{E_1 - E_0}{h}$.

2) Номера m собственных значений, попадающих в I, неограниченно возрастают при $h \to 0$: $m > E_0/h$. Если же фиксировать m, то $E_m(h) \to 0$ при $h \to 0$, и собственное значение $E_m(h)$ уходит из интервала I при $h \to 0$.

По этой причине мы не будем исследовать поведение индивидуального собственного значения $E_m(h)$ при $h \to 0$, а будем исследовать структуру множества $\sigma(A(h)) \cap I$ при $h \to 0$. Именно, для семейства $\{A(h)\}$ самосопряженных дифференциальных операторов в $L_2(\mathbf{R}^n)$, а точнее, для h^{-1}-псевдодифференциальных операторов будет получена асимптотика некоторой серии собственных значений (при $h \to 0$).

Другой вариант задачи об асимптотике спектра состоит в следующем. Будем рассматривать h как спектральный параметр, т. е. будем рассматривать пучок операторов $A(h)$; собственные значения h_m и собственные векторы ψ_m определяются из уравнения $A(h_m) f_m = 0$. В случае осциллятора имеем

$$h_m = \frac{E}{m+\frac{1}{2}}, \qquad m = 0,\ 1,\ 2,$$

где E — фиксированное число. В этой задаче исследуется асимптотика спектра пучка операторов $\{A(h)\}$.

2. Канонический оператор на замкнутом лагранжевом многообразии. Чтобы исследовать асимптотику спектра семейства h^{-1}-псевдодифференциальных операторов $\{A(h)\}$, построим почти собственные функции операторов $A(h)$, т. е. такие функции $\varphi_h \in D(A)$, что

$$A(h)\varphi_h = (E(h) + \varepsilon(h))\varphi_h,$$

где $\varepsilon(h) = o(E(h))$ $(h \to +0)$. Иными словами, почти собственная функция есть приближенное решение уравнения

$$A(h)\varphi = E(h)\varphi.$$

Локально такое решение дается предканоническим оператором (§§ 3, 5, 6). Построение решения в целом осуществим с помощью сращивания локальных решений, т. е. с помощью конструкции канонического оператора. При этом возникают новые трудности, так как соответствующие лагранжевы многообразия Λ^n имеют нетривиальную фундаментальную группу $\pi^1(\Lambda^n)$. Например, с задачей о собственных значениях осциллятора

$$-h^2\psi'' + x^2\psi = E\psi$$

ассоциировано семейство лагранжевых многообразий на плоскости

$$\{\Lambda^1(E)\}\colon\ x^2 + p^2 = E, \qquad E_0 < E < E_1.$$

В связи с этим проанализируем еще раз конструкцию канонического оператора. Пусть Λ^n — гладкое n-мерное лагранжево многообразие в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$, $\{\Omega_j\}$ — канонический атлас на Λ^n, $\{e_j\}$ — разбиение единицы на Λ^n (обозначения те же, что и в § 8) и r^0 — отмеченная точка на Λ^n. Для краткости указание на r^0 будем опускать; но будем употреблять запись $K_{\Lambda^n}(h)$, чтобы подчеркнуть зависимость от параметра от $h = \lambda^{-1}$. Канонический оператор определяется по формуле (8.3):

$$(K_{\Lambda^n}(h)\,\varphi)(x) = \sum_j K(\Omega_j,\ h)(e_j\varphi)(x) \tag{13.3}$$

на функциях $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda^n)$ при $0 < h < h_0$. При каждом фиксированном h имеем отображение

$$K_{\Lambda^n}(h)\colon\ C_0^\infty(\Lambda^n) \to C^\infty(\mathbf{R}_x^n),$$

и с этой точки зрения $K_{\Lambda^n}(h)$ — это семейство отображений. Основные свойства этого семейства таковы:

1) Пусть x лежит вне некоторой ε-окрестности множества $\pi_x \operatorname{supp} \varphi$ (π_x — проекция на $\mathbf{R}_x^n$). Тогда для любого мультииндекса α и для любого целого $N \geqslant 0$

$$|D_x^\alpha (K_{\Lambda^n}(h)\,\varphi)(x)| \leqslant C_{\alpha,N} h^N (1+|x|)^{-N}, \tag{13.4}$$

где $C_{\alpha,\ N}$ — постоянные (зависящие от φ).

Пусть $\hat{L} = L(\overset{2}{x},\ \overset{1}{hD_x};\ h)$ есть h^{-1}-п. д. о. с символом класса $T_+^m(\mathbf{R}_x^n)$. Тогда

2) справедлива первая формула коммутации

$$(\hat{L}K_{\Lambda^n}(h)\,\varphi)(x) = (K_{\Lambda^n}(h)\,L(x,\ p;\ 0)\,\varphi)(x) + h\chi(x,\ h), \tag{13.5}$$

где $\chi \in O_0(\mathbf{R}_x^n)$ (см. § 1).

Если, кроме того, выполнены условия теоремы 8.4, то

3) справедлива вторая формула коммутации

$$(\hat{L}K_{\Lambda^n}(h)\,\varphi)(x) = (L(x,\ p;\ 0) - ihR_1\varphi)(x) + h^2\chi(x,\ h), \tag{13.6}$$

где $\chi \in O_0(\mathbf{R}_x^n)$ (см. § 1); явный вид оператора R_1 указан в теореме 8.4.

Кроме того, канонический оператор, с точностью до $O(h)$, инвариантен относительно выбора канонического атласа, фокальных координат в картах и разбиения единицы (теорема 8.1). Поскольку мы собираемся построить конкретную почти собственную функцию, то и атлас, и разбиение единицы, и фокальные координаты будут фиксированы.

При конструировании канонического оператора в § 8 предполагалось, что

1) $\oint\limits_{\gamma} \langle p, dx \rangle = 0$ для любого 1-цикла на Λ^n;

2) $\operatorname{ind} \gamma = 0$ для любого 1-цикла на Λ^n.

Выясним, к чему приводит отказ от этих условий. Прежде чем формулировать окончательный результат, рассмотрим пример.

Пусть Λ^n диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}_x^n$ и фундаментальная группа $\pi^1(\Lambda^n) \approx \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z}$ — группа целых чисел). Достаточно ограничиться следующим примером: $n = 2$, проекция Λ^2 на $\mathbf{R}_x^2$ есть кольцо C: $r < |x| < R$. Тогда Λ^2 задается уравнением

$$p = p(x), \qquad x \in C,$$

где $p(x)$ — гладкая однозначная вектор-функция. Так как Λ^2 — лагранжево многообразие, то локально, т. е. в малой односвязной окрестности $U(x^0)$ любой точки $x^0 \in C$, имеем

$$p(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x}, \qquad x \in U(x^0),$$

где S — гладкая функция, так что $\langle p(x), dx \rangle = dS(x)$. Однако «функция»

$$S(x) = \int\limits_{x^0}^{x} \langle p(x), dx \rangle$$

может не быть однозначной, если форма $\omega^1 = \langle p, dx \rangle$ имеет ненулевой период:

$$J = \int\limits_{\gamma_0} \langle p, dx \rangle \neq 0.$$

Здесь γ_0 — окружность $|x| = \rho$, $r < \rho < R$; очевидно, что J не зависит от ρ. Кривая γ_0 — образующая группы гомологий $H_1(\Lambda^2, \mathbf{Z})$. Заметим еще, что $\operatorname{ind} \gamma_0 = 0$. Фиксируем точку $r^0 = (x^0, p^0) \in \Lambda^2$, объем $d\sigma(x)$ на Λ^2 и рассмотрим выражение

$$(K_{\Lambda^2}(h)\varphi)(x) = \sqrt{\left|\frac{d\sigma(x)}{dx}\right|} \exp\left(\frac{i}{h} \int\limits_{r^0}^{r(x)} \langle p, dx \rangle\right) \qquad (13.7)$$

(где $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda^2)$), построенное по образцу предканонического оператора в неособой карте (см. (6.2)). Это выражение есть, вообще говоря, многозначная функция от x (параметр h фиксирован). Действительно, все значения интеграла, стоящего в экспоненте, в точке $r(x) = (x, p(x))$ даются формулой

$$\int_{r^0}^{r(x)} \langle p, dx' \rangle = \int_{\widetilde{\gamma}_0} \langle p, dx' \rangle + k\boldsymbol{J}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2,$$

где $\widetilde{\gamma}_0$ — фиксированный путь, соединяющий точки x^0, x и лежащий в C. Можно считать, что $\boldsymbol{J} > 0$. Формула (13.7) тогда и только тогда определяет однозначную функцию, когда

$$\boldsymbol{J} = 2\pi m h,$$

где $m > 0$ — целое число, т. е. при дискретных значениях параметра h

$$h_m = \frac{\boldsymbol{J}}{2\pi m}, \qquad m = 1, 2, \tag{13.8}$$

Таким образом, при дискретных значениях $h \in \{h_m\}$ имеется семейство операторов $\{K_{\Lambda^2}(h_m)\}$. Формулы коммутации, полученные в § 8, остаются в силе, с той лишь разницей, что $h \to 0$ по последовательности $\{h_m\}$.

Продолжим рассмотрение этого примера. Пусть имеется семейство лагранжевых многообразий $\{\Lambda^2(E)\}$, $E \in \Delta$ (где Δ — некоторый интервал), гладко зависящее от параметра E, и пусть по-прежнему $\pi_x\Lambda^2(E)$ совпадает с кольцом C. Тогда период $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(E)$ и условие однозначности интеграла $\int \langle p, dx \rangle$ принимает вид

$$\boldsymbol{J}(E) = 2\pi m h. \tag{13.9}$$

Пусть $\boldsymbol{J}(E) > 0$, $\frac{d\boldsymbol{J}}{dE}(E) > 0$ при $E \in I$. Тогда при каждом фиксированном $h \in (0, h_0)$ уравнение (13.9) имеет семейство решений $\{E_m(h)\}$, где m пробегает множество целых чисел $M(h)$: $m_0(h) < m < m_1(h)$, зависящее от h. Число элементов множества $M(h)$ растет линейно (по h^{-1}) с уменьшением h. Если h фиксировано, а $E = E_m(h)$, $m \in M(h)$, то формула (13.7) определяет оператор $K_{\Lambda^2_{E_m(h)}}(h)$; для краткости обозначим его $K(E_m(h))$. Таким образом, при каждом фиксированном h мы получаем дискретный набор операторов

$$K(E_m(h)) \colon C_0^\infty(\Lambda^2_{E_m(h)}) \to C_0^\infty(C), \qquad m \in M(h).$$

Перейдем к общему случаю. Пусть Λ^n есть лагранжево C^∞-многообразие в фазовом пространстве, Λ^n — компактное многообразие без края. Нас интересует случай, когда Λ^n неодносвязно; пусть $\dim H_1(\Lambda^n, \mathbf{Z}) = p_1$ и $\{\gamma_j\}$, $1 \leqslant j \leqslant p_1$, — базис одномерной группы гомологий $H_1(\Lambda^n, \mathbf{Z})$. Положим

$$J_j = \oint\limits_{\gamma_j} \langle p, dx\rangle, \qquad l_j = \operatorname{ind} \gamma_j$$

(здесь J_j — периоды формы $\omega^1 = \langle p, dx\rangle$). Пусть $\tilde{r} = (\tilde{x}, \tilde{p}) \in \Lambda^n$ — неособая точка $r \in \Omega_j$. Формально построим оператор $K_{\Lambda^n}(h)$ по формуле (13.3); тогда $(K_{\Lambda^n}(h))(\varphi)(x)$ будет неоднозначной функцией x. Если $\operatorname{supp} \varphi$ сосредоточен в малой окрестности точки $\tilde{r}$, то все значения функции $(K_{\Lambda^n}(h)\varphi)(\tilde{x})$ даются формулой

$$(K_{\Lambda^n}(h)\varphi)(\tilde{x}) = \sqrt{\left|\frac{d\sigma}{dx}\right|} \exp\left[\frac{i}{h}\int\limits_{\gamma} \langle p, dx\rangle - \frac{i\pi}{2}\gamma\right] \varphi(\tilde{x}, p(\tilde{x})),$$

где γ — произвольный путь, соединяющий точки r^0, $\tilde{r}$ и лежащий на Λ^n. Фиксируем путь γ_0; тогда путь γ гомологичен линейной комбинации

$$\gamma \sim \gamma_0 + \sum_{j=1}^{p_1} m_j \gamma_j,$$

где m_j — целые числа. Следовательно, выражение $(K_{\Lambda^n}(h)\varphi)(\tilde{x})$ определено с точностью до множителя вида

$$\exp\left[i \sum_{j=1}^{p_1} m_j \left(\frac{J_j}{h} - \frac{\pi}{2} l_j\right)\right]; \tag{13.10}$$

то же самое верно для любой неособой точки многообразия Λ^n. Поэтому для того, чтобы выражение $(K_{\Lambda^n}(h)\varphi)(x)$ было однозначной функцией (пока что при $x \notin \pi_x\Sigma(\Lambda^n)$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{J_j}{h} - \frac{\pi}{2} l_j = 2\pi k_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant p_1, \tag{13.11}$$

где k_j — целые числа. Нетрудно видеть, что соотношения (13.11) инвариантны относительно выбора базиса $\{\gamma_j\}$ группы гомологий $H_1(\Lambda^n, \mathbf{Z})$. Действительно, если $\{\widetilde{\gamma}_j\}$ — другой такой базис, то

$$\widetilde{\gamma}_j = \sum_{l=1}^{p_1} C_{jl}\gamma_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant p_j,$$

C_{jl} — целые числа. Поскольку матрица $C = (C_{jl})$ обратима и обратная к ней матрица C^{-1} также целочисленная и поскольку

$$\widetilde{J}_j = \sum_{l=1}^{p_1} C_{jl}J_j, \qquad \widetilde{l}_j = \sum_{l=1}^{p_1} C_{jl}l_j,$$

то соотношения (13.11) эквивалентны соотношениям

$$\frac{\widetilde{J}_j}{h} - \frac{\pi}{2} \widetilde{l}_j = 2\pi \widetilde{k}_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant p_1.$$

Нетрудно видеть, что если $p_1 \geqslant 2$, то соотношения (13.11) могут не выполняться ни при одном значении h. Например, если $l_1 = l_2 = 0$, то из соотношений

$$J_1 = 2\pi h k_1, \qquad J_2 = 2\pi h k_2$$

вытекает, что периоды J_1, J_2 соизмеримы.

Таким образом, на заданном лагранжевом многообразии Λ^n канонический оператор $K_{\Lambda^n}(h)$ может не быть определен ни при одном значении h.

Соотношениям (13.11) можно, очевидно, удовлетворить, если имеется p_1-параметрическое семейство лагранжевых многообразий (выше, на примере, был рассмотрен случай $p_1 = 1$). Именно, пусть имеется семейство $\{\Lambda^n(\alpha)\}$ лагранжевых C^∞-многообразий, $\alpha = (\alpha_1, \quad \alpha_{p_1}) \in U$ (это область в $\mathbf{R}^{p_1}$), такое, что выполнены условия:

Л 13.1. При каждом фиксированном $\alpha \in U$ $\Lambda^n(\alpha)$ есть компактное C^∞-многообразие без края и семейство $\{\Lambda^n(\alpha)\}$ гладко зависит от параметра $\alpha \in U$.

Разным значениям $\alpha \in U$ отвечают непересекающиеся многообразия $\Lambda^n(\alpha)$; объединение $\bigcup_{\alpha \in U} \Lambda^n(\alpha)$ есть C^∞ многообразие Λ^{n+p_1} размерности $n + p_1$.

Λ 13.2. Размерность цикла особенностей $\Sigma(\Lambda^n(\alpha))$ не превосходит $n - 1$ при $\alpha \in U$, и циклы особенностей гладко зависят от α.

Λ 13.3. На каждом многообразии $\Lambda^n(\alpha)$, $\alpha \in U$) существует n-мерный объем $d\sigma^n(\alpha)$ класса C^∞, нормированный условием

$$\int\limits_{\Lambda^n(\alpha)} d\sigma^n(\alpha) = 1.$$

Отметим, что *число параметров* $(\alpha_1, \quad \alpha_{p_1})$ *равно размерности одномерной группы гомологий многообразий* $\Lambda^n(\alpha)$.

При этих условиях, если область U достаточно мала, можно выбрать канонические атласы $\{\Omega_j(\alpha)\}$, разбиение единицы $\{e_j(\alpha)\}$ класса $C^\infty(\Lambda^n(\alpha) \times U)$, где число карт не зависит от α, а также базисы $\{\gamma_j(\alpha)\}$, гладко зависящие от α. Тогда периоды

$$\boldsymbol{J}_j(\alpha) = \int\limits_{\gamma_j(\alpha)} \langle p, dx \rangle$$

будут функциями класса $C^\infty(U)$, а $\operatorname{ind} \gamma_j(\alpha) = l_j$ не будут зависеть от α. Соотношение (13.11) принимает вид

$$h^{-1}\boldsymbol{J}_j(\alpha) = \frac{\pi}{2} l_j + 2\pi m_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant p_1. \qquad (13.12)$$

Очевидным достаточным условием совместности этой системы является независимость периодов $\boldsymbol{J}_j(\alpha)$, как функций от α. Введем обозначения:

$$\boldsymbol{J}(\alpha) = (\boldsymbol{J}_1(\alpha), \quad ., \boldsymbol{J}_{p_1}(\alpha)),$$
$$l = (l_1, \quad .., l_{p_1}), \quad M = (m_1, \ldots, m_{p_1}).$$

Лемма 13.2. *Пусть* $\alpha^0 \in U$, $\det \frac{\partial J(\alpha^0)}{\partial \alpha} \neq 0$ *и* $0 < h < h_0$, $h_0 > 0$ *достаточно мало. Тогда система* (13.12) *при каждом* $h \in (0, h_0)$ *имеет решения* $\{\alpha_M(h)\}$, *где целочисленные векторы* M *заполняют кубическую решетку со стороной порядка* $\mathrm{const} \cdot h^{-1}$ *при малых* h.

Доказательство. Если U_0 — достаточно малая окрестность точки α^0, то ее образ при отображении $\boldsymbol{J} = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{J}(\alpha) - \frac{1}{2}hl$ содержит окрестность V_0 точки $\boldsymbol{J}(\alpha^0)$; можно считать, что V_0 есть куб. Искомое множество решений состоит из всех точек $\widetilde{\boldsymbol{J}} \in V_0$ таких, что $h^{-1}\widetilde{\boldsymbol{J}}$ есть целочисленный вектор; при достаточно малых h это множество непусто.

Кроме того, $\alpha_M(h)$ гладко зависит от h при фиксированном M, пока точка $\alpha_M(h)$ лежит в области U_0. Лемма доказана.

Пусть выполнены условия Λ 13.1 — Λ 13.3 и условия леммы 13.2, $U_0 \subset U$ — указанная в доказательстве леммы 13.2 достаточно малая область, функция φ определена на семействе $\{\Lambda^n(\alpha)\}$, $\alpha \in U_0$, и принадлежит классу C^∞ Семейства канонических атласов $\{\Omega_j(\alpha)\}$ и фокальных координат в этих картах, разбиений единицы $\{e_j(\alpha)\}$ и базисов $\{\gamma_j(\alpha)\}$ одномерных групп гомологий $H_1(\Lambda^n(\alpha), \mathbf{Z})$ выберем так, как указано выше. Фиксируем $h \in (0, h_0)$, целочисленный вектор M и решение $\alpha_M(h)$ системы (13.12), $\alpha_M(h) \in U_0$.

Рассмотрим интеграл

$$\widetilde{S}(r, \alpha, h) = \frac{1}{h}\int_{r^0(\alpha)}^{r} \langle p, dx\rangle - \frac{\pi}{2} l[\gamma(r^0(\alpha), r)],$$

где путь интегрирования γ лежит на многообразии $\Lambda^n(\alpha)$. Если $\alpha = \alpha_M(h)$, то периоды интеграла $\widetilde{S}$ кратны 2π, так что выражение $\exp[i\widetilde{S}(r, \alpha_M(h), h)]$ есть *однозначная функция* на многообразии $\Lambda^n(\alpha_M(h))$. Следовательно, точно так же, как и в § 8, можно построить семейство канонических операторов $\{K_{\Lambda^n(\alpha)}, \alpha = \alpha_M(h)\}$.

Если вектор M фиксирован, то это семейство определено при тех h, при которых $\alpha_M(h) \in U_0$. При $h \to 0$, очевидно, $\alpha_M(h) \to 0$, так что точка $\alpha_M(h)$ уходит из области U_0. С другой стороны, при каждом фиксированном (и достаточно малом) h имеется конечное множество $\mathfrak{M}(h)$ целочисленных векторов M таких, что точка $\alpha_M(h) \in U_0$ при $M \in \mathfrak{M}(h)$.

Таким образом, при каждом фиксированном h *семейство лагранжевых многообразий* $\{\Lambda^n(\alpha)\}$ *квантуется* —

имеется *дискретный набор* многообразий ($\alpha = \alpha_M(h)$), на которых определен канонический оператор.

Отметим, что формулы коммутации (13.5), (13.6) остаются в силе для операторов $K_{\Lambda^n(\alpha)}$, $\alpha = \alpha_M(h)$, и что оценки остаточных членов в формулах (13.4) — (13.6) равномерны по $\alpha \in U_0$. Это следует из метода стационарной фазы для интегралов, зависящих от параметра (теорема 1.4), и из условий Λ 13.1 — Λ 13.3.

3. Асимптотические серии собственных значений. Рассмотрим h^{-1}-псевдодифференциальный оператор $A(h)$ — вещественный и формально самосопряженный. Этот оператор можно представить в виде

$$A(h) = \frac{1}{2}[L(\overset{2}{x}, h\overset{1}{D}_x; ih) + L(\overset{1}{x}, h\overset{2}{D}_x; ih)] \qquad (13.13)$$

с вещественнозначным символом $L(x, p; ih)$. Введем условия:

L 13.1. Символ $L(x, p; ih) \in T_+^m$ при некотором m.

L 13.2. Минимальный оператор $A^0(h)$, отвечающий выражению $A(h)$, при каждом фиксированном $h \in (0, h_0)$ допускает расширение до самосопряженного оператора $A(h)$: $L_2(\mathbf{R}^n) \to L_2(\mathbf{R}^n)$ с чисто дискретным спектром.

Пусть g^t — сдвиг вдоль траекторий гамильтоновой системы, ассоциированной с символом $L(x, p; 0)$. Асимптотическая серия собственных значений, которая будет построена ниже, порождается семейством лагранжевых многообразий, инвариантных относительно сдвига g^t. Именно, пусть выполнено условие

Λ 13.4. Существует семейство лагранжевых многообразий $\{\Lambda^n(\alpha)\}$, $\alpha \in U$, удовлетворяющее условиям Λ 13.1 — Λ 13.3 и такое, что

1) $g^t\Lambda^n(\alpha) = \Lambda^n(\alpha)$ при всех $t \in \mathbf{R}$;

2) $L(x, p, 0) \equiv E(\alpha)$, $(x, p) \in \Lambda^n(\alpha)$.

Таким образом, каждое многообразие $\Lambda^n(\alpha)$ инвариантно относительно сдвига вдоль траекторий гамильтоновой системы и символ $L|_{h=0} \equiv \mathrm{const}$ на каждом из многообразий семейства (константа может зависеть от α).

С оператором $A(h)$ связан еще один классический объект — дифференциальный оператор

$$R = \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt} + \frac{\partial L}{\partial(ih)}\bigg|_{h=0}\right), \qquad (13.14)$$

где d/dt — производная в силу системы Гамильтона. Из самосопряженности и вещественности оператора $A(h)$ следует, что функция $\left.\frac{1}{i}\frac{\partial L}{\partial(ih)}\right|_{h=0}$ вещественна. Фиксируем $\alpha \in U_0$; в силу перечисленных выше условий R есть самосопряженный оператор в пространстве $L_{2,\,\sigma^n(\alpha)}(\Lambda^n(\alpha))$. Следовательно, его спектр веществен.

Будем предполагать, что оператор R имеет гладкое по $\alpha \in U$ семейство собственных функций φ_α, отвечающих гладкому собственному значению $\mu(\alpha)$:

$$R\varphi_\alpha = \mu(\alpha)\varphi_\alpha, \qquad \alpha \in U. \tag{13.15}$$

В частности, если символ L не зависит от h, то можно положить

$$\mu_{(\alpha)} \equiv 0, \qquad \varphi_\alpha \equiv 1. \tag{13.16}$$

Построим почти собственные функции семейства $\{A(h)\}$. Фиксируем $h \in (0, h_0)$ и найдем набор $\{\alpha_M(h)\}$ решений системы (13.12) (лемма 13.2). Будем искать почти собственную функцию в виде

$$u_M(x, h) = K_{\Lambda^n(\alpha)}\varphi_\alpha \qquad (\alpha = \alpha_M(h)). \tag{13.17}$$

Применяя формулу коммутации (13.6) и учитывая, что $L(x, p, 0) \equiv E_0(\alpha)$ на $\Lambda^n(\alpha)$, получаем ($\alpha = \alpha_M(h)$)

$$\begin{aligned} A(h)u_M &= K_{\Lambda^n(\alpha)}(L(x, p, 0) + R)\varphi_\alpha + O(h^2) = \\ &= (E(\alpha) + h\mu(\alpha))K_{\Lambda^n(\alpha)}\varphi_\alpha + O(h^2) = \\ &= (E(\alpha) + h\mu(\alpha))u_M + O(h^2). \end{aligned} \tag{13.18}$$

Для остаточного члена справедлива оценка

$$|O(h^2)| \leqslant Ch^2 \tag{13.19}$$

при $x \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in U_0$, $h \in (0, h_0)$ с не зависящей от x, α, h постоянной C. Далее, существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что

$$\| K_{\Lambda^n(\alpha)}\varphi_\alpha \|_{L_2(\mathbf{R}^n)} \geqslant C_1, \tag{13.20}$$

$\alpha = \alpha_M(h)$. Это следует из того, что в неособой карте канонический оператор сводится к умножению на функцию, модуль которой не зависит от h и которая не обращается в нуль (см. (13.41)).

По лемме 13.1 имеем (при фиксированных h, M)

$$d(E(\alpha)+h\mu(\alpha))\leqslant\frac{C}{C_1}h^2 \qquad (\alpha=\alpha_M(h)), \qquad (13.21)$$

где $d(\rho)$ — расстояние от точки ρ до спектра $\sigma(A(h))$. Тем самым доказан основной результат настоящего параграфа.

Теорема 13.3. *Пусть $\{A(h)\}$, $h\in(0, h_0)$,— семейство h^{-1}-псевдодифференциальных операторов, и пусть существует семейство лагранжевых многообразий $\{\Lambda^n(\alpha)\}$, удовлетворяющих условиям* Λ 13.1 — Λ 13.4.

Тогда при каждом фиксированном $h\in(0, h_1)$ и при $h_1>0$ достаточно малом оператор $A(h)$ имеет серию собственных значений вида

$$E_M(h) = E(\alpha) + h\mu(\alpha) + O(h^2). \qquad (13.22)$$

Здесь $\alpha=\alpha_M(h)$, $|O(h^2)|\leqslant C_0h^2$, постоянная C_0 не зависит от h, M.

Соответствующая собственному значению почти собственная функция $u_M(x, h)$ дается формулой (13.17).

Поясним теорему 13.3. Пусть $p_1=2$ (для простоты) и $E_0<E(\alpha)<E_1$ при $\alpha\in U$. Фиксируем $h>0$ и затем из системы (13.12)

$$J_1(\alpha_1, \alpha_2)=\frac{\pi h}{2}l_1+2\pi m_1h,$$

$$J_2(\alpha_1, \alpha_2)=\frac{\pi h}{2}l_2+2\pi m_2h$$

находим дискретный набор решений $\alpha(h, m_1, m_2)$ таких, что $E_0<E(\alpha(h, m_1, m_2))<E_1$.

Формула (13.22) определяет серию собственных значений, зависящую от двух целочисленных параметров m_1, m_2:

$$E_{m_1, m_2}(h)=E(\alpha(h, m_1, m_2))+h\mu(\alpha(h, m_1, m_2))+O(h^2).$$

При этом набор допустимых пар (m_1, m_2) зависит от параметра h.

Рассмотрим классический пример — задачу на собственные значения для одномерного оператора Шредингера на всей оси

$$-h^2\psi''+V(x)\psi=E\psi.$$

Потенциал $V(x)\in C^\infty(\mathbf{R})$ вещественен, $V(\pm\infty)=\pm\infty$, и пусть $V(x)$ ведет себя на бесконечности, для простоты, как полином. Тогда, в частности, функция $V(x)$ строго монотонно убывает при $x < -R$ и строго монотонно возрастает при $x > R$, если $R > 0$ достаточно велико.

Уравнение

$$p^2 + V(x) = \alpha$$

при $\alpha \geqslant \alpha_0 \gg 1$ определяет одномерное лагранжево многообразие $\Lambda^1(\alpha)$, диффеоморфное окружности S^1, так что $p_1 = 1$. Период $J(\alpha)$ равен

$$J(\alpha) = \int_{\Lambda^1(\alpha)} p\,dx = 2\int_{x_-(\alpha)}^{x_+(\alpha)} \sqrt{\alpha - V(x)}\,dx,$$

где $x_\pm(\alpha)$ — корни уравнения $V(x) = \alpha$, $x_-(\alpha) < x_+(\alpha)$. Кривую $\Lambda^1(\alpha)$ ориентируем по часовой стрелке. Нетрудно видеть, что $\frac{dJ}{d\alpha}(\alpha) > 0$. Далее, функция $H = p^2 + V(x)$ является первым интегралом соответствующей системы Гамильтона, так что $E(\alpha) \equiv \alpha$. Следовательно, все условия Λ 13.1 — Λ 13.4, L 13.1 — L 13.2 выполнены. Наконец, $\operatorname{ind} \Lambda^1(\alpha) = +2$. Выберем, как и в (13.16), $\mu(\alpha) = 0$, $\varphi_\alpha \equiv 1$ (на $\Lambda^1(\alpha)$). Тогда из теоремы 13.3 вытекает существование серии собственных значений

$$E_m(h) = \alpha_m(h) + O(h^2),$$

где $\alpha_m(h)$ определяется из уравнения

$$J(\alpha_m) = 2\pi m h + \pi h,$$

т. е. $\alpha_m(h)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_{x_-(\alpha)}^{x_+(\alpha)} \sqrt{\alpha - V(x)}\,dx = \pi h\left(m + \frac{1}{2}\right).$$

Эта формула совпадает по форме с известной в физической литературе *формулой квантования Бора*.

Соответствующие почти собственные функции ψ_m имеют вид

$$\psi_m(x) = (K_{\Lambda^1(\alpha_m)}1)(x), \qquad \alpha_m = \alpha_m(h)$$

(более подробные формулы см. [38] и др.), где 1 — функция, тождественно равная единице на кривой Λ^1. Отметим, что функция ψ_m локализована в окрестности проекции кривой Λ^1 на ось x, т. е. в окрестности отрезка

$l = (x_-(\alpha), x_+(\alpha))$, $\alpha = \alpha_m(h)$, поскольку $(K_{\Lambda^1}1)(x) = O(h^\infty)$ вне любой ε-окрестности отрезка l.

Замечание 13.4. Теорема 13.3 остается в силе, если часть спектра оператора $A(h)$, лежащая в интервале $E = E(\alpha)$, $\alpha \in U$, является чисто дискретной.

Замечание 13.5. Пусть $u_M(x, h)$ — почти собственная функция (см. (13.17)) и $h > 0$ достаточно мало. Тогда эта функция сосредоточена в окрестности проекции $V = \pi_x$ или $K_{\Lambda^n(\alpha)}$, $\alpha = \alpha_M(h)$, так как вне этой области $K_{\Lambda^n(\alpha)}(h)\varphi_\alpha = O(h^\infty)$. Более точно, если x лежит вне некоторой окрестности множества U, то

$$|u_M(x, \alpha)| \leqslant C_N h(1 + |x|)^{-N}$$

при любом N (см. (13.4)).

4. Асимптотические серии собственных значений оператора Лапласа — Бельтрами на сфере. В этом пункте изложены результаты, полученные в [23]. Пусть S^{n-1} — единичная сфера $|x| = 1$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$(\Delta_\theta + k^2)u(x) = 0, \qquad x \in S^{n-1}, \tag{13.23}$$

где Δ_θ — угловая часть оператора Лапласа $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

Введем на сфере S^{n-1} сферические координаты

$$x_1 = \sin\theta_{n-1} \quad \sin\theta_2 \sin\theta_1,$$
$$x_2 = \sin\theta_{n-1} \quad \sin\theta_2\cos\theta_1, \quad .,$$
$$x_{n-1} = \sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-2}, \qquad x_n = \cos\theta_{n-1},$$

где $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_j < \pi$ $(j \neq 1)$. Оператор Δ_θ имеет вид

$$\Delta_\theta = \frac{1}{\sin^{n-2}\theta_{n-1}} \frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}} \sin^{n-2}\theta_{n-1} \frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}} + \frac{1}{\sin^2\theta_{n-1}\sin^{n-3}\theta_{n-2}} \frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}} \sin^{n-3}\theta_{n-2} \frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}} + \ldots + \frac{1}{\sin^2\theta_{n-1}\ldots\sin^2\theta_2} \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}. \tag{13.24}$$

Задача на собственные значения (13.23) решается точно. Собственные значения оператора Δ_θ имеют вид $k_l^2 = l(l + n - 2)$, $l = 0, 1, 2, \quad .$, а собственные функции, отвечающие собственному значению k_l^2, являются ограничением на сферу S^{n-1} однородных гармонических полиномов степени l. С помощью теоремы 13.3 будет построена асимптотика некоторых серий собственных значений и собственных функций оператора Δ_θ.

Метрика в $\mathbf{R}^n$ индуцирует на сфере S^{n-1} метрику

$$ds^2 = d\theta_{n-1}^2 +$$
$$+ \sin^2\theta_{n-1}\, d\theta_{n-2}^2 + \ldots + \sin^2\theta_{n-1} \quad \sin^2\theta_{n-2}\, d\theta_1^2, \qquad (13.25)$$

так что сфера S^{n-1}, снабженная метрикой (13.25), есть $(n-1)$-мерное компактное риманово многообразие. Напомним определение оператора Лапласа — Бельтрами на римановом многообразии M^s [67]. Пусть Ω — карта многообразия M^s, $x = (x_1, \quad ., x_s)$ — локальные координаты в Ω, $g_{ij}(x)$ — метрический тензор. Введем, как обычно, обозначения $g = |\det (g_{ij})|$, (g^{ij}) — матрица, обратная к матрице (g_{ij}). Каждая скалярная функция $f \in C^\infty(M^s)$ порождает векторное поле $\operatorname{grad} f$ (градиент функции f) на M^s, ограничение которого на Ω имеет вид

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i,j=1}^{s} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Нетрудно проверить, что выражение в правой части этого равенства не зависит от выбора координат в Ω. Далее, векторное поле X на M^s порождает скалярную функцию $\operatorname{div} X$ (дивергенция поля X), сужение которой на Ω задается формулой

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{g}\, X_i).$$

Правая часть этого равенства инвариантна относительно выбора координат в Ω. Оператор Лапласа — Бельтрами Δ определяется формулой

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f \quad (f \in C^\infty(M^s))$$

или, в локальных координатах,

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{s} g^{ji} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f. \qquad (13.26)$$

Из (13.25) следует, что для сферы S^{n-1} имеем (в координатах $(\theta_1, \qquad \theta_{n-1})$)

$$g_{n-1,\, n-1} = 1,\ g_{n-2,\, n-2} = \sin^2\theta_{n-1},\ \ldots,\ g_{11} = \\ = \sin^2\theta_{n-1} \qquad \sin^2\theta_{n-2},\quad g = \sin^{2(n-2)}\theta_{n-1} \qquad \sin^2\theta_{n-2} \tag{13.27}$$

и что $g_{ij} = 0$, $i \neq j$. Подставляя (13.27) в (13.26), получаем (13.23), так что Δ_θ есть оператор Лапласа — Бельтрами на единичной сфере S^{n-1}.

Уравнение Гамильтона — Якоби, ассоциированное с уравнением (13.23), имеет вид

$$H(\theta,\ p) = 1. \tag{13.28}$$

Здесь $p = \dfrac{\partial S(\theta)}{\partial\theta}$,

$$H(\theta,\ p) = \left(p_{n-1}^2 + \frac{1}{\sin^2\theta_{n-1}}\left(p_{n-2}^2 + \frac{1}{\sin^2\theta_{n-2}}\left(p_{n-3}^2 + \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. \ldots + \frac{1}{\sin^2\theta_3}\left(p_2^2 + \frac{1}{\sin^2\theta_2}p_1^2\right)\ldots\right)\right) = \sum_{i,\, j=1}^{n-1} g^{ij}p_ip_j. \tag{13.29}$$

Система Гамильтона имеет вид

$$\frac{d\theta_i}{dt} = 2\sum_{j=1}^{n-1} g^{ij}\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\theta_i}. \tag{13.30}$$

Найдем первые интегралы этой системы. Для этого воспользуемся формулой

$$\dot{h}(\theta,\ p) = \{h,\ H\},$$

где $\dot{h}$ — производная в силу системы Гамильтона с гамильтонианом $H(\theta,\ p)$, а $\{h,\ H\}$ — скобка Пуассона функций h, H (§ 4). Следовательно, для того чтобы функция h была первым интегралом системы Гамильтона, необходимо и достаточно, чтобы $\{h,\ H\} = 0$. Используя это соображение, находим $n - 1$ первых интегралов системы (13.30):

$$h_1 = p_1,\quad h_2 = p_2^2 + \frac{c_1^2}{\sin^2\theta_2}, \qquad h_{n-1} = p_{n-1}^2 + \frac{c_{n-2}^2}{\sin^2\theta_{n-1}}, \tag{13.31}$$

где $c_1, \ldots, c_{n-2}$ — произвольные постоянные. Эти первые интегралы находятся в инволюции, т. е. $\{h_i, h_j\} = 0$ при всех i, j; нетрудно видеть, что эти интегралы независимы. Следовательно, система (13.30) вполне интегрируема.

Рассмотрим в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2(n-1)}_{\theta, p}$ множество $\Lambda^{n-1} = \Lambda^{n-1}(c_1, \ldots, c_{n-2})$, заданное уравнениями

$$h_1 = c_1, \quad h_2 = c_2^2, \ \ldots, h_{n-2} = c_{n-2}^2, \quad h_{n-1} = 1, \quad (13.32)$$

где $0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_{n-2} < 1$. Переменные θ меняются в пределах $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_j < \pi$ $(j \geqslant 2)$, но для краткости фазовое пространство будем обозначать через $\mathbf{R}^{2(n-1)}_{\theta, p}$. Так как множество Λ^{n-1} компактно и связно, а система (13.30) вполне интегрируема, то по теореме Лиувилля [4] множество $\Lambda^{n-1}(c_1, \ldots, c_{n-2})$ диффеоморфно $(n-1)$-мерному тору T^{n-1}. Этот факт нетрудно установить непосредственно. Действительно, уравнение

$$p^2 + \frac{a^2}{\sin^2\theta} = b^2, \qquad 0 < a < b,$$

определяет в области $0 < \theta < \pi$, $p \in \mathbf{R}$ гладкую кривую γ, диффеоморфную окружности. Точки, в которых касательная к кривой γ вертикальна, имеют координаты $(\theta_0, 0)$, $(\pi - \theta_0, 0)$, где $\theta_0 = \arcsin(a/b)$. Далее, проекция Λ^{n-1} на плоскость (p_1, θ_1) имеет вид $p_1 = c_1$, $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi$, т. е. окружность. Так как $h_j = h_j(\theta_j, p_j)$, то из этих рассуждений следует диффеоморфность многообразия Λ^{n-1} тору T^{n-1}. На рис. 16 изображено многообразие Λ^2.

Цикл особенностей $\Sigma(\Lambda^{n-1})$ — это множество точек на Λ^{n-1}, в которых $p_2 = \ldots = p_{n-2} = 0$. В частности, при $n = 3$ цикл особенностей состоит из двух окружностей (рис. 16), заданных уравнениями

$$\{p_1 = c_1, \ p_2 = 0, \ \theta_2 = \theta_2^0, \ 0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi\},$$

$$\{p_1 = c_1, \ p_2 = 0, \ \theta_2 = \pi - \theta_2^0, \ 0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi\},$$

где $\theta_2^0 = \arcsin(c_1/c_2)$. При $n \geqslant 4$ цикл особенностей состоит из 2^{n-3} торов T^{n-2}.

Выберем базис $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ группы гомологий $H_1(\Lambda^{n-1}, \mathbf{Z})$ следующим образом: в качестве γ_j, $j \geqslant 2$, возьмем пересечение Λ^{n-1} с плоскостью (θ_j, p_j). В качестве γ_1 возьмем окружность $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi$, остальные переменные θ_j, p_j фиксированы; и пусть γ_1 не лежит на цикле особенностей (рис. 16). Вычислим периоды $\boldsymbol{J}_s$ формы $\omega^1 = \langle p, d\theta \rangle$ и индексы $l_j = \operatorname{ind} \gamma_j$.

По построению имеем $l_1 = 0$ (кривая γ_1 не пересекается с циклом особенностей). Далее, кривая γ_s, $s \geqslant 2$, пересекается с циклом особенностей ровно в двух точках, в которых $p_s = 0$; нетрудно видеть, что $l_s = 2$ при $s \geqslant 2$. Далее,

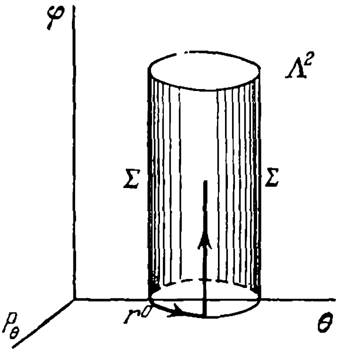

Рис. 16.

$$\boldsymbol{J}_1 = \int_{\gamma_1} p_1\, d\theta_1 = \int_0^{2\pi} c_1\, d\theta_1 = 2\pi c_1,$$

$$\boldsymbol{J}_2 = \int_{\gamma_2} p_2\, d\theta_2 = $$

$$= 2 \int_{\alpha_2}^{\pi-\alpha_2} \sqrt{c_2^2 - \frac{c_1^2}{\sin^2 \theta_2}}\, d\theta_2,$$

где $\alpha_2 = \arcsin (c_1/c_2)$. Следовательно, $\boldsymbol{J}_2 = 2\pi\, (c_2 - c_1)$. Аналогично вычисляются остальные периоды, так что

$$\boldsymbol{J}_1 = 2\pi c_1, \quad \boldsymbol{J}_s = 2\pi\, (c_s - c_{s-1}) \quad (s \geqslant 2), \tag{13.33}$$

где $c_{n-1} = 1$. Уравнения (13.12) в данном случае имеют вид

$$\begin{gathered} kc_1 = m_1, \\ k\,(c_2 - c_1) = m_2 + \frac{1}{2}, \\ \ldots \\ k\,(c_{n-2} - c_{n-3}) = m_{n-2} + \frac{1}{2}, \\ k\,(1 - c_{n-2}) = m_{n-1} + \frac{1}{2}, \end{gathered} \tag{13.34}$$

где m_j — целые числа. Складывая эти уравнения и полагая $l = m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1}$, получаем

$$k = l + \frac{n-2}{2}. \tag{13.35}$$

Выберем числа $c_1, \ldots, c_{n-2}$, k так, чтобы выполнялись соотношения (13.34). Тогда на лагранжевом многообразии $\Lambda^{n-1}\,(c_1, \ldots, c_{n-2})$ определен канонический оператор

$K_{\Lambda^{n-1}}(h)$, $h = k^{-1}$. Положим, как и в (3.16), $\mu \equiv 0$, $\varphi \equiv 1$, т. е. в качестве почти собственной функции возьмем функцию $\psi = K_{\Lambda^{n-1}}(h)\,1$. Тогда

$$\left(\frac{1}{k^2}\Delta\right)\psi = \left(-1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\psi =$$
$$= \left(-1 + O\left(\frac{1}{l^2}\right)\right)\psi \qquad (l \to +\infty),$$

так как $k \sim l$. Из этого соотношения и леммы 13.1 вытекает существование асимптотической серии собственных значений оператора Лапласа — Бельтрами на сфере:

$$k_l = l + \frac{n-2}{2} + O(l^{-1}) \qquad (l \to +\infty). \qquad (13.36)$$

Поскольку задача на собственные значения для оператора Лапласа — Бельтрами на сфере решается точно и притом более простыми средствами, то полученная формула (13.36) для серии собственных значений сама по себе не представляет большого интереса. Важно другое, а именно асимптотические формулы для соответствующих собственных функций, хотя в настоящее время строгое обоснование этих формул отсутствует.

Ограничимся случаем $n = 3$, т. е. рассмотрим сферу S^2 в трехмерном пространстве; общий случай см. [23]. Первые интегралы и условия квантования имеют вид

$$p_\varphi^2 = c_1^2, \qquad p_\theta^2 + \frac{c_1^2}{\sin^2\theta} = 1, \qquad (13.37)$$

$$kc_1 = m_1, \quad k(1 - c_1) = m_2 + \frac{1}{2}, \qquad (13.38)$$

где $\theta_1 = \varphi$, $\theta_2 = 0$. Отсюда находим $l_1 = l + \frac{1}{2} + O(l^{-1})$, $c_1 = \frac{2m_1}{2l+1}$, где $l = m_1 + m_2$. Собственному значению k_l отвечает набор собственных функций $u_{m_1}(\theta, \varphi)$, где $0 < \delta \leqslant \frac{|m_1|}{l} \leqslant 1 - \delta$, $\delta > 0$ — фиксированное число. Это ограничение возникает по той причине, что числа c_1, $1 - c_2$ должны быть отделены от нуля. Ясно, что $N(l) \approx 2l$, где $N(l)$ — размерность инвариантного подпространства оператора Δ, отвечающего собственному значению k_l.

Уравнения (13.37) определяют семейство инвариантных лагранжевых торов I^2, гладко зависящих от параметра c_1. В качестве начальной точки r^0 выберем точку $\{\varphi = 0, \theta = \arcsin c_1, p_\theta = 0\}$, а в качестве начального многообразия T_0^1 возьмем большой круг $\theta = \pi/2$. Мера на T_0^1 индуцирует инвариантную меру $d\sigma$ на торе T^2.

Вычислим действие

$$S(\varphi, \theta) = \int_{r^0}^{r} p_\varphi\, d\varphi + p_\theta\, d\theta$$

в неособых точках. Этот интеграл не зависит от пути интегрирования. Поэтому в качестве кривой на T^2, соединяющей точку r^0 и точку $r = (\varphi, \theta, p_\theta)$, можно взять кривую, состоящую из дуги кривой $p_\theta^2 + \frac{c_1^2}{\sin^2\theta} = 1$, вдоль которой $\varphi = 0$ и которая соединяет проекции точек r^0, r, и из отрезка, на котором θ, p_θ постоянны (рис. 16). Тогда

$$S(\varphi, \theta) = \int_0^\varphi p_\varphi\, d\varphi + \int_{\theta_0}^{\theta} p_\theta\, d\theta = \int_0^\varphi c_1\, d\varphi + \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{1 - \frac{c_1}{\sin^2\theta}}\, d\theta = c_1\varphi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sin^2\theta - c_1^2}}{\cos\theta} - c_1 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sin^2\theta - c_1^2}}{c_1\cos\theta}$$

(все корни — арифметические). Но в точку (φ, θ) проектируются две точки тора T^2; если обозначить через $r^2(\varphi, \theta)$ вторую из них, то действие будет вычисляться по той же формуле, с той лишь разницей, что $p_\theta = -\sqrt{1 - \frac{c_1^2}{\sin^2\theta}}$ вдоль пути интегрирования. Окончательно для S получаем два значения $S_\pm$:

$$S_\pm(\varphi, \theta) = c_1\varphi \pm S_1(\theta),$$

$$S_1(\theta) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sin^2\theta - c_1^2}}{\cos\theta} - c_1 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sin^2\theta - c_1^2}}{\cos\theta}. \qquad (13.39)$$

Далее,

$$\left|\frac{D\theta}{D\sigma}\right| = \sqrt{\frac{\sin^2\theta - c_1^2}{1 - c_1^2}}. \qquad (13.40)$$

Канонический атлас на T^2 можно составить из четырех карт. Цикл особенностей состоит из двух окружностей, на которых $p_\theta = 0$, и его проекция на плоскость (θ, p_θ) состоит из двух точек $(\theta_0, 0)$, $(\pi - \theta_0, 0)$. Покроем кривую $p_\theta^2 + \frac{c_1^2}{\sin^2\theta} = 1$ четырьмя картами U_j, две из которых — окрестности точек $(\theta_0, 0)$, $(\pi - \theta_0, 0)$ (обозначим их U_1, U_2), U_3 лежит в полуплоскости $p_\theta > 0$, U_4 — в полуплоскости $p_\theta < 0$. В карте U_1 в качестве отмеченной точки возьмем точку $r^1 \neq r^0$, в которой $p_\theta > 0$. Тогда кривая l_1, соединяющая точки r^1 и $r = (\varphi, \theta, p_\theta)$, где $p_\theta > 0$, не пересекает цикл особенностей и $\operatorname{ind} l = 0$; если же $p_\theta < 0$, то кривая l пересекает цикл особенностей и $\operatorname{ind} l = 1$. Следовательно, в неособой точке (θ, φ) имеем

$$K_{T^2}(1)(\theta, \varphi) = \sqrt{\left|\frac{D\sigma}{D\theta}\right|}\left(e^{ikS_+ + \frac{i\pi}{2}\alpha_+} + e^{ikS_- + \frac{i\pi}{2}\alpha_-}\right),$$

где $\alpha_+ = 0$, $\alpha_- = \pi/2$. Умножая это выражение на $e^{-i\pi/4}$ и учитывая соотношения (13.37) — (13.40), получаем для почти собственной функции асимптотическую формулу (в нефокальных точках):

$$u_m(\theta, \varphi) = e^{im\varphi}\left(\frac{1 - \frac{m^2}{k^2}}{\sin^2\theta - \frac{m^2}{k^2}}\right)^{1/4} \cos\left(kS_1 - \frac{\pi}{4}\right), \tag{13.41}$$

$$S_1(\theta) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sin^2\theta - \frac{m^2}{k^2}}}{\cos\theta} - \frac{m}{k}\operatorname{arctg}\frac{k\sqrt{\sin^2\theta - \frac{m^2}{k^2}}}{m\cos\theta}.$$

Аналогичная формула получена в [23] при любой размерности сферы.

Формула (13.41) была получена в предположении, что отношение $\left|\frac{m}{k}\right|$ отделено от нуля и, в частности, что $m \neq 0$. Если положить $m = 0$, $k = l + \frac{1}{2}$ в этой формуле и умножить обе части на соответствующий нормировочный множитель, то будет получена известная асимптотическая формула для полиномов Лежандра:

$$u_l(\varphi, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi l \sin\theta}}\sin\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right].$$

Построенные выше (см. (13.41)) почти собственные функции локализованы в окрестности проекции тора T^2 на сферу S^2, т. е. в окрестности слоя $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi - \theta_0$, $\theta_0 = \arcsin(m/k)$. При $m \to 0$ этот слой стягивается к экватору.

Для оператора Лапласа — Бельтрами можно доказать, что построенные выше почти собственные функции близки к истинным собственным функциям. Это связано с тем, что в данной задаче спектр известен точно: собственные значения k_l^2 имеют вид

$$k_l^2 = l(l+n-2), \qquad l = 1,\ 2, \tag{13.42}$$

Выше было доказано существование асимптотической серии собственных значений вида (13.36). При $l \gg 1$ последовательные собственные значения k_l^2 расположены на расстоянии порядка nl друг от друга, так что формула (13.36) содержит все собственные значения (при тех значениях l, при которых она была получена) оператора Лапласа — Бельтрами. Далее, были построены почти собственные функции u_l (для краткости занумеруем их одним индексом) такие, что при $l \gg 1$

$$\| u_l \| \geqslant C_1, \qquad \| (\Delta + k_l^2)\, u_l \| \leqslant C_2,$$

где постоянные C_j не зависят от l.

Остается воспользоваться следующим фактом из спектральной теории. Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, для которого точка $\lambda_0 = 0$ является изолированным конечнократным собственным значением. Пусть элемент $f \in D(A)$,

$$\| f \| \geqslant C_3, \qquad \| Af \| \leqslant C_4 \tag{13.43}$$

и справедлива оценка

$$C_4/C_3 < d_0,$$

где d_0 — расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остальной части спектра $\sigma(A) \setminus \{0\}$.

Тогда

$$\| f - P_0 f \| \leqslant C_4 (d_0 C_3)^{-1}, \tag{13.44}$$

где P_0 — ортогональный проектор на инвариантное подпространство $\mathscr{H}_0$ оператора A, отвечающее собственному значению $\lambda_0 = 0$.

Применительно к оператору Лапласа — Бельтрами это дает оценку

$$\| u_l - P_l u_l \| \leqslant C l^{-1} \tag{13.45}$$

при $l \gg 1$. Здесь постоянная C не зависит от l и P_l — ортогональный проектор на инвариантное подпространство оператора Лапласа — Бельтрами, отвечающее собственному значению k_l^2.

§ 14. Квазиклассические приближения для релятивистского уравнения Дирака

Построена квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для релятивистского уравнения Дирака. Показано, что спиновая поляризация имеет классический предел при $h \to +0$.

1. Уравнение Дирака. Движение релятивистской заряженной частицы со спином 1/2 во внешнем электромагнитном поле описывается уравнением Дирака [6], [19]

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \tag{14.1}$$

Волновая функция $\psi = \psi(t, x_1, x_2, x_3)$ есть 4-вектор (столбец) $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$, гамильтониан имеет вид [72]

$$H = \alpha(c\hat{p} - eA) - e\varphi + \beta mc^2. \tag{14.2}$$

Здесь e — заряд, m — масса частицы, c — скорость света в вакууме, h — постоянная Планка, $A = (A_1, A_2, A_3)$ — векторный и φ — скалярный потенциалы электромагнитного поля. Далее,

$$\alpha\hat{p} = \alpha_1\hat{p}_1 + \alpha_2\hat{p}_2 + \alpha_3\hat{p}_3,$$
$$\alpha A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3,$$

где $p_j = -ih\frac{\partial}{\partial x_j}$. Матрицы α_j, β имеют вид

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где 0, 1 — нулевая и единичная (2×2)-матрицы, σ_j — спиновые матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Как обычно, будем предполагать, что все функции $A_j(t, x)$, $\varphi(t, x)$ вещественнозначны и бесконечно дифференцируемы.

Заметим, что все матрицы α_j, σ_j, β эрмитовы. Символ оператора $\hat{H}$ есть эрмитова матрица

$$H(t, x, p)=\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix},$$

$$A=(-e\varphi+mc^2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}B_3 & \bar{B}_2\\ B_2 & -B_3\end{pmatrix}, \tag{14.3}$$

$$C=(-e\varphi-mc^2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

где обозначено:

$$B_3=-eA_3+cp_3, \quad B_2=-e(A_1+iA_2)+c(p_1+ip_2). \tag{14.4}$$

Поставим задачу Коши

$$\psi|_{t=0}=\psi^0(x)\exp\left[\frac{i}{h}S_0(x)\right], \tag{14.1'}$$

где $\psi^0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$, $S_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, функция S_0 вещественнозначна, и исследуем асимптотику решения задачи (14.1), (14.1′) при $h \to 0$.

2. Уравнение Гамильтона — Якоби и уравнение переноса. Вычислим собственные значения матрицы H. Учитывая блочную структуру этой матрицы, получаем

$$\det\|H-hI_4\|=\det\|(A-hI_2)(C-hI_2)-$$
$$-(A-hI_2)B(A-hI_2)^{-1}B\|=$$
$$=\det\|[(e\varphi+h)^2-m^2c^4]I_2-B^2\|,$$

где I_k есть единичная $(k\times k)$-матрица. Так как $B^2=(|B_2|^2+B_3^2)I_2$, то собственные значения матрицы H имеют вид

$$h_\pm=-e\varphi\mp\sqrt{D}. \tag{14.5}$$

Здесь

$$D=(cp-eA)^2+m^2c^4=|B_2|^2+B_3^2+m^2c^4. \tag{14.6}$$

Следовательно, матрица H при любых вещественных t, x, p имеет два двукратных собственных значения $h_\pm$ класса C^∞. Им отвечают два уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S_\pm}{\partial t}=\pm c\sqrt{\left(\nabla S-\frac{e}{c}A\right)^2+m^2c^2}+e\varphi. \tag{14.7}$$

Собственные векторы $f_j^{\pm}$, $j = 1, 2$, отвечающие собственным значениям $h_{\pm}$, можно выбрать следующим образом:

$$f_1^+ = \begin{pmatrix} -B_3 \\ -B_2 \\ mc^2 + \sqrt{D} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2^+ = \begin{pmatrix} -\bar{B}_2 \\ B_3 \\ 0 \\ mc^2 + \sqrt{D} \end{pmatrix},$$
$$f_1^- = \begin{pmatrix} mc^2 + \sqrt{D} \\ 0 \\ B_3 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad f_2^- = \begin{pmatrix} 0 \\ mc^2 + \sqrt{D} \\ \bar{B}_2 \\ -B_3 \end{pmatrix}. \tag{14.8}$$

Векторы $f_j^{\pm}$ образуют ортогональный базис в $\mathbf{R}^4$ (скалярное произведение эрмитово) и имеют одинаковую длину:

$$|f_j^{\pm}|^2 = 2\sqrt{D}(mc^2 + \sqrt{D}).$$

Кроме того, справедливы тождества

$$\langle f_1^+, \alpha_j f_2^+ \rangle \equiv 0, \qquad j = 1,\ 2,\ 3, \tag{14.9}$$

и аналогичные тождества для векторов f^-.

Пространство $\mathbf{R}^4$ распадается (при любых фиксированных t, x, p) в ортогональную сумму двух инвариантных подпространств $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^2_+ \oplus \mathbf{R}^2_-$ матрицы H. Базис подпространства $\mathbf{R}^2_+$ (соотв. $\mathbf{R}^2_-$) образуют векторы $f^+_{1,\,2}$ (соотв. $f^-_{1,\,2}$). Соответственно вектор-функцию $\psi^0(x)$, входящую в данные Коши (14.1′), можно представить в виде

$$\psi^0 = \psi^0_+ + \psi^0_-, \quad \text{где} \quad \psi^0_+ \in \mathbf{R}^2_+, \quad \psi^0_- \in \mathbf{R}^2_-.$$

Ниже мы считаем, что $\psi^0 \in \mathbf{R}^2_+$.

Формальное асимптотическое решение задачи Коши (14.1), (14.1′) будем, как обычно, искать в виде

$$\psi(t, x) = \exp\left[\frac{i}{h} S(t, x)\right] \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{h}{i}\right)^k \psi^k(t, x) \tag{14.10}$$

Вычислим главный член асимптотики. Для фазы S мы получим уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + h_+ = 0, \qquad S|_{t=0} = S_0(x).$$

Вектор-функцию $\psi^0(t, x)$ будем искать в виде

$$\psi^0(t, x) = \omega_1(t, x) f_1^+ + \omega_2(t, x) f_2^+. \qquad (14.11)$$

Неизвестные функции $\omega_{1,2}$ определяются из системы уравнений переноса

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2. \end{aligned} \qquad (14.12)$$

Данные Коши таковы:

$$\omega_j|_{t=0} = \omega_j^0(x),$$

где ω_j^0 определяются из соотношения

$$\psi^0(x) = \omega_1^0 f_1^+|_{t=0} + \omega_2^0 f_2^+|_{t=0}.$$

В силу леммы 11.5 имеем

$$a_{jk} = \langle f_j^+, f_j^+\rangle^{-1}\left[\left\langle f_j^+, \frac{\partial f_k^+}{\partial t}\right\rangle + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_+}{\partial x\,\partial p} - \frac{d}{d\tau}\ln J_+\right)\delta_{jk} + \right.$$
$$\left. + \left\langle f_j^+, \left(\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial h_+}{\partial p}\right)\frac{\partial f_k^+}{\partial k}\right\rangle\right]. \qquad (14.13)$$

Наличие множителя $\langle f_j^+, f_j^+\rangle^{-1}$ связано с тем, что векторы f_j^+ не единичные. По сопряженным переменным производится суммирование, т. е.

$$\frac{\partial h_+}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial h_+}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

и т. д. Здесь J_+ — якобиан, отвечающий системе Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial h_+}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial h_+}{\partial x}, \qquad (14.14)$$

т. е.

$$J_+ = \det\frac{\partial x(t, y)}{\partial y},$$

где $(x(t, y), p(t, y))$ — решение системы (14.14) с данными Коши

$$x|_{t=0} = y, \qquad p|_{t=0} = \frac{\partial S_0(y)}{\partial y}.$$

Из ортогональности векторов f_1^+, f_2^+, тождеств (14.9) и вещественности h_+, H вытекает тождество

$$a_{11} \equiv -\overline{a}_{12}. \tag{14.15}$$

Однако непосредственное вычисление коэффициентов a_{jk} по формуле (14.13) приводит к громоздким выкладкам. Это связано, грубо говоря, с тем, что мы отделяем переменную t. Ниже приведен другой вывод уравнений переноса.

3. Квадрированное уравнение Дирака и уравнения переноса. Символ оператора Дирака равен $-p_0 I_4 + H(x_0, x, p)$, где $p_0 = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}$, $x_0 = t$. Найдем матрицу $H_1(x_0, x, p)$ такую, что

$$(-p_0 I_4 + H_1)(-p_0 I_4 + H) = (p_0 - h_+)(p_0 - h_-) I_4, \tag{14.16}$$

где $h_\pm$ — собственные значения матрицы H. Нетрудно проверить, что

$$H_1 = -e\varphi I_4 - \alpha(cp - eA) - \beta mc^2. \tag{14.17}$$

Матрицы $-p_0 I_4 + H_1$, $-p_0 I_4 + H$, в силу (14.16),— ассоциированные, с точностью до скалярного множителя.

Пусть $\hat{L}_1$ — оператор Дирака, $\hat{L}_2$ — оператор с символом $-p_0 I_4 + H_1(x_0, x, p)$. Тогда [72]

$$\hat{L}_2\hat{L}_1 = [(\hat{p}_0 + e\varphi)^2 - (c\hat{p} - eA)^2 - m^2c^4]\, I_4 + \\ + \frac{h}{i}(iec\sigma' H + c\alpha E). \tag{14.18}$$

Здесь

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\varphi, \qquad H = \operatorname{rot} A, \tag{14.19}$$

$$\sigma' = (\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'), \qquad \sigma' H = \sigma_1' H_1 + \sigma_2' H_2 + \sigma_3' H_3$$

и σ_j' — матрицы порядка 4×4:

$$\sigma_j' = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}, \tag{14.20}$$

σ_j — спиновые матрицы Паули. Оператор

$$S = \frac{h}{2}\sigma' \tag{14.21}$$

называется *спиновым моментом количества движения электрона.*

Оператор $\hat{Q} = \hat{L}_2\hat{L}_1$ называется *квадрированным оператором Дирака*, а уравнение

$$\hat{Q}\psi = 0 \tag{14.22}$$

называется *квадрированным уравнением Дирака*.

Положим $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$. Символ Q оператора $\hat{Q}$ равен (см. (14.18))

$$Q = Q_0 + \frac{h}{i} Q_1, \tag{14.23}$$

$$Q_0 = [(p_0 + e\varphi)^2 - (cp - eA)^2 - m^2c^4]\, I_4 = \\ = (p_0 - h_+)(p_0 - h_-)\, I_4, \tag{14.24}$$

$$Q_1 = B - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Q_0}{\partial x\, \partial p}. \tag{14.25}$$

Здесь B — матрица

$$B = iec\sigma' H - c\alpha E. \tag{14.26}$$

По сопряженным индексам производится суммирование, т. е.

$$\frac{\partial^2 Q_0}{\partial x\, \partial p} = \sum_{j=0}^{3} \frac{\partial^2 Q_0}{\partial x_j\, \partial p_j}$$

и т. д.

Рассмотрим теперь не квадрированное уравнение Дирака, а произвольный h^{-1}-п. д. о. с символом вида (14.23), где Q_0, Q_1 — матрицы порядка $N \times N$, не зависящие от h, и матрица Q_0 — скалярная.

Получим ф. а. решение уравнения (14.22) с точностью до $O(h)$. При этом ограничимся формальными выкладками и не будем формулировать стандартных условий на символ.

Будем искать ф. а. решение в виде

$$\psi(x) = \sum_{0}^{N} \left(\frac{h}{i}\right)^j \psi^j(x) \exp\left[\frac{i}{h} S(x)\right].$$

Подставляя ψ в уравнение и приравнивая нулю коэффициенты при степенях h, получаем уравнения

$$R_0\psi^0 = 0, \quad R_0\psi^1 + R_1\psi^0 = 0$$

и т. д. Здесь

$$R_0\psi = Q_0\psi, \qquad R_1\psi = \frac{\partial Q_0}{\partial p} D_x\psi + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Q_0}{\partial p^2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\psi + Q_1\psi \qquad (14.27)$$

и по сопряженным переменным производится суммирование.

По условию матрица Q_0 — скалярная; запишем ее в виде $Q_0 I_N$, где Q_0 — скалярная функция. Тогда уравнения для ψ^0, ψ^1 примут вид

$$Q_0(x, p) = 0 \qquad (p = \nabla S(x)), \qquad (14.28)$$

$$R_1\psi^0 = 0. \qquad (14.29)$$

С уравнением Гамильтона — Якоби (14.28) ассоциирована система Гамильтона

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial Q_0}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial Q_0}{\partial x}. \qquad (14.30)$$

Оператор R_1 с помощью формулы Лиувилля (см. § 3) преобразуется к виду

$$R_1 = \left[\frac{d}{d\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{d\tau}\ln J - \frac{\partial^2 Q_0}{\partial x\,\partial p}\right)\right] I_N + Q_1. \qquad (14.31)$$

Следовательно, справедливо

Предложение 14.1. *Решение уравнения переноса* (14.29) *имеет вид*

$$\psi^0(\tau) = \sqrt{\frac{J(0)}{J(\tau)}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\tau \frac{\partial^2 Q_0}{\partial x\,\partial p}\,d\tau\right)\chi^0(\tau), \qquad (14.32)$$

где $\chi^0(\tau)$ — *решение задачи Коши*

$$\frac{d\chi^0}{d\tau} + Q_1\chi^0 = 0, \qquad \chi^0|_{\tau=0} = \psi^0|_{\tau=0}. \qquad (14.33)$$

В формуле (14.32), как обычно, $x = x(\tau)$, $p = p(\tau)$ — это решение системы (14.29) и $J(\tau) = \det\frac{\partial x(\tau)}{\partial x(0)}$.

Рассмотрим эволюционное уравнение (14.22), т. е.

$$Q_j = Q_j(t, x, p_0, p),$$

где $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$. Пусть уравнение

$$Q_0(t, x, p_0, p) = 0 \qquad (14.34)$$

относительно переменной p_0 имеет решение из класса C^∞

$$p_0 = h(t,\ x,\ p) \tag{14.35}$$

(для простоты) при всех вещественных t, x, p и этот корень однократен. Построение ф. а. решения уравнения $\hat{Q}\psi = 0$ приводит к уравнению Гамильтона — Якоби (14.34) (здесь $p_0 = \partial S/\partial t,\ p = \partial S/\partial x$); выберем то решение, которое удовлетворяет уравнению (14.35).

С уравнением (14.34) ассоциирована система Гамильтона

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= \frac{\partial Q_0}{\partial p_0}, & \frac{dp_0}{d\tau} &= -\frac{\partial Q_0}{\partial t}, \\ \frac{dx}{d\tau} &= \frac{\partial Q_0}{\partial p}, & \frac{dp}{d\tau} &= -\frac{\partial Q_0}{\partial p}, \end{aligned} \tag{14.36}$$

а с уравнением (14.35) — укороченная система Гамильтона

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{\partial h}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x}. \tag{14.37}$$

Установим связь между решениями этих систем и между якобианами J.

Поставим задачу Коши

$$\begin{aligned} t|_{\tau=0} &= 0, & p_0|_{\tau=0} &= E^0, \\ x|_{\tau=0} &= x^0, & p|_{\tau=0} &= p^0 \end{aligned} \tag{14.38}$$

для системы (14.36) и задачу Коши

$$x|_{\tau=0} = x^0, \qquad p|_{\tau=0} = p^0 \tag{14.39}$$

для системы (14.37), где данные x^0, p^0 одни и те же. Обе задачи предполагаются лагранжевыми; пусть $p^0 = \dfrac{\partial S_0(x^0)}{\partial x^0}$. Мы ограничимся локальными рассмотрениями.

Решение задачи (14.37), (14.39) обозначим через x^+, p^+, чтобы отличить его от решения задачи (14.36), (14.38). Введем якобианы

$$J = \frac{D(t,\ x)}{D(\tau,\ x^0)}, \qquad J^+ = \frac{Dx^+}{Dx_0}$$

(напомним, что $t = t(\tau,\ x^0)$, $x = x(\tau,\ x^0)$ в случае задачи (14.36), (14.38)). Будем предполагать, что $J \neq 0$, $J^+ \neq 0$. Тогда (по крайней мере при малых t) можно рассматривать решение $x(\tau,\ x^0)$ как функцию от t, x^0.

Лемма 14.2. *Пусть данные Коши* (14.3) *таковы, что* $E^0 = h(0, x^0, p^0)$. *Тогда при малых* t

$$x(t, x^0) = x^+(t, x^0), \qquad p(t, x^0) = p^+(t, x^0), \tag{14.40}$$
$$J = \frac{\partial Q_0}{\partial p_0}\Big|_{p_0=h} J^+.$$

Доказательство. Функция Q_0 является первым интегралом системы (14.36), и так как она равна нулю при $\tau = 0$, то $Q_0 \equiv 0$ на траекториях системы (14.36). Поскольку корень $p_0 = h$ уравнения (14.34) изолированный и при $\tau = 0$ имеем $p_0 = h$, то вдоль траекторий системы (14.36) уравнение (14.35) выполняется тождественно.

Дифференцируя тождество (14.34) по p, где $p_0 = h$, получаем

$$\frac{\partial h}{\partial p} = -\frac{\partial Q_0}{\partial p}\left(\frac{\partial Q_0}{\partial p_0}\right)^{-1}$$

Из системы (14.36) находим, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial Q_0}{\partial p}\left(\frac{\partial Q_0}{\partial p_0}\right)^{-1} = -\frac{\partial h}{\partial p}$$

Аналогично доказывается, что $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x}$, так что решение $x(t, x^0)$, $p(t, x^0)$ задачи (14.36), (14.38) удовлетворяет системе (14.37). Из совпадения данных Коши вытекают тождества $x = x^+$, $p = p^+$. Далее,

$$dt \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n =$$
$$= dt \wedge \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\,dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_1}{\partial x_k^0}\,dx_k^0\right) = J^+\,dt \wedge dx_1^0 \wedge \ldots \wedge dx_n^0,$$

откуда следует последнее из тождеств (14.40).

Рассмотрим задачу Коши (14.1′) для эволюционного уравнения $\hat{Q}\psi = 0$. Будем предполагать, что символ Q имеет вид (14.23) (напомним, что матрица Q_0 — скалярная) и что условия леммы 14.2 выполнены. Тогда справедливо

Предложение 14.3. *Задача Коши* (14.22), (14.1′) *имеет формальное асимптотическое решение вида*

$$\psi(t, x) = \sqrt{\frac{J^+(0)}{J^+(t)}\,\frac{\partial Q_0(0)}{\partial p_0}\left(\frac{\partial Q_0(\tau)}{\partial p_0}\right)^{-1}}\,\exp\left(\frac{i}{h}S(t, x) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^t \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 Q_0}{\partial x_j\,\partial p_j} + \frac{\partial^2 Q_0}{\partial t\,\partial p}\right]\left(\frac{\partial Q_0}{\partial p_0}\right)^{-1} d\tilde{t}\right)\chi^0(t, x). \tag{14.41}$$

Здесь S — решение уравнения Гамильтона — Якоби (14.35) *с данными Коши* $S|_{t=0} = S_0(x)$ *и* χ^0 — *решение задачи Коши*

$$\frac{d\chi^0}{dt} + \left(\frac{\partial Q_0}{\partial p_0}\right)^{-1} Q_1\chi^0 = 0, \qquad \chi^0|_{t=0} = \psi^0. \tag{14.42}$$

Доказательство следует из предложения 14.1, леммы 14.2 и соотношения $\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial Q_0}{\partial p_0}$. В формулах (14.41), (14.42) $p_0 = h$.

Применим эту методику к задаче Коши (14.1′) для уравнения Дирака. Эта задача эквивалентна задаче Коши

$$\psi|_{t=0} = \psi^0(x)\exp\left(\frac{i}{h}S(x)\right), \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{t=0} = \\ = \frac{i}{h}\widetilde{H}\psi^0(x)\exp\left(\frac{i}{h}S(x)\right) \tag{14.43}$$

для квадрированного уравнения Дирака. Действительно, $\hat{Q} = \hat{L}_2\hat{L}_1$ и так как $\hat{L}_1\psi|_{t=0} = 0$ в силу (14.33), то, по теореме единственности, $\hat{L}_1\psi \equiv 0$ при всех t. Второе из условий (14.43) приводит к соотношению

$$\left(I_4\frac{\partial S}{\partial t} - H\right)\Big|_{t=0}\psi^0(x) = 0,$$

т. е. $\frac{\partial S}{\partial t}\Big|_{t=0}$ — собственное значение, $\psi^0(x)$ — собственный вектор матрицы $H|_{t=0}$. Мы уже условились выше, что $\psi^0 \in \mathbf{R}_2^+$, т. е. что $H|_{t=0}\psi^0 = h_+|_{t=0}\psi^0$.

Теорема 14.4. *Задача Коши* (14.1′) *для уравнения Дирака* (14.1), *где* $\psi^0(x) \in \mathbf{R}_2^+$, *имеет при* $0 \leqslant t \leqslant T$ *и при малых* I *формальное асимптотическое решение*

$$\psi(t, x) = \sqrt{\frac{J^+(0, y)}{J^+(t, y)}}\sqrt{\frac{[(cp - eA)^2 + m^2c^4]|_{t=0}}{[(cp - eA)^2 + m^2c^4]|_t}} \times \\ \times \exp\left(\frac{i}{h}S_+(t, x)\right)\chi^0(t, x). \tag{14.44}$$

Здесь χ^0 — *решение задачи Коши*

$$\frac{d\chi^0}{dt} = -\frac{1}{2}(iec\sigma'H - c\alpha E)((cp - eA)^2 + m^2c^4)^{-1/2}, \tag{14.45}$$

$$\chi^0|_{t=0} = \psi^0(x).$$

Функция S_+ — *решение уравнения* (14.7) *с данными Коши* $S|_{t=0} = S_0(x)$.

Доказательство следует из предложения 14.3 и формул (14.25), (14.26). В формуле (14.44), как обычно, $x = x(t, y)$, $p = p(t, y)$ (решение задачи Коши (14.37), (14.39), где $x|_{t=0} = y$).

Аналогично, если $\psi|_{t=0} \in \mathbf{R}^2_-$, то существует ф. а. решение вида (14.44), где $J^+ \to J^-$, $S_+ \to S_-$. Тем самым асимптотика решения задачи Коши вычисляется для произвольных данных Коши (14.1′), удовлетворяющих стандартным условиям гладкости и финитности.

В уравнение переноса (14.45) входит оператор спина $\frac{1}{2}\, iec\sigma' H$. Следовательно, квазиклассическое приближение для уравнения Дирака содержит спиновый момент количества движения.

Формулы (14.44), (14.45) дают ф. а. решение задачи Коши в малом. С помощью канонического оператора (см. теорему 11.10) можно построить ф. а. решение для любого конечного промежутка времени.

Обоснование асимптотической формулы (14.44) получается следующим образом. Пусть скалярный и векторный электромагнитные потенциалы являются вещественно-значными функциями класса $C^\infty(\mathbf{R}^3)$, не зависят от x и ограничены вместе с производными до второго порядка включительно. Тогда минимальный симметрический оператор $\hat{H}_0$ в $L_2(\mathbf{R}^3_x)$, отвечающий системе Дирака (14.1), допускает расширение до самосопряженного оператора $\hat{H}$.

Из теоремы 11.10 и предложения 10.3 вытекает оценка

$$\|\psi(t, x) - \psi^0(t, x)\| \leqslant Ch,$$

где ψ^0 — правая часть формулы (14.44).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аналитические методы в теории дифракции и распространения волн, НС по акустике АН СССР, Мин-во радиопромышленности СССР, М., 1970.
2. Арнольд В. И. О характеристическом классе, входящем в условия квантования, Функц. анализ и его прил., 1, № 1 (1967), 1—14.
3. Арнольд В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности, Функц. анализ и его прил., 6 № 4 (1972), 3—26.
4. Арнольд В. И., Математические методы классической механики, «Наука», М., 1974.
5. Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, Метод эталонных задач, «Наука», М., 1972.
6. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., Гостехиздат, 1957.
7. Бреховских Л. М., Волны в слоистых средах, «Наука», М., 1973.
8. Буслаев В. С., Производящий интеграл и канонический оператор Маслова в методе ВКБ, Функц. анализ и его прил., 3, № 3 (1969), 17—31.
9. Вайнберг Б. Р., Об аналитических свойствах резольвенты для одного класса пучков операторов, Матем. сб., **77**, № 2 (1968), 259—296.
10. Вайнберг Б. Р., О коротковолновой асимптотике решений стационарных задач и асимптотике при $t \to \infty$ решений нестационарных задач, УМН, **30**, № 2 (1975), 3—55.
11. Вайнштейн Л. А., Открытые резонаторы и открытые волноводы, «Сов. радио», М., 1966.
12. Вишик М. И., Люстерник Л. А., Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН, № 5 (1957), 3—122.
13. Владимиров В. С., Уравнения математической физики, М., «Наука», 1975.
14. Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, Физматгиз, М., 1960.
15. Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление, Физматгиз, М., 1961.
16. Голдстейн Г., Классическая механика, Гостехиздат, М., 1957.
17. Гординг Л., Задача Коши для гиперболических уравнений, ИЛ, М., 1961.

18. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962.
19. Дирак П. А. М., Принципы квантовой механики, Физматгиз, М., 1960.
20. Жданова Г. В., Федорюк М. В., Асимптотическая теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и задача о рассеянии, Тр. Моск. матем. общ-ва, 1976.
21. Иосида К., Функциональный анализ, «Мир», М., 1967.
22. Картан Э., Интегральные инварианты, Гостехиздат, М., 1940.
23. Коган В. Р., Асимптотика оператора Лапласа — Бельтрами на единичной сфере S^n, Изв. вузов, Радиофизика, **12**, № 11 (1969), 1675—1680.
24. Коган В. Р., Асимптотика оператора Лапласа— Бельтрами в n-мерном шаре E^n, Изв. вузов, Радиофизика, **12**, № 11 (1969), 1681—1689.
25. Кон Дж. Дж., Ниренберг Л., Алгебра псевдодифференциальных операторов, в сб. «Псевдодифференциальные операторы», «Мир», М., 1967.
26. Курант Р., Уравнения с частными производными, «Мир», М., 1964.
27. Кучеренко В. В., Квазиклассическая асимптотика функции точечного источника для стационарного уравнения Шредингера, Теор. и матем. физ., **1**, № 3 (1969), 384—406.
28. Кучеренко В. В., Асимптотика решения системы $A\left(x, -ih\frac{\partial}{\partial x}u\right) = 0$ при $h \to 0$ в случае характеристик переменной кратности, Изв. АН СССР, сер. матем., 38, № 3 (1974), 625—662.
29. Кучеренко В. В., Формула коммутации h^{-1}-псевдодифференциального оператора с быстро осциллирующей экспонентой, Матем. сб., **94**, № 1 (1974), 89—113.
30. Кучеренко В. В., Асимптотические решения уравнения с комплексными характеристиками, Матем. сб., **95**, № 2 (1974), 163—213.
31. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, Физматгиз, М., 1958.
32. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, «Наука», М., 1973.
33. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика (нерелятивистская теория), «Наука», М., 1975.
34. Лере Ж., Гординг Л., Котаке Т., Задача Коши, «Мир», М., 1967.
35. Маслов В. П., Квазиклассическая асимптотика решений некоторых задач математической физики I, Журн. выч. матем. и матем. физ., **1**, № 1 (1961), 113—128.
36. Маслов В. П., Квазиклассическая асимптотика решений некоторых задач математической физики, II, Журн. выч. матем. и матем. физ., **1**, № 4 (1961), 638—663.
37. Маслов В. П., Задача о рассеянии в квазиклассическом приближении, ДАН СССР, **151**, № 2 (1963), 306—309.

38. Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, Изд-во МГУ, М., 1965.
39. Маслов В. П., Метод ВКБ в многомерном случае. Приложение к книге Дж. Хединга «Введение в метод фазовых интегралов», «Мир», М., 1965.
40. Маслов В. П., О регуляризации задачи Коши для псевдодифференциальных уравнений, ДАН СССР, **177**, № 6 (1967), 1277—1280.
41. Маслов В. П., К методу стационарной фазы континуальных интегралов Фейнмана, Теор. и матем. физ., **2**, № 1 (1970), 30—40.
42. Маслов В. П., Операторные методы, «Наука», М., 1973.
43. Маслов В. П., Федорюк М. В., Канонический оператор (вещественный случай), Современные проблемы математики, т. I, Изд-во ВИНИТИ, М., 1973.
44. Милнор Дж., Теория Морса, «Мир», М., 1965.
45. Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Метод канонического оператора в прикладной математике, часть I, МИЭМ, М., 1974.
46. Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Метод канонического оператора Маслова. Комплексная теория, МИЭМ, М., 1974.
47. Новиков С. П., Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов K-теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонова формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов, I, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 2 (1970), 253—288.
48. Новиков С. П., Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов K-теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонова формализма. Некоторые приложения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов, II, Изв. АН СССР, сер. матем., **34**, № 3 (1970), 475—500.
49. Покровский В. Л., Халатников И. М., К вопросу о надбарьерном отражении частиц высоких энергий, ЖЭТФ, **40**, № 6 (1961), 1713—1719.
50. Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, Гостехиздат, М., 1947.
51. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, Физматгиз, М., 1958.
52. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, Л., 1950.
53. Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, «Мир», М., 1970.
54. Фейнман Р., Хибс А., Квантовая механика и интегралы по траекториям, «Мир», М., 1968.
55. Федорюк М. В., Метод стационарной фазы для многомерных интегралов, Журн. выч. матем. и матем. физ., **2**, № 1 (1962), 145—150.
56. Федорюк М. В., Асимптотика функции Грина при $t \to +0$, $|x| \to \infty$ для корректных по Петровскому уравнений с постоянными коэффициентами и классы корректности решения задачи Коши, Матем. сб., **62**, № 4 (1963), 397—468.

57. Федорюк М. В., Метод стационарной фазы. Близкие седловые точки в многомерном случае, Журн. выч. матем. и матем. физ. 4, № 4 (1964), 671—682.
58. Федорюк М. В., Одномерная задача о рассеянии в квазиклассическом приближении I, Дифф. уравнения, 1, № 5 (1965), 631—646.
59. Федорюк М. В., Одномерная задача о рассеянии в квазиклассическом приближении II, Дифф. уравнения, 1, № 11 (1965), 1525—1536.
60. Федорюк М. В., Метод стационарной фазы и псевдодифференциальные операторы, УМН, 26 № 1 (1971), 67—112.
61. Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, М., 1937.
62. Фок В. А., О каноническом преобразовании в классической и квантовой механике, Вестн. ЛГУ, 16 (1959), 67—71.
63. Фок В. А., Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, «Сов. радио», М., 1970.
64. Фукс Д. Б., О характеристических классах Маслова — Арнольда, ДАН СССР, 178, № 2 (1968), 303—306.
65. Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, Изд-во МГУ, М., 1969.
66. Функциональный анализ, СМБ, «Наука», М., 1964.
67. Хелгансон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, «Мир», М., 1964.
68. Хёрмандер Л., Псевдодифференциальные операторы, в сб. «Псевдодифференциальные операторы», «Мир», М., 1967.
69. Хёрмандер Л., Интегральные операторы Фурье, «Математика», период. сб. переводов, 16, № 1 (1974), 17—61.
70. Хёрмандер Л., Интегральные операторы Фурье, «Математика», период. сб. переводов, 16, № 2 (1974), 67—136.
71. Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные уравнения с частными производными, «Мир», М., 1965.
72. Шифф Л., Квантовая механика, ИЛ, М., 1957.
73. Birkhoff G. D., Quantum mechanics and asymptotic series, Bull. Amer. Math. Soc., 39 (1933), 681—700.
74. Duistermaat J. J. Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities, Comm. Pure and Appl. Math., 27, № 2 (1974), 207—281.
75. Keller J. B., Corrected Bohr-Sommerfeld quantum conditions for nonseparable systems, Ann. Phys., 4, № 2 (1958), 180—188.
76. Keller J. B., Rubinow S., Asymptotic solution of eigenvalue problems, Ann. Phys., 9, № 1 (1960), 24—75.
77. Lax P., Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J., 24, № 4 (1957), 627—646.
78. Leray J., Lectures on hyperbolic equations with variable coeffitients, Princeton, Inst. for Adv. Study, 1952.
79. Leray J., Solutions asymptotiques des equations derivée particuliers, Conv. Intern. Phys. Math., Rome, 1972.
80. Ludwig D., Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem, Comm. Pure and Appl. Math., 13, № 13 (1960), 473—508.
81. Malgrange B., Opérateurs de Fourier (d'après Hörmander et Maslov), Seminaire Bourbaki, n° 411, 24-e année, 1971/72.

82. Maslov V., The characteristics of pseudo-differential operators and difference schemes, Actes Congrès Intern. Math., v. 2, 1970, 755—769.
83. Morse M., The calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc., Col. Publ., 18 (1934), N. Y.
84. Petrovsky I. G., Über das Cauchysche Problem für System von partiellen Differentialgleichungen, Матем. сб., № 2 (1937), 815—870.
85. Sourian M. J.-M., Indice de Maslov des variétés lagrangiennes orientables, C.R. Acad. Sci. Paris, **276**, S. A. (1973), 1025—1026.
86. Leray J., Solutions asymptotiques et groupe symplectique, Lect. Notes Math., 1975, 459, 73—97.
87. Schaeffer D., Guillemin V., Maslov theory and singularities M. I. T., Cambridge, Mass., 1972 (Mimeographed notes).
88. Weinstain A., On Maslov's quantisation condicion, Lect. Notes Math., 1975, 459, 341—372.