

# **Particle Kinematics**

**E. Byckling**

*University of Jyväskylä, Finland*

**K. Kajantie**

*University of Helsinki, Finland*

**JOHN WILEY AND SONS**

**London • New York • Sydney • Toronto**

**1973**

**Е. Бюклинг, К. Каянти**

## **Кинематика элементарных частиц**

*Перевод с английского  
под редакцией  
доктора физ.-мат наук  
Г. И. Копылова*

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
МОСКВА 1975**

Монография финских физиков Е. Бюклинга и К. Каяйти посвящена кинематике превращений элементарных частиц. Она отражает самые последние достижения в этой области, в частности охватывает вопросы, которые до сих пор рассматривались лишь в журнальных статьях (релятивизация формул, инклюзивные процессы, кинематические отражения и др.) Имеющиеся в книге упражнения повышают ее методические достоинства.

Книга доступна не только теоретикам, но и экспериментаторам, занимающимся физикой ядра и элементарных частиц, она может быть рекомендована как учебное пособие студентам старших курсов университетов и преподавателям.

*Редакция литературы по физике*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Кинематика элементарных частиц — наука, которой 25 лет назад еще не существовало. Она создается на наших глазах.

Формально — это та часть теоретической механики, которая изучает движение с релятивистскими скоростями, и она могла бы возникнуть сразу после появления теории относительности. Однако традиционная проблематика теоретической механики не получила развития в релятивистской физике, ибо была там беспредметна.

Фактически — это ветвь физики высоких энергий. Она начала развиваться тогда, когда в поле зрения науки появились объекты, способные двигаться с релятивистскими скоростями. На первых порах это были частицы космических лучей. Нужды физики космических лучей в 40—50-х годах вызвали появление первых кинематических формул.

Сооружение ускорителей, открытие мезонов и странных частиц дало новый стимул развитию кинематики. Был доказан ряд красивых теорем о свойствах двухчастичного распада. Были изучены свойства предельных углов и другие предельные соотношения. В 1953—1954 гг. появилась диаграмма Далица — способ наглядного изображения трехчастичных распадов. Были предприняты первые попытки расчета фазового объема системы многих частиц. В 1958 г. была высказана идея моделирования реакций, происходящих с элементарными частицами. Вышел в свет первый курс кинематики А. М. Балдина, В. И. Гольданского и И. Л. Розенталя.

Новая ветвь кинематики — кинематика резонансов — начала развиваться в 1960—1961 гг. Понятие инвариантной массы системы частиц приобрело физический смысл: по спектрам этих масс открывались резонансы. Были предложены формулы для ожидаемого фона резонансов, разработаны методы определения их квантовых чисел, изучены эффекты, имитирующие резонансы. Были написаны и начали снабжать физиков массовой продукцией программы идентификации каналов реакций. Моделирование реакций приобрело повсеместное распространение. Расчет многочастичного фазового объема перестал быть проблемой.

Но к началу 70-х годов эта проблематика исчерпала себя. Появилась на свет кинематика инклюзивных реакций; это было



связано с продвижением в область сверхвысоких энергий и больших множественностей. При этих энергиях уже нельзя отделять одни реакции от других; при таких множественностях резонансные пики теряются на фоне многочисленных нерезонансных комбинаций. Впереди маячил тупик. Он исчез с появлением понятия инклюзивной реакции. Физики принялись вычерчивать графики структурных функций, искать подтверждение гипотез скейлинга и фрагментации. Вместо спектров эффективных масс на страницах журналов замелькали распределения продольных быстрот, коэффициенты корреляции, спектры разностей быстрот, бросавшие, как кто-то выразился, вызов теоретикам. Все это поставило перед кинематикой ряд необычных задач. Примерно в это же время Ван Хов предложил диаграмму продольного фазового пространства как средство изучения динамики квазидвухчастичных процессов при сверхвысоких энергиях. Возникли достаточно эффективные способы моделирования реакций, разыгрывающихся в цилиндрическом фазовом пространстве. Резко возросло число феноменологических работ; кинематика и феноменология теперь нередко переплетаются и взаимно влияют друг на друга.

Это нынешнее положение вещей зафиксировано в предлагаемой читателю монографии Е. Бюклинга и К. Каянти — молодых финских физиков-теоретиков, авторов известного способа моделирования периферических процессов. Им удалось написать книгу, похожую на учебник и соединяющую систематичность изложения и высокий теоретический уровень с доступностью для физиков-экспериментаторов.

Листая статьи по теоретической физике элементарных частиц, мы довольно часто встречаем в них параграф, озаглавленный «Кинематика». В нем обычно приводится перечень кинематических переменных, характеризующих задачу, и указываются области их изменения. Там же мы находим значения скалярных произведений тех 4-векторов, которые встречаются в задаче. После этого начинается изложение основного содержания статьи. Таким образом, кинематический раздел играет вспомогательную роль. За многие годы мало-помалу возникла определенная культура обращения с кинематическими величинами. Накопился опыт приведения их к виду, удобному для дальнейших теоретических расчетов.

Представим себе теперь теоретика, который из подобных журнальных статей вырезал кинематические разделы, собрал их воедино и подытожил. Получилась бы сводка тех правил и приемов, которые дают эффект при работе с величинами, характеризующими превращения элементарных частиц. Нечто подобное представляет собой данная книга.

С другой стороны, книги по кинематике, вообще говоря, пишутся в расчете на физика-экспериментатора, ибо кинематика является таким же орудием в его руках, как искровая камера или компьютер. Кинематику элементарных частиц можно определить как отрасль теоретической физики, формулирующую практические выводы из тех ее закономерностей, которые уже твердо установлены и на которые можно безбоязненно опереться, исследуя новые факты. Существует ряд традиционных разделов, всегда включаемых в курс кинематики, ибо они нужны в работе на каждом шагу: преобразования Лоренца, кинематика двухчастичных распадов, величина и границы фазового объема, формулы для расчета сечений, наиболее ходовые распределения и многочисленные диаграммы. Все эти важные сведения авторы также включили в книгу.

Однако нужны ли простому физику-исследователю эти хитроумные достижения высокой теории? Нельзя ли обойтись без функций  $G$ , без толлеровских переменных и без определителей Грама, как обходились без них прежде? В принципе можно действовать и по старинке, обходясь преобразованиями Лоренца и разбиением многочастичных распадов на цепочки двухчастичных. Но содержание данного курса доказывает полезность и этого нового, более богатого, более специального кинематического языка: к новым понятиям, к обогащенному словарю быстро привыкаешь; достигается единообразие формул; мощный аппарат позволяет решать более трудные задачи. Систематизированное введение в обиход читателя новых, обобщающих понятий расширяет его кругозор, позволяет свежим взглядом окинуть многие прежде разрозненные факты и приемы рассуждений.

Упомянем некоторые новинки, впервые нашедшие себе место в курсе кинематики элементарных частиц (часть из них вообще существовала лишь в виде «научного фольклора» — приемов выкладок, которые переходили «из уст в уста», но не публиковались в журналах, потому что никто не считал себя их автором). Таковы, например, приемы инвариантного представления неинвариантных величин (гл. II, V, VI) или систематическое употребление четырехчастичной кинематической функции  $G$ , позволяющее унифицировать многие формулы кинематики (гл. III). Подробно обсуждаются свойства углов Джексона и Треймана — Янга (гл. V), параметризация фазового объема нескольких частиц в инвариантных переменных (гл. V, VI), а также пространственноподобные рекуррентные соотношения для фазового объема (гл. VI). Очень полезна гл. VII, посвященная кинематике инклюзивных реакций (хотя она и оставляет впечатление неполноты, ибо многие понятия инклюзивной физики вошли в обращение уже после появления книги).

Полезна и гл. VIII о кинематических отражениях. В гл. IX впервые описаны приемы вычисления фазового объема методом седловой точки.

В то же время в книге чересчур скупо изложено то, что при-  
мыкает к главе о кинематических отражениях и что можно было бы назвать физической кинематикой: кинематика наблюдений  $\pi^0$ -мезонов и вообще нестабильных частиц в лабораторной системе отсчета, способы восстановления спектров частиц по неполным данным, способы идентификации каналов реакции.

Недостаточны библиографические ссылки. Ориентируясь в современной журнальной литературе, авторы, к сожалению, слабо знакомы с историей кинематики, с литературой прежних лет. В книге, например, совсем нет имени Р. Стернхаймера, который в работах 50-х годов впервые вывел многие формулы, получившие теперь широкое распространение. Мало известны авторам работы советских физиков; между тем по ряду причин кинематика многие годы у нас развивалась интенсивней, чем на Западе. В итоге многие результаты, полученные в 50—60-е годы, в книге приписываются более поздним исследователям, повторившим их — порою в ухудшенном варианте — через 10 и более лет. В других случаях такие результаты приводятся вообще без ссылки на литературу. Избегая изменений авторского текста, мы в некоторых случаях пытались исправить эти упущения в редакторских примечаниях. Добавленные библиографические ссылки мы отметили звездочкой.

В целом можно надеяться, что книга Е. Бюклинга и К. Каянти окажется полезной как опытным физикам, так и молодежи, начинающей работу в той увлекательной области науки, которая называется физикой высоких энергий.

Перевод книги выполнен Г. В. Даниляном (гл. I—III), А. В. Давыдовым (гл. IV и гл. V, разделы 1—6) и Г. И. Копыловым (гл. V, разделы 7—11, гл. VI—IX и приложения).

Дубна  
июнь 1974 г.

Г. Копылов

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Целью настоящей книги является систематическое изложение релятивистской кинематики реакций с участием элементарных частиц с особым акцентом на практические аспекты применения ее в области физики высоких энергий.

В последние годы существенно возросли энергии частиц в ускорителях, и, как следствие, значительно усложнились наблюдаемые реакции. В связи с этим основательное знание релятивистской кинематики стало крайне необходимым для понимания важных динамических характеристик. Это знание не только помогает физику избежать утомительных вычислений, но также нередко может уберечь его от ошибочных интерпретаций экспериментальных эффектов. Понимание простой и привлекательной структуры релятивистской кинематики может привести к упрощениям как расчетов, так и самих физических представлений. Развитие физики элементарных частиц в последние годы сопровождалось появлением огромного числа статей, посвященных выбору переменных и представлению данных в случае многочастичных реакций, кинематическому отображению, периферическим эффектам, продольному фазовому пространству, кинематике инклюзивных реакций, численными методами расчета (в частности методу Монте-Карло) и т. д. Весь этот материал рассеян по различным научным журналам, поэтому все более возрастает необходимость в детальном и последовательном рассмотрении кинематики, относящейся как к упомянутым, так и к другим проблемам.

При написании этой книги мы предполагали, что читатель знаком по крайней мере с основными представлениями физики элементарных частиц и специальной теории относительности. Мы надеемся, что она будет полезной для самообразования и в качестве справочника, а также как учебное пособие по курсу кинематики элементарных частиц для студентов старших курсов и аспирантов.

С целью выдержать объем книги в разумных пределах мы вынуждены были ограничиться рассмотрением лишь бесспиновых частиц. Вопросы, связанные с поляризацией, а также вопросы, относящиеся к проблеме определения спина системы

частиц, здесь не обсуждаются. Кинематика бесспиновых частиц представляет собой завершенное целое, поэтому изучение данной книги может быть дополнено другими пособиями, посвященными теории и методологии спина.

Авторы признательны Финскому национальному совету по исследованиям за финансовую поддержку, Исследовательскому институту теоретической физики Хельсинкского университета за предоставленную возможность использовать оборудование института, а также д-рам Ньюборгу и Уиппману за критическое прочтение рукописи.

Хельсинки  
27 апреля 1972 г.

*Е. Бюклинг  
К. Каянти*

# Глава I

## ВВЕДЕНИЕ

Под кинематикой элементарных частиц в этой книге понимается наука о тех аспектах реакций с участием элементарных частиц, для понимания которых достаточно специальной теории относительности. Последняя представляет собой одну из наиболее твердо установленных физических теорий (см., например, [125]), так что структура кинематики хорошо определена и в достаточной мере экспериментально обоснована. Напротив, динамические свойства таких реакций все еще остаются в значительной мере неизвестными, и большинство исследований в физике элементарных частиц производится с целью внести ясность в понимание этих основных свойств. Экспериментальные результаты и динамические правила всегда выражаются через кинематические переменные и подвержены кинематическим ограничениям, так что глубокое понимание кинематики частиц является необходимым условием правильной интерпретации динамики реакции.

С точки зрения изложенного в этой книге материала частицы полностью характеризуются значениями энергии и импульса, комбинация которых определяет 4-импульс. Последний при преобразованиях Лоренца трансформируется как 4-вектор. Полный 4-импульс системы сохраняется, т. е. сумма всех 4-импульсов в начальном состоянии равна сумме всех 4-импульсов в конечном состоянии. Эти весьма простые факты и являются основой кинематики элементарных частиц.

Несмотря на такую четкую и хорошо установленную теоретическую базу, кинематический анализ реакции с участием большого числа частиц может быть чрезвычайно сложным. Одной из причин этой сложности является то обстоятельство, что при описании реакций наиболее удобными переменными, при которых четко проявляются динамические эффекты, оказываются обычно не 4-импульсы, а другие переменные. Например, резонансные пики наблюдаются по распределению инвариантных масс, периферичность взаимодействий — по распределению переданных импульсов и т. д. Далее, согласно теории относительности, описание процесса должно быть лоренц-инвариантным, так что наиболее подходящими часто бывают инвариантные переменные. Дальнейшие совокупности переменных

приходится вводить из-за того, что измерения проводятся в одной системе отсчета, а их интерпретация может оказаться более естественной в других системах отсчета.

Кроме значений энергии и импульса, состояние одной частицы характеризуется также и другими квантовыми числами, такими, как спин, четность, изоспин, заряд, барионное или лептонное число, странность и т. д. Эти квантовые числа в нашем изложении кинематики элементарных частиц будут игнорироваться. Среди этих квантовых чисел спин частицы играет особую роль, так как он связан [53] со свойствами неоднородной группы Лоренца (см. ниже) и может рассматриваться как часть обсуждаемого нами предмета. Но мы игнорировали и спин, главным образом для того, чтобы не увеличивать объем книги, а также чтобы избежать введения математического аппарата, более сложного и имеющего совершенно другую природу, чем тот, который используется в этой книге. Аналогично мы не рассматриваем и очень важные практические проблемы, касающиеся свойств полного момента системы частиц [73, 140, 143, 160\*].

Чтобы пояснить значение, которое имеет пренебрежение спином, для читателей, знакомых с теорией групп, заметим, что математически спин возникает [53] при рассмотрении унитарных представлений группы Пуанкаре, т. е. неоднородной группы Лоренца (включающей в себя сдвиги). Эти представления характеризуются определенными массой и спином. Состояния внутри представления задаются импульсом и третьей компонентой спина. Трансформационные свойства состояний хорошо установлены, но оказываются довольно сложными, если спин не равен нулю. Пренебрегая спином, мы тем самым ограничимся рассмотрением представлений, отвечающих нулевому спину. Аналогично пренебрежение полным моментом системы из  $n$  частиц означает, что мы будем работать с приводимыми представлениями группы Пуанкаре, а спиновый анализ такого состояния эквивалентен разбиению представления на неприводимые компоненты [140, 141].

Единственными книгами по кинематике элементарных частиц в настоящее время являются книги Балдина, Гольданского, Максименко и Розенталя [6, 144], Хагедорна [52] и Копылова [84]. Книга Копылова посвящена главным образом кинематике резонансов и снабжена обширной библиографией статей, которые имеются только на русском языке и которые не включены в библиографию данной книги. Кроме того, имеются публикации лекций по кинематике частиц, прочитанных в различных физических школах (см., например, [34, 113, 117, 132, 139, 146\*]), которые могут дополнить материал этой книги.

План изложения в книге таков. В гл. II мы напоминаем ряд положений и формул специальной теории относительности, ко-

которые служат основой для последующего изложения. В частности, мы даем определения различных систем отсчета и подробно исследуем преобразования Лоренца физических величин из одной системы отсчета в другую. В разделе II.7 и в приложении А мы показываем, что связь между инвариантными и неинвариантными величинами естественнее всего выражать при помощи определителей Грама, и этот результат используется в книге повсюду.

В процессе распада (или рассеяния) 4-импульс подчиняется закону сохранения энергии-импульса  $p_0 (= p_a + p_b) = p_1 + \dots + p_n$ . Для фиксированного 4-импульса начального состояния это равенство определяет конечную  $(3n - 4)$ -мерную область (фазовое пространство) в пространстве компонент импульсов конечных частиц. Точки фазового пространства соответствуют наблюдаемым событиям. В гл. III мы формулируем основные задачи кинематики элементарных частиц: параметризацию фазового пространства различными наборами переменных, вытекающими из эксперимента или теории, вывод соотношений между этими наборами и вычисление полных или дифференциальных сечений, являющихся интегралами по фазовому пространству.

В гл. IV—VI основные представления применяются поочередно к процессам типа  $1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 2$ ,  $1 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 3$  и т. д., где цифры обозначают числа частиц в начальном и конечном состояниях. Это последовательность постепенно усложняющихся процессов, в которой последующие элементы тесно связаны друг с другом (раздел III.1). В гл. VII мы рассматриваем инклюзивные эксперименты, в которых конечные состояния идентифицированы лишь частично. Гл. VIII посвящена краткому описанию кинематических отражений. Особенности, проявляющиеся в многократно проинтегрированных дифференциальных сечениях, иногда могут быть вовсе не динамическими эффектами в наблюдаемых переменных, а кинематическими отражениями других динамических свойств. Наконец, в гл. IX рассматриваются численные методы интегрирования по фазовому пространству, причем особое внимание уделяется методу Монте-Карло. Большинство глав снабжено упражнениями, решения которых приводятся в конце книги. Многие упражнения и решения содержат дополнительный материал, который не включен в основной текст книги.

Различные разделы книги существенно отличаются друг от друга по сложности материала. Основной курс кинематики, как для экспериментаторов, так и для теоретиков, содержится в следующих разделах: II.1—6, III.1—3, IV.1, 3,—6, V.1—6, VI.1—2, 4—6, VII.1—7, VIII.1—3, IX.1—5, приложение Б. На следующем более высоком уровне очень полезно понимать свойства и научиться применять определители Грама (которые рассматри-



ваются и используются в разделах II.7, V.7—II, приложение А) и эллипсоиды в импульсном пространстве (разделы II.8, III.4). Разделы этого уровня в оглавлении отмечены одной звездочкой. Заметим также, что в ряде частей некоторых разделов, отнесенных к основному курсу, используется материал, отмеченный одной звездочкой; эти части могут быть опущены, если основной курс кинематики приходится сокращать. Наиболее трудными являются разделы: VI.3—о толлеровских переменных, VI.7, 8—об инвариантных переменных и IX.6—о статистических методах расчета фазового объема. (Эти разделы отмечены в оглавлении двумя звездочками.)

При ссылках в тексте на разделы других глав мы обозначаем их римской и арабской цифрами (глава, раздел), а при ссылках на формулы—римской и двумя арабскими цифрами (глава, раздел и формула). Однако при ссылках на разделы или формулы в пределах данной главы римская цифра опускается. Все буквенные обозначения приведены в конце книги.

## Глава II

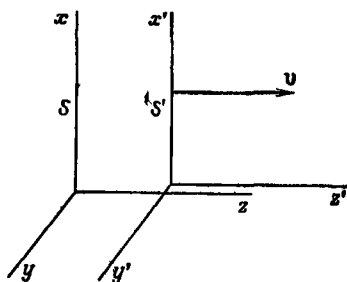
### СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

#### 1. Преобразования Лоренца, 4-векторы, быстроты, псевдосферические координаты

Всестороннее и систематическое изложение принципов специальной теории относительности можно найти во многих учебниках (см., например, [125]). В этом разделе мы рассмотрим несколько специальных вопросов, которые нам понадобятся позднее, а именно: а) преобразования Лоренца, б) 4-векторы, в) понятие о быстроте, г) сферические и псевдосферические координаты.

##### а. Преобразования Лоренца

Рассмотрим точку в пространстве-времени, определенную координатами  $t, x, y, z$  в данной системе отсчета  $S$ . Согласно специальной теории относительности, соотношение между координатами точки в системе  $S$  и ее координатами  $t', x', y', z'$  в другой инерциальной системе отсчета  $S'$  дается преобразованиями Лоренца. Предположим, что система  $S'$  движется относительно системы  $S$  с постоянной скоростью  $v$ . Чтобы получить простые выражения для преобразования координат из одной системы в другую, следует направить ось  $z$  системы  $S$  и ось  $z'$  системы  $S'$  вдоль относительной скорости  $v$ , а соответствующие координатные плоскости сделать параллельными друг другу (фиг. 1). Если предположить далее, что в момент  $t = t' = 0$  начала координат обеих систем совпадают, то преобразования Лоренца даются выражениями



Фиг. 1.

$$\begin{aligned}
 x' &= x, & x &= x', \\
 y' &= y, & y &= y', \\
 z' &= \gamma(z - vt), & z &= \gamma(z' + vt'), \\
 t' &= \gamma\left(t - \frac{vz}{c^2}\right), & t &= \gamma\left(t' + \frac{vz'}{c^2}\right),
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$\gamma = \gamma(v) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (1.2)$$

— лоренц-фактор. Компоненты  $x$  и  $y$ , перпендикулярные скорости  $v$ , остаются неизменными. Обратные преобразования получаются просто изменением знака  $v$ .

Когда скорость  $v$  стремится к нулю, скорость света  $c$  исчезает из равенств (1.1), и они совпадают с выражениями для нерелятивистских преобразований Галилея. В макроскопических масштабах лишь при некоторых астрономических явлениях наблюдаются скорости, столь большие, что необходимо применять выражения (1.1). С другой стороны, в физике элементарных частиц скорости обычно столь близки к  $c$ , что отклонения от преобразований Галилея велики. И действительно, физика элементарных частиц предоставляет многочисленные возможности проверки справедливости равенств (1.1).

Если относительная скорость  $v$  систем  $S'$  и  $S$  не параллельна осям  $z$  и  $z'$ , равенства (1.1) должны быть видоизменены. Однако, поскольку стандартные выражения для этой видоизмененной записи преобразований нам здесь не понадобятся, мы оставим их вывод (см., например, [52]) для самостоятельных упражнений (упражнение II.2).

### 6. 4-векторы

Преобразования (1.1) — частный случай преобразований Лоренца. Преобразования Лоренца в самом общем случае записываются проще всего, как формально, так и по существу, в четырехмерном пространстве векторов  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}) = (ct, x, y, z)$ . Вообще 4-вектор  $a = (a^0, \mathbf{a})$  представляет собой объект, преобразуемый так же, как вектор  $x$ . (Для пространственных компонент мы используем равнозначные обозначения  $a^1$  или  $a_x$ ,  $a^2$  или  $a_y$ ,  $a^3$  или  $a_z$ ). Так, при преобразовании Лоренца относительно систем отсчета, изображенных на фиг. 1, 4-вектор  $a$  преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} a'^0 &= \gamma \left( a^0 - \frac{va^3}{c} \right), & a'^1 &= a^1, \\ a'^2 &= a^2, & a'^3 &= \gamma \left( a^3 - \frac{va^0}{c} \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Чтобы определить общее преобразование Лоренца

$$a' = La, \quad a'^\mu = \sum_{\nu} L^{\mu}_{\nu} a^{\nu}, \quad (1.4)$$

где  $L$  — действительная матрица, мы введем *метрический тензор*

$$g = (g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = g^{-1} \quad (1.5)$$

и *скалярное произведение*  $a \cdot b$  двух 4-векторов  $a$  и  $b$ :

$$a \cdot b = \sum_{\mu} a_{\mu} b^{\mu} = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu} = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.6)$$

Тогда преобразование Лоренца в общем виде определяется как линейное преобразование, оставляющее скалярное произведение  $x \cdot y$  инвариантным. Это означает, что матрица  $L$  в выражении (1.4) должна удовлетворять условию

$$gL^{-1}g = L^T. \quad (1.7)$$

Таким образом, матрица, обратная  $L$ , получается транспонированием  $L$  и изменением знаков компонент  $L_{i0}$ ,  $L_{0i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Преобразование Лоренца в общем виде можно представить как *сдвиг* (1.3) [см. замечания после формулы (1.22)], сопровождаемый трехмерным вращением.

В кинематике элементарных частиц преобразования (1.4) большей частью являются *собственными* преобразованиями Лоренца. Кроме сохранения инвариантным скалярного произведения (1.6), они удовлетворяют следующим двум условиям:

$\det L = +1$ , т. е. пространственные отражения исключены;

$L_0^0 \geq 1$ , т. е. знак 0-компоненты времениподобного вектора является инвариантом.

### в. Быстрота

Преобразования Лоренца образуют группу, т. е. произведение двух преобразований Лоренца также является преобразованием Лоренца. Если произвести два последовательных преобразования Лоренца частного вида (1.3) с параметрами  $v_1$  и  $v_2$ , то совокупный результат эквивалентен одному преобразованию с параметрами

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}, \\ \gamma_3 &= \gamma_1 \gamma_2 \left( 1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

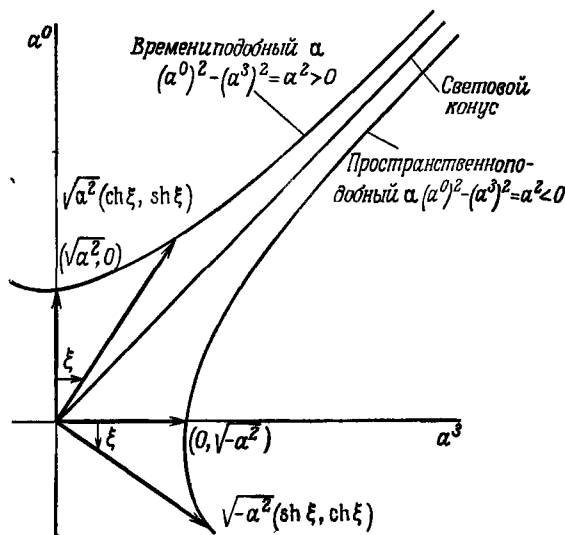
Чтобы отчетливее увидеть это, заменим  $v$  новым параметром  $\xi$  (называемым *быстротой*), согласно равенствам

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th} \xi, \quad \gamma = \operatorname{ch} \xi, \quad \frac{\gamma v}{c} = \operatorname{sh} \xi. \quad (1.9)$$

Эти равенства отображают область изменения скорости  $-1 \leq v/c \leq 1$  в область изменения быстроты  $-\infty < \xi < \infty$ . Формулы (1.8) тогда означают, что быстроты удовлетворяют следующему соотношению:

$$v_3 = c \operatorname{th} \xi_3 = \frac{c (\operatorname{th} \xi_1 + \operatorname{th} \xi_2)}{1 + \operatorname{th} \xi_1 \cdot \operatorname{th} \xi_2} = c \operatorname{th} (\xi_1 + \xi_2), \quad (1.10)$$

или  $\xi_3 = \xi_1 + \xi_2$ . Таким образом, видно, что при параллельных друг другу преобразованиях Лоренца быстроты складываются.



Фиг. 2. Быстрота  $\xi = \operatorname{th}(v/c)$  параметризует все векторы  $a$ , которые можно получить из стандартных векторов  $(\sqrt{a^2}, 0)$  и  $(0, \sqrt{-a^2})$ .

Далее, если в преобразованиях (1.3) подставить  $\xi$  вместо  $v$ , то обратные преобразования примут вид

$$\begin{aligned} a^0 &= a'^0 \operatorname{ch} \xi + a'^3 \operatorname{sh} \xi, \\ a^3 &= a'^0 \operatorname{sh} \xi + a'^3 \operatorname{ch} \xi. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Отсюда видно, что гиперболы  $(a^0)^2 - (a^3)^2 = \operatorname{const}$  (фиг. 2) при этих преобразованиях не изменяются. Если не обращать внимания на знак минус в этом инвариантном выражении, то все выглядит очень похоже на вращение в двумерной евклидовой плоскости. Таким образом, быстрота  $\xi$  соответствует углу вращения, и иногда преобразования (1.11) называют мнимым вращением вследствие соотношений  $\cos i\xi = \operatorname{ch} \xi$  и  $\sin i\xi = i \operatorname{sh} \xi$ . Аналогия с вращениями проясняет также и свойство

аддитивности быстрот. Если последовательные преобразования Лоренца не параллельны друг другу, то выражения (1.8) и (1.10) должны быть заменены более сложными выражениями (см., например, [125], стр. 39 и [140], стр. 342). Мы не приводим их здесь; в неявном виде они содержатся в равенствах (1.26), (1.27), приведенных ниже<sup>1)</sup>.

### г. Сферические и псевдосферические координаты

Теперь мы рассмотрим различные параметризации 4-векторов, которые нам потребуются в дальнейшем. Это рассмотрение не обязательно для понимания основной части книги и может быть опущено при первом чтении.

Любой 4-вектор  $a$  принадлежит к одному из следующих четырех классов.

|                              |            |        |
|------------------------------|------------|--------|
| времениподобный              | $a^2 > 0,$ | (1.12) |
| изотропный („светоподобный“) | $a^2 = 0,$ |        |
| пространственноподобный      | $a^2 < 0,$ |        |
| нуль                         | $a^2 = 0.$ |        |

Для простоты мы будем предполагать, что 0-компонента времениподобного или изотропного вектора положительна. Соответствующим преобразованием Лоренца 4-вектор  $a$  может быть преобразован к одному из стандартных видов:

$$\begin{aligned}
 a &= (+\sqrt{a^2}, 0, 0, 0) & (a - \text{времениподобный}), \\
 a &= (1, 0, 0, 1) & (a - \text{изотропный}), \\
 a &= (0, 0, 0, \sqrt{-a^2}) & (a - \text{пространственноподобный}).
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

Если вектор  $a$  является времениподобным, то система отсчета, в которой справедливо (1.13), называется *системой покоя*  $R(a)$  вектора  $a$ , если же вектор  $a$  — пространственноподобный, то мы будем называть эту систему *стандартной системой*  $S(a)$  вектора  $a$ .

Будем теперь параметризовать произвольный 4-вектор  $a$  параметрами того преобразования Лоренца, которое переводит стандартный 4-вектор в вектор  $a$ . Идея вполне аналогична записи трехмерных векторов в сферических координатах (приложение Б и фиг. 3), т. е. записи типа

$$a = A(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \tag{1.14}$$

где  $A = |a|$ . В этом случае параметризация вектора  $a$  получается применением к «стандартному вектору»

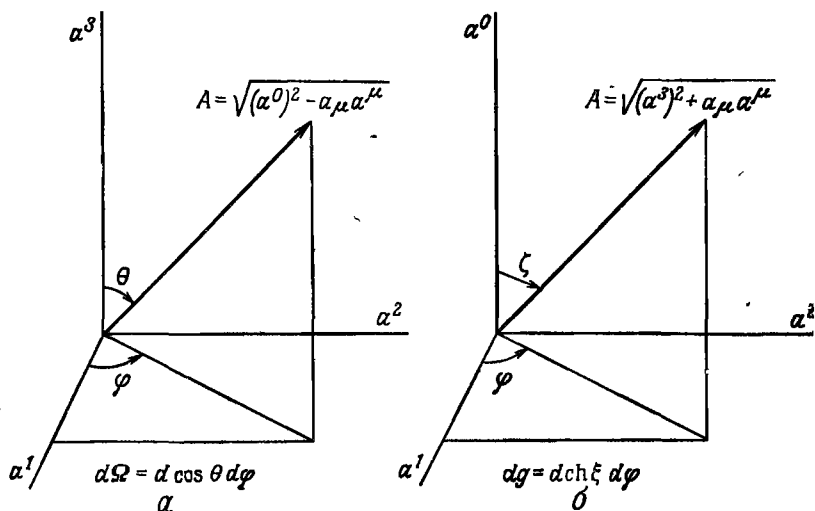
$$a = (0, 0, A) \tag{1.15}$$

<sup>1)</sup> Многие красивые свойства геометрии быстрот приведены в работе Смодинского [145]. — *Прим ред.*

двух последовательных вращений (фиг. 3, а)

$$R_z(\varphi) R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

(обозначения очевидны). Заметим, что под вращениями в (1.16) понимаются *вращения в активном смысле*. Например,  $R_y(\theta)$



Фиг. 3. Сферические и псевдосферические координаты в пространствах с инвариантными формами  $A^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$  (а) и  $A^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2$  (б).

Параметры  $\Omega = (\cos \theta, \varphi)$  и  $g = (\text{ch } \zeta, \varphi)$  параметризуют преобразования Лоренца, оставляющие соответственно  $a^0$  и  $a^3$  инвариантными. Видно, что при таком представлении времениподобные и пространственноподобные векторы  $a$  ничем не различаются.

поворачивает вектор вокруг оси  $y$  на угол  $\theta$ , а сами координатные оси на угол  $-\theta$ .

В четырехмерном лоренцевом пространстве мы введем аналогичные *псевдосферические координаты*. Их можно определить различными способами. Мы будем пользоваться следующей параметризацией через два набора переменных  $(\xi, \theta, \varphi)$  и  $(\xi, \zeta, \varphi)$ . Если вектор  $a$  — *времениподобный*, то мы можем написать

$$a = \sqrt{a^2} (\text{ch } \xi, \text{sh } \xi \sin \theta \cos \varphi, \text{sh } \xi \sin \theta \sin \varphi, \text{sh } \xi \cos \theta), \quad (1.17)$$

или

$$a = \sqrt{a^2} (\text{ch } \xi \text{ ch } \zeta, \text{ch } \xi \text{ sh } \zeta \cos \varphi, \text{ch } \xi \text{ sh } \zeta \sin \varphi, \text{sh } \xi). \quad (1.18)$$

Если вектор  $a$  — пространственноподобный, то вместо предыдущих равенств мы пишем

$$a = \sqrt{-a^2} (\text{sh } \xi, \text{ch } \xi \sin \theta \cos \varphi, \text{ch } \xi \sin \theta \sin \varphi, \text{ch } \xi \cos \theta), \quad (1.19)$$

или

$$a = \sqrt{-a^2} (\text{sh } \xi \text{ch } \zeta, \text{sh } \xi \text{sh } \zeta \cos \varphi, \text{sh } \xi \text{sh } \zeta \sin \varphi, \text{ch } \xi). \quad (1.20)$$

Угловые переменные  $\theta, \varphi$  меняются в своих естественных пределах  $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ . Чтобы значение каждого 4-вектора  $a$  повторялось не более одного раза, пределы изменения других переменных должны быть следующими:  $-\infty < \xi < \infty, 0 \leq \zeta < \infty$ ; лишь в (1.17) следует принять  $0 \leq \xi < \infty$ . Все выражения (1.17)–(1.20), очевидно, удовлетворяют соотношению  $a_\mu a^\mu = (a^0)^2 - a^2 = a^2$ .

Заметим, что выбор стандартной формы пространственноподобного вектора в виде  $(0, 0, 0, \sqrt{-a^2})$  означает, что в равенстве (1.20) направление оси  $z$  определяется вектором  $a$ . Когда  $\xi \rightarrow 0 (a^0 \rightarrow 0)$  в (1.20), вектор  $a$  становится параллельным оси  $z$ . Векторы другого вида, скажем  $(0, 0, \sqrt{-a^2}, 0)$ , не могут быть получены из (1.20) ни при каких значениях  $\xi, \zeta, \varphi$ . Параметризация (1.20) будет использована лишь в разделе VI.3 и вполне достаточна для рассматриваемых там вопросов.

Чтобы обосновать параметризацию (1.17)–(1.20), мы укажем те преобразования Лоренца, которые переводят векторы стандартного вида (1.13) в векторы общего вида (1.17)–(1.20). Тем самым мы дадим операциональное определение наборов параметров  $(\xi, \theta, \varphi)$  и  $(\xi, \zeta, \varphi)$ . Рассмотрим сначала параметр  $\xi$ , который есть не что иное, как быстрота из равенства (1.9). Чтобы понять его смысл, положим либо  $\theta = 0$ , либо  $\zeta = 0$  (значение  $\varphi$  произвольно). Тогда

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a^2} (\text{ch } \xi, 0, 0, \text{sh } \xi), & a^2 > 0, \\ a &= \sqrt{-a^2} (\text{sh } \xi, 0, 0, \text{ch } \xi), & a^2 < 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Сразу же видно, что эти формы можно получить из стандартных форм (1.13) лоренц-преобразованием (1.11). В явной матричной записи это преобразование имеет вид

$$L_z(\xi) = \begin{bmatrix} \text{ch } \xi & 0 & 0 & \text{sh } \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sh } \xi & 0 & 0 & \text{ch } \xi \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

Например, если  $L_z(\xi)$  применить к времениподобному вектору  $\sqrt{a^2} (1, 0, 0, 0)$ , мы получим вектор  $\sqrt{a^2} (\text{ch } \xi, 0, 0, \text{sh } \xi)$ , т. е.



$L_z(\xi)$  дает вектору  $a$  с нулевыми пространственными компонентами  $a = 0$  отличное от нуля значение  $a$ , направленное вдоль оси  $z$ . Поэтому преобразование (1.22) или (1.11) называют *сдвигом вдоль оси  $z$  с параметром  $\xi$* . Заметим, что, подобно повороту (1.16), преобразование  $L_z(\xi)$  следует считать преобразованием в активном смысле: будучи применено к вектору, заданному в своей системе покоя, оно дает (при положительных  $\xi$ ) вектор с положительной  $z$ -компонентой (а новой системе отсчета придает скорость в отрицательном направлении оси  $z$ ).

Роль остальных переменных  $[\theta, \varphi$  в выражениях (1.17) и (1.19) и  $\xi, \varphi$  в выражениях (1.18) и (1.20)] становится теперь ясной. Рассмотрим сначала переменные  $\theta$  и  $\varphi$ , которые являются обычными сферическими координатами в трехмерном евклидовом пространстве. Формы (1.17) и (1.19), очевидно, получены из выражения (1.21) вращением сначала вокруг оси  $y$  на угол  $\theta$ , а затем вокруг новой оси  $z$  на угол  $\varphi$  [фиг. 3, а и выражение (1.16)]. Эти преобразования являются элементами группы  $O(3)$  трехмерных евклидовых вращений, и они оставляют 0-компоненту  $a^0$  4-вектора неизменной. Естественными параметрами этой группы являются координаты  $\Omega = (\cos \theta, \varphi)$ .

Пара  $(\xi, \varphi)$  обладает иными свойствами. Формы (1.18) и (1.20) получаются из формы (1.21) следующим образом: сначала производится сдвиг в направлении  $x$  с параметром  $\xi$ . Это может быть названо также гипервращением на «угол»  $\xi$  в плоскости  $O1$ , выполняемым по формуле типа (1.11). Наконец, выполняется вращение на угол  $\varphi$  вокруг оси  $O$  в плоскости  $12$ ; оно заканчивается в положении, показанном на фиг. 3, б. Эти преобразования оставляют неизменной компоненту  $a^3$  4-вектора. Они являются элементами группы  $O(1, 2)$ , которая сохраняет инвариантной квадратичную форму

$$A^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2. \quad (1.23)$$

Если выразить компоненты  $a$  через  $A$ , то будем иметь

$$\begin{aligned} a^0 &= A \operatorname{ch} \xi, \\ a^1 &= A \operatorname{sh} \xi \cos \varphi, \\ a^2 &= A \operatorname{sh} \xi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Эти элементы группы  $O(1, 2)$  параметризуются парой величин

$$g \equiv (\operatorname{ch} \xi, \varphi). \quad (1.25)$$

Операциональная интерпретация троек параметров  $(\xi, \theta, \varphi)$  и  $(\xi, \xi, \varphi)$  может быть дана более конкретно, если мы выпишем в явном виде матрицы, соответствующие преобразованиям вектора от вида (1.13) к виду (1.17)—(1.20). Взяв матрицы вра-

щения из формулы (1.16) и матрицу сдвига из формулы (1.22), найдем

$$L(\xi, \theta, \varphi) = R_z(\varphi) R_y(\theta) L_z(\xi) =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \xi & 0 & 0 & \operatorname{sh} \xi \\ \operatorname{sh} \xi \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & \operatorname{ch} \xi \sin \theta \cos \varphi \\ \operatorname{sh} \xi \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & \operatorname{ch} \xi \sin \theta \sin \varphi \\ \operatorname{sh} \xi \cos \theta & -\sin \theta & 0 & \operatorname{ch} \xi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Аналогично

$$L(\xi, \zeta, \varphi) = R_z(\varphi) L_x(\zeta) L_z(\xi) =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \zeta & \operatorname{sh} \zeta & 0 & \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \zeta \\ \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \zeta \cos \varphi & \operatorname{ch} \zeta \cos \varphi & -\sin \varphi & \operatorname{sh} \xi \operatorname{sh} \zeta \cos \varphi \\ \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \zeta \sin \varphi & \operatorname{ch} \zeta \sin \varphi & \cos \varphi & \operatorname{sh} \xi \operatorname{sh} \zeta \sin \varphi \\ \operatorname{sh} \xi & 0 & 0 & \operatorname{ch} \xi \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

Если операторы  $L(\xi, \theta, \varphi)$  применяются к векторам  $\sqrt{a^2}(1, 0, 0, 0)$  или  $\sqrt{-a^2}(0, 0, 0, 1)$ , то получаются векторы, пропорциональные первому и последнему столбцам в (1.26). Они совпадают с формами (1.17) и (1.19). Практически матрицы  $L(\xi, \theta, \varphi)$  и  $L(\xi, \zeta, \varphi)$  нам понадобятся для лоренц-преобразований обычных 4-векторов, определенных в стандартных системах отсчета  $R(a)$  и  $S(a)$ , в другие системы отсчета. Матрицы, обратные матрицам (1.26) и (1.27), получаются по формуле (1.7). Заметим также, что матрицы (1.26) и (1.27) являются комбинациями сдвигов и вращений. Чистый сдвиг с параметром  $\xi$  в направлении  $\theta, \varphi$  дается выражением

$$L = R_z(\varphi) R_y(\theta) L_z(\xi) R_y(-\theta) R_z(-\varphi). \quad (1.28)$$

Для вектора  $a = (a^0, \mathbf{0})$ , естественно, получается

$$R_y(-\theta) R_z(-\varphi) a = a.$$

Дифференциальный элемент объема в сферических координатах [см. (1.14)] дается формулой

$$da^1 da^2 da^3 = A^2 dA d\Omega = A^2 dA d\cos \theta d\varphi. \quad (1.29)$$

Соответственно в лоренцевом пространстве с одной временной и двумя пространственными координатами, согласно выражению (1.24), имеем

$$da^0 da^1 da^2 = A^2 dA dg = A^2 dA d\operatorname{ch} \xi d\varphi. \quad (1.30)$$

Полная поверхность  $\int d\Omega = 4\pi$  конечна, но интеграл  $\int dg$ , очевидно, бесконечен. Элемент объема в полном четырехмерном

лоренцевом пространстве, параметризованном согласно формулам (1.17) — (1.20), равен

$$d^4a = da^0 da^1 da^2 da^3 = (\sqrt{a^2})^3 \operatorname{sh}^2 \xi \sin \theta d\sqrt{a^2} d\xi d\theta d\varphi \quad (a^2 > 0), \quad (1.31)$$

$$d^4a = (\sqrt{a^2})^3 \operatorname{ch}^2 \xi \operatorname{sh} \xi d\sqrt{a^2} d\xi d\zeta d\varphi \quad (a^2 > 0), \quad (1.32)$$

$$d^4a = (\sqrt{-a^2})^3 \operatorname{ch}^2 \xi \sin \theta d\sqrt{-a^2} d\xi d\theta d\varphi \quad (a^2 < 0), \quad (1.33)$$

$$d^4a = (\sqrt{-a^2})^3 \operatorname{sh}^2 \xi \operatorname{sh} \xi d\sqrt{-a^2} d\xi d\zeta d\varphi \quad (a^2 < 0). \quad (1.34)$$

Если мы возьмем в выражениях (1.31) и (1.33) вместо  $\xi$  в качестве переменной величину  $A = |a|$ , в обоих случаях получим

$$d^4a = d(a^2) \frac{A^2 dA d\Omega}{2a^0} = d(a^2) \frac{da^1 da^2 da^3}{2a^0}. \quad (1.35)$$

Если же в выражениях (1.32) и (1.34) в качестве переменной использовать  $A$  из (1.23), мы получим

$$d^4a = d(a^2) \frac{A^2 dA dg}{2a^3} = d(a^2) \frac{da^0 da^1 da^2}{2a^3}. \quad (1.36)$$

Дифференциал  $d^4a$ , конечно, лоренц-инвариантен.

## 2. 4-скорость и 4-импульс

Трехмерная скорость  $v$  определена как  $v = dx/dt$ . Поскольку  $t$  не является инвариантной переменной,  $v$  не преобразуется подобно пространственной компоненте 4-вектора. Чтобы построить 4-вектор скорости, необходимо взять производную от  $x = (x^\mu)$  по некоторой инвариантной переменной, связанной со временем. Естественным выбором представляется собственное время  $\tau$ , определенное выражением

$$d\tau^2 = c^{-2} dx^2 = c^{-2} (c^2 dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2). \quad (2.1)$$

Здесь квадрат  $dx^2 = dx_\mu dx^\mu$ , конечно, является инвариантом, так что и  $d\tau$  инвариантно. Далее, выражение (2.1) можно переписать в виде

$$d\tau = dt \left\{ 1 - c^{-2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\}^{1/2} = \frac{dt}{\gamma(v)}. \quad (2.2)$$

В системе покоя ( $v = 0$ ) времена  $t$  и  $\tau$  совпадают, что объясняет название «собственное время». Фактор  $\gamma$  в выражении (2.2) вызывает растяжение времени.

Таким образом, 4-скорость  $u = (u^\mu)$  определяется выражением

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma(v) \frac{dx^\mu}{dt}; \quad (2.3)$$

компоненты ее таковы:

$$u = \gamma(v)(c, \mathbf{v}). \quad (2.4)$$

Пространственная компонента  $u$  отличается от  $\mathbf{v}$  умножением на лоренц-фактор  $\gamma$ . В системе покоя  $v = 0$  пространственная компонента обращается в нуль:  $u = (c, 0)$ . Поскольку  $u$  — 4-вектор,  $u^2$  — инвариант. Действительно, из выражения (2.4) получаем  $u^2 = c^2$ , так что 4-скорость времениподобна.

Основной 4-вектор кинематики — это 4-импульс. Он определяется как

$$p = m u = m \gamma(v)(c, \mathbf{v}) = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad (2.5)$$

где  $m$  — масса покоя рассматриваемой частицы. Эквивалентность двух последних форм записи  $p$  означает, что энергия, масса покоя и скорость частицы связаны соотношением

$$E = m \gamma(v) c^2.$$

Так как  $u^2 = c^2$ , имеем

$$p^2 = m^2 c^2 = \left( \frac{E}{c} \right)^2 - \mathbf{p}^2,$$

или, что то же самое,

$$E^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + (m c^2)^2. \quad (2.6)$$

Согласно соотношению (2.5), скорость и фактор  $\gamma$  частицы связаны с ее импульсом и энергией соотношениями

$$\mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{E}, \quad \gamma(v) = \frac{E}{m c^2}, \quad \mathbf{v} \gamma(v) = \frac{\mathbf{p}}{m}. \quad (2.7)$$

Сравнивая равенства (2.5) и (1.1), находим, что энергия  $E$  и компоненты импульса  $\mathbf{p}$  преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} p'_x &= p_x, & p'_y &= p_y, \\ p'_z &= \gamma \left( p_z - \frac{v E}{c^2} \right), \\ E' &= \gamma (E - v p_z). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Полезно представить себе равенства (2.8) для фиксированных  $p_x$  и  $p_y$  в виде графиков, показанных на фиг. 4. Если относительная скорость  $v$  двух систем отсчета  $S$  и  $S'$  направлена произвольно, формулы перехода имеют вид ([52], упражнение II. 2)

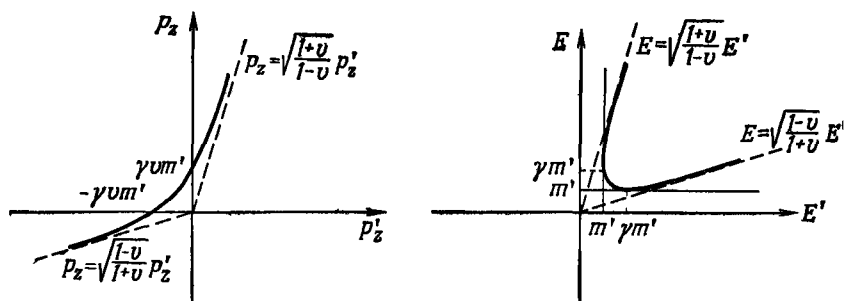
$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= \mathbf{p} + \gamma \mathbf{v} \left( \frac{\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}}{\gamma + 1} - E \right) c^{-2}, \\ E' &= \gamma (E - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Соотношения, обратные равенствам (28), получаются заменой в них  $v$  на  $-v$  и взаимной заменой штрихованных и нештрихованных переменных

В равенствах (28) можно заменить, далее,  $v$  на быстроту  $\xi$ . Зависимость между  $v$  и  $\xi$  дается соотношениями (1.9); обратная зависимость такова:

$$\xi = \ln \left( \gamma + \frac{\gamma v}{c} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + v/c}{1 - v/c}. \quad (2.10)$$

Быстрота  $\xi$  иногда удобнее, чем  $v$ , так как она аддитивна [см. (1.10)]. Примеры использования  $\xi$  приведены в гл. VII.



Фиг. 4. Связь между  $p_z$  и  $p'_z$  и между  $E$  и  $E'$  при фиксированном  $m' = -(p_x^2 + p_y^2 + m^2)^{1/2}$ .

Физический импульс  $p$  всегда положительно времениподобен, поскольку  $E > 0$ , но мы будем чисто формально рассматривать также и отрицательно времениподобные 4-импульсы. Если  $p = (E/c, \mathbf{p})$  отрицательно времениподобен, то 4-вектор  $-p = (-E/c, -\mathbf{p})$  является 4-импульсом физической частицы.

Если мы имеем ряд 4-импульсов  $p_1, p_2, \dots$ , то из них можно образовать три типа инвариантов, любой другой инвариант может быть выражен через них. Ниже перечислены эти три типа инвариантов

а. Скалярные произведения импульсов

$$p_i \cdot p_j = \frac{E_i E_j}{c^2} - \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

являются инвариантами по определению. Вместо произведения импульсов двух частиц, например  $p_1 \cdot p_2$ , обычно используют квадрат инвариантной массы двух частиц

$$s_{12} = \frac{(p_1 + p_2)^2}{c^2} = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2p_1 \cdot p_2}{c^2} \quad (2.12)$$

или инвариантный квадрат переданного импульса

$$t_{12} = (p_1 - p_2)^2 = m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 - 2p_1 \cdot p_2. \quad (2.13)$$

При заданных  $m_1$ ,  $m_2$  величины  $s_{12}$ ,  $t_{12}$  и  $p_1 \cdot p_2$  достигают экстремальных значений одновременно. При фиксированном  $p_1$  экстремум имеет место, когда

$$\frac{\partial (p_1 \cdot p_2)}{\partial p_2} = E_1 \frac{p_2}{E_2} - p_1 = 0, \quad (2.14)$$

или, как следует из равенства (2.7), когда  $v_1 = v_2$ . Равные скорости остаются равными в любой системе отсчета (упражнение II 10), следовательно, это условие лоренц-инвариантно, как и должно быть. Экстремальное значение проще всего вычислить в той системе отсчета, где  $v_1 = v_2 = 0$ . Имеем

$$p_1 \cdot p_2 \geq m_1 m_2 c^2. \quad (2.15)$$

Соответственно

$$\begin{aligned} s_{12} &\geq (m_1 + m_2)^2, \\ t_{12} &\leq (m_1 - m_2)^2 c^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Важно заметить, что равенство достигается при  $v_1 = v_2$  в любой системе отсчета.

Если один из импульсов  $p_1$  или  $p_2$  является отрицательно времениподобным, а другой — положительно времениподобным, то соотношение (2.15) должно быть заменено на

$$p_1 \cdot p_2 \leq -m_1 m_2 c^2 (\leq 0).$$

б. *Знаки энергетических компонент времениподобных 4-векторов инвариантны*, так как преобразования Лоренца ортохронны.

в Если имеются четыре или более векторов, то величина  $\varepsilon$ , определенная выражением

$$\varepsilon \equiv \varepsilon(p_i, p_j, p_k, p_l) = \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} p_i^\kappa p_j^\lambda p_k^\mu p_l^\nu, \quad (2.17)$$

является инвариантом. Здесь  $\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$  — полностью антисимметричный четырехмерный тензор [см. (A 15)]. Соответственно  $\varepsilon(p_i, p_j, p_k, p_l)$  представляет собой определитель  $4 \times 4$ , образованный из компонент 4-векторов. Чтобы проверить инвариантность  $\varepsilon$ , надо выполнить собственное преобразование Лоренца, определяемое матрицей  $L^\mu_\nu$ ,  $\det L = +1$ ,  $gL^{-1}g = L^T$ ,  $L^0_0 > 0$ . Сразу же видно, что

$$\varepsilon(Lp_i, Lp_j, Lp_k, Lp_l) = \det L \cdot \varepsilon(p_i, p_j, p_k, p_l), \quad (2.18)$$

так что  $\varepsilon$  — инвариант. Далее, просто проверить [см. приложение А, выражение (A.23)], что

$$|\varepsilon(p_i, p_j, p_k, p_l)|^2 = -\det(p_m \cdot p_n), \quad m, n = i, j, k, l. \quad (2.19)$$

Так как абсолютное значение  $\epsilon$  определяется скалярными произведениями, т. е. инвариантно,  $\epsilon$  порождает лишь один новый инвариант — *знак*  $\epsilon$ . При пространственном отражении  $(E, \mathbf{p}) \rightarrow \rightarrow (E, -\mathbf{p})$  величина  $\epsilon$  меняет знак, однако другие инварианты остаются неизменными.

### 3. Единицы и условные обозначения

Чтобы облегчить переход от специальной теории относительности к кинематике элементарных частиц, скорость света  $c$  до сих пор записывалась во всех формулах в явном виде. В дальнейшем мы везде будем полагать  $c = 1$ , как это принято в физике элементарных частиц. Это чисто формальное упрощение; оно означает лишь, что  $c$  принимается за единицу скорости.

Согласно соотношению  $E = mc^2 = m$ , масса покоя эквивалентна энергии; таким образом, масса выражается в единицах энергии. Основной единицей энергии является джоуль Дж  $= \text{Н} \cdot \text{м} = \text{кгм}^2/\text{с}^2$ , но в физике высоких энергий более распространенной единицей является электронвольт (эВ):

$$1 \text{ ГэВ} = 10^3 \text{ МэВ} = 10^9 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-10} \text{ Дж}, \quad (3.1)$$

$$1 \text{ эрг} = 10^{-7} \text{ Дж} = 624 \text{ ГэВ} = 642 \cdot 10^9 \text{ эВ}.$$

Ускорители на энергии порядка 100 ГэВ сообщают микроскопическим частицам макроскопические энергии (порядка эрга). Переводной множитель между кг и ГэВ можно получить из соотношения  $1 \text{ ГэВ} = mc^2 = m$ :

$$1 \text{ ГэВ} = 1,7827 \cdot 10^{-27} \text{ кг}. \quad (3.2)$$

Например, масса протона  $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$  или 0,938 ГэВ.

Энергии пучков ускоренных частиц всегда выражаются в электронвольтах. Выбор энергетической переменной не является единственным, и на практике применяются следующие переменные.

1. Кинетическая энергия частицы  $T = E - m$  используется главным образом в той области энергий, где энергия покоя превышает кинетическую энергию;  $T$  является обычной переменной в ядерной физике.

2. Полная энергия  $E$  частиц используется в области высоких энергий ( $E \gg 1 \text{ ГэВ}$ ).

3. Импульс  $P$  частиц (в единицах МэВ/с или ГэВ/с). Говоря об энергии, при которой ставится опыт, обычно указывают не энергию первичного пучка, а его импульс. На сепараторы, формирующие моноэнергетические пучки частиц, подаются частицы одного импульса, а не одной энергии. Заметим, что при значении импульса первичного пучка принято писать единицу измерения ГэВ/с, чтобы было ясно, что это импульс.

Все эти переменные, конечно, эквивалентны друг другу. Асимптотически при  $E \gg m$ , т. е. при  $E \gg 1$  ГэВ для адронов и  $E \gg 1$  МэВ для электронов, они становятся равными друг другу. Для фотонов это равенство справедливо при любых энергиях.

Другое упрощение, аналогичное допущению  $c = 1$ , состоит в том, что полагают  $\hbar = 1$ . К самой кинематике, где оперируют лишь с векторами импульсов, это не имеет прямого отношения. Но это удобно, если надо вычислить какой-то размер, поперечное сечение или время жизни. Выше мы отмечали, что соотношение  $E = mc^2 = m$  позволяет выразить массу в единицах кг или ГэВ. Соотношения

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc} = \frac{1}{m} \quad (3.3)$$

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{\hbar}{mc^2} = \frac{1}{m} \quad (3.4)$$

можно теперь использовать, чтобы выразить длину (метры) и время (секунды) в единицах 1/ГэВ. Чтобы вычислить переводной коэффициент, надо значение  $m$  в килограммах, соответствующее 1 ГэВ, из (3.2) подставить в равенства (3.3) и (3.4) и воспользоваться известными значениями  $\hbar$  и  $c$ . В результате получим

$$\frac{1}{\text{ГэВ}} = 0,19733 \text{ ферми} = 0,19733 \cdot 10^{-15} \text{ м}, \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{\text{ГэВ}} = 6,5822 \cdot 10^{-25} \text{ с}. \quad (3.6)$$

В соответствии с этим часто полагают

$$\begin{aligned} \hbar c &= 197,33 \text{ МэВ} \cdot \text{ферми}, \\ \hbar &= 6,5822 \cdot 10^{-22} \text{ МэВ} \cdot \text{с}. \end{aligned}$$

Длина в физике элементарных частиц чаще всего нужна для вычисления площадей или сечений. Обычно единицей сечения является миллибарн (мб):  $1 \text{ мб} = 10^{-31} \text{ м}^2 = 0,1 \text{ ферми}^2$ . Из равенства (3.5) можно получить очень полезное соотношение

$$\left( \frac{1}{\text{ГэВ}} \right)^2 = 0,38939 \text{ мб} = \frac{1}{2,568} \text{ мб}. \quad (3.7)$$

Зная массу протона  $m_p$  и массу пиона  $m_\pi$ , получаем соответственно

$$\frac{1}{m_p^2} = 0,44232 \text{ мб},$$

$$\frac{1}{m_\pi^2} = 19,987 \text{ мб}.$$



#### 4. Системы отсчета для процессов столкновения

До сих пор мы рассматривали общие свойства преобразований от одной системы отсчета к другой. В этом разделе мы введем ряд конкретных систем отсчета. Они определяются заданием начального состояния процесса столкновения. Позднее мы также рассмотрим и системы отсчета, движение которых зависит от импульсов продуктов реакций.

В двухчастичном процессе соударения сталкиваются две частицы  $a$  и  $b$  с 4-импульсами  $p_a = (E_a, \mathbf{p}_a)$  и  $p_b = (E_b, \mathbf{p}_b)$  соответственно. Величины  $p_a$  и  $p_b$  обычно фиксированы условиями эксперимента в пределах ошибок измерения. Система отсчета определяется требованием, чтобы  $p_a$  или  $p_b$  имело то или иное значение. Чаше всего употребляются:

1. *Лабораторная система* (ЛС) — система, в которой проводится эксперимент и измеряются все энергии и импульсы. Это может быть либо система отсчета, в которой пучок частиц налетает на неподвижную мишень, либо система, в которой сталкиваются два пучка (см. ниже). ЛС в известном смысле является первичной системой. Импульсы и энергии, измеренные в ней, далее преобразуются в другие системы отсчета. Мы будем обозначать величины в системе ЛС значком Л:  $E^L$ ,  $\mathbf{p}^L$ .

2. *Система центра масс* (СЦМ) — система, в которой

$$\mathbf{p}_a^* + \mathbf{p}_b^* = 0. \quad (4.1)$$

Величины в СЦМ будут отмечаться звездочкой.

3. *Система покоя мишени* или, короче, *система мишени* (СМ) — система, в которой

$$\mathbf{p}_b^M = 0. \quad (4.2)$$

Большая часть экспериментов выполняется на неподвижных мишенях; в этих случаях СМ совпадает с ЛС. По общепринятой терминологии нашу СМ следовало бы называть лабораторной системой. Однако в экспериментах на встречных пучках СМ и ЛС не совпадают; мы предпочли избавиться от этой двусмысленности.

4. *Система покоя частиц пучка* или, короче, *система пучка* (СП) определяется условием<sup>1)</sup>

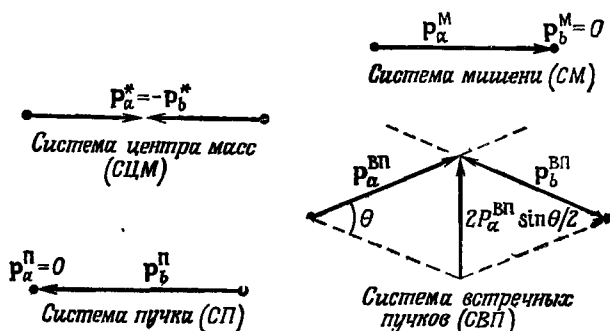
$$\mathbf{p}_a^{\Pi} = 0. \quad (4.3)$$

С кинематической точки зрения СП и СМ равноценны.

5. *Система встречных пучков* (СВП) определяется как система, в которой две частицы равной массы и равных по абсолютной величине импульсов ( $p_a^{\text{ВП}} = p_b^{\text{ВП}}$ ) сталкиваются таким

<sup>1)</sup> Эту систему называют также антилабораторной. — Прим. ред.

образом, что их импульсы образуют угол  $\pi - \theta$ , как показано на фиг. 5. При экспериментах на встречных пучках эта система совпадает с ЛС, а при  $\theta = 0$  она совпадает даже с СЦМ. Для общности можно было бы предположить, что в этой системе



Фиг. 5. Определение некоторых систем отсчета.

массы и импульсы сталкивающихся частиц могут быть и не равными друг другу.

На практике часто требуются переходы от одной из определенных выше систем к другой. В следующих разделах мы увидим, что для этого либо применяют преобразования (1.3) в явном виде, либо, еще проще, выписывают инварианты.

## 5. Взаимные переходы между системами центра масс, мишени и встречных пучков

Рассмотрим сначала переход от СМ к СЦМ. Два вектора  $p_a$  и  $p_b$  начальных частиц до столкновения могут быть выражены в СЦМ и СМ следующим образом:

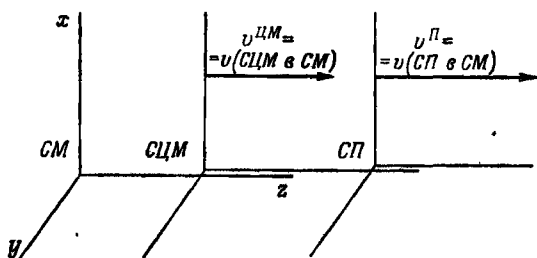
$$\begin{aligned} p_a^* &= (E_a^*, 0, 0, P_a^*), & p_a^M &= (E_a^M, 0, 0, P_a^M), \\ p_b^* &= (E_b^*, 0, 0, -P_a^*), & p_b^M &= (m_b^M, 0, 0, 0), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где направление движения выбрано вдоль оси  $z$ . Системы отсчета движутся относительно друг друга так, как показано на фиг. 6. Величины в СЦМ и СМ, конечно, связаны между собой преобразованиями Лоренца. Мы проведем эти преобразования в явной форме, а затем покажем, что часто более удобно проводить их неявно, используя инварианты.

Соотношения (1.3) для преобразования Лоренца теперь имеют вид

$$\begin{aligned} P_a^* &= \gamma_{\text{ЦМ}} (p_a^M - v_{\text{ЦМ}} E_a^M), \\ E_a^* &= \gamma_{\text{ЦМ}} (E_a^M - v_{\text{ЦМ}} p_a^M), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $v_{\text{ЦМ}}$  — скорость СЦМ в СМ. Чтобы определить  $v_{\text{ЦМ}}$ , мы поступим следующим образом. Если суммарные энергию и импульс группы частиц (состоящей из одной или нескольких частиц) в некоторой системе отсчета обозначить через  $E$  и  $p$ , то,



Фиг. 6.

согласно (2.7), скорость  $v$  группы в рассматриваемой системе отсчета определяется соотношениями

$$v = \frac{p}{E}, \quad \gamma = \frac{E}{m}, \quad \gamma v = \frac{p}{m}, \quad (5.3)$$

где  $m = (E^2 - p^2)^{1/2}$  — инвариантная масса группы частиц. Поэтому для двухчастичной системы  $p_a + p_b$  скорость СЦМ в СМ будет даваться выражением

$$v_{\text{ЦМ}} = \frac{|p_a + p_b|}{E_a + E_b} \bigg|_{p_b \rightarrow 0} = \frac{p_a^M}{E_a^M + m_b}. \quad (5.4)$$

Аналогично

$$\gamma_{\text{ЦМ}} = \frac{E_a^M + m_b}{\sqrt{s}}, \quad (5.5)$$

$$v_{\text{ЦМ}} \gamma_{\text{ЦМ}} = \frac{p_a^M}{\sqrt{s}},$$

где инвариантная масса  $\sqrt{s}$  системы  $p_a + p_b$  определяется выражением

$$s \equiv s_{ab} = (p_a + p_b)^2 = (\vec{E}_a + E_b)^2 - (p_a + p_b)^2. \quad (5.6)$$

Ее значение остается тем же в любой системе отсчета; в частности,

$$s = (E_a^* + E_b^*)^2 = (E_a^M + m_b)^2 - (p_a^M)^2 = \quad (5.7)$$

$$= m_a^2 + m_b^2 + 2m_b E_a^M. \quad (5.8)$$

Подставив выражения (5.4), (5.5) в (5.2), получаем

$$\begin{aligned} P_a^* &= \frac{m_b P_a^M}{\sqrt{s}}, \\ E_a^* &= \frac{m_a^2 + m_b E_a^M}{\sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Аналогично, применив преобразование (5.2) к  $p_b$ , находим

$$\begin{aligned} P_b^* &= \frac{m_b P_a^M}{\sqrt{s}} = P_a^*, \\ E_b^* &= \frac{m_o (E_a^M + m_b)}{\sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

В простых случаях такое преобразование Лоренца делается чисто механически, но в более сложных случаях подобная процедура утомительна. Идею более простого способа можно усмотреть из выражений (5.6) — (5.8). Они связывают все нековариантные величины, относящиеся к состоянию  $p_a + p_b$ , с инвариантом  $s$ . Следовательно, чтобы вывести соотношения между различными величинами, достаточно выразить  $s$  через каждую из них. Мы вернемся к этому подходу в следующем разделе.

Рассмотрим теперь преобразование Лоренца от системы встречных пучков (СВП) к СЦМ. Введение СВП стало полезным с тех пор, как появилась возможность ставить эксперименты на встречных пучках. Например, наше определение СВП (фиг. 5) непосредственно описывает ситуацию в накопительных кольцах со встречными пучками ЦЕРН, если импульсы сталкивающихся протонных пучков одинаковы. В случае неравных импульсов нужны лишь небольшие очевидные модификации формул. Максимальный импульс протонного пучка в накопительных кольцах равен 28 ГэВ/с, а угол пересечения  $\theta = 14,77^\circ \approx 0,2578$  рад.

Следует снова подчеркнуть, что в экспериментах на встречных пучках типа ЦЕРН система встречных пучков совпадает с лабораторной системой. Измеренные импульсы и энергии можно далее перевести в любую другую систему отсчета, например в СЦМ или систему мишени (которая до появления ускорителей на встречных пучках обычно называлась лабораторной системой). Ниже мы рассмотрим лишь переход в СЦМ.

Для преобразования в СЦМ необходимо знать скорость СЦМ в СВП (=ЛС). Так как скорость СЦМ в любой системе равна  $(p_a + p_b)/(E_a + E_b)$ , то скорость  $v^{\text{ВП}}$  СЦМ в СВП, согласно фиг. 5, дается выражением

$$v^{\text{ВП}} = v_a \sin \frac{\theta}{2}, \quad (5.11)$$

где  $v_a (= v_b)$  — скорость частицы  $a$  в лабораторной системе. Соответственно лоренц-факторы связаны соотношением

$$\gamma^{\text{ВП}} = \frac{\gamma_a}{\left(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \gamma_a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)^{1/2}}. \quad (5.12)$$

Скорость направлена вдоль  $\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b$ , как показано на фиг. 5. Преобразование Лоренца легко выполняется, если направить ось  $z$  по вектору скорости. Тогда импульс в СЦМ просто равен проекции  $P^{\text{ВП}}_1$ ):

$$P_a^* = P_a^{\text{ВП}} \cos \frac{\theta}{2}. \quad (5.13)$$

## 6. Энергии и импульсы сталкивающихся частиц, выраженные через инварианты

Теперь мы найдем связь между инвариантами  $s$ ,  $m_a$  и  $m_b$  и неинвариантными переменными  $E_a$ ,  $\mathbf{p}_a$  и  $E_b$ ,  $\mathbf{p}_b$  отдельно для каждой из систем отсчета СМ, СЦМ и СВП. Результаты для системы пучка получаются из формул для системы мишени перестановкой частиц  $a$  и  $b$ .

### а. Система мишени

Прежде всего в СМ мы имеем  $\mathbf{p}_b^{\text{М}} = 0$  и  $E_b^{\text{М}} = m_b$ . Из равенства (5.8) имеем также

$$E_a^{\text{М}} = \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_b} \quad (6.1)$$

и, следовательно,

$$(P_a^{\text{М}})^2 = (E_a^{\text{М}})^2 - m_a^2 = \frac{(s - m_a^2 - m_b^2)^2 - 4m_a^2 m_b^2}{4m_b^2}.$$

Мы перепишем этот результат в виде

$$P_a^{\text{М}} = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{2m_b}, \quad (6.2)$$

<sup>1)</sup> Здесь полезно привести вариант формулы (2.9) для преобразований Лоренца, удобный для практических применений [84, 159]. Пусть в системе отсчета, где  $p = (E, \mathbf{p})$ , задан другой 4-импульс  $p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1)$ . Тогда в системе отсчета, где  $p = (m, 0)$ , имеем  $p_1 = (E_1^*, \mathbf{p}_1^*)$ , где  $E_1^* = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_1)/m$ ,  $\mathbf{p}_1^* = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}(E_1 + E_1^*)/(E + m)$ . При обратном преобразовании из системы, где  $p = (m, 0)$ , а  $p_1 = (E_1^*, \mathbf{p}_1^*)$ , в систему, где  $p = (E, \mathbf{p})$ , имеем  $p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1)$ , где  $E_1 = (EE_1^* + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1^*)/m$ ,  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}(E_1 + E_1^*)/(E + m)$ . — Прим. ред.

введя кинематическую функцию

$$\lambda(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz = \quad (6.3)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = \quad (6.4)$$

$$= \{x - (\sqrt{y} + \sqrt{z})^2\} \{x - (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2\} = \quad (6.5)$$

$$= (\sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \times \quad (6.6)$$

$$\times (\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}) = \\ = x^2 - 2(y + z)x + (y - z)^2. \quad (6.7)$$

Особыми случаями, представляющими интерес, являются

$$\lambda(x, y, y) = x(x - 4y), \quad (6.8)$$

$$\lambda(x, y, 0) = (x - y)^2. \quad (6.9)$$

Из равенства (6.4) видно, что  $\lambda$  инвариантно относительно перестановки аргументов. Причина, по которой мы ввели величину  $\lambda$ , станет ясна в разделе 7. Иногда  $\lambda$  называют *треугольной функцией*, так как  $1/4 \{-\lambda(x, y, z)\}^{1/2}$  есть площадь треугольника со сторонами  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt{y}$ ,  $\sqrt{z}$ .

Согласно формуле (6.5), имеем

$$\lambda(s, m_a^2, m_b^2) = \{s - (m_a + m_b)^2\} \{s - (m_a - m_b)^2\}. \quad (6.10)$$

Таким образом, импульс  $p_a^M$  в формуле (6.2) действителен, если

$$\sqrt{s} \geq m_a + m_b. \quad (6.11)$$

Порог  $m_a + m_b$  есть наименьшее достижимое значение  $\sqrt{s}$ ; как было показано в конце раздела 2, равенство имеет место, когда векторы скоростей частиц  $a$  и  $b$  равны. Величину порога можно также получить, если выразить кинетическую энергию  $T_a$  частицы  $a$  в СМ через  $s$ :

$$T_a = E_a^M - m_a = \frac{s - (m_a + m_b)^2}{2m_b}.$$

«Псевдопорог»  $m_a - m_b$  играет важную роль в некоторых кинематических рассуждениях, с которыми мы встретимся ниже.

## 6. Система центра масс

В СЦМ  $p_a^* + p_b^* = 0$  означает, что

$$P_a^* = P_b^* = P^*. \quad (6.12)$$

Согласно выражению (5.7), имеем

$$\sqrt{s} = E_a^* + E_b^*. \quad (6.13)$$

Следовательно, инвариантная энергия равна полной энергии в СЦМ. Подставив (6.12) в (6.13), получим

$$\sqrt{s} = \{(P^*)^2 + m_a^2\}^{1/2} + \{(P^*)^2 + m_b^2\}^{1/2}.$$

Возводя равенство  $\sqrt{s} - E_a^* = E_b^*$  в квадрат, получаем

$$E_a^* = \frac{s + m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}}. \quad (6.14)$$

Возводя в квадрат вторично, находим

$$P^* = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{2\sqrt{s}}. \quad (6.15)$$

Тогда оставшаяся энергия  $E_b^*$  получается из равенства  $E_b^* = \sqrt{s} - E_a^*$ :

$$E_b^* = \frac{s - m_a^2 + m_b^2}{2\sqrt{s}}. \quad (6.16)$$

Отметим в качестве мнемонического правила, что в равенствах (6.14) и (6.16) для  $E_i^*$  знак плюс в числителе стоит перед  $m_i^2$ .

Легко проверить, что полученные таким образом выражения для величин в СМ и СЦМ удовлетворяют соотношениям (5.9) и (5.10), полученным явными преобразованиями Лоренца.

### в: Система встречных пучков

При экспериментах на встречных пучках инвариант  $s$  дается выражением

$$s = (E_a + E_b)^2 - |\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b|^2 = 4m^2 + 4\left(P^{\text{вп}} \cos \frac{\theta}{2}\right)^2, \quad (6.17)$$

где  $P^{\text{вп}} = P_a^{\text{вп}} = P_b^{\text{вп}}$  — лабораторный импульс частиц  $a$  и  $b$ , а  $m_a = m_b = m$ . Во втором порядке по  $\theta$  имеем

$$\sqrt{s} \approx 2E^{\text{вп}} \left(1 - \frac{\theta^2}{8}\right), \quad (6.18)$$

где  $E^{\text{вп}}$  — лабораторная энергия частиц  $a$  и  $b$  и где использовано приближение  $P^{\text{вп}} \approx E^{\text{вп}}$ . Поскольку для накопительных колец со встречными пучками ЦЕРН  $\theta^2/8 \approx 0,0083$ , поправка к полной энергии  $\sqrt{s}$  в СЦМ, обусловленная тем, что встречные пучки пересекаются под углом  $\theta$ , численно очень мала. Обращая равенство (6.17), получаем окончательно

$$\begin{aligned} P^{\text{вп}} &= \frac{(s - 4m^2)^{1/2}}{2 \cos(\theta/2)}, \\ E^{\text{вп}} &= \frac{[s - 4m^2 \sin^2(\theta/2)]^{1/2}}{2 \cos(\theta/2)}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

**Пример 1.** Полезно иметь способ численной оценки различных кинематических величин для обычных экспериментов, которые характеризуются значением импульса падающего пучка  $P_a^M$ . Когда импульсы падающих частиц достаточно велики, например  $P_a^M \geq 5$  ГэВ/с, можно пренебречь массами покоя и предположить, что  $E = P$ . Тогда равенство (5.8) дает  $s \approx 2m_b P_a^M$ . Если принять во внимание, что мишень практически во всех без исключения случаях представляет собой нуклон ( $m_b \approx 1$  ГэВ), то можно приблизительно принять, что

$$s \approx 2P_a^M \quad (\text{в единицах ГэВ}). \quad (6.20)$$

Для величин в СЦМ аналогично имеем

$$E_a^* \approx E_b^* \approx P_a^* \approx P_b^* \approx \frac{1}{2} \sqrt{s} \approx \sqrt{\frac{P_a^M}{2}}. \quad (6.21)$$

Для начального  $pp$ -состояния с  $P_a^M = 19$  ГэВ/с точные значения величин таковы:  $E_a^* = E_b^* = 3,06$  ГэВ,  $P_a^* = P_b^* = 2,91$  ГэВ/с,  $s = 37,45$  (ГэВ)<sup>2</sup>, тогда как приближение (6.21) дает  $\sqrt{P_a^M/2} = 3,08$  ГэВ,  $s = 38$  (ГэВ)<sup>2</sup>. Для качественных целей такая точность вполне достаточна.

**Пример 2.** Согласно формуле (6.20), полезная энергия ускорителя  $\sqrt{s}$  растет примерно как  $\sqrt{2P_a^M}$ . Например, при увеличении начального импульса частиц, бомбардирующих неподвижную мишень, в четыре раза полезная энергия  $\sqrt{s}$  возрастает лишь вдвое. Остаток превращается в бесполезную энергию движения центра масс. Это простое соображение явилось побудительной причиной использования встречных пучков. Если два пучка частиц с импульсами  $P^{\text{ВП}}$  сталкиваются в лаборатории «лоб в лоб», то полная энергия  $\sqrt{s}$  приблизительно равна  $2P^{\text{ВП}}$ . Согласно формуле (6.20), это соответствует эффективному импульсу падающего на неподвижную мишень пучка частиц

$$P_{\text{эфф}}^M \approx 2(P^{\text{ВП}})^2. \quad (6.22)$$

При  $P^{\text{ВП}} = 28$  ГэВ/с эффективный импульс равен  $P_{\text{эфф}}^M \approx 1570$  ГэВ/с. Выигрыш впечатляющий.

Используя формулы, выведенные в этом и предыдущем разделах, мы можем выразить параметры  $v$  и  $\gamma$  преобразования Лоренца между тремя стандартными системами — СП, СЦМ и СМ — через  $s$ ,  $m_a$  и  $m_b$ . Мы выпишем также асимптотические выражения, справедливые при  $s \rightarrow \infty$ . В наших предположениях [см. (5.1), (5.2)] системы движутся друг относительно друга



так, как показано на фиг. 6. Используя равенства  $v = p/E$ ,  $\gamma = E/m$ , имеем для преобразований между СЦМ и СМ:

$$v_{\text{ЦМ}} \equiv v (\text{СЦМ в СМ}) = \frac{P_a^{\text{М}}}{E_a^{\text{М}} + m_b} = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{s - m_a^2 + m_b^2} \approx 1 - \frac{2m_b^2}{s}, \quad (6.23)$$

$$\gamma_{\text{ЦМ}} = \frac{s - m_a^2 + m_b^2}{2m_b \sqrt{s}} \approx \frac{\sqrt{s}}{2m_b}; \quad (6.24)$$

для преобразований между СП и СМ:

$$v^{\text{П}} \equiv v (\text{СП в СМ}) = \frac{P_a^{\text{М}}}{E_a^{\text{М}}} = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{s - m_a^2 - m_b^2} \approx 1 - \frac{2m_a^2 m_b^2}{s^2}, \quad (6.25)$$

$$\gamma^{\text{П}} = \frac{p_a \cdot p_b}{m_a m_b} = \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_a m_b} \approx \frac{s}{2m_a m_b} \quad (6.26)$$

и для преобразований между СП и СЦМ:

$$v^{\text{П, ЦМ}} \equiv v (\text{СП в СЦМ}) = \frac{P_b^{\text{П}}}{E_b^{\text{П}} + m_a} = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{s + m_a^2 - m_b^2} \approx 1 - \frac{2m_a^2}{s}, \quad (6.27)$$

$$\gamma^{\text{П, ЦМ}} = \frac{s + m_a^2 - m_b^2}{2m_a \sqrt{s}} \approx \frac{\sqrt{s}}{2m_a}. \quad (6.28)$$

Конечно, любые две скорости (или фактора  $\gamma$ ), приведенные выше, определяют третью согласно формуле (1.8), если снабдить их правильными знаками. Наконец, относительные скорости можно выразить через относительные быстроты  $\xi$  согласно формуле (2.10)

$$\xi = \ln(\gamma + \gamma v). \quad (6.29)$$

Тогда  $\xi^{\text{П}} = \xi^{\text{ЦМ}} + \xi^{\text{П, ЦМ}}$  и т. д. Явный вид этих формул приведен в разделе VII. 4.

## 7. Импульсы и углы, выраженные через инварианты

Конфигурация импульсов  $p_1, \dots, p_n$  может быть описана либо через геометрические, либо через инвариантные переменные. Первые — это углы, быстроты, абсолютные величины 3-импульсов и т. д.; они определяются в заданной системе отсчета. Возможные типы инвариантных переменных выписаны в разделе 2.

В предыдущих разделах мы видели, как импульсы выражаются через инвариантные переменные. То же будет сделано сейчас с углами и быстротами. Кроме очевидного применения для связи геометрических и инвариантных переменных, эти формулы важны и в другом отношении. Чтобы выразить инвариантную величину в данной системе отсчета через величины, заданные в некоторой другой системе, часто бывает проще сначала выразить ее через инварианты, а затем результат расписать через геометрические переменные, взятые во второй системе отсчета.

Мы покажем, что с технической точки зрения для записи геометрических величин через инварианты естественно применять *определители Грама* (приложение А). Аналогично, когда позднее мы перейдем к кинематике многочастичных реакций, то увидим, что если используются инварианты, кинематика реакции с участием  $n + 1$  частицы (например, процесса  $2 \rightarrow n - 1$ ) определяется определителями Грама вплоть до  $n$ -го порядка (один из 4-импульсов исключается законом сохранения энергии-импульса). Важным преимуществом определителей Грама является то, что они соединяют идейную простоту с заметной алгебраической сложностью. Они значительно сокращают кинематические вычисления и часто позволяют написать ответ почти автоматически. Мы в этом не раз убедимся в дальнейшем.

Рассмотрим совокупность 4-векторов  $p_1, p_2, p_3$  и  $p_4$  и предположим сначала, что вектор  $p_1$  — *времениподобен*; к какому типу принадлежат другие векторы, неважно. Тогда 4-вектор  $p_1$  определяет систему отсчета, в которой  $p_1 = (m_1, 0)$ , — систему покоя  $R(p_1)$  импульса  $p_1$ . Мы рассмотрим в этой системе следующие геометрические величины, записанные в порядке возрастания их сложности:

длина  $P_2$  вектора  $p_2$ ,

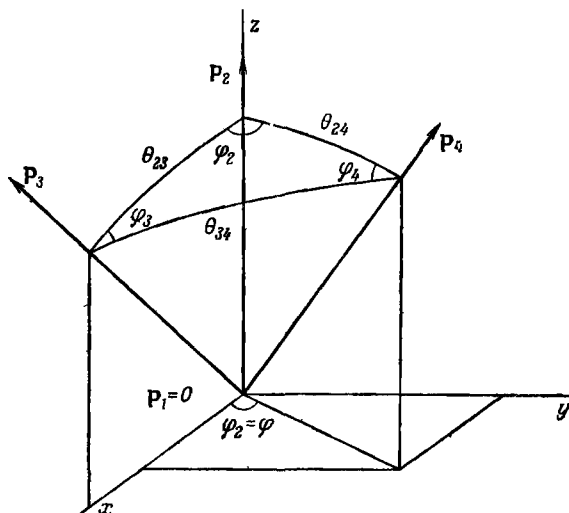
угол  $\theta_{23}$  между  $p_2$  и  $p_3$ ,

угол  $\varphi$  между плоскостями, образованными  $p_2, p_3$  и  $p_2, p_4$ .

Эти величины в точности совпадают со сферическими компонентами импульсов в соотношениях типа (1.17). Чтобы уяснить это, введем в  $R(p_1)$  такую систему координат, чтобы  $p_2$  было параллельно оси  $z$ , а  $p_3$  лежало в плоскости  $xz$  так, чтобы  $p_{3x} \geq 0$  (фиг. 7). В этой системе координат, обозначаемой  $R(p_1, p_2, p_3)$ , справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} p_1 &= (m_1, 0, 0, 0), \\ p_2 &= (E_2, 0, 0, P_2), \\ p_3 &= (E_3, P_3 \sin \theta_{23}, 0, P_3 \cos \theta_{23}), \\ p_4 &= (E_4, P_4 \sin \theta_{24} \cos \varphi, P_4 \sin \theta_{24} \sin \varphi, P_4 \cos \theta_{24}). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Энергии, конечно, определяются выражением  $E_i^2 = P_i^2 + p_i^2$ . Области изменения углов таковы:  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Если вектор  $p_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) времени подобен, то представление (1.17) означает, что  $0 \leq P_i < \infty$ ,  $m_i \leq |E_i| < \infty$ , а если он пространственно подобен, то представление (1.19) дает  $\sqrt{-t_i} \leq |P_i| < \infty$ .



Фиг. 7.

и  $-\infty < E_i < \infty$ . Теперь мы выразим компоненты в (7.1) через инварианты; полностью инвариантная запись соотношения (7.1) будет приведена ниже [см. равенства (VI.7.31)].

### а. Величина 3-импульса

Поскольку  $p_1 = 0$ , мы имеем  $p_1 \cdot p_2 = m_1 E_2$ ; следовательно,

$$E_2 = \frac{p_1 \cdot p_2}{m_1}, \quad (7.2)$$

$$P_2^2 = m_1^{-2} (p_1 \cdot p_2)^2 - p_2^2.$$

Здесь  $E_2$ ,  $P_2$  были выражены в фиксированной системе отсчета через инварианты. Равенство (7.2) далее может быть переписано в стандартной форме:

$$P_2^2 = \frac{(p_1 \cdot p_2)^2 - p_1^2 p_2^2}{p_1^2} = -\frac{1}{p_1^2} \begin{vmatrix} p_1 \cdot p_1 & p_1 \cdot p_2 \\ p_2 \cdot p_1 & p_2 \cdot p_2 \end{vmatrix} \equiv -\frac{1}{p_1^2} \Delta_2(p_1, p_2). \quad (7.3)$$

Здесь мы ввели симметричный определитель Грама  $\Delta_2(p_1, p_2)$  векторов  $p_1$  и  $p_2$  (приложение А). Поскольку  $(p_1 \cdot p_2)^2 \geq m_1^2 m_2^2$

[см. (2.15)], мы имеем  $\Delta_2 < 0$  и, следовательно,  $P_2^2 > 0$ . Используя обозначение (6.3), можем написать

$$\begin{aligned}\Delta_2(p_1, p_2) &= p_1^2 p_2^2 - \frac{1}{4} \{ (p_1 + p_2)^2 - p_1^2 - p_2^2 \}^2 = \\ &= -\frac{1}{4} \lambda \{ (p_1 + p_2)^2, p_1^2, p_2^2 \}.\end{aligned}\quad (7.4)$$

Отсюда ясен истинный смысл функции  $\lambda$ : это просто раскрытая запись определителя  $\Delta_2$ , который является более фундаментальной величиной. Следовательно,  $\lambda$  можно назвать *базисной трехчастичной кинематической функцией*, так как  $\Delta_2$  относится к реакции, в которой полное число 4-импульсов равно трем (например, распад  $1 \rightarrow 2$ ).

**Пример 1.** Для начального состояния  $a + b$  мы желаем найти  $P_a^*$  в системе отсчета, в которой  $p_a + p_b = (\sqrt{s}, 0)$ . Выражение (7.3) после замены  $p_1 \rightarrow p_a + p_b$  и  $p_2 \rightarrow p_a$  дает

$$P_a^{*2} = -\frac{1}{s} \Delta_2(p_a + p_b, p_a).$$

Из свойства (A.6) (см. приложение А) определителей следует

$$P_a^{*2} = -\frac{1}{s} \Delta_2(p_b, p_a) = \frac{1}{4s} \lambda(s, m_a^2, m_b^2).$$

Это совпадает с выражением (6.15).

### б. Угол между двумя импульсами

Теперь мы рассмотрим *полярный угол*  $\theta_{23}$  между двумя векторами  $p_2$  и  $p_3$  в системе, где  $p_1 = (m_1, 0)$ . Мы должны написать инвариантное выражение, образованное из  $p_1, p_2, p_3$ , в которое входило бы  $\theta_{23}$  в системе  $p_1 = 0$ . Очевидно, что это

$$\begin{aligned}p_2 \cdot p_3 &= E_2 E_3 - P_2 P_3 \cos \theta_{23} = \\ &= \frac{(p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_3)}{p_1^2} - \frac{\{\Delta_2(p_1, p_2) \Delta_2(p_1, p_3)\}^{1/2}}{p_1^2} \cos \theta_{23}.\end{aligned}\quad (7.5)$$

Вторая строчка следует из формул (7.2) и (7.3). Искомый угол, следовательно, равен

$$\cos \theta_{23} = \frac{(p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_3) - p_1^2 (p_2 \cdot p_3)}{\{\Delta_2(p_1, p_2) \Delta_2(p_1, p_3)\}^{1/2}}.\quad (7.6)$$

С точностью до знака числитель этого выражения равен *несимметричному определителю Грама*

$$G \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ p_1, p_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 \cdot p_1 & p_1 \cdot p_3 \\ p_2 \cdot p_1 & p_2 \cdot p_3 \end{vmatrix}.\quad (7.7)$$

Таким образом, угол между импульсами дается выражением

$$\cos \theta_{23} = - \frac{G \left( \begin{smallmatrix} p_1, p_2 \\ p_1, p_3 \end{smallmatrix} \right)}{\{\Delta_2(p_1, p_2) \Delta_2(p_1, p_3)\}^{1/2}}. \quad (7.8)$$

Синус угла  $\theta_{23}$  также изящно выражается через инварианты. Для этого неудобно пользоваться формулой  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ . Предвосхищая результат, мы лучше рассмотрим симметричный определитель Грама третьего порядка

$$\Delta_3(p_1, p_2, p_3) = \begin{vmatrix} p_1^2 & p_1 \cdot p_2 & p_1 \cdot p_3 \\ p_2 \cdot p_1 & p_2^2 & p_2 \cdot p_3 \\ p_3 \cdot p_1 & p_3 \cdot p_2 & p_3^2 \end{vmatrix}.$$

В системе покоя  $p_1$  он принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta_3(p_1, p_2, p_3) &= \begin{vmatrix} m_1^2 & m_1 E_2 & m_1 E_3 \\ m_1 E_2 & p_2^2 & p_2 \cdot p_3 \\ m_1 E_3 & p_2 \cdot p_3 & p_3^2 \end{vmatrix} = \\ &= m_1^2 \begin{vmatrix} 1 & E_2 & E_3 \\ 0 & -p_2^2 & -p_2 \cdot p_3 \\ 0 & -p_2 \cdot p_3 & -p_3^2 \end{vmatrix} = m_1^2 |p_2 \times p_3|^2 = m_1^2 p_2^2 p_3^2 \sin^2 \theta_{23}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Упрощая определитель, мы умножили первую строчку на  $E_2/m_1$  или на  $E_3/m_1$ , а затем вычли то, что получилось соответственно из второй или из третьей строчки. Используя выражение (7.3) и обозначая  $\Delta_1(p_1) = p_1^2 = m_1^2$ , получаем

$$\sin^2 \theta_{23} = \frac{\Delta_1(p_1) \Delta_3(p_1, p_2, p_3)}{\Delta_2(p_1, p_2) \Delta_2(p_1, p_3)}. \quad (7.10)$$

Различие между выражениями (7.8) и (7.10) заключается в том, что  $\Delta_3$  в выражении (7.10) дает два значения угла:  $\theta$  и  $\pi - \theta$ , тогда как выражение (7.8) дает однозначный ответ.

### в. Угол между двумя плоскостями

Полярный угол  $\theta_{23}$  был определен выше заданием двух векторов  $p_2$  и  $p_3$  в системе  $p_1 = (m_1, 0)$ . Вводя четвертый вектор  $p_4$ , мы определим *азимутальные углы*, или *углы между двумя плоскостями*. Три вектора  $p_2$ ,  $p_3$  и  $p_4$  определяют сферический треугольник, как показано на фиг. 7. Все три стороны сферического треугольника  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{34}$  и  $\theta_{42}$  определяются лишь тремя 4-векторами и, как было показано выше, могут быть записаны как

функции инвариантов. Углы  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  и  $\varphi_4$  определяются четырьмя 4-векторами, и мы хотим их тоже выразить через инварианты. Ввиду циклической симметрии задачи мы рассмотрим лишь  $\varphi = \varphi_2$ .

Легко видеть, что в векторной форме

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3) \cdot (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_4)}{|\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3| |\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_4|} \Big|_{\mathbf{p}_1=0}, \quad (7.11)$$

$$\sin \varphi = \frac{P_2 (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 \times \mathbf{p}_4)}{|\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3| |\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_4|} \Big|_{\mathbf{p}_1=0}. \quad (7.12)$$

Равенство (7.11) выражает тот факт, что  $\varphi$  есть угол между нормальными к двум плоскостям, образованным соответственно векторами  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{p}_3$  и  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{p}_4$ . Поскольку  $\varphi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ , для однозначного определения  $\varphi$  необходимы как синус, так и косинус. Неоднозначности в определении азимутального угла подробно анализируются в конце этого раздела.

Поиски инвариантной записи  $\cos \varphi$  аналогичны выводу формулы (7.8). Рассмотрим определитель  $G \begin{pmatrix} p_1, p_2, p_3 \\ p_1, p_2, p_4 \end{pmatrix}$  в системе  $p_1 = 0$  [см. (A.1)] и повторим выкладки, проведенные в (7.9):

$$\begin{aligned} G \begin{pmatrix} p_1, p_2, p_3 \\ p_1, p_2, p_4 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} m_1^2 & m_1 E_2 & m_1 E_4 \\ m_1 E_2 & p_2^2 & p_2 \cdot p_4 \\ m_1 E_3 & p_2 \cdot p_3 & p_3 \cdot p_4 \end{vmatrix} = \\ &= m_1^2 \begin{vmatrix} 1 & E_2 & E_4 \\ 0 & -p_2^2 & -p_2 \cdot p_4 \\ 0 & -p_2 \cdot p_3 & -p_3 \cdot p_4 \end{vmatrix} = \\ &= m_1^2 (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3) \cdot (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_4) = \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$= m_1^2 P_2^2 P_3 P_4 \sin \theta_{23} \sin \theta_{24} \cos \varphi. \quad (7.14)$$

Подставляя (7.10) в (7.14), получаем

$$\cos \varphi = \frac{G \begin{pmatrix} p_1, p_2, p_3 \\ p_1, p_2, p_4 \end{pmatrix}}{\{\Delta_3(p_1, p_2, p_3) \Delta_3(p_1, p_2, p_4)\}^{1/2}}. \quad (7.15)$$

Связь между углом  $\varphi$  и инвариантными переменными  $p_i \cdot p_j$ , входящими в выражение (7.15), в общем случае довольно сложная. Исключение составляет переменная  $p_3 \cdot p_4$ . Она представляет собой лишь один из членов в разложении  $G$  по минорам, и, следовательно,  $\cos \varphi$  и  $p_3 \cdot p_4$  связаны между собой линейно.

Разложение  $G$  по минорам дает

$$G \begin{pmatrix} p_1, p_2, p_3 \\ p_1, p_2, p_4 \end{pmatrix} = p_3 \cdot p_4 \Delta_2(p_1, p_2) + p_1 \cdot p_3 G \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ p_2, p_4 \end{pmatrix} - p_2 \cdot p_3 G \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ p_1, p_4 \end{pmatrix}.$$

Разрешая это равенство относительно  $p_3 \cdot p_4$  и учитывая (7.15), получаем

$$p_3 \cdot p_4 = \frac{p_1 \cdot p_3 G \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ p_2, p_4 \end{pmatrix} - p_2 \cdot p_3 G \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ p_1, p_4 \end{pmatrix}}{-\Delta_2(p_1, p_2)} - \frac{\{\Delta_3(p_1, p_2, p_3) \Delta_3(p_1, p_2, p_4)\}^{1/2}}{-\Delta_2(p_1, p_2)} \cos \varphi. \quad (7.16)$$

Конечно,  $p_3 \cdot p_4$  связано линейно и с косинусом угла  $\theta_{34}$  между  $p_3$  и  $p_4$  [см. формулу (7.5) и фиг. 7]; поэтому формулу (7.16) можно получить иначе, заменяя  $\theta_{34}$  на  $\varphi$  по теореме косинусов из сферической тригонометрии [см. (Б.4)].

Чтобы выразить  $\sin \varphi$  через инварианты, мы должны снова использовать процедуру понижения порядка определителя в системе отсчета  $p_1 = (m_1, 0)$ :

$$\Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_4) = m_1^2 \begin{vmatrix} 1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ 0 & -p_2^2 & -p_2 \cdot p_3 & -p_2 \cdot p_4 \\ 0 & -p_2 \cdot p_3 & -p_3^2 & -p_3 \cdot p_4 \\ 0 & -p_2 \cdot p_4 & -p_3 \cdot p_4 & -p_4^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -m_1^2 \{p_2 \cdot (p_3 \times p_4)\}^2 = -m_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2 \sin^2 \theta_{23} \sin^2 \theta_{24} \sin^2 \varphi. \quad (7.17)$$

Подставляя сюда (7.3) и (7.10), получаем.

$$\sin^2 \varphi = \frac{\Delta_2(p_1, p_2) \Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_4)}{\Delta_3(p_1, p_2, p_3) \Delta_3(p_1, p_2, p_4)}. \quad (7.18)$$

Совместность выражений (7.15) и (7.18) следует из известного свойства определителей [см. (А.32)].

### г. Телесный угол

Полученные выше соотношения позволяют написать элемент телесного угла

$$d\Omega_4 = d \cos \theta_{24} d\varphi, \quad (7.19)$$

определенный в системе координат  $R(p_1, p_2, p_3)$ , в инвариантной форме. Выражение (7.5) линейно связывает  $\cos \theta_{24}$  с  $p_2 \cdot p_4$ , а вы-

ражение (7.16) —  $\cos \varphi$  с  $p_3 \cdot p_4$ . Дифференцируя эти равенства, получаем

$$d(p_2 \cdot p_4) = -d \cos \theta_{24} \frac{1}{m_1^2} \{\Delta_2(p_1, p_2) \Delta_2(p_1, p_4)\}^{1/2},$$

$$d(p_3 \cdot p_4) = \sin \varphi d\varphi \frac{1}{-\Delta_2(p_1, p_2)} \{\Delta_3(p_1, p_2, p_3) \Delta_3(p_1, p_2, p_4)\}^{1/2} =$$

$$= d\varphi \{-\Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_4)\}^{1/2} \{-\Delta_2(p_1, p_2)\}^{-1/2}, \quad (7.20)$$

где  $\sin \varphi$  мы взяли из формулы (7.18). Знаки аргументов квадратных корней определяются тем, что для физических 4-векторов  $\Delta_2 \leq 0$ ,  $\Delta_3 \geq 0$ ,  $\Delta_4 \leq 0$  [согласно равенствам (7.3), (7.10) и (7.17)]. Заметим, что в формуле (7.16) величина  $p_3 \cdot p_4$  изменяется от наименьшего до наибольшего значения при изменении  $\cos \varphi$  от  $-1$  до  $+1$ , или  $\varphi$  от  $\pi$  до  $0$ . Однако так как  $\varphi$  — азимутальный угол, то интервал изменения  $\varphi$  простирается от  $0$  до  $2\pi$ . Таким образом, для каждого значения  $p_3 \cdot p_4$  получаются два значения  $\varphi$  ( $\varphi$  и  $2\pi - \varphi$ ), соответствующие отражению  $p_4$  относительно плоскости  $xz$  на фиг. 7. Приняв во внимание эту двузначность, мы получим из (7.20)

$$d\Omega_4 = d \cos \theta_{24} d\varphi = \frac{2m_1^2}{\{-\Delta_2(p_1, p_4)\}^{1/2}} \frac{d(p_2 \cdot p_4) d(p_3 \cdot p_4)}{\{-\Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_4)\}^{1/2}}. \quad (7.21)$$

Пределы интегрирования по  $p_2 \cdot p_4$  и  $p_3 \cdot p_4$  следуют из (7.5) и (7.16). В этих пределах  $\Delta_2 < 0$ ,  $\Delta_4 < 0$ .

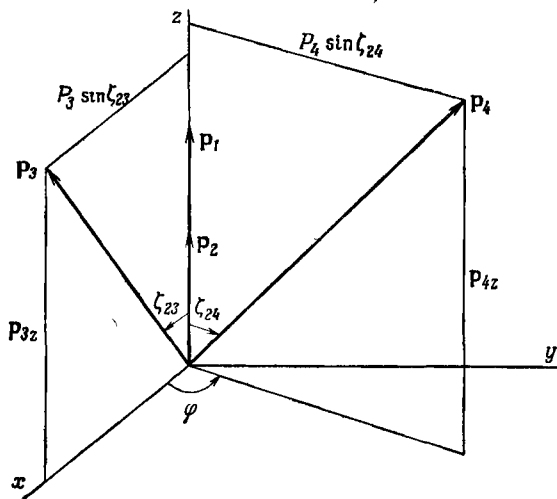
Выше в этом разделе импульс  $p_1$  предполагался времениподобным. Случай *пространственноподобного*  $p_1$  нам понадобится для некоторых теоретических построений в разделе VI.3. Стандартной системой отсчета  $S(p_1)$  в этом случае является система, в которой  $p_1 = (0, 0, 0, \sqrt{-t_1})$ ; результаты, полученные выше для времениподобного  $p_1$ , следует видоизменить по аналогии с тем, как мы переходили от фиг. 3, а к фиг. 3, б. Этот переход достаточно ясен, и мы ограничимся лишь упоминанием основных результатов. Если оси координат связаны с векторами  $p_2$  и  $p_3$ , как и выше, то геометрические переменные определяются следующим представлением (фиг. 8):

$$\begin{aligned} p_1 &= (0, 0, 0, \sqrt{-t_1}), \\ p_2 &= (P_2, 0, 0, p_{2z}), \\ p_3 &= (P_3 \operatorname{ch} \xi_{23}, P_3 \operatorname{sh} \xi_{23}, 0, p_{3z}), \\ p_4 &= (P_4 \operatorname{ch} \xi_{24}, P_4 \operatorname{sh} \xi_{24} \cos \varphi, P_4 \operatorname{sh} \xi_{24} \sin \varphi, p_{4z}), \end{aligned} \quad (7.22)$$

где  $p_{iz}^2 = P_i^2 - p_i^2$ . Вместо  $P_i$ ,  $\theta_{2i}$  и  $\varphi$  (фиг. 7) теперь геометрическими переменными являются  $P_i$ ,  $\xi_{2i}$  и  $\varphi$  (фиг. 8). Области изменения их определяются сравнением с выражениями (1.18) и (1.20):  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \xi < \infty$  и для  $p_i^2 > 0$   $m_i \leq P_i < \infty$ .



Для  $p_i^2 < 0$  ситуация несколько сложнее, так как здесь нужно по-разному параметризовать ветви  $p_{iz}^2 + p_i^2 < 0$  и  $p_{iz}^2 + p_i^2 > 0$ ; мы не будем подробно рассматривать этот случай. Искомые выражения для  $P_2$ ,  $\zeta_{23}$  и  $\varphi$  непосредственно вытекают из следую-



Фиг. 8. Псевдосферические координаты для  $p_4$  в системе координат  $S(p_1, p_2, p_3)$ . 4-вектор  $p_1$  пространственноподобен, его 0-компонента в этой системе равна нулю. Переменные  $P_i$  определяются равенством  $P_i^2 = p_{iz}^2 + p_i^2$ .

щих преобразований определителей Грама [в системе координат  $S(p_1, p_2, p_3)$ , определенной представлением (7.22)]:

$$\Delta_1(p_1) = t_1,$$

$$\Delta_2(p_1, p_2) = \begin{vmatrix} t_1 & \sqrt{-t_1} P_{2z} \\ \sqrt{-t_1} P_{2z} & p_2^2 \end{vmatrix} = -t_1 \begin{vmatrix} -1 & P_{2z} \\ 0 & P_2^2 \end{vmatrix} = t_1 P_2^2, \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta_3(p_1, p_2, p_3) &= \begin{vmatrix} t_1 & \sqrt{-t_1} p_{2z} & \sqrt{-t_1} p_{3z} \\ \sqrt{-t_1} p_{2z} & p_2^2 & P_2 P_3 \operatorname{ch} \zeta_{23} - p_{2z} p_{3z} \\ \sqrt{-t_1} p_{3z} & P_2 P_3 \operatorname{ch} \zeta_{23} - p_{2z} p_{3z} & p_3^2 \end{vmatrix} = \\ &= -t_1 \begin{vmatrix} -1 & p_{2z} & p_{3z} \\ 0 & P_2^2 & P_2 P_3 \operatorname{ch} \zeta_{23} \\ 0 & P_2 P_3 \operatorname{ch} \zeta_{23} & P_3^2 \end{vmatrix} = t_1 P_2^2 P_3^2 \operatorname{sh}^2 \zeta_{23}, \end{aligned}$$

$$\Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_4) = t_1 P_2^2 P_3^2 P_4^2 \operatorname{sh}^2 \zeta_{23} \operatorname{sh}^2 \zeta_{24} \sin^2 \varphi.$$

Несимметричные определители Грама вычислены в приложении А. Окончательно мы находим, что

$$dg_4 = d \operatorname{ch} \xi_{24} d\varphi \quad (7.24)$$

в инвариантной форме дается тем же выражением (7.21), что и  $d\Omega_{24}$  (при  $m_1^2 = t_1$ ).

Наконец, мы рассмотрим двузначность в определении азимутальных углов по формулам (7.11), (7.12). На практике часто приходится улаживать знаки и порядке умножения векторов  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{p}_3$  и  $\mathbf{p}_4$ . Если сохранить направление  $+\mathbf{p}_2$  в качестве направления полярной оси и по-разному выбирать знаки и порядок перемножения векторов при составлении векторного произведения, то азимутальные углы будут от этого меняться на  $\pi$  или на  $2\pi$  или менять знак. Если обозначить совокупность векторов, определяющую  $\varphi = \varphi_2$  согласно формулам (7.11), (7.12), через  $(\mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)$ , так что

$$(\mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \rightarrow \varphi,$$

то [см. также выражение (V. 6.8)] легко видеть, что

$$\begin{aligned} (-\mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) &\rightarrow 2\pi - \varphi, & (\mathbf{p}_2; -\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) &\rightarrow \pi + \varphi, \\ (\mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, -\mathbf{p}_4) &\rightarrow \pi + \varphi, & (-\mathbf{p}_2; -\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) &\rightarrow \pi + \varphi, \\ (-\mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, -\mathbf{p}_4) &\rightarrow \pi - \varphi, & (\mathbf{p}_2; -\mathbf{p}_3, -\mathbf{p}_4) &\rightarrow \varphi, \\ (-\mathbf{p}_2; -\mathbf{p}_3, -\mathbf{p}_4) &\rightarrow 2\pi - \varphi, & (\mathbf{p}_2; \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_3) &\rightarrow 2\pi - \varphi. \end{aligned} \quad (7.25)$$

## 8. Детальное рассмотрение преобразования Лоренца вектора 4-импульса

Рассмотрим теперь преобразование произвольного 4-импульса  $p$ ,  $p^2 = m^2$  из системы отсчета, в которой он имеет форму  $p = (E^*, \mathbf{p}^*)$ , в систему, где он имеет вид  $p = (E, \mathbf{p})$ . Как это видно из наших обозначений, для простоты мы будем считать первую систему отсчета системой центра масс (СЦМ), а вторую — системой мишени (СМ), но, конечно, рассмотрение применимо к любым двум системам. Вектор  $p$  большей частью является 4-импульсом одной из частиц в конечном состоянии, возникшем после столкновения или распада.

В зависимости от задачи пространственную компоненту  $\mathbf{p}$  можно представить либо в декартовых, либо в полярных координатах:

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = \quad (8.1)$$

$$= P(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad (8.2)$$

и аналогично  $\mathbf{p}^*$ . Мы выберем направление движения СЦМ в СМ за положительное направление оси  $z$  и одновременно

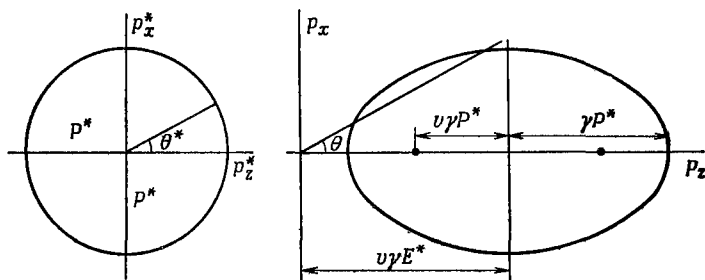
за полярную ось. Соответственно  $z$ -компонента  $\mathbf{p}$  называется также продольной компонентой  $q$  вектора  $\mathbf{p}$ :

$$q = p_z = P \cos \theta. \quad (8.3)$$

Аналогично поперечная компонента  $r$  вектора  $\mathbf{p}$  определяется выражением

$$r = (p_x^2 + p_y^2)^{1/2} = P \sin \theta. \quad (8.4)$$

Обычно наблюдается цилиндрическая симметрия относительно оси  $z$ ; существенно лишь значение  $r$ , а не  $p_x$ ,  $p_y$  по отдельности.



Фиг. 9. Сфера импульсов  $P^* = \text{const}$  до и после преобразования Лоренца.

Если  $v$  — скорость СМ в СЦМ и  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ , то преобразования Лоренца (2.8) в декартовых координатах имеют вид

$$p_x = p_x^*, \quad p_y = p_y^*, \quad (8.5)$$

$$p_z = \gamma p_z^* + \gamma v E^*, \quad (8.6)$$

$$E = \gamma E^* + \gamma v p_z^*. \quad (8.7)$$

Если обратные соотношения выразить в полярных координатах, то мы получим

$$P^* \sin \theta^* = P \sin \theta, \quad (8.8)$$

$$P^* \cos \theta^* = \gamma P \cos \theta - \gamma v E, \quad (8.9)$$

$$E^* = -\gamma v P \cos \theta + \gamma E. \quad (8.10)$$

Соотношения (8.5) — (8.7) или (8.8) — (8.10) содержат все, что нужно для детального анализа изменений импульса при преобразованиях Лоренца [6, 16\*, 37, 52].

Удобно начать с переменных  $P^*$  и  $E^*$ , которые не зависят от направления  $\mathbf{p}^*$ , т. е. рассмотреть преобразование сферы в СЦМ (фиг. 9):

$$\mathbf{p}^{*2} = P^{*2} = p_x^{*2} + p_y^{*2} + p_z^{*2} = \text{const}. \quad (8.11)$$

В дальнейшем величины  $P^*$  и  $E^*$  будут нередко выражаться через другие исходные величины, например через массы участвующих в реакции частиц, но пока это просто некоторые заданные числа, связанные тождеством  $E^{*2} = P^{*2} + m^2$ . Вследствие цилиндрической симметрии задачи достаточно выяснить, как преобразуется окружность радиуса  $P^*$  — сечение сферы (8.11) плоскостью  $xz$ . Для ясности мы разобьем анализ на отдельные шаги.

### а. Преобразование азимутального угла

Из соотношений (8.5) имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{p_y^*}{p_x^*} = \operatorname{tg} \varphi^*,$$

так что

$$\varphi = \varphi^*. \quad (8.12)$$

Это весьма полезный результат. Общая формулировка его такова: если преобразование Лоренца производится вдоль полярной оси, то азимутальный угол при этом не меняется.

### б. Преобразование сферы (8.11) в декартовых координатах

Чтобы выразить уравнение (8.11) через  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ , перепишем выражение (8.6) следующим образом:

$$p_z^* = \frac{1}{\gamma} p_z - v E^*. \quad (8.13)$$

Заметим, что  $p_z^*$  выражается через  $p_z$  и постоянную величину  $E^*$ . Подставим (8.5) и (8.13) в уравнение (8.11); мы найдем, что сфера (8.11) преобразуется в эллипсоид [16] (фиг. 9)

$$\frac{p_x^2 + p_y^2}{a^2} + \frac{(p_z - h)^2}{b^2} = 1, \quad (8.14)$$

где

$$a = P^*, \quad b = \gamma P^*, \quad h = \gamma v E^*. \quad (8.15)$$

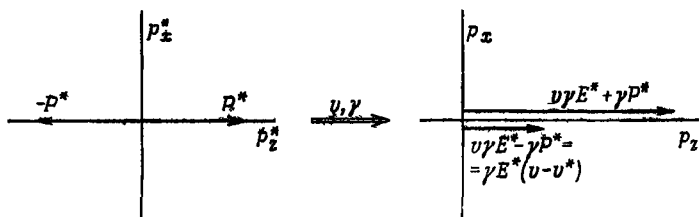
Расстояние  $l$  между фокусом и центром эллипсоида и его эксцентриситет  $\varepsilon$  даются выражениями

$$l = (b^2 - a^2)^{1/2} = \gamma v P^*, \quad (8.16)$$

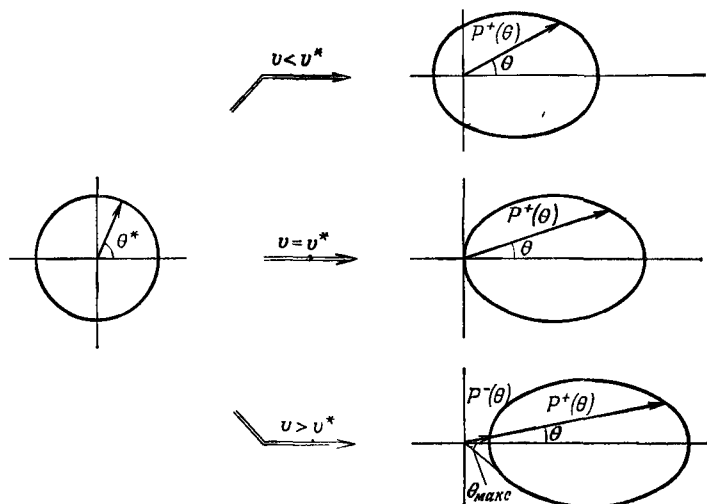
$$\varepsilon = \frac{l}{b} = v.$$

Этот результат легко понять качественно. При преобразовании Лоренца поперечные размеры сферы (8.11) остаются неизменными, тогда как в продольном направлении она расширяется в  $\gamma$  раз и смещается на  $\gamma v E^*$ .

Точки пересечения эллипсоида (8.14) с осью  $z$  найдем, взяв два вектора импульса СЦМ в положительном и отрицательном



Фиг. 10. Преобразование импульса параллельно оси  $z$  (показан случай  $v > v^*$ ).



Фиг. 11. Классификация преобразованных эллипсоидов импульсов.

Скорость частицы в СЦМ равна  $v^* = P^*/E^*$ ,  $v$  — параметр преобразования Лоренца.

направлениях оси  $z$  (фиг. 10) и преобразовав их при помощи соотношения (8.6). Получим

$$\begin{aligned} -P^* &\rightarrow \gamma(-P^* + vE^*) = \gamma E^*(v - v^*), \\ P^* &\rightarrow \gamma(P^* + vE^*) = \gamma E^*(v + v^*), \end{aligned} \quad (8.17)$$

где  $v^* = P^*/E^*$  — скорость частицы в СЦМ. Мы видим, что эллипсоиды импульсов можно разбить на три класса (фиг. 11) в зависимости от относительной величины  $v$  и  $v^*$ :

- класс 1:  $v < v^*$ , начало координат внутри эллипсоида;
- класс 2:  $v = v^*$ , начало координат на эллипсоиде;
- класс 3:  $v > v^*$ , начало координат вне эллипсоида.

Естественно, классификация эллипсоидов импульсов зависит от скоростей. Предположим, что частица движется в отрицательном направлении оси  $z$  со скоростью  $v^* = P^*/E^*$ . Чтобы изменить направление ее движения на противоположное, очевидно, надо перейти в систему отсчета, движущуюся в СЦМ против движения частицы со скоростью  $v$ , большей чем  $v^*$ . Далее, в эллипсоидах класса 3, как это видно из фиг. 11, каждому углу  $\theta$  отвечают два угла  $\theta^*$  и, кроме того, существует максимальный угол вылета  $\theta_{\text{макс}}$ . Эти свойства проще всего исследовать, пользуясь полярными координатами.

Разбиение эллипсоидов импульсов на различные классы имеет практическое значение, так как частицы, эллипсоиды импульсов которых принадлежат к классу 1, могут двигаться в лабораторной системе (или в СМ) во всех направлениях, тогда как частицы, эллипсоиды импульсов которых принадлежат к классу 3, летят лишь в переднюю полусферу. Чем меньше масса частицы и чем больше ее скорость  $v^*$ , тем скорее можно ожидать, что она относится к классу 1. В частности, эллипсоиды импульсов частиц с нулевой массой (например, фотонов) всегда относятся к классу 1.

### в. Преобразование сферы (8.11) в полярных координатах

Теперь мы проведем несколько более сложные выкладки, чем выше, хотя по существу будем говорить о том же самом, лишь в другой форме. В полярных координатах сфера в СЦМ (8.11) записывается просто как  $P^* = \text{const}$ , т. е.  $P^*$  не зависит от  $\theta^*$ . В другой же системе отсчета импульс  $P$  зависит от  $\theta$  (фиг. 9). Эту зависимость легче всего найти из соотношения (8.10), переписав его в виде

$$E^* + v\gamma P \cos \theta = \gamma (P^2 + m^2)^{1/2}, \quad (8.18)$$

возведя в квадрат и решая относительно  $P = P(\theta)$ . Выбор соотношения (8.10) связан с тем, что в нем присутствуют лишь  $P$ ,  $\cos \theta$  и некоторые постоянные величины. После ряда алгебраических преобразований из (8.18) получаем

$$\frac{P^\pm}{P^*} = \frac{\cos \theta (g^* \pm \sqrt{D})}{\gamma (1 - v^2 \cos^2 \theta)}, \quad (8.19)$$

или

$$\frac{P^\pm}{m} = \frac{v\gamma^* \cos \theta \pm (v^{*2}\gamma^{*2} - v^2\gamma^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}{\gamma (1 - v^2 \cos^2 \theta)}, \quad (8.20)$$

где

$$D = 1 + \gamma^2 (1 - g^{*2}) \tan^2 \theta = \frac{v^{*2}\gamma^{*2} - v^2\gamma^2 \sin^2 \theta}{v^{*2}\gamma^{*2} \cos^2 \theta} \quad (8.21)$$

и, как уже было определено выше,

$$v^* = \frac{P^*}{E^*}, \quad \gamma^* = \frac{E^*}{m}, \quad v^* \gamma^* = \frac{P^*}{m},$$

$v$  — скорость СЦМ в СМ,  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ . Мы ввели также величину [37]

$$g^* = \frac{v}{p^*/E^*} = \frac{v}{v^*} = \frac{\text{скорость СМ в СЦМ}}{\text{скорость частицы в СЦМ}}. \quad (8.22)$$

При  $g^* < 1$ ,  $g^* = 1$  и  $g^* > 1$  получаются соответственно эллипсоиды классов 1, 2 и 3.

Аналогично  $E^2 = P^2 + m^2$  как функция  $\theta$  дается выражением

$$\frac{E^\pm}{E^*} = \frac{1 \pm v v^* \cos^2 \theta \sqrt{D}}{\gamma (1 - v^2 \cos^2 \theta)}, \quad (8.23)$$

или

$$\frac{E^\pm}{m} = \frac{\gamma^* \pm v \cos \theta (v^* \gamma^* - v^2 \gamma^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}{\gamma (1 - v^2 \cos^2 \theta)}. \quad (8.24)$$

В этих выражениях для  $P^\pm$  и  $E^\pm$  содержатся, например, хорошо известные соотношения между углом рассеяния конечных частиц и их импульсом (или энергией) в процессах столкновения типа  $2 \rightarrow 2$  [см. формулы (IV.3.8), (IV.3.9)].

Наличие или отсутствие физического смысла у обоих решений  $P^\pm$  связано с проведенной выше классификацией эллипсоидов. Из формулы (8.19) и фиг. 12 видно, что максимальное значение  $\theta_{\text{макс}}$  угла  $\theta$  получается в том случае, когда оба корня  $P^\pm$  совпадают друг с другом, т. е. когда  $D = 0$ . Согласно (8.21), это дает

$$\text{tg } \theta_{\text{макс}} = \gamma^{-1} (g^{*2} - 1)^{-1/2}, \quad (8.25)$$

или

$$\sin \theta_{\text{макс}} = \frac{\gamma^* v^*}{\gamma v}. \quad (8.26)$$

Подстановка в выражение (8.24) дает

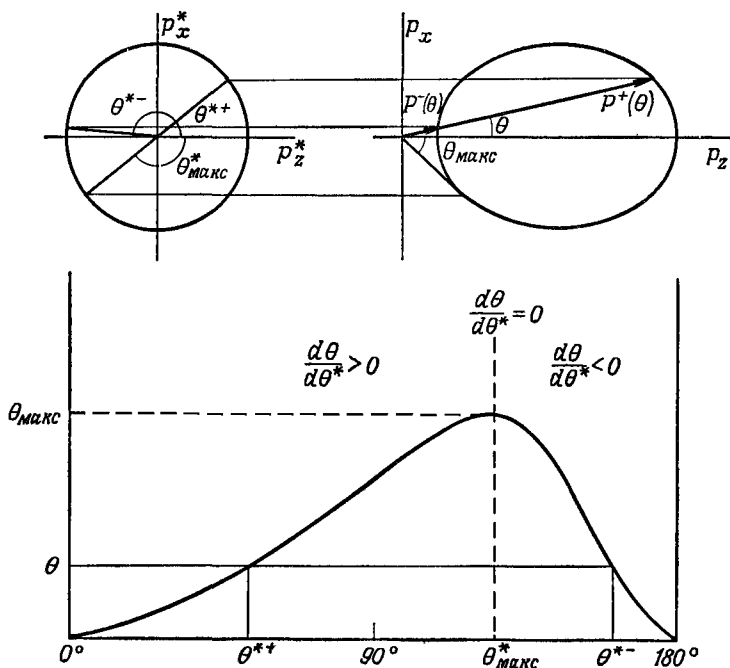
$$\frac{E}{m} = \frac{\gamma}{\gamma^*} \quad \text{при} \quad \theta = \theta_{\text{макс}}. \quad (8.27)$$

Максимум возможен лишь при  $g^* \geq 1$ , или  $v \geq v^*$ , т. е. когда эллипсоид импульсов принадлежит к классу 2 или 3 (фиг. 11). В частности, для эллипсоидов класса 2  $g^* = 1$ ,  $v = v^*$ ,  $\theta_{\text{макс}} = 90^\circ$ . Из выражения (8.21) видно также, что

$$g^{*2} - D = (g^{*2} - 1)(1 + \gamma^2 \text{tg}^2 \theta),$$

так что знак разности  $g^* - \sqrt{D}$  или, что то же самое, знак  $P^-$  совпадает со знаком  $g^{*2} - 1$ . Следовательно, при  $g^* < 1$  он

отрицателен, так что для эллипсоидов класса 1 лишь  $P^+$  соответствует физическому решению.



Фиг. 12. Соответствие между полярными углами  $\theta$  и  $\theta^*$  в двух системах отсчета.

Максимальное значение  $\theta$  дается формулой  $\operatorname{tg} \theta_{\max} = 1/\gamma(g^{*2}-1)^{1/2}$ , а соответствующее значение  $\theta^*$  — формулой  $\cos \theta_{\max}^* = -1/g^*$ . Рисунок относится к случаю 3, когда  $v > v^*$ .

Когда  $m = 0$ , выражения (8.20) и (8.24) непосредственно неприменимы. Вместо них после ряда выкладок мы получаем

$$P = E = \frac{P^*}{\gamma(1 - v \cos \theta)}. \quad (8.28)$$

Если ввести длину волны частицы с нулевой массой (фотона) с помощью соотношения  $E = h(c/\lambda) = 2\pi/\lambda$ , то вместо (8.28) можно написать

$$\frac{\lambda}{\lambda^*} = \gamma(1 - v \cos \theta). \quad (8.29)$$

Предположим в качестве простого примера, что фотон излучается в направлении Земли небесным телом, удаляющимся от



нее со скоростью  $v$ . Тогда в выражении (8.29)  $\cos \theta = -1$  и

$$\frac{\lambda}{\lambda^*} = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} > 1.$$

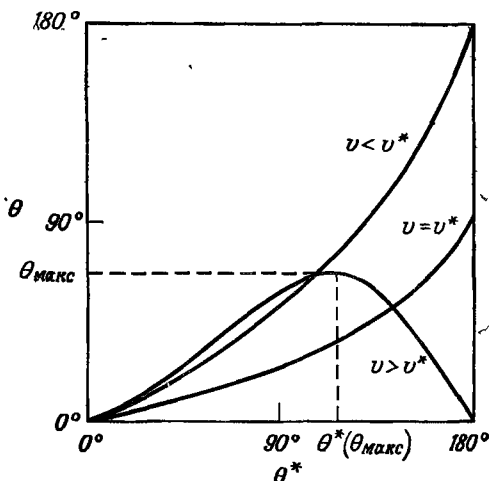
Это релятивистская формула эффекта Доплера.

### г. Преобразование полярного угла

Преобразование полярного угла  $\theta$  легко получить, разделив выражение (8.8) на обращенное равенство (8.9)  $P \cos \theta = \gamma P^* \cos \theta^* + \gamma v E^*$ :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta^*}{\gamma (\cos \theta^* + g^*)}. \quad (8.30)$$

Эта формула достаточно проста, так как  $g^* = v/v^*$  не зависит



Фиг. 13. Качественная зависимость  $\theta$  от  $\theta^*$  в трех случаях:  $v < v^*$ ,  $v = v^*$  и  $v > v^*$ .

от  $\theta^*$ . Чтобы написать обратное преобразование, можно разделить (8.8) на (8.9). Тогда мы получаем

$$\operatorname{tg} \theta^{\pm} = \frac{\sin \theta}{\gamma \{\cos \theta - v/(P^{\pm}/E^{\pm})\}}. \quad (8.31)$$

Но здесь сама скорость  $P^{\pm}/E^{\pm}$  частицы в системе мишени также зависит от  $\theta$  посредством выражений (8.19) и (8.23). Следовательно, удобнее непосредственно обратить равенство (8.30), решив его относительно  $\cos \theta^*$ :

$$\cos \theta^{\pm} = \frac{-g^* \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \theta \pm \sqrt{D}}{1 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \theta}, \quad (8.32)$$

где  $D$  дается выражением (8.21); для сравнения с выражениями (8.19) и (8.23) полезно воспользоваться тождеством

$$1 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{\gamma^2}{\cos^2 \theta} (1 - v^2 \cos^2 \theta). \quad (8.33)$$

Угол  $\theta^*$  ( $\theta_{\text{макс}}$ ) в СЦМ, соответствующий максимальному углу в СМ, согласно равенствам (8.25) и (8.32), определяется выражением

$$\cos \theta^* (\theta_{\text{макс}}) = -\frac{1}{g^*} = -\frac{v^*}{v}. \quad (8.34)$$

Это выражение имеет физический смысл лишь при  $g^* \geq 1$ .

Поведение решений (8.30) и (8.32) в плоскости  $\theta^* \theta$  качественно показано на фиг. 13 для эллипсоидов всех трех классов, а для эллипсоидов класса 3 — более детально на фиг. 12. Фиг. 12 и 13 надо рассматривать в сочетании с фиг. 11.

### Упражнения

II. 1. Стенфордский линейный ускоритель длиной 3 км ускоряет электроны до энергии  $E = 20$  ГэВ. Энергия электрона пропорциональна пройденному расстоянию. Какова полная длина ускорителя, «видимая» электроном?

II. 2. Выведите формулу преобразования Лоренца, обобщающую (1.1) на случай, когда скорость системы  $S'$  в  $S$  имеет произвольное направление. Используйте то обстоятельство, что компоненты  $x$ , перпендикулярные  $v$ , остаются неизменными, в то время как параллельные компоненты преобразуются аналогично величине  $z$ .

II. 3. а) При каких максимальных значениях  $v$  и  $\gamma$  можно использовать соотношение  $E = m + p^2/2m$  с ошибкой, меньшей чем  $v \cdot p^2/2m$ ?

б) При каких максимальных значениях  $v$  и  $\gamma$  можно пользоваться приближенным равенством  $E \approx p$ , чтобы ошибка была меньше, чем  $v \cdot p$ ? Сформулируйте условия, при которых справедливы нерелятивистские и релятивистские приближения, если  $v = 1\%$ .

II. 4. Имеются три частицы — электрон, пион и фотон — с импульсами 1 ГэВ/с. За какое время каждая из них пройдет расстояние 3 м?

II. 5. 4-ускорение  $a^\mu$  определяется выражением

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}.$$

а) Найдите  $a^0$  и  $a$ .

б) Проверьте, что  $a \cdot u = 0$ .

в) Вычислите инвариант  $a \cdot a$ , если частица с 4-ускорением  $a^\mu$  движется прямолинейно.

II. 6. В протон-протонном соударении при  $19 \text{ ГэВ/с}$  ( $\sqrt{s} = 6,12 \text{ ГэВ}$ ) в конечном состоянии наблюдался протон с импульсом  $4 \text{ ГэВ/с}$  под углом  $30^\circ$  относительно направления первоначального пучка. Каковы энергия и импульс образованного протона в системе центра масс?

II. 7. Предположим, что эксперимент по протон-протонному рассеянию проводится при фиксированном импульсе падающего пучка  $P_a^M$ , и рассмотрим вектор импульса конечной частицы, который в системе центра масс перпендикулярен направлению первичного пучка. Если его величина изменяется от нуля до максимального значения (определите это значение), то как соответствующий вектор изменяется в системе мишени? Сделайте чертеж, взяв численные значения из упражнения II. 6.

II. 8. Проверьте правильность решений в упражнениях II. 6 и II. 7, вычислив величину преобразованного вектора импульса как по формуле  $P = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2}$ , так и по формуле  $P = (E^2 - m^2)^{1/2}$ .

II. 9. Рассмотрите преобразование Лоренца 4-импульса от системы отсчета  $S'$  к системе  $S$  ( $S'$  движется в системе  $S$  со скоростью  $v$  параллельно оси  $+z$ ) и разложите 4-импульс на поперечную [ $r = (p_x^2 + p_y^2)^{1/2}$ ] и продольную ( $q = p_z$ ) составляющие.

а) Как преобразуются векторы с  $q' = \text{const}$  из системы  $S'$  в  $S$ , т. е. как преобразуется плоскость  $q' = \text{const}$ ?

б) Как преобразуются векторы с  $r' = \text{const}$ , т. е. как преобразуется цилиндр  $r' = \text{const}$ ?

II. 10. Пусть две частицы имеют одинаковые скорости (по направлению и величине) в некоторой системе отсчета. Каким образом связаны их скорости в другой системе отсчета? Что произойдет, если их скорости заменить на 3-импульсы?

II. 11. Покажите, что при  $m = 0$  соотношение (8.32), определяющее  $\theta^*$  через  $\theta$ , может быть переписано в виде

$$\cos \theta^* = \frac{\cos \theta - v}{1 - v \cos \theta}.$$

II. 12. а) Ширина  $\eta$ -мезона равна  $\Gamma_\eta \approx 2,6 \text{ КэВ}$ . Каково время жизни  $\eta$ -мезона?

б) Время жизни  $\pi^0$ -мезона равно  $T_{\pi^0} \approx 0,89 \cdot 10^{-16} \text{ с}$ . Какова ширина  $\pi^0$ -мезона?

II. 13. Выведите формулу преобразования Лоренца для 3-скорости  $\mathbf{v}$ , используя а) определение  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$  и трансформационные свойства  $x^\mu$ , б) трансформационные свойства 4-скорости.

II. 14. Рассмотрите преобразование от системы мишени ( $\mathbf{p}_b = 0$ ) к системе пучка ( $\mathbf{p}_a = 0$ ). Каковы параметры преобразования? Как скорость  $v_a^M$  частица  $a$  в СМ связана со скоростью  $v_b^P$  частицы  $b$  в СП?

II. 15. Выражение (7.10) определяет  $\sin^2 \theta_{23}$ , а выражение (7.8) —  $\cos \theta_{23}$  через инварианты. Покажите прямым вычислением, что эти результаты совместимы.

II. 16. Прямым вычислением компонент векторов в системе  $p_1 = 0$  покажите, что скалярное произведение двух векторов типа  $c_v = \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} p_1^\kappa p_2^\lambda p_3^\mu$  [приложение А, формула (А.16)] дает  $G(p_1, p_2, p_3)$  [формула (А.30)].

II. 17. Пусть  $A$  есть матрица  $4 \times 4$ , образованная компонентами 4-векторов  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , а  $g = (g^{\mu\nu})$  — метрический тензор. Покажите, что

$$\Delta_4 = \text{Det}(AgA^T) = -(\text{Det } A)^2.$$

II. 18. Покажите, что если импульсы  $p_a$  и  $p_b$  параллельны, то разность  $E_a p_b - p_a E_b$  есть инвариант относительно лоренцевых сдвигов вдоль  $p_a$  и величина этой разности равна

$$E_a p_b - p_a E_b = \{-\Delta_2(p_a, p_b)\}^{1/2} = \frac{1}{2} \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2).$$

Заметим, что разность скоростей  $v_b - v_a$  не инвариантна относительно этого преобразования, а комбинация  $E_a E_b (v_b - v_a)$  — инвариантна.

II. 19. Пусть  $w$  и  $w'$  — значения скорости в системах  $S$  и  $S'$ ,  $v$  — относительная скорость движения систем  $S$  и  $S'$ , а углы между  $w$  и  $v$  и между  $w'$  и  $v$  равны  $\theta$  и  $\theta'$ . Обозначив быстроты, соответствующие скоростям  $v, w$  и  $w'$ , через  $\xi, \zeta$  и  $\zeta'$ , докажите, что

$$\begin{aligned} \gamma(w') &= \gamma(v) \gamma(w) \left(1 - \frac{v \cdot w}{c^2}\right), \\ \text{ch } \zeta' &= \text{ch } \xi \text{ch } \zeta - \text{sh } \xi \text{sh } \zeta \cos \theta, \\ \text{tg } \theta' &= \frac{\text{sh } \zeta \sin \theta}{\text{ch } \xi \text{sh } \zeta \cos \theta - \text{sh } \xi \text{ch } \zeta}. \end{aligned}$$

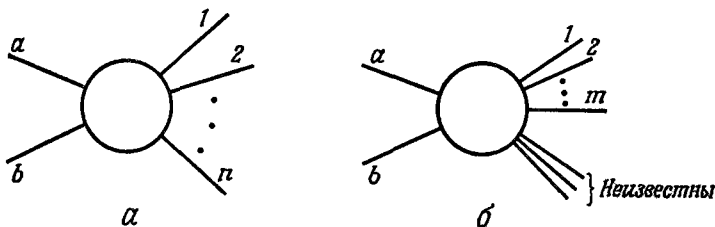
Покажите также, что если быстроты интерпретировать как углы мнимого поворота, то эти формулы эквивалентны выражениям (Б.4) и (Б.10). Быстроты  $\xi, \zeta, \zeta'$  можно рассматривать как стороны треугольника на псевдосфере  $u^2 = c^2$  [140, стр. 342—348].

## Глава III

### ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

#### 1. Определение фазового пространства

До сих пор мы по существу рассматривали лишь свойства начального состояния процесса рассеяния и преобразования Лоренца импульсов конечного состояния, на которые не наложено никаких ограничений. Обратимся теперь к рассмотрению всей



Фиг. 14. Эксклюзивная (а) и инклюзивная (б) реакции.

реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + \dots + p_n$  (фиг. 14, а) и наложим на векторы импульсов конечного состояния условие *сохранения 4-импульса*

$$E_a + E_b = \sum_{i=1}^n E_i, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i,$$

где

$$E_i^2 = \mathbf{p}_i^2 + m_i^2, \quad i = a, b, 1, \dots, n,$$

а  $m_i$  — фиксированные массы частиц. Вследствие сохранения 4-импульса  $n$  импульсов  $\mathbf{p}_i$  при фиксированном начальном состоянии не могут принимать любые значения, а должны удовлетворять четырем условиям (1.1). Мы будем называть  $3n$ -мерное пространство не связанных условиями (1.1) импульсов  $\mathbf{p}_i$  конечного состояния *импульсным пространством*. Условия (1.1) определяют в нем  $(3n - 4)$ -мерную поверхность, которая будет называться *фазовым пространством*. Иногда термины импульсное пространство и фазовое пространство считают синонимами,

называя так  $3n$ -мерное пространство импульсов, а  $(3n - 4)$ -мерное пространство называют поверхностью постоянной энергии и импульса. Мы введем наши определения для того, чтобы терминология была точной и однозначной. При пользовании импульсами структура импульсного пространства проста, а структура фазового — намного сложнее.

Но при изучении динамики процессов с участием элементарных частиц импульсы  $p_i$  редко используются в качестве переменных. Для того чтобы выявить интересные особенности экспериментальных данных или чтобы формулировать теоретические модели, необходимы другие переменные, например инвариантные массы или переданные импульсы; описать фазовое пространство в этих переменных часто оказывается чрезвычайно сложным. Большая часть последующих наших усилий будет связана с поисками параметризаций фазового пространства с помощью переменных, введение которых мотивируется динамикой реакций.

Как кинематически, так и с точки зрения динамики важно проводить различие между двумя разными типами экспериментов: исследованием эксклюзивных или инклюзивных реакций. *Эксклюзивная* реакция (фиг. 14, а) — это такая реакция, в которой известны все частицы и их импульсы, как в случае полностью идентифицированного события в пузырьковой камере. В *инклюзивной* реакции (фиг. 14, б) известны лишь некоторые из частиц и их импульсы, так что конечное состояние не идентифицировано до конца. Такая ситуация, например, встречается, в счетчиковом эксперименте с  $m$ -плечевым спектрометром. Заметим также, что эксклюзивная реакция фиксирует определенный канал реакции, тогда как инклюзивная реакция включает в себя сумму различных эксклюзивных каналов с разными множественностями. Эксклюзивные процессы рассматриваются в гл. IV—VI, инклюзивные — в гл. VII.

На практике встречаются два типа эксклюзивных процессов: *распад частицы*

$$p_0 \rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_m \quad (1.2)$$

и *столкновение двух частиц*

$$p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n. \quad (1.3)$$

Для краткости первый процесс мы будем называть процессом  $1 \rightarrow m$ , а второй — процессом  $2 \rightarrow n$ . При подсчете числа существенных переменных в этих процессах спином мы будем пренебрегать (как это делается повсюду в этой книге). В реакции (1.2) из всех переменных  $p_1, \dots, p_m$  закон сохранения 4-импульса оставляет  $3m - 4$  независимых. Далее, отсутствие

спина означает, что в системе покоя распадной частицы ориентация конфигурации импульсов не играет роли. Это значит, что три переменные являются тривиальными и остается  $3m - 7$  *су-  
щественных переменных*. Все массы  $m_0, m_1, \dots, m_m$  здесь счи-  
таются фиксированными. В реакции (1.3) имеется  $3n - 4$  *пере-  
менных, описывающих конечное состояние*. Ось пучка (направ-  
ление  $\mathbf{p}_a$  в СМ или в СЦМ) выделяет некоторое направление  
в пространстве; из трех тривиальных переменных остается  
только одна переменная  $\varphi$ , соответствующая вращению вокруг  
оси пучка. Таким образом, в этом случае конечное состояние  
описывают  $3n - 5$  *су-  
щественных переменных*. Начальное состоя-  
ние в выражении (1.3) дает нам еще одну существенную пере-  
менную — квадрат полной энергии  $s$ ; следовательно, всего име-  
ется  $3n - 4$  *су-  
щественных переменных*. Эти числа переменных  
приведены в табл. III. 1 вместе с некоторыми наборами перемен-  
ных.

Таблица III. 1

**Различные способы подсчета числа переменных для бесспиновых частиц**  
Приведены примеры для процессов  $1 \rightarrow 3$  и  $2 \rightarrow 2$ . Определение переменных  
дано в гл. IV и V. Угол  $\varphi$  описывает вращение вокруг оси пучка  
в процессе  $2 \rightarrow n$  или вокруг некоторой оси в процессе  $1 \rightarrow m$ .

|                                                       | Число пере-<br>менных для<br>процесса<br>$1 \rightarrow m$ | Пример для<br>процесса<br>$1 \rightarrow 3$   | Число пере-<br>менных для<br>процесса<br>$2 \rightarrow n$ | Пример для<br>процесса<br>$2 \rightarrow 2$ |
|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| Все переменные                                        | $\dot{\quad}$                                              | —                                             | $3n - 3$                                                   | $s, t, \varphi$                             |
| Существенные перемен-<br>ные                          | —                                                          | —                                             | $3n - 4$                                                   | $s, t$                                      |
| Переменные конечного<br>состояния                     | $3m - 4$                                                   | $s_1, s_2, \theta_1,$<br>$\varphi_1, \varphi$ | $3n - 4$                                                   | $t, \varphi$                                |
| Существенные перемен-<br>ные конечного состоя-<br>ния | $3m - 7$                                                   | $s_1, s_2$                                    | $3n - 5$                                                   | $t$                                         |

Если положить  $m = n + 1$ ,  $p_a = p_0$ ,  $p_b = -p_m$ , то легко ви-  
деть, что реакции (1.2) и (1.3) связаны между собой *перекрест-  
ным образом*, т. е. реакция (1.3) получается из (1.2) переста-  
новкой одной частицы из конечного состояния в начальное<sup>1)</sup>  
(см. раздел IV.4). В этом случае полное число существенных  
переменных  $3n - 4 = 3m - 7$  остается одним и тем же для ре-  
акций (1.2) и (1.3). В действительности имеется более глубокая  
связь между кинематикой перекрестных каналов реакции.  
В разделах VI.7 и VI.8 будет показано, что физические области  
в инвариантных переменных таких двух каналов определяются

<sup>1)</sup> Кроме того, частица заменяется на античастицу. — *Прим. ред.*

одними и теми же выражениями и что плотность фазового пространства  $\rho(\Phi)$  [определенная выражением (2.14)] одинакова для них обоих.

В итоге мы видим, что фазовые пространства для процессов  $1 \rightarrow n$  и  $2 \rightarrow n$  при  $m_0^2 = s$  и при одинаковых массах вторичных частиц совпадают — это одна и та же  $3n - 4$ -мерная область. В последнем процессе имеется одно выделенное направление в пространстве — ось пучка; таким образом, наряду с одинаковыми параметризациями фазовых пространств для этих процессов существуют и такие параметризации, которые для процесса  $2 \rightarrow n$  оказываются более сложными. Если этого различия не учитывать, то совпадение фазовых пространств означает определенного типа эквивалентность реакций  $1 \rightarrow n$  и  $2 \rightarrow n$ . С другой стороны, процессы  $1 \rightarrow n + 1$  и  $2 \rightarrow n$  связаны перекрестным преобразованием и это приводит к другому типу эквивалентности, которая особенно очевидна при использовании инвариантных переменных. В цепочке  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 3, \dots$  соседние процессы оказываются, таким образом, родственными друг другу. Это обстоятельство определило в значительной мере логическое построение данной книги.

## 2. Интегрирование по фазовому пространству и сечения

Согласно обычному формализму динамики реакций с элементарными частицами, вероятность перехода из начального состояния  $p_a + p_b$  в конечное состояние с определенными импульсами  $p_i$  получается из матричного элемента

$$\langle p_1, \dots, p_n | A | p_a, p_b \rangle \equiv A(p_i). \quad (2.1)$$

Целью экспериментов является исследование структуры функции  $A(p_i)$ ; их результаты теоретически описываются теми или иными динамическими моделями, определяющими вид  $A(p_i)$ . Ниже мы приведем некоторые общие свойства матричного элемента  $A(p_i)$ , но в данный момент достаточно считать его некоторой функцией  $p_i$ .

Чтобы получить измеряемые на опыте величины (для  $n > 2$ ), необходимо проинтегрировать по всем допустимым значениям  $p_i$  квадрат модуля  $|A(p_i)|^2$  матричного элемента (2.1), который обозначим через  $T(p_i)$ , или просто  $T$ . Полное сечение реакции получается интегрированием по всем разрешенным значениям  $p_i$ , т. е. по полному  $(3n - 4)$ -мерному фазовому пространству. Соответствующей величиной для распада является обратное время жизни. Если интегрирование проводится по некоторому подмножеству фазового пространства, то получается дифференциальное сечение, или если абсолютная нормировка несущественна — распределение. Точная связь  $T(p_i)$  с сечением



зависит от определенных соглашений о нормировке (одночастичных состояний). Подробнее с этим вопросом можно ознакомиться в учебниках по физике высоких энергий (например [68]). Для наших целей достаточно просто изложить результаты.

### а. Полное сечение реакции

Обозначив полное сечение фиксированного канала реакции через  $\sigma_n \equiv \sigma_n(s; m_i)$ , получим

$$\sigma_n = \frac{1}{F} I_n(s), \quad (2.2)$$

где фактор

$$F = 2\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) (2\pi)^{3n-4} \quad (2.3)$$

измеряет поток падающих частиц (мы включили в его определение множитель  $(2\pi)^{3n-4}$ ), а фактор

$$I_n(s) = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta^4(p_a + p_b - \sum_i p_i) T(p_i) \quad (2.4)$$

содержит интегрирование по фазовому пространству. Закон сохранения 4-импульса был учтен введением 4-мерной  $\delta$ -функции, которая равна произведению четырех  $\delta$ -функций, соответствующих четырем компонентам  $p^\mu$ . Зависимость от  $m_i$  скрыта. Мы вскоре рассмотрим соображения, по которым в определении  $I_n(s)$  включены множители  $2E$ . Важно подчеркнуть, что выражение (2.2) определяет нормировку  $A(p_i)$ , т. е. указывает, какие постоянные и зависящие от  $s$  множители по соглашению включены в  $A(p_i)$ . В этом смысле выражение (2.2) не выводится; его можно принять как определение.

### б. Время жизни

Формула для времени жизни  $\tau$  нестабильной частицы с массой  $m$ , переходящей при распаде в данное конечное состояние, очень похожа на (2.2):

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2m} \frac{1}{(2\pi)^{3n-4}} I_n(m^2), \quad (2.5)$$

где  $I_n(m^2)$  определяется выражением

$$I_n(m^2) = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta^4(p - \sum_i p_i) |\langle p_1, \dots, p_n | A | p \rangle|^2. \quad (2.6)$$

### в. Дифференциальное сечение

Если  $x = x(p_i)$  — некоторая переменная, зависящая от  $p_i$ , то для получения дифференциального сечения  $d\sigma_n/dx$  надо сделать в интеграле (2.4)  $x$  одной из переменных интегрирования и проинтегрировать по всем переменным, кроме  $x$ . Практически это проще сделать, вставив в подынтегральное выражение  $\delta$ -функцию, фиксирующую условие  $x = x(p_i)$ , так что

$$\frac{d\sigma_n}{dx} = \frac{1}{F} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta^4 \left( p_a + p_b - \sum_i p_i \right) \delta(x - x(p_i)) T(p_i). \quad (2.7)$$

Условие  $\int (d\sigma_n/dx) dx = \sigma_n$  удовлетворяется автоматически. Удобной формулой (2.7) мы будем пользоваться очень часто. Дифференциальные сечения высших порядков  $d^2\sigma/dx dy$  и т. д. получаются аналогично введением большего числа  $\delta$ -функций.

### г. Распределение

Если  $d\sigma/dx$  — дифференциальное сечение, то распределение  $w(x)$  определяется выражением

$$w(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx}. \quad (2.8)$$

Очевидно, оно нормировано на единицу:

$$\int dx w(x) = \frac{1}{\sigma} \int dx \frac{d\sigma}{dx} = 1.$$

Распределения  $w(x, y)$ ,  $w(x, y, z)$  и т. д., зависящие от большего числа переменных, определяются подобным же образом через дифференциальные сечения высших порядков.

### д. Замена переменных в распределениях

Рассмотрим, например, распределение трех каких-то переменных  $w(x, y, z)$ . Если  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  взаимно однозначно зависят друг от друга, то, обобщая выражение (2.8) и пользуясь обычными правилами замены переменных, найдем распределение трех новых переменных.

$$\begin{aligned} w'(x', y', z') &= \frac{1}{\sigma} \frac{d^3\sigma}{dx' dy' dz'} = \frac{1}{\sigma} \frac{d^3\sigma}{dx dy dz} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x', y', z')} = \\ &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x', y', z')} w(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Строго говоря, формула (2.9) справедлива только в том случае, если между  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  существует взаимно одно-

значное соответствие. Если это не так, то необходимо тщательно учесть каждую из областей, соответствующих данной области изменения  $x', y', z'$ . В итоге задача сводится к вычислению якобиана  $\partial(x, y, z)/\partial(x', y', z')$  данной замены переменных. Если формулы перехода от нештрихованных переменных к штрихованным известны, то это чисто техническая задача. По определению якобиан всегда положителен. Формула (2.9) найдет ряд применений в разделах 4 и VII.1. В частности, она будет использована при преобразовании Лоренца распределений из одной системы отсчета в другую.

Теперь рассмотрим более детально интеграл  $I_n(s)$ . При его определении (2.4) мы выделили в интеграле по  $\mathbf{p}_i$  множитель  $\prod_i (2E_i)^{-1}$ , где  $E_i = (\mathbf{p}_i^2 + m^2)^{1/2}$ . Этот множитель в принципе можно было бы включить в  $A$ , но мы его выделили, так как величина  $d^3p/2E$  инвариантна по отношению к преобразованиям Лоренца. Инвариантность  $d^3p/E$  сразу же вытекает из равенства (II.1.35). Можно также проверить это непосредственно, дифференцируя формулы преобразования (II.8.5) — (II.8.7) для 4-импульса. Тогда найдем

$$\begin{aligned} dp_x &= dp'_x, & dp_y &= dp'_y, \\ dp_z &= \gamma(dp'_z + v dE') = \gamma dp'_z \left(1 + \frac{vp'_z}{E'}\right) = \frac{dp'_z E}{E'}, \end{aligned}$$

так как  $dE'/dp'_z = p'_z/E'$  и  $E = \gamma(E' + vp'_z)$ . Следовательно, элемент объема  $d^3p = dp_x dp_y dp_z$  удовлетворяет равенству

$$\frac{d^3p'}{E'} = \frac{d^3p}{E}, \quad (2.10)$$

так что комбинация  $d^3p/E$  есть инвариант.

Выражение (II.1.35), записанное в интегральной форме, для времениподобного  $p$  означает, что

$$\frac{d^3p}{2E} = \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0), \quad (2.11)$$

где интегрирование распространяется на все значения компонент  $p^\mu$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$ . Функция-ступенька  $\Theta(p^0)$  равна нулю при  $p^0 < 0$  и равна 1 при  $p^0 > 0$ . Она также инвариантна относительно рассматриваемых здесь собственных преобразований Лоренца.

Написав тождества  $p^2 = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2$  и  $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$  и воспользовавшись следующим свойством  $\delta$ -функции:

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0), \quad f(x_0) = 0, \quad (2.12)$$

можно легко проверить формулу (2.11) непосредственно. Формула (2.11) объясняет также появление в инварианте  $d^3p/E$  множителя 2. Формулу (2.11) часто используют для представления интегралов (2.4), (2.6) и (2.7) в других эквивалентных формах, например

$$I_n(s) = \int \prod_{i=1}^n d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \Theta(p_i^0) \delta^4\left(p_a + p_b - \sum_1^n p_i\right) T(\mathbf{p}_i). \quad (2.13)$$

Впрочем, функцию  $\Theta$  здесь обычно не пишут.

Для практических целей интеграл по импульсам (2.4) обычно преобразуется к другому набору переменных. Это может потребоваться в том случае, когда  $T$  выражается через другие диктуемые динамикой переменные или когда нас интересуют распределения  $w(x)$  по таким величинам  $x$ , которые не являются импульсными переменными. Далее, стоящая в интеграле (2.4)  $\delta$ -функция является сингулярной функцией. В ряде случаев от нее приходится избавляться, например когда мы хотим численно оценить интеграл (2.4). После ее исключения остается  $3n - 4$  переменных, которые ограничены лишь пределами интегрирования, а не сингулярными связями. Обозначив такой набор переменных через  $\Phi$ , мы можем переписать (2.4) в виде

$$I_n(s) = \int d\Phi \rho_n(\Phi) T(\Phi), \quad (2.14)$$

где  $d\Phi$  — элемент объема в  $(3n - 4)$ -мерном фазовом пространстве, а *фазовая плотность*  $\rho_n(\Phi)$  включает в себя все факторы, возникающие при переходе от переменных интегрирования  $\mathbf{p}_i$  к переменным  $\Phi$ . Это факторы, возникающие при интегрировании  $\delta$ -функций [см. (2.12)], а также якобиан. Точное соотношение между выражениями (2.4) и (2.14) станет более понятным, когда мы приведем конкретные примеры.

Когда импульсы  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  пробегают все фазовое пространство, совокупность переменных  $\Phi$  заполняет  $(3n - 4)$ -мерную область, которая представляет собой *физическую область изменения*  $\Phi$ . Соответственно если  $x$  — какая-то кинематическая переменная, то *физическая область изменения*  $x$  определяется как область изменения  $x$  при изменении  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  по всему фазовому пространству. Так же определяются двумерная физическая область изменения пары переменных  $(x, y)$  или физические области изменения нескольких переменных. Если среди совокупности переменных  $\Phi$  есть переменные  $x, \dots, z$ , то физическая область изменения  $x, \dots, z$  есть проекция  $(3n - 4)$ -мерной физической области  $\Phi$  на подпространство  $x, \dots, z$ .

Можно также рассмотреть физическую область изменения  $x$  при фиксированных значениях некоторых других переменных (см. раздел V.4).

### 3. Фазовый объем

Если квадрат матричного элемента  $T$  в (2.4) тождественно равен единице, то интеграл  $I_n(s)$  называется *фазовым объемом*. Обозначим  $I_n$  в этом случае через  $R_n$ ; тогда

$$R_n(s) = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta^4(p - \sum p_i), \quad (3.1)$$

где  $s = p^2$ . Особых теоретических соображений для того, чтобы полагать  $A \equiv 1$ , нет; это лишь простейшая возможность. Из экспериментов известно, что при высоких энергиях  $A$  может значительно меняться внутри фазового объема. Если вместо  $I_n$  в выражениях (2.2) или (2.5) используется  $R_n$ , то говорят, что полное сечение или время жизни задано *фазовым объемом*. Аналогично все распределения  $d\sigma/dx$  и  $d^2\sigma/dxdu$  и т. д., полученные из выражения (2.7) в предположении  $A \equiv 1$ , называются *распределениями* [величин  $x$ , пар  $(x, y)$ ] *по фазовому объему*<sup>1)</sup>. Обычно экспериментально измеренные распределения с ростом энергии все более и более отличаются от распределений по фазовому объему.

Исторически распределения по фазовому объему сыграли важную роль фоновых распределений при изучении резонансов. Считалось, что предположение  $A \equiv 1$  как-то отражает чистую кинематику, а всякое отклонение от него означает динамический эффект, например рождение резонанса. Это действительно так при низких энергиях, где матричный элемент действительно близок к постоянству, но при высоких энергиях отделение кинематических эффектов от динамических становится сложным делом. Этот вопрос рассматривается ниже в связи с кинематическими отражениями (гл. VIII).

Интеграл  $R_n$  имеет одно технически очень важное применение. Если  $I_n$  преобразуется к новым переменным  $\Phi$ , как это делалось в формуле (2.14), то фазовая плотность  $\rho_n(\Phi)$ , конечно, не зависит от матричного элемента. Точно так же физическая область изменения  $\Phi$  не зависит от  $A$ . Это относится к любым проекциям физической области, таким, как границы физической области по переменной  $x$ , или в плоскости  $xu$  и т. д. Определение физической области включает в себя лишь закон сохранения 4-импульса, а вид  $A$  в это определение не входит.

<sup>1)</sup> В русской литературе используются также термины статистическое распределение, фоновое распределение, статистический фон (в физическом жаргоне — фазовое распределение). — *Прим. ред.*

Таким образом, мы видим, что для решения обеих главных проблем кинематики: определения области изменения  $\Phi$  и вычисления веса  $\rho_n(\Phi)$  данного набора  $\Phi$ , достаточно исследовать именно  $R_n$ . В последующих главах значительная часть материала посвящена преобразованиям  $R_n$  к различным физически мотивированным совокупностям переменных  $\Phi$ . Эти выражения затем можно использовать для определения  $I_n$ ,  $\sigma$  или любых распределений  $d\sigma/dx$ , просто подставляя  $|A|^2$  под знак интеграла.

Можно также рассмотреть и другие варианты выбора  $A$ . Примером может служить *нековариантный фазовый объем*  $R_n(p^\mu)$ , определяемый выражением

$$R_n(p^\mu) = \int \prod_{i=1}^n d^3 p_i \delta^4(p - \sum p_i) \quad (3.2)$$

или выбором  $T = \prod_i (2E_i)$ . Для многих целей интеграл (3.2)

так же применим, как и (3.1), но из-за нековариантности с ним гораздо труднее работать [17, 28, 92].

Обратимся теперь к другому аспекту интегрирования по фазовому пространству. Имеется прямая формальная аналогия между фазовым пространством в статистической физике и фазовым пространством в физике элементарных частиц. Это обусловлено тем фактом, что как в релятивистской квантовой статистике, так и в физике элементарных частиц состояние (конечное состояние во втором случае) определяется совокупностью 4-импульсов  $p_1, \dots, p_n$ . Чтобы рассмотреть эту связь, мы должны вспомнить некоторые понятия статистической механики [57]. Следующие ниже замечания не обязательны для понимания остальной части книги.

Чтобы сделать спектр импульсов дискретным, в квантовой механике предполагают, что частицы помещены в ящик объемом  $V$ . Тогда элемент объема  $d^3 p$  импульсного пространства включает  $(V/(2\pi)^3) d^3 p$  состояний. Число состояний релятивистской частицы равно [см. (2.11)]

$$dN = V \frac{m}{E} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = 2mV \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2). \quad (3.3)$$

Множитель  $\gamma^{-1} = m/E$  обусловлен тем, что ящик «с точки зрения частицы» претерпел лоренц-сокращение. Величина (3.3), очевидно, является инвариантом.

В физике элементарных частиц вычисляют полные сечения, а в статистической физике — функции распределения (статистические суммы). И те и другие представляют собой суммы по всем состояниям, которые разрешены внешними связями. Одна-

из таких связей — это требование, чтобы полная энергия и полный импульс, а также полное число частиц (число частиц каждого типа) имели фиксированное значение. Сумма по состояниям тогда равна

$$I_n = \frac{1}{(2\pi)^{3n-4}} \int \prod_{i=1}^n d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \delta^4(p_{\text{полн}} - \sum p_i) T_n. \quad (3.4)$$

Множитель  $(2\pi)^{-4}$  обусловлен нормировкой  $\delta^4(\dots)$ , а функция  $T_n$  определяется изучаемым процессом.

Стандартное выражение (3.4) для фазового объема отличается от настоящей суммы по состояниям тем, что в выражении (3.3) множитель  $2mV$  опущен. В результате этого число состояний не будет безразмерной величиной — размерность выражения (3.4) будет зависеть от  $n$ . Поскольку это различие равносильно переопределению  $T_n$ , мы здесь придерживаемся обычного определения (3.4).

Приняв далее  $T_n \equiv 1$ , мы видим, что фазовый объем  $R_n$  тождествен функции распределения *идеального релятивистского газа*. Точнее говоря, это микроканоническая функция распределения, взятая по микроканоническому ансамблю, в котором полная энергия-импульс и полное число частиц каждого типа фиксированы.

Теперь можно воспользоваться тем результатом статистической физики, что термодинамические функции различных ансамблей отличаются лишь членами, которые по порядку величины равны  $N^{-1/2}$ , где  $N$  — число степеней свободы системы. Предположим, что мы взяли канонический ансамбль, в котором температура  $T$  фиксирована, а энергия может меняться. Каноническое распределение релятивистского идеального газа имеет вид

$$Q_n = \frac{1}{(2\pi)^{3n-4}} \int \prod_{i=1}^n \{d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) e^{-\beta \cdot p_i}\}. \quad (3.5)$$

Здесь 4-вектор  $\beta$  — обобщенная обратная температура; его длина равна  $|\beta| = 1/T$  (см. раздел IX.6). Величину (3.5), в которой нет четырехкратной  $\delta$ -функции, значительно легче вычислить, чем соответствующее выражение (3.4). Относительная ошибка  $(Q_n - R_n)/R_n$  пропорциональна  $N^{-1/2} \approx (3n)^{-1/2}$  [94]. Поскольку  $n \approx 10^{24}$ , в статистической физике различные функции распределения приводят к одной и той же термодинамике. В физике элементарных частиц также можно использовать выражение (3.5) для того, чтобы вычислить довольно сложный фазовый интеграл (3.4), т. е. сечения рождения большого числа частиц. Этот статистический метод расчета изложен в разделе IX.6.

Если отказаться от фиксирования числа частиц, то соответствующий ансамбль является большим каноническим ансамблем. В нем число частиц заменяет дополняющая его переменная — фугативность. Такая ситуация встречается при вычислении полных сечений и при изучении инклюзивных процессов, когда производится суммирование по различным каналам.

Если  $A$  не постоянна, то столкновение элементарных частиц формально аналогично взаимодействию частиц релятивистского газа. Поскольку  $|A|^2$  и соответствующая ей величина  $e^{-\beta U}$ , где  $U$  — потенциал взаимодействия, имеют весьма различный вид, аналогия является не очень прямой. Однако многие статистические понятия здесь все еще применимы. Так, например, разложение по связным группам («кластерам») в статистической физике [57] также пригодно для вычисления корреляционных функций для инклюзивных процессов (раздел VII.7). Можно даже довести аналогию до уровня термодинамики [161\*] или гидродинамики [91]. Важно понимать, что хотя аналогия со статистической физикой (основанная на большом числе степеней свободы) полная, однако сравниваемые величины имеют совершенно различную природу и по-разному истолковываются. Таким образом, аргументы, основанные на обычной термодинамике, как таковые, неприменимы; законы «термодинамики» процессов с участием элементарных частиц должны основываться непосредственно на свойствах интеграла  $I_n$  и его производных.

#### 4. Преобразования Лоренца распределений для одной частицы

Рассмотрим теперь несколько более подробно свойства преобразования Лоренца *распределений для одной частицы*. Этот раздел при первом чтении можно опустить; он основан на применении формулы (2.9).

Одночастичное распределение, или *спектр*, получается в инклюзивной реакции (гл. VII)

$$a + b \rightarrow c + X \quad (4.1)$$

( $X$  — неизвестная система частиц) или в эксклюзивной реакции. В любом случае подсчитывают число частиц определенного типа в элементе телесного угла  $d\Omega$  и в интервале импульсов  $dP$  в окрестности точки  $(P, \Omega)$ . Измеренное распределение тогда определяется выражением

$$\omega(P, \cos \theta, \varphi) \equiv \omega(P, \Omega) = \frac{1}{\sigma} \frac{d^2 \sigma}{dP d\Omega}. \quad (4.2)$$

Если имеет место цилиндрическая симметрия относительно направления пучка (ось  $z$ ), то  $\omega(P, \Omega)$  не зависит от  $\varphi$ , и в этом



случае

$$w(P, \cos \theta) = \frac{1}{\sigma} \frac{d^2 \sigma}{dP d \cos \theta}. \quad (4.3)$$

Если к тому же мы не измеряем импульсы, то тогда выражение (4.3) фактически по ним интегрируется и измеряемое на опыте распределение имеет вид

$$w(\cos \theta) = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\Omega}, \quad (4.4)$$

или

$$w(\theta) = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\theta} = \sin \theta w(\cos \theta). \quad (4.5)$$

Для двухчастичного конечного состояния при фиксированной полной энергии импульс  $P$  в СМ определяется углом  $\theta$ , так что интегрирование по  $P$  тривиально.

Выбор переменных в выражениях (4.2) — (4.5) не единствен; другие возможности подробно рассматриваются в гл. VII. Здесь мы рассмотрим лишь, как преобразуются распределения (4.2) — (4.5) при переходе из одной лоренцевой системы в другую. Эти формулы преобразования следуют непосредственно из формулы (2.9) и результатов, полученных в разделе II.8.

#### *а. Преобразование одномерного распределения для одной частицы*

При чтении этого раздела полезно представить себе фиг. 12. Рассмотрим сначала преобразование распределения  $w(\theta)$  или  $w(\cos \theta)$ . Согласно формуле (2.9), мы имеем

$$w(\theta) = \sum_{\pm} \frac{d\theta^*}{d\theta} w^*(\theta^{\pm}). \quad (4.6)$$

Здесь мы учли, что для эллипсоидов класса 3 (см. раздел II.8) каждому значению  $\theta$  ( $\leq 0_{\text{макс}}$ ) соответствуют два значения  $\theta^{\pm}$  (фиг. 12). Однако, если детектор так анализирует импульсы, что способен отличать друг от друга две ветви  $P^{\pm}$ , мы можем написать

$$w(\theta) = \frac{d\theta^*}{d\theta} w(\theta^*). \quad (4.7)$$

Это же выражение применимо и к событиям, в которых векторы импульсов укладываются на эллипсоиды классов 1 и 2 и где должны рассматриваться лишь  $P^+$ . Свойства преобразования  $w(\cos \theta)$  вытекают из свойств преобразования  $w(\theta)$ , так как

$$\frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \frac{d \cos \theta^*}{d \cos \theta} = \frac{\sin \theta^*}{\sin \theta} \frac{d\theta^*}{d\theta} = \frac{P}{P^*} \frac{d\theta^*}{d\theta}. \quad (4.8)$$

Дифференцируя выражение (II.8.30), после ряда алгебраических преобразований находим

$$\frac{d\theta}{d\theta^*} = \frac{\cos^2 \theta (1 + g^* \cos \theta^*)}{\gamma (g^* + \cos \theta^*)^2}. \quad (4.9)$$

Это равенство теперь можно выразить через переменные в СЦМ или в СМ. В переменных СЦМ, подставив  $\cos^2 \theta$  из выражения (II.8.30), получаем

$$\frac{d\theta}{d\theta^*} = \frac{\gamma (1 + g^* \cos \theta^*)}{\gamma^2 (g^* + \cos \theta^*)^2 + \sin^2 \theta^*}. \quad (4.10)$$

Чтобы вычислить  $d \cos \theta^* / d \cos \theta$ , проще всего воспользоваться формулами (II.8.6) и (II.8.8). Тогда получим

$$\frac{P^2}{P^{*2}} = \frac{(P \cos \theta)^2 + (P \sin \theta)^2}{P^{*2}} = \gamma^2 (g^* + \cos \theta^*)^2 + \sin^2 \theta^*. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.10) и (4.11) в (4.8), находим

$$\frac{d \cos \theta}{d \cos \theta^*} = \frac{\gamma (1 + g^* \cos \theta^*)}{\{\gamma^2 (g^* + \cos \theta^*)^2 + \sin^2 \theta^*\}^{1/2}}. \quad (4.12)$$

Из (4.10) или (4.12) видно, что производная  $d\theta^*/d\theta$  обращается в нуль при  $\cos \theta^* = -1/g^*$ , как это уже ранее было показано в формуле (II.8.34). Для меньших значений  $\theta^*$  производная положительна, для больших — отрицательна (фиг. 12).

В переменных СМ, которые используются, когда необходимо построить  $\omega(\theta)$  по  $\omega(\theta^*)$ , снова надо обратить внимание на возможную двужначность формул (II.8.32), выражающих  $\cos \theta^{*\pm}$  через  $\theta$ . Подставив выражение (II.8.32) в формулу (4.9), получаем

$$\frac{d\theta^{*\pm}}{d\theta} = \frac{1}{\gamma (1 - v^2 \cos^2 \theta)} \frac{g^* \pm \sqrt{D}}{(\pm \sqrt{D})} = \frac{P^\pm}{P^*} \frac{1}{\pm \cos \theta \sqrt{D}}, \quad (4.13)$$

где  $D = 1 + \gamma^2 (1 - g^{*2}) \operatorname{tg}^2 \theta$ , а  $P^\pm(\theta)$  дается выражением (II.8.19). Аналогично

$$\frac{d \cos \theta^{*\pm}}{d \cos \theta} = \frac{\cos \theta}{\gamma^2 (1 - v^2 \cos^2 \theta)^2} \frac{(g^* \pm \sqrt{D})^2}{\pm \sqrt{D}} = \left(\frac{P^\pm}{P^*}\right)^2 \frac{1}{\pm \cos \theta \sqrt{D}}. \quad (4.14)$$

Заметим, что из формул (II.8.19) и (II.8.23) следует

$$\pm \cos \theta \sqrt{D} = \gamma \frac{P^\pm - E^\pm v \cos \theta}{P^*}. \quad (4.15)$$

Поэтому (4.14) можно переписать в виде

$$\frac{d \cos \theta^{*\pm}}{d \cos \theta} = \frac{(P^\pm)^2}{\gamma P^* (P^\pm - E^\pm v \cos \theta)}. \quad (4.16)$$

Ниже мы еще раз выведем это соотношение, пользуясь двух-частичным фазовым интегралом.

Суммируя, можно сказать, что если мы знаем  $w^*(\cos \theta^*)$  или  $d\sigma/d\Omega^*$ , то для того, чтобы найти  $w(\cos \theta)$  или  $d\sigma/d\Omega$ , надо подставить в (4.6) или (4.7) выражение (4.14) для якобиана и выразить  $\theta$  через  $\theta^*$  с помощью формулы (II 8.30). Для обратной процедуры якобиан находится из (4.12), а  $\theta^*$  выражается через  $\theta$  по формуле (II.8.32). В обоих случаях следует обращать внимание на возможную двужначность связи между  $\theta^*$  и  $\theta$ . Практически, однако, угловые распределения проще всего преобразовывать, используя инвариантные квадраты переданных импульсов  $t$  и  $d\sigma/dt$  (раздел IV.6) вместо  $\cos \theta$  и  $d\sigma/d\Omega$ .

**Пример 1.** Рассмотрим изотропный распад в СЦМ, когда распределение  $w^*(\cos \theta^*)$  по косинусу угла вылета  $\theta^*$  является равномерным:

$$w^*(\cos \theta^*) = \frac{1}{2}. \quad (4.17)$$

Нормировка учитывает, что угол  $\theta^*$  меняется в интервале  $0 \leq \theta^* \leq \pi$ . Соответственно

$$w^*(\theta^*) = \frac{1}{2} \sin \theta^*. \quad (4.18)$$

Предположим, например, что распадающаяся частица движется в лабораторной системе со скоростью  $v$ , равной скорости  $v^*$  продукта распада в СЦМ. Тогда  $g^* = 1$ , и выражение (4.14) для углового распределения в ЛС дает

$$w(\cos \theta) = 2 \cos \theta \gamma^{-2} (1 - v^2 \cos^2 \theta)^{-2}. \quad (4.19)$$

Легко видеть, что это распределение остро направлено вперед: значение  $w$  при  $\theta = 0$  растет как  $2\gamma^2$ . Заметим, что теперь область изменения  $\theta$  есть  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

#### б. Преобразование двумерных распределений для одной частицы

Формулы преобразования в этом случае проще, чем для одномерных распределений. Якобиан, который входит в формулу (2.9), уже был получен ранее [см. (2.10)]:

$$\frac{\partial(p_x^*, p_y^*, p_z^*)}{\partial(p_x, p_y, p_z)} = \frac{d^3 p^*}{d^3 p} = \frac{E^*}{E}. \quad (4.20)$$

Отсюда следует, что

$$E w(p_x, p_y, p_z) = E \frac{1}{\sigma} \frac{d^3 \sigma}{d^3 p} \quad (4.21)$$

является инвариантом, так что

$$\omega(p_x, p_y, p_z) = \frac{E^*}{E} \omega(p_x^*, p_y^*, p_z^*). \quad (4.22)$$

Такова основная формула. Правило преобразования для распределений по другим переменным получается преобразованием от декартовых компонент  $p_x, p_y, p_z$  к этим другим переменным. Формула (4.22) выглядит столь просто потому, что она записана через величины, определенные в разных системах отсчета. В более явной форме, например, распределение в СМ имеет вид

$$\omega(p_x, p_y, p_z) = \gamma E^{-1} (E - v p_z) \omega^* \{p_x, p_y, \gamma(p_z - v E)\}; \quad (4.23)$$

в правую часть подставлены значения переменных в СМ, отвечающие значениям аргументов распределения  $\omega^*$  в СЦМ. Преобразование распределений по другим переменным подробно рассмотрено в гл. VII. Здесь мы лишь проиллюстрируем общую идею двумя важными случаями  $(P, \Omega)$  и  $(q, r) \equiv (P \cos \theta, P \sin \theta)$ . Соответствующие якобианы получаются из формул (II. 8.1) — (II. 8.4) чисто механически:

$$\frac{\partial(p_x, p_y, p_z)}{\partial(P, \cos \theta, \varphi)} = P^2, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial(P, \cos \theta)}{\partial(q, r)} = \frac{\sin \theta}{P} = \frac{r}{P^2}. \quad (4.25)$$

Это означает, что

$$\omega(P, \Omega) = \omega(P, \cos \theta) = P^2 \omega(p_x, p_y, p_z), \quad (4.26)$$

$$\omega(q, r) = r \omega(p_x, p_y, p_z). \quad (4.27)$$

Комбинируя эти выражения с (4.22), получаем

$$\omega(P, \Omega) = \frac{P^2 E^*}{P^{*2} E} \omega(P^*, \Omega^*), \quad (4.28)$$

и, приняв во внимание, что  $r = r^*$ , находим

$$\omega(q, r) = \frac{E^*}{E} \omega(q^*, r). \quad (4.29)$$

**Пример 2.** Пусть некоторая модель дает для одночастичных спектров выражение

$$\frac{d^2 \sigma}{dq^* dr} = f(r),$$

где  $f$  — известная функция. Мы хотим получить, предсказание для экспериментально измеряемой величины  $d^3\sigma/dP d\Omega$ . Воспользовавшись формулами (4.25) и (4.29), получаем

$$\frac{d^3\sigma}{dP d\Omega} = \frac{P^2}{2\pi r} \frac{d^2\sigma}{dq dr} = \frac{P^2}{2\pi r} \frac{E^*}{E} \frac{d^2\sigma}{dq^* dr} = \frac{P^2 \gamma}{2\pi r} \left(1 - \frac{vP \cos \theta}{E}\right) f(r).$$

Распределение  $d^2\sigma/dq dr$  теперь зависит от  $q = P \cos \theta$ .

### Упражнения

III.1. а) Какова размерность амплитуды  $A(p_i)$  рождения  $n$  частиц, если размерность  $\sigma$  дана в миллибарнах? б) Какова размерность фазового объема  $R_n$ ?

III.2. Выразите нерелятивистский фазовый объем  $I(E)$ , определяемый выражением

$$I(E) = \int \prod_{i=1}^n d^3p_i \delta\left(E - \sum_i \frac{p_i^2}{2m}\right),$$

через гамма-функцию<sup>1)</sup>.

III.3. Почему для изотропного распределения  $w(\cos \theta) = \text{const}$ , а не  $w(\theta) = \text{const}$ ?

III.4. Проверьте нормировку выражения (4.19).

III.5. Выведите выражение (4.19), приняв  $w^*(\theta^*) = 1/2 \sin \theta^*$  и используя подходящую формулу для  $d\theta^*/d\theta$ .

<sup>1)</sup> Сохранением импульса пренебрегается. — Прим. ред.

## Глава IV

### ДВУХЧАСТИЧНЫЕ КОНЕЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ

#### 1. Фазовый объем двух частиц

В этом разделе мы рассматриваем простейший из возможных процессов: превращение одной частицы в две. Следовательно, мы изучаем двухчастичное конечное состояние, связанное с начальным состоянием лишь сохранением 4-импульса. Свойства начального состояния можно, таким образом, свести к одной величине — его полному 4-импульсу  $p = (E, \mathbf{p})$ . В конкретных приложениях  $p$  может быть либо 4-импульсом  $p_0$  распадающейся частицы, либо полным 4-импульсом  $p_a + p_b$  начального состояния процесса соударения<sup>1)</sup>.

Для вывода формул, дающих сечения и времена жизни, а также для получения наборов переменных, удобных при рассмотрении конечных состояний с  $n$  частицами, требуется ввести *фазовый объем двух частиц*. В соответствии с определением  $R_n$  он равен

$$R_2(p; m_1^2, m_2^2) = \int d^4p_1 d^4p_2 \delta(p_1^2 - m_1^2) \delta(p_2^2 - m_2^2) \delta^4(p - p_1 - p_2). \quad (1.1)$$

Константы  $m_1^2$  и  $m_2^2$  могут иметь любой знак; мы записали их в виде квадратов масс только для простоты. Известно, что вследствие лоренц-инвариантности  $R_2$  является функцией лишь величины

$$s = p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 \quad (1.2)$$

и  $m_1^2$  и  $m_2^2$ . Мы вычислим интеграл (1.1) в отдельности для случаев времениподобного, пространственноподобного и изотропного  $p$ .

#### *a. -Времениподобный $p$*

Сначала приведем простой стандартный вывод формулы для  $R_2$  в случае времениподобного начального импульса  $p$ ; остальную часть этого раздела при первом чтении можно опустить.

---

<sup>1)</sup> Импульс  $p$  может быть также 4-импульсом, переданным паре конечных частиц. — *Прим. ред.*

Интегрируем в уравнении (1.1) сначала по  $p_2$ , используя четырехмерную  $\delta$ -функцию, а затем переходим в систему отсчета, в которой  $p = (\sqrt{s}, 0)$  (систему покоя  $p$ ):

$$R_2(s) = \int d^4 p_1 \delta(p_1^2 - m_1^2) \delta\{(p - p_1)^2 - m_2^2\} = \quad (1.3)$$

$$= \int \frac{d^3 p_1}{2E_1} \delta(s - 2\sqrt{s} E_1^* + m_1^2 - m_2^2) = \quad (1.4)$$

$$= \frac{1}{2} \int P_1^* d\Omega_1^* dE_1^* \delta(s - 2\sqrt{s} E_1^* + m_1^2 - m_2^2), \quad (1.5)$$

где телесный угол  $\Omega_1^*$  описывает ориентацию  $p_1$  в системе покоя  $p$ . Благодаря  $\delta$ -функции фиксируются величины импульсов продуктов распада:

$$P_1^* = P_2^* = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{2\sqrt{s}}. \quad (1.6)$$

Значения этих импульсов для двухчастичных видов распада различных резонансов приведены в таблицах элементарных частиц [159\*]. Проводя в (1.5) интегрирование по  $E_1^*$  при помощи формулы (III.2.12), находим

$$R_2(s) = \frac{P_1^*}{4\sqrt{s}} \int d\Omega_1^* = \quad (1.7)$$

$$= \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{8s} \int d\Omega_1^*. \quad (1.8)$$

На этой ступени в (1.1) проинтегрированы только  $\delta$ -функции; выражение для  $R_2(s)$  в этой форме нам понадобится в дальнейшем, поскольку введение матричного элемента  $A(p_1, p_2)$  в интегралы (1.7), (1.8) тривиально. Но сейчас у нас матричный элемент  $A(p_1, p_2)$  равен единице и мы можем немедленно проинтегрировать в формулах (1.7), (1.8) по  $\Omega_1^*$ :

$$R_2(s) = \frac{\pi P_1^*}{\sqrt{s}} = \frac{\pi \lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{2s}. \quad (1.9)$$

Все формулы для  $R_2$  в действительности должны содержать  $\Theta$ -функцию  $\Theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2)$ , которая обеспечивает обращение в нуль  $P_2$  ниже порога. Формально эта пороговая  $\Theta$ -функция возникает из  $\Theta$ -функции  $\Theta(p_0)$  в уравнении (III.2.11).

После этого простого вывода мы для сравнения с нашими прежними результатами проведем более общие выкладки и исключим  $\delta$ -функции из интеграла (1.1) в произвольной системе

отсчета  $p = (E, \mathbf{p})$ . Интегрируя в (1.1) сначала по  $p_1^0$  и  $p_2^0$  и учитывая ограничения, налагаемые на импульсы их пребыванием на массовой поверхности, получаем

$$R_2(E, \mathbf{p}) = \int \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} \delta(E - E_1 - E_2) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2).$$

Интегрирование второй  $\delta$ -функции по  $\mathbf{p}_2$  затем дает

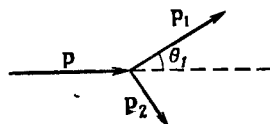
$$R_2(E, \mathbf{p}) = \int d\Omega_1 \int \frac{dP_1 P_1^2}{4E_1(E - E_1)} \delta\{f(P_1)\}. \quad (1.10)$$

Телесный угол  $\Omega_1 = (\cos \theta_1, \varphi_1)$  определяет ориентацию  $\mathbf{p}_1$  по отношению к  $\mathbf{p}$  (фиг. 15). Мы ввели также

$$f(P_1) = E - E_1 - (P^2 + P_1^2 - 2PP_1 \cos \theta_1 + m^2)^{1/2}. \quad (1.11)$$

Условие  $f(P_1) = 0$  определяет модуль вектора  $\mathbf{p}_1$  как функцию  $\cos(\theta_1)$  (косинуса угла между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}_1$ ). С двузначностью решения  $P_1 = P_1^\pm$  мы уже встречались раньше в формулах (II.8.19),

Фиг. 15. Угол вылета  $\theta_1$  есть угол между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}_1$ ; угол  $\varphi_1$  (не показан) описывает азимутальную ориентацию  $\mathbf{p}_1$  относительно вращения вокруг  $\mathbf{p}$ .



(II.8.20). Свойства  $P_1^\pm$  подробно проанализированы в разделе II.8. Поскольку интеграл по  $P_1$  берется от 0 до  $\infty$ , вклад в  $R_2$  дают только положительные решения. Для эллипсоидов классов 1 и 2 ( $v \leq v^*$ ) значение  $P_1^-$  всегда отрицательно, в то время как для эллипсоидов класса 3 ( $v > v^*$ ) оба значения  $P_1^\pm > 0$  для  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_{1\text{макс}}$ . Вычисляя  $f'(P)$  из (1.10)

$$f'(P_1) = \frac{P_1 E - P E_1 \cos \theta_1}{E_1(E - E_1)}$$

и используя формулу интегрирования (III.2.12), получаем окончательно

$$R_2(E, \mathbf{p}) = \frac{1}{4} \int d\Omega_1 \sum_{\pm} (P_1^\pm)^2 (EP_1^\pm - PE_1^\pm \cos \theta_1)^{-1}. \quad (1.12)$$

Формула (1.12) громоздка, однако из релятивистской инвариантности следует, что если (1.12) проинтегрировать по  $\cos \theta_1$ , то должен получиться результат (1.9), где  $s = E^2 - \mathbf{p}^2$ . Поскольку мы интегрировали только  $\delta$ -функции, формула (1.12) остается справедливой при введении в нее матричного элемента  $A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ . Благодаря  $\delta$ -функциям в (1.12) войдет лишь зависимость  $A$  от угловых переменных. Подынтегральная функция



в (1.12) представляет собой по существу дифференциальное сечение  $d\sigma_2/d\Omega_1$  в произвольной системе отсчета. Когда  $p = (\sqrt{s}, 0)$ , формула (1.12) сводится, конечно, к (1.7).

Сравнивая (1.12) и (1.7), находим, что для элементов пространственных углов

$$\frac{d\Omega_1^*}{d\Omega_1^\pm} = \frac{\sqrt{s} (P_1^\pm)^2}{P_1^* (EP_1^\pm - PE_1^\pm \cos \theta_1)}. \quad (1.13)$$

Два значения  $p_1$ , которые в эллипсоидах класса 3 соответствуют одному и тому же значению  $\theta_1$ , здесь должны подставляться порознь. Формула (1.13) есть не что иное, как наш старый результат (III 4.16) для преобразования Лоренца дифференциального сечения  $d\sigma/d\Omega$ , если в качестве  $\gamma$ -фактора, характеризующего движение СЦМ в СМ, взято  $\gamma = E/\sqrt{s}$ . Здесь результат получился очень просто благодаря использованию лоренц-инвариантности  $R_2$ .

### б Пространственноподобный $p$

Чтобы найти  $R_2$  для пространственноподобного начального импульса  $p$ , выполним сначала в (1.1) интегрирование по  $p_2$ . Это приведет нас к формуле (1.3). Поскольку импульс  $p$  пространственноподобен, мы можем для интегрирования (1.3) перейти в систему отсчета, в которой  $p = (0, 0, 0, \sqrt{-t})$ . Тогда вторая  $\delta$ -функция фиксирует следующее значение  $z$ -компоненты  $p_1$ :

$$p_{1z} = \frac{-t - m_1^2 + m_2^2}{2\sqrt{-t}}.$$

Интегрирование по  $p_{1z}$  теперь дает

$$R_2(p; m_1^2, m_2^2) = \int dE_1 dp_{1x} dp_{1y} (2\sqrt{-t})^{-1} \delta(p_1^2 - m_1^2). \quad (1.14)$$

Остающийся интеграл наиболее естественно брать переходом к псевдосферическим координатам, введенным на фиг. 8 и в формулах (II.1.19), (II.1.20). С их помощью имеем [см. (II.1.36)]

$$dE_1 dp_{1x} dp_{1y} = P_1^2 dP_1 dg_1, \quad (1.15)$$

где

$$P_1^2 = E_1^2 - p_{1x}^2 - p_{1y}^2 = m_1^2 + p_{1z}^2 = \frac{\lambda(t, m_1^2, m_2^2)}{-4t}, \quad (1.16)$$

$$dg_1 = d \operatorname{ch} \zeta_1 d\phi_1. \quad (1.17)$$

Одна и та же буква  $P_1$  у нас обозначает и переменную интегрирования и ее фиксированное  $\delta$  функцией значение. Теперь

просто проинтегрировать по  $dP_1$ , используя оставшуюся в (1.14)  $\delta$ -функцию. В результате получим

$$R_2(p; m_1^2, m_2^2) = \frac{P_1}{4\sqrt{-t}} \int dg_1 = \frac{\lambda^{1/2}(t, m_1^2, m_2^2)}{-8t} \int dg_1. \quad (1.18)$$

Эта формула полностью аналогична (1.7) и (1.8), только теперь полный фазовый объем бесконечен. При практическом применении формулы (1.18) появляются некоторые дополнительные условия, которые ограничивают диапазон изменения  $\xi_1$  и делают интеграл конечным.

### в Изотропный $p$

Наконец, в случае изотропного начального импульса  $p$  мы должны проинтегрировать (1.3) при  $p^2 = 0$ . В соответствующей стандартной системе отсчета [см. (II.1.13)] начальный 4-импульс  $p$  задается в виде  $p = (\omega, 0, 0, \omega)$ . Нужная параметризация  $p_1$  дается выражением

$$p_1 = (E_1, p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}) = \left\{ \frac{1}{2}(\lambda_+ + \lambda_-), p_{1x}, p_{1y}, \frac{1}{2}(\lambda_+ - \lambda_-) \right\}. \quad (1.19)$$

Иными словами, мы выбираем новые переменные  $\lambda_{\pm} = E_1 \pm p_{1z}$ . Эти переменные иногда называют *переменными на световом конусе*. Тогда

$$\begin{aligned} R_2(p, m_1^2, m_2^2) &= \\ &= \frac{1}{2} \int d\lambda_+ d\lambda_- d^2r_1 \delta(\lambda_+ \lambda_- - \mathbf{r}_1^2 - m_1^2) \delta(m_1^2 - m_2^2 - 2\omega\lambda_-) = \\ &= \frac{1}{2(m_1^2 - m_2^2)} \int d^2r_1, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где  $\mathbf{r}_1 = (p_{1x}, p_{1y})$  — поперечная часть импульса  $p_1$ . Таким образом, во всех случаях  $R_2$  приводится к интегралу по *малой группе* (см., например, [53]) соответствующего стандартного вектора. В случаях, когда  $p^2 > 0$ ,  $p^2 < 0$  и  $p^2 = 0$ , малыми группами будут  $O(3)$ ,  $O(1, 2)$  и  $E(2)$  соответственно [ $E(2)$  — группа вращений и трансляций в двумерной евклидовой плоскости]. Соответствующими элементами объема являются  $d\Omega$  (1.8),  $dg$  (1.18) и  $d^2r$  (1.20).

Из формул (1.8) и (1.18) видно, что необходимым условием того, чтобы процесс  $p \rightarrow p_1 + p_2$  был физическим, является

$$\begin{aligned} \lambda(p^2, p_1^2, p_2^2) &= \{p^2 - (\sqrt{p_1^2} + \sqrt{p_2^2})^2\} \{p^2 - (\sqrt{p_1^2} - \sqrt{p_2^2})^2\} = \\ &= \{p^2 + (\sqrt{-p_1^2} + \sqrt{-p_2^2})^2\} \{p^2 + (\sqrt{-p_1^2} - \sqrt{-p_2^2})^2\} \geq 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Это условие всегда удовлетворяется, если не все три вектора являются пространственноподобными или времениподобными.

Если же все они времениподобны, то условие (1.21) требует, чтобы выполнялось неравенство

$$\sqrt{p^2} \geq m_1 + m_2 \quad (\text{порог реакции}) \quad (1.22)$$

или

$$\sqrt{p^2} \leq |m_1 - m_2| \quad (\text{псевдопорог реакции}). \quad (1.23)$$

Первое из них является естественным условием возможности распада; последнее соответствует случаю, когда  $p$  есть переданный импульс. Условия (1.22) и (1.23) следует сравнить с (II 2.16).

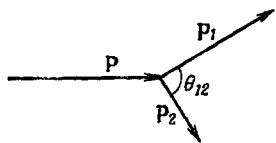
Условие (1.21) можно написать в более симметричной форме, используя определитель Грама  $\Delta_2(p_1, p_2)$  для  $p_1$  и  $p_2$ , введенный формулой (II.7.3). Тогда мы можем утверждать, что процесс  $p \rightarrow p_1 + p_2$  является физическим, если

$$\Delta_2(p_1, p_2) \leq 0. \quad (1.24)$$

В частности, граница физической области, выраженная через инварианты, дается соотношением  $\Delta_2(p_1, p_2) = 0$ . Для случая двух независимых 4-векторов это соотношение тривиально, однако для большего числа частиц, как мы убедимся ниже, нельзя обойтись без применения определителей Грама.

## 2. Распределение углов разлета

Распределение  $\omega(\cos \theta_1)$ , появляющееся в интеграле (1.12), представляет собой распределение углов вылета (фиг. 15) — углов  $\theta_1$  между импульсами распадающейся частицы и одного



Фиг. 16. Угол разлета  $\theta_{12}$  является углом между  $p_1$  и  $p_2$ .

из продуктов распада. Теперь мы определим распределение углов разлета. Угол разлета  $\theta_{12}$  — это угол между импульсами двух продуктов распада (фиг. 16). Распределение углов вылета связывает начальное и конечное состояние, в то время как распределение углов разлета имеет отношение лишь к конечному состоянию. Можно также выявить различие этих распределений в системе отсчета, в которой распадающаяся частица покоится; в этом случае  $\omega(\cos \theta_1)$  — некоторая регулярная функция  $\cos \theta_1$ , а  $\omega(\cos \theta_{12})$  —  $\delta$ -функция, отличная от нуля лишь при  $\theta_{12} = \pi$  вследствие сохранения импульса.

Распределение  $\cos \theta_{12}$  можно вывести, отправляясь от известного распределения  $\omega^*(\cos \theta_1^*)$ , находя соотношение между углами  $\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2$  и  $\theta_1^*$  и вычисляя

$$\omega(\cos \theta_{12}) = \frac{d \cos \theta_1^*}{d \cos \theta_{12}} \omega^*(\cos \theta_1^*). \quad (2.1)$$

Углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  можно выразить через компоненты  $p_1$  и  $p_2$ , а их в свою очередь через относящиеся к СЦМ величины  $P_1^* = P_2^*$ ,  $\theta_1^* = \pi - \theta_2^*$  и через параметры преобразования из СЦМ в данную систему отсчета:  $v = P/E$ ,  $\gamma = E/\sqrt{s}$ . В СЦМ скорости частиц 1 и 2 равны  $v_i^* = P_i^*/E_i^*$ ,  $i = 1, 2$ . Используя далее соотношение  $\cos \theta_{12} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$ , получаем

$$\cos \theta_{12} = \frac{\gamma^2 v^2 - v_1^* v_2^* + \gamma^2 v (v_1^* - v_2^*) \cos \theta_1^* - \gamma^2 v^2 v_1^* v_2^* \cos^2 \theta_1^*}{h_1 h_2}, \quad (2.2)$$

где

$$h_1^2 = \gamma^2 v^2 + v_1^{*2} + 2\gamma^2 v v_1^* \cos \theta_1^* + \gamma^2 v^2 v_1^{*2} \cos^2 \theta_1^*,$$

$$h_2^2 = \gamma^2 v^2 + v_2^{*2} - 2\gamma^2 v v_2^* \cos \theta_1^* + \gamma^2 v^2 v_2^{*2} \cos^2 \theta_1^*.$$

Общий случай, очевидно, очень сложен. Вместо того чтобы продолжать вывод дальше, мы ниже применим другой метод нахождения  $\omega(\cos \theta_{12})$  для произвольных масс. Отметим только, что для равных масс ( $m_1 = m_2$ ,  $v_1^* = v_2^*$ ) уравнение (2.2) можно решить относительно  $\cos^2 \theta_1^*$  и найти точное выражение для  $\omega(\cos \theta_{12})$ . Результат настолько громоздок, что мы не воспроизводим его здесь [6\*, 84\*, 146, 163].

Лишь в том случае, когда массы равны нулю, уравнение (2.2) упрощается настолько, что приводит к компактному результату. Примерами процессов такого типа являются  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  и  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ . В последнем случае зависимость матричного элемента от  $\cos \theta_1^*$  дается квантовой электродинамикой. Положив в (2.2)  $m_1 = m_2 = 0$  или  $v_1^* = v_2^* = 1$ , имеем

$$\cos \theta_{12} = \frac{2v^2 - 1 - v^2 \cos^2 \theta_1^*}{1 - v^2 \cos^2 \theta_1^*}. \quad (2.3)$$

Отсюда получаем следующее выражение для  $\cos \theta_1^*$ :

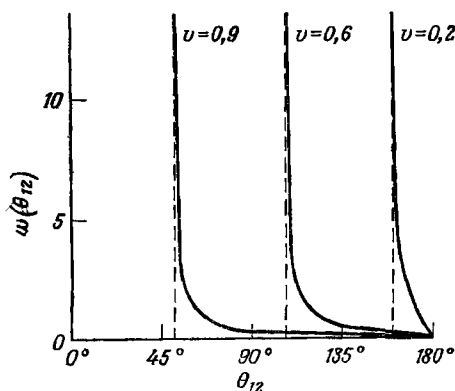
$$\cos \theta_1^* = \frac{\{v^2 - \cos^2(\theta_{12}/2)\}^{1/2}}{v \sin(\theta_{12}/2)}. \quad (2.4)$$

Подстановка в (2.1) приводит к результату [163\*] (см. также [68], стр. 32)

$$\omega(\cos \theta_{12}) = \frac{\omega^*(\cos \theta_1^*)}{4\gamma^2 v \sin^3(\theta_{12}/2) \{v^2 - \cos^2(\theta_{12}/2)\}^{1/2}}. \quad (2.5)$$

Распределение  $w(\theta_{12}) = \sin \theta_{12} w(\cos \theta_{12})$  показано на фиг. 17 для случая  $w^*(\cos \theta_1^*) = \text{const}$  и нескольких значений  $v$ . Отметим, что (2.5) означает существование минимального угла разлета (упражнения IV 2 и IV.6)<sup>1)</sup>.

Получим теперь выражения для  $w(\cos \theta_{12})$  в случае произвольных масс другим способом. Сначала положим в общей



Фиг. 17. Распределение углов разлета для распада на две частицы с нулевыми массами при некоторых значениях скорости распадающейся частицы.

формуле (III. 2.7) для дифференциального сечения  $x = \cos \theta_{12} = p_1 \cdot p_2 / P_1 P_2$ . Будем также предполагать, что матричный элемент постоянен, т. е.  $w^*(\cos \theta_1^*) = \text{const}$ . В противном случае конечный результат надо будет умножить на  $w^*(\cos \theta_1^*)$ , где  $\theta_1^*$  выражается через  $\theta_{12}$  посредством формулы (2.2). Заметим, что дифференциальное сечение и  $R_2$  различаются только постоянным множителем. Таким образом, мы имеем

$$w(\cos \theta_{12}) = \frac{R_2^{-1} dR_2}{d \cos \theta_{12}} = R_2^{-1} \int d^3 p_1 d^3 p_2 (4E_1 E_2)^{-1} \delta^4(p - p_1 - p_2) \delta\left(\cos \theta_{12} - \frac{p_1 \cdot p_2}{P_1 P_2}\right); \quad (2.6)$$

$R_2$  дается формулой (1.9). Записывая  $d^3 p_2$  в виде  $d^3 p_2 = 2E_2 \delta(p_2^2 - m_2^2) d^4 p_2$ , интегрируем по  $d^4 p_2$  и получаем

$$\begin{aligned} \frac{dR_2}{d \cos \theta_{12}} &= \int d^3 p_1 (2E_1)^{-1} \delta\{(p - p_1)^2 - m_2^2\} \delta\left\{\cos \theta_{12} - \frac{p_1 \cdot (p - p_1)}{P_1 P_2}\right\} = \\ &= \int_0^\infty dP_1 P_1^2 (2E_1)^{-1} \int d\phi_1 d \cos \theta_1 \delta(s + m_1^2 - m_2^2 - 2EE_1 + 2PP_1 \cos \theta_1) \times \\ &\quad \times \delta\left(\cos \theta_{12} - \frac{P \cos \theta_1 - P_1}{P_2}\right), \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Компактные аналитические формулы получаются также при  $m_1 = m_2 \neq 0$  [84\*] — Прим. ред.

где  $\theta_1$  — угол между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}_1$ . Интегрирование по  $\phi_1$  тривиально, а интегрирование по  $\cos \theta_1$  можно выполнить, используя первую  $\delta$ -функцию. Поскольку  $P_1 dP_1 = E_1 dE_1$ , имеем

$$\frac{dR_2}{d \cos \theta_{12}} = \left( \frac{\pi}{2P} \right) \int_{m_1}^{\infty} dE_1 \delta \left( \cos \theta_{12} - \frac{2EE_1 - 2E_1^2 - s + m_1^2 + m_2^2}{2(E_1^2 - m_1^2)^{1/2} \{(E - E_1)^2 - m_2^2\}^{1/2}} \right), \quad (2.7)$$

где зависимость от переменной интегрирования дана в явном виде. Чтобы выполнить в (2.7) интегрирование  $\delta$ -функции, нужно знать производную аргумента  $\delta$ -функции  $f(E_1)$ :

$$f'(E_1) = \frac{E_2 - E_1 - 1/2 (2E_1 E_2 - s + m_1^2 + m_2^2) (E_1 P_1^{-2} - E_2 P_2^{-2})}{P_1 P_2}.$$

Подставляя в (2.6) формулы (1.9) и (2.7), получаем окончательное выражение (см., например, [139])

$$\omega(\cos \theta_{12}) = s P_1 P_2 P^{-1} \lambda^{-1/2}(s, m_1^2, m_2^2) \times \\ \times \left\{ E_2 - E_1 - \frac{1}{2} (2E_1 E_2 - s + m_1^2 + m_2^2) (E_1 P_1^{-2} - E_2 P_2^{-2}) \right\}^{-1}. \quad (2.8)$$

Поскольку  $P_1, P_2, E_1, E_2$  — сложные функции  $\cos \theta_{12}$ , истинную зависимость  $\omega(\cos \theta_{12})$  от  $\theta_{12}$  установить нелегко. Чтобы пользоваться формулами (2.1), (2.2) или (2.8), нужны численные выкладки.

### 3. Рассеяние $2 \rightarrow 2$ : соотношения между СЦМ и СМ

Теперь мы приступим к рассмотрению реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$ , которую мы назовем рассеянием  $2 \rightarrow 2$ . Это наименование выбрано так, чтобы его легко было обобщить на случай большей множественности. Фазовое пространство (определенное для данного значения  $s$ ) теперь двумерно; оно параметризуется, например, углом рассеяния  $\theta$  и азимутальным углом  $\phi$ , описывающим вращение вокруг оси пучка. Последняя переменная тривиальна; остается только одна существенная переменная, описывающая конечное состояние. Общее число существенных переменных равно двум: одна фиксирует полную энергию, другая — угол рассеяния. Энергетические переменные (типа  $E_a, P_a, \sqrt{s}$ ) уже разбирались нами подробно в гл. II. В качестве угловой переменной мы выберем угол между  $\mathbf{p}_a$  и  $\mathbf{p}_1$  либо в СЦМ (фиг. 18), либо в системе мишени (фиг. 19):

$$\theta_1^* \equiv \theta_{a1}^* = \pi - \theta_{a2}^*, \quad (3.1)$$

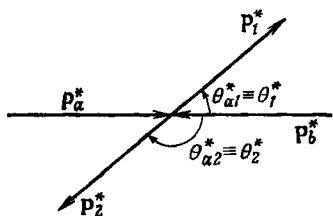
$$\theta_1 \equiv \theta_{a1}^M. \quad (3.2)$$

Эти переменные зависят от системы отсчета. Поскольку будут рассматриваться только величины, относящиеся к СЦМ и СМ,

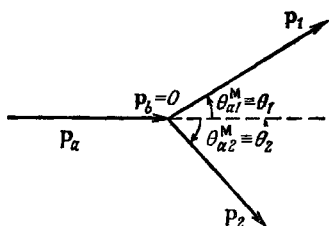
индекс  $M$  будет опускаться. По определению рассеяние на угол, близкий к  $\theta_1^* = 0$ , называют *рассеянием вперед*, а рассеяние на угол, близкий к  $\theta_1^* = \pi$ , — *рассеянием назад*. Заметим, что  $\theta_1$  и  $\theta_2 = \theta_{a2}^M$  связаны между собой сложным образом. Инвариантной переменной углового типа является *инвариантный квадрат переданного импульса*

$$t \equiv t_{a1} = (p_a - p_1)^2 = m_a^2 + m_1^2 - 2E_a E_1 + 2P_a P_1 \cos \theta_{a1}. \quad (3.3)$$

Анализ рассеяния  $2 \rightarrow 2$  с помощью инвариантов  $s$  и  $t$  важен в теоретическом отношении и будет подробно рассмотрен в следующем разделе. Данный раздел мы посвятим связи между



Фиг. 18. Углы рассеяния  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^* = \pi - \theta_1^*$ .



Фиг. 19. Углы рассеяния  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в системе мишени; в этом случае  $\theta_1$  и  $\theta_2$  связаны между собой сложным образом.

физическими величинами в СЦМ и СМ, особенно тем из них, которые важны для эксперимента.

В СЦМ рассеяние  $2 \rightarrow 2$  кинематически выглядит предельно просто, так как нет связи между энергией и углом вылета. Действительно, согласно (II.6.15), импульсы зависят от энергетической переменной:

$$\begin{aligned} P_a^* &= P_b^* = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{2\sqrt{s}}, \\ P_1^* &= P_2^* = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{2\sqrt{s}}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

а все углы (фиг. 18) — от одного угла  $\theta_1^*$ . В СМ все выглядит сложнее. Пусть значение  $\sqrt{s}$  задано, так что фиксировано начальное состояние  $p_a + p_b$  (фиг. 19). Тогда любая из четырех переменных, характеризующих конечное состояние  $P_1, \theta_1, P_2, \theta_2$ , будет определять остальные три. Наиболее интересные соотношения связывают а)  $P_1$  с  $\theta_1$  и  $P_2$  с  $\theta_2$  и б)  $\theta_1$  с  $\theta_2$ .

### а. Зависимость $P_i$ от $\theta_i$

Формулы для  $P_2$  получаются из формул для  $P_1$  перестановкой индексов 1 и 2, поэтому мы найдем только зависимость  $P_1 = P_1(\theta_1)$ . Ее нетрудно найти прямым вычислением (упражнение IV.8), но поучительнее будет воспользоваться результатами раздела II.8. Там было показано, как преобразуется сфера  $P_1^* = \text{const}$  при переходе в СМ. Нам остается только вычислить, каковы в данном случае параметры  $v$  и  $v_1^*$ .

Параметры преобразований Лоренца от СЦМ к СМ уже были вычислены ранее [см. формулы (II.6.23), (II.6.24)]:

$$\begin{aligned} v &= \frac{P_a}{E_a + m_b} = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{s - m_a^2 + m_b^2}, \\ \gamma &= \frac{E_a + m_b}{\sqrt{s}} = \frac{s - m_a^2 + m_b^2}{2m_b \sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Скорость частицы 1 и ее лоренц-фактор  $\gamma$  в СЦМ равны

$$\begin{aligned} v_1^* &= \frac{P_1^*}{E_1^*} = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{s + m_1^2 - m_2^2}, \\ \gamma_1^* &= \frac{E_1^*}{m_1} = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2m_1 \sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Характеристический параметр  $g_1^*$  [формула (II.8.22)] дается, таким образом, выражением

$$g_1^* = \frac{v}{v_1^*} = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{s - m_a^2 + m_b^2} \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}. \quad (3.7)$$

В зависимости от того, будет ли  $g_1^* < 1$  или  $g_1^* \geq 1$ , частица  $p_1$  может оказаться в СМ испущенной либо в любом направлении ( $0 < \theta_1 < 180^\circ$ ), либо только в переднюю полусферу ( $0 < \theta_1 < \theta_1^{\text{макс}} \leq 90^\circ$ ), как показывает подробный анализ, выполненный в разделе II.8. Изменение  $g_1^*$  при изменении  $\sqrt{s}$  зависит от относительной величины масс. Можно показать, что существует 10 качественно разных случаев [37].

Подставляя формулы (3.5)–(3.7) в (II.8.20) и (II.8.24) и выражая все величины через массы и через энергию  $E_a$  и



импульс  $P_a$  частиц пучка в СМ, можно получить следующие результаты:

$$P_1^\pm = \left[ P_a \left\{ m_b E_a + \frac{1}{2} (m_a^2 + m_b^2 + m_1^2 - m_2^2) \right\} \cos \theta_1 \pm \right. \\ \left. \pm (E_a + m_b) \left[ \left\{ m_b E_a + \frac{1}{2} (m_a^2 + m_b^2 - m_1^2 - m_2^2) \right\}^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - m_1^2 m_2^2 - m_1^2 P_a^2 \sin^2 \theta_1 \right]^{1/2} \right] \{ (E_a + m_b)^2 - P_a^2 \cos^2 \theta_1 \}^{-1}, \quad (3.8)$$

$$E_1^\pm = \left[ (E_a + m_b) \left\{ m_b E_a + \frac{1}{2} (m_a^2 + m_b^2 + m_1^2 - m_2^2) \right\} \pm \right. \\ \left. \pm P_a \cos \theta_1 \left[ \left\{ m_b E_a + \frac{1}{2} (m_a^2 + m_b^2 - m_1^2 - m_2^2) \right\}^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - m_1^2 m_2^2 - m_1^2 P_a^2 \sin^2 \theta_1 \right]^{1/2} \right] \{ (E_a + m_b)^2 - P_a^2 \cos^2 \theta_1 \}^{-1}. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.8) соответствует в пространстве импульсов эллипсоиду вращения, параметризованному теперь с помощью четырех масс и начальной энергии.

### б. Соотношение между $\theta_1$ и $\theta_2$

Во многих экспериментах, проводимых методом совпадений, важно знать  $\theta_2$ , если дано значение  $\theta_1$ . Существует много способов вывода соотношения между этими величинами. Например, можно использовать уравнение  $\theta_2^* = \pi - \theta_1^*$  в СЦМ ( $\theta_1$  измеряется в направлении против часовой стрелки, а  $\theta_2$  — по часовой стрелке). Тогда [см. (II.8.30)]

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{\sin \theta_1^*}{\gamma (\cos \theta_1^* + g_1^*)}, \\ \operatorname{tg} \theta_2 &= \frac{\sin \theta_1^*}{\gamma (-\cos \theta_1^* + g_2^*)}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $\gamma$  и  $g_1^*$  даны формулами (3.5) и (3.7), а  $g_2^*$  может быть получена из  $g_1^*$  заменой индекса 1 на 2 в формуле (3.7). Из этих выражений легко исключить  $\theta_1^*$  [применяя (II.8.32)] и получить соотношение между  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Общее соотношение не очень прозрачно, и на практике проводится численная оценка. Вместо того чтобы выписывать ее, мы показали на фиг. 20, как  $\theta_1$  и  $\theta_2$  зависят друг от друга при различных комбинациях  $g_1^*$  и  $g_2^*$ .

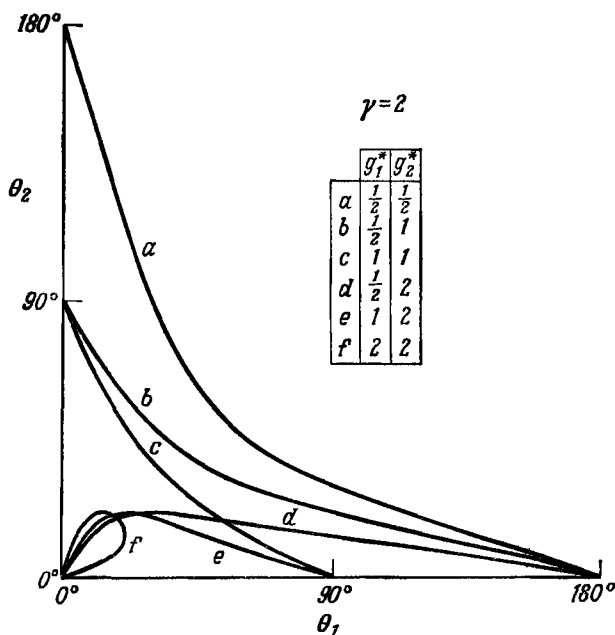
**Пример 1.** В качестве примера рассмотрим случай упругого рассеяния частиц с массами  $\mu m \rightarrow \mu m$  ( $m$  — масса мишени  $m_b$ ;

мы принимаем, что  $\mu \leq m$ ). Для характеристических параметров  $g_1^*$  и  $g_2^*$  из (3.7) получаем

$$g_1^* = \frac{s + \mu^2 - m^2}{s - \mu^2 + m^2} = \frac{E_a + \mu^2/m}{E_a + m} \leq 1 \quad (3.11)$$

и 
$$g_2^* = 1. \quad (3.12)$$

Как отмечено выше,  $g_2^* = 1$  означает, что испытывшая отдачу частица  $p_2$  движется в СМ в передней полусфере ( $0 \leq \theta_2 \leq \pi/2$ ). С другой стороны, частица пучка может рассеиваться



Фиг. 20. Соотношение между  $\theta_1$  и  $\theta_2$  для разных значений  $g_1^*$  и  $g_2^*$ .

в любом направлении, если массы не равны; если же  $\mu = m$ , то и  $\theta_1 \leq \pi/2$ .

В этом частном случае формулы (3.8) и (3.9) имеют вид

$$P_1 = \frac{(mE_a + \mu^2) \cos \theta_1 + (E_a + m)(m^2 - \mu^2 \sin^2 \theta_1)^{1/2}}{(E_a + m)^2 - P_a^2 \cos^2 \theta_1} P_a, \quad (3.13)$$

$$E_1 = \frac{(mE_a + \mu^2)(E_a + m) + P_a^2 \cos \theta_1 (m^2 - \mu^2 \sin^2 \theta_1)^{1/2}}{(E_a + m)^2 - P_a^2 \cos^2 \theta_1}$$

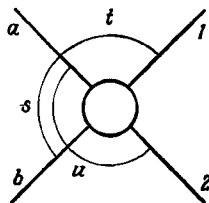
и

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \frac{2m(E_a + m)P_a \cos \theta_2}{(E_a + m)^2 - P_a^2 \cos^2 \theta_2}, \\
 E_2 &= \frac{(E_a + m)^2 + P_a^2 \cos^2 \theta_2}{(E_a + m)^2 - P_a^2 \cos^2 \theta_2} m.
 \end{aligned}
 \quad (3.14)$$

Они дополнительно упрощаются, если  $\mu = m$  (например в протон-протонном рассеянии) или  $\mu = 0$  (например в комптоновском рассеянии или в электрон-протонном рассеянии при высоких энергиях). Эти случаи предложено разобрать в качестве упражнений (упражнение IV.9). Соотношение между  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в этих случаях также оказывается простым (упражнение IV.10).

#### 4. Инвариантные переменные для рассеяния $2 \rightarrow 2$

Инвариантный расчет рассеяния  $2 \rightarrow 2$  является основной кинематической задачей физики элементарных частиц, и в той или иной форме его можно найти практически в любой книге,



Фиг. 21. Инвариантные переменные для процесса  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$ .

относящейся к этой области. Выше мы уже широко пользовались инвариантом  $s$  и упоминали инвариант  $t$ . По причинам, связанным с переходом из канала в канал (*кроссинг-преобразование*), вводят третий инвариант  $u$ . Таким образом, определения инвариантов для процесса  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$  можно суммировать в следующем виде (фиг. 21):

$$\begin{aligned}
 s &= (p_a + p_b)^2 = (p_1 + p_2)^2 = (E_a^* + E_b^*)^2 = \\
 &= (E_1^* + E_2^*)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2m_b E_a^M,
 \end{aligned}
 \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
 t &= (p_a - p_1)^2 = (p_b - p_2)^2 = \\
 &= m_a^2 + m_1^2 - 2E_a E_1 + 2P_a P_1 \cos \theta_{a1} = \\
 &= m_b^2 + m_2^2 - 2m_b E_2^M \quad (\text{в СЦМ или СМ}),
 \end{aligned}
 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}
 u &= (p_a - p_2)^2 = (p_b - p_1)^2 = \\
 &= m_a^2 + m_2^2 - 2E_a E_2 + 2P_a P_2 \cos \theta_{a2} = \\
 &= m_b^2 + m_1^2 - 2m_b E_1^M \quad (\text{в СЦМ или СМ}).
 \end{aligned}
 \quad (4.3)$$

Поскольку существуют только две независимые переменные,  $s$ ,  $t$  и  $u$  должны быть связаны между собой. Действительно, между ними существует линейная связь:

$$\begin{aligned} s + t + u &= (p_a + p_b)^2 + (p_a - p_1)^2 + (p_b - p_1)^2 = \\ &= p_a^2 + p_b^2 + p_1^2 + (p_a + p_b - p_1)^2 = \\ &= m_a^2 + m_b^2 + m_1^2 + m_2^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Введение трех зависимых переменных вызвано необходимостью перехода из канала в канал (кроссинга). Этот переход чрезвычайно важен в динамике, однако в кинематике он почти тривиален. До сих пор мы исследовали реакцию  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$ , предполагая, что все энергии положительны:  $p = (E, \mathbf{p})$ , где  $E = +(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} \geq m \geq 0$ . Но уравнение сохранения 4-импульса, являясь аналитическим, справедливо также и в случае, если импульс  $p$  времени подобен и имеет отрицательную 0-компоненту:  $p = (E, \mathbf{p})$ , где  $E = -(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ . Тогда можно записать условие сохранения 4-импульса в следующих равнозначных формах:

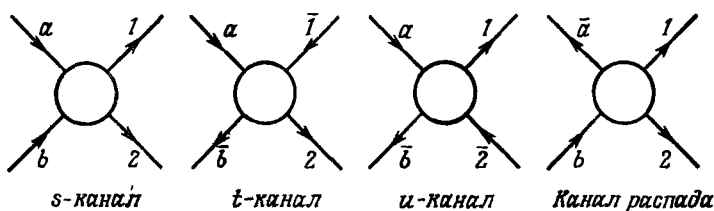
$$\begin{aligned} p_a + p_b &= p_1 + p_2, \\ p_a + (-p_1) &= (-p_b) + p_2, \\ p_a + (-p_2) &= p_1 + (-p_b), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где во второй строчке  $p_1$  и  $p_b$  имеют отрицательное значение  $E$ , а в третьей строчке отрицательными значениями  $E$  обладают  $p_2$  и  $p_b$ . Эти соотношения можно, однако, истолковать как уравнения сохранения 4-импульса для реакций

$$\begin{aligned} p_a + p_b &\rightarrow p_1 + p_2 && (s\text{-канал}), \\ p_a + p_{\bar{1}} &\rightarrow p_{\bar{b}} + p_2 && (t\text{-канал}), \\ p_a + p_{\bar{2}} &\rightarrow p_1 + p_{\bar{b}} && (u\text{-канал}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

схематически показанных на фиг. 22, где черточка над буквой отмечает античастицу соответствующей частицы, а все 4-импульсы имеют теперь положительные значения  $E$ . С кинематической точки зрения нет необходимости говорить об античастицах; однако если принимаются в расчет динамические свойства, то следует выполнять сопряжение частица — античастица, когда частица переносится из одной части уравнения реакции в другую. Трем каналам реакции даются наименования ( $s$ ,  $t$  и  $u$ ) по тем переменным, которые положительны (являются переменными типа энергии) для рассматриваемого канала. Тогда

две остальные переменные являются инвариантными квадратами переданного импульса. Например,  $t$  всегда определяется выражением  $t = (p_a - p_1)^2$ . Однако в  $t$ -канале  $p_1$  имеет отрицательное значение  $E_1$ , и поэтому в системе отсчета  $p_a - p_1 = p_a + p_{\bar{1}} = 0$  (СЦМ  $t$ -канала) энергетическая переменная есть



Фиг. 22. Различные каналы реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$  и канал распада, который является физическим, если  $m_b > m_1 + m_2 + m_a$ .

$t = (E_a - E_1)^2 = (E_a + |E_1|)^2 \geq (m_a + m_1)^2$ . Точно так же можно показать, что  $s$  и  $u$  являются в  $t$ -канале квадратами переданного импульса.

В дополнение к каналам рассеяния (4.6) могут также существовать каналы распада. Например, если  $m_b > m_a + m_1 + m_2$  (фиг. 22), то может иметь место распад

$$p_b \rightarrow p_a + p_1 + p_2. \quad (4.7)$$

Таким образом, возможны четыре канала распада.

Разные каналы могут выглядеть совершенно различным образом, и в динамике при переходе от одного канала к другому (что выполняется с использованием предположения об аналитичности амплитуды рассеяния) можно получить много полезной информации. Но в кинематике связь каналов означает лишь тривиальную переменную знака 4-импульса. По этой причине если расписать кинематику какого-то из каналов в инвариантах  $s$ ,  $t$  и  $u$ , то следствия для других каналов получатся автоматически. Значит, когда мы в дальнейшем будем говорить о канале  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$  и о плоскости  $st$ , то при этом будет подразумеваться, что выполняемые расчеты симметричны относительно перехода из канала в канал, несмотря на их внешне несимметричный вид, т. е. все каналы рассматриваются на равной основе.

Для практики очень важны соотношения между инвариантами  $s$ ,  $t$  и  $u$  и теми величинами, которые зависят от системы отсчета. Мы приведем некоторые из этих соотношений, всегда оперируя в системах отсчета для  $s$ -канала. Мы свяжем также инвариантное дифференциальное сечение  $d\sigma/dt$  с амплитудой.

*а. Соотношения между  $s$ ,  $t$ ,  $u$  и величинами, относящимися к СЦМ*

Соотношения между  $s$  и энергиями и импульсами в СЦМ очень простые, поскольку в них не входят углы. Эти соотношения были выведены в разделах II.6 и IV.1; здесь мы приводим их снова:

$$\begin{aligned} P_a^* &= P_b^* = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{2\sqrt{s}}, & P_1^* &= P_2^* = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{2\sqrt{s}}, \\ E_a^* &= \frac{s + m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}}, & E_b^* &= \frac{s + m_b^2 - m_a^2}{2\sqrt{s}}, \\ E_1^* &= \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}, & E_2^* &= \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из первых двух формул следует, что  $s \geq \max\{(m_a + m_b)^2, (m_1 + m_2)^2\}$ . Подставляя (4.8) в соотношение (4.2), связывающее  $t$  и  $\cos \theta_{a1}^*$ , получаем для  $\cos \theta_{a1}^*$

$$\begin{aligned} \cos \theta_{a1}^* &= \frac{t - m_a^2 - m_1^2 + 2E_a^* E_1^*}{2P_a^* P_1^*} = \\ &= \frac{2s(t - m_a^2 - m_1^2) + (s + m_a^2 - m_b^2)(s + m_1^2 - m_2^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)} = \\ &= \frac{s^2 + s(2t - m_a^2 - m_b^2 - m_1^2 - m_2^2) + (m_a^2 - m_b^2)(m_1^2 - m_2^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)} = \\ &= \frac{s(t - u) + (m_a^2 - m_b^2)(m_1^2 - m_2^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

В следующем разделе мы дадим независимый вывод формулы для  $\sin \theta_{a1}^*$ , основанный на результатах, полученных в разделе II.7. Зная  $\theta_{a1}^*$ , можно найти и другие углы, например  $\theta_{a2}^* = \pi - \theta_{a1}^*$  и т. д. Формулу (4.9) полезно также вывести, воспользовавшись правилом (II.7.8) (упражнение IV.13).

*б. Соотношения между  $s$ ,  $t$ ,  $u$  и величинами, относящимися к СМ*

Для величин, характеризующих начальное состояние, мы уже вывели соотношения

$$\begin{aligned} p_a &= \left( \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_b}, 0, 0, \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{2m_b} \right), \\ p_b &= (m_b, 0, 0, 0). \end{aligned} \quad (4.10)$$

В конечном состоянии нам требуется определить две энергии  $(E_1^M, E_2^M)$ , два импульса  $(P_1^M, P_2^M)$  и два угла  $(\theta_{a1}^M, \theta_{a2}^M)$  (фиг. 19). Энергии теперь проще всего связать с переданными импульсами. Например, из формулы (4.2) сразу получаем

$$E_2^M = \frac{m_b^2 + m_2^2 - t}{2m_b}, \quad (4.11)$$

или

$$P_2^M = \frac{\lambda^{1/2}(t, m_b^2, m_2^2)}{2m_b}. \quad (4.12)$$

Аналогично из формулы (4.3) находим

$$E_1^M = \frac{m_b^2 + m_1^2 - u}{2m_b}, \quad (4.13)$$

$$P_1^M = \frac{\lambda^{1/2}(u, m_b^2, m_1^2)}{2m_b}. \quad (4.14)$$

Заметим, что соотношения (4.12) и (4.14) требуют выполнения условия для псевдопорога (1.23):  $t \leq (m_b - m_2)^2$ ,  $u \leq (m_b - m_1)^2$ . Из аналогичных соотношений в системе пучка (СП) следует  $t \leq (m_a - m_1)^2$ ,  $u \leq (m_a - m_2)^2$ . Наконец, углы  $\theta_{a1}^M$  и  $\theta_{a2}^M$  получаются из соотношений  $t = (p_a - p_1)^2$  и  $u = (p_a - p_2)^2$ , и формулы для них имеют следующий вид:

$$\cos \theta_{a1}^M = \frac{(s - m_a^2 - m_b^2)(m_o^2 + m_1^2 - u) + 2m_b^2(t - m_a^2 - m_1^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_o^2) \lambda^{1/2}(u, m_o^2, m_1^2)}, \quad (4.15)$$

$$\cos \theta_{a2}^M = \frac{(s - m_a^2 - m_b^2)(m_o^2 + m_2^2 - t) + 2m_b^2(u - m_a^2 - m_2^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \lambda^{1/2}(t, m_b^2, m_2^2)} \quad (4.16)$$

Соотношения (4.8)–(4.16) относятся к системам отсчета для  $s$ -канала. Для многих теоретических целей важно иметь возможность выражать нековариантные величины в системах отсчета для  $t$ - и  $u$ -каналов через  $s$ ,  $t$  и  $u$ . Нужные соотношения получают из соотношений (4.8)–(4.16) путем простой перестановки индексов. Для перехода из  $s$ -канала в  $t$ -канал меняют местами индексы 1 и  $b$  ( $s \leftrightarrow t$ ,  $u$  не меняется); чтобы перейти из  $s$ - в  $u$ -канал, то же проделывают с индексами 2 и  $b$  ( $s \leftrightarrow u$ ,  $t$  не меняется). Например, угол рассеяния в СЦМ  $t$ -канала дается формулой [ср. (4.9)]

$$\cos \theta_{ab}^{*(t)} = \frac{t(s - u) + (m_a^2 - m_1^2)(m_b^2 - m_2^2)}{\lambda^{1/2}(t, m_a^2, m_1^2) \lambda^{1/2}(t, m_b^2, m_2^2)}. \quad (4.17)$$

### в. Формулы для сечений

При нормировочном условии (III.2.2)—(III.2.4) сечение реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$  выражается следующим образом:

$$\sigma(s) = \frac{1}{8\pi^2 \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \int \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} \delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2) |A|^2. \quad (4.18)$$

Матричный элемент  $A$  является функцией двух независимых переменных. Если вычисляется дифференциальное сечение  $d\sigma/dx$ , то интегрировать  $|A|^2$  не нужно, поскольку на самом деле в (4.18) имеется только одно нетривиальное интегрирование.

Интеграл (4.18) уже вычислялся в разделе IV.1. На основании формул (1.7) и (1.12) можно сразу написать для СЦМ и СМ:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1^*} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{P_1^*}{P_a^*} |A|^2, \quad (4.19)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1^M} = \frac{1}{64\pi^2 m_b P_a^M} \frac{(P_1^M)^2}{(E_a^M + m_b) P_1^M - P_a^M E_1^M \cos \theta_{a1}^M} |A|^2. \quad (4.20)$$

В формуле (4.20)  $P_1^M$  само зависит от  $\theta_{a1}^M$  [см. формулу (3.8)]. Аналогичные формулы для  $d\sigma/d\Omega_2^*$  и  $d\sigma'/d\Omega_2^M$  получаются заменой  $1 \leftrightarrow 2$ . В некоторых особых случаях выражения (4.19), (4.20) упрощаются (см. упражнение IV.12).

Вместо нековариантных сечений (4.19), (4.20) обычно удобнее (например, для записи результатов эксперимента) использовать инвариантное сечение  $d\sigma/dt$ . Его можно получить непосредственно из (4.19). Согласно (4.2),

$$dt = 2P_a^* P_1^* d \cos \theta_{a1}^* = \frac{1}{\pi} P_a^* P_1^* d\Omega_1^*. \quad (4.21)$$

Тогда

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{d\Omega_1^*} \frac{d\Omega_1^*}{dt} = \frac{|A|^2}{64\pi s P_a^{*2}} = \frac{|A|^2}{16\pi \lambda(s, m_a^2, m_b^2)}. \quad (4.22)$$

Очень полезно дать непосредственный вывод формулы (4.22). Для этого мы должны взять интеграл

$$\frac{dR_2}{dt} = \int \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} \delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2) \delta\{t - (p_a - p_1)^2\}. \quad (4.23)$$

Под интеграл можно поместить и величину  $|A(s, t)|^2$ , поскольку при интегрировании она является константой ( $s$  и  $t$



теперь постоянные). Подставляя в (4.23) формулу (III.2.11) и интегрируя по  $d^4p_2$ , получаем

$$\frac{dR_2}{dt} = \int \left( \frac{d^3p_1}{2E_1} \right) \delta \{ (p_a + p_b - p_1)^2 - m_2^2 \} \delta \{ t - (p_a - p_1)^2 \}.$$

Затем, переходя в СЦМ, где должно быть  $p_a + p_b = 0$ , и используя равенство

$$\frac{d^3p_1}{2E_1} = \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{2E_1} = \pi P_1 dE_1 d \cos \theta_{a1},$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{dR_2}{dt} = \pi P_1^* \int_{m_1}^{\infty} dE_1^* \int_{-1}^1 d \cos \theta_{a1}^* \delta(s - 2E_1^* \sqrt{s} + m_1^2 - m_2^2) \times \\ \times \delta(t - m_a^2 - m_1^2 - 2E_a^* E_1^* + 2P_a^* P_1^* \cos \theta_{a1}^*). \end{aligned}$$

Интеграл по  $E_1^*$  вычисляется с помощью  $\delta$ -функции (интеграл отличен от нуля, если  $m_1 \leq E_1^* < \infty$ ), а для интегрирования по  $\cos \theta_{a1}^*$  используется вторая  $\delta$ -функция (интеграл не равен нулю, когда  $-1 \leq \cos \theta_{a1}^* \leq 1$ ). Собрав все множители вместе, найдем явный вид выражения для  $dR_2/dt$ . В дальнейшем (в разделе V.5) нам понадобится интегральная форма этого выражения:

$$R_2(s) = \frac{1}{4} \lambda^{-1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \int d\varphi_1 dt \Theta(1 - \cos^2 \theta_{a1}^*) \Theta(E_1^* - m_1). \quad (4.24)$$

Подынтегральное выражение отлично от нуля только при условии, что  $E_1^* \geq m_1$ ,  $-1 \leq \cos \theta_{a1}^* \leq 1$ . Будучи выраженными через  $s$  и  $t$ , эти требования определяют в плоскости  $st$  физическую область, которая будет рассмотрена в следующем разделе. Введение фактора потока  $F$ , определяемого выражением  $F^{-1} = 8\pi^2 \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)$ , снова приводит к формуле (4.22).

Сечение реакции можно теперь вычислить по формуле

$$\sigma(s) = \frac{1}{16\pi\lambda(s, m_a^2, m_b^2)} \int_{t^-}^{t^+} dt |A(s, t)|^2, \quad (4.25)$$

где  $t^\pm = t^\pm(s, m_i^2)$  — предельные значения  $t$  для фиксированного значения  $s$ , которые будут определены в следующем разделе [формула (5.31)].

Полное сечение реакции « $p_a + p_b \rightarrow$  что угодно» с помощью оптической теоремы [68] выражается через амплитуду рассеяния вперед для упругого процесса  $\mu m \rightarrow \mu m$ :

$$\text{Im } A(s, t=0) = \lambda^{1/2}(s, m^2, \mu^2) \sigma_{\text{полн}}(s). \quad (4.26)$$

Ниже мы покажем, что направление вперед соответствует для упругого рассеяния случаю  $t = 0$  [формула (5.8)]; комбинируя уравнения (4.26) и (4.22), можно вычислить действительную часть амплитуды рассеяния вперед:

$$\{\operatorname{Re} A(s, t=0)\}^2 = \lambda(s, m^2, \mu^2) \left\{ 16\pi \frac{d\sigma}{dt} \Big|_{t=0} - \sigma_{\text{полн}}^2(s) \right\}. \quad (4.27)$$

Это положительная величина, поэтому

$$\frac{d\sigma}{dt} \Big|_{t=0} \geq \frac{1}{16\pi} \sigma_{\text{полн}}^2(s). \quad (4.28)$$

Значение  $d\sigma/dt|_{t=0}$ , соответствующее знаку равенства, называется *оптической точкой*. Пользуясь формулой (4.28) или другими, относящимися к  $d\sigma/dt$  и  $\sigma^2(s)$ , следует помнить, что последние имеют размерности мб/(ГэВ/с)<sup>2</sup> и мб<sup>2</sup>; при этом  $1/(\text{ГэВ})^2 = 0,389$  мб (II.3.7).

## 5. Физическая область изменения $s$ , $t$ и $u$

Когда реакция  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$  описывается, например, в переменных  $E_1^*$  и  $\theta_{a1}^*$ , имеющих прямой физический смысл, то физическая область для  $s$ -канала определяется легко:  $E_1^* \geq m_1$ ,  $-1 \leq \cos \theta_{a1}^* \leq 1$ . Другими словами, реакцию  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$  можно экспериментально измерять в любой точке внутри этой области. Теперь перед нами стоит проблема определения этой области в плоскости  $st$ . Сложность решения задачи зависит от того, каковы массы частиц. Сначала мы разберем случай упругого рассеяния, а затем приступим к общему случаю.

**Пример 1.** Допустим, что в реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$   $m_a = m_1 = \mu$ , а  $m_b = m_2 = m$ , причем можно принять  $\mu \leq m$ . Это упругое рассеяние (например  $\pi^- p \rightarrow \pi^- p$ ) или близкие к нему процессы перезарядки (например  $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ ). Поскольку этот случай весьма важен, мы дадим здесь в упрощенной форме сводку кинематических соотношений между  $s$ ,  $t$ ,  $u$  и некоторыми величинами, относящимися к СЦМ  $s$ -канала. Для энергий и импульсов из формул (4.8) имеем

$$\begin{aligned} E_a^* &= E_1^* = \frac{s + \mu^2 - m^2}{2\sqrt{s}}, \\ E_b^* &= E_2^* = \frac{s - m^2 + \mu^2}{2\sqrt{s}}, \\ P_a^* &= P_b^* = P_1^* = P_2^* \equiv P^* = \frac{\lambda^{1/2}(s, m^2, \mu^2)}{2\sqrt{s}}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

а для угла рассеяния  $\theta_{a1}^*$  из формулы (4.9) получаем

$$\cos \theta_{a1}^* = 1 + \frac{2st}{\lambda(s, m^2, \mu^2)}, \quad (5.2)$$

или

$$t = -\frac{\lambda(s, m^2, \mu^2)}{2s} (1 - \cos \theta_{a1}^*) = -2P^{*2} (1 - \cos \theta_{a1}^*) = \\ = -4P^{*2} \sin^2 \frac{1}{2} \theta_{a1}^*. \quad (5.3)$$

Особо отметим простую формулу (5.3) (упражнение IV.14). Зависимость между  $u$  и  $\cos \theta_{a1}^*$  получаем из соотношения

$$s + t + u = 2m^2 + 2\mu^2 \quad (5.4)$$

в виде

$$u = \frac{(m^2 - \mu^2)^2}{s} - \frac{\lambda(s, m^2, \mu^2)}{2s} (1 + \cos \theta_{a1}^*). \quad (5.5)$$

По сравнению с формулой (5.3) в (5.5) появляется еще один важный член, который означает, что для направления назад

$$u(\theta_{a1}^* = \pi) = \frac{(m^2 - \mu^2)^2}{s}, \quad (5.6)$$

в то время как для направления вперед

$$t(\theta_{a1}^* = 0) = 0. \quad (5.7)$$

Этот дополнительный член подробно рассматривается в разделе 6.

Границу физической области можно теперь получить из условия, что  $\cos \theta_{a1}^*$  в уравнении (5.2) лежит в пределах  $-1 \leq \cos \theta_{a1}^* \leq 1$ . Верхний предел  $t$  достигается, когда

$$\left. \begin{aligned} t &= 0, \\ u &= 2m^2 + 2\mu^2 - s, \end{aligned} \right\} (\cos \theta_{a1}^* = 1), \quad (5.8)$$

а нижний предел, когда

$$\left. \begin{aligned} t &= -\frac{\lambda(s, m^2, \mu^2)}{s}, \\ u &= \frac{(m^2 - \mu^2)^2}{s}, \end{aligned} \right\} (\cos \theta_{a1}^* = -1). \quad (5.9)$$

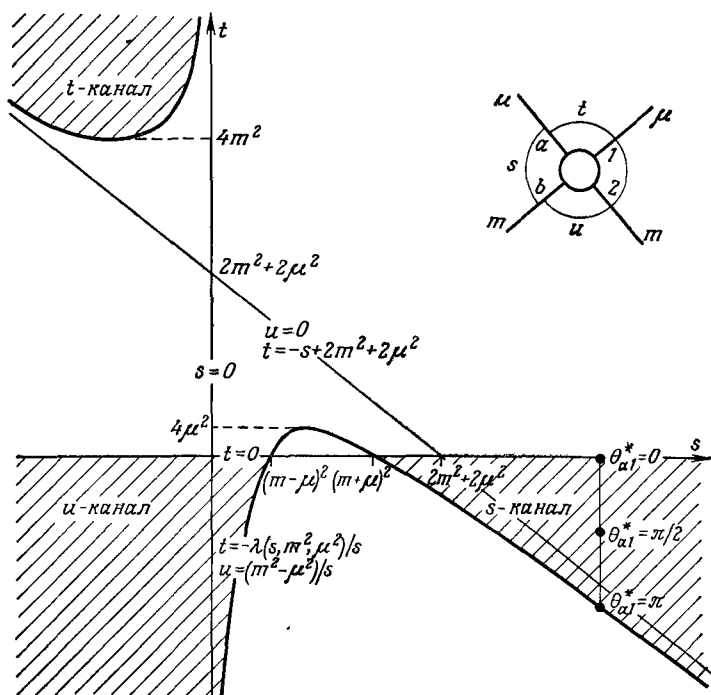
В плоскости  $st$  (5.8) представляет собой прямую линию, а (5.9) — гиперболу с асимптотами

$$s = 0, \quad u = 0 \quad (\text{или } t = -s + 2m^2 + 2\mu^2) \quad (5.10)$$

(фиг. 23). Кривые (5.8) и (5.9) пересекаются в точках  $s = (m \pm \mu)^2$ . Значение  $s = (m + \mu)^2$  соответствует порогу ( $P^* = 0$ ) реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$ . Для каждого значения  $s$ , превышающего это значение, вертикальный отрезок между кривыми (5.8) и (5.9) соответствует полному интервалу значений

углов  $-1 \leq \cos \theta_{a1} \leq 1$ . Отметим, что пороговое условие оказывается автоматически включенным в условие (5.9) для углов. Таким образом, физическая область для реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$  определена.

Хотя при выводе уравнений (5.8), (5.9) мы использовали только относящийся к  $s$ -каналу угол  $\theta_{a1}$ , эти уравнения дают



Фиг. 23. Физическая область в плоскости  $st$  для масс  $\mu t \rightarrow \mu t$ .

также физические области для  $u$ -канала [ $u \geq (m + \mu)^2$ ] и  $t$ -канала ( $t \geq 4m^2$ ). Эти области тоже показаны на фиг. 23.

Теперь мы можем вернуться к случаю произвольных масс. Рассматривая распад  $p \rightarrow p_i + p_j$ , мы убедились выше, что

$$\Delta_2(p_i, p_j) = p_i^2 p_j^2 - (p_i \cdot p_j)^2 \leq 0. \quad (5.11)$$

Равным образом инвариант  $(p_i + p_j)^2$  должен удовлетворять условиям

$$(p_i + p_j)^2 \geq (m_i + m_j)^2$$

или

$$(p_i + p_j)^2 \leq (m_i - m_j)^2.$$

Следовательно, в реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$  величина  $s = (p_a + p_b)^2 = (p_1 + p_2)^2$  должна быть больше, чем каждая из величин  $(m_a + m_b)^2$  и  $(m_1 + m_2)^2$ , или меньше, чем любая из величин  $(m_a - m_b)^2$  и  $(m_1 - m_2)^2$ . Поскольку то же справедливо для всех инвариантов, мы видим, что в каналах рассеяния физические величины  $s$ ,  $t$  и  $u$  должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}
 & s \geq \max \{(\bar{m}_a + m_b)^2, (m_1 + m_2)^2\} \\
 \text{или} & s \leq \min \{(m_a - m_b)^2, (m_1 - m_2)^2\}, \\
 & t \geq \max \{(m_a + m_1)^2, (m_b + m_2)^2\} \\
 \text{или} & t \leq \min \{(m_a - m_1)^2, (m_b - m_2)^2\}, \\
 & u \geq \max \{(m_a + m_2)^2, (m_b + m_1)^2\} \\
 \text{или} & u \leq \min \{(m_a - m_2)^2, (m_b - m_1)^2\}.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Имея дело с распадными каналами (сначала мы рассматриваем случай  $p_b \rightarrow p_{\bar{a}} + p_1 + p_2$ ), необходимо помнить, что в уравнении  $p_a + p_b = p_1 + p_2$  4-импульсу  $p_a$  теперь соответствует отрицательная энергия. Чтобы у  $p_a$  энергия стала положительной, проведем замену  $p_a \rightarrow -p_a$ ; после этого  $s = (p_b - p_a)^2 = (p_1 + p_2)^2$  будет удовлетворять условию  $(m_1 + m_2)^2 \leq s \leq (m_b - m_a)^2$ . Применив ту же процедуру к  $t = (p_a + p_1)^2 = (p_b - p_2)^2$  и к  $u = (p_b - p_1)^2 = (p_a + p_2)^2$ , найдем

$$\begin{aligned}
 (m_1 + m_2)^2 & \leq s \leq (m_b - m_a)^2, \\
 (m_a + m_1)^2 & \leq t \leq (m_b - m_2)^2, \\
 (m_a + m_2)^2 & \leq u \leq (m_b - m_1)^2.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

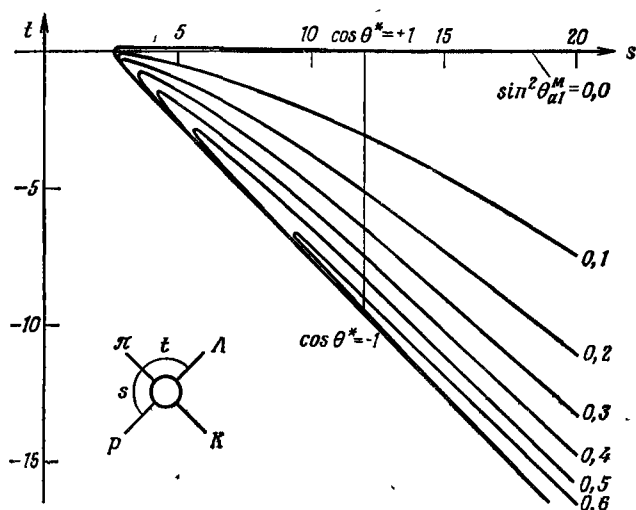
Очевидно, эти неравенства могут выполняться только при условии, что  $m_b \geq m_1 + m_2 + m_a$ . Если не  $m_b$ , а  $m_a$ ,  $m_1$  или  $m_2$  больше, чем сумма остальных масс, то для каждого случая получится свой набор аналогичных неравенств. Вместе с неравенствами (5.12) и (5.13) они исчерпывают все условия вида  $\Delta_2 \leq 0$ , выраженные через  $s$ ,  $t$  и  $u$ .

Кроме неравенств (5.12), следует еще наложить условие  $|\cos \theta_{a1}^*| \leq 1$ . Как будет показано ниже, оно приводит к условию вида  $\Delta_3 \geq 0$ , которое накладывает ограничения одновременно на  $s$  и на  $t$ . Действительно, подставляя  $\cos \theta_{a1}^* = \pm 1$  в уравнение (4.9) и используя (4.8), чтобы выразить энергии

и импульсы через  $s$ , сразу получаем

$$\begin{aligned} t^{\pm} &= m_a^2 + m_1^2 - 2E_a^* E_1^* \pm 2P_a^* P_1^* = \\ &= m_a^2 + m_1^2 - \frac{1}{2s} \{ (s + m_a^2 - m_b^2)(s + m_1^2 - m_2^2) \mp \\ &\mp \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2) \}; \quad (5.14) \end{aligned}$$

здесь  $t^+$  и  $t^-$  соответствуют двум значениям  $\cos \theta_{a1}^* = \pm 1$ . В частности,  $t^+$  (величина, часто обозначаемая  $|t|_{\text{мин}}$ ) есть



Фиг. 24. Физическая область для реакции  $\pi r \rightarrow \Lambda K$  в плоскости  $st$ .

Показаны также кривые постоянного угла рассеяния  $\theta_{a1}^M$  в системе покоя мишени.

значение  $t$  при рассеянии вперед (раздел 6). Для упругого рассеяния уравнение (5.14) сводится к (5.8), (5.9). В общем случае уравнение (5.14) дает границу физической области для рассеяния  $2 \rightarrow 2$  в плоскости  $st$ . На фиг. 24 приведен пример такой области; другие примеры см. на фиг. 28 и 29.

Уравнение (5.14) в действительности дает физическую область во всех возможных каналах, хотя это сразу не очевидно. Чтобы увидеть симметрию по отношению к различным каналам и получить результат в компактной форме, проще всего определить границу физической области не из условий  $\cos \theta_{a1}^* = \pm 1$  а из эквивалентного условия  $\sin^2 \theta_{a1}^* = 0$  [71]. Для вычисления  $\sin \theta_{a1}^*$  неудобно исходить из уравнения (4.9); лучше выразить  $\sin \theta_{a1}^*$  через инварианты, как мы это делали в разделе II.7. Мы

знаем, что  $\theta_{a1}^*$  — угол между  $p_a$  и  $p_1$  в системе отсчета  $p_a + p_b \Rightarrow 0$ . Тогда соотношение (II.7.9) позволяет написать

$$sP_a^{*2}P_1^{*2}\sin^2\theta_{a1}^* = \Delta_3(p_a + p_b, p_a, p_1) = \Delta_3(p_a, p_b, p_1), \quad (5.15)$$

где использована формула (A.6). Определитель Грама  $\Delta_3$  представляет собой следующую функцию  $s$ ,  $t$  и масс:

$$\Delta_3(p_a, p_b, p_1) = \begin{vmatrix} p_a^2 & p_a \cdot p_b & p_a \cdot p_1 \\ p_a \cdot p_b & p_b^2 & p_b \cdot p_1 \\ p_a \cdot p_1 & p_b \cdot p_1 & p_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2m_a^2 & s - m_a^2 - m_b^2 & m_a^2 + m_1^2 - t \\ s - m_a^2 - m_b^2 & 2m_b^2 & m_b^2 + m_1^2 - u \\ m_a^2 + m_1^2 - t & m_b^2 + m_1^2 - u & 2m_1^2 \end{vmatrix}. \quad (5.16)$$

Если раскрыть определитель в правой части (5.16), то получается *базисная четырехчастичная кинематическая функция*  $G(x, y, z, u, v, w)$  [109], связанная с  $\Delta_3$  таким же образом, каким функция  $\lambda(x, y, z)$  связана с  $\Delta_2$  [см. (II.7.4)]:

$$\Delta_3(p_a, p_b, p_1) =$$

$$= -\frac{1}{4} G\{(p_a + p_b)^2, (p_a - p_1)^2, (p_a + p_b - p_1)^2, p_a^2, p_b^2, p_1^2\} =$$

$$= -\frac{1}{4} G(s, t, m_a^2, m_b^2, m_1^2). \quad (5.17)$$

Свойства функции  $G$  мы проанализируем весьма подробно. С помощью этой функции можно записать уравнение (5.15) в виде

$$\sin^2\theta_{a1}^* = -4s \frac{G(s, t, m_a^2, m_b^2, m_1^2)}{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}. \quad (5.18)$$

*Физическая область для рассеяния  $2 \rightarrow 2$  в плоскости  $st$*  должна удовлетворять, следовательно, кроме условий вида (5.12) или (5.13), требованию

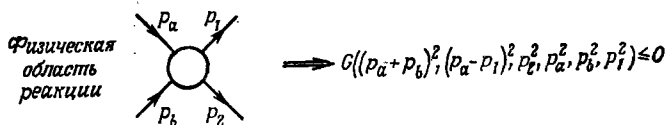
$$\Delta_3 \geq 0, \quad (5.19)$$

где аргументами могут быть любые три линейно независимые комбинации  $p_a, p_b, p_1$  и  $p_2$ , или эквивалентному требованию

$$G(s, t, m_a^2, m_b^2, m_1^2) \leq 0. \quad (5.20)$$

Заметим, в частности, что неравенство (5.20) применимо даже в том случае, когда какой-либо из импульсов  $p_i$  является 4-импульсом не отдельной частицы, а группы частиц. В этом

случае  $m_i$  — инвариантная масса группы. Таким образом, неравенство (5.20) является весьма общим. Полезно запомнить его в форме мнемонического правила, изображенного на фиг. 25.



Фиг. 25.

Для вывода условия (5.20) можно воспользоваться и углом рассеяния  $\theta_{a1}^M$  в системе мишени. Чтобы выразить  $\theta_{a1}^M$  через инварианты, используем правило (II.7.9) для записи в инвариантном виде угла между  $p_a$  и  $p_1$  в системе отсчета  $p_b = 0$ :

$$m_b^2 (P_a^M P_1^M)^2 \sin^2 \theta_{a1}^M = \Delta_3(p_b, p_a, p_1) = \Delta_3(p_a, p_b, p_1).$$

Применив определение функции  $G$  и формулы (4.10) и (4.14), получим

$$\sin^2 \theta_{a1}^M = -4 \frac{m_b^2 G(s, t, m_a^2, m_b^2, m_1^2)}{\lambda(s, m_a^2, m_b^2) \lambda(u, m_b^2, m_1^2)}. \quad (5.21)$$

Разделив выражение (5.18) на (5.21) и учтя равенства (4.8) и (4.14), мы убедимся, что

$$\frac{\sin \theta_{a1}^*}{\sin \theta_{a1}^M} = \frac{P_1^M}{P_1^*}, \quad (5.22)$$

как и следовало ожидать.

Рассмотрим теперь свойства функции  $G$ . Так как с нею связан определитель Грама  $\Delta_3$ , функция  $G$  удовлетворяет нескольким соотношениям симметрии и обладает рядом простых алгебраических свойств. Они аналогичны соотношениям (II.6.3) — (II.6.7) для  $\lambda(x, y, z)$ .

#### а. Алгебраическое выражение для $G(x, y, z, u, v, w)$

Поскольку  $p_a$ ,  $p_b$  и  $p_1$  в уравнении (5.16) можно заменить любой их линейно независимой комбинацией, запись  $\Delta_3$  в виде определителя может быть представлена во многих на первый взгляд неэквивалентных формах. Все они после преобразований приводят к единственной универсальной функции  $G$ , которая дается выражением

$$\begin{aligned} G(x, y, z, u, v, w) = & x^2 y + x y^2 + z^2 u + z u^2 + v^2 w + v w^2 + x z w + \\ & + x u v + y z w + y u w - x y (z + u + v + w) - \\ & - z u (x + y + v + w) - v w (x + y + z + u). \end{aligned} \quad (5.23)$$



Из формулы (A.13) видно, что функцию  $G$  можно также выразить через определитель Кэли:

$$G(x, y, z, u, v, w) = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & v & x & z \\ 1 & v & 0 & u & y \\ 1 & x & u & 0 & w \\ 1 & z & y & w & 0 \end{vmatrix}. \quad (5.24)$$

Если массы заданы соотношениями  $m_a = m_1 = \mu$ ,  $m_b = m_2 = m$ , то функция  $G$  упрощается и принимает вид

$$G(x, y, z, u, z, u) = y \{xy + \lambda(x, z, u)\}. \quad (5.25)$$

Уравнение (5.18) тогда дает

$$\sin \theta_{a1}^* = \frac{2}{\lambda(s, m^2, \mu^2)} [-st \{st + \lambda(s, m^2, \mu^2)\}]^{1/2}. \quad (5.26)$$

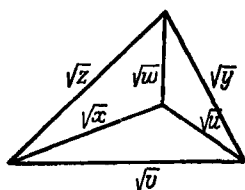
Мы вновь получили физические границы (5.8), (5.9) для процесса  $\mu t \rightarrow \mu t$ . Легко убедиться, что уравнения (5.2) и (5.26) согласуются друг с другом.

### б. Интерпретация $G$

Подобно тому как функция  $\lambda(x, y, z)$  была связана с площадью треугольника, функция  $G$  связана с тетраэдром:

$$G(x, y, z, u, v, w) = (-144) \times (\text{квадрат объема тетраэдра с попарно противоположными ребрами } \sqrt{x}, \sqrt{y}; \sqrt{z}, \sqrt{u}; \sqrt{v}, \sqrt{w}) \quad (5.27)$$

(упражнение IV.17). Порядок расположения ребер показан на



Фиг. 26.

фиг. 26. В связи с этой интерпретацией  $G$  можно называть *функцией тетраэдра*.

### в. Свойства симметрии $G$

Функция  $G$  инвариантна относительно некоторых перестановок своих шести аргументов. Какими могут быть эти перестановки, легче всего увидеть из интерпретации  $G$  как объема тетраэдра, показанного на фиг. 26. Этот объем явно инвариантен

относительно любой перестановки четырех граней (или вершин) тетраэдра. Эти  $4! = 24$  перестановки граней приводят к определенным перестановкам ребер  $x, y, z, u, v, w$ . Эти перестановки можно воспроизвести следующим образом. Сгруппируем аргументы  $G$  в три группы:  $xu, zi$  и  $vw$ , соответствующие парам противоположащих ребер. Тогда функция  $G$  инвариантна по отношению: 1) к любой перестановке этих групп, 2) к любой одновременной перемене мест аргументов сразу в двух группах.

Преобразования первого типа дают шесть перестановок, и к каждой из них можно применить три преобразования второго типа, так что всего получается  $6 + 6 \times 3 = 24$  преобразований. На языке теории групп группа инвариантности  $G(x, y, z, u, v, w)$  есть подгруппа группы перестановок шести объектов. Она порождается операциями (1) и (2) и изоморфна группе перестановок четырех объектов.

### г. Алгебраические свойства

Часто требуется выделить в функции  $G$  зависимость от каких-то двух переменных, например от  $s$  и  $t$  в (5.20). Благодаря свойствам симметрии следует рассмотреть только два существенно различных случая, а в качестве двух переменных достаточно выбрать либо  $xu$ , либо  $xz$ . Кривая  $G = 0$  третьего порядка по  $x, y$  и второго порядка по  $x, z$ . Чтобы изобразить кривую  $G = 0$  в плоскости  $xu$  или  $xz$ , требуется решить уравнение  $G = 0$  относительно  $x, y$  и  $z$ . Решения этих уравнений второй степени имеют вид:

$$\begin{aligned} x^{\pm} &= z + w - \frac{1}{2y} \{ (y + z - v)(y + w - u) \mp \\ &\mp \lambda^{1/2}(y, z, v) \lambda^{1/2}(y, u, w) \} = \\ &= u + v - \frac{1}{2y} \{ (y - z + v)(y - w + u) \mp \\ &\mp \lambda^{1/2}(y, z, v) \lambda^{1/2}(y, u, w) \}, \\ y^{\pm} &= u + w - \frac{1}{2x} \{ (x + u - v)(x + w - z) \mp \\ &\mp \lambda^{1/2}(x, u, v) \lambda^{1/2}(x, w, z) \}, \\ z^{\pm} &= x + w - \frac{1}{2u} \{ (u + x - v)(u + w - y) \pm \\ &\pm \lambda^{1/2}(u, x, v) \lambda^{1/2}(u, w, y) \}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Решения для  $y$  и  $z$  можно получить из  $x^{\pm}$  путем перестановок  $x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow u$  и  $x \leftrightarrow z, u \leftrightarrow y$  соответственно, но, поскольку они часто бывают нужны, мы в явном виде выписали решения,

соответствующие первой формуле для  $x^\pm$ . Двойные знаки в правых частях (5.28) расставлены с таким расчетом, чтобы (при  $y > 0$ ) получалось  $x^+ > x^-$ . Функции  $\lambda$  в уравнении (5.28) очевидным образом связаны с площадями граней тетраэдра, показанного на фиг. 26. Функцию  $G$  теперь можно выразить через ее корни следующим образом:

$$G(x, y, z, u, v, w) = y(x - x^+)(x - x^-) = x(y - y^+)(y - y^-) = \\ = u(z - z^+)(z - z^-), \quad (5.29)$$

где коэффициенты при квадратичных членах найдены сравнением с (5.23).

Форму выражений (5.28) можно понять, заметив, что они являются аналогами формулы (II.7.5), куда подставлено  $\cos \theta_{23} = \pm 1$ .  $G$  или  $\Delta_3$  обращается в нуль, когда квадрат синуса какого-либо из углов обращается в нуль; знаки  $\pm$  в (5.28) получаются, когда соответствующий косинус равен  $+1$  или  $-1$ . Этот косинус вычисляется в системе покоя той переменной, на которую делятся выражения в скобках в (5.28), т. е. в системе отсчета, где обращаются в нуль пространственные компоненты того 4-импульса, квадрат которого дает эту переменную. Например, если  $y = s$ , то системой отсчета является СЦМ. Функции  $\lambda$  в (5.28) связаны с импульсами, а первые два множителя внутри скобок — с энергиями в этой системе.

Эти выводы очевидны также в том случае, когда мы используем соотношения (5.28), чтобы изобразить границу физической области (5.20) для реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$  в плоскости  $st$ . Мы можем выразить либо  $s$  через  $t$ :

$$s^\pm = m_a^2 + m_b^2 - \frac{1}{2t} \{ (t + m_b^2 - m_2^2)(t + m_a^2 - m_1^2) \pm \\ \pm \lambda^{1/2}(t, m_b^2, m_2^2) \lambda^{1/2}(t, m_a^2, m_1^2) \}, \quad (5.30)$$

либо  $t$  через  $s$ :

$$t^\pm = m_a^2 + m_1^2 - \frac{1}{2s} \{ (s + m_a^2 - m_b^2)(s + m_1^2 - m_2^2) \mp \\ \mp \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2) \}. \quad (5.31)$$

Выражение (5.31), конечно, совпадает с выражением (5.14), которое было непосредственно получено путем подстановки в (4.9)  $\cos \theta_{a1} = \pm 1$ . Если для определения  $t$  применить вторую форму выражения для  $x^\pm$  (или аналогичное выражение для  $y^\pm$ ), то видно, что это соответствует подстановке  $\cos \theta_{b2}^* = \cos \theta_{a1}^* = \pm 1$  в выражение  $t = (p_b - p_2)^2 = (p_a - p_1)^2$ :

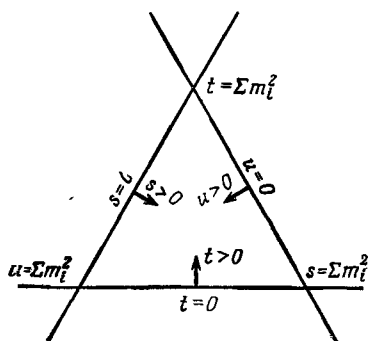
$$t^\pm = m_b^2 + m_2^2 - 2E_b^* E_2^* \pm 2P_b^* P_2^*. \quad (5.32)$$

Аналогичным образом знаки  $\pm$  в выражении (5.30) соответствуют тому, что косинус угла рассеяния в СЦМ  $t$ -канала полагают равным  $\pm 1$ .

#### д. Симметричное представление $G$

С помощью выражений (5.30), (5.31) можно построить физические области для всех каналов, хотя из этих выражений симметрия непосредственно не видна. Чтобы получать границу

Фиг. 27. Треугольные координаты  $s$ ,  $t$ ,  $u$ .



физической области способом, отличающимся большей симметрией, мы запишем  $G$  в форме, которая отчетливо показывает симметрию этой функции по отношению к  $s$ -,  $t$ - и  $u$ -каналам [71]:

$$-G(s, t, m_a^2, m_b^2, m_1^2, m_2^2) \equiv \Phi(s, t) = stu - (\alpha s + \beta t + \gamma u), \quad (5.33)$$

где

$$\begin{aligned} K\alpha &= (m_a^2 m_b^2 - m_1^2 m_2^2)(m_a^2 + m_b^2 - m_1^2 - m_2^2), \\ K\beta &= (m_a^2 m_1^2 - m_b^2 m_2^2)(m_a^2 + m_1^2 - m_b^2 - m_2^2), \\ K\gamma &= (m_a^2 m_2^2 - m_b^2 m_1^2)(m_a^2 + m_2^2 - m_b^2 - m_1^2), \end{aligned} \quad (5.34)$$

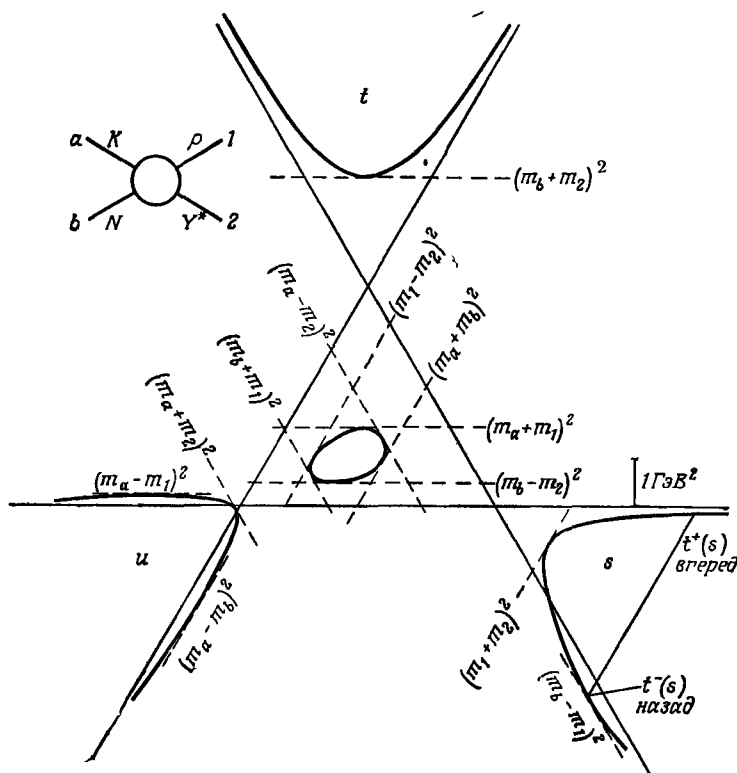
причем

$$K = m_a^2 + m_b^2 + m_1^2 + m_2^2 = s + t + u.$$

Удобно также воспользоваться не декартовой, а треугольной системой координат. Ее осями являются три прямые, пересекающиеся под углами  $60^\circ$ , а величины  $s$ ,  $t$  и  $u$  представляют собой расстояния до соответствующих осей (фиг. 27). Если высота треугольника равна  $\sum m_i^2$ , условие  $s + t + u = \sum m_i^2$  выполняется автоматически.

Легко видеть, что кривая третьего порядка  $\Phi(s, t) = 0$  имеет следующие свойства:

1. Ее асимптотами являются  $s = 0$ ,  $t = 0$  и  $u = 0$ ,



Фиг. 28. Физические области для реакции  $KN \rightarrow pY^*$ .

Центральная часть в данном случае не является физической областью. Границы для  $s$ - и  $u$ -каналов слегка искажены, чтобы лучше были видны касательные. Величины  $t^{\pm}(s)$  даются формулой (5.31).

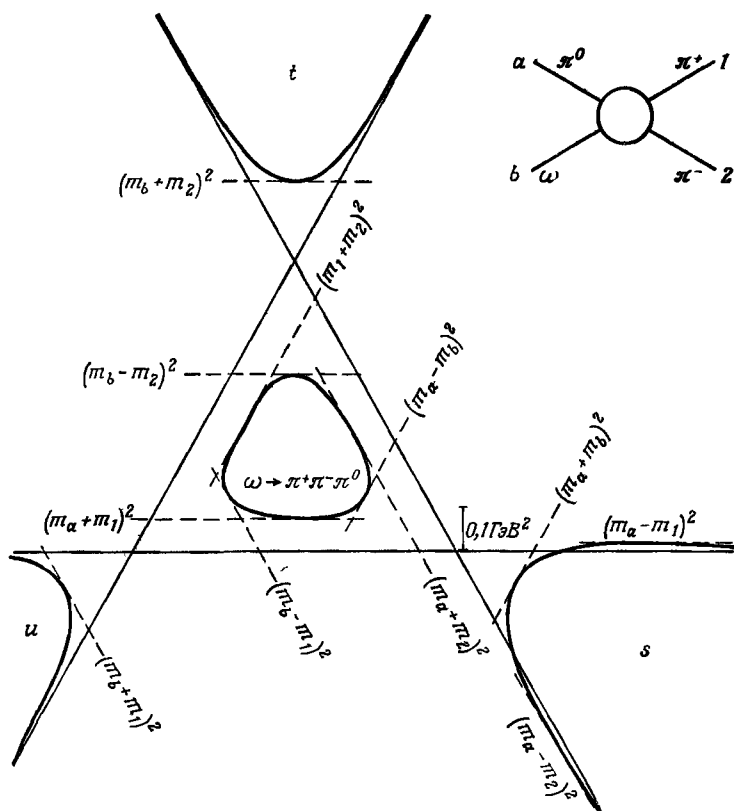
2. Она пересекает асимптоты в следующих трех точках прямой  $\alpha s + \beta t + \gamma u = 0$ :

$$\begin{aligned} s=0: \quad t &= -\frac{\gamma K}{\beta - \gamma}, & u &= \frac{\beta K}{\beta - \gamma}, \\ t=0: \quad s &= -\frac{\gamma K}{\alpha - \gamma}, & u &= \frac{\alpha K}{\alpha - \gamma}, \\ u=0: \quad s &= -\frac{\beta K}{\alpha - \beta}, & t &= \frac{\alpha K}{\alpha - \beta}. \end{aligned}$$

3. Имеются 12 касательных к  $\Phi(s, t) = 0$ , параллельных трем осям координат; они соответствуют порогам и псевдопорогам трех каналов.

$$\begin{aligned} s &= (m_a \pm m_b)^2, & s &= (m_1 \pm m_2)^2, \\ t &= (m_a \pm m_1)^2, & t &= (m_b \pm m_2)^2, \\ u &= (m_a \pm m_2)^2, & u &= (m_b \pm m_1)^2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Имеются 14 типов кривых  $\Phi = 0$ , зависящих от величины масс. Здесь мы не пытаемся дать общую классификацию типов кривых. Это было выполнено Котанским [86] (см также [128]).

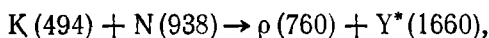


Фиг. 29. Физические области для реакции  $\pi^0 \omega \rightarrow \pi^+ \pi^-$ .

Центральная часть теперь является физической областью (диаграмма Далица). Граница для  $s$  канала искажена, как на фиг. 28

Кроме рассмотренного выше случая упругого рассеяния, мы разберем еще «нормальный» случай, когда все массы не равны нулю и не удовлетворяют никаким специальным соотношениям.

Рассмотрим сначала реакцию



физическая область которой, рассчитанная с помощью уравнения (5.31), изображена на фиг. 28. В этом случае  $m_a + m_b < m_1 + m_2$ ; поэтому порог для  $s$ -канала есть  $m_1 + m_2 = m_\rho + m_{Y^*}$ . В  $s$ -канале величина  $t$  остается отрицательной, в то

время как  $u$  может достигать значения  $(m_b - m_1)^2 = (m_N - m_p)^2$  в направлении назад;  $t$ -каналом является реакция  $K\bar{p} \rightarrow \bar{N}Y^*$ , поэтому его порог равен  $m_b + m_2 = m_N + m_{Y^*}$ . Порогом  $u$ -канала  $K\bar{Y}^* \rightarrow p\bar{N}$  является  $m_a + m_2 = m_K + m_{Y^*}$ , причем  $t$  достигает значения  $(m_a - m_1)^2 = (m_K - m_p)^2$ , а  $s$  — значения  $(m_a - m_b)^2 = (m_K - m_N)^2$ . Остальные три порога и три псевдопорога касательны к границе центральной области, в которой  $s$ ,  $t$  и  $u$  положительны. В данном случае ни одна из масс не превышает суммы остальных трех. Это указывает на то, что все пороги, касательные к границе центральной области, превышают параллельные им псевдопороги, например  $(m_a + m_1)^2 > (m_b - m_2)^2$ . Следовательно, распад не может иметь места, центральная область является нефизической. Она удовлетворяет требованию  $\Delta_3 \geq 0$ , но для нее не выполняется условие  $\Delta_2 \leq 0$ .

Если вместо предыдущего случая рассмотреть реакцию (фиг. 29)

$$\pi^0(135) + \omega(784) \rightarrow \pi^+(140) + \pi^-(140),$$

то центральная область окажется физической, поскольку возможен распад  $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ . Отчетливо видно, как удовлетворяются неравенства (5.13). Когда центральная область является физической, она называется *диаграммой Далица*. Эта диаграмма подробно рассматривается в гл. V.

### е. Формальная связь между $G$ и $\lambda$

В качестве последнего замечания укажем любопытный способ, которым функцию  $G$  можно связать с функцией  $\lambda$ . Предположим, что три 3-вектора удовлетворяют условию  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0$ . Тогда из того факта, что  $\lambda$  связана с площадью треугольника [см. замечание после уравнения (II. 6.9)], следует

$$|\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2|^2 = |\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3|^2 = |\mathbf{p}_3 \times \mathbf{p}_1|^2 = -\frac{1}{4} \lambda(P_1^2, P_2^2, P_3^2). \quad (5.36)$$

Применим это соотношение к реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$  в СМ:  $p_b = 0$ ,  $p_a = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0$ . Тогда можно написать

$$|\mathbf{p}_a \times \mathbf{p}_1|^2 = -\frac{1}{4} \lambda\{(P_a^M)^2, (P_1^M)^2, (P_2^M)^2\}. \quad (5.37)$$

С другой стороны, правило (II. 7.9) показывает, что

$$m_b^2 |\mathbf{p}_a \times \mathbf{p}_1|^2 = \Delta_3(p_a, p_b, p_1) = -\frac{1}{4} G(s, t, m_2^2, m_a^2, m_b^2, m_1^2). \quad (5.38)$$

Приравняв между собой (5.37) и (5.38) и записывая импульсы в уравнении (5.37) в инвариантном виде с помощью со-

отношений (4.10) — (4.14), находим тождество

$$G(s, t, m_a^2, m_b^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{\lambda \{ \lambda(s, m_a^2, m_b^2), \lambda(t, m_b^2, m_2^2), \lambda(u, m_b^2, m_1^2) \}}{16m_b^2}. \quad (5.39)$$

С практической точки зрения это тождество не очень полезно.

## 6. Величина $t$ для рассеяния вперед

Мы видели, что для реакции  $\mu t \rightarrow \mu t$  величина  $t$  при рассеянии вперед ( $t^+$ ) равна нулю, но при рассеянии назад  $u = (m^2 - \mu^2)^2/s > 0$ . Вообще значения  $t^+$  (положительные или отрицательные), определяемые формулой (5.14), стремятся к нулю, когда  $s \rightarrow \infty$ . По этой причине формула (5.14) неудобна, так как представляет малое число  $t^+$  в виде разности двух больших чисел; значения  $t^+$  получаются с плохой точностью. При больших  $s$  можно исключить большие члены, сделав следующее разложение [121] (см. также [84\*]).

Введем параметры, по степеням которых производится разложение:

$$\begin{aligned} e_{ab} &= \frac{m_a m_b}{s - m_a^2 - m_b^2}, \\ e_{12} &= \frac{m_1 m_2}{s - m_1^2 - m_2^2}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Эти параметры удобны, так как функции  $\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)$  и  $\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)$  разлагаются в ряд по степеням  $e^2$ :

$$\begin{aligned} \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) &= \{(s - m_a^2 - m_b^2) - 4m_a^2 m_b^2\}^{1/2} = \\ &= (s - m_a^2 - m_b^2)(1 - 4e_{ab}^2)^{1/2} = \\ &= (s - m_a^2 - m_b^2)(1 - 2e_{ab}^2 - 2e_{ab}^4 + \dots). \end{aligned} \quad (6.2)$$

и аналогично для другого  $\lambda$ . Если эти разложения подставить в формулу (5.14), то член, пропорциональный  $s$ , и постоянные члены сократятся и останется

$$\begin{aligned} t^+ &= -\frac{1}{s} (m_a^2 - m_1^2)(m_b^2 - m_2^2) - \\ &- \frac{1}{s^2} (m_a^2 + m_b^2 - m_1^2 - m_2^2)(m_a^2 m_b^2 - m_1^2 m_2^2) + \dots \end{aligned} \quad (6.3)$$



Если  $m_a \neq m_1$  и  $m_b \neq m_2$ , то величина  $t^+$  пропорциональна  $1/s$ :

$$t^+ \approx - \frac{(m_a^2 - m_1^2)(m_b^2 - m_2^2)}{s} \quad (m_a m_b \rightarrow m_1 m_2). \quad (6.4)$$

Следовательно, значение  $t^+$  положительно, если  $m_a < m_1$ ,  $m_b > m_2$  или если  $m_a > m_1$ ,  $m_b < m_2$ . Например, для процесса  $\mu m \rightarrow \mu \mu$  ( $m_a = m_2 = \mu$ ,  $m_b = m_1 = m$ )

$$t^+ \approx \frac{(m^2 - \mu^2)^2}{s} \quad (\mu m \rightarrow \mu \mu), \quad (6.5)$$

что в точности совпадает со значением  $u$  для рассеяния назад в реакции  $\mu m \rightarrow \mu m$  (это соответствует вычислению  $t$  при рассеянии вперед в реакции  $\mu m \rightarrow \mu \mu$ ).

Если  $m_a = m_1$  и (или)  $m_b = m_2$ , то величина  $t^+$  пропорциональна  $1/s^2$ . Примером служит образование резонанса с массой  $m^*$  в реакции  $\mu m \rightarrow \mu m^*$ ,  $m^* > m$ . При этом

$$t^+ \approx - \frac{\mu^2 (m^{*2} - m^2)^2}{s^2} \quad (\mu m \rightarrow \mu m^*), \quad (6.6)$$

и величина  $t^+$  при всех условиях отрицательна.

### Упражнения

IV.1. Рассмотрите распад  $p \rightarrow p_1 + p_2$  на две частицы с нулевыми массами ( $m_1 = m_2 = 0$ ) в системе отсчета  $p = (E, \mathbf{p})$ . Выразите угол  $\theta_{12}$  между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  через угол  $\theta_1$  между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}$ .

IV.2. Для распада  $p \rightarrow p_1 + p_2$  с  $m_1 = m_2 = 0$  выведите соотношение

$$\sin \frac{1}{2} \theta_{12} = \frac{m}{2 \sqrt{E_1 E_2}}$$

и покажите с его помощью, что минимальный угол разлета  $\theta_{12}^{\text{мин}}$  получается в симметричных условиях, когда  $\theta_1 = \theta_2$ . Чему равен  $\sin \frac{1}{2} \theta_{12}^{\text{мин}}$ ?

IV.3. Существование минимального угла разлета следующим образом можно использовать для определения массы нейтральной частицы, испытывающей распад типа  $\gamma\gamma$  (например,  $\pi^0$  или  $\eta$ ). Предположим, что нейтральная частица  $p_2$  возникает в реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$ . Рассмотрите  $\gamma\gamma$ -распады  $p_2$  и найдите, чему равен минимальный угол разлета в СЦМ всей реакции. Если этот угол равен  $\alpha$ , масса  $p_1$  равна  $m_1$ , а полная энергия равна  $\sqrt{s}$ , то чему равно  $m_2$ ?

IV.4. Покажите, что из формулы (2.8) при  $m_1 = m_2 = 0$  следует распределение (2.5).

IV.5. Вычислите для распада  $1 \rightarrow 2$  распределение по поперечным импульсам  $\omega(r_1)$ , выразив его через распределение  $\omega(\cos \theta_1^*)$ .

IV.6. Предположим, что для распада  $p \rightarrow p_1 + p_2$  мы можем вычислить величину

$$T_2 = \frac{1}{2s+1} \sum |A|^2,$$

где  $s$  — спин частицы  $p$ , сумма берется по конечным спиновым состояниям, а  $A$  — матричный элемент распада. Каково время жизни  $\tau$  частицы  $p$ ? Какова размерность  $T_2$ ? Предположим, что для распада  $K_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ,  $T = f_k = \text{const}$ . Определите  $f_k$  по  $\tau_{K_s^0} = 0,86 \cdot 10^{-10}$  с.

IV.7. Для распада  $p \rightarrow \pi\pi$  принимают  $A = f_{\pi\pi} \varepsilon \cdot (p_1 - p_2)$ , где  $\varepsilon$  — вектор поляризации  $p$ . Если  $T_2$  определено, как в упражнении 6, то

$$T_2 = \frac{4}{3} p_\pi^2.$$

(Можете ли вы вывести эту формулу?) Как выражается время жизни  $\tau_p$  частицы  $p$  через  $f_{\pi\pi}$ ? Чему равна величина  $f_{\pi\pi}^2/4\pi$ , если  $\Gamma_p = 0,125$  ГэВ?

IV.8. Рассчитайте зависимость  $P_1$  от угла рассеяния  $\theta_1$  в системе мишени ( $p_b = 0$ ), выписав уравнение  $p_2^2 = (p_a + p_b - p_1)^2$  в СМ и решив его относительно  $P_1$ .

IV.9. Найдите, как импульсы рассеянной частицы  $p_1$  и частицы отдачи  $p_2$  в реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$  зависят от соответствующих углов рассеяния в системе мишени, если энергия налетающей частицы равна  $E_a$  и все массы одинаковы ( $=m$ ). Каковы эти соотношения, если  $m_a = m_1 = 0$  и  $m_b = m_2 = m$ ?

IV.10. Каково соотношение между двумя углами рассеяния  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в системе мишени для реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$ , когда а) все массы равны ( $=m$ ), б)  $m_a = m_1 = 0$ ,  $m_b = m_2 = m$ . Вычертите кривые при  $\gamma^2 = 10$  и сравните с фиг. 20.

IV.11. Чему равны максимальное и минимальное значения импульсов а) рассеянной частицы ( $p_1$ ) и б) частицы отдачи в процессе упругого рассеяния  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$ ?

IV.12. Покажите, что для электрон-протонного рассеяния при высоких энергиях ( $m_a = m_1 = 0$ ,  $m_b = m_2 = m$ ) в системе покоя мишени

$$\frac{dR_2}{d\Omega_1} = \frac{E_1^2}{2mE_a}, \quad \frac{dR_o}{d\Omega_2} = \frac{P_2(E_2 + m)}{m(E_a + m)}.$$

IV.13. Формулы (4.9) выражают  $\cos \theta_{a1}^*$  через инварианты. Выведите их, используя правило (II.7.8) и тот факт, что  $\theta_{a1}^*$

есть угол между векторами  $p_a$  и  $p_1$  в системе отсчета, где  $p_a + p_b = 0$ .

IV. 14. Для каких масс частиц, участвующих в реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$ , справедливо соотношение  $t = -2P^2(1 - \cos \theta_{a1})$ ?

IV. 15. Найдите физическую область на плоскости  $st$  для случая одинаковых масс  $m_a = m_b = m_1 = m_2 = m$ .

IV. 16. Покажите, что

$$G(x, y, z, u, v, w) = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2u & x+u-v & u+w-y \\ x+u-v & 2x & x-z+w \\ u+w-y & x-z+w & 2w \end{vmatrix}.$$

IV. 17. Докажите, что функция  $G(x, y, z, u, v, w)$  равна умноженному на  $-144$  квадрату объема показанного на фиг. 26 тетраэдра с ребрами  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt{y}$ ,  $\sqrt{z}$ ,  $\sqrt{u}$ ,  $\sqrt{v}$ ,  $\sqrt{w}$ .

IV. 18. Покажите, что корни  $y^\pm$  (5.28) уравнения  $G(x, y, z, u, v, w) = 0$  удовлетворяют соотношению

$$-2x\lambda^{1/2}(y^\pm, z, v) = (-x+u-v)\lambda^{1/2}(x, z, w) \pm (x+z-w)\lambda^{1/2}(x, u, v).$$

Как это физически истолковать в применении, например, к уравнению  $G(s, t, m_b^2, m_a^2, m_b^2, m_1^2) = 0$ , описывающему границу физической области для реакции  $2 \rightarrow 2$ ?

IV. 19. (Это более сложное упражнение, требующее умения обращаться с частицами со спином  $1/2$ .) Стандартной формой инвариантной амплитуды рассеяния  $0^{-1/2+} \rightarrow 0^{-1/2+}$  является  $T = \bar{u}(p_2) \{A + 1/2(\hat{P}_a + \hat{P}_1)B\} u(p_1)$ , где  $A$  и  $B$  — некоторые функции  $s$  и  $t$ . Покажите, что в этом случае результат суммирования по спинам можно записать в виде

$$2m_b m_2 \sum_{\text{спины}} |T|^2 = |A'|^2 \{(m_b + m_2)^2 - t\} + \frac{4|B|^2}{(m_b + m_2)^2 - t} \Delta_3(p_a, p_b, p_1),$$

где  $\Delta_3$  — определитель Грама для  $p_a, p_b, p_1$ , а

$$A' = A + \lambda B,$$

причем

$$\lambda = -\frac{(m_b + m_2)(s - u) + (m_b - m_2)(m_a^2 - m_1^2)}{2\{(m_b + m_2)^2 - t\}}.$$

Эта запись хороша тем, что можно использовать известные свойства  $\Delta_3$ , чтобы написать коэффициент перед членом амплитуды, связанным с переворотом спина, в различных вариантах,

причем во всех случаях он обращается в нуль на границе физической области ( $\Delta_3 = 0$ ). Покажите, например, что

$$\Delta_3(p_a, p_b, p_1) = \frac{1}{4} s(t^+ - t)(t - t^-) = \\ = \frac{1}{4} s(u^+ - u)(u - u^-) = m_b^2 (P_a^M P_1^M)^2 \sin^2 \theta_{a1}^M,$$

где  $t^\pm(u^\pm)$  — максимальные и минимальные значения  $t(u)$ . Какой результат получается для упругого рассеяния?

IV. 20. Что является в случае упругого процесса  $\mu m \rightarrow \mu m$  аналогом центральной области для реакции  $KN \rightarrow \rho Y^*$ , изображенной на фиг. 28?

IV. 21. Вычислите значение  $t^+$  для а)  $\pi p \rightarrow \pi \Delta$  и б)  $\pi p \rightarrow \rho \Delta$  при  $p_{\text{лаб}} = 10$  ГэВ/с.

IV. 22. Предположим, что  $t^+ > 0$ . Какое значение  $\theta_{a1}^*$  отвечает  $t^+ = 0$  для больших  $s$ ? Какое значение  $\theta_{a1}^*$  отвечает  $u = 0$  при упругом рассеянии? При каком угле рассеяния в реакции  $\pi N \rightarrow \pi N$  при  $p_{\text{лаб}} = 10$  ГэВ/с  $u = 0$ ?

IV. 23. Допустим, что имеется детектор, охватывающий в лабораторной системе постоянный телесный угол  $d\Omega$ . Вы измеряете скорость счета для реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2$  как функцию угла  $\theta_{a1}$ . Как преобразовать эту скорость счета в величину  $d\sigma/dt$  (ненормированную)?

IV. 24. Вычислите  $\sigma(s)$  для процесса упругого рассеяния  $\mu m \rightarrow \mu m$ , если квадрат матричного элемента  $|A|^2 = \beta(s) e^{2\alpha t}$  [ $\beta(s)$  — некоторая безразмерная функция  $s$ ,  $\alpha$  — константа].

IV. 25. Допустим, что измерения дали следующие результаты для протон-протонного рассеяния:

$$\sigma_{\text{полн}}(s) = 40 \text{ мб}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = 100 e^{9t} \frac{1}{(\text{ГэВ}/c)^2}, \quad \sigma(s) = 11 \text{ мб}$$

независимо от  $s$ . Опишите эти данные с помощью амплитуды

$$A(s, t) = (-\Phi + i) \beta e^{\alpha t} \frac{s}{s_0},$$

где  $\Phi (> 0)$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  и  $s_0 = 1$  ГэВ<sup>2</sup> — константы.

IV. 26. Дифференциальное сечение электрон-протонного рассеяния (когда протон рассматривается как дираковская точечная частица) можно написать в системе мишени (лабораторная система) в форме

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = \frac{\alpha^2}{4E_a^2} \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \theta_1}{\sin^4 \frac{1}{2} \theta_1} \frac{1 + (2E_a E_1 / M^2) \cos^2 \frac{1}{2} \theta_1}{1 + (2E_a / M) \sin^2 \frac{1}{2} \theta_1},$$

где  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры,  $E_a$  — энергия налетающей частицы в ЛС,  $E_1$  — энергия электрона отдачи,  $\theta_1$  — угол рассеяния,  $M$  — масса протона, а  $m_{\text{электрон}} \approx 0$ . Найдите  $d\sigma/dt$ .

IV. 27. Определите в плоскости  $st$  кривые постоянного угла рассеяния в системе мишени  $\theta_{a1}^M$  для упругого протон-протонного рассеяния.

IV. 28. Покажите, что если  $(m_a - m_1)(m_b - m_2) \geq 0$ , то величина  $t$  всегда отрицательна.

IV. 29. Вычислите интегралы

$$I_\mu = \int dR_2 p_{1\mu}, \quad I_{\mu\nu} = \int dR_2 p_{1\mu} p_{1\nu},$$

где

$$dR_2 = d^4 p_1 d^4 p_2 \delta(p_1^2 - m_1^2) \delta(p_2^2 - m_2^2) \delta^4(p - p_1 - p_2).$$

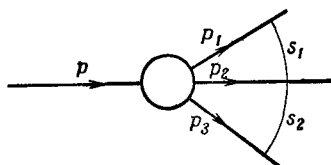
## Глава V

### ТРЕХЧАСТИЧНЫЕ КОНЕЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ

#### 1. Распад одной частицы на три

Кинематически процесс распада  $p \rightarrow p_1 + p_2 + p_3$  (фиг. 30) определяется двумя независимыми переменными (частицы считаются бесспиновыми). Он связан кроссинг-преобразованием с рассеянием  $2 \rightarrow 2$  (например, с реакцией  $p + p_1 \rightarrow p_2 + p_3$ ), так

Фиг. 30. Трехчастичный распад  $p \rightarrow p_1 + p_2 + p_3$  с инвариантными переменными  $s_1$  и  $s_2$ .



что число инвариантных переменных должно быть, конечно, одинаковым для обоих случаев. Можно рассуждать иначе. Три 3-вектора конечного состояния, или девять переменных, связаны четырьмя уравнениями сохранения энергии-импульса. Кроме того, начальное состояние изотропно в системе покоя частицы  $p$ , и поэтому конечное состояние не может зависеть от трех углов, описывающих ориентацию конечной системы, как целого. Это приводит к тому, что остаются две независимые переменные (табл. III 1). В этом разделе мы рассмотрим в отдельности инвариантные и неинвариантные переменные для процесса  $1 \rightarrow 3$ .

##### *а. Инвариантные переменные*

В качестве инвариантных переменных удобно выбрать  $s$ ,  $t$  и  $u$ , как и в случае рассеяния  $2 \rightarrow 2$ . Поскольку все они в канале распада положительны, в качестве инвариантных переменных мы примем, слегка изменив обозначения,

$$\begin{aligned} s_{12} &\equiv s_1 = (p_1 + p_2)^2 = (p - p_3)^2, \\ s_{23} &\equiv s_2 = (p_2 + p_3)^2 = (p - p_1)^2, \\ s_{31} &\equiv s_3 = (p_3 + p_1)^2 = (p - p_2)^2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

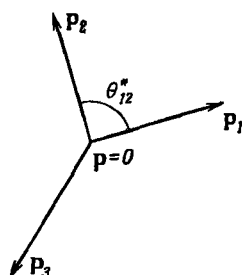
Связывающее их условие (IV.4.4) при этом имеет вид

$$s_1 + s_2 + s_3 = s + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2. \quad (1.2)$$

В разделах 1—3 для массы распадающейся частицы мы употребляем обозначение  $\sqrt{s}$ . Это сделано для того, чтобы выведенные формулы можно было в дальнейшем без изменения применять для рассеяния типа  $2 \rightarrow 3$ .

### б. Неинвариантные переменные

Неинвариантными переменными являются 3-импульсы и углы. Системы отсчета, вводимые ниже, соответствуют системе центра масс и системе мишени для рассеяния  $2 \rightarrow 2$ .



Фиг. 31. Система покоя распадающейся частицы ( $p = 0$ ).

Система отсчета, в которой распадающаяся частица покоится, или общая СЦМ, определяется как система, в которой  $p = p_1 + p_2 + p_3 = 0$  (фиг. 31). Она аналогична системе мишени (или системе пучка) для рассеяния  $2 \rightarrow 2$  в том смысле, что в ней покоится одна из частиц, участвующих в реакции. Величины, относящиеся к этой системе отсчета, отмечаются звездочкой.

Энергии и импульсы в этой системе мы легко найдем, раскрывая последние части определений (1.1) в системе отсчета  $p = (\sqrt{s}, 0)$ :

$$\begin{aligned} E_1^* &= \frac{s + m_1^2 - s_2}{2\sqrt{s}}, & P_1^* &= \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, s_2)}{2\sqrt{s}}, \\ E_2^* &= \frac{s + m_2^2 - s_3}{2\sqrt{s}}, & P_2^* &= \frac{\lambda^{1/2}(s, m_2^2, s_3)}{2\sqrt{s}}, \\ E_3^* &= \frac{s + m_3^2 - s_1}{2\sqrt{s}}, & P_3^* &= \frac{\lambda^{1/2}(s, m_3^2, s_1)}{2\sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Отсюда следует правило: величина  $E_1^*$  такая же, как при распаде  $p \rightarrow p_1 + (p_2 + p_3)$  на две частицы с массами  $m_1$  и  $\sqrt{s_2}$ . Углы между импульсами получаются из определений (1.1), если раскрыть скобки и подставить (1.3). Можно воспользоваться

также и правилами, приведенными в разделе II.7. Например, для угла  $\theta_{12}$  между  $p_1$  и  $p_2$  (фиг. 31) имеем

$$s_1 = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^* E_2^* - 2P_1^* P_2^* \cos \theta_{12}^*,$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \cos \theta_{12}^* &= \frac{p_1 \cdot p_2}{P_1 P_2} \Big|_{p=0} = \\ &= \frac{(s + m_1^2 - s_2)(s + m_2^2 - s_3) + 2s(m_1^2 + m_2^2 - s_1)}{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, s_2) \lambda^{1/2}(s, m_2^2, s_3)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Тот же результат можно получить также из правила (II.7.6), заменив  $p_1, p_2, p_3$  на  $p, -p_1, p_2$ . Аналогичным образом формула (II.7.10) дает

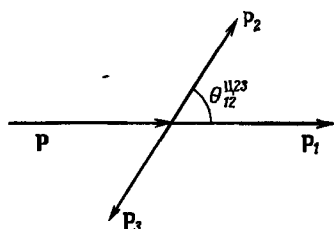
$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{12}^* &= \frac{|p_1 \times p_2|^2}{P_1^2 P_2^2} \Big|_{p=0} = \frac{\Delta_3(p, -p_1, p_2)}{s P_1^{*2} P_2^{*2}} = \\ &= \frac{-4sG(s_1, s_2, s, m_2^2, m_1^2, m_3^2)}{\lambda(s, m_1^2, s_2) \lambda(s, m_2^2, s_3)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Возможны три системы центра масс пар вторичных частиц (фиг. 32). Они соответствуют трем системам центра масс для  $s$ -,  $t$ - и  $u$ -каналов реакции  $2 \rightarrow 2$ . Это системы, в которых

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p - p_3 = 0, \\ p_2 + p_3 &= p - p_1 = 0, \\ p_3 + p_1 &= p - p_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Величины, определенные в этих системах отсчета (часто называемых системами Готфрида—Джексона), мы будем отмечать верхними индексами Ц12, Ц23 и Ц31 соответственно. Если

Фиг 32. Система центра масс частиц 2 и 3 ( $p_2 + p_3 = 0$ ).



не может возникнуть путаницы, эти индексы опускают. Достаточно рассмотреть одну из этих систем отсчета, скажем Ц23; уравнения, относящиеся к другим системам, получаются из уравнений для системы Ц23 циклической перестановкой индексов.



Чтобы выразить энергии и импульсы в системе отсчета ЦЗ через инварианты, распишем выражение  $s_2 = (p_2 + p_3)^2$  в ЦЗ, т. е. в системе отсчета  $p_2 + p_3 = (\sqrt{s_2}, 0)$ . Это приводит к следующим формулам:

$$\begin{aligned} E_{\text{ЦЗ}} &= \frac{s + s_2 - m_1^2}{2\sqrt{s_2}}, & E_1^{\text{ЦЗ}} &= \frac{s - s_2 - m_1^2}{2\sqrt{s_2}}, \\ E_2^{\text{ЦЗ}} &= \frac{s_2 + m_2^2 - m_3^2}{2\sqrt{s_2}}, & E_3^{\text{ЦЗ}} &= \frac{s_2 + m_3^2 - m_2^2}{2\sqrt{s_2}}, \\ p_{\text{ЦЗ}} &= p_1^{\text{ЦЗ}} = \frac{\lambda^{1/2}(s, s_2, m_1^2)}{2\sqrt{s_2}}, & p_2^{\text{ЦЗ}} &= p_3^{\text{ЦЗ}} = \frac{\lambda^{1/2}(s_2, m_2^2, m_3^2)}{2\sqrt{s_2}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

При описании распада  $1 \rightarrow 3$  в системе ЦЗ существует только один угол, а именно  $\theta_{12}^{\text{ЦЗ}}$  (фиг. 32). При рассмотрении процессов типа  $2 \rightarrow 3$  этот угол будет называться *полярным углом спиральности* (см. раздел 6, где в действительности используется угол  $\pi - \theta_{12}^{\text{ЦЗ}}$ ). Для угла  $\theta_{12}^{\text{ЦЗ}}$  из формул (1.7) находим

$$\begin{aligned} s_1 &= (p_1 + p_2)^2 = \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{\text{ЦЗ}} E_2^{\text{ЦЗ}} - 2P_1^{\text{ЦЗ}} P_2^{\text{ЦЗ}} \cos \theta_{12}^{\text{ЦЗ}} = \\ &= m_1^2 + m_2^2 + \frac{1}{2s_2} (s - s_2 - m_1^2)(s_2 + m_2^2 - m_3^2) - \\ &\quad - \frac{1}{2s_2} \cos \theta_{12}^{\text{ЦЗ}} \lambda^{1/2}(s, s_2, m_1^2) \lambda^{1/2}(s_2, m_2^2, m_3^2), \end{aligned} \quad (1.8)$$

или

$$\cos \theta_{12}^{\text{ЦЗ}} = \frac{(s - s_2 - m_1^2)(s_2 + m_2^2 - m_3^2) + 2s_2(m_1^2 + m_2^2 - s_1)}{\lambda^{1/2}(s, s_2, m_1^2) \lambda^{1/2}(s_2, m_2^2, m_3^2)}. \quad (1.9)$$

Соответствующий синус проще всего получить из формулы (II.7.10) заменой  $p_1, p_2, p_3 \rightarrow p_2 + p_3, p_1, p_2$ :

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{12}^{\text{ЦЗ}} &= \frac{|p_1 \times p_2|^2}{P_1^2 P_2^2} \Big|_{p_3 = -p_2} = \frac{\Delta_3(p_2 + p_3, p_1, p_2)}{s_2 (P_1^{\text{ЦЗ}} P_2^{\text{ЦЗ}})^2} = \\ &= \frac{-4s_2 G(s_1, s_2, s, m_2^2, m_1^2, m_3^2)}{\lambda(s, s_2, m_1^2) \lambda(s_2, m_2^2, m_3^2)}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

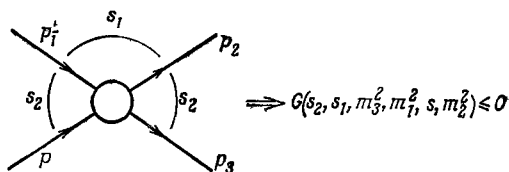
Отметим большое сходство выражений (1.10) и (1.5) (упражнение V.1).

Формулы (1.8), (1.9) показывают, что  $s_1$  линейно зависит от  $\cos \theta_{12}^{\text{ЦЗ}}$  в точности так же, как  $t$  зависит от  $\cos \theta_{a1}$  в реакциях  $2 \rightarrow 2$ . С другой стороны, соотношение (1.4) между  $s_1$  и  $\cos \theta_{a1}$  является более сложной алгебраической функцией, поскольку  $s_3$  зависит от  $s_1$  и  $s_2$  [см. (1.2)]. Для многих целей в си-

стемах Ц12, Ц23, Ц31 кинематика оказывается более простой, чем в общей СЦМ. Причина заключается в том, что роль систем Ц12, Ц23, Ц31 в распаде  $1 \rightarrow 3$  такова же, что и роль СЦМ в рассеянии типа  $2 \rightarrow 2$ .

## 2. Диаграмма Далица

Диаграмма Далица [35, 41] определяется как физическая область для процесса  $p \rightarrow p_1 + p_2 + p_3$  в плоскости  $s_1 s_2$ . В более общем смысле — это физическая область в любых переменных, связанных с  $s_1$  и  $s_2$  линейно, т. е. преобразованиями, якобиан которых постоянен. Примерами таких переменных являются:



Фиг. 33. Мнемоническая процедура, дающая физическую область в переменных  $s_1 s_2$ .

а) любая пара  $s_i, s_j$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ ; б) любая пара  $E_i^*, E_j^*$ ; в) любая пара кинетических энергий  $T_i, T_j$  ( $T = E - m$ ).

Уравнение, определяющее диаграмму Далица, получается почти автоматически путем применения мнемонического правила, показанного на фиг. 25. Для этого изображают реакцию, представленную на фиг. 30, в форме, показанной на фиг. 33, сравнивают с мнемоническим правилом, указанным на фиг. 25, и находят, что значения  $s_1$  и  $s_2$  в физической области должны удовлетворять условию

$$G(s_2, s_1, m_3^2, m_1^2, s, m_2^2) \leq 0.$$

Благодаря свойствам симметрии функции  $G$  (раздел IV.5) это условие эквивалентно следующему:

$$G(s_1, s_2, s, m_2^2, m_1^2, m_3^2) \leq 0. \quad (2.1)$$

Функция  $G$  здесь та же, что и в формулах (1.5) и (1.10). Знак равенства дает границу диаграммы Далица. Чтобы изобразить диаграмму в плоскости  $s_1 s_2$ , решают это уравнение, выражая  $s_1$  через  $s_2$  с помощью формулы (IV.5.28):

$$s_1^\pm = m_1^2 + m_2^2 - \frac{1}{2s_2} \{ (s_2 - s + m_1^2)(s_2 + m_2^2 - m_3^2) \mp \lambda^{1/2}(s_2, s, m_1^2) \lambda^{1/2}(s_2, m_2^2, m_3^2) \}. \quad (2.2)$$

Это в точности совпадает с уравнением (1.8) при  $\cos \theta_{12}^{U23} = \pm 1$ . Уравнение, выражающее  $s_2$  через  $s_1$ , получается из (2.2) заменой  $p_1 \leftrightarrow p_3$  при неизменных  $p, p_2$ . Эти два уравнения представляют, конечно, одну и ту же кривую, однако для ее построения может оказаться удобным пользоваться обоими уравнениями. Потребовав, чтобы квадратные корни в уравнении (2.2) были действительными, мы найдем физическую область изменения  $s_2$ . Из циклической симметрии следует, что  $s_1, s_2$  и  $s_3$  должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)^2 &\leq s_1 \leq (\sqrt{s} - m_3)^2, \\(m_2 + m_3)^2 &\leq s_2 \leq (\sqrt{s} - m_1)^2, \\(m_1 + m_3)^2 &\leq s_3 \leq (\sqrt{s} - m_2)^2.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Чтобы дать прямой вывод уравнения (2.1) и определить фазовую плотность на диаграмме Далица, рассмотрим фазовый объем

$$R_3(s) = \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2 - E_3). \quad (2.4)$$

Подынтегральное выражение здесь следует сделать несингулярным, проинтегрировав все  $\delta$ -функции [см. (III.2.14)] В дальнейшем мы приведем много вариантов выбора переменных, которые остаются непроинтегрированными. Для анализа диаграммы Далица наиболее удобным является следующий их выбор.

Сначала интегрируем по  $p_2$  в системе покоя  $\mathbf{p} = 0$ :

$$R_3(s) = \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_3}{8E_1 E_2 E_3} \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2 - E_3), \quad (2.5)$$

где

$$E_2^2 = |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3|^2 + m_2^2 = P_1^2 + P_3^2 + 2P_1 P_3 \cos \theta_{13} + m_2^2. \quad (2.6)$$

(Здесь для краткости опущены звездочки.) Далее пишем

$$\begin{aligned}d^3 p_1 d^3 p_3 &= P_1^2 dP_1 d\Omega_1 P_3^2 dP_3 d\Omega_3 = \\&= P_1 E_1 dE_1 d\Omega_1 P_3 E_3 dE_3 d\cos \theta_{13} d\varphi_3,\end{aligned}$$

где  $\Omega_3 = (\cos \theta_{13}, \varphi_3)$  описывает ориентацию  $\mathbf{p}_3$  по отношению к  $\mathbf{p}_1$ , а  $\Omega_1$  — ориентацию  $\mathbf{p}_1$  относительно некоторой оси. В рассматриваемом случае распада выделенное направление в пространстве отсутствует, и можно было бы проинтегрировать по  $\Omega_1$ , получив  $4\pi$ , а также по  $\varphi_3$ , получив  $2\pi$ . Однако мы сохраним в формуле  $d\Omega_1 d\varphi_3$ , так как они нам в дальнейшем понадобятся.

Энергетическую  $\delta$ -функцию можно употребить для интегрирования по  $\cos \theta_{13}$  ( $dE_2/d \cos \theta_{13} = P_1 P_3/E_2$ ). В итоге получим

$$R_3(s) = \int \frac{dE_1 dE_3 d\Omega_1 d\Phi_3 P_1 E_1 P_3 E_3}{8E_1 E_2 E_3 (P_1 P_3/E_2)} \Theta(1 - \cos^2 \theta_{13}) = \\ = \frac{1}{8} \int dE_1 dE_3 d\Omega_1 d\Phi_3 \Theta(1 - \cos^2 \theta_{13}). \quad (2.7)$$

Здесь  $\Theta$ -функция ограничивает  $\cos \theta_{13}$  его физическими значениями. Значения  $\cos \theta_{13} = \pm 1$  соответствуют границе физической области в плоскости  $E_1 E_3$ , т. е. границе диаграммы Далица. Как следует из (2.6), уравнение границы имеет вид

$$(\sqrt{s} - E_1 - E_3)^2 = P_1^2 + P_3^2 \pm 2P_1 P_3 + m_2^2 = |P_1 \pm P_3|^2 + m_2^2 = \\ = E_1^2 - m_1^2 + E_3^2 - m_3^2 \pm 2\{(E_1^2 - m_1^2)(E_3^2 - m_3^2)\}^{1/2} + m_2^2, \quad (2.8)$$

или

$$4(E_1^2 - m_1^2)(E_3^2 - m_3^2) = \{2E_1 E_3 - 2\sqrt{s}(E_1 + E_3) + \\ + s + m_1^2 - m_2^2 + m_3^2\}^2. \quad (2.9)$$

Отметим, что возведение в квадрат уравнения (2.8) приводит к потере сведений о знаке импульсов. Этот знак важен в случае реакции  $2 \rightarrow 3$ . Знак не теряется на диаграммах продольных импульсов (раздел VI.6).

Переменные  $E_1$  и  $E_3$  в уравнении (2.9) линейно связаны с  $s_1$  и  $s_2$  уравнением (1.3). Якобиан перехода  $\partial(E_1, E_3)/\partial(s_1, s_2)$  равен  $1/4s$ . Если подставить в уравнение (2.9) выражения (1.3), то после некоторых выкладок оно переходит в уравнение (2.1) для функции  $G$ . Следовательно, мы имеем

$$R_3(s) = \frac{1}{32s} \int ds_1 ds_2 d\Omega_1 d\Phi_3 \Theta\{-G(s_1, s_2, s, m_2^2, m_1^2, m_3^2)\}. \quad (2.10)$$

Телесный угол  $\Omega_1$  описывает ориентацию  $\mathbf{p}_1$  в СЦМ; для задачи о распаде  $\int d\Omega_1 = 4\pi$ . Аналогично  $\Phi_3$  описывает вращение полной конфигурации импульсов относительно некоторой оси. Формула (2.10) представляет собой одну из стандартных форм записи  $R_3(s)$ . Аналогичные формы записи  $R_3(s)$  с парами  $E_1, E_2$  ( $s_2, s_3$ ) или  $E_2, E_3$  ( $s_1, s_3$ ) в качестве переменных интегрирования получаются из интегралов (2.7) и (2.10) циклической перестановкой индексов.

Уравнение (2.8) означает, что на границе  $P_2 = P_1 \pm P_3$ ; из симметрии ясно, что на других участках границы  $P_3 = P_2 \pm P_1$ ,  $P_1 = P_3 \pm P_2$ . Эти условия можно объединить и представить в сжатой и симметричной форме в виде утверждения, что на границе

$$\lambda(P_1^2, P_2^2, P_3^2) = 0, \quad (2.11)$$

или что площадь треугольника, образованного импульсами, обращается в нуль<sup>1)</sup>. Конечно, здесь импульсы должны быть по-прежнему выражены через переменные типа энергии, в которых строится диаграмма Далица. Например, введение  $E_1$  и  $E_3$  приводит к уравнению (2.9), введение  $s_1$  и  $s_2$  — к условию (2.1) для функции  $G$ . Эти уравнения, конечно, аналогичны уравнениям (IV.5.36) — (IV.5.39) для рассеяния  $2 \rightarrow 2$ .

Теперь мы рассмотрим границы диаграмм Далица для некоторых особых значений масс.

### а. Все массы одинаковы

Если три возникших при распаде частицы имеют одинаковые массы (как в случаях  $K \rightarrow 3\pi$ ,  $\eta \rightarrow 3\pi$ ), удобно сделать эту симметрию явной, пользуясь сразу всеми тремя энергиями и строя диаграмму в треугольной системе координат (фиг. 27). Именно такой вид имела диаграмма в первой работе Далица [35] (см. также [41]). Это симметричное представление подробно описано в других работах [52, 68]. Здесь мы остановимся только на основных его свойствах. Если в качестве переменных используются три кинетические энергии в СЦМ  $T_i = E_i - m$ , то они удовлетворяют условию  $T_1 + T_2 + T_3 = \sqrt{s} - 3m = Q$ , где  $Q$  — энергосвободное при распаде. Таким образом, высота равнобедренного треугольника равна  $Q$ . В каждой точке внутри треугольника выполняется закон сохранения энергии. Чтобы найти границу физической области, введем полярные координаты  $(r, \varphi)$ , отсчитываемые от центра треугольника ( $T_1 = T_2 = T_3 = Q/3$ ). Тогда

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Q}{3} (1 + r \cos \varphi), \\ T_2 &= \frac{Q}{3} \left\{ 1 + r \cos \left( \varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \right\}, \\ T_3 &= \frac{Q}{3} \left\{ 1 + r \cos \left( \varphi - \frac{2\pi}{3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Кривая, ограничивающая кинематически доступную область, получается подстановкой (2.12) в формулу (2.9). Ее уравнение имеет вид

$$1 = (1 + x)r^2 + xr^3 \cos 3\varphi, \quad (2.13)$$

<sup>1)</sup> Из (2.11) следует, что  $\lambda(p_1^2, p_2^2, p_3^2)$  (или подходящая по размерности функция от  $\lambda$ ) может быть принята за меру расстояния точки внутри фазового объема от его границы (для процесса  $1 \rightarrow 3$ ). Другой такой мерой является  $d = P_{\min} + P_{\text{ср}} - P_{\max}$ , где импульсы стоят в порядке их возрастания [83]. — Прим. ред.

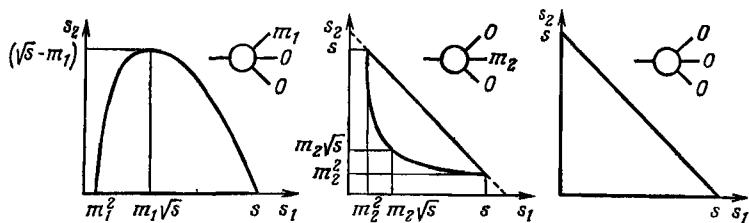
где  $x = 2\varepsilon/(2 - \varepsilon)^2$ , а  $\varepsilon = Q/\sqrt{s}$ . Видно, что  $\varepsilon$  полностью характеризует кривую; величины  $\varepsilon$  для распадов  $K$ ,  $\pi$ ,  $\omega \rightarrow 3\pi$  равны соответственно 0,17, 0,23 и 0,47.

### б. Две или три массы равны нулю

Возможны три различных случая:  $m_2 = m_3 = 0$ ,  $m_1 = m_3 = 0$  и  $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ , случай  $m_1 = m_2 = 0$  симметричен первому из них. Из формулы (IV.5.23) следует, что условие (2.1) при этом упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} G(s_1, s_2, s, 0, m_1^2, 0) &= s_2 \{s_1(s_1 + s_2 - s) - m_1^2(s_1 - s)\} \leq 0, \\ G(s_1, s_2, s, m_2^2, 0, 0) &= (s_1 s_2 - s m_2^2)(s_1 + s_2 - s - m_2^2) \leq 0, \\ G(s_1, s_2, s, 0, 0, 0) &= s_1 s_2 (s_1 + s_2 - s) = -s_1 s_2 s_3 \leq 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Поскольку уравнения границы факторизуются, диаграммы Далица легко построить (фиг. 34). Результаты остаются приближенно верными, если те массы, которые мы считали равными нулю, в действительности просто малы по сравнению с  $\sqrt{s}$ .



Фиг. 34. Схематические изображения диаграмм Далица для особых значений масс, показанных на рисунке.

В частности, когда  $s \rightarrow \infty$ , диаграмма Далица приближается по форме к треугольнику.

Формула (2.10) обладает одним свойством, которое сыграло особую роль в развитии техники графического изображения данных. *Распределение по фазовому объему*

$$\frac{d^2 R_3}{ds_1 ds_2} = \frac{\pi^2}{4s} \quad (2.15)$$

постоянно при фиксированном  $s$ . Другими словами, если данные о трехчастичном распаде изображены в виде точек на диаграмме Далица, то плотность точек пропорциональна квадрату матричного элемента. При этом сразу видны любые изменения матричного элемента. Но в действительности непостоянная фазовая плотность, свойственная другим диаграммам, тоже не затрудняет изучение структуры распределений, если только плотность

достаточно однородна. Отметим также, что только для распада  $p \rightarrow p_1 + p_2 + p_3$  распределение по диаграмме Далица дает непосредственно квадрат матричного элемента. В других случаях, например в реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2 + p_3$ , матричный элемент зависит более чем от двух переменных, и распределение по диаграмме Далица дает интеграл от квадрата матричного элемента по этим неизображенным переменным. Чтобы делать, зная этот интеграл, какие-то заключения о самом матричном элементе, очевидно, требуются и новые допущения, и особая осторожность (гл. VIII).

Исходя из формулы (2.10) очень легко выполнить еще одно интегрирование. Имеем, например,

$$\frac{dR_3}{ds_2} = \frac{\pi^2}{4s} \int_{s_1^-}^{s_1^+} ds_1 = \frac{\pi^2}{4ss_2} \lambda^{1/2}(s_2, s, m_1^2) \lambda^{1/2}(s_2, m_2^2, m_3^2), \quad (2.16)$$

где  $s_1^\pm$  определяются выражением (2.2). Соотношение (2.16) дает проекцию диаграммы Далица на одну из осей координат. Для полного фазового объема трех частиц получаем далее

$$R_3(s) = \frac{\pi^2}{4s} \int_{(m_2+m_3)^2}^{(\sqrt{s}-m_1)^2} \frac{ds_2}{s_2} \lambda^{1/2}(s_2, s, m_1^2) \lambda^{1/2}(s_2, m_2^2, m_3^2). \quad (2.17)$$

Под знаком корня стоит полином четвертого порядка по  $s_2$ , поэтому интеграл (2.17) выражается, вообще говоря, через эллиптические функции [2, 81, 164]. Только в некоторых специальных случаях интеграл (2.17) берется в элементарных функциях (упражнение V.4). Особенно интересны предельные случаи, когда  $s$  стремится к бесконечности — ультрарелятивистский случай (УР), или к порогу реакции  $(m_1 + m_2 + m_3)^2$  — нерелятивистский случай (НР). Первый предельный случай получается, если в интеграле (2.17) положить все  $m_i = 0$ :

$$R_3^{\text{УР}}(s) = \frac{\pi^2}{8} s. \quad (2.18)$$

Для получения второго предельного случая надо разложить  $R_3$  по степеням  $\sqrt{s} - m_1 - m_2 - m_3$ . Результат для общего  $R_n^{\text{НР}}$  приведен в (VI.2.19); для  $R_3$  он имеет вид

$$R^{\text{НР}}(s) = \frac{\pi^3}{2} \frac{(m_1 m_2 m_3)^{1/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^{3/2}} (\sqrt{s} - m_1 - m_2 - m_3)^2. \quad (2.19)$$

**Пример 1.** Рассмотрим распады  $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$  и  $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0$ . Даже если бы матричные элементы для этих распадов были

одинаковы, различие в массах  $m_{\pi^+} \neq m_{\pi^0}$  приводило бы к различию фазовых объемов и вероятностей распадов. Поскольку  $\sqrt{s} - \sum m_i$  здесь малая величина, можно использовать приближение (2.19) и для отношения фазовых объемов получить следующее значение (обозначения очевидны):

$$\frac{R_3(+00)}{R_3(++-)} \simeq \frac{m_{\pi^0}}{m_{\pi^+}} \left( \frac{m_K - m_{\pi^+} - 2m_{\pi^0}}{m_K - 3m_{\pi^+}} \right)^2 \approx 1,261.$$

Более сложное приближение использовано в работе [68].

### 3. Конфигурации импульсов на диаграмме Далица

Как мы уже видели, векторы импульсов  $p_1, p_2, p_3$  на границе диаграммы Далица коллинеарны. Теперь мы разберем более детально, каким образом меняется конфигурация импульсов, если передвигаться внутри диаграммы Далица. Будут изучены отдельно импульсы в общей СЦМ ( $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ ) и в системе ЦЗ ( $p_2 + p_3 = 0$ ).

Сначала рассмотрим импульсы в СЦМ (звездочки по-прежнему не ставим). Чтобы увидеть, как меняется конфигурация, посмотрим на те точки, в которых  $s_{12}, s_{23}, s_{31}$  достигают минимума или максимума, даваемого формулами (2.3). В этом разделе для большей ясности мы пользуемся обозначением с двумя индексами  $s_{ij}$ . Минимальное значение  $s_{12}$ , а именно  $s_{12} = (m_1 + m_2)^2$ , достигается, когда  $p_1 \cdot p_2 = m_1 m_2$  или когда (раздел II.2) скорости частиц 1 и 2 равны:  $v_1 = v_2$ , или  $E_2 p_1 = E_1 p_2$ . Равенство скоростей означает, что частицы в любой системе отсчета движутся вместе, как сгусток вещества (упражнение II.10). Когда скорости равны, импульсы находятся в отношении  $P_1/P_2 = m_1/m_2$ . Например, когда  $\pi$ -мезон и нуклон движутся вместе, их импульсы удовлетворяют условию  $P_\pi/P_N = m_\pi/m_N \approx 1/7$ . Из формул (1.3) следует, что, когда величина  $s_{12}$  предельно мала,  $E_3$  и  $P_3$  максимально велики:

$$E_3 = E_3^{\text{макс}} = \frac{s + m_3^2 - (m_1 + m_2)^2}{2\sqrt{s}} \quad (3.1)$$

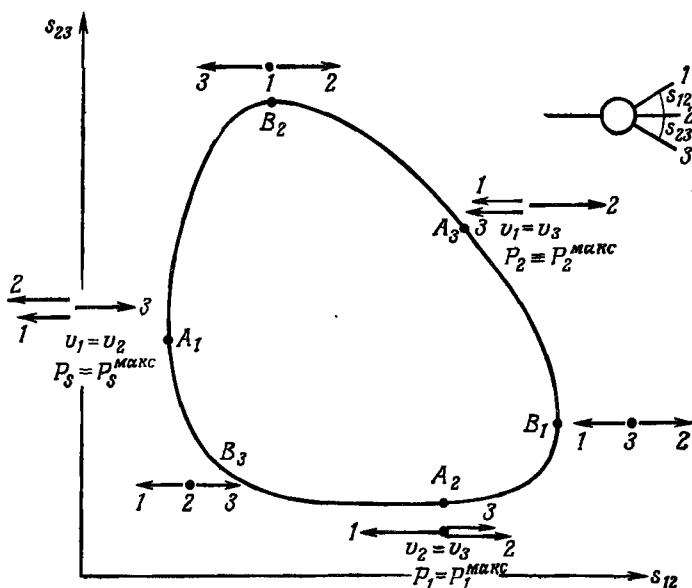
( $P_3$  выражается аналогичным образом). Это полностью характеризует конфигурацию импульсов в точке  $s_{12} = (m_1 + m_2)^2$ , если пренебречь, конечно, одновременным поворотом всех импульсов. На фиг. 35 соответствующая точка обозначена буквой  $A_1$ . Другая координата  $s_{23}$  получается непосредственно из (2.2):

$$s_{23}^{\pm} \{s_{12} = (m_1 + m_2)^2\} = \frac{m_2 s + m_1 (m_3^2 - m_2^2 - m_1 m_2)}{m_1 + m_2}. \quad (3.2)$$



При  $s_{12} = (m_1 + m_2)^2$  имеем  $\lambda(s_{12}, m_1^2, m_2^2) = 0$ , и оба корня  $s_{23}^+$  и  $s_{23}^-$  совпадают между собой.

Точки  $A_2$  и  $A_3$ , в которых  $s_{23}$  и  $s_{31}$  минимальны и равны  $(m_2 + m_3)^2$  и  $(m_1 + m_3)^2$ , интерпретируются аналогичным образом. В точке  $s_{ij} = s_{ij}^{\min} = (m_i + m_j)^2$  частицы  $i$  и  $j$  движутся в одном направлении с равными скоростями, а третья частица



Фиг. 35. Конфигурации векторов импульсов в общей СЦМ на границе диаграммы Далица.

$k$  — в противоположном направлении с наибольшим возможным для нее в данной реакции импульсом в СЦМ.

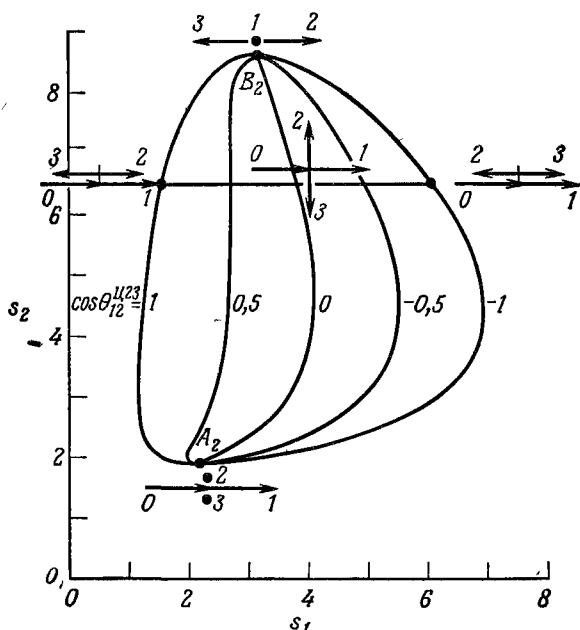
Обратимся теперь к максимальному значению  $s_{12}$   $s_{12}^{\max} = (\sqrt{s} - m_3)^2$ . Из формулы (1.3) можно видеть, что оно соответствует  $P_3 = 0$ ,  $E_3 = m_3$ . Следовательно, частица 3 покоится, а частицы 1 и 2 движутся в противоположных направлениях с равными импульсами:  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$  (точка  $B_1$  на фиг. 35). Это отвечает нашему интуитивному представлению о том, что, когда величина  $s_{12}$  предельно велика, частицы 1 и 2 предельно удаляются друг от друга. Максимальные значения  $s_{23}$  и  $s_{31}$  реализуются аналогичным образом (точки  $B_2$  и  $B_3$  на фиг. 35). При  $s_{12} = (\sqrt{s} - m_3)^2$  два корня уравнения (2.2) вновь совпадают, а

соответствующее значение  $s_{23}$  равно

$$s_{23}^{\pm} \{s_{12} = (\sqrt{s} - m_3)^2\} = \frac{m_3(s - m_1^2) + (m_2^2 - m_3^2)\sqrt{s}}{\sqrt{s} - m_3} \quad (3.3)$$

и для точек  $B_2$  и  $B_3$  аналогично.

Двигаясь между этими точками  $A_i$  и  $B_j$ , можно проследить, как меняется конфигурация импульсов в СЦМ при перемещении



Фиг. 36. Конфигурации векторов импульсов в системе Ц23 ( $p_2 + p_3 = 0$ ) на диаграмме Далица.

Показаны также кривые постоянных значений  $\cos \theta_{12}^{\text{Ц23}}$ . Численные значения относятся к реакции  $pp \rightarrow p\pi\Delta$  при 7 ГэВ/с.

вдоль границы диаграммы. Чтобы перейти к внутренней части диаграммы, следует отказаться от условия  $\cos \theta_{ij} = \pm 1$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Значение  $\theta_{12}$ , соответствующее точке  $s_1, s_2$ , можно найти из формул (1.4), (1.5).

Анализ конфигураций импульсов в системе центра масс Ц23 (фиг. 36) провести проще, чем в общей СЦМ. Причина заключается в том, что, зная  $s_{23}$ , мы знаем величину всех импульсов. Например, на фиг. 36 в точке  $A_2$  с  $s_{23} = (m_1 + m_3)^2$  имеем

$$P_2^{\text{Ц23}} = P_3^{\text{Ц23}} = 0,$$

а в точке  $B_2$ , где  $s_{23} = (\sqrt{s} - m_1)^2$ ,  
 $p_{123} = p_{123}^* = 0$ .

Для любых промежуточных значений  $s_{23}$  все импульсы отличны от нуля. При движении вдоль линии  $s_{23} = \text{const}$  от границы к границе  $\cos \theta_{12}^{123}$  меняется линейно от  $+1$  до  $-1$  (фиг. 36). Это следует непосредственно из формул (1.8) и (2.2). Следовательно, если известно распределение событий на диаграмме Далица, можно получить их распределение по полярному углу спиральности.

#### 4. Превращение двух частиц в три

В реакциях типа  $2 \rightarrow 3$ ,  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2 + p_3$ , начальное состояние обладает в СЦМ выделенным направлением — направлением падающего пучка  $\mathbf{p}_a^* = -\mathbf{p}_b^*$ . Общее число переменных равно  $3 \times 3 - 4 = 5$ . Из них переменная, описывающая вращение вокруг оси пучка, для бесспиновых частиц тривиальна, так что число существенных переменных, описывающих конечное состояние, равно 4 (табл. III.1). Теперь нельзя уже представлять экспериментальные данные и теоретические предсказания в полностью дифференциальной форме. Для этого потребовалось бы изображать число событий на четырехмерной диаграмме. В лучшем случае мы можем дать диаграмму в двух измерениях. Чтобы сравнить теорию с экспериментальными данными, надо проинтегрировать по остальным переменным либо во всем диапазоне их изменения, либо в каких-то интервалах. Но интегрирование может скрыть какие-то важные свойства матричного элемента. Чтобы избежать ошибочных выводов, необходимо полностью учитывать трудности представления экспериментальных данных, зависящих от нескольких переменных. Простейшей реакцией, в которой эти сложности проявляются вполне отчетливо, является процесс типа  $2 \rightarrow 3$ . Таким образом, кроме самостоятельного интереса, процессы типа  $2 \rightarrow 3$  поучительно исследовать в деталях, чтобы понять некоторые общие проблемы кинематики многих частиц.

В нашем анализе реакций типа  $2 \rightarrow 3$  мы введем для описания фазового пространства несколько различных наборов четырех переменных. Для каждого из них будут вычислены плотность в фазовом пространстве и границы физической области. Для рассеяния  $2 \rightarrow 2$  ситуация была очень простой; физической областью при фиксированном значении  $s$  был одномерный интервал  $t^- \leq t \leq t^+$  (IV.5.14), а распределение по фазовому объему было однородным (IV.4.24). В данном же случае можно различать физические области разного типа и разного числа измерений. Если иметь дело с четырьмя переменными  $x, y, z$  и

$u$ , то очевидно, что при фиксированном значении  $s$  будут возможны следующие варианты (ФО — физическая область):

$$\text{ФО для } xuz, \quad (4.1)$$

$$\text{ФО для } xuz, \quad (4.2a)$$

$$\text{ФО для } xuz \text{ при фиксированном } u, \quad (4.2b)$$

$$\text{ФО для } xu \text{ (диаграмма } xu), \quad (4.3a)$$

$$\text{ФО для } xu \text{ при фиксированном } z, \quad (4.3b)$$

$$\text{ФО для } xu \text{ при фиксированных } z \text{ и } u, \quad (4.3в)$$

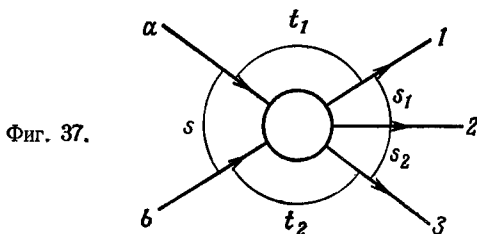
$$\text{ФО для } x \text{ («интервал изменения } x»), \quad (4.4a)$$

$$\text{ФО для } x \text{ при фиксированном } y, \quad (4.4b)$$

$$\text{ФО для } x \text{ при фиксированных } y \text{ и } z, \quad (4.4в)$$

$$\text{ФО для } x \text{ при фиксированных } y, z \text{ и } u. \quad (4.4г)$$

Отметим, например, что переход от (4.3б) к (4.3а) осуществляется интегрированием по  $z$ . Следовательно, (4.3б) всегда лежит внутри (4.3а). Мы уже имели пример набора четырех переменных: в уравнении (2.10)  $x = s_1$ ,  $y = s_2$ ,  $(z, u) = \Omega_1$ . В этом

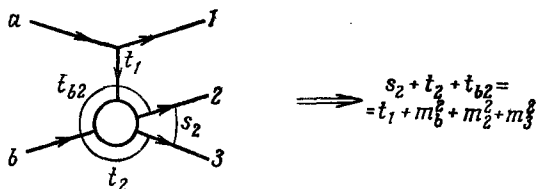


случае вариант (4.3а) соответствовал диаграмме Далица, полученной интегрированием по  $\Omega_1$ . В случае процессов типа  $2 \rightarrow 3$  это интегрирование нетривиально.

Наша процедура конструирования наборов переменных будет исходить из первоначальной формы  $R_3(s)$ , в которую входят только векторы импульсов, затем будет выполнено интегрирование  $\delta$ -функций, и после этого оставшиеся четыре неинвариантные переменные будут шаг за шагом заменены инвариантными. Таким образом, наборы переменных можно для удобства характеризовать числом входящих в них инвариантов. Например, набор переменных в интеграле (2.7)  $E_1^*$ ,  $E_3^*$ ,  $\Omega_1^*$  не содержит инвариантов, в то время как совокупность переменных  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $\Omega_1^*$  из интеграла (2.10) содержит два инварианта.

Угловые переменные, которые будут использоваться, такие, как углы Джексона, Треймана — Янга, спиральности, Толлера и т. д., очень важны для практики. Для их определения надо

указать систему отсчета и ориентацию координатных осей. При этом легко запутаться, если не быть очень точным в выполнении общепринятых соглашений. Мы дадим эти определения в последующих разделах. Зато инвариантные переменные можно определить очень просто и раз и навсегда. Мы будем использовать



Фиг. 38. Вывод соотношения между  $t_{b2}$  и стандартными инвариантами.

в качестве стандартного набора пять инвариантов, получаемых сложением (вычитанием, если направления стрелок противоположны) импульсов соседних частиц на диаграмме, представленной на фиг. 37:

$$\begin{aligned}
 s_1 &\equiv s_{12} = (p_1 + p_2)^2 = (p_a + p_b - p_3)^2, \\
 s_2 &\equiv s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (p_a + p_b - p_1)^2, \\
 t_1 &\equiv t_{a1} = (p_a - p_1)^2 = (p_2 + p_3 - p_b)^2, \\
 t_2 &\equiv t_{b3} = (p_b - p_3)^2 = (p_1 + p_2 - p_a)^2, \\
 s &\equiv s_{ab} = (p_a + p_b)^2 = (p_1 + p_2 + p_3)^2.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

В фазовом пространстве канала  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2 + p_3$  фиксировано значение  $s$  и меняются только четыре инварианта. Однако если ослабить это ограничение, то  $s$  благодаря возможности перехода из канала в канал получает точно такой же статус, как и другие инварианты. Действительно, набор (4.5) явно обладает циклической симметрией, и в дальнейшем мы убедимся, что циклическая перестановка

$$-p_a \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_3 \rightarrow -p_b \rightarrow -p_a, \tag{4.6}$$

означающая, что

$$s \rightarrow t_1 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow t_2 \rightarrow s, \tag{4.7}$$

очень полезна. Заметим, что такой простой и симметричный выбор инвариантных переменных возможен только для реакций типа  $2 \rightarrow 3$ . Уже для реакций типа  $2 \rightarrow 4$  появляются инварианты, относящиеся к трем частицам. Они не равны двухчастичным инвариантам [ср. набор (4.5)].

В дополнение к набору (4.5) можно определить еще пять инвариантов, связав между собой на фиг. 37 несоседние частицы. Они линейно зависят от переменных набора (4.5). Например, соотношение между  $t_{b2}$  и набором (4.5) легче всего по-

лучить, начертив диаграмму, показанную на фиг. 38, и применив соотношение  $s + t + u = \sum m_i^2$  к рассеянию  $2 \rightarrow 2$  в нижней вершине. Используя это правило для всех возможных случаев, получаем соотношения

$$\begin{aligned} t_{a2} &= (p_a - p_2)^2 = t_2 - t_1 - s_1 + m_a^2 + m_1^2 + m_2^2, \\ t_{b2} &= (p_b - p_2)^2 = t_1 - t_2 - s_2 + m_b^2 + m_2^2 + m_3^2, \\ t_{a3} &= (p_a - p_3)^2 = s_1 - s - t_2 + m_a^2 + m_b^2 + m_3^2, \\ t_{b1} &= (p_b - p_1)^2 = s_2 - s - t_1 + m_a^2 + m_b^2 + m_1^2, \\ s_{13} &= (p_1 + p_3)^2 = s - s_1 - s_2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

С помощью наборов (4.5) и (4.8) легко также выразить все десять скалярных произведений  $p_i \cdot p_j$  через стандартный набор инвариантных величин:

$$\begin{aligned} 2p_a \cdot p_b &= s - m_a^2 - m_b^2, & 2p_b \cdot p_2 &= s_2 + t_2 - t_1 - m_3^2, \\ 2p_a \cdot p_1 &= m_a^2 + m_1^2 - t_1, & 2p_b \cdot p_3 &= m_b^2 + m_3^2 - t_2, \\ 2p_a \cdot p_2 &= s_1 + t_1 - t_2 - m_2^2, & 2p_1 \cdot p_2 &= s_1 - m_1^2 - m_2^2, \\ 2p_a \cdot p_3 &= s - s_1 + t_2 - m_b^2, & 2p_1 \cdot p_3 &= s - s_1 - s_2 + m_2^2, \\ 2p_b \cdot p_1 &= s - s_2 + t_1 - m_a^2, & 2p_2 \cdot p_3 &= s_2 - m_2^2 - m_3^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Если исследуется фиксированный канал, например  $Kp \rightarrow K\bar{p}$ , остается еще свобода в выборе нумерации частиц. Этот вопрос должен решаться на основе наилучшей применимости формул, которые будут выведены ниже<sup>1)</sup>.

### Б. Описание с помощью двух инвариантов и двух углов; диаграмма Чү — Лоу

Подробное исследование процесса  $2 \rightarrow 3$  в разделах 5—8 основывается на факторизации фазового объема путем разбиения процесса  $2 \rightarrow 3$  на два подпроцесса  $2 \rightarrow 2$  и  $1 \rightarrow 2$ . Для определенности мы выберем в качестве промежуточной системы двух частиц систему  $p_2 + p_3$  (фиг. 39); другие случаи обсуждаются в разделе 10. Каждый из процессов — рождение системы  $2 + 3$  и ее распад — описывается двумя переменными (не считая угла  $\phi$  поворота вокруг оси пучка). В этом и следующих разделах в качестве первых двух переменных используются инварианты, а второй парой переменных служат углы распада  $\theta$  и  $\phi$  в системе покоя  $2 + 3$ .

<sup>1)</sup> Наиболее разумная нумерация диктуется динамикой процесса (как на фиг. 39). — *Прим. ред.*

Будем исходить из выражения

$$R_3(s) = \int \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} \frac{d^3 p_3}{2E_3} \delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2 - p_3). \quad (5.1)$$

Чтобы явным образом ввести промежуточную систему, подставим в формулу (5.1) тождество

$$1 = \int ds_2 \int \frac{d^3 p_{23}}{2E_{23}} \delta^4(p_{23} - p_2 - p_3),$$

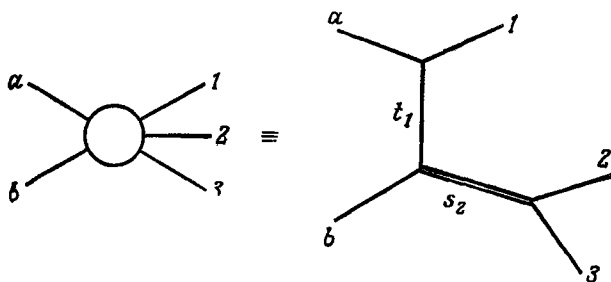
где  $E_{23}^2 = p_{23}^2 + s_2$ . В результате получим

$$R_3 = \int ds_2 \left\{ \int \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_{23}}{2E_{23}} \delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_{23}) \right\} \times \\ \times \left\{ \int \frac{d^3 p_2}{2E_2} \frac{d^3 p_3}{2E_3} \delta^4(p_{23} - p_2 - p_3) \right\}. \quad (5.2)$$

Это выражение является математическим эквивалентом фиг. 39; в сжатой форме оно имеет вид

$$R_3(s) = \int ds_2 R_2(s; m_1^2, s_2) R_2(s_2; m_2^2, m_3^2). \quad (5.3)$$

Подстановка в интеграл (5.3) любых выражений для двух множителей  $R_2$ , приведенных в разделах IV.1 и IV.4, позволяет



Фиг. 39.

выразить  $R_3$  через переменные, связанные с фиг. 39. Мы выберем для первого  $R_2$  формулу (IV.4.24), а для второго  $R_2$  формулу (IV.1.7), относящуюся к системе центра масс  $2+3$ ; получаем

$$R_3 = \frac{1}{8\sqrt{s}P_a^*} \int_0^{2\pi} d\varphi \int dt_1 ds_2 \frac{P_3^{\Pi 23}}{4\sqrt{s_2}} \int d\Omega_3^{\Pi 23}. \quad (5.4)$$

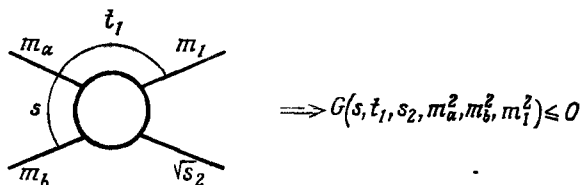
Из соотношения (1.7) имеем

$$P_2^{\Pi 23} = P_3^{\Pi 23} = \frac{\lambda^{1/2}(s_2, m_2^2, m_3^2)}{2\sqrt{s_2}} \quad (5.5)$$

и, следовательно,

$$R_3 = \frac{1}{8\sqrt{s}P_a^*} \int_0^{2\pi} d\varphi \int dt_1 ds_2 \frac{\lambda^{1/2}(s_2, m_2^2, m_3^2)}{8s_2} \int d\Omega_{\perp}^{123}. \quad (5.6)$$

Далее мы проанализируем область интегрирования по переменным  $t_1$ ,  $s_2$  и точно опишем ее в (5.16). Определение телесного угла  $\Omega_3^{123} = (\cos \theta_3^{123}, \varphi_3^{123})$  будет дано в разделе 6.



Фиг. 40.

Инварианты  $s_2$ ,  $t_1$  даются в СЦМ выражениями

$$\begin{aligned} s_2 &= s + m_1^2 - 2\sqrt{s}E_1^*, \\ t_1 &= m_a^2 + m_1^2 - 2E_a^*E_1^* + 2P_a^*P_1^* \cos \theta_1^*. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Физическую область для процесса  $m_a + m_b \rightarrow m_1 + \sqrt{s_2}$  можно найти из выражения (5.7), потребовав, чтобы выполнялись условия

$$E_1^* \geq m_1 \quad \text{и} \quad \sqrt{s_2} \geq m_2 + m_3,$$

т. е.

$$m_2 + m_3 \leq \sqrt{s_2} \leq \sqrt{s} - m_1, \quad (5.8)$$

а также условие  $|\cos \theta_1^*| \leq 1$ . Однако последнее требование для процесса  $2 \rightarrow 2$  уже рассматривалось, поэтому, применяя правило фиг. 25, находим (фиг. 40)

$$G(s, t_1, s_2, m_a^2, m_b^2, m_1^2) \leq 0. \quad (5.9)$$

Условия (5.8) и (5.9) определяют область интегрирования в интеграле (5.6).

Область (5.9) в плоскости  $t_1 s_2$  называется *диаграммой Чу — Лоу* [31]. Чтобы вычертить ее контур, надо решить уравнение (5.9), выразив либо  $t_1$  через  $s_2$ , либо  $s_2$  через  $t_1$  с

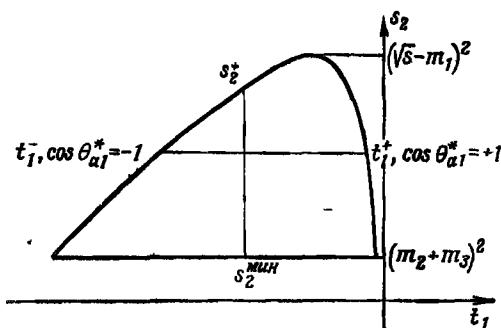


помощью уравнений (IV.5.28)

$$t_1^\pm = m_a^2 + m_1^2 - \frac{1}{2s} \{ (s + m_a^2 - m_b^2)(s - s_2 + m_1^2) \mp \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \lambda^{1/2}(s, s_2, m_1^2) \}, \quad (5.10)$$

$$s_2^\pm = s + m_1^2 - \frac{1}{2m_a} \{ (s + m_a^2 - m_b^2)(m_a^2 + m_1^2 - t_1) \mp \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \lambda^{1/2}(t_1, m_a^2, m_1^2) \}. \quad (5.11)$$

Два примера диаграммы Чу — Лоу показаны на фиг. 41, 42. Эти кривые являются кривыми второго порядка по  $t_1$  и  $s_2$ ; граничная кривая есть ветвь гиперболы. Очевидно, уравнение (5.10) представляет собой уравнение (5.7) для случая  $\cos \theta_{a1}^* = \pm 1$ .



Фиг. 41. Диаграмма Чу—Лоу.

Величины  $t_1^\pm$  и  $s_2^\pm$  даются формулами (5.10), (5.11). В данном случае гиперболы  $G=0$  достигает значения  $t_1 = (m_a - m_1)^2$  за пределами физической области.

Уравнение (5.7) показывает, что, когда точка с фиксированным значением  $s_2$  движется поперек диаграммы Чу — Лоу,  $t_1$  линейно меняется с изменением  $\cos \theta_{a1}^*$ . С другой стороны, уравнение (5.11) получается, если вычислить  $s_2$  в системе покоя падающей частицы  $p_a = 0$

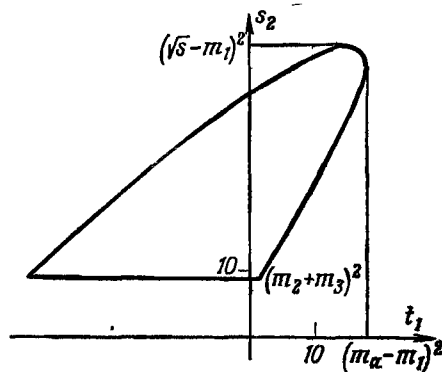
$$s_2 = (p_a + p_b - p_1)^2 = s + m_1^2 - 2E_1(m_a + E_b) + 2P_b P_1 \cos \theta_{b1} \quad (5.12)$$

и положить  $\cos \theta_{b1} = \pm 1$ . В указанной системе отсчета фиксированное значение  $t_1 = m_a^2 + m_1^2 - 2m_a E_1$  означает, что фиксированы величины  $E_1$  и  $P_1$ ; уравнение (5.12) показывает, что тогда  $s_2$  линейно зависит от  $\cos \theta_{b1}$ .

Поскольку уравнение (5.10) можно также получить из уравнения (IV.5.31) путем замены  $m_2^2$  на  $s_2$ , можно использовать выражения для  $t_{\max}$ , выведенные в разделе IV.6. Выведенные

там приближения для  $t_{\text{манс}}$ , если их рассматривать как функции  $s_2$ , являются также приближениями для границы диаграммы Чу — Лоу в случае, когда  $s$  превосходит по величине все массы, в частности когда  $s \gg s_2$ .

Как следует из условия (5.8), диаграмма Чу — Лоу размещается между двумя горизонтальными линиями на плоскости  $t_1 s_2$ . Верхняя ветвь гиперболы исключается условием  $s_2 \leq (\sqrt{s} - m_1)^2$ , а соотношение  $s_2 \geq (m_2 + m_3)^2$  отсекает конечную



Фиг. 42. Диаграмма Чу—Лоу для случая  $m_b = m_2 = m_1 = 1$ ,  $m_3 = 2$ ,  $m_a = 5$ ,  $s = 60$ .

Значение  $t_1 = (m_a - m_1)^2$  теперь является физическим

часть от нижней области  $G \leq 0$ . Эти условия можно выразить следующим образом:

$$\lambda(s, s_2, m_1^2) \geq 0, \quad \lambda(s_2, m_2^2, m_3^2) \geq 0, \quad (5.13)$$

откуда следует, что два процесса  $\sqrt{s} \rightarrow m_1 + \sqrt{s_2}$  и  $\sqrt{s_2} \rightarrow m_2 + m_3$  должны быть физическими.

При  $t_1 = (m_a - m_1)^2$  выражение (5.11) дает  $s_2^+ = s_2^-$ , а это показывает, что линия  $t_1 = (m_a - m_1)^2$  касательна к гиперболе  $G = 0$ . Здесь  $t_1$  достигает максимального возможного значения, и это соответствует ситуации, когда скорости частиц  $a$  и  $1$  одинаковы. Однако если соответствующее значение  $s_2$  лежит ниже порога, как на фиг. 41, то это значение  $t_1$  оказывается нефизическим. Чтобы найти, когда достижимо значение  $t_1 = (m_a - m_1)^2$ , найдем значение  $s_2$  при  $t_1 = (m_a - m_1)^2$  из уравнения (5.11) и потребуем, чтобы оно было больше порога  $m_2 + m_3)^2$ :

$$\begin{aligned} s_2^\pm \{t_1 = (m_a - m_1)^2\} = \\ = \frac{1}{m_a} \{s(m_a - m_1) - m_1(m_a^2 - m_b^2) + m_a m_1^2\} \geq (m_2 + m_3)^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Чтобы сделать это условие более ясным, разберем четыре различных случая:  $m_a + m_b \geq m_1 + m_2 + m_3$ ,  $m_a \geq m_1$ . Тогда значение  $t_1 = (m_a - m_1)^2$  достигается только в одной из следующих трех ситуаций:

а)  $m_a + m_b > m_1 + m_2 + m_3$  и  $m_a > m_1$ ;

б)  $m_a + m_b > m_1 + m_2 + m_3$ ,  $m_a < m_1$

и

$$s \leq (m_a + m_b)^2 + \frac{m_a}{m_1 - m_2} (m_a + m_b - m_1 - m_2 - m_3) \times \\ \times (m_a + m_b - m_1 + m_2 + m_3); \quad (5.15)$$

в)  $m_a + m_b < m_1 + m_2 + m_3$ ,  $m_a > m_1$

и

$$s > (m_1 + m_2 + m_3)^2 + \frac{m_1}{m_a - m_1} (m_1 + m_2 + m_3 - m_a - m_b) \times \\ \times (m_b - m_a + m_1 + m_2 + m_3).$$

Вернемся теперь к интегралу (5.6) и выпишем в явном виде пределы интегрирования. Это приведет к следующей важной формуле:

$$R_3 = \frac{1}{4\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \int_0^{2\pi} d\varphi dt_1 ds_2 \Theta \{ -G(s, t_1, s_2, m_a^2, m_b^2, m_1^2) \} \times \\ \times \Theta \{ \lambda(s, m_1^2, s_2) \} \Theta \{ \lambda(s_2, m_2^2, m_3^2) \} \frac{\lambda^{1/2}(s_2, m_2^2, m_3^2)}{8s_2} \int d\Omega_3^{23}. \quad (5.16)$$

Можно сделать несколько замечаний о применении формулы (5.16) и о ее следствиях.

а. Из формулы (5.16) следует, что фазовая плотность на диаграмме Чу—Лоу дается выражением

$$\frac{d^2 R_3}{ds_2 dt_1} = \frac{\pi^2}{4\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \frac{\lambda^{1/2}(s_2, m_2^2, m_3^2)}{s_2}. \quad (5.17)$$

Она не зависит от  $t_1$ , но зависит от  $s_2$ . Однако легко заменить  $s_2$  другой переменной  $r$  таким образом, чтобы плотность фазового пространства оказалась постоянной по отношению и к  $t_1$ , и к  $r$  (упражнение V.3, см. также [84\*]).

б. Выражения (5.17) можно проинтегрировать по  $s_2$  или по  $t_1$ . Поскольку плотность не зависит от  $t_1$ , интегрирование по  $t_1$  дает длину  $t_1^+ - t_1^-$  отрезка интегрирования [выражение (5.10)].

Выражение для  $dR_3/ds_2$ , конечно, совпадает с выражением (2.16), полученным из диаграммы Далица. Для  $dR_3/dt_1$  имеем

$$\frac{dR_3}{dt_1} = \frac{\pi^2}{4\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \int_{s_2^{\min}}^{s_2^+} ds_2 \frac{\lambda^{1/2}(s_2, m_2^2, m_3^2)}{s_2}, \quad (5.18)$$

где

$$s_2^{\min} = \max \{s_2^-, (m_2 + m_3)^2\},$$

а  $s_2^+$  даются выражением (5.11). Интеграл (5.18) вычисляется в конечном виде в упражнении V.2 (см. также [84\*]). Формула (5.18) интересна тем, что она показывает, каким образом  $dR_3/dt_1$  обращается в нуль вблизи  $t_1 = t_{1\max}$  или  $t_{1\min}$  вследствие уменьшения интервала интегрирования. Для  $dR_2/dt$  ситуация иная [уравнение (IV.4.24)]

в. Вводя сокращенное обозначение  $\Omega_3^{123} = \Omega = (\cos \theta, \varphi)$ , из формулы (5.16) получаем для распределения  $w(\cos \theta, \varphi)$  по  $\Omega$  при фиксированном значении  $s$

$$w(\cos \theta, \varphi) \sim \int dt_1 ds_2 \frac{\lambda^{1/2}(s_2, m_2^2, m_3^2)}{8s_2} T(s_2, t_1, \Omega), \quad (5.19)$$

где  $T(p_i) = T(s_2, t_1, \Omega)$  — квадрат модуля матричного элемента для реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2 + p_3$ . В частности, если  $T = T(s_2, t_1)$  зависит только от  $s_2$  и  $t_1$ , то  $w(\cos \theta, \varphi)$  есть константа. Наоборот, любые экспериментально обнаруженные вариации плотности  $w(\cos \theta, \varphi)$  связаны исключительно с зависимостью  $T$  от  $\Omega$ . На практике, если есть какое-то представление о том, в каком спиновом состоянии образуется система 23, обычно параметризуют  $w(\cos \theta, \varphi)$  элементами матрицы плотности (см., например, [73]).

**Пример 1.** В качестве примера динамической модели предположим, что мы хотим описать рождение в реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2 + p_3$  резонанса со спином  $l$ , распадающегося на частицы 2 и 3. Экспериментальным данным не противоречит следующий простой вид квадрата матричного элемента:

$$T = e^{a t_1} F(s_2) \frac{2l+1}{4\pi} \{P_l(\cos \theta)\}^2, \quad (5.20)$$

где  $a > 0$  — константа,  $F(s_2)$  — некоторая функция  $s_2$  (например, функция Брейта—Вигнера), а  $P_l$  — полином Лежандра. Ось, относительно которой измеряется  $\cos \theta$ , есть, как мы увидим в следующем разделе, ось  $-\mathbf{p}_b$ . Согласно формуле (5.19), распределение по  $\cos \theta$  пропорционально  $\{P(\cos \theta)\}^2$ , как это и

должно быть для чистого резонанса со спином  $l$ , а распределение по  $\varphi$  равномерно. Из формулы (5.16) после несложного интегрирования по  $t_1$  следует

$$\frac{d\sigma}{ds_2} = \frac{1}{(4\pi)^4 4\lambda(s, m_a^2, m_b^2)} F(s_2) \frac{\lambda^{1/2}(s_2, m_2^2, m_3^2)}{s_2} \frac{1}{a} (e^{at_1^+} - e^{at_1^-}), \quad (5.21)$$

где  $t_1^\pm = t_1^\pm(s_2)$  дается выражением (5.10). Следовательно, распределение по  $s_2$  состоит из первоначального множителя  $F(s_2)$ , несколько искажаемого фактором  $\lambda^{1/2}(s_2, m_2^2, m_3^2)/s_2$ , связанным с фазовым объемом; из-за него  $d\sigma/ds_2$  обращается в нуль при  $s_2 = s_2^{\min} = (m_2 + m_3)^2$ ; имеется еще один множитель, обращающий  $d\sigma/ds_2$  в нуль при  $s_2 = s_2^{\max} = (\sqrt{s} - m_1)^2$ . Мы вернемся к уравнению (5.21), когда будем обсуждать кинематические отражения в разделе VIII.2.

**Пример 2.** В качестве второй иллюстрации рассмотрим обменные модели типа

$$T_3 = F(t_1) |A(s_2, \cos \theta; t_1, m_b^2, m_2^2, m_3^2)|^2, \quad (5.22)$$

где  $F(t_1)$  — некоторая функция  $t_1$ , а  $A$  — амплитуда процесса  $2 \rightarrow 2$  типа  $(p_a - p_1) + p_b \rightarrow p_2 + p_3$ , для которого квадрат массы одной из внешних частиц (фиг. 39) есть  $t_1$ . Простым примером этого случая является немодифицированная модель однопсионного обмена, в которой  $F(t_1) = g_{NN\pi} t_1 / (t_1 - m_\pi^2)^2$ , а  $A$  — продолжение амплитуды  $\pi N$ -рассеяния за пределы массовой поверхности  $\pi$ -мезона. Формула (5.16) удобна для интегрирования амплитуды, имеющей форму (5.22) (упражнение V.5), если допустить, что выход за массовую поверхность не меняет  $A$ , т. е. что в выражении (5.22) можно заменить  $t_1$  в  $A$  постоянной положительной массой. Именно в этом контексте первоначально возникла диаграмма Чу — Лоу [31].

## 6. Углы Джексона, Треймана — Янга, спиральности и некоторые другие

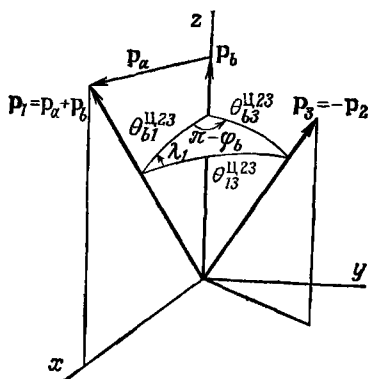
Теперь мы рассмотрим телесный угол  $\Omega_3^{\text{ЦЗ}}$ , который входит в интеграл (5.6) и при распаде  $\sqrt{s_2} \rightarrow m_2 + m_3$  определяет ориентацию  $p_3$  в системе отсчета  $p_2 + p_3 = p_a + p_b - p_1 = 0$  (фиг. 43). В этой системе отсчета векторы  $p_a$ ,  $p_b$  и  $p_1$  определяют плоскость рождения, в качестве которой обычно выбирают плоскость  $xz$ . Конфигурация этих векторов зависит только от  $t_1$  и  $s_2$  (а также от  $s$  и от масс). Действительно, применяя выражения (II.7.10) и (IV.5.17) с заменой  $p_1 \rightarrow p_2 + p_3$ ,  $p_2 \rightarrow p_b$  и

$p_3 \leftrightarrow p_1$ , находим, что угол  $\theta_{b1}^{123}$  между  $p_b$  и  $p_1$  в системе отсчета Ц23 дается формулой

$$\sin^2 \theta_{b1}^{123} = - \frac{4s_z G(s, t_1, s_2, m_a^2, m_b^2, m_1^2)}{\lambda(s_2, m_b^2, t_1) \lambda(s, s_2, m_1^2)}. \quad (6.1)$$

Другие углы определяются аналогичным образом.

Чтобы определить ориентацию  $p_3$ , выберем направление полярной оси либо вдоль  $p_b$ , либо вдоль  $p_1$ . Если ось направлена вдоль  $p_b$ , то говорят о *джексоновской системе координат*, если



Фиг. 43. Определение угла Треймана — Янга  $\varphi_b$  и угла спиральности  $\lambda_1$  в системе отсчета  $p_2 + p_3 = 0$ .

же вдоль  $p_1$ , то речь идет о *спиральной системе координат*. В соответствии с этим угол  $\theta_{b1}^{123}$  в формуле (6.1) называется *углом между джексоновской и спиральной системами координат*. Заметим, что термин «система координат» относится здесь только к разным выборам осей в одной и той же системе отсчета. Полярный и азимутальный углы в джексоновской и спиральной системах координат определяются следующим образом.

#### а. Джексоновская система координат

Поскольку полярная ось направлена вдоль  $p_b$ , полярный угол, или *угол Джексона* [59], определяется формулой

$$\cos \theta_{b3}^{123} = \frac{p_b \cdot p_3}{p_b p_3} \Big|_{p_1 = -p_1}. \quad (6.2)$$

Он меняется от 0 до  $\pi$  и поэтому однозначно определяется своим косинусом. Отметим, что  $\theta_{b3}^{123} = \theta_{a-1,2}^{123}$  есть угол рассеяния в СЦМ подпроцесса  $(p_a - p_1) + p_b \rightarrow p_2 + p_3$ . Этим объясняется также выбор вектора  $p_3$ , а не  $p_2$  для определения углов вылета в реакции  $(p_2 + p_3) \rightarrow p_2 + p_3$  на фиг. 42. Любой резонанс, распадающийся на частицы 2 и 3, будет непосредственно проявляться в распределении углов Джексона.

Азимутальный угол в джексоновской системе координат называется *углом Треймана — Янга* и определяется формулами

$$\begin{aligned}\cos \varphi_b &= - \frac{(\mathbf{p}_b \times \mathbf{p}_1) \cdot (\mathbf{p}_b \times \mathbf{p}_3)}{|\mathbf{p}_b \times \mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_b \times \mathbf{p}_3|} \Big|_{\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1}, \\ \sin \varphi_b &= \frac{P_b (-\mathbf{p}_b \cdot \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_3)}{|\mathbf{p}_b \times \mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_b \times \mathbf{p}_3|} \Big|_{\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1}.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Угол Треймана — Янга  $\varphi_b$  в сущности представляет собой угол между плоскостью рождения  $\mathbf{p}_b$ ,  $\mathbf{p}_1$  и плоскостью распада  $\mathbf{p}_b$ ,  $\mathbf{p}_3$  (фиг. 43). Индекс  $b$  подчеркивает тот факт, что полярная ось направлена вдоль  $\mathbf{p}_b$ ; мы опускаем верхний индекс Ц23 в обозначениях азимутальных углов.

Следует обратить внимание на знак минус перед  $\cos \varphi_b$  в формуле (6.3). Благодаря ему наше определение совпадает с общепринятым. Он означает, что угол, определенный на фиг. 42 векторами  $\mathbf{p}_b$ ,  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_3$ , есть на самом деле  $\pi - \varphi_b$ , а не  $\varphi_b$ ; поэтому при  $p_{2y} \approx 0$ ,  $p_{2x} > 0$ , т. е. когда вектор  $\mathbf{p}_2$  близок к  $\mathbf{p}_1$  ( $p_{1x} > 0$ ), угол  $\varphi_b$  близок к нулю. Заметим также, что отражение в плоскости рождения приводит к замене  $\varphi_b$  на  $2\pi - \varphi_b$ . Если в начальном состоянии ничто не позволяет различить две стороны плоскости, то распределение по  $\varphi_b$  будет симметрично относительно  $\pi$ .

### б. Спиральная система координат

В спиральной системе координат полярная ось направлена вдоль  $\mathbf{p}_1$  и полярный угол, называемый в этом случае *полярным углом спиральности*, определяется формулой

$$\cos \theta_{13}^{\text{Ц23}} = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3}{P_1 P_3} \Big|_{\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1}. \quad (6.4)$$

Угол  $\theta_{12}^{\text{Ц23}} = \pi - \theta_{13}^{\text{Ц23}}$  уже рассматривался в разделе 1 [формулы (1.9), (1.10)]. Как было показано выше, распределение на диаграмме Далица дает непосредственно распределение по полярному углу спиральности (см. замечания в конце раздела 3).

Соответствующий азимутальный угол  $\lambda_1$  называется *углом спиральности* и определяется выражениями

$$\begin{aligned}\cos \lambda_1 &= \frac{(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_b) \cdot (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_3)}{|\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_b| |\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_3|} \Big|_{\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1}, \\ \sin \lambda_1 &= \frac{P_1 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_b \times \mathbf{p}_3)}{|\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_b| |\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_3|} \Big|_{\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1}.\end{aligned}\quad (6.5)$$

Таким образом,  $\lambda_1$  есть угол между плоскостью рождения  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_b$  и плоскостью  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_3$ , причем ось направлена вдоль  $\mathbf{p}_1$  (+  $\mathbf{p}_b = \mathbf{p}_1$  (см. фиг. 42)). Как и в случае  $\varphi_b$ , распределение обычно симметрично относительно  $\lambda_1 = \pi$ .

Согласно выражениям (5.16) и (5.19), распределения углов Джексона, Треймана — Янга, полярного угла спиральности и азимутального угла спиральности по фазовому объему однородны.

Определения  $\phi_b$  и  $\lambda_1$  с помощью формул (6.3) и (6.5) можно дать в несколько различающихся, но эквивалентных формах. Существуют два типа модификаций. В первом случае можно, оставаясь еще в системе Ц23, применить уравнения  $p_a = p_1 - p_b$  и  $p_2 = -p_3$ , чтобы заменить некоторые векторы, входящие в (6.3) и (6.5), другими векторами. Одна из формул, получаемых этим путем, довольно интересна (упражнение V.6). Возможны менее тривиальные модификации благодаря тому, что азимутальный угол инвариантен относительно преобразований Лоренца, параллельных полярной оси. Таким образом, угол  $\phi_b$  инвариантен относительно преобразований вдоль оси

$$p_b = p_1 - p_a, \quad (6.6)$$

а  $\lambda_1$  — относительно преобразований вдоль оси

$$p_1 = p_a + p_b. \quad (6.7)$$

Эти преобразования приводят к разным системам отсчета; только в системе Ц23 могут быть одновременно определены  $\phi_b$  и  $\lambda_1$ .

Чтобы продемонстрировать другие возможные определения в иных системах отсчета, введем следующее обозначение, уже применявшееся в (II.7.25):

$$p_1 = 0, \quad (p_2; p_3, p_4) \rightarrow \varphi. \quad (6.8)$$

Оно означает, что

$$\cos \varphi = \frac{(p_2 \times p_3) \cdot (p_2 \times p_4)}{|p_2 \times p_3| |p_2 \times p_4|},$$

$$\sin \varphi = \frac{P_2 (p_2 \cdot p_3 \times p_4)}{|p_2 \times p_3| |p_2 \times p_4|}.$$

Таким образом,  $\varphi$  есть азимутальный угол вектора  $p_4$  в системе отсчета  $p_1 = 0$ , когда вектор  $p_2$  параллелен оси  $z$  и  $p_{zy} = 0$ ,  $p_{zx} \geq 0$  (фиг. 7). Тогда выражения (6.3) и (6.5) сокращенно записываются в виде

$$p_2 + p_3 = 0, \quad (p_b; p_1, p_3) \rightarrow \pi - \phi_b, \quad (6.9)$$

$$p_2 + p_3 = 0, \quad (p_1; p_b, p_4) \rightarrow \lambda_1. \quad (6.10)$$

Из уравнения (6.6) видно, что угол Треймана — Янга  $\phi_b$  просто определяется также в системах отсчета  $p_b = 0$  (система мишени) или  $p_a - p_1 = 0$ . Чтобы иметь возможность преобразовать (6.9) в систему отсчета, где  $p_b = 0$ , следует переписать



(6.9) так, чтобы вектор  $p_b$  отсутствовал. В Ц23  $p_b = p_1 - p_a$ ; это означает, что

$$p_2 + p_3 = 0, \quad (p_1 - p_a; p_1, p_3) \rightarrow \pi - \varphi_b.$$

Следовательно, в системе отсчета  $p_b = 0$  угол между  $p_1 - p_a$ ,  $p_1$  и  $p_1 - p_a$ ,  $p_3$  есть тоже  $\pi - \varphi_b$ .

Можно слегка изменить результат, применив справедливое в системе отсчета  $p_b = 0$  равенство  $p_1 - p_a = -p_2 - p_3$ . Это дает

$$p_b = 0, \quad (-p_2 - p_3; p_1, p_3) \rightarrow \pi - \varphi_b.$$

Согласно формуле (II.7.25), это эквивалентно выражению

$$p_b = 0, \quad (p_2 + p_3; p_1, p_2) \rightarrow \varphi_b. \quad (6.11)$$

Последнее выражение в сущности совпадает с определением Треймана и Янга [137].

Поскольку разность  $p_a - p_1$  не входит в (6.11), выражение (6.11) можно использовать для определения  $\varphi_b$  в системе отсчета, где  $p_a - p_1 = 0$ . Однако из-за того, что 4-импульс  $p_a - p_1$  обычно пространственноподобен, эта система отсчета существует не всегда. Подходящей системой является тогда система, в которой  $p_a - p_1 = (0, 0, 0, \sqrt{-t_1})$ ; выражение (6.11) справедливо в этой системе без изменения. Для случая упругой верхней вершины  $m_a = m_1$  такой системой является система Брейта:  $E_a = E_1$ ,  $p_a = -p_1$ .

Сходным путем можно убедиться в том, что угол спиральности допускает определения

$$p_1 = 0, \quad (p_a + p_b; p_b, p_3) \rightarrow \lambda_1, \quad (6.12)$$

$$p_a + p_b = 0, \quad (p_1; p_0, p_3) \rightarrow \lambda_1. \quad (6.13)$$

## 7. Описание с помощью трех инвариантов и одного угла

Задание ориентации импульса  $p_3$  в джексоновской или в спиральной системе координат означает, что в формуле (5.16) мы полагаем

$$d\Omega_3^{123} = d \cos \theta_{b3}^{123} d\varphi_b, \quad (7.1)$$

$$d\Omega_3^{123} = d \cos \theta_{13}^{123} d\lambda_1 = -d \cos \theta_{12}^{123} d\lambda_1. \quad (7.2)$$

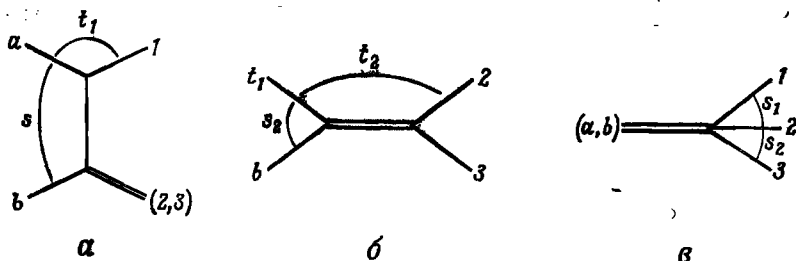
В этом разделе мы покажем, как можно заменить в (7.1)  $\cos \theta_{b3}^{123}$  на  $t_2 = t_{b3}$  или как можно заменить в (7.2)  $\cos \theta_{13}^{123}$  на  $s_1 = s_{12}$  и тем самым выразить  $R_3(s)$  [формула (5.16)] через три инварианта и один угол.

Соотношение между  $t_2$ ,  $s_1$  и углами можно получить несколькими способами. Мы выберем из них самый прямой и громозд-

кий, а именно запишем

$$t_2 = (p_b - p_3)^2 = m_b^2 + m_3^2 - 2E_b^{\Pi 23} E_3^{\Pi 23} + 2P_b^{\Pi 23} P_3^{\Pi 23} \cos \theta_{b3}^{\Pi 23}. \quad (7.3)$$

Чтобы ввести сюда инвариантные переменные, надо дополнить перечень обозначений (1.7) выражениями для величин  $E_a$



Фиг. 44. Три диаграммы, описывающие реакцию  $a + b \rightarrow 1 + 2 + 3$ .

Физическая область каждой из них характеризуется неравенствами

$$a: \Delta_3(p_2 + p_3, p_b, p_1) = \Delta_3(p_2 + p_3, p_b, p_a + p_b) > 0, \quad G(s, t_1, s_2, m_a^2, m_b^2, m_1^2) < 0;$$

$$б: \Delta_3(p_a - p_1, p_b, p_2) = \Delta_3(p_2 + p_3, p_b, p_3) > 0, \quad G(s_2, t_2, m_3^2, t_1, m_b^2, m_2^2) < 0;$$

$$в: \Delta_3(p_2, p_1, p_3) = \Delta_3(p_2 + p_3, p_a + p_b, p_3) > 0, \quad G(s_1, s_2, s, m_2^2, m_1^2, m_3^2) < 0.$$

и  $E_b$ , которые отсутствовали при распаде. Можно сразу написать следующие выражения:

$$\begin{aligned} E_a^{\Pi 23} &= \frac{s_2 + m_a^2 - t_{b1}}{2\sqrt{s_2}} = \frac{s + t_1 - m_b^2 - m_1^2}{2\sqrt{s_2}}, \\ E_b^{\Pi 23} &= \frac{s_2 + m_b^2 - t_1}{2\sqrt{s_2}}, \quad P_a^{\Pi 23} = \frac{\lambda^{1/2}(s_2, m_a^2, t_{b1})}{2\sqrt{s_2}}, \\ P_b^{\Pi 23} &= \frac{\lambda^{1/2}(s_2, m_b^2, t_1)}{2\sqrt{s_2}}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Тем самым мы обнаруживаем *линейную зависимость между  $t_2$  и  $\cos \theta_{b3}^{\Pi 23}$* ;

$$\begin{aligned} t_2 &= m_b^2 + m_3^2 - \frac{1}{2s_2} (s_2 + m_b^2 - t_1)(s_2 + m_3^2 - m_2^2) + \\ &+ \cos \theta_{b3}^{\Pi 23} \frac{1}{2s_2} \lambda^{1/2}(s_2, m_b^2, t_1) \lambda^{1/2}(s_2, m_3^2, m_2^2). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Полагая  $\cos \theta_{b3}^{\Pi 23} = \pm 1$ , мы, очевидно, получаем *интервал изменения  $t_2$  при фиксированных  $s_2$  и  $t_1$* . Вспомнив, что  $\theta_{b3}^{\Pi 23}$  есть угол рассеяния в СЦМ реакции  $(p_a - p_1) + p_b \rightarrow p_2 + p_3$  и применив к этой реакции (фиг. 44) правило, иллюстрируемое фиг. 25, мы можем записать этот интервал в виде

$$G(s_2, t_2, m_3^2, t_1, m_b^2, m_2^2) \leq 0 \quad (7.6)$$

Линейное соотношение, связывающее  $s_1$  и  $\cos \theta_{13}^{123}$ , уже было приведено выше [соотношение (1.8)], поскольку  $\cos \theta_{12}^{123} = -\cos \theta_{13}^{123}$ . Полагая в этом соотношении  $\cos \theta_{13}^{123} = \pm 1$ , мы получаем интервал изменения  $s_1$  при фиксированных  $s$  и  $s_2$ . Варьируя  $s_2$ , мы получаем, естественно, фигуру Далица. Условия, при которых значения  $\cos \theta_{13}^{123}$  являются физическими, записываются через функцию  $G$  в виде (2.1) (фиг. 44).

Теперь нетрудно заменить полярный угол в (7.1) на  $t_2$ , а в (7.2) — на  $s_1$ . Подставляя результаты этой замены в (5.16), мы получаем следующие выражения для  $R_3(s)$ :

$$R_3(s) = \frac{\pi}{2\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \int dt_1 ds_2 \frac{\Theta\{-G(s, t_1, s_2, m_a^2, m_b^2, m_1^2)\}}{4\lambda^{1/2}(s_2, m_b^2, t_1)} \times \\ \times \int dt_2 \Theta\{-G(s_2, t_2, m_3^2, t_1, m_b^2, m_2^2)\} \int_0^{2\pi} d\phi_b, \quad (7.7)$$

$$R_3(s) = \frac{\pi}{2\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \int dt_1 ds_2 \frac{\Theta\{-G(s, t_1, s_2, m_a^2, m_b^2, m_1^2)\}}{4\lambda^{1/2}(s, s_2, m_1^2)} \times \\ \times \int ds_1 \Theta\{-G(s_1, s_2, s, m_2^2, m_1^2, m_3^2)\} \int_0^{2\pi} d\lambda_1. \quad (7.8)$$

Эти выражения для  $R_3(s)$  полезны тогда, когда квадрат матричного элемента имеет вид  $T = f(t_1, s_2, t_2, \phi_b)$  или  $T = f(t_1, s_2, s_1, \lambda_1)$ .

**Пример 1.** Если квадрат матричного элемента имеет вид

$$T = F(t_1, s_2) e^{bt_2}, \quad (7.9)$$

то, согласно уравнениям (7.7) и (III.2.2), распределение на диаграмме Чу — Лоу дается выражением

$$\frac{d^2\sigma}{dt_1 ds_2} = \frac{1}{(4\pi)^3 \lambda(s, m_a^2, m_b^2)} \frac{F(t_1, s_2)}{4\lambda^{1/2}(s_2, m_b^2, t_1)} \frac{1}{b} (e^{bt_2^+} - e^{bt_2^-}), \quad (7.10)$$

где

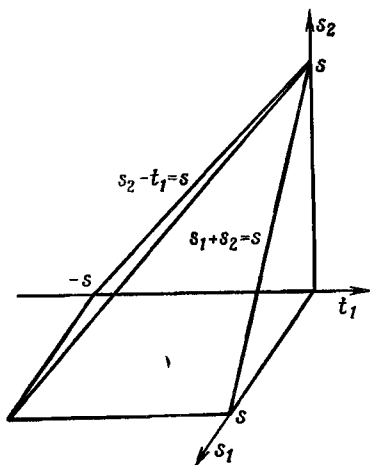
$$e^{bt_2^+} - e^{bt_2^-} = 2 \exp \left[ b \left\{ m_b^2 + m_3^2 - \frac{1}{2s_2} (s_2 + m_b^2 - t_1) (s_2 + m_3^2 - m_2^2) \right\} \right] \times \\ \times \operatorname{sh} \left\{ \frac{b}{2s_2} \lambda^{1/2}(s_2, m_b^2, t_1) \lambda^{1/2}(s_2, m_3^2, m_2^2) \right\}.$$

Дальнейшие интегрирования проводятся численно.

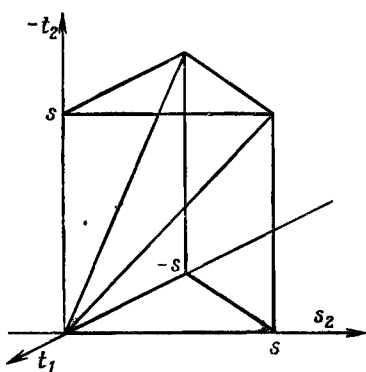
Выражение (7.8) подразумевает [115, 117], что физическая область в переменных  $t_1, s_1, s_2$  определяется условиями

$$G(s, t_1, s_2, m_a^2, m_b^2, m_1^2) \leq 0, \quad G(s_1, s_2, s, m_2^2, m_1^2, m_3^2) \leq 0. \quad (7.11)$$

Поскольку функции  $G$  здесь содержат только пары переменных инвариантов ( $t_1 s_2$  и  $s_1 s_2$ ), они представляют собой цилиндры в пространстве  $t_1, s_1, s_2$ , и физической областью является общая



Фиг. 45. Физическая область изменения переменных  $s_1 s_2 t_1$  при нулевых массах частиц есть пересечение двух призм (при  $m_i \neq 0$  — двух цилиндров).



Фиг. 46. Физическая область изменения переменных  $t_1 s_2 t_2$  при нулевых массах частиц.

внутренняя часть этих двух цилиндров. На фиг. 45 показано, на что похожа эта трехмерная область в случае нулевых масс или очень большого  $s$ . Ее проекции на плоскости  $s_1 s_2$  и  $s_2 t_1$  — это диаграммы Далица и Чу — Лоу соответственно. Проекция на плоскость  $t_1 s_1$  дает  $t_1 s_1$ -диаграмму. На фиг. 45 видно, что при больших  $s$  она близка к квадрату.

Точно так же выражение (7.7) подразумевает, что физическая область изменения  $t_1, s_2, t_2$  удовлетворяет неравенствам [115, 117]

$$\begin{aligned} G(s, t_1, s_2, m_a^2, m_b^2, m_1^2) &\leq 0, \\ G(s_2, t_2, m_3^2, t_1, m_b^2, m_2^2) &\leq 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

На этот раз во вторую функцию  $G$  входят все три переменных инварианта, так что физическая область представляет собой общую внутреннюю часть цилиндра, определяемого первой

функцией  $G$ , и трехмерного многообразия, определяемого второй функцией  $G$ . На фиг. 46 показана эта физическая область для нулевых масс. Ее проекции на координатные плоскости суть диаграмма Чу—Лоу в переменных  $t_1 s_2$ , далее  $t_2 s_2$ -диаграмма и  $t_1 t_2$ -диаграмма. Из фиг. 46 видно, что граница  $t_1 t_2$ -диаграммы по мере роста  $s$  все меньше отличается от квадрата.

Точные границы диаграмм  $t_1 s_1$ ,  $t_2 s_2$  и  $t_1 t_2$  намного сложнее границ диаграммы Далица ( $s_1 s_2$ ) или Чу—Лоу ( $t_1 s_2$  или  $t_2 s_1$ ). Причина состоит в следующем. Для получения диаграммы Чу—Лоу мы проводим интегрирование по  $t_2$  в (7.7), а для получения диаграммы Далица — интегрирование по  $t_1$  в (7.8). В обоих случаях переменная интегрирования встречается только в одной  $G$ -функции — это дает пределы интегрирования; другая функция  $G$  при этом остается постоянной и дает границу диаграммы. Но для получения  $t_1 t_2$ -диаграммы приходится интегрировать в (7.7) по  $s_2$ , а  $s_2$  присутствует в обеих  $G$ -функциях. Следовательно, определять границу приходится другими средствами. Мы не будем здесь излагать их [64], а вместо этого продемонстрируем свойства  $t_1 t_2$ -диаграммы на примере.

**Пример 2.** Если массы равны  $m_a = m_1 = m_2 = 0$ ,  $m_b = m_3 = m$  (реакция  $\pi N - \pi N$  при  $m_\pi \approx 0$ ), то  $t_1 t_2$ -диаграмма (фиг. 47) ограничена частями кривых

$$\begin{aligned} t_1 &= 0, \\ t_2 &= \frac{-m^2 t_1^2}{(s - m^2)(s - m^2 + t_1)}, \\ t_2 &= \frac{-(s - m^2)^2}{s}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

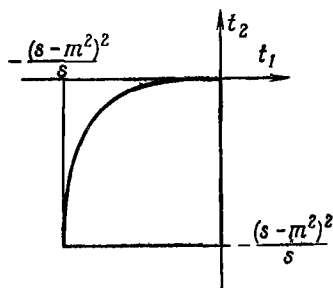
а распределение по фазовому объему имеет вид

$$\frac{d^2 R_3}{dt_1 dt_2} = \frac{\pi^2}{4(s - m^2)} \ln \left[ \frac{s - m^2}{m^2} \frac{t_2 + \{t_2(t_2 - 4m^2)\}^{1/2}}{|t_1 - t_2| - t_1 - t_2} \right]. \quad (7.14)$$

В нем наблюдается пик при малых  $t_1, t_2$ , а вдоль границы плотность распределения стремится к нулю. В пределе  $m \rightarrow 0$  граница  $t_1 t_2$ -диаграммы становится квадратом.

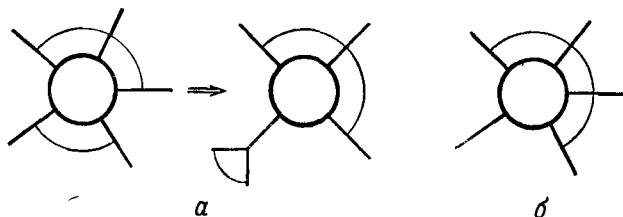
Существенное качественное различие между  $t_1 s_1$ - и  $t_1 t_2$ -диаграммами, с одной стороны, и диаграммами Далица ( $s_1 s_2$ ) и Чу—Лоу ( $t_1 s_2$ ) — с другой, может быть охарактеризовано следующим образом. В последних диаграммах три входящие в них инварианта (включая  $s$ ) не все примыкают друг к другу (фиг. 48). Процесс эффективно оказывается процессом типа  $2 \rightarrow 2$ , в котором квадрат массы одной из внешних частиц равен отдельному инварианту ( $s$  на диаграмме Далица,  $s_2$  на диаграмме Чу—Лоу). А на  $t_1 t_2$ - и  $t_1 s_1$ -диаграммах все три инва-

рианта  $(t_2, s, t_1 \text{ и } s, t_1, s_1)$  примыкают друг к другу, и процесс нельзя свести к подпроцессу  $2 \rightarrow 2$ . Поэтому границу нельзя задать одной  $G$ -функцией.



Фиг. 47. Диаграмма  $t_1 t_2$  при  $m_a = m_1 = m_2 = 0$ ,  $m_b = m_3 = m$ .

Физические области изменения *двух инвариантов, когда третий* (в добавление к  $s$  и массам) *фиксирован*, также непосредственно даются неравенствами (7.11), (7.12): это — сечения трехмерных областей (7.11), (7.12) плоскостью. Например, область физических значений  $t_1 t_2$  при фиксированном  $s_2$  можно начертить так: вычертить сначала в плоскости  $t_1 t_2$  гиперболу,



Фиг. 48. Определение трех инвариантов:  $a$  — не примыкающих друг к другу,  $b$  — примыкающих друг к другу.

В случае  $a$  — реакция  $2 \rightarrow 3$  может быть сведена к реакции  $2 \rightarrow 2$ .

определяемую второй  $G$ -функцией в (7.12) [в разрешенном относительно  $t_2$  виде она приведена в (7.5)], а затем двумя прямыми линиями  $t_1 = \text{const}$  [см. (5.10)] отделить от этой гиперболы область, отвечающую первой  $G$  функции. Эта область при  $s_2 \rightarrow (m_2 + m_3)^2$  приближается к отрезку прямой

$$(m_2 + m_3)t_2 = m_3 t_1 + m_2(m_b^2 - m_3^2 - m_2 m_3), \quad (7.15)$$

в чем легко убедиться прямой подстановкой в (7.5)  $s_2 = (m_2 + m_3)^2$ .

## 8. Азимутальные углы в инвариантных переменных

В формулах (7.7) и (7.8) остались две неинвариантные переменные: в (7.7) — угол Треймана — Янга  $\phi$ , а в (7.8) — угол спиральности  $\lambda_1$ . Покажем теперь, что существуют *линейные*

соотношения, связывающие  $s_1$  и  $\cos \varphi_b$  (при фиксированных  $s_2, t_1, t_2$ ) или  $t_2$  и  $\cos \lambda_1$  (при фиксированных  $s_1, s_2, t_1$ ). Эти соотношения выражают  $\varphi_b$  и  $\lambda_1$  через инварианты. Зависимость  $\varphi_b$  от прочих (кроме  $s_1$ ) инвариантов более сложна; то же относится к  $\lambda_1$ .

То, что между  $s_1$  и  $\varphi_b$  имеется простая связь, качественно видно из сравнения фиг. 43 и 7. Если азимутальный угол определен, как на фиг. 7, условиями

$$p_1 = 0, \quad (p_2; p_3, p_4) \rightarrow \varphi, \quad (8.1)$$

то, согласно уравнению (II.7.16),  $\cos \varphi$  должен зависеть линейно от  $p_3 \cdot p_4$ . Точно так же косинус угла  $\varphi_b$  на фиг. 43 должен линейно зависеть от инварианта, «связывающего»  $p_1$  и  $p_2 (= -p_3)$ . Этим инвариантом является  $s_1 \equiv s_{12}$ . Линейная зависимость  $\cos \lambda_1$  от  $t_2$  вытекает из таких же рассуждений.

#### а. Связь $s_1$ с углом Треймана — Янга $\varphi_b$

Применяя для определения угла Треймана — Янга (6.11) соотношение (II.7.15), получаем

$$\cos \varphi_b = \frac{G(p_b, p_2 + p_3, p_1)}{\{ \Delta_3(p_b, p_2 + p_3, p_1) \Delta_3(p_b, p_2 + p_3, p_2) \}^{1/2}}. \quad (8.2)$$

Здесь определители  $\Delta_3$  легко выразить через инварианты, если начертить соответствующие им фейнмановские диаграммы (фиг. 44). Для вычисления числителя надо подставить скалярные произведения из (4.9). Но для большей симметрии формулы мы сначала воспользуемся соотношениями (A.5) и (A.3), что сразу дает

$$G(p_b, p_2 + p_3, p_1) = -G(p_b, p_2 + p_3, p_4 + p_b). \quad (8.3)$$

Тогда из уравнения (4.9) и фиг. 44 следует

$$\cos \varphi_b = - \frac{\begin{vmatrix} 2m_b^2 & s_2 - t_1 + m_b^2 & m_b^2 + m_3^2 - t_2 \\ s_2 - t_1 + m_b^2 & 2s_2 & s_2 - m_2^2 + m_3^2 \\ s - m_a^2 + m_b^2 & s + s_2 - m_1^2 & s - s_1 + m_3^2 \end{vmatrix}}{2 \{ G(s, t_1, s_2, m_a^2, m_b^2, m_1^2) G(s_2, t_2, m_3^2, t_1, m_b^2, m_2^2) \}^{1/2}}. \quad (8.4)$$

Уравнение (8.4) имеет два решения:  $\varphi_b$  и  $2\pi - \varphi_b$ . Им отвечают две конфигурации импульсов, каждая из которых является зеркальным отражением другой в плоскости  $(p_b, p_1)$  на фиг. 43. Переменные  $s_1, s_2, t_1, t_2$  одни и те же в обеих конфигурациях.

После несложных выкладок получаем функцию, обратную (8.4), в виде

$$s_1 = s + m_3^2 - \frac{1}{\lambda(s_2, t_1, m_b^2)} \left[ \begin{vmatrix} 2m_b^2 & s_2 - t_1 + m_b^2 & m_b^2 + m_3^2 - t_2 \\ s_2 - t_1 + m_b^2 & 2s_2 & s_2 - m_2^2 + m_3^2 \\ s - m_a^2 + m_b^2 & s + s_2 - m_1^2 & 0 \end{vmatrix} + \right. \\ \left. + 2 \{G(s, t_1, s_2, m_a^2, m_b^2, m_1^2) G(s_2, t_2, m_3^2, t_1, m_b^2, m_2^2)\}^{1/2} \cos \varphi_b \right]. \quad (8.5)$$

б. Связь  $t_2$  с углом спиральности  $\lambda_1$

Угол спиральности  $\lambda_1$ , согласно (6.13) и (II.7.15), определяется выражением

$$\cos \lambda_1 = \frac{G(p_a + p_b, p_1, p_b)}{\{\Delta_3(p_a + p_b, p_1, p_b) \Delta_3(p_a + p_b, p_1, p_3)\}^{1/2}}. \quad (8.6)$$

Здесь также оба определителя  $\Delta_3$  выражаются через функции  $G$ , как показано на фиг. 44. Числитель слегка видоизменяется и принимает вид

$$G(p_a + p_b, p_1, p_b) = G(p_a + p_b, p_2 + p_3, p_b), \quad (8.7)$$

а скалярные произведения заменяются обычными инвариантами с помощью формулы (4.9). В итоге для  $\cos \lambda_1$  имеем

$$\cos \lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2s & s + s_2 - m_1^2 & s - s_1 + m_3^2 \\ s + s_2 - m_1^2 & 2s_2 & s_2 - m_2^2 + m_3^2 \\ s - m_a^2 + m_b^2 & s_2 - t_1 + m_b^2 & m_b^2 + m_3^2 - t_2 \end{vmatrix}}{2 \{G(s, t_1, s_2, m_a^2, m_b^2, m_1^2) G(s_1, s_2, s, m_2^2, m_1^2, m_3^2)\}^{1/2}}. \quad (8.8)$$

Явное выражение для  $t_2$  через  $\cos \lambda_1$  имеет вид

$$t_2 = m_b^2 + m_3^2 + \frac{1}{\lambda(s, s_2, m_1^2)} \times \\ \times \left[ - \begin{vmatrix} 2s & s + s_2 - m_1^2 & s - s_1 + m_3^2 \\ s + s_2 - m_1^2 & 2s_2 & s_2 - m_2^2 + m_3^2 \\ s - m_a^2 + m_b^2 & s_2 - t_1 + m_b^2 & 0 \end{vmatrix} + \right. \\ \left. + 2 \{G(s, t_1, s_2, m_a^2, m_b^2, m_1^2) G(s_1, s_2, s, m_2^2, m_1^2, m_3^2)\}^{1/2} \cos \lambda_1 \right]. \quad (8.9)$$

Приведенные выше выводы являются несколько формальными; теперь мы продемонстрируем вкратце, как эти же



результаты можно получить непосредственно из геометрических соображений. В системе отсчета Ц23 ( $p_2 + p_3 = 0$ ) раскроем формулу для  $t_2$ . Мы придем сначала к формуле (7.3). Воспользуемся далее теоремой косинусов из сферической тригонометрии [см. (Б.4) и фиг. 111 и 43], которая гласит, что  $\cos \theta_{b3} = \cos \theta_{b1} \cos \theta_{13} + \sin \theta_{b1} \sin \theta_{13} \cos \lambda_1$ . Мы получим

$$t_2 = m_b^2 + m_3^2 - 2E_b E_3 + 2P_b P_3 \cos \theta_{b1} \cos \theta_{13} + \\ + 2P_b P_3 \sin \theta_{b1} \sin \theta_{13} \cos \lambda_1. \quad (8.10)$$

Все углы, энергии и импульсы выражены здесь в системе отсчета Ц23. Если записать их в инвариантной форме с помощью формул (1.7), (7.4), (6.1) и (1.8), то мы получим опять выражение (8.9). Выражение (8.5) можно получить таким же способом, определив  $s_1 = (p_a + p_b - p_3)^2$  и вычислив его в системе отсчета Ц23.

Выражения (8.5) и (8.9) позволяют также уяснить динамическое значение углов  $\varphi_b$  и  $\lambda_1$  [97]. Из (7.7), (7.8) ясно видно, что если распределение  $\varphi_b$  или  $\lambda_1$  однородно, то амплитуда должна зависеть только от трех переменных, т. е. иметь вид  $T_3(t_1, s_2, t_2)$  или  $T_3(t_1, s_2, s_1)$  соответственно. Выражения (8.5), (8.9) показывают, как добавочная зависимость от  $s_1$  или  $t_2$  связана с зависимостью от  $\varphi_b$  или  $\lambda_1$ . Если есть какая-то зависимость от  $s_1$ , то должна быть и зависимость от  $\varphi_b$ . В частности, поскольку  $s_1$  линейно растет с ростом  $-\cos \varphi_b$ , амплитуда, благоприятствующая появлению больших значений  $s_1$ , приводит также к преобладанию значений  $\varphi_b$ , близких к  $\pi$ . Именно так обстоит дело в моделях реджевского типа, когда  $T \approx s_1^{\alpha_1}$ ,  $\alpha_1 \leq 1$ . Чем меньше  $\alpha_1$ , тем должен быть слабее пик вблизи  $\varphi_b \approx \pi$ . Точно так же  $t_2$  тем больше, чем больше  $+\cos \lambda_1$ ; амплитуда, способствующая появлению малых значений  $|t_2|$ , приводит к пику в распределении в окрестности  $\lambda_1 \approx 0$ .

## 9. Описание с помощью четырех инвариантов

Запись интеграла по фазовому объему в пространстве всех четырех инвариантов можно получить либо из формулы (7.7), заменяя в ней  $\varphi_b$  на  $s_1$ , либо из (7.9) заменой  $\lambda_1$  на  $t_2$ , либо непосредственно из формулы (5.16) при помощи формулы (II.7.21), выражающей  $d\Omega_3^{123}$  через инвариантные переменные. Идя по последнему пути, мы получаем

$$d\Omega_3^{123} \propto \frac{2s_2}{\{-\Delta_2(p_2 + p_3, p_3)\}^{1/2}} \frac{d(p_b \cdot p_3) d(p_1 \cdot p_3)}{\{-\Delta_4(p_a, p_b, p_1, p_3)\}^{1/2}} = \\ = \frac{s_2 dt_2 ds_1}{\lambda^{1/2}(s_2, m_2^2, m_1^2) (-\Delta_4)^{1/2}}, \quad (9.1)$$

так что

$$R_3(s) = \frac{\pi}{16\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \int \frac{dt_1 ds_2 dt_2 ds_1}{(-\Delta_4)^{1/2}}. \quad (9.2)$$

Здесь  $\Delta_4$  — симметричный определитель Грама четвертого порядка, составленный из любых четырех независимых векторов, образованных из  $p_a, p_b, p_1, p_2, p_3$ . Из-за этой свободы выбора аргументов мы часто будем опускать аргументы у  $\Delta_4$ . Напомним еще, что множитель 2 в (9.1) появляется из-за двузначности восстановления конфигураций импульсов по инвариантам (два набора импульсов с одними и теми же инвариантами могут отличаться азимутальными углами  $\varphi$  и  $2\pi - \varphi$ ).

Область интегрирования в (9.2) является *физической областью изменения*  $t_1 s_2 t_2 s_1$  для канала  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2 + p_3$  при фиксированном  $s$ . Мы видим, что физическая область в этих переменных [см. (4.1)] должна удовлетворять неравенству

$$\Delta_4 \leq 0. \quad (9.3)$$

Граница области получается при знаке равенства. Физические области меньших размерностей получаются, если проинтегрировать по одной или нескольким переменным (об этих областях мы уже говорили) или если фиксировать значения одной-двух переменных [см. (4.2б), (4.3в) и (4.4г)]. Так, например, *физическая область изменения*  $t_1 s_1 s_2$  при данном  $t_2$  ограничена той же поверхностью  $\Delta_4 = 0$ , но при данном  $t_2$ . Она лежит где-то внутри той области, которая получается после интегрирования по всем  $t_2$  и которая показана на фиг. 45 для нулевых масс. Подобным же образом *физическая область изменения*  $t_1, t_2$  при фиксированных  $s_1, s_2$  ограничивается кривой  $\Delta_4 = 0$ , вычерченной в плоскости  $t_1 t_2$  при фиксированных  $s_1, s_2$ . Она лежит где-то внутри диаграммы  $t_1 t_2$ .

Определитель  $\Delta_4$  выражается через стандартный набор пяти инвариантов и пяти масс следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \Delta_4(p_a, p_b, p_1, p_2) \equiv \\ &\equiv -\frac{1}{16} B(s, t_1, s_2, t_2; m_a^2, m_b^2, m_1^2, m_2^2) = \\ &= \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 2m_a^2 & 2p_a \cdot p_b & 2p_a \cdot p_1 & 2p_a \cdot p_3 \\ 2p_a \cdot p_b & 2m_b^2 & 2p_b \cdot p_1 & 2p_b \cdot p_3 \\ 2p_a \cdot p_1 & 2p_b \cdot p_1 & 2m_1^2 & 2p_1 \cdot p_3 \\ 2p_a \cdot p_3 & 2p_b \cdot p_3 & 2p_1 \cdot p_3 & 2m_3^2 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

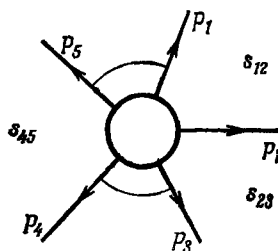
$$= \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 2m_a^2 & s - m_a^2 - m_b^2 & m_a^2 + m_1^2 - t_1 & s - s_1 + t_2 - m_b^2 \\ s - m_a^2 - m_b^2 & 2m_b^2 & s - s_2 + t_1 - m_a^2 & m_b^2 + m_3^2 - t_2 \\ m_a^2 + m_1^2 - t_1 & s - s_2 + t_1 - m_a^2 & 2m_1^2 & s - s_1 - s_2 + m_2^2 \\ s - s_1 + t_2 - m_b^2 & m_b^2 + m_3^2 - t_2 & s - s_1 - s_2 + m_2^2 & 2m_3^2 \end{vmatrix}.$$

Удобнее другая форма  $\Delta_4$ , в которой используются несколько измененные аргументы:

$$\Delta_4 = \Delta_4(p_2 + p_3, p_b, p_a + p_b, p_3) =$$

$$= \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 2s_2 & s_2 - t_1 + m_b^2 & s + s_2 - m_1^2 & s_2 - m_2^2 + m_3^2 \\ s_2 - t_1 + m_b^2 & 2m_b^2 & s - m_a^2 + m_b^2 & m_b^2 + m_3^2 - t_2 \\ s + s_2 - m_1^2 & s - m_a^2 + m_b^2 & 2s & s - s_1 + m_3^2 \\ s_2 - m_2^2 + m_3^2 & m_b^2 + m_3^2 - t_2 & s - s_1 + m_3^2 & 2m_3^2 \end{vmatrix}. \quad (9.4)$$

В ней инварианты  $t_1$ ,  $s_2$  и  $t_2$  встречаются только в двух симметричных положениях. Несимметричный определитель Грама в формуле (8.4) — это минор элемента  $(p_a + p_b) \cdot p_3 = \frac{1}{2}(s - s_1 + m_3^2)$  определителя (9.4), и мы сразу же видим, что  $\cos \varphi_b$  линеен по  $s_1$ . Подобным же образом обнаруживается, что  $\cos \lambda_1$



Фиг. 49. Аргументы у  $\Delta_4$  можно выбрать таким образом, чтобы в определителе  $\Delta_4 = \Delta_4(p_5 + p_1, p_b, p_4, p_3 + p_4)$  инварианты  $s_{12}$ ,  $s_{23}$  и  $s_{45}$  располагались симметрично.

линеен по  $t_2$ . Видоизмененные выражения (8.3) и (8.7) мы получили для того, чтобы выявить связь этих определителей с (9.4). Из фиг. 49 ясен выбор аргументов в выражении (9.4).

Симметрии, скрытые в определителе  $\Delta_4$ , легче всего заметить в представлении Кэли (A.13)

$$B = \begin{vmatrix} 0 & m_2^2 & s_2 & t_1 & m_1^2 & 1 \\ m_2^2 & 0 & m_3^2 & t_2 & s_1 & 1 \\ s_2 & m_3^2 & 0 & m_b^2 & s & 1 \\ t_1 & t_2 & m_b^2 & 0 & m_a^2 & 1 \\ m_1^2 & s_1 & s & m_a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (9.5)$$

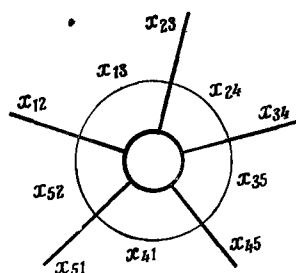
Предыдущие выражения определяют  $B$  как базисную пятичастичную кинематическую функцию. Она соотносится с  $\Delta_4$  так же, как  $\lambda$  соотносится с  $\Delta_2$ , а  $G$  — с  $\Delta_3$ . Явный ее вид [109] может быть найден, если раскрыть любой из написанных выше определителей. Практически этот явный вид не нужен; для численных расчетов достаточно определителей. Функция  $B$  понадобится нам лишь тогда, когда нужно будет подчеркнуть, что у нее 10 аргументов; во всех прочих случаях мы будем пользоваться  $\Delta_4$ .

Нетрудно провести параллель между свойствами  $B$  и  $\Delta_4$  и свойствами  $G$  и  $\Delta_3$ . Мы не будем входить в детали, а отметим лишь основные моменты.

### а. Симметрии определителя $\Delta_4$

Пусть имеется некоторая перестановка  $(1 \dots 5) \rightarrow (i_1 \dots i_5)$ ; применим ее к первым пяти строкам и пяти столбцам определителя (9.5). Получится перестановка десяти аргументов  $B$ , не

Фиг. 50. Симметричные переменные в определителе  $\Delta_4$ .



меняющая  $B$ . Группа симметрии  $B$  содержит  $5! = 120$  перестановок. Обычно они сводятся к перестановкам одночастичных и двухчастичных масс, но есть десять нетривиальных перестановок, которые образуют циклические преобразования частиц  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$  и, кроме того, отражение  $1 \leftrightarrow 5$ ,  $2 \leftrightarrow 4$ ,  $3 \leftrightarrow 3$ .

Свойства симметрии  $B$  яснее всего можно увидеть, если ввести обозначения

$$x_{ij} = \{(p_i + \dots + p_5) - (p_j + \dots + p_5)\}^2, \quad i, j = 1, \dots, 5.$$

Ясно, что  $x_{ij} = x_{ji}$  и  $x_{ii} = 0$ . Соответствие между  $x_{ij}$  и обычными инвариантами видно из фиг. 50. Сто двадцать перестановок индексов  $(1, \dots, 5) \rightarrow (i_1, \dots, i_5)$  приводят к таким перестановкам  $\{x_{ij}\}$ , при которых  $B(\{x_{ij}\})$  остается инвариантным. Так же как и  $G$ , функция  $B$  связана с объемом гипертетраэдра с пятью вершинами  $1, \dots, 5$  и десятью ребрами  $x_{ij}$  в четырехмерном пространстве.

б.  $\Delta_4$  как функция одной переменной

Функция  $B$  представляет собой однородный многочлен четвертого порядка по всем своим аргументам и второго — по любому из них. Следовательно, уравнение  $\Delta_4 = 0$  — квадратное и имеет два решения. Решения эти мы уже знаем, так как  $\Delta_4$

$$a \quad x \quad y \quad z \quad m \quad \Rightarrow \quad P = \lambda \left( \begin{array}{c} y \\ \text{circle} \\ z \end{array} m \right) = \lambda(y, z, m^2)$$

$$b \quad Q^2 - PR = 4 \cdot G \left( \begin{array}{c} y \\ \text{circle} \\ z \end{array} m \right) G \left( \begin{array}{c} x \\ \text{circle} \\ z \end{array} m \right)$$

Фиг. 51. Если определитель  $\Delta_4$  записать в виде  $16\Delta_4 = Px^2 + 2Qx + R$  ( $x$  — произвольный инвариант), то коэффициент  $P$  дается строчкой  $a$ , где  $y$  и  $z$  — примыкающие друг к другу инварианты, а  $m$  — противоположная им масса.

Дискриминант  $Q^2 - PR$  получается из строчки  $b$ : он равен учетверенному произведению двух функций  $G$ , каждая из которых отвечает такой реакции  $2 \rightarrow 2$ , в которой две примыкающие друг к другу двухчастичные системы считаются одиночными частицами с квадратами масс, равными соответственно  $y$  и  $z$ .

обращается в нуль, например, при  $\sin^2 \lambda_1 = 0$  или при  $\cos \lambda_1 = \pm 1$ . Значит, два корня  $t_2^\pm$  уравнения

$$16\Delta_4 = Pt_2^2 + 2Qt_2 + R = 0 \quad (9.6)$$

могут быть получены из формулы (8.9) после подстановки туда условия

$$\cos \lambda_1 = \pm 1. \quad (9.7)$$

Из (9.4) и (9.5) легко видеть, что  $P = \lambda(s, s_2, m_1^2)$ . Наоборот, если предположить, что  $\Delta_4$  записано в форме (9.6), то параметры этого уравнения  $P$ ,  $Q$  и  $R$  имеют вид

$$P = \lambda(s, s_2, m_1^2),$$

$$Q^2 - PR = 4G(s, t_1, s_2, m_a^2, m_b^2, m_1^2) G(s_1, s_2, s, m_2^2, m_3^2, m_1^2),$$

$$Q = \begin{vmatrix} 2s_2 & s + s_2 - m_1^2 & s_2 - t_1 + m_b^2 \\ s + s_2 - m_1^2 & 2s & s - m_a^2 + m_b^2 \\ s_2 - m_2^2 + m_3^2 & s - s_1 + m_3^2 & m_b^2 + m_3^2 \end{vmatrix}, \quad (9.8)$$

$$R = 16\Delta_4, \text{ вычисленному при } t_2 = 0.$$

Сходные выражения для других инвариантов получаются круговой перестановкой частиц. Для запоминания уравнений (9.8)

очень полезно представить себе схему, изображенную на фиг. 51. Далее,  $\Delta_4$  может быть записано в виде

$$16\Delta_4 = \lambda(s, s_2, m_1^2)(t_2 - t_2^+)(t_2 - t_2^-), \quad (9.9)$$

где  $t_2^\pm$  определяется (9.7). Круговой перестановкой получаются аналогичные соотношения для других переменных.

**Пример. 1.** Мы можем теперь вернуться от уравнения (9.2) несколько вспять. Желая проинтегрировать (9.2) сначала по  $s_1$ , мы воспользуемся выражением (9.9), с помощью циклической перестановки приведенным к виду  $16\Delta_4 = \lambda(s_2, t_1, m_b^2)(s_1 - s_1^+)(s_1 - s_1^-)$ , где  $s_1^\pm$  даются выражением (8.5) при  $\cos \varphi_b = \pm 1$ . Само интегрирование проводится очень просто (упражнение V. 2):

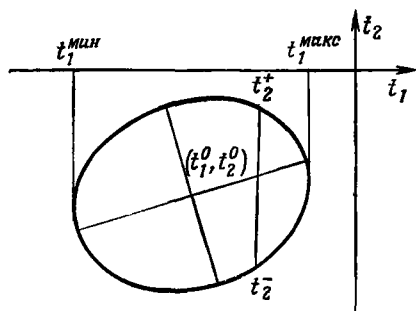
$$\int_{s_1^-}^{s_1^+} ds_1 (-\Delta_4)^{1/2} = 4\pi\lambda^{-1/2}(s_2, t_1, m_b^2),$$

но выражения для  $s_1^\pm$  действительны лишь в том случае, когда две  $G$ -функции в (8.5) оказываются одновременно отрицательными. Тем самым мы возвращаемся к уравнению (7.7), в котором интегрирование по  $\varphi_b$  уже проведено. Точно так же мы могли бы начать с интегрирования по любому из трех остальных инвариантов. После первого интегрирования мы всегда возвращаемся либо к уравнениям (7.7), (7.8), либо к уравнениям, полученным из них преобразованием  $p_a \leftrightarrow p_b$ ,  $p_1 \leftrightarrow p_3$ ,  $p_2 \leftrightarrow p_2$ .

### в. $\Delta_4$ как функция двух переменных

Если определитель  $\Delta_4$  считать функцией двух инвариантов [103], то как функция не примыкающих друг к другу инвариантов (таких, как пары  $ss_1, t_1s_2, s_1t_2, s_2s, t_1t_2$ ) он будет многочленом второй степени, а по смежным инвариантам (таким, как пары  $st_1, t_1s_1, s_1s_2, s_2t_2, t_2s$ ) — многочленом четвертой степени. Чтобы убедиться в этом, достаточно взглянуть на представление Кэли (9.5), в котором не примыкающие друг к другу инварианты стоят в одной и той же строке или в одном и том же столбце. Из определителя (9.5), который для  $\cos \varphi_b = \pm 1$  дает кривую  $\Delta_4 = 0$  в виде, разрешенном относительно  $s_1$ , также следует, что несмежные инварианты  $s$  и  $t_2$  встречаются только в одной  $G$ -функции, а  $s_2$  и  $t_1$  — в обеих. Если начертить кривую  $\Delta_4 = 0$  в плоскости любой пары инвариантов  $x$  и  $y$ , то, когда  $x$  и  $y$  не примыкают друг к другу, она образует коническое сечение, а когда  $x$  и  $y$  примыкают друг к другу, — кривую

четвертого порядка. Подчеркнем еще раз различие между этой кривой и диаграммой  $xu$ : последняя является «тенью» (проекцией) поверхности  $\Delta_4 = 0$  на плоскость  $xu$ ; в ней присутствуют все физические значения двух оставшихся инвариантов  $z$  и  $u$ , в то время как первая чертится для определенных  $z$  и  $u$  ( $s$  всегда фиксировано). Следовательно, кривая  $\Delta_4 = 0$  всегда лежит где-то внутри диаграммы  $xu$ .



Фиг. 52. Кривая  $\Delta_4 = 0$  на плоскости  $t_1 t_2$ .

Для ее построения из уравнения (8.9) было найдено  $t_2^\pm$  как функция  $t_1$ . Пределы  $t_1^{\text{макс}}$ ,  $t_1^{\text{мин}}$  даются формулой (9.13). Формулы для  $t_1^\pm$  и  $t_2^{\text{макс}}$ ,  $t_2^{\text{мин}}$  получаются преобразованием  $p_a \leftrightarrow p_b$ ,  $p_1 \leftrightarrow p_3$ ,  $p_2 \leftrightarrow p_2$ .

Рассмотрим теперь подробнее случай, когда инварианты не примыкают друг к другу; для определенности пусть это будут  $t_1$  и  $t_2$ . Запишем сначала  $\Delta_4$  в виде

$$16\Delta_4 = A t_1^2 + 2C t_1 t_2 + B t_2^2 + 2A' t_1 + 2B' t_2 + D, \quad (9.10)$$

где

$$A = \lambda(s, s_1, m_3^2),$$

$$B = \lambda(s, s_2, m_1^2),$$

$$C = -s(s - s_1 - s_2 - m_1^2 + 2m_2^2 - m_3^2) + (s_2 - m_1^2)(s_1 - m_3^2),$$

$$B' = Q \quad \text{из (9.8), вычисленное для } t_1 = 0, \quad (9.11)$$

$$A' = B' \quad \text{после перестановки } p_a \leftrightarrow p_b, p_1 \leftrightarrow p_3, p_2 \leftrightarrow p_2,$$

$$D = 16\Delta_4 \text{ вычисленное в точке } t_1 = t_2 = 0.$$

Тип конического сечения определяется знаком определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = -4sG(s_1, s_2, s, m_2^2, m_1^2, m_3^2). \quad (9.12)$$

Здесь и ниже параметры, описывающие уравнение (9.10), называются слишком сложными, чтобы формулу для  $\Delta$  можно было доказать механической подстановкой выражений (9.11). Вместо этого мы выведем ее, пользуясь известными свойствами корней уравнений  $\Delta_4 = 0$  и  $\Delta_3 = 0$ . Поскольку  $G < 0$  и  $s > 0$ , то  $\Delta > 0$ , так что коническое сечение оказывается эллипсом (фиг. 52). Чтобы начертить его, мы просто возьмем уравнение

(8.9), которое дает функцию  $t_2 = t_2^\pm(t_1; s, s_1, s_2)$ , и положим в нем  $\cos \lambda_1 = \pm 1$ . Рассматривая разность  $t_2^+ - t_2^-$ , мы легко придем к уравнению (9.12). Предельные значения  $t_1$ , т. е.  $t_1^{\text{макс}}$  и  $t_1^{\text{мин}}$ , получаются тогда, когда оба корня  $t_1^\pm$  совпадают. Согласно уравнению (8.9), это происходит тогда, когда  $G(s, t_1, s_2, m_a^2, m_b^2, m_1^2) = 0$ . Следовательно,

$$t_1^{\text{макс}} = t_1^+, \quad t_1^{\text{мин}} = t_1^-, \quad (9.13)$$

где  $t_1^\pm$  даются формулами (5.10).

Квадратичная форма (9.10) диагонализуется стандартными приемами. Сначала мы находим центр эллипса

$$\begin{aligned} t_1^{(0)} &= \left| \begin{array}{cc} C & A' \\ B & B' \end{array} \right| / \Delta = \frac{1}{2} (t_1^{\text{макс}} + t_1^{\text{мин}}) = \\ &= m_a^2 + m_1^2 - \frac{1}{2s} (s + m_a^2 - m_b^2)(s + m_1^2 - s_2), \\ t_2^{(0)} &= m_b^2 + m_3^2 - \frac{1}{2s} (s - m_a^2 + m_b^2)(s + m_3^2 - s_1). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Затем поворачиваем оси вокруг нового начала координат  $(t_1^{(0)}, t_2^{(0)})$  на угол  $\alpha = \frac{1}{2} \arctg [2C/(A - B)]$ ; мы получаем уравнение

$$16\Delta_4 = \lambda_1 t_1'^2 + \lambda_2 t_2'^2 + U, \quad (9.15)$$

где

$$\begin{aligned} 2\lambda_{1,2} &= \lambda(s, s_2, m_1^2) + \lambda(s, s_1, m_3^2) \pm [\{\lambda(s, s_2, m_1^2) + \lambda(s, s_1, m_3^2)\}^2 + \\ &+ 16sG(s_1, s_2, s, m_2^2, m_1^2, m_3^2)]^{1/2} \end{aligned} \quad (9.16)$$

и где определитель

$$U = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A & C & A' \\ C & B & B' \\ A' & B' & D \end{vmatrix} \quad (9.17)$$

удовлетворяет тождеству

$$\left(-\frac{U}{\Delta}\right)^{1/2} = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{2s}. \quad (9.18)$$

Оно вытекает непосредственно из равенства  $t_1^{\text{макс}} - t_1^{\text{мин}} = 2(-CU/\Delta)^{1/2}$  и из (9.13).

Круговой перестановкой (4.6) можно получить кривые  $\Delta_4 = 0$  в плоскостях  $s_1 t_2$ ,  $s s_2$ ,  $t_1 s_2$  и  $s s_1$ . Заметим, что в формуле (9.12)  $s$  — просто один из входящих в нее инвариантов. В плоскостях  $s_1 t_2$  и  $s_2 t_1$  он превращается в  $s_2$  или  $s_1$  соответственно, так что  $\Delta > 0$  и кривые остаются эллипсами. Но в плоскостях



$ss_1$  или  $ss_2$  он превращается в  $t_1$  или  $t_2$ , причем уже  $\Delta < 0$ , т. е. кривая становится гиперболой (если  $t_1 < 0$  или  $t_2 < 0$ ) (фиг. 56).

### г. Определитель $\Delta_4$ для нулевых масс

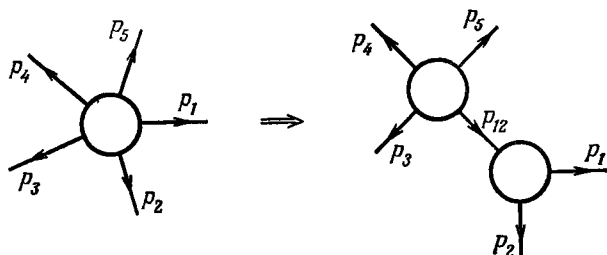
Когда все  $m_i = 0$ , из (9,4) получаем

$$16\Delta_4 = (st_1 - t_1s_1 + s_1s_2 - s_2t_2 + t_2s)^2 - 4s(s - s_1 - s_2)t_1t_2. \quad (9.19)$$

В первых скобках стоят как раз все пять пар примыкающих инвариантов, относительно которых  $\Delta_4$  оказывается многочленом четвертой степени. При желании качественно оценить тот или иной эффект часто бывает полезно обратиться к уравнению (9.19).

## 10. Циклическая симметрия, угол Толлера

Выбор всех инвариантов и углов, введенных в разделах 5—8, вытекал из определенной факторизации  $R_3$ , показанной на фиг. 39. Теперь мы обобщим рассмотрение на случай, когда



Фиг. 53.

в промежуточном двухчастичном состоянии находится произвольная пара примыкающих друг к другу частиц. Для симметрии мы будем считать все импульсы выходящими (фиг. 53), а для обозначения инвариантов введем двойные индексы. При разбиении, показанном на фиг. 53, описание рассеяния  $2 \rightarrow 2$  требует двух инвариантов  $s_{34}$ ,  $s_{45}$ , а описание распада  $1 \rightarrow 2$  — введения углов  $\theta$ ,  $\phi$  импульса  $p_1$  в системе координат, заданной векторами  $p_3$ ,  $p_4$ ,  $p_5$ , и, кроме того, конечно, введения квадрата инвариантной массы системы  $s_{12}$ . Другой путь состоит в задании ориентации  $p_1$ ,  $p_2$  относительно  $p_3$ ,  $p_4$ ,  $p_5$  при помощи инвариантов  $s_{51}$  и  $s_{23}$  или смешанным способом, через один угол и один инвариант.

Предположим сначала, что  $s_{12} > 0$ , так что мы можем перейти в систему отсчета  $p_1 + p_2 = 0$ . Выберем ось  $z$  параллельной  $p_5$ , а ось  $x$  направим так, чтобы было  $p_{4y} = 0$ ,  $p_{4x} \geq 0$ . По-

лярный и азимутальный угол вектора  $p_1$  определяются выражениями [см. (6.8)]

$$\cos \theta = \frac{\varepsilon_\theta p_1 \cdot p_5}{p_1 p_5}, \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= 0, \\ (p_5; p_4, \varepsilon_\varphi p_1) &\rightarrow \varphi. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Мы ввели знаковые множители  $\varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi = \pm 1$ , чтобы можно было для разных углов пользоваться одним и тем же определением. Как выражаются углы через инварианты, мы уже знаем; в частности,  $\theta$  и  $\varphi$  задаются равенствами

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \\ &= -\varepsilon_\theta \frac{\{(s_{12} + m_1^2 - m_2^2)(s_{12} - s_{34} + m_3^2) - 2(m_1^2 + m_3^2)s_{12}\} + 2s_{12}s_{51}}{\{\lambda(s_{34}, s_{12}, m_3^2)\lambda(s_{12}, m_1^2, m_2^2)\}^{1/2}}, \end{aligned} \quad (10.3)$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \varepsilon_\varphi G \begin{pmatrix} p_1 + p_2, & p_5, & p_1 \\ p_1 + p_2, & p_5, & p_4 + p_5 \end{pmatrix} \times \\ &\times \{\Delta_3(p_1 + p_2, p_5, p_1) \Delta_3(p_1 + p_2, p_5, p_4)\}^{-1/2} = \\ &= \varepsilon_\varphi \frac{\begin{vmatrix} 2s_{12} & s_{34} - s_{12} - m_3^2 & s_{12} + m_1^2 - m_2^2 \\ s_{34} - s_{12} - m_3^2 & 2m_3^2 & s_{51} + m_3^2 - m_1^2 \\ m_3^2 - s_{12} - s_{45} & s_{45} - m_4^2 + m_3^2 & s_{23} - s_{45} - m_1^2 \end{vmatrix}}{2\{G(s_{34}, m_1^2, s_{15}, s_{12}, m_3^2, m_2^2)G(s_{34}, s_{45}, m_4^2, s_{12}, m_3^2, m_3^2)\}^{1/2}}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Делая в (10.3) и (10.4) всевозможные круговые перестановки индексов, мы определим различные углы, которые полезны при изучении процесса  $2 \rightarrow 3$ . Мы их перечисляем в табл. 1, где указаны также знаковые множители  $\varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi$ , отвечающие общепринятым определениям. Соответствующие инварианты в (10.3), (10.4) находятся путем указанной в таблице замены индексов 1 2 3 4 5 на некоторую перестановку индексов  $ba123$ ; при этом делается соответствующая замена  $s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{45}, s_{51}$  на  $s, t_1, s_1, s_2, t_2$ . Например, если мы хотим записать  $\cos \lambda_1$  в инвариантном виде [выражение (8.8)], мы просто делаем в (10.4) замену  $12345 \rightarrow 23ba1$ .

Предположим теперь, что  $s_{12} < 0$ , так что вместо системы отсчета  $p_1 + p_2 = 0$  мы должны прибегнуть к такой системе, в которой  $p_1 + p_2 = (0, 0, 0, \sqrt{-s_{12}})$ . Ориентация системы фиксируется тем, что полагают  $p_{5x} = p_{5y} = p_{4y} = 0, p_{5z} > 0, p_{4x} > 0$ . Выписывая затем  $p_1$  в псевдосферических координатах

Табл.

Углы и быстроты, встречающиеся при описании реакции  $a + b \rightarrow 1 -$

Верхние индексы при полярных углах указывают систему отсчета, в которой этот угол определен [Ц12 — система, в которой  $p_1 + p_2 = 0$ ,  $a^1$  — пространственноподобная или времениподобная система  $R(p_a - p_1)$  или  $S$  (II.1.13) в зависимости от того, больше или меньше нуля  $t_1$ ]; нижние индексы указывают импульсы, образующие угол. Нижние индексы у тангенциальных углов отмечают полярную ось. Каждый азимутальный угол делен в двух различных системах. Желая выразить какой-нибудь из них через инварианты, надо в выражениях (10.3), (10.4) сделать перестановку, указанную в первом столбце, и поставить соответствующие знаки множителей  $\varepsilon_\theta$  и  $\varepsilon_\varphi$ .

| Индексы, подставляемые вместо 1 2 3 4 5 в выражениях (10.3), (10.4) | Наименование полярного угла (или быстроты)           | $\varepsilon_\theta$ | Наименование азимутального угла                  |
|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------|
| $a b 3 2 1$                                                         | Угол рассеяния в СЦМ $\theta_{a1}^*$                 | -1                   | Азимутальный угол спиральности в Ц23 $\lambda_1$ |
| $1 a b 3 2$                                                         | $\theta_{12}^{(a1)} = i\zeta_{12}^{(a1)}$            | -1                   | Толлеров угол $\omega_2 = \omega$                |
| $2 1 a b 3$                                                         | Полярный угол спиральности в Ц12 $\theta_{23}^{Ц12}$ | +1                   | Азимутальный угол спиральности в Ц12 $\lambda_3$ |
| $3 2 1 a b$                                                         | Джексоновский угол в Ц23 $\theta_{b3}^{Ц23}$         | -1                   | Угол Треймана — Янга в Ц23 $\varphi_b$           |
| $b 3 2 1 a$                                                         | $\theta_{ab}^{(b3)} = i\zeta_{ab}^{(b3)}$            | -1                   | Угол Треймана — Янга в Ц12 $\varphi_a$           |
| $b a 1 2 3$                                                         | Угол рассеяния в СЦМ $\theta_{b3}^*$                 | -1                   | $\lambda_3$                                      |
| $3 b a 1 2$                                                         | $\theta_{23}^{(b3)} = i\zeta_{23}^{(b3)}$            | -1                   | $\omega_2$                                       |
| $2 3 b a 1$                                                         | Полярный угол спиральности в Ц23 $\theta_{12}^{Ц23}$ | +1                   | $\lambda_1$                                      |
| $1 2 3 b a$                                                         | Джексоновский угол в Ц12 $\theta_{a1}^{Ц12}$         | -1                   | $\varphi_a$                                      |
| $a 1 2 3 b$                                                         | $\theta_{ab}^{(a1)} = i\zeta_{ab}^{(a1)}$            | -1                   | $\varphi_b$                                      |

$P, \zeta, \varphi$  [см. (II.7.22)] и используя уравнение (A.29), мы в  $\text{ch } \zeta =$

$$= -\varepsilon_\zeta \frac{\{(s_{12} + m_1^2 - m_2^2)(s_{12} - s_{34} + m_3^2) - 2(m_1^2 + m_3^2)s_{12}\} + \dots}{\{\lambda(s_{34}, s_{12}, m_3^2)\lambda(s_{12}, m_1^2, m_3^2)\}^{1/2}}$$

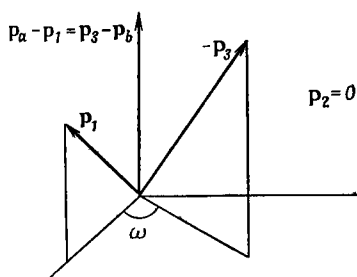
где  $\varepsilon_\zeta = +1$ , когда  $E_1 E_5 > 0$ , и  $\varepsilon_\zeta = -1$ , когда  $E_1 E_5 < 0$ . Следовательно,  $\text{ch } \zeta$  зависит от инвариантов точно таким же образом, как и  $\cos \theta$ , так что мы вправе формально отождествить быстроту  $\zeta$  с мнимым углом поворота ( $\zeta = -i\theta$ ). При  $s$

угол  $\theta$  действителен, при  $s_{12} < 0$  действительно  $\xi$ . Выражение (10.4) для  $\varphi$  остается без изменений, каков бы ни был знак  $s_{12}$ .

Любая перестановка в табл. 1 дает новое выражение для интеграла по фазовому объему  $R_3$  [24]. Пределы изменения углов  $\theta$  и  $\varphi$  часто фиксированы:  $0 \leq \theta < \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Но быстрое  $\xi$  меняются не в естественном интервале  $0, \infty$ , а их пределы зависят от величины других переменных и от  $s$ . Переменные  $t_1, t_2, \xi_{12}^{(a1)}, \xi_{23}^{(b3)}, \omega$  называются *переменными Толлера* для процесса  $2 \rightarrow 3$  (раздел VI.3).

В выражении (10.4)  $\cos \varphi$  линейно связан с одним из инвариантов, а именно с  $s_{23}$ . Следовательно, любой из основных ин-

Фиг. 54. Геометрическое определение толлерова угла  $\omega$  в системе отсчета, в которой  $p_2 = 0$ .



вариантов  $s, t_1, s_1, s_2, t_2$  линейны по отношению к косинусу какого-либо азимутального угла; можно произвести следующее разбиение на пары:

$$\begin{aligned} s_1 & \text{ и угол Треймана — Янга } \varphi_b, \\ s_2 & \text{ и угол Треймана — Янга } \varphi_a, \\ t_1 & \text{ и угол спиральности } \lambda_3, \\ t_2 & \text{ и угол спиральности } \lambda_1, \\ s & \text{ и угол Толлера } \omega \equiv \omega_2. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Первая и четвертая из этих пар в явном виде были выписаны в (8.5) и (8.9). Соответствия для  $s_2$  и  $t_1$  получаются при помощи перестановок  $p_a \leftrightarrow p_b, p_1 \leftrightarrow p_3, p_2 \leftrightarrow p_2$ . Новой для нас величиной является *угол Толлера*  $\omega$ . Кинематически его можно определить как угол, *косинус которого линейно связан с  $s$*  [7, 29, 104, 105, 107]. Если в уравнении (10.2)  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  заменить на  $p_3, -p_b, -p_a, p_1, p_2$ , то определение угла Толлера можно представить в форме

$$p_3 - p_b = 0, \quad (p_2; p_1, -p_3) \rightarrow \omega. \quad (10.7)$$

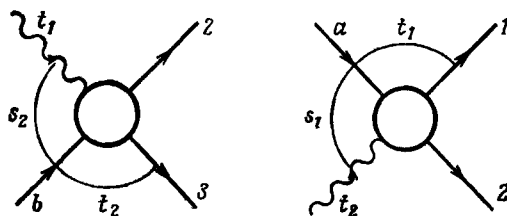
Поскольку такая система отсчета не обязательно существует, мы сначала положим в (10.7)  $p_2 = p_a - p_1$ , а затем перейдем в систему отсчета, где  $p_2 = 0$ :

$$p_2 = 0, \quad (p_a - p_1; p_1, -p_3) \rightarrow \omega. \quad (10.8)$$

Если  $p_2 = 0$  (фиг. 54), то  $p_1 - p_a = p_b - p_3$  и видно, что в этой системе отсчета плоскость  $p_1 - p_a$ ,  $-p_1$  совпадает с плоскостью  $p_a$ ,  $p_1$ , а плоскость  $p_1 - p_a$ ,  $p_3$  — с плоскостью  $p_b$ ,  $p_3$ . Следовательно,  $\omega$  — угол между плоскостями  $p_a$ ,  $p_1$  и  $p_b$ ,  $p_3$

$$\cos \omega = \frac{(p_a \times p_1) \cdot (p_b \times p_3)}{|p_a \times p_1| |p_b \times p_3|} \Big|_{p_2=0}. \quad (10.9)$$

Таково стандартное определение угла Толлера (см. также упражнение V.6).



Фиг. 55. Реакции  $2 \rightarrow 2$ , входящие в определение угла  $\omega$ .

Из уравнения (10.4) или из (10.8) и из общего правила (II.7.15) легко вывести следующее линейное соотношение между  $s$  и  $\cos \omega$ :

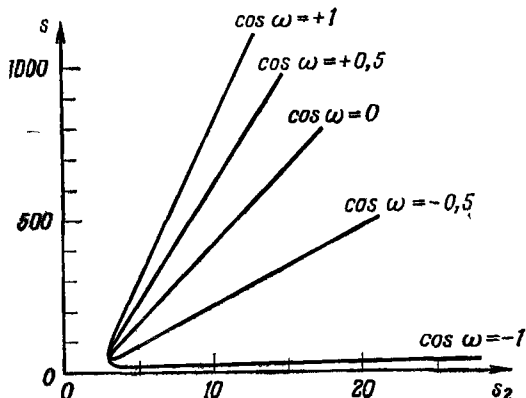
$$s = s(s_1, s_2, t_1, t_2, \omega) = m_a^2 + m_b^2 + \\ + \frac{1}{\lambda(t_1, t_2, m_2^2)} \left[ \begin{vmatrix} 2t_1 & m_2^2 - t_1 - t_2 & m_a^2 - m_1^2 + t_1 \\ m_2^2 - t_1 - t_2 & 2t_2 & s_1 - t_2 - m_a^2 \\ s_2 - t_1 - m_b^2 & m_b^2 - m_3^2 + t_2 & 0 \end{vmatrix} \right] - \\ - 2 \cos \omega \{G(t_1, s_1, t_2, m_1^2, m_a^2, m_2^2) G(s_2, t_2, t_1, m_3^2, m_2^2, m_b^2)\}^{1/2}. \quad (10.10)$$

Подпроцессы  $2 \rightarrow 2$ , которые отвечают входящим в (10.10)  $G$ -функциям, изображены на фиг. 55. Поскольку обычно  $s$  фиксировано,  $\omega$  не является независимой переменной в том смысле, в каком ими являлись  $\varphi_b$  или  $\lambda_1$ . Задание  $\omega$  означает установление некоего соотношения между переменными, описывающими конечное состояние. Для иллюстрации на фиг. 56 проведено несколько кривых  $\cos \omega = \text{const}$  в плоскости  $ss_2$ . Заметим также, что если распределения  $\varphi_b$  и  $\lambda_1$  по фазовому объему равномерны, то распределение  $\omega$  по фазовому объему сосредоточено вблизи  $\omega = 180^\circ$ , причем тем в большей степени, чем больше  $s$ .

Линейная связь  $\cos \omega$  и  $s$  приводит к тому, что после замены переменных  $p_1, p_2, p_3, p_4$  на  $p_2, p_a - p_1, p_1, -p_3$  [см. фиг. 7 и (10.8)] мы получаем из (II.7.20) соотношение

$$\frac{ds}{2(-\Delta_4)^{1/2}} = \frac{d\omega}{\lambda^{1/2}(t_1, t_2, m_2^2)}. \quad (10.11)$$

Следовательно, интеграл от  $R_3(s)$  по  $s$  должен просто преобразовываться в интеграл по  $\omega$  [104]. Весь полный интервал  $0 \leq \omega < 2\pi$  отвечает некоторому интервалу изменения  $s$ , так что



Фиг. 56. Кривые постоянных значений толлерева угла  $\omega$  на плоскости  $ss_2$ . Прочие инварианты взяты равными  $s_1=8$ ,  $t_1=-4$ ,  $t_2=-5$ ; выбрана реакция  $pp \rightarrow p\pi\Delta$ .

практической пользы от уравнения (10.11) мало. Но мы можем воспользоваться им формально, подставив в уравнение (9.2) тождество

$$1 = \int ds \delta\{s - s(s_1, s_2, t_1, t_2, \omega)\} \quad (10.12)$$

[где  $s$  определяется формулой (10.10)] и сделав с помощью (10.11) замену  $ds \rightarrow d\omega$  в (10.12). Результат имеет вид

$$R_3(s) = \frac{\pi}{8} \lambda^{-1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \int dt_1 dt_2 ds_1 ds_2 d\omega \times \\ \times \lambda^{-1/2}(t_1, t_2, m_2^2) \delta\{s - s(s_1, s_2, t_1, t_2, \omega)\}. \quad (10.13)$$

Хотя подынтегральное выражение выглядит совсем просто, но простота эта обманчива: все сложности уравнения (9.2) теперь спрятаны в  $\delta$ -функции. Она определяет область интегрирования в (10.13) как четырехмерную поверхность  $s = \text{const}$  в пятимерном пространстве переменных интегрирования. Уравнение (10.13) интересно, во-первых, своим поведением при больших  $s$  (раздел 11) и, во-вторых, возможностью обобщения на произвольные  $n$  (раздел VI.3).

## 11. Применение выведенных формул

### а. Интегрирование матричного элемента $\exp\left(\frac{1}{2}at_1 + \frac{1}{2}bt_2\right)$

Мы уже знаем, что при  $T = 1$  многократный интеграл (9.2) сводится к однократному (2.17). Покажем теперь, что интегрирование по  $t_1, t_2$ , которое физически равнозначно вычислению распределения на диаграмме Далица, может быть проведено в конечном виде, если  $T$  зависит от  $t_1$  и  $t_2$  только через множитель  $\exp(at_1 + bt_2)$ , где  $a$  и  $b$  не зависят от  $t_1, t_2$  [29, 30]. Такая мультипериферическая форма квадрата матричного элемента во многих случаях вытекает как из эксперимента, так и из теоретических представлений

Как было показано в предыдущем разделе, область интегрирования по  $t_1, t_2$  представляет собой эллипс. Следовательно, мы должны найти общий вид интеграла

$$I = \int \frac{dx dy}{\{-H(x, y)\}^{1/2}} e^{ax+by}, \quad (11.1)$$

где

$$H(x, y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2A'x + 2B'y + D,$$

$A > 0, B > 0, \Delta = AB - C^2 \geq 0$ , а  $U$ , определенное выражением (9.17), меньше нуля. Из последнего условия следует, что внутри эллипса  $H$  отрицательно. Случай  $\Delta = 0$ , когда эллипс превращается в параболу, также встречается на практике как предел при  $\Delta \rightarrow 0$ . Производные интеграла (11.1) по  $a$  и  $b$  приводят к новым формулам, в которых под знаком интеграла стоят целые степени  $x$  и  $y$ .

Примем сначала, что  $\Delta > 0$ . Первое интегрирование по  $y$  проводится при помощи формулы

$$\int_{y^-}^{y^+} dy \frac{e^{by}}{\{(y^+ - y)(y - y^-)\}^{1/2}} = \pi \exp\left\{\frac{1}{2}b(y^+ + y^-)\right\} I_0\left\{\frac{1}{2}b(y^+ - y^-)\right\}, \quad (11.2)$$

где  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка [1]. Интегрирование по  $x$  осуществляется по формуле

$$\begin{aligned} & \int_{x^-}^{x^+} dx e^{\mu x} I_0[\nu \{(x^+ - x)(x - x^-)\}^{1/2}] = \\ & = \exp\left\{\frac{1}{2}\mu(x^+ + x^-)\right\} 2(\mu^2 + \nu^2)^{-1/2} \operatorname{sh}\left\{\frac{1}{2}(x^+ - x^-)(\mu^2 + \nu^2)^{1/2}\right\}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Выражая корни  $x^\pm$ ,  $y^\pm$  через коэффициенты квадратичной формы  $H$ , мы получаем

$$I = \frac{2\pi e^{ax_0 + by_0}}{(Ba^2 + Ab^2 - 2Cab)^{1/2}} \operatorname{sh} \left\{ \left( -\frac{U}{\Delta} \right)^{1/2} (Ba^2 + Ab^2 - 2Cab)^{1/2} \right\}, \quad (11.4)$$

где

$$(x_0, y_0) = \left( \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} C & A' \\ B & B' \end{vmatrix}, \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A' & A \\ B' & C \end{vmatrix} \right)$$

является центром эллипса, а  $\Delta$  и  $U$  определены формулами (9.12) и (9.17).

В случае  $\Delta = 0$  один из пределов интегрирования по  $x$  равен бесконечности: в зависимости от знака  $\mu$  либо  $x^+ \rightarrow +\infty$ , либо  $x^- \rightarrow -\infty$ . Формулу (11.3) в этом случае следует заменить формулой ( $\mu > 0$ )

$$\int_{x^-}^{\infty} dx e^{-\mu x} \{v \sqrt{x - x^-}\} = \frac{1}{\mu} \exp\left(\frac{v^2}{4\mu} - \mu x^-\right). \quad (11.5)$$

Выразив корни через коэффициенты, получаем

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{C \left| a - \frac{bC}{B} \right|}} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{a^2 (BD - B'^2) + b^2 (AD - A'^2) - 2ab (CD - A'B')}{2 \left( a - \frac{bC}{B} \right) (CB' - BA')} \right\}, \quad (11.6)$$

где  $AC = B^2$ .

Пусть теперь  $T = f(s_1, s_2) \exp(at_1 + bt_2)$ ; тогда из уравнений (9.2) и (III.2.2) получаем

$$\frac{d^2 \sigma}{ds_1 ds_2} = \frac{f(s_1, s_2)}{(4\pi)^4 4\lambda(s, m_a^2, m_b^2)} \int \frac{dt_1 dt_2}{(-\Delta)^{1/2}} e^{at_1 + bt_2}. \quad (11.7)$$

Интегрирование производится немедленно с помощью формул (9.10) и (11.4):

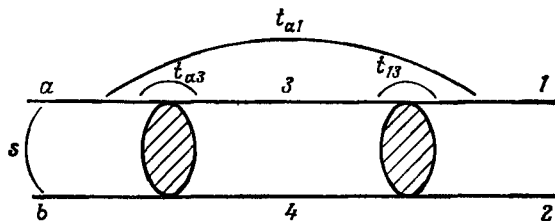
$$\frac{d^2 \sigma}{ds_1 ds_2} = \frac{f(s_1, s_2)}{(4\pi)^4 \lambda(s, m_a^2, m_b^2)} \frac{2\pi e^{at_1^{(0)} + bt_2^{(0)}}}{(Ba^2 + Ab^2 - 2Cab)^{1/2}} \times \\ \times \operatorname{sh} \left\{ \frac{1}{2s} \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) (Ba^2 + Ab^2 - 2Cab)^{1/2} \right\}, \quad (11.8)$$

где  $t_1^{(0)}$  и  $t_2^{(0)}$  даны в (9.14), а  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — в (9.11). Дальнейшее интегрирование в конечном виде невозможно. Заметим, что той же формулой (11.4) можно воспользоваться при интегрировании по  $t_1$ ,  $s_2$  или по  $t_2$ ,  $s_1$ , но в этих случаях нет основания ожидать экспоненциальной зависимости от  $s_1$  или  $s_2$ .



### б. Соотношение унитарности с двухчастичным промежуточным состоянием; «ящичная» диаграмма

В динамическом отношении связь между двумя проблемами — описанием реакций  $2 \rightarrow 3$  и формулировкой соотношения унитарности [68] в приближении, включающем только двухчастичные промежуточные состояния, — очень отдаленна. Но в кинематическом отношении они тесно связаны, ибо обе они характеризуются четверкой независимых 4-векторов. В частности, по этой причине в формулах естественно возникает  $\Delta_4$ .



Фиг. 57. Двухчастичное соотношение унитарности

Такая фейнмановская диаграмма называется ящичной на ней две частицы дважды взаимодействуют посредством некоего механизма.

Избегая каких-либо динамических разъяснений, *двухчастичное соотношение унитарности мы можем записать в виде*

$$\text{Im } A(s, t_{a1}) = \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{d^3 p_3}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} \delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2) A_1(s, t_{a3}) A_2^*(s, t_{13}). \quad (11.9)$$

Здесь  $A(s, t_{a1})$ ,  $A_1(s, t_{a3})$  и  $A_2(s, t_{13})$  — амплитуды реакций  $2 \rightarrow 2$ , показанные на фиг. 57, где также пояснены обозначения и переменные. Таким образом, мнимая часть  $A(s, t_{a1})$  получается интегрированием по всем возможным двухчастичным промежуточным состояниям на фиг. 57. Такое интегрирование всегда возникает, если мы рассчитываем «ящичную» диаграмму типа изображенной на фиг. 57, т. е. диаграмму, отвечающую обмену двумя «блоками». Вспомни теперь наши прежние результаты [см. уравнение (IV.1.7)], касающиеся интегрирования по фазовому объему двух частиц. Тогда из (11.9) мы получим

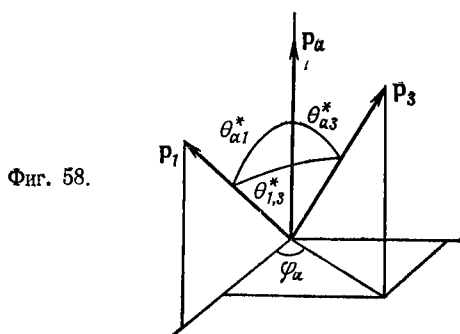
$$\text{Im } A(s, t_{a1}) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{P_3^*}{4\sqrt{s}} \int d\Omega_3 A_1(s, t_{a3}) A_2^*(s, t_{13}), \quad (11.10)$$

где  $P_3^* = \lambda^{1/2}(s, m_3^2, m_4^2)/2\sqrt{s}$ , а  $\Omega_3$  описывает ориентацию импульса  $p_3$  по отношению к закрепленным векторам  $p_a$  и  $p_1$ , показанным на фиг. 58.

Теперь мы можем написать

$$d\Omega_3 = d \cos \theta_{a3} d\varphi_a = \frac{d \cos \theta_{a3} d \cos \theta_{13}^*}{K^{1/2}(\cos \theta_{a1}^*, \cos \theta_{a3}^*, \cos \theta_{13}^*)}, \quad (11.11)$$

где  $K(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz$  [см. (Б.12)]. Вместо этого можно воспользоваться формулой (II.7.21) и отожде-



ствить в ней  $p_1$  с  $p_a + p_b$ ,  $p_2$  с  $p_a$ ,  $p_3$  с  $p_1$  и  $p_4$  с  $p_3$ . Тогда мы получим

$$\begin{aligned} d\Omega_3 &= \frac{2sd(p_a \cdot p_3) d(p_1 \cdot p_3)}{\{-\Delta_2(p_a + p_b, p_3)\}^{1/2} \{-\Delta_4(p_a + p_b, p_a, p_1, p_3)\}^{1/2}} = \\ &= \frac{\sqrt{s}}{2P_3^*} \frac{dt_{a3} dt_{13}}{(-\Delta_4)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Подставив (11.12) в (11.10), мы получим инвариантную запись двухчастичного соотношения унитарности [71]

$$\text{Im } A(s, t_{a1}) = \frac{1}{64\pi^2} \int \frac{dt_{a3} dt_{13}}{(-\Delta_4)^{1/2}} A_1(s, t_{a3}) A_2^*(s, t_{13}), \quad (11.13)$$

где  $\Delta_4$  зависит от четырех инвариантов и шести данных масс, например следующим симметричным образом:

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \Delta_4(s, t_{a1}, t_{a3}, t_{13}; m_a^2, m_b^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2) = \\ &= \Delta_4(p_a + p_b, p_a, p_1, p_3) = \\ &= \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 2s & s + m_a^2 - m_b^2 & s + m_1^2 - m_2^2 & s + m_3^2 - m_4^2 \\ s + m_a^2 - m_b^2 & 2m_a^2 & m_a^2 + m_1^2 - t_{a1} & m_a^2 + m_3^2 - t_{a3} \\ s + m_1^2 - m_2^2 & m_a^2 + m_1^2 - t_{a1} & 2m_1^2 & m_1^2 + m_3^2 - t_{13} \\ s + m_3^2 - m_4^2 & m_a^2 + m_3^2 - t_{a3} & m_1^2 + m_3^2 - t_{13} & 2m_3^2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Элементы матрицы (11.14) определяются из соотношения  $p_a + p_b = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ . Оно отличается от выполняющегося для реакции  $2 \rightarrow 3$  соотношения  $p_a + p_b = p_1 + p_2 + p_3$ ; поэтому в обеих реакциях  $\Delta_4$  выражаются через инвариантные переменные по-разному, хотя их векторные аргументы совпадают. Но простое сравнение показывает, что уравнение (11.14) можно получить из  $\Delta_4(p_a + p_b, p_a, p_1, p_3)$ , вычисленного для  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2 + p_3$  следующим простым преобразованием:

$$s_2 \rightarrow m_2^2, \quad s_1 \rightarrow m_3^2, \quad m_3^2 \rightarrow m_4^2, \quad m_2^2 \rightarrow t_{13}, \quad t_2 \rightarrow t_{a3} \quad (11.15)$$

при неизменных прочих переменных. Конечно, преобразование (11.15) не является единственным. Из преобразования (11.15) ясно видно также, что оно лежит вне физической области реакции  $2 \rightarrow 3$ . При упругой унитарности, определяемой условиями  $m_a = m_1 = m_3 = \mu$  и  $m_b = m_2 = m_4 = m$ , соотношение (11.14) заметно упрощается. Действительно, в этом случае мы имеем

$$16\Delta_4 = \lambda(s, \mu^2, m^2) \lambda(t_{a1}, t_{a3}, t_{13}) - 4st_{a1}t_{a3}t_{13}. \quad (11.16)$$

Обратите внимание на то, как в уравнении (11.16) коэффициент при  $s^2$  получается с помощью подстановки (11.15) из известного коэффициента  $\lambda(t_1, t_2, m_2^2)$  при  $s^2$  в  $\Delta_4$  для реакции  $2 \rightarrow 3$  (фиг. 51).

Если допустить, что амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  процессов  $2 \rightarrow 2$  в соотношении (11.13) зависят от  $t_{a3}$  и  $t_{13}$  экспоненциально, то интегралы в (11.13) находятся с помощью формулы (11.4). Для иллюстрации рассмотрим случай упругой унитарности в пределе больших  $s$ , когда массами и последним членом в уравнении (11.16) можно пренебречь. Положим  $A_1 = f_1 \exp(at_{a3})$ ,  $A_2 = f_2 \exp(bt_{13})$ ; тогда условие унитарности принимает вид

$$\text{Im } A(s, t_{a1}) = \frac{f_1 f_2}{16\pi^2 s} \cdot K,$$

где

$$K \equiv \int \frac{dt_{a3} dt_{13}}{\{-\lambda(t_{a1}, t_{a3}, t_{13})\}^{1/2}} e^{at_{a3} + bt_{13}}. \quad (11.17)$$

Этот интеграл встречается во многих теориях, оперирующих с «ящичной» диаграммой (фиг. 57) и предпочитающих работать лишь с высшими степенями  $s$ . Область интегрирования в (11.17) лежит внутри параболы  $\lambda(t_{a1}, t_{a3}, t_{13}) = 0$ , откуда следует, что  $\Delta = 0$  в выражении (11.4), т. е. нужно применять уравнение (11.6). Несложный расчет дает

$$K = \frac{\pi}{a+b} \exp\left(\frac{ab}{a+b} t_{a1}\right). \quad (11.18)$$

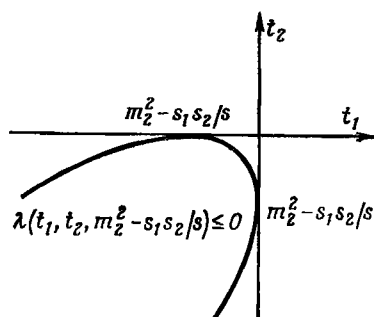
### в. Поведение $R_3(s)$ в реджевском пределе

С теоретической точки зрения определенный интерес представляет *реджевский предел по всем переменным* [7, 8, 29, 30, 93], определяемый условиями

$$\begin{aligned} s &\rightarrow \infty, \\ s_1, s_2 &\gg |t_1|, |t_2|, m_i^2, \\ \frac{s_1 s_2}{s} &\text{ конечно.} \end{aligned} \quad (11.19)$$

Таким образом, здесь предполагается не только, что кинематическая конфигурация является дважды периферической ( $t_1$  и  $t_2$

Фиг. 59. Физическая область на плоскости  $t_1 t_2$  в реджевском пределе представляет собой область внутри параболы.



малы), но и что энергии пар входящих в нее частиц  $\sqrt{s_1}$ ,  $\sqrt{s_2}$  велики. Последняя оговорка необходима; без нее условия « $s_1, s_2$  велики» и « $t_1, t_2$  малы» несовместимы [см. (11.23)].

Свойства кинематической конфигурации (11.19) просто получаются из условия  $\Delta_4 < 0$ . Несложные алгебраические манипуляции приводят определитель  $\Delta_4$  [см. (9.4)] в пределе (11.19) к очень простому виду

$$16\Delta_4 \approx s^2 \lambda \left( m_2^2 - \frac{s_1 s_2}{s}, t_1, t_2 \right). \quad (11.20)$$

В этом пределе кривая  $\Delta_4 = 0$  на плоскости  $t_1 t_2$  (фиг. 59) превращается в параболу с осью  $t_1 = t_2$ , касающуюся осей координат в точках  $t_1$  (или  $t_2$ ) = 0 и  $t_2$  (или  $t_1$ ) =  $m_2^2 - s_1 s_2 / s < 0$ . Физическая область находится внутри этой параболы; это предел эллипсоида на фиг. 52, рассматриваемого в окрестности начала координат. Уравнение границы можно еще больше упростить, написав

$$\begin{aligned} \lambda \left( m_2^2 - \frac{s_1 s_2}{s}, t_1, t_2 \right) &= \left[ m_2^2 - \frac{s_1 s_2}{s} + \{ \sqrt{-t_1} - \sqrt{-t_2} \}^2 \right] \times \\ &\times \left[ m_2^2 - \frac{s_1 s_2}{s} + \{ \sqrt{-t_1} + \sqrt{-t_2} \}^2 \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Два множителя в (11.21) отличаются только знаком  $\sqrt{t_1 t_2}$ ; они представляют одну и ту же кривую на плоскости  $t_1 t_2$ . Их произведение должно быть отрицательно, что возможно лишь в том случае, если первый множитель отрицателен, а второй положителен. Следовательно, кинематическая конфигурация в пределе (11.19) удовлетворяет двум неравенствам:

$$\{\sqrt{-t_1} - \sqrt{-t_2}\}^2 \leq \frac{s_1 s_2}{s} - m_2^2, \quad (11.22)$$

$$\{\sqrt{-t_1} + \sqrt{-t_2}\}^2 \leq \frac{s_1 s_2}{s} - m_2^2. \quad (11.23)$$

Первое из них означает просто, что  $t_1$  и  $t_2$  должны мало различаться, а второе устанавливает нижний предел величин  $t_1$  и  $t_2$ . Это приводит к важным практическим последствиям (гл. VIII).

Предположим опять, что  $T = f(s_1, s_2) \exp(at_1 + bt_2)$ . Пользуясь упрощенной записью (11.20), мы можем теперь в пределе (11.19) вместо (11.7) написать

$$\frac{d^2 \sigma}{ds_1 ds_2} = \frac{f(s_1, s_2)}{(4\pi)^4 s^3} \int \frac{dt_1 dt_2 \exp(at_1 + bt_2)}{\{-\lambda(m_2^2 - s_1 s_2/s, t_1, t_2)\}^{1/2}}. \quad (11.24)$$

Интеграл по  $t_1, t_2$  в точности тот же, что и в (11.17), и мы немедленно получаем [63]

$$\frac{d^2 \sigma}{ds_1 ds_2} = \frac{f(s_1, s_2)}{(4\pi)^4 s^3} \frac{\pi}{a+b} \exp\left\{\frac{ab}{a+b} \left(m_2^2 - \frac{s_1 s_2}{s}\right)\right\}. \quad (11.25)$$

Конечно, тот же результат можно получить из точной формулы (11.8) в пределе (11.19). Мы еще вернемся к уравнению (11.25) в гл. VIII.

Интересно также подсчитать в пределе (11.19) толлеров угол  $\omega$  [29]. Делая предельный переход (11.19) в уравнении (10.10), мы после некоторых выкладок получаем

$$s = \frac{s_1 s_2}{\lambda(t_1, t_2, m_2^2)} (m_2^2 - t_1 - t_2 + 2\sqrt{t_1 t_2} \cos \omega), \quad (11.26)$$

или, решая относительно  $\cos \omega$ ,

$$\cos \omega = \frac{(s/s_1 s_2) \lambda(t_1, t_2, m_2^2) - (m_2^2 - t_1 - t_2)}{2\sqrt{t_1 t_2}}. \quad (11.27)$$

Соответствующий ему синус, естественно, пропорционален  $\sqrt{-\Delta_4}$ :

$$\sin^2 \omega = \frac{-\lambda(t_1, t_2, m_2^2) \lambda(m_2^2 - s_1 s_2/s, t_1, t_2)}{4(s_1 s_2/s)^2 t_1 t_2}. \quad (11.28)$$

Отправляясь от (11.27), легко убедиться в том, что

$$2 \frac{s_1 s_2}{s} \sqrt{t_1 t_2} (1 \pm \cos \omega) = \pm [m_2^2 + \{\sqrt{-t_1} \mp \sqrt{-t_2}\}^2] \times \\ \times [m_2^2 - \frac{s_1 s_2}{s} + \{\sqrt{-t_1} \pm \sqrt{-t_2}\}^2]. \quad (11.29)$$

Перемножение двух соотношений (11.29) приводит к формуле (11.28). Теперь мы можем дать новую интерпретацию неравенствам (11.22), (11.23): первое из них требует, чтобы  $\cos \omega$  был меньше 1, а второе — чтобы он был больше  $-1$ . Тем самым граница области близ начала координат определяется равенством  $\cos \omega = -1$  (фиг. 59). Поскольку мы предположили, что  $-t_1$  и  $-t_2$  остаются малыми числами, следует сделать вывод, что  $\omega$ , как правило, близко к  $180^\circ$ . Этот результат следует сравнить с нашим прежним замечанием, согласно которому даже при равномерном распределении событий в фазовом пространстве значения  $\omega$  сосредоточены близ  $180^\circ$ . Включение периферичности *уменьшает* пик близ  $180^\circ$ , но качественно его не меняет. Это утверждение очень трудно доказать аналитически, так как всякий расчет распределения по  $\omega$  требует четырех нетривиальных интегрирований. Но при помощи моделирования (гл. IX) это доказывается совсем просто.

### Упражнения

V. 1. Вычислите отношение  $\sin \theta_{12}^* / \sin \theta_{12}^{\Pi 23}$ , пользуясь формулами (1.5) и (1.10). Как можно истолковать полученный результат?

V. 2. Возьмите интегралы

$$I_1 = \int \frac{dx}{\lambda^{1/2}(x, a, b)}, \quad I_2 = \int dx \frac{\lambda^{1/2}(x, a, b)}{x}, \\ I_3 = \int dx \lambda^{1/2}(x, a, b), \quad K = \int_{x^-}^{x^+} \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{1/2}}.$$

В последнем из них  $x^\pm$  — корни уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  и  $a < 0$ .

V. 3. Докажите, что если в формуле (5.17) вместо  $s_2$  воспользоваться переменной

$$r(s_2) = \int_{(m_2+m_3)^2}^{s_2} dx \frac{\lambda^{1/2}(x, m_2^2, m_3^2)}{x},$$

то плотность распределения переменных  $r, t_1$  по фазовому объему будет постоянной. Найдите ее.

V. 4. Вычислите трехчастичный фазовый объем  $R_3(s)$ , когда одна из масс  $m_3 = 0$ . Что получится, если вдобавок положить а)  $m_1 = m_2 = m$ ,  $m_3 = 0$ , б)  $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ ?

V. 5. Вычислите  $d^2\sigma_3/dt_1 ds_2$  для реакции  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$  в предположении, что справедлива модель однопионного обмена [уравнение (5 22)] и что экстраполяция пионного полюса не меняет величины  $A$ , полученной из экспериментально измеренного сечения  $\pi N$ -рассеяния.

V. 6. Покажите, что определение угла Треймана — Янга

$$\cos \varphi_b = \frac{(\mathbf{p}_a \times \mathbf{p}_1) \cdot (\mathbf{p}_b \times \mathbf{p}_3)}{|\mathbf{p}_a \times \mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_b \times \mathbf{p}_3|} \Big|_{\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1}$$

эквивалентно формуле (6 3). Покажите также, что та же формула, взятая в системе отсчета Ц12 ( $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ ), дает угол Треймана — Янга  $\varphi_a$  в системе Ц12.

V. 7. Каким является распределение углов Джексона  $\theta_{b3}^{\text{Ц23}}$  в реакции  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + p_2 + p_3$ , если квадрат матричного элемента равен  $T = \exp(bt_2)$ ? Проинтегрируйте результат для случая  $m_1 = 0$ .

V. 8. Получите альтернативные определения углов Треймана — Янга (6 9) и (6 11) и угла спиральности (6 12), (6 13), воспользовавшись инвариантной формой уравнений (8 2) и (8 6).

V. 9. Найдите распределение  $dR_3/dM_{12}$  эффективных масс частиц 1 и 2 в трехчастичном состоянии, когда частицы 2 и 3 образуют резонанс с массой  $M$  и нулевой шириной [157\*].

V. 10. Канал  $pp \rightarrow p\pi^0 p$  может быть отделен от других каналов реакции, если измерять импульсы протонов  $p_1$ ,  $p_3$  и отбирать лишь такие события, для которых

$$m_2^2 = (p_a + p_b - p_1 - p_3)^2 = m_{\pi^0}^2.$$

Найдите поверхность допустимых значений  $p_3$  при данном фиксированном значении  $p_1$ .

## Глава VI

### МНОЖЕСТВЕННОЕ РОЖДЕНИЕ

#### 1. Введение

Как мы видели в гл. III (табл. III. 1), процесс

$$p_a + p_b \rightarrow p_1 + \dots + p_n \quad (1.1)$$

характеризуется  $3n - 4$  существенными независимыми переменными. В гл. V мы вводили много разных наборов переменных для описания реакции  $2 \rightarrow 3$ , число их при желании можно было бы увеличить. Ясно, что процессы  $2 \rightarrow n$  могут быть описаны еще более разнообразными путями. И действительно, проблема выбора подходящих переменных для описания амплитуды множественного рождения долго не поддавалась решению.

В настоящее время результаты экспериментальных наблюдений реакции типа (1.1) обычно стремятся выразить через матричный элемент реакции. Не исключено, что существует такая совокупность переменных, при которой матричные элементы всех встречающихся реакций выражаются совсем просто. Но пока ее не обнаружено, и, вероятнее всего, какой-либо привилегированной совокупности переменных не существует. Вместо этого мы выбираем те или иные совокупности переменных, основываясь на различных соображениях, набор переменных, полезный для одной цели, оказывается совсем не нужным для другой.

Главная задача этой главы — познакомиться с различными наборами  $\Phi$  тех  $3n - 4$  переменных, которые описывают точку в фазовом пространстве. Вводя какую-либо совокупность переменных  $\Phi$ , мы должны решить для нее три задачи.

1. Определить физическую область изменения переменных  $\Phi$ , т. е. найти пределы интегрирования в интеграле

$$R_n(p^2; p_1^2, \dots, p_n^2) = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta^4 \left( p - \sum_i p_i \right) = \int d\Phi r_n(\Phi). \quad (1.2)$$

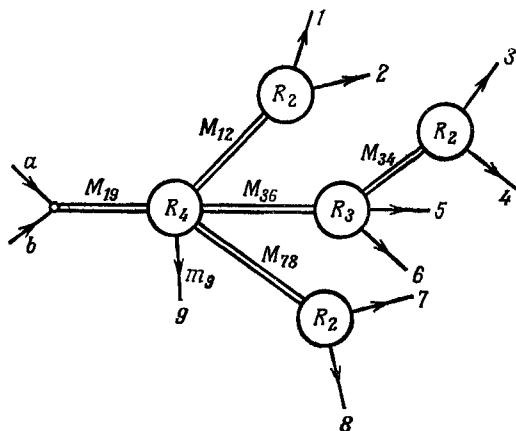
2. Определить фазовый фактор  $r_n(\Phi)$ , который дает плотность точек в фазовом пространстве, выраженном в переменных  $\Phi$ .

3. Установить связь этой совокупности  $\Phi$  с другими совокупностями переменных, в частности с импульсными переменными  $p_1, \dots, p_n$ .



## 2. Времениподобные рекуррентные соотношения

Любую многочастичную реакцию можно представить в таком виде, как будто она протекает через рождение и распад резонансов (фиг. 60). В промежуточных состояниях здесь оказываются нестабильные частицы, которые последовательно распадаются на другие нестабильные частицы и т. д., пока не воз-



Фиг. 60. Пример каскадного распада.

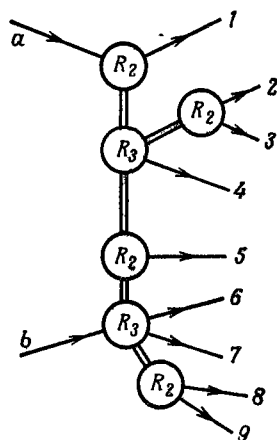
Двойные линии обозначают системы частиц. Полная энергия фиксирована. На этом рисунке  $M_{19}^2 = (p_1 + p_2 + \dots + p_g)^2$  и т. д.

никнет конечное состояние. В других случаях говорят о мультипериферическом механизме, который изображается диаграммами типа фиг 61. Независимо от того, верны или нет эти динамические идеи, можно доказать, что  $n$ -частичное конечное состояние в кинематическом смысле всегда допускает подразделение на более простые процессы.

Чтобы быть конкретными, представим себе для реакции  $2 \rightarrow n$  *дерево импульсов* с  $n+2$  внешними ветвями, т. е. диаграмму без замкнутых контуров типа фиг. 60 и 61. Мы покажем, что каждой такой диаграмме соответствует совокупность  $3n-4$  фазовых переменных  $\Phi$ , определяющая вид интеграла  $R_n$  и плотность в фазовом пространстве  $\rho_n(\Phi)$ . Этот вид таков, что  $R_n$  выражается рекуррентно через  $R_l$ ,  $l < n$ . Здесь важно разделить два случая. Первый [20, 21, 81\*, 133, 152\*, 164\*] представлен на фиг. 60. Одна из внутренних линий диаграммы с самого начала обладает всей энергией  $\sqrt{s}$  и затем распадается на системы с меньшей массой и т. д. вплоть до конечных частиц. В итоге все встречающиеся здесь промежуточные системы имеют

времениподобные полные 4-импульсы Поэтому можно переходить в их систему покоя и параметризовать векторы с помощью сферических углов. Во втором случае [7, 136], показанном на фиг. 61, частицы  $a$  и  $b$  входят не в одну, а в разные вершины схемы, и есть хотя бы одна линия, связывающая каждый начальный 4-импульс с каждым конечным. Если начинать от линии одного из начальных импульсов, то полную энергию  $\sqrt{s}$  удастся фиксировать, лишь дойдя до линии другого начального импульса. Это накладывает ограничение на параметры

Фиг. 61. Диаграмма, на которой нет промежуточных систем частиц, фиксирующих полную энергию всей системы.



импульсов, стоящих на диаграмме между  $p_a$  и  $p_b$ , и делает второй случай более сложным, чем первый Импульсы промежуточных состояний могут теперь оказаться пространственноподобными, стандартные системы отсчета [формула (II.1 13)] для них имеют вид  $(0, 0, 0, \sqrt{-t})$ ; вместо полярных углов надо пользоваться лоренцевыми сдвигами В число переменных могут входить так называемые *толлеровы переменные*. Первая трудность отпадает, если отказаться от условия  $s = \text{const}$ , тогда оба случая становятся эквивалентными Кроме того, они связаны друг с другом перекрестным сопряжением, переход на фиг. 61 к каналу с начальным состоянием  $a + \bar{1}$ , очевидно, приведет к дереву импульсов, распадная схема которого начинается с  $a + \bar{1}$ , и позволяет легко фиксировать значение полной энергии.

Важно также понимать, что диаграммы типа деревьев фиксируют в качестве переменных только квадраты промежуточных 4-импульсов. Остальные  $3l - 4$  переменных в каждом промежуточном интеграле  $R_i$  остаются нефиксированными. Это оставляет еще заметную свободу выбора, и надлежащий выбор переменных может привести к новым полезным соотношениям.

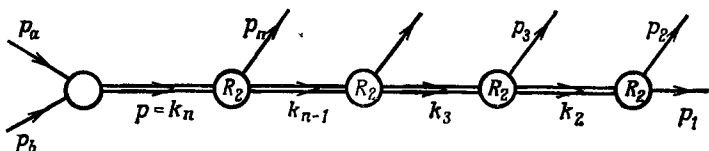
В этом разделе мы рассмотрим только первый случай; второй случай будет рассмотрен в разделе 3.

Простейшее из мыслимых рекуррентных соотношений основано на физической картине последовательного распада, показанной на фиг. 62 [133]. Выделив в выражении (III.3.1) факторы, относящиеся к системе  $1, \dots, n-1$ , мы получим

$$R_n(p) = \int \int \frac{d^3 p_n}{2E_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta^4 \left\{ (p - p_n) - \sum_{i=1}^{n-1} p_i \right\} = \quad (2.3)$$

$$= \int \frac{d^3 p_n}{2E_n} R_{n-1}(p - p_n). \quad (2.4)$$

Здесь  $R_n$  вследствие лоренц-инвариантности зависит только от  $p^2 \equiv M_n^2 = s$ . Зависимость от масс мы будем выписывать явно



Фиг. 62. Реакция  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + \dots + p_n$ , представленная в виде последовательности двухчастичных распадов.

лишь в том случае, когда в этом будет необходимость. Точно также  $R_{n-1}$  зависит только от

$$M_{n-1}^2 = (p - p_n)^2 = (p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1})^2 \equiv k_{n-1}^2, \quad (2.5)$$

где мы ввели 4-вектор

$$k_i = p_1 + \dots + p_i. \quad (2.6)$$

Очевидно, что  $k_n = p$ , а  $M_{n-1}$  по смыслу обозначений есть инвариантная масса системы частиц  $1, \dots, n-1$ .

Поскольку  $R_{n-1}$  зависит только от одной переменной, естественно эту переменную сделать переменной интегрирования в (2.4). Подставим в подынтегральное выражение (2.4)

$$1 = \int dM_{n-1}^2 \delta(M_{n-1}^2 - k_{n-1}^2), \quad (2.7)$$

$$1 = \int d^4 k_{n-1} \delta^4(p - p_n - k_{n-1}). \quad (2.8)$$

Тогда получим

$$R_n(M_n^2) = \int dM_{n-1}^2 \int d^4 k_{n-1} \int d^4 p_n \delta(k_{n-1}^2 - M_{n-1}^2) \delta(p_n^2 - m_n^2) \times \\ \times \delta^4(p - p_n - k_{n-1}) R_{n-1}(M_{n-1}^2). \quad (2.9)$$

Вспоминая определение  $R_2$ , перепишем это выражение в виде [164\*]

$$R_n(M_n^2) = \int_{\mu_{n-1}^2}^{(M_n - m_n)^2} dM_{n-1}^2 R_2(k_n; k_{n-1}^2, p_n^2) R_{n-1}(M_{n-1}^2) = \quad (2.10)$$

$$= \int_{\mu_{n-1}^2}^{(M_n - m_n)^2} dM_{n-1}^2 \int d\Omega_{n-1} \frac{\lambda^{1/2}(M_n^2, M_{n-1}^2, m_n^2)}{8M_n^2} R_{n-1}(M_{n-1}^2). \quad (2.11)$$

Здесь использован явный вид  $R_2$  (IV.1.8), а  $\mu_1$  определяется выражением (2.13). Формулы (2.10) и (2.11) выражают  $R_n$  через произведение  $R_2$  (фазового объема, описывающего распад  $p \rightarrow p_n + k_{n-1}$ ) и  $R_{n-1}$  (фазового объема, описывающего распад  $k_{n-1} \rightarrow p_1 + \dots + p_{n-1}$ ). Это произведение проинтегрировано по всем возможным значениям инвариантной массы  $M_{n-1}$ . Это первый шаг слева направо в цепи фиг. 62. При  $n=3$  формула (2.10) сразу же приводит к выведенной выше формуле (V.2.17) для  $R_3(M_3^2)$ .

Из формулы (2.10) видно, что  $M_{n-1}$  изменяется в пределах

$$\mu_{n-1} \leq M_{n-1} \leq M_n - m_n, \quad (2.12)$$

где введено обозначение

$$\mu_i = m_1 + \dots + m_i. \quad (2.13)$$

Ниже порога  $M_{n-1} = \mu_{n-1}$   $R_{n-1}$  обращается в нуль, поэтому нижний предел равен  $\mu_{n-1}$ . Точно так же  $R_2$  в (2.10) обращается в нуль, если  $M_n$  ниже порога  $M_n \geq M_{n-1} + m_n$ ; это дает верхний предел  $M_{n-1}$ .

Дальнейшие итерации интегралов (2.10) или (2.11) приводят к соотношению, отвечающему всей цепи на фиг. 62. Примем в качестве переменной интегрирования  $M_i$  вместо  $M_i^2$ . Мы получим [164]\*

$$R_n(M_n^2) = \frac{1}{2M_n} \int_{\mu_{n-1}}^{M_n - m_n} dM_n d\Omega_{n-1} \frac{1}{2} P_n \dots \dots \int_{\mu_2}^{M_3 - m_3} dM_2 d\Omega_2 \frac{1}{2} P_3 \int d\Omega_1 \frac{1}{2} P_2, \quad (2.14)$$

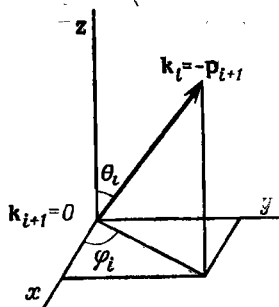
где

$$P_i = \frac{\lambda^{1/2}(M_i^2, M_{i-1}^2, m_i^2)}{2M_i}. \quad (2.15)$$

Теперь  $3n - 4$  аргументов  $\Phi$  из выражения (1.2) распадаются на два ряда переменных:

$n - 2$  инвариантные массы  $M_i$  ( $M_i^2 = k_i^2$ ,  $i = 2, \dots, n - 1$ ) промежуточных частиц на фиг. 62;

$2(n - 1)$  угла  $\theta_i, \varphi_i$  в  $\Omega_i = (\cos \theta_i, \varphi_i)$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ ; определяющие направление импульса  $\mathbf{k}_i = -\mathbf{p}_{i+1}$  в системе покоя  $\mathbf{k}_{i+1} = 0$  при распаде  $k_{i+1} \rightarrow p_{i+1} + k_i$  (фиг. 63).



Фиг. 63. Определение телесного угла  $\Omega_i = (\cos \theta_i, \varphi_i)$ .

Ориентация осей координат выбрана произвольно. Чтобы получить рекуррентное соотношение (2.27) с мультипериферическими передачами импульсов, надо в качестве оси  $z$  взять  $\mathbf{p}_a$  и заменить  $\cos \theta_i$  соответствующими передачами импульсов.

Плотность  $\rho_n(\Phi)$  в выражении (1.2) в фазовом пространстве переменных, стоящих в интеграле (2.14), равна

$$\rho_n(\Phi) = \frac{1}{2^n M_n} \prod_{i=2}^n P_i. \quad (2.16)$$

Набор переменных в (2.14) является простейшим из возможных описаний  $n$ -частичного фазового пространства. По этой причине он используется во многих приложениях, например как основа моделирования многочастичных реакций (гл. IX). Уравнение (2.14) представляет собой также удобную отправную точку для численной оценки  $R_n$  для малых  $n$  [2, 17, 81, 102]<sup>1)</sup>.

В качестве примера применения уравнения (2.14) рассмотрим случай, когда все  $m_i$  равны нулю, это также даст асимптотический предел  $R_n(M_n^2)$  при  $M_n \rightarrow \infty$  (ультрарелятивистский случай). Докажем, что в этом случае

$$R_n^{\text{yp}}(M_n^2) = R_n(M_n^2; m_i^2 = 0) = \frac{(\pi/2)^{n-1}}{(n-1)!(n-2)!} M_n^{2n-4}. \quad (2.17)$$

Для  $n = 2$  это дает правильное значение  $R_2^{\text{yp}} = \pi/2$ ; легко проверить далее, что (2.17) удовлетворяет рекуррентному соотношению

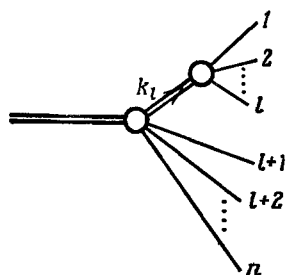
$$R_n(M_n^2) = \frac{\pi}{2M_n} \int_0^{M_n^2} dM_{n-1}^2 (M_n^2 - M_{n-1}^2) R_{n-1}(M_{n-1}^2), \quad (2.18)$$

<sup>1)</sup> В первых работах [17, 80, 102], использовавших рекуррентные соотношения для фазового объема, все интегрирования производились в одной и той же закрепленной системе отсчета, вследствие чего формулы оказывались неудобными для счета — *Прим. ред.*

которое вытекает из уравнения (2.10) при  $m_i = 0$ . Полный объем фазового пространства, как это следует из уравнения (2.17), растет очень быстро — для больших  $n$  как  $M_n^{2n-4}$ . В нерелятивистском пределе  $M_n \rightarrow \mu_n = \sum m_i$  точно таким же образом можно получить (упражнение VI.2)

$$R_n^{\text{HP}}(M_n^2) = \frac{(2\pi^3)^{(n-1)/2}}{2\Gamma\left\{\frac{3}{2}(n-1)\right\}} \frac{(\prod m_i)^{1/2}}{(\sum m_i)^{3/2}} (M_n - \sum m_i)^{(3n-5)/2}. \quad (2.19)$$

Немного более сложное представление для  $R_n$  получается, если вместо того, чтобы отделить от дерева частицу за частицей,



Фиг. 64. Физическая картина, отвечающая формуле расщепления (2.21).

мы отделим от него целую группу из частиц  $1, \dots, l$ , так что в другой группе останутся частицы  $l+1, \dots, n$  (фиг. 64). Формально это выполняется при помощи подстановок

$$1 = \int dM_l^2 \delta(M_l^2 - k_l^2), \quad 1 = \int d^4 k_l \delta^4(p_1 + \dots + p_l - k_l) \quad (2.20)$$

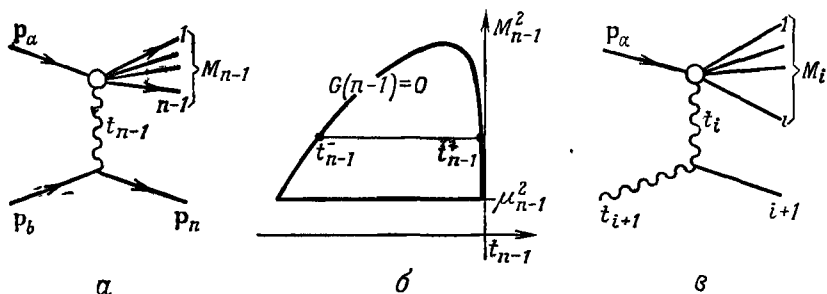
в формулу, определяющую  $R_n$ . Тогда получаем формулу расщепления<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} R_n(M_n^2) &= \int dM_l^2 \int d^4 k_l d^4 p_{l+1} \dots d^4 p_n \delta(k_l^2 - M_l^2) \delta(p_{l+1}^2 - m_{l+1}^2) \dots \\ &\dots \delta(p_n^2 - m_n^2) \delta^4\left(p - k_l - \sum_{i=1}^n p_i\right) \int d^4 p_1 \dots d^4 p_l \delta(p_1^2 - m_1^2) \dots \\ &\dots \delta(p_l^2 - m_l^2) \delta^4\left(k_l - \sum p_i\right) = \\ &= \int_{\mu_l^2}^{(M_n - \mu_n + \mu_l)^2} dM_l^2 R_{n-l+1}(M_n^2; M_l^2, m_{l+1}^2, \dots, m_n^2) \times \\ &\times R_l(M_l^2; m_1^2, \dots, m_l^2), \quad (2.21) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Эту формулу называют также «формулой удвоения» [82, 164\*]. —  
Прим. ред.

где  $l = 2, 3, \dots, n-1$ . При  $l = n-1$  мы возвращаемся к выведенному выше соотношению (2.10). Пределы изменения  $M_l^2$  в формуле (2.21) опять получаются из порогов реакций  $p \rightarrow k_l + p_{l+1} + \dots + p_n$  (верхний) и  $k_l \rightarrow p_1 + \dots + p_l$  (нижний).

Формулу расщепления (2.21) можно итерировать, продолжая и дальше расщеплять  $R_{n-l+1}$  и  $R_l$ . Поступая таким образом, мы приходим к знакомым нам деревьям импульсов, подобным фиг. 60, т. е. схемам, изображающим, как из последовательных



Фиг. 65. Диаграмма процесса рождения  $n$  частиц, когда в системе отсчета  $k_n = p_a + p_b = 0$  в качестве оси  $z$  выбрано направление  $p_a$  (а); область изменения  $t_{n-1}$  дается диаграммой Чу — Лоу в переменных  $M_{n-1}^2, t_{n-1}$  (б); диаграмма процесса рождения  $n$  частиц на стадии  $i$ -й итерации (в).

каскадов распадов возникает конечное состояние. Конечно, число мыслимых топологических различных деревьев импульсов быстро растет с  $n$ . Мы не будем их анализировать более подробно, так как, имея перед собой схему, нетрудно найти для нее  $R_n$ ,  $\Phi$  и  $\rho_n(\Phi)$ . Рассмотрим, например, диаграмму на фиг. 60. Для  $n = 9$  имеется  $3 \times 9 - 4 = 23$  переменных в  $\Phi$ , из них 8 в  $R_4$ , 5 в  $R_3$ ,  $3 \times 2$  в трех  $R_2$  и 4 промежуточные массы. Мы можем сразу написать (в обозначениях фиг. 60)

$$R_9(M_{19}^2) = \int dM_{12}^2 dM_{36}^2 dM_{78}^2 R_4(M_{19}^2; M_{12}^2, M_{36}^2, M_{78}^2, m_9^2) \times \\ \times R_2(M_{12}^2; m_1^2, m_2^2) R_2(M_{78}^2; m_7^2, m_8^2) \times \\ \times \int dM_{34}^2 R_3(M_{36}^2; M_{34}^2, m_5^2, m_6^2) R_2(M_{34}^2; m_3^2, m_4^2). \quad (2.22)$$

Как подчеркивалось выше, сами переменные интегрирования внутри  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$  здесь остаются не определенными.

В качестве примера того, как можно воспользоваться свободой выбора переменных интегрирования в промежуточных  $R_i$ , рассмотрим следующий случай [20]. В формуле (2.11) оси, от которых отсчитываются  $\Omega_{n-1}$ , произвольны (см. также фиг. 63).

Очень полезное соотношение получится, если за ось  $z$  принять направление  $p_a$ . Тогда угол  $\theta_{n-1}$  оказывается углом рассеяния в процессе  $p_a + p_b \rightarrow k_{n-1} + p_n$  (фиг. 65), поэтому его можно заменить квадратом соответствующей передачи импульса

$$\begin{aligned} t_{n-1} &= (p_a - p_1 - \dots - p_{n-1})^2 = (p_a - k_{n-1})^2 = \\ &= m_a^2 + M_{n-1}^2 - 2E_a k_{n-1}^0 + 2P_a K_{n-1} \cos \theta_{n-1}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где

$$\begin{aligned} P_a &\equiv P_a^{(n)} = \frac{\lambda^{1/2}(M_n^2, m_a^2, m_b^2)}{2M_n}, \\ K_{n-1} &= \frac{\lambda^{1/2}(M_n^2, M_{n-1}^2, m_n^2)}{2M_n}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Замена  $\cos \theta_{n-1}$  на  $t_{n-1}$  приводит к замене интервала  $-1 \leq \cos \theta_{n-1} \leq 1$  интервалом  $t_{n-1}^- \leq t_{n-1} \leq t_{n-1}^+$ , зависящим от  $M_{n-1}$  (фиг. 65, б); здесь  $t_{n-1}^\pm$  получаются (фиг. 25) из уравнения

$$G(n-1) \equiv G(s, t_{n-1}, m_n^2, m_a^2, m_b^2, M_{n-1}^2) = 0. \quad (2.25)$$

В переменных  $t_{n-1}$  рекуррентное соотношение (2.11) имеет вид

$$R_n(M_n^2) = \int_{\mu_{n-1}^2}^{(M_n - m_n)^2} dM_{n-1}^2 \int_{t_{n-1}^-}^{t_{n-1}^+} dt_{n-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} \frac{R_{n-1}(M_{n-1}^2; t_{n-1})}{4\lambda^{1/2}(M_n^2, m_a^2, m_b^2)}, \quad (2.26)$$

где  $R_{n-1}$  зависит также и от  $t_{n-1}$ , так как  $t_{n-1}$  равно квадрату массы одной из начальных частиц, образующих  $R_{n-1}$  (фиг. 65, а).

Чтобы проделать дальнейшие итерации в (2.26), мы должны и  $R_{n-1}$  представить в таком же виде. Для этого следует только заменить  $m_b^2 \equiv t_n$  на  $t_{n-1}$ . Используя опять в качестве переменной массу  $M_n$  вместо квадрата  $M_n^2$ , мы в конце концов получаем [20]

$$\begin{aligned} R_n(M_n^2) &= \frac{1}{2M_n} \frac{1}{4P_a^{(n)}} \int_{\mu_n}^{M_n - m_n} dM_{n-1} \int_{t_{n-1}^-}^{t_{n-1}^+} dt_{n-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} \dots \\ &\dots \frac{1}{4P_a^{(3)}} \int_{\mu_3}^{M_3 - m_3} dM_3 \int_{t_2^-}^{t_2^+} dt_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \frac{1}{4P_a^{(2)}} \int_{t_1^-}^{t_1^+} dt_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1, \end{aligned} \quad (2.27)$$



где

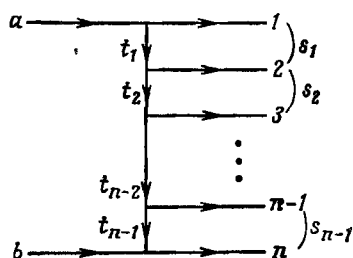
$$P_a^{(t)} = \frac{\lambda^{1/2}(M_i^2, t_i, m_a^2)}{2M_i} \quad (2.28)$$

и

$$t_i = q_i^2, \quad (2.29)$$

$$q_i = p_a - p_1 - \dots - p_i = p_a - k_i. \quad (2.30)$$

Пределами  $t_i^\pm$  служат границы физической области реакции  $2 \rightarrow 2$ , показанной на фиг. 65, в. Формулу (2.27) можно получить и прямо из формулы (2.14), выбирая в каждой из систем отсчета, в которых  $k_{i+1} = 0$ , в качестве оси  $z$  направление  $p_a$  и заменяя косинусы соответствующих полярных углов  $\cos \theta_i$  на  $t_i$ .



Фиг. 66. Квадраты мультипериферических передач импульса  $t_i = (p_a - p_1 - \dots - p_i)^2$  и квадраты энергий пар соседних частиц  $s_i = (p_i + p_{i+1})^2$ .

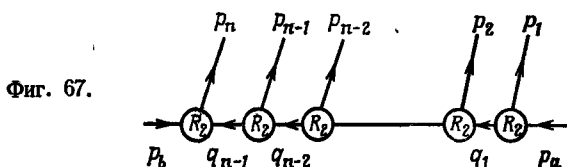
Следовательно, формуле (2.27) по-прежнему отвечает дерево импульсов, показанное на фиг. 62.

В формуле (2.27) мы встретились с такой формой  $R_n$ , в которой переменными интегрирования являются *мультипериферические квадраты передачи импульсов*  $t_i$  (фиг. 66). Поскольку такие  $t_i$  нередко встречаются в выкладках, интеграл (2.27) часто более полезен, чем первоначальный интеграл (2.14). Например, формула (2.27) служит отправной точкой мощного метода моделирования (гл. IX.5). При другом выборе оси  $z$  легко получить такое представление  $R_n$ , в котором (упражнение VI.4) переменными интегрирования являются не  $t_i$ , а *энергии пар частиц*  $\sqrt{s_i}$  (фиг. 66). Далее, можно воспользоваться приемом, изложенным в гл. II.7, и заменить азимутальные углы  $\phi_i$  в (2.27) инвариантными переменными, которые в действительности оказываются как раз этими энергиями пар соседних (на диаграмме) частиц [23]. Это приводит к такой записи  $R_n$ , в которой переменными интегрирования являются, кроме  $M_i^2$ , все мультиреджевские переменные на фиг. 66. Наконец, если сами  $M_i$  заменить некоторыми азимутальными углами, используя соотношение, подобное тому (уравнение V.10.10), которое связывает  $s$  с толлеровым углом  $\omega$ , мы придем к форме  $R_n$  (3.36), получаемой ниже совсем другим путем, а именно при помощи пространственноподобных рекуррентных соотношений.

Все сказанное выше подчеркивает тот факт, что, отправляясь от простейшего дерева импульсов (фиг. 62) и выбирая разумным образом переменные в интегралах  $R_2$ , можно получить множество различных наборов переменных интегрирования для  $R_n$ . Ту же процедуру легко обобщить на произвольное дерево импульсов [фиг. 60 и формула (2.22)]. Нетрудно привести другие примеры (см., например, [84\*, 116]), но непосредственно связаны с идеями современной теоретической физики лишь те наборы переменных, которые были перечислены выше. Из других наборов переменных для малых  $n$  упомянем набор для реакций  $1 \rightarrow 5$  [110, 100] и для реакций  $1 \rightarrow 6$  [111].

### 3. Пространственноподобные рекуррентные соотношения: переменные Толлера

Рассмотрим теперь дерево импульсов, показанное на фиг. 67, и сравним его с фиг. 62. На фиг. 67 первый «распад» дается соотношением  $p_b \rightarrow p_n + (-q_{n-1}) = p_n + (p_1 + \dots + p_{n-1} - p_a)$ ,



а на фиг. 62 — соотношением  $p_a + p_b \rightarrow p_n + k_{n-1} = p_n + (p_1 + \dots + p_{n-1})$ . На фиг. 67, «отщепив» от  $p_b$  импульс  $p_n$ , мы продолжаем отделять один за другим импульсы  $p_{n-1}$ ,  $p_{n-2}$ , ... и встречаемся с  $p_a$  только в конце; на фиг. 62  $p_b$  и  $p_a$  известны нам с самого начала. Как следствие этого промежуточные системы на фиг. 67 могут быть — и преимущественно являются — пространственноподобными. Теперь мы установим форму интеграла по фазовому объему, отвечающего фиг. 67 [7, 33].

Чтобы подчеркнуть различие в ролях  $p_b$  и  $p_a$ , мы определим следующий интеграл:

$$R_l(-q_l, p_a) = \int \prod_{i=1}^l \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta^4(-q_l - p_l - p_{l-1} - \dots - p_1 + p_a). \quad (3.1)$$

Заметим, что по аналогии с фиг. 62 индекс  $l$  пробегает значения от  $n$  до 1, поэтому все  $q_i$ , определенные уравнением (2.30), имеют в (3.1) знак минус. Полный интеграл по фазовому объему  $R_n$  получается отсюда, если положить  $l = n$  и  $q_n = -p_b$ :

$$R_n = R_n(p_b, p_a). \quad (3.2)$$

Как и предполагается, он зависит только от  $p_a + p_b$ . Интеграл  $R_i(-q_i, p_a)$  удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$R_i(-q_i, p_a) = \int \frac{d^3 p_i}{2E_i} R_{i-1}(-q_{i-1}, p_a). \quad (3.3)$$

В частности, в начале цепи

$$R_n(p_b, p_a) = \int \frac{d^3 p_n}{2E_n} R_{n-1}(-q_{n-1}, p_a), \quad (3.4)$$

а в конце ее

$$R_1(-q_1, p_a) = \int \frac{d^3 p_1}{2E_1} \delta^4(-q_1 - p_1 + p_a). \quad (3.5)$$

Таким образом, формально мы можем написать<sup>1)</sup>

$$R_0(-q_0, p_a) = \delta^4(-q_0 + p_a).$$

Формула (3.3), очевидно, является аналогом формулы (2.4), поэтому мы применим к ней ту же процедуру, что и к формуле (2.4). Введем в формулу (3.3) тождества

$$\begin{aligned} 1 &= \int dt_{i-1} \delta(t_{i-1} - q_{i-1}^2), \\ 1 &= \int d^4 q_{i-1} \delta^4(q_{i-1} - p_i - q_i). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тогда она примет вид

$$\begin{aligned} R_i(-q_i, p_a) &= \int dt_{i-1} d^4 q_{i-1} d^4 p_i \delta(q_{i-1}^2 - t_{i-1}) \delta(p_i^2 - m_i^2) \times \\ &\times \delta^4(-q_i - p_i + q_{i-1}) R_{i-1}(-q_{i-1}, p_a) = \\ &= \int dt_{i-1} R_2(-q_i; p_i^2, q_{i-1}^2) R_{i-1}(-q_{i-1}, p_a). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Этот результат аналогичен формуле (2.10):  $R_2$  описывает распад  $-q_i \rightarrow p_i + (-q_{i-1})$ , а  $R_{i-1}$  — распад  $-q_{i-1} \rightarrow p_{i-1} + \dots + p_1 - p_a$ ; по всем возможным значениям квадрата промежуточной массы  $t_{i-1}$  проведено интегрирование. Дальнейшее зависит от того, каким является  $q_i$  [см. формулы (IV. 1.8), (IV. 1.18) и (IV. 1.20)]. Поскольку в большинстве случаев импульс  $q_i$  пространственноподобен (а для некоторых встречающихся на практике комбинаций масс только таким и бывает), мы рассмотрим в дальнейшем лишь этот случай, имея в виду, что для  $q_i^2 \geq 0$  формулы должны быть соответствующим образом изменены.

<sup>1)</sup> Здесь  $q_0 = q_1 + p_1 = q_2 + p_2 + p_1 = \dots = p_b + \sum_1^n p_i$ . — Прим. ред.

Для  $q_i^j = t_i < 0$  явный вид  $R_2$  дается формулой (IV. 1.18), и для  $R_2$  в (3.7) мы можем написать

$$R_2(-q_i; p_i^2, q_{i-1}^2) = \frac{\lambda^{1/2}(t_i, t_{i-1}, m_i^2)}{-8t_i} \int dg_{i-1}, \quad (3.8)$$

где  $dg_{i-1} = d \text{ch} \xi_i d\omega_{i+1}$  описывает ориентацию  $q_{i-1}$  в стандартной системе отсчета  $S(q_i)$ , в которой  $q_i = (0, 0, 0, \sqrt{-t_i})$  (фиг. 3, б). Выбор индексов в  $\xi_i$  и  $\omega_{i+1}$  будет объяснен ниже (см. фиг. 69 и соответствующий текст). Однако на первой стадии  $q_n = -p_b$  — времениподобный 4-вектор, и для  $R_2$  надо применять формулу (IV. 1.8). Тогда вместо  $g_{n-1}$  в (3.8) будет стоять элемент пространственного угла  $\Omega_{n-1}$ , описывающего ориентацию  $q_{n-1}$  в системе, где  $p_b = (m_b, 0)$ . Пределы изменения переменных в (3.7), (3.8) мы уточним ниже.

Применяя многократно (3.7) и (3.8) к формуле (3.4), мы получим в конце концов

$$\begin{aligned} R_n(p_b, p_a) = & \int dt_{n-1} d\Omega_{n-1} \frac{\lambda^{1/2}(m_b^2, t_{n-1}, m_n^2)}{8m_b^2} \times \dots \\ & \dots \times \int dt_{i-1} dg_{i-1} \frac{\lambda^{1/2}(t_i, t_{i-1}, m_i^2)}{-8t_i} \dots \int dt_1 dg_1 \frac{\lambda^{1/2}(t_2, t_1, m_2^2)}{-8t_2} \times \dots \\ & \dots \times \int dt_0 dg_0 \frac{\lambda^{1/2}(t_1, t_0, m_1^2)}{-8t_1} \delta^4(-q_0 + p_a). \quad (3.9) \end{aligned}$$

Это наиболее общая форма интеграла  $R_n$ , отвечающего дереву импульсов на фиг. 67. Она аналогична формуле (2.14). Новая деталь здесь — появление в формуле (3.9) 4-мерной  $\delta$ -функции  $\delta^4(-q_0 + p_a)$ . Она уменьшает число независимых переменных до  $3n - 4$ . Как мы увидим, эта функция  $\delta^4$  фиксирует значения  $\cos \theta_{n-1}$ ,  $\omega_n$  и  $t_0$ . Остается лишь одна существенная  $\delta$ -функция, аргумент которой сложным образом зависит от  $t_1, \dots, t_{n-1}$ ,  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ ,  $\omega_2, \dots, \omega_{n-1}$  и которая определяет полную энергию системы. Из-за этой  $\delta$ -функции область интегрирования в (3.9) оказывается  $3n - 4$ -мерной поверхностью в пространстве  $3n - 3$  переменных  $t_i, \xi_i, \omega_j, \varphi_{n+1}$ . Тривиальная переменная  $\varphi_{n+1}$  описывает повороты относительно оси пучка и не связана энергетическими ограничениями. В слегка видоизмененной форме формула (3.9) будет выведена ниже еще раз [см. (3.22), (3.23)].

Ориентацию осей координат в системах отсчета  $S(q_i)$  можно задавать по-разному. Эту свободу можно употребить на то, чтобы вводить переменные требуемого типа. Покажем, как выбрать в качестве переменных квадраты энергий пар соседних частиц  $s_i$  (фиг. 66).

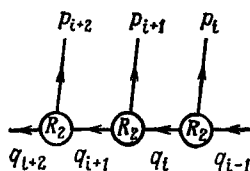
Рассмотрим в интеграле (3.9) шаг номер  $i$ ,  $2 \leq i \leq n-2$ . Разности соответствующих  $q_i$  на фиг. 68 дают

$$(q_{i-1} - q_i)^2 = p_i^2 = m_i^2, \quad (3.10)$$

$$(q_{i-1} - q_{i+1})^2 = (p_i + p_{i+1})^2 = s_i, \quad (3.11)$$

$$(q_{i-1} - q_{i+2})^2 = (p_i + p_{i+1} + p_{i+2})^2. \quad (3.12)$$

Тем самым определяется ориентация  $q_{i-1}$  по отношению к  $q_i$ ,  $q_{i+1}$  и  $q_{i+2}$ , т. е. нужные геометрические переменные выражаются через инварианты (3.10) — (3.12).



Фиг. 68.

Эту связь можно выразить в явном виде, записав  $q_{i-1}$  в псевдосферических координатах (II.7.22) в стандартной системе  $S(q_i, q_{i+1}, q_{i+2})$  (фиг. 69):

$$q_{i+2} = (E_{i+2}, x_{i+2}, 0, z_{i+2}),$$

$$q_{i+1} = \sqrt{-t_{i+1}} (-\operatorname{sh} \eta_{i+1}, 0, 0, \operatorname{ch} \eta_{i+1}),$$

$$q_i = (0, 0, 0, \sqrt{-t_i}),$$

$$q_{i-1} = \sqrt{-t_{i-1}} (\operatorname{sh} \eta_i \operatorname{ch} \zeta_i, \operatorname{sh} \eta_i \operatorname{sh} \zeta_i \cos \omega_{i+1}, \operatorname{sh} \eta_i \operatorname{sh} \zeta_i \sin \omega_{i+1}, \operatorname{ch} \eta_i) \equiv$$

$$\equiv L(\eta_i, \zeta_i, \omega_{i+1}) (0, 0, 0, \sqrt{-t_{i-1}}).$$

Преобразование Лоренца  $L(\eta, \zeta, \omega)$  было выписано явно в (II.1.27). Знак минус при  $\operatorname{sh} \eta_{i+1}$  появился потому, что если  $\eta_{i+1}$  есть быстрота  $q_i$  в системе отсчета  $S(q_{i+1})$ , то быстрота  $q_{i+1}$  в  $S(q_i)$  равна  $-\eta_{i+1}$ .

Значения параметров в (3.13) можно найти из скалярных 4-произведений, куда входит  $q_{i-1}$ . Первое из них дает

$$-q_{i-1} \cdot q_i = \sqrt{-t_{i-1}} \sqrt{-t_i} \operatorname{ch} \eta_i = \frac{1}{2} (m_i^2 - t_{i-1} - t_i), \quad (3.14)$$

$$\sqrt{-t_{i-1}} \sqrt{-t_i} \operatorname{sh} \eta_i = \pm \frac{1}{2} \lambda^{1/2} (m_i^2, t_{i-1}, t_i).$$

Значение  $\zeta_i$  связано с  $s_i$ :

$$\begin{aligned} \bar{q}_{i-1} \cdot \bar{q}_{i+1} &= \sqrt{-t_{i-1}} \sqrt{-t_i} (\operatorname{ch} \eta_{i-1} \operatorname{ch} \eta_i + \operatorname{sh} \eta_{i-1} \operatorname{sh} \eta_i \operatorname{ch} \zeta_i) = \\ &= \frac{1}{2} (t_{i-1} + t_{i+1} - s_i). \end{aligned} \quad (3.15)$$

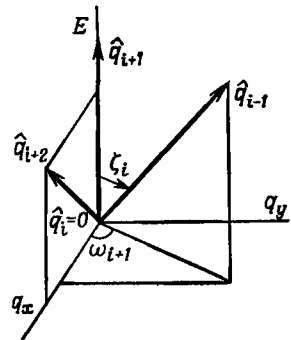
Связь между  $\text{ch } \zeta_i$  и  $s_i$  можно также получить из уравнения (А.29). Уравнение (3.15) означает, что при фиксированных  $t_j$  ( $j = i-1, i, i+1$ )

$$ds_i = 2\sqrt{-t_{i-1}}\sqrt{-t_i} \text{sh } \eta_{i-1} \text{sh } \eta_i d \text{ch } \zeta_i. \quad (3.16)$$

Угол  $\omega_{i+1}$  может быть выражен через величины, стоящие в (3.12). Но обычно этого не делают. Фиг. 70 показывает, как

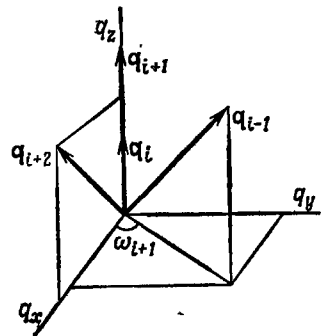
Фиг. 69. Расположение осей координат в системе отсчета  $S(q_i)$ , определяемой условием  $q_i = (0, 0, 0, \sqrt{-t_i})$ .

Если  $\hat{q}_j$  обозначает три составляющих  $q_j$  в подпространстве  $E, q_x, q_y$ , т. е.  $q_j = \{\hat{q}_j, \sqrt{\hat{q}_j^2 - t_j}\}$ , то система обозначается в тексте  $S(q_i, q_{i+1}, q_{i+2})$ .



выглядят векторы (3.13) в подпространстве  $(x, y, z)$ . Угол  $\omega_{i+1}$  остается инвариантным при преобразовании Лоренца, проводимом вдоль оси, параллельной оси  $z$ . Поэтому мы можем, напри-

Фиг. 70. Векторы (3.13) в подпространстве  $xyz$ .



мер, перейти в систему  $q_i = q_{i+1}$  или  $p_{i+1} = 0$ . Тем самым  $\omega_{i+1}$  определится в системе покоя частицы  $i+1$  соотношением

$$\begin{aligned} \cos \omega_{i+1} &= \frac{(q_{i+1} \times q_{i+2}) \cdot (q_i \times q_{i-1})}{|q_{i+1} \times q_{i+2}| |q_i \times q_{i-1}|} \Big|_{p_{i+1}=0} = \\ &= \frac{(-q_{i+1} \times p_{i+2}) \cdot (q_{i-1} \times p_i)}{|q_{i+2} \times p_{i+2}| |q_{i-1} \times p_i|} \Big|_{p_{i+1}=0}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

При  $i = 1$  и  $n = 3$  это совпадает с формулой (V.10.9). Таким образом, углы  $\omega_j$  являются толлеровыми углами подпроцесса  $2 \rightarrow 3$ , показанного на фиг. 68.

На концах дерева импульсов параметризация (3.13) невозможна, т. е. в (3.13)  $2 \leq i \leq n-2$ . В системе отсчета  $S(q_i)$  при  $i = n-1$  отсутствует вектор, фиксирующий плоскость  $E q_x$ , так что угол  $\omega_n$  на этой стадии не определен. В остальном формулы (3.13)–(3.17) применимы, если положить  $q_n = -p_b$ ,  $t_n = m_b^2$ . Далее, поскольку  $q_n = -p_b$  — времениподобный вектор, необходимо пользоваться системой отсчета  $R(q_n)$ :

$$\begin{aligned} q_n &= (-m_b, 0, 0, 0), \\ q_{n-1} &= \sqrt{-t_{n-1}} (\text{sh } \eta_n, \text{ch } \eta_n \sin \theta_n \cos \varphi_{n+1}, \\ &\quad \text{ch } \eta_n \sin \theta_n \sin \varphi_{n+1}, \text{ch } \eta_n \cos \theta_n), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где параметризация  $q_{n-1}$  дается соотношением (II.1.19). Она получается из стандартной записи  $q_{n-1} = (0, 0, 0, \sqrt{-t_{n-1}})$  преобразованием Лоренца  $L(\eta_n, \theta_n, \varphi_{n+1})$ , в явном виде представленным формулой (II.1.26). Тогда скалярное произведение  $q_n \cdot q_{n-1}$  оставляет только энергетическую составляющую 4-импульса  $q_{n-1}$ , и мы получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1} &= \sqrt{-t_{n-1}} \text{sh } \eta_n = \frac{m_n^2 - m_b^2 - t_{n-1}}{2m_b}, \\ Q_{n-1} &= \sqrt{-t_{n-1}} \text{ch } \eta_n = \frac{\lambda^{1/2}(m_n^2, m_b^2, t_{n-1})}{2m_b}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Углы  $\theta_n$  и  $\varphi_{n+1}$  пока не определены.

На другом конце цепи 4-импульс  $q_0 = p_a$  параметризуется в системе отсчета  $S(q_1)$  следующим образом:

$$q_0 = L(\eta_1, \zeta_1, \omega_2)(m_a, 0, 0, 0), \quad (3.20)$$

где  $L(\eta, \zeta, \omega)$  дается формулой (II.1.27). Вычисление  $q_0 \cdot q_1$  дает

$$\begin{aligned} z_0 &= m_a \text{sh } \eta_1 = \frac{m_1^2 - m_a^2 - t_1}{2\sqrt{-t_1}}, \\ Q_0 &= m_a \text{ch } \eta_1 = \frac{\lambda^{1/2}(m_1^2, m_a^2, t_1)}{2\sqrt{-t_1}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Из соотношений (3.13) легко вывести заново формулу (3.9). Примем сначала  $q_{n-1} = p_n - p_b$ ,  $q_{n-2} = p_{n-1} + q_{n-1}$  и т. д. в качестве новых переменных интегрирования по фазовому объему:

$$R_n(p_b, p_a) = \int \prod_{i=1}^n [d^4 q_{i-1} \delta\{(q_{i-1} - q_i)^2 - m_i^2\}] \delta^4(-q_0 + p_a), \quad (3.22)$$

где функция  $\delta^4$  выражает сохранение 4-импульса в новых переменных. Беря для  $d^4 q_{i-1}$  выражение (II.1.34), а для  $q_i$  и  $q_{i-1}$

выражение (3.13), можно при  $i \leq n-1$  написать

$$\begin{aligned} \int d^4 q_{i-1} \delta \{ (q_{i-1} - q_i)^2 - m_i^2 \} = \\ = \frac{1}{2} \int dt_{i-1} d\eta_i dg_{i-1} t_{i-1} \operatorname{sh}^2 \eta_{i-1} \times \\ \times \delta (t_{i-1} + t_i - m_i^2 + 2 \sqrt{t_i t_{i-1}} \operatorname{ch} \eta_i). \end{aligned} \quad (3.23)$$

При  $i = n$  записываем  $d^4 q_{n-1} = 1/2 dt_{n-1} d\eta_n d\Omega_{n-1} t_{n-1} \operatorname{sh}^2 \eta_n$ . Интегрирование по  $\eta_i$  немедленно приводит к формуле (3.9).

Теперь мы используем параметризацию (3.13), (3.18), (3.20), чтобы исследовать ограничение  $q_0 = p_a$ , налагаемое в интеграле (3.9)  $\delta$ -функцией  $\delta^4(p_a - q_0)$ . Поскольку  $p_a^2 > 0$ , стандартная форма 4-импульса  $q_0$  в системе отсчета  $R(q_0)$  есть  $q_0 = (\sqrt{t_0}, 0)$ . При переходах в системы отсчета  $S(q_1), \dots, S(q_{n-1}), R(q_n)$  4-импульс  $q_0$  получается последовательными преобразованиями Лоренца с помощью матриц  $L(\eta, \xi, \omega)$ . Проводя всю эту цепь преобразований, мы получаем в конце концов  $q_0$  в системе отсчета  $R(q_n)$ :

$$\begin{aligned} q_0 = L(\eta_n, \theta_n, \varphi_{n+1}) L(\eta_{n-1}, \xi_{n-1}, \omega_n) \times \dots \\ \dots \times L(\eta_1, \xi_1, \omega_2) (\sqrt{t_0}, 0, 0, 0). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ориентация системы отсчета  $R(q_n)$  пока не определена. Естественно выбрать ее так, чтобы  $R(q_n)$  стала системой покоя мишени, т. е. системой, в которой  $-q_n = p_b = (m_b, 0)$ , а

$$p_a = \left( \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_b}, 0, 0, \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{2m_b} \right) = m_a (\operatorname{ch} \eta_{ab}, 0, 0, \operatorname{sh} \eta_{ab}). \quad (3.25)$$

Из-за наличия ограничения  $\delta^4(q_0 - p_a)$  мы должны теперь приравнять четыре компоненты выражения (3.24) тем же компонентам в выражении (3.25).

Введем  $q_0 = (E_0, \mathbf{q}_0)$  и воспользуемся тождествами  $\delta(P_a - Q_0) = 2P_a \delta(t_0 - m_a^2)$ ,  $\delta(p_a - p_0) = P_a^{-2} \delta(P_a - Q_0) \delta(\Omega_a - \Omega_0)$  и  $E_a \delta(P_a - Q_0) = P_a \delta(E_a - E_0)$ , а также тем, что

$$\begin{aligned} \int dt_0 \delta^4(p_a - q_0) &= \int dt_0 \delta(E_a - E_0) \delta^3(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_0) = \\ &= \int dt_0 \delta(E_a - E_0) P_a^{-2} \delta(P_a - Q_0) \delta^2(\Omega_a - \Omega_0) = \\ &= \frac{2}{P_a} \delta(E_a - E_0) \delta^2(\Omega_a - \Omega_0). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы удовлетворить в равенстве (3.26) условию ориентации  $\Omega_0 = \Omega_a$  для векторов (3.24)



и (3.25). Вспомнив запись (II.1.26), (II.1.27) преобразований Лоренца, мы можем факторизовать самый левый множитель в выражении (3.24):

$$q_0 = R_z(\varphi_{n+1}) R_y(\theta_n) L_z(\eta_n) R_z(\omega_n) \tilde{q}_0, \quad (3.27)$$

где значение  $\tilde{q}_0$  определяется, как только будут фиксированы значения переменных с индексами  $i \leq n-1$ . Теперь ясно, что для произвольного  $q_0$  можно выбрать  $\omega_n$  так, чтобы вектор  $q_0$  оказался в плоскости  $xz$ ;  $L_z(\eta_n)$  не выводит  $q_0$  из этой плоскости, а  $\theta_n$  можно выбрать так, чтобы вектор  $q_0$  был параллелен оси  $z$ . Тогда  $\Omega_0 = \Omega_a$  всегда, независимо от того, какое выбрано  $\varphi_{n+1}$ . Следовательно, одна часть формулы (3.9) может быть упрощена и приведена к виду

$$\int d\Omega_{n-1} d\omega_n \delta^2(\Omega_a - \Omega_0) = \int d\varphi_{n+1}. \quad (3.28)$$

Подразумевается, что теперь  $\theta_n$  и  $\omega_n$  имеют вполне определенные, фиксированные значения, являющиеся сложными функциями параметров преобразований Лоренца в выражении (3.24). Их явный вид нам не нужен.

Единственная остающаяся в (3.26)  $\delta$ -функция

$$2P_a^{-1} \delta(E_a - E_0) = 4m_b P_a^{-1} \delta(s - m_a^2 - m_b^2 - 2m_b E_0) \quad (3.29)$$

фиксирует значение  $E_0$ , выражая его через квадрат полной энергии  $s$ ;  $E_0$  есть энергетическая составляющая 4-вектора (3.24), которую формально можно получить, проецируя (3.24) на вектор  $(1, 0, 0, 0)$ . Применив явные представления (II.1.26), (II.1.27) матрицы  $L$ , легко убедиться, что

$$\begin{aligned} (1, 0, 0, 0) L(\eta_n, \theta_n, \varphi_{n+1}) L(\eta_{n-1}, \xi_{n-1}, \omega_n) = \\ = (\text{ch } \eta_n \text{ ch } \eta_{n-1} \text{ ch } \xi_{n-1} + \text{sh } \eta_n \text{ sh } \eta_{n-1}, \\ \text{ch } \eta_n \text{ sh } \xi_{n-1}, 0, \text{ch } \eta_n \text{ sh } \eta_{n-1} \text{ ch } \xi_{n-1} + \text{sh } \eta_n \text{ ch } \eta_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Тем самым ограничение на энергию оказывается не зависящим ни от фиксированных значений  $\theta_n$  и  $\omega_n$ , ни от неопределенной величины  $\varphi_{n+1}$ . Подставив (3.30) в (3.29) и учтя (3.24), можно вычислить  $s$  как сложную функцию своих  $3n-4$  аргументов

$$s = s(t_1, \dots, t_{n-1}; \xi_1, \dots, \xi_{n-1}; \omega_2, \dots, \omega_{n-2}). \quad (3.31)$$

Ниже мы выпишем явно эту функцию при  $n=3$  и в пределе  $s \rightarrow \infty$ . Подставляя соотношения (3.26), (3.28) и (3.29) в (3.9),

приходим к окончательному результату

$$R_n(p_b, p_a) = \frac{8m_b^2}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \int d\varphi_{n+1} dt_1 \dots dt_{n-1} d\text{ch } \zeta_1 \dots d\text{ch } \zeta_{n-1} \times \\ \times d\omega_2 \dots d\omega_{n-2} \frac{\lambda^{1/2}(m_b^2, t_{n-1}, m_n^2)}{8m_b^2} \prod_{i=2}^{n-1} \frac{\lambda^{1/2}(t_i, t_{i-1}, m_i^2)}{-8t_i} \times \\ \times \frac{\lambda^{1/2}(t_1, m_a^2, m_1^2)}{-8t_1} \delta\{s - s(t_i, \zeta_i, \omega_i)\}. \quad (3.32)$$

Как следует из нашего вывода, быстроты и углы, меняются в пределах

$$0 \leq \zeta_i < \infty, \quad 0 \leq \omega_i < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi_{n+1} < 2\pi, \quad (3.33)$$

а пределы изменения  $t_1, \dots, t_{n-1}$  зависят от масс  $m_i$  и друг от друга. В формулах (3.21), (3.14) и (3.19) быстроты меняются в интервале  $-\infty < \eta_i < \infty, i = 1, \dots, n$ . Подстановка каких-то избранных значений  $n-1$  переменных  $\eta_i$  определяет как  $t_1, \dots, t_{n-1}$ , так и оставшуюся быстроту  $\eta_n$ . Таким способом можно определить область изменения совокупности квадратов передач  $t_1, \dots, t_{n-1}$ . Затем из этой  $(3n-3)$ -мерной области, определяемой границами изменения  $t_1, \dots, t_{n-1}$  и неравенствами (3.33), условие (3.31) вырезает  $(3n-4)$ -мерное подпространство конечного объема, которое является физической областью изменения толлеровых переменных.

При некоторых значениях масс  $m_a, m_b, m_1, \dots, m_n$  часть  $t_i$  положительна, и тогда соответствующие  $\zeta_i$  можно заменить угловыми переменными. Примером случая, когда все  $t_i$  могут быть только отрицательными, является диаграмма с крайними упругими вершинами, т. е. такая, что  $m_a = m_1, m_b = m_n$ . При этом  $t_i$  суть квадраты передач в процессе  $m_a + m_b \rightarrow (m_1 + \dots + m_i) + (m_{i+1} + \dots + m_n)$ , и, согласно доказанному в упражнении IV.30, они не могут быть положительными.

В формуле (3.32) инвариантные переменные интегрирования  $\zeta_i$  и  $\omega_i$  можно заменить соответствующими инвариантами. Для этого можно применить к фиг. 69 формулы раздела II.7, но можно и прямо взять из уравнения (3.15)

$$s_i = t_{i-1} + t_{i+1} - \frac{1}{2t_i} \{(m_{i+1}^2 - t_{i+1} - t_i)(m_i^2 - t_i - t_{i-1}) + \\ + \text{ch } \zeta_i \lambda^{1/2}(t_{i+1}, t_i, m_{i+1}^2) \lambda^{1/2}(t_i, t_{i-1}, m_i^2)\}. \quad (3.34)$$

То же выражение для  $s_i$  получается также, если приравнять нулю функцию  $G$ , отвечающую процессу  $t_{i-1} + t_{i+1} \rightarrow m_i^2 + m_{i+1}^2$ :

$$G(s, t_i, m_i^2, t_{i+1}, t_{i-1}, m_{i+1}^2) = 0, \quad (3.35)$$

воспользоваться решением этого уравнения (IV 5.31) и заменить в нем знаки  $\pm$  на  $\text{ch } \xi_i$ . Если  $\text{ch}$  в (3.34) заменить на  $\cos$ , то аргумент этого косинуса будет углом рассеяния в  $t$ -канале для процесса  $t_{i-1} + t_{i+1} \rightarrow m_i^2 + m_{i+1}^2$ . (Хорошо известно, что этот косинус линейно связан с квадратом импульса  $s_i$  в  $t$ -канале.) Но сейчас мы находимся в  $s$  канале; в этом канале косинус  $t$ -канального угла рассеяния больше 1 или меньше  $-1$ , и мы вынуждены для получения действительных величин заменить его на  $\text{ch}$ .

Применяя в интеграле (3.32) соотношения (3.16) и (3.14), преобразуем его к виду

$$R_n(p_b, p_a) = \frac{1}{4} \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \int d\varphi_{n+1} dt_{n-1} \dots dt_1 ds_{n-1} \dots \\ \dots ds_1 d\omega_{n-1} \dots d\omega_2 \prod_{j=2}^{n-1} \left\{ \frac{1}{4} \lambda^{-1/2}(t_j, t_{j-1}, m_j^2) \right\} \delta\{s - s(t_i, s_i, \omega_j)\}. \quad (3.36)$$

Чтобы лучше уяснить себе этот результат, рассмотрим подробнее два случая: а)  $n = 3$  и б)  $s \rightarrow \infty$ .

### а. Случай $n = 3$

Желая найти ограничение на энергию, мы сначала вычислим ее из уравнений (3.24) и (3.30):

$$\frac{E_0}{m_a} = \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_a m_b} = \text{ch } \eta_3 \text{ch } \eta_2 \text{ch } \eta_1 \text{ch } \xi_2 \text{ch } \xi_1 + \\ + \text{sh } \eta_2 (\text{ch } \eta_3 \text{sh } \eta_1 \text{ch } \xi_2 + \text{sh } \eta_3 \text{ch } \eta_1 \text{ch } \xi_1) + \text{sh } \eta_3 \text{ch } \eta_2 \text{sh } \eta_1 + \\ + \cos \omega_2 (\text{ch } \eta_3 \text{ch } \eta_1 \text{sh } \xi_2 \text{sh } \xi_1). \quad (3.37)$$

Здесь в соответствии с (3.19), (3.14) и (3.21)

$$\text{ch } \eta_3 = \frac{\lambda^{1/2}(t_2, m_3^2, m_b^2)}{2m_b \sqrt{-t_2}}, \quad \text{sh } \eta_3 = \frac{m_3^2 - m_b^2 - t_2}{2m_b \sqrt{-t_2}}, \\ \text{ch } \eta_2 = \frac{m_2^2 - t_1 - t_2}{2\sqrt{t_1 t_2}}, \quad \text{sh } \eta_2 = \frac{\lambda^{1/2}(t_2, t_1, m_2^2)}{2\sqrt{t_1 t_2}}, \\ \text{ch } \eta_1 = \frac{\lambda^{1/2}(t_1, m_1^2, m_a^2)}{2m_a \sqrt{-t_1}}, \quad \text{sh } \eta_1 = \frac{m_1^2 - m_a^2 - t_1}{2m_a \sqrt{-t_1}}. \quad (3.38)$$

Далее,  $\xi_2$  и  $\xi_1$  связаны с  $s_2$  и  $s_1$  соотношениями

$$\text{ch } \xi_2 = \frac{-2t_2(s_2 - t_1 - m_b^2) - (m_3^2 - m_b^2 - t_2)(m_2^2 - t_2 - t_1)}{\lambda^{1/2}(t_2, m_3^2, m_b^2) \lambda^{1/2}(t_1, t_2, m_2^2)}, \quad (3.39)$$

$$\text{ch } \xi_1 = \frac{-2t_1(s_1 - t_2 - m_a^2) - (m_1^2 - m_a^2 - t_1)(m_2^2 - t_2 - t_1)}{\lambda^{1/2}(t_1, m_a^2, m_1^2) \lambda^{1/2}(t_1, t_2, m_2^2)}. \quad (3.40)$$

Как было отмечено в связи с уравнением (3.35),  $\text{ch } \zeta_2$  и  $\text{ch } \zeta_1$  — косинусы углов рассеяния в  $t$ -канале для двух процессов  $2 \rightarrow 2$ ; эти углы аналогичны углу  $\omega$  на фиг. 55. Поэтому  $\text{sh } \zeta_2$  и  $\text{sh } \zeta_1$  могут быть выражены через функции  $G$  для процессов, показанных на фиг. 55 [это те же функции  $G$ , что и в (V.10.10)]. Замена  $\zeta_2, \zeta_1$  в выражении (3.37) на  $s_2, s_1$  приводит к искомому выражению для  $s = s(s_1, s_2, t_1, t_2, \cos \omega)$ , которое было приведено выше в (V.10.10).

Приведем две соответствующие записи интеграла  $R_3$ , полученные из (3.32) и (3.36):

$$R_3 = \frac{\pi}{32} \lambda^{-1/2} (s, m_a^2, m_b^2) \int dt_2 dt_1 d\text{ch } \zeta_2 d\text{ch } \zeta_1 d\omega_2 \lambda^{1/2} (m_b^2, t_2, m_3^2) \times \\ \times \lambda^{1/2} (t_2, t_1, m_2^2) \lambda^{1/2} (t_1, m_a^2, m_1^2) (t_1 t_2)^{-1} \delta \{s - s(t_2, t_1, \zeta_2, \zeta_1, \omega_2)\}, \quad (3.41)$$

$$R_3 = \frac{\pi}{8} \lambda^{-1/2} (s, m_a^2, m_b^2) \int dt_2 dt_1 ds_2 ds_1 d\omega_2 \lambda^{-1/2} (t_2, t_1, m_2^2) \times \\ \times \delta \{s - s(t_2, t_1, s_2, s_1, \omega)\}. \quad (3.42)$$

Интегрирование по  $\Phi_{n+1}$  здесь уже проведено. Мы видим, что выражение (3.42) совпадает с (V.10.13). Поэтому можно воспользоваться соотношением (V.10.11), чтобы заменить  $d\omega_2$  на  $ds$ . После этого тривиальное интегрирование по  $s$  приводит опять к интегралу (V.9.2).

### б. Поведение $R_n(s)$ в мультиреджевском пределе

Обобщая условия для реджевского предела (V.11.19), мы определим *мультиреджевский предел* как кинематическую конфигурацию, удовлетворяющую условиям

$$s \rightarrow \infty, \\ s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \gg |t_1|, \dots, |t_{n-1}|, m_i^2, \quad (3.43) \\ \frac{s_1 \dots s_{n-1}}{s} \text{ конечно.}$$

Последнее условие необходимо для того, чтобы совместить предположение о том, что  $s_i$  достаточно велики, с предположением о малости  $|t_i|$  (упражнение VI.5). Важно понимать, что условия (3.43) выделяют лишь очень малую часть фазового пространства. Например, требование *мультипериферичности* выполнено в значительно большем фазовом объеме, так как сводится лишь к малости  $|t_i|$ . Подходящая для мультипериферической модели форма  $R_n$  уже приводилась выше в (2.27). Теперь мы сделаем добавочные допущения; это упростит результат за счет уменьшения его общности [8, 32, 44].

Анализируя случай  $n = 3$ , мы обнаружили, что в пределе (3.43) выражение для энергии (3.37) или (V.10.10) принимает существенно более простую форму (V.11.26). Такое же упрощение, как мы увидим, происходит и при произвольных  $n$ , и по той же причине — из-за того, что все  $s_i$  велики. Это означает, что и  $\xi_i$  велики, так что теперь можно считать  $\text{ch } \xi_i \approx \text{sh } \xi_i \gg 1$ , и преобразования  $L_i$  в (3.24) упрощаются. Мы убеждаемся, что, начиная с  $L_1 \equiv L(\eta_1, \xi_1, \omega_2)$ ,

$$L_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \text{ch } \xi_1 \text{ch } \eta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \omega_2 \\ \sin \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

$$L_2 L_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{ch } \xi_2 (\text{ch } \eta_2 + \cos \omega_2) \text{ch } \xi_1 \text{ch } \eta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \omega_3 \\ \sin \omega_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и т. д. В самом конце этой последовательности стоит соотношение (3.30), которое принимает вид

$$(1, 0, 0, 0) L_n L_{n-1} = \text{ch } \xi_{n-1} \text{ch } \eta_n (\text{ch } \eta_{n-1}, 1, 0, \text{sh } \eta_{n-1}). \quad (3.45)$$

Собрав вместе все члены, мы получаем

$$\frac{E_0}{m_a} \approx \frac{s}{2m_a m_b} \approx \prod_{i=1}^{n-1} (\text{ch } \xi_i) \text{ch } \eta_n \prod_{j=2}^{n-1} (\text{ch } \eta_j + \cos \omega_j) \text{ch } \eta_1. \quad (3.46)$$

Подставив сюда явный вид  $\eta_i$  из (3.14), (3.19) и (3.21), находим

$$s \approx \lambda^{1/2}(t_1, m_a^2, m_1^2) \lambda^{1/2}(t_{n-1}, m_b^2, m_n^2) \prod_{i=1}^{n-1} \{(-2t_i)^{-1} \text{ch } \xi_i\} \times \\ \times \prod_{j=1}^{n-1} (m_j^2 - t_j - t_{j-1} + 2\sqrt{t_j t_{j-1}} \cos \omega_j). \quad (3.47)$$

Наконец, в приближении (3.43) из уравнения (3.34) имеем

$$\text{ch } \xi_i \approx \frac{-2t_i s_i}{\lambda^{1/2}(t_{i+1}, t_i, m_{i+1}^2) \lambda^{1/2}(t_i, t_{i-1}, m_i^2)}, \quad (3.48)$$

так что (3.47) принимает вид

$$s \approx \left( \prod_{i=1}^{n-1} s_i \right) \prod_{j=2}^{n-1} \{ \lambda^{-1}(t_j, t_{j-1}, m_j^2) (m_j^2 - t_j - t_{j-1} + 2\sqrt{t_j t_{j-1}} \cos \omega_j) \}. \quad (3.49)$$

Это выражение представляет собой обобщение выражения (V.11.26), выведенного для  $n = 3$ , на случай произвольного  $n$ . Заметим кстати, что с его помощью можно обобщить на случай произвольного  $n$  неравенство (V.11.23) (упражнение VI.5).

Выражения для  $R_n$  в мультиреджевском пределе получаются либо подстановкой (3.47) в (3.32), либо подстановкой (3.49) в (3.36). При этом дальнейших упрощений не происходит, но переменные интегрирования  $\text{ch } \zeta_i$  или  $s_i$  удобно заменить на  $\zeta_i$  или  $\ln s_i$ . Используя соотношение  $\delta(x - a) = \delta[\ln(x/a)]/x$ , после некоторых выкладок получаем в мультиреджевском пределе [7]

$$R_n = \frac{1}{4s} \int dt_{n-1} \dots dt_1 d\omega_{n-1} \dots d\omega_2 d\zeta_{n-1} \dots d\zeta_1 \times \\ \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda^{1/2}(t_j, t_{j-1}, m_j^2)}{4(m_j^2 - t_j - t_{j-1} + 2\sqrt{t_j t_{j-1}} \cos \omega_j)} \delta \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \zeta_i - \zeta^+(s, t_i, \omega_i) \right\}. \quad (3.50)$$

Здесь  $\zeta^+$  определяется равенством

$$e^{\zeta^+} = \frac{s \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (-4t_i)}{\lambda^{1/2}(t_1, m_a^2, m_1^2) \lambda^{1/2}(m_b^2, t_{n-1}, m_n^2) \prod_{j=2}^{n-1} (m_j^2 - t_j - t_{j-1} + 2\sqrt{t_j t_{j-1}} \cos \omega_j)}. \quad (3.51)$$

Если в качестве переменных интегрирования выбрать не  $\zeta_i$ , а  $\ln s_i$ , то в (3.50) надо всюду заменить  $d\zeta_i$  на  $d \ln s_i$  и под знаком  $\delta$ -функции вычесть из суммы логарифмов логарифм правой части (3.49). В выражении (3.50) ограничение на энергию выражено в изящной форме — сумма быстрот должна быть равна быстрой  $\zeta^+$ , но, к сожалению, последняя есть сложная функция  $t_i$  и  $\omega_j$  и интегрирование по  $t_i$ ,  $\omega_j$  в явном виде провести невозможно. Формально проще провести интегрирование по  $\zeta_i$ , поскольку пределы интегрирования зависят от  $t_i$  и  $\omega_j$ , а в асимптотическом пределе  $s \rightarrow \infty$  упрощаются. В мультиреджевском пределе все  $t_i$  малы; фактически они лежат между некоторой отрицательной константой и нулем. Распространив наш прежний анализ пределов изменения  $\omega_2$  в реакции  $2 \rightarrow 3$  на случай реакций  $2 \rightarrow n$ , легко убедиться, что в пределе  $s \rightarrow \infty$   $\omega_j$  меняются от 0 до  $2\pi$ . Пределы интегрирования по  $\zeta_i$  теперь определяются только  $\delta$ -функцией. Пусть, например, квадрат матричного элемента равен

$$T = f(t_j) \prod_{i=1}^{n-1} s_i^{2\alpha} = g(t_j) \prod_{i=1}^{n-1} e^{2\alpha \zeta_i}, \quad (3.52)$$

где  $f(t_j)$  и  $g(t_j)$  — произвольные функции  $t_j$ , связь между которыми следует из соотношения (3.48). Тогда интегрирование по  $d\xi_i$  проводится до конца:

$$\int d\xi_{n-1} \dots d\xi_1 \prod_{i=1}^n e^{2\alpha t_i \delta \left( \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i - \xi^+ \right)} = \frac{(\xi^+)^{n-2}}{(n-2)!} e^{2\alpha t_n^+}. \quad (3.53)$$

Остающийся интеграл по  $t_i$  и  $\omega_j$  не зависит от энергии.

#### 4. Распределения по фазовому объему

В этом разделе мы приведем примеры распределения различных кинематических величин по фазовому объему<sup>1)</sup>. Известно, что предположение  $T \equiv 1$  совершенно не выполняется в высокоэнергетических реакциях: большие поперечные импульсы на опыте не наблюдаются (раздел 5). Поэтому распределения по фазовому объему имеют смысл лишь тогда, когда полная энергия не слишком велика, например при условии, что импульс любой вторичной частицы в СЦМ в среднем значительно ниже 1 ГэВ/с

##### а. Распределения инвариантных масс

Рассмотрим инвариантную массу  $M_l$ ,  $M_l^2 = (p_1 + \dots + p_l)^2$  группы частиц с импульсами  $p_1, \dots, p_l$  (фиг. 64). Ясно, что общность рассуждений не уменьшается от того, что мы присваиваем интересующим нас импульсам индексы от 1 до  $l$ . Распределение по фазовому объему  $w(M_l)$  получится немедленно из формулы расщепления (2.21), согласно которой [83\*, 164]

$$\begin{aligned} w(M_l) &= R_n^{-1} \frac{dR_n}{dM_l} = \\ &= 2M_l \frac{R_l(M_l^2; m_1^2, \dots, m_l^2) R_{n-l+1}(s; M_l^2, m_{l+1}^2, \dots, m_n^2)}{R_n(s, m_1^2, \dots, m_n^2)}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

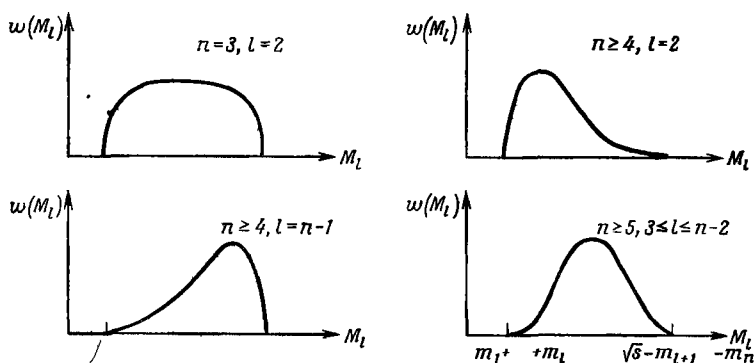
Здесь  $R_n^{-1}$  нормирует распределение на единицу. В частном случае  $n=3$ ,  $l=2$  эта формула уже нам встречалась [формула (V.2.16)].

Чтобы проанализировать форму кривой распределения (4.1), заметим, что  $w$  отлично от нуля лишь в интервале

$$\begin{aligned} m_1 + \dots + m_l &= M_{l, \min} \leq M_l \leq M_{l, \max}^* = \\ &= \sqrt{s} - (m_{l+1} + \dots + m_n). \end{aligned} \quad (4.2)$$

<sup>1)</sup> Имеется в виду распределение в фазовом пространстве, рассчитанное в предположении, что квадрат матричного элемента  $T \equiv 1$ . — Прим. ред.

Нижнему пределу отвечает порог  $R_l$ , т. е. ситуация, когда все частицы  $p_1, \dots, p_l$  покоятся в своей СЦМ, а в любой другой системе движутся с одинаковыми скоростями. Верхнему пределу отвечает порог  $R_{n-l+1}$ , т. е. случай, когда частицы  $p_{l+1}, \dots, p_n$  вместе с центром масс системы  $R_l$  покоятся во всеобщей СЦМ.



Фиг. 71. Качественно различные типы распределений  $w(M_l)$  инвариантных масс групп из  $l$  частиц (взятых из  $n$  конечных частиц) по фазовому объему.

конечного состояния  $p_1, \dots, p_n$ . На концах кривой при  $M_l \rightarrow M_{l, \text{мин}}$  или при  $M_l \rightarrow M_{l, \text{макс}}^n$  распределение (4.1) стремится к нулю по закону (2.19), т. е.

$$M_l \approx M_{l, \text{мин}}: w(M_l) = \text{const} \times (M_l - M_{l, \text{мин}})^{1/2 l - 1/2}, \quad (4.3)$$

$$M_l \approx M_{l, \text{макс}}^n: w(M_l) = \text{const} \times (M_{l, \text{макс}}^n - M_l)^{1/2 (n-l) - 1}. \quad (4.4)$$

Форма кривой  $w(M_l)$  в основном определяется поведением на концах. Мы видим из (4.3), (4.4), что касательная к кривой вертикальна на левом конце при  $l=2$  и на правом при  $l=n-1$ ; при других  $l$  касательная горизонтальна. На фиг. 71 показаны различные варианты распределений. Поведение кривой на ее концах влияет на ее форму столь сильно, что можно даже аппроксимировать  $w(M_l)$  в виде произведения двух предельных случаев (4.3) и (4.4) [83]. Если нормировать это произведение на единицу и ввести безразмерную переменную

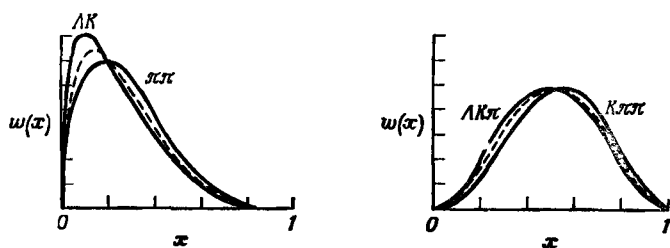
$$x = \frac{M_l - m_1 - \dots - m_l}{\sqrt{s} - m_1 - \dots - m_n}, \quad (4.5)$$

то получим приближенное распределение

$$w_{n,l}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}l - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}l\right)} x^{1/2 l - 1/2} (1-x)^{1/2 (n-l) - 1}. \quad (4.6)$$



Форма распределения (4.6) не зависит от масс  $m_i$ , а также от энергии взаимодействия  $\sqrt{s}$ . Легко видеть, что максимум распределения  $w_{n,l}(x)$  приходится на  $x = (3l - 5)/(3n - 7)$ . На



Фиг. 72. Распределение инвариантных масс пар АК,  $\pi\pi$  и троек АК $\pi$ , К $\pi\pi$  из реакции  $\pi^-p \rightarrow AK3\pi$  при 7 ГэВ/с в сравнении с его аппроксимацией (4.6) (штриховая линия).

фиг. 72 проведено сравнение  $w_{5,2}(x)$  и  $w_{5,3}(x)$  с точной формой  $w(M_i)$  для некоторых комбинаций масс.

### б. Распределения двух инвариантных масс

Эти распределения легко получить из формул раздела 2. Форма его различна для разных деревьев импульсов и разного выбора частиц в них; мы не будем пытаться дать какую-то общую классификацию, а вместо этого на нескольких примерах проследим, как поступают в тех или иных случаях.

Пусть нам нужно разбить конечное состояние  $p \rightarrow p_1 + \dots + p_n$  на две группы с квадратами эффективных масс  $M_l^2 = (p_1 + \dots + p_l)^2$  и  $M_{n-l}^2 = (p_{l+1} + \dots + p_n)^2$ . Мы чертим соответствующее дерево импульсов (фиг. 73, а) и выписываем связанную с ним форму  $R_n(s)$  в виде

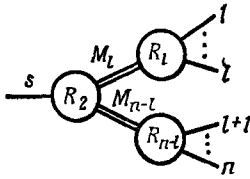
$$R_n(s) = \int dM_l^2 dM_{n-l}^2 R_2(s; M_l^2, M_{n-l}^2) \times \\ \times R_l(M_l^2; m_1^2, \dots, m_l^2) R_{n-l}(M_{n-l}^2; m_{l+1}^2, \dots, m_n^2). \quad (4.7)$$

По порогам фазовых объемов  $R$  в (4.7) определим область интегрирования, или физическую область  $M_l M_{n-l}$ ; она представляет собой равнобедренный треугольник (фиг. 74)

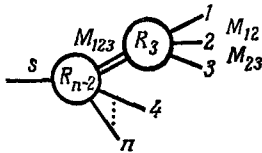
$$\begin{aligned} M_l &\geq m_1 + \dots + m_l, \\ M_{n-l} &\geq m_{l+1} + \dots + m_n, \\ M_l + M_{n-l} &\leq \sqrt{s}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Эта область называется *диаграммой Гольдхабера* [49, 164\*]. Распределение по фазовому объему на диаграмме дается подын-

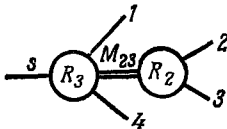
тегральным выражением в (4.7), умноженным на  $4M_l M_{n-l}$  и деленным для нормировки на  $R_n(s)$ . В частности, при  $n=4$



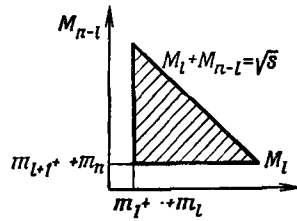
а



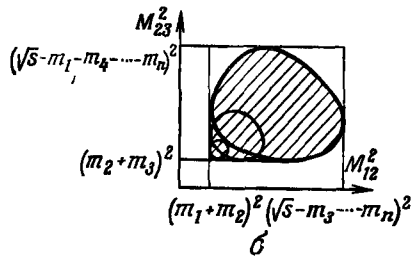
б



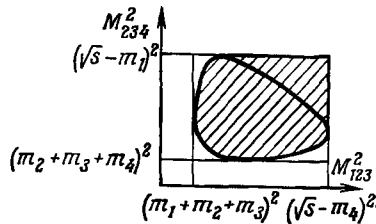
Фиг. 73. Схемы последовательных распадов (деревья импульсов).



а



б



в

Фиг. 74. Физические области в инвариантных переменных.

а -  $M_l = [(p_1 + \dots + p_l)^2]^{1/2}$ ,  $M_{n-l} = [(p_{l+1} + \dots + p_n)^2]^{1/2}$ ; б -  $M_{12}^2$ ,  $M_{23}^2$ ; в -  $M_{123}^2$ ,  $M_{234}^2$ . В случаях а и б в конечном состоянии  $n$  частиц, в случае в - четыре частицы.

и  $l=2$ , обозначая  $M_l = M_{12}$ ,  $M_{n-l} = M_{34}$  и используя явный вид  $R_2$  (IV. 1.7), (IV. 1.8), получаем

$$\frac{d^2 R_4}{dM_{12} dM_{34}} = \frac{\pi^3}{2s M_{12} M_{34}} \lambda^{1/2}(s, M_{12}^2, M_{34}^2) \lambda^{1/2}(M_{12}^2, m_1^2, m_2^2) \lambda^{1/2}(M_{34}^2, m_3^2, m_4^2) = \quad (4.9)$$

$$= \frac{4\pi^3}{\sqrt{s}} P_{12}^* P_1^{\text{U}12} P_3^{\text{U}34}, \quad (4.10)$$

где  $P_{12}$ ,  $P_1^{112}$  и  $P_3^{134}$  — импульсы распадных частиц в системах покоя трех распадов, изображенных на фиг. 73, а.

Если интересующие нас инвариантные массы не пересекаются (как  $M_{12}$ ,  $M_{34}$ ) или, наоборот, множества их индексов полностью перекрываются [например,  $M_{123}^2 = (p_1 + p_2 + p_3)^2$ ,  $M_{12} = (p_1 + p_2)^2$ ], то всегда можно нарисовать дерево импульсов, в котором в промежуточных состояниях стоят именно эти массы. В этом случае нетрудно выписать связанный с таким деревом импульсов явный вид  $R_n$ ; он одновременно определяет и распределение по фазовому объему, и физическую область. В других случаях надо действовать несколько более сложным образом; мы проиллюстрируем это на следующих примерах.

Пусть мы хотим найти распределение в плоскости  $M_{12}M_{23}$  ( $M_{ij}^2 = (p_i + p_j)^2$ ) для  $n$ -частичного конечного состояния. Тогда следует начать с дерева импульсов, изображенного на фиг. 73, б. Это приводит к следующей форме  $R_n$ :

$$R_n(s) = \int dM_{123}^2 R_{n-2}(s; M_{123}^2, m_4^2, \dots, m_n^2) R_3(M_{123}^2; m_1^2, m_2^2, m_3^2). \quad (4.11)$$

Тогда представление (V.2.10) позволяет выразить  $R_3$  через интеграл по  $M_{12}$ ,  $M_{23}$ :

$$R_n(s) = \frac{\pi^2}{4} \int dM_{12}^2 dM_{23}^2 \int dM_{123}^2 M_{123}^{-2} R_{n-2}(s; M_{123}^2, m_4^2, \dots, m_n^2) \times \\ \times \Theta\{-G(M_{12}^2, M_{23}^2, M_{123}^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2)\}. \quad (4.12)$$

Таким образом, физическая область в плоскости  $M_{12}^2$ ,  $M_{23}^2$  получается наложением фигур Далица для всех тех значений  $M_{123}$ , которые удовлетворяют неравенствам

$$m_1 + m_2 + m_3 \leq M_{123} \leq \sqrt{s} - m_4 - \dots - m_n. \quad (4.13)$$

Если воспользоваться результатами раздела V.2, то оказывается, что физическая область имеет вид, показанный на фиг. 74, б. Плотность распределения  $M_{12}^2$ ,  $M_{23}^2$ , нормированная на  $R_n(s)$ , дается интегралом по  $M_{123}^2$ , в котором область интегрирования определяется условием  $G \leq 0$ .

В качестве второго примера рассмотрим инварианты  $M_{123}$  и  $M_{234}$  четырехчастичного конечного состояния. Отправляясь от дерева импульсов на фиг. 73, в, мы напомним

$$R_4(s) = \int dM_{23}^2 R_3(s; m_1^2, M_{23}^2, m_4^2) R_2(M_{23}^2; m_2^2, m_3^2) \quad (4.14)$$

и подставим сюда представление  $R_3$  через  $M_{123}^2$  и  $M_{234}^2$  (V. 2.10):

$$R_4(s) = \frac{\pi^2}{4s} \int dM_{123}^2 dM_{234}^2 \int dM_{23}^2 R_2(M_{23}^2; m_2^2, m_3^2) \times \\ \times \Theta\{-G(M_{123}^2, M_{234}^2, s, M_{23}^2, m_1^2, m_4^2)\}. \quad (4.15)$$

Теперь физическая область в плоскости  $M_{123}^2, M_{234}^2$  (фиг. 74, в) получается наложением диаграмм Далица для всех допустимых значений масс  $M_{23}$ , т. е. для

$$m_2 + m_3 \leq M_{23} \leq \sqrt{s} - m_1 - m_4. \quad (4.16)$$

Плотность распределения  $M_{123}^2, M_{234}^2$ , нормированная на  $R_4(s)$ , дается интегралом по  $M_{23}^2$  в (4.15) <sup>1)</sup>.

### в. Распределение на диаграмме Чу—Лоу

Теперь мы обобщим на случай реакции  $2 \rightarrow n$  результаты, касающиеся распределений на диаграмме Чу—Лоу для реакций  $2 \rightarrow 3$ . Рассмотрим квадрат передачи 4-импульса  $t = (p_a - p_1)^2$  для процесса  $a + b \rightarrow 1 + \dots + n$ . Группируя частицы 2, ...,  $n$  в систему массы  $\sqrt{\hat{s}}$ ,  $\hat{s} = (p_a + p_b - p_1)^2 = (p_2 + \dots + p_n)^2$ , получаем из формулы (2.10)

$$R_n(s) = \int d\hat{s} R_2(s; \hat{s}, m_1^2) R_{n-1}(\hat{s}; m_2^2, \dots, m_n^2). \quad (4.17)$$

Выразим теперь  $R_2$  в виде интеграла по  $t$ , как это делалось в (IV. 4.24). Мы получим распределение  $\hat{s}, t$  по фазовому объему на диаграмме Чу—Лоу

$$\frac{d^2 R_n(s)}{dt d\hat{s}} = \frac{1}{2} \pi \lambda^{-1/2}(s, m_a^2, m_b^2) R_{n-1}(\hat{s}; m_2^2, \dots, m_n^2) \Theta(-G). \quad (4.18)$$

Это выражение можно сопоставить с плотностью (V. 5.17) для  $n = 3$ . Граница диаграммы Чу—Лоу получается из условия

$$G = G(s, t, \hat{s}, m_a^2, m_b^2, m_1^2) \leq 0, \quad (4.19)$$

которое надо сравнить с (V. 5.9). Распределение (4.18) не зависит от  $t$ . Плотность на диаграмме растет с ростом  $\hat{s}$ , и скорость этого роста тем выше, чем больше  $n$ . Дальнейшее интегрирование по  $\hat{s}$  дает распределение значений  $t$ :

$$\frac{dR_n(s)}{dt} = \frac{1}{2} \pi \lambda^{-1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \int_{\hat{s}_{\min}}^{\hat{s}_{\max}} d\hat{s} R_{n-2}(\hat{s}) \times \\ \times \Theta\{-G(s, t, \hat{s}, m_a^2, m_b^2, m_1^2)\}, \quad (4.20)$$

<sup>1)</sup> Ряд более общих методов расчета распределений по двум инвариантным массам развит в работах [75, 84, 147]. — Прим. ред.

где

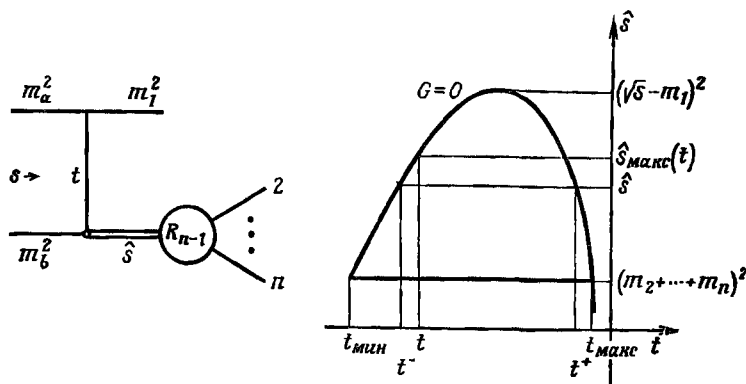
$$\hat{s}_{\text{макс}} = \hat{s}^+(t), \quad (4.21)$$

$$\hat{s}_{\text{мин}} = \max \{ \hat{s}^-(t), (m_2 + \dots + m_n)^2 \}, \quad (4.22)$$

и  $s^\pm$  дается выражением (V.5.11)

$$\hat{s}^\pm(t) = s + m_1^2 - (2m_a^2)^{-1} \{ (s + m_a^2 - m_b^2)(m_a^2 + m_1^2 - t) \mp \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \lambda^{1/2}(t_1, m_a^2, m_1^2) \}. \quad (4.23)$$

Формула (4.20) является обобщением формулы (V.5.18). Нижний предел  $\hat{s}$  зависит от того, достигается ли реально максимальное значение  $t = (m_a - m_1)^2$  (оно отвечает условию  $v_a = v_1$



Фиг. 75. Физическая область изменения  $\hat{s}$  и  $t$ , где  $t = (p_a - p)^2$ ,  $\hat{s} = (p_2 + \dots + p_n)^2$ , в процессе  $a + b \rightarrow 1 + \dots + n$ .

в любой системе отсчета). Этот вопрос уже был исчерпывающим образом разъяснен на примере реакций  $2 \rightarrow 3$  в разделе V.5; чтобы воспользоваться полученными там результатами, достаточно заменить  $s_2$  на  $\hat{s}$  и  $m_2 + m_3$  на  $m_2 + \dots + m_n$ . Фиг. 75 соответствует случаю, когда значение  $t = (m_a - m_1)^2$  еще не достигнуто из-за того, что соответствующее значение  $\hat{s}$  лежит ниже порога  $(m_2 + \dots + m_n)^2$ .

Диаграмма Чу — Лоу полезна при анализе динамики квазидвухчастичных реакций. Если при каком-то определенном значении  $\hat{s}$  имеется узкий резонанс, то с диаграммы  $\hat{s}t$  считывают зависимость механизма рождения этого резонанса от  $t$ . Часто при этом отсчитывают  $t$  не от  $t = 0$ , а от границы диаграммы, т. е. пользуются переменной  $t' = t - t^+$ , где  $t^+$  зависит от  $\hat{s}$  и дается выражением (V.5.10), в котором  $s_2$  заменено на  $\hat{s}$ .

В качестве приложения уравнения (4.18) упомянем  $F(t)$ -метод [15]. Если предположить, что квадрат матричного элемента

реакции  $a + b \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$  зависит только от  $t$ , например по закону  $F(t)$ , то распределение  $t$  с точностью до постоянного множителя есть  $w(t) = F(t) dR_n(s)/dt$ . Функцию  $F(t)$  мы можем, следовательно, определить, строя график

$$F(t) = \frac{w(t)}{dR_n/dt}, \quad (4.24)$$

где  $w(t)$  — экспериментально наблюдаемое распределение по  $t$ . Последнее стремится к нулю при  $t \rightarrow t_{\text{макс}}$ , но это — чисто кинематическое явление, так как к нулю стремится  $dR_n/dt$ . Чтобы выделить на фоне этого стремления к нулю динамический механизм, мы делим в (4.24) на фазовый объем. Если квадрат  $T$  матричного элемента зависит еще и от других переменных, то  $F(t)$  есть результат усреднения  $T$  по этим переменным.

Мы еще вернемся к диаграмме Чу — Лоу, когда перейдем к инклюзивным реакциям (раздел VII.3); в частности, мы определим связь  $\hat{s}$  и  $t$  с составляющими импульса  $p_1$ .

### г. Одночастичные распределения

В конечном состоянии  $p_1, \dots, p_n$  выберем одну из частиц  $p_1$ . Распределение ее импульса по фазовому объему дается выражением

$$\frac{d^3 R_n}{d^3 p_1} = \frac{1}{2E_1} R_{n-1} \{(p - p_1)^2; m_2^2, \dots, m_n^2\}, \quad (4.25)$$

где  $(p - p_1)^2 = \hat{s} = (p_2 + \dots + p_n)^2$ . Эта формула верна в любой системе отсчета. Используя стандартные приемы замены переменных, можно так преобразовать выражение (4.25), чтобы оно давало распределение для любых независимых переменных, определяющих вектор  $p_1$ . Можно, например, ввести  $t$  и  $\hat{s}$  и проинтегрировать по всем поворотам вокруг оси пучка; тогда мы вернемся к уравнению (4.18). Такие формулы для одночастичных распределений в эксклюзивных реакциях практически весьма важны, но, так как они имеют тот же вид, что и в инклюзивных реакциях, мы рассмотрим их подробнее только в гл. VII.

### д. Двухчастичные распределения

Выберем теперь в конечном состоянии  $p_1, p_2, \dots, p_n$  две частицы  $p_1, p_2$ . По аналогии с (4.25) напомним

$$\frac{d^6 R_n}{d^3 p_1 d^3 p_2} = \frac{1}{4E_1 E_2} R_{n-2} \{(p - p_1 - p_2)^2; m_3^2, \dots, m_n^2\}, \quad (4.26)$$

где

$$(p - p_1 - p_2)^2 = M_{3 \dots n}^2 = (p_3 + \dots + p_n)^2. \quad (4.27)$$

Можно и здесь ввести другие переменные, задающие шесть составляющих векторов  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ . Распределение (4.26) является шестимерным; чтобы получить интересующее нас одно- или двумерное распределение, необходимо проделывать несколько сложных интегрирований. В качестве примера приведем результат [113, 156\*] (упражнение VI.9) для распределения в СЦМ косинуса угла  $\theta_{12}$  между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ . Он имеет вид

$$\frac{dR_n(s)}{d \cos \theta_{12}} = \pi^2 \int dM_3^2 \dots dP_1 \frac{P_1^2 P_2^2 R_{n-2}(M_3^2 \dots n; m_3^2, \dots, m_n^2)}{E_1 \{(\sqrt{s} - E_1) P_2 + P_1 E_2 \cos \theta_{12}\}}, \quad (4.28)$$

где  $P_2 = P_2(\cos \theta_{12})$  — решение уравнения

$$\begin{aligned} \sqrt{s} = & (P_1^2 + m_1^2)^{1/2} + (P_2^2 + m_2^2)^{1/2} + \\ & + (P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 P_2 \cos \theta_{12} + M_3^2 \dots n)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Очень важная особенность формулы (4.26) состоит в том, что она предсказывает существование *корреляций* между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  чисто кинематического происхождения. Распределение (4.26) не равно произведению двух одночастичных распределений. Эти корреляции подробнее анализируются в разделе VII.7.

## 5. Поперечно-усеченное фазовое пространство

3-импульс  $\mathbf{p}_i$  можно разложить на составляющую  $q_i$ , параллельную падающему пучку, — *продольную составляющую* — и на составляющую  $\mathbf{r}_i$ , перпендикулярную падающему пучку, — *поперечный импульс*:

$$\mathbf{p}_i = (E_i, q_i, \mathbf{r}_i), \quad (5.1)$$

$$E_i^2 = q_i^2 + m_i'^2, \quad (5.2)$$

$$m_i'^2 = \mathbf{r}_i^2 + m_i^2. \quad (5.3)$$

Здесь  $\mathbf{r}_i$  — двумерный вектор в плоскости, перпендикулярной пучку; он инвариантен относительно всех *продольных (параллельных пучку) преобразований Лоренца*. В уравнении (5.3), как и в последующих, штрихом помечены те величины, которые получаются при отделении продольно инвариантной части ( $m_i'$ ) от лоренц-инвариантных величин ( $m_i$ ). Вектор  $q_i$  имеет одно измерение; всегда следует указывать, в какой из стандартных систем отсчета он задан: в системе центра масс ( $q_i^*$ ), в системе мишени ( $q_i^M$ ) или в системе пучка ( $q_i^P$ ).

Характерным свойством многочастичных процессов является то, что средний поперечный импульс  $\langle r_i \rangle$  рождающихся частиц имеет величину порядка 0,3—0,4 ГэВ/с; эта величина почти не

зависит ни от сорта, ни от числа частиц, ни от энергии взаимодействия. Распределение по  $r_i$  довольно хорошо представляется функцией вида

$$\omega(r) = \frac{b^{a+1} r^a e^{-br}}{\Gamma(a+1)}, \quad (5.4)$$

где  $a \geq 1$ ,  $b \approx 5$ . Это дает

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty dr r \omega(r) = \frac{\Gamma(a+2)}{b\Gamma(a+1)} \approx 0,4 \text{ ГэВ/с}. \quad (5.5)$$

Динамическое происхождение этого обрезания поперечных импульсов пока неясно.

Наоборот, продольные импульсы  $q_i$  рождаемых частиц сильно зависят от энергии взаимодействия, от сорта частиц и от их множественности. Наблюдаемые на опыте значения  $q_i$  при любых энергиях взаимодействия распределены по значительной части кинематически допустимого интервала  $q_i$  (т. е.  $-\sqrt{s}/2 \leq q_i \leq \sqrt{s}/2$ ). Таким образом, распределение по  $q_i$  заметно отличается от распределения по  $r_i$ , которое всегда ограничено узким интервалом  $r_i \leq 1$  ГэВ/с. Следовательно, область, в действительности заселенная импульсами конечных состояний реакции  $2 \rightarrow n$ , не сферическая, как все фазовое пространство; она скорее имеет форму сигары. Мы будем называть соответствующую область  $(3n-4)$ -мерного фазового пространства *поперечно-усеченным* (цилиндрическим) *фазовым пространством*. Когда энергия взаимодействия растет,  $2n-2$  поперечных размера этой области остаются неизменными, в то время как  $n-2$  продольных размера растут в СЦМ как  $\sqrt{s}$ . Эту область можно представлять себе, например, как  $(n-2)$ -мерную поверхность в  $(3n-4)$ -мерном пространстве; ее толщина в остальных  $2n-2$  измерениях равна примерно 0,5 ГэВ/с. Эта толщина почти не меняется с ростом энергии. Сама же  $(n-2)$ -мерная поверхность, наоборот, с ростом энергии растягивается.

При низких энергиях, а точнее, когда  $\sqrt{s}/n$  достаточно мало, импульсы рождаемых частиц столь малы, что поперечное обрезание несущественно. Переход по  $\sqrt{s}$  или по  $n$  от низкоэнергетической области, где работает весь фазовый объем, к области, где становится важным поперечное усечение импульсов, является постепенным и не может быть точно определен.

Поведение продольных импульсов столь разительно отличается от поведения поперечных импульсов при высокой энергии, что имеет смысл и в фазовом пространстве разделять продольную и поперечные степени свободы. Для этого используем



уравнения (5.1)—(5.3) и соотношение  $d^3\mathbf{p}_i = d^2\mathbf{r}_i dq$ . Фазовый интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} R_n(s) &= R_n(E, q, \mathbf{r}; m_i) = \\ &= \int \prod_1^n (d^2\mathbf{r}_i) \delta^2(\Sigma\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \int \prod_1^n \frac{dq_i}{2E_i} \delta(\Sigma q_i - q) \delta(\Sigma E_i - E) = \\ &= \int \prod_1^n (d^2\mathbf{r}_i) \delta^2(\Sigma\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) L_n(E, q; r_i^2 + m_i^2). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Здесь

$$L_n(s) = L_n(E, q; m_i') = \int \prod_1^n \frac{dq_i}{2E_i} \delta(\Sigma q_i - q) \delta(\Sigma E_i - E) \quad (5.7)$$

обозначает *интеграл в продольном фазовом пространстве* [58], или, короче, *продольный фазовый объем*. Следовательно,  $L_n$  — интеграл по фазовому пространству векторов, имеющих одну временную и одну пространственную компоненты. Благодаря лоренц-инвариантности он является функцией только одного аргумента, остающегося инвариантным при продольных преобразованиях («продольного инварианта»),

$$s' = E^2 - q^2 = s + r^2. \quad (5.8)$$

До сих пор мы не выписывали подынтегральное выражение (матричный элемент) в (5.6) и (5.7). Разбиение (5.6), (5.7) полезно только в том случае, если подынтегральное выражение быстро убывает при больших значениях  $r_i$ . Например, простейший способ ввести поперечное обрезание состоит в том, чтобы положить квадрат матричного элемента равным

$$T = \prod_1^n f_i(r_i), \quad (5.9)$$

где в качестве  $f_i$  взято, например, выражение (5.4). При такой факторизованной записи исчезают какие-либо корреляции между частицами, кроме тех, которые обусловлены сохранением 4-импульса. Другой возможный способ — введение *мультипериферического матричного элемента*; при этом

$$T = \prod_1^{n-1} g_i(t_i), \quad (5.10)$$

где  $t_i$  — квадраты передач на мультипериферической диаграмме (фиг. 66), а функции  $g_i(t_i)$  обрезают большие значения  $|t_i|$ . Например, можно выбрать

$$g_i(t_i) = \exp(a_i t_i). \quad (5.11)$$

Обрезания (5.9) и (5.10) связаны между собой довольно сложным образом, зависящим от соотношения между  $t_i$  и  $r_i$ . В разделе VII.3 (см. фиг. 87) мы докажем, что при  $t \approx t^+ (=t_{\text{макс}})$  всегда  $r_i$  мало; однако обратное утверждение неверно. Заметим, что благодаря матричному элементу (5.10) между частицами должны возникать сложные корреляции.

Как уже было отмечено выше,  $2n - 2$  компоненты  $r_i$  фактически меняются в довольно узких пределах; интересной структурой обладает лишь распределение  $n - 2$  компонент  $q_i$ . Поэтому естественно изучать отдельно поведение  $q_i$  при фиксированном  $r_i$  в предположении, что структура пространства  $r_i$  столь проста, что изменения  $r_i$  мало существенны. Практически это означает уменьшение эффективной размерности задачи с  $3n - 4$  до  $n - 2$ . Иными словами, вместо того, чтобы рассматривать  $(3n - 4)$ -мерное фазовое пространство, можно ограничиться рассмотрением  $(n - 2)$ -мерного *продольного фазового пространства* (ПФП), натянутого на независимые компоненты продольных импульсов  $q_i$ . Способы уменьшения размерности мы опишем в разделе 6, а различные применения — в гл. VIII. В математическом отношении основные свойства поперечно-усеченного фазового пространства вытекают из соответствующих свойств  $L_n$ . Мы используем здесь это обстоятельство, чтобы дать асимптотическую оценку величины поперечно-усеченного фазового объема.

Для начала прямым вычислением убедимся в том, что

$$L_2(s'; m_1'^2, m_2'^2) = \lambda^{-1/2}(s', m_1'^2, m_2'^2), \quad (5.12)$$

где  $s' = E^2 - q^2$ . При  $\sqrt{s'} \leq m_1' + m_2'$   $L_2$  обращается в нуль. Продольное фазовое пространство теперь нульмерно: оно состоит из двух точек  $q_1^* = -q_2^* = \pm \lambda^{1/2}(s', m_1'^2, m_2'^2)/2\sqrt{s'}$ . По аналогии с (2.4), зная объем  $L_2$ , можно рекуррентным способом вычислить  $L_n$ . Действительно, если мы напомним

$$\begin{aligned} M_1'^2 &= (E_1 + \dots + E_i)^2 - (q_1 + \dots + q_i)^2 = \\ &= M_i^2 + |\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_i|^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

[ $M_i$  определено формулами (2.5), (2.6)], то  $L_{n-1}$  будет зависеть только от  $M_{n-1}'$ , и из (5.7) мы получим

$$L_n(s') = \frac{(\sqrt{s'} - m_n')^2}{(m_1' + \dots + m_{n-1}')^2} \int dM_{n-1}' \lambda^{-1/2}(s', M_{n-1}'^2, m_n'^2) L_{n-1}(M_{n-1}'^2). \quad (5.14)$$

Заметим, что если бы мы вернулись к полному трехмерному описанию импульсов, то  $M'_i$  являлись бы инвариантами относительно продольных преобразований Лоренца. Следовательно,  $M'_{n-2}, \dots, M'_2$  — одна из возможных совокупностей  $n-2$  продольно-инвариантных переменных. Эта совокупность, как мы увидим в следующем разделе, не является полной: каждой точке в пространстве  $M'_i$  отвечает множество точек продольного фазового пространства. Можно указать добавочные наборы инвариантных переменных, образуемые из квадратов 4-передат  $t_i$  и из квадратов энергий соседних пар частиц  $s_i$ ; по аналогии с (5.13) эти новые переменные можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} t'_i &= (E_a - E_1 - \dots - E_i)^2 - (q_a - q_1 - \dots - q_i)^2 = \\ &= t_i + |\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_i|^2, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$s'_i = (E_i + E_{i+1})^2 - (q_i + q_{i+1})^2 = s_i + |\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1}|^2. \quad (5.16)$$

Всего таких переменных  $n-1$ , так что надо исключить одну из них путем введения добавочного, желательно симметричного ограничения (см. упражнение VI.14).

С помощью рекуррентного соотношения (5.14) можно вычислить объем поперечно-усеченного фазового пространства в пределе  $s \rightarrow \infty$  (исчерпывающее изложение этого вопроса см. в [51]). Мы уже видели из уравнения (2.17), что при  $s \rightarrow \infty$   $R_n \rightarrow s^{n-2}$ . Следует ожидать, что объем поперечно-усеченной области будет возрастать значительно медленнее.

Асимптотический предел  $R_n$  мы получали, полагая  $m_i = 0$ . Но если в интеграле (5.7) положить  $m'_i = 0$ , то стоящие под интегралом множители  $1/q_i$  создадут при  $q_i = 0$  логарифмическую расходимость. Поэтому значения  $m'_i$  должны быть малыми, а не стремиться к нулю. Чтобы правильно перейти к пределу, проще всего начать с  $L_2(s') \approx 1/s'$ , как это следует из (5.12), и затем интегрировать его с помощью соотношения (5.14). При выборе доминирующих членов следует быть осторожным (детали расчета см. в упражнении VI.15). Ответ имеет вид

$$L_n^{\text{yp}}(s') = \frac{n(n-1)}{2^{n-1}} \frac{1}{s'} (\ln s')^{n-2} \left\{ 1 + O\left(\frac{n}{\ln s'}\right) \right\}. \quad (5.17)$$

Поскольку выражение (5.17) справедливо лишь при  $\ln s' \gg n$ , масштаб, которым измеряется  $s'$  под знаком логарифма, здесь безразличен. Логарифмы появляются из-за наличия под интегралом выражений  $dq_i/q_i$ , а степень  $n-2$  — из-за наличия  $n-2$  независимых  $q_i$ .

Чтобы вычислить объем «толстой»  $(n-2)$ -мерной поверхности, примем во внимание, что этот объем обладает продольной инвариантностью; поэтому мы вправе положить в (5.6)  $(E, q, \mathbf{r}) = (\sqrt{s}, 0, 0)$ , так что  $s = s'$ . Далее, предел (5.17) не зависит от  $m_i$ , так что в асимптотическом пределе  $L_n^{\text{yp}}$  можно вынести из интеграла (5.6). Подставим в (5.6) матричный элемент, описывающий поперечное обрезание; тогда нам останется взять интеграл

$$I = \int \prod_{i=1}^n (d^2 r_i) \delta^2 \left( \sum \mathbf{r}_i \right) T_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \quad (5.18)$$

по всей «толщине» поверхности. Поперечное усечение можно описать обрезавшими функциями типа  $\Theta(a_i - r_i)$ ,  $\exp(-a_i r_i)$  или  $\exp(-a_i r_i^2)$  (упражнение VI.16), полагая в первом приближении, что  $a_i$  не зависят от энергии. Во всех случаях получается, что величина  $I$  не зависит от энергии. Следовательно, мы можем написать: ультрарелятивистский объем поперечно-усеченного фазового пространства

$$L_n^{\text{yp}}(s) = \text{const} \times \left( \frac{1}{s} \right) (\ln s)^{n-2}, \quad (5.19)$$

где зависящая от  $n$  константа берется из соотношений (5.17), (5.18). Таким образом, этот объем уменьшается с ростом  $s$ . Может показаться, что здесь имеется противоречие, так как сама  $(n-2)$ -мерная поверхность, очевидно, растягивается. Объяснение состоит в том, что среднее значение множителя  $\prod_i (2E_i)^{-1}$  в интеграле (5.7) уменьшается.

## 6. Продольное фазовое пространство

Как уже говорилось выше,  $(n-2)$ -мерное продольное фазовое пространство (ПФП) определяется следующими двумя условиями:

$$\sum_{i=1}^n q_i = 0, \quad (6.1)$$

$$\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n (q_i^2 + m_i'^2)^{1/2} = \sqrt{s}, \quad (6.2)$$

налагаемыми на  $n$  евклидовых координат  $q_i$ . В этом разделе мы изучим структуру этого пространства, следуя оригинальной работе Ван-Хова [138]. Чтобы понять выкладки при произвольном  $n$ , удобно проследить параллельно выкладки для случая  $n=3$ . Мы рассмотрим только ситуацию в СЦМ (случай произвольной

системы отсчета см. в [67]); поэтому мы будем писать  $q_i$  вместо  $q_i^*$ .

Последовательно налагая на векторы  $q_i$  ограничения (6.1), (6.2), можно определить следующие пространства:

1.  $n$ -мерное евклидово пространство  $n$  векторов  $q_i$ , обозначаемое  $S_n$ . Это аналог  $3n$ -мерного импульсного пространства векторов  $p_i$ .

2.  $(n-1)$ -мерное пространство  $Q_{n-1}$  векторов  $q_i$ , удовлетворяющих условию  $\sum q_i = q (=0)$ .

3.  $(n-2)$ -мерное пространство  $L_{n-2}$  векторов  $q_i$ , удовлетворяющих условиям  $\sum q_i = q (=0)$  и  $\sum E_i = E (= \sqrt{s})$ . Условие  $\sum E_i = E$  зависит от  $m_i$ , т. е. от фиксированных значений  $r_i$ . Мы будем называть это пространство продольным фазовым пространством по аналогии с тем, как мы прежде условились называть фазовым пространством  $(3n-4)$ -мерное пространство векторов  $p_i$ , удовлетворяющих условию  $\sum p_i = p$  (раздел III 1). Заметим, что сам Ван-Хов называет продольным фазовым пространством  $Q_{n-1}$  [138]

В условие (6.1) все  $q_i$  входят симметрично; поэтому было бы естественно исключить его тоже симметричным образом. Это можно сделать таким ортогональным преобразованием пространства  $S_n$ , чтобы одна из новых координат была равна  $\sum q_i$ . Напишем

$$q_i = \sum_{j=1}^n O_{ij} k_j, \quad (6.3)$$

$$k_i = \sum_{j=1}^n O_{ji} q_j, \quad (6.4)$$

где  $O$  — действительная ортогональная матрица, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=1}^n O_{ij} O_{ik} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (6.5)$$

Если мы требуем, чтобы  $k_n$  было пропорционально  $\sum q_i$ , мы должны написать

$$k_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n q_i, \quad (6.6)$$

так что

$$O_{in} = n^{-1/2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.7)$$

удовлетворяет уравнению (6.5) при  $j = k = n$ . Остальные элементы матрицы  $O$  можно выбрать различными способами;

общепринят, следующий выбор:

$$O = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{-(n-2)}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \frac{-(n-1)}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Другие столь же удобные формы могут быть получены путем любых перестановок первых  $n$  строк или первых  $n-1$  столбцов или путем умножения на  $-1$  любого из  $n-1$  столбцов. Якобиан преобразования от  $q_i$  к  $k_i$  равен единице; интегрируя (5.7) по  $k_n$ , мы получаем, что в уравнении (6.6)  $k_n = 0$  и

$$L_n(s) = n^{-1/2} \int dk_1 \dots dk_{n-1} \prod_{i=1}^n (2E_i)^{-1} \delta\left(\sum E_i - \sqrt{s}\right). \quad (6.9)$$

Векторы  $k_1, \dots, k_{n-1}$  образуют ортогональный базис в пространстве  $Q_{n-1}$ .

Чтобы распорядиться оставшейся  $\delta$ -функцией, вводят в  $Q_{n-1}$  сферическую систему координат. Она получается обобщением хорошо известного трехмерного случая:

$$\begin{aligned} k_1 &= \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} = \rho \beta_1, \\ k_2 &= \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2} = \rho \beta_2, \\ k_3 &= \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-3} = \rho \beta_3, \\ &\vdots \\ k_i &= \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-i+1} \cos \theta_{n-i} = \rho \beta_i, \\ &\vdots \\ k_{n-1} &= \rho \cos \theta_1 = \rho \beta_{n-1}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где  $0 \leq \rho < \infty$  и  $0 \leq \theta_i < \pi$ ,  $0 \leq \theta_{n-2} < 2\pi$  и  $\sum_1^{n-1} \beta_i^2 = 1$ . Поскольку якобиан равен

$$\frac{\partial(k_1, \dots, k_{n-1})}{\partial(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})} = \rho^{n-2} (\sin \theta_1)^{n-3} (\sin \theta_2)^{n-2} \dots \sin \theta_{n-3}, \quad (6.11)$$

мы можем написать

$$dk_1 \dots dk_{n-1} = \rho^{n-2} d\rho dS_{n-1}, \quad (6.12)$$

где

$$dS_{n-1} = d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} (\sin \theta_1)^{n-3} \dots \sin \theta_{n-3} \quad (6.13)$$

является элементом поверхности единичной сферы в  $(n-1)$ -мерном евклидовом пространстве. Легко убедиться (упражнение VI.17), что интеграл  $\int dS_m$  по сфере равен

$$S_m = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}. \quad (6.14)$$

Подставляя (6.10) в (6.3), выражаем  $q_i$  через  $\rho$  и  $\beta_i$ :

$$\begin{aligned} q_i &= \rho \gamma_i, & \gamma_i &= \sum_{j=1}^{n-1} O_{ij} \beta_j, \\ \sum_1^n \gamma_i^2 &= 1, & \gamma_n &= 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Тогда условие  $\sum E_i = E$ , или в новых обозначениях

$$\sum_{i=1}^n (\rho^2 \gamma_i^2 + m_i'^2)^{1/2} = \sqrt{s}, \quad (6.16)$$

определяет  $\rho$  как функцию  $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$ :

$$\rho = \rho(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}). \quad (6.17)$$

Интегрирование по  $\rho$  производится стандартным путем с помощью формулы (III.2.12) и требует взятия производной от (6.16)

$$\frac{d}{d\rho} \sum_{i=1}^n E_i = \rho \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 E_i^{-1}.$$

В конце концов получаем  $L_n$  в виде

$$L_n(s) = n^{-1/2} \int dS_{n-1} \frac{\rho^{n-3}}{\prod_{i=1}^n (2E_i) \sum_{i=1}^n (\gamma_i^2 / E_i)}. \quad (6.18)$$

Хотя  $\delta$ -функции и выпали, но формула очень сложна; и дальнейшие вычисления  $L_n$  приходится проводить численно. Однако если ограничиться только исследованием области изменения переменных в (6.18), т. е. самой геометрией продольного фазового пространства, то для  $n=3$  и  $n=4$  удается получить вполне наглядные результаты.

*а. Случай  $n=3$*

При  $n=3$  продольное фазовое пространство одномерно, и мы имеем (полагая  $\theta_1 = \omega$ )

$$\begin{aligned} k_1 &= \rho \cos \omega, \\ k_2 &= \rho \sin \omega. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Чтобы согласовать с обозначениями Ван-Хова [138], сделаем в матрице  $O$  перестановку и переменим знаки; получим

$$O = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Тогда, согласно уравнению (6.3), мы имеем

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{2}{\sqrt{6}} k_2, \\ q_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} k_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} k_2, \\ q_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} k_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} k_2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

И декартовы координаты  $k_1, k_2$ , и полярные координаты  $\rho, \omega$  в (6.19) дают параметризацию точек  $q_1, q_2, q_3$  на плоскости  $\sum q_i = 0$ . Значения  $q_i$  на ней симметрично изображаются в треугольной системе координат (фиг. 76). Продольное фазовое пространство превращается в кривую, представляющую собой решение относительно  $\rho = \rho(\omega)$  уравнения

$$(\rho^2 \gamma_1^2 + m_1'^2)^{1/2} + (\rho^2 \gamma_2^2 + m_2'^2)^{1/2} + (\rho^2 \gamma_3^2 + m_3'^2)^{1/2} = \sqrt{s}, \quad (6.22)$$

где

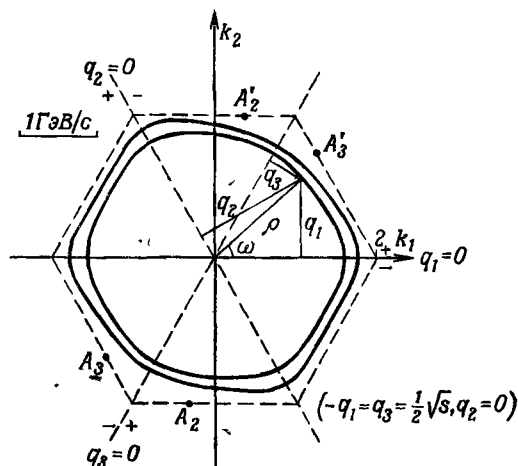
$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{2}{\sqrt{6}} \sin \omega, \\ \gamma_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \omega, \\ \gamma_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \omega. \end{aligned} \quad (6.23)$$



Качественное представление о поведении  $\rho(\omega)$  получим, полагая  $m'_i = 0$ , так что (6.22) дает

$$|q_1| + |q_2| + |q_3| = \sqrt{s}. \quad (6.24)$$

Если перебрать здесь все комбинации знаков, то станет видно, что кривая (6.24) есть шестиугольник в плоскости  $k_1 k_2$  (фиг. 76). С увеличением  $m'_i$   $\rho(\omega)$  монотонно убывает. Наружная кривая, или граница диаграммы продольного фазового пространства



Фиг. 76. Продольное фазовое пространство при  $n=3$ .

Наружная кривая — граница диаграммы ПФП для реакции  $\pi N \rightarrow \pi \pi N$  при  $\sqrt{s} = 4$  ГэВ, т. е.  $\rho = \rho(\omega)$  при  $r_i = 0$ . Внутренняя кривая отвечает  $r_1 = r_2 = 0,4$  ГэВ/с,  $r_3 = 0,5$  ГэВ/с

(ПФП-диаграммы), получается, когда все поперечные импульсы обращаются в нуль,  $m'_i = m_i$  (фиг. 76). При увеличении  $s$  эта граница приближается к шестиугольнику. Все экспериментальные события лежат внутри нее. Поскольку поперечные импульсы, как правило, малы, точки, изображающие события, концентрируются близ границы. С увеличением  $\sqrt{s}$  линейные размеры диаграммы в СЦМ продольных импульсов возрастают пропорционально  $\sqrt{s}$ , но при этом ожидается, что ширина населенной области почти не будет меняться. Именно эта эффективная одномерность явилась исходной точкой так называемого ПФП-анализа (анализа событий в продольном фазовом пространстве). Плотность событий вдоль кривой является характеристикой данного канала реакции.

Действительно, плотность для чистого фазового объема, определяемого, как обычно, с помощью условия  $T = 1$ , вычис-

ляется из соотношения (6.18) и оказывается равной

$$\frac{dL_3}{d\omega} = \{8 \sqrt{3} (\gamma_1^2 E_2 E_3 + \gamma_2^2 E_3 E_1 + \gamma_3^2 E_1 E_2)\}^{-1}, \quad (6.25)$$

где  $\gamma_i$  находятся из (6.23), а  $E_i^2 = q_i^2 + m_i'^2$  через уравнения (6.21), (6.22) зависят от  $\omega$ . Это выражение справедливо при фиксированных поперечных импульсах. Если экспериментальные события при любых  $r_i$  изобразить на графике как функции  $\omega$ , то плотность событий на нем получается интегрированием  $dL_3/d\omega$  по всем  $r_i$  с учетом подходящим образом выбранной обрезающей функции  $f(r)$ :

$$\frac{dR_3}{d\omega} = \int d^2r_1 d^2r_2 d^2r_3 \delta^2(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) \left( \frac{dL_3}{d\omega} \right) \prod_{i=1}^3 f(r_i). \quad (6.26)$$

Для практических целей достаточно аппроксимировать (6.26) более простым выражением (6.25). Чтобы качественно понять поведение  $dL_3/d\omega$ , мы опять положим в (6.25)  $m_i' = 0$ . Тогда  $E_i \approx |q_i| \approx \rho |\gamma_i|$ , так что

$$\frac{dL_3}{d\omega} = \frac{\rho^2(\omega)}{8 \sqrt{3} s |q_1 q_2 q_3|}, \quad (6.27)$$

где  $\rho(\omega)$  — радиус-вектор, проведенный к шестиугольнику на фиг. 76. Распределение по  $\omega$  обладает острыми пиками в точках  $q_i = 0$ , обусловленными главным образом множителем  $1/PE_i$  в определении  $L_n$ . Наличие асимптотических сингулярностей при  $q_i = 0$  показывает, что диаграмма продольного фазового пространства неудобна для исследования событий, в которых одна из частиц обладает малой скоростью в СЦМ.

Часто важно знать, как ведут себя при изменении  $\omega$  (и при фиксированных  $r_i$ ) другие переменные, например  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $t_1$  и  $t_2$ . Качественно их поведение становится ясным, если опять положить в формулах  $m_i' = 0$ . В СЦМ имеем

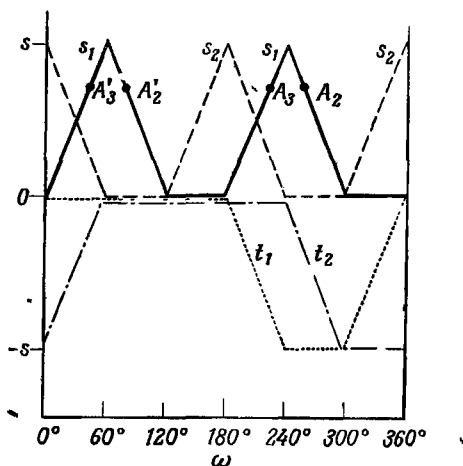
$$\begin{aligned} s_1 &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2q_1 q_2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \approx 2(|q_1| |q_2| - q_1 q_2), \\ s_2 &\approx 2(|q_2| |q_3| - q_2 q_3), \\ t_1 &= m_a^2 + m_1^2 - 2E_a E_1 + 2q_a q_1 \approx -\sqrt{s} (|q_1| - q_1), \\ t_2 &\approx -\sqrt{s} (|q_3| + q_3). \end{aligned} \quad (6.28)$$

При  $m_i' = 0$  все  $q_i$  практически линейно зависят от  $\omega$ ; картина этой зависимости показана на фиг. 77. Если  $m_i' \neq 0$ , то углы на фиг. 77 скругляются. Те области, где инварианты

приблизительно обращаются в нуль, можно охарактеризовать следующим образом.

- $s_1 \approx 0$ : Частицы 1 и 2 обе движутся вперед (или обе назад). Поскольку  $m'_i = 0$ , скорости частиц одинаковы (и равны скорости света); по этой причине  $s_1$  достигает порогового значения, равного нулю (см. II.2.16). Так же интерпретируется область  $s_2 \approx 0$ .
- $t_1 \approx 0$ : Частица 1 движется вперед с той же скоростью (равной скорости света), что и частица  $a$ .
- $t_2 \approx 0$ : Частица 3 движется назад с той же скоростью (равной скорости света), что и частица  $b$ .

Нетрудно также убедиться, что каждому значению  $s_1$  отвечают четыре значения  $\omega$ . Точки  $A_2$  и  $A'_2$ , а также  $A_3$  и  $A'_3$  на фиг. 77 дают одно и то же  $s_1$ , так как  $s_1$  не меняется от того,



Фиг. 77. Зависимость  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  от  $\omega$  при  $m'_i = 0$ . (Линейная форма зависимости — всего лишь приближение.)

что движение вперед заменяется движением назад. На фиг. 77 эти точки также отмечены. Две точки  $A_2$ ,  $A'_2$  отвечают одной точке  $A_2$  на границе диаграммы Далица (фиг. 35), а  $A_3$ ,  $A'_3$  — другой точке  $A_3$  с тем же значением  $s_1$ .

С помощью фиг. 76 и 77 мы можем также изучить соотношение между обрезанием поперечных импульсов и обрезанием мультипериферических 4-передат [формулы (5.9), (5.10) при  $n = 3$ ]. Обрезание поперечных импульсов приводит фактически к одномерному распределению постоянной ширины, лежащему вдоль границы диаграммы на фиг. 76. Если обрезание мультипериферических передат имеет вид

$$\exp(at_1 + bt_2) \quad (6.29)$$

(что требует малости как  $t_1$ , так и  $t_2$ ), то, как видно на фиг. 77, это приводит к двойному неравенству  $60^\circ < \omega < 180^\circ$ . Следовательно, подобное «периферическое обрезание» населяет только ту часть продольного фазового пространства, которая лежит вокруг  $\omega = 120^\circ$ . Если перебрать все перестановки конечных частиц, то видно, что существуют шесть типов периферических обрезаний, показанных на фиг. 78. Каждое обрезание передач заполняет некоторую область ПФП-диаграммы, расположенную вокруг той точки, в которой центральная частица диаграммы на фиг. 78 обладает нулевым продольным импульсом (а верхняя — положительным). Эта область простирается на  $60^\circ$  в обе стороны. Поэтому различные диаграммы на фиг. 78 в значительной мере перекрываются (упражнение VI.18).

### б. Случай $n = 4$

Для  $n = 4$  мы пишем

$$\begin{aligned} k_1 &= \rho \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ k_2 &= \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2, \\ k_3 &= \rho \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Матрица (6.8) теперь имеет вид

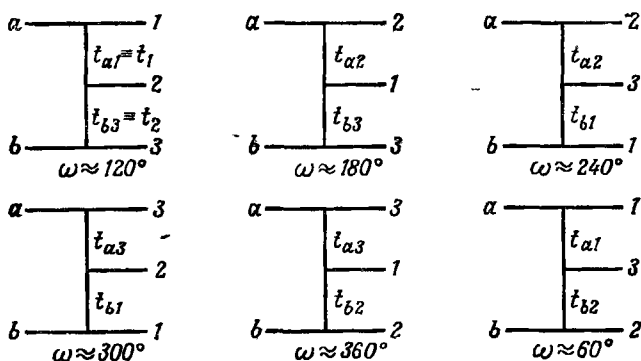
$$O = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Поскольку  $k_4 = \sum q_i = 0$ , четыре  $q_i$  выражаются через три  $k$  следующим образом:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} k_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} k_2 + \frac{1}{\sqrt{12}} k_3, \\ q_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} k_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} k_2 + \frac{1}{\sqrt{12}} k_3, \\ q_3 &= -\frac{2}{\sqrt{6}} k_2 + \frac{1}{\sqrt{12}} k_3, \\ q_4 &= -\frac{3}{\sqrt{12}} k_3. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Величины  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  и  $\gamma_4$  можно найти из равенства  $q_i = \rho \gamma_i$  путем подстановки (6.30) в формулы (6.32).

Обобщение фиг. 76 на случай  $n = 4$  показано на фиг. 79; четыре  $q_i$ , удовлетворяющие равенству  $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0$ , изображены в симметричном виде:  $q_i$  отождествлены с расстояниями точки от четырех плоскостей  $q_i = 0$  в трехмерном пространстве. Нормали  $\mathbf{n}_i$  к этим плоскостям определяются первыми



Фиг. 78. Шесть возможных типов периферических обрезаний для процесса  $2 \rightarrow 2$ .

К двум передачам, указанным на каждой схеме, предъявляется требование малости. Каждое обрезание заселяет некоторую часть диаграммы ПФП вокруг значения  $\omega$ , указанного на соответствующей схеме.

трем столбцами матрицы (6.31). Например,  $\mathbf{n}_1$  равно  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{12})$  и т. д.; все  $\mathbf{n}_i$  удовлетворяют соотношению  $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j = \delta_{ij} - 1/4$ . Плоскости параллельны граням правильного тетраэдра.

Чтобы представить себе, как выглядит двумерное продольное фазовое пространство, рассмотрим опять совокупность точек, удовлетворяющих закону сохранения энергии при  $m'_i = 0$ :

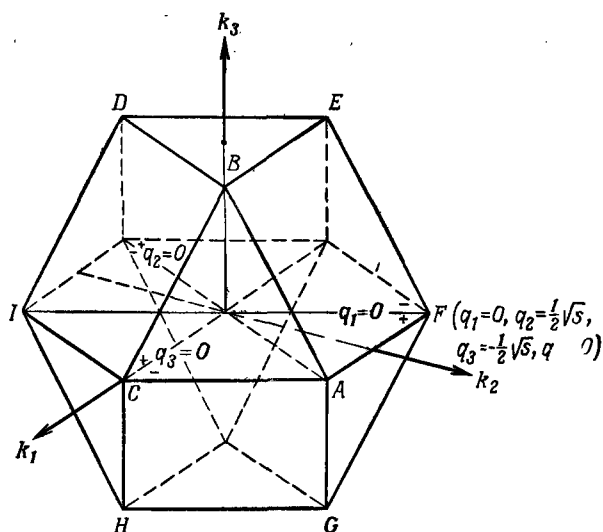
$$|q_1| + |q_2| + |q_3| + |q_4| = \sqrt{s}. \quad (6.33)$$

Ясно, что сечения этой поверхности плоскостями  $q_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$  должны представлять собой шестиугольники. Они видны на фиг. 79. Если же ни одно из  $q_i$  не обращается в нуль, выберем для них определенные знаки. Например, пусть  $q_1 > 0$ , а  $q_2, q_3, q_4 < 0$ ; тогда из уравнений (6.33) и  $\sum q_i = 0$  следует

$$q_1 = \frac{1}{2} \sqrt{s}, \quad (6.34)$$

$$q_2 + q_3 + q_4 = -\frac{1}{2} \sqrt{s}.$$

До тех пор пока какое-то из  $q_2$ ,  $q_3$  и  $q_4$  не обратится в нуль, мы останемся на этой части поверхности. Следовательно, это треугольник  $ABC$ , параллельный шестиугольнику  $DEFGHI$  на



Фиг. 79. Система координат для случая  $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0$ .

Плоскости  $CAF$  соответствует  $q_4=0$ , плоскости  $CBE - q_3=0$ , плоскости  $ABD - q_2=0$ , а плоскости  $DEF - q_1=0$ . Векторы направлений осей на чертеже относятся к шестиугольнику  $CAF$ .

фиг. 79. Если же  $q_1, q_2 > 0$ , а  $q_3, q_4 < 0$ , то мы имеем

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{s}, \\ q_3 + q_4 &= -\frac{1}{2} \sqrt{s}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Эта часть поверхности ограничивается линией, на которой одно из  $q_i$  меняет знак. Имеется четыре  $q_i$ , так что получается квадрат  $ABEF$  на фиг. 79. В итоге из 8 треугольников и 6 квадратов получается поверхность *кубкаэдра* (фиг. 79).

Если  $m'_i > 0$ , то продольное фазовое пространство, очевидно, представляет собой некоторую поверхность, лежащую внутри этого кубкаэдра; при  $s \rightarrow \infty$  она стремится к кубкаэдру. Экспериментальные события с преимущественно малыми поперечными импульсами лежат у самой поверхности кубкаэдра, образуя эффективно двумерное распределение. Вопросы анализа этого двумерного распределения трактуются в специальной литературе, и мы не будем здесь заниматься ими. В качестве курьеза упомянем, что шестиугольник и кубкаэдр (фиг. 76, 79),

равно как и их обобщения, еще раньше появлялись в физике в качестве весовых диаграмм группы  $SU(n)$ . Например, хорошо известные октетное или нонетное представления группы  $SU(3)$  выглядят так же, как фиг. 76.

## 7. Физическая область в инвариантных переменных

Мы уже познакомились в первых главах этой книги с тем, как описываются на языке инвариантов реакции  $2 \rightarrow 2$  и  $2 \rightarrow 3$  (или, что то же, распады  $1 \rightarrow 3$  и  $1 \rightarrow 4$ ). Сейчас мы обратимся к распаду  $1 \rightarrow n$  и его перекрестным каналам и дадим их полное лоренц-инвариантное описание [3—5, 25, 26, 45, 60, 89, 90, 100, 101, 103, 106, 122, 126, 127, 135]. В этом разделе мы определим на языке инвариантных переменных физическую область их изменения, а в следующем разделе — плотность в фазовом пространстве в тех же переменных. Результаты этих двух разделов имеют математический характер в значительно большей степени, чем остальные части книги, хотя доказательства и не обладают особой строгостью. Более строгое изложение можно найти в работе [26].

### *а. Физическая область процесса $1 \rightarrow n$ в инвариантных переменных*

Предположим, что распад

$$0 \rightarrow 1 + 2 + \dots + n \quad (7.1)$$

есть реальный физический распад с исчезающими массами  $m_i$ , так что  $p_i$  суть времениподобные (с положительной четвертой компонентой) векторы,  $p_i^2 = m_i^2 > 0$ ,  $E_i (\geq m_i) > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Естественной совокупностью инвариантных переменных является набор скалярных произведений

$$x_{ij} = p_i \cdot p_j = m_i m_j \operatorname{ch} \zeta_{ij}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n. \quad (7.2)$$

Это определяет также переменные  $\zeta_{ij}$  — относительные быстроты частиц  $i$  и  $j$ . Величины  $x_{ij}$  линейно связаны с квадратами инвариантных масс пар частиц  $i$  и  $j$ :

$$s_{ij} = m_i^2 + m_j^2 + 2x_{ij}. \quad (7.3)$$

Квадраты инвариантных масс трех или более частиц  $s_{ij} \dots k = (p_i + p_j + \dots + p_k)^2$  также являются линейными комбинациями  $x_{ij}$ ; то же относится и к квадратам любых 4-переходов.

Совокупность переменных (7.2) состоит из  $1/2 n(n-1)$  величин  $x_{ij}$ . При  $n \geq 4$  они, очевидно, не независимы. Существует  $3n-7$  свободных инвариантных переменных и, следовательно,

между  $x_{ij}$  должно существовать  $1/2(n^2 - n) - (3n - 7) = 1/2(n^2 - 7n + 14)$  соотношений. Одно из них — инвариантное уравнение, вытекающее из сохранения 4-импульса,  $m_0^2 = (\sum p_i)^2$ , или

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij} = \frac{1}{2} \left( m_0^2 - \sum_i m_i^2 \right) \equiv K. \quad (7.4)$$

Остальные  $1/2(n-3)(n-4)$  уравнений представляют собой условия на определители Грама; они выражают тот факт, что в четырехмерном пространстве любые пять или более векторов всегда линейно зависят друг от друга [см. текст после уравнения (A.8)].

Здесь мы определим необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять переменные  $x_{ij}$ , чтобы соответствовать совокупности физических импульсов  $p_1, \dots, p_n$ . Физическими импульсами мы называем такие, составляющие  $p_i^\mu$  которых действительны и при этом  $p_i^2 = m_i^2$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Для этого полезно определить матрицу составляющих  $p_i^\mu$

$$A = \begin{bmatrix} p_1^0 & p_1^1 & p_1^2 & \dots & p_1^n \\ p_2^0 & p_2^1 & p_2^2 & \dots & p_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n^0 & p_n^1 & p_n^2 & \dots & p_n^n \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

Если  $A^T$  — транспонированная матрица, то мы имеем

$$A^T g A = X, \quad (7.6)$$

где  $g$  — метрическая матрица (II.1.5), а  $X$  — матрица скалярных произведений

$$X = (x_{ij}) = \begin{bmatrix} p_1^2 & p_1 \cdot p_2 & \dots & p_1 \cdot p_n \\ p_2 \cdot p_1 & p_2^2 & \dots & p_2 \cdot p_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n \cdot p_1 & p_n \cdot p_2 & \dots & p_n^2 \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

$\text{Det } X$  — определитель Грама  $\Delta_n(p_1, \dots, p_n)$ .

Поскольку матрица  $X$  симметрична, существует ортогональная матрица  $U$ , диагонализующая матрицу  $X$ . Элементы диагональной матрицы  $Y = UXU^T$  имеют вид

$$y_{ij} = \sum_{k,l} u_{ik} u_{jl} x_{kl} = \left( \sum_k u_{ik} p_k \right) \cdot \left( \sum_l u_{jl} p_l \right) \equiv q_i \cdot q_j, \quad (7.8)$$



где  $q_i$  — ортогональные 4-векторы, связанные с векторами  $p_i$  соотношениями

$$q_i = \sum_k u_{ik} p_k, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.9)$$

Так как матрица  $U$  ортогональная, решения этих уравнений имеют сходный вид:

$$p_i = \sum_k u_{ki} q_k, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.10)$$

Уравнения (7.9), (7.10) показывают, что на совокупности векторов  $p_1, \dots, p_n$  и  $q_1, \dots, q_n$  натянуто одно и то же пространство. Если это пространство Лоренца, так что четыре вектора  $q_i$  линейно независимы друг от друга, то один из них должен быть времениподобным, а три — пространственноподобными. Остальные  $n - 4$  векторов  $q_i$  могут оказаться ортогональными всем четырем базисным векторам только в том случае, если они являются нуль-векторами. Выбрав удобную нумерацию собственных значений (диагональных элементов)  $\lambda_i$  матрицы  $Y$ , мы получим

$$q_i \cdot q_j = \lambda_{i-1} \delta_{ij}, \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} \lambda_0 > 0, \quad \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 < 0, \\ \lambda_4 = \dots = \lambda_{n-1} = 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Поскольку матрица  $U$  ортогональная,  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$  являются также собственными значениями матрицы  $X$ .

Теперь ясно, что существует система отсчета  $Q$ , в которой  $q_i$  даются выражениями

$$\begin{aligned} q_1 &= (\sqrt{\lambda_0}, 0, 0, 0), \\ q_2 &= (0, \sqrt{-\lambda_1}, 0, 0), \\ q_3 &= (0, 0, \sqrt{-\lambda_2}, 0), \\ q_4 &= (0, 0, 0, \sqrt{-\lambda_3}), \\ q_i &= (0, \dots, 0), \quad i = 5, \dots, n. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Образует из  $q_i$  матрицу  $B$  таким же способом, каким из  $p_i$  была образована матрица  $A$ :

$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{-\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{-\lambda_3} & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.14)$$

Любая совокупность величин  $q_i$ , удовлетворяющих соотношению (7.11), может быть получена из совокупности (7.13) путем преобразования Лоренца  $L$ . Таким образом, из уравнения (7.10) следует

$$A = LBU. \quad (7.15)$$

Мы показали, что если  $p_1, \dots, p_n$  — физические импульсы, то собственные значения матрицы  $X = (x_{ij})$  удовлетворяют условию (7.12). Обратно, если собственные значения матрицы скалярных произведений  $X$  удовлетворяют условию (7.12), то матрица  $A = BU$  [где  $B$  — матрица (7.14), а  $U$  — матрица, диагонализующая  $X$ ] дает явную реализацию  $p_1, \dots, p_n$  матрицы  $X$ . Ниже мы покажем (прямым построением  $p_1, \dots, p_n$ ), что эта конфигурация единственна [см. ниже (7.31), (7.33)]. Тем самым мы приходим к следующей теореме [26].

**Теорема 1.** Конфигурация физических импульсов  $p_1, \dots, p_n$  существует тогда и только тогда, когда матрица  $X = (x_{ij})$  имеет одно положительное, три отрицательных, а остальные  $n - 4$  равные нулю собственные значения. Эта конфигурация единственна, если не считать зеркальных отражений пространства и собственных преобразований Лоренца.

Чтобы применять эту теорему, полезно ввести уравнение, которому удовлетворяют собственные значения матрицы  $X$ , — характеристическое уравнение  $X$ . После некоторых математических выкладок можно убедиться, что оно имеет вид

$$\lambda^n - \bar{\Delta}_1 \lambda^{n-1} - \dots - \bar{\Delta}_{d+1} \lambda^{n-d-1} - \bar{\Delta}_{d+2} \lambda^{n-d-2} - \dots - \bar{\Delta}_n = 0, \quad (7.16)$$

где

$$\bar{\Delta}_l = (-1)^{l-1} \sum \Delta_l(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_l}) \quad (7.17)$$

есть сумма всех диагональных миноров размерности  $l \times l$  определителя  $\text{Det } X$ . Отдельные слагаемые в уравнении (7.17) представляют собой симметричные определители Грама [см. (A.2)]:

$$\Delta_l(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_l}) = \text{Det}(x_{ij}), \quad i, j = i_1, \dots, i_l, \quad (7.18)$$

где  $i_1, \dots, i_l$  — некоторое подмножество множества индексов  $1, \dots, n$ . Частными случаями  $\bar{\Delta}_l$  являются

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_1 &= \sum m_i^2 = \text{Sp } X, \\ \bar{\Delta}_n &= (-1)^{n-1} \Delta_n(p_1, \dots, p_n) = (-1)^{n-1} \text{Det } X. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Величина  $\bar{\Delta}_l$  представляет собой полином  $l$ -й степени по переменным  $x_{ij}$  (второй степени по каждому  $x_{ij}$ ).

Согласно теореме 1, уравнение (7.16) имеет  $n - 4$  нулевых собственных значений. Отсюда следует

$$\bar{\Delta}_5 = 0, \dots, \bar{\Delta}_n = 0. \quad (7.20)$$

Пусть эти условия выполняются. Тогда  $\mu = 1/\lambda$  удовлетворяет уравнению четвертой степени

$$\bar{\Delta}_4 \mu^4 + \bar{\Delta}_3 \mu^3 + \bar{\Delta}_2 \mu^2 + \bar{\Delta}_1 \mu - 1 = 0. \quad (7.21)$$

Начертив кривую (7.21) и вычислив ее значение при  $\mu = 0$  и ее производные при  $\mu > 0$ , легко убедиться, что уравнение (7.21) имеет один положительный и три отрицательных корня, если

$$\bar{\Delta}_1 > 0, \quad \bar{\Delta}_2 > 0, \quad \bar{\Delta}_3 > 0, \quad \bar{\Delta}_4 > 0. \quad (7.22)$$

Простейшими рассуждениями убеждаемся в необходимости условий (7.20) и (7.22); таким образом, мы получили следующую теорему [26].

**Теорема 2.** Необходимое и достаточное условие того, что матрица  $X$  соответствует физической совокупности 4-импульсов  $p_1, \dots, p_n$ , дается условиями (7.20), (7.22).

Мы заканчиваем эту часть раздела следующими замечаниями.

1. Выше мы видели, что  $x_{ij}$  связаны  $1/2(n-3)(n-4)$  условиями на их определители Грама; с другой стороны, число уравнений в (7.20) всего лишь  $n-4$ . Но если к этим уравнениям добавлено требование действительности всех  $x_{ij}$ , то система (7.20) оставляет как раз нужное количество свободных параметров. Со сходным положением вещей мы встречаемся, решая систему уравнений  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  и  $xyz = 1$ . Она обладает однопараметрическим множеством решений. Но действительное решение только одно ( $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ ), так как поверхности касаются лишь в одной точке. Поскольку решения системы (7.20) обладают такими же сингулярными точками, уравнениями (7.20) трудно пользоваться на практике. Другая трудность состоит в том, что при больших  $n$  число членов в уравнении (7.17) велико  $(n!/(n-4)!)^{1/2}$ .

2. Элементы матрицы  $X$  имеют вид  $x_{ij} = m_i m_j \text{ch } \xi_{ij}$ , ( $\xi_{ij}$  — относительная быстрота). Можно ввести другие матрицы, из которых массы  $m_i$  исключены. Для этого сделаем преобразование

$$x_{ij} = m_i m_j \gamma_{ij}, \quad (7.23)$$

где лоренц-факторы

$$\gamma_{ij} = \text{ch } \xi_{ij} = u_i \cdot u_j \quad (7.24)$$

равны скалярным произведениям 4-векторов скорости. Мы определяем

$$\begin{aligned} X' &= (\gamma_{ij}), \\ \Delta'_i &= \Delta_i(u_{i_1}, \dots, u_{i_l}), \\ \bar{\Delta}'_i &= (-1)^{l-1} \sum \Delta'_i(u_{i_1}, \dots, u_{i_l}). \end{aligned} \quad (7.25)$$

Из уравнения (A.4) следует

$$\Delta_i = \prod m_i^2 \Delta'_i, \quad (7.26)$$

поэтому  $\bar{\Delta}_i = 0$  эквивалентно равенству  $\Delta'_i = 0$ . Следовательно, в теоремах 1 и 2 матрица  $X = (x_{ij})$  может быть заменена на  $X' = (\gamma_{ij})$ . Поскольку  $\gamma_{ij}$  не зависят от масс, физические области, определяемые  $\Delta'_i$ , *универсальны*: одни и те же для любых ненулевых масс

3 Мы определили  $U$  как матрицу, диагонализующую  $X = = A^T g A$ . Подобным же образом уравнение

$$A A^T g = L B U U^T B^T L^T g = L (B B^T g) L^{-1} \quad (7.27)$$

[см. (II.1.7)] показывает, что  $L^{-1}$  есть то преобразование Лоренца, которое диагонализует  $A A^T g$ . Это  $L$  выделяет определенную систему отсчета, а именно систему, которая получается из начальной с помощью преобразования Лоренца  $L^{-1}$ . В новой системе отсчета составляющие 4-импульсов являются элементами матрицы

$$L^{-1} A = B U. \quad (7.28)$$

[Мы воспользовались соотношением (7.15).] Матрица  $B U$  обладает тем свойством, что матрица

$$B U (B U)^T = B B^T \quad (7.29)$$

является диагональной, с диагональными элементами  $|\lambda_i|$ . Следовательно, в этой системе отсчета *строки* матрицы, составленной из компонент импульсов

$$a^\mu = (p_1^\mu, \dots, p_n^\mu), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (7.30)$$

ортогональны в евклидовой метрике  $n$ -мерного пространства. Легко видеть, что эта система отсчета совпадает с системой  $Q$ , определенной соотношениями (7.13).

**Пример 1.** Пусть  $p_1$  и  $p_2$  — два 2-вектора,  $p_i = (E_i, P_i)$ ; а  $\xi$  — относительная быстрота 1 и 2. Матрица  $X$  равна

$$X = \begin{bmatrix} m_1^2 & m_1 m_2 \operatorname{ch} \xi \\ m_1 m_2 \operatorname{ch} \xi & m_2^2 \end{bmatrix}.$$

Корни уравнения для собственных значений  $\lambda^2 - (m_1^2 + m_2^2)\lambda - m_1^2 m_2^2 \text{sh}^2 \xi = 0$  равны

$$\lambda_{0,1} = \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2) \left[ 1 \pm \left\{ 1 + \left( \frac{2m_1 m_2}{m_1^2 + m_2^2} \right)^2 \text{sh}^2 \xi \right\}^{1/2} \right].$$

Собственное значение  $\lambda_0$  всегда положительно, а  $\lambda_1$  — отрицательно и обращается в нуль на границе физической области  $\xi = 0$ . В системе отсчета  $Q$  векторы имеют вид

$$p_1 = \left( \sqrt{\lambda_0} \cos \frac{\alpha}{2}, -\sqrt{-\lambda_1} \sin \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$p_2 = \left( \sqrt{\lambda_0} \sin \frac{\alpha}{2}, \sqrt{-\lambda_1} \cos \frac{\alpha}{2} \right),$$

где  $\alpha$  определяется соотношением  $\cos \alpha = |m_1^2 - m_2^2|/(\lambda_0 - \lambda_1)$ . Для равных масс  $\alpha = \pi/2$ ,  $P_1 = -P_2$  система  $Q$  совпадает с СЦМ.

### б. Несимметричные совокупности инвариантов

Сложность уравнений (7.20) и сингулярная природа их решений вынуждают искать более простые инвариантные описания. Их можно найти ценою отказа от симметрии в индексах частиц. Различные выборы инвариантных переменных приводятся в работах Асрибекова [3—5], Френкеля [45], Рорлиха [126, 127].

Пусть  $p_1, p_2, p_3, p_4$  — физические 4-импульсы. В системе отсчета  $R(1, 2, 3)$ , показанной на фиг. 7, эта совокупность импульсов имеет вид, записанный формулами (II.7.1). Воспользовавшись соотношениями (II.7.3), (II.7.8), (II.7.10), (II.7.15) и (II.7.18), выражающими компоненты импульсов через инварианты, вместо (II.7.1) получаем

$$\begin{aligned} p_1 &= [\{\Delta_1(p_1)\}^{1/2}, 0, 0, 0], \\ p_2 &= \left[ \frac{G(p_1, p_2)}{\{\Delta_1(p_1)\}^{1/2}}, 0, 0, \left\{ \frac{-\Delta_2(p_1, p_2)}{\Delta_1(p_1)} \right\}^{1/2} \right], \\ p_3 &= \left[ \frac{G(p_1, p_3)}{\{\Delta_1(p_1)\}^{1/2}}, \left\{ \frac{\Delta_3(p_1, p_2, p_3)}{-\Delta_2(p_1, p_2)} \right\}^{1/2}, 0, \frac{-G(p_1, p_2, p_3)}{\{-\Delta_1(p_1) \Delta_2(p_1, p_2)\}^{1/2}} \right], \\ p_4 &= \left[ \frac{G(p_1, p_4)}{\{\Delta_1(p_1)\}^{1/2}}, \frac{G(p_1, p_2, p_3, p_4)}{\{-\Delta_2(p_1, p_2) \Delta_3(p_1, p_2, p_3)\}^{1/2}}, \right. \\ &\quad \left. \pm \left\{ \frac{-\Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_4)}{\Delta_3(p_1, p_2, p_3)} \right\}^{1/2}, \frac{-G(p_1, p_2, p_3, p_4)}{\{-\Delta_1(p_1) \Delta_2(p_1, p_2)\}^{1/2}} \right]. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Компоненты векторов действительны при условии, что

$$\begin{aligned}\Delta_1(p_1) &> 0, \\ \Delta_2(p_1, p_2) &< 0, \\ \Delta_3(p_1, p_2, p_3) &> 0, \\ \Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_4) &< 0.\end{aligned}\tag{7.32}$$

Необходимость этих условий следует из (7.22), поскольку  $(-1)^{l-1}\Delta_l = \bar{\Delta}_l > 0$  для физических  $p_1, \dots, p_l$  ( $l = 1, 2, 3, 4$ ). Обратно, если неравенства (7.32) выполнены для некоторой совокупности  $X = (x_{ij})$ , то уравнения (7.31) дают явную реализацию импульсов  $p_1, \dots, p_4$ .

Если векторов больше, чем четыре, то каждый из векторов  $p_i$ ,  $i = 5, \dots, n$  можно написать в системе отсчета  $R(1, 2, 3)$  в виде, сходном с записью  $p_4$  в последнем из равенств (7.31):

$$p_i = \left[ \frac{G(p_i)}{\{\Delta_1(p_1)\}^{1/2}}, \frac{G(p_1, p_2, p_3)}{\{-\Delta_2(p_1, p_2)\Delta_3(p_1, p_2, p_3)\}^{1/2}}, \right. \\ \left. \pm \left\{ \frac{-\Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_i)}{\Delta_3(p_1, p_2, p_3)} \right\}^{1/2}, \frac{-G(p_i, p_i)}{\{-\Delta_1(p_2)\Delta_2(p_1, p_2)\}^{1/2}} \right] \tag{7.33}$$

при условии, что

$$\Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_i) \leq 0, \quad i = 5, \dots, n. \tag{7.34}$$

Желая выписать  $3n - 6$  инвариантных переменных в явном виде, можно для этого выбрать следующие скалярные произведения:

$$\begin{aligned}x_{12}, x_{13}, x_{23}, \\ x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \quad i = 4, \dots, n.\end{aligned}\tag{7.35}$$

Подстановка их в (7.31) и (7.33) однозначным образом фиксирует значения  $p_1, \dots, p_n$  в системе отсчета  $R(1, 2, 3)$ , за исключением знаков  $p_{iy}$ . Следовательно, отображение множества (7.35) на множества (7.31), (7.33) — это отображение «один к  $2^{n-3}$ ». Если, кроме того, задать множество  $x_{45}, \dots, x_{4n}$ , то и знаки  $p_{5y}, \dots, p_{ny}$  будут фиксированы. Если к тому же удовлетворены неравенства (7.32), (7.34), то все составляющие импульсов получаются действительными, т. е. мы определим физическую область.

Если же исходить из совокупности всех  $1/2n(n-1)$  скалярных произведений  $x_{ij}$ , то сначала надо исключить те из них, которые не входят в множество (7.35), используя для этого условия на определители Грама, о которых говорилось выше вслед

за формулой (7.4). Эти условия могут быть записаны в виде [3—5]

$$\Delta_5(p_1, p_2, p_3, p_4, p_i) = 0, \quad i = 5, \dots, n, \quad (7.36)$$

$$G\left(\begin{matrix} p_1, p_2, p_3, p_4, p_i \\ p_1, p_2, p_3, p_4, p_j \end{matrix}\right) = 0, \quad 5 \leq i < j \leq n. \quad (7.37)$$

Уравнения (7.37) [всего их  $\frac{1}{2}(n-4)(n-5)$ ] линейны по  $x_{ij}$ ,  $5 \leq i < j \leq n$ . Уравнения (7.36) [их  $(n-4)$ ] — квадратичны по  $x_{45}, \dots, x_{4n}$ ; решая их, получаем два знака для  $p_i^y$  в уравнении (7.33). Мы приходим к следующей теореме.

**Теорема 3.** Множество  $X = (x_{ij})$  со свойствами  $x_{ij} = x_{ji}$ ,  $x_{ii} = m_i^2 > 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , отвечает физической конфигурации 4-импульсов  $p_1, \dots, p_n$  со скалярными произведениями  $p_i \cdot p_j = x_{ij}$  тогда и только тогда, когда имеется такая перестановка индексов  $i$ , что выполняются условия (7.32), (7.34) и (7.36), (7.37).

До сих пор мы рассматривали только импульсы  $p_1, \dots, p_n$  конечного состояния. Сохранения 4-импульса позволяет включить в число переменных скалярные произведения  $x_{0i} = p_0 \cdot p_i$  или любые квадраты 4-передат  $(p_0 - p_{i_1} - \dots - p_{i_l})^2$ . Умножая

$p_0 = \sum_{i=1}^n p_i$  на  $p_i$ , получаем

$$x_{0i} = \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.38)$$

### в. Физическая область в процессе $2 \rightarrow n-1$

Распад (7.1) с помощью кроссинг-преобразования может быть связан с рядом других процессов. Энергии выходящих и входящих частиц (временеподобные векторы из переднего и заднего светового конуса) имеют противоположные знаки. Если взять пару частиц, то в зависимости от знака  $x_{ij} = p_i \cdot p_j$  ( $= \pm m_i E_j$  в системе покоя  $i$ ) различаются два случая:

$$x_{ij} \geq m_i m_j, \quad s_{ij} = (p_i + p_j)^2 \geq (m_i + m_j)^2 \quad (7.39)$$

и

$$x_{ij} \leq -m_i m_j, \quad s_{ij} = (p_i + p_j)^2 \leq (m_i - m_j)^2. \quad (7.40)$$

Следовательно, в пространстве  $x_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) физические области разных перекрестных каналов разъединены. Преобразование  $p_i \rightarrow -p_i$  меняет знак  $x_{ij}$  и равнозначно преобразованию от одного канала к другому. Однако одновременное изменение знаков всех  $p_i$  не меняет матрицу  $X$ . Это значит, что процессы

$0 + \dots + m \rightarrow (m+1) + \dots + n$  и  $(m+1) + \dots + n \rightarrow 0 + \dots + m$  в пространстве  $x_{ij}$  имеют одну и ту же физическую область. Следовательно, в пространстве инвариантов имеется всего  $2^{n-1}$  физических областей, отделенных друг от друга, но связанных кроссинг-преобразованиями.

Согласно равенствам (A.4) и (A.3), когда один из аргументов  $p_i$  меняет знак,  $\Delta_i(p_1, \dots, p_l)$  не меняется, а несимметричный определитель Грама  $G$  только меняет знак. Следовательно, все  $2^{n-1}$  физических областей определяются одним и тем же набором условий (7.32), (7.34) и (7.36), (7.37). Только выбор знаков  $n-1$  скалярных произведений (т. е.  $x_{12}, \dots, x_{1n}$ ) позволяет отличить один кросс-канал реакции от другого. В частности, физическая область для реакции

$$0 + \bar{n} \rightarrow 1 + \dots + (n-1) \quad (7.41)$$

определяется теми же теоремами 1, 2 и 3 с ограничением (7.4) и условиями  $x_{12}, \dots, x_{1, n-1} > 0, x_{1n} < 0$ .

**Пример 2.** При  $n=3$  реакции могут быть двух типов:  $0 \rightarrow 1 + 2 + 3$  или  $0 + \bar{3} \rightarrow 1 + 2$ . Переменные здесь  $s = m_1^2 + m_2^2 + 2x_{12}$ ,  $t = m_2^2 + m_3^2 + 2x_{23}$  и  $u = m_1^2 + m_3^2 + 2x_{13}$ . Равенство (7.4) превращается в  $s + t + u = m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$ . Условие  $\Delta_3(1, 2, 3) > 0$  определяет четыре физические области, показанные на фиг. 28. Далее, должна существовать такая пара  $i, j$ , что  $\Delta_2(i, j) < 0$ , т. е.

$$\lambda(s_{ij}, m_i^2, m_j^2) = \{s_{ij} - (m_i + m_j)^2\} \{s_{ij} - (m_i - m_j)^2\} > 0.$$

Это подразумевает, что

$$s_{ij} > (m_i + m_j)^2 \quad \text{или} \quad s_{ij} < (m_i - m_j)^2. \quad (7.42)$$

Сравнивая (7.42) с (7.39) и (7.40), мы видим, что эти два случая отвечают разным реакциям. При тех массах, что были взяты на фиг. 28, центральная область запрещена условием (7.42) и физическими являются только каналы  $s, t, u$ . На фиг. 29 разрешен и распад: он удовлетворяет неравенствам  $\Delta_3 > 0, \Delta_2 < 0$ .

### г. Распад на четыре частицы

Для описания процесса  $1 \rightarrow 4$  имеется пять независимых переменных. Множество  $x_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$  состоит из шести величин, связанных равенством (7.4). Другое множество образуют  $s_{ij} = m_i^2 + m_j^2 + 2x_{ij}$ , связанные равенством

$$\sum_{i < j} s_{ij} = m_0^2 + 2 \sum_i m_i^2. \quad (7.43)$$



Четыре трехчастичных квадрата масс линейно связаны с  $s_{ij}$ :

$$s_{ijk} = s_{ij} + s_{ik} + s_{jk} - m_i^2 - m_j^2 - m_k^2. \quad (7.44)$$

Существует много способов выбора пяти независимых переменных из  $x_{ij}$ ,  $s_{ij}$ ,  $s_{ijk}$  и т. д. Но благодаря линейной связи между наборами переменных якобиан перехода от одного набора к другому есть просто константа. Следовательно, если не считать тривиальных линейных преобразований, инвариантные переменные выбираются в этой задаче единственным образом.

Процесс  $1 \rightarrow 4$  связан с процессом  $2 \rightarrow 3$  перекрестным преобразованием. Их инвариантные описания эквивалентны; как и для процесса  $2 \rightarrow 3$ , удобные переменные для процесса  $1 \rightarrow 4$  часто выбираются циклически симметричным образом:  $t_{01} = s_{234}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{23}$ ,  $s_{34}$ ,  $t_{40} = s_{123}$ . Физическая область дается неравенствами (7.32) и может быть выражена через кинематические функции  $\lambda$ ,  $G$  и  $B$ .

### 8. Фазовая плотность в инвариантных переменных

Чтобы выразить  $I_n$  через совокупность  $\Phi$  инвариантных переменных, надо уметь выразить в этих переменных фазовую плотность  $\rho_n(\Phi)$ , определяемую соотношением (1.2). Интегрирование  $R_n$  по  $p_n$  дает

$$R_n = \int \prod_{i=1}^{n-1} d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \delta\{(p_0 - p_1 - \dots - p_{n-1})^2 - m_n^2\}. \quad (8.1)$$

Раскроем скобки в аргументе  $\delta$ -функции и учтем равенство (7.38). Мы увидим, что последняя  $\delta$ -функция равна половине выражения

$$\begin{aligned} \delta(\xi) &= \delta\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij} - K\right) = \\ &= \delta\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n-1} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n-1} x_{0i} - K + m_0^2 - m_n^2\right), \end{aligned} \quad (8.2)$$

где  $K$  определено равенством (7.4). Следовательно, мы имеем

$$R_n = \frac{1}{2} \int \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta(\xi). \quad (8.3)$$

Далее рассмотрим порознь случаи  $n \leq 4$  и  $n > 4$ , так как в последнем случае приходится учитывать неприятное ограничение (7.20).

а. Случай  $n \leq 4$ 

Чтобы написать  $p_i$  в явном виде, следует выбрать систему отсчета. Для начала мы выбираем систему покоя  $p_0$ . Из  $x_{01} = m_0 E_1$  получаем  $\partial x_{01} / \partial P_1 = m_0 P_1 / E_1$ , а равенство (II.7.3) дает

$$\int \frac{d^3 p_1}{2E_1} = 4\pi \int \frac{dP_1 P_1^2}{2E_1} = 2\pi m_0^{-2} \int dx_{01} \{-\Delta_2(p_0, p_1)\}^{1/2}. \quad (8.4)$$

Затем выбираем направление  $p_1$  в качестве оси  $z$ . Якобиан равен

$$\frac{\partial(x_{02}, x_{12})}{\partial(P_2, \cos \theta_{12})} = \frac{m_0 P_1 P_2^2}{E_2}, \quad (8.5)$$

а равенство (II.7.3) дает

$$\int \frac{d^3 p_2}{2E_2} = 2\pi \int \frac{dP_2 P_2^2 d \cos \theta_{12}}{2E_2} = \pi \int dx_{02} dx_{12} \{-\Delta_2(p_0, p_1)\}^{-1/2}. \quad (8.6)$$

После этого рассмотрим  $d^3 p_3 / 2E_3 = dP_3 P_3 d\Omega_3 / 2E_3$  в системе отсчета  $R(0, 1, 2)$ . В этом случае  $x_{03} = m_0 E_3$  приводит к  $dP_3 P_3^2 / 2E_3 = dx_{03} (-\Delta_2)^{1/2} / 2m_0^2$ , а  $d\Omega_3$  получается прямо из равенства (II.7.21). Мы получаем

$$\int \frac{d^3 p_3}{2E_3} = \int dx_{03} dx_{13} dx_{23} [-\Delta_4(p_0, p_1, p_2, p_3)]^{-1/2}. \quad (8.7)$$

Здесь следует вспомнить, что каждой тройке  $x_{03}, x_{13}, x_{23}$  отвечают два значения  $p_3$ , зеркально отраженные в плоскости  $p_1, p_2$ . Чтобы это учесть, в правую часть равенства (8.7) мы включили множитель 2. Заметим также, что в (8.4)–(8.7) не входит  $\Delta_3$ .

После того как были выведены соотношения (8.4)–(8.7), совокупность переменных  $x_{ij}$ ,  $0 \leq i < j \leq n-1$  мы можем непосредственно заменить на  $x_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , так как якобиан такой замены равен единице. Формулы (8.3)–(8.6) дают для двух- и трехчастичных распадов

$$R_2 = \frac{\pi}{m_0^2} \int dx_{12} (-\Delta_2)^{1/2} \delta(x_{12} - K) = \frac{\pi}{m_0^2} \{-\Delta_2(p_0, p_1)\}^{1/2}, \quad (8.8)$$

$$R_3 = \frac{\pi^2}{m_j^2} \int dx_{12} dx_{23} = \frac{\pi^2}{4m_j^2} \int ds_{12} ds_{23} \quad (8.9)$$

[см. равенства (IV.1.10) и (V.2.10)]. Для процесса  $1 \rightarrow 4$

$$R_4 = \frac{\pi^2}{m_j^2} \int \prod dx_{ij} (-\Delta_4)^{-1/2} \delta\left(\sum x_{ij} - K\right). \quad (8.10)$$

При переходе к пяти симметричным переменным используются тождества

$$\begin{aligned} s_{34} = s_{012} &= 2(x_{01} + x_{02} + x_{12}) + \text{квадраты масс}, \\ t_{40} = s_{123} &= 2(x_{12} + x_{13} + x_{23}) + \text{квадраты масс}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Якобиан равен  $2^5$ ; в итоге получаем

$$R_4 = \frac{\pi^2}{32m_j^2} \int \frac{dt_{01} ds_{12} ds_{23} ds_{34} dt_{40}}{(-\Delta_4)^{1/2}}. \quad (8.12)$$

Явное выражение для  $-\Delta_4 = 1/16 B$  получается из определителей (V.9.4), (V.9.5) заменой  $t_1, s_1, s_2, t_2, s \rightarrow t_{01}, s_{12}, s_{23}, s_{34}, t_{40}$ .

### б. Случай $n > 4$

При  $n > 4$  заменяем индекс 3 в (8.7) на  $4, \dots, n-1$  и подставляем эти выражения в (8.3); в результате находим

$$R_n = \frac{\pi^2}{m_j^2} \int dx_{01} dx_{02} dx_{12} \prod_{i=3}^{n-1} \frac{dx_{0i} dx_{1i} dx_{2i}}{\{-\Delta_4(p_0, p_1, p_2, p_i)\}^{1/2}} \delta(\xi). \quad (8.13)$$

Равноценная этой (и тривиально с нею связанная) несимметричная совокупность переменных приведена в (7.35), а соответствующая физическая область дается неравенствами (7.32) и (7.34). Можно заменить  $p_i, i = 1, \dots, n$  линейными комбинациями  $p_i$  и получить множество различных неэквивалентных друг другу представлений. Один из способов получения таких формул состоит в том, чтобы расписать в явном виде подпроцессы на дереве импульсов (написать рекуррентные соотношения), выразив их через чисто инвариантные переменные, — это даст полностью инвариантную параметризацию  $R_n$ . Пример такой записи был приведен в конце раздела 2; он включает переменные  $t_i, s_i, M_i^2$ .

Чтобы вычислить  $\rho_n(\Phi)$  для полного симметричного набора всех  $x_i$ , [удовлетворяющих ограничению (7.20)], требуется куда более мощная техника. Мы приведем лишь окончательные результаты [25, 26].

Факторизация (7.15) предполагает соответствующую факторизацию дифференциальных элементов объема групп, входящих в (7.15). Это группа Лоренца  $\{L\}$ , ортогональная группа  $\{U\}$  и группа  $\{B\}$ , связанная с «диагональными» матрицами  $B$ . При  $n > 4$  матрица  $U$  в (7.15) может быть заменена на

$$U \rightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} U, \quad (8.14)$$

где  $I$  — единичная матрица  $4 \times 4$ , а  $V$  — любая ортогональная матрица порядка  $(n-4) \times (n-4)$ . Эта замена не меняет  $A$ , так как  $B_{ij} = 0$  при  $j > 4$ . Если считать все  $U$ , связанные преобразованием (8.14), эквивалентными друг другу, то число параметров в остающейся совокупности  $\{U'\}$  равно  $4n - 10$ .

В группе Лоренца  $\{L\}$  имеется шесть параметров, а в группе  $\{B\}$  — четыре параметра; их можно принять равными  $\bar{\Delta}_1, \dots, \bar{\Delta}_4$ . Пусть  $d\{U'\}$  и  $d\{L\}$  обозначают элементы объема совокупности ортогональных преобразований  $U'$  и группы преобразований Лоренца  $L$ . Тогда можно доказать, что

$$\prod_{i=1}^n d^4 p_i = d\{A\} = 2^{-4} \bar{\Delta}_4^{(n-5)/2} d\{U'\} d\{L\} \prod_{i=1}^4 d\bar{\Delta}_i = \quad (8.15)$$

$$= 2^{-4} \prod_{v=1}^{n-4} S_v^{-1} \bar{\Delta}_4^{(n-5)/2} d\{L\} \prod_{0 \leq i \leq j \leq n-1} dx_{ij} \prod_{i=5}^n \delta(\bar{\Delta}_i). \quad (8.16)$$

Здесь  $S_v$  — площадь поверхности единичной сферы  $x_1^2 + \dots + x_v^2 = 1$  [см. (6.14)].

Подстановка выражения (8.16) в (1.2) дает

$$R_n = 2^{-4} \prod_{v=1}^{n-4} S_v^{-1} \int \prod_{i < j} dx_{ij} d\{L\} \bar{\Delta}_4^{(n-5)/2} \prod_{i=1}^n \delta(p_i^2 - m_i^2) \times \\ \times \prod_{i=5}^n \delta(\bar{\Delta}_i) \delta^4(p_0 - \sum p_i). \quad (8.17)$$

Здесь  $\delta^4(p_0 - p)$  можно выразить через преобразование Лоренца:

$$\delta^4(p_0 - p) = 2m_0^{-2} \delta(m_0^2 - m^2) \delta^3(L_0 - L). \quad (8.18)$$

Разбивая  $\{L\}$  на сдвиг  $L$  и на трех- и двумерные вращения  $\Omega^{(3)}$ ,  $\Omega^{(2)}$ , получаем

$$\int dL d\Omega^{(3)} d\Omega^{(2)} \delta^4(p_0 - L \sum p_i) = \frac{16\pi^2}{m_0^2} \delta\{m_0^2 - (\sum p_i)^2\}. \quad (8.19)$$

Используя равенство (8.2) и интегрируя по  $p_i^2 = x_{ii}$ , находим

$$R_n = \left( \frac{n^2}{m_0^2} \prod_{v=1}^{n-4} S_v^{-1} \right) \int \prod_{i < j} dx_{ij} \bar{\Delta}_4^{(n-5)/2} \prod_{i=5}^n \delta(\bar{\Delta}_i) \delta(\xi). \quad (8.20)$$

Индексы  $i, j$  могут пробегать значения либо от 0 до  $n-1$ ; либо от 1 до  $n$ .

Выражение (8.15) позволяет найти представление, которое полностью инвариантно, симметрично по индексам частиц и содержит в себе вместо  $\delta(\bar{\Delta}_i)$  ограничения на  $x_{ii}$ . Подставляя (8.15) в (1.2) и используя соотношение (8.19), получаем

$$R_n = \frac{\pi^2}{2m_0^2} \int d\{U'\} \prod_{i=1}^4 d\bar{\Delta}_i \bar{\Delta}_4^{(n-5)/2} \prod_{i=1}^n \delta(x_{ii} - m_i^2) \delta(\xi). \quad (8.21)$$

Одной из простых параметризаций множества  $\{U\}$  является совокупность последовательных вращений  $\Omega^{(l)}$ , каждое из которых действует в двумерной плоскости  $l$ -мерного пространства:

$$\{U'\} = (\Omega^{(n)}, \Omega^{(n-1)}, \Omega^{(n-2)}, \Omega^{(n-3)}). \quad (8.22)$$

Эта совокупность характеризуется  $4n - 10$  параметрами; чтобы задать каждое  $\Omega^{(l)}$ , требуется указать нормаль к плоскости ( $l - 2$  параметра) и угол поворота.

### в. Процессы столкновения

Если подставить тождество

$$2E_1 \delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_a) = \frac{m_b^2}{\pi \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \delta\left\{x_{a1} - \frac{1}{2}(s - m_a^2 - m_b^2)\right\} \quad (8.23)$$

в выражение (1.2), где положено  $p_a \equiv p$ , и проинтегрировать по  $\mathbf{p}_1$ , мы получим в точности  $R_{n-1}(p_a, p_b)$  для процесса  $a + b \rightarrow 2 + \dots + n$ . Если переменить затем индексы, чтобы они соответствовали процессу  $a + b \rightarrow 1 + \dots + n$ , и проинтегрировать по  $x_{ab}$ , то из формул (8.8), (8.9) и (8.23) при  $n = 2$  и  $n = 3$  просто получаются выражения (IV.4.24) и (V.9.2). При  $n \geq 4$  из (8.20) следует

$$R_n(p_a, p_b) = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \prod_{v=1}^{n-3} S_v^{-1} \int dx_{a1} \dots dx_{a, n-1} dx_{b1} \dots dx_{b, n-1} \times \\ \times \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} dx_{ij} (\bar{\Delta}_4)^{(n-4)/2} \prod_{l=5}^{n+1} \delta(\bar{\Delta}_l) \delta(\xi). \quad (8.24)$$

Поскольку в (8.24) входит  $\delta(\xi)$ , можно провести интегрирование по любому из  $dx$ .

### Упражнения

VI.1. Пусть имеется динамическая модель, в которой сечение  $\sigma_n$  рождения  $n$ -частичного состояния при высоких энергиях дается выражением

$$\sigma_n(E) = \lambda^n E^{-2} R_n^{yp}(E),$$

где  $E$  — полная энергия в СЦМ, а  $R_n^{yp}$  определяется выражением (2.17). Выразите

$$а) \sigma(E) = \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n(E),$$

$$б) \langle n \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \sigma_n(E)}{\sigma(E)}$$

через модифицированные функции Бесселя,

Пусть вместо этого сечение определено как  $\sigma_n(E)/\sigma(E)$ ; покажите, что при этом экспоненциально подавляются большие значения 3-импульсов.

VI.2. Докажите справедливость нерелятивистской формулы (2.19) для  $R_n^{\text{HP}}(M_n^2)$ , заменяя  $M_n$  в рекуррентном соотношении кинетической энергией  $T_n = M_n - \mu_n$ .

VI.3. Покажите, что при  $n = 3$  рекуррентное соотношение (2.27) эквивалентно соотношению (V.7.7), так что  $\phi_1$  можно отождествить с углом Треймана — Янга в системе покоя  $12$ .

VI.4. Какое рекуррентное соотношение получается, если выбрать ось  $z$  вдоль направления  $\mathbf{k}_{i+2}$  ( $k_{n+1} = p_a$ ) в системе отсчета  $\mathbf{k}_{i+1} = 0$  на фиг. 63 и заменить полярный угол  $\theta_i$  инвариантом

$$s_{i+1} = (k_{i+2} - k_i)^2 = (p_{i+2} + p_{i+1})^2, \quad p_{n+1} = -p_b?$$

Покажите, что это соотношение эквивалентно соотношению (V.7.8) при  $n = 3$ .

VI.5. Минимум правой части уравнения (3.49) достигается при  $\cos \omega_i = -1$ . Выведите из этого следующее условие [44], справедливое в мультiredжевском пределе:

$$\frac{s_1 s_2 \dots s_{n-1}}{s} \leq [V - t_1 + \sqrt{-t_2}]^2 + m_2^2] \times \dots \\ \dots \times [(\sqrt{-t_{n-2}} + \sqrt{-t_{n-1}})^2 + m_{n-1}^2].$$

VI.6. Покажите, что интегрирование  $\delta$ -функции в соотношении (3.50) по  $\omega_2$  (при  $n = 3$ ) приводит к выражению (V.11.24) для  $d^2\sigma/ds_1 ds_2$ .

VI.7. Граница диаграммы Чу — Лоу дается уравнением (4.19). Найдите наклоны асимптот этой кривой и покажите, что они всегда положительны для реальных частиц.

VI.8. Выведите формулу

$$R_4 = \frac{1}{2} \pi^2 \int dE_1 dE_2 dE_3 dP_{12} d\varphi,$$

где  $P_{12} = |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|$ , а  $\varphi$  — азимутальный угол  $\mathbf{p}_3$  по отношению к оси  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ .

VI.9. Выведите уравнение (4.29) для распределения в СЦМ косинусов углов между двумя импульсами по фазовому объему (реакция  $p_a + p_b \rightarrow p_1 + \dots + p_n$ ). Что получается при  $n = 3$ ?

VI.10. Вычислите  $d^2 R_4 / dM_{123}^2 dM_{12}^2$  для распада  $1 \rightarrow 4$ . Какова физическая область в плоскости  $M_{123}^2 M_{12}^2$ ?

VI.11. Какова физическая область в плоскости  $M_{1234}^2 M_{3456}^2$  для шести частиц в конечном состоянии? Что будет, если в конечном состоянии имеется семь частиц?

VI. 12. Покажите, что средние значения поперечного и продольного импульсов в СЦМ реакции  $2 \rightarrow n$  в предположении распределения по фазовому объему связаны соотношением  $\langle r_i \rangle = 1/2\pi \langle q_i \rangle$ .

VI. 13. Покажите, что если проинтегрировать  $L_2$  в уравнении (5.12) по  $r_1$  и  $r_2$ , то получится известное выражение для  $R_2$ .

VI. 14. Преобразуйте  $L_n$  к форме

$$L_n(s) = 2^{1-n} \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \int dt'_{n-1} \dots dt'_1 \prod_{i=1}^n \lambda^{-1/2}(t'_i, t'_{i-1}, m_i^2) \times \\ \times \delta\{s - m_a^2 - m_b^2 - 2m_a m_b \operatorname{ch}(\eta_1 + \dots + \eta_n)\}$$

по образцу преобразований  $R_n$  в разделе 3. Здесь  $\eta_i$  вычисляется из соответствующим образом обобщенных на произвольное  $n$  формул (3.38);  $t_i$  заменено на  $t'_i$ ,  $t_n = m_b^2$ ,  $t_0 = m_a^2$ .

VI. 15. Докажите справедливость ультрарелятивистского предела  $L_n$  [формула (5.17)], показав, что он удовлетворяет соотношению (5.14).

VI. 16. Оцените интеграл

$$I = \int \prod_i^n \{d^2 r_i f_i(r_i)\} \delta^2(\sum r_i),$$

где а)  $f_i = \exp(-ar_i)$  б)  $f_i = \exp(-ar_i^2)$ .

VI. 17. Проверьте правильность формулы (6.14), дающей площадь поверхности единичной сферы в  $m$ -мерном эвклидовом пространстве.

VI. 18. Определите области продольного фазового пространства, населенные конфигурациями, удовлетворяющими условию (V.11.19) реджевского предела по всем переменным и соответствующими диаграммам на фиг. 78. Наблюдается ли перекрытие при  $s \rightarrow \infty$ ?

## Глава VII

### ИНКЛЮЗИВНЫЕ РЕАКЦИИ

#### 1. Одночастичные распределения

До сих пор мы рассматривали в этой книге только эксклюзивные реакции. Обратимся теперь к инклюзивному процессу

$$a + b \rightarrow c + X, \quad (1.1)$$

где  $X$  обозначает неизвестную систему частиц. Экспериментально ситуацию (1.1) можно реализовать при помощи детекторов, настроенных только на регистрацию частиц  $c$  и измеряющих их импульс. Для краткости в этой главе нигде (кроме массы  $m_c$ ) индекс  $c$  при переменных (типа  $E$ ,  $P$ ,  $\Omega$ ,  $q$ ,  $r$  и т. д.) ставиться не будет. Итак, в лабораторной системе отсчета измеряется величина

$$\frac{d^3\sigma_c}{d^3p} = \frac{P^{-2}d^3\sigma}{dPd\Omega}. \quad (1.2)$$

Это *одночастичное распределение*, или одночастичный спектр. Как было продемонстрировано уравнениями (III. 4.20) — (III. 4.22),  $d^3\sigma_c/d^3p$  не является лоренц-инвариантной величиной. Вместо этого можно определить инвариантную функцию распределения

$$E \frac{d^3\sigma_c}{d^3p} = f(p; s). \quad (1.3)$$

Важно себе ясно представлять, что означает инвариантность  $f(p; s)$ . Если функция  $f(p; s)$  известна в одной системе отсчета, то можно получить ее в другой системе отсчета, в которой  $p$  имеет значение  $p'$ , просто выразив  $p$  как функцию  $p'$ . Если бы в определении (1.3) отсутствовало  $E$ , такая процедура пересчета одной только шкалы приводила бы к неверному результату — требовалось бы еще добавочное умножение на якобиан [выражение (III. 4.22)].

В процессах, дающих вклад в инклюзивное сечение  $\sigma_c^{\text{инкл}}(s)$ , может возникать не одна частица  $c$ , а несколько. Пусть  $\sigma_c^n$  — сечение рождения  $n$  частиц сорта  $c$ . Тогда

$$\sigma_c^{\text{инкл}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n \sigma_c^n(s) = \langle n_c \rangle \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_c^n(s) = \langle n_c \rangle \sigma_c(s), \quad (1.4)$$



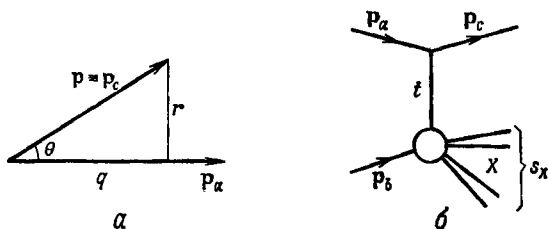
где  $\sigma_c(s)$  — обычное сечение рождения частицы  $c$ ,  $\langle n_c \rangle$  — среднее число частиц  $c$ , образуемых в реакции  $a + b \rightarrow c + X$ . Следовательно, каждое событие, в котором рождается  $n$  частиц сорта  $c$ , дает  $n$ -кратный вклад в инклюзивное сечение:  $\sigma_c$  считает события, а  $\sigma_c^{\text{инкл}}$  — частицы.

Интегрируя соотношение (1.3) по  $\mathbf{p}$ , мы приходим к следующим формулам:

$$\int d^3p E^{-1} f(\mathbf{p}; s) = \int d^3p \frac{d^3\sigma_c}{d^3p} = \sigma_c^{\text{инкл}} = \langle n_c \rangle \sigma_c(s), \quad (1.5)$$

$$\int d^3p^* f(\mathbf{p}^*; s) = \int d^3p^* E^* \frac{d^3\sigma_c}{d^3p^*} = \eta_c \sqrt{s} \sigma_c(s). \quad (1.6)$$

В формуле (1.6)  $\eta_c$  обозначает ту часть полной энергии  $\sqrt{s}$  в СЦМ, которая уносится частицами сорта  $c$ ; она связана с



Фиг. 80.

коэффициентом неупругости столкновения. Формула (1.6) — частный случай правила сумм для импульсов (упражнение VII.13).

В экспериментах с неполяризованными падающими частицами распределение  $f(\mathbf{p}; s)$  не зависит от поворотов вокруг оси пучка. Следовательно, оно зависит лишь от трех существенных переменных. Одна из этих переменных — полная энергия  $\sqrt{s}$ ; в качестве остальных двух переменных обычно используется один из следующих пяти наборов:

- 1)  $P$  и  $\theta$  — абсолютная величина и полярный угол вектора  $\mathbf{p}$  (импульса частицы  $c$ ), см фиг. 80;
- 2)  $q$  и  $r$  — продольная и поперечная составляющие вектора  $\mathbf{p}$ ;
- 3)  $t$  — квадрат инвариантной передачи импульса от частицы  $a$  к частице  $c$ , и  $s_X$  — квадрат инвариантной массы ненаблюдаемой системы, или недостающей массы:

$$t = (p_a - p_c)^2, \quad (1.7)$$

$$s_X = (p_a + p_b - p_c)^2; \quad (1.8)$$

- 4)  $t$  и  $v$ , где  $v$  — энергия той виртуальной частицы, которая осуществляет обмен на фиг. 80, б в системе покоя мишени; она

связана с  $s_X$  и  $t$  равенством

$$v = E_a^M - E^M = \frac{s_X - t - m_b^2}{2m_b}; \quad (1.9)$$

величина  $v$  употребляется главным образом тогда, когда частицы  $a$  и  $c$  тождественны; тогда  $v$  представляет собой просто *потерю энергии частицы  $a$* , в этом случае принято обозначать  $t \equiv -q^2$  (этот 4-вектор передачи импульса не следует путать с продольной составляющей импульса  $p$ , также обозначаемой  $q$ );

5)  $r$  и  $\zeta$ , где  $\zeta$  — продольная быстрота, определяемая по аналогии с (II.1.9) как

$$\begin{aligned} q &= m'_c \operatorname{sh} \zeta, \\ E &= m'_c \operatorname{ch} \zeta, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$m'_c = (m_c^2 + r^2)^{1/2} = (E^2 - q^2)^{1/2}; \quad (1.11)$$

разрешив уравнения (1.10) относительно  $\zeta$ , получаем эквивалентные определения

$$\zeta = \frac{1}{2} \ln \frac{E + q}{E - q} = \ln \frac{E + q}{m'_c} = \ln \frac{m'_c}{E - q}. \quad (1.12)$$

Эти пять наборов величин можно еще рассматривать в разных системах отсчета. Для одночастичных спектров обычно употребляют системы отсчета, связанные с продольными преобразованиями Лоренца, в частности системы покоя мишени, пучка и центра масс. Соответственно мы будем отличать друг от друга переменные  $q^M$ ,  $q^*$  и  $q^H$ ;  $\zeta^M$ ,  $\zeta^*$  и  $\zeta^H$  и т. д. Можно и дальше несколько видоизменять эти наборы переменных, например употребляя  $r^2$  вместо  $r$ .

В разделах 2—4 мы рассмотрим все эти наборы переменных и для каждого из них найдем

величину  $d^3p/E$ ,  
физическую область изменения при данном  $s$ ,  
связь с другими переменными и их линии уровня.

Полученные результаты применимы с очевидными модификациями и к одночастичным распределениям в эксклюзивных реакциях. Ограничения на последние гораздо более сильны, поэтому физические области для эксклюзивных процессов лежат внутри таких же областей для инклюзивных процессов. Точно так же для инклюзивных процессов обычно не определяют понятие распределения по фазовому объему, однако его можно было бы при желании определить, указав относительные веса

тех каналов с различной множественностью, суммированием которых получается переход от эксклюзивных к инклюзивным реакциям.

## 2. Пары переменных $(P, \theta)$ и $(q, r)$

Пары переменных  $(P, \theta)$  и  $(q, r)$  удобно рассмотреть одновременно, так как одна из них выражает  $\mathbf{p}$  в декартовых координатах, а другая — в полярных. Для начала заметим, что в любой системе отсчета

$$\frac{d^3 p}{2E} = \pi \frac{P^2 dP d \cos \theta}{E} = \pi \frac{r dr dq}{E} = \pi \frac{dr^2 dq}{2E}, \quad (2.1)$$

так что инвариантная функция  $f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}, s)$  дается выражением

$$f(\mathbf{p}) = \frac{E}{P^2} \frac{d^2 \sigma}{dP d\Omega} = \frac{E}{2\pi P^2} \frac{d^2 \sigma}{dP d \cos \theta} = \frac{E}{2\pi r} \frac{d^2 \sigma}{dq dr} = \frac{E}{\pi} \frac{d^2 \sigma}{dq dr^2}. \quad (2.2)$$

Другие трансформационные свойства  $f$  следуют из формул, приведенных в разделе III. 4.

### а. Граница физической области [162\*]

Теперь мы хотим рассмотреть ту двумерную область в переменных  $(P, \cos \theta)$  или  $(q, r)$ , в которую попадают инклюзивные события. На фиг. 80, б наименьшая инвариантная масса  $m_2 + \dots + m_n$  у системы  $X$  получается тогда, когда составляющие ее частицы покоятся относительно друг друга, т. е. движутся с одинаковыми скоростями. Среди различных допустимых каналов имеется, в частности, тот, который дает наименьшее значение

$$s_X^{\text{мин}} = \min(m_2 + \dots + m_n)^2. \quad (2.3)$$

Значение  $s_X^{\text{мин}}$  задается однозначно квантовыми числами частиц  $a, b$  и  $c$ . Если  $a = c$ , то обычно  $s_X^{\text{мин}} = m_b^2$ , а если  $a \neq c$ , то в  $s_X^{\text{мин}}$  может входить масса либо одной частицы [как в реакции  $\pi^- p \rightarrow K^0 X$ , когда  $s_X^{\text{мин}} = m_A^2$ ], либо нескольких частиц [как в реакции  $pp \rightarrow \pi^+ X$ , когда  $s_X^{\text{мин}} = (m_n + m_p)^2$ ].

В СЦМ наибольшее значение  $P^*$  не зависит от  $\theta$  и равно

$$P_{\text{макс}}^* = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_c^2, s_X^{\text{мин}})}{2\sqrt{s}}. \quad (2.4)$$

Физическая область определяется неравенствами  $0 \leq p^* \leq p_{\text{макс}}^*$ ,  $0 \leq \theta^* \leq \pi$ . В плоскости  $q^* r$  физическая область оказывается окружностью

$$q^{*2} + r^2 \leq P_{\text{макс}}^{*2}. \quad (2.5)$$

Эта область в СЦМ носит название *диаграммы Пейру*<sup>1)</sup> (фиг. 81). Функция  $f(p)$  в уравнении (2.2) вне диаграммы Пейру обращается в нуль. Значение  $E^*$ , отвечающее импульсу (2.4), равно

$$E_{\text{макс}}^* = \frac{s + m_c^2 - s_X^{\text{мин}}}{2\sqrt{s}}, \quad (2.6)$$

а при больших  $s$

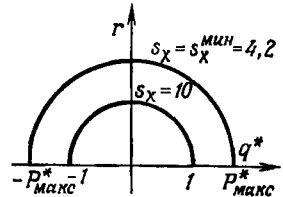
$$P_{\text{макс}}^* \approx E_{\text{макс}}^* \approx \frac{1}{2} \sqrt{s},$$

$$\frac{P_{\text{макс}}^*}{E_{\text{макс}}^*} \approx 1 - \frac{2m_c^2}{s}. \quad (2.7)$$

Физические области в других системах отсчета получаются преобразованиями Лоренца сферы радиуса (2.4) в импульсном

Фиг. 81. Диаграмма Пейру в СЦМ [уравнения (2.4), (2.5)] и кривые  $P^{*2} = q^{*2} + r^2 = \lambda(s, s_X, m_c^2)/4s$  — линии уровня  $s_X$  на плоскости  $q^*r$ .

Численные значения относятся к реакции  $pp \rightarrow KX$  при  $\sqrt{s} = 4.41$  ГэВ.



пространстве с помощью формул, приведенных в разделах II.8 и IV.3. Физическая область в переменных  $(P, \theta)$  получается из уравнений (II.8.19) — (II.8.22), а в переменных  $(q, r)$  — из уравнений (II.8.14), (II.8.15). В системе мишени физическая область изменения  $(P, \theta)$  дается неравенствами

$$\max\{0, P^{M-}(\cos \theta^M)\} \leq P^M \leq P^{M+}(\cos \theta^M), \quad (2.8)$$

где, согласно уравнению (IV.3.8),

$$P^{M\pm}(\cos \theta^M) = [P_a^M E_{\text{макс}}^* \sqrt{s} \cos \theta^M \pm (E_a^M + m_b) \times \\ \times \{s(P_{\text{макс}}^*)^2 - m_c^2(P_a^M)^2 \sin^2 \theta^M\}^{1/2}] \{s + (P_a^M)^2 \sin^2 \theta^M\}^{-1}. \quad (2.9)$$

Выражение под корнем обращается в нуль, когда

$$\sin \theta^M = \sin \theta_{\text{макс}}^M = \frac{\sqrt{s} P_{\text{макс}}^*}{m_c P_a^M} = \frac{m_b \lambda^{1/2}(s, m_c^2, s_X^{\text{мин}})}{m_c \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}. \quad (2.10)$$

При  $\sin \theta_{\text{макс}}^M > 1$  предельный угол  $\theta_{\text{макс}}^M$  отсутствует, и частица с может двигаться в системе покоя мишени в любом направлении. Например, для реакций  $p + p \rightarrow \pi + X$  это условие соблюдается всегда. При  $\sin \theta_{\text{макс}}^M \leq 1$  частица с всегда оказывается

<sup>1)</sup> Фактически это знакомый нам эллипс Блатона в СЦМ с нанесенными на нем линиями равной плотности событий. — *Прим. ред.*

внутри конуса  $0 \leq \theta^M \leq \theta_{\text{макс}}^M$ . Например, для реакции  $p + p \rightarrow p + X$   $\theta_{\text{макс}}^M = 90^\circ$ . Подстановка (2.10) в (2.9) дает значение  $P^M$  при предельном угле  $\theta_{\text{макс}}^M$

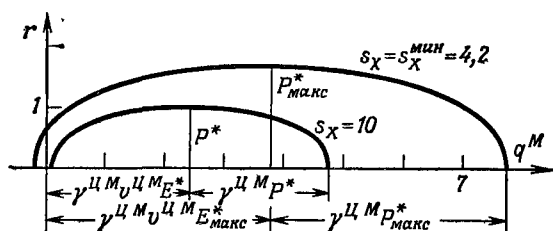
$$P^M(\cos \theta_{\text{макс}}^M) = \left\{ \left( \frac{m_c^2}{m_b} \frac{s + m_b^2 - m_a^2}{s + m_c^2 - s_X^{\text{мин}}} \right)^2 - m_c^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.11)$$

Примеры физических областей типа (2.8) приводятся в разделе 6 данной главы; детальная классификация их формы дана в работе [37]

В декартовых координатах  $(q^M, r)$  в системе мишени диаграмма Пейру получается из уравнений (II.8.14), (II.8.15). Она имеет вид

$$\left( \frac{q^M - \gamma_{\text{ЦМ}} v_{\text{ЦМ}} E_{\text{макс}}^*}{\gamma_{\text{ЦМ}} P_{\text{макс}}^*} \right)^2 + \left( \frac{r}{P_{\text{макс}}^*} \right)^2 = 1, \quad (2.12)$$

где  $v_{\text{ЦМ}}$  и  $\gamma_{\text{ЦМ}}$  даются соотношениями (II.6.23), (II.6.24). Конечно, уравнение (2.9) и уравнение (2.12) представляют одну и ту же кривую; она показана на фиг. 82.



Фиг. 82. Диаграмма Пейру [уравнение (2.12)] в системе мишени и линии уровня  $s_X$  на плоскости  $q^M, r$ .

Диаграмма получается из диаграммы фиг 81 преобразованием Лоренца. Численные значения относятся к реакции  $pp \rightarrow KX$  при  $\sqrt{s} = 4,4 \text{ ГэВ}$ .

Для исследований фрагментации мишени (раздел 5) полезно знать приближенную форму уравнения (2.12), справедливую при  $s \rightarrow \infty$  и конечных  $q^M$ . Ее легко получить, если пренебречь  $(q^M)^2$  в (2.12) и разложить  $v_{\text{ЦМ}}$  и  $P_{\text{макс}}^*/E_{\text{макс}}^*$  по степеням  $1/s$  [формулы (II.6.23) и (2.7)]. В пределе  $s \rightarrow \infty$  при конечном  $q^M$  диаграмма Пейру (в системе мишени) сводится к параболе, форма которой не зависит от  $s$ :

$$q^M = \frac{m_c^2 - m_b^2 + r^2}{2m_b}. \quad (2.13)$$

Как показано в работе [10], это эквивалентно равенству

$$E - q^M = \{(q^M)^2 + r^2 + m_c^2\}^{1/2} - q^M = m_b^*. \quad (2.14)$$

Кривая (2.13) приведена ниже на фиг. 93.

### б. Линии уровня на плоскости $qr$

В качестве примера линий уровня, или кривых постоянных значений, на диаграмме Пейру рассмотрим линии уровня  $s_x$ ,  $t$  и  $\xi$  на плоскостях  $q^*r$  и  $q^Mr$ , линии уровня  $\theta^*$  и  $P^*$  на плоскости  $q^Mr$  и линии уровня  $\theta^M$  и  $P^M$  на плоскости  $q^*r$ . Линии уровня  $s_x$  только что были определены: они получаются из уравнений (2.5) и (2.12), если заменить в выражении для  $P_{\text{макс}}^*$  величину  $s_x^{\text{мин}}$  на  $s_x$ . Следовательно, они являются окружностями на плоскости  $q^*r$  и эллипсами на плоскости  $q^Mr$  (фиг. 81 и 82). Кривые постоянного  $t$  [96] проще всего получить, если вычислить  $t$  в системе пучка:

$$t = (p_a - p_c)^2 = m_a^2 + m_c^2 - 2E^\Pi m_a. \quad (2.15)$$

Следовательно, в этой системе отсчета линии уровня  $t$  оказываются сферами:

$$(q^\Pi)^2 + r^2 = (p^\Pi)^2 = \frac{\lambda(m_a^2, m_c^2, t)}{4m_a^2}. \quad (2.16)$$

Преобразование в СЦМ или в систему мишени превращает линии уровня в эллипсы

$$\left( \frac{q - \gamma v E^\Pi}{\gamma p^\Pi} \right)^2 + \left( \frac{r}{p^\Pi} \right)^2 = 1, \quad (2.17)$$

где [см. формулы (II. 6.25) — (II. 6.28)]

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{s + m_a^2 - m_b^2}{2m_a \sqrt{s}}, & \text{если } q = q^*, \\ \gamma &= \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_a m_b}, & \text{если } q = q^M. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Поскольку лоренц-фактор  $\gamma$  перехода из системы пучка в систему мишени порядка  $s$  (при  $s \rightarrow \infty$ ), линии уровня  $t$  при таком переходе внезапно приобретают большой эксцентриситет. Эти линии в плоскости  $q^*r$  показаны на фиг. 83.

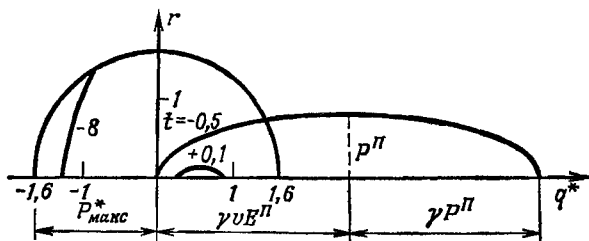
Линии уровня  $\theta^*$  на плоскости  $q^Mr$  получаются при помощи подстановки  $q^* = r \operatorname{ctg} \theta^*$  в формулу (II. 8.9), что дает

$$\gamma^{\text{ЦМ}} q^M - \gamma^{\text{ЦМ}} v^{\text{ЦМ}} [(q^M)^2 + r^2 + m_c^2]^{1/2} = r \operatorname{ctg} \theta^*, \quad (2.19)$$

а линии уровня  $\theta^M$  в плоскости  $q^*r$  получаются таким же способом из формулы (II.8.6):

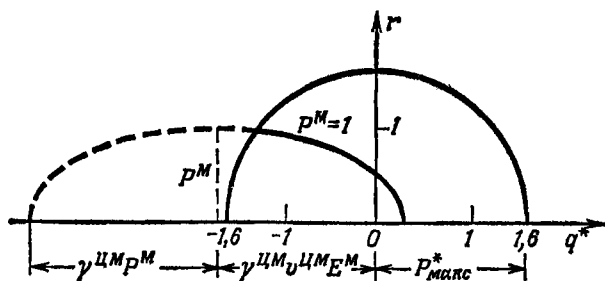
$$\gamma_{ЦМ} q^* + \gamma_{ЦМ} v_{ЦМ} [(q^*)^2 + r^2 + m_c^2]^{1/2} = r \operatorname{ctg} \theta^M. \quad (2.20)$$

Это — ветви гипербол. Линии уровня  $P^*$  на плоскости  $q^*r$  представляют собой эллипсы, получаемые из уравнений (II.8.19) — (II.8.22) или из уравнения (2.9) после замены в нем  $P_{\max}^*$  на



Фиг. 83. Линии уровня  $t$  [уравнение (2.17)] на диаграмме Пейру в СЦМ [ $t = (p_a - p_c)^2$ , реакция  $a + b \rightarrow c + X$ ].

$E^{\Pi}$ ,  $p^{\Pi}$  и  $\gamma$  определены формулами (2.15), (2.16), (2.18). Численные значения относятся к реакции  $Kp \rightarrow \pi X$  при 6 ГэВ/с.



Фиг. 84. Линии уровня  $P^M$  [уравнение (2.22)] на плоскости  $q^*r$  ( $P^M$  — импульс частицы  $c$  в реакции  $a + b \rightarrow c + X$  в системе мишени).

Численные значения относятся к реакции  $Kp \rightarrow \pi X$  при 6 ГэВ/с.

$P^*$  и  $s_X^{\min}$  на  $s_X = s + m_c^2 - 2E^* \sqrt{s}$  (см. фиг. 12). Линии уровня  $P^M$  на плоскости  $q^*r$  оказываются тоже эллипсами. Их уравнения получаются преобразованием Лоренца окружности

$$(q^M)^2 + r^2 = (P^M)^2 \quad (2.21)$$

из системы покоя мишени в СЦМ; они имеют вид

$$\left( \frac{q^* + \gamma_{ЦМ} v_{ЦМ} E^M}{\gamma_{ЦМ} P^M} \right)^2 + \left( \frac{r}{P^M} \right)^2 = 1. \quad (2.22)$$

На фиг. 84 показаны примеры таких эллипсов.

Наконец, чтобы найти *линии уровня*  $\zeta$ , следует преобразовать их определение (1.10), (1.11) к виду

$$\frac{q^2}{\text{sh}^2 \zeta} - r^2 = m_c^2 \quad (2.23)$$

и вспомнить, что знаки  $\zeta$  и  $q$  совпадают. Получаются гиперболы; их можно видеть ниже, на фиг. 92, 93. Заметим, что в уравнении (2.23) нет нужды оговаривать систему отсчета величин: вместо  $q$  и  $\zeta$  можно поставить  $q^*$ ,  $\zeta^*$ ;  $q^M$ ,  $\zeta^M$  и т. д.

### в. Влияние фактора $1/E$ на $d^3\sigma/d^3p$

Наличие фактора  $E$  в определении  $d^3\sigma/d^3p = f(\mathbf{p})/E$  инвариантной функции распределения  $f(\mathbf{p})$  приводит к некоторым резко выраженным эффектам. Эти эффекты, как и величина самого фактора, зависят от выбора системы отсчета. Функция  $1/E = (P^2 + m_c^2)^{-1/2}$  имеет максимум при  $P = 0$ ; этот пик особенно ясно выражен, когда  $m_c$  мало, например когда это  $\pi$ -мезон. Поэтому в измеряемых распределениях при  $P = 0$  могут возникать особенности, ведущие свое происхождение не от  $f(\mathbf{p})$ , а от фактора  $1/E$ . Для примера рассмотрим распределение продольных импульсов  $w(q)$  и зависимость среднего поперечного импульса  $\langle r(q) \rangle$  от  $q$ . Они вычисляются по формулам [см. (2.2)]

$$w(q) = \frac{\int dr \{r E^{-1} f(q, r)\}}{\int dr dq \{r E^{-1} f(q, r)\}}, \quad (2.24)$$

$$\langle r(q) \rangle = \frac{\int dr \{r^2 E^{-1} f(q, r)\}}{\int dr \{r E^{-1} f(q, r)\}}, \quad (2.25)$$

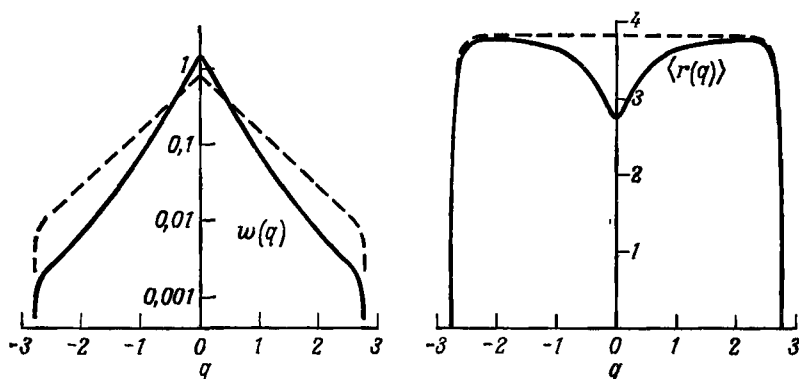
где интегрирование распространяется на всю диаграмму Пейру в соответствующей системе отсчета. На фиг. 85 показаны величины (2.24), (2.25), вычисленные с помощью модельной функции

$$f(q, r) = \exp(-1,7 |q^*|) r^{0.3} \exp(-6r) \quad (2.26)$$

для реакции  $pp \rightarrow \pi^- X$  при 19 Гэв/с. Чтобы проиллюстрировать влияние множителя  $E^{-1}$ , показаны также распределения для случая, когда этот множитель из формул (2.24) и (2.25) исключен. Для получения таких распределений каждому событию



следует присвоить вес  $E$ . Из фиг. 85 видно, как важен множитель  $E^{-1}$ . В частности, обращает на себя внимание так называемый «эффект чайки» [9] — минимум кривой  $\langle r(q) \rangle$  при малых  $q$ .



Фиг. 85. Величины  $w(q)$  и  $\langle r(q) \rangle$  [формулы (2.24), (2.25)], рассчитанные для модельной функции (2.26) (сплошные линии).

Штриховые линии изображают взвешенные распределения, которые получаются, если убрать  $E^{-1}$  из формул (2.24), (2.25).

Если брать события с весом  $E$ , эффект чайки исчезает; впрочем, он и тогда может возникнуть, но уже по динамическим причинам. Дальнейшие примеры такого рода читатель найдет в упражнениях VII. 4 и VII. 5<sup>1)</sup>.

### 3. Пары переменных $(t, s_x)$ и $(t, v)$

#### а. Переменные $t, s_x$

Согласно определениям (1.7), (1.8), имеем

$$t = m_a^2 + m_c^2 - 2E_a^M E^M + 2P_a^M P^M \cos \theta^M = \quad (3.1)$$

$$= m_a^2 + m_c^2 - 2E_a^* E^* + 2P_a^* P^* \cos \theta^* = \quad (3.2)$$

$$= m_a^2 + m_c^2 - 2m_a E^\Pi, \quad (3.3)$$

$$s_x = s + m_c^2 - 2(E_a^M + m_b) E^M + 2P_a^M P^M \cos \theta^M = \quad (3.4)$$

$$= s + m_c^2 - 2\sqrt{s} E^*. \quad (3.5)$$

Отсюда можно еще раз вывести уравнения линий уровня  $t$  и  $s_x$  в плоскостях  $q^*r$  и  $q^M r$ , но прежние выводы были проще. Заме-

<sup>1)</sup> Из фиг. 85 видно, что множитель  $E^{-1}$  может приводить как к пику, так и к впадине в спектре, а может и не создавать новых особенностей, — как, например, у импульсного спектра в нуле. — Прим. ред.

няя в уравнении (2.1)  $dP^*$  на  $ds_x$ , а  $d \cos \theta^*$  на  $dt$ , мы получаем

$$\frac{d^3 p}{2E} = \frac{\pi}{4\sqrt{s} P_a^*} dt ds_x = \frac{1}{2} \pi \lambda^{-1/2}(s, m_a^2, m_b^2) dt ds_x. \quad (3.6)$$

Следовательно, инвариантная функция  $f(p) \equiv f(t, s_x)$  дается выражением

$$f(t, s_x) = \frac{1}{\pi} \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \frac{d^2 \sigma}{dt ds_x}. \quad (3.7)$$

Из разделов V.5 и VI.4 известно, что физической областью в плоскости  $ts_x$  является диаграмма Чу—Лоу, определяемая неравенствами

$$G(s, t, s_x, m_a^2, m_b^2, m_c^2) \leq 0, \quad s_x \geq s_x^{\min}. \quad (3.8)$$

Можно воспользоваться формулами раздела V.5, заменив в них  $m_2 + m_3$  на  $(s_x^{\min})^{1/2}$ .

#### б. Линии уровня на плоскости $ts_x$

Мы рассмотрим линии уровня величин  $P^*$ ,  $\theta^*$ ,  $P^M$ ,  $q^*$ ,  $q^M$  и  $r$ . Кинематическая проблема состоит в том, чтобы в реакции  $2 \rightarrow 2$  с массами  $m_a + m_b \rightarrow m_c + \sqrt{s_x}$  связать две величины — 3-импульс частицы с и квадрат передачи  $s_x$ .

Линии уровня  $P^*$  представляют собой прямые, определяемые уравнением (3.5). Согласно (IV.5.18), линии уровня  $\theta^*$  определяются уравнением

$$4sG(s, t, s_x, m_a^2, m_b^2, m_c^2) + \sin^2 \theta^* \lambda(s, m_a^2, m_b^2) \lambda(s, m_c^2, s_x) = 0. \quad (3.9)$$

Точно так же из формулы (IV.4.13), положив  $m_b^2 + m_c^2 - u = s + t - s_x - m_a^2$ , находим, что линии уровня  $P^M$  также прямые линии

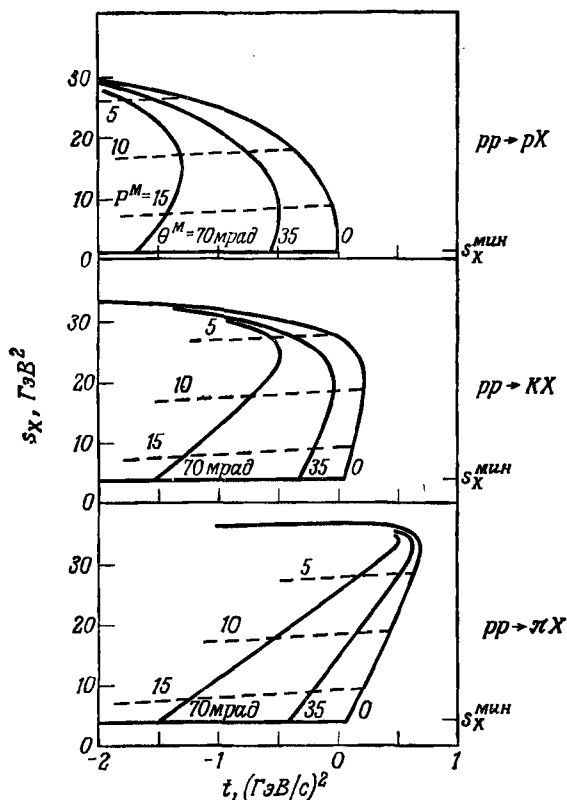
$$s_x = t + s - m_a^2 - 2m_b E^M \quad (3.10)$$

с наклоном, равным единице. Линии уровня  $\theta^M$  получаются из уравнения (IV.5.21):

$$4m_b^2 G(s, t, s_x, m_a^2, m_b^2, m_c^2) + \sin^2 \theta^M \lambda(s, m_a^2, m_b^2) \lambda(u, m_b^2, m_c^2) = 0. \quad (3.11)$$

Они, как и линии уровня (3.9), являются гиперболами. Чтобы их начертить, надо выписать в явном виде функции  $G$  и  $\lambda$ . Для  $\theta^* = 0$  и  $\theta^M = 0$  уравнения (3.9) и (3.11) сводятся к уравнению

границы (3.8). На фиг. 86 показаны примеры линий уровня (3.10) и (3.11). Шкала  $t$  растянута, чтобы была видна важная область малых  $|t|$ .



Фиг. 86. Кривые постоянных углов и постоянных импульсов в системе мишени на плоскости  $ts_X$  для инклюзивных реакций  $pp \rightarrow cX$  при 19 ГэВ/с.

Кривая  $\theta^M=0$  — граница физической области.

При  $r = P^* \sin \theta^* = P^M \sin \theta^M$  из уравнений (3.8) или (3.11) получается инвариантное представление

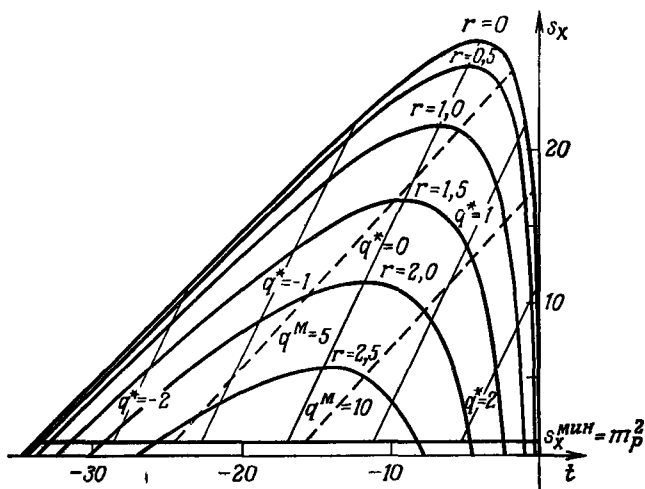
$$r^2 = - \frac{G(s, t, s_X, m_a^2, m_b^2, m_c^2)}{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}. \quad (3.12)$$

Следовательно, линии уровня  $r$  в плоскости  $ts_X$  также являются гиперболами. Они показаны на фиг. 87, где видно важное свойство этих линий: при малых  $|t|$  и больших  $s$  поперечный импульс  $r$  на самом деле зависит только от  $t$ . Это можно опреде-

лечь количественно, если по аналогии с формулой (IV.5.29) написать

$$r^2 = - \frac{s(t-t^+)(t-t^-)}{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}; \quad (3.13)$$

здесь  $t^\pm$  даются формулами (IV.5.31), где положено  $m_1^2 = m_c^2$  и



Фиг. 87. Кривые постоянного поперечного импульса  $r$  и продольного импульса  $q^*$ ,  $q^M$  в СЦМ и в системе мишени для реакции  $p + p \rightarrow p + X$  при 19 ГэВ/с.

Этот рисунок в явном виде демонстрирует, что для этих масс малость  $|t|$  означает малость  $r$  (обратное неверно). В общем случае  $t \approx t^+$  ( $t^+$  может быть большим, см. Фиг. 42) означает малость  $r$ .

$m_2^2 = s_X$ . В окрестности  $t \approx t^+$ , беря  $t^+ - t^-$  из (IV.5.31), получаем

$$r^2 \approx \frac{\lambda^{1/2}(s, s_X, m_c^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} (t^+ - t) = \frac{P^*}{P_a} (t^+ - t). \quad (3.14)$$

Еще проще получается при  $s \gg s_X$ ,  $m_i^2$ , когда  $t^+ \approx 0$ . При этом

$$t \approx -r^2. \quad (3.15)$$

Равенство (3.15) свидетельствует, что экспоненты от  $t$  приблизительно совпадают с гауссовой функцией от  $r$  [см. также (5.13)].

Наконец, из уравнения (3.2) следует, что линии уровня  $q^*$  представляют собой прямые

$$t = m_a^2 + m_c^2 - \frac{(s + m_a^2 - m_b^2)(s + m_c^2 - s_X)}{2s} + \frac{q^* \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{\sqrt{s}}, \quad (3.16)$$

а из уравнений (3.1) и (3.10) следует, что линии уровня  $q^M$  являются прямыми

$$t(s - m_a^2 + m_b^2) = 2m_b^2(m_a^2 + m_c^2) - (s - m_a^2 - m_b^2)(s - m_a^2 - s_x) + 2m_b q^M \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2). \quad (3.17)$$

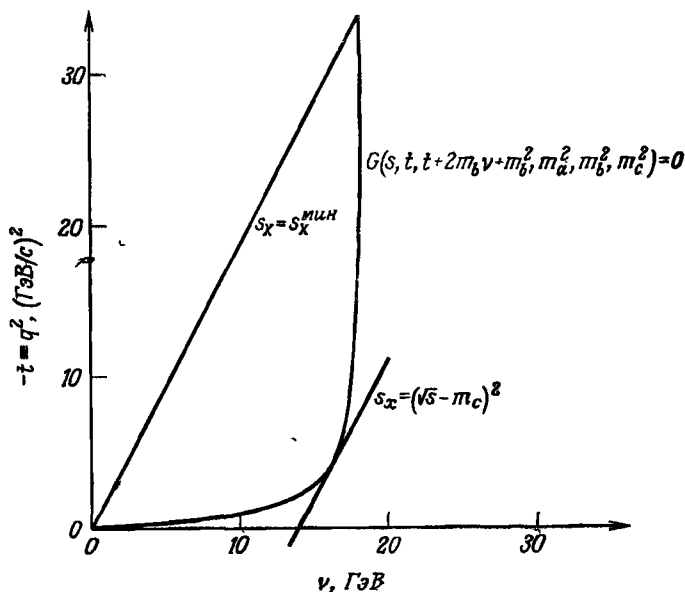
Такие прямые показаны на фиг. 87.

### в. Переменные $(t, v)$

Пара переменных  $(t, v)$  отличается от пары  $(t, s_x)$  только небольшой заменой

$$v = E_a^M - E^M = \frac{s_x - t - m_b^2}{2m_b}. \quad (3.18)$$

Поэтому нет необходимости анализировать ее отдельно. На фиг. 88 показан результат преобразования физической области



Фиг. 88. Физическая область для реакции  $pp \rightarrow pX$  при 19 ГэВ/с, полученная переходом от фиг. 87 к плоскости  $vt$ .

реакции  $pp \rightarrow pX$  при 19 ГэВ/с (фиг. 87) к плоскости  $t, v$ . Все результаты, касающиеся границы области [уравнение (3.8)] и линий уровня, можно вывести из прежних формул заменой  $s_x$  на  $t + m_b^2 + 2m_b v$ .

Переменные  $(t, v)$  чаще всего употребляются при описании неупругого рассеяния электронов или нейтрино на нуклонах [38].

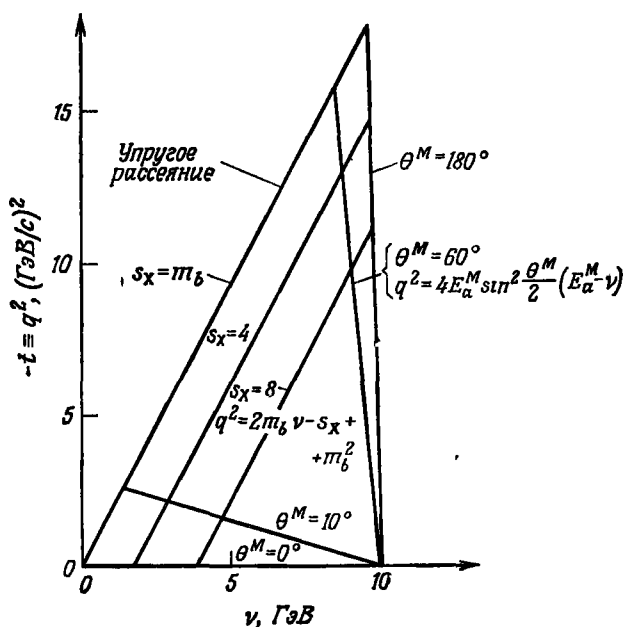
При этом полагают  $m_a = m_c$  (так как массой электрона здесь можно пренебречь), и гипербола (3.8) вырождается в две прямые

$$\begin{aligned} -t &\equiv q^2 = 0, \\ -t &\equiv q^2 = 4E_a^M (E_a^M - \nu), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$E_a^M = \frac{s - m_b^2}{2m_b} \quad (3.20)$$

есть энергия налетающей частицы в системе мишени. Поэтому



Фиг. 89. Физическая область в плоскости  $\nu t$  при  $m_a = m_c = 0$ .

Численные значения относятся к случаю  $E_a^M = 10$  ГэВ и  $m_b = 0,94$  ГэВ. Линии уровня  $\theta^M$  и  $s_X$  даются формулами (3.22), (3.23).

обычно также  $-t$  заменяют на  $q^2$ . Третья граничная линия  $s_X = s_X^{\min} = m_b^2$  выражается через  $\nu$  следующим образом:

$$\nu = \frac{q^2}{2m_b}. \quad (3.21)$$

Физическая область, ограниченная линиями (3.19) — (3.21), показана на фиг. 89.

Поскольку  $m_a = m_c = 0$ , соотношение между  $-t = q^2$  и углом рассеяния в системе мишени имеет простой вид

$$q^2 = 2E_a^M E^M (1 - \cos \theta^M) = 4E_a^M (E_a^M - v) \sin^2 \frac{1}{2} \theta^M, \quad (3.22)$$

где вместо  $E^M$  с помощью равенства (3.18) введена потеря энергии  $v$ . Уравнение (3.22) задает на плоскости  $q^2 v$  *линии уровня*  $\theta^M$  (фиг. 89); см. также фиг. 86 и уравнение (3.1). Эксперимент, проводимый при данной энергии падающей частицы и под данным углом рассеяния в системе мишени, проецирует ту часть линии (3.22), которая лежит внутри треугольника (3.19) — (3.21). Согласно уравнению (3.18), *линии уровня*  $s_x$  представляют собой прямые

$$q^2 = 2m_b v - s_x + m_b^2. \quad (3.23)$$

#### 4. Пара переменных ( $\zeta$ , $r$ )

Согласно (1.10), (1.11), соотношение между  $\zeta$ ,  $q$  и  $r$  имеет вид

$$\zeta = \frac{1}{2} \ln \frac{E+q}{E-q} = \ln \frac{E+q}{(m_c^2 + r^2)^{1/2}}, \quad (4.1)$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} q &= (r^2 + m_c^2)^{1/2} \operatorname{sh} \zeta, \\ E &= (r^2 + m_c^2)^{1/2} \operatorname{ch} \zeta, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $E = (q^2 + r^2 + m_c^2)^{1/2}$ . Инвариантный дифференциал, выражаемый через  $\zeta$  и  $r$ ,

$$\frac{d^3 p}{E} = \frac{dq d^2 r}{E} = d\zeta d^2 r = 2\pi d\zeta r dr \quad (4.3)$$

приводит к инвариантному распределению

$$f(\zeta, r) = \frac{1}{2\pi r} \frac{d^2 \sigma}{d\zeta dr} = \frac{1}{\pi} \frac{d^2 \sigma}{d\zeta dr^2}. \quad (4.4)$$

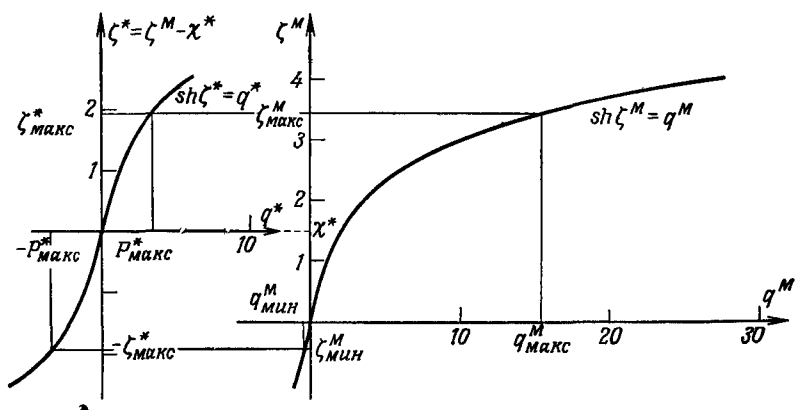
В разделе II.1 отмечена аддитивность быстрот при коллинеарных преобразованиях Лоренца. Продольные быстроты  $\zeta$  и  $\zeta'$ , измеренные в двух системах отсчета, которые преобразуются одна в другую продольным преобразованием с лоренц-фактором  $\gamma$ , отличаются друг от друга только аддитивной константой. Ее легко установить, подставив  $q' = \gamma(q - vE)$ ,  $E' = \gamma(E - vq)$  в формулу (4.1):

$$\zeta' = \frac{1}{2} \ln \frac{E' + q'}{E' - q'} = \zeta - \chi, \quad (4.5)$$

где

$$\chi = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} = -\ln(\gamma - \gamma v) = \ln(\gamma + \gamma v) = \operatorname{ar ch} \gamma. \quad (4.6)$$

Здесь  $\chi$  — относительная быстрота двух систем отсчета, а  $\operatorname{ar ch} \gamma = \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})$ . При преобразованиях быстрот  $\zeta^M, \zeta^*$



Фиг. 90. Соотношение  $q/m'_c = \operatorname{sh} \zeta$  в СЦМ и в системе мишени.

Начало координат на плоскости  $\zeta^* q^*$  сдвинуто на  $\chi^*$ , чтобы разместить  $\zeta^*$  и  $\zeta^M = \zeta^* + \chi^*$  на той же высоте. Численные значения относятся к реакции  $pp \rightarrow KX$  при  $P_a = 2$  ГэВ/с ( $\sqrt{s} = 4.41$  ГэВ,  $\chi^* = 1.5$ ), для которой  $\zeta^*_{\max} > \chi^*$  (т. е. в которой  $K$ -мезоны могут двигаться в системе мишени в любом направлении). Все импульсы измерены в единицах  $m'_c$ ;  $\chi^*$  дается формулой (4.7), а  $\zeta^*_{\max} = \operatorname{ar ch} [(s + m_c^2 - s_X^{\text{МНН}})/2m_c \sqrt{s}]$ .

и  $\zeta^\Pi$ , измеренных в трех стандартных системах отсчета СМ, СЦМ и СП, согласно (II. 6.23) — (II. 6.28), получаем

$$\begin{aligned} \zeta^M &= \zeta^* + \chi^* = \zeta^* + \ln \frac{E_a^M + m_b + P_a^M}{\sqrt{s}} = \\ &= \zeta^* + \operatorname{ar ch} \frac{s - m_a^2 + m_b^2}{2m_b \sqrt{s}} \approx \zeta^* + \ln \frac{\sqrt{s}}{m_b}, \\ \zeta^M &= \zeta^\Pi + \chi^\Pi = \zeta^\Pi + \ln \frac{E_a^M + P_a^M}{m_a} = \\ &= \zeta^\Pi + \operatorname{ar ch} \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_a m_b} \approx \zeta^\Pi + \ln \frac{s}{m_a m_b}, \quad (4.7) \\ \zeta^* &= \zeta^\Pi + \chi^{\Pi*} = \zeta^\Pi + \ln \frac{E_b^\Pi + m_a + P_b^\Pi}{\sqrt{s}} = \\ &= \zeta^\Pi + \operatorname{ar ch} \frac{s + m_a^2 - m_b^2}{2m_a \sqrt{s}} \approx \zeta^\Pi + \ln \frac{\sqrt{s}}{m_a}. \end{aligned}$$

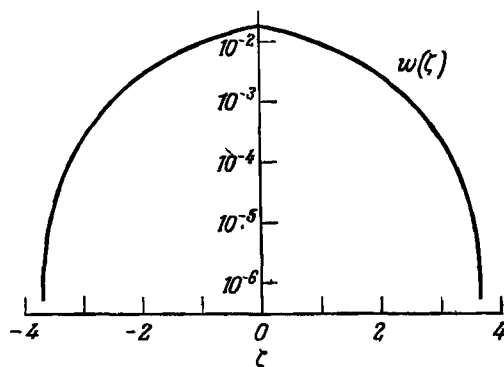


Приближенные равенства здесь написаны для случая  $s \gg m_a^2, m_b^2$ .

Соотношение  $q = m_c' \operatorname{sh} \zeta$  между  $q$  и  $\zeta$  показано на фиг. 90, как в СЦМ, так и в СМ. Наклон кривой равен

$$\frac{d\zeta}{dq} = \frac{1}{E}. \quad (4.8)$$

Следовательно, интервал  $\Delta q$  вблизи  $q = 0$  (или  $E = m_c'$ ) отвечает интервалу  $\Delta \zeta = \Delta q / m_c'$ , в то время как вблизи верхнего кинематического предела  $q_{\max}$  он отвечает  $\Delta \zeta \approx \Delta q / q_{\max}$ .



Фиг. 91. Распределение по  $q$  (фиг. 85), преобразованное к продольным быстройм  $\zeta$ .

Это означает, что в пределе  $s \rightarrow \infty$  переменные  $q$  и  $\zeta$  дополняют друг друга в том смысле, что если брать на оси  $\zeta$  вблизи  $\zeta = 0$  события, покрывающие одну и ту же долю интервала изменения  $\zeta$ , то они будут занимать все меньшую часть области изменения  $q$ . Это продемонстрировано на фиг. 91, где изображено распределение по  $\zeta$ , следующее из модельной функции (2.26) (упражнение VII.7). Фиг. 91 следует сравнить с фиг. 85.

Чтобы прикинуть, какие значения продольных быстройм встречаются на практике, заметим, что, согласно (4.1) и (4.7), пределы изменения  $\zeta^*$  и  $\zeta^M$  даются неравенствами

$$|\zeta^*| \leq \ln \left\{ \frac{E_{\max}^* + P_{\max}^*}{m_c} \right\},$$

$$\ln \left( \frac{m_c}{\sqrt{s}} \frac{E_a^M + m_b + P_a^M}{E_{\max}^* + P_{\max}^*} \right) \leq \zeta^M \leq \ln \left\{ \frac{(E_{\max}^* + P_{\max}^*)(E_a^M + m_b + P_a^M)}{m_c \sqrt{s}} \right\}, \quad (4.9)$$

где  $P_{\max}^*$  и  $E_{\max}^*$  определяются формулами (2.4) и (2.6); быстрая  $\zeta^M$  определена подобным же образом (упражнение VII.9).

Следовательно, для больших  $s$ , отбрасывая члены порядка  $s^{-1}$ , имеем

$$\begin{aligned} -\ln \frac{\sqrt{s}}{m_c} &\leq \zeta^* \leq \ln \frac{\sqrt{s}}{m_c}, \\ \ln \frac{m_c}{m_b} &\leq \zeta^M \leq \ln \frac{s}{m_b m_c}, \\ -\ln \frac{s}{m_a m_c} &\leq \zeta^\Pi \leq \ln \frac{m_a}{m_c}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Заметим, что пределы изменения  $\zeta^*$  зависят только от  $m_c$  и что полный интервал изменения любой из быстрот  $\zeta$  равен  $\ln(s/m_c^2)$ . Тем самым для реакции  $a + p \rightarrow \pi + X$ , какова бы ни была налетающая частица  $a$  (при начальных импульсах, не превышающих 30 ГэВ/с), имеем

$$\begin{aligned} -4,0 &\leq \zeta^* \leq 4,0, \\ -1,9 &\leq \zeta^M \leq 6,1, \end{aligned} \quad (4.11)$$

а для реакции  $a + p \rightarrow p + X$

$$\begin{aligned} -2,1 &\leq \zeta^* \leq 2,1, \\ 0 &\leq \zeta^M \leq 4,2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Пределы изменения  $\zeta^\Pi$  зависят также от сорта налетающей частицы  $a$ .

Физическая область в плоскости  $\zeta^* r$  получается преобразованием кривой  $P^* = P_{\text{макс}}$ , задаваемой уравнением (2.5). Это частный случай *линий уровня*  $P^*$  на плоскости  $\zeta^* r$ , определяемых уравнением

$$r^2 = \frac{(P^*)^2 + m_c^2}{ch^2 \zeta^*} - m_c^2; \quad (4.13)$$

они показаны на фиг. 92. Если взять быстроту  $\zeta$  в любой другой системе отсчета, то соответствующая область получится параллельным сдвигом на величину относительной быстроты  $\chi$ . На этих рисунках ясно видно различие в поведении  $\zeta$  и  $q$  в окрестностях  $q = 0$

В физике космических лучей используется переменная, близко связанная с быстротой  $\zeta$ . В этой науке трудно определять импульсы частиц, и обычно приходится ограничиваться только угловыми распределениями. При представлении экспериментальных данных принято заменять полярный угол  $\theta$  другой переменной, которая просто преобразуется из системы мишени в СЦМ и при этом растягивает ту область близ  $\theta^M = 0$ , где сконцентрирована основная масса событий.

Согласно (II.8.30),  $\theta^M$  и  $\theta^*$  связаны соотношением

$$\operatorname{tg} \theta^M = \frac{v^* \sin \theta^*}{\gamma_{ЦМ} (v_{ЦМ}^* + v^* \cos \theta^*)}, \quad (4.14)$$

где  $v^*$  — скорость испускаемой частицы в СЦМ. Когда  $v_{ЦМ}^*$  и  $v^*$  близки к единице, мы получаем

$$\operatorname{tg} \theta^M \approx \frac{\sin \theta^*}{\gamma_{ЦМ} (1 + \cos \theta^*)} = \frac{1}{\gamma_{ЦМ}} \operatorname{tg} \frac{\theta^*}{2}. \quad (4.15)$$

Следовательно, переменные

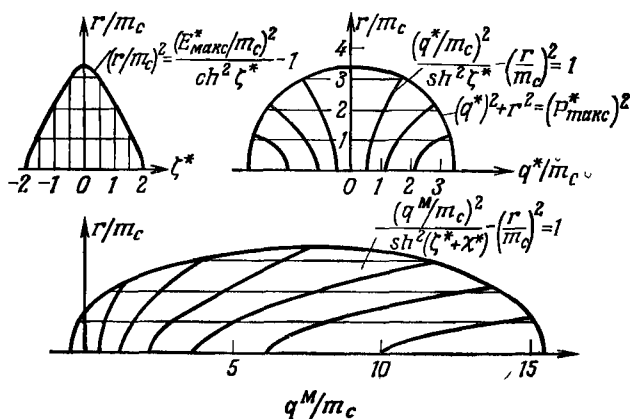
$$u^* = \ln \operatorname{tg} \frac{\theta^*}{2}, \quad (4.16)$$

$$u^M = \ln \operatorname{tg} \theta^M$$

связаны соотношением

$$u^M = u^* - \ln \gamma_{ЦМ} \approx u^* - \ln \frac{\sqrt{s}}{2m_b} \quad (4.17)$$

до тех пор, пока  $v^*$  достаточно близко к единице. Конечно, соотношение (4.17) неверно в центральной области, показанной



Фиг. 92. Преобразование линий уровня  $\zeta^*$  при переходе от плоскости  $\zeta^*r$  к плоскости  $q^*r$  и  $q^Mr$ .

Численные значения относятся к реакции  $pp \rightarrow \pi X$  при  $\sqrt{s} = 4.41$  ГэВ/с,  $\chi^* = 1.5$ .

на фиг. 93. Из равенств  $du^M = 2d\theta^M/\sin 2\theta^M$  и  $du^* = d\theta^*/\sin \theta^*$  видно также, что  $u^M$  и  $u^*$  растягивают области малых  $\theta^M$  и  $\theta^*$ .

Свяжем между собой  $u^M$  и  $\zeta^M$ . Для этого заметим, что, когда  $m_c \ll r \ll q$ ,

$$\zeta = \ln[(E + q)(m_c^2 + r^2)^{-1/2}] \approx \ln \frac{2q}{r} \approx -\ln \frac{\theta}{2} \approx -\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (4.18)$$

Таким образом, мы получаем

$$\xi^M = -u^M + \ln 2, \quad \xi^* = -u^*.$$

Следовательно, соотношение (4.17) эквивалентно соотношению  $\xi^M = \xi^* + \ln(\sqrt{s}/m_b)$  [см. (4.7)]. Но равенство (4.7) было точным (в пределе больших  $s$ ), а соотношение (4.17) применимо только к ограниченному классу событий.

## 5. Кинематика масштабной инвариантности и фрагментации

Динамические понятия масштабной инвариантности, или *скейлинга*, [42] и *фрагментации* [10] существенным образом включают в себя некоторые допущения о поведении инвариантного распределения  $f(q, r; s)$  при  $s \rightarrow \infty$ . Мы проанализируем здесь кинематические факты, являющиеся важной частью упомянутых теорий.

Вместо того чтобы пользоваться продольными переменными  $q$  и  $\xi$  (выражаемыми в тех или иных системах отсчета), иногда удобно ввести для них *масштаб* с тем, чтобы интервал их изменения был всегда один и тот же. Это не имеет никакого отношения к динамике: то же самое мы делаем, когда чертим чертежи разного масштаба на одном и том же листе бумаги. Мы знаем полный интервал изменения  $q$  [см. (2.5) и (2.12) и упражнение VII.3] и  $\xi$  [см. (4.9) и упражнение VII.9] в любой системе отсчета. Поэтому нетрудно ввести новые переменные, которые меняются всегда в одном и том же интервале. Поскольку точные выражения для пределов довольно громоздки, а поведение переменных  $q$  и  $\xi$  нас интересует главным образом при больших  $s$ , выражение для пределов можно упростить. Верхний предел  $|q|$  изменения продольных импульсов можно приближенно положить равным импульсу налетающей частицы и определить величину  $x$ :

$$x_P^* = \frac{q^*}{P_a^*}, \quad x_P^M = \frac{q^M}{P_a^M}, \quad x_P^\Pi = \frac{q^\Pi}{P_b^\Pi}, \quad (5.1)$$

после чего использовать приближенные выражения для импульсов налетающих частиц при больших  $s$

$$x^* = \frac{2q^*}{\sqrt{s}}, \quad x^M = \frac{2m_b q^M}{s}, \quad x^\Pi = \frac{2m_a q^\Pi}{s}. \quad (5.2)$$

Пределы (5.2) действительно достигаются при  $s \rightarrow \infty$ , так что пределы изменения  $x$  становятся равными  $-1 \leq x^* \leq 1$ ,  $0 \leq x^M \leq 1$  и  $-1 \leq x^\Pi \leq 0$ . Вводить масштаб на шкале быстрой не очень интересно, так как полный интервал изменения просто растет пропорционально  $\ln(s/m_c^2)$  [неравенства (4.10)].

Вводя его, надо учесть, что разности быстрот трансляционно инвариантны, и в любой системе отсчета

$$\xi_{ab} = \frac{\zeta - \zeta_b}{\zeta_a - \zeta_b}, \quad (5.3)$$

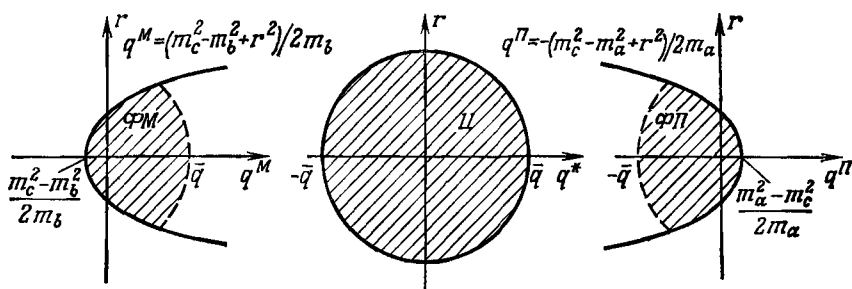
где  $\zeta_a$  и  $\zeta_b$  — быстроты частиц а и б в этой системе, т. е.

$$q_a = m_a \operatorname{sh} \zeta_a, \quad q_b = m_b \operatorname{sh} \zeta_b. \quad (5.4)$$

При больших  $s$  имеем  $\zeta_a - \zeta_b = \ln(s/m_a m_b)$ , а с учетом неравенств (4.10) получаем

$$\frac{\ln(m_c/m_b)}{\ln(s/m_a m_b)} \leq \xi_{ab} \leq \frac{\ln(s/m_b m_c)}{\ln(s/m_a m_b)}. \quad (5.5)$$

Асимптотически  $0 \leq \xi_{ab} \leq 1$ , хотя приближение к пределу происходит по логарифмическому закону. Скорость приближения



Фиг. 93. Области фрагментации мишени (ФМ) и падающей частицы (ФП) и центральная область (Ц) при  $s \rightarrow \infty$  ( $\tilde{q}$  — некоторая конечная величина)

Точная форма областей несущественна, требуется лишь, чтобы импульсы внутри них оставались при  $s \rightarrow \infty$  конечными. Граничные кривые получаются из формул (2.13).

к пределу становится пропорциональной  $s^{-1}$ , если использовать неравенство (4.10) и написать

$$\xi = \frac{\zeta^* + \ln(\sqrt{s}/m_c)}{\ln(s/m_c^2)} \quad (5.6)$$

по аналогии с (5.2).

Рассмотрим теперь три области, определенные на фиг. 93, — центральную область (Ц), область фрагментации мишени (ФМ) и область фрагментации падающей частицы (ФП). Теория предельной фрагментации изучает предел функции  $f(q, r; s)$  в этих трех областях при  $s \rightarrow \infty$  и при фиксированном  $r$ . Предполагается, что в двух взаимоисключающих случаях, при фрагментации мишени и при фрагментации падающей частицы, функция  $f(q, r; s)$  стремится к отличным от нуля пределам:

$$\begin{aligned} f(q^M, r; s) &\rightarrow f(q^M, r; \infty) > 0 \quad (q^M \text{ в области ФМ}), \\ f(q^П, r; s) &\rightarrow f(q^П, r; \infty) > 0 \quad (q^П \text{ в области ФП}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Чтобы уяснить взаимоотношение между этими областями, рассмотрим при  $r = 0$  интервалы изменения  $q$  в разных системах отсчета ( $\bar{q}$  — произвольное конечное число):

$$\begin{aligned} \frac{m_c^2 - m_b^2}{2m_b} &\leq q^M \leq \bar{q} & (\text{ФМ}), \\ -\bar{q} &\leq q^* \leq \bar{q} & (\text{Ц}), \\ -\bar{q} &\leq q^П \leq \frac{m_a^2 - m_c^2}{2m_a} & (\text{ФП}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

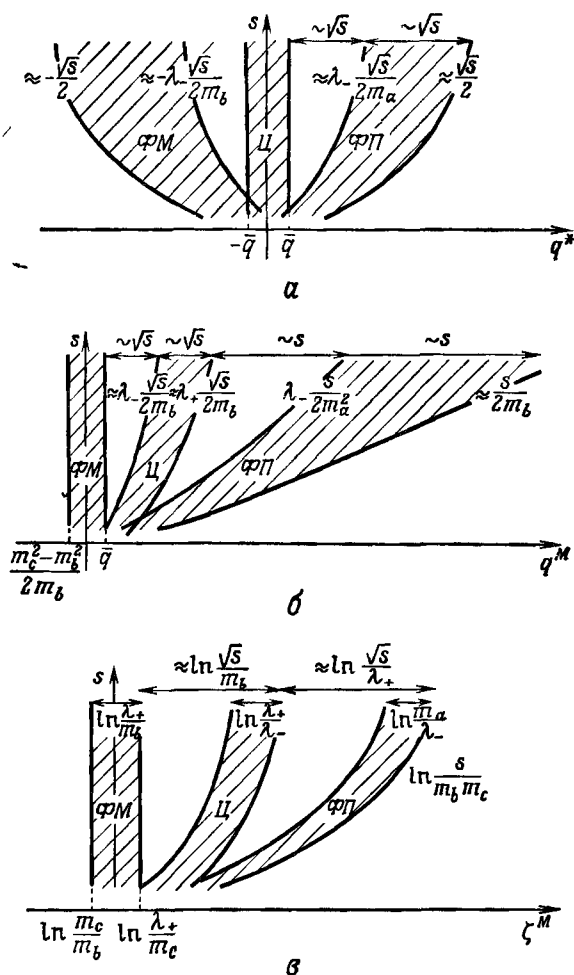
Их поведение при  $s \rightarrow \infty$  в СЦМ и в системе мишени показано на фиг. 94; там же показаны интервалы (5.8) в зависимости от быстроты  $\xi^M$ . Чтобы вывести уравнения кривых на фиг. 94, подставьте конечные точки в неравенствах (5.8) в соответствующие уравнения преобразований (раздел II 6), но оставьте в них только главные по  $s$  члены:

$$\begin{aligned} q^* &\approx \frac{\sqrt{s}}{2m_b} \left[ q^M - \left( 1 - \frac{2m_b^2}{s} \right) E^M \right], \\ q^* &\approx \frac{\sqrt{s}}{2m_a} \left[ q^П + \left( 1 - \frac{2m_a^2}{s} \right) E^П \right], \\ q^M &\approx \frac{\sqrt{s}}{2m_b} (q^* + E^*), \\ q^M &\approx \frac{s}{2m_a m_b} \left[ q^П + \left( 1 - \frac{2m_a^2 m_b^2}{s^2} \right) E^П \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

$[E = (q^2 + m_c^2)^{1/2}]$ , так как  $r = 0$ ] Заметим, что для правильного преобразования точек близ  $q^* = \pm P_{\text{макс}}^*$  надо ввести поправочные члены и в те параметры преобразований, которые определяются скоростью ( $P_{\text{макс}}^*/E_{\text{макс}}^* \approx 1 - 2m_c^2/s$ ). Фиг. 94, в получается из фиг. 94, б простым пересчетом согласно формуле  $\xi^M = \ln[(E^M + q^M)/m_c]$ . Мы приходим к следующим заключениям:

В СЦМ расстояния между областями ФМ, Ц и ФП (*переходные области*) на оси продольных импульсов, а также сами размеры областей ФМ и ФП увеличиваются пропорционально  $\sqrt{s}$ .

В системе мишени расстояние по оси продольных импульсов между областями ФМ и Ц и размер области Ц пропорциональны  $\sqrt{s}$ , а расстояние между областями ФП и Ц и размер области ФП пропорциональны  $s$ .

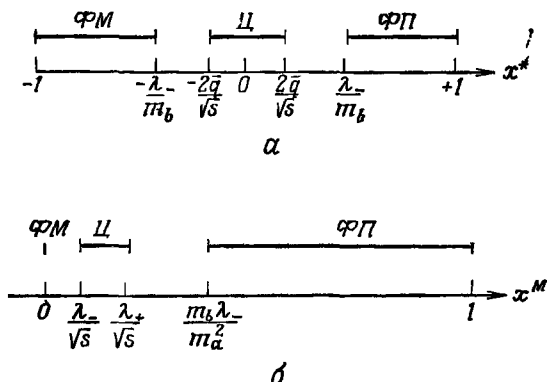


Фиг. 94. Качественное поведение интервалов (5.8), т. е. областей ФМ, ФП и U (фиг. 93) при  $s \rightarrow \infty$ ; а — в СЦМ, б — в системе мишени, в — на оси быстрот  $\zeta^M$ .

Здесь  $\bar{q}$  — некоторая конечная величина, а  $\lambda_{\pm} = \bar{E} \pm \bar{q} = (\bar{q}^2 + m_c^2)^{1/2} \pm \bar{q}$ . Чтобы получить точные физические границы областей, мы выбрали  $r=0$ , но та же картина остается при произвольном фиксированном  $r$ .

На оси быстрот  $\zeta$  (в любой из трех систем отсчета) размеры всех трех областей постоянны, а расстояние от области ФМ до области U и расстояние от области U до области ФП пропорциональны  $\ln s$ .

Чтобы выразить все это в терминах переменных  $x^*$  и  $x^M$  [формулы (5.2)], возьмем достаточно большое значение  $s$  и преобразуем области на фиг. 94, а, б в области, показанные на фиг. 95. Поскольку фиксированный импульс  $\bar{q}$  произволен



Фиг. 95. Области ФМ, ФП и Ц при конечных, но больших  $s$  в масштабах переменных  $x^*$  и  $x^M$ .

Число  $\bar{q}$  то же, что на фиг. 93,  $\lambda_{\pm} = (\bar{q}^2 + m_c^2)^{1/2} - \bar{q}$ . Увеличивая  $\bar{q}$ , можно сделать  $\lambda_-$  сколь угодно малым.

(фиг. 93), его можно выбрать достаточно большим, чтобы величина  $\lambda_- = \bar{E} - \bar{q} \approx m_c^2/2q$  оказалась достаточно малой. Таким образом, мы приходим к выводам:

Области ФМ и ФП в терминах  $x^*$  асимптотически расширяются до интервалов  $-1 \leq x^* \leq 0$  и  $0 \leq x^* \leq 1$  соответственно, а область Ц стягивается в точку  $x^* = 0$ .

Область ФП в терминах  $x^M$  асимптотически переходит в интервал  $0 < x^M \leq 1$ , а области Ц и ФМ стягиваются в точку  $x^M = 0$ .

Если ввести масштаб на оси быстрот  $\xi$ , то на основании фиг. 94, в можно сделать следующий вывод:

В терминах  $\xi_{ab}$  или  $\xi$  [формулы (5.3) и (5.6)] области ФМ, Ц и ФП стягиваются к точкам 0,  $1/2$  и 1 соответственно, а переходные области заполняют собой интервалы  $0 \leq \xi \leq 1/2$  и  $1/2 \leq \xi \leq 1$ .



Выразим продольные импульсы через масштабную переменную  $x \equiv x^*$ . Используя (5.9), имеем в интервале  $0 < x \leq 1$  (область ФП)

$$\begin{aligned} q^{\Pi} &= \gamma(q^* - vE^*) \approx \left(\frac{\sqrt{s}}{2m_a}\right) q^* \left\{1 - \left(1 - \frac{2m_a^2}{s}\right) \left(1 + \frac{m_c^2}{2q^{*2}}\right)\right\} \approx \\ &\approx \left(\frac{x}{2m_a}\right) \left(m_a^2 - \frac{m_c^2}{x^2}\right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

а в интервале  $-1 \leq x < 0$  (область ФМ)

$$\begin{aligned} q^{\text{М}} &= \gamma_{\text{ЦМ}}(q^* + v_{\text{ЦМ}}E^*) \approx \left(\frac{\sqrt{s}}{2m_b}\right) q^* \left\{1 - \left(1 - \frac{2m_b^2}{s}\right) \left(1 + \frac{m_c^2}{2q^{*2}}\right)\right\} \approx \\ &\approx \left(\frac{x}{2m_b}\right) \left(m_b^2 - \frac{m_c^2}{x^2}\right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Следовательно, в обеих областях  $q^{\Pi}$  и  $q^{\text{М}}$  зависят только от  $x$ , и зависимость от  $s$  входит только через комбинацию  $2q^*/\sqrt{s}$ . Гипотеза предельной фрагментации (5.7) в сочетании с этим фактом приводит к выводу, что в пределе  $s \rightarrow \infty$  инвариантное распределение  $f(q, r; s)$  обращается в функцию одного  $x$ :

$$f(q^*, r; s) \rightarrow f(x, r), \quad (5.12)$$

если  $-1 \leq x < 0$  или  $0 < x \leq 1$ . Мы выявили тем самым кинематическую связь между гипотезой фрагментации мишени и падающей частицы, с одной стороны, и гипотезой скейлинга, или масштабной инвариантности (5.12), с другой. Анализ того, что происходит в центральной области  $x = 0$ , потребовал бы дальнейших рассуждений динамического характера.

Заметим, наконец, что, подставив в уравнения (3.3) и (3.5)

$$q^* = P^* \cos \theta^*, \quad E_a^* = q_a^* + \frac{m_a^2}{2q_a^*}, \quad E^* = q^* + \frac{m_c^2 + r^2}{2q^*},$$

мы можем приблизительно представить  $t$  и  $s_x$  в виде

$$t = m_a^2 + m_c^2 - \left(\frac{m_c^2}{x^*} + m_a^2 x^*\right) - \frac{r^2}{x^*}, \quad (5.13)$$

$$s_x = s(1 - x^*). \quad (5.14)$$

Эти весьма полезные соотношения справедливы при  $x^* \gg 2(m_c^2 + r^2)^{1/2}/\sqrt{s}$ . Соотношение (5.13) по существу совпадает с уравнением (3.14).

## 6. Кинематика метода недостающих масс

Данный раздел посвящен применению результатов, полученных в разделе 2, к *методу недостающих масс* [98, 99]. Этот метод заключается в том, что масса  $m_X = \sqrt{s_X}$  частицы или системы частиц  $X$  вычисляется не по импульсам системы частиц  $X$  или ее продуктов распада, а по импульсам других участвующих во взаимодействии частиц [154\*]. К вычислению недостающих масс прибегают при кинематической идентификации реакций со вторичными нейтральными частицами в пузырьковых камерах. В экспериментах со счетчиками метод недостающих масс используется для измерения спектра масс. Например, детектируя в инклюзивной реакции  $\pi^- + p \rightarrow p + X^-$  только один протон в конечном состоянии, можно предпринять поиски тяжелых отрицательно заряженных бозонных резонансов.

Когда в реакции  $a + b \rightarrow c + X$  известны  $p_a$  и  $p_b$ , 4-импульс системы  $X$  определяется импульсом  $p_c$ . Из четырех компонент  $p_c$  азимутальный угол  $\phi$  роли не играет, а остальные три компоненты определяют  $P_X$ ,  $\theta_X$  и  $m_X$ . Для некоторых конфигураций масса  $m_X$  малочувствительна к одной из этих переменных или к ее комбинациям с остальными переменными. Тогда достаточно, идентифицировав частицу  $c$ , измерить одну переменную точно и одну грубо, чтобы определить  $m_X$ . Для искровых камер это позволяет упростить электронику запуска. Недостатком метода «одной переменной» является ограниченность той кинематической области, которая может быть так исследована. Мы разберем здесь два применения этой идеи: а) наблюдение частицы *с под предельным углом* (метод пика в якобиане) и б) наблюдение ее *под нулевым углом*.

Недостающая масса в системе мишени (СМ) вычисляется по формуле (3.4) или по равнозначной ей формуле

$$m_X^2 = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + 2E_a(m_b - E) - 2m_b E + 2P_a P \cos \theta. \quad (6.1)$$

По-прежнему здесь всюду (кроме  $m_c$ ) опущен индекс  $c$ ; в этом разделе мы будем работать только в СМ. Скорость изменения  $m_X$  при изменении  $P_a$ ,  $P$  и  $\cos \theta$  дается производными

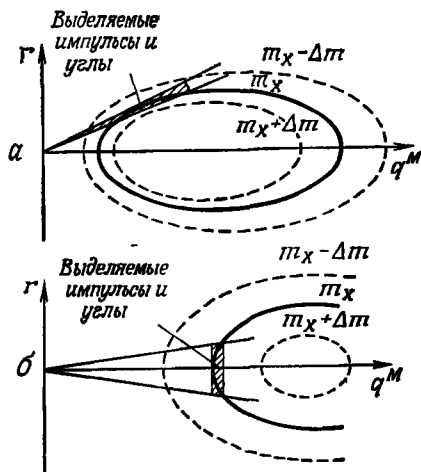
$$\frac{m_X \partial m_X}{\partial P_a} = \frac{P_a (m_b - E)}{E_a} + P \cos \theta, \quad (6.2)$$

$$\frac{m_X \partial m_X}{\partial P} = - \frac{(E_a + m_b) P}{E} + P_a \cos \theta, \quad (6.3)$$

$$\frac{m_X \partial m_X}{\partial \theta} = - P_a P \sin \theta. \quad (6.4)$$

Положения, в которых масса  $m_X$  становится нечувствительной к изменениям  $P$  или  $\theta$ , легко увидеть, рассматривая поверхности уровня  $m_X$  в пространстве  $p$  (фиг. 96). Эти поверхности

представляют собой эллипсоиды вращения в переменных  $q$  и  $r$  (2.12). У детектора, расположенного так, как на фиг. 96, а,

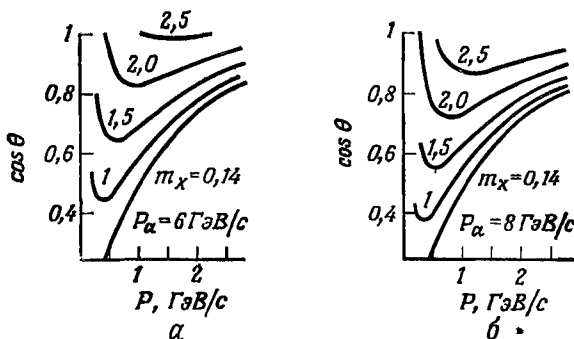


Фиг. 96. Область предельного угла (а) и область нулевого угла (б) в эксперименте по измерению недостающих масс в реакции  $a + b \rightarrow c + X$  ( $q^M$  и  $r$  — составляющие импульса  $p$ , измераемого в системе мишени).

мала производная по  $P$  ( $\partial m_X / \partial P$ ), а у детектора на фиг. 96, б мала производная по  $\theta$  ( $\partial m_X / \partial \theta$ ).

#### а. Наблюдение под предельным углом

Пусть теперь  $s$  и  $m_X$  на фиг. 96, а фиксированы; построим зависимость  $\cos \theta$  от  $P$ , даваемую уравнением (6.1) или (2.9)



Фиг. 97. Зависимость  $\cos \theta$  от  $P$  при нескольких значениях недостающей массы  $m_X$ .

Реакция  $\pi^\pm p \rightarrow pX^\pm$  а — при 6 ГэВ/с, б — при 8 ГэВ/с [98].

(в виде, разрешенном относительно  $P$ ). Она показана на фиг. 97. Угол  $\theta$  имеет максимум (а  $\cos \theta$  — минимум), когда  $\partial \cos \theta / \partial P = 0$ . Решая, получаем для  $\sin \theta_{\text{макс}}$  выражение (2.10), а для

значения  $P$  или  $E$  при  $\theta = \theta_{\text{макс}}$  — выражение (2.11). Если направить под углом  $\theta_{\text{макс}}$  детектор, который выделяет область импульсов и углов, показанную на фиг. 96, то мы найдем значение  $m_x$ , не проводя точных измерений импульсов.

Название «метод пика в якобиане» обусловлено тем, что величина  $d \cos \theta^* / d \cos \theta$ , которая представляет собой якобиан перехода  $\omega(\cos \theta)$  к  $\omega(\cos \theta^*)$  [формула (III.4 14)], обращается в бесконечность при  $\theta = \theta_{\text{макс}}$ . Это хорошо видно на фиг. 12.

Сравнение фиг. 97, а и б показывает, что при увеличении импульса пучка «в поле действия» спектрометра попадают большие массы  $m_x$  без изменения  $\theta$  (и, следовательно,  $t$ ). Это позволяет просмотреть в неизменных условиях весь спектр масс. Согласно уравнению (6 4), увеличение  $P_a$  требует улучшения углового разрешения (при данном разрешении недостающих масс).

### б Наблюдение под нулевым углом

Если детектируемая частица летит вперед, то  $m_x$  зависит главным образом от  $P$  и лишь во вторую очередь — от  $\theta$  (фиг. 96, б). Экспериментальный интерес представляют как ветвь малых импульсов  $P^-(\theta)$ , так и ветвь больших импульсов  $P^+(\theta)$  (на фиг. 96, б рождение резонансов в задней полусфере не показано). Располагая детектор так, как показано на фиг. 96, б, можно определить  $m_x$  с помощью одних только измерений импульсов, без точных измерений углов. Недостатки метода нулевого угла связаны с тем, что детектор приходится ориентировать в направлении, близком к направлению падающего пучка.

## 7. Многомерные распределения; корреляции

Обобщая естественным образом реакцию (1.1), перейдем к рассмотрению инклюзивной реакции

$$a + b \rightarrow c_1 + \dots + c_k + X. \quad (7.1)$$

Определим связанную с ней инвариантную функцию распределения  $k$  частиц

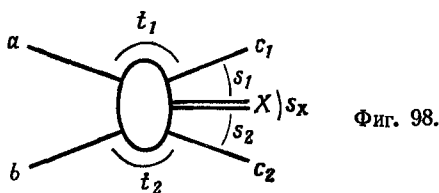
$$\frac{d^3 n \sigma}{d^3 p_1 \dots d^3 p_k} = \frac{f_k(p_1, \dots, p_k; s)}{E_1 \dots E_k}. \quad (7.2)$$

Для простоты предположим, что все частицы  $c_i$  в (7.1) одного сорта (с). По аналогии с (1.4), (1.5) мы получим

$$\begin{aligned} \int d^3 p_1 \dots d^3 p_k \frac{f_k(p_1, \dots, p_k; s)}{E_1 \dots E_k} &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) \sigma_c^n(s) = \\ &= \langle n(n-1) \dots (n-k+1) \rangle \sigma_c(s), \end{aligned} \quad (7.3)$$

где  $\sigma_c^n$  и  $\sigma_c$  имеют тот же смысл, что и в (1.4), а угловые скобки  $\langle \rangle$  обозначают среднее значение величины, стоящей в них. Иными словами, интегралы от  $f_k$  по всем переменным дают факториальные моменты  $\langle n \dots (n - k + 1) \rangle$  распределения по множественности.

Кинематически процесс (7.1) совпадает с процессом  $2 \rightarrow k + 1$  при условии, что одна из масс в конечном состоянии рассматривается как переменная инвариантная масса системы X. Следовательно, для неполяризованных начальных частиц функция



Фиг. 98.

$f_k$  при фиксированном  $s$  зависит от  $3k - 1$  существенных переменных. Число переменных быстро растет с ростом  $k$ , и мы здесь встречаемся со знакомой нам проблемой роста числа переменных и усложнения способов их представления.

Рассмотрим в качестве примера реакцию  $a + b \rightarrow c_1 + c_2 + X$  (фиг. 98). Здесь  $f_2(p_1, p_2)$  зависит от пяти переменных (при заданном  $s$ ); можно взять  $2 + 2$  переменных, описывающих  $c_1$  и  $c_2$  порознь, и добавить еще одну переменную для описания связи между ними. Так мы приходим к следующим возможным наборам переменных:

$$(P_1, \theta_1, P_2, \theta_2, \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2), \quad (7.4)$$

$$(q_1, r_1, q_2, r_2, \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2), \quad (7.5)$$

$$(t_1, s_2, t_2, s_1, s_X), \quad (7.6)$$

$$(\xi_1, r_1, \xi_2, r_2, \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2), \quad (7.7)$$

где используются обычные обозначения компонент импульсов, быстрот и углов, а величины, входящие в (7.6), показаны на фиг. 98. Для получения других наборов переменных можно прибегнуть к масштабным преобразованиям того же сорта, как в разделе 5. Затем можно проанализировать форму физических областей и их преобразований, как это мы делали в разделах 2—5 для одночастичных спектров. В итоге мы получим сложные формулы (упражнение VII. 14).

В общем случае распределение  $k$  частиц нельзя получить из распределений меньшего числа частиц вследствие наличия *корреляций* между ними. Эти корреляции могут быть проанализированы при помощи *функций корреляции*  $c_k(p_1, \dots, p_k)$ , определяемых так, что они обращаются в нуль при отсутствии кор-

реляций. Общий формализм здесь берется из теории реальных газов [57], где корреляции возникают из-за взаимодействия между молекулами газа. Определяем

$$f_1(1) = c_1(1), \quad (7.8)$$

$$f_2(1, 2) = c_1(1, 2) + c_1(1)c_2(2), \quad (7.9)$$

$$f_3(1, 2, 3) = c_3(1, 2, 3) + c_2(1, 2)c_1(3) + c_2(1, 3)c_1(2) + \\ + c_2(2, 3)c_1(1) + c_1(1)c_1(2)c_1(3) \quad (7.10)$$

и т. д. (здесь 1 обозначает  $\mathbf{r}_1$  и т. д.). Очевидно, что в отсутствие корреляций, т. е. когда

$$f_k(1, \dots, k) = f_1(1) \dots f_1(k), \quad (7.11)$$

имеем

$$c_k(1, \dots, k) = 0, \quad k \geq 2, \quad (7.12)$$

и наоборот. Ненулевые  $c_k$  означают наличие корреляций. Это делает коэффициенты  $c_k$  удобным средством анализа корреляций. На практике вследствие большого числа переменных приходится прибегать к интегралам от  $c_k$ .

Есть один тип корреляций, который всегда присутствует в реакциях между элементарными частицами. Это *кинематические корреляции*, обусловленные сохранением 4-импульса. В одних областях фазового пространства они существенны, в других — нет. Если, например, импульсы двух частиц, рожденных в двухчастичной инклюзивной реакции, малы по сравнению с их максимальными значениями, то они находятся далеко от границы фазового пространства; физически ясно, что кинематические корреляции окажутся здесь несущественными. Общего правила, позволяющего отделять динамические корреляции от кинематических, не существует. Мы рассмотрим только три типичных примера.

**Пример 1.** Рассмотрим сначала эксклюзивную реакцию,  $a + b \rightarrow 1 + \dots + n$  и углы  $\varphi_{ij} = \arccos(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j / r_i r_j)$  между поперечными импульсами. Эти углы инвариантны при продольных преобразованиях Лоренца. Вычислим среднее значение  $\langle \cos \varphi_{ij} \rangle$  как функцию множественности  $n$ . Ясно, что в отсутствие корреляций  $\langle \cos \varphi_{ij} \rangle = 0$ . При  $n = 2$   $\cos \varphi_{12} = -1$ , так как  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  полностью коррелированы вследствие того, что  $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = 0$ . Для больших  $n$ , усредняя квадрат  $\sum \mathbf{r}_i = 0$ , получаем

$$\sum_i^n \langle \mathbf{r}_i^2 \rangle + 2 \sum_{i < j} \langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j \rangle = 0. \quad (7.13)$$

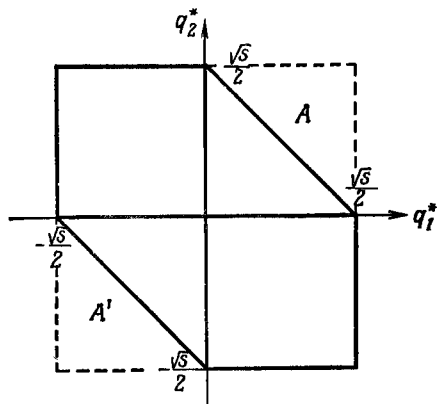
Пусть все частицы одинаковы. Тогда

$$\langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j \rangle = - \frac{\langle \mathbf{r}_i^2 \rangle}{n-1}. \quad (7.14)$$

Предположим далее, что распределения абсолютных величин поперечных импульсов  $r_i$  и  $\cos \varphi_{ij}$  не зависят друг от друга. Тогда  $\langle r_i r_j \cos \varphi_{ij} \rangle = \langle r_i \rangle^2 \langle \cos \varphi_{ij} \rangle$ , так что

$$\langle \cos \varphi_{ij} \rangle = -\frac{\lambda}{n-1}, \quad (7.15)$$

где  $\lambda = \langle r_i^2 \rangle / \langle r_i \rangle^2 \geq 1$ . Конечно, этот результат верен лишь в некотором приближении, но дает иллюстрацию того, как возникают корреляции, обусловленные кинематикой, и как они исчезают при  $n \rightarrow \infty$ . Такие кинематические корреляции поперечных импульсов подробно проанализированы в работах [13, 158\*].



Фиг. 99. Предельный вид (при  $s \rightarrow \infty$ ) физической области изменения переменных  $q_1^*$ ,  $q_2^*$  в инклюзивной реакции  $a + b \rightarrow c_1 + c_2 + X$ . Области  $A$  и  $A'$  запрещены законом сохранения 4 импульса, оба продольных импульса не могут быть одновременно и велики, и параллельны друг другу.

Для инклюзивной реакции  $a + b \rightarrow c_1 + c_2 + X$  среднее значение  $\langle \cos \theta_{12} \rangle$  равно взвешенной сумме средних вида (7.15) для разных  $n$ . Ясно, что кинематические корреляции остаются.

**Пример 2.** Рассмотрим теперь два продольных импульса  $q_1$  и  $q_2$  в какой-нибудь эксклюзивной реакции и примем во внимание наблюдаемые ограничения на поперечные импульсы (раздел VI.5). При  $n = 2$   $q_1 = -q_2$  (в СЦМ) и корреляция предельно велика. При  $n = 3$  анализ, проведенный в разделе VI.6 (фиг. 76), показал, что события лежат в эффективно одномерной области плоскости  $q_1 q_2$ , т. е. корреляции имеются, но они слабее, чем при  $n = 2$ . Ясно, что эти кинематические корреляции остаются при любом  $n$ , но с увеличением  $n$  они убывают. В каждом реальном случае ситуация осложняется многими иными эффектами, наблюдаемыми в спектрах продольных импульсов, так что выделение динамических эффектов связано с большими трудностями (см., например, [165\*, 166\*, 169\*]).

**Пример 3.** Рассмотрим инклюзивную реакцию  $a + b \rightarrow c_1 + c_2 + X$ . Физическая область в плоскости  $q_1^* q_2^*$  для больших  $s$  показана на фиг. 99 (упражнение VII.14, см. также

фиг. 76). Области  $A$  и  $A'$  нефизические; двухчастичное распределение  $f_2$  там тождественно обращается в нуль из-за сохранения 4-импульса. Но в этих областях  $A$  и  $A'$  вполне возможно образовать произведение  $f_1(1)f_1(2)$ . Поэтому в областях  $A$  и  $A'$   $c_2(1, 2) = -f_1(1)f_1(2)$  имеет отрицательное значение просто вследствие наличия кинематических корреляций.

### Упражнения

VII. 1. Определите пределы изменения продольного импульса  $q^M$  в системе мишени и изучите их зависимость от  $s$ .

VII. 2. Когда частица  $c$  из реакции  $a + b \rightarrow c + X$  может двигаться в любом направлении в системе мишени ( $0 \leq \theta^M \leq \leq 180^\circ$ ), а когда — только в переднем конусе ( $0 \leq \theta^M \leq \theta_{\text{макс}}^M$ ) в пределе  $s \rightarrow \infty$ ? Чему равно  $\theta_{\text{макс}}^M$ ?

VII. 3. Как выглядит диаграмма Пейру в системе мишени (т. е. физическая область на плоскости  $q^\Pi r$ )?

VII. 4. Пусть в СЦМ  $f(q, r) = \exp[-b(m_c^2 + q^2 + r^2)^{1/2}]$ , а  $P_{\text{макс}}^*$  столь велико, что физическую область можно считать простирающейся до бесконечности ( $f$  быстро спадает). Покажите, что при этом

$$\omega(q) = \frac{\exp(-bE_0)}{2m_c \mathbf{H}_1(m_c b)},$$

$$\langle r(q) \rangle = E_0^2 \exp(bE_0) \mathbf{H}_1(bE_0), \quad E_0 = (q^2 + m_c^2)^{1/2}.$$

Определите  $\langle r(q) \rangle$  при  $q \rightarrow \infty$  и  $q \rightarrow 0$  и изучите зависимость  $\langle r(q) \rangle$  от  $m_c$ .

VII. 5. Вычислите  $\omega(q)$  и  $\langle r(q) \rangle$  [формулы (2.24), (2.25)], если в СЦМ  $f(q, r) = 1$ . Здесь надо воспользоваться точным видом физической области.

VII. 6. Рассмотрите физическую область реакции  $a + b \rightarrow c + X$  на плоскости  $t, u = (p_b - p_c)^2$ . Покажите, что если  $s, |t|, |u| \gg m_i^2$ , то а)  $tu \approx sm_c'^2$ , б)  $\xi = 1/2 \ln(u/t)$ .

VII. 7. Вычислите  $d\sigma/d\xi$  для данной функции  $f(q, r)$ .

VII. 8. Докажите, что уравнения (4.7) совместны, т. е.  $\chi^{\Pi*} = \chi^\Pi - \chi^*$ .

VII. 9. Чему равен полный интервал изменения  $\xi^\Pi$  (продольной быстроты в системе падающей частицы)?

VII. 10. Пусть распределение  $\omega(\cos \theta^*)$  изотропно, т. е.  $\omega(\cos \theta^*) = 1/2$  ( $\theta^*$  — угол в СЦМ между  $a$  и  $c$  в реакции  $a + b \rightarrow c + X$ ). Каково распределение продольной быстроты  $\xi^*$  в СЦМ?

VII. 11. Какое соотношение имеется между угловыми распределениями  $\omega(\cos \theta^M)$  и  $\omega(\cos \theta^*)$  и распределениями по переменным  $u^*$  и  $u^M$  в (4.16)?



VII.12. В двойном разложении инклюзивных распределений по неприводимым представлениям группы  $O(1, 2)$  естественными переменными являются импульсы  $P_a = m_a \operatorname{sh} \eta_a$ ,  $P_b = m_b \operatorname{sh} \eta_b$  и угол  $\alpha$  между  $\mathbf{p}_a$  и  $\mathbf{p}_b$  в системе отсчета, где  $\mathbf{p}_c = 0$ . Покажите, что они связаны с переменными  $\xi$ ,  $r$  соотношениями [134]

$$m_c \operatorname{ch} \eta_a = (m_c^2 + r^2)^{1/2} \operatorname{ch} (\xi^M - \xi^\Pi),$$

$$m_c \operatorname{ch} \eta_b = (m_c^2 + r^2)^{1/2} \operatorname{ch} \xi^M,$$

$$m_c \operatorname{sh} \eta_a \operatorname{sh} \eta_b \sin \alpha = r \operatorname{sh} \chi^\Pi,$$

где  $\xi^M$  — продольная быстрота частицы  $c$  в СМ, а  $\chi^\Pi$  — относительная быстрота систем падающей частицы и мишени [см. (4.7)].

VII.13. Докажите, что

$$\sum_c \int d^3 p E^{-1} p^\mu f_c(\mathbf{p}, s) = (p_a + p_b)^\mu \sigma,$$

где  $f_c$  — функция распределения частиц сорта  $c$ , рождающихся с импульсом  $\mathbf{p}$  в реакции  $a + b \rightarrow c + X$ . Суммирование проводится по всем сортам частиц,  $\sigma$  — полное сечение взаимодействия для  $a + b$ .

VII.14. Определите физические области инклюзивной реакции  $a + b \rightarrow c_1 + c_2 + X$  в плоскостях  $q_1^* q_2^*$  и  $\xi_1^* \xi_2^*$ . Как связаны эти области с ПФП-диаграммой (раздел VI.6)?

## Глава VIII

### КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ОТРАЖЕНИЯ

#### 1. Общее описание

Полное дифференциальное описание процесса  $a + b \rightarrow 1 + \dots + n$  при помощи квадрата матричного элемента  $T(x_1, x_2, \dots, x_N)$  требует задания  $N = 3n - 4$  переменных. Возникновение любой неоднородности в  $T(x_1)$  при фиксированных  $x_2, \dots, x_N$  в этих условиях должно объясняться вариациями матричного элемента. Но неоднородности в проинтегрированных распределениях, например в  $\omega(x_1) = \int dx_2 \dots dx_N T$ , могут появляться и от других причин. При проецировании данных на ось  $x_1$  распределение  $\omega(x_1)$  зависит также от пределов изменения  $x_2, \dots, x_n$ , а не только от поведения  $T$  как функции этих переменных. В частности, встречаются ситуации, когда неоднородности, наблюдаемые в каком-либо распределении  $\omega(x)$ , целиком обусловлены влиянием какой-то другой кинематической переменной  $y$ . Это явление именуется *кинематическим отражением*.

Главная причина, по которой необходимо следить за кинематическими отражениями, заключается в том, что они могут привести к *ложным эффектам*. Иногда странный ход зависимости экспериментальных результатов от некоторой переменной  $x$  приводит нас к выводу, что матричный элемент также сильно зависит от  $x$ . Но при более внимательном рассмотрении обнаруживается, что этот эффект можно объяснить кинематическим отражением динамической структуры, зависящей совсем от другой переменной. В качестве примера можно привести ложные пики в спектрах эффективных масс или ложные провалы, пики и плато в распределениях передач импульсов.

Кинематические отражения возникают во всех случаях, когда проводится интегрирование по фазовому пространству. Общее правило минимизации этого эффекта состоит в том, чтобы *пользоваться дифференциальными распределениями по как можно большему числу переменных*. Совершенно свободен от отражений только анализ явлений в  $(3n - 4)$ -мерном фазовом пространстве. Если по каким-либо переменным проведено интегрирование, то приходится определять подынтегральное выражение (квадрат матричного элемента) из результатов интегрирования (из некоторого распределения), что, конечно, невоз-

можно без дальнейших допущений. Но «полностью дифференциальный» анализ возможен лишь в процессах  $2 \rightarrow 2$  и  $2 \rightarrow 3$  (размерности 1 и 4). Для более сложных реакций его трудно себе представить из-за ограниченности как экспериментальной статистики, так и возможностей анализа данных; чтобы исследовать такие реакции, необходимо иметь достаточные сведения о кинематических отражениях.

Для практических целей важно знать, какие из основных переменных могут являться причиной сильных кинематических отражений. Мы рассмотрим ниже а) отражения, обусловленные *обрезанием поперечных импульсов* (раздел 2), и б) отражения, обусловленные *резонансами* (раздел 3).

## 2. Влияние обрезаний поперечных импульсов или 4-передат

Наблюдаемое на опыте обрезание поперечных импульсов (раздел VI.5) оставляет от всего фазового пространства лишь небольшую часть, и это оказывает влияние на все реакции. Проекция этого поперечно-усеченного фазового пространства на некоторые оси, т. е. распределения по переменным, откладываемым вдоль этих осей, сильно отличаются от тех же проекций всего фазового пространства. Чтобы изучить отражения обрезаний поперечных импульсов, ограничимся простейшим случаем реакции  $2 \rightarrow 3$ . Более сложные реакции мы рассматривать не будем, поскольку качественно они ведут себя примерно так же.

Будем различать три типа обрезаний:

### 1. Обрезание поперечных импульсов

$$T = \prod_1^3 f_i(r_i). \quad (2.1)$$

### 2. Периферическое обрезание одной из передач типа

$$T = e^{at_1}, \quad a > 0. \quad (2.2)$$

### 3. Мультипериферическое обрезание, например

$$T = e^{at_1 + bt_2}, \quad a, b > 0. \quad (2.3)$$

Из условия (2.3) вытекает (2.1), так как если  $t_1$  и  $t_2$  близки к своим максимальным значениям, то  $r_1$  и  $r_3$  малы (см. раздел VII.3 и фиг. 87). Из сохранения импульса следует тогда малость  $r_2$ . Из обрезания (2.2) следует, что мало только  $r_1$ ; поэтому это обрезание нереально; тем не менее полезно посмотреть, к каким следствиям оно приводит. Сначала мы попытаемся определить, как обрезания (2.1)—(2.3) отражаются на распределениях инвариантов  $s_1$  и  $s_2$ .

В разделах VI.5, 6 уже объяснялось, что усечение поперечных импульсов (2.1) приводит к тому, что фазовое пространство реакции  $2 \rightarrow 3$  при больших  $s$  становится одномерным. При этом любая динамическая величина зависит только от одной переменной (в разделе VI.6 такой переменной был угол  $\omega$ ). Построив зависимость этой величины от  $\omega$ , можно сразу увидеть, какие ее значения совместимы с поперечно-усеченным фазовым пространством. Например, на фиг. 77 показана зависимость  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $t_1$  и  $t_2$  от  $\omega$ . Сразу видно, что  $s_1$  и  $s_2$  не могут одновременно достигать своих максимальных значений. Действительно, для любых  $s_i$ ,  $s_j$  (включая также  $s_3 = s_{31}$ ) справедливо соотношение

$$s_i s_j \leq \frac{s^2}{4}, \quad ij = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

Это довольно слабое ограничение. Оно также будет выполнено, если потребовать, чтобы  $t_1$  было близко к нулю [т. е. выполнения условия (2.2) наряду с (2.1)]. Однако если потребовать, чтобы  $t_1$  и  $t_2$  одновременно были малы [условие (2.3)], то, как видно из фиг. 77, это приведет к более сильным ограничениям на  $s_1$  и  $s_2$ : пропорциональное  $s$  увеличение большего  $s_1$  означает малость  $s_2$ . Иными словами,

$$s_1 s_2 \leq \text{const} \cdot s. \quad (2.5)$$

Чтобы представить (2.4), (2.5) в более конкретном виде, получим распределения по  $s_1$  и  $s_2$ , проинтегрировав  $T$  по  $t_1$ ,  $t_2$ . Для  $T$  из (2.1) это может быть сделано только численно, поэтому мы рассмотрим лишь условия (2.2) и (2.3) — для них необходимые интегрирования уже проведены в гл. V.

Рассмотрим сначала периферическое обрезание одной передачи типа (2.2). Из диаграмм Чу — Лоу в переменных  $s_2$ ,  $t_1$  (фиг. 41, 42) можно понять, как обрезание по  $t_1$  отражается на распределении по  $s_2$ . Давая большой вес событиям, для которых  $t_1$  максимально, мы видим, что если массы таковы, как на фиг. 41, то увеличивается вероятность малых значений  $s_2$ , а если массы такие, как на фиг. 42, то наиболее вероятными оказываются большие значения  $s_2$ . Точная величина эффекта получается из формулы (V. 11.8) для  $d^2\sigma/ds_1 ds_2$  и формулы (V. 5.21) для  $d\sigma/ds_2$ . Некоторые результаты численных расчетов величины  $d\sigma/ds_2$  приведены на фиг. 100; мы видим, как сильно этот эффект зависит от масс. Он создает пики, похожие на резонансные, но они либо очень широки, либо соответствуют очень большим значениям  $s_2$ .

Чтобы получить приближенное выражение для  $d\sigma/ds_2$  из (V. 5.21), предположим, что массы в реакции даются соотношением  $\mu t_b \rightarrow \mu t_2 t_3$ , так что диаграмма Чу — Лоу похожа на

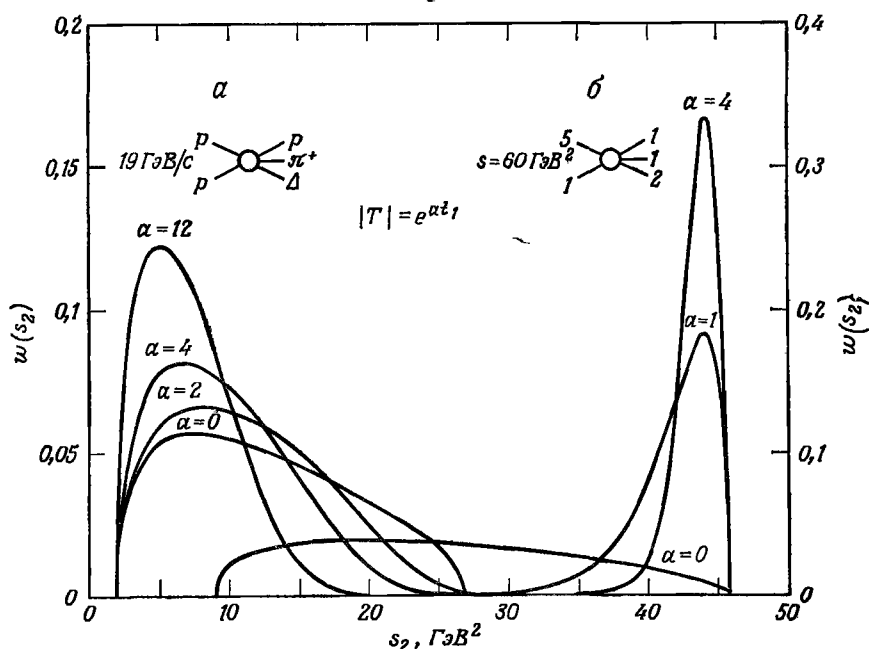
фиг. 41. Тогда из формулы (IV.6.6) для реакции  $2 \rightarrow 2$  с массами  $\mu m_b \rightarrow \mu \sqrt{s_2}$  получаем

$$t_1^+ \approx - \frac{\mu^2 (s_2 - m_b^2)^2}{s^2},$$

если  $s \gg s_2$ ,  $m_b^2$ ,  $\mu^2$ . Подставляя это в (V.5.21) и пренебрегая  $\exp(at_1^-)$ , получаем при  $(m_2 + m_3)^2 \ll s_2 \ll s$

$$\frac{d\sigma}{ds_2} \approx \exp \left[ - \frac{a\mu^2 (s_2 - m_b^2)^2}{s^2} \right]. \quad (2.6)$$

Следовательно, если только  $s_2$  не находится вблизи границ фазового пространства, величина  $d\sigma/ds_2$  спадает по закону Гаусса



Фиг. 100. Нормированное распределение  $w(s_2)$ , получающееся из квадрата матричного элемента  $\exp(at_1)$  при значениях  $a$ , указанных на рисунке.

$a$  — реакция  $pp \rightarrow p\pi^+\Delta$  при 19 ГэВ/с,  $b$  — реакция с массами  $5+1 \rightarrow 1+1+2$  при  $s=60$  ГэВ<sup>2</sup> (фиг. 42).

(фиг. 100,  $a$ ). Однако параметр  $a\mu^2/s^2$  при  $s \rightarrow \infty$  быстро убывает, чем объясняется большая ширина пика на фиг 100,  $a$ . Мы приходим к заключению, что периферическое обрезание одной передачи вряд ли можно спутать с резонансом.

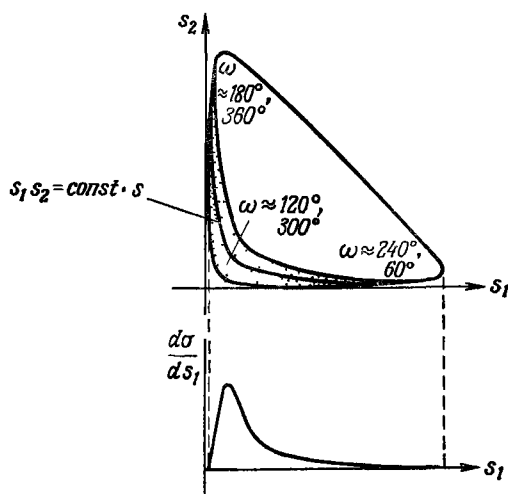
Обратимся к мультипериферическим обрезаниям (2.3). Их отражения получаются из распределения  $d^2\sigma/ds_1 ds_2$  [формула (V 11.8)] Представление об их общем поведении проще всего получить из формулы (V 11.25), справедливой в мультиреджевском пределе (V. 11.19). Мы видим, что  $d^2\sigma/ds_1 ds_2$  ведет себя как

$$\frac{d^2\sigma}{ds_1 ds_2} \sim \exp\left[-\frac{ab}{a+b} \left(m_2^2 - \frac{s_1 s_2}{s}\right)\right], \quad (2.7)$$

иными словами, экспоненциально падает, когда параметр

$$\xi = \frac{s_1 s_2}{s} \quad (2.8)$$

возрастает. Поэтому, отражения мультипериферического обрезания передач весьма сильны. Заметим, что, когда обрезана



Фиг. 101 «Угловой эффект» на фигуре Далица (качественная картина), создаваемый квадратом матричного элемента  $T = \exp(at_1 + bt_2)$ , проекция на ось  $s_1$  дает эффект Декка.

На диаграмме ПФП такое обрезание переносит область  $\omega \approx 120^\circ$  (фиг 76 и 78) Другие мыслимые мультипериферические обрезания (фиг 78) населяют углы, обозначенные соответствующими значениями  $\omega$

только одна из передач ( $ab = 0$ ), ведущий член в аргументе (2.7) исчезает и остаются только низшие члены, подобные членам в (2.6) На плоскости  $s_1 s_2$  линии уровня  $\xi$  представляют собой гиперболы, симметричные относительно линии  $s_1 = s_2$ , и  $\xi$  возрастает при перемещении в любую сторону от начала координат (фиг 101) Вследствие обрезания (2.3) на диаграмме Далица остаются только события, населяющие область близ начала

координат. И обратно, если мы видим, что события лежат преимущественно у начала координат, то для объяснения этого достаточно предположить, что в матричном элементе проведено обрезание поперечных импульсов. Концентрация событий близ одного из углов диаграммы Далица — это типичное кинематическое отражение, называемое *угловым эффектом* [29]. Те же утверждения справедливы для точной формулы (V.118). Однако следует иметь в виду, что на экспериментальных диаграммах Далица по крайней мере до  $s < 100 \text{ ГэВ}^2$  угловой эффект маскируется резонансными сгущениями либо дифракционной диссоциацией. Но это означает лишь, что матричный элемент не есть  $\exp(at_1 + bt_2)$ , и наши рассуждения к нему не относятся.

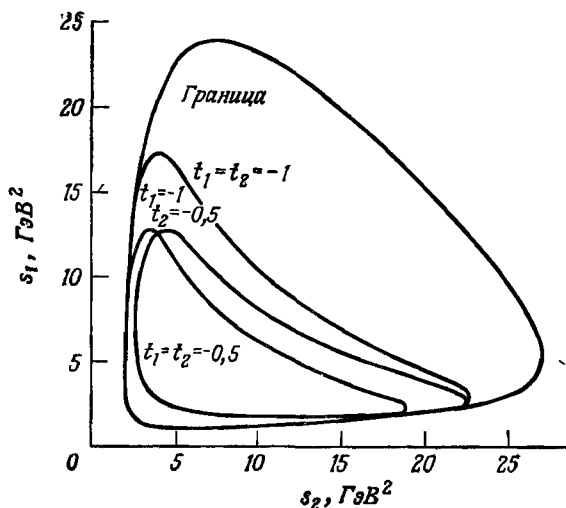
Если найти проекции распределения фиг. 101 на оси  $s_1, s_2$ , то мы увидим, что распределения по  $s_1, s_2$  при малых  $s_1$  и  $s_2$  имеют узкие пики, подобные резонансным. Эти пики представляют собой отражение мультипериферического матричного элемента (2.3). В этой форме отражение известно под названием *эффекта Декка* [36].

Если вместо обрезания (2.3) применить любое из обрезаний, показанных на фиг. 78, и при этом потребовать малости  $|t_{a1}|$  и  $|t_{b1}|$  ( $i \neq k = 1, 2, 3$ ) при большом  $s$ , то распределение событий на диаграмме Далица сосредоточится в том углу, где  $s_{ij}$  и  $s_{jk}$  ( $j \neq i \neq k$ ) одновременно малы, а  $s_{ik}$  велико (фиг. 101). Центр диаграммы Далица во всех случаях остается пустым, *относительная ширина* населенной области пропорциональна  $1/\sqrt{s}$  при больших  $s$ , так как ширина всей диаграммы пропорциональна  $s$ , а ширина распределения  $d^2\sigma/ds_1 ds_2$  пропорциональна  $\sqrt{s}$ . Ситуация здесь совершенно аналогична той, которая наблюдалась для ПФП-диаграммы на фиг. 76; разница состоит лишь в том, что на диаграмме Далица мы теряем знак продольного импульса, поэтому при однократном обходе ПФП-диаграммы (фиг. 76) диаграмму Далица мы обойдем дважды. Эти замечания подытоживают сущность механизма отражения на плоскость  $s_1 s_2$  обрезаний поперечных импульсов.

Вследствие важности углового эффекта, опишем его еще по-другому. Границей физической области является  $\Delta_4 = 0$  [уравнение (V.9.3)], а когда компоненты поперечных импульсов малы, то из формулы (II.7.17) следует, что  $\Delta_4$  мало. Следовательно, события из поперечно-урезанного фазового пространства оказываются где-то близ границы физической области. Если теперь обратиться к обрезанию по  $t_1, t_2$  и выбрать фиксированные  $t_1, t_2$ , то физически допустимые точки на плоскости  $s_1, s_2$  будут ограничены кривой  $\Delta_4 = 0$ , выраженной как функция  $s_1$  и  $s_2$  (раздел V.9, в). Построив кривую  $\Delta_4 = 0$ , легко убедиться (фиг. 102), что при малых  $|t_1|$  и  $|t_2|$   $s_1$  и  $s_2$  не могут быть одновременно

большими. В мультiredжевском пределе (V.11.19) это утверждение можно выразить даже в явной количественной форме (V.11.23). Так мы опять приходим к угловому эффекту.

Обрезание поперечного импульса сильно сказывается не только на инвариантных массах, но и на других переменных. Мы рассмотрим здесь, как видоизменяются при мультипериферическом обрезании распределения угловых переменных



Фиг. 102. Кривая  $\Delta_4 = 0$  для реакции  $pp \rightarrow p\pi\Lambda$  при 19 ГэВ/с, построенная при фиксированных значениях  $t_1$  и  $t_2$ , указанных на фигуре.

$(\theta_{b3}^{123}, \varphi_b)$ ,  $(\theta_{13}^{123}, \lambda_1)$  и  $\omega_2$  (гл. V). Все они (кроме  $\omega_2$ ) равномерно распределены по фазовому объему, а  $\omega_2$  имеет пик в точке  $\pi$  при больших  $s$ . Мы делаем лишь качественные утверждения, истинная величина эффектов увеличивается, когда увеличиваются значения  $a$  и  $b$  в формуле (2.3). Мы приходим к следующим выводам:

распределение косинусов угла Джексона  $\theta_{b3}^{123}$  приобретает пик при  $+1$ , так как, согласно (V.7.5), значение  $+1$  отвечает малым  $|t_2|$ ;

распределение углов Треймана—Янга  $\varphi_b$  остается равномерным, поскольку обрезание (2.3) не содержит зависимости от  $s_1$ ;



в распределении полярных углов спиральности  $\theta_{13}^{123}$  возникает пик при  $-1$ , так как, согласно (V. 1.8), значение  $-1$  (или  $+1$  для  $\theta_{12}^{123}$ ) отвечает малым  $s_1$ , а при угловом эффекте доминируют малые  $s_1$ ;

в распределении азимутальных углов спиральности  $\lambda_1$  появляется пик при  $0^\circ$ , так как, согласно (V. 8.9),  $\lambda_1 \approx 0^\circ$  отвечает малым значениям  $|t_2|$ ;

в распределении толлеровых углов  $\omega_2$  пик при  $\pi$  становится менее выраженным.

Заметим, в частности, что экспериментально наблюдаемый пик при  $\pi$  в распределении толлеровых углов не является отражением поперечно-усеченного фазового пространства; обрезание поперечных импульсов только ослабляет пик

### 3. Влияние резонансов

Резонансы характеризуются

брейт-вигнеровской формой зависимости от их инвариантной массы,

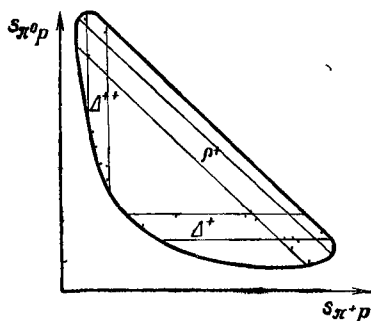
особым распределением углов вылета, определяемым спинным резонансом и механизмом их рождения.

Как уже говорилось выше, эти свойства могут отразиться на других переменных. Поскольку имеется лишь малое число хорошо выраженных настоящих резонансов, отражения резонансов не представляют такого интереса, как отражения обрезаний поперечных импульсов. Как и прежде, мы не можем дать анализ, который исчерпывал бы все типы отражений, вместо этого мы проанализируем несколько типичных случаев

#### *а. Влияние одного резонанса на другой*

Рассмотрим реакцию типа  $2 \rightarrow 3$ , в которой в каждой из конечных двухчастичных комбинаций появляется по резонансу. Примером является реакция  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^0 p$  (фиг. 103). Ясно, что каждое из распределений  $s_{ij}$  должно содержать вклады пиков в распределениях двух других инвариантных масс. Чтобы разобраться в этих резонансах, надо рассмотреть полное распределение по всей диаграмме Далица. Но и этого может оказаться недостаточно, так как резонансные полосы могут перекрываться.

Чтобы проанализировать, что именно происходит в областях пересечения, следует еще восстановить те две переменные  $t_1$  и  $t_2$ , по которым было произведено интегрирование, когда строилось распределение на диаграмме Далица. Иными словами, надо вернуться к предельно дифференциальному представлению событий в четырехмерном пространстве. Например, каналы  $\pi^+p \rightarrow \pi^0\Delta^{++}$  и  $\pi^+p \rightarrow \rho^+p$  на диаграмме Далица перекрываются;



Фиг. 103. Диаграмма Далица для реакции  $\pi p \rightarrow \pi\bar{p}$  с перекрывающимися резонансными полосами.

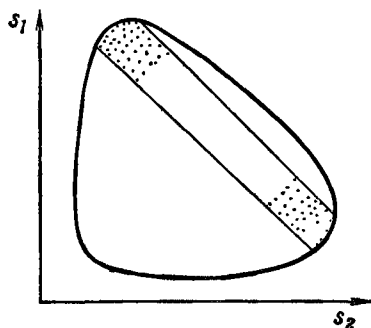
правильный способ их анализа состоит в том, чтобы когерентно сложить их амплитуды и из этой суммы вывести распределение на диаграмме Далица. Попытаться разделить каналы при помощи одной только диаграммы Далица бессмысленно.

### 6 Влияние углового распределения резонансов

Резонансы характеризуются определенными угловыми распределениями, как правило более симметричными, нежели в отсутствие резонанса. Например, двухчастичный канал распада может иметь в распределении углов вылета пик для направления вперед и пик для направления назад, однако если две частицы не являются продуктами распада резонанса или (что приводит к тому же) если имеется несколько перекрывающихся резонансов, то следует ожидать только пика для направления вперед. В этом случае пик для направления назад может приводить к появлению какой-либо неожиданной особенности в других распределениях [11].

Пусть, например, имеется резонанс в системе 13 в реакции  $a + b \rightarrow 1 + 2 + 3$  и пусть распады этого резонанса создают пики при  $\cos \theta_{b1}^{\text{ЦЗ}} = \pm 1$ , где  $\theta_{b1}^{\text{ЦЗ}}$  — соответствующий угол Джексона (раздел V.6). Если этот резонанс к тому же рождается периферически, то две системы координат — Джексона и спиральности — не очень отличаются друг от друга [формула (V.6.1)], так что распределения полярных углов спиральности

также будут иметь пики при 0 и  $180^\circ$ . Но последние распределения прямо дают распределения на диаграмме Далица (см. конец раздела V. 3), и на обоих концах резонансной полосы появляются скопления точек (фиг. 104). Тогда в распределениях  $s_1$  и  $s_2$ , следующих из фиг. 104, проявляется структура, напоминающая резонанс. Можно ли объяснить таким механизмом наблюдаемую на опыте резонансоподобную структуру? На этот



Фиг. 104. Резонанс в системе 13, рождаемый периферическим образом.

Распределение углов Джексона имеет пики при 0 и при  $180^\circ$ ; оно создает на диаграмме Далица максимумы вблизи обоих концов резонансной полосы. Проектируя их на оси  $s_1$  и  $s_2$ , мы получаем на этих осях максимумы, напоминающие резонансные.

вопрос можно ответить лишь путем анализа данных в фазовом пространстве предельно большой размерности. Подробнее эта проблема рассмотрена в работе Бергера [11].

### *в. Влияние резонансов на инклюзивные реакции*

Понятие инклюзивных реакций не уточняет, является ли наблюдаемая частица продуктом распада резонанса или же рождается в каком-то смысле непосредственно. Если в реакции рождаются резонансы, то, очевидно, следует ожидать, что они влияют на инклюзивные распределения. Хорошим примером такого влияния является модель Ена — Бергера [142], объясняющая наблюдаемые резкие пики вперед в одночастичных инклюзивных распределениях поперечных импульсов. Согласно этой модели,

эти пики возникают, когда наблюдаемая частица является продуктом распада периферически рождаемого резонанса с малым энерговыделением  $Q$ ;

эти пики особенно остры, когда масса наблюдаемой частицы мала, например если это пион.

Первое свойство гарантирует малость распадного импульса в системе покоя резонанса, а второе — малость поперечного импульса легкого продукта распада. Подробное объяснение и оценка эффекта содержатся в работах [142, 148\*].

## Глава IX

### ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ФАЗОВОМУ ПРОСТРАНСТВУ

#### 1. Введение

Важной вычислительной проблемой в физике элементарных частиц является расчет интеграла

$$I_n = I_n(p) = \int_V \dots \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta^4(p - p_1 - \dots - p_n) T. \quad (1.1)$$

Здесь квадрат матричного элемента  $T$  есть функция  $3n - 4$  независимых кинематических переменных. Область интегрирования  $V$  представляет собой либо всю физическую область, либо ее часть. Если  $V$  — полное фазовое пространство, то  $I_n$ , деленное на плотность потока, дает полное сечение реакции. Дифференциальные сечения получаются интегрированием по подпространствам полного фазового пространства.

Как и выше, практически важно сначала устранить  $\delta$ -функции в (1.1) и привести  $I_n$  к виду

$$I_n = \int_V d\Phi \rho_n(\Phi) T(\Phi) = \int d\Phi f_n(\Phi), \quad (1.2)$$

где  $\Phi$  — совокупность координат точки в  $(3n - 4)$ -мерном фазовом пространстве, получающемся после выбора той или иной совокупности кинематических переменных (несколько примеров такого выбора приведены в предыдущих главах). Область интегрирования  $V$  — это та же область, что и в интеграле (1.1), но теперь она выражена в переменных  $\Phi$ . Подынтегральное выражение  $f_n(\Phi) = \rho_n(\Phi) T(\Phi)$  есть произведение квадрата матричного элемента  $T(\Phi)$  на плотность в фазовом пространстве  $\rho_n(\Phi)$ , которая получается перемножением нескольких множителей, возникающих при заменах переменных (якобианы) и при интегрировании  $\delta$ -функций.

Основной помехой в вычислении интеграла (1.1) является, конечно, его многомерность. Далее, хотя 4-мерная  $\delta$ -функция имеет простой вид, пределы интегрирования обычно получаются сложными и зависящими друг от друга. При  $n = 2$  задача тривиальна, но уже при  $n = 3$  появляются четыре нетривиальных переменных. Да и сама область  $V$  может оказаться такой, что

не удается найти какой-либо совокупности переменных, через которые просто выражается  $V$ .

Обычно применяемые способы оценки интеграла (1.2) делятся на следующие три класса.

1. *Прямое численное интегрирование.* Это наиболее непосредственный способ: по каждой переменной последовательно проводится численное интегрирование (по правилу Симпсона, по формуле интегрирования Гаусса и т. п.). Расчет многомерного интеграла (1.2) сводится к вычислению  $f_n(\Phi)$  в некоторой совокупности точек, координаты которых фиксируются одномерными квадратурными формулами. Если интервал интегрирования по каждой переменной разделен на  $k - 1$  частей, то возникающая в  $(3n - 4)$ -мерном пространстве решетка состоит из  $k^{3n-4}$  узлов. Поскольку  $k$  приходится выбирать довольно большим ( $\geq 10$ ), то  $k^{3n-4}$  очень быстро растет с  $n$ . Поэтому прямое интегрирование возможно только для  $n = 2$  или 3 (если не считать некоторых частных случаев); для больших  $n$  время счета слишком велико. Факторизуемый матричный элемент иногда удается проинтегрировать при помощи рекуррентных соотношений (раздел 2 этой главы)<sup>1)</sup>.

Можно также брать значения функции в точках многомерного пространства, не образующих регулярную решетку. Однако задача наилучшего выбора этой решетки не решена (ясно, что этот выбор зависит от вида функции) [149\*, 150\*].

Метод прямого численного интегрирования был первым методом, примененным для численной оценки интеграла (1.2) в случае  $T = 1$  [2, 81, 102, 123].

2. *Метод Монте-Карло.* Поскольку мы не знаем, как выбирать узлы многомерной решетки для быстрого вычисления интеграла, по-видимому, имеет смысл перейти к другому крайнему случаю — выбирать их наугад. Этот метод, называемый методом Монте-Карло, в настоящее время является самым эффективным, разносторонним и практически удобным методом оценки интеграла (1.2). По этой причине мы рассмотрим его более подробно, чем другие методы<sup>2)</sup>.

Метод Монте-Карло широко используется в различных отраслях прикладных наук и в то же время включает в себя немало глубоких проблем чисто математического характера. Общее описание метода можно найти в книге Хаммерсли и Хэндскама

<sup>1)</sup> Таким способом были составлены таблицы фазовых объемов наиболее часто встречающихся систем частиц [84] — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> На русском языке метод Монте Карло в применении к реакциям, протекающим с элементарными частицами, называют еще моделированием реакций или розыгрышем случайных звезд. — *Прим. ред.*

ба [56] и в обзоре Гальтона [54] (см. также [151\*—153\*]). В физике элементарных частиц этот метод был впервые применен Церулюсом и Хагедорном [28] для вычисления нековариантного фазового объема. Копылов [78—81] впервые использовал ковариантные свойства формулы (1.1). Применяемый в настоящее время метод по существу совпадает с предложенным Копыловым.

Для достижения разумной точности метод Монте-Карло требует розыгрыша очень большого числа случайных точек (по крайней мере порядка  $10^3$ ). Он занял видное положение среди остальных методов только с появлением быстрых ЭВМ и стандартных программ, доступных любому физическому. Наиболее широко используемая стандартная программа моделирования называется FOWL [61, 62]. Она написана Джеймсом на основе работы Линча и Рауболда [95]. Метод моделирования в физике элементарных частиц постоянно совершенствуется, его эффективность в решении тех задач, которые чаще всего встречаются на практике, растет [20, 22, 46, 47, 72, 82, 85, 119, 167\*, 168\*].

**3. Статистический метод** Если  $T$  факторизуется:

$$T = g_1(p_1) \dots g_n(p_n), \quad (1.3)$$

то можно воспользоваться хотя и частным, но весьма мощным методом оценки интеграла (1.1). Мы будем называть этот метод статистическим, так как он похож на метод, используемый в статистической физике. Применяется и другое название — «метод седловой точки». Этот метод дает величину интеграла (1.1) с точностью до  $1/\sqrt{n}$ , так что точность возрастает с ростом  $n$  в противоположность всем другим методам.

Условию факторизуемости удовлетворяет также случай  $T = 1$ , для которого впервые был применен статистический метод [27, 43, 74, 92, 94]. Люрса и Мазур [94] дали особенно изящную интерпретацию этого метода при помощи центральной предельной теоремы теории вероятностей [70]. Они также нашли первый поправочный член и показали, что получающиеся результаты численно весьма точны. Кривицкий [87, 88] рассмотрел случай, когда каждое  $g_i$  в уравнении (1.3) зависит только от величины поперечного импульса частицы  $i$ . Этим способом в работе [66] был оценен интеграл по продольному фазовому объему; влияние сохранения момента количества движения изучалось в работах [69, 129, 131]. В работах [75—77] метод применен к случаю, когда подынтегральное выражение является вектором или тензором.

## 2. Прямое численное интегрирование

Иногда интеграл по фазовому пространству вычисляется прямыми методами численного интегрирования. Мы коснемся

здесь вычисления интеграла в случаях а) трехчастичных конечных состояний и б) факторизуемых матричных элементов, когда можно воспользоваться рекуррентными соотношениями.

### а. Трехчастичные интегралы

Трехчастичные конечные состояния описываются (если нет спина) четырьмя существенными кинематическими переменными. Расчет распределений по одной или двум переменным, требующий только трехмерного или двумерного интегрирования, а иногда также и расчет полного сечения точнее и экономичнее всего вести при помощи многомерных формул Ньютона — Котса или Гаусса. Существуют также специальные методы вычисления двумерных и трехмерных интегралов [55]. Недостаток такого подхода заключается в необходимости составлять для каждой задачи свою отдельную программу расчета на ЭВМ.

Различные способы выбора кинематических переменных для процесса  $a + b \rightarrow 1 + 2 + 3$  следуют из интегралов, приведенных в гл. V. Какое из этих выражений выбрать, зависит от свойств  $T$  и от свойств тех величин, которые мы хотим рассчитать. Заметим в этой связи, что в выражении (V.9.2), куда входят переменные  $s_1, s_2, t_1, t_2$ , множитель  $(-\Delta_4)^{-1/2}$  на границах интегрирования расходится, а сами эти границы даются громоздким условием  $\Delta_4 = 0$ . Даже если  $T$  достаточно быстро спадает на границах фазового пространства, из-за последнего условия лучше брать формулы, в которые входит не  $\Delta_4$ , а какой-нибудь угол.

### б. Рекуррентные соотношения

Если матричный элемент в каких-то переменных факторизуется, так что интеграл по фазовому пространству может быть выражен рекуррентным соотношением (гл. VI), то численное интегрирование требует не  $k^n$ , а  $nk$  точек ( $n$  — число измерений,  $k$  — число интервалов, на которые разбивается каждый одномерный интеграл) [84\*, 120]. При этом расчет значительно ускоряется. Для примера рассмотрим кратко случаи

$$T = \prod_2^n f(M_i, M_{i-1})$$

и

$$T = \prod_1^{n-1} f(t_i)$$

(обозначения объясняются в гл. VI). Подчеркнем, что условия факторизуемости (1.3), служащие для применения статистического метода расчета, могут отличаться от выписанных только что разложений матричного элемента.

Если матричный элемент равен единице, то  $R_n(M_n^2)$  получается из  $R_{n-1}(M_{n-1}^2)$  с помощью рекуррентного соотношения

$$R_n(M_n^2) = \int_{\mu_{n-1}}^{M_n - m_n} dM_{n-1} K_n(M_n, M_{n-1}) R_{n-1}(M_{n-1}^2). \quad (2.1)$$

Явный вид ядра  $K_n$  расписан в формуле (VI. 2.10). Чтобы вычислить  $R_n(M_n^2)$ , для каждой переменной типа  $M_n$  выбирают дискретную совокупность из  $k$  точек. Тогда  $R_n$  получается из  $R_2$  при помощи  $n - 2$  умножений на матрицу  $k \times k$ , т. е. требуется примерно  $(n - 2)k^2$  умножений и сложений. Элементы матриц суть произведения  $K_n$  на коэффициенты соответствующей формулы интегрирования (например, формулы Симпсона). Этот метод применим и в более общем случае, когда матричный элемент реакции имеет вид  $\prod_i f_i(M_i, M_{i-1})$ , что, впрочем, редко встречается на практике.

Если  $n$  велико, проще вычислять  $R_n(M_n^2)$  статистическим методом (раздел 6). С другой стороны, рекуррентные соотношения имеют то преимущество, что распределения  $M_{n-1}^2$  получить немногим более сложно, чем одно значение  $R_{n-1}(M_{n-1}^2)$ . Действительно, если мы начинаем с функции  $R_2(M_2^2)$ , определенной в интервале  $\mu_2 \leq M_2 \leq M_n - \mu_{n-1}$ , то после  $n - 3$  матричных умножений получим  $R_{n-1}(M_{n-1}^2)$  во всем интервале  $\mu_{n-1} \leq M_{n-1} \leq M_n - m_n$ .

В качестве второго примера рассмотрим

$$T = \prod_{i=1}^{n-1} f_i(t_i).$$

Согласно соотношению (VI. 2.26), интеграл  $I_n$ , получаемый интегрированием  $T$  по всему фазовому пространству, может быть записан в рекуррентном виде

$$I_n(M_n^2, t_n) = \iint dM_{n-1} dt_{n-1} K_n(M_n, t_n; t_{n-1}) I_{n-1}(M_{n-1}^2, t_{n-1}),$$

$$K_n = \frac{\pi}{2} \lambda^{-1/2}(M_n^2, t_n, m_a^2) f_{n-1}(t_{n-1}), \quad (2.2)$$

$$I_2(M_2^2, t_2) = \frac{\pi}{2} \lambda^{-1/2}(M_2^2, t_2, m_a^2) \int f_1(t_1) dt_1$$

(обозначения те же, что и выше). Вычисления по формуле (2.2) проводятся так же, как по формуле (2.1). Существует довольно сложная программа таких вычислений, составленная для ЭВМ [120]. Преимущество этого метода состоит в том, что он позволяет эффективно генерировать распределения по  $s$  или на всей диаграмме  $st$  Чу — Лоу.



### 3. Правила интегрирования методом Монте-Карло

Гораздо более распространенным способом интегрирования по фазовому пространству является метод Монте-Карло. Это объясняется следующими его особенностями.

а. Скорость сходимости метода Монте-Карло (в области его применимости) выше, чем у других методов. Погрешность убывает пропорционально  $1/\sqrt{N}$  или даже еще быстрее ( $N$  — число точек, в которых вычислено подынтегральное выражение).

б. Метод является весьма общим, т. е. в принципе может быть эффективно применен ко всем матричным элементам, встречающимся на практике.

в. Метод позволяет одинаково легко строить как одно распределение, так и несколько: все гистограммы строятся по одним и тем же событиям. Легко получить также сложные распределения (типа распределений углов Треймана — Янга).

г. Программы Монте-Карло для ЭВМ можно сделать очень простыми, доступными любому работнику, не получившему специальной подготовки.

д. В методе Монте-Карло мы обрабатываем моделированные события в точности так же, как при работе с реальными событиями, полученными, например, в пузырьковой камере. Следовательно, для обработки моделированных событий можно пользоваться программами обработки экспериментальных данных.

Пользуясь в физике элементарных частиц методом Монте-Карло, мы вычисляем подынтегральное выражение  $f_n(\Phi)$  не в детерминированной последовательности точек, а в случайной их совокупности. События разыгрываются случайно с данной *плотностью*  $g(\Phi)$  в фазовом пространстве, и для каждого из них вычисляется  $f_n(\Phi)$ . *Событием* здесь называется набор из  $n$  векторов импульсов  $p_1, \dots, p_n$  (в какой-нибудь системе отсчета), удовлетворяющих сохранению 4-импульса и лежащих на массовой поверхности  $p_i^2 = m_i^2, i = 1, \dots, n$ . *Плотность*  $g(\Phi)$  — это обычная плотность вероятности; вероятность того, что случайное событие попадет в бесконечно близкую окрестность точки  $\Phi$  фазового пространства, равна  $g(\Phi)d\Phi$  ( $\Phi$  — элемент объема фазового пространства). Координатами точки  $\Phi$  могут быть любые наборы  $3n - 4$  переменных. Мы будем пользоваться инвариантными массами и углами, но можно применять и компоненты импульсов.

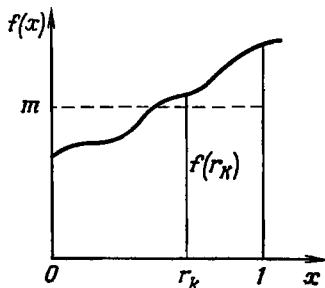
Количество событий, которое нужно разыграть, чтобы получить разумный результат, зависит от *эффективности* используемого метода моделирования. Эффективность может быть определена как величина, обратно пропорциональная количеству труда, затраченного на получение результата с данной *статисти-*

*стической точностью.* Качественно эффективность тем выше, чем лучше  $g(\Phi)$  аппроксимирует ту функцию  $f_n(\Phi)$ , которую нужно проинтегрировать. В лучших случаях современные программы моделирования позволяют ограничиться несколькими тысячами событий

Заметим, что с точки зрения розыгрыша событий имеется три рода плотностей.

1. Идеальным генератором случайных событий является, конечно, сама реакция. Целью большинства опытов как раз и является определение того, с какой плотностью в фазовом пространстве рождаются частицы.

2. Любая модель реакции требует указания матричного элемента или плотности событий в фазовом пространстве. Часто



Фиг. 105. Интегрирование методом Монте-Карло функции  $f(x)$  на интервале  $(0, 1)$  ( $r_k$  — случайная точка,  $m$  — точное значение интеграла).

эти матричные элементы оказываются очень сложными функциями (например, в дуальных моделях), так что не видно возможности разыгрывать на современных ЭВМ события с такой плотностью.

3. Программы Монте-Карло генерируют события с некоторыми определенными плотностями  $g(\Phi)$ , которые обычно являются простыми функциями  $\Phi$ . В выборе  $g(\Phi)$  есть немало свободы, но следует помнить, что одна и та же плотность  $g(\Phi)$  может оказаться пригодной для одной задачи и неэффективной для другой. Следовательно, при составлении моделирующих программ общего употребления необходимо так оптимизировать  $g(\Phi)$ , чтобы эти программы могли решать как можно больше задач.

В дальнейшем нашей основной целью будет объяснить, как вести случайный розыгрыш событий и какие типы  $g(\Phi)$  встречаются на практике. Для этого рассмотрим сначала простой одномерный интеграл (фиг. 105):

$$m = \int_0^1 dx f(x). \quad (3.1)$$

(На практике, конечно, к одномерным интегралам метод Монте-Карло не применяется, так как обычные численные методы сходятся гораздо быстрее.) Обозначим численное значение интеграла  $m$ ; оно совпадает со средним значением функции  $f(x)$  на интервале  $(0, 1)$ . Подобным же образом можно определить дисперсию  $\sigma^2$  функции  $f(x)$ :

$$\sigma^2 = \int_0^1 dx [f(x) - m]^2. \quad (3.2)$$

Она служит мерой флуктуации функции  $f(x)$  в интервале  $(0, 1)$ ; чем больше  $\sigma^2$ , тем более  $f(x)$  флуктуирует относительно своего среднего значения.

Предположим теперь, что мы умеем разыгрывать случайные числа  $r_k$ ,  $0 < r_k < 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$  так, что каждое значение между 0 и 1 одинаково вероятно, т. е.  $r_k$  равномерно распределены в интервале  $(0, 1)$ . В дальнейшем  $r_k$  всегда будет обозначать случайную переменную такого типа. Числа  $r_k$  лежат в основе любого метода Монте-Карло; очень важно добиться, чтобы ЭВМ, которая отнюдь не является случайным устройством, генерировала такие числа. По этому вопросу мы просто сошлемся на специальную литературу, уже упоминавшуюся выше. Разыграем теперь  $N$  чисел  $r_1, \dots, r_N$  и вычислим подынтегральное выражение в этих точках. Тогда  $m$  аппроксимируется средним арифметическим  $\bar{m}$  всех  $N$  чисел  $f(r_k)$ :

$$\bar{m} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(r_k). \quad (3.3)$$

Это оценка по Монте-Карло интеграла (3.1). Если прибегнуть к терминологии, принятой при моделировании реакций с элементарными частицами, разыгранные значения  $r_k$  надо называть «событиями», а  $f(r_k)$  — их весами.

Поскольку  $r_k$  — случайные переменные,  $\bar{m}$  — также случайная переменная, так что при розыгрыше другой совокупности  $r_k$  появляется и новое значение  $\bar{m}$ . При данном  $N$  значения  $\bar{m}$  распределяются так, что математическое ожидание  $\bar{m}$  как раз равно требуемому значению  $m$  интеграла (3.1). Отклонения  $\bar{m}$  от наиболее вероятного значения измеряются величиной

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N [f(r_k) - \bar{m}]^2, \quad (3.4)$$

которая аппроксимирует выражение (3.2) в том же самом смысле, в каком  $\bar{m}$  аппроксимирует  $m$ . Выражение (3.4) измеряет отклонение веса  $f(r_k)$  от оцениваемой величины  $\bar{m}$ , а не от

истинного значения  $m$ . Это приводит к увеличению дисперсии в  $N/(N-1)$  раз. Тогда можно показать, что величина  $\bar{\sigma}$ , определенная выражением (3.4) с  $N-1$  в знаменателе, имеет математическое ожидание, равное  $\sigma$ .

Формальное доказательство высказанных утверждений вытекает из центральной предельной теоремы теории вероятностей. Предположим, что случайные переменные  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , распределены так, что их средние значения равны  $m_i$ , а дисперсии равны  $\sigma_i^2$ . При весьма общих условиях распределение суммы  $x = (x_1 + \dots + x_N)/N$  для больших  $N$  в этом случае должно приближаться к нормальному распределению

$$N(x; m, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \quad (3.5)$$

со средним  $m = (1/N) \sum_{i=1}^N m_i$  и дисперсией  $\sigma^2 = (1/N^2) \sum_{i=1}^N \sigma_i^2$ . В данном случае случайными числами являются значения  $f_k = f(r_k)$ ; они распределены так, что их среднее равно  $m$ , а дисперсия  $\sigma^2$ . Следовательно, для больших  $N$   $\bar{m}$  сходится к  $m$ , а дисперсия распределения  $\bar{m}$  есть  $(1/N)\sigma^2$ . Значение  $\sigma^2$ , конечно, нам не известно, но  $\bar{\sigma}^2$  в выражении (3.4) служит оценкой  $\sigma^2$ . Следовательно, результат интегрирования по Монте-Карло может быть представлен в виде

$$m = \bar{m} \pm \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{N}}. \quad (3.6)$$

Из (3.5) следует, что при повторных интегрированиях по методу Монте-Карло вероятность того, что результат отклонится от истинного значения  $m$ , например, более чем на одно или два стандартных отклонения  $\sigma/\sqrt{N}$ , равна 32 или 4,5% соответственно. Заметим, что соотношение (3.6) ничего не говорит о том, какова погрешность отдельного расчета по методу Монте-Карло.

**Пример.** Разберем случай, когда функция плотности вероятности  $F(\bar{m})$  вычисляется в явном виде. Пусть  $f(x) = x$ , так что, согласно (3.1) и (3.2),  $m = 1/2$  и  $\sigma^2 = 1/12$ . Значение  $m$ , вычисленное по методу Монте-Карло, согласно соотношению (3.3) равно

$$m = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N r_k,$$

т. е. составляет  $1/N$  часть от суммы  $N$  случайных чисел, равномерно распределенных между 0 и 1. Плотность вероятности  $F(\bar{m})$  получить величину  $\bar{m}$  в этом случае может быть вычислена

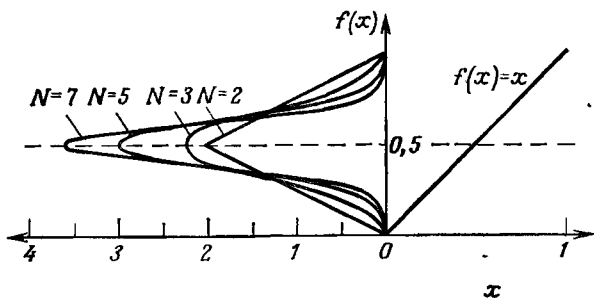
стандартными методами теории вероятностей. Действительно,  $F(\bar{m})$  есть интеграл

$$F(\bar{m}) = N \int_0^1 dr_1 \dots dr_N g(r_1) \dots g(r_N) \delta(r_1 + \dots + r_N - N\bar{m}), \quad (3.7)$$

где  $g(r)$  равно 1 в интервале  $0 < r < 1$  и равно 0 в остальных точках. Интеграл вычисляется с помощью преобразования Лапласа:

$$F(\bar{m}) = \frac{N}{(N-1)!} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} [(Nx - k)_+]^{N-1}, \quad (3.8)$$

где  $(x)_+ = (x + |x|)/2 \equiv x\theta(x)$ . Кривая, представляющая  $F(\bar{m})$ , изображена для различных значений  $N$  на фиг. 106. Она состоит



Фиг. 106. Иллюстрация сходимости интегрирования методом Монте-Карло.

Интегрируемая функция  $f(x)=x$ , кривые показывают как с увеличением  $N$  нормированные плотности вероятности оценок интеграла по методу Монте Карло приближаются к точному значению 0,5.

из сшитых кусков  $N$  различных многочленов степени  $N-1$  в интервалах  $(0, 1/N)$ ,  $(1/N, 2/N)$  и т. д. Можно видеть, как  $F(\bar{m})$  приближается к гауссовой кривой (3.5) с пиком при  $1/2$  (точное значение  $m$  интеграла) и как пик сужается с ростом  $N$ . Это дает представление о том, как увеличивается точность интегрирования по методу Монте-Карло с ростом  $N$ .

Обобщение формулы (3.3) на большее число измерений интуитивно очевидно:

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 \dots dx_K f(x_1, \dots, x_K) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(r_1^{(k)}, \dots, r_K^{(k)}). \quad (3.9)$$

Здесь случайные точки  $(r_1^{(k)}, \dots, r_K^{(k)})$  равномерно распределены в  $K$ -мерном гиперкубе. Раньше мы разыгрывали подынтегральное выражение в интервале, теперь — в гиперкубе. Если какие-то пределы интегрирования сами зависят от некоторых  $x_i$ , их

можно специально преобразовать к пределам 0 и 1 и уже после этого применять формулу (3.9). Погрешность дается формулой, аналогичной (3.6). В частности, она пропорциональна  $1/\sqrt{N}$  независимо от того, какова размерность  $K$ .

#### 4. Уменьшение статистической погрешности

Статистическая погрешность описанного выше *грубого расчета методом Монте-Карло* зависит от двух факторов: от дисперсии  $\sigma^2$  интегрируемой функции и от количества случайных точек, в которых берется эта функция. Простейший путь уменьшения погрешности состоит в увеличении  $N$ . Погрешность пропорциональна  $1/\sqrt{N}$ , так что для ее уменьшения в десять раз приходится увеличивать  $N$  в сто раз. Поэтому точность, которой можно достичь путем увеличения  $N$ , ограничивается имеющимся временем на ЭВМ.

Существуют многочисленные более эффективные способы уменьшения разброса результатов интегрирования методом Монте-Карло. Большинство этих *способов уменьшения разброса* основано на следующих простых идеях: либо видоизменяется исходная постановка задачи так, чтобы функция  $f_n(\Phi)$  после этого меньше варьировала, либо меняется распределение случайных событий так, чтобы оно перестало быть полностью случайным и равномерным. Некоторые способы, как мы увидим, можно сформулировать исходя из любой из этих идей. Мы опишем те способы, которые находят применение в физике элементарных частиц. Искусство моделирования достигло ныне заметной изощренности, и если вы встретитесь с проблемой, выходящей за рамки описанных здесь стандартных процедур, лучше обратиться к специалисту.

Во-первых, прибегнув к *квазислучайным* числам, можно ускорить сходимость метода настолько, что статистическая погрешность станет пропорциональной  $1/N$ . Утверждение, что погрешность в общем случае ведет себя как  $1/\sqrt{N}$ , основано на предположении, что используемые случайные числа действительно случайны или что они «выглядят случайными» (вырабатываемые ЭВМ *псевдослучайные* числа). Работая с псевдослучайными числами, мы не имеем представления, какое число выкинет машина в следующий раз. Но можно также пользоваться случайными числами, которые в целом распределены равномерно, но строго коррелированы между собой:  $r_{i+1}$  зависит от  $r_i$  (квазислучайные числа). Например, последовательность  $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{8}; \frac{3}{8}; \frac{5}{8}; \frac{7}{8}; \dots$ , составленная очевидным образом, представляет собой последовательность квазислучайных чисел. Пользование ими гарантирует при конечных  $N$  равномерный розыгрыш

подынтегральной функции. Можно доказать, что в этом случае погрешность спадает как  $1/N$ . Тем самым мы делаем шаг в обратном направлении от подлинной случайности к методам прямого численного интегрирования, в которых положение точек заранее предопределено. Различие между псевдо- и квазислучайными числами практически весьма важно; последние предпочтительней (ими и пользуется, например, программа FOWL). Подробней об этой важной и до конца еще не понятой проблеме см. в работах [54, 56, 61, 149\*, 150\*, 155\*].

Второй способ усовершенствования метода Монте-Карло — уменьшение вариаций (нивелирование) интегрируемой функции. Как показывает выражение (3.2), для этого нужно преобразовать интеграл так, чтобы функция изменялась как можно меньше. Следовательно, мы должны обладать какой-то информацией о поведении подынтегрального выражения. В физике элементарных частиц были разработаны специальные методы решения возникающих здесь проблем. Необходимость их и иллюстрируется следующим примером.

**Пример 1.** Рассмотрим интеграл

$$m = \int_0^1 dx a e^{ax} = e^a - 1, \quad (4.1)$$

где  $a$  — константа. Интегралы такого типа встречаются в физике высоких энергий при интегрировании по квадратам передач импульсов  $t$ , так как опыт подтверждает наличие в матричном элементе зависимости  $e^{at}$ . Простой расчет дает

$$\sigma^2 = \frac{a}{2} \left[ \left(1 - \frac{2}{a}\right) e^{2a} + \frac{4}{a} e^a - \frac{2}{a} + 1 \right]. \quad (4.2)$$

Следовательно, для больших  $a$  относительная погрешность  $\sigma/m\sqrt{N}$  интегрирования по Монте-Карло возрастает как  $\sqrt{a/2N}$ . Причиной является растущая асимметрия функции  $a e^{ax}$ . Функция разыгрывается равномерно во всем интервале  $(0, 1)$ , хотя при больших  $a$  точки, лежащие вблизи нуля, вносят в интеграл гораздо меньший вклад, чем точки вблизи единицы. При вычислении интеграла первые из них почти бесполезны. Для улучшения ситуации надо разыгрывать больше точек в той области, где подынтегральное выражение велико, т. е. брать его в тех участках, которые наиболее важны. В нашем примере этого легко добиться, выбрав в качестве новой переменной  $y = e^{ax}$ . Тогда

$$m = \int_1^{e^a} dy,$$

что можно вычислить, разыгрывая точки  $y$  равномерно в интервале  $(1, e^a)$ . Подынтегральное выражение теперь постоянно, вариации обратились в нуль. Заметим, что к такому же преобразованию прибегают и тогда, когда (при  $a < 0$ ) пределы интегрирования в (4.1) простираются от 0 до  $\infty$ .

Из примера ясно, что если  $f(x)$  меняется заметным образом, то для повышения эффективности метода Монте-Карло надо генерировать случайные точки так, чтобы их плотность была близка к  $|f(x)|$ . Такой метод называется *существенной выборкой* (выборкой по важности). Для применения этого метода надо уметь генерировать случайные числа, распределенные с данной плотностью  $g(x)$ . Плотность  $g(x)$  определим так, чтобы вероятность того, что выпадет значение между  $x$  и  $x + dx$ , была равна  $(1/G)g(x)dx$ , где  $G = G(+\infty)$  и

$$G(x) = \int_{-\infty}^x dt g(t). \quad (4.3)$$

Рассмотрим тогда интеграл

$$I = \int_{x^-}^{x^+} dx f(x), \quad (4.4)$$

где введены произвольные пределы интегрирования (они нам понадобятся в дальнейшем). Введем новую переменную

$$r = \frac{G(x) - G(x^-)}{G(x^+) - G(x^-)}, \quad (4.5)$$

которая изменяется от 0 до 1 и дифференциал которой равен

$$dr = \frac{g(x) dx}{G(x^+) - G(x^-)}. \quad (4.6)$$

Интеграл (4.4) теперь может быть переписан в виде

$$I = \int_{x^-}^{x^+} dx f(x) = \int_{x^-}^{x^+} dx g(x) \frac{f(x)}{g(x)} = [G(x^+) - G(x^-)] \int_0^1 dr \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (4.7)$$

где

$$x = G^{-1} \{G(x^-) + r[G(x^+) - G(x^-)]\}. \quad (4.8)$$

Применяя к выражению (4.7) формулу (3.3), получаем

$$I = \int_{x^-}^{x^+} dx f(x) \approx \bar{I} = \frac{G(x^+) - G(x^-)}{N} \sum_{k=1}^N \frac{f(x_k)}{g(x_k)} \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_k, \quad (4.9)$$



где  $x_k$  выражается через  $r_k$  с помощью формулы (4.8), а  $w_k$  — вес, приписываемый  $k$ -му событию. Согласно формуле (4.6), случайные переменные  $x_k$  теперь распределены с плотностью

$$\frac{dN(x)}{dx} = \frac{dN(r)}{dr} \frac{dr}{dx} = \frac{g(x)}{G(x^+) - G(x^-)},$$

которая в области интегрирования нормирована на единицу.

В интеграле по  $r$  (4.7) встречается только отношение  $f/g$ ; если  $g$  лучше аппроксимирует  $f$ , чем константа, то дисперсия  $f/g$  уменьшается. С учетом (3.3), (3.4) и (3.6) результат интегрирования по Монте-Карло (4.9) может быть записан в виде

$$I = \bar{I} \pm \delta \bar{I}, \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_k, \\ \delta \bar{I}^2 &= \frac{1}{N(N-1)} \left\{ \sum_{k=1}^N w_k^2 - \frac{1}{N} \left( \sum_{k=1}^N w_k \right)^2 \right\}, \\ w_k &= \{G(x^+) - G(x^-)\} \frac{f(x_k)}{g(x_k)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Заметим, что изложенный выше формальный метод розыгрыша случайных чисел с плотностью  $g(x)$  не всегда применим на практике. Ниже мы уточним условия, при которых он пригоден, а также приведем еще один метод.

1. Метод замены переменных удобен тогда, когда из выражения (4.8) следует простой и быстрый способ перехода от исходных случайных чисел  $r_k$  к случайным числам  $x_k$ . Иначе трудоемкость выкладок сведет к нулю выгоды от уменьшения дисперсии. Практически это сводится к требованию, чтобы все функции  $g(x)$ ,  $y = G(x)$  и  $x = G^{-1}(y)$  были элементарными<sup>1)</sup>. В физике элементарных частиц таким образом удается нивелировать два часто встречающихся случая резких изменений подынтегрального выражения — экспоненциальное распределение и распределение Брейта — Вигнера. Нужные для этого преобразования приведены в табл. IX.1, их можно прямо подставлять в (4.9).

2. Наряду с методом замены переменных существуют другие пути получения случайных чисел, распределенных с нужной плотностью  $g(x)$ , где  $g(x)$  — одна из нескольких специальных

<sup>1)</sup> Когда функции  $G(x)$  и  $G^{-1}(x)$  не элементарны, часто выгодно задать их численно [численным интегрированием (4.3)] и определять  $x$  из составленной таким образом таблицы (4.8) путем обратной интерполяции. — *Прим. ред.*

Таблица IX.1

Плотности распределений, их первообразные функции и функции, обратные первообразным, которые требуются для розыгрыша некоторых распределений методом существенной выборки

| Тип распределения | $g(x)$                      | $G(x)$                                     | $G^{-1}(y)$                                       |
|-------------------|-----------------------------|--------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Экспоненциальный  | $ae^{ax}$                   | $e^{ax}$                                   | $\frac{1}{a} \ln y$                               |
| Брейта — Зигнера  | $\frac{b^2}{(x-a)^2 + b^2}$ | $\frac{\pi}{2} b + b \arctg \frac{x-a}{b}$ | $a + b \operatorname{tg} \frac{y - (\pi/2) b}{b}$ |

функций (не обязательно интегрируемых в конечном виде). Рассмотрим, например, случай, когда  $g(x)$  — функция Гаусса  $g(x) = e^{-x^2/2\sigma^2}$ , а интегрирование проводится от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В этой ситуации мы встречаемся, когда периферичность матричного элемента выражается через поперечные импульсы. Вес  $g(x)$  не интегрируется в конечном виде, но тем не менее розыгрыш случайных чисел, распределенных по нормальному закону, не представляет труда. Мы можем, например, применить центральную предельную теорему к сумме  $n$  равномерно распределенных случайных чисел. Как было показано выше, она быстро сходится к функции Гаусса; уже плотность распределения (3.8) суммы

$$s = \sigma \left( \sum_{i=1}^{12} r_i - 6 \right) \quad (4.12)$$

по существу не отличается от своего предела (3.5) со средним значением нуль и дисперсией  $\sigma^2$ . Когда  $s_i$  нормально распределены в интервале  $(-\infty, \infty)$ , формула (4.9) прямо дает

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \approx \frac{\sigma \sqrt{2\pi}}{N} \sum_{i=1}^N f(s_i) e^{+s_i^2/2\sigma^2}. \quad (4.13)$$

## 5. Применение метода Монте-Карло в физике элементарных частиц

В проблеме применения метода Монте-Карло в физике элементарных частиц (проблеме моделирования реакций) следует различать две стороны: а) случайный розыгрыш событий и б) обработку этих событий. Практически второй аспект — как обращаться с полученными данными — не менее важен, чем первый, и мы коснемся его позднее. Здесь же мы опишем с достаточной подробностью генерирование событий.

Чтобы вычислить интеграл (1.1) по фазовому пространству, надо исключить из (1.1) четырехмерную  $\delta$ -функцию и явно выразить  $I_n$  через совокупность  $3n - 4$  переменных  $\Phi$ , как это сделано в формуле (1.2). Значение  $\Phi$  однозначно определяет событие, так что по данному  $\Phi$  можно реконструировать конфигурацию импульсов  $p_1, \dots, p_n$ .

Чтобы можно было получать события, используя стандартные программы счета на ЭВМ, интеграл (1.2) преобразуется так, чтобы каждая из  $3n - 4$  переменных, входящих в  $\Phi$ , обладала простым интервалом изменения. Ниже будет указана такая совокупность переменных

$$\Phi' = (r^{(1)}, \dots, r^{(3n-4)}), \quad (5.1)$$

для которой  $(3n - 4)$ -мерный гиперкуб  $V'$

$$0 \leq r^{(l)} \leq 1, \quad l = 1, \dots, 3n - 4 \quad (5.2)$$

и физическая область  $V$  взаимно однозначно соответствуют друг другу. Пусть теперь якобиан перехода от  $\Phi$  к  $\Phi'$  есть  $\partial\Phi'/\partial\Phi$ . Тогда интеграл (1.2) принимает вид

$$I_n = \int_{V'} d\Phi' \frac{\rho_n[\Phi(\Phi')]}{\partial\Phi'/\partial\Phi} \frac{T'(\Phi')}{g'_n(\Phi')} = \int_{V'} d\Phi' \frac{T'(\Phi')}{g'_n(\Phi')}, \quad (5.3)$$

где

$$g'_n(\Phi') = \frac{\partial\Phi'/\partial\Phi}{\rho_n(\Phi)}. \quad (5.4)$$

Сравнивая с (4.11), мы видим, что если значения  $\Phi'_1, \dots, \Phi'_N$  разыграны равномерно в гиперкубе (5.2), то метод Монте-Карло дает следующую оценку:

$$\bar{I}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_k, \quad w_k = \frac{T'(\Phi'_k)}{g'_n(\Phi'_k)}. \quad (5.5)$$

Статистическая погрешность  $\delta\bar{I}_n$  по-прежнему определяется формулой (4.11), куда вместо  $w_k$  следует подставить (5.5).

Совокупность переменных (5.1), удовлетворяющих условию (5.2), можно выбирать бесчисленным множеством способов. Из (5.3) видно, что плотность событий равна

$$\rho'_n(\Phi') = \frac{1}{g'_n(\Phi')}. \quad (5.6)$$

Путем подходящего выбора перехода от  $\Phi$  к  $\Phi'$  можно добиться того, что  $g'_n(\Phi')$  будет имитировать  $T(\Phi)$  и дисперсия веса будет малой.

Если  $V$  является подпространством полного фазового пространства, то соответствующее  $I_n$  несложно получить, включив

в сумму (5.5) лишь те  $\Phi_k$ , которые лежат в  $V$ . Пусть нам нужно знать распределение некоторой переменной  $v$ , т. е. производную  $\partial I_n / \partial v$ . Разделим область изменения  $v$  на участки длиной  $\Delta v$  (не обязательно одинаковые); искомая производная

$$\frac{\partial I_n}{\partial v} \approx \frac{\Delta \bar{I}_n}{\Delta v}. \quad (5.7)$$

Здесь  $\Delta \bar{I}_n$  вычисляется по формуле (5.5), но с тем ограничением, что в сумму входят лишь те события, которые попали в данный участок  $v, v + \Delta v$ .

Теперь мы подробно изложим метод розыгрыша для одной особенно простой совокупности  $3n - 4$  переменных  $\Phi$ . Рекуррентные соотношения позволяют написать формулу (1.1) в виде VI. 2.14), где  $\mu_i$  и  $P_i$  даются выражениями (VI. 2.13), (VI. 2.15). Совокупность  $3n - 4$  переменных  $\Phi$  состоит из

$n - 2$  инвариантных масс  $M_i, M_i^2 = k_i^2 = (p_1 + \dots + p_i)^2, i = 2, \dots, n - 1$  ( $M_i$  — массы промежуточных распадающихся частиц на фиг. 62).

$2(n - 1)$  углов  $\Omega_i = (\cos \theta_i, \varphi_i), i = 2, \dots, n$ , которые определяют (фиг. 63) направление вектора  $\mathbf{k}_i$  в системе отсчета  $k_{i+1} = p_1 + \dots + p_{i+1} = (M_{i+1}, 0)$ , т. е. в системе покоя промежуточной распадающейся частицы.

В этих переменных плотность событий в фазовом пространстве равна

$$\rho_n(\Phi) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \prod_{i=2}^n \frac{1}{2} P_i. \quad (5.8)$$

Область интегрирования в интеграле (VI. 2.14) просто преобразуется в единичный гиперкуб. Мы рассмотрим по отдельности розыгрыш углов, розыгрыш масс и реконструкцию всего события.

#### а. Розыгрыш углов

Углы  $\varphi_i$  и  $\theta_i$  можно разыграть в соответствующей системе покоя  $k_{i+1} = (M_{i+1}, 0)$  с помощью формул

$$\varphi_i = 2\pi r^{(i)}, \quad (5.9)$$

$$\cos \theta_i = 2\bar{r}^{(i)} - 1, \quad (5.10)$$

где  $r^{(i)}$  и  $\bar{r}^{(i)}$  — случайные числа, равномерно распределенные между 0 и 1. Преобразование (5.9), (5.10) переводит интеграл по  $\Omega_i$  в интеграл по единичному квадрату с якобианом  $4\pi$ . События, разыгранные по формулам (5.9), (5.10), равномерно распределены по  $\varphi_i$  и по  $\cos \theta_i$ , так что выбор полярной оси произволен. Можно, например, взять для нее направление  $\mathbf{k}_{i+2}$  или  $\mathbf{p}_a$ .

Но если подынтегральное выражение  $T(\Phi)$  является амплитудой рождения  $n$  частиц, то импульсы коллимированы относительно направления  $\mathbf{p}_a$  и надо выбрать такие переменные, которые учитывают это обстоятельство. Ниже мы вернемся к этому вопросу.

### 6. Розыгрыш инвариантных масс

Инвариантные массы  $M_i$  изменяются в пределах

$$\mu_i \leq M_i \leq M_{i+1} - m_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (5.11)$$

В границах (5.11) любой двухчастичный распад на фиг. 62 является физическим. В  $(n-2)$ -мерном пространстве переменных  $M_2, \dots, M_{n-1}$  неравенства (5.11) определяют симплекс, который для  $n=3$  является отрезком, для  $n=4$  — равнобедренным треугольником, для  $n=5$  — пирамидой и т. д. Мы приведем два способа розыгрыша  $M_i$  внутри этого симплекса.

1. Самый прямой способ заключается в преобразовании симплекса в  $(n-2)$ -мерный единичный гиперкуб с помощью линейного соотношения

$$M_i = \mu_i + \tilde{r}^{(i)} (M_{i+1} - \mu_{i+1}), \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (5.12)$$

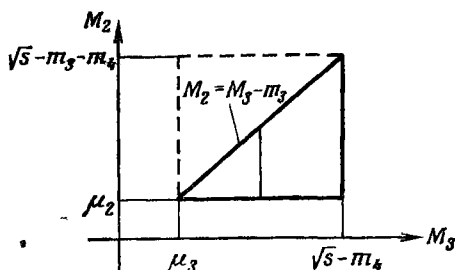
Это превращает каждое интегрирование по  $M_i$  в интегрирование по  $\tilde{r}^{(i)}$  от 0 до 1. Включая в формулу (5.5) для интеграла якобианы преобразований (5.9), (5.10) и (5.12), мы приходим к выражению

$$\frac{1}{g_n(\Phi)} = \frac{1}{2^{\sqrt{s}}} \prod_{i=2}^n 2\pi P_i \cdot \prod_{i=3}^n (M_i - \mu_i), \quad (5.13)$$

в котором штрихи опущены. При таком выборе  $\Phi$  плотность  $g_n(\Phi)$  событий, разыгрываемых в фазовом пространстве, непостоянна; статистическая погрешность в формуле (5.5) тем больше, чем больше  $T(\Phi)$  отличается от  $g_n(\Phi)$ . В частности, даже постоянный матричный элемент дает некоторую статистическую погрешность. Следует обратить внимание на факторы  $M_i - \mu_i$  в (5.13): когда они обращаются в нуль, статистическая плотность бесконечна. Это видно из фиг. 107;  $M_3$  разыгрывается равномерно между  $\mu_3$  и  $\sqrt{s} - m_4$ , а  $M_2$  — на отрезке между  $\mu_2$  и  $M_3 - m_3$ . Длина этого отрезка уменьшается, когда  $M_3$  приближается к  $\mu_3$ , и плотность точек на нем возрастает пропорционально  $1/(M_2 - \mu_2)$ . Аналогичное явление наблюдается при больших  $n$ .

Желая генерировать события, в которых часть масс  $M_i$  имеет распределение Брейта — Вигнера, можно прибегнуть к тому же приему растяжения пределов до постоянных значений. Здесь

можно воспользоваться соотношениями (4.5) (4.6) и табл. IX.1 и написать явный вид плотности  $g(\Phi)$ . Заметим, что в нее входит не просто распределение Брейта — Вигнера, но и другие множители, подобные тем, которые стоят в (5.13). Но вблизи масс резонансов, конечно, доминирует распределение Брейта — Вигнера. Заметим также, что мы можем ввести таким способом распределение Брейта — Вигнера не для всяких комбинаций инвариантных масс, а лишь для тех, которые возникают как промежуточные состояния в распаде каскадного типа на фиг. 62.



Фиг. 107. Область интегрирования по массам  $M_3$  и  $M_2$  при  $n=4$ .

Метод можно обобщить таким образом, чтобы включить в него случаи, когда оба продукта распада далее сами распадаются. Эти промежуточные состояния также допускают розыгрыш по Брейту — Вигнеру. Программа этого типа описана Фридманом [46].

2. Второй способ основан на том факте, что симплекс (5.11) есть часть  $(n-2)$ -мерного гиперкуба

$$\mu_i \leq M_i \leq \sqrt{s} - \mu_n + \mu_i, \quad i=2, \dots, n-1. \quad (5.14)$$

А именно, если провести упорядочение  $M_i$  согласно соотношению

$$M_i \leq M_{i+1} - m_{i+1}, \quad i=2, \dots, n-1, \quad (5.15)$$

то возникающая в итоге область совпадает с областью (5.11). Следовательно, предлагается равномерно разыгрывать в гиперкубе (5.14) числа

$$M_i = \mu_i + \tilde{r}^{(i)}(\sqrt{s} - \mu_n), \quad (5.16)$$

предварительно расположив в порядке возрастания  $n-2$  случайных числа  $\tilde{r}^{(i)}$ :

$$\tilde{r}^{(2)} \leq \tilde{r}^{(3)} \leq \dots \leq \tilde{r}^{(n-1)}.$$

Теперь точки попадают внутрь области (5.14), (5.15), так как

$$M_{i+1} - M_i = (\tilde{r}^{(i+1)} - \tilde{r}^{(i)})(\sqrt{s} - \mu_n) + m_{i+1} \geq m_{i+1}.$$

На фиг. 107 для  $n=4$  видно, что сначала точки бросают равномерно внутрь квадрата, но если потом оказывается, что точка

попала выше диагонали, ее координаты упорядочивают (отражают ее относительно диагонали) и она оказывается внутри разрешенного законами сохранения треугольника. Поскольку плотность внутри гиперкуба однородна, она однородна и внутри симплекса в отличие от того, что было при прежнем способе превращения симплекса в гиперкуб. Плотность событий в фазовом пространстве теперь дается выражением

$$\frac{1}{g_n(\Phi)} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \prod_{i=2}^n (2\pi P_i) \cdot \frac{1}{(n-2)!} (\sqrt{s} - \mu_n)^{n-2}, \quad (5.17)$$

где  $1/(n-2)!$  — отношение объемов симплекса и гиперкуба.

Заметим, что в последнем методе  $(n-2)$ -мерный единичный гиперкуб по-разному заселен случайными числами  $\tilde{r}^{(i)}$ . Упорядочение случайных чисел приводит к тому, что распределения по  $\tilde{r}^{(i)}$  различны [47].

### в. Реконструкция события

После того как мы разыграли  $n-2$  массы и  $2(n-1)$  угла, мы можем воссоздать все случайное событие, т. е. конфигурацию импульсов  $p_1, \dots, p_n$  в любой системе отсчета. Во-первых, в системе отсчета  $p_1 + p_2 = (M_2, 0)$  длина вектора  $p_2$  дается выражением (VI. 2.15), а его ориентация — разграничными значениями  $\theta_2, \varphi_2$ . Это полностью определяет значения  $p_2$  и  $p_1 = -p_2$ . Подобным же образом в системе  $p_1 + p_2 + p_3 = (M_3, 0)$ , зная  $\theta_3, \varphi_3$  и пользуясь формулой (VI. 2.15), мы находим  $p_3$ . Векторы  $p_1$  и  $p_2$  в этой системе отсчета получаются преобразованием Лоренца, т. е. сдвигом вдоль направления  $p_1 + p_2 = -p_3$  из первоначальной системы отсчета  $p_1 + p_2 = (M_2, 0)$ . Продолжая таким же образом, мы приходим в конце концов к искомой конфигурации импульсов в СЦМ<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Легко видеть, что здесь изложен не самый лучший путь реконструкции события. Первоначальная идея [81] была проще: реконструкция проводится не от первых импульсов к последним, а наоборот. Пусть для определенности мы хотим иметь случайное событие в системе покоя мишени. Пусть мы уже перевели в эту систему импульсы  $p_n, p_{n-1}, \dots, p_{l+1}$ . Тогда мы знаем суммарный импульс оставшихся еще не разыгранными частиц  $l, \dots, 1$ :

$$k_l \equiv p_l + p_{l-1} + \dots + p_1 = k_n - p_n - p_{n-1} - \dots - p_{l+1},$$

$$k_l^0 \equiv E_l + E_{l-1} + \dots + E_1 = k_n^0 - E_n - E_{n-1} - \dots - E_{l+1}.$$

Это позволяет перевести в систему покоя мишени разыгрываемый в системе покоя частиц  $l, \dots, 1$  импульс частицы номер  $l$ , т. е. узнать  $p_l$ . Процедура повторяется с заменой  $l+1 \rightarrow l$ . При такой рекуррентной процедуре каждый импульс только один раз подвергается преобразованию Лоренца (всего делается  $n-1$  преобразований), в то время как процедура, изложенная в книге, преобразует импульсы  $p_1$  и  $p_2$   $n-2$  раза, импульс  $p_3$  —  $n-3$  раза и т. д., всего  $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$  преобразований. — Прим. ред.

Плотности событий, даваемые формулами (5.13) и (5.17), сравнительно мало варьируют от точки к точке. Следовательно, изложенный метод эффективен лишь тогда, когда и подынтегральное выражение  $T(\Phi)$  не очень сильно меняется в фазовом пространстве. Но это не так в том случае, когда полная энергия велика, а  $T(\Phi)$  есть амплитуда рождения не очень большого числа частиц. В этом случае  $T(\Phi)$  велико, только если импульсы частиц как-то коллимированы вдоль оси пучка. При высоких энергиях изложенную процедуру надо видоизменить так, чтобы плотность событий для больших поперечных импульсов была мала. Для этого используются два совершенно разных приема. Можно применить существенную выборку, чтобы разыграть углы  $\theta_i$  [20, 46], либо можно применить эту выборку, чтобы генерировать поперечные импульсы, исходя из совершенно другой совокупности  $3n - 4$  переменных  $\Phi$  [72, 119]. Поскольку первая альтернатива в техническом отношении немного проще, мы изложим ее более подробно.

#### *а'. Розыгрыш углов для периферических событий*

Чтобы провести существенную выборку в переменных, описывающих периферичность, мы допустим, что массы  $M_k$  уже разыграны, и выберем направление  $\mathbf{p}_a$  за ось  $z$  в системе отсчета  $k_{i+1} = p_1 + \dots + p_{i+1} = (M_{i+1}, 0)$ . В этой системе отсчета  $\theta_i$  есть угол между  $\mathbf{k}_i$  и  $\mathbf{p}_a$  (фиг. 63). Теперь было бы несложно разыгрывать  $\cos \theta_i$  и генерировать главным образом события с малыми  $\theta_i$ . Но гораздо полезнее заменить  $\cos \theta_i$  на квадрат 4-передачи  $t_i = (p_a - k_i)^2$ . Результаты замены в  $R_n$  аргумента  $\cos \theta_i$  на  $t_i$  выписаны в формуле (VI.2.27), где  $P_a^{(i)}$  дается формулой (VI.2.28).

Как было показано выше [см. формулы (4.5) и (4.6) и табл. IX.1], теперь можно каждое  $t_i$  разыграть с помощью существенной выборки, генерируя события с нормированной плотностью  $a_i e^{a_i t_i} / (e^{a_i t_i^+} - e^{a_i t_i^-})$ . Если не менять способ розыгрыша  $\varphi_i$  и  $M_i$  и собрать вместе все весовые множители, то значение интеграла (VI.2.27) можно вычислить по формуле (5.5), где

$$\frac{1}{g_n(\Phi)} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{\pi}{2P_a^{(i+1)}} \frac{e^{a_i t_i^+} - e^{a_i t_i^-}}{a_i e^{a_i t_i}} \right\} \frac{(\sqrt{s} - \mu_n)^{n-2}}{(n-2)!}. \quad (5.18)$$

Здесь для определенности принято, что массы  $M_k$  разыгрываются по изложенному выше методу упорядочения масс.

Видно, что плотность  $g(\Phi)$  разыгрываемых случайных событий в этом случае ведет себя как  $g(\Phi) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i t_i\right)$  [другие



факторы в  $g(\Phi)$  зависят от масс и меняются не так сильно]. Это довольно эффективный способ расчета мультиреджевской модели, в которой подынтегральное выражение имеет примерно такую форму<sup>1)</sup>.

Само событие конструируется, как и раньше: по  $t_i$  находят  $\cos \theta_i$ ; при этом доминируют малые  $t_i$  и, следовательно, малые  $\theta_i$ .

Теперь в нашем распоряжении имеется метод розыгрыша случайных событий с различными плотностями  $g(\Phi)$  в фазовом пространстве. Для практических применений программа розыгрыша должна быть снабжена набором подпрограмм обработки разыгранных событий: программ, позволяющих строить гistogramмы, вычислять статистическую погрешность и предусматривающих другие возможности обслуживания заказчика. Полная программа требует следующих исходных данных:

- задания реакции и ее матричного элемента  $T(\Phi)$ ,
- задания используемой плотности  $g(\Phi)$ ,
- количества разыгрываемых событий,
- описания гistogramм, которые нужно построить.

Были созданы стандартные программы типа FOWL, выполняющие указанные действия. Они весьма гибки и удобны; научившись ими пользоваться, можно с их помощью решать много различных проблем. Более детальное описание всех практических вопросов можно найти в руководстве по использованию программы [62].

Чтобы продемонстрировать связь между теорией, которую мы изложили выше, и практикой, на фиг. 108 приведена гistogramма, напечатанная программой FOWL. В ней содержится следующая информация:

а. Гistogramма дает распределение по инвариантным массам  $M_{123} = [(p_1 + p_2 + p_3)^2]^{1/2}$  для реакции  $p\pi \rightarrow p\pi\pi$  ( $ab \rightarrow 1\ 2\ 3\ 4$ ) с импульсом налетающего  $\pi$ -мезона 4 ГэВ/с и с квадратом матричного элемента  $T(\Phi) = \exp(5t_{pp})$ . Кроме нормировки, вычисляется также функция  $\partial I_4 / \partial M_{123}$ , где  $I_4$  определено выражением (1.1).

б) Столбцы, озаглавленные словом INTERVAL, дают верхнюю и нижнюю границы участков, на которые разбита область изменения  $M_{123}$ .

в. Столбец EVENTS дает производную  $\partial I_4 / \partial M_{123}$ , вычисленную по формуле (5.7). Это распределение нормировано на единицу. В каждой строчке дано значение величины

$$(\text{нормировка}) \times \sum w_k, \quad (5.19)$$

<sup>1)</sup> При больших  $a_i$  (порядка нескольких ГэВ<sup>-2</sup>) факторы  $e^{a_i t_i^+}$  в  $g_n(\Phi)$  сильно зависят от инвариантных масс и эффективность способа падает. В работе [85] изложен усовершенствованный способ розыгрыша. — Прим. ред.

где  $\omega_k = T(\Phi)/g(\Phi)$ , а в сумму включены лишь те события, для которых  $M_{123}$  вошло в соответствующий интервал. В данном случае была использована плотность  $g(\Phi)$ , определяемая формулой (5.18).

г. Нормировка ( $1/\Sigma \omega_k$  по всем  $k$ ) дается после слов SUM OF WEIGHTS и равна  $0,2045 \cdot 10^3$ . Поскольку  $N = 2000$ , это

|          |      |        |        | TOTAL NUMBER OF EVENTS IN PLOT = 2000.<br>EQUIVALENT UNWEIGHTED EVENTS = 1157.<br>SUM OF WEIGHTS = 0.2045E 03 |  |
|----------|------|--------|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| INTERVAL |      | EVENTS | ERROR  |                                                                                                               |  |
| 0.40     | 0.45 | 0.0000 | 0.0000 | I                                                                                                             |  |
| 0.45     | 0.50 | 0.0002 | 0.0000 | I                                                                                                             |  |
| 0.50     | 0.55 | 0.0007 | 0.0000 | I                                                                                                             |  |
| 0.55     | 0.60 | 0.0014 | 0.0002 | Ix                                                                                                            |  |
| 0.60     | 0.65 | 0.0027 | 0.0003 | Ix                                                                                                            |  |
| 0.65     | 0.70 | 0.0041 | 0.0005 | Ixx                                                                                                           |  |
| 0.70     | 0.75 | 0.0062 | 0.0008 | Ixxx                                                                                                          |  |
| 0.75     | 0.80 | 0.0083 | 0.0011 | Ixxxx                                                                                                         |  |
| 0.80     | 0.85 | 0.0112 | 0.0015 | Ixxxxx                                                                                                        |  |
| 0.85     | 0.90 | 0.0151 | 0.0020 | Ixxxxxxx                                                                                                      |  |
| 0.90     | 0.95 | 0.0191 | 0.0025 | Ixxxxxxxx0                                                                                                    |  |
| 0.95     | 1.00 | 0.0229 | 0.0030 | Ixxxxxxxx0x                                                                                                   |  |
| 1.00     | 1.05 | 0.0292 | 0.0038 | Ixxxxxxxx0xxxxx                                                                                               |  |
| 1.05     | 1.10 | 0.0346 | 0.0044 | Ixxxxxxxx0xxxxxxx                                                                                             |  |
| 1.10     | 1.15 | 0.0383 | 0.0050 | Ixxxxxxxx0xxxxxxxxx                                                                                           |  |
| 1.15     | 1.20 | 0.0478 | 0.0062 | Ixxxxxxxx0xxxxxxxx0xxxx                                                                                       |  |
| 1.20     | 1.25 | 0.0507 | 0.0066 | Ixxxxxxxx0xxxxxxxx0xxxxx                                                                                      |  |
| 1.25     | 1.30 | 0.0568 | 0.0074 | Ixxxxxxxx0xxxxxxxx0xxxxxxxx                                                                                   |  |
| 1.30     | 1.35 | 0.0656 | 0.0084 | Ixxxxxxxx0xxxxxxxx0xxxxxxxx0xxx                                                                               |  |
| 1.35     | 1.40 | 0.0640 | 0.0083 | Ixxxxxxxx0xxxxxxxx0xxxxxxxx0xxx                                                                               |  |
| 1.40     | 1.45 | 0.0639 | 0.0085 | Ixxxxxxxx0xxxxxxxx0xxxxxxxx0xxx                                                                               |  |
| 1.45     | 1.50 | 0.0660 | 0.0086 | Ixxxxxxxx0xxxxxxxx0xxxxxxxx0xxx                                                                               |  |
| 1.50     | 1.55 | 0.0678 | 0.0090 | Ixxxxxxxx0xxxxxxxx0xxxxxxxx0xxx                                                                               |  |
| 1.55     | 1.60 | 0.0651 | 0.0085 | Ixxxxxxxx0xxxxxxxx0xxxxxxxx0xxx                                                                               |  |
| 1.60     | 1.65 | 0.0608 | 0.0081 | Ixxxxxxxx0xxxxxxxx0xxxxxxxx0                                                                                  |  |
| 1.65     | 1.70 | 0.0555 | 0.0073 | Ixxxxxxxx0xxxxxxxx0xxxxxxxx                                                                                   |  |
| 1.70     | 1.75 | 0.0500 | 0.0066 | Ixxxxxxxx0xxxxxxxx0xxxxxx                                                                                     |  |
| 1.75     | 1.80 | 0.0401 | 0.0052 | Ixxxxxxxx0xxxxxxxx0                                                                                           |  |
| 1.80     | 1.85 | 0.0278 | 0.0036 | Ixxxxxxxx0xxxxx                                                                                               |  |
| 1.85     | 1.90 | 0.0174 | 0.0023 | Ixxxxxxxx                                                                                                     |  |
| 1.90     | 1.95 | 0.0065 | 0.0009 | Ixxx                                                                                                          |  |
| 1.95     | 2.00 | 0.0004 | 0.0001 | I                                                                                                             |  |

Фиг. 108. Пример распределения, печатаемого программой FOWL.

Гистограмма — распределение по  $M_{123}$  в реакции  $\pi p \rightarrow \pi \pi \pi p$  при 4 ГэВ/с,  $T = \exp(5t_{pp})$ .  
Смысл чисел объясняется в тексте

означает, что величина интеграла  $I_4$  есть  $204,5/2000 = 0,10$  [согласно (5.5)]. Точно так же из (5.7) можно получить правильное численное значение  $dI_4/dM_{123}$ , хотя приведенных распределений, выраженных в долях полного интеграла, обычно достаточно для сравнения с опытом.

д. Столбец ERROR дает статистическую погрешность, вычисленную согласно формуле (4.11). Было использовано приближение

$$\frac{1}{N(N-1)} \left\{ \sum \omega_k^2 - \frac{1}{N} \left( \sum \omega_k \right)^2 \right\} \approx \frac{1}{N^2} \sum \omega_k^2;$$

следовательно, в каждой строчке приводится значение

$$(\text{нормировки}) \times [\sum w_k^2]^{1/2},$$

где нормировка та же, что в (5.19).

е. Число  $N'$ , стоящее после слов EQUIVALENT UNWEIGHTED EVENTS и равное 1157, было вычислено по формуле

$$\frac{1}{\sqrt{N'}} = \frac{[\sum w_k^2]^{1/2}}{\sum w_k},$$

где сумма бралась по всем событиям. Следовательно, оно представляет собой статистическую погрешность в SUM OF WEIGHTS, т. е. в значении  $I_4$ . В данном случае эту статистическую погрешность можно считать равной  $1/\sqrt{1157} \approx 3\%$ . Следовательно, число  $N'$  очень хорошо помогает представить себе статистическую значимость гистограммы. Если  $N'$  меньше 100, польза от гистограммы сомнительна.

## 6. Статистический метод

В статистической механике аналогом формулы (1.1) является объем физически разрешенного фазового пространства для микроканонического ансамбля. При этом четырехмерная  $\delta$ -функция в (1.1) заменяется одномерной, требующей, чтобы полная энергия в пределах  $\delta E$  равнялась  $E$ . Эта  $\delta$ -функция сильно усложняет расчеты. От возникающих трудностей можно избавиться, заменяя микроканонический ансамбль каноническим, в котором энергия может флуктуировать, но температура постоянна. В некотором приближении, справедливом в статистической механике, оба ансамбля приводят к одинаковым результатам. Для оценки интеграла (1.1) мы воспользуемся в сущности тем же приемом.

Другая отличительная черта статистического метода расчета состоит в том, что он приводит к формулам, в которые все родившиеся в реакции частицы входят равноправно. При любом другом методе расчета нам приходится фиксировать нумерацию частиц; численное интегрирование или розыгрыш события всегда начинается с какой-то выбранной частицы, с определенной точки на диаграмме импульсов. Кроме того, статистический метод расчета пренебрегает корреляциями между частицами, которые возникают благодаря сохранению суммарного 4-импульса. Учитываются в принципе лишь корреляции, обусловленные квадратом матричного элемента  $T$ ; но на самом деле метод применим лишь при отсутствии и таких корреляций, т. е. когда  $T$  факторизуемо.

Предположим теперь, что  $T$  факторизуемо по импульсам частиц, подобно тому как это было в выражении (1.3). (Сейчас мы увидим, почему это условие необходимо.) Тогда различные частицы в формуле (1.1) связаны между собой лишь  $\delta$ -функцией. Эту связь можно разорвать, проведя преобразование Лапласа функции  $I_n(p)$ . Определим функцию

$$\Phi_n(\alpha) = \int d^4 p e^{-\alpha \cdot p} I_n(p). \quad (6.1)$$

Лапласов образ  $\Phi_n$  зависит от времениподобного аргумента — 4-вектора  $\alpha = (\alpha_0, \alpha)$ . Если  $T$  факторизуемо,  $T = \prod_1^n g_i(p_i)$ , то формула (6.1) дает

$$\begin{aligned} \Phi_n(\alpha) &= \int d^4 p \prod_1^n \left\{ \frac{d^3 p_i}{2E_i} g_i(p_i) \right\} \delta^4(p - p_1 - \dots - p_n) e^{-\alpha \cdot p} = \\ &= \int \prod_1^n \left\{ \frac{d^3 p_i}{2E_i} g_i(p_i) e^{-\alpha \cdot p_i} \right\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Таким образом,  $\Phi_n(\alpha)$  представляет собой произведение  $\Phi_n(\alpha) = \prod_1^n \varphi_i(\alpha)$  лапласовых образов функций  $g_i$  отдельных частиц

$$\begin{aligned} \varphi_i(\alpha) &= \int \frac{d^3 p_i}{2E_i} g_i(p_i) e^{-\alpha \cdot p_i} = \\ &= \int d^4 p_i g_i(p_i) \delta(p_i^2 - m_i^2) e^{-\alpha \cdot p_i}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Функцию  $I_n(p)$  можно восстановить обратным преобразованием Лапласа:

$$I_n(p) = \frac{1}{(2\pi i)^4} \int_C d^4 \alpha e^{\alpha \cdot p} \Phi_n(\alpha). \quad (6.4)$$

Мы видим, что  $\delta$ -функция исчезла, причем исчезла симметричным образом. Путь интегрирования  $C$  по каждому  $\alpha_\mu$  в (6.4) проходит по комплексной плоскости  $\alpha_\mu$  от  $-i\infty$  до  $+i\infty$  правее всех особенностей функции  $\Phi_n(\alpha)$ . Если квадрат матричного элемента  $T$  дается выражением (1.3), то полученная формула точна. Остается только найти способы приближенного вычисления этого интеграла.

Сначала мы подробно разберем случай  $T = 1$ , т. е. вычислим фазовый объем  $R_n$  [27, 43, 65, 74, 94, 130]. Случай, когда  $g_i(p_i)$  зависит от поперечных импульсов, рассмотрен в работах [51, 87, 88] (см. также [14]). Практически этот случай очень важен, так

как отражает экспериментально наблюдаемую ограниченность поперечных импульсов.

Предположим теперь, что  $T = 1$ , так что  $I_n(p) = R_n(s)$  есть лоренц-инвариант, зависящий только от  $s = p^2$ . Тогда четырехмерное преобразование Лапласа (6.1) может быть превращено в одномерный интеграл. Все входящие в интеграл (6.1) факторы являются инвариантами. Поэтому  $\Phi_n(\alpha)$  может зависеть только от длины  $\beta = |\alpha|$ . Проще всего его вычислить в системе отсчета  $\alpha = (\beta, 0)$ :

$$\begin{aligned}\Phi_n(\beta) &= \int d^4 p e^{-\beta E} R_n(s) = \int ds \int d^4 p \delta(p^2 - s) e^{-\beta E} R_n(s) = \\ &= \int ds \int \frac{d^3 p}{2E} e^{-\beta E} R_n(s) = \int ds 2\pi \int_{\sqrt{s}}^{\infty} dE (E^2 - s)^{1/2} e^{-\beta E} R_n(s). \quad (6.5)\end{aligned}$$

Пользуясь формулой (9.6.23) из работы [1]

$$H_1(z) = z \int_1^{\infty} dt e^{-zt} (t^2 - 1)^{1/2}, \quad (6.6)$$

где  $H_1(z)$  — модифицированная функция Бесселя, мы получаем

$$\Phi_n(\beta) = \frac{2\pi}{\beta} \int_0^{\infty} ds \sqrt{s} H_1(\beta \sqrt{s}) R_n(s). \quad (6.7)$$

Интегрирование на самом деле ведется не до  $\infty$ , так как при  $s \leq (m_1 + \dots + m_n)^2$   $R_n(s)$  обращается в нуль. Эту формулу можно назвать  $H$ -преобразованием [40]; обратное ему преобразование имеет вид [27, 74, 94]

$$R_n(s) = \frac{1}{i4\pi^2 \sqrt{s}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\beta \beta^2 I_1(\beta \sqrt{s}) \Phi_n(\beta). \quad (6.8)$$

При  $T = 1$  величину  $\Phi_n$  можно выразить через функции Бесселя. В системе отсчета  $\alpha = (\beta, 0)$  из (6.3) получаем

$$\begin{aligned}\varphi_i(\alpha) &= \varphi_i(\beta) = \int \frac{d^3 p_i}{2E_i} e^{-\beta E_i} = \\ &= 2\pi \int_{m_i}^{\infty} dE_i (E_i^2 - m_i^2)^{1/2} e^{-\beta E_i} = \frac{2\pi m_i}{\beta} H_1(\beta m_i). \quad (6.9)\end{aligned}$$

Подставляя  $\Phi_n(\beta) = \prod_{i=1}^n \varphi_i(\beta)$  в (6.8), мы получаем точное значение  $R_n(s)$  в виде комплексного интеграла.

Нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы фазового объема  $R_n(s)$ , выведенные уже в разделе VI.2, можно вывести снова, исходя из формул (6.7) — (6.9). Асимптотическая форма  $K_v(z)$  имеет вид [1]

$$K_v(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{4v^2 - 1}{8z} + \dots\right). \quad (6.10)$$

При  $\beta \rightarrow \infty$  в интеграл (6.7) дают вклад лишь значения  $R_n(s)$ , лежащие вблизи порога  $\sqrt{s} = \sum_1^n m_i$ . Заменяя  $K_1$  в (6.7) и (6.9) выражением (6.10), мы находим ( $E^2 \equiv s$ )

$$\prod_1^n \left[ \left( \frac{2\pi^3 m_i}{\beta^3} \right)^{1/2} e^{-\beta m_i} \right] = \int_0^\infty dE \left( \frac{2\pi E}{\beta} \right)^{1/2} R_n^{\text{HP}}(E^2) e^{-\beta E}. \quad (6.11)$$

Тевая часть есть преобразование Лапласа известной функции; мы сразу получаем результат (VI.2.19). При  $\beta \rightarrow 0$  в (6.7) доминируют большие значения  $\sqrt{s}$ . В этом случае нужно воспользоваться тем, что при  $z \rightarrow 0$   $K_1(z) \rightarrow z^{-1}$ ; из уравнения (6.9) получаем

$$(2\pi)^n \beta^{-2n} = \int_0^\infty dE \left( \frac{4\pi E^2}{\beta} \right) K_1(\beta E) R_n^{\text{YP}}(E^2). \quad (6.12)$$

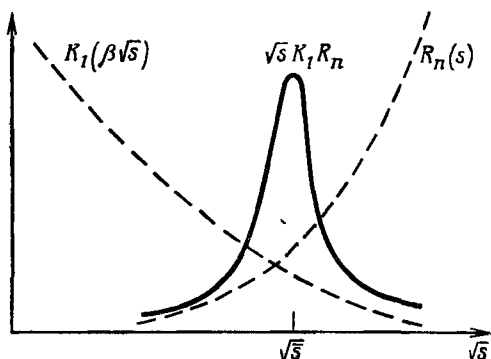
Здесь  $\beta^{-2n}$  опять представляет собой  $K$ -преобразование известной функции [40]; мы получаем то же ультрарелятивистское выражение (VI.2.17) для  $R_n^{\text{YP}}(s)$ .

Посмотрим теперь, как точное соотношение между  $R_n(s)$  и  $\Phi_n(s)$  (6.7) — (6.9) позволяет дать простое приближение для  $R_n(s)$  при больших  $n$  [27, 74]. В выражении (6.7)  $R_n(s)$  возрастает примерно как  $s^n$ , а  $K_1$  убывает как  $e^{-\beta\sqrt{s}}$ . При больших  $n$  подынтегральное выражение в (6.7) имеет острый максимум при значении  $\sqrt{s} = \sqrt{\bar{s}}$  (фиг. 109). По существу  $\Phi_n(\beta)$  зависит только от значений  $R_n(s)$ , близких к  $\bar{s}$ .

Заимствуя терминологию из статистической физики [57], интеграл по фазовому объему  $R_n(s)$  при фиксированном  $\sqrt{s}$  можно назвать *микроканонической* функцией распределения, а его преобразование Лапласа  $\Phi_n(\beta)$  при фиксированном  $\beta$  — *канонической* функцией распределения. Из статистической физики известно, что при весьма общих предположениях термодинамические функции (логарифмы функций распределения и их производные) в микроканоническом и каноническом ансамблях совпадают, когда число степеней свободы становится большим.

В частности, это означает, что в нашей терминологии в каноническом ансамбле с фиксированным  $\beta$  флуктуации  $\sqrt{s}$  малы (фиг. 109) и значение  $\sqrt{s}$  по существу фиксировано.

Точно так же при больших  $n$  в микроканоническом ансамбле с фиксированным  $\sqrt{s}$  флуктуации  $\beta$  должны быть малы, что делает возможной простую аппроксимацию выражения (6.8).



Фиг. 109 Пример ситуации, в которой применим статистический метод. Подынтегральное выражение в (6.7)  $\sqrt{s} K_1(\beta \sqrt{s}) R_n(s)$  имеет острый пик при  $\sqrt{s}$  и может быть аппроксимировано функцией Гаусса.

Из уравнения (6.9) видно, что подынтегральное выражение в (6.8) имеет глубокий минимум на действительной оси  $\beta$  (фиг. 110). Если подынтегральное выражение обозначить  $e^F(\beta)$ :

$$F(\beta) = \ln \left[ \beta^2 I_1(\beta \sqrt{s}) \prod_{i=1}^n \varphi_i(\beta) \right], \quad (6.13)$$

то значение  $\bar{\beta}$  в точке минимума определяется условием  $\partial F(\beta)/\partial \beta = 0$ . С учетом свойств функций  $I_\nu$  и  $K_\nu$  явный вид этого уравнения таков:

$$\sqrt{s} \frac{I_0(\beta \sqrt{s})}{I_1(\beta \sqrt{s})} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{K_0(\beta m_i)}{K_1(\beta m_i)} + (2n-1) \beta^{-1}. \quad (6.14)$$

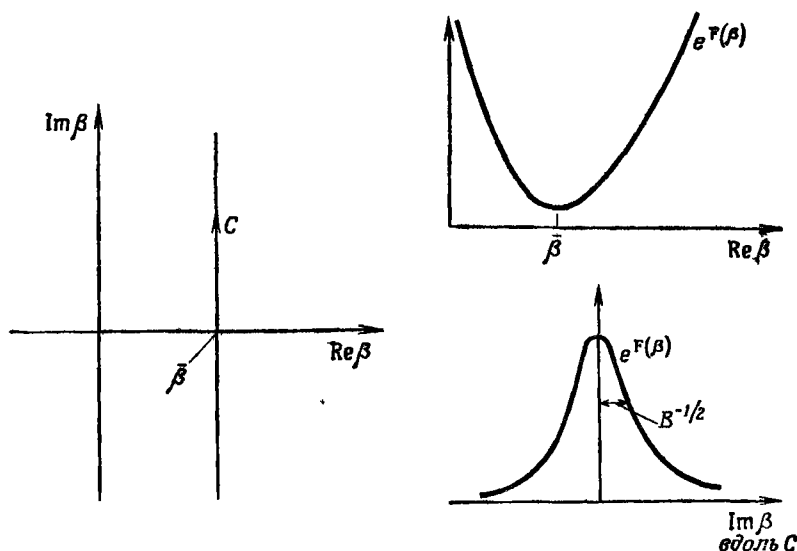
Корень этого уравнения  $\beta = \bar{\beta} = \bar{\beta}(\sqrt{s}; m_i)$  находится численно [кроме предельных случаев  $\sqrt{s} \rightarrow \infty$  и  $\sqrt{s} \rightarrow \sum_{i=1}^n m_i$ , см. (6.22)].

Решение всегда существует при  $\sqrt{s} \geq \sum m_i$  и оно единственно.

Функция  $F(\beta)$  есть аналитическая функция комплексной переменной  $\beta$ ; поэтому она удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 F}{\partial (\operatorname{Re} \beta)^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial (\operatorname{Im} \beta)^2} = 0. \quad (6.15)$$

Поскольку в точке  $\bar{\beta}$  производная  $\partial^2 F / \partial (\operatorname{Re} \beta)^2$  действительна, положительна и велика, функция  $\partial^2 F / \partial (\operatorname{Im} \beta)^2$  принимает в ней большие отрицательные значения. Точка  $\beta = \bar{\beta}$  является *седловой* [108]. Если выбрать путь интегрирования  $C$  так, чтобы он



Фиг. 110. Обоснование метода седловой точки.

Подынтегральное выражение в (6.8) имеет седловую точку при  $\beta = \bar{\beta}$ , т. е. минимум вдоль действительной оси  $\beta$  и максимум в направлении мнимой оси, проходящей через  $\bar{\beta}$ . Если выбрать контур  $C$ , проходящий через  $\bar{\beta}$ , то подынтегральное выражение аппроксимируется функцией Гаусса.

проходил через  $\bar{\beta}$ , то на нем  $F(\beta)$  будет иметь резкий максимум (фиг. 110). Обозначим  $\beta - \bar{\beta} = i\bar{y}$ ; тогда первые члены разложения  $F(\beta)$  в точке  $\bar{\beta}$  по степеням  $y$  будут аппроксимировать подынтегральное выражение функцией Гаусса

$$e^F(\beta) = e^F(\bar{\beta}) + \frac{1}{2}B(\beta - \bar{\beta})^2 + \dots \approx e^F(\bar{\beta})e^{-1/2By^2}. \quad (6.16)$$

Величина  $B$  — вторая производная  $F$  [см. (2.13)] по  $\beta$  в точке  $\bar{\beta}$  — равна

$$B = (2n - 2)\bar{\beta}^{-2} + s \left[ 1 - \frac{I_0(\bar{\beta}\sqrt{s})}{I_1(\bar{\beta}\sqrt{s})} \right] + 2\bar{\beta}^{-1} \sum_1^n m_i + \\ + \sum_1^n m_i^2 \left[ 1 + \frac{K_0^2(\bar{\beta}m_i)}{K_1^2(\bar{\beta}m_i)} \right]. \quad (6.17)$$



При этом всегда  $B > 0$ . Подставляя (6.16) в (6.8) и интегрируя по  $y$ , получаем

$$R_n(s) \approx \left(\frac{2\pi}{sB}\right)^{1/2} \left(\frac{2\pi}{\bar{\beta}}\right)^{n-2} I_1(\bar{\beta}\sqrt{s}) \prod_1^n [m_i K_1(\bar{\beta} m_i)], \quad (6.18)$$

где  $\bar{\beta}$  — решение уравнения (6.14), а  $B$  дается выражением (6.17). Таков окончательный вид искомой приближенной формулы.

Формула (6.18) особой прозрачностью не обладает; из нее трудно усмотреть истинную зависимость от  $s$ . Чтобы достигнуть лучшего понимания, посмотрим, как себя ведет  $\beta = \bar{\beta}(s)$  в нерелятивистском и ультрарелятивистском пределах.

Произведение  $\bar{\beta}\sqrt{s}$  растет как  $n$ . Воспользуемся поэтому в (6.13) первым членом формулы

$$I_\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} (2\pi z)^{-1/2} e^z \left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + \dots\right). \quad (6.19)$$

В нерелятивистском пределе  $\beta \rightarrow \infty$  из (6.19) и (6.10) получаем

$$F(\beta) \sim \beta \left(\sqrt{s} - \sum m_i\right) - \frac{3}{2}(n-1) \ln \beta, \quad (6.20)$$

а в ультрарелятивистском пределе  $\beta \rightarrow 0$  из  $K_1(z) \rightarrow z^{-1}$  следует

$$F(\beta) \sim \beta \sqrt{s} - \left(2n - \frac{3}{2}\right) \ln \beta. \quad (6.21)$$

Тогда условие  $\partial F / \partial \beta = 0$  дает

$$\begin{aligned} \bar{\beta}^{\text{НР}} &= \frac{3/2 n - 3/2}{\sqrt{s} - \sum m_i}, \\ \bar{\beta}^{\text{УР}} &= \frac{2n - 3/2}{\sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Соотношения (6.22) позволяют отождествить  $\beta^{-1} = T$  с «температурой». Они согласуются с тем хорошо известным фактом, что кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы, равна  $1/2 T$ .

Вычисление относительной ширины  $B^{-1/2}/\bar{\beta}$  пика на фиг. 110 дает для двух рассмотренных случаев  $[3/2(n-1)]^{-1/2}$  и  $(2n - 3/2)^{-1/2}$ . Это иллюстрирует тот факт, что флуктуации температуры в микроканоническом ансамбле пропорциональны  $N^{-1/2}$ , где  $N$  — число степеней свободы.

Для каждого данного  $s$  величину  $\bar{\beta}$  приходится вычислять численно, решая уравнение (6.14). Приближение нулевого порядка (6.18) во всем интервале изменения  $s$  обладает почти неизменной относительной погрешностью; эта погрешность примерно пропорциональна  $n^{-1}$ , так как условие попадания в седло-

вую точку исключает член, пропорциональный  $n^{-1/2}$ . Чтобы получить более высокую точность, нужно взять в (6.16) члены высшего порядка. Включение третьей и четвертой степеней разности  $\beta - \bar{\beta}$  приводит к поправочному члену порядка  $n^{-1}$ . Тогда погрешность  $\sim n^{-3/2}$ , что составляет для  $n \geq 6$  менее 1%.

Существует модификация изложенного метода, рассматривающая выражение (6.4) как четырехкратный интеграл по переменным  $\alpha_0, \dots, \alpha_3$  и отыскивающая седловую точку по каждой из этих переменных. Для  $T=1$  это дает по существу тот же результат [94]. При этом вычисления несколько сложнее, но ответ получается немного более простым. Мы приведем здесь для ссылок лишь основное приближение. Вместо (6.18) получается

$$R_n(s) \approx \frac{1}{(2\pi)^2} e^{\bar{\beta} \sqrt{s}} \Phi_n(\bar{\beta}) \bar{\beta}^{1/2} [\sqrt{s} a(\beta)]^{-1/2}, \quad (6.23)$$

где  $\bar{\beta}$  — решение уравнения

$$\sqrt{s} = 2n\bar{\beta}^{-1} + \sum_1^n m_i \frac{K_0(\beta m_i)}{K_1(\beta m_i)}, \quad (6.24)$$

а  $\Phi_n$  — произведение факторов  $\varphi_i$ , задаваемых формулой (6.9). Далее,

$$\begin{aligned} a(\bar{\beta}) &= \bar{\beta}^2 \frac{\partial^2 \ln \Phi_n(\beta)}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=\bar{\beta}} = \\ &= 4n - \bar{\beta} \sqrt{s} + \bar{\beta}^2 \sum_1^n m_i^2 - \sum_1^n \left[ m_i \bar{\beta} \frac{K_0(m_i \bar{\beta})}{K_1(m_i \bar{\beta})} \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Заметим, наконец, что статистический метод непосредственным образом обобщается [51, 130] на вычисление инклюзивных сумм типа

$$I(p, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} I_n(p), \quad (6.26)$$

где  $z$  — параметр. По статистической терминологии [57] это эквивалентно переходу от канонического к большому каноническому ансамблю.

## Приложение А

### ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ГРАМА

#### а. Определения и свойства

Определителем Грама векторов  $p_1, \dots, p_n$ ;  $q_1, \dots, q_n$  называется определитель, составленный из скалярных произведений  $p_i \cdot q_j$ :

$$G \begin{pmatrix} p_1, \dots, p_n \\ q_1, \dots, q_n \end{pmatrix} = \det (p_i \cdot q_j) = \begin{vmatrix} p_1 \cdot q_1 & p_1 \cdot q_2 & \dots & p_1 \cdot q_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n \cdot q_1 & p_n \cdot q_2 & \dots & p_n \cdot q_n \end{vmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Симметричный определитель Грама,  $p_i = q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , мы будем обозначать  $\Delta_n$ :

$$\begin{aligned} \Delta_n(p_1, \dots, p_n) &= G \begin{pmatrix} p_1, \dots, p_n \\ p_1, \dots, p_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} p_1^2 & p_1 \cdot p_2 & \dots & p_1 \cdot p_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n \cdot p_1 & p_n \cdot p_2 & \dots & p_n^2 \end{vmatrix}. \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Любое  $G$  можно рассматривать как минор определителя  $\Delta_n$ , где  $n$  — число различных аргументов  $G$ . Например,

$$G \begin{pmatrix} p_1, & p_2 \\ p_1, & p_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} p_1^2 & p_1 \cdot p_3 \\ p_2 \cdot p_1 & p_2 \cdot p_3 \end{vmatrix}$$

является минором элемента  $p_3 \cdot p_2$  в определителе  $\Delta_3(p_1, p_2, p_3)$ . В этой книге аргументами  $p_i$  являются 4-импульсы частиц или их линейные комбинации. Таким образом, элементы  $G$  и  $\Delta_n$ , как и сами  $G$  и  $\Delta_n$ , суть инварианты.

Зная, как ведет себя определитель, когда его строка или столбец умножается на константу  $\lambda$ , или когда одна строка (столбец) прибавляется к другой строке (столбцу), или когда

строки и столбцы меняются местами, мы легко выводим следующие свойства определителей Грама:

$$G \begin{pmatrix} \lambda p_1, p_2, \dots \\ q_1, q_2, \dots \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} p_1, p_2, \dots \\ \lambda q_1, q_2, \dots \end{pmatrix} = \lambda G \begin{pmatrix} p_1, p_2, \dots \\ q_1, q_2, \dots \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$\Delta_n(\lambda p_1, p_2, \dots) = \lambda^2 \Delta_n(p_1, p_2, \dots), \quad (\text{A.4})$$

$$G \begin{pmatrix} p_1, p_2, \dots \\ q_1, q_2, \dots \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} p_1 + \lambda p_2, p_2, \dots \\ q_1, q_2, \dots \end{pmatrix} = \\ = G \begin{pmatrix} p_1, p_2, \dots \\ q_1 + \lambda q_2, q_2, \dots \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\Delta_n(p_1, p_2, \dots) = \Delta_n(p_1 + \lambda p_2, p_2, \dots), \quad (\text{A.6})$$

$$G \begin{pmatrix} p_1, p_2, \dots \\ q_1, q_2, \dots \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} q_1, q_2, \dots \\ p_1, p_2, \dots \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

$$G \begin{pmatrix} p_1, p_2, \dots \\ q_1, q_2, \dots \end{pmatrix} = -G \begin{pmatrix} p_2, p_1, \dots \\ q_1, q_2, \dots \end{pmatrix} = \\ = -G \begin{pmatrix} p_1, p_2, \dots \\ q_2, q_1, \dots \end{pmatrix} \text{ и т. д.} \quad (\text{A.8})$$

Тождества (A.3), (A.5) означают, что если векторы  $p_1, \dots, p_n$  (или  $q_1, \dots, q_n$ ) линейно зависимы, то определитель (A.1) обращается в нуль. Это можно доказать следующим образом. По определению линейной зависимости векторов  $p_1, \dots, p_n$  существует такой набор коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  (которые не все равны нулю), что

$$\sum_1^n \alpha_i p_i = 0. \quad (\text{A.9})$$

Образуя скалярные произведения тождества (A.9) с  $q_1$ , затем с  $q_2$  и т. д. вплоть до  $q_n$ , мы получаем  $n$  однородных линейных уравнений относительно инвариантов  $p_i \cdot p_j$ . Согласно (A.9), эта система имеет нетривиальное решение  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , а это возможно лишь в том случае, если образованный из скалярных произведений определитель обращается в нуль. Этот определитель и является как раз определителем Грама (A.1). Этот вывод имеет большое значение для кинематики, в которой любые пять или более векторов в четырехмерном пространстве всегда линейно зависимы (раздел VI. 7).

Элементами определителя Грама  $\Delta_n$  являются инварианты  $p_i \cdot p_j$ . Практически часто полезнее бывает пользоваться инвариантными массами  $m$  частиц

$$s_{ijk \dots} = (p_i + p_j + p_k + \dots)^2. \quad (\text{A.10})$$

Это выражение написано для выходящих из диаграммы частиц; импульсы входящих частиц надо брать со знаками минус. Чтобы ввести в определитель Грама величины  $s_{ijh}$ , заметим, что такой определитель  $\Delta_n$  с элементами  $p_i \cdot p_j$  совпадает с определителем Кэли размерности  $n+2$  с элементами  $s_{ijh}$ ... Последний задается соотношением [39, 124]

$$\Delta_n(p_1, \dots, p_n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & p_1^2 & p_2^2 & \dots & p_n^2 \\ 1 & p_1^2 & 0 & (p_1 - p_2)^2 & \dots & (p_1 - p_n)^2 \\ 1 & p_2^2 & (p_1 - p_2)^2 & 0 & \dots & (p_2 - p_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & p_n^2 & (p_1 - p_n)^2 & (p_2 - p_n)^2 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Для доказательства тождества (A.11) надо просто вычесть вторую строку из всех последующих строк и второй столбец из всех последующих столбцов. Чтобы переписать (A.11) на языке  $s_{ijh}$ ..., воспользуемся тождеством

$$\Delta_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = \Delta_n(p_1, p_1 + p_2, \dots, p_1 + p_2 + \dots + p_n), \quad (\text{A.12})$$

которое следует из (А 6). Разность квадратов любых двух аргументов в правой части тождества (A.12) как раз дает величины типа  $s_{i+1, \dots, j}$ . Тогда для явного вида  $\Delta_n$  получаем

$$\Delta_n(p_1, \dots, p_n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & s_1 & s_{12} & \dots & s_{12} \dots n \\ 1 & s_1 & 0 & s_2 & \dots & s_{23} \dots n \\ 1 & s_{12} & s_2 & 0 & \dots & s_{34} \dots n \\ 1 & s_{123} & s_{23} & s_3 & \dots & s_{45} \dots n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & s_{12} \dots n & s_{23} \dots n & s_{34} \dots n & \dots & 0 \end{vmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

### 6. Геометрическая интерпретация

Определитель Грама (A.1) линеен по каждому  $p_i$  и  $q_i$ . Согласно тождеству (A.7), он симметричен относительно замены  $p_1, \dots, p_n$  на  $q_1, \dots, q_n$ , а согласно (A.8) — антисимметричен

относительно перестановок внутри этих двух групп. Эти свойства позволяют дать ему следующее истолкование. Образует из  $p_1, \dots, p_n$  полностью антисимметричную комбинацию. Другую, подобную комбинацию образуем из  $q_1, \dots, q_n$ ; затем вычислим скалярное произведение этих двух объектов. Таким путем, как мы сейчас увидим, можно получить как определители  $G$ , так и их геометрическое истолкование.

Чтобы это истолкование стало интуитивно ясным, ограничимся вначале трехмерным евклидовым пространством. Введем трехмерный символ Леви-Чивита  $\varepsilon_{ijk}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), определяемый как

$$\begin{aligned}\varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \\ \varepsilon_{132} &= \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{ijk} &= 0 \text{ во всех остальных случаях.}\end{aligned}$$

Он полностью антисимметричен,  $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$  и т. д. Пусть теперь даны три 3-вектора  $p_1, p_2, p_3$ . Определим тройку тензоров  $b, c$  и  $d$  выражениями

$$\begin{aligned}b_{jk} &= 2^{-1/2} \varepsilon_{ijk} p_1^i, \\ c_k &= \varepsilon_{ijk} p_1^i p_2^j, \\ d &= \varepsilon_{ijk} p_1^i p_2^j p_3^k.\end{aligned}$$

Всюду подразумевается, что по повторяющимся индексам производится суммирование. Пусть теперь  $p'_1, p'_2, p'_3$  — другая тройка 3-векторов, а тензоры  $d', b', c'$  получаются из них по тем же формулам, что и  $d, b, c$ ; тогда легко убедиться в том, что

$$\begin{aligned}(b, b') &= b_{jk} b'_{jk} = p_1 \cdot p'_1, \\ (c, c') &= c_k c'_k = (p_1 \times p_2) \cdot (p'_1 \times p'_2) = \begin{vmatrix} p_1 \cdot p'_1 & p_1 \cdot p'_2 \\ p_2 \cdot p'_1 & p_2 \cdot p'_2 \end{vmatrix}, \\ (d, d') &= dd' = (p_1 \times p_2 \cdot p_3)(p'_1 \times p'_2 \cdot p'_3) = \\ &= \det(p_{ii}) \cdot \det(p'_{ii}) = \begin{vmatrix} p_1 \cdot p'_1 & p_1 \cdot p'_2 & p_1 \cdot p'_3 \\ p_2 \cdot p'_1 & p_2 \cdot p'_2 & p_2 \cdot p'_3 \\ p_3 \cdot p'_1 & p_3 \cdot p'_2 & p_3 \cdot p'_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{A.14}$$

Следовательно, величины  $(b, b')$ ,  $(c, c')$ ,  $(d, d')$  оказываются определителями, составленными из скалярных произведений:  $\det(p_i \cdot p'_j)$ . Если теперь положить  $p_i = p'_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , то видно, что квадраты норм  $|b|^2$ ,  $|c|^2$ ,  $|d|^2$  равны симметричным определителям  $\det(p_i \cdot p_j)$ .

С другой стороны, ясно, что  $|d|$  есть объем параллелепипеда, образованного векторами  $p_1, p_2, p_3$ ,  $|c|$  — площадь параллелограмма, построенного на  $p_1$  и  $p_2$ , а  $|b|$  — абсолютное значение  $p_1$ . Эти свойства следует считать геометрической интерпретацией симметричных определителей  $\det(p_i \cdot p_j)$ . Второй несимметричный определитель имеет следующий смысл:

$$\begin{vmatrix} p_1 \cdot p'_1 & p_1 \cdot p'_2 \\ p_2 \cdot p'_1 & p_2 \cdot p'_2 \end{vmatrix} = |p_1 \times p_2| |p'_1 \times p'_2| \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол между плоскостями  $p_1, p_2$  и  $p'_1, p'_2$ .

Вернемся теперь к лоренцеву пространству. Здесь можно определить четырехмерный символ Леви-Чивита  $\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$  ( $\kappa = 0, 1, 2, 3$  и т. д.) следующим образом:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} & \text{ полностью антисимметрично,} \\ \epsilon_{0123} & = 1. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Антисимметрия означает, что при совпадении двух или более индексов  $\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0$ . Величина  $\epsilon$  преобразуется при преобразованиях Лоренца как псевдотензор четвертого ранга. Отправляясь от четырех 4-векторов  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , можно определить четверку величин

$$\begin{aligned} a_{\lambda\mu\nu} & = 6^{-1/2} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} p_1^\kappa, \\ b_{\mu\nu} & = 2^{-1/2} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} p_1^\kappa p_2^\lambda, \\ c_\nu & = \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} p_1^\kappa p_2^\lambda p_3^\mu, \\ d & = \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} p_1^\kappa p_2^\lambda p_3^\mu p_4^\nu. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Поскольку  $\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$  — псевдотензор четвертого ранга,  $a, b, c$  и  $d$  являются псевдотензорами ранга 3, 2, 1 и 0. Теперь мы докажем следующие их свойства:

1. Если тензор  $a, b, c$  или  $d$  свертывается с подобным же тензором  $a', b', c'$  или  $d'$ , образованным из другой четверки импульсов  $p'_1, p'_2, p'_3, p'_4$ , то результат равен определителю Грама  $G$  [равенства (A.17), (A.20) — (A.22)].

2. Абсолютные значения тензоров равны  $|a| = \sqrt{-\Delta_1}, |b| = \sqrt{-\Delta_2}, |c| = \sqrt{-\Delta_3}, |d| = \sqrt{-\Delta_4}$ .

3. Согласно предыдущему,  $\sqrt{\pm \Delta_l}$  может быть истолкован как объем параллелепипеда в  $(l-1)$ -мерном пространстве [см. (A.24), (A.25)].

4. При совпадении одной пары аргументов  $p_i = p'_i$  определители могут быть записаны в виде  $(\pm \Delta_l \Delta'_l)^{1/2} \cos \varphi$  при  $p_i^2 > 0$  и  $(\pm \Delta_l \Delta'_l)^{1/2} \operatorname{ch} \xi$  при  $p_i^2 < 0$  [см. (A.28) — (A.31)].

Скалярное произведение тензоров  $x$  и  $y$  в лоренцевой метрике  $g_{\mu\nu}$  есть

$$(x, y) = x^{\mu_1} \dots x^{\mu_r} y_{\mu_1} \dots y_{\mu_r} = g_{\mu_1 \nu_1} \dots g_{\mu_r \nu_r} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_r} y^{\nu_1} \dots y^{\nu_r}.$$

Чтобы применить это определение к равенствам (A.16), сначала отметим тождество

$$g^{\mu_1} \dots \mu_r = g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_r \nu_r} g_{\nu_1} \dots g_{\nu_r} = -\varepsilon_{\mu_1} \dots \mu_r.$$

Оно следует просто из того, что три из  $g^{\mu\nu}$  равны  $-1$ , а четвертая равна  $+1$ . Скалярное произведение  $a$  из (A.16) на такое же выражение со штрихом дает

$$(a, a') = \frac{1}{6} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} p_1^\kappa \varepsilon^{\rho\lambda\mu\nu} p'_{1\rho} = -\frac{1}{6} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} p_1^\kappa \varepsilon_{\rho\lambda\mu\nu} p'_{1\rho}.$$

Поскольку  $\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$  обращается в нуль во всех случаях, когда индексы не представляют собой некоторую перестановку последовательности 0 1 2 3, здесь останутся лишь члены с  $\kappa = \rho$ . Суммируя по всем перестановкам  $\lambda\mu\nu$  по аналогии с первым из тождеств (A.14), получаем

$$(a, a') = -\frac{1}{6} 3! p_1^\kappa p'_{1\kappa} = -p_1 \cdot p'_1 = -G \left( \begin{matrix} p_1 \\ p'_1 \end{matrix} \right). \quad (\text{A.17})$$

Для тензоров второго ранга  $b$  и  $b'$  точно так же находим

$$(b, b') = \frac{1}{2} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} p_1^\kappa p_2^\lambda \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu} p'_{1\rho} p'_{2\sigma} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} p_1^\kappa p_2^\lambda \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} p'_{1\rho} p'_{2\sigma}. \quad (\text{A.18})$$

Легко доказать следующее тождество:

$$\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} = 2! (\delta_{\kappa\rho} \delta_{\lambda\sigma} - \delta_{\kappa\sigma} \delta_{\lambda\rho}). \quad (\text{A.19})$$

Тогда выражение (A.18) принимает вид

$$(b, b') = -(p_1 \cdot p'_1 p_2 \cdot p'_2 - p_1 \cdot p'_2 p_2 \cdot p'_1) = -G \left( \begin{matrix} p_1, p_2 \\ p'_1, p'_2 \end{matrix} \right). \quad (\text{A.20})$$

Поступая таким же способом и дальше, находим по аналогии с (A.14)

$$(c, c') = -G \left( \begin{matrix} p_1, p_2, p_3 \\ p'_1, p'_2, p'_3 \end{matrix} \right), \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} (d, d') &= -G \left( \begin{matrix} p_1, p_2, p_3, p_4 \\ p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 \end{matrix} \right) = \\ &= -\{\Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_4) \Delta_4(p'_1, p'_2, p'_3, p'_4)\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

В частном случае получаем отсюда норму псевдотензоров

$$\begin{aligned} (a, a) &= -\Delta_1, & (b, b) &= -\Delta_2, \\ (c, c) &= -\Delta_3, & (d, d) &= -\Delta_4. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$



Обратимся к геометрической интерпретации. Значения  $\Delta_1, \dots, \Delta_4$  в системе отсчета  $R(p_1)$  для  $p_1^2 > 0$  и в системе отсчета  $S(p_1)$  для  $p_1^2 < 0$  рассчитаны в разделе II.7. В системе отсчета  $p_1 = 0$  имеем [см. формулы (VI.7.31)]

$$\begin{aligned} \{\Delta_1(p_1)\}^{1/2} &= m_1, \\ \{-\Delta_2(p_1, p_2)\}^{1/2} &= m_1 P_2, \\ \{\Delta_3(p_1, p_2, p_3)\}^{1/2} &= m_1 |p_2 \times p_3| = m_1 P_2 P_3 \sin \theta_{23}, \\ \{-\Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_4)\}^{1/2} &= \\ &= m_1 p_2 \times p_3 \cdot p_4 = m_1 P_2 P_3 P_4 \sin \theta_{23} \sin \theta_{24} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Углы определены на фиг. 7. В системе отсчета  $p_1 = (0, 0, 0, \sqrt{-t_1})$  мы пользовались псевдосферическими координатами (II.7.22) с  $P_i^2 = p_{i0}^2 - p_{i1}^2 - p_{i2}^2$  и получали

$$\begin{aligned} [-\Delta_1(p_1)]^{1/2} &= \sqrt{-t_1}, \\ \{-\Delta_2(p_1, p_2)\}^{1/2} &= \sqrt{-t_1} P_2, \\ \{-\Delta_3(p_1, p_2, p_3)\}^{1/2} &= \sqrt{-t_1} P_2 P_3 \operatorname{sh} \zeta_{23}, \\ \{-\Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_4)\}^{1/2} &= \sqrt{-t_1} P_2 P_3 P_4 \operatorname{sh} \zeta_{23} \operatorname{sh} \zeta_{24} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Здесь можно использовать тот факт, что при  $p_{21} = p_{22} = 0$  мы имеем  $P_2 = E_2$ . Соотношения (A.24), (A.25) верны независимо от того, какой знак имеют  $p_2^2$ ,  $p_3^2$  и  $p_4^2$ . Заметим, что знаки  $\Delta_1$  и  $\Delta_3$  меняются при переходе от (A.24) к (A.25). Соотношения (A.24), (A.25) показывают, что  $\sqrt{\pm \Delta_l}$  пропорционально объему  $(l-1)$ -мерного параллелепипеда в  $l23$ -подпространстве ( $p_1^2 > 0$ ) или в  $012$ -подпространстве ( $p_1^2 < 0$ ).

Из несимметричных определителей выберем сначала простейший:  $G$  при  $n = 1$ . Для обоих интересующих нас случаев  $p_1^2 \geq 0$  получаем

$$G\left(\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \end{smallmatrix}\right) = p_1 \cdot p_2 = \begin{cases} m_1 E_2 & \text{в системе } R(p_1), \\ -\sqrt{-t_1} P_2 & \text{в системе } S(p_1). \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

При  $n = 2$  определитель (A.1) имеет простое истолкование в том случае, когда оба импульса одинаковы, т. е.  $p_1 = p'_1$ . Тогда для времениподобных  $p_1$  из соотношения (II.7.8) в системе отсчета  $R(p_1)$  следует

$$G\left(\begin{smallmatrix} p_1, p_2 \\ p_1, p_3 \end{smallmatrix}\right) = -m_1^2 P_2 P_3 \cos \theta_{23}. \quad (\text{A.28})$$

При  $p_1^2 < 0$  в системе  $S(p_1)$  получаем

$$\begin{vmatrix} t_1 & -\sqrt{-t_1} p_{33} \\ -\sqrt{-t_1} p_{23} & p_2 \cdot p_3 \end{vmatrix} = t_1(p_{20}p_{30} - p_{21}p_{31} - p_{22}p_{32}), \quad (\text{A.29})$$

$$G(p_1, p_2) = t_1 P_2 P_3 \operatorname{ch} \zeta_{23}.$$

При  $n = 3$  величина (A.1), согласно равенству (A.21), представляет собой скалярное произведение  $(c, c') = c \cdot c'$  двух 4-векторов  $c$  и  $c'$ . Положим теперь, что два 4-импульса, например  $p_1$  и  $p'_1$ , равны друг другу, и вычислим  $G$  в стандартной системе отсчета  $p_1$ . Если  $p_1^2 > 0$ , то в системе отсчета  $R(p_1)$   $c$  и  $c'$  будут обычными 3-векторами. Тогда  $-G = (c, c') = (c, c') = -|c||c'|\cos\varphi = -(\Delta)^{1/2}(\Delta_3')^{1/2}\cos\varphi$ , и из (A.24) следует

$$G(p_1, p_2, p_3) = m_1^2 P_2 P_3 P_4 P_5 \sin\theta_{23} \sin\theta_{45} \cos\varphi. \quad (\text{A.30})$$

Здесь  $\varphi$  — угол между плоскостями, определяемыми парами векторов  $p_2, p_3$  и  $p_4, p_5$  в системе  $R(p_1)$ . Формула (II.7.14) представляет собой частный случай этой формулы.

Если вектор  $p_1$  пространственноподобный, то выбирается система  $S(p_1)$  с  $p_{13}, p_{20}, p_{23} \neq 0$ . Тогда получаем

$$G(p_1, p_2, p_3) = t_1 P_2^2 P_3 P_4 \operatorname{sh} \zeta_{23} \operatorname{sh} \zeta_{24} \cos\varphi. \quad (\text{A.31})$$

Эта формула следует из равенства

$$-G = (c, c') = -|c||c'|\cos\varphi = (-\Delta_3)^{1/2}(-\Delta_3')^{1/2}\cos\varphi$$

и из (A.25). Здесь также знак  $p_2^2, p_3^2, p_4^2$  произволен.

Величина  $(d, d')$  есть произведение двух псевдоскаляров. Следовательно, при  $n = 4$   $G$  просто равно  $(\Delta_4 \Delta_4')^{1/2}$  [см. равенство (A.22)], а также упражнение II.17].

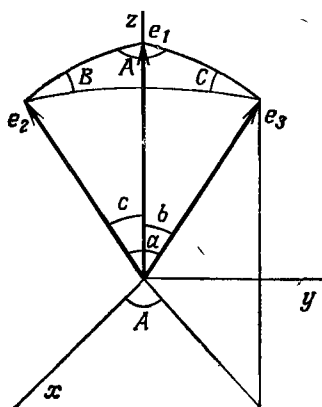
В тождествах (A.24), (A.28) и (A.30) мы встречаем как синусы, так и косинусы углов  $\theta$  и  $\varphi$ . Приравнявая единице сумму их квадратов, получаем новые тождества

$$\begin{aligned} \Delta_2(p_1, p_2) \Delta_2(p_1, p_3) &= \Delta_1(p_1) \Delta_3(p_1, p_2, p_3) + G(p_1, p_2, p_3)^2, \\ \Delta_3(p_1, p_2, p_3) \Delta_3(p_1, p_2, p_4) &= \\ &= \Delta_2(p_1, p_2) \Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_4) + G(p_1, p_2, p_3, p_4)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

## Приложение В

### СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Формулы сферической тригонометрии часто бывают нужны для расчета дифференциальных сечений или для вычисления апертур спектрометров. Эти формулы приводятся во многих



Фиг. 111.

учебниках; мы выведем здесь основные из них так, чтобы подчеркнуть их свойства симметрии.

Рассмотрим сферический треугольник со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и углами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , показанный на фиг. 111. Для таких направлений осей единичные векторы, направленные в вершины треугольника, равны

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (0, 0, 1), \\ \mathbf{e}_2 &= (\sin c, 0, \cos c), \\ \mathbf{e}_3 &= (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b). \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

*Правило синусов* получается, если вычислить объем параллелепипеда, построенного на  $\mathbf{e}_1$ :

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \sin b \sin c \sin A. \quad (\text{Б.2})$$

Из круговой симметрии следует, что это выражение равно также  $\sin c \sin a \sin B$  и  $\sin a \sin b \sin C$ , откуда и вытекает правило

синусов

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \quad (\text{Б.3})$$

*Правило косинусов сторон*, или *теорема косинусов*, получается, если подсчитать скалярное произведение

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (\text{Б.4})$$

и т. д. по кругу.

Чтобы и остальные формулы получить симметричным образом, надо обратиться к сферическому треугольнику, образуемому векторами  $\hat{\mathbf{e}}_i$ , дуальными  $\mathbf{e}_i$ :

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3|} \text{ и т. д. по кругу.} \quad (\text{Б.5})$$

Прямым расчетом из (Б.1) и (Б.5) получаем

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_1 &= (-\sin B \cos c, -\cos B, \sin B \sin c), \\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= (\sin A, -\cos A, 0), \\ \hat{\mathbf{e}}_3 &= (0, 1, 0). \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

При выводе выражений (Б.6)  $y$ -компоненту  $\hat{\mathbf{e}}_1$  можно было проще получить из равенства

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = -\cos B \text{ и т. д. по кругу.} \quad (\text{Б.7})$$

Объем параллелепипеда, построенного на  $\hat{\mathbf{e}}_i$ , дает опять правило синусов, но скалярные произведения  $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$  приводят к *правилу косинусов углов*

$$-\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = \cos C = \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c \quad (\text{Б.8})$$

и т. д. по кругу.

Другая совокупность уравнений получается, если вычислить  $-\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3$ , пользуясь для вычисления  $\hat{\mathbf{e}}_1$  один раз формулой (Б.1), а второй раз — формулой (Б.5)

$$-\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A. \quad (\text{Б.9})$$

Замена  $\sin a$  с помощью пропорции (Б.3) доводит число переменных до четырех:

$$\sin A \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} b \sin c - \cos c \cos A. \quad (\text{Б.10})$$

Точно такой же расчет  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3$  дает

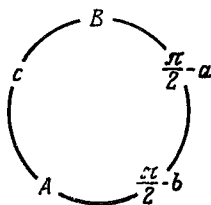
$$\mathbf{e}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \cos b \sin C = \cos c \sin B \cos A + \sin A \cos B. \quad (\text{Б.11})$$

И здесь можно вывести из (Б.3) и (Б.11) формулу с четырьмя переменными, равнозначную тождеству (Б.10).

Если один из углов треугольника равен  $90^\circ$ , то формулы упрощаются и могут быть сведены в одно *правило Навье*. Пусть, например,  $C = 90^\circ$ . Тогда это правило гласит, что на диаграмме фиг. 112 косинус любой величины равен:

- а) произведению котангенсов смежных с ней величин,
- б) произведению синусов несмежных величин.

Телесный угол  $\Omega_3$ , описывающий ориентацию  $\mathbf{e}_3$  относительно системы координат, определенной векторами  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , теперь дает



Фиг. 112.

$d\Omega_3 = d \cos b \, dA$ . Выписанные ранее уравнения могут быть использованы для того, чтобы заменить  $b$  и  $A$  другой парой переменных на фиг. 111. Важный частный случай получается при замене  $A$  на  $a$ . Тогда

$$d\bar{\Omega}_3 = \frac{d \cos a \, d \cos b \, \theta(K)}{K^{1/2} (\cos a, \cos b, \cos c)}, \quad (\text{Б.12})$$

где

$$K(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 1 \end{vmatrix}. \quad (\text{Б.13})$$

## ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

$$\text{II. 1. } (3 \text{ км}) \cdot \ln \left( \frac{E}{m_e} \right) \cdot \frac{m_e}{E - m_e} \approx 81 \text{ см}$$

$$\text{II. 2. } \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \left\{ \frac{(\gamma - 1) \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{v^2} \right\} \mathbf{v} - \gamma \mathbf{v} t,$$

$$t' = \gamma t - \left( \frac{\gamma}{c^2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}.$$

$$\text{II. 3. а) } \gamma \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad v \leq 2\sqrt{\varepsilon};$$

$$\text{б) } v \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}, \quad \gamma \geq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

С точностью до 1% можно использовать приближение  $E = m + p^2/2m$ , если  $p \leq 0,2m$ , и приближение  $E = p$ , если  $p \geq 7m$ .

$$\text{II. 4. } 10,0 \text{ нс, } 10,1 \text{ нс, } 13,7 \text{ нс.}$$

$$\text{II. 5. а) } a = \gamma(c\gamma', \gamma'v + \gamma v'), \text{ где } \gamma' = \gamma^3 v v' / c^2, \text{ а штрихованные символы обозначают производные по времени;}$$

$$\text{б) } a \cdot u = 0 \text{ получено дифференцированием } u \cdot u = c^2;$$

$$\text{в) } a \cdot a = \gamma^6 / (v')^2.$$

$$\text{II. 6. } v_{\text{ЦМ}} = 0,952, \quad \gamma_{\text{ЦМ}} = 3,26, \quad p_z^* = -1,46 \text{ ГэВ/с, } E^* = 2,65 \text{ ГэВ, } P^* = 2,48 \text{ ГэВ/с.}$$

$$\text{II. 7. В системе мишени вектор импульса лежит на гиперболоиде}$$

$$p_z^2 - (\gamma_{\text{ЦМ}} v_{\text{ЦМ}})^2 (p_x^2 + p_y^2) = (m_p \gamma_{\text{ЦМ}} v_{\text{ЦМ}})^2.$$

$$\text{Максимальное его значение в СЦМ } P^* \leq \frac{1}{2} \sqrt{s - 4m^2}.$$

$$\text{II. 9. а) Плоскость } q' = \text{const} \text{ представляется в плоскости } qr \text{ гиперболой}$$

$$\frac{(q - \gamma q')^2}{\gamma^2 v^2 (q'^2 + m^2)} - \frac{r^2}{q'^2 + m^2} = 1.$$

$$\text{б) Цилиндр } r' = \text{const} \text{ остается инвариантом, но внутри него } q \text{ и } q' \text{ связаны соотношением}$$

$$q = \gamma q' - \gamma v (q'^2 + r'^2 + m^2)^{1/2}.$$

$$\text{В плоскости } qq' \text{ это гипербола (фиг. 4).}$$

II. 12. Используя выражение (II. 3.6), получаем

- а)  $\tau_\eta = 2,5 \cdot 10^{-19}$  с,  
 б)  $\Gamma_{\pi^0} = 7,4$  эВ.

II. 13. См. [52].

II. 14. См. выражения (II. 6.25), (II. 6.26);  $v_a^M = v_b^M$ .

III. 1. а)  $\Gamma \mathcal{B}^{2-n}$ ; б)  $\Gamma \mathcal{B}^{2n-4}$ .

III. 2.  $I(E) = (2\pi m)^{3n/2} E^{3n/2-1} / \Gamma(3n/2)$ .

Указание. Воспользуйтесь формулами

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dt,$$

$$\int_0^{\infty} t^b e^{-at^2} dt = \Gamma\{(b+1)/2\} / 2a^{(b+1)/2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{(it)^a} dt = \frac{2\pi}{\Gamma(a)} x^{a-1} \cdot \Theta(x),$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция.

III. 4. Напомним, что  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

III. 5. Из выражения (III. 4.13) находим

$$\frac{d\theta^*}{d\theta} = \frac{2}{\gamma(1 - v^2 \cos^2 \theta)},$$

а из выражения (II. 8.32)

$$\sin \theta^* = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\gamma(1 - v^2 \cos^2 \theta)}.$$

IV. 1. 
$$\sin \frac{\theta_{12}}{2} = \frac{1 - v \cos \theta_1}{\sqrt{1 - 2v \cos \theta_1 + v^2}}.$$

IV. 2. Когда  $\theta_1 = \theta_2$ ,  $E_1 = E_2$  и  $\sin \frac{\theta_{12}^{\text{макс}}}{2} = \frac{m}{E} = \frac{1}{\gamma}$  или  $\cos \frac{\theta_{12}^{\text{макс}}}{2} = v$ .

IV. 3. Из равенства  $P_2^* = \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} / 2 \sqrt{s} = m_2 \operatorname{ctg}(\alpha/2)$  находим

$$m_2 = \frac{\sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + s \cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

IV. 5.  $w(r) = r(P^2 - r^2)^{-1/2} w\{(1 - r^2/P^2)^{1/2}\}$ , где  $P$  — импульс продукта распада.

IV. 6. Используем выражение (III. 2.5)

$$\frac{1}{\tau} = \frac{P_1^*}{2m^2} \frac{T_2}{4\pi},$$

где  $P_1^* = \sqrt{\lambda(m^2, m_1^2, m_2^2)}/2m$ ;  $T_2$  должно иметь размерность (масса)<sup>2</sup> = ГэВ<sup>2</sup>;  $f_K^2/4\pi m_K^2 = 7,4 \cdot 10^{-14}$ .

$$\text{IV. 7. } \frac{1}{\tau_\rho} = \frac{f_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} \frac{2P_\pi^{*3}}{3m_\rho^2} = \frac{f_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} \frac{m_\rho}{12} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{m_\rho^2}\right)^{3/2}; \quad \frac{f_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} = 2,44.$$

IV. 8. См. выражение (IV. 3.8).

IV. 9. Для одинаковых масс  $g_1^* = g_2^* = 1$  и

$$P_1 = \frac{2m(E_a + m)P_a \cos \theta_1}{(E_a + m)^2 - P_a^2 \cos^2 \theta_1};$$

$P_2$  получается заменой индекса 1 на 2. Для  $m_a = m_1 = 0$ ,  $m_b = m_2 = m$ ,

$$E_1 = P_1 = \frac{E_a}{1 + (E_a/m)(1 - \cos \theta_1)},$$

$$E_2 = \frac{(E_a + m)^2 + E_a^2 \cos^2 \theta_2}{(E_a + m)^2 - E_a^2 \cos^2 \theta_2} m,$$

$$P_2 = \frac{2M(E_a + m)E_a \cos \theta_2}{(E_a + m)^2 - E_a^2 \cos^2 \theta_2}.$$

IV. 10. а)  $\operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2 = 1/\gamma^2$ ,  $\gamma = (E_a + m)/\sqrt{s}$ ;

б)  $\operatorname{tg}(\theta_1/2) \operatorname{tg} \theta_2 = 1 - v$ ,  $v = E_a/(E_a + m)$ .

IV. 11. а)  $P_1^{\text{макс}} = P_a$ ,  $P_1^{\text{мин}} = P_a(m^2 - \mu^2)/s$ ;

б)  $P_2^{\text{макс}} = 2m(E_a + m)P_a/s = \{1 + (m^2 - \mu^2)/s\} P_a$ ,  
 $P_2^{\text{мин}} = 0$ .

IV. 12. Результаты получаются из выражений (IV.1.12) и (IV.3.13), (IV.3.14).

IV. 14. Для упругого рассеяния  $\mu m \rightarrow \mu m$ .

IV. 15. В  $s$ -канале  $t \leq 0$ ,  $u = 4m^2 - s - t \leq 0$ . Аналогично для  $t$ - и  $u$ -каналов.

IV. 17. Пусть тетраэдр образован тремя векторами  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ . Объем его равен  $V = 6^{-1} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3$  и  $V^2 = 36^{-1} \det(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)$ . Сделав замену  $\mathbf{a}_1^2 = u$ ,  $\mathbf{a}_2^2 = x$ ,  $\mathbf{a}_3^2 = w$ ,  $2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = x + u - v$ ,  $2\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = x + w - z$ ,  $2\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 = u + w - y$ , получаем выражение для  $G$ , приведенное в упражнении IV. 16.

IV. 18. Физический результат заключается в преобразовании Лоренца  $\mathbf{p}_2$  из СЦМ в систему покоя  $\mathbf{p}_b$  для параллельных векторов.

IV. 20. Эта область соответствует ветви гиперболы (IV.5.9), которая лежит на полуплоскости  $t > 0$ . Конечно, эта область не физическая.

IV. 21. а)  $t^+ = -0,00002$  (ГэВ/с)<sup>2</sup>;

б)  $t^+ = -0,04$  (ГэВ/с)<sup>2</sup>.



IV. 22. Главный член в разложении по степеням  $1/s$  при  $t=0$  соответствует  $\theta_{a1}^* = 2s^{-1} \{(m_a^2 - m_1^2)(m_2^2 - m_0^2)\}^{1/2}$ . В случае упругого рассеяния  $\mu m \rightarrow \mu m$  при  $u=0$  главный член соответствует  $\theta_{a1}^* = \pi - 2(m^2 - \mu^2)/s \approx 175^\circ$  для  $\pi N \rightarrow \pi N$  при 10 ГэВ/с.

IV. 23. Воспользуйтесь выражениями (IV. 4.19) — (IV. 4.22).

IV. 24.  $\sigma(s) = \beta(s) (32\pi a \lambda)^{-1} \{1 - \exp(-2a\lambda/s)\}$ ,  $\lambda = \lambda(s, m^2, \mu^2)$ .

IV. 25.  $A = (-0,47 + i) 103e^{-4,5t} (s/1 \text{ ГэВ}^2)$ .

IV. 26. Используя равенство  $t = -4E_a E_1 \sin^2(\theta_1/2)$ , где  $E_1$  определено в упражнении IV. 9, можно найти  $d\sigma/dt = (2\pi a^2/t^2) \times \{t^2 + 2st + 2(s - M^2)^2\} (s - M^2)^{-2}$ .

IV. 27.  $(s - 4m^2)(s + t) \sin^2 \theta_{a1}^M + 4m^2 t = 0$ .

IV. 28. Если  $t > 0$ , то в системе  $q = (q^0, 0)$  имеем  $P_a = P_1$  и  $P_b = P_2$ . Тогда  $(m_a - m_1)(m_b - m_2) \geq 0$  означает, что  $(E_a - E_1)(E_b - E_2) \geq 0$  и  $E_a - E_1 = q^0 = E_2 - E_b$  не могут быть одновременно удовлетворены.

IV. 29.  $I_\mu = \pi P_1 E_1 p_\mu / s$ ,

$$I_{\mu\nu} = (\pi P_1 / 3 \sqrt{s}) \{-P_1^2 g_{\mu\nu} + (P_1^2 + 3E_1^2) p_\mu p_\nu / s\}, \text{ где } P_1 = \lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2), E_1 = (s + m_1^2 - m_2^2) / 2 \sqrt{s}, s = p^2.$$

V. 1. Сравните выражения (IV. 5.22).

V. 2.  $I_1 = \ln \{\lambda^{1/2}(x, a, b) + x - a - b\}$ ,

$$I_2 = \lambda^{1/2}(x, a, b) - (a + b) I_1 -$$

$$- |a - b| \ln \{[(a - b)^2 - (a + b)x + |a - b| \lambda^{1/2}(x, a, b)] / x\},$$

$$I_3 = \frac{1}{2} (x - a - b) \lambda^{1/2}(x, a, b) - ab I_1,$$

$$K = \pi / \sqrt{-a},$$

V. 3.  $\frac{1}{4} \pi^2 \lambda^{-1/2}(s, m_a^2, m_b^2)$ .

V. 4. Воспользовавшись результатами решения упражнения V. 2, находим

$$\frac{8R_3(s)}{\pi^2 s} = (s + m_1^2 + m_2^2) \frac{\sqrt{\lambda}}{s^2} +$$

$$+ 2s^{-1} |m_1^2 - m_2^2| \ln \left\{ \frac{s(m_1^2 + m_2^2) - (m_1^2 - m_2^2)^2 + |m_1^2 - m_2^2| \sqrt{\lambda}}{2m_1 m_2 s} \right\} -$$

$$- 2s^{-2} \{s(m_1^2 + m_2^2) - 2m_1^2 m_2^2\} \ln \left\{ \frac{s - m_1^2 - m_2^2 + \sqrt{\lambda}}{2m_1 m_2} \right\},$$

где  $\lambda = \lambda(s, m_1^2, m_2^2)$ .

- V.5. Заменяя  $|A|^2$  на  $\sigma_{\pi N}(s_2)$ , согласно равенству (IV.4.19), из равенства (V.5.16) и равенства (III.2.3) находим

$$d^2\sigma_3/dt_1 ds_2 = \{16\pi^2 \lambda(s, m_a^2, m_b^2)\}^{-1} \lambda^{1/2}(s_2, t_1, m_b^2) \sigma_{\pi N}(s_2) F(t_1).$$

- V.7. Распределение углов Джексона находим, подставляя  $\exp(bt_2)$ , где  $t_2$  определяется выражением (V.7.5), в выражение (V.5.16) в качестве подынтегральной функции и интегрируя по всем переменным, кроме  $\cos\theta_{bb}^{123}$ . В случае  $m_i=0$  это приводит к распределению  $x\{x - (x+s)e^{-s/x}\}$ ,  $1/x = \sin^2 \frac{1}{2} \theta_{bb}^{123}$ .

- V.8. Используйте свойства несимметричных определителей Грама (A.3) — (A.8).

- V.9. Из диаграммы Далица видно, что  $dR/dM_{12}^2 = \text{const}$ .

- V.10. В системе  $\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b - \mathbf{p}_1 = 0$  эта поверхность представляет собой сферу  $P^2 = \lambda(s_2, m_2^2, m_3^2)/4s_2 \equiv A^2$ . Эта система получается из системы мишени заданием сдвига  $\gamma = (s_2 - t_1 + m_b^2)/2m_b \sqrt{s_2}$  в направлении  $\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1$  в СМ. Тогда поверхность в СМ представляет собой эллипсоид  $(\beta p_x - \alpha p_z)^2 + p_y^2 + \gamma^{-2}(\alpha p_x + \beta p_z - h)^2 = A^2$ , где

$$h^2 = (\gamma^2 - 1)(A^2 + m_3^2)$$

и

$$\alpha = (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1)_x / |\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1|, \quad \beta = (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1)_z / |\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1|.$$

- VI.1. Используйте выражение

$$I_\nu(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}x^2\right)^k / k! \Gamma(k + \nu + 1),$$

где  $I_\nu$  — модифицированная функция Бесселя, чтобы вычислить

$$\sigma(E) = \frac{\pi\lambda^2}{E^2} \cdot \frac{I_1(E\sqrt{2\pi\lambda})}{E\sqrt{2\pi\lambda}} \sim \frac{\pi\lambda^2}{E} \frac{e^{E\sqrt{2\pi\lambda}}}{2\pi(E\sqrt{2\pi\lambda})^{3/2}},$$

$$\langle n \rangle = 1 + \frac{1}{2} E \sqrt{2\pi\lambda} \frac{I_0(E\sqrt{2\pi\lambda})}{I_1(E\sqrt{2\pi\lambda})} \sim \frac{1}{2} E \sqrt{2\pi\lambda}.$$

Если необходимо вычислить отношение  $\sigma_n(E)$  к  $\sigma(E)$ , то можно использовать  $E = \sum E_i$ , чтобы ввести множители  $\exp\{-E_i\sqrt{2\pi\lambda}\}$  в интеграл по фазовому объему.

VI. 2. Если выразить  $R_n$  через  $T_n = M_n - \mu_n$ , то

$$R_n(T_n) = \pi \sqrt{m_n} \left( \frac{2\mu_{n-1}}{\mu_n} \right)^{1/2} \int_0^{T_n} dT_{n-1} (T_n - T_{n-1})^{1/2} R_{n-1}(T_{n-1}).$$

Начать надо с

$$R_2^{\text{HP}}(T_2) = \pi \sqrt{2} \frac{(m_1 m_2)^{1/2}}{\mu_2^{3/2}} T_2^{1/2};$$

интеграл по  $T_{n-1}$  сводится к  $B$ -функции Эйлера.

$$\begin{aligned} \text{VI. 4. } R_n = & \frac{\pi}{2\lambda^{1/2} (M_n^2, m_a^2, m_b^2)} \int dM_{n-1}^2 ds_n \frac{1}{4\lambda^{1/2} (M_n^2, M_{n-1}^2, m_n^2)} d\varphi_{n-1} \dots \\ & \dots \int dM_2^2 ds_3 \frac{1}{4\lambda^{1/2} (M_3^2, M_2^2, m_3^2)} d\varphi_2 \int ds_2 d\varphi_1, \end{aligned}$$

где  $s_n \equiv t_{bn} = (p_b - p_n)^2$ ,  $s_{n-1} = (p_n + p_{n-1})^2$  и т. д., а пределы интегрирования на плоскости  $M_i^2 s_{i+1}$  определяются уравнением

$$G(s_{i+1}, M_{i+1}^2, m_{i+1}^2, M_{i+2}^2, M_i^2, m_{i+2}^2) = 0,$$

требующим, чтобы процесс  $k_{i+2} - k_i = p_{i+2} + p_{i+1}$  был физическим. Это форма, в которой в качестве переменных в мультипериферической диаграмме, приведенной на фиг. 66, выступают инвариантные массы пар соседних частиц.

VI. 9. Пронтегрируйте уравнение (VI.4.27), задавая ориентацию  $p_1$  относительно произвольной оси, а ориентацию  $p_2$  относительно  $p_1$ . Тогда интегрирование по углам тривиально. Для  $n = 3$  воспользуйтесь равенством  $R_1(M_{33}^2) = \delta(M_{33}^2 - m_3^2)$ .

VI. 10. Воспользуйтесь представлением

$$\begin{aligned} R_4 = & \int dM_{123}^2 dM_{12}^2 R_2(s; M_{123}^2, m_4^2) \times \\ & \times R_2(M_{123}^2; M_{12}^2; m_3^2) R_2(M_{12}^2; m_1^2, m_2^2). \end{aligned}$$

Физическая область представляет собой треугольник.

VI. 11. Физическая область на плоскости  $M_{1234}^2 M_{3456}^2$  — прямоугольник, описанный вокруг диаграммы Далица для трехчастичного конечного состояния с массами частиц, равными  $m_1 + m_2$ ,  $m_3 + m_4$ ,  $m_5 + m_6$ , исключая область вблизи начала координат. Для конечного состояния из семи частиц физической областью является вся площадь прямоугольника.

VI. 12. Используйте полярные координаты на плоскости  $r, q_i$ .

VI. 14. В выражение

$$L_n = \int \prod_1^n d^2 q_{i-1} \delta \{ (q_i - q_{i-1})^2 - m_i^2 \} \delta^2 (-q_0 + p_a)$$

подставьте

$$q_i = \{0, \sqrt{-t_i}\}, \quad q_{i-1} = \sqrt{-t_{i-1}} (\operatorname{sh} \eta_i, \operatorname{ch} \eta_i),$$

$$d^2 q_i = \frac{1}{2} dt_i d\eta_{i+1}.$$

VI. 15. Примем, что все массы одинаковы и равны  $m'$ , и введем в выражение (VI. 5.14) с заменой  $n$  на  $n+1$  новую переменную  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , определяемую равенством

$$M_n'^2 = \{ (\sqrt{s'} - m')^2 - n^2 m'^2 \} \alpha + n^2 m^2 \approx s (\alpha + n^2 x^2),$$

$$x = m' / \sqrt{s'} \ll 1.$$

Тогда  $\lambda^{1/2}(s', M_n'^2, m'^2) \approx s(1 + 2x - \alpha)$ , и, приняв за единицу энергии  $nm'$ , получим

$$L_{n+1}(s) =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2^{n-1} s'} \int_0^1 d\alpha \left( \frac{2}{\alpha + n^2 x^2} + \frac{1}{1 + 2x - \alpha} \right) \left( \ln \frac{\alpha + n^2 x^2}{n^2 x^2} \right)^{n-2}.$$

Оба члена дают  $(\ln s')^{n-1}$ .

VI. 16. Сделайте преобразование Лапласа

$$а) I = (2\pi)^{n-1/2} / \{ (3n-2) \alpha^{2n-2} \},$$

$$б) I = n^{-1} (\pi/\alpha)^{n-1}.$$

VI. 17. Воспользуйтесь равенством

$$\int_0^{\pi/2} dt (\sin t)^a = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \Gamma \left\{ \frac{1}{2} (a+1) \right\} / \Gamma \left( \frac{1}{2} a + 1 \right).$$

VI. 18. При  $s \rightarrow \infty$  эти области стремятся к тем значениям  $\omega$ , которые указаны на фиг. 78; перекрытия нет; фазовая плотность в этих точках стремится к бесконечности.

VII. 1. Используйте выражение (VII. 2.12) при  $r = 0$ .

VII. 2.  $\sin \theta_{\text{макс}}^M = m_b / m_c$ ; разрешены любые направления, если  $m_b > m_c$ , ср. выражение (VII. 2.10).

VII. 3. Выражение (VII. 2.12) с заменой  $v_{\text{СЦМ}}$  на  $-v$  ( $\text{СП} \rightarrow \rightarrow \text{СЦМ}$ ), определяемое (II. 6.27).

## VII. 4. Используйте формулу

$$\int_0^{\infty} dx x^{a-1} (1+x)^{-1/2} \exp\{-b(1+x)^{1/2}\} = \\ = 2\pi^{-1/2} \left(\frac{1}{2} b\right)^{1/2-a} \Gamma(a) K_{1/2-a}$$

([50], формула (3.479)) и  $K_{1/2}(x) = (\pi/2x)^{1/2} \exp(-x)$ .

$$\text{VII. 5. } \omega(q) = (E - E_0) [EP - m_c^2 \ln \{(P + E)/m\}]^{-1},$$

$$\langle r(q) \rangle = [E\rho - E_0^2 \ln \{(E + \rho)/E_0\}] / 2(E - E_0),$$

$$E_0 = (q^2 + m_c^2)^{1/2}, \quad \rho = (P^2 - q^2)^{1/2}, \quad E = E_{\text{макс}}, \quad P = P_{\text{макс}}.$$

$$\text{VII. 7. } d\sigma/d\xi = 2\pi \int_0^{r_{\text{макс}}} dr r f \{(m_c^2 + r^2)^{1/2} \text{sh } \xi, r\},$$

где

$$r_{\text{макс}} = \{(P_{\text{макс}}^2 + m_c^2) \text{ch}^{-2} \xi - m_c^2\}^{1/2}.$$

$$\text{VII. 9. } -\ln(XY/4m_a m_c s) \leq \xi^{\Pi} \leq \ln(m_a X/m_c Y),$$

$$X = s + m_c^2 - s_X^{\text{мин}} + \lambda^{1/2}(s, m_c^2, s_X^{\text{мин}}),$$

$$Y = s + m_a^2 - m_b^2 + \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2).$$

VII. 10. Из равенства  $\text{th } \xi = P \cos \theta / E$  находим  $d \cos \theta / d\xi = EP^{-1} \text{ch}^{-2} \xi$ . Следовательно,  $\omega(\cos \theta^*) = 1$  означает, что  $\omega(\xi^*) = \text{const} \cdot \text{ch}^{-2} \xi^*$ , где константа включает в себя интеграл от функции распределения  $f(P)$  по  $P$ .

VII. 11.  $\omega(u^*) = \omega(\cos \theta^*) \sin \theta^* (d\theta^*/du^*) = \omega(\cos \theta^*) (\text{ch } u)^{-2}$ , так как, согласно равенству (VII. 4.16),  $d\theta^*/du^* = \sin \theta^* = (\text{ch } u)^{-1}$ ;  $\omega(u^M) = \omega(\cos \theta^M) \exp 2u^M (1 + \exp 2u^M)^{-1/2}$ .

VII. 12. Запишите  $\sigma$  как сумму по эксклюзивным реакциям.

VII. 14. Уравнение, определяющее границу, следует из неравенства  $(p_a + p_b - p_1 - p_2)^2 \geq (\text{минимальное значение недостающей массы})^2$ , выраженного через продольные импульсы  $q_1^*$ ,  $q_2^*$  или скорости  $\xi_1^*$ ,  $\xi_2^*$  в СЦМ при  $r_1 = r_2 = 0$ :

$$s - 2\sqrt{s}(E_1^* + E_2^*) + m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^*E_2^* - 2q_1^*q_2^* \geq \\ \geq (\text{минимальная недостающая масса})^2.$$

Граничная кривая — это граница диаграммы ПФП при  $n=3$  для реакции  $2 \rightarrow 3$  с массами  $m_1$ ,  $m_2$  и минимальной недостающей массой, но выраженная в декартовых координатах  $q_1$ ,  $q_2$ :

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Abramowitz M., Stegun I. A.*, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc., New York, 1965.
2. *Almgren B.*, Arkiv för Fysik, **38**, 161 (1968).
3. *Асрибеков В. Е.*, ЖЭТФ, **42**, 565 (1962).
4. *Asribekov V. E.*, Nucl. Phys., **34**, 461 (1962).
5. *Asribekov V. E.*, Phys. Lett., **2**, 284 (1962).
6. *Балдин А. М., Гольданский В. И., Розенталь И. Л.*, Кинематика ядерных реакций, Физматгиз, М., 1959.
7. *Bali N. F., Chew G. F., Pignotti A.*, Phys. Rev., **163**, 1572 (1967).
8. *Bali N. F., Chew G. F., Pignotti A.*, Phys. Rev. Letters, **19**, 614 (1967).
9. *Bardadin-Otwinowska M., Michejda L., Otwinowski S., Sosnowski R.*, Phys. Letters, **21**, 351 (1966).
10. *Benecke J., Chou T. T., Yang C. N., Yen E.*, Phys. Rev., **188**, 2159 (1969).
11. *Berger E. L.*, Phys. Rev. Letters, **23**, 1139 (1969).
12. *Berger E. L., Krzywicki A.*, Phys. Letters, **36B**, 380 (1971).
13. *Bertocchi L., Zalewski K.*, Nuovo Cimento, **49**, 577 (1967).
14. *Bialas A., Ruijgrok T.*, Nuovo Cimento, **39**, 1061 (1965).
15. *Bialkowski G., Sosnowski R.*, Phys. Letters, **25B**, 519 (1967).
16. *Blaton J.*, Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Mat.-Fys. Medd., **24**, № 20 (1950).
17. *Bloch M. M.*, Phys. Rev., **101**, 796 (1956).
18. *Bubelev E. G., Tšernikov N. A.*, Acta Physica Polonica, **26**, 155 (1964).
19. *Bubelev E. G.*, Acta Physica Polonica, **26**, 279 (1964).
20. *Byckling E., Kajantie K.*, Nucl. Phys., **B9**, 568 (1969).
21. *Byckling E., Kajantie K.*, Nucl. Phys., **B14**, 355 (1969).
22. *Byckling E., Kaartinen M., Kajantie K., Villanen H.*, Journ. Comp. Phys., **4**, 521 (1969).
23. *Byckling E., Kajantie K.*, Phys. Rev., **187**, 2008 (1969).
24. *Byckling E., Pirilä P.*, Zs. Phys., **250**, 379 (1972).
25. *Byckling E., Whippman M.*, TFT Preprint, 8-72 (1972).
26. *Byers N., Yang C. N.*, Rev. Mod. Phys., **36**, 595 (1964).
27. *Campbell G. H., Lepore J. V., Riddell R. J., Jr.*, Journ. Math. Phys., **8**, 687 (1967).
28. *Cerulus F., Hagedorn R.*, Nuovo Cimento Suppl., **9**, 646 (1958).
29. *Chan Hong-Mo, Kajantie K., Ranft G.*, Nuovo Cimento, **49**, 157 (1967).
30. *Chan Hong-Mo, Kajantie K., Ranft G., Beusch W., Flaminio E.*, Nuovo Cimento, **51A**, 696 (1967).
31. *Chew G. F., Low F. E.*, Phys. Rev., **113**, 1640 (1959).
32. *Chew G. F., Rignotti A.*, Phys. Rev., **176**, 2112 (1968).
33. *Chew G. F., de Tar C.*, Phys. Rev., **180**, 1577 (1969).
34. *Czyzewski O.*, в книге Methods of Subnuclear Physics (ed. M. Nicolici), Gordon and Breach, New York, 1968, p. 129.
35. *Dalitz R. H.*, Phys. Mag., **44**, 1068 (1953).
36. *Deck R. T.*, Phys. Rev. Letters, **13**, 169 (1964).
37. *Dedrick K. G.*, Rev. Mod. Phys., **34**, 429 (1962).
38. *Drell S. D., Walecka J. D.*, Ann. Phys. (N. Y.), **28**, 18 (1964).

39. *Eden R. J., Landshoff P. V., Olive P. J., Polkinghorne J. C.*, The Analytic S-matrix, pp. 197—204, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.
40. *Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.*, Tables of Integral Transforms, McGraw-Hill Inc., New York, 1953.
41. *Fabri E.*, Nuovo Cimento, **11**, 479 (1954).
42. *Feynman R. P.*, Phys. Rev. Letters, **23**, 1415 (1969).
43. *Fialho G. E. A.*, Phys. Rev., **105**, 328 (1957).
44. *Finkelstein J., Kajantie K.*, Nuovo Cimento, **56A**, 659 (1968).
45. *Френкель А.*, ЖЭТФ, **47**, 221 (1964).
46. *Friedman J. H.*, Journ. Comp. Phys., **7**, 201 (1971).
47. *Friedman J. H., Lynch G. R., Risk C. G., Zang T. A., Jr.*, Journ. Comp. Phys., **8**, 144 (1971).
48. *Гантмахер Ф. П.*, Теория матриц, изд. «Наука», М., 1967.
49. *Goldhaber G., Chinowsky W., Goldhaber S., Lee W., O'Halloran T.*, Phys. Letters, **6**, 62 (1963).
50. *Градиштейн И. С., Рыжик И. М.*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963.
51. *de Groot E. H.*, Nucl. Phys., **B48**, 295 (1972).
52. *Hagedorn R.*, Relativistic Kinematics, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1964.
53. *Halpern F. R.*, Special Relativity and Quantum Mechanics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1968.
54. *Halton J. H.*, SIAM Review, **12**, 1 (1970).
55. *Hammer P. C.*, в книге On Numerical Approximation (ed. R. E. Langer), Madison, 1959.
56. *Hammersley J. M., Handscomb D. C.*, Monte Carlo Methods, Methuen and Co., London, 1967.
57. *Huang K.*, Statistical Mechanics, John Wiley and Sons., Inc., New York, 1963.
58. *Huang K.*, Phys. Rev., **158**, 1555 (1967).
59. *Jackson J. D.*, Nuovo Cimento, **34**, 1644 (1964).
60. *Jacobson D. A.*, Nuovo Cimento, **45A**, 905 (1966).
61. *James F.*, CERN Yellow Report, 68-15 (1968).
62. *James F.*, CERN Computer Program Library, W505 (long write-up), 1970.
63. *Kajantie K.*, Nuovo Cimento, **53A**, 424 (1968).
64. *Kajantie K., Lindblom P.*, Phys. Rev., **175**, 2203 (1968).
65. *Kajantie K., Karimäki V.*, Comp. Phys. Commun., **2**, 207 (1971).
66. *Kajantie K., Karimäki V.*, Ann. Acad. Sc. Fennicae, VI, Physica, 395 (1972).
67. *Kajantie K., Tuominiemi J.*, Physica Scripta, **5**, 155 (1972).
68. *Челлен Г.*, Физика элементарных частиц, изд. «Наука», М., 1966.
69. *van Keuk G.*, Zur Anwendung des Statistischen Modells mit Drehimpulserhaltung, DESY Preprint 68/10, Hamburg, 1968.
70. *Хинчин А. Я.*, Математические основания квантовой статистики, Гостехиздат, М. — Л., 1951.
71. *Kibble T. W. B.*, Phys. Rev., **117**, 1159 (1960).
72. *Kittel W., Van Hove L., Wojcik W.*, Comp. Phys. Commun., **6**, 425 (1970).
73. *Koch W.*, в книге Analysis of Scattering and Decay, (ed. M. Nikolic), Gordon and Breach, New York, 1968.
74. *Колкунов В. А.*, ЖЭТФ, **43**, 1448 (1962).
75. *Колкунов В. А., Мейман Н. Н., Николаевский Е. С., Петрухин В. Н.*, Фазовые интегралы, препринт ИТЭФ, 555, М., 1967.
76. *Колкунов В. А., Мейман Н. Н., Николаевский Е. С., Петрухин В. Н.*, К методу перевала, препринт ИТЭФ, 561, М., 1967.
77. *Колкунов В. А., Мейман Н. Н., Николаевский Е. С., ЯФ*, **9**, 552 (1969).
78. *Комолова В. Е., Копылов Г. И.*, Моделирование рождения и распада резонансов, препринт ОИЯИ, P-2027, Дубна, 1965.

79. Комолова В. Е., Копылов Г. И., Усовершенствование программы случайных звезд, препринт ОИЯИ, P11-3193, Дубна, 1967.
80. Копылов Г. И., ЖЭТФ, **35**, 1426 (1958).
81. Копылов Г. И., ЖЭТФ, **39**, 1091 (1960).
82. Kopylov G. I., Nucl. Phys., **37**, 425 (1962).
83. Kopylov G. I., Komolova V., Nucl. Phys., **47**, 33 (1963).
84. Копылов Г. И. Основы кинематики резонансов, изд. «Наука», М., 1970.
85. Kopylov G. I., Penev V. N., Tevzadze Yu. V., Shklovskaya A. I., Nucl. Phys., **B30**, 398 (1971).
86. Kotanski A., Nuovo Cimento, **56A**, 737 (1968).
87. Krzywicki A., Nuovo Cimento, **32**, 1067 (1964).
88. Krzywicki A., Journ. Math. Phys., **6**, 485 (1965).
89. Kumar R., Phys. Rev., **185**, 1865 (1969).
90. Kumar R., Phys. Rev., **D2**, 1902 (1970).
91. Ландау Л. Д., Известия АН СССР, **17**, 51 (1953).
92. Lepore J. V., Stuart R., Phys. Rev., **94**, 1724 (1954).
93. Lipes R. G., Nucl. Phys., **B24**, 16 (1970).
94. Lurçat F., Mazur P., Nuovo Cimento, **31**, 140 (1964).
95. Lynch G. R., Alvarez Programming Group Note, P-162, Berkeley, 1967.
96. Lyons L., Nucl. Phys., **B7**, 83 (1968).
97. Lyons L., Nucl. Phys., **B15**, 355 (1970).
98. Maglić B., Gosta G., Phys. Letters, **18**, 185 (1965).
99. McLeod D., Nucl. Instr. Methods, **72**, 333 (1969).
100. McNeil R. P., Morrow R. A., Journ. Math. Phys., **10**, 2185 (1969).
101. Michael C., Nuovo Cimento, **42A**, 562 (1966).
102. Milburn R. H., Rev. Mod. Phys., **27**, 1 (1955).
103. Morrow R. A., Journ. Math. Phys., **7**, 744 (1966).
104. Morrow R. A., Phys. Rev., **176**, 2147 (1968).
105. Morrow R. A., Nuovo Cimento, **61A**, 215 (1969).
106. Morrow R. A., Ann. Phys., **57**, 333 (1970).
107. Morrow R. A., Phys. Rev., **D1**, 2884 (1970).
108. Морс П. М., Фейсбах Г., Методы теоретической физики, ИЛ, М., 1958.
109. Nyborg P., Song H. S., Kernan W., Good R. H., Jr., Phys. Rev., **140**, B914 (1965).
110. Nyborg P., Phys. Rev., **140**, B921 (1965).
111. Nyborg P., Physica Norvegica, **2**, 25 (1966).
112. Nyborg P., Am. Journ. Phys., **34**, 932 (1966).
113. Nyborg P., Skjeggstad O., в книге Kinematics and Multiparticle Systems (ed. M. Nikolić), Gordon and Breach, New York, 1967.
114. Nyborg P., Nuovo Cimento, **58B**, 247 (1968).
115. Nyborg P., Frodesen A. G., Physica Norvegica, **6**, 67 (1970).
116. Nyborg P., Nuovo Cimento, **65A**, 544 (1970).
117. Nyborg P., Herceg-Novi lectures, 1970.
118. Павлов В. П., ЖЭТФ, **45**, 1606 (1963).
119. Pene O., Krzywicki A., Nucl. Phys., **B12**, 415 (1969).
120. Pirilä P., Byckling E., Comp. Phys. Comm., **4**, 117 (1972).
121. Pilkuhn H., The Interaction of Hadrons, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1967.
122. Poon C. H., Nucl. Phys., **B20**, 509 (1970).
123. Proriot J., Nucl. Phys., **A126**, 689 (1969).
124. Regge T., Barrucchi G., Nuovo Cimento, **34**, 106 (1964).
125. Rindler W., Special Relativity, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1960.
126. Rohrlich F., Nucl. Phys., **67**, 659 (1965).
127. Rohrlich F., Nuovo Cimento, **38**, 673 (1965).
128. Sakmar I. A., Wojtaszek J. H., Phys. Rev., **163**, 1748 (1967).
129. Satz H., Fortschr. Physik, **11**, 445 (1963).
130. Satz H., Nuovo Cimento, **37**, 1407 (1965).



131. *Satz H., van Keuk G.*, Nuovo Cimento, 50A, 272 (1967).
132. *Skjeggstad O.*, CERN Yellow Report, 64-13, Geneva, 1964.
133. *Srivastava P. A., Sudarshan G.*, Phys. Rev., 110, 765 (1958).
134. *Tan, Chung-I.*, Phys. Rev., D3, 790 (1971).
135. *Tarski J.*, Journ. Math. Phys., 1, 149 (1960).
136. *Toller M.*, Nuovo Cimento, 37, 631 (1965).
137. *Treiman S. B., Yang C. N.*, Phys. Rev. Letters, 8, 140 (1962).
138. *Van Hove L.*, Nucl. Phys., B9, 331 (1969).
139. *Werbrouck A.*, в книге Methods of Subnuclear Physics (ed. M. Nicolici), Gordon and Breach, New York, 1968.
140. *Werle J.*, Relativistic Theory of Reactions, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1966.
141. *Wick G. C.*, Ann. Phys., 18, 65 (1962).
142. *Yen E., Berger E. L.*, Phys. Rev. Letters, 24, 695 (1970).
143. *Zemach C.*, Phys. Rev., 140, B97, B109 (1965).

### Литература, добавленная при переводе

144. *Балдин А. М., Гольданский В. И., Максименко В. М., Розенталь И. Л.*, Кинематика ядерных реакций, изд. 2., Атомиздат, М., 1968.
145. *Сморodinский Я. А.* в книге Эйнштейновский сборник, изд. «Наука», М., 1971, стр. 272.
146. *Sternheimer R. M.*, Kinematics. App. 2 в книге Methods of Experimental Physics, v. 5B, ed. by Yuan L. C. L., Wu C. S., Academic Press, N. Y., — London, 1963.
147. *Pinski G.*, Nuovo Cimento, 24, 719 (1962).
148. *Kopylov G. I.*, Nucl. Phys., B52, 126 (1973).
149. *Коробов Н. М.*, Теоретико-числовые методы в приближенном анализе, Физматгиз, М., 1963.
150. *Соболь И. М.*, Многомерные квадратные формулы и функции Хаара, изд. «Наука», М., 1969.
151. *Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А.*, Метод статистических испытаний, Физматгиз, М., 1961.
152. *Копылов Г. И.* в сборнике Вопросы физики элементарных частиц, в. 4, Ереван, 1964, стр. 134.
153. *Соболь И. М.*, Численные методы Монте-Карло, изд. «Наука», М., 1973.
154. *Зельдович Я. Б.*, ЖЭТФ, 34, 1644 (1958).
155. *Смоляк С. А.*, ДАН СССР, 131, 1028 (1960).
156. *Максименко В. М.*, Кандидатская диссертация, ФИАН, 1960.
157. *Копылов Г. И.*, ЖЭТФ, 46, 2063 (1964).
158. *Foster M. et al.*, Phys. Rev., D6, 3135 (1972).
159. *Tables of Particles Properties*, Phys. Lett., 50B, № 1 (1974).
160. *Kopylov G. I., Ogievetsky V. I.*, Nucl. Phys., 50, 241 (1964); 57, 697 (1964).
161. *Hagedorn R.*, Nuovo Cimento (Suppl.), 3, 147 (1965).
162. *Sternheimer R. M.*, Phys. Rev., 93, 642 (1954).
163. *Sternheimer R. M.*, Phys. Rev., 99, 205 (1955).
164. *Kopylov G. I.*, The Method of Calculating Statistical Weights and Distributions in the Theories of Multiple Production, JINR preprint, E-528, Dubna, 1960.
165. *Berger E., Fox G. C., Krzywicki A.*, Phys. Lett., 43B, 132 (1973).
166. *Ludlam T., Slansky R.*, Phys. Rev., D8, 1408 (1973).
167. *Kopylov G. I., Nikitin A. V., Popova V. M.*, Nucl. Phys., B48, 117 (1972).
168. *Воробьев А. П., Дунаевский А. М.*, Метод сглаживания для моделирования мультипериферических процессов с блоками распределенной массы, Препринт ФИАН, № 73, М., 1972.
169. *Адамович М. И., Харламов С. П.*, Краткие сообщ. по физике, ФИАН, № 12 (1974).

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

Указаны страницы, на которых дано определение перечисленных ниже величин или объяснен смысл сокращенных обозначений.

- $a$  — общее обозначение 4-вектора,  $a = (a^\mu) = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, a_x, a_y, a_z)$  16,
- $a$  — пространственная часть  $a$ ,  $\mathbf{a} \equiv (a^1, a^2, a^3)$  16,
- $A$  — матричный элемент 61,
- $A$  — абсолютная величина  $a$  19,
- $A$  — абсолютная величина вектора с составляющими  $(a^0, a^1, a^2)$  22,
- $B$  — кинематическая функция, связанная с  $\Delta_4$  151,
- $c$  — скорость света,
- $dg$  — элемент инвариантного объема на группе  $O(1, 2)$  23,
- $d\Omega$  — элемент телесного угла 23,
- $D$  — величина, введенная в формуле (II, 8.21) 51,
- $E$  — энергия,
- $f(p, s)$  — инвариантная функция распределения (структурная функция) 237,
- $F$  — поток 62,
- $g$  — метрический тензор 17,
- $g^* = v/v^*$  52,
- $G$  — кинематическая функция, связанная с  $\Delta_3$  100—104,
- $G(p_1, \dots)$  — несимметричный определитель Грама 312,
- $I, I_n$  — интеграл по фазовому пространству (для  $n$  частиц) 62,
- $I_\nu(x)$  — модифицированная функция Бесселя 164, 306,
- $k_i = p_1 + \dots + p_i$  176,
- $K(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz$  167, 322,
- $K = \frac{1}{2} \left( m_0^2 - \sum_i m_i^2 \right)$  221,
- $K_\nu(x)$  — модифицированная функция Бесселя, 306,
- $L$  — преобразование Лоренца 16, 23,

- $L_n$  — интеграл по продольному фазовому пространству (продольный фазовый объем) 206,  
 $m, m_i$  — масса,  
 $m'_i$  — продольная масса 204,  
 $m_X$  — недостающая масса 238, 263,  
 $M_i$  — инвариантная (эффективная) масса,  $M_i^2 = (p_1 + \dots + p_i)^2$  196,  
 $n$  — множественность (число частиц),  
 $p$  — 4-импульс 25,  
 $\mathbf{p}$  — пространственная часть  $p$ ,  $\mathbf{p} = (p_x^1, p_y^2, p_z^3)$  25,  
 $P$  — абсолютная величина  $p$ ,  
 $P^2 = E^2 - p_x^2 - p_y^2 = p_z^2 + m^2$  45,  
 $P^\pm$  — два значения  $P$  при данном  $\theta$  51,  
 $q$  — продольная составляющая  $p$  48, 204,  
 $q, q_i$  — 4-вектор передачи импульса,  $q_i = p_a - p_1 - \dots - p_i$  182, 251,  
 $r, r_i$  — поперечная составляющая  $p$  48, 204,  
 $r_k, r^{(i)}, \tilde{r}^{(i)}, \tilde{r}(i)$  — случайные числа, равномерно распределенные в интервале  $(0, 1)$  288,  
 $R(p)$  — система покоя времениподобного 4-вектора  $p$  19,  
 $R(p_1, p_2, p_3)$  — система координат, определенная векторами  $p_1, p_2, p_3$  для  $p_1^2 > 0$  39,  
 $R_n(s)$  — фазовый интеграл (фазовый объем  $n$  частиц) 66,  
 $R_2$  — фазовый объем двух частиц 75,  
 $R_3$  — фазовый объем трех частиц 120, 124, 151,  
 $s$  — квадрат полной энергии частиц в системе покоя их центра масс 32, 88,  
 $s_i$  — квадрат инвариантной массы двух частиц,  $s_i = (p_i + p_{i+1})^2$  115, 186,  
 $s_{ij}$  — квадрат инвариантной массы двух частиц,  $s_{ij} = (p_i + p_j)^2$  26,  
 $s_X$  — квадрат инвариантной массы системы  $X$  238,  
 $S$  — система отсчета 15,  
 $S(p)$  — стандартная система отсчета  $p = (0, 0, 0, \sqrt{-p^2})$  для пространственноподобных  $p$  19,  
 $S(p_1, p_2, p_3)$  — система координат, определяемая векторами  $p_1, p_2, p_3$  для  $p_1^2 < 0$  46,  
 $S_n$  — площадь поверхности сферы  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$  212,  
 $t, t_i$  — квадрат 4-передачи импульса 84, 88, 181, 238,  
 $t^\pm$  — значения  $t$  при вылете частицы вперед или назад 104, 109,

- $T$  — квадрат матричного элемента 61,  
 $T$  — кинетическая энергия 28, 35,  
 $u$  — 4-скорость 24,  
 $u$  — инвариантная величина,  $u = (p_a - p_2)^2$  88,  
 $v$  — 3-вектор скорости 15,  
 $v$  — абсолютная величина  $v$  15,  
 $v, v_{\text{ЦМ}}$  — скорость СЦМ в СМ 32, 38, 52,  
 $v_{\text{П}}$  — скорость СП в СМ 38,  
 $v_{\text{П, ЦМ}}$  — скорость СП в СЦМ 38,  
 $v_{\text{ВП}}$  — скорость СЦМ в СВП 33,  
 $v^*$  — скорость частицы в СЦМ 50,  
 $w_k$  — вес при интегрировании методом Монте-Карло 288, 293,  
 $w(x)$  — распределение величины  $x$  63,  
 $x$  — масштабная переменная 257,  
 $x_{ij}$  — скалярное произведение,  $x_{ij} = p_i \cdot p_j$  220,  
 $X$  — матрица  $(x_{ij})$  скалярных произведений 221,  
 $\gamma$  — лоренц-фактор 16,  
 $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака,  
 $\Delta_i$  — симметричный определитель Грама 312,  
 $\bar{\Delta}_i$  — сумма  $\Delta_i$ , взятая со знаком 225,  
 $\Delta_2$  — определитель Грама второго порядка 41,  
 $\Delta_3$  — определитель Грама третьего порядка 42, 100,  
 $\Delta_4$  — определитель Грама четвертого порядка 44, 151,  
 $\varepsilon$  — полностью антисимметричный тензор  $\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$  315,  
 $\zeta, \eta$  — быстроты 22, 45, 186,  
 $\xi$  — продольная быстрота 239,  
 $\xi_{ij}$  — одна из толлеровых переменных (быстрота) 160,  
 $\theta$  — полярный угол,  
 $\theta_{12}$  — угол между  $p_1$  и  $p_2$  (угол разлета) 80,  
 $\theta_{b3}^{123}$  — джексоновский угол в системе центра масс частиц 2 и 3 139,  
 $\theta_{13}^{123}$  — полярный угол спиральности в системе центра масс частиц 2 и 3 140,  
 $\Theta(x)$  — функция-ступенька 64,  
 $\lambda_1, \lambda_3$  — (азимутальный) угол спиральности в системе центра масс частиц 2 и 3 (частиц 1 и 2) 140, 160,  
 $\lambda(x, y, z)$  — кинематическая функция, связанная с  $\Delta_2$  35, 41,  
 $\mu$  — масса частицы 86,  
 $\mu_i$  — нижняя граница  $M_i$ ,  $\mu_i = m_1 + \dots + m_i$  177,

- $v$  — потеря энергии 239,  
 $\xi$  — быстрота 17,  
 $\rho$  — радиус-вектор на диаграмме ПФП 211,  
 $\rho_n(\Phi)$  — фазовая плотность в переменных  $\Phi$  65,  
 $\sigma$  — сечение 62,  
 $\tau$  — время жизни 62,  
 $\varphi$  — азимутальный угол 42, 47,  
 $\varphi_b, \varphi_a$  — угол Треймана — Янга в системе центра масс частиц 2 и 3 (частиц 1 и 2) 140, 160,  
 $\Phi$  — точка фазового пространства 65,  
 $\chi$  — относительная быстрота двух систем отсчета 253,  
 $\omega, \omega_t$  — угол Толлера 160, 187,  
 $\omega$  — угол на диаграмме ПФП для  $n = 3$  213,  
 $\Omega$  — телесный угол,  
 $*$  — звездочкой отмечены величины в СЦМ 30,  
 ВП, СВП — система центра масс частиц встречных пучков 30,  
 Л, ЛС — лабораторная система 30,  
 М, СМ — система (покоя) мишени 30,  
 НР — нерелятивистский предел 124,  
 П, СП — система (покоя частиц) пучка 30,  
 ПФП — продольный фазовый объем 207,  
 УР — ультрарелятивистский предел 124,  
 ФМ — область фрагментации мишени 258,  
 ФП — область фрагментации падающей частицы 258,  
 Ц — центральная область 258,  
 ЦМ, СЦМ — система центра масс 30,  
 Ц12 — система центра масс частиц 1 и 2 118.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

## Азимутальные углы 42, 140

- выражение через инварианты 44, 147, 149, 160
- двузначность в определении 47
- преобразование Лоренца 49
- циклически симметричное представление 158

## Базисная кинетическая функция пятичастичная 153

- — — трехчастичная 41
- — — четырехчастичная 100

## Быстрота 17

- преобразование 252
- продольная 239, 252

## Времениподобные векторы 19, 39

- рекуррентные соотношения 174
- фазовые интегралы для двух частиц 76

## Время жизни 62

## Грама определители 39, 40, 46, 312—319

## Дерево импульсов 176

## Диаграмма Гольдхабера 198

- Далица 119, 125
- кубоктаэдра 219
- Пейру 241, 269
- ПФП 214
- Чу — Лоу 134, 201

## Дисперсия веса 288

## Единицы 28

## Изотропный вектор 19

## Импульс продуктов двухчастичного распада 76

## Импульсное пространство 58

## Инвариант 17, 26

## Инвариантная масса 32

- — двух частиц 26, 115, 182
- функция распределения 237, 265

## Инвариантные переменные для реакции $1 \rightarrow 3$ 115

- — — —  $1 \rightarrow 4$  219
- — — —  $2 \rightarrow 2$  88
- — — —  $2 \rightarrow 3$  131

## Инклюзивная реакции 59, 237

## Каналы распада 90

- реакции  $2 \rightarrow 2$  89
- — перекрестные 60

## Квазислучайные числа 291

## Кинематические отражения 271

## Корреляции 265

- кинематические 204, 267
- функции 266

## Коэффициент неупругости 238

## Кроссинг-преобразование 88, 89

## Ложные эффекты 271

## Лоренца преобразования 15—21

- сдвиг 17, 22

## Лоренц-инвариантный элемент фазового объема 23, 24, 64

## Лоренц-фактор 16

## Малая группа 79

## Масштабная инвариантность 257

## Матрица плотности 137

## Метод Монте-Карло 282, 286

- недостающих масс 263

- пика в якобиане 263

- седловой точки 308

- $F(t)$  202

- численного интегрирования 282, 283

## Метрический тензор 17

## Мнимое вращение 18

- Модель однопионного обмена 138, 172

## Монте Карло метод 282, 286

- Мультипериферическая модель 164, 169, 216, 218

## Мультиреджевский предел 193

## Недостающая масса 238, 241, 263

- Область переходная 259  
 — фрагментации мишени 258  
 — пучка 258  
 Обрезание поперечных импульсов 204, 272  
 Определители Грама 39, 40, 312  
 — условия на 224, 227  
 — Кэли 102, 152, 314  
 Оптическая точка (теорема) 94, 95
- Передача импульса, квадрат 27, 84, 181, 238, 301  
 — минимум 109  
 Перекрестные каналы реакции 60  
 Переменные на световом конусе 79  
 Плоскость распада, рождения 140  
 Плотность событий 286, 296  
 Полярный угол спиральности 118, 140  
 Поперечное обрезание 205, 275  
 Порог реакции 35, 80, 106  
 Потеря энергии частицы 239, 250  
 Поток частиц 62  
 Преобразование Лоренца азимутального угла 49  
 — — быстроты 18, 255  
 — — в активном смысле 20, 22  
 — 4-импульса 25, 48  
 — между СЦМ, СМ\* и СВП 31, 257  
 — — одночастичного распределения 69  
 — — полярного угла 54  
 — — продольное 206, 239, 261  
 — собственное 17  
 — Лапласа 305  
 Преобразования Лоренца 15—21  
 Программа FOWL 283, 292, 302  
 Продольная быстрота 239, 252  
 Продольный фазовый объем 207, 208  
 — — — интеграл 206, 207, 212, 236  
 Пространственноподобные 4-векторы 19, 78  
 — рекуррентные соотношения 183  
 Псевдопорог реакции 35, 80, 106  
 Псевдослучайные числа 291  
 Псевдосферические координаты 20, 45
- Распределение 63, 237  
 — Брейта — Вигнера 137, 295, 298  
 — на диаграмме Далица при мультипериферическом матричном элементе 164  
 — нормальное 289  
 — по фазовому объему 66  
 — — — двух инвариантных масс 198
- Распределение по фазовому объему для инклюзивных реакций 239  
 — — — инвариантных масс 124, 196, 197  
 — — — квадратов передач 137, 203  
 — — — на диаграмме Гольдхабера 199  
 — — — — Далица 123  
 — — — — Чу — Лоу 136, 171, 201  
 — — — —  $t_1 t_2$  146  
 — — — — одночастичное 203  
 — — — — толлеровых углов 162, 278  
 — — — — углов Джексона 139  
 — полярных углов спиральности 128  
 — продольных импульсов 245  
 — средних поперечных импульсов 245  
 — углов вылета 77  
 — — — в мультипериферических процессах 277  
 — — — разлета 80, 204  
 Рассеяние вперед (назад) 84  
 Реджевский предел по всем переменным при  $n=3$  169  
 — — — — произвольном  $n$  193  
 Рекуррентные соотношения времени-подобные 174, 285  
 — — для продольного фазового объема 207  
 — — пространственноподобные 183  
 Розыгрыш событий 295
- Сечение 29  
 — дифференциальное 63  
 — инклюзивное 237  
 — полное 62, 95  
 Символ Леви-Чивита 315, 316  
 Система координат джексоновская 117, 139  
 — — спиральная 140  
 — — треугольная 105, 122, 214  
 — отсчета Брейта 142  
 — — встречных пучков 30  
 — — лабораторная 30  
 — — покоя мишени 30  
 — — — частиц пучка 30  
 — — — центра масс 30, 35  
 Скалярное произведение 17, 220  
 Скейлинг 257  
 — быстрот 258  
 — продольных импульсов 257  
 Скорость СП в СМ 38  
 — СП в СЦМ 38  
 — СЦМ в СВП 33  
 — СЦМ в СМ 32, 38  
 Случайные звезды 282

## Случайные числа (события) 287

— — нормально распределенные 289

Событие в методе Монте-Карло 288, 295

Соотношение унитарности 166

Статистические методы 67, 283, 304

Существенная выборка 293

Существенные переменные 60

Сферические координаты 19, 39, 320

Толлеровы переменные 161, 175, 183

— углы 160, 171

Угловой эффект 276

Угол азимутальный 42, 140

— вылета 77, 80

— джексоновский 139

— между джексоновской и спиральной системами координат 139

— полярный 39, 41, 319

— — инвариантная запись 41, 159

— разлета 80

— рассеяния 83, 88

— спиральности 140

— — инвариантная запись 149

— полярный 118, 140

— телесный 322

— — инвариантная запись 44

— Толлера 160, 171

— Треймана — Янга 139

— — инвариантная запись 148

Упругое рассеяние, кинематика 86, 95

Фазовая плотность 65, 174, 230

Фазовое пространство 58

— — поперечно-усеченное 205

— — продольное 206

Фазовый объем 66

— — нековариантный 67

— — нерелятивистский 179, 235, 307

— — при  $n = 2$  75— — —  $n = 3$  120, 124, 136, 144, 151— — —  $n = 3$  в мультiredжевском

пределе 170

— — — — толлеровых переменных

163, 193

— — —  $n = 4$  200, 201, 232, 235

— — — продольный 206, 207, 212, 236

— — — ультрарелятивистский 178, 307

— —  $n$  частиц 177, 181

— — — — в инвариантных переменных 232

— — — — — мультiredжевском

пределе 195

— — — — — толлеровых переменных 185, 191, 192

Фазовый объем, формула расщепления 179, 198

Физическая область 65, 128

— — в переменных  $(P, \theta)$  или  $(q, r)$  240— — — —  $(t, s_x)$  246— — — —  $(\zeta, r)$  252

— — выраженная через инварианты 224

— — для реакции  $1 \rightarrow 3$  119— — — —  $1 \rightarrow 4$  201, 229— — — —  $2 \rightarrow 2$  95— — — —  $2 \rightarrow 3$  в инвариантных переменных 134, 145

Формула Доплера 54

— расщепления 179

Фрагментация 257

— предельная 262

Функции корреляции 266

Функция  $B$  153—  $G$  100—  $\lambda$  35, 41, 108

Функция ступенька 64

Центральная область в инклюзивных реакциях 258

— — в реакциях  $2 \rightarrow 2$  108

— предельная теорема 283

Циклические перестановки частиц в реакции  $2 \rightarrow 3$  158

Четыре-векторы 16, 19

Четыре-импульс 25

— инвариантная запись 226

— сохранение 58

Четыре-скорость 24

Четыре ускорение 55

Эксклюзивная реакция 59

Эллипсоид импульсов 48

Энергия в мультiredжевском пределе 194

— — толлеровых переменных 162, 192

— инвариантная запись 34, 36, 91, 118, 143

— как функция угла рассеяния 52, 86

— полная 25

Эффект Декка 276

— чайки 246

Эффективность метода Монте-Карло 286, 293

Ящичная диаграмма 166



# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие редактора перевода . . . . .                                               | 5   |
| Предисловие авторов . . . . .                                                          | 9   |
| Глава I. Введение . . . . .                                                            | 11  |
| Глава II. Специальная теория относительности . . . . .                                 | 15  |
| 1. Преобразования Лоренца, 4-векторы, быстроты, псевдосферические координаты . . . . . | 15  |
| 2. 4-скорость и 4-импульс . . . . .                                                    | 24  |
| 3. Единицы и условные обозначения . . . . .                                            | 28  |
| 4. Системы отсчета для процессов столкновения . . . . .                                | 30  |
| 5. Взаимные переходы между системами центра масс, мишени и встречных пучков . . . . .  | 31  |
| 6. Энергии и импульсы сталкивающихся частиц, выраженные через инварианты . . . . .     | 34  |
| *7. Импульсы и углы, выраженные через инварианты . . . . .                             | 38  |
| *8. Детальное рассмотрение преобразования Лоренца вектора 4-импульса . . . . .         | 47  |
| Упражнения . . . . .                                                                   | 55  |
| Глава III. Фазовое пространство . . . . .                                              | 58  |
| 1. Определение фазового пространства . . . . .                                         | 58  |
| 2. Интегрирование по фазовому пространству и сечения . . . . .                         | 61  |
| 3. Фазовый объем . . . . .                                                             | 66  |
| *4. Преобразования Лоренца распределений для одной частицы . . . . .                   | 69  |
| Упражнения . . . . .                                                                   | 74  |
| Глава IV. Двухчастичные конечные состояния . . . . .                                   | 75  |
| 1. Фазовый объем двух частиц . . . . .                                                 | 75  |
| *2. Распределение углов разлета . . . . .                                              | 80  |
| 3. Рассеяние $2 \rightarrow 2$ : соотношения между СЦМ и СМ . . . . .                  | 83  |
| 4. Инвариантные переменные для рассеяния $2 \rightarrow 2$ . . . . .                   | 88  |
| 5. Физическая область изменения $s$ , $t$ и $u$ . . . . .                              | 95  |
| 6. Величина $t$ для рассеяния вперед . . . . .                                         | 109 |
| Упражнения . . . . .                                                                   | 110 |
| Глава V. Трехчастичные конечные состояния . . . . .                                    | 115 |
| 1. Распад одной частицы на три . . . . .                                               | 115 |
| 2. Диаграмма Далица . . . . .                                                          | 119 |
| 3. Конфигурации импульсов на диаграмме Далица . . . . .                                | 125 |
| 4. Превращение двух частиц в три . . . . .                                             | 128 |
| 5. Описание с помощью двух инвариантов и двух углов; диаграмма Чу—Лоу . . . . .        | 131 |

|                                                                                     |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6. Углы Джексона, Треймана — Янга, спиральности и некоторые другие . . . . .        | 138        |
| *7. Описание с помощью трех инвариантов и одного угла . . . . .                     | 142        |
| *8. Азмутальные углы в инвариантных переменных . . . . .                            | 147        |
| *9. Описание с помощью четырех инвариантов . . . . .                                | 150        |
| *10. Циклическая симметрия, угол Толлера . . . . .                                  | 158        |
| *11. Применение выведенных формул . . . . .                                         | 164        |
| Упражнения . . . . .                                                                | 171        |
| <b>Глава VI. Множественное рождение . . . . .</b>                                   | <b>173</b> |
| 1. Введение . . . . .                                                               | 173        |
| 2. Времениподобные рекуррентные соотношения . . . . .                               | 174        |
| *3. Пространственноподобные рекуррентные соотношения; переменные Толлера . . . . .  | 183        |
| 4. Распределения по фазовому объему . . . . .                                       | 196        |
| 5. Поперечно-усеченное фазовое пространство . . . . .                               | 204        |
| 6. Продольное фазовое пространство . . . . .                                        | 209        |
| *7. Физическая область в инвариантных переменных . . . . .                          | 220        |
| *8. Фазовая плотность в инвариантных переменных . . . . .                           | 230        |
| Упражнения . . . . .                                                                | 234        |
| <b>Глава VII. Инклюзивные реакции . . . . .</b>                                     | <b>237</b> |
| 1. Одночастичные распределения . . . . .                                            | 237        |
| 2. Пары переменных $(P, \theta)$ и $(q, r)$ . . . . .                               | 240        |
| 3. Пары переменных $(t, s_x)$ и $(t, v)$ . . . . .                                  | 246        |
| 4. Пара переменных $(\xi, r)$ . . . . .                                             | 252        |
| 5. Кинематика масштабной инвариантности и фрагментации . . . . .                    | 257        |
| 6. Кинематика метода недостающих масс . . . . .                                     | 263        |
| 7. Многомерные распределения; корреляции . . . . .                                  | 265        |
| Упражнения . . . . .                                                                | 269        |
| <b>Глава VIII. Кинематические отражения . . . . .</b>                               | <b>271</b> |
| 1. Общее описание . . . . .                                                         | 271        |
| 2. Влияние обрезаний поперечных импульсов или 4-передач . . . . .                   | 272        |
| 3. Влияние резонансов . . . . .                                                     | 278        |
| <b>Глава IX. Численные методы интегрирования по фазовому пространству . . . . .</b> | <b>281</b> |
| 1. Введение . . . . .                                                               | 281        |
| 2. Прямое численное интегрирование . . . . .                                        | 283        |
| 3. Правила интегрирования методом Монте-Карло . . . . .                             | 286        |
| 4. Уменьшение статистической погрешности . . . . .                                  | 291        |
| 5. Применение метода Монте-Карло в физике элементарных частиц . . . . .             | 295        |
| *6. Статистический метод . . . . .                                                  | 304        |
| *Приложение А. Определители Грама . . . . .                                         | 312        |
| Приложение Б. Сферическая тригонометрия . . . . .                                   | 320        |
| Ответы к упражнениям . . . . .                                                      | 323        |
| Литература . . . . .                                                                | 331        |
| Обозначения . . . . .                                                               | 335        |
| Предметный указатель . . . . .                                                      | 339        |