

53

УДК 519.4 : 539.12

M137

Континуальное интегрирование как метод решения физических задач / Мазманишвили А. С. — Киев : Наук. думка, 1987. — 224 с.

Монография посвящена практическим методам вычисления континуальных интегралов гауссовых форм и их применению для решения различных физических задач. Принятый в ней подход основан на аналитическом определении вероятностных характеристик физических величин, найденных при решении стохастических дифференциальных уравнений. Изложены необходимые сведения теории меры и описаны различные методы аналитического вычисления континуальных интегралов. Изложение построено на решениях задач статистической радиотехники и квантовой оптики, описана вероятностная структура процессов на выходе инерционных детекторов, измерительных устройств корреляционного и интерференционного типов, регистрирующих сигналы на фоне шума. Приведена статистика интегральных квадратичных функционалов, основанных на решениях систем линейных стохастических уравнений. Методы континуального интегрирования применены при описании радиационных процессов, сопутствующих прохождению частиц высоких энергий через аморфные и кристаллические мишени.

Для специалистов, использующих в своей практической деятельности методы прикладной математики и теории вероятностей.

Ил. 75. Библиогр.: с. 217—223 (187 назв.).

Ответственный редактор Г. Я. Любарский

Рецензенты С. В. Пелетминский, В. Н. Татарский

Редакция физико-математической литературы

Предисловие	5
Введение	7
1. Элементы теории гауссовой меры	12
1.1 Статистическая структура процесса Орнштейна — Уленбека	13
1.2. Условная мера Орнштейна—Уленбека	18
1.3. Виды континуальных интегралов	20
2. Методы вычисления континуальных интегралов по гауссовой мере	24
2.1. Метод Каца — Фейнмана	24
2.2. Метод временной дискретизации	29
2.3. Метод повышения порядка марковского процесса	38
2.4. Замена переменных интегрирования в континуальных интегралах	42
2.5. Континуальные интегралы по ОУ-мере и фейнмановские континуальные интегралы	47
3. Континуальное интегрирование в задачах статистической радиотехники	53
3.1. Статистические процессы в нелинейных радиотехнических схемах	53
3.2. Распределение средней мощности ОУ-шума, регистрируемого за конечное время наблюдения	55
3.3. Статистическая структура процесса на выходе интегрального квадратичного детектора, регистрирующего детерминированный сигнал на фоне ОУ-шума	62
3.4. Статистическая структура процесса на выходе инерционных коррелятора, интерферометра и сглаживающего устройства	74
3.5. Процессы на выходе детектора с переменной во времени чувствительностью	83
3.6. Распределение времени достижения заданного уровня при регистрации инерционным детектором сигнала на фоне ОУ-шума	88
4. Континуальное интегрирование в задачах квантовой оптики	94
4.1. Статистика отсчетов оптических полей	94
4.2. Статистика фотоотсчетов при прямом детектировании	98
4.3. Статистика фотоотсчетов поля излучения, образованного суперпозицией когерентного сигнала и КОУ-шума	103
4.4. Статистика фотоотсчетов оптического излучения на выходе двухлучевого интерферометра	111
4.5. Статистика фотоотсчетов при многолучевой интерференции	115
4.6. Статистическая структура процессов в интерферометрии интенсивностей	118
4.7. Распределение временных интервалов достижения заданного уровня процессом на выходе квантового счетчика	122
5. Статистика функционалов, определенных на решениях стохастических дифференциальных уравнений	126
5.1. Линейные стохастические дифференциальные уравнения и квадратичные функционалы	127

5.2. Диссипативные стохастические дифференциальные уравнения. Пример с ОУ-шумом	130
5.3. Гармонический стохастический процесс	135
5.4. Флуктуации энергии «белого» шума, прошедшего через колебательный контур	143
5.5. Статистика функционалов, содержащих квадратичные формы от компонент гармонического стохастического процесса	154
6. Континуальное интегрирование в задачах радиационной физики частиц высоких энергий	164
6.1. Длина формирования радиационного процесса	164
6.2. Излучение релятивистского электрона в аморфной среде — спектрально-угловое распределение	166
6.3. Излучение релятивистского электрона в аморфной среде — спектральная плотность излучения	172
6.4. Влияние многократного рассеяния и поляризации среды на излучение релятивистских частиц в кристаллах	178
Приложение 1. Программа определения вероятностных характеристик квантовооптических интегральных квадратичных функционалов	183
Приложение 2. Некоторые континуальные интегралы от гауссовых форм	190
Послесловие	214
Summary	216
Список литературы	217

Цель этой работы — взаимосвязанное изложение элементов теории континуального интегрирования и демонстрация техники применения континуальных интегралов на примерах задач из разных разделов физики. Хорошо известно, что из возможных конструкций интегралов берутся лишь континуальные интегралы по гауссовой мере. Термин «континуальный интеграл берется» здесь означает, что исходная математическая конструкция, включающая континуальное интегрирование, приведена к другой конструкции, уже не включающей континуальное интегрирование, (хотя при этом может присутствовать обычное интегрирование). Термин «гауссова мера» здесь означает, что весовые функции, с помощью которых ищется значение континуальных интегралов, обладают гауссовым свойством, т. е. являются экспонентами, аргументами которых служат квадратичные формы от переменных континуального интегрирования. Гауссовым свойством при этом должна обладать не только мера, т. е. весовая функция, с помощью которой осуществляется процедура усреднения, но и то выражение, математическое ожидание которого ищется. Такие континуальные интегралы вычислимы и могут быть взяты, если только обладают гауссовым свойством подынтегральные выражения. Возможность получения результата континуального интегрирования в аналитической форме без использования каких-либо приближений отличает гауссовы континуальные интегралы от других.

Континуальное интегрирование — один из эффективных методов современной теоретической физики. В квантовой теории поля этот метод является одним из основных технических средств вычислений. Хотя интерес к этому методу возрастает, областью его применения в основном остается «верхний этаж» теоретической физики. ~~Между тем во многих разделах физики, в частности в статистической радиотехнике и квантовой оптике, подход, основанный на континуальном интегрировании, позволяет получать результаты, которые со значительно большей затратой труда можно найти другими способами. В монографиях встречаются задачи без решения (характеризуемые как «очень трудные»), которое вполне может быть получено на основе континуального интегрирования (характерный пример есть в книге Я. Перины «Когерентность света», с. 273).~~

Бурное развитие вычислительных методов и средств, основанных на использовании быстродействующих ЭВМ, обеспечивает возможность успешного разрешения все новых разнообразных задач, что в свою очередь приводит к необходимости развития аналитических методов, ориентированных на этап исследования, предшествующий численному. Это в полной мере относится и к теории континуального интегрирования.

3. Процесс η , задаваемый выражениями (3.1) и (3.2), является монотонной функцией текущего времени T , поэтому в момент T^* достигнет некоторого заданного уровня A . Необходимо определить функцию распределения вероятностей случайной величины T^* .

К этим задачам примыкает большое число близких по постановке задач. Особую часть их составляют те, в которых в (3.1) и (3.2) вместо $\xi(t)$ используется аддитивный процесс $\xi(t) + s(t)$, где $s(t)$ — детерминированный процесс.

Будем считать поставленную задачу исчерпанной, если по заданной статистической структуре входного процесса удалось определить статистическую структуру выходного процесса.

В этой главе будет везде принято, что случайной компонентой входного процесса $\xi(t)$ является ОУ-процесс $x(t)$. Это отвечает простой радиофизической модели, в которой на вход системы подается «белый» шум $f(t)$, проходящий далее через дифференцирующую цепочку типа RC-звена. Такой процесс (нормальный марковский процесс [2]) описывается в терминах стохастического дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dt} + \nu x = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \nu = \frac{1}{RC}. \quad (3.3)$$

Анализ решения уравнения (3.3) и статистическая структура ОУ-процесса $x(t)$ детально описаны в гл. 1. Можно воспользоваться приведенным в ней аппаратом, а также методами нахождения различного рода математических ожиданий, изложенными в гл. 2.

С дальнейшим повышением порядка дифференциального уравнения объем выкладок резко увеличивается. Для линейного уравнения с постоянными коэффициентами результирующий процесс сохраняет свойства гауссовости и марковости, если в правой части стоит процесс со свойствами «белого» шума. Важным случаем здесь является дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее процесс на выходе RLC-колебательного контура. Сюда же относятся задачи, рассматривающие совокупное воздействие двух независимых ОУ-шумов. Однако особенности математического аппарата делают целесообразным вынесение методов решения таких задач в отдельную главу.

Упражнения

3.1.1. (M15). Построить примеры радиотехнических схем, уравнения движения для которых совпадают с (3.3). Установить физическую аналогию величин $x(t)$, $f(t)$, ν . Вычислить в какой-либо системе единиц, например в СИ, значения величин σ_x и σ_f , присвоив номинальные значения для параметров элементов схемы.

3.1.2. (M25). Показать, что

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{B}{\pi} \right)^{N/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1} \exp \left\{ -A \sum_{n=1}^{N-1} x_n^2 - B \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n-1})^2 \right\} = \\ = \frac{(AB)^{1/4}}{(\pi \operatorname{sh} \varphi)^{1/2}} \exp \left\{ -\sqrt{AB} \operatorname{cth} \varphi (x_0^2 + x_N^2) - \frac{\sqrt{AB}}{\operatorname{sh} \varphi} x_0 x_N \right\}, \end{aligned}$$

где $\varphi = \lim_{N \rightarrow \infty} N \sqrt{A/B}$, предполагая, что все пределы существуют.

3.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ МОЩНОСТИ ОУ-ШУМА, РЕГИСТРИРУЕМОГО ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ НАБЛЮДЕНИЯ

Средняя мощность

$$\eta = \frac{1}{T} \int_0^T dt x^2(t) \quad (3.4)$$

реализации ОУ-шума конечной длительности T является случайной величиной и представляет интерес при анализе многих систем связи. Статистическая структура этой величины была частично рассмотрена в работе [3], численные расчеты для функции распределения величины η выполнены в [4], аналитическое выражение для производящей функции случайной величины η впервые (насколько это нам известно) приведено в [5], при этом в качестве $x(t)$ был использован стохастический ОУ-процесс (3.3).

Функция плотности распределения вероятностей

$$P(\eta) = \left\langle \delta \left(\eta - \frac{1}{T} \int_0^T dt x^2(t) \right) \right\rangle \quad (3.5)$$

может быть записана в виде, использующем фурье-представление для δ -функции:

$$P(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda\eta} Q_x(i\lambda, T), \quad (3.5a)$$

с помощью производящей (характеристической) функции

$$Q_x(\lambda, T) = \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{T} \int_0^T dt x^2(t) \right\} \right\rangle. \quad (3.6)$$

Поскольку параметр λ может принимать любое значение на комплексной плоскости, то термин «производящая», как и термин «характеристическая», одинаково правомерны. Нахождению математического ожидания $Q_x(\lambda, T)$ по ОУ-мере был, в частности, посвящен § 2.1, в котором получено (см. (2.54)), что

$$Q_x(\lambda, T) = \left[\frac{4rv e^{vT}}{(r+v)^2 e^{rT} - (r-v)^2 e^{-rT}} \right]^{1/2}, \quad (3.7)$$

$$r = \left(v^2 + 2 \frac{\lambda}{T} v \sigma_f \right)^{1/2} = \left(v^2 + 2 \frac{\lambda}{T} \sigma_f \right)^{1/2},$$

где σ_f — коэффициент при δ -образном корреляторе правой части уравнения движения (3.3) (сторонней силы — порождающего «белого» шума). Можно использовать этот результат, имея в виду, что в силу (3.6) производящая функция $Q_x(\lambda, T)$ является аналитической функцией аргумента λ , поэтому в (3.7) достаточно выбрать знак «+» у радикалов. Полюса этой функции определяются из уравнения

$$\frac{r-v}{r+v} = \exp(rT). \quad (3.8)$$

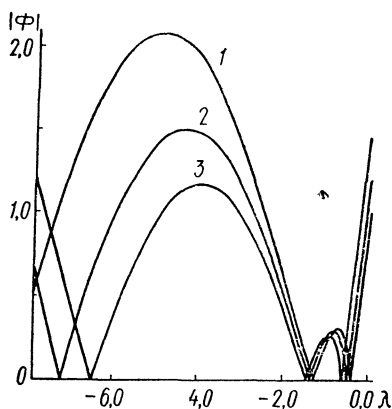


Рис. 3.1. Графики модуля $|\Phi|$ знаменателя Q_x -функции на отрицательной полуоси:

$\sigma_x = 1,0$; $T = 1,0$; 1 — $\nu = 0,8$; 2 — $\nu = 1,0$; 3 — $\nu = 1,2$.

Сравнивая его левую и правую части, можно заключить, что в точке полюса величина r должна быть чисто мнимой, $r = ib$, где b — вещественная величина. Поэтому в точке полюса $\lambda = -(\nu^2 + b^2)/2\sigma_x$, т. е. $\lambda < 0$, и полюса Q_x -функции расположены на отрицательном луче вещественной оси λ -плоскости. При $\nu T \ll 1$ точка первого полюса λ_1 (считая справа налево от точки $\lambda = 0$) приблизительно равна $\lambda_1 \simeq (1 + \nu T)/\sigma_x$. Эта особенность связана с усреднением по ансамблю реализаций x_0 ОУ-процесса в начальный момент времени $t = 0$ (см. (2.27)). Если $\nu T \gg 1$, то из (3.8) следует, что $\lambda\sigma \simeq -\nu(1 - \cos(bT))^{-1}$, т. е. первый полюс тем дальше от точки $\lambda = 0$, чем больше величина ν . Особенности производящей функции (3.8) иллюстрирует рис. 3.1, на котором показан ход зависимости модуля ее знаменателя.

В силу трансцендентного характера производящей Q_x -функции интеграл Фурье (3.5а) удастся найти лишь численным путем, при этом полезно предварительно исследовать поведение Q_x -функции в окрест-

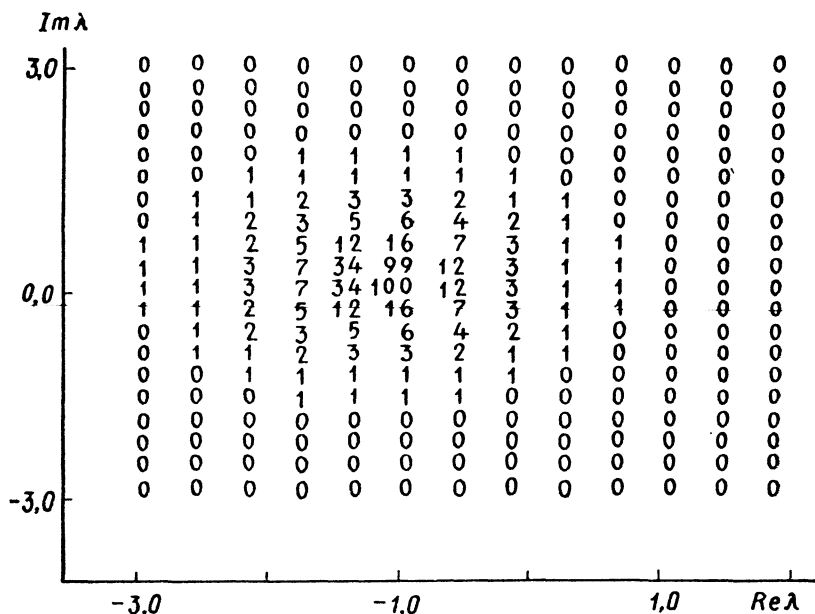


Рис. 3.2. Карта модулей $|Q_x(\lambda, T)|$ на комплексной плоскости λ : $\sigma_x = 1,0$; $\nu = 0,1$; $T = 1,0$; $\max |Q_x(\lambda, T)| = 2,94 \cdot 10^4$.

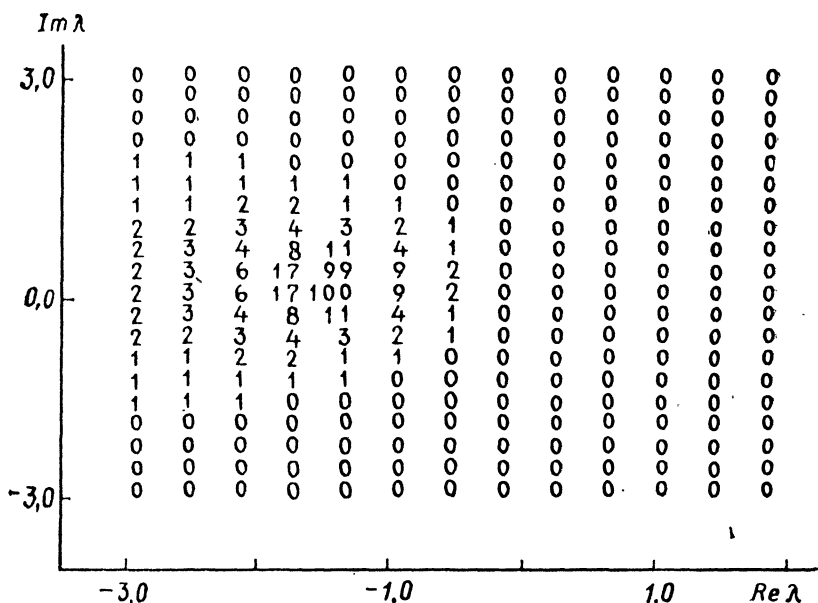


Рис. 3.3. Карта модулей $|Q_x(\lambda, T)|$ на комплексной плоскости λ :
 $\sigma_x = 1,0$; $\nu = 1,0$; $T = 1,0$; $\max |Q_x(\lambda, T)| = 1,51 \cdot 10^2$.

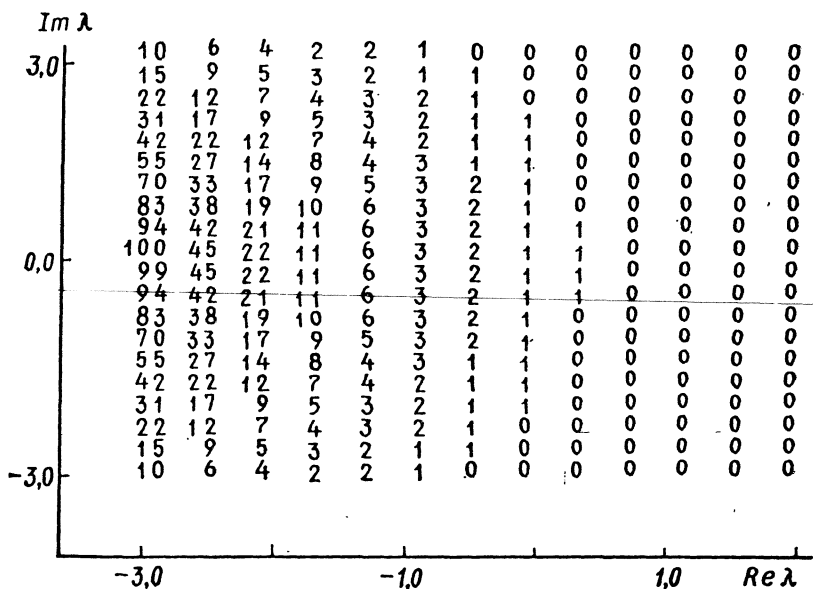


Рис. 3.4. Карта модулей $|Q_x(\lambda, T)|$ на комплексной плоскости λ :
 $\sigma_x = 1,0$; $\nu = 10,0$; $T = 1,0$; $\max |Q_x(\lambda, T)| = 1,39 \cdot 10^2$.

ности точки $\lambda = 0$ с целью избежать при выполнении машинных расчетов трудностей, например возможных переполнений. Следует отметить, что если для выбранной пользователем ЭВМ значения простых переменных ограничены числом A (например, $A = 10^{18}$), то при использовании комплексных переменных их реальная и мнимая части не должны превышать число $\sqrt{A}$. На рис. 3.2—3.4 приведены карты модуля $|Q_x(\lambda, T)|$ производящей функции на комплексной плоскости λ в окрестности первого полюса λ_1 для трех значений декремента v соответственно. На этих рисунках значение достигнутого максимума модуля отнормировано на 100, шаги $\text{Re } \lambda$ и $\text{Im } \lambda$ выбраны так, чтобы миновать непосредственную окрестность полюса. Перенормированные значения $|Q_x(\lambda, T)|$ вынесены на печать в формате I3, т. е. они округлены до ближайшего целого числа n , $0 \leq n \leq 100$. Из рисунков видна тенденция к смещению влево места локализации первого максимума с ростом декремента v , а также к увеличению вертикальных размеров (по оси $\text{Im } \lambda$) его пьедестала.

Математическое ожидание (3.6) является преобразованием Лапласа плотности распределения $P(\eta)$, поэтому

$$P(\eta) = \int_{C_\lambda} \frac{d\lambda}{2\pi i} e^{\lambda \eta} Q_x(\lambda, T), \quad (3.9)$$

при этом контур C_λ должен быть выбран так [6], чтобы оставить слева особенности функции $Q_x(\lambda, T)$. Поскольку производящая функция (3.7) является радикалом, для устранения возникающей двузначности необходимо снабдить каждый из полюсов разрезом, например, параллельным оси $\text{Im } \lambda$, а контур C_λ провести также параллельно этой оси, пересекая при этом ось $\text{Re } \lambda$ справа от точки $\lambda = 0$ с тем, чтобы оставить слева точку ветвления радикала $r = (v^2 + 2\lambda\sigma_x v/T)^{1/2}$ при $\lambda = 0$, которую также необходимо снабдить лучевым разрезом. Хотя по выбранному контуру можно в принципе осуществлять численное интегрирование, на практике такая его реализация наталкивается на трудности, связанные с осцилляциями фурье-ядра в (3.9), которые зачастую приводят к исчезновению правильных значащих цифр и быстрому накоплению ошибки из-за ограниченной длины разрядной сетки ЭВМ. Для избежания этих трудностей перейдем в (3.9) к величине $r = (v^2 + 2\lambda\sigma_x v/T)^{1/2}$, лишь от которой зависит явно производящая функция, как к новой переменной интегрирования

$$P(\eta) = \int_{C_r} \frac{dr}{2\pi i} \frac{rT}{\sigma_x v} \exp\left(\frac{r^2 - v^2}{2\sigma_x v} \eta T\right) \tilde{Q}(r), \quad (3.10)$$

где

$$\tilde{Q}(r) = \left[\frac{4rve^{vT}}{(r+v)^2 e^{rT} - (r-v)^2 e^{-rT}} \right]^{1/2}.$$

Контур C_r асимптотически ограничен биссектрисами первой и четвертой четверти на комплексной r -плоскости, а через ось $\text{Re } r$ он должен пройти правее точки $r = v$. Этот контур можно спрямить, сделав его параллельным оси $\text{Im } r$, после чего провести через точку $r = v$.

После замены $r = v(1 + ix)$ получим

$$P(\eta) = \frac{vT}{2\pi\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} dx (1 + ix) \exp\left(-\frac{x^2 - 2ix}{2\sigma_x} v\eta T\right) \tilde{Q}(v + ivx). \quad (3.11)$$

На рис. 3.5 представлены результаты расчета плотности распределения вероятностей $P(\eta)$, выполненного согласно формуле (3.11). Из рис. 3.5 видно, что с ростом декремента v проявляется тенденция к формированию распределения гауссова типа; это распределение при

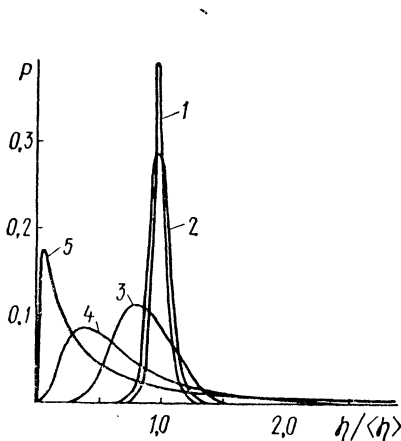


Рис. 3.5. Плотность распределения вероятностей $P(\eta)$:

$\langle\eta\rangle = 1$; $T = 1,0$; 1 — $v = 10^2$; 2 — $v = 10^1$; 3 — $v = 10^0$; 4 — $v = 10^{-1}$; 5 — $v = 10^{-2}$.

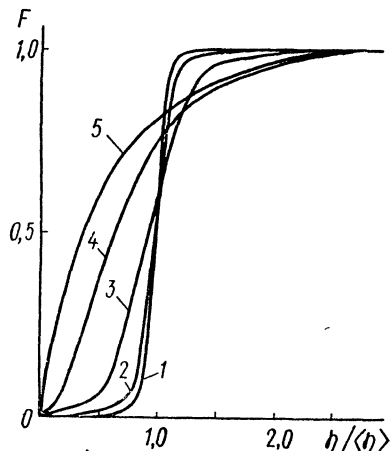


Рис. 3.6. Вероятность $F(\eta)$:

$\langle\eta\rangle = 1,0$; $T = 1,0$; 1 — 5 — см. рис. 3.5.

$vT \gg 1$ асимптотически стремится к δ -функции $\delta(\eta - \sigma_x/2)$. Для малых vT распределение $P(\eta)$ смещается к точке $\eta = 0$, принимая вид экспоненциального с затянутым «хвостом». При этом всегда $P(0) = 0$. Интегральная вероятность

$$F(\eta) = \int_0^{\eta} d\eta' P(\eta') = 1 - \int_{\eta}^{\infty} d\eta' P(\eta') \quad (3.12)$$

изображена на рис. 3.6 для тех же значений параметров (значения для $v < 0,01$ на этих рисунках не указаны, поскольку кривые, им отвечающие, трудноразличимы от зависимости при $v = 0,01$).

Из (3.7) следует, что

$$\langle\eta\rangle = \frac{1}{2} \sigma_x, \quad \langle\eta^2\rangle = \sigma_x^2 \frac{-1 + 2vT + v^2T^2 + e^{-2vT}}{4v^2T^2}, \quad (3.13)$$

поэтому дисперсия распределения $P(\eta)$ равна

$$\Delta = \langle\eta^2\rangle - \langle\eta\rangle^2 = \langle\eta^2\rangle - \frac{1}{4} \sigma_x^2 = \sigma_x^2 \frac{-1 + 2vT + e^{-2vT}}{4v^2T^2}. \quad (3.14)$$

При $vT \gg 1$ $\Delta \simeq \sigma_x^2/2vT$, а при $vT \ll 1$ $\Delta \simeq \sigma_x^2/2$.

Для произвольного значения декремента ν функции $P(\eta)$ и $F(\eta)$ при $\eta \rightarrow 0$ стремятся к нулю быстрее, чем любая степень η . Когда же η значительно превышает $\langle \eta \rangle$, для $P(\eta)$ можно получить приближенное выражение

$$P(\eta) \simeq \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\nu T}{\pi \eta \langle \eta \rangle}} \left(1 - \frac{1}{9} e^{-2\nu T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\nu T}{4} \frac{\eta}{\langle \eta \rangle}\right) \quad (3.15)$$

при $\nu T \simeq 1$. Для случая, когда $\nu T \gg 1$, из (3.10) следует асимптотическое выражение

$$P(\eta) = \sqrt{\frac{\nu T}{\pi}} \frac{\langle \eta \rangle}{\eta} \frac{\exp\left[-\frac{\nu T}{4} (\eta - \langle \eta \rangle)^2 / (\eta \langle \eta \rangle)\right]}{\left[(\eta + \langle \eta \rangle)^2 - (\eta - \langle \eta \rangle)^2 \exp\left(-2\nu T \frac{\langle \eta \rangle}{\eta}\right)\right]^{1/2}}, \quad (3.16)$$

которое легко получить, выделяя в экспоненте (3.10) квадратичную форму относительно r . В общем случае для извлечения информации о статистической структуре случайной величины (3.4) необходимо привлечение ЭВМ.

Упражнения

3.2.1. (M5). Прямое дифференцированием по правилу

$$\langle \eta \rangle = -\frac{\partial}{\partial \lambda} Q_x(\lambda, T) \big|_{\lambda=0}, \quad \langle \eta^2 \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} Q_x(\lambda, T) \big|_{\lambda=0}$$

убедиться в справедливости выражений (3.10) и (3.11).

3.2.2. (M15). Установить радиофизическую интерпретацию величин, описываемых выражениями (2.26) — (2.28), составить мысленный эксперимент по их измерению.

3.2.3. (M15). Осуществляя поинтервальное интегрирование на отрезках $(0, T_1)$ и (T_1, T_2) , а также $(0, T_1 + T_2)$, показать, что

$$\left\langle \exp\left\{-\lambda \int_0^{T_1} dx^2(t)\right\} \exp\left\{-\lambda \int_{T_1}^{T_2} dx^2(t)\right\} \right\rangle = \left\langle \exp\left\{-\lambda \int_0^{T_1+T_2} dx^2(t)\right\} \right\rangle.$$

3.2.4. (M10). Пусть $\lambda = u + i\nu$ и $Q_x(\lambda, T) = R + iJ$. Убедиться в том, что

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{\partial J}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial R}{\partial \nu} = -\frac{\partial J}{\partial u}$$

(условия Коши — Римана).

3.2.5. (M15). Пусть $f(\lambda) = (\nu^2 + 2\lambda\sigma_{xy})^{1/2}$. Описать контур, по которому пройдет $f(\lambda)$, если контур λ — это: а) вещественная ось; б) мнимая ось; в) единичная окружность с центром $(0, 0)$; г) единичная окружность с центром $(1, 0)$.

3.2.6. (M30). Показать, что распределение $P(\eta)$ из (3.5) для ОУ-процесса одновершинно [7], т. е. только в одной точке своего аргумента $\eta = \eta_b < \infty$ достигается локальный максимум, $P(\eta_b) = \max P(\eta)$.

3.2.7. (M25). Найти при $\tau \geq 0$ безусловное среднее

$$Q_\tau(\lambda) = \left\langle \exp\left\{-\lambda \int_0^{T_1} dx^2(t) - \lambda \int_{T_1+\tau}^{T_1+T_2+\tau} dx^2(t)\right\} \right\rangle.$$

3.2.8. (М35). Замыкая контур интегрирования в (3.5а) так, чтобы охватить полюса Q_x -функции, для вероятности $P(\eta)$ получаем

$$P(\eta) = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} R(\lambda_k),$$

где $R(\lambda_k)$ — вычеты в полюсах λ_k . Считая, что полюса образуют упорядоченную последовательность, оценить необходимое их число для того, чтобы найти вероятность $P(\eta)$ с наперед заданной точностью $\delta P(\eta)$.

3.2.9. (М15). Рассмотреть обратное преобразование Лапласа от функции

$$Q(\lambda) = \exp(-t \sqrt{v^2 + 2\lambda\sigma_x v}).$$

Выбирая контур интегрирования в обратном преобразовании так, чтобы оставить слева точку ветвления радикала $\sqrt{v^2 + 2\lambda\sigma_x v}$, показать, что искомое обратное преобразование равно

$$J(\eta) = \int \frac{d\lambda}{2\pi i} e^{\lambda\eta} Q(\lambda) = \frac{ve^{-v\eta}}{\pi\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} dy (1 + iy) \exp\left(-ivty + i \frac{v\eta}{\sigma_x} y - \frac{v\eta}{2\sigma_x} y^2\right).$$

3.2.10. (М10). Показать, что для ОУ-процесса имеет место равенство

$$\left\langle \left[\int_0^T dt x^2(t) \right]^{-1} \right\rangle = \int_0^{\infty} d\lambda \left[\frac{4rve^{vT}}{(r+v)^2 e^{rT} - (r-v)^2 e^{-rT}} \right]^{1/2},$$

3.2.11. (М35). Пусть

$$S_{N+1} = \sum_{n=0}^N x_n^2,$$

где $x_n = x(t_n)$ — реализации ОУ-процесса в моменты времени $t = n\Delta t$. Показать, что безусловное среднее

$$Q(\lambda) = \langle \exp(-\lambda S_{N+1}) \rangle$$

равно

$$Q(\lambda) = \left[\frac{(1+R_0)^{N+1} - (1-R_0)^{N+1}}{(1+\lambda\sigma_x p + R)^{N+1} - (1+\lambda\sigma_x p - R)^{N+1}} \right]^{1/2},$$

где

$$R = [(1 + \lambda\sigma_x p)^2 - 4q^2]^{1/2}; \quad R_0 = (1 - 4q^2)^{1/2}; \quad q = e^{-v\Delta t}; \quad p = 1 - q^2.$$

3.2.12. (М20). Продолжение. Рассмотреть случай без последствия, когда $v \rightarrow \infty$ и $q \rightarrow 0$. Показать, что

$$\lim_{v \rightarrow \infty} Q(\lambda) = (1 + \lambda\sigma_x)^{-(N+1)/2},$$

что отвечает гамма-распределению случайной величины S_{N+1} [1, 2].

3.2.13. (М35). Продолжение. Пусть

$$S_N = \sum_{n=1}^N x_n^2.$$

Найти безусловное среднее $Q(\lambda) = \langle \exp(-\lambda S_N) \rangle$.

3.2.14. (М15). Показать, что из (3.5) следует $P(0) = 0$.

3.2.15. (М30). Исследовать поведение функции $P(\eta)$ и ее производной $dP(\eta)/d\eta$ в окрестности точки $\eta = 0$.

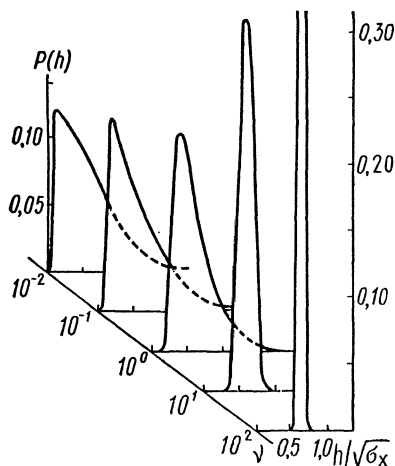


Рис. 3.7. Плотность распределения вероятностей $P(h)$.

3.2.16. (М30). Шероховатость случайной кривой [8]. Пусть дана кривая $x(l)$, которую можно описать как ОУ-процесс на отрезке $0 \leq l \leq L$. Средний для этого отрезка квадрат отклонения кривой от нулевого уровня

$$h^2 = \int_0^L \frac{dl}{L} x^2(l)$$

является случайной величиной, а его плотность распределения вероятностей $R(h^2)$ равна

$$R(h^2) = \int \frac{d\lambda}{2\pi i} \times e^{\lambda h^2} \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^L \frac{dl}{L} x^2(l) \right\} \right\rangle.$$

Показать, что плотность распределения $P(h)$ случайной величины h равна $P(h) = 2hR(h^2)$ и рассмотреть ее количественные характеристики (рис. 3.7).

3.3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПРОЦЕССА НА ВЫХОДЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО ДЕТЕКТОРА, РЕГИСТРИРУЮЩЕГО ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ СИГНАЛ НА ФОНЕ ОУ-ШУМА

В § 3.2 рассмотрена статистическая структура результирующего процесса при прямом инерционном детектировании стохастического ОУ-шума. Значительный интерес представляет применение подобного анализа к случаю, когда на вход приемника поступает детерминированный сигнал на фоне ОУ-шума, рассматриваемого как помеха. Схемы для обеих таких ситуаций приведены на рис. 3.8. При гетеродинном детек-

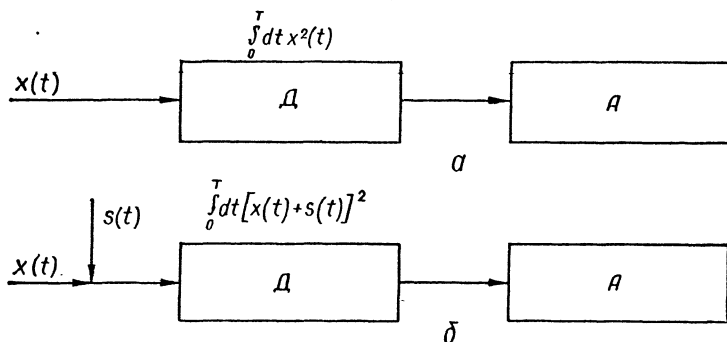


Рис. 3.8. Блок-схема прямого (а) и гетеродинного (б) применения методов определения статистической структуры регистрируемых процессов:

А — анализатор; Д — детектор.

тировании сигнальный процесс $s(t)$ суммируется с шумовым процессом $x(t)$ до поступления на вход инерционного детектора, а на выходе формируется случайная величина

$$\eta(T) = \frac{1}{T} \int_0^T dt [s(t) + x(t)]^2. \quad (3.17)$$

На вид функции $s(t)$ не наложено каких-либо ограничений, кроме вытекающих из существования интеграла (3.17), в частности, она может являться суммой нескольких функций. Заметим, что

$$\eta(T) = \frac{1}{T} \int_0^T dt s^2(t) + \frac{2}{T} \int_0^T dt s(t) x(t) + \frac{1}{T} \int_0^T dt x^2(t). \quad (3.18)$$

Из трех слагаемых в (3.18) первое неслучайно, оно, очевидно, имеет δ -образную плотность распределения. Статистика третьего изучена выше. Дополнительным фактором, изменяющим статистическую обстановку, является второе слагаемое в (3.18). Его роль становится определяющей, когда $x^2(t) \ll s^2(t)$ для всех t в интервале $0 \leq t \leq T$. В этом асимптотическом случае, когда вкладом третьего слагаемого можно пренебречь, случайная величина η линейна относительно $x(t)$ и в силу гауссовости $x(t)$ также обладает гауссовым распределением плотности вероятностей

$$P(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} \exp\left[-\frac{(\eta - \langle\eta\rangle)^2}{2\Delta}\right], \quad (3.19)$$

$$\langle\eta\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt s^2(t),$$

$$\Delta = \frac{2\sigma_x}{T} \int_0^T \int_0^T dt' dt'' s(t') s(t'') \exp(-\nu|t' - t''|). \quad (3.20)$$

Здесь уместно отметить, что под средними в (3.20) подразумеваются безусловные средние, т. е. процедура нахождения математического ожидания проведена как для полуинтервала $0 < t \leq T$, так и для исходного момента $t = 0$.

Нашей задачей является получение информации о статистической структуре величины $\eta(t)$ (3.18) для случая произвольного энергетического соотношения между обоими процессами $s(t)$ и $x(t)$. С этой целью введем производящую функцию

$$Q_{x+s}(\lambda, T) = \langle \exp\{-\lambda\eta(T)\} \rangle = \left\langle \exp\left\{-\frac{\lambda}{T} \int_0^T dt [s(t) + x(t)]^2\right\} \right\rangle. \quad (3.21)$$

В (3.21) скобками $\langle \dots \rangle$ также обозначена процедура безусловного усреднения. Перейдем к нахождению математического ожидания (3.21). Следуя методу Каца — Фейнмана (см. § 2.1), будем искать

4. КОНТИНУАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ

4.1. СТАТИСТИКА ОТСЧЕТОВ ОПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Наши детекторы отмечают отдельные фотоны, а фотоны приходят случайно. Даже в том случае, когда поле определено точно, сигнал счетчика можно предсказать только статистически; поэтому неизбежно имеет место шум, а когерентное состояние поля лишь сводит этот шум к минимуму.

Р. Глаубер

В настоящей главе излагаются проблемы статистики фотонов, которые можно успешно разрешить методами интегрирования по гауссовым мерам. Внимание будет уделено временным аспектам детектирования с помощью счетчика фотонов, при этом в качестве детектора принимается идеальный счетчик фотонов, имеющий нулевые размеры и одинаковую чувствительность ко всем частотам излучения. Такой прибор, рассматриваемый как квантовомеханический детектор, реагирует на произведение $E^{(+)}(t) E^{(-)}(t)$, т. е. на $|E^{(+)}(t)|^2$, где $E^{(+)}(t)$ — оператор компоненты поля излучения с положительной частотой. Процесс детектирования — поглощение фотона; вероятность перехода с поглощением фотона в момент t пропорциональна величине

$$W_{ii} = |\langle i | E^{(+)}(t) | f \rangle|^2, \quad (4.1)$$

где $\langle i |$ — начальное состояние поля перед процессом регистрации; $|f\rangle$ — конечное состояние поля этого процесса. Единственная величина, доступная измерению, — скорость счета или число фотонов в заданном промежутке времени. Для ее расчета мы должны просуммировать вероятность W по всем возможным конечным состояниям поля после поглощения

$$W_i = \sum_f W_{i \rightarrow f} = \langle i | E^{(-)}(t) E^{(+)}(t) | i \rangle, \quad \langle f | f \rangle = 1, \quad (4.2)$$

а также усреднить по всем случайным переменным, входящим в состояние $|i\rangle$. Поскольку принимается, что точное состояние поля не известно, то необходимо прибегнуть к его статистическому описанию. Вводя оператор плотности ρ , можно записать результат усреднения

$$W = \text{Sp} \{ \rho E^{(-)}(t) E^{(+)}(t) \} \quad (4.3)$$

Имея в виду изучение временной динамики, примем, что поле полностью поляризовано (тензорные индексы нигде не будем употреблять), а также сосчитаем из одной моды излучения; можем выбрать способ описания амплитуды поля $E^{(+)}$ в виде

$$E^{(+)}(t) = C a e^{-i\omega t}, \quad E^{(-)}(t) = C^* a^\dagger e^{i\omega t}, \quad (4.4)$$

где C — постоянный множитель; ω — частота, отвечающая моде; a^+ и a — операторы рождения и поглощения фотона

В задачах квантовой оптики оказывается удобным формализм когерентных состояний $|\alpha\rangle$. Разложение поля по модам колебаний эквивалентно разложению по гармоническим осцилляторам; когерентное состояние $|\alpha\rangle$ определяется как собственный вектор оператора a

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (4.5)$$

и соответственно

$$\langle\alpha|a^+ = \alpha^*\langle\alpha|, \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 1, \quad (4.5a)$$

с собственными числами α и α^* . Для «чистого» когерентного состояния статистический оператор ρ записывается как $\rho = |\alpha\rangle\langle\alpha|$. Суперпозиция «чистых» состояний, в которой и находятся реальные физические системы, обуславливает необходимость нахождения вероятности каждого из «чистых» состояний. Введем, согласно [1, 2], $P(\alpha)$ -функцию, с помощью которой будем описывать плотность распределения вероятностей величины α на комплексной плоскости. В представлении когерентных состояний средние величины типа (4.3) можно определить как

$$W(t) = \int d^2\alpha P(\alpha, t) \langle\alpha|a^+ e^{i\omega t} a e^{-i\omega t}|\alpha\rangle = \int d^2\alpha P(\alpha, t) |\alpha|^2. \quad (4.6)$$

Выражение (4.6) дает способ определения условной вероятности того, что скорость счета в момент t будет равна $W(t)$. Таким образом, считая, что $\alpha \equiv \alpha(t)$ — динамический случайный процесс, для нахождения средних, отнесенных к определенному временному промежутку, длительностью T ($0 \leq t \leq T$), необходимо принять, что $P(\alpha, t)$ — это условная вероятность. Поэтому будем ее далее записывать: $P(\alpha, t; \alpha_0, t_0)$ — вероятность того, что комплексная амплитуда поля α примет значение α в момент t при условии, что в момент t_0 ее значение равняется α_0 . Тогда для среднего числа $\langle m \rangle$ счетов за интервал $0 \leq t \leq T$ можно написать

$$\langle m \rangle = \int_0^T dt \int d^2\alpha_0 P(\alpha_0, 0) \int d^2\alpha P(\alpha, t; \alpha_0, 0) |\alpha|^2, \quad (4.7)$$

где $P(\alpha_0, 0)$ — безусловная плотность распределения комплексной амплитуды поля α_0 в исходный момент $t = 0$.

Поскольку $\alpha(t)$ — случайный процесс, число отсчетов, полученное при каком-либо измерении, будет также случайной (целочисленной) величиной

$$m = \text{Entier} \int_0^T dt |\alpha(t)|^2. \quad (4.8)$$

Здесь Entier — знак целой части. Для описания статистической структуры величины m введем производящую функцию [1, 2]

$$Q(\lambda, T) = \langle \exp(-\lambda m) \rangle = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^T dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) является континуальным интегралом, поскольку для его нахождения необходимо использовать вероятностную информацию, отвечающую всему промежутку $0 \leq t \leq T$, т. е. усреднить по континууму траекторий $\alpha(t)$, реализующихся за этот интервал.

Различные механизмы формирования случайных процессов будут приводить к отличающимся выражениям для $Q(\lambda, T)$. В дальнейшем будут рассмотрены оптические поля, являющиеся суперпозицией двух полей различного происхождения. Для одного из них («сигнального») будем полагать, что его комплексная амплитуда строго задана для каждого момента t . Второе поле будем считать шумового происхождения, а его комплексную амплитуду $\alpha(t)$ будем характеризовать с помощью P -функции $P(\alpha)$. В рамках динамического описания этой компоненты поля излучения конкретизируем, что случайный процесс $\alpha(t)$ можно описать в терминах уравнения Ланжевена

$$\frac{d}{dt} \alpha + \nu \alpha = f(t), \quad \alpha(t)|_{t=0} = \alpha_0, \quad (4.10)$$

где ν — параметр, равный, как будет видно ниже, ширине спектрального контура линии излучения; $f(t)$ — комплекснозначный «белый» шум с интенсивностью σ , такой, что

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{Re} f(t) \operatorname{Re} f(t') \rangle &= \langle \operatorname{Im} f(t) \operatorname{Im} f(t') \rangle = \sigma_f \delta(t - t'), \\ \langle \operatorname{Re} f(t) \operatorname{Im} f(t') \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

В отличие от (1.1) такой комплекснозначный стохастический процесс будем для краткости называть КОУ-процессом.

Действие оптического излучения на фоточувствительную поверхность детектора приводит к появлению свободных электронов, которые после процессов усиления и преобразования регистрируются на выходе приемной схемы в виде импульсов-отсчетов. Таким образом оптический приемник преобразует явления на микроуровне в макроявления. Процесс фотоэмиссии носит существенно случайный характер [1—6], поэтому поток отсчетов на выходе детекторного устройства естественно интерпретировать также как случайный процесс во времени.

Вероятность $P_\alpha(m)$ того, что в течение временного интервала T будет зарегистрировано m отсчетов, можно определить из (4.9) путем m -кратного дифференцирования по параметру λ , положив затем $\lambda = 1$ (формула Манделя [4]):

$$P_\alpha(m) = \left\langle \frac{1}{m!} \Omega^m e^{-\Omega} \right\rangle, \quad \Omega \equiv \Omega(T) = \int_0^T dt |\alpha(t)|^2. \quad (4.12)$$

Поле, находящееся в чистом состоянии, обуславливает распределение Пуассона для величины m . Для поля, комплексная амплитуда $\alpha(t)$ которого описывается уравнением движения (4.10), вероятность $P_\alpha(m)$ будет отличаться от пуассоновской. Случайный характер выходного процесса фотодетектора имеет место всегда независимо от того, является ли оптическое поле стохастическим или детерминированным, в каком бы состоянии оно не находилось.

Если использовать формулу Коши дифференцирования аналитических функций, выражение (4.12) можно записать в виде

$$P_{\alpha}(m) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\lambda}{(1-\lambda)^{m+1}} Q(\lambda, T), \quad (4.13)$$

где контур интегрирования в комплексной плоскости λ охватывает точку $\lambda = 1$. Таким образом, задача нахождения вероятности $P_{\alpha}(m)$, т. е. задача о распределении фотоотсчетов, разбивается на два этапа: а) нахождение производящей функции $Q(\lambda, T)$; б) вычисление интеграла Коши.

Стохастический КОУ-процесс (4.10) является гауссовским комплекснозначным марковским процессом, что и обуславливает возможность вычисления Q -функции (4.9). Переходная плотность распределения вероятностей $P(\alpha, t; \alpha_0, 0)$ этого процесса удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\alpha, t; \alpha_0, 0) = \hat{L}(\alpha, \alpha^*) P(\alpha, t; \alpha_0, 0), \quad (4.14)$$

где

$$\hat{L}(\alpha, \alpha^*) = v \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right) + 2v\sigma_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*}; \quad (4.15)$$

$$\sigma_{\alpha} = \langle |\alpha(t)|^2 \rangle = \frac{\sigma_f}{v}. \quad (4.16)$$

Поскольку, согласно (4.10) и (4.11), $\langle \text{Re } f(t) \text{ Im } f(t') \rangle = 0$, то уравнение (4.14) можно получить из (1.10), применив его к $\text{Re } \alpha$ и $\text{Im } \alpha$ по отдельности, после чего перейти к переменным α и α^* . Решение этого уравнения имеет вид

$$P(\alpha, t; \alpha_0, 0) = \frac{1}{\pi \sigma_{\alpha} (1 - e^{-2vt})} \exp \left[-\frac{|\alpha - \alpha_0 e^{-vt}|^2}{\sigma_{\alpha} (1 - e^{-2vt})} \right]. \quad (4.17)$$

Из (4.17) следует, что корреляционная функция $K_{\alpha}(\tau)$ КОУ-процесса равна ($\tau > 0$)

$$K_{\alpha}(\tau) = \int d^2 \alpha_0 P(\alpha_0, 0) \int d^2 \alpha P(\alpha, \tau; \alpha_0, 0) \alpha_0 \alpha^* = \sigma_{\alpha} e^{-v\tau}, \quad (4.18)$$

при этом в стационарном случае равновесную вероятность $P(\alpha_0, 0)$ необходимо выбрать в виде

$$P(\alpha_0, 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\alpha_0, t; \alpha_0, 0) = \frac{1}{\pi \sigma_{\alpha}} \exp \left(-\frac{|\alpha_0|^2}{\sigma_{\alpha}} \right). \quad (4.19)$$

Спектральный контур линии КОУ-процесса, каковым является поле излучения, сосредоточен около частоты ω_{α} . Вид этого контура определяется с помощью теоремы Винера — Хинчина [7]

$$\rho_{\alpha}(\omega) = \int d\tau K_{\alpha}(\tau) e^{i(\omega - \omega_{\alpha})\tau} = \frac{v\sigma_{\alpha}/\tau}{v^2 + (\omega - \omega_{\alpha})^2}, \quad (4.20)$$

т. е. он имеет лоренцов вид с шириной линии, равной v . Соответственно время корреляции КОУ-процесса τ_c равно v^{-1} .

В этой главе будут рассмотрены континуальные средние по мере, отвечающей комплекснозначному стохастическому процессу $\alpha(t)$ с уравнением движения (4.10), т. е. оптическому КОУ-процессу с P -функцией (4.17), со спектральным контуром линии (4.20).

4.2. СТАТИСТИКА ФОТООТСЧЕТОВ ПРИ ПРЯМОМ ДЕТЕКТИРОВАНИИ

Рассмотрим задачу о статистике фотоотсчетов при прямом детектировании оптического излучения — моды с контуром линии (4.20) и P -функцией (4.17). Эта задача является ключевой, поскольку на примере ее решения находятся особенности решений многих других квантовооптических задач.

Из (4.17) видно, что P -функция КОУ-процесса факторизована на множители, отвечающие $\text{Re } \alpha$ и $\text{Im } \alpha$; факторизована будет и производящая функция фотоотсчетов (4.9). эту величину ниже будем обозначать $Q_\alpha(\lambda, T)$. Для Q -функции каждой из компонент $\text{Re } \alpha$ и $\text{Im } \alpha$ явное выражение было получено выше. Используя, например, (2.54), найдем [2, 8]

$$Q_\alpha(\lambda, T) = \frac{4rv e^{vT}}{(r+v)^2 e^{rT} - (r-v)^2 e^{-rT}}, \quad (4.21)$$

$$r = (v^2 + 2\lambda\sigma_\alpha v)^{1/2}. \quad (4.22)$$

Для получения вероятности $P(m)$ необходимо вычислить интеграл Коши (4.13). Аналитически взять интеграл не удастся, что связано с

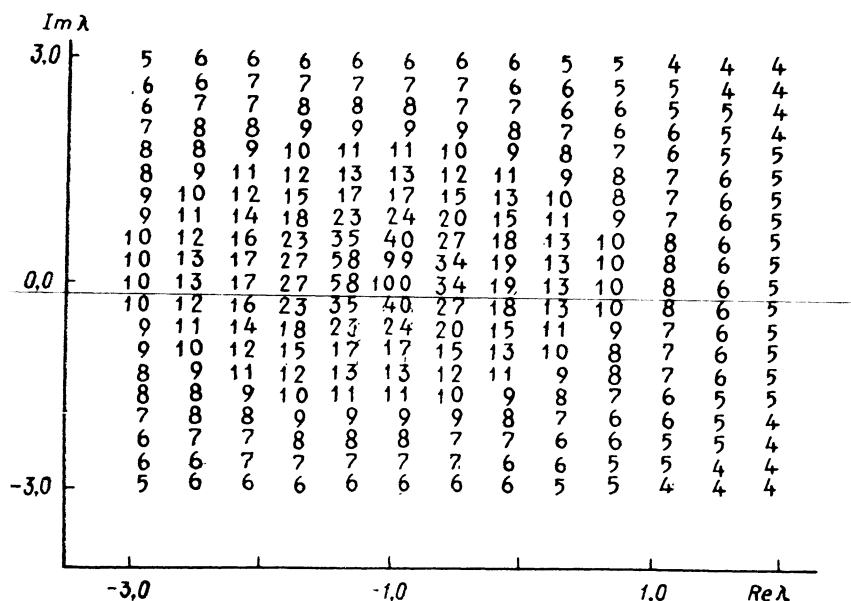


Рис. 4.1. Карта модулей $|Q_\alpha(\lambda, T)|$ на комплексной плоскости λ :
 $\sigma_\alpha = 1,0$; $T = 1,0$; $v = 0,1$; $\max |Q_\alpha(\lambda, T)| = 5,42$.

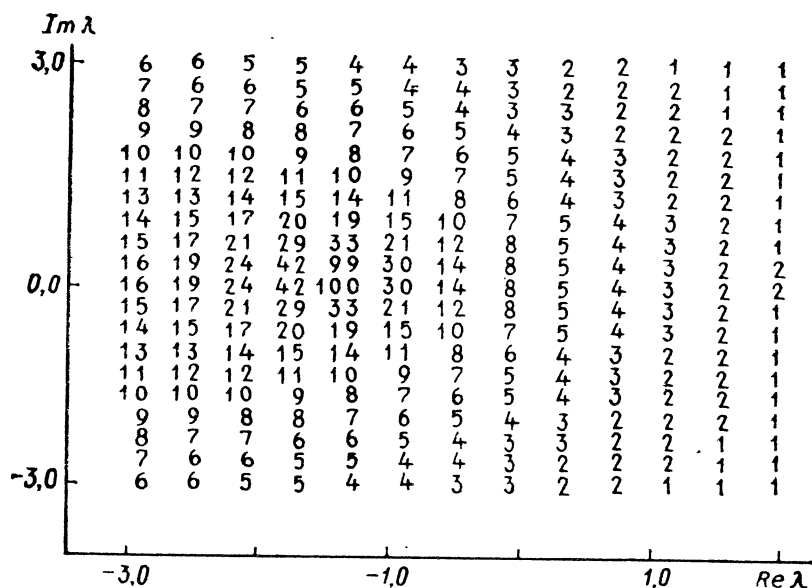


Рис. 4.2. Карта модулей $|Q_\alpha(\lambda, T)|$ на комплексной плоскости λ :
 $\sigma_\alpha = 1,0$; $T = 1,0$; $\nu = 1,0$; $\max |Q_\alpha(\lambda, T)| = 12,3$.

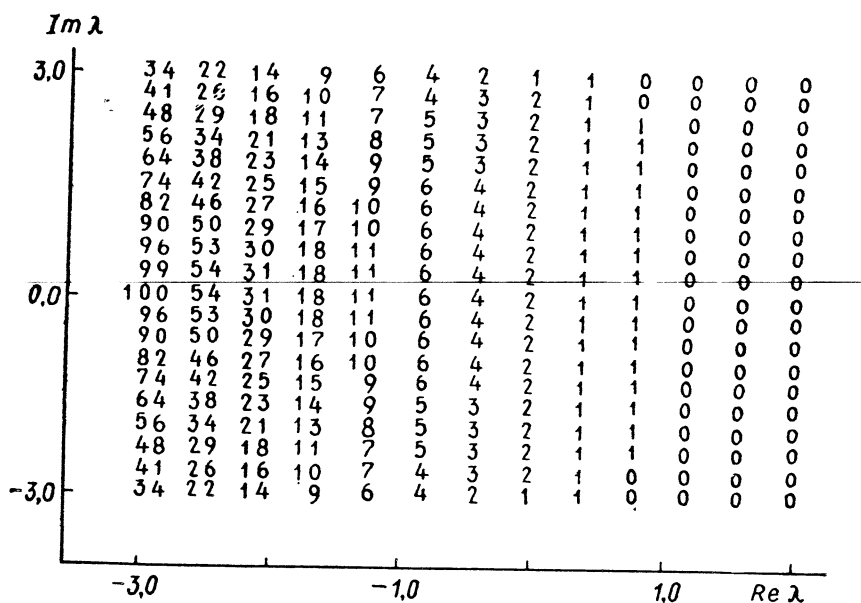


Рис. 4.3. Карта модулей $|Q_\alpha(\lambda, T)|$ на комплексной плоскости λ :
 $\sigma_\alpha = 1,0$; $T = 1,0$; $\nu = 10,0$; $\max |Q_\alpha(\lambda, T)| = 37,3$

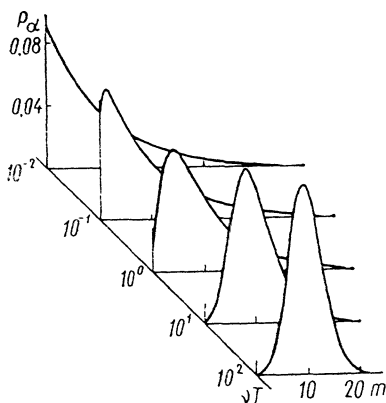


Рис. 4.4. Эволюция статистики отсчетов некогерентного излучения: $\sigma_\alpha = 1,0$; $T = 10,0$

с трансцендентным характером выражения (4.21) относительно переменной λ . Асимптотический анализ производящей функции $Q_\alpha(\lambda, T)$ был проведен в [2], где получены выражения для вероятности $P(m)$, отвечающие случаю $\nu T \ll 1$ и $\nu T \gg 1$. Для произвольного соотношения между ν и T возможным способом нахождения вероятности $P(m)$ остается численное вычисление интеграла Коши на ЭВМ (см. приложение 1). При этом для избежания переполнений и других трудностей полезна информация о карте распределения модулей Q_α -функции $|O_\alpha(\lambda, T)|$ на плоскости комплексной переменной λ . На рис. 4.1 — 4.3 приведены эти карты

для трех значений ширины линии ν , печать выполнена в формате I3, максимальное значение отнормировано на 100. Видно, что с ростом ν область, примыкающая к первому полюсу, смещается влево по оси $\text{Re } \lambda$, поэтому можно ожидать, что требуемое время счета на ЭВМ будет расти с уменьшением ν при неизменной заданной точности интегрирования в (4.13).

На рис. 4.4 приведена расчетная зависимость для $P_\alpha(m)$, отвечающая случаю детектирования оптического КОУ-процесса с постоянной средней интенсивностью $\sigma_\alpha = 1,0$. Семейство графиков $P_\alpha(m)$ является функцией целочисленного аргумента m (для наглядности на рисунке она изображена сплошной кривой) и построено для широкого диапазона значений параметра $\% = \nu T$ при $T = 10,0$. Этот параметр

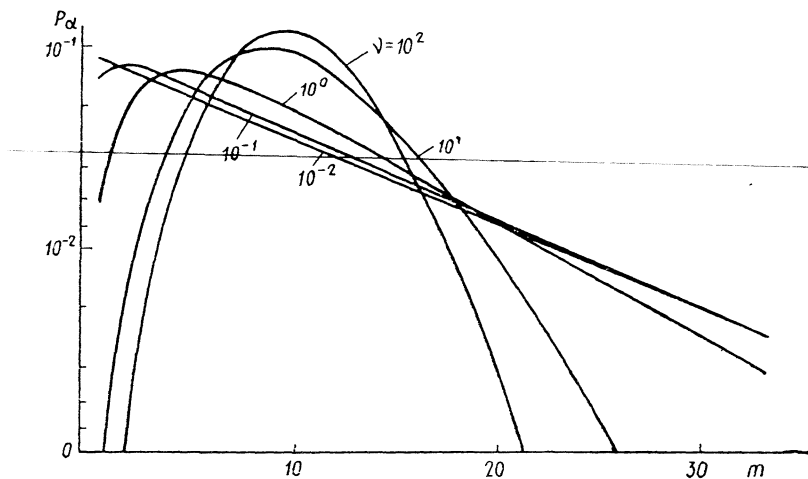


Рис. 4.5. Эволюция статистики отсчетов P_α :

σ_α и T см рис. 4.4.

является отношением длительности процесса регистрации ко времени корреляции случайного КОУ-процесса $\tau_c = \nu^{-1}$. Если $\chi \ll 1$, то вероятность $P_\alpha(m)$ стремится к распределению экспоненциального вида. С ростом χ (при заданном T) вероятность $P_\alpha(m)$ эволюционирует, переходя при $\chi \gg 1$ в асимптотически нормальное распределение. С изменением значения величин σ_α , ν и T вид кривых $P_\alpha(m)$ будет также меняться, однако тенденция эволюции $P_\alpha(m)$ определяется параметром $\chi = \nu T$.

Ход зависимости вероятности P_α для $m > \sigma_\alpha T$ иллюстрирует рис. 4, 5, на котором функция отложена в логарифмическом масштабе. Периферия ($m \gg \sigma_\alpha T$) вероятности P_α может быть хорошо описана в терминах экспоненциальной функции.

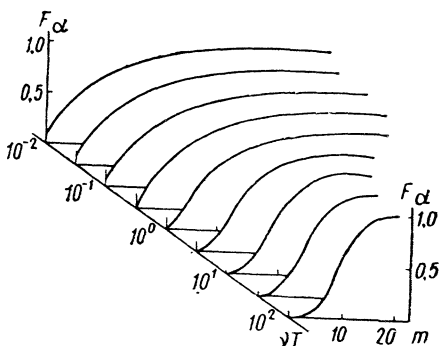


Рис. 4.6. Интегральная вероятность

$$F_\alpha(m) = \sum_{n=0}^m P_\alpha(n):$$

σ_α и T см. рис. 4.4.

Эволюция интегральной вероятности $F_\alpha(m) = \sum_{n=0}^m P_\alpha(n)$ при $\sigma_\alpha = 10$ и $T = 1$ приведена на рис. 4.6. Видно, что по мере уменьшения параметра зависимости P_α и F_α уширяются.

Упражнения

4.2.1. (М20). Исследовать асимптотику при $m \gg \langle m \rangle$, где $\langle m \rangle = \sigma_\alpha T$, вероятности $P_\alpha(m)$.

4.2.2. (М25). Выяснить условия, при выполнении которых Q_i -функцию (4.21) можно аппроксимировать выражением [1]

$$Q_\alpha(\lambda) \simeq \exp[-(r - \nu)T].$$

Показать, что в этом случае значения вероятности $P_\alpha(m)$ в области ее максимума приближенно равны

$$P_\alpha(m) \simeq \frac{\sigma_\alpha T}{\left(2\pi \frac{\sigma_\alpha}{\nu} m^3\right)^{1/2}} \exp\left[-\frac{\nu}{2\sigma_\alpha} \left(\frac{\sigma_\alpha T}{V\bar{m}} - V\bar{m}\right)^2\right].$$

4.2.3. (М30). Продолжение. Показать, используя выражение (4.21) для Q_α -функции, что в области максимума $m \simeq \sigma_\alpha T$ вероятность $P_\alpha(m)$ приближенно равна [2]

$$P_\alpha(m) = \frac{\sigma_\alpha T}{\left(2\pi \frac{\sigma_\alpha}{\nu} m^3\right)^{1/2}} \frac{2}{1 + \frac{\sigma_\alpha T}{2m} + \frac{m}{2\sigma_\alpha T}} \exp\left[-\frac{\nu}{2\sigma_\alpha} \left(\frac{\sigma_\alpha T}{V\bar{m}} - V\bar{m}\right)^2\right].$$

4.2.4. (М20). Вычислить производящую функцию

$$q(\lambda) = \left\langle \exp\left\{-\lambda \int_0^T dt [\alpha(t) + \alpha^*(t)]^2\right\} \right\rangle.$$

4.2.5. (М30). Фоккер-планковский оператор (4.15) $\hat{L}(\alpha, \alpha^*)$ выписан в приближении «вращающейся поляризации», когда фазовый множитель $\exp(i\omega_\alpha t)$ включен в комплексную амплитуду $\alpha(t)$. Показать, что без этого включения уравнение (4.14) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P = (v + i\omega_\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha P) + (v - i\omega_\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} (\alpha^* P) + 2v\sigma_\alpha \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha \partial \alpha^*},$$

тогда

$$P(\alpha, t; \alpha_0, 0) = \frac{1}{\pi\sigma_\alpha(1 - e^{-2vt})} \exp \left[-\frac{|\alpha - \alpha_0 e^{-(v+i\omega_\alpha)t}|^2}{\sigma_\alpha(1 - e^{-2vt})} \right].$$

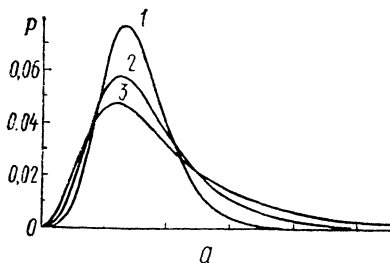
4.2.6. (М35). Продолжение. Показать, что при наличии указанного включения результат (4.21), (4.22) остается в силе.

4.2.7. (М40). Условие (4.11) по существу расщепляет корреляции между $\text{Re } \alpha$ и $\text{Im } \alpha$ КОУ-процесса в силу линейности уравнения движения (4.10). Получить выражение для производящей Q_α -функции, аналогичное (4.21), но в случае, когда

$$\langle \text{Re } f(t) \text{Im } f(t') \rangle = \sigma_f' \delta(t - t'), \quad \sigma_f' \neq 0.$$

4.2.8. (М25). Показать, что

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{D}{\pi} \right)^N \int d^2 \alpha_1 \dots \int d^2 \alpha_{N-1} \exp \left\{ -C \sum_{n=1}^{N-1} |\alpha_n|^2 - D \sum_{n=1}^N |\alpha_n - \alpha_{n-1}|^2 \right\} = \\ = \frac{V \overline{CD}}{\pi \text{sh } \varphi} \exp \left\{ -V \overline{CD} \text{cth } \varphi (|\alpha_0|^2 + |\alpha_N|^2) - \right. \\ \left. - \frac{V \overline{CD}}{\text{sh } \varphi} (\alpha_0 \alpha_N^* + \alpha_0^* \alpha_N) \right\}, \end{aligned}$$



где $\varphi = \lim_{N \rightarrow \infty} N \sqrt{C/D}$, в предположении, что все пределы существуют.

4.2.9. (М20). Показать, что при $T \ll v^{-1}$

$$Q_\alpha(\lambda) = (1 + \lambda \sigma_\alpha T)^{-1}$$

и статистика отсчетов описывается распределением Бозе — Эйнштейна

$$P_\alpha(m) = \frac{(\sigma_\alpha T)^m}{(1 + \sigma_\alpha T)^{m+1}}.$$

4.2.10. (М40). Изучить статистику отсчетов фотодетектором с переменной во времени чувствительностью $\varepsilon(t)$ фотокатода, приняв, что число отсчетов m определяется выражением

$$m = \int_0^T dt \varepsilon(t) |\alpha(t)|^2.$$

4.2.11. (М35). Продолжение. С помощью выражений, аналогичных (3.91) и (3.92), определить количественные характеристики вероятности P_α для функции $\varepsilon(t)$ выбранного определенного вида (рис. 4.7).

Рис. 4.7. Вероятность P_α фотоотсчетов при $v = 1,0$; $\sigma_\alpha = 1,0$; $T = 15,0$:

a — семейство кривых для $\varepsilon(t) = \mu T \frac{\exp(\mu t)}{\exp(\mu T) - 1}$ ($1 - \mu = 0,0$; $2 - \mu = 0,5$; $3 - \mu = 1,0$); b — семейство кривых для $\varepsilon(t) = (1 + \mu)(t/T)^\mu$ ($1 - \mu = 0,0$; $2 - \mu = 3,0$; $3 - \mu = 10,0$).

4.3. СТАТИСТИКА ФОТООТСЧЕТОВ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ, ОБРАЗОВАННОГО СУПЕРПОЗИЦИЕЙ КОГЕРЕНТНОГО СИГНАЛА И КОУ-ШУМА

Рассмотрим статистическую структуру фотоотсчетов при регистрации оптического поля излучения, образованного аддитивной смесью когерентного сигнала $\beta(t)$ и шума, каковым является в этом контексте КОУ-процесс. Для стохастической компоненты $\alpha(t)$ будем в дальнейшем полагать, что ее статистические характеристики заданы выражениями (4.10) и (4.17). Вероятность $P_{\alpha+\beta}(m)$ зарегистрировать m фотоотсчетов за временной интервал T также описывается формулой (4.12), но теперь

$$\Omega(T) = \int_0^T dt |\alpha(t) e^{-i\omega_\alpha t} + \beta(t) e^{-i\omega_\beta t}|^2, \quad (4.23)$$

где ω_α и ω_β — несущие частоты обеих компонент излучения соответственно. В качестве функции $\beta(t)$ здесь может быть выбрана произвольная детерминированная функция; переобозначим эту функцию по правилу $\beta(t) \rightarrow \beta(t) \exp(i\omega_\beta t - i\omega_\alpha t)$, что эквивалентно отсчету частоты излучения от ω_α , тогда для нахождения вероятности $P_{\alpha+\beta}(m)$ естественно использовать производящую функцию фотоотсчетов

$$Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^T dt |\alpha(t) + \beta(t)|^2 \right\} \right\rangle. \quad (4.24)$$

Эта Q -функция может быть факторизована, как и выше, на парциальные Q -функции, отвечающие вкладу реальных и мнимых частей комплексных амплитуд. Ниже мы, однако, изложим применение метода Каца — Фейнмана, распространенного на случай КОУ-процессов. Именно будем искать значения математического ожидания (4.24) в виде

$$Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T) = \int d^2\alpha_0 P(\alpha_0, 0) \int d^2\alpha \Psi(\alpha, t; \alpha_0, 0) |_{t=T}. \quad (4.25)$$

Введенная вспомогательная функция так же, как в случае простого ОУ-процесса, является решением соответствующего (4.21) параболического дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{L}(\alpha, \alpha^*) \Psi - \lambda |\alpha + \beta(t)|^2 \Psi. \quad (4.26)$$

Дифференциальный оператор $\hat{L}(\alpha, \alpha^*)$ является «координатной» частью уравнения Фоккера — Планка (4.15) для P -функции. Начальное условие уравнения (4.26) $\Psi(\alpha, 0; \alpha_0, 0) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0)$.

Уравнение (4.26) содержит в правой части слагаемое, явно зависящее от текущего времени t . Путь нахождения его решения, излагаемый ниже, состоит в приведении уравнения (4.26) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\Psi} = \hat{L}(\alpha, \alpha^*) \bar{\Psi}$$

для некоторой функции $\bar{\Psi}$; решение последнего уравнения нам хорошо известно и совпадает по форме с P -функцией (4.17).

Будем искать решение (4.26) в виде

$$\Psi(\alpha, t; \alpha_0, 0) = \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\beta(\tau)|^2 + \frac{r-v}{2v\sigma_\alpha} (|\alpha|^2 - |\alpha_0|^2) + \right. \\ \left. + (r+v)t + \alpha a^*(t) + \alpha^* a(t) \right\} \Phi(\alpha, t; \alpha_0, 0), \quad (4.27)$$

где, напомним, $r = (v^2 + 2\lambda\sigma_\alpha v)^{1/2}$ и введена некоторая произвольная пока функция $a(t)$. Функция $\Phi(\alpha, t; \alpha_0, 0)$, входящая в правую часть выражения (4.27), удовлетворяет в силу (4.26) уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 2v\sigma_\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \alpha^*} + \\ + \left[r\alpha + v\sigma_\alpha a(t) + \frac{v\sigma_\alpha}{2} a^2(t) + r\alpha^* + v\sigma_\alpha a^*(t) + \frac{v\sigma_\alpha}{2} a^{*2}(t) \right] \Phi + \\ + [ra(t) - 2\lambda\beta(t) - \dot{a}(t)] \Phi + [ra^*(t) - 2\lambda\beta^*(t) - \dot{a}^*(t)] \Phi. \quad (4.28)$$

Выберем теперь функцию $a(t)$ таким образом, чтобы $ra(t) - 2\lambda\beta(t) - \dot{a}(t) = 0$, $a(0) = 0$, т. е.

$$a(t) = -2\lambda \int_0^t d\tau \beta(\tau) e^{-r(\tau-t)}, \quad (4.29)$$

и представим Ψ -функцию в виде

$$\Psi(\alpha, t; \alpha_0, 0) = \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\beta(\tau)|^2 + \frac{r-v}{2v\sigma_\alpha} (|\alpha|^2 - |\alpha_0|^2) + \right. \\ \left. + \alpha a^*(t) + \alpha^* a(t) + \frac{v\sigma_\alpha}{2} \int_0^t d\tau |a(\tau)|^2 \right\} F(\alpha e^{rt}, t; \alpha_0, 0), \quad (4.30)$$

тогда для $F(z, t; z_0, 0)$, где $z = \alpha \exp(rt)$, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} F(z, t; z_0, 0) = \sigma_\alpha a(t) \frac{\partial F}{\partial z} + \sigma_\alpha a^*(t) \frac{\partial F}{\partial z^*} + 2v\sigma_\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial z^*} \quad (4.31)$$

с коэффициентами в правой части, не зависящими от «координат» z и z^* (процесс типа Башелье [7]). Эта особенность уравнения (4.31) позволяет сразу выписать его решение

$$F(z, t; z_0, 0) = \frac{re^{-2rt}}{\pi v\sigma_\alpha (1 - e^{-2rt})} \exp \left\{ -\frac{\left| z - z_0 + v\sigma_\alpha \int_0^t d\tau a(\tau) e^{r\tau} \right|^2}{(v\sigma_\alpha/r)(e^{2rt} - 1)} \right\} \quad (4.32)$$

Возвращаясь (4.26), получаем

$$\Psi(\alpha, t; \alpha_0, 0) = \frac{re^{-(r-v)t}}{\pi v\sigma_\alpha (1 - e^{-2rt})} \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\beta(\tau)|^2 + \right.$$

$$+ \frac{r-v}{2v\sigma_\alpha} (|\alpha|^2 - |\alpha_0|^2) + \alpha a^*(t) + \alpha^* a(t) + \frac{v\sigma_\alpha}{2} \int_0^t d\tau |a(\tau)|^2 - \\ - \frac{1}{v\sigma_\alpha} (1 - e^{-2rt})^{-1} \left| \alpha - \alpha_0 e^{-rt} + v\sigma_\alpha \int_0^t d\tau a(\tau) e^{r(\tau-t)} \right|^2, \quad (4.33)$$

где функция $a(t)$ определена формулой (4.29).

Интегрируя полученное решение (4.34) по α и α_0 согласно (4.25), приходим при $t = T$ к следующему результату для $Q_{\alpha+\beta}$ -функции:

$$Q_{\alpha+\beta}(\lambda) = Q_\alpha(\lambda) Q_\beta(\lambda) Q_{\alpha\beta}(\lambda), \quad (4.34)$$

где $Q_\alpha(\lambda)$ — производящая функция (4.21) шумовой части излучения КОУ-процесса; $Q_\beta(\lambda)$ — производящая функция когерентной компоненты излучения,

$$Q_\beta(\lambda) = \exp \left\{ -\lambda \int_0^T dt |\beta(t)|^2 \right\}; \quad (4.35)$$

$Q_{\alpha\beta}(\lambda)$ — производящая функция, отвечающая интерференции обеих α и β компонент ($r_+ = r + v$; $r_- = r - v$),

$$Q_{\alpha\beta}(\lambda) = \exp \left\{ \frac{\lambda^2 \sigma_\alpha v/r}{r_+^2 e^{r_+ T} - r_-^2 e^{-r_- T}} \int_0^T dt \int_t^T d\tau (r_+ e^{rt} + r_- e^{-rt}) \times \right. \\ \left. \times (r_+ e^{r(T-\tau)} + r_- e^{-r(T-\tau)}) (\beta(t) \beta^*(\tau) + \beta^*(t) \beta(\tau)) \right\}. \quad (4.36)$$

Таким образом, полученное выражение для $Q_{\alpha+\beta}$, как оказалось, факторизовано на множители Q_α , Q_β и $Q_{\alpha\beta}$, отвечающие вкладам в статистику отсчетов от когерентного и шумового слагаемых, а также их интерференции.

Произведению парциальных производящих функций Q_α , Q_β и $Q_{\alpha\beta}$ отвечает свертка соответствующих им парциальных вероятностей отсчетов $P_\alpha(m)$, $P_\beta(m)$, $P_{\alpha\beta}(m)$. Для полной вероятности $P_{\alpha+\beta}(m)$ отсчетов при детектировании в течение временного интервала $(0, T)$ суперпозиции когерентного $\beta(t)$ и шумового излучений $\alpha(t)$ получим

$$P_{\alpha+\beta}(m) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k P_\beta(m-k) P_\alpha(k-l) P_{\alpha\beta}(l), \quad (4.37)$$

при этом каждая из парциальных вероятностей P_α , P_β и $P_{\alpha\beta}$ определяется с помощью интеграла Коши (4.13) с подстановкой в него Q_α , Q_β и $Q_{\alpha\beta}$ соответственно. Функция $P_\beta(m)$ представляет собой, очевидно, распределение Пуассона

$$P_\beta(m) = \frac{1}{m!} \left[\int_0^T dt |\beta(t)|^2 \right]^m \exp \left[- \int_0^T dt |\beta(t)|^2 \right]. \quad (4.38)$$

При детектировании аддитивной смеси когерентного излучения и частично когерентного излучения, каковым является КОУ-процесс, вид распределения вероятностей $P_{\alpha+\beta}(m)$ зависит от вклада интенсив-

ностей, величины $\chi = \nu T$ и конкретного вида функции $\beta(t)$. Ниже будут рассмотрены два типа этой функции: $\beta(t) = b \exp(i\varphi_0)$, что отвечает случаю $\omega_\beta = \omega_\alpha$, и $\beta(t) = b \exp(i\varphi_0 + it\Delta\omega)$, где амплитуда b , начальная фаза φ_0 и сдвиг частоты $\Delta\omega = \omega_\beta - \omega_\alpha$ — постоянные величины. Для первого случая, когда несущая частота ω_α локализована в максимуме лоренцова контура линии КОУ-процесса, после интегрирования в (4.36) имеем

$$Q_\beta(\lambda) = \exp(-\lambda \sigma_\beta T), \quad (4.39)$$

$$\ln Q_{\alpha\beta}(\lambda) = \frac{2\lambda^2 \sigma_\alpha \sigma_\beta \nu^3 r^3}{r_+^2 e^{rT} - r_-^2 e^{-rT}} \times \\ \times [rT(r_+^2 e^{rT} - r_-^2 e^{-rT}) - 2\nu(r_+ e^{rT} - r_- e^{-rT}) + 4\nu^2], \quad (4.39a)$$

где $\sigma_\beta = |b|^2$, а выражение для $Q_\alpha(\lambda)$ совпадает с (4.21).

После нахождения явного выражения для полной производящей функции $Q_{\alpha+\beta} = Q_\alpha Q_\beta Q_{\alpha\beta}$ необходимо выполнить взятие интеграла Коши согласно (4.13). Поскольку аналитически взять интеграл невозможно, необходимо прибегнуть к численным методам, при этом становится полезной информация о поведении производящей функции $Q_{\alpha+\beta}(\lambda)$ на комплексной плоскости λ . На рис. 4.8—4.10 приведены профили величины $|Q_{\alpha+\beta}(\lambda)|$ как функции λ для трех значений интенсивности КОУ-процесса σ_α . Видно, что особенности функции $Q_{\alpha+\beta}$ сосредоточены на отрицательной части вещественной оси, поэтому контур интеграла Коши должен начинаться и заканчиваться у полуоси $\operatorname{Re} \lambda < 1$, охватывая при этом полюс $\lambda = 1$, а в численном алгоритме узлы

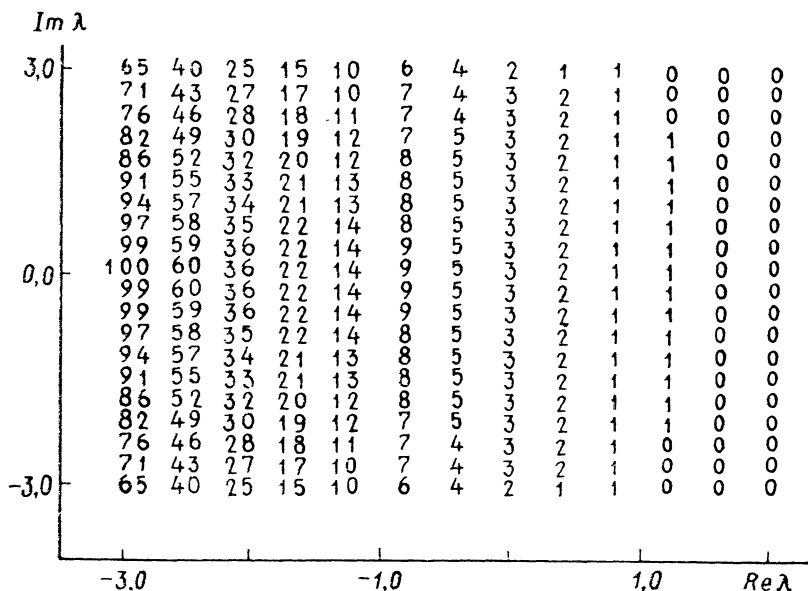


Рис. 4.8. Карта модулей $|Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T)|$ на комплексной плоскости λ :

$\sigma_\alpha = 0,05$; $\sigma_\beta = 0,95$; $\nu = 1,0$; $T = 1,0$; $\max |Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T)| = 28,1$.

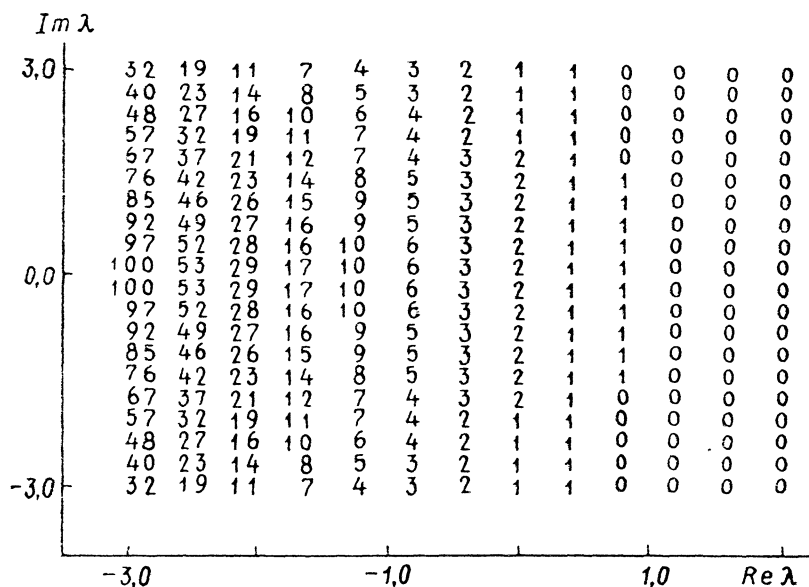


Рис. 4.9. Карта модулей $|Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T)|$ на комплексной плоскости λ :
 $\sigma_\alpha = 0,10$; $\sigma_\beta = 0,90$; $\nu = 1,0$; $T = 1,0$; $\max |Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T)| = 42,2$.

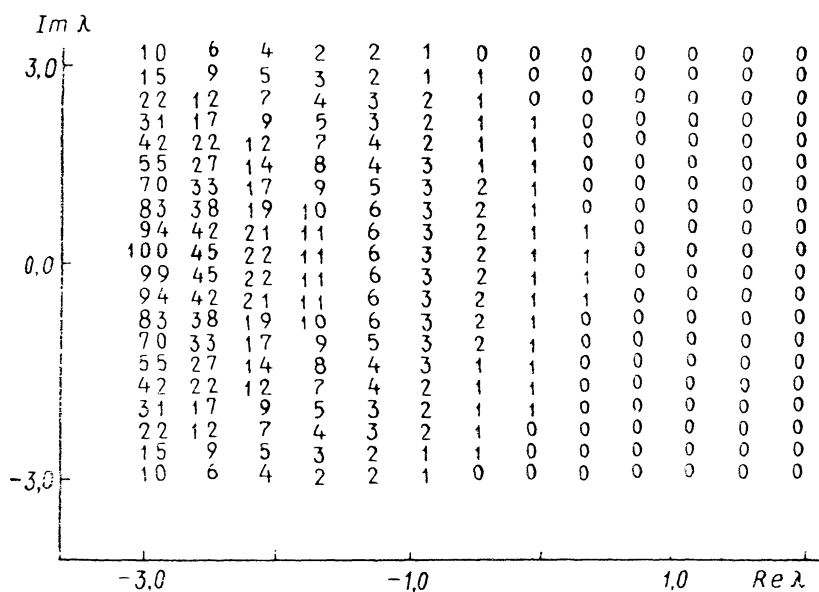


Рис. 4.10. Карта модулей $|Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T)|$ на комплексной плоскости λ :
 $\sigma_\alpha = 0,15$; $\sigma_\beta = 0,85$; $\nu = 1,0$; $T = 1,0$; $\max |Q_{\alpha+\beta}(\lambda, T)| = 70,0$.

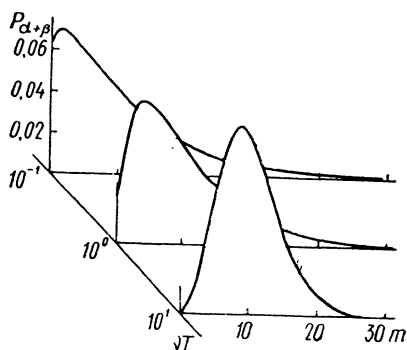


Рис. 4.11. Эволюция статистики отсчетов $P_{\alpha+\beta}$ аддитивной смеси излучений:

$$\sigma_\alpha = 0,5; \sigma_\beta = 0,5; T = 10,0; \Delta\omega = 0,0.$$

интерполяции подынтегрального выражения должны быть внутри интервала интегрирования.

Для первых факториальных моментов можно из (4.21), (4.35) и (4.39) найти

$$\langle m \rangle = \sigma_\alpha T + \sigma_\beta T \equiv \langle m_\alpha \rangle + \langle m_\beta \rangle, \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \langle m(m-1) \rangle = & \langle m \rangle^2 + \langle m \rangle + \frac{\sigma_\alpha^2}{2\nu^2} (-1 + 2\nu T + e^{-2\nu T}) + \\ & + \frac{4\sigma_\alpha\sigma_\beta}{\nu^2} (-1 + \nu T + e^{-\nu T}), \end{aligned} \quad (4.41)$$

поэтому дисперсия $\Delta_{\alpha+\beta} = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2$ распределения вероятностей $P_{\alpha+\beta}(m)$ равна

$$\Delta_{\alpha+\beta} = \langle m \rangle + \langle m_\alpha \rangle^2 \frac{2\chi - 1 + e^{-2\chi}}{2\chi^2} + 4 \langle m_\alpha \rangle \langle m_\beta \rangle \frac{\chi - 1 + e^{-\chi}}{\chi^2}. \quad (4.42)$$

Таким образом, присутствие когерентной компоненты излучения $\beta(t)$ приводит к вкладу в дисперсию. Если $\chi = \nu T$ мало, то

$$\Delta_{\alpha+\beta} \simeq \langle m \rangle + \langle m_\alpha \rangle (\langle m_\alpha \rangle + 2 \langle m_\beta \rangle), \quad (4.43)$$

в противоположном случае, когда $\chi \gg 1$,

$$\Delta_{\alpha+\beta} \simeq \langle m \rangle + \langle m_\alpha \rangle (\langle m_\alpha \rangle + 4 \langle m_\beta \rangle) / \chi. \quad (4.43a)$$

Наличие в (4.43) и (4.43a) слагаемых, пропорциональных $\langle m_\alpha \rangle$, обуславливает заметное отличие вероятности $P_{\alpha+\beta}(m)$ от вероятности $P_\beta(m)$, имеющей тот же по величине первый момент; если же $\sigma_\alpha \gg \sigma_\beta$, то зависимость $P_{\alpha+\beta}(m)$ в основном повторяет ход зависимости $P_\alpha(m)$ с интенсивностью, равной сумме парциальных.

Для нахождения значений функций $P_\alpha(m)$ и $P_{\alpha\beta}(m)$, представляющихся теперь в виде однократного интеграла Коши, необходимо привлечение ЭВМ. На рис. 4.11 приведена расчетная зависимость $P_{\alpha+\beta}(m)$ для рассматриваемого случая. Семейство графиков отложено в логариф-

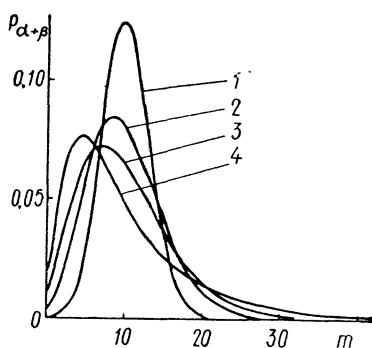


Рис. 4.12. Зависимость статистики отсчетов $P_{\alpha+\beta}$ аддитивной смеси излучений от парциального вклада компонент ($\nu = 0,1; T = 10,0; \Delta\omega = 0,0$): 1 $\rightarrow \sigma_\alpha = 0,0, \sigma_\beta = 1,0$; 2 $\rightarrow \sigma_\alpha = 0,1, \sigma_\beta = 0,9$; 3 $\rightarrow \sigma_\alpha = 0,2, \sigma_\beta = 0,8$; 4 $\rightarrow \sigma_\alpha = 1,0, \sigma_\beta = 0,0$.

мическом диапазоне параметра χ , а парциальные интенсивности выбраны одинаковыми. Влияние парциальной шумовой компоненты $\alpha(t)$ иллюстрирует рис. 4.12. Здесь семейство графиков отложено для $\nu = 0,1$ и различных вкладов парциальных интенсивностей σ_α и σ_β , полная интенсивность $\sigma = \sigma_\alpha + \sigma_\beta$ при этом поддерживалась неизменной. На рис. 4.13 приведено семейство аналогичных зависимостей, но для $\nu = 0,01$.

Рассмотрим статистику отсчетов для случая, когда частота когерентного излучения ω_β смещена относительно максимума спектрального контура линии КОУ-процесса, т. е. $\beta(t) = b \exp(i\varphi_0 + it\Delta\omega)$.

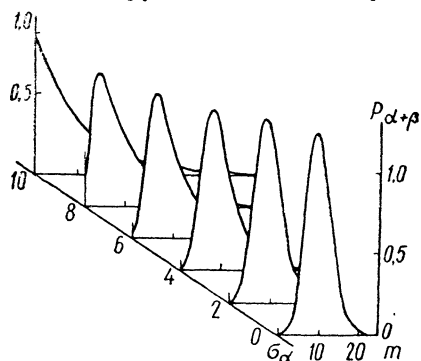


Рис. 4.13. Зависимость статистики отсчетов $P_{\alpha+\beta}$ аддитивной смеси излучений от парциального вклада компонент ($T = 10,0$; $\sigma_\alpha + \sigma_\beta = 10,0$; $\nu = 0,01$).

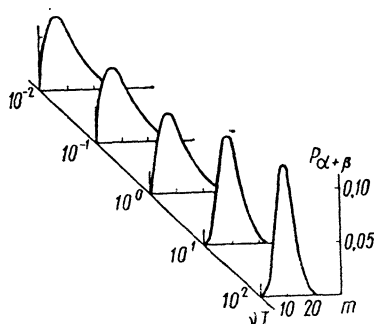


Рис. 4.14. Эволюция статистики отсчетов $P_{\alpha+\beta}$ аддитивной смеси излучений:

$\sigma_\alpha = 0,2$; $\sigma_\beta = 0,8$; $T = 10,0$; $\Delta\omega = 0,1$

Парциальные производящие функции $Q_\alpha(\lambda)$ и $Q_\beta(\lambda)$ будут по-прежнему описываться выражениями (4.21) и (4.35), а для $Q_{\alpha\beta}(\lambda)$ в этом случае из (4.36) получим

$$\begin{aligned} \ln Q_{\alpha\beta}(\lambda) = & \frac{2\lambda^2\sigma_\alpha\sigma_\beta}{r_+^2 - r_-^2 e^{-2rT}} \frac{\nu/r}{(r^2 + \Delta\omega^2)^2} \{rT(r_+^2 - r_-^2 e^{-2rT}) - \\ & - 2r[r\nu(r_+ - r_- e^{-2rT}) - \Delta\omega^2(r_+ + r_- e^{-2rT})]\} + \\ & + 4r^2[(\nu^2 - \Delta\omega^2)\cos(T\Delta\omega) - 2\nu\Delta\omega\sin(T\Delta\omega)e^{-rT}]\}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Выражение (4.44) при $\Delta\omega = 0$ переходит в (4.39). Результаты (4.39) и (4.44) не зависят от начальной фазы φ_0 , т. е. они отвечают интерференции интенсивностей когерентной и шумовой компонент излучения, а не интерференции амплитуд $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. На рис. 4.14 приведена расчетная зависимость $P_{\alpha+\beta}(m)$ для сигнального процесса $\beta(t)$ рассматриваемого вида. Здесь, как и на рис. 4.11, видна эволюция вероятности $P_{\alpha+}$ в зависимости от величины $\chi = \nu T$. Для больших значений параметра χ вероятность $P_{\alpha+\beta}$ стремится к устойчивому распределению, которое при выбранном значении $\langle m \rangle$, равном 10, принимает асимптотическую гауссову форму. Скорость перехода к асимптотической форме увеличивается с ростом ширины лоренцевой линии ν .

Для дисперсии $\Delta_{\alpha+\beta} = \langle m \rangle^2 - \langle m \rangle^2$ справедливо выражение

$$\Delta_{\alpha+\beta} = \langle m \rangle + \langle m_{\alpha} \rangle \frac{2\chi - 1 + e^{-2\chi}}{2\chi^2} + \frac{4 \langle m_{\alpha} \rangle \langle m_{\beta} \rangle}{(\chi^2 + \varphi^2)^2} [(\chi^2 - \varphi^2)(\chi - 1 - \cos \varphi e^{-\chi}) + 2\chi \varphi (\varphi - \sin \varphi e^{-\chi})], \quad (4.45)$$

где $\varphi = T\Delta\omega$. Из (4.45) видно, что дисперсия $\Delta_{\alpha+\beta}$ содержит осциллирующее по φ слагаемое, амплитуда которого экспоненциально падает с ростом χ . Если $\chi \ll 1$ и $\varphi \ll 1$, то $\Delta_{\alpha+\beta} \simeq \langle m \rangle + \langle m_{\alpha} \rangle (\langle m_{\alpha} \rangle + 2 \langle m_{\beta} \rangle)$.

На рис. 4.15 приведены расчетные зависимости для $P_{\alpha+\beta}(m)$, отвечающие случаю, когда несущая частота когерентного излучения смещена относительно максимума лоренцового контура линии. Семейство графиков отложено для различных вкладов парциальных интенсивностей σ_{α} и σ_{β} , полная интенсивность $\sigma = \sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}$ поддерживалась неизменной.

Таким образом, рассмотрено формирование статистики фотоотсчетов поля излучения, образованного суперпозицией когерентного сигнала и броуновского шума — КОУ-процесса. Общность результатов заключается в том, что они получены для когерентного сигнала с произвольной зависимостью комплексной амплитуды $\beta(t)$ от текущего времени. Отметим зависимость статистики отсчетов от параметра $\chi = \nu T$. В частности, когда

Рис. 4.15. Зависимость статистики отсчетов $P_{\alpha+\beta}$ аддитивной смеси излучений от парциального вклада компонент ($\nu = 0,01$; $T = 10,0$; $\Delta\omega = 0,4$):

1 — $\sigma_{\alpha} = 0,0$, $\sigma_{\beta} = 1,0$; 2 — $\sigma_{\alpha} = 0,2$, $\sigma_{\beta} = 0,8$; 3 — $\sigma_{\alpha} = 0,4$, $\sigma_{\beta} = 0,6$; 4 — $\sigma_{\alpha} = 0,6$, $\sigma_{\beta} = 0,4$; 5 — $\sigma_{\alpha} = 1,0$, $\sigma_{\beta} = 0,0$.

доля шумовой компоненты относительно невелика, но $\chi \ll 1$, возможны значительные отклонения от пуассоновской статистики. С увеличением параметра χ распределение отсчетов стремится сформироваться в устойчивое асимптотическое распределение гауссова типа (реализуется «нормализация»). Отметим также, что с ростом интервала между несущими частотами обеих компонент излучения вклад интерференционного взаимодействия в статистику отсчетов уменьшается.

Упражнения

4.3.1. (M25). Пусть $\beta(t) = b_1 \exp(i\varphi_{01} + it\Delta_1\omega) + b_2 \exp(i\varphi_{02} + it\Delta_2\omega)$; $\sigma_{\beta 1} = |b_1|^2$; $\sigma_{\beta 2} = |b_2|^2$; φ_{01} и φ_{02} — начальные фазы и $\Delta_1\omega = \omega_{\beta 1} - \omega_{\alpha}$; $\Delta_2\omega = \omega_{\beta 2} - \omega_{\alpha}$; $\omega_{\beta 1}$ и $\omega_{\beta 2}$ — несущие частоты двухмодового когерентного излучения. Вычислить, согласно (4.35) и (4.36), функции $Q_{\beta}(\lambda)$ и $Q_{\alpha\beta}(\lambda)$.

4.3.2. (M20). Продолжение. Пусть $\nu \gg \Delta_1\omega$ и $\nu \gg \Delta_2\omega$, а также $|\omega_{\beta 1} - \omega_{\beta 2}| \ll \Delta_1\omega$ и $|\omega_{\beta 2} - \omega_{\beta 1}| \ll \Delta_2\omega$. Выделить в результатах предыдущей задачи выражения, резонансные к частоте «биений» $\omega_{\beta 1} - \omega_{\beta 2}$.

4.3.3. (M20). Выражение (4.36) получено для произвольного вида сигнальной компоненты излучения. Показать, что если для всех t в интервале $0 \leq t \leq T$ $\sigma_\alpha \ll \ll |\beta(t)|^2$, то в первом приближении

$$Q_{\alpha\beta}(\lambda) \simeq \exp \left\{ \lambda^2 \sigma_\alpha \int_0^T dt \int_t^T d\tau [\beta(t)\beta^*(\tau) + \beta^*(t)\beta(\tau)] e^{-\lambda(\tau-t)} \right\}.$$

4.3.4. (M25). *Продолжение.* Получить следующий член разложения $Q_{\alpha\beta}(\lambda)$ по параметру λ , обеспечив при этом неизменность нормировки $Q_{\alpha\beta}(0) = 1$.

4.4. СТАТИСТИКА ФОТООТСЧЕТОВ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ВЫХОДЕ ДВУХЛУЧЕВОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА

В опытах, использующих смещение оптических излучений, особое место принадлежит гетеродинному фотодетектированию. Исследуем статистические характеристики процесса на выходе инерционного фотодетектора, на фотокатоде которого локализован фрагмент интерференционной картины, образованной полем $\xi(t)$,

$$\xi(t) = \beta(t) e^{i\omega\beta t} + \alpha(t) e^{i\omega\alpha t}. \quad (4.46)$$

Интенсивность $I(t, \tau)$ интерференционной картины, создаваемой двухлучевым интерферометром при направлении на его вход поля с амплитудой $\xi(t)$, равна

$$I(t, \tau) = |\xi(t) + \xi(t + \tau)|^2, \quad (4.47)$$

где τ — временной сдвиг в одном из плеч интерферометра относительно другого. Если регистрировать интерференционную картину в области ее локализации, то на выходе фотокатода будет формироваться процесс

$$\eta(T, \tau) = \int_0^T dt |\xi(t) + \xi(t + \tau)|^2, \quad (4.48)$$

который является случайным, поскольку содержит стохастический КОУ-процесс.

Флуктуации случайной величины $\eta(T, \tau)$ можно охарактеризовать с помощью производящей функции $Q_\tau(\lambda) = \left\langle \exp \left[-\frac{1}{4} \lambda \eta(T, \tau) \right] \right\rangle$, или в развернутом виде

$$Q_\tau(\lambda; \alpha(t); \beta(t)) = \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{4} \int_0^T dt |A_\tau(t)|^2 \right\} \right\rangle, \quad (4.49)$$

где

$$A_\tau(t) = \alpha(t) + \beta(t) e^{i(\omega\beta - \omega\alpha)t} + \alpha(t + \tau) e^{i\omega\alpha\tau} + \beta(t + \tau) e^{i(\omega\beta - \omega\alpha)t + i\omega\beta\tau}.$$

Вычисление континуального интеграла (4.49) удобно выполнить в два этапа. На первом из них проведем усреднение по реализациям КОУ-процесса в промежутке $T \leq t \leq T + \tau$. На втором этапе будет

проведено усреднение, отвечающее временному промежутку $0 \leq t \leq \leq T$.

Разобьем, по аналогии с определением (1.14), интервал $(0, T)$ в (4.48) на M отрезков длительностью $\Delta t = T/M$ каждый и, имея в виду устремить M к бесконечности в окончательном результате, аппроксимируем континуальный интеграл (4.49) M -кратным интегралом по совокупности переменных α_m , $m = 1, \dots, M$, где $\alpha_m = \alpha(m\Delta t)$. Пусть $L = \tau/\Delta t$, тогда для учета флуктуаций, реализующихся в промежутке $(T, T + \tau)$, дополним кратность интегрирования до $M + L$ с помощью совокупности переменных α_{M+l} , $l = 1, \dots, L$, где $\alpha_{M+l} = \alpha(T + l\Delta t)$. Наконец, для учета безусловной плотности распределения КОУ-процесса в исходный момент $t = 0$ доведем кратность интегрирования до $M + L + 1$ с помощью переменной α_0 , где $\alpha_0 = \alpha(0)$. Тогда искомая аппроксимация примет вид

$$Q_\tau(\lambda; \alpha(t); \beta(t)) = \int d^2\alpha_0 \int d^2\alpha_1 \dots \int d^2\alpha_{M+L} S(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M+L}) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\lambda T}{4M} \sum_{m=0}^M |\alpha_m + \varphi_L \alpha_{m+L} + \theta_m \beta_m + \theta_M \psi_L \beta_{m+L}|^2 \right\}, \quad (4.50)$$

где $\varphi_L = \exp(i\omega_\alpha \tau)$; $\psi_L = \exp(i\omega_\beta \tau)$; $\beta_m = \beta(m\Delta t)$; $S(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M+L})$ — статистический вес усреднения за интервал $(0, T + \tau)$,

$$S(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M+L}) = P(\alpha_0, 0) \prod_{m=1}^{M+L} P(\alpha_m, m\Delta t; \alpha_{m-1}, (m-1)\Delta t).$$

Проведем в (4.50) интегрирование по переменным, отвечающим промежутку $(T, T + \tau)$. С этой целью заметим, что для двух комплексных переменных z и u справедливо равенство

$$\exp(-|u^2|) = \frac{1}{\pi} \int d^2z \exp(-|z|^2 + izu^* + iz^*u),$$

с помощью которого интерференционный сомножитель в (4.50) путем внешнего интегрирования можно привести к виду, содержащему экспоненту от линейного выражения относительно КОУ-процесса:

$$\exp \left\{ -\frac{\lambda T}{4M} \sum_{m=0}^M |\alpha_m + \varphi_L \alpha_{m+L} + \theta_m \beta_m + \theta_M \psi_L \beta_{m+L}|^2 \right\} = \\ = \left(\frac{\pi}{\Delta t} \right)^{-M-1} \int d^2z_0 \dots \int d^2z_M \exp \left\{ i \sqrt{\frac{\lambda}{4}} \frac{T}{M} (B_\tau + B_\tau^*) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{T}{M} \sum_{m=0}^M \left[|z_m|^2 - i \sqrt{\frac{\lambda}{4}} z_m \theta_m^* (\beta_m^* + \psi_L^* \beta_{m+L}) - \right. \right. \\ \left. \left. - i \sqrt{\frac{\lambda}{4}} z_m^* \theta_m (\beta_m + \psi_L \beta_{m+L}) \right] \right\}, \quad (4.51)$$

где введенная в (4.51) величина B_τ равна

$$B_\tau = \sum_{m=0}^M z_m^* (\alpha_m + \varphi_L \alpha_{m+L}). \quad (4.51a)$$

В силу нормальности КОУ-процесса случайная величина B_τ также нормальна со средним, равным нулю, поэтому

$$\left\langle \exp \left\{ i \sqrt{\frac{\lambda}{4}} \frac{T}{M} (B_\tau + B_\tau^*) \right\} \right\rangle = \exp \left\{ -\frac{\lambda T^2}{4M^2} \langle |B_\tau|^2 \rangle \right\}. \quad (4.52)$$

С помощью (4.17) и (4.19) для безусловного среднего $\langle |B_\tau|^2 \rangle$ найдем

$$\begin{aligned} \langle |B_\tau|^2 \rangle &= 2\sigma_\alpha v (1 + \cos \omega_\alpha \tau e^{-v\tau}) \times \\ &\times \sum_{l,k=0}^M (z_l z_k^* + z_l^* z_k) \exp(-v|l-k|\Delta t). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Возвращаясь к (4.50), получаем

$$\begin{aligned} Q_\tau(\lambda; \alpha(t); \beta(t)) &= (\pi/\Delta T)^{-M-1} \int d^2 z_0 \dots \int d^2 z_M \exp \left\{ -\frac{T}{M} \sum_{m=0}^M |z_m|^2 - \right. \\ &- i \sqrt{\lambda} \frac{T}{M} \sum_{m=0}^M \left(z_m \theta_m^* \frac{\beta_m^* + \psi_L^* \beta_{m+L}^*}{2} + z_m^* \theta_m \frac{\beta_m + \psi_L \beta_{m+L}}{2} \right) - \\ &\left. - \lambda \frac{1 + e^{-v\tau} \cos \omega_\alpha \tau}{2} \sigma_\alpha v \frac{T^2}{M^2} \sum_{l,k=0}^M (z_l z_k^* + z_l^* z_k) e^{-v|l-k|\Delta t} \right\}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Из (4.54) легко получить выражение для производящей функции $Q_0(\lambda; \alpha(t); \beta(t))$, отвечающей случаю, когда $\tau = 0$ и $L = 0$:

$$\begin{aligned} Q_0(\lambda; \alpha(t); \beta(t)) &= (\pi/\Delta T)^{-M-1} \int d^2 z_0 \dots \int d^2 z_M \exp \left\{ -\frac{T}{M} \sum_{m=0}^M |z_m|^2 - \right. \\ &- i \sqrt{\lambda} \frac{T}{M} \sum_{m=0}^M (z_m \theta_m^* \beta_m^* + z_m^* \theta_m \beta_m) - \\ &\left. - \lambda \sigma_\alpha v \frac{T^2}{M^2} \sum_{l,k=0}^M (z_l z_k^* + z_l^* z_k) e^{-v|l-k|\Delta t} \right\}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Сравнение выражений (4.54) и (4.55) позволяет заключить, что

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{4} \int_0^t d\tau |\alpha(t) + \alpha(t+\tau) e^{i\omega_\alpha \tau} + \theta(t) (\beta(t) + \beta(t+\tau) e^{i\omega_\beta \tau})|^2 \right\} \right\rangle &= \\ &= \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^t dt \left| \left(\frac{1 + e^{-v\tau} \cos \omega_\alpha \tau}{2} \right)^{1/2} \alpha(t) + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \theta(t) \frac{\beta(t) + \beta(t+\tau) e^{i\omega_\beta \tau}}{2} \right|^2 \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Поэтому

$$Q_\tau(\lambda; \alpha(t); \beta(t)) = Q_0(\lambda R_\tau; \alpha(t); \gamma_\tau(t)), \quad (4.57)$$

где

$$R_\tau = \frac{1}{2} (1 + e^{-v\tau} \cos \omega_\alpha \tau); \quad (4.58)$$

$$\gamma_\tau(t) = \frac{1}{2\sqrt{R_\tau}} (\beta(t) + \beta(t+\tau) e^{i\omega_\beta \tau}).$$

Таким образом, задача расчета величины Q_τ , определяемой (4.49), сведена к расчету величины Q_0 , представляющей собой интеграл по траекториям КОУ-процесса $\alpha(t)$ в промежутке $(0, T)$.

Перейдем к усреднению, отвечающему промежутку $(0, T)$. Искомая производящая функция теперь

$$Q_0(\lambda R_\tau; \alpha(t); \gamma_\tau(t)) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda R_\tau \int_0^T dt |\alpha(t) + \gamma_\tau(t)|^2 \right\} \right\rangle. \quad (4.59)$$

Для нахождения $Q_0(\lambda R_\tau; \alpha(t); \gamma_\tau(t))$ можно воспользоваться результатом (4.34) — (4.36). После громоздких, но простых выкладок найдем

$$\begin{aligned} Q_\tau(\lambda; \alpha(t); \beta(t)) &= \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^T dt \left| \frac{\alpha(t) + \alpha(t+\tau) e^{i\omega_\alpha \tau}}{2} + B_\tau(t) \right|^2 \right\} \right\rangle = \\ &= \frac{4r_\tau v e^{v^2}}{(r_\tau + v)^2 e^{r_\tau T} - (r_\tau - v)^2 e^{-r_\tau T}} \exp \left\{ -\lambda \int_0^T dt |B_\tau(t)|^2 \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{2\lambda^2 \sigma_\alpha R_\tau v / r_\tau}{(r_\tau + v)^2 e^{r_\tau T} - (r_\tau - v)^2 e^{-r_\tau T}} \int_0^T dt \int_0^T dt' [(r_\tau + v) e^{r_\tau t} + (r_\tau - v) e^{-r_\tau t}] \times \right. \\ &\times [(r_\tau + v) e^{r_\tau(T-t')} + (r_\tau - v) e^{-r_\tau(T-t')}] [B_\tau(t) B_\tau^*(t') + B_\tau^*(t) B_\tau(t')] \Big\}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

где

$$\begin{aligned} B_\tau(t) &= \frac{\beta(t) + \beta(t+\tau) e^{i\omega_\beta \tau}}{2} e^{i(\omega_\beta - \omega_\alpha)t}, \\ r_\tau &= [v^2 + \lambda \sigma_\alpha v (1 + e^{-v\tau} \cos \omega_\alpha \tau)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Результат (4.60) получен для произвольной детерминированной зависимости от текущего времени комплексной амплитуды $\beta(t)$ когерентной компоненты излучения. В формуле (4.60) предэкспоненциальный множитель описывает вклад флуктуаций при фотодетектировании интерференционной интенсивности от шумовой КОУ-компоненты; первый экспоненциальный множитель описывает такой же вклад от когерентной компоненты. Наконец, последний экспоненциальный множитель в (4.60) отвечает вкладу флуктуаций, связанному с взаимодействием обоих видов излучения. Отметим, что результат (4.60) можно распространить на случай, когда когерентная компонента излучения является суперпозицией; тогда

$$B_\tau(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K [\beta_k(t) + \beta_k(t+\tau) e^{i\omega_{\beta k} \tau}] e^{i(\omega_{\beta k} - \omega_\alpha)t}, \quad (4.62)$$

где K — число когерентных мод; $\beta_k(t)$ и $\omega_{\beta k}$ — комплексная амплитуда и несущая частота каждой из мод соответственно.

Упражнения

4.4.1. (М15). Пользуясь (4.61) и (4.62), получить результат, аналогичный (4.60), для случая, когда когерентные моды заполняют спектральный континуум и

$$\beta_{\tau}(t) = \frac{1}{2} \int d\omega [\beta(\omega, t) + \beta(\omega, t + \tau) e^{i\omega\tau}] e^{i(\omega - \omega_0)t},$$

где $\beta(\omega, t)$ — когерентная «амплитуда», отвечающая частоте ω .

4.4.2. (М15). Определить физический смысл выражения (4.58).

4.4.3. (М30). Рассмотрим случайную величину корреляционной структуры

$$\eta(T, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^T dt [\xi(t) \xi^*(t + \tau) + \xi^*(t) \xi(t + \tau)],$$

где τ — постоянная задержка, а $\xi(t)$ дана выражением (4.46). Вычислить производящую функцию

$$Q_{\tau}(\lambda; \alpha(t); \beta(t)) = \langle \exp \{-\lambda \eta(T, \tau)\} \rangle.$$

4.4.4. (М40). Продолжение. Пусть

$$\eta(T, \tau) = \int_0^T dt \xi(t) \xi^*(t + \tau).$$

Вычислить производящую функцию

$$Q_{\tau}(\lambda; \alpha(t); \beta(t)) = \langle \exp \{-\lambda \eta(T, \tau)\} \rangle.$$

4.5. СТАТИСТИКА ФОТООТСЧЕТОВ ПРИ МНОГОЛУЧЕВОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

Рассмотренное выше преобразование излучения, реализованное с помощью двухлучевого интерферометра, может быть обобщено на случай многолучевой интерференции. Здесь мы ограничимся случаем, когда после излучения не содержит когерентной компоненты.

Для определения интенсивности, возникающей при многолучевой суперпозиции световых пучков, необходима информация о вещественной части комплексной степени когерентности $\gamma(\tau)$ используемого излучения. В случае КОУ-процесса

$$\gamma(\tau) = \exp(-\nu |\tau|). \quad (4.63)$$

На выходе многолучевого интерферометра формируется поле излучения с амплитудой $A(t)$ [9]:

$$A(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \alpha(t + \tau_m), \quad (4.64)$$

где $a_m = \rho^m \exp(-i\omega_0 \tau_m)$; $\tau_m = m\Delta$; ρ — френелевский коэффициент отражения пластин интерферометра; Δ — временная разность хода между двумя последовательными лучами. Производящую функцию $Q_{\Delta}(\lambda)$ фотоотсчетов запишем, как и выше, в виде

$$Q_{\Delta}(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^T dt |A(t)|^2 \right\} \right\rangle. \quad (4.65)$$

Процедуру усреднения в (4.65) осуществим, конкретизовав статистический вес с помощью переходной плотности вероятно-

стей (4.17) ($t_1 > t_2$)

$$P(\alpha_1, t_1; \alpha_2, t_2) = \frac{1}{\pi \sigma_\alpha (1 - e^{-2\nu(t_1 - t_2)})} \exp \left[- \frac{|\alpha_1 - \alpha_2 e^{-(\nu + i\omega_\alpha)(t_1 - t_2)}|^2}{\sigma_\alpha (1 - e^{-2\nu(t_1 - t_2)})} \right], \quad (4.66)$$

в которой в отличие от (4.17) указан, помимо затухающего множителя с декрементом ν , множитель, обусловленный фазовым сдвигом ω_α ($t_1 - t_2$).

Используя (4.66), можем перейти к усреднению в (4.65) по всем реализациям КОУ-процесса $\alpha(t)$. С этой целью представим формально усредняемую экспоненту в виде ряда

$$\begin{aligned} Q_\Delta(\lambda) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^T dt \left| \sum_{m=0}^M a_m \alpha(t + \tau_m) \right|^2 \right\} \right\rangle = \\ &= 1 + \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \int_0^T dt_1 \dots dt_k \int d^2 \eta_1 \dots d^2 \eta_k V(\eta_1) \dots V(\eta_k) \times \\ &\times \left\langle \exp \left\{ i \sum_{l=1}^k \eta_l \sum_{m=0}^M a_m \alpha(t_l + \tau_m) + i \sum_{l=1}^k \eta_l \sum_{m=0}^M a_m^* \alpha^*(t_l + \tau_m) \right\} \right\rangle, \quad (4.67) \end{aligned}$$

где $V(\eta)$ — особенная функция, такая, что

$$\int d^2 \eta V(\eta) \exp[i(\eta \alpha^* + \eta^* \alpha)] = |\alpha|^2. \quad (4.67a)$$

Поскольку КОУ-процесс обладает свойством гауссовости, выражение в угловых скобках (...) в (4.67) равно

$$\exp \left\{ - \sum_{i,j=1}^k \eta_i \eta_j \sum_{m,l=0}^M a_m^* a_l \langle \alpha^*(t_i + \tau_m) \alpha(t_j + \tau_l) \rangle \right\},$$

при этом парное среднее $\langle \alpha^*(t_i + \tau_m) \alpha(t_j + \tau_l) \rangle$ выражается в терминах корреляционной функции (4.63)

$$\langle \alpha^*(t_i + \tau_m) \alpha(t_j + \tau_l) \rangle = \sigma_\alpha \exp(-\nu |t_i - t_j + \tau_m - \tau_l|). \quad (4.68)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} Q_\Delta(\lambda) &= 1 + \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \int_0^T dt_1 \dots dt_k \int d^2 \eta_1 \dots d^2 \eta_k V(\eta_1) \dots V(\eta_k) \times \\ &\times \exp \left\{ - \sigma_\alpha \sum_{i,j=1}^k \eta_i \eta_j^* \sum_{m,l=0}^M a_m^* a_l e^{-\nu |t_i - t_j + \tau_m - \tau_l|} \right\}. \quad (4.69) \end{aligned}$$

Здесь учтено, что при суммировании величин t_i их можно упорядочить считая, например, что $t_i > t_j$ при $i > j$. Введем величину

$$E_M = \sum_{m,l=0}^M a_m^* a_l e^{-\nu |\tau_m - \tau_l|}, \quad (4.70)$$

после чего свернем в (4.69) ряд по k . После предельного перехода $M \rightarrow \infty$ найдем

$$Q_{\Delta}(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda E(\Delta) \int_0^T dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle, \quad (4.71)$$

$$E(\Delta) = \lim_{M \rightarrow \infty} E_M = \frac{1}{1 - \rho^2} \frac{1 - \rho^2 \gamma^2(\Delta)}{1 - 2\rho\gamma(\Delta) \cos(\omega_{\alpha}\Delta) + \rho^2 \gamma^2(\Delta)}, \quad (4.72)$$

где, напомним, Δ — разность хода между двумя последующими лучами.

Из (4.71) следует, что производящая функция фотоотсчетов оптического излучения, претерпевшего многолучевую интерференцию, имеет ту же структуру, что и производящая функция

$$Q(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^T dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle,$$

отвечающая прямому фотодетектированию КОУ-процесса. Это свойство сохраняется для любой разности хода Δ . Среднее число отсчетов $\langle m \rangle$ претерпевает интерференционную модуляцию с изменением Δ согласно формуле Эйри [9]

$$\langle m \rangle = -\frac{\partial}{\partial \lambda} Q_{\Delta}(\lambda) |_{\lambda=0} = \sigma_{\alpha} E(\Delta). \quad (4.73)$$

Пользуясь известным результатом для $Q_{\alpha}(\lambda)$ (4.21), приведем окончательное выражение для производящей функции $Q_{\alpha}(\lambda)$:

$$Q_{\Delta}(\lambda) = \frac{4\nu r(\Delta) e^{\nu T}}{(r(\Delta) + \nu)^2 e^{Tr(\Delta)} - (r(\Delta) - \nu)^2 e^{-Tr(\Delta)}}, \quad (4.74)$$

где $r(\Delta) = [\nu^2 + 2\lambda\sigma_{\alpha}\nu E(\Delta)]^{1/2}$.

Полученное континуальное соотношение (4.71) может быть представлено в виде, пригодном для описания оптических устройств с интегральным преобразованием комплексной амплитуды, а именно

$$\begin{aligned} & \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^T dt \left| \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} d\Delta a(\Delta) \alpha(t + \Delta) \right|^2 \right\} \right\rangle = \\ & = \left\langle \exp \left\{ -\lambda E(\Delta_1, \Delta_2) \int_0^T dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.75)$$

где

$$E(\Delta_1, \Delta_2) = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} d\Delta' \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} d\Delta'' a(\Delta') a^*(\Delta'') e^{-\nu|\Delta' - \Delta''|}. \quad (4.75a)$$

Видно, что при прямом фотодетектировании КОУ-процесса, претерпевшего интегральное преобразование, закон распределения вероятностей фотоотсчетов остается неизменным.

Упражнения

4.5.1. (М40). Построить теорию фотоотсчетов при многолучевой интерференции, но для излучения, являющегося суперпозицией произвольного когерентного излучения и КОУ-процесса.

4.5.2. (М40). *Продолжение.* Исследовать работу аппаратного комплекса, состоящего из многолучевого интерферометра и счетчика квантов, как анализатора спектрального контура излучения.

4.5.3. (М35). *Продолжение.* Пусть $\rho(\omega, t)$ — текущая реализация спектрального контура, полученная в результате работы указанного выше аппаратного комплекса. Изучить сходимость $\rho(\omega, t)$ при $\nu t \rightarrow \infty$ к «истинному» спектру $\rho(\omega)$. Получить явные выражения для относительной погрешности определения спектра $\delta(\omega) = [\rho(\omega, t) - \rho(\omega)]/\rho(\omega)$.

4.5.4. (М40). *Продолжение.* Рассмотреть обратную к предыдущей задачу, т. е. определить требуемое время измерения t для достижения заданной точности $\delta(\omega)$ определения $\rho(\omega)$.

4.5.5. (М10). Найти явный вид функции $E(\Delta_1, \Delta_2)$ из (4.75) для случаев: а) $a(\Delta) = a = \text{const}$; б) $a(\Delta) = 1$, если $\Delta \leq \Delta_0$, и $a(\Delta) = 0$, если $\Delta > \Delta_0$; в) $a(\Delta) = \exp(i\Omega\Delta)$.

4.6. СТАТИСТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПРОЦЕССОВ В ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ

Эксперименты по многократному совпадению фотонов были впервые описаны в [10]. Использование совместных функций распределения фотоотсчетов дает возможность проследить за временным поведением корреляционных функций поля излучения. Высокое разрешение в технике фотоотсчетов обусловило распространенность применения интерферометрии интенсивности [10]. Вместе с тем теоретическое рассмотрение статистической структуры фотоотсчетов ограничено изучением их корреляционной функции. В [11] описаны результаты измерения совместной функции распределения фотоотсчетов при регистрации стационарного гауссова поля излучения. Приведенные в [11] аналитические выражения для производящей функции совместного распределения фотоотсчетов фактически являются асимптотическими и относятся к случаю $\nu T \ll 1$, где T — временная длительность регистрации. Представляет интерес получить количественные характеристики производящей функции фотоотсчетов при двухдетекторной регистрации для произвольного соотношения между T и шириной ν спектрального контура броуновского поля излучения — КОУ-процесса.

Вероятность $P(m, n)$ зарегистрировать первым детектором m отсчетов, а вторым n отсчетов можно выразить с помощью двухпараметрической производящей функции $Q(\lambda_1, \lambda_2)$:

$$P(m, n) = \frac{(-1)^{m+n}}{m!n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial \lambda_1^m \partial \lambda_2^n} Q(\lambda_1, \lambda_2) |_{\lambda_1=\lambda_2=1}, \quad (4.76)$$

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda_1 \int_0^T dt |\alpha(t)|^2 - \lambda_2 \int_\tau^{\tau+T_2} dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle, \quad (4.77)$$

где T_1 и T_2 — временная длительность регистрации каждого из детекторов соответственно; τ — длительность задержки момента включения второго детектора относительно первого.

Как будет видно ниже, конкретное выражение для $Q(\lambda_1, \lambda_2)$ существенно зависит от того, перекрываются в (4.77) временные интервалы $(0, T_1)$ и $(\tau, \tau + T_2)$ или нет. Чтобы рассмотреть в совокупности эти возможные случаи, удобно ввести вспомогательную производящую

функцию

$$F(\Lambda_1, \tau_1; \Lambda, \tau; \Lambda_2, \tau_2) =$$

$$= \left\langle \exp \left\{ -\Lambda_1 \int_0^{\tau_1} dt |\alpha(t)|^2 - \Lambda \int_{\tau}^{\tau_1 + \tau} dt |\alpha(t)|^2 - \Lambda_2 \int_{\tau_1 + \tau}^{\tau_1 + \tau + \tau_2} dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle, \quad (4.78)$$

в которой введенные интервалы длительностью τ_1 , τ и τ_2 уже расположены последовательно в порядке возрастания текущего времени; при этом производящая Q -функция (4.77) вполне может быть выражена в терминах F -функции путем соответствующего подбора параметров Λ_1 , Λ и Λ_2 .

Усреднение в (4.78) удобно провести в два этапа: сначала по всем реализациям КОУ-процесса внутри каждого из интервалов временного интегрирования, а затем по реализациям $\alpha(t)$, отвечающим моментам времени 0, τ_1 , $\tau_1 + \tau$ и $\tau_1 + \tau + \tau_2$. Результат континуального интегрирования на каждом из указанных интервалов выражается в терминах Ψ -функции, задаваемой выражением (4.33), в котором необходимо положить $\beta(t) = 0$:

$$\Psi(\Lambda; \alpha_1, t_1; \alpha_2, t_2) = \frac{rq^2}{\pi\sigma_\alpha(1-q^2)} \exp \left\{ \frac{r-v}{2\sigma_\alpha v} (|\alpha_2|^2 - |\alpha_1|^2) + \right. \\ \left. + (r+v)(t_2 - t_1) - \frac{r}{\sigma_\alpha} (1-q^2)^{-1} |\alpha_2 - q\alpha_1|^2 \right\}, \quad (4.79)$$

где $t_2 \geq t_1$ и $q = \exp[-v(t_2 - t_1)]$.

Из (4.79) видно, что условное математическое ожидание, каковым является Ψ -функция, зависит лишь от временной протяженности интервала $(t_2 - t_1)$, которому она отвечает, и значений КОУ-процесса на его концах. В соответствии с методом Каца — Фейнмана F -функция равна

$$F(\Lambda_1, \tau_1; \Lambda, \tau; \Lambda_2, \tau_2) = \int d^2\alpha_0 P(\alpha_0, 0) \int d^2\alpha_1 \Psi(\Lambda_1; \alpha_0, 0; \alpha_1, \tau_1) \times \\ \times \int d^2\alpha \Psi(\Lambda; \alpha_1, \tau_1; \alpha, \tau_1 + \tau) \int d^2\alpha_2 \Psi(\Lambda_2; \alpha; \tau_1 + \tau; \alpha_2, \tau_1 + \tau + \tau_2). \quad (4.80)$$

Здесь $P(\alpha_0, 0)$ — плотность распределения начального состояния КОУ-процесса. После подстановки (4.79) в (4.80) и взятия четырехкратного интеграла с учетом (4.19) получим

$$F(\Lambda_1, \tau_1; \Lambda, \tau; \Lambda_2, \tau_2) = \frac{G_1}{G_2}, \quad (4.81)$$

$$G_1 = 16v_1\rho_1\rho_2p\rho_1p_2 \exp(v\tau_1 + v\tau + v\tau_2),$$

$$G_2 = (1 + \rho^2)\rho(\rho_1A_1B_2 + \rho_2A_2B_1) + (1 - \rho^2)(\rho_1\rho_2A_1A_2 + \rho^2B_1B_2),$$

где

$$\rho = (v^2 + 2\Lambda\sigma_\alpha v)^{1/2}; \quad \rho_k = (v^2 + 2\Lambda_k\sigma_\alpha v)^{1/2};$$

$$\rho = \exp(-\rho\tau); \quad \rho_k = \exp(-\rho_k\tau_k); \quad (4.82)$$

$$A_k = (v + \rho_k) + (v - \rho_k)\rho_k^2; \quad B_k = (v + \rho_k) + (\rho_k - v)\rho_k^2 \quad (k = 1, 2)$$

Выражения (4.81), (4.82) описывают статистическую структуру фотоотсчетов трех детекторов, включенных один за другим последовательно во времени на интервалы длительностью τ_1 , τ и τ_2 соответственно. С помощью (4.81) можно рассмотреть разные варианты, отвечающие различной временной последовательности включения детекторов. При этом, разумеется, для двух детекторов справедливо:

$$-\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=0} = \sigma_\alpha T_1; \quad -\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=0} = \sigma_\alpha T_2, \quad (4.83)$$

а) *последовательное во времени детектирование* — второй детектор включается в момент выключения первого

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda_1 \int_0^{T_1} dt |\alpha(t)|^2 - \lambda_2 \int_{T_1}^{T_1+T_2} dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle = \\ = F(\lambda_1, T_1; 0, 0; \lambda_2, T_2) = \frac{8\nu \rho_1 \rho_2 p_1 p_2 \exp(\nu T_1 + \nu T_2)}{\rho_1 A_1 B_2 + \rho_2 A_2 B_1}. \quad (4.84)$$

Из (4.84) легко получить приведенный выше результат (4.21) для Q -функции одного детектора, регистрирующего в течение интервала T , если положить $T_1 + T_2 = T$ и $\lambda_2 = \lambda_1$, $p_{12} = \exp(-\rho_1 T)$:

$$\left\langle \exp \left\{ -\lambda_1 \int_0^{T_1+T} dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle = \frac{4\rho_1 \nu \exp(\nu T)}{(\rho_1 + \nu)^2 \rho_{12}^{-1} - (\rho_1 - \nu)^2 \rho_{12}}. \quad (4.85)$$

Корреляция $K_{12}(0)$ между отсчетами детекторов равна

$$K_{12}(\tau) |_{\tau=0} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} - \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \right) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=0} = \\ = \frac{\sigma_\alpha^2}{4\nu^2} (1 - e^{-2\nu T_1}) (1 - e^{-2\nu T_2}); \quad (4.86)$$

б) *смещение «назад»* — второй детектор включается через интервал длительностью τ после включения первого детектора

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda_1 \int_0^{T_1} dt |\alpha(t)|^2 - \lambda_2 \int_{T_1+\tau}^{T_1+\tau+T} dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle = \\ = F(\lambda_1, T_1; 0, \tau; \lambda_2, T_2) = \\ = \frac{16\nu^2 \rho_1 \rho_2 p_1 p_2 \exp(\nu T_1 + \nu T_2)}{(1 + \rho^2) \nu (\rho_1 A_1 B_2 + \rho_2 A_2 B_1) + (1 - \rho^2) (\rho_1 \rho_2 A_1 A_2 + \nu^2 B_1 B_2)}. \quad (4.87)$$

Из (4.87), в частности, следует, что корреляция между отсчетами детекторов уменьшается с ростом τ

$$K_{12}(\tau) = \frac{\sigma_\alpha^2}{4\nu^2} e^{-\nu \tau} (1 - e^{-2\nu T_1}) (1 - e^{-2\nu T_2}). \quad (4.88)$$

Если $\tau \rightarrow \infty$, то $\rho \rightarrow 0$, и выражение (4.88) факторизуется на парциальные производящие функции, отвечающие каждому из детекторов,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} Q(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{4\nu \rho_1 p_1 e^{\nu T_1}}{\rho_1 A_1 + \nu B_1} \frac{4\nu \rho_2 p_2 e^{\nu T_2}}{\rho_2 A_2 + \nu B_2}. \quad (4.89)$$

Таким образом, отсчеты детекторов становятся статистически независимыми;

в) *смещение «вперед»* — второй детектор включается через временной интервал $T_1 - \tau$ после включения первого детектора ($T_1 > \tau$). Тогда

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda_1 \int_0^{T_1} dt |\alpha(t)|^2 - \lambda_2 \int_{T_1-\tau}^{T_1-\tau+T} dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle = \\ = F(\lambda_1, T_1 - \tau; \lambda_1 + \lambda_2, \tau; \lambda_2, T_2 - \tau), \quad (4.90)$$

а явное выражение описывается формулами (4.81) и (4.82) при $\tau_1 = T_1 - \tau$, $\tau_2 = T - \tau$ и $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Если оба детектора одновременно включены на одинаковое время T , т. е. $T_1 = T_2 = T$ и $\tau = T$, то из (4.90) легко получить выражение (4.85). Корреляции между отсчетами равны

$$K_{12}(\tau) = \frac{\sigma_\alpha^2}{4\nu^2} [4\nu\tau + e^{-2\nu\tau} - e^{-2\nu(T_1-\tau)} - e^{-2\nu(T_2-\tau)} + e^{-2\nu(T_1+T_2-\tau)}] \quad (4.91)$$

и содержат линейное по τ слагаемое; при $\tau = 0$ выражение (4.91) переходит в (4.88).

Сравнение выражений (4.84), (4.87) и (4.90) приводит к выводу, что производящая функция фотоотсчетов двух детекторов различна по форме, смотря по тому, как соотносятся временные интервалы регистрации: следуют один за одним, разнесены или наложены. Соответственно будут разными и вероятности $P(m, n)$ отсчетов и отвечающие им моменты различных порядков.

Для асимптотического случая, когда $\nu T_1 \ll 1$ и $\nu T_2 \ll 1$, в результате разложения величин, входящих в (4.82), получим

$$F(\Lambda_1, T_1; \Lambda, \tau; \Lambda_2, T_2) \simeq (1 + \Lambda_1 \sigma_\alpha T_1 + \Lambda_2 \sigma_\alpha T_2 - \\ - \Lambda_1 \Lambda_2 \sigma_\alpha^2 T_1 T_2 e^{-2\nu\tau})^{-1}, \quad (4.92)$$

т. е. асимптотическую формулу, совпадающую с соответствующим выражением, приведенным в [11].

Упражнения

4.6.1. (М25). Получить выражение, аналогичное (4.81), но для четырехдетекторной регистрации $F(\Lambda_1, \tau_1; \Lambda_2, \tau_2; \Lambda_3, \tau_3; \Lambda_4, \tau_4)$.

4.6.2. (М35). *Продолжение.* Получить выражение, аналогичное (4.81), но для пятидетекторной регистрации.

4.6.3. (М35). Введем производящую Q -функцию

$$Q(\lambda; \varepsilon(t)) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^T dt \varepsilon(t) |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle,$$

где $\varepsilon(t)$ — заданная известная функция. Пусть $\Delta(\varepsilon(t))$ — заданная константа. Построить блок-схему алгоритмической процедуры, находящей численное значение Q -функции с относительной погрешностью, не превышающей заданную $\Delta(\varepsilon(t))$ (см. упражнение 4.2.10).

4.6.4. (М35). Продолжение. Используя деление интервала $(0, T)$ пополам в цикле по числу делений, построить итеративную процедуру для ЭВМ. Вычислить $Q(\lambda; \varepsilon(t))$ для $\varepsilon(t) = 1$ и $\varepsilon(t) = \exp(-\mu t)$, где μ — постоянная, сведя искомую величину к N -кратному интегралу (см. упражнение 4.2.11).

4.6.5. (М35). Продолжение. Создать два варианта вычислительной процедуры — итеративный и рекурсивный.

4.7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ ДОСТИЖЕНИЯ ЗАДАННОГО УРОВНЯ ПРОЦЕССОМ НА ВЫХОДЕ КВАНТОВОГО СЧЕТЧИКА

Задачу о статистике фотоотсчетов детектора оптического излучения обычно формулируют для заданного временного интервала регистрации (см., например, [1, 2]). Для ряда приложений представляет интерес обратная к этой задача о распределении временных интервалов достижения заданного уровня процессом на выходе оптического детектора. Рассмотрим более общую задачу о статистической структуре времени пребывания между двумя заданными уровнями. Случайный характер времени пребывания внутри амплитуд дискриминации N и M обусловлен пуассоновской статистикой фотоотсчетов, если поглощаемое детектором поле излучения находится в когерентном состоянии [1]. Плотность распределения вероятностей $P_{NM}(\tau)$ времени пребывания τ можно записать, согласно [12], в виде

$$P_{NM}(\tau) = \int_0^{\infty} dt \left[\frac{d}{dt} \sum_{n=0}^N p_n(0, t) \right] \left[\frac{d}{d\tau} \sum_{m=0}^{M-N} p_m(t, t+\tau) \right], \quad (4.93)$$

где t — момент достижения нижнего N -уровня; $t + \tau$ — момент достижения верхнего M -уровня. Вероятности отсчетов

$$p_n(0, t) = \frac{1}{n!} \Omega^n(0, t) e^{-\Omega(0,t)}, \quad (4.94)$$

$$p_m(t, t+\tau) = \frac{1}{m!} \Omega^m(t, t+\tau) e^{-\Omega(t,t+\tau)},$$

согласно (4.12), выражаются в терминах процесса, формируемого на выходе фотодетектора

$$\Omega(t_1, t_2) = \int_{t_2}^{t_1} d\theta |\eta(\theta)|^2,$$

регистрирующего поле излучения с комплексной амплитудой $\eta(\theta)$. Если поле излучения аддитивно содержит случайную компоненту — КОУ-процесс, плотность вероятности (4.93) необходимо усреднить по всем ее реализациям в интервале $(0, t + \tau)$:

$$P_{NM}(\tau) = \int_0^{\infty} dt \langle |\eta(t)|^2 p_N(0, t) |\eta(t+\tau)|^2 p_{M-N}(t, t+\tau) \rangle, \quad (4.95)$$

при этом вероятность (4.95) нормирована на единицу.

Примем, что поле излучения — это КОУ-процесс. В таком случае нетрудно показать, что подынтегральное выражение в (4.95) является полным дифференциалом t , поскольку случайный процесс $\alpha(t)$ облада-

ет марковским свойством. С этой целью запишем (4.95) в форме интегралов Коши и воспользуемся методом Каца — Фейнмана нахождения континуальных интегралов

$$P_{NM}(\tau) = \int_0^\infty dt \oint \frac{du}{2\pi i} \frac{(-1)^N}{(u-1)^{N+1}} \oint \frac{dv}{2\pi i} \frac{(-1)^L}{(v-1)^{L+1}} \int d^2x_0 P(\alpha_0, 0) \times \\ \times \int d^2\alpha_1 |\alpha_1|^2 \Psi_u(\alpha_1, t; \alpha_0, 0) \int d^2\alpha_2 |\alpha_2|^2 \Psi_v(\alpha_2, t + \tau; \alpha_1, t), \quad (4.96)$$

где $L = M - N$ — расстояние между уровнями дискриминации; контур интегрирования в u - и v -плоскостях должен охватывать полюс в единице. Введенная функция Ψ_λ является следующим математическим ожиданием ($\lambda = u$ или v):

$$\Psi_\lambda(\alpha', t'; \alpha'', t'') = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_{t''}^{t'} d\theta |\alpha(\theta)|^2 \right\} \right\rangle. \quad (4.97)$$

при условии, согласно (4.25), что $\alpha' = \alpha(t')$ и $\alpha'' = \alpha(t'')$ для границ интервала усреднения. Явный вид для Ψ -функции (4.97) приведен в выражении (4.79), из которого следует, что Ψ_λ зависит от разности $t' - t''$. Таким образом, в (4.96) Ψ_v зависит лишь от τ , в то же время $|\alpha_1|^2 \Psi_u$ является полным дифференциалом относительно переменной t , интеграл по которой равен нулю на верхнем пределе и $u^{-1}\delta(\alpha_1 - \alpha_2)$ — на нижнем. Поэтому после простого интегрирования по u и α_1 получим

$$P_{NM}(\tau) = P_L(\tau) = \oint \frac{dv}{2\pi i} \frac{(-1)^L}{(v-1)^{L+1}} \langle |\alpha(\tau)|^2 \exp \{ -v\Omega(0, \tau) \} \rangle. \quad (4.98)$$

Из (4.95) и (4.98) следует, что при регистрации стохастического КОУ-процесса задача о времени пребывания между двумя уровнями может быть сведена к задаче о времени достижения процессом $\Omega(0, \tau)$ заданного уровня, отсчитываемого от нулевого, $L = M - N$.

Рассмотрим задачу о времени достижения, считая, что поле излучения состоит из когерентного амплитудно стабилизированного монохроматического излучения с комплексной амплитудой $\beta(t)$, на которое аддитивно наложен КОУ-процесс, несущая частота которого совпадает с частотой когерентного излучения. Воспользовавшись выражениями (4.34) и (4.39), найдем

$$P_L(\tau) = \frac{d}{d\tau} \sum_{l=0}^L \frac{(-1)^l}{l!} \frac{d}{d\lambda^l} \frac{4rvge^{v\tau}}{r_+^2 - r_-^2 g^2} \exp(-\lambda\sigma_\beta\tau) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{\lambda^2 \sigma_\alpha \sigma_\beta v}{r^2 (r_+^2 - r_-^2 g^2)} [4v^2 g - r_+ (2v - r_+ r\tau) + r_- g^2 (2v - r_- r\tau)] \right\} \Big|_{\lambda=1}, \quad (4.99)$$

где, напомним, $r = (v^2 + 2\lambda\sigma_\alpha v)^{1/2}$, $r_\pm = r \pm v$; $g = \exp(-r\tau)$; $\sigma_\beta = |\dot{\beta}(t)|^2$.

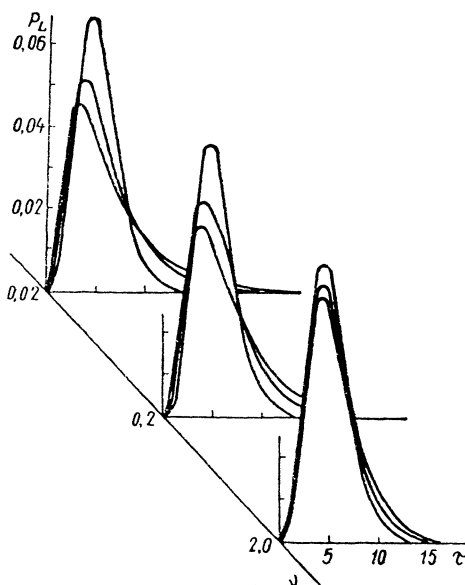


Рис. 4.16. Плотность распределения вероятностей $P_L(\tau)$ для различных спектральных ширин ν КОУ-процесса: верхние кривые — $\sigma_\alpha = 0,0$, $\sigma_\beta = 1,0$; средние — $\sigma_\alpha = 1,0$; $\sigma_\beta = 0,9$; нижние кривые — $\sigma_\alpha = 0,2$, $\sigma_\beta = 0,8$.

Результаты расчета вероятностей $P_L(\tau)$ достижения заданного уровня $L = 5$ приведены на рис. 4.16 для трех значений ширины линии шумового КОУ-процесса. Для каждой ν приведены кривые $P_L(\tau)$, отвечающие трем значениям интенсивности σ_α , полная интенсивность

$$\sigma = \sigma_\alpha + \sigma_\beta \quad (4.100)$$

в расчетах поддерживалась постоянной и равной единице. Из рис. 4.16 видно, что вклад КОУ-процесса приводит к уменьшению максимума $P_L(\tau)$ и уширению распределения. Уменьшение ν также влечёт за собой затягивание распределения $P_L(\tau)$ — относительное увеличение вероятности достичь заданного уровня L за большее время τ . Вместе с тем уменьшение ν приводит к увеличению как среднего времени достижения $\langle \tau \rangle$ (рис. 4.17), так и дисперсии $(\langle \tau^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2)^{1/2}$ (рис. 4.18). Если шумовой процесс широкополосен, то с увеличением ν эти величины асимптотически стремятся к значениям, отвечающим регистрации когерентного амплитудно стабилизированного сигнала

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle \tau \rangle = \frac{L+1}{\sigma}, \quad (4.101)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\langle \tau^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2)^{1/2} = \frac{(L+1)^{1/2}}{\sigma}. \quad (4.101a)$$

На рис. 4.17 и 4.18 эти асимптоты для $L = 5$ указаны штриховой линией.

В случае, если интенсивность КОУ-процесса мала, $\sigma_\alpha \ll \sigma_\beta$, выражение (4.99) допускает простую асимптотику. Для ее нахождения запишем приближенно (4.99) в виде

$$P_L(\tau) = \frac{d}{d\tau} \sum_{l=0}^L \frac{(-1)^l}{l!} \frac{d^l}{d\lambda^l} \exp(-\lambda\sigma\tau + \lambda^2 R_\alpha) \Big|_{\lambda=1}, \quad (4.102)$$

$$R_\alpha = \sigma_\alpha \sigma_\beta \nu^{-2} (-1 + \nu\tau + e^{-\nu\tau}).$$

При $\nu\tau \gg 1$ из (4.102) следует (4.101), с другой стороны, при $\nu\tau \ll 1$ распределение $P_L(\tau)$ также не зависит от ν , как видно из рис. 4.17 и 4.18. Представляя (4.102) в виде ряда по полиномам Эрмита $H_l(y)$,

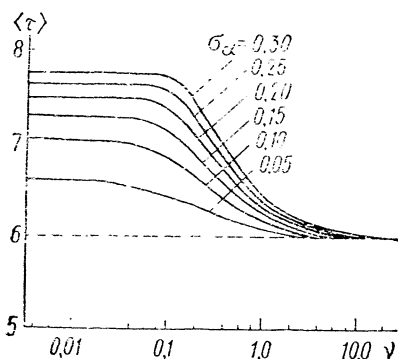


Рис. 4.17. Зависимость среднего времени достижения $\langle \tau \rangle$ заданного уровня $L = 5$ от ширины линии ν КОУ-процесса ($\sigma_\beta = 1,0 - \sigma_\alpha$).

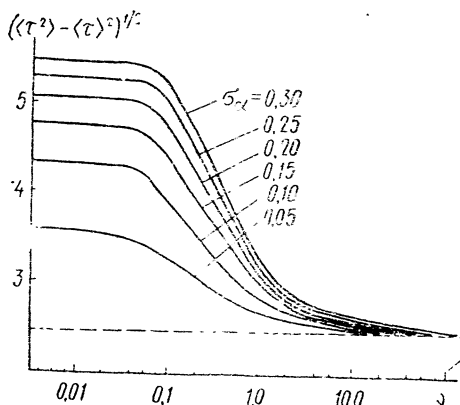


Рис. 4.18. Зависимость дисперсии времени достижения $(\langle \tau^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2)^{1/2}$ заданного уровня $L = 5$ от ширины линии ν КОУ-процесса ($\sigma_\beta = 1,0 - \sigma_\alpha$).

где $y = -i\sqrt{R_\alpha} + i\sigma\tau\sqrt{4R_\alpha}$, и удерживая в каждом из них старший по $R_\alpha^{-1/2}$ член, найдем приближенно

$$P_L(\tau) = \left(\sigma_\alpha + \sigma_\beta - 2\sigma_\alpha\sigma_\beta \frac{1 - e^{-\nu\tau}}{\nu} \right) \frac{(\sigma_\alpha\tau + \sigma_\beta\tau - 2R_\alpha)^L}{L!} e^{-\sigma_\alpha\tau - \sigma_\beta\tau + 2R_\alpha}. \quad (4.103)$$

Асимптотику решения задачи о распределении времени достижения для когерентного излучения $\beta(t)$ с произвольной зависимостью интенсивности $\sigma_\beta(t)$ от текущего времени можно получить из (4.103),

если в этом выражении везде заменить $\sigma_\beta\tau$ на $\int_0^\tau dt |\beta(t)|^2$.

Упражнения

4.7.1. (М10). Получить выражения (4.93) и (4.95).

4.7.2. (М20). Выбрав некоторый конкретный вид для комплексной амплитуды $\beta(t)$ (например, «ступеньки»), получить выражение, аналогичное (4.99).

4.7.3. (М20). Установить физический смысл выражения (4.101); рассмотреть частный случай $L = 0$.

4.7.4. (М10). При $\sigma_\alpha = 0$ выражение (4.103) принимает вид

$$P_L(\tau) = \sigma_\beta \frac{(\sigma_\beta\tau)^L}{L!} e^{-\sigma_\beta\tau}.$$

Увидеть, что $\langle \tau \rangle = \frac{L+1}{\sigma}$.

4.7.5. (М20). Продолжение. Считая, что $\sigma_\alpha \ll \sigma_\beta$, получить добавку к результату предыдущего упражнения для $\langle \tau \rangle$, линейную по σ_α .

5. СТАТИСТИКА ФУНКЦИОНАЛОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА РЕШЕНИЯХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основное достоинство метода интегрирования по траекториям состоит в том, что он непосредственно содержит представление о вероятности некоторой траектории или функции.

Р. Фейнман

Естественным способом описания временной эволюции динамического процесса, в том числе случайного, является описание с помощью уравнений движения. Случайный процесс задан, если известно дифференциальное уравнение движения вместе с начальным условием. Ниже будут рассмотрены случайные процессы, являющиеся решениями линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, порождающим процессом для которых служит «белый» шум. Такие процессы сохраняют свойство гауссовости. Очевидно, что ОУ-процесс (и соответственно КОУ-процесс), описываемый дифференциальным уравнением первого порядка, отвечает наиболее простому из возможных случаев. Особое место занимает стохастический гармонический процесс (ГС-процесс), описываемый уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2x = f(t), \quad (5.1)$$

где β и ω — декремент и частота колебательного движения, что обусловлено распространенностью осцилляторных физических моделей. Дальнейшее усложнение статистической структуры случайного процесса связано с увеличением как числа раз дифференцирования в уравнении движения, так и (или) числа самих уравнений движения. В предельном случае случайный процесс $x(t)$ и порождаемый его «белый» шум $f(t)$ могут быть связаны линейным интегральным оператором.

Задача функционального интегрирования по вероятностной мере, определяемой случайным процессом $x(t)$, достаточно не проста даже в том случае, когда потенциальная функция $V(x)$ является квадратичной формой, хотя структура результата интегрирования заведомо известна. Результат просто выражается через детерминант бесконечномерного оператора, связанного с этой квадратичной формой. Основная трудность, таким образом, заключается в вычислении этого детерминанта. Решение поставленной задачи удастся довести до этапа, на котором результат вычисления может быть выражен в терминах некоторой матрицы (ее размерность совпадает с размерностью пространства значений реализаций процесса), которая является решением матричного алгебраического уравнения. Методы решения последнего достаточно хорошо разработаны [1—3]. При этом громоздкость выкладок

резко увеличивается с ростом размерности пространства значений реализаций процесса.

Ниже будет изложено решение этих задач для ситуации, когда случайный процесс определяется решением линейного стохастического уравнения диссипативного типа с постоянными коэффициентами, а потенциал $V(x)$ — квадратичная форма.

5.1. ЛИНЕЙНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Пусть $y(t)$ — векторный случайный процесс в d -мерном пространстве, являющийся решением векторного стохастического дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} y_{\alpha}(t) = A_{\alpha}(\vec{y}) + f_{\alpha}(t), \quad (5.2)$$

где $\alpha = 1, \dots, d$; $\vec{f}_{\alpha}(t)$ — d -мерный «белый» шум; $A_{\alpha}(\vec{y})$ — векторное поле, определенное на том же пространстве. Примем, что $\vec{f}_{\alpha}(t)$ — гауссовский марковский случайный процесс с матрицей корреляции

$$\langle f_{\alpha}(t) f_{\beta}(t') \rangle = \sigma_{\alpha\beta} \delta(t - t'). \quad (5.3)$$

Переходная функция $w(\vec{y}, t; \vec{y}', t')$ процесса $y(t)$ удовлетворяет параболическому дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\vec{y}, t; \vec{y}', t') = - \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} (A_{\alpha} w) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^d \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial y_{\alpha} \partial y_{\beta}} \quad (5.4)$$

с начальным условием

$$w(\vec{y}, t'; \vec{y}', t') = \delta(\vec{y} - \vec{y}') \quad (5.5)$$

(в дальнейшем при повторении индексов суммирование знак Σ будет опускаться). Пусть далее задана скалярная функция $V(\vec{y})$. Поставим задачу об определении плотности распределения вероятностей значений функционала $\int_0^t d\tau V(\vec{y}(\tau))$, или, что статистически эквивалентно,

о нахождении характеристической функции

$$Q(\lambda, t) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau V(\vec{y}(\tau)) \right\} \right\rangle \quad (5.6)$$

Эту задачу можно свести к задаче о нахождении решения некоторого вспомогательного параболического уравнения. Введем функцию

$$u(t) = u(t') + \int_{t'}^t d\tau V(\vec{y}(\tau)) \quad (5.7)$$

и рассмотрим $(d+1)$ -мерный векторный случайный процесс $\{\vec{y}(t), u(t)\}$, являющийся теперь решением векторного стохастического

дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} y_{\alpha} = A_{\alpha}(\vec{y}) + f_{\alpha}(t), \quad \frac{d}{dt} u = V(\vec{y}). \quad (5.8)$$

Это уравнение можно рассматривать как частный случай уравнения (5.2). Матричные элементы матрицы корреляции при этом будут совпадать с $\sigma_{\alpha\beta}$ при $\alpha, \beta = 1, \dots, d$ либо обращаться в нуль, если хотя бы один из индексов α, β равен $d + 1$. Поэтому можно утверждать, что процесс $\{\vec{y}(t), u(t)\}$ диффузионный [4]. Согласно общей схеме (см. [5, 6]), для переходной функции $w(\vec{y}, u, t; \vec{y}', u', t')$ этого процесса составим уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\vec{y}, u, t; \vec{y}', u', t') = - \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} (A_{\alpha} w) - V(\vec{y}) \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial y_{\alpha} \partial y_{\beta}}. \quad (5.9)$$

Найдя его решение с начальным условием

$$w(\vec{y}, u, t'; \vec{y}', u', t') = \delta(\vec{y} - \vec{y}') \delta(u - u'), \quad (5.10)$$

а затем, положив $u' = 0$ и проинтегрировав по всем y_{α} , получим иско-
мую функцию распределения функционала $u = \int_0^t d\tau V(y(\tau))$ при усло-
вии, что $y_{\alpha}(t') = y_{\alpha}$.

На практике, однако, чаще всего необходимо знать не условную функцию распределения величины u , а безусловную, т. е. полученный результат нужно дополнительно усреднить с некоторой плотностью распределения вероятностей координат y_{α} . При этом естественная (и обычная) постановка задачи такова. Принимается, что $t' = 0$ и считается, что «белый» шум $f_{\alpha}(t)$ воздействует на систему уже достаточно долго до того момента времени $t = 0$, когда начинают наблюдать величину u . Иначе, статистическая система, описываемая уравнением движения (5.2), находится в равновесном состоянии при $t = 0$ (при условии, что такое равновесное состояние существует). Поэтому одновременная функция распределения $w(\vec{y}')$ координат y_{α} определяется по закону

$$w(\vec{y}') = \lim_{t' \rightarrow -\infty} w(\vec{y}, ; \vec{y}', t'). \quad (5.11)$$

Таким образом, для функции распределения $P(u)$ величины u получаем

$$P(u) = \int d\vec{y} \int d\vec{y}' w(\vec{y}') w(\vec{y}, u, t; \vec{y}', u', t')|_{u'=0}. \quad (5.12)$$

Поскольку, как правило, более удобно вычислять не функцию распределения, а производящую (характеристическую) функцию

$$Q(\lambda, t) = \int_0^{\infty} du P(u) e^{-\lambda u}, \quad (5.13)$$

приведем выражение

$$Q(\lambda, t) = \int_d d\vec{y} \int_d d\vec{y}' w(\vec{y}') q(\lambda; \vec{y}, \vec{y}', t'), \quad (5.14)$$

где

$$q(\lambda; \vec{y}, t; \vec{y}', t') = \int_0^\infty du w(\vec{y}, u, t; \vec{y}', u', t') e^{-\lambda u} \big|_{u'=0}. \quad (5.15)$$

Эта функция, согласно (5.9), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} q(\lambda; \vec{y}, t; \vec{y}', t') = -\frac{\partial}{\partial y_\alpha} (A_{\alpha q}) + \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 q}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} - \lambda V(\vec{y}) q \quad (5.16)$$

с начальным условием

$$q(\lambda; \vec{y}, t'; \vec{y}', t') = \delta(\vec{y} - \vec{y}'). \quad (5.17)$$

Упражнения

5.1.1. (M20). Пусть d -компонентный случайный процесс задан системой стохастических дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \vec{y} = -B\vec{y} + \vec{f}(t),$$

где $f_\alpha(t)$ — нормальный «белый» шум,

$$\langle f_\alpha(t) f_\beta(t') \rangle = \sigma_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t'), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, d,$$

а B — $(d \times d)$ -матрица. Показать, что решение уравнения Колмогорова для переходной плотности вероятностей w d -мерного случайного процесса $y(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\vec{y}, t; \vec{y}', t') = -\frac{\partial}{\partial y_\alpha} (B_{\alpha\beta} y_\beta w) + \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}$$

с начальным условием $w(\vec{y}, t'; \vec{y}', t') = \delta(\vec{y} - \vec{y}')$ имеет вид

$$w(\vec{y}, t; \vec{y}', t') = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} (\det F)^{1/2}} \exp \{ -z_\alpha (F^{-1})_{\alpha\beta} z_\beta \},$$

где

$$z_\alpha = y_\alpha + (e^{-B(t-t')})_{\beta\alpha} y'_\beta;$$

$$F_{\alpha\beta} = \int_{t'}^t d\tau (e^{-B(t-\tau)})_{\alpha\beta} \sigma_{\beta\gamma} (e^{-B(t-\tau)})_{\gamma\delta}.$$

5.1.2. (M15). Пусть B — (2×2) -матрица с постоянными элементами

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Показать, что

$$\exp B = \frac{\exp(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 - d & b \\ c & \lambda_1 - a \end{pmatrix} + \frac{\exp(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 - d & b \\ c & \lambda_2 - a \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}].$$

5.1.3. (M25). Пусть $f(z)$ — аналитическая функция. Показать, что [3]

$$f(B) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz (z - B)^{-1} f(z),$$

где B — квадратная матрица, а контур интегрирования выбирается так, чтобы охватить на z -плоскости точки, отвечающие всем собственным числам этой матрицы (формула Пуанкаре для функции от матрицы).

5.1.4. (M15). Продолжение. Учитывая, что для (2×2) -матриц справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} z-a; & -b \\ -c; & z-d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z-a)(z-d)-bc} \begin{pmatrix} z-d; & b \\ c; & z-a \end{pmatrix},$$

найти явный вид для матричных функций

$$f(B) = \exp B; \quad f(B) = \ln B; \quad f(B) = (1-B)^{-1}; \quad f(B) = J_n(B),$$

где $J_n(z)$ — функция Бесселя.

5.1.5. (M15). Продолжение. Рассмотреть предыдущее упражнение, но для матрицы B , у которой: а) $c = d = 0$; б) $b = c = d = 0$; в) $a = c = d = 0$.

5.2. ДИSSIPАТИВНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПРИМЕР С ОУ-ШУМОМ

В этом параграфе получим общее решение задачи, сформулированной выше, для случая, в котором векторное поле $A(\vec{y})$ сводится к линейному преобразованию $\vec{A}\vec{y}$, т. е. A — $(d \times d)$ -матрица, а $V(\vec{y})$ — квадратичная форма с симметричной $(d \times d)$ -матрицей B ,

$$V(\vec{y}) = (\vec{y}, B\vec{y}). \quad (5.18)$$

Согласно (5.14), необходимо сначала найти функцию $q(\lambda; \vec{y}, t; \vec{y}', t')$. Исходный момент времени t' в дальнейшем будем полагать равным нулю. На основании (5.16) эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} q = - \frac{\partial}{\partial y_\alpha} (A_{\alpha\beta} y_\beta q) + \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 q}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} - \lambda y_\alpha B_{\alpha\beta} y_\beta q. \quad (5.19)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$q = g \exp \left\{ at - \frac{1}{2} (\vec{y}, C\vec{y}) \right\}, \quad (5.20)$$

где $a = \text{const}$; C — симметричная $(d \times d)$ -матрица, не зависящая от t . Постоянную a и матрицу C выберем таким образом, чтобы уравнение для введенной в (5.20) функции g не содержало члена, пропорционального самой функции g . На основании этого функция g должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} g = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} + (D\vec{y})_\alpha \frac{\partial g}{\partial y_\alpha} \quad (5.21)$$

с начальным условием

$$g(\lambda; \vec{y}, 0; \vec{y}', 0) = \delta(\vec{y} - \vec{y}') \exp \left\{ \frac{1}{2} (\vec{y}, C\vec{y}) \right\}, \quad (5.22)$$

а матрица D определяется так:

$$D = -A - \sigma C. \quad (5.23)$$

При этом постоянная a находится по формуле

$$a = -\text{Sp} \left(A + \frac{1}{2} \sigma C \right), \quad (5.24)$$

а матрица C является одним из решений алгебраического уравнения

$$C\sigma C + (AC + CA^+) - 2\lambda B = 0, \quad (5.25)$$

где A^+ — матрица, транспонированная по отношению к матрице A . Для решения уравнения (5.21) сделаем замену переменных по правилу $z_\alpha = (e^{-tD}\vec{y})_\alpha$ и определим функцию

$$h(\lambda; \vec{z}, t) \equiv g(\lambda; \vec{y}, t; \vec{y}', 0).$$

Тогда подстановкой в (5.21) найдем уравнение для $h(\lambda; \vec{z}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} h = \frac{1}{2} E_{\alpha\beta}(t) \frac{\partial^2 h}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}, \quad (5.26)$$

где матрица

$$E(t) = e^{tD} \sigma e^{tD^+}. \quad (5.27)$$

Решение уравнения (5.26) с начальным условием

$$h(\lambda; \vec{z}, 0) = g(\lambda; \vec{y}, t; \vec{y}', 0)|_{\vec{y}=\vec{z}} = \delta(\vec{z} - \vec{y}') \exp \left\{ \frac{1}{2} (\vec{z}, C\vec{z}) \right\} \quad (5.28)$$

находится стандартным способом с помощью фурье-преобразования по переменным z_α (см., например, [6]). После элементарных выкладок получим

$$h(\lambda; \vec{z}, t) = \frac{\exp \left\{ \frac{1}{2} (\vec{y}', C\vec{y}') - \frac{1}{2} ((\vec{y}' - \vec{z}), F_t(\vec{y}' - \vec{z})) \right\}}{(2\pi)^{d/2} (\det F_t)^{1/2}}, \quad (5.29)$$

где

$$F_t = \int_0^t d\tau E(\tau). \quad (5.30)$$

Формулы (5.20), (5.29) и определение $h(\lambda; \vec{z}, t)$ дают искомое решение уравнения (5.19).

Вернемся к нахождению производящей функции $Q(\lambda, t)$, для чего выполним сначала интегрирование по y_α в формуле (5.14). Так как подынтегральное выражение представляет собой гауссову функцию, получим

$$\int_d d\vec{y} q(\lambda; \vec{y}, t; \vec{y}', 0) = \frac{\exp \left\{ at + \frac{1}{2} (\vec{y}', (C - F_t^{-1})\vec{y}') \right\}}{(2\pi)^{d/2} (\det F_t)^{1/2}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int d\vec{y} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{y}, (C + e^{tD^+} F_t^{-1} e^{tD}) \vec{y}) + (\vec{y}, e^{tD^+} F_t^{-1} \vec{y}') \right\} = \\ & = \frac{\exp \left\{ at + \frac{1}{2} (\vec{y}', (C - F_t^{-1} + G_t) \vec{y}') \right\}}{[\det F_t \det (C + e^{tD^+} F_t^{-1} e^{tD})]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где матрица

$$G_t = (F_t + F_t e^{-tD^+} C e^{-tD} F_t)^{-1} \quad (5.32)$$

и учтено, что $F_t^+ = F_t$. Поскольку

$$\det (C + e^{tD^+} F_t^{-1} e^{tD}) = \exp (2i \operatorname{Sp} D) \det (F_t^{-1} + e^{-tD^+} C e^{-tD})$$

и, кроме того, $a - \operatorname{Sp} D = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} (\sigma C)$, находим выражение для искомого интеграла

$$\int d\vec{y} q(\lambda; \vec{y}, t; \vec{y}', 0) = \left[\frac{\exp \{ \operatorname{Sp} (\sigma C) + (\vec{y}', (C - F_t^{-1} + G_t) \vec{y}') \}}{\det (1 + F_t e^{-tD^+} C e^{-tD})} \right]^{1/2}. \quad (5.33)$$

Далее для вычисления функции $Q(\lambda, t)$ потребуется явное выражение для переходной функции $w(\vec{y}, t; \vec{y}', 0)$ процесса $\{y_\alpha(t)\}$. Это выражение можно получить, если заметить, что уравнение для $w(\vec{y}, t; \vec{y}', 0)$ следует из (5.19) при условии $\lambda = 0$. Таким образом,

$$w(\vec{y}, t; \vec{y}', 0) = q(0; \vec{y}, t; \vec{y}', t). \quad (5.34)$$

Положив $\lambda = 0$ в алгебраическом уравнении (5.25), получим, что в этом случае достаточно взять $C = 0$, а поэтому $D = -A$ и $a = -\operatorname{Sp} A$. Следовательно, учитывая (5.20) и (5.28), найдем

$$w(\vec{y}, t; \vec{y}', 0) = \frac{\exp \left\{ -t \operatorname{Sp} A - \frac{1}{2} ((\vec{y} - e^{At} \vec{y}'), e^{-A^+ t} F_{0t} e^{-At} (\vec{y} - e^{At} \vec{y}')) \right\}}{(2\pi)^{d/2} (\det F_{0t})^{1/2}}, \quad (5.35)$$

где

$$F_{0t} = \int_0^t d\tau e^{-A\tau} \sigma e^{-A^+ \tau}. \quad (5.36)$$

Примем теперь, что матрица A является диссипативной. В противном случае система, описываемая уравнением движения (5.2), не будет устойчивой, т. е. не будет обладать состоянием равновесия, следовательно, не существует равновесной функции распределения $w(\vec{y})$. Ввиду диссипативности матрицы A имеем $e^{At} \vec{y}' = 0$, когда $t \rightarrow \infty$, и

$$\bar{\sigma} = \int_0^t d\tau e^{A\tau} \sigma e^{A^+ \tau} \rightarrow \int_0^\infty d\tau e^{A\tau} \sigma e^{A^+ \tau}. \quad (5.37)$$

Поэтому согласно (5.11) и (5.35) получим выражение для функции $w(\vec{y})$:

$$w(\vec{y}) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{y}, \tilde{\sigma}^{-1} \vec{y}) \right\}}{(2\pi)^{d/2} (\det \tilde{\sigma})^{1/2}}. \quad (5.38)$$

Теперь можно вычислить согласно (5.14) производящую функцию $Q(\lambda, t)$. Пользуясь (5.33), (5.35) и тождеством

$$F_t^{-1} - G_t = e^{-tD} C e^{-tD} (1 + F_t e^{-tD} C e^{-tD})^{-1}, \quad (5.39)$$

получаем окончательно

$$Q(\lambda, t) = \exp \left(\frac{1}{2} t \operatorname{Sp} \sigma C \right) \{ \det [(1 - \tilde{\sigma} C) (1 + F_t e^{-tD} C e^{-tD}) + \\ + \tilde{\sigma} e^{-tD} C e^{-tD}] \}^{-1/2}. \quad (5.40)$$

Таким образом, решение задачи нахождения математического ожидания (5.6) состоит в следующем:

- а) для заданных матриц A и σ вычислить $\tilde{\sigma} = \int_0^\infty d\tau e^{A\tau} \sigma e^{A^+ \tau}$;
- б) для заданной матрицы B найти одно из решений уравнения (5.24);
- в) вычислить последовательно матрицы $D = -A - \sigma C$, e^{-tD} , $F_t = \int_0^t d\tau e^{\tau D} \sigma e^{\tau D^+}$;

г) вычислить функцию $Q(\lambda, t)$ по формуле (5.40).

Проведенная процедура может быть использована для решения различных статистических задач, в частности тех задач, где порождающим процессом является суперпозиция двух или более независимых ОУ-процессов и процессов типа «белого» шума. В следующем параграфе эта процедура будет применена для статистического анализа квадратичного функционала, основанного на решении стохастического гармонического уравнения.

Пример. Рассмотрим простейший пример, как из (5.40) получается уже известная формула (2.28) для производящей функции $Q(\lambda, t)$ в случае ОУ-процесса. Одномерный ОУ-процесс задается уравнением движения

$$\ddot{x} + \nu \dot{x} = f(t), \quad \nu > 0, \quad (5.41)$$

где $f(t)$ — одномерный «белый» шум; $\langle f(t) f(t') \rangle = \sigma \delta(t - t')$. В этом случае все матрицы представляют собой числа, в частности $A = -\nu$, а матрицу B можно заме-

нить на единицу. Следовательно, $\tilde{\sigma} = \int_0^\infty d\tau \sigma e^{-2\nu\tau} = \frac{\sigma}{2\nu}$, а уравнение (5.24) при-

мет вид $\sigma c^2 - 2\nu c - 2\lambda = 0$. Одно из его решений есть $c = \frac{\nu + r}{\sigma}$, $r = (\nu^2 + 2\lambda\sigma)^{1/2}$,

поэтому $D = -r$ и $F_t = \frac{\sigma}{2r} (1 - e^{-2rt})$. После несложных преобразований в (5.40) найдем

$$Q(\lambda, t) = \left[\frac{4rve^{\nu t}}{(r + \nu)^2 e^{rt} - (r - \nu)^2 e^{-rt}} \right]^{1/2}, \quad (5.42)$$

что совпадает с (2.28).

Упражнения

5.2.1. (M5). Показать, что любая унитарная матрица размером (2×2) может быть приведена к форме [2]

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

5.2.2. (M20). Убедиться в том, что для произвольной квадратной матрицы A имеет место тождество

$$\ln \det A = \text{Sp} \ln A.$$

5.2.3. (M20). Продолжение. Показать, что [3]

$$\det (1 + \lambda A) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n-1} \lambda^n \text{Sp} (A^n) \right\}.$$

5.2.4. (M20). Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, A — $(N \times N)$ -матрица и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ — ее различные собственные числа. Показать, что [1]

$$f(A) = \sum_{n=1}^N f(\lambda_n) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \frac{A - \lambda_m}{\lambda_n - \lambda_m}.$$

5.2.5. (M25). Продолжение. Показать, что [1]

$$\det f(A) = \prod_{n=1}^N f(\lambda_n)$$

при условии, что каждое из $f(\lambda_n)$ существует.

5.2.6. (M20). Показать, что для произвольных матриц A, B, C, D одинакового размера определитель матрицы G такой, что

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

равен [3] $\det G = \det A \det (D - CA^{-1}B)$ в предположении, что A^{-1} существует.

5.2.7. (M20). Убедиться в том, что [3]

а) решение матричного дифференциального уравнения $\frac{dX}{dt} = AX + XB$, $X(0) = C$, где A, B, C и X — квадратные матрицы, дается равенством $X(t) = \exp(At) C \exp(Bt)$;

б) единственным решением матричного уравнения $AX + XB = C$ является матрица $X = - \int_0^{\infty} dt \exp(At) C \exp(Bt)$.

5.2.8. (M45). Пусть $f(x, y)$ — аналитическая функция двух переменных и A, B — матрицы одинакового размера. Построить удовлетворительную процедуру нахождения величины D_2 , где $D_2 = \det f(A, B)$.

5.2.9. (M45). Продолжение. То же для случая функции трех переменных $f(x, y, z)$ и трех матриц A, B, C , а $D_3 = \det f(A, B, C)$.

5.2.10. (M30). Рассмотрим уравнение движения (1.1) для ОУ-процесса $x(t)$ и введем матрицу

$$W = \begin{pmatrix} -v - \lambda\sigma/v & -\lambda\sigma^2/2v^2 \\ -2\lambda & v + \lambda\sigma v \end{pmatrix}.$$

Показать, что выражение (2.28) для безусловной производящей функции $Q_x(\lambda, T)$, отвечающей однокомпонентному процессу Орнштейна — Уленбека, можно получить, если вычислить правый нижний элемент матричной экспоненты $\exp(WT)$.

5.3. ГАРМОНИЧЕСКИЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

Значительное количество задач теории случайных процессов может быть сформулировано в терминах ГС-процесса, основанного на уравнении движения

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = f(t) \quad (5.43)$$

с порождающим «белым» шумом $f(t)$. В этом параграфе изучим статистику функционала (5.64), описывающего флуктуации энергии в колебательном контуре, возбуждаемом широкополосным шумом. Прежде чем переходить к решению, изложим некоторые сведения, полезные при анализе подобных задач. Введем двухкомпонентные векторы

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x/\omega \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t)/\omega \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

и матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ -\omega & 2\beta \end{pmatrix}, \quad (5.45)$$

в терминах введенных величин получим уравнение для $X(t)$, которое показывает, что случайный процесс $X(t)$ является частным случаем ($d = 2$) процесса (5.2)

$$\dot{X}_\alpha = (AX)_\alpha + F_\alpha(t). \quad (5.46)$$

Двумерный «белый» шум $F(t)$ обладает матрицей корреляции

$$(\sigma_{\alpha\beta}) = \frac{\sigma}{\omega^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

(матрицу корреляций σ не следует путать со скаляром σ -интенсивностью «белого» шума; употребление этих величин ясно из контекста).

Дальнейший анализ удобно проводить, используя технику, основанную на матрицах Паули θ_l , $l = 0, 1, 2, 3$,

$$\theta_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

набор которых образует базис в пространстве 2×2 -матриц [7]. Разложения $A_{\alpha\beta}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$ по этому базису имеют вид

$$A = -\beta(\theta_0 - \theta_3) + i\omega\theta_2, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\sigma}{2\omega^2}(\theta_0 - \theta_3)_{\alpha\beta}. \quad (5.49)$$

Далее для расчетов потребуется формула разложения по базису θ_i экспоненты от произвольной 2×2 -матрицы M

$$e^{Mt} = e^{M_0 t} \left[\operatorname{ch}(|M|t) + \frac{1}{|M|} \sum_{i=1}^3 M_i \theta_i \operatorname{sh}(|M|t) \right], \quad (5.50)$$

где M_0, M_1, M_2, M_3 — коэффициенты разложения матрицы M в базисе θ_i ;

$$|M| = \left(\sum_{i=1}^3 M_i^2 \right)^{1/2}.$$

Так как для любой 2×2 -матрицы M , определяемой коэффициентами разложения M_0, M_1, M_2, M_3 , ее детерминант может быть вычислен по формуле

$$\det M = \det \begin{pmatrix} M_0 + M_3 & M_1 - iM_2 \\ M_1 + iM_2 & M_0 - M_3 \end{pmatrix} = M_0^2 - |M|^2, \quad (5.51)$$

то для вычисления функции $Q(\lambda, t)$ согласно (5.40) достаточно вычислить коэффициенты разложения матрицы

$$(1 - \tilde{\sigma}C)(1 + F e^{-D+t} C e^{-Dt}) + \tilde{\sigma} e^{-D+t} C e^{-Dt}. \quad (5.52)$$

В базисе $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ произведение наборов (M_0, M_m) и (M'_0, M'_m) , где $m = 1, 2, 3$, коэффициентов разложения матриц M и M' есть набор коэффициентов разложения матрицы MM' , который имеет вид

$$(M_0 M'_0 + (\vec{M}, \vec{M}'); M_0 M'_m + M'_0 M_m + i[\vec{M}, \vec{M}']_m), \quad (5.53)$$

где $(\cdot, \cdot)$ и $[\cdot, \cdot]$ — соответственно скалярное и векторное произведения векторов $\vec{M} = (M_m)$ и $\vec{M}' = (M'_m)$, $m = 1, 2, 3$.

Пользуясь (5.53), вычислим матрицу $\tilde{\sigma}$. Для этого выпишем набор коэффициентов разложения матриц $\exp(A\tau)$, σ , $\exp(A^+\tau)$. На основании (5.49), (5.50) найдем

$$\sigma \rightarrow \frac{\sigma}{2\omega^2} (1; 0, 0, -1), \quad (5.54)$$

$$e^{A\tau} \rightarrow \left(e^{-\beta\tau} \operatorname{ch}(|A|\tau); e^{-\beta\tau} \frac{\operatorname{sh}(|A|\tau)}{|A|} (0, i\omega, \beta) \right), \quad (5.55)$$

где $|A| = (\beta^2 - \omega^2)^{1/2}$ и, поскольку величина $|A|$ либо вещественна, либо чисто мнима, то

$$e^{A^+\tau} \rightarrow \left(e^{-\beta\tau} \operatorname{ch}(|A|\tau); e^{-\beta\tau} \frac{\operatorname{sh}(|A|\tau)}{|A|} (0, -i\omega, \beta) \right). \quad (5.56)$$

Имеют место следующие формулы для коэффициентов разложения матрицы MNM^+ при условии, что N_0, N_m и M_0 вещественны:

$$(MNM^+)_0 = N_0(M_0^2 + (\vec{M}, \vec{M}^+)) + (\vec{N}, 2M_0 \operatorname{Re} \vec{M} + i[\vec{M}^+, \vec{M}]), \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} (MNM^+)_m &= N_0(2M_0 \operatorname{Re} M_m - i[\vec{M}^+, M]_m) + \\ &+ N_m(M_0^2 - (\vec{M}, \vec{M}^+)) + 2\operatorname{Re} M_m(\vec{M}^+, N) + 2M_0[\vec{N}, \operatorname{Im} \vec{M}]. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Если выбрать векторы $\vec{N}$ и $\vec{M}$ со структурой

$$\vec{N} = (0, 0, n), \quad \vec{M} = (0, im_1, m_2) \quad (5.59)$$

и вещественными n, m_1, m_2 , то получим

$$\begin{aligned} (MNM^+)_{00} &= N_0 (M_0^2 + m_1^2 + m_2^2) + 2nm_1M_0, \\ (MNM^+)_{01} &= -2m_1 (N_0m_2 + M_0n), \\ (MNM^+)_{02} &= 0, \\ (MNM^+)_{03} &= 2M_0N_0m_2 + n (M_0^2 + m_2^2 - m_1^2). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Отметим, что согласно (5.54), (5.56) матрицы σ и $e^{A\tau}$ обладают свойством (5.59), если положить $M = e^{A\tau}$ и $N = \sigma$, поэтому для вычисления матрицы $e^{A\tau}\sigma e^{A\tau}$ можно использовать формулы (5.60). Полагая в них

$$N_0 = -n = \frac{\sigma}{2\omega^2}, \quad M_0 = e^{-\beta\tau} \operatorname{ch}(|A|\tau),$$

$$m_1 = \frac{\omega}{|A|} e^{-\beta\tau} \operatorname{sh}(|A|\tau), \quad m_2 = \frac{\beta}{|A|} e^{-\beta\tau} \operatorname{sh}(|A|\tau),$$

получаем, что $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_0; \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3)$, где

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_0 &= \frac{\sigma}{2\omega^2} \left(\Lambda_{11} + \frac{\beta^2 + \omega^2}{|A|^2} \Lambda_{22} \right) - \frac{\sigma}{\omega^2} \frac{\beta}{|A|} \Lambda_{12}, \\ \tilde{\sigma}_1 &= \frac{\sigma}{\omega|A|} \left(\Lambda_{12} - \frac{\beta}{|A|} \Lambda_{22} \right), \\ \tilde{\sigma}_2 &= 0, \quad \tilde{\sigma}_3 = \frac{\sigma}{\omega^2} \frac{\beta}{|A|} \Lambda_{12} - \frac{\sigma}{2\omega^2} (\Lambda_{11} + \Lambda_{22}), \end{aligned} \quad (5.61)$$

а также

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= \int_0^\infty d\tau e^{-2\beta\tau} \operatorname{ch}^2(|A|\tau) = \frac{\omega^2 + \beta^2}{4\beta\omega}, \\ \Lambda_{12} &= \int_0^\infty d\tau e^{-2\beta\tau} \operatorname{sh}(|A|\tau) \operatorname{ch}(|A|\tau) = \frac{|A|}{4\omega^2}, \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\Lambda_{22} = \int_0^\infty d\tau e^{-2\beta\tau} \operatorname{sh}^2(|A|\tau) = \frac{|A|^2}{4\beta\omega}.$$

Из (5.61) и (5.62) следует

$$\tilde{\sigma} = \left(\frac{\sigma}{4\beta\omega^2}; 0, 0, 0 \right), \quad (5.63)$$

т. е. матрица $\tilde{\sigma}$ кратна единичной матрице θ_0 .

Теперь можно обратиться к нахождению характеристической функции

$$Q(\lambda,) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^\infty d\tau x^2(\tau) \right\} \right\rangle, \quad (5.64)$$

т. е. математического ожидания по траекториям ГС-процесса. Для него

$$B = \frac{\omega^3}{2} (\theta_0 - \theta_3) \quad (5.65)$$

в соответствии с (5.19) и (5.46). Поскольку матрицы σ и A определяются в этом случае формулами (5.49), будем искать матрицу C в виде $C = (c; 0, 0, 0)$. Тогда $A + A^+ = -2\beta (\theta_0 - \theta_3)$ и алгебраическое уравнение (5.25) сводится к следующему:

$$\frac{\sigma}{2\omega^2} c^2 - 2\beta c - \omega^2 \lambda = 0. \quad (5.66)$$

Поэтому в качестве матрицы C можно выбрать

$$C = \left(2\omega \frac{r + \beta}{\sigma}; 0, 0, 0 \right), \quad (5.67)$$

$$r = (\beta^2 + \sigma\lambda/2)^{1/2}. \quad (5.68)$$

Следовательно, для матрицы D найдем

$$D = -r (\theta_0 - \theta_3) - i\omega\theta_2. \quad (5.69)$$

Из сравнения (5.69) с (5.49) следует, что для получения коэффициентов разложения матрицы F_t по базису $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ достаточно в формулах (5.61) для коэффициентов разложения матрицы $\tilde{\sigma}$ выполнить замену $\beta \rightarrow r$ и $\omega \rightarrow -\omega$, а интегралы $\Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \Lambda_{22}$ заменить соответственно на

$$\begin{aligned} \Lambda_{11}(t) &= \int_0^t d\tau e^{-2r\tau} \operatorname{ch}^2(|D|\tau), \\ \Lambda_{12}(t) &= \int_0^t d\tau e^{-2r\tau} \operatorname{sh}(|D|\tau) \operatorname{ch}(|D|\tau), \\ \Lambda_{22}(t) &= \int_0^t d\tau e^{-2r\tau} \operatorname{sh}^2(|D|\tau), \end{aligned} \quad (5.70)$$

где

$$|D| = \sqrt{r^2 - \omega^2} \equiv \Omega. \quad (5.71)$$

Тогда найдем

$$\begin{aligned} (F_t)_0 &= \frac{\sigma}{4\omega^2 r} (1 - e^{-2rt}) - \frac{\sigma r}{2\Omega^2 \omega^3} e^{-2rt} \operatorname{sh}^2(\Omega t), \\ (F_t)_1 &= -\frac{\sigma}{2\omega\Omega^2} e^{-2rt} \operatorname{sh}^2(\Omega t), \\ (F_t)_2 &= 0, \quad (F_t)_3 = -\frac{\sigma}{4\omega^2 \Omega} e^{-2rt} \operatorname{sh}(2\Omega t). \end{aligned} \quad (5.72)$$

Вычислим коэффициенты разложения матрицы $e^{Dt} e^{D^+t}$. Для этого опять можно воспользоваться формулами (5.57) и (5.58), если положить $N = 1$ (следовательно, $n = 0$ и $N_0 = 1$), а также $M = e^{Dt}$. Поэтому

$$M_0 = e^{-rt} \operatorname{ch}(\Omega t), \quad m_1 = -\frac{\omega}{\Omega} e^{-rt} \operatorname{sh}(\Omega t), \quad m_2 = \frac{r}{\Omega} e^{-rt} \operatorname{sh}(\Omega t). \quad (5.73)$$

Выражения (5.73) получаются из (5.55) заменой $A \rightarrow D$, или, что то же самое, $\beta \rightarrow r$, $\omega \rightarrow -\omega$, $|A| \rightarrow \Omega$. Таким образом, коэффициенты разложения матрицы $e^{D_t} e^{D^{+t}}$ имеют следующий вид:

$$(e^{D_t} e^{D^{+t}})_0 = e^{-2rt} \left[\text{ch}^2(\Omega t) + \frac{r^2 + \omega^2}{\Omega^2} \text{sh}^2(\Omega t) \right],$$

$$(e^{D_t} e^{D^{+t}})_1 = \frac{2r\omega}{\Omega^2} e^{-2rt} \text{sh}^2(\Omega t), \quad (5.74)$$

$$(e^{D_t} e^{D^{+t}})_2 = 0, \quad (e^{D_t} e^{D^{+t}})_3 = \frac{r}{\Omega} e^{-2rt} \text{sh}(2\Omega t).$$

Поскольку матрицы $\tilde{\sigma}$ и C кратны единичной матрице θ_0 и $\det(e^{D_t}) = \exp(t \text{Sp } D)$, $\text{Sp}(\sigma C) = 2r + 2\beta$, то производящая функция $Q(\lambda, t)$ (5.64) примет вид

$$Q(\lambda, t) = e^{(\beta - r)t} (\det J_t)^{-1/2}, \quad (5.75)$$

где матрица

$$J_t = (1 - \tilde{\sigma}C) e^{D_t} e^{D^{+t}} + (1 - \tilde{\sigma}C) C F_t + \tilde{\sigma}C. \quad (5.76)$$

Учитывая формулы (5.72), (5.74), а также (5.63), (5.67), найдем коэффициенты разложения матрицы J_t по базису $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$:

$$(J_t)_0 = \frac{e^{-rt}}{4\beta r} \left\{ (\beta + r)^2 e^{rt} - (\beta - r)^2 e^{-rt} - \frac{2r^2(r - \beta)^2}{\Omega^2} e^{-rt} \text{sh}^2(\Omega t) \right\},$$

$$(J_t)_1 = -\frac{\omega(r - \beta)^2}{2\beta\Omega^2} e^{-2rt} \text{sh}^2(\Omega t), \quad (5.77)$$

$$(J_t)_2 = 0, \quad (J_t)_3 = -\frac{(r - \beta)^2}{4\beta\Omega} e^{-2rt} \text{sh}(2\Omega t).$$

Если учесть, что

$$\det J_t = (J_t)_0^2 - \sum_{m=1}^3 (J_t)_m^2, \quad (5.78)$$

то можно убедиться, что отрицательные слагаемые в формуле (5.78) компенсируются слагаемыми из $(J_t)_0^2$, в результате чего найдем окончательно выражение для искомой производящей функции

$$Q(\lambda, t) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right\rangle =$$

$$= \frac{4r\beta e^{\beta t}}{\left\{ [(\beta + r)^2 e^{rt} - (\beta - r)^2 e^{-rt}]^2 - 4 \frac{r^2(\beta^2 - r^2)^2}{\Omega^2} \text{sh}^2(\Omega t) \right\}^{1/2}}, \quad (5.79)$$

$$\Omega = (r^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad r = (\beta^2 + \sigma\lambda/2)^{1/2}.$$

С помощью (5.79) можем рассмотреть случай осциллятора с нулевой частотой, $\omega = 0$:

$$\ddot{x} + 2\beta x = f(t). \quad (5.80)$$

Тогда

$$Q(\lambda, t) = \left[\frac{4\rho v e^{vt}}{(\rho + v)^2 e^{0t} - (\rho - v)^2 e^{-\rho t}} \right]^{1/2}, \quad (5.81)$$

где $v = 2\beta$; $\rho = (v^2 + 2\lambda\sigma)^{1/2}$, что совпадает с (2.28).

В противоположном случае, когда $\omega \rightarrow \infty$, из (5.79) получим

$$Q(\lambda, t) = \frac{4r\beta e^{\beta t}}{(r + \beta)^2 e^{rt} - (r - \beta)^2 e^{-rt}}; \quad (5.82)$$

этот результат является квадратом выражения (2.28).

Упражнения

5.3.1. (M15). Убедиться в справедливости соотношений (5.50) — (5.52) и (5.59).

5.3.2. (M5). Убедиться в справедливости соотношений (5.62), (5.72) и (5.74).

5.3.3. (M15). Показать, что следующие условные средние по траекториям ГС-процесса равны [8—10]:

$$\langle \dot{x}(t) \rangle = \dot{x}_0 \left(\cos \omega' t - \frac{\beta}{\omega'} \sin \omega' t \right) - \frac{\omega^2}{\omega'} x_0 \sin \omega' t e^{-\beta t},$$

$$\langle x(t) \rangle = \frac{\dot{x}_0}{\omega'} \sin \omega' t e^{-\beta t} + x_0 \left(\cos \omega' t + \frac{\beta}{\omega'} \sin \omega' t \right) e^{-\beta t},$$

$$\langle (\dot{x}(t) - \langle \dot{x}(t) \rangle)^2 \rangle = \frac{\sigma}{\beta} - \frac{\sigma}{\beta} \left(1 + \frac{2\beta^2}{\omega'^2} \sin^2 \omega' t - \frac{2\beta}{\omega'} \sin \omega' t \cos \omega' t \right) e^{-2\beta t},$$

$$\langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \rangle = \frac{\sigma}{\omega^2 \beta} - \frac{\sigma}{\omega^2 \beta} \left(1 + \frac{2\beta^2}{\omega'^2} \sin^2 \omega' t + \frac{2\beta}{\omega'} \sin \omega' t \cos \omega' t \right) e^{-2\beta t},$$

$$\langle (x(t) - \langle x(t) \rangle) (\dot{x}(t) - \langle \dot{x}(t) \rangle) \rangle = \frac{\sigma}{2\omega'^2} \sin^2 \omega' t e^{-2\beta t},$$

где везде $\omega' = (\omega^2 - \beta^2)^{1/2}$; $x_0 = x(0)$; $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$.

5.3.4. (M40). Уравнения стохастического затухающего осциллятора $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = f(t)$ можно переписать в виде

$$\dot{z} + \Omega z = f(t),$$

где $z = \dot{x} + \Omega^* x$, а величины Ω и Ω^* таковы, что $\Omega\Omega^* = \omega^2$, $\Omega + \Omega^* = 2\beta$. Таким образом, уравнение движения для комплекснозначного стохастического процесса $z(t)$ имеет вид уравнения Ланжевена. Построить меру, основанную на этом уравнении.

5.3.5. (M40). Продолжение. С помощью меры, построенной в предыдущем упражнении, вычислить следующие континуальные интегралы:

$$a) \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |z(\tau)|^2 \right\} \right\rangle_z;$$

$$б) \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau \dot{x}^2(\tau) \right\} \right\rangle_z.$$

5.3.6. (M25). Рассмотреть уравнение (5.25) для случая, когда $A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 2\beta \end{pmatrix}$,

$$\sigma = \frac{\sigma}{\omega^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Обозначая

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix},$$

показать, что решение матричного уравнения (5.25) равно

$$c_1 = c_4 = -\frac{2\beta\omega^2}{\sigma}, \quad c_{2,3} = \frac{\beta c_1 - \lambda}{\omega} \pm \left[\left(\frac{\beta c_1 - \lambda}{\omega} \right)^2 - \omega^2 \frac{4\lambda - 2\beta c_1}{\sigma} \right]^{1/2}.$$

5.3.7. (М25). Продолжение. Рассмотреть уравнение (5.25) для тех же матриц A и σ , но

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Показать, что решение матричного уравнения (5.25) равно

$$c_1 = c_4 = -\frac{2\beta\omega^2}{\sigma}, \quad c_{2,3} = \frac{\beta c_1}{\omega} \pm \left[\left(\frac{\beta c_1}{\omega} \right)^2 - \omega^2 \frac{2\lambda - \beta c_1}{\sigma} \right]^{1/2}.$$

5.3.8. (М30). Угловые характеристики шероховатой кривой [11]. Рассмотрим функционал на отрезке длиной L

$$\theta^2 = \frac{1}{L} \int_0^L dl \left(\frac{dx(l)}{dl} \right)^2,$$

где $x(l)$ — ГС-процесс

$$\frac{d^2x}{dl^2} + 2\beta \frac{dx}{dl} + \omega^2 x = f(l);$$

l — координата, $0 \leq l \leq L$; $f(l)$ — «белый» шум, $\langle f(l)f(l') \rangle = \sigma \delta(l-l')$. Плотность распределения $P(\theta)$ случайной величины θ равна

$$P(\theta) = 2\theta \int \frac{d\lambda}{2\pi i} \exp(\lambda\theta^2) Q(\lambda),$$

где $Q(\lambda)$ — производящая функция,

$$Q(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{l} \int_0^L dl \left(\frac{dx(l)}{dl} \right)^2 \right\} \right\rangle.$$

5.3.9. (М30). Продолжение. С помощью результата (5.79) для безусловной производящей функции $Q(\lambda)$ определить количественные характеристики случайной величины θ (рис. 5.1 и 5.2).

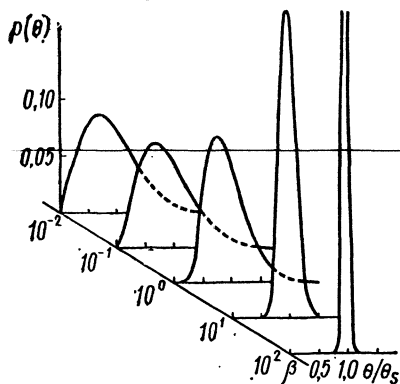


Рис. 5.1. Плотность распределения вероятностей $P(\theta)$ (см. упражнение 5.3.9):

$\sigma = 10.0$; $L = 1.0$; $\beta = 10^2$; $\theta_s = \sigma/4\beta$.

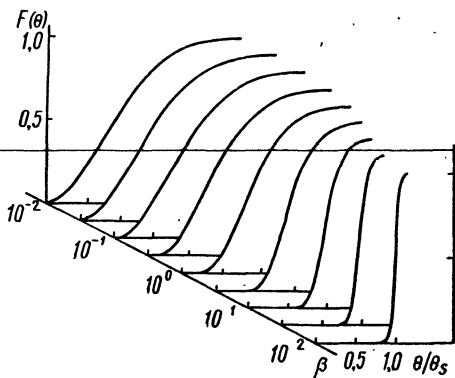


Рис. 5.2. Интегральная всроятность $F(\theta)$ (см. упражнение 5.3.9):

параметры см. рис. 5.1.

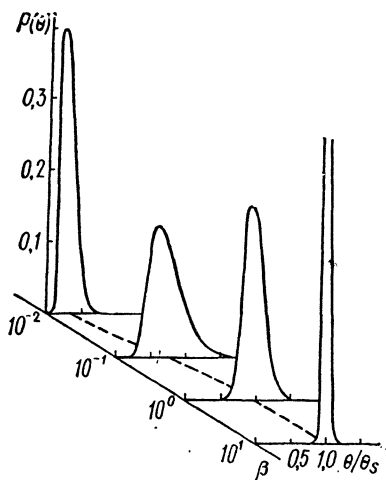


Рис. 5.3. Плотность распределения вероятностей $P(\theta)$ (см. упражнение 5.3.10):

параметры см. рис. 5.1; штриховой кривой указана на плоскости (θ, β) траектория среднего угла $\langle \theta \rangle$.

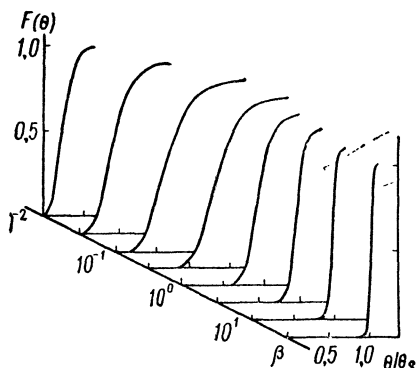


Рис. 5.4. Интегральная вероятность

$F(\theta)$ (см. упражнение 5.3.10):

параметры см. рис. 5.1

5.3.10. (М30). Продолжение. Случайная условная величина

$$\theta^2 = \frac{1}{L} \int_0^L dl \left(\frac{dx(l)}{dl} \right)^2 \Big|_{x(0)=0, x'(0)=0}$$

может быть описана в терминах плотности распределения вероятностей

$$P(0) = 2\theta \int \frac{d\lambda}{2\pi i} \exp(\lambda \theta^2) Q(\lambda; 0, 0),$$

где $Q(\lambda; 0, 0)$ — производящая функция,

$$Q(\lambda; 0, 0) = \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{L} \times \int_0^L dl \left(\frac{dx(l)}{dl} \right)^2 \right\} \right\rangle \Big|_{x(0)=0, x'(0)=0},$$

явный вид которой приведен ниже в выражении (5.107). С помощью этого результата определить количественные характеристики случайной величины θ (рис. 5.3 и 5.4). О выборе контура интегрирования см. § 5.4.

5.3.11. (М30). Продолжение. Построить приближенные выражения для двух плотностей распределения вероятностей $P(\theta)$, полученных в упражнениях 5.3.8 и 5.3.10.

5.3.12. (М30). Распределение площади, образованной случайной кривой. Пусть $x(\theta)$ и $y(\theta)$ — два независимых ГС-процесса с одинаковыми декрементами β , частотой ω и дисперсией σ . Для θ , заключенного в интервал углов $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, площадь S сектора, ограниченного линиями, соединяющими точку $(0, 0)$ с точками $(x(\theta_1), y(\theta_1))$ и $(x(\theta_2), y(\theta_2))$ на плоскости (x, y) , а также параметрической кривой $(x(\theta), y(\theta))$, равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta [x(\theta) y'(\theta) - y(\theta) x'(\theta)].$$

Эта величина является квадратичным функционалом относительно $x(\theta)$ и $y(\theta)$. Показать, что

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \langle \exp(-\lambda S) \rangle = \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{4\omega} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta [y'(\theta) + \omega x(\theta)]^2 \right\} \right\rangle \times \\ &\times \left\langle \exp \left\{ \frac{\lambda}{4\omega} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta [y'(\theta) - \omega x(\theta)]^2 \right\} \right\rangle \left\langle \exp \left\{ \frac{\lambda}{4\omega} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta [x'(\theta) + \omega y(\theta)]^2 \right\} \right\rangle \times \\ &\times \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{4\omega} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta [x'(\theta) - \omega y(\theta)]^2 \right\} \right\rangle, \end{aligned}$$

т. е. безусловное среднее $Q(\lambda)$ по двум ГС-процессам может быть факторизовано.

5.3.13. (М25). Продолжение. Пусть

$$q(\lambda, \omega) = \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{4\omega} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta [y'(\theta) + \omega x(\theta)]^2 \right\} \right\rangle.$$

Показать, что $q(\lambda, \omega) = q(\lambda, -\omega)$, поэтому $Q(\lambda) = q^2(\lambda, \omega) q^2(-\lambda, \omega)$.

5.3.14. (М30). Продолжение. Используя полученные свойства факторизации и симметрии, убедиться в том, что

$$q^2(\lambda, \omega) = \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2\omega} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta [x'^2(\theta) + \omega^2 x^2(\theta)] \right\} \right\rangle,$$

после чего для нахождения безусловного математического ожидания $Q(\lambda)$ использовать результаты упражнения 5.3.6.

5.3.15. (М40). Продолжение. Пусть $X(\theta)$ и $Y(\theta)$ — детерминированные функции, а кривая задана параметрически

$$u(\theta) = X(\theta) + x(\theta), \quad v(\theta) = Y(\theta) + y(\theta).$$

Найти безусловное среднее [17]

$$Q(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta [v'(\theta) u(\theta) - u'(\theta) v(\theta)] \right\} \right\rangle.$$

5.4. ФЛУКТУАЦИИ ЭНЕРГИИ «БЕЛОГО» ШУМА, ПРОШЕДШЕГО ЧЕРЕЗ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Энергия η реализации марковского шума за определенный временной интервал является случайной величиной. В [12] задача о распределении усредненной во времени мощности реализации нормального шума была подвергнута численному анализу, получены также некоторые асимптотические характеристики для процесса на выходе RLC -контура, на вход которого подан «белый» шум. Уравнение движения для такой системы запишем в виде

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = U(t), \quad (5.83)$$

где $I(t)$ — электрический ток; R , L и C — сопротивление, индуктивность и емкость; $U(t)$ — приложенное напряжение, представляющее собой стохастический процесс «белого» шума. Обозначая $x(t) = I(t)$; $2\beta = R/L$; $\omega^2 = 1/LC$ и $f(t) = L^{-1}U(t)$, перепишем (5.83) в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f(t), \quad (5.84)$$

причем $\langle f(t) f(t') \rangle = \sigma \delta(t - t')$; σ — интенсивность переобозначенного «белого» шума.

Нашей задачей является исследование статистической структуры величины

$$\eta = \int_0^t d\tau x^2(\tau). \quad (5.85)$$

Производящая функция

$$Q(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ - \int_0^t d\tau \dot{x}^2(\tau) \right\} \right\rangle, \quad (5.86)$$

полностью описывающая эту структуру, была найдена ранее (см. (5.79)), ниже, однако, будет приведен другой метод ее вычисления, основанный на методе Каца — Фейнмана, попутно будут получены и дополнительные результаты.

Статистические характеристики двухкомпонентного марковского процесса $(x, \dot{x})$ полностью описываются с помощью переходной плотности распределения вероятностей $w(x, \dot{x}, t; x_0, \dot{x}_0, 0)$, уравнение для которой можно составить, пользуясь известной методикой [5, 6]

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -u \frac{\partial w}{\partial x} + \omega^2 x \frac{\partial w}{\partial u} + 2\beta \frac{\partial}{\partial u} (uw) + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \quad (5.87)$$

с начальным условием

$$w(x, u, 0; x_0, u_0, 0) = \delta(x - x_0) \delta(u - u_0), \quad (5.87a)$$

где здесь и ниже $u = \dot{x}$, $u_0 = \dot{x}_0$.

Решение этого уравнения можно записать в виде [8]

$$w(x, u, t; x_0, u_0, 0) = \frac{v_1 - v_2}{2\pi \sqrt{\Delta}} \exp \left\{ (v_1 + v_2)t - \right. \\ \left. - \frac{p}{\Delta} y_1^2 e^{2v_1 t} + \frac{h}{\Delta} y_1 y_2 e^{(v_1 + v_2)t} - \frac{q}{\Delta} y_2^2 e^{2v_2 t} \right\}, \quad (5.88)$$

где

$$v_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\omega^2 - \beta^2}; \quad \Delta = 4pq - h^2;$$

$$p = \frac{\sigma}{4v_1} (e^{2v_1 t} - 1); \quad h = \frac{\sigma}{v_1 + v_2} (e^{v_1 t + v_2 t} - 1); \quad q = \frac{\sigma}{4v_2} (e^{2v_2 t} - 1); \quad (5.89)$$

$$y_1 = (u + v_1 x) - (u_0 + v_1 x_0) e^{-v_1 t}; \quad y_2 = (u + v_2 x) - (u_0 + v_2 x_0) e^{-v_2 t}.$$

Из (5.88) следует одномоментная плотность распределения

$$w(x_0, u_0, 0) = \frac{2\beta\omega}{\pi\sigma} \exp \left(- \frac{2\beta\omega^2}{\sigma} x_0^2 - \frac{2\beta}{\sigma} u_0^2 \right), \quad (5.90)$$

которая, очевидно, факторизуется на парциальные плотности $w(x_0, 0)$ и $w(u_0, 0)$.

Математическое ожидание вида (5.86) является континуальным интегралом, для его вычисления необходимо выполнить усреднение по мере, отвечающей (5.88) и (5.90). Следуя методу Каца — Фейнмана [13, 14], введем последовательность функций $\Psi_k(x, u, t; x_0, u_0)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, таких, что

$$\Psi_{k+1}(x, u, t; x_0, u_0) = \\ = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} du' u'^2 w(x, u, t; x', u', \tau) \Psi_k(x', u', \tau; x_0, u_0), \quad (5.91)$$

причем

$$\Psi_0(x, u, t; x_0, u_0) = w(x, u, t; x_0, u_0, 0). \quad (5.92)$$

Тогда, согласно [13],

$$Q(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 w(x_0, u_0, 0) Q(\lambda; x_0, u_0), \quad (5.93)$$

$$Q(\lambda; x_0, u_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} du \Psi(x, u, t; x_0, u_0), \quad (5.94)$$

где

$$\Psi(x, u, t; x_0, u_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Psi_k(x, u, t; x_0, u_0) \quad (5.95)$$

есть математическое ожидание вида (5.86), но с фиксированными значениями случайного процесса (x, u) на границах временного интервала $(0, t)$. Из соотношений (5.91) следует, что Ψ -функция (5.95) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = -u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \omega^2 x \frac{\partial \Psi}{\partial u} + 2\beta \frac{\partial}{\partial u} (u\Psi) + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} - \lambda u^2 \Psi \quad (5.96)$$

с начальным условием

$$\Psi(x, u, 0; x_0, u_0) = \delta(x - x_0) \delta(u - u_0). \quad (5.97)$$

Дифференциальное уравнение (5.96) при $\lambda = 0$ переходит в уравнение Фоккера — Планка (5.87) для плотности распределения w стохастического гармонического процесса (5.84). Будем искать его решение в виде

$$\Psi(x, u, t; x_0, u_0) = \exp \left\{ -\omega^2 \frac{\beta - r}{\sigma} x^2 - \frac{\beta - r}{\sigma} u^2 + (\beta - r)t \right\} \times \\ \times \Phi(x, u, t; x_0, u_0). \quad (5.98)$$

Такого рода подстановка по аналогии с (2.21) обусловлена квадратичностью рассматриваемого потенциала, $V(x, u) = u^2$. Для введенной функции Φ из (5.98) получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \omega^2 x \frac{\partial \Phi}{\partial u} + 2r \frac{\partial}{\partial u} (u\Phi) + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \\ + \Phi u^2 \left\{ 4\beta \frac{\beta - r}{\sigma} + 4 \left(\frac{\beta - r}{\sigma} \right)^2 - \lambda \right\}. \quad (5.99)$$

Уравнение (5.99) совпадает по форме с (5.87), решение которого известно, если

$$4 \left(\frac{\beta - r}{\sigma} \right)^2 + 4\beta \left(\frac{\beta - r}{\sigma} \right) - \lambda = 0,$$

поэтому введенный в (5.94) дополнительный параметр r равен

$$r = (\beta^2 + \lambda\sigma/2)^{1/2}. \quad (5.100)$$

Выражение для Ψ -функции найдем из (5.98)

$$\Psi(x, u, t; x_0, u_0) = \frac{(r_1 - r_2) e^{(r_1 + r_2)t}}{2\pi \sqrt{D}} \exp \left\{ (\beta - r)t - \frac{\beta - r}{\sigma} \omega^2 (x^2 - x_0^2) - \right. \\ \left. - \frac{\beta - r}{\sigma} (u^2 - u_0^2) - \frac{P}{D} z_1^2 e^{2r_1 t} + \frac{H}{D} z_1 z_2 e^{(r_1 + r_2)t} - \frac{Q}{D} z_2^2 e^{2r_2 t} \right\}, \quad (5.101)$$

где

$$r_1 = r + i\Omega; \quad r_2 = r - i\Omega; \quad \Omega = (\omega^2 - r^2)^{1/2}; \quad D = 4PQ - H^2; \\ P = \frac{\sigma}{4r_1} (e^{2r_1 t} - 1); \quad H = \frac{\sigma}{r_1 + r_2} (e^{r_1 t + r_2 t} - 1); \quad Q = \frac{\sigma}{4r_2} (e^{2r_2 t} - 1); \quad (5.102)$$

$$z_1 = (u + r_1 x) - (u_0 + r_1 x_0) e^{-r_1 t}; \quad z_2 = (u + r_2 x) - (u_0 + r_2 x_0) e^{-r_2 t}.$$

Для последовательного вычисления в (5.93), (5.94) последовательной пары двухкратных интегралов воспользуемся приемом, а именно представим экспоненту в (5.101) от квадратичной формы по z_1 и z_2 в виде интеграла Фурье с гауссовым весом

$$\exp(-az_1^2 - 2bz_1 z_2 - cz_2^2) = \\ = \frac{1}{\pi \sqrt{D}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 \exp \left\{ -\frac{c\eta_1^2 + 2b\eta_1 \eta_2 + a\eta_2^2}{d} + 2i\eta_1 z_1 + 2i\eta_2 z_2 \right\}, \quad (5.103)$$

где

$$d = ac - b^2; \quad a = \frac{P}{D} e^{2r_1 t}; \quad b = -\frac{H}{2D} e^{r_1 t + r_2 t}; \quad c = \frac{Q}{D} e^{2r_2 t}. \quad (5.104)$$

Для вычисления безусловного математического ожидания $Q(\lambda)$ необходимо взять шестикратный интеграл, при этом в силу линейной зависимости от x, u, x_0, u_0 в (5.102) из шести интегралов четыре по перечисленным переменным легко берутся:

$$Q(\lambda) = \frac{(r_1 - r_2) e^{(r_1 + r_2)t}}{2\pi^2 \sqrt{dD}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 \exp \left\{ -\frac{c\eta_1^2 + 2b\eta_1 \eta_2 + a\eta_2^2}{d} \right\} \times \\ \times \frac{2\beta\omega^2}{\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} du \exp \left\{ -\frac{2\beta\omega^2}{\sigma} x_0^2 - \frac{2\beta}{\sigma} u_0^2 + \right. \\ \left. + (\beta - r)t - \frac{\beta - r}{\sigma} \omega^2 (x^2 - x_0^2) - \frac{\beta - r}{\sigma} (u^2 - u_0^2) + \right. \\ \left. + 2i\eta_1 [(u + r_1 x) - (u_0 + r_1 x_0) e^{-r_1 t}] + 2i\eta_2 [(u + r_2 x) - (u_0 + r_2 x_0) e^{-r_2 t}] \right\}. \quad (5.105)$$

Результат этой четырехкратной квадратуры будет, очевидно, иметь гауссову форму относительно переменных η_1 и η_2 .

Поскольку из (5.102) и (5.103) следует, что

$$d = \frac{1}{D} e^{2(r_1+r_2)t}; \quad \frac{a}{d} = \frac{\sigma}{r_1} (1 - e^{-2r_1 t}); \quad (5.106)$$

$$\frac{b}{d} = -\frac{2\sigma}{r_1 + r_2} (1 - e^{-r_1 t - r_2 t}), \quad \frac{c}{d} = \frac{\sigma}{r_2} (1 - e^{-2r_2 t}),$$

то после взятия в (5.105) оставшихся двух интегралов и некоторых преобразований найдем

$$Q(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau u^2(\tau) \right\} \right\rangle = \frac{4r\beta e^{\beta t}}{\left\{ [(r+\beta)^2 e^{rt} - (r-\beta)^2 e^{-rt}]^2 - 4 \frac{r^2(r^2-\beta^2)^2}{\omega^2-r^2} \sin^2(t\sqrt{\omega^2-r^2}) \right\}^{1/2}}, \quad (5.107)$$

что совпадает с (5.79).

Пример. Рассмотрим специальный случай, когда $\omega(x_0, u_0, 0) = \delta(x_0) \delta(u_0)$. Тогда в силу (5.93) $Q(\lambda) = Q(\lambda; 0, 0)$, а в (5.105) интегралы по x_0 и u_0 снимаются благодаря фильтрующему свойству δ -функции. Интегрируя сначала по x и u , а затем по η_1 и η_2 , найдем

$$Q(\lambda; 0, 0) = \frac{2re^{\beta t}}{\left\{ [(r+\beta) e^{rt} + (r-\beta) e^{-rt}]^2 + 4 \frac{r^2(r^2-\beta^2)}{\omega^2-r^2} \sin^2(t\sqrt{\omega^2-r^2}) \right\}^{1/2}}. \quad (5.108)$$

Из (5.107) можно получить выражения для первых двух моментов

$$\left\langle \int_0^t d\tau u^2(\tau) \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial \lambda} Q(\lambda)|_{\lambda=0} = \frac{\sigma t}{4\beta}, \quad (5.109)$$

$$\left\langle \left[\int_0^t d\tau u^2(\tau) \right]^2 \right\rangle = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} Q(\lambda)|_{\lambda=0} = \frac{\sigma^2}{32\beta^4} \left[-1 + 2\beta t + 2\beta^2 t^2 + e^{-2\beta t} + \frac{\beta^2 e^{-2\beta t}}{\omega^2 - \beta^2} \sin^2(t\sqrt{\omega^2 - \beta^2}) \right], \quad (5.110)$$

отсутствие периодической зависимости от времени у первого момента обусловлено усреднением по плотности распределения начального состояния $\omega(x_0, u_0, 0)$. Дисперсия $\Delta = \langle \eta^2 \rangle - \langle \eta \rangle^2$ равна

$$\Delta = \Delta(t) = \frac{\sigma^2}{32\beta^4} \left[-1 + 2\beta t + e^{-2\beta t} + \frac{\beta^2 e^{-2\beta t}}{\omega^2 - \beta^2} \sin^2(t\sqrt{\omega^2 - \beta^2}) \right] \quad (5.111)$$

и содержит осциллирующее с течением времени слагаемое (см. ниже). Для временного интервала τ такого, что $\beta\tau \ll 1$, получим

$$\Delta(\tau) \simeq \frac{\sigma^2}{32\beta^4} \left[2\beta^2 \tau^2 + \frac{\beta^2(1-2\beta\tau)}{\omega^2 - \beta^2} \sin^2(\tau\sqrt{\omega^2 - \beta^2}) \right], \quad (5.112)$$

а при $\beta\tau \gg 1$

$$\Delta(\tau) \simeq \frac{\sigma^2 \tau}{16\beta^3} = \frac{\langle h \rangle^2}{\beta\tau}. \quad (5.113)$$

Перейдем к анализу полученной производящей функции (5.107). Карты модулей $|Q(\lambda)|$ для различных декрементов β приведены на рис. 5.5—5.7, где изображена окрестность первого полюса на λ -плоскости. Видно, что с увеличением β точка полюса смещается влево от нуля по мнимой оси, вместе с тем растет пьедестал полюса. Плотность

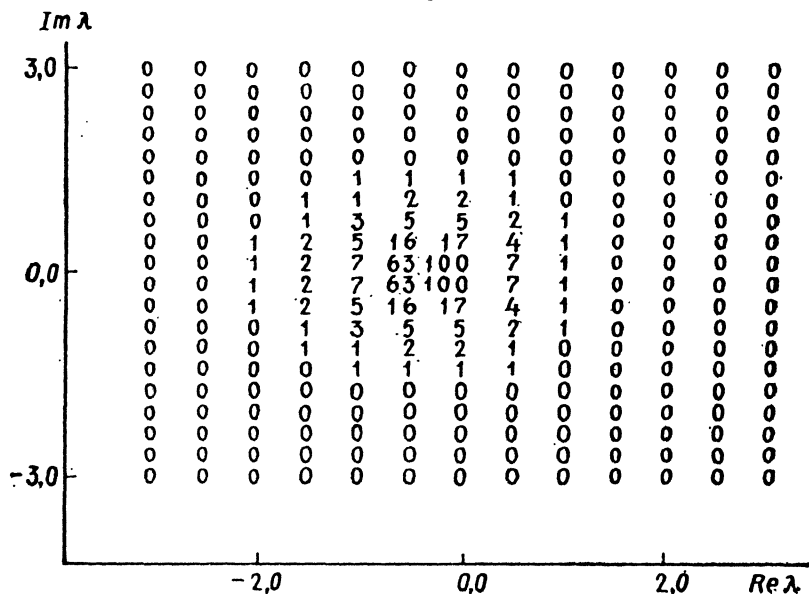


Рис. 5.5. Карта модулей $|Q(\lambda)|$ на комплексной плоскости λ :
 $\sigma = 1,0$; $\beta = 0,0625$; $\omega = 80,0$; $t = 1,0$.

распределения вероятностей $P(\eta)$ случайной величины η согласно (5.85) и (5.86) является обратным преобразованием Лапласа Q -функции (5.107):

$$P(\eta) = \int_{C_\lambda} \frac{d\lambda}{2\pi i} e^{\lambda\eta} Q(\lambda), \quad (5.114)$$

при этом контур интегрирования C_λ необходимо выбрать так, чтобы оставить слева от него все особенности производящей функции. К ним относятся, помимо совокупности полюсов Q -функции, точки ветвления, обусловленные полужелыми степенями в (5.107). Точки ветвления величин $r = (\beta^2 + \lambda\sigma/2)^{1/2}$ и $\Omega = (\omega^2 - r^2)^{1/2}$ равны $\lambda_1 = -2\beta^2/\sigma$ и $\lambda_2 = \lambda_1 + 2\omega^2/\sigma$ соответственно. Поскольку Q -функция (5.107) явно зависит только от r , перейдем в (5.114) к r как новой переменной интегрирования

$$P(\eta) = \int_{\tilde{C}_r} 4 \frac{r}{2\pi i \sigma} \exp\left(2 \frac{r^2 - \beta^2}{\sigma} \eta\right) \tilde{Q}(r) dr, \quad (5.115)$$

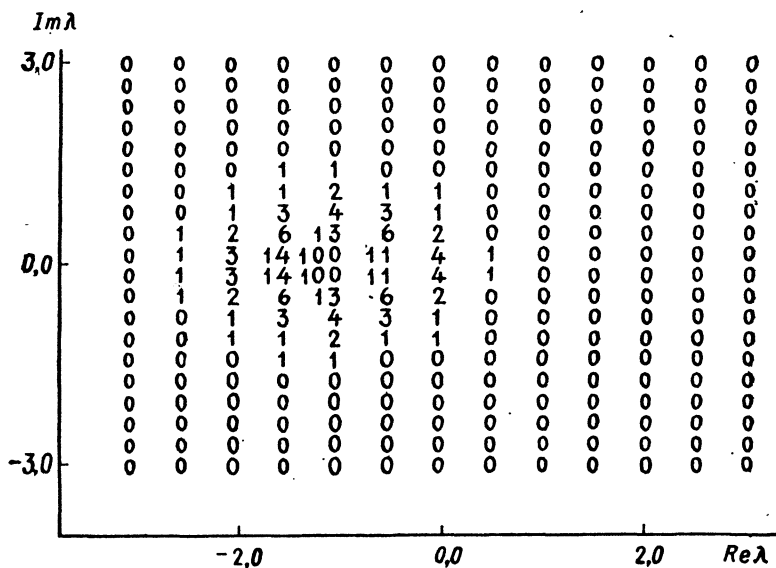


Рис. 5.6. Карта модулей $|Q(\lambda)|$ на комплексной плоскости λ ;
 $\sigma = 1,0$; $\beta = 0,25$; $\omega = 80,0$; $t = 1,0$.

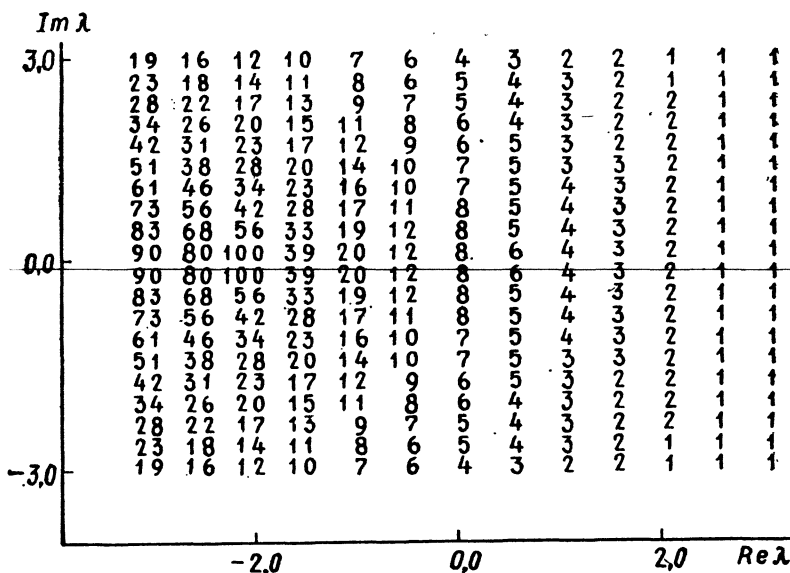


Рис. 5.7. Карта модулей $|Q(\lambda)|$ на комплексной плоскости λ ;
 $\sigma = 1,0$; $\beta = 1,0$; $\omega = 80,0$; $t = 1,0$.

где $\tilde{Q}(r)$ по форме совпадает с $Q(\lambda)$ (5.107), но зависит лишь от r . На новой r -плоскости точка ветвления равна $r = \beta$, все остальные особенности лежат в полуплоскости $\text{Re } r < 0$. Выбирая контур интегрирования параллельным оси $\text{Im } r$ и проходящим через точку ветвления, после замены $r = \beta + i\beta y$ найдем

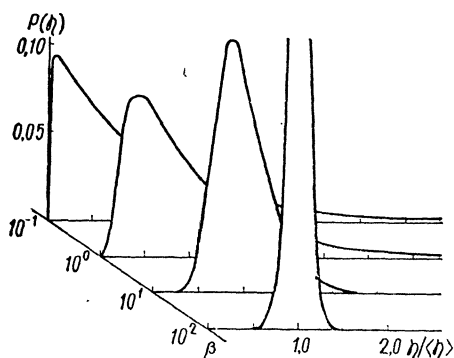


Рис. 5.8. Плотность распределения вероятностей $P(\eta)$: $\sigma = 10, 0$; $t = 1, 0$; $\omega = 10^2$. Максимум кривой $P(\eta)$ при $\beta = 10^2$ составляет 0.268.

на рис. 5.8—5.10, зависимости для $\beta < 0,1$ совпадают (до третьей значащей цифры) с соответствующими приводимыми зависимостями для $\beta = 0,1$. Численные расчеты показали, что от параметра ω их результаты почти не зависят (для $10^{-1} \leq \omega \leq 10^{+4}$ отличие от приводимых зависимостей появляется лишь в третьей значащей цифре).

Для любого значения частоты ω и при $\beta t \gg 1$ функция $P(\eta)$ характеризуется пиком в области значений $\eta \simeq \langle \eta \rangle$, где согласно (5.109)

$$\langle \eta \rangle = \frac{\sigma t}{4\beta}. \quad (5.117)$$

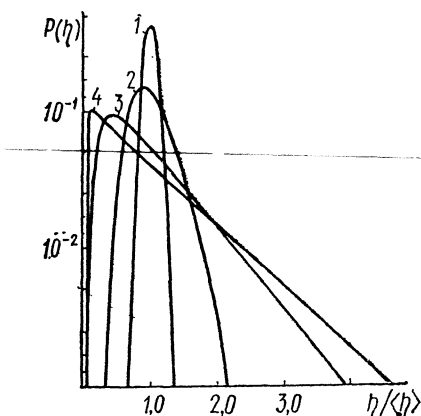


Рис. 5.9. Плотность распределения вероятностей $P(\eta)$:

1 — $\beta = 10^2$; 2 — $\beta = 10^1$; 3 — $\beta = 10^0$; 4 — $\beta = 10^{-1}$; $\omega = 10^2$.

$$P(\eta) = \frac{2\beta^2}{\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dy (1 + iy) \times \\ \times \exp \left[-2 \frac{\beta^2}{\sigma} \eta (y^2 - 2iy) \right] \times \\ \times \tilde{Q}(\beta + i\beta y). \quad (5.116)$$

Полученный интеграл (5.116) был взят за основу при численном расчете вероятностных характеристик случайной величины η (5.85). Результаты численных расчетов вероятностных характеристик η (5.85) приведены

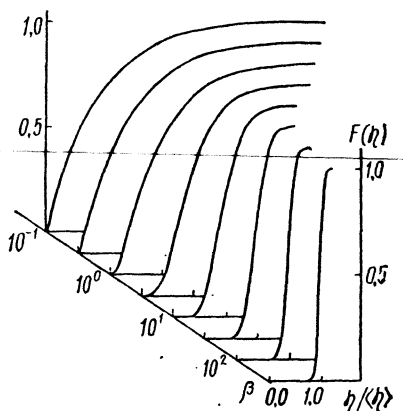


Рис. 5.10. Вероятность $F(\eta)$: параметры см. рис. 5.8.

По мере изменения декремента (при неизменном времени регистрации t) в сторону меньших значений из рис. 5.8 следует, что кривые, изображающие функцию $P(\eta)$, становятся все более пологими, т. е. флуктуации случайной величины η становятся тем более заметными, чем больше уменьшается β . Можно привести качественное доказательство [12] того, что при $t = \text{const}$ флуктуации возрастают по мере сужения ширины спектра мощности случайного процесса (5.84). Шум с таким спектром мощности можно представить как шум на сопротивлении R в последовательной RLC -цепи (см. уравнение (5.83)), на вход которой подается «белый» шум с нормальным законом распределения. Чем мень-

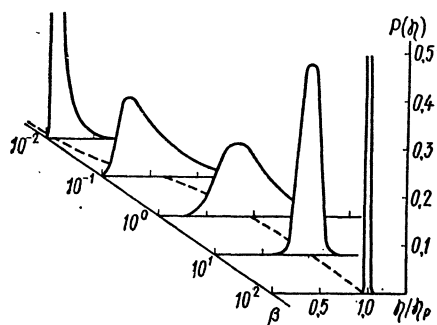


Рис. 5.11. Плотность распределения вероятностей $P(\eta)$:

$\sigma = 1,0$; $t = 10,0$; $\omega = 10^2$; $\eta_p = \sigma t / 4\beta$. Штриховой кривой указана траектория условного среднего $\langle \eta \rangle$ на плоскости $(\beta, \eta/\eta_p)$.

Максимум кривой $P(\eta)$ при $\beta = 10^{-2}$ составляет 0,621.

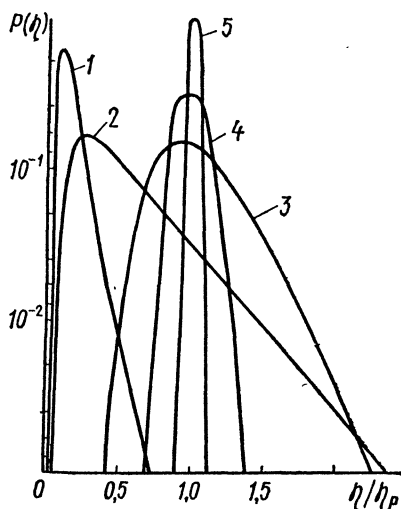


Рис. 5.12. Плотность распределения вероятностей $P(\eta)$:

1 — $\beta = 10^2$; 2 — $\beta = 10^{-1}$; 3 — $\beta = 10^0$; 4 — $\beta = 10^1$; 5 — $\beta = 10^2$; остальные параметры см. рис. 5.11.

ше декремент β цепи, тем больше реакция на каждый импульс шума приближается по форме к колоколообразному импульсу, т. е. тем дольше время установления переходных процессов. Следовательно, каждый перепад напряжения на входе обеспечивает более длительное последствие на выходе при меньшем значении параметра β . Поэтому при той же дисперсии $\Delta(t)$ случайной величины η время регистрации должно быть выбрано большим для цепи с меньшим β .

Приближенное выражение для плотности распределения вероятностей $P(\eta)$ можно получить из (5.114), формируя в показателе экспоненты квадратичную по r форму:

$$P(\eta) = \left(\frac{\beta t}{2\pi\eta\langle\eta\rangle} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\beta t}{2} \left(\sqrt{\frac{\langle\eta\rangle}{\eta}} - \sqrt{\frac{\eta}{\langle\eta\rangle}} \right)^2 \right\}; \quad (5.118)$$

это приближенное выражение имеет место в области $\eta \simeq \langle\eta\rangle$ при $\beta t \gg 1$. В (5.118) экспонента описывает область пика, она не зависит от частоты ω , что обусловлено физическим содержанием случайной величины η , являющейся интегралом от квадрата гармонического процесса.

Другой пример физической ситуации, отличной от рассмотренной, реализуется, когда по условиям измерительной обстановки начальное состояние ГС-процесса фиксировано и равно нулю. Соответствующая производящая функция $Q(\lambda; 0, 0)$ найдена выше (см. выражение (5.108)); поскольку она явно зависит от r , для нахождения количественных характеристик можно воспользоваться алгоритмом, следующим из формул (5.114) и (5.116). Результаты численных расчетов вероятностных характеристик случайной величины η (с нулевыми начальными условиями) приведены на рис. 5.11—5.13. Сравнивая рис. 5.8 и 5.11,

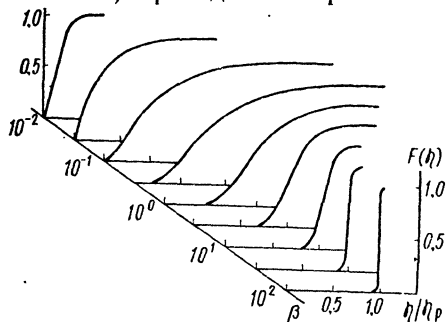


Рис. 5.13. Вероятность $F(\eta)$:
параметры см рис. 5.11.

можно заключить, что один и тот же измерительный прибор, регистрирующий случайную величину η , будет формировать на выходе величины, статистические характеристики которых существенно отличаются. Физически это отличие связано с разным приготовлением начального состояния.

Из рис. 5.8—5.13 видно, что по мере уменьшения параметра βt функции распределения приближаются к кривым, описываю-

щим случайную величину $z = tu^2$ (распределение Рэля или экспоненциальное распределение [9]). По мере увеличения параметра βt функции распределения приближаются к нормальным. Асимптотический переход к нормальному распределению является следствием центральной предельной теоремы [5]. Скорость сходимости к нормальному распределению разная у безусловной и условной величины η , у последней она больше, что обусловлено выбранным нулевым начальным значением. Отметим, что частота колебательного процесса ω весьма слабо влияет на динамику статистических характеристик стохастической величины η .

Упражнения

5.4.1. (M10). Получить из (5.88) выражения (5.90) для $w(x_0, u_0, 0)$.

5.4.2. (M15). Вывести уравнение (5.87).

5.4.3. (M20). Продолжение. Убедиться, что выражение (5.88) удовлетворяет уравнению (5.87) и начальному условию (5.87а).

5.4.4. (M25). Убедиться, что из рекуррентных соотношений (5.91), выражения (5.95) и уравнения Фоккера — Планка (5.87) для переходной вероятности стохастического осцилляторного процесса (5.84) следует уравнение (5.96) для Ψ -функции.

5.4.5. (M20). Продолжение. Убедиться, что решение (5.101) удовлетворяет уравнению (5.96) и начальному условию (5.97).

5.4.6. (M10). Убедиться, что при $\lambda = 0$ выражение (5.101) переходит в (5.88).

5.4.7. (M20). Получить результат (5.108) прямым интегрированием по x и u выражения (5.105), положив $x_0 = u_0 = 0$.

5.4.8. (M20). Вычислить первых два момента, отвечающих производящей функции (5.108). Объяснить, с чем связана осциллирующая зависимость первого момента

$$\left\langle \int_0^t dt u^2(\tau) \right\rangle \Big|_{x_0=u_0=0} = \frac{\sigma}{8\beta^2} \left[-1 + 2\beta t + e^{-2\beta t} + \frac{2\beta^2 e^{-2\beta t}}{\omega^2 - \beta^2} \sin^2(t\sqrt{\omega^2 - \beta^2}) \right].$$

5.4.9. (М25). Рассмотреть в выражениях (5.107) и (5.108) аperiodический случай $\omega < \beta$.

5.4.10. (М25). *Продолжение.* Рассмотреть случай $\omega = \beta$.

5.4.11. (М30). В теории фейнмановских интегралов [14] рассматривается условное математическое ожидание

$$E = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau \dot{x}^2(\tau) \right\} \right\rangle$$

при $\beta = 0$ и условии, что $x(t) = x(0) = x$, $\dot{x}(t) = \dot{x}(0) = \dot{x}$. С помощью выражения (5.105), переписанного для этих условий, вычислить интеграл E .

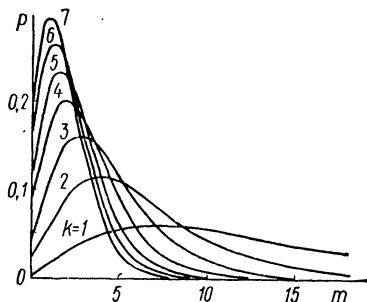


Рис. 5.14. Вероятность $P(m)$ (см. упражнение 5.4.14):

$\sigma = 0,5$; $t = 5,0$; $\omega = 10^2$; $\beta = 0,1k$.

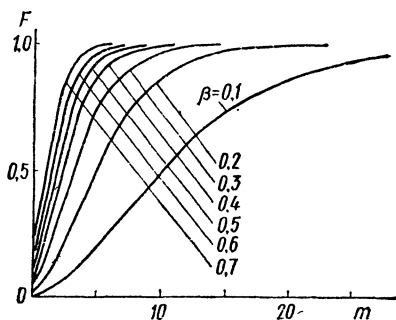


Рис. 5.15. Интегральная вероятность $F(m)$ (см. упражнение 5.4.14):

σ , t и ω — см. рис. 5.14.

5.4.12. (М15). Показать, что для интеграла Фурье вида $F(\lambda) = \int_0^\infty dx f(x) e^{i\lambda x}$,

где $\lambda \gg 1$, а $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, имеет место асимптотическое представление [15]

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^N (-i\lambda)^{-n-1} \frac{d^n}{dx^n} f(x)|_{x=0} + O(\lambda^{-N-2}).$$

5.4.13. (М30). Рассмотрим комплекснозначный стохастический процесс $\ddot{\alpha} + 2\beta\dot{\alpha} + \omega^2\alpha = f(t)$ с порождающим процессом «белого» шума, причем $\langle \text{Re } f(t) \times \text{Re } f(t') \rangle = \langle \text{Im } f(t) \text{Im } f(t') \rangle = \sigma\delta(t-t')$ и $\langle \text{Re } f(t) \text{Im } f(t') \rangle = 0$. Показать, что

безусловное среднее $\left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\dot{\alpha}(\tau)|^2 \right\} \right\rangle$ равно $Q^2(\lambda)$, где $Q(\lambda)$ определяется выражением (5.107).

5.4.14. (М30). *Продолжение.* Вычислить с помощью интеграла Коши вероятности (рис. 5.14 и 5.15)

$$P(m) = \left\langle \frac{1}{m!} \left[\int_0^t d\tau |\dot{\alpha}(\tau)|^2 \right]^m \exp \left[-\int_0^t d\tau |\dot{\alpha}(\tau)|^2 \right] \right\rangle,$$

$$F(m) = \sum_{n=0}^m P(n),$$

где $m = 0, 1, \dots$

5.4.15. (M25). Получить асимптотическое распределение типа (5,118) для плотности распределения вероятностей $P(\eta)$ случайной величины

$$\eta = \int_0^t d\tau x^2(\tau) \Big|_{x_0=0, \bar{x}_0=0}.$$

5.5. СТАТИСТИКА ФУНКЦИОНАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ ОТ КОМПОНЕНТ ГАРМОНИЧЕСКОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

В § 5.3 и 5.4 изучена статистика функционала

$$F = \int_0^t d\tau \dot{x}^2(\tau), \quad (5.119)$$

определенного на компоненте $u = x$ ГС-процесса, описываемого уравнением движения

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = f(t) \quad (5.120)$$

с «белым» шумом $f(t)$ в правой части как порождающим процессом.

В настоящем параграфе изучим статистику функционалов квадратичного вида, определенных на обеих компонентах x и u ГС-процесса. Наиболее общий вид функционалов такого типа следующий:

$$F = \int_0^t d\tau [au^2(\tau) + 2bx(\tau)u(\tau) + cx^2(\tau)]. \quad (5.121)$$

Его статистика может быть изучена с помощью производящей функции (a, b, c — производящие параметры)

$$Q(a, b, c) = \left\langle \exp \left\{ - \int_0^t d\tau [au^2(\tau) + 2bx(\tau)u(\tau) + cx^2(\tau)] \right\} \right\rangle. \quad (5.122)$$

Ниже будет изложен путь нахождения математического ожидания (5.122), при этом, однако, некоторые заключительные выражения приведены не будут в связи с их чрезмерной громоздкостью. Следуя процедуре, изложенной в § 5.1, континуальный интеграл (5.122) по стохастической ГС-мере равен

$$Q(a, b, c) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(x_0, u_0, 0) \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} du \Psi(x, u, t; x_0, u_0), \quad (5.123)$$

где $\omega(x_0, u_0, 0)$ — одномоментная плотность распределения (5.90) компонент x и u в исходный момент $\tau = 0$, а введенная Ψ -функция является решением дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Psi = & -u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \omega^2 x \frac{\partial \Psi}{\partial u} + 2\beta \frac{\partial}{\partial u} (u\Psi) + \\ & + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} - (au^2 + 2bxu + cx^2) \Psi \end{aligned} \quad (5.124)$$

с начальным условием

$$\Psi(x, u, 0; x_0, u_0) = \delta(x - x_0) \delta(u - u_0). \quad (5.125)$$

Решение уравнения (5.124) при $a = b = c = 0$ известно и описывается выражением (5.88). С целью свести уравнение (5.124) к уравнению Фоккера — Планка вида (5.87) используем подстановку

$$\Psi(x, u, t; x_0, u_0) = \Phi(x, u, t; x_0, u_0) \times$$

$$\times \exp \{ \mu t - A(u^2 - u_0^2) - 2B(xu - x_0 u_0) - C(x^2 - x_0^2) \}, \quad (5.126)$$

в которой μ и A, B, C — произвольные константы, значениями которых распорядимся ниже. Подставив (5.126) в (5.124), для Φ -функции получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi = & -u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \omega^2 x \frac{\partial \Phi}{\partial u} + 2\beta u \frac{\partial \Phi}{\partial u} - 2A\sigma u \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \\ & - 2B\sigma x \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \Phi \{ -\mu + 2\beta - A\sigma + 2(Bu^2 + Cxu) - \\ & - 2\omega^2(Axu + Bx^2) - 4\beta(Au^2 + Bxu) + 2\sigma(Au + Bx)^2 - \\ & - (au^2 + 2bxu + cx^2) \}, \end{aligned} \quad (5.127)$$

начальное условие для которого совпадает с (5.125). Перегруппируем в (5.127) коэффициенты при производной по u , тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi = & -u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (\omega^2 - 2B\sigma) x \frac{\partial \Phi}{\partial u} + (2\beta - 2A\sigma) \frac{\partial}{\partial u} (u\Phi) + \\ & + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \Phi \{ -\mu + A\sigma + u^2(2B - 4A\beta - a) + \\ & + 2xu(C - A\omega^2 - 2B\beta + 2AB\sigma - b) + x^2(2B^2\sigma - 2B\omega^2 - c) \}. \end{aligned} \quad (5.128)$$

Уравнение (5.128) перейдет в стандартное уравнение Фоккера — Планка (5.87), решение которого известно:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi = -u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Omega^2 x \frac{\partial \Phi}{\partial u} + 2r \frac{\partial}{\partial u} (u\Phi) + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}, \quad (5.129)$$

где $\Omega^2 = \omega^2 - 2B\sigma$ и $r = \beta - A\sigma$, если соответствующим подбором величин A, B, C и μ обратить в ноль фигурную скобку в (5.128). Ясно, что $\mu = A\sigma$. В свою очередь, приравняв коэффициенты при u^2, xu и x^2 в этой скобке нулю, получим систему алгебраических уравнений, эквивалентную матричному уравнению (5.25)

$$2\sigma A^2 - 4\beta A + 2B = a, \quad 2\sigma B^2 - 2\omega^2 B = c, \quad C - \omega^2 A - 2\beta B + 2\sigma AB = b. \quad (5.130)$$

Последовательно разрешая второе, первое и третье уравнения этой системы, найдем

$$A = \frac{\beta - r}{\sigma}, \quad B = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{2\sigma}, \quad C = b + (\beta\omega^2 - 2\Omega^2)/\sigma. \quad (5.131)$$

а введенные в (5.129) коэффициенты Ω^2 и r равны

$$\Omega^2 = \sqrt{\omega^4 + 2\sigma c}, \quad r = \sqrt{\beta^2 + (a + \Omega^2 - \omega^2)/2}. \quad (5.132)$$

«Осциллятор», для «плотности распределения» $\Phi(x, u, t; x_0, u_0)$ которого получено уравнение (5.129), обладает «частотой» Ω и «декрементом» r согласно выражениям (5.132). Здесь отметим, что если в функционале (5.121) отсутствует слагаемое $x^2(\tau)$, т. е. $c = 0$, то $\Omega = \omega$. Если же в (5.121) содержится лишь слагаемое $x(\tau)u(\tau)$, т. е. $a = c = 0$, то в этом частном случае $F = bx^2(t) - bx^2(0)$ и континуальный интеграл (5.122) сводится к простой четырехкратной квадратуре

$$Q(0, b, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(x_0, u_0, 0) \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} du \times \\ \times \exp(-bx^2 + bx_0^2) \omega(x, u, t; x_0, u_0, 0), \quad (5.133)$$

поскольку Ψ -функция переходит в ω -функцию.

В общем случае континуальный интеграл $Q(a, b, c)$ находится согласно формуле (5.123), в которой выражение для Ψ -функции принимает вид

$$\Psi(x, u, t; x_0, u_0) = \exp\{A\sigma t - A(u^2 - u_0^2) - 2B(xu - x_0u_0) - \\ - C(x^2 - x_0^2)\} \frac{\rho_1 - \rho_2}{2\pi\sqrt{D}} \exp\left\{(\rho_1 + \rho_2)t - \frac{P}{D}z_1^2 e^{2\rho_2 t} + \frac{H}{D}z_1 z_2 e^{(\rho_1 + \rho_2)t} - \right. \\ \left. - \frac{Q}{D}z_2^2 e^{2\rho_1 t}\right\}, \quad (5.134)$$

где

$$\rho_1 = r + i\sqrt{\Omega^2 - r^2}; \quad \rho_2 = r - i\sqrt{\Omega^2 - r^2}; \quad D = 4PQ - H^2; \\ P = \frac{\sigma}{4\rho_1}(e^{2\rho_1 t} - 1); \quad H = \frac{\sigma}{\rho_1 + \rho_2}(e^{\rho_1 t + \rho_2 t} - 1); \quad Q = \frac{\sigma}{4\rho_2}(e^{2\rho_2 t} - 1); \quad (5.134a)$$

$$z_1 = (u + \rho_1 x) - (u_0 + \rho_1 x_0)e^{-\rho_2 t}; \quad z_2 = (u + \rho_2 x) - (u_0 + \rho_2 x_0)e^{-\rho_1 t},$$

а выражения для величин A, B, C приведены в (5.131) и (5.132). Пользуясь формулой (5.103), для производящей функции $Q(a, b, c)$ получим выражение в форме простой шестикратной квадратуры

$$Q(a, b, c) = \left\langle \exp \left\{ - \int_0^t d\tau [au^2(\tau) + 2bx(\tau)u(\tau) + cx^2(\tau)] \right\} \right\rangle = \\ = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\pi^2} \int \int \int \int \int d\eta_1 d\eta_2 dx du dx_0 du_0 \omega(x_0, u_0, 0) \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{\sigma}{\rho_2} \eta_1^2 (1 - e^{-2\rho_2 t}) - \frac{2\sigma}{\rho_1 + \rho_2} \eta_1 \eta_2 (1 - e^{-\rho_1 t - \rho_2 t}) - \right. \\ - \frac{\sigma}{\rho_1} \eta_2^2 (1 - e^{-2\rho_1 t}) + A\sigma t - A(u^2 - u_0^2) - 2B(xu - x_0u_0) - \\ - C(x^2 - x_0^2) + 2i\eta_1 [(u + \rho_1 x) - (u_0 + \rho_1 x_0)e^{-\rho_2 t}] + \\ \left. + 2i\eta_2 [(u + \rho_2 x) - (u_0 + \rho_2 x_0)e^{-\rho_1 t}] \right\}. \quad (5.135)$$

Благодаря гауссовому виду подынтегрального выражения относительно всех шести переменных интегрирования квадратура (5.135) берется до конца (удобно сначала брать интегралы по переменным x , u и x_0 , u_0). Конкретный вид результата (5.135) континуального интегрирования после взятия всех этих шести интегралов достаточно громоздок. Вместе с тем различные частные случаи (включая асимптотику по какому-либо параметру) могут быть изучены с помощью полученного выражения для производящей функции $Q(a, b, c)$.

Особый интерес [16] представляет случай $a = b = 0$, поскольку случайная величина

$$\chi = \int_0^t d\tau x^2(\tau) \quad (5.136)$$

описывает интеграл от квадрата перемещения стохастического затухающего осциллятора. Плотность распределения вероятностей $P(\chi)$ этой случайной величины есть обратное преобразование Лапласа

$$P(\chi) = \int \frac{dc}{2\pi i} e^{c\chi} Q(0, 0, c), \quad (5.137)$$

где функция $Q(0, 0, c)$ дана выражениями (5.123) и (5.135). Перейдем к нахождению плотности $P(\chi)$. С этой целью в шестикратной квадратуре (5.135) выполним интегрирование по паре переменных x_0 и u_0 с весом $w(x_0, u_0, 0) = (2\beta\omega/\pi\sigma) \exp(-2\beta\omega^2 x_0^2/\sigma - 2\beta u_0^2/\sigma)$, а также по другой паре x и u (благодаря внешнему интегрированию по η_1 и η_2 переменные внутреннего интегрирования попарно разделяются). Обозначая результаты этого интегрирования через $J_0(\eta_1, \eta_2)$ и $J_t(\eta_1, \eta_2)$ соответственно, найдем

$$Q(a, b, c) = \frac{2\beta\omega(\rho_1 - \rho_2)e^{(\beta-r)t}}{\pi^3\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 d\eta_2 J_t(\eta_1, \eta_2) J_0(\eta_1, \eta_2) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{\sigma}{\rho_2} \eta_1^2 (1 - e^{-2\rho_2 t}) - \frac{2\sigma}{\rho_1 + \rho_2} \eta_1 \eta_2 (1 - e^{-\rho_1 t - \rho_2 t}) - \right. \\ \left. - \frac{\sigma}{\rho_1} \eta_2^2 (1 - e^{-2\rho_1 t})\right\}, \quad (5.138)$$

где

$$J_t(\eta_1, \eta_2) = \pi(AC - B^2)^{-1/2} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{A(\rho_1\eta_1 + \rho_2\eta_2)^2 - 2B(\rho_1\eta_1 + \rho_2\eta_2)(\eta_1 + \eta_2) + C(\eta_1 + \eta_2)^2}{AC - B^2}\right\}, \quad (5.139)$$

а выражение для $J_0(\eta_1, \eta_2)$ получается из (5.139), если в этой формуле выполнить замену

$$A \rightarrow A_0 = \frac{\beta + r}{\sigma}; \quad B \rightarrow B_0 = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\sigma}; \quad C \rightarrow C_0 = \frac{r\Omega^2 + \beta\omega^2}{\sigma} - b. \quad (5.140)$$

Здесь отметим, что в частном случае, когда $w(x_0, u_0, 0) = \delta(x_0)\delta(u_0)$, интегралы по x_0 и u_0 в (5.135) снимаются, а $J_0(\eta_1, \eta_2) = \pi$. В общем (безусловном) случае произведение $J_t(\eta_1, \eta_2) J_0(\eta_1, \eta_2)$

имеет гауссову форму относительно η_1 и η_2 , интегрируя по которым, найдем

$$Q(a, b, c) = \frac{2\beta\omega(\rho_1 - \rho_2)}{\sigma} \frac{e^{(\beta - r)t}}{(D_0 D_t D_\eta)^{1/2}}, \quad (5.141)$$

где

$$D_t = AC - B^2; \quad D_0 = A_0 C_0 - B_0^2; \quad D_\eta = D_{11} D_{22} - D_{12}^2, \quad (5.141a)$$

а величины D_{11} , D_{12} , D_{22} — коэффициенты квадратичной формы $D_{11}\eta_1^2 + 2D_{12}\eta_1\eta_2 + D_{22}\eta_2^2$, образующейся в показателе подынтегральной экспоненты (5.138);

$$D_{11} = \frac{\sigma}{\rho_2} (1 - e^{-2\rho_2 t}) + \frac{1}{D_t} (A\rho_1^2 - 2B\rho_1 + C) + \\ + \frac{1}{D_0} (A_0\rho_1^2 - 2B_0\rho_1 + C_0) e^{-2\rho_2 t},$$

$$D_{12} = \frac{2\sigma}{\rho_1 + \rho_2} (1 - e^{-\rho_1 t - \rho_2 t}) + \frac{1}{D_t} (A\rho_1\rho_2 - B\rho_1 - B\rho_2 + C) + \\ + \frac{1}{D_0} (A_0\rho_1\rho_2 - B_0\rho_1 - B_0\rho_2 + C_0) e^{-\rho_1 t - \rho_2 t}, \quad (5.141b)$$

$$D_{22} = \frac{\sigma}{\rho_1} (1 - e^{-2\rho_1 t}) + \frac{1}{D_t} (A\rho_2^2 - 2B\rho_2 + C) + \\ + \frac{1}{D_0} (A_0\rho_2^2 - 2B_0\rho_2 + C_0) e^{-2\rho_1 t}.$$

Результат (5.141) получен для произвольных значений производящих параметров a , b , c , в частных случаях необходимо подставлять в (5.141) с учетом (5.131) и (5.140) те или иные их значения. Для случайной величины (5.136) результатом (5.141) можно пользоваться с учетом того, что $a = b = 0$. Выберем в (5.137) контур интегрирования параллельно оси $\text{Im } c$, оставив при этом слева все особенности функции $Q(0, 0, c)$, и перейдем к новой переменной интегрирования

$$r = \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{2}(-\omega^2 + \sqrt{\omega^4 + 2\sigma c})}, \quad (5.142)$$

тогда $c = 2(r^2 - \beta^2)(\omega^2 + r^2 - \beta^2)/\sigma$ и $\Omega^2 = \omega^2 + 2(r^2 - \beta^2)$, а для величины A , B и C останутся связи (5.131). Производящая функция $Q(0, 0, c)$, явный вид которой дан выражениями (5.141), является функцией только аргумента r , поэтому обозначим ее как

$$\tilde{Q}(0, 0, r) = Q\left(0, 0, 2 \frac{(r^2 - \beta^2)(\omega^2 + r^2 - \beta^2)}{\sigma}\right). \quad (5.143)$$

Объединяя (5.137), (5.143) и (5.141), после замены переменной интегрирования $r = \beta + i\beta y$ получаем

$$P(x) = \frac{\beta^2}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dy (1 + iy)(\omega^2 + 2r^2 - 2\beta^2) \times \\ \times \exp\left[-(y^2 - 2iy) \frac{2(\omega^2 + r^2 - \beta^2)}{\sigma} x\right] \tilde{Q}(0, 0, \beta + i\beta y). \quad (5.144)$$

Результаты численных расчетов вероятностных характеристик случайной величины (5.136) приведены на рис. 5.16 и 5.17. Расчетные зависимости для $\beta < 0,1$ совпадают с соответствующими приводимыми зависимостями для $\beta = 0,1$. Это свойство уже было отмечено для случайной величины η (5.85). Численные расчеты также показали нечувствительность зависимостей $P(\chi)$ и $F(\chi)$ от частоты ω в диапазоне $10^{-1} \leq \omega \leq 10^4$. Плотность распределения $P(\chi)$ имеет один максимум в районе значений

$$\langle \chi \rangle = \frac{\sigma t}{4\beta \omega^2}, \quad (5.145)$$

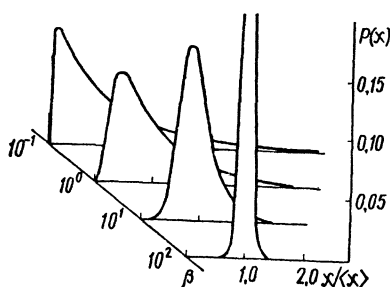


Рис. 5.16. Плотность распределения вероятностей $P(\chi)$:
 $\sigma = 10, 0$; $t = 1, 0$; $\omega = 2\pi \cdot 100$.

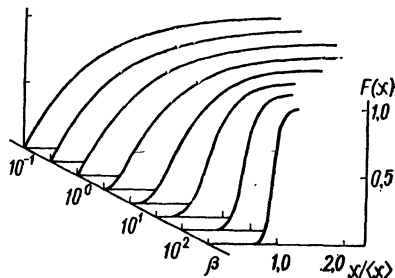


Рис. 5.17. Интегральная вероятность $F(\chi)$:
 параметры см. рис. 5.16.

а приближенное выражение при $\beta t \gg 1$ в области этого максимума функции $P(\chi)$ можно найти аналогично тому, как была получена асимптотика (5.118):

$$P(\chi) = \left(\frac{\beta t}{2\pi \chi \langle \chi \rangle} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\beta t}{2} \left(\sqrt{\frac{\chi}{\langle \chi \rangle}} - \sqrt{\frac{\langle \chi \rangle}{\chi}} \right)^2 \right\}, \quad (5.146)$$

Аналогичный подход может быть осуществлен при изучении стохастических характеристик случайной величины

$$\chi = \int_0^t d\tau x^2(\tau) |_{x(0)=0, \dot{x}(0)=0}, \quad (5.147)$$

описывающей интеграл от квадрата перемещения стохастического затухающего осциллятора, на траекторию которого при $\tau = 0$ наложены нулевые начальные условия. Подставляя в (5.138) $J_0(\eta_1, \eta_2) = \pi$ и интегрируя по паре переменных η_1, η_2 , найдем

$$Q(a, b, c) |_{x(0)=0, \dot{x}(0)=0} = \frac{2\beta\omega(\rho_1 - \rho_2)e^{(\beta - \gamma)t}}{\sigma(AC - \frac{1}{2}B^2)^{1/2}(D_{11}D_{12} - D_{12}^2)^{1/2}}, \quad (5.148)$$

где

$$D_{11} = \frac{\sigma}{\rho_2} (1 - e^{-2\rho_2 t}) + \frac{A\rho_1^2 - 2B\rho_1 + C}{AC - B^2};$$

$$D_{12} = \frac{2\sigma}{\rho_1 + \rho_2} (1 - e^{-\rho_1 t - \rho_2 t}) + \frac{A\rho_1\rho_2 - B\rho_1 - B\rho_2 + C}{AC - B^2}; \quad (5.148a)$$

$$D_{22} = \frac{\sigma}{\rho_1} (1 - e^{-2\rho_1 t}) + \frac{A\rho_2^2 - 2B\rho_2 + C}{AC - B^2}.$$

Подготовка к выполнению численных расчетов с производящей функцией (5.148) та же, как и с производящей функцией (5.141). Результаты расчетов вероятностных характеристик χ (5.147) приведены на рис. 5.18 и 5.19. Для $\beta t \gg 1$ зависимости на этих рисунках близки к аналогичным зависимостям рис. 5.16 и 5.17. При $\beta t \ll 1$ проявляется влияние нулевых начальных условий, распределение $P(\chi)$ в основном формируется около оси $\chi = 0$, вместе с тем характерным является образование «хвоста» этого распределения.

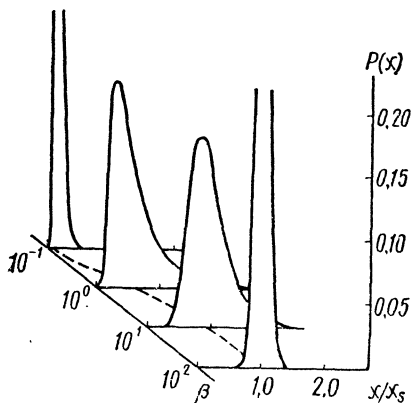


Рис. 5.18. Плотность распределения вероятностей $P(\chi)$:
 $\sigma = 10, 0$; $t = 1, 0$; $\omega = 2\pi \cdot 100$; $\chi_s = \sigma t / 4\beta \omega^2$

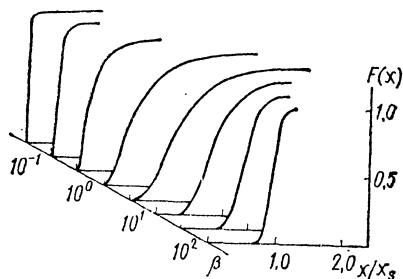


Рис. 5.19. Интегральная вероятность $F(\chi)$:
 параметры см. рис. 5.18.

В заключение приведем формулу для случая, когда нулевые условия траектории наложены как в начале, так и в конце интервала $(0, t)$:

$$Q(a, b, c) |_{x(0)=x(t)=0, x(0)=x(t)=0} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2\pi \sqrt{D}} e^{(\beta - r)t}, \quad (5.149)$$

выражение для величины D дано в (5.134).

Упражнения

5.5.1. (M10). Убедиться в том, что при $a = c = 0$ из (5.134) следует

$$\Psi(x, u, t; x_0, u_0) = \exp(-bx^2 + bx_0^2) \omega(x, u, t; x_0, u_0, 0).$$

5.5.2. (M20). *Продолжение.* Показать, что при $b = c = 0$ выражение (5.134) для Ψ функции переходит в формулу (5.101), отвечающую функционалу (5.85).

5.5.3. (M20). Решить матричное уравнение (5.25), записанное в терминах стохастического ГС-процесса. Полученное решение связать с решениями алгебраических уравнений (5.130).

5.5.4. (M15). Показать, что в выражениях (5.130) и (5.132) физический смысл имеют радикалы, у которых выбран знак «плюс».

5.5.5. (M45). Пусть дан функционал

$$F = \int_0^t d\tau \{a[u(\tau) + s_u(\tau)]^2 + 2b[u(\tau) + s_u(\tau)][x(\tau) + s_x(\tau)] + c[x(\tau) + s_x(\tau)]^2\},$$

где $s_u(\tau)$ и $s_x(\tau)$ — произвольные детерминированные квадратичноинтегрируемые функции. Найти значение континуального интеграла $Q(a, b, c) = \langle \exp(-F) \rangle$ по стохастической ГС-мере.

5.5.6. (M20). Вычислить математическое ожидание

$$Q(a, b, c) = \left\langle \exp \left\{ - \int_0^t d\tau [a u^2(\tau) + 2b x(\tau) u(\tau) + c x^2(\tau)] \right\} \right\rangle$$

при условии, что $x(t) = x(0)$ и $u(t) = u(0)$. При вычислении этого математического ожидания по ГС-мере использовать выражение (5.135), вставив в него функции Дирака $\delta(x - x_0)$ и $\delta(u - u_0)$.

5.5.7. (M40). Уравнение $\ddot{x} + \nu \dot{x} = f(t)$ описывает флуктуации интеграла от пройденного пути $x(t)$ ОУ-процесса. С помощью выражения (5.134) и уравнения движения (5.120), в котором следует заменить 2β на ν и положить $\omega = 0$, исследовать статистику величины $\chi = \int_0^t d\tau x^2(\tau)$ [6].

5.5.8. (M40). Рассмотрим следующее уравнение движения для двух процессов $x(t)$ и $y(t)$:

$$\dot{y} + \mu y = x(t), \quad \dot{x} + \nu x = f(t),$$

где μ и ν — декременты. Вычислить континуальные интегралы

$$Q_1(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ - \lambda \int_0^t d\tau y^2(\tau) \right\} \right\rangle_x,$$

$$Q_2(\lambda_x, \lambda_y) = \left\langle \exp \left\{ - \lambda_x \int_0^t d\tau x^2(\tau) - \lambda_y \int_0^t d\tau y^2(\tau) \right\} \right\rangle_x.$$

5.5.9. (M35). Убедиться в том, что решением уравнения для функции $\Psi = \Psi(x, u, t; x_0, u_0)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = -u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \omega^2 x \frac{\partial \Psi}{\partial u} + 2\beta \frac{\partial}{\partial u} (u\Psi) + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} - \lambda [x + X(t)]^2 \Psi$$

с произвольной квадратичноинтегрируемой функцией $X(t)$ и начальным условием $\Psi(x, u, 0; x_0, u_0) = \delta(x - x_0) \delta(u - u_0)$ является функция

$$\Psi(x, u, t; x_0, u_0) = \frac{(\nu^* - \nu) e^{(r+\beta)t}}{2\pi \sqrt{4pp^* - h^2}} \exp \left\{ - \lambda \int_0^t d\tau X^2(\tau) + ua(t) + xb(t) - \right. \\ \left. - \frac{\beta\omega^2 - r\Omega^2}{\sigma} (x^2 - x_0^2) + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\sigma} (xu - x_0 u_0) - \frac{\beta - r}{\sigma} (u^2 - u_0^2) - \frac{R}{4pp^* - h^2} \right\},$$

где

$$\Omega^2 = \sqrt{\omega^4 + 2\lambda\sigma}; \quad r = \sqrt{\beta^2 + (\Omega^2 - \omega^2)/2}; \quad \nu = r + i\Omega;$$

$$a(t) = 2\lambda \int_0^t d\tau X(\tau) \frac{\sin \Omega(t - \tau)}{\Omega} e^{r(t-\tau)};$$

$$b(t) = 2ra(t) - \dot{a}(t);$$

$$p = \frac{\sigma}{4\nu} (e^{2\nu t} - 1); \quad h = \frac{\sigma}{\nu + \nu^*} (e^{\nu t + \nu^* t} - 1);$$

$$R = pZ^2 e^{2\nu^* t} - hZZ^* e^{\nu t + \nu^* t} + p^* Z^{*2} e^{2\nu t};$$

$$Z = (u + \nu x) - (u_0 + \nu x_0) e^{-\nu^* t} + \sigma \int_0^t d\tau a(\tau) e^{\nu(\tau-t)}.$$

5.5. 0. (М30). Рассмотрим комплекснозначный стохастический процесс $\tilde{\alpha} + 2\beta\alpha + \omega^2\alpha = f(t)$ с порождающим процессом «белого» шума, причем $\langle \text{Re } f(t) \times \text{Re } f(t') \rangle = \langle \text{Im } f(t) \text{Im } f(t') \rangle = \sigma \delta(t - t')$ и $\langle \text{Re } f(t) \text{Im } f(t') \rangle = 0$. Показать, что безусловное среднее $\left\langle \exp \left\{ -c \int_0^t d\tau |\alpha(\tau)|^2 \right\} \right\rangle$ равно $Q^2(0, 0, c)$, где $Q(0, 0, c)$ определяется выражениями (5.141).

5.5.11. (М30). Продолжение. Вычислить с помощью интеграла Коши следующие вероятности (рис. 5.20 и 5.21):

$$P(m) = \left\langle \frac{1}{m!} \left[\int_0^t d\tau |\alpha(\tau)|^2 \right]^m \exp \left[- \int_0^t d\tau |\alpha(\tau)|^2 \right] \right\rangle,$$

$$F(m) = \sum_{n=0}^m P(n),$$

где $m = 0, 1, \dots$

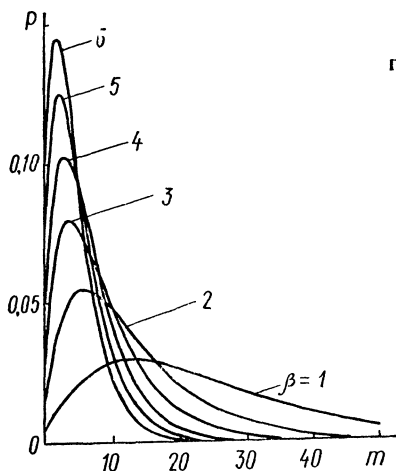


Рис. 5.20. Вероятность $P(m)$ (см. упражнение 5.5.11):

$\sigma = 5,0$; $t = 1,0$; $\omega = 10,0$

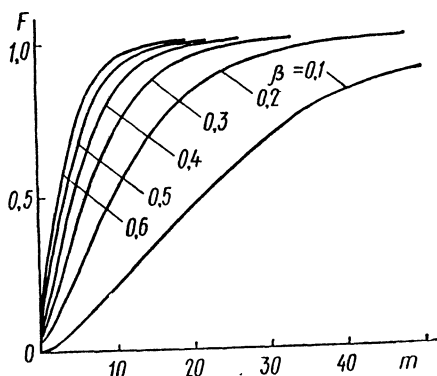


Рис. 5.21. Интегральная вероятность $F(m)$ (см. упражнение 5.5.11):

параметры см рис 5.20.

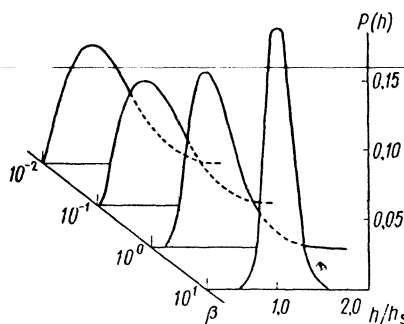


Рис. 5.22. Плотность распределения вероятностей $P(h)$ (см. упражнение 5.5.14):

$\sigma = 1,0$; $L = 1,0$; $\omega = 2\pi \cdot 10^2$; $h_s = \sigma/4\sqrt{\omega^2}$.

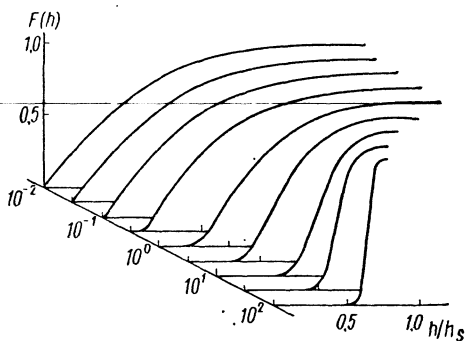


Рис. 5.23. Интегральная вероятность $F(h)$ (см. упражнение 5.5.14):

пар: метры см. рис 5.22.

5.5.12. (М35). Исследовать статистические характеристики функционала (см. также упражнение 5.3.6)

$$F = \int_0^t d\tau [\dot{x}^2(\tau) + \omega^2 x^2(\tau)].$$

5.5.13. (М30). Исследовать статистику функционала

$$F = \int_0^t d\tau [a\dot{x}^2(\tau) + 2bx(\tau)\dot{x}(\tau) + cx^2(\tau)]$$

при условии, что $x(0) = x(t) = \dot{x}(0) = \dot{x}(t) = \dot{x}$ (возвращающаяся траектория ГС-процесса).

5.5.14. (М30). Рассмотрим функционал на отрезке длиной L

$$h^2 = \frac{1}{L} \int_0^L dx^2(l),$$

где $x(l)$ — ГС-процесс

$$\frac{d^2x}{dl^2} + 2\beta \frac{dx}{dl} + \omega^2 x = f(l);$$

$0 \leq l \leq L$; $\langle f(l) f(l') \rangle = \sigma \delta(l - l')$. Плотность распределения вероятностей $P(h)$ случайной величины h равна

$$P(h) = 2h \int \frac{d\lambda}{2\pi i} \exp(\lambda h^2) Q(\lambda),$$

где безусловное среднее

$$Q(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{L} \int_0^L dx^2(l) \right\} \right\rangle.$$

С помощью результата (5.141) определить количественные характеристики случайной величины h (рис. 5.22 и 5.23).

6. КОНТИНУАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ РАДИАЦИОННОЙ ФИЗИКИ ЧАСТИЦ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Современный физик по понедельникам, средам и пятницам — специалист по квантовой теории, а по вторникам, четвергам и субботам — по теории относительности.

Н. Винер

В этой главе рассмотрим технику использования континуальных интегралов в задачах, возникающих при описании радиационных эффектов, связанных с движением релятивистской частицы (например, электрона) в аморфной или кристаллической среде. Нахождение континуальных средних будет проводиться на основе меры Винера.

6.1. ДЛИНА ФОРМИРОВАНИЯ РАДИАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

Если заряженная частица движется равномерно по неограниченной прямолинейной траектории в вакууме, то при этом не возникает никакого излучения. Излучение может возникнуть только в том случае, если имеется какая-нибудь неоднородность движения, например на каком-либо малом участке скорость частицы изменила свое направление. Из основных принципов квантовой механики следует, что изменение импульса частицы не может произойти в точке, соответственно изменение ее энергии не может быть мгновенным. Для частицы высокой энергии каждое ее взаимодействие разворачивается в конечной области пространства и за конечное время, а с ростом энергии эффективные размеры этой области в направлении движения частицы, как можно показать, также увеличиваются. Таким образом, при движении релятивистской частицы (электрона) в среде необходимо рассматривать взаимодействие ее со всей частью среды, входящей в эту область, в целом. Отрезок в продольном направлении, характеризующий эту область, принято называть длиной формирования. В работах [1, 2] подробно рассмотрено физическое содержание этой характеристики радиационного процесса. Здесь определим, согласно [3], длину формирования как отрезок пути, для которого разброс фаз излучаемых частицей волн не превышает π . При движении релятивистской частицы в среде она испытывает различного рода возмущения ее траектории, собственно говоря, именно эти возмущения и обуславливают излучение частицы, если в среднем ее траектория остается равномерной и прямолинейной. Степень этих возмущений можно охарактеризовать в терминах среднего угла (среднего квадрата угла) рассеяния релятивистской частицы, приходящегося на единицу длины пройденного ею пути. Таким образом, процесс движения частицы в среде (например, в аморфной) и ис-

пускания фотонов характеризуется в направлении движения двумя продольными масштабами, один из которых связан с рассеянием частицы, а другой — с формированием поля излучения.

Еще в 50-х годах Л. Л. Ландау и И. Я. Померанчук обратили внимание [4] на то, что многократное рассеяние может существенно влиять на излучение частиц ультравысоких энергий в аморфной среде в области малых частот. В указанных работах было показано, что если средний квадрат угла рассеяния релятивистской частицы на длине формирования превышает квадрат характерного угла ее излучения, то сечение излучения, приходящегося на один атом среды, оказывается существенно меньшим сечения излучения на изолированном центре. Этот эффект носит название эффекта Ландау — Померанчука подавления излучения частиц высоких энергий в аморфной среде. В [5] были приведены общие формулы для интенсивности излучения релятивистской частицы в веществе в области малых частот и даны оценки интенсивности в случае, когда эффект подавления значителен. Намеченный в [4, 5] путь вычисления среднего значения спектральной плотности излучения частицы в аморфной среде включал нахождение некоторого математического ожидания, которое фактически являлось континуальным интегралом по мере, основанной на решении стохастического дифференциального уравнения движения релятивистской частицы.

Количественная теория этого эффекта, однако, впоследствии была развита на основе другого метода, предложенного А. Б. Мигдалом [6], — метода кинетического уравнения для функции распределения частиц в среде по координатам и скоростям. С помощью этого метода была получена формула для интенсивности излучения релятивистской частицы в аморфной среде, описывающая как частные случаи результат Бете — Гайтлера [7] в пределе, когда влиянием многократного рассеяния можно пренебречь, и формулу Ландау — Померанчука (с уточненным численным коэффициентом), когда эффект многократного рассеяния существен. В рамках этого метода впоследствии исследовалось и влияние других факторов (например, отдача при эмиссии квантов, поляризация среды, поглощение фотонов и т. д.) на излучение частиц высоких энергий в среде (см., например, монографии [2, 8] и литературные источники, приведенные в них). В рамках намеченного в [4, 5] пути вычисления среднего значения спектральной плотности излучения релятивистских частиц в веществе количественные результаты получены не были.

Эффекты, аналогичные эффекту Ландау — Померанчука в аморфной среде, возможны и при движении релятивистской частицы в кристалле под малым углом к одной из кристаллографических осей, причем в кристалле подавляется не обычное тормозное, а когерентное излучение релятивистской частицы. Если траектория частицы не является прямой, например частица движется по дуге окружности во внешнем магнитном поле, то испытываемые ею при этом возмущения могут обусловить изменение спектральной плотности излучения по сравнению со случаем равномерного кругового движения. При этом возможно влияние на формирование излучения также интерференционного слагаемого между регулярной и стохастической компонентами траекто-

рии частицы, которое отсутствовало при прямолинейном и равномерном ее движении.

Результаты, приведенные ниже, получены в рамках классической электродинамики, что оправдано, если можно пренебречь отдачи при излучении и если в пределах длины формирования частица испытывает большое число возмущений. Указанные условия выполняются в широком интервале энергий движущихся в среде частиц и в широком интервале частот излученных фотонов [9].

6.2. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА В АМОРФНОЙ СРЕДЕ — СПЕКТРАЛЬНО-УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В классической электродинамике спектрально-угловая плотность электрона в веществе с учетом влияния поляризации среды на излучение определяется формулой [2]

$$\frac{dE}{d\omega d\Omega} = \frac{e_0^2}{4\pi^2} |\vec{k} \times \vec{J}|^2, \quad \vec{J} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{v}(t) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}(t))}, \quad (6.1)$$

где $\vec{k}$ и ω — волновой вектор и частота излученной волны; $k^2 = \epsilon_p \omega^2$; ϵ_p — диэлектрическая постоянная среды; $d\Omega$ — элемент телесного угла в направлении излучения (здесь и далее будем пользоваться системой единиц, в которой скорость света принята равной единице); e_0 — заряд электрона. Траектория $\vec{r}(t)$ и скорость $\vec{v}(t)$ частицы в веществе в момент времени t определяются из уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} = -\frac{d}{dr} \sum_i U(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (6.2)$$

где m — масса электрона; $U(\vec{r} - \vec{r}_i)$ — потенциальная энергия взаимодействия электрона с полем атома среды, находящимся в точке $\vec{r}_i$. Раскрывая в (6.1) квадрат векторного произведения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\omega d\Omega} &\cong \frac{e_0^2 \omega^2}{4\pi^2} \int dt \int dt' [\vec{n} \cdot \vec{v}] [\vec{n} \cdot \vec{v}'] \times \\ &\times \exp \{i\omega(t-t') - i\omega \sqrt{\epsilon_p} \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')\}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $\vec{v} = \vec{v}(t)$; $\vec{v}' = \vec{v}(t')$; $\vec{r} = \vec{r}(t)$; $\vec{r}' = \vec{r}(t')$; $\vec{n}$ — единичный вектор, $\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$. Поскольку рассматривается излучение релятивистского электрона, то $\vec{v}^2 = \beta^2$, где релятивистский фактор β близок к единице, $(1 - \beta^2) \ll 1$, поэтому с точностью γ^{-2} , где $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, найдем

$$[\vec{n} \cdot \vec{v}] [\vec{n} \cdot \vec{v}'] = -\frac{1}{\epsilon_p} (1 - \epsilon_p \vec{v} \cdot \vec{v}'). \quad (6.4)$$

Сделав в (6.3) замену временных переменных по правилу $t \rightarrow T$ и $t' = T + \tau$, с учетом (6.4) запишем (6.3) в виде

$$\frac{dE}{d\omega d\Omega} = -\frac{e_0^2 \omega^2}{4\pi^2 \varepsilon_p} \int dT \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [1 - \varepsilon_p \vec{v}(T) \vec{v}(T + \tau)] \times \\ \times \exp \{-i\omega\tau + i\omega \sqrt{\varepsilon_p} \vec{n}(\vec{r}(T + \tau) - \vec{r}(T))\}. \quad (6.5)$$

Если считать, что энергия заряженной частицы неизменна с течением времени, то интеграл по T в (6.5) в бесконечных пределах неограничен. Будем поэтому полагать пределы этого интегрирования конечными и заданными. В силу малости аргумента экспоненты выражение (6.5) имеет типичный резонансный характер, а интеграл по τ будет заметно отличен от нуля лишь тогда, когда этот аргумент близок к нулю. Поэтому основной вклад в интеграл по τ в (6.5) вносят значения $\Delta\tau \ll 2\gamma^2/\omega$. Эффективный угол рассеяния релятивистской частицы в веществе на интервале $\Delta\tau$ времени мал, поэтому в (6.5) может быть выполнено разложение по этому углу. Воспользуемся с этой целью разложением (наполним, что $c = 1$)

$$\vec{v}(T + \tau) \simeq \vec{v} \left(1 - \frac{1}{2} \vec{\theta}^2(r)\right) + \vec{\theta}(r), \\ \vec{r}(T) - \vec{r}(T + \tau) = - \int_0^{\tau} d\tau' \vec{v}(T + \tau'), \quad (6.6)$$

где $\vec{v} = \vec{v}(T)$ и $\vec{\theta}(\tau)$ — компонента вектора $\vec{v}(T + \tau)$, ортогональная $\vec{v}(T)$. В веществе релятивистский электрон испытывает малые угловые отклонения $\vec{\theta}^2 \ll \vec{v}^2$, направление вектора $\vec{v}(T)$ остается неизменным, поэтому

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}') = -\cos \kappa \left[v\tau - \frac{1}{2} \int_0^{\tau} d\tau' \vec{\theta}^2(\tau') + \frac{1}{2\tau} \left(\int_0^{\tau} d\tau' \vec{\theta}(\tau') \right)^2 \right], \quad (6.7)$$

где κ — угол между $\vec{v}$ и $\vec{n}$, $\cos \kappa = \vec{v}\vec{n}$. Пусть длительность пролета электрона в аморфной среде равняется T , тогда из (6.5) получим с учетом (6.6) и (6.7)

$$\frac{dE}{d\omega d\Omega} = -\frac{e_0^2 \omega^2}{4\pi^2 \varepsilon_p} T \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[1 - \varepsilon_p \vec{v}^2 + \frac{1}{2} \vec{\theta}^2(\tau) \right] \exp \left\{ -i\omega\tau + \right. \\ \left. + i\omega\varepsilon_p \cos \kappa \left[v\tau - \frac{1}{2} \int_0^{\tau} d\tau' \vec{\theta}^2(\tau') + \frac{1}{2\tau} \left(\int_0^{\tau} d\tau' \vec{\theta}(\tau') \right)^2 \right] \right\}. \quad (6.8)$$

Найденное выражение для спектрально-угловой плотности излучения представляет собой функционал случайного процесса $\vec{\theta}(\tau')$ — угла рассеяния частицы в веществе. Этот функционал должен быть усреднен по случайным значениям угла $\vec{\theta}(\tau')$. Существенным при этом является то, что функционал, определяемый выражением (6.8), имеет

гауссов вид по переменным $\vec{\theta}(\tau')$, что следует из разложения (6.6). Если к тому же случайный процесс $\vec{\theta}(\tau')$ является нормальным марковским процессом, то процедура усреднения выражения (6.8) может быть выполнена аналитически.

При движении релятивистских частиц в аморфной среде процесс рассеяния осуществляется без затухания. В этом случае, как известно [2], распределение частиц по углам $\vec{\theta}$ к моменту времени τ определяется выражением ($\tau > 0$)

$$P(\vec{\theta}) = \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{\vec{\theta}^2}{2\sigma\tau}\right), \quad (6.9)$$

где 2σ — средний квадрат угла рассеяния частицы на единице длины. Распределение (6.9) отвечает стохастическому процессу $\vec{\theta}(\tau)$, описываемому уравнением движения

$$\frac{d}{d\tau} \vec{\theta} = \vec{f}(\tau), \quad \vec{\theta}(0) = 0, \quad (6.10)$$

где $\langle \vec{f}(\tau) \vec{f}(\tau') \rangle = \sigma \delta(\tau - \tau')$, т. е. $\vec{\theta}(\tau)$ — двухкомпонентный (векторный) винеровский процесс [10]. Плотность вероятности того, что углы рассеяния релятивистской частицы $\vec{\theta}(n\Delta) = \vec{\theta}_n$ в моменты времени $t_n = n\Delta$, где $\Delta = \tau/N$, будут лежать в интервалах $(\vec{\theta}_n, \vec{\theta}_n + d\vec{\theta}_n)$, определяется соотношением [13]

$$d^2P_N = \frac{d\vec{\theta}_1 \dots d\vec{\theta}_N}{(2\pi\sigma\Delta)^N} \exp\left\{-\frac{\vec{\theta}_1^2}{2\sigma\Delta} - \frac{(\vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1)^2}{2\sigma\Delta} - \dots - \frac{(\vec{\theta}_N - \vec{\theta}_{N-1})^2}{2\sigma\Delta}\right\}. \quad (6.11)$$

Используя эту вероятность, среднее значение спектрально-угловой плотности излучения релятивистской частицы в аморфной среде запишем в виде континуального интеграла по винеровской мере $d_w^2\vec{\theta}$:

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega d\Omega} \right\rangle_o \int d_w^2\vec{\theta} E'(\vec{\theta}(t)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^2P_N E'(\vec{\theta}(t)), \quad (6.12)$$

где $E'(\vec{\theta}(t))$ — функционал углов $\vec{\theta}(t)$, определяемый выражением (6.8).

Процесс рассеяния в каждом из ортогональных направлений x и y , оси которых образуют плоскость (x, y) , перпендикулярную среднему направлению частицы, независим и одинаков, поэтому

$$P(\vec{\theta}) = P(0_x) P(0_y) = \frac{1}{1' 2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{0_x'^2}{2\sigma\tau}\right) \frac{1}{1' 2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{0_y'^2}{2\sigma\tau}\right), \quad (6.13)$$

где $\vec{\theta} = (0_x, 0_y)$; факторизуется также и плотность распределения d^2P_N . Отсюда следует, что будут равны и математические ожидания по мере $d_w\theta_x$ или $d_w\theta_y$, если структура усредняемых выражений одина-

кова. Поэтому при нахождении среднего $\langle dE/d\omega d\Omega \rangle_a$ достаточно вычислить континуальный интеграл лишь по одной из компонент вектора $\vec{\theta}$. С учетом этого представим величину $\langle dE/d\omega d\Omega \rangle_a$ в виде

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega d\Omega} \right\rangle_a = -\frac{e_0^2 \omega^2}{4\pi^2 \epsilon_p} T \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [(1 - \epsilon_p v^2) Q_1^2(\tau) + Q_1(\tau) Q_2(\tau)] \times \\ \times \exp(-i\omega\tau + i\omega\tau \epsilon_p \cos \kappa), \quad (6.14)$$

где $Q_1(\tau)$ и $Q_2(\tau)$ — следующие континуальные интегралы по винеровской мере:

$$Q_1(\tau) = \left\langle \exp \left\{ -i \frac{\omega \epsilon_p \cos \kappa}{2} \left[\int_0^\tau d\tau' \theta^2(\tau') - \left(\int_0^\tau d\tau' \theta(\tau') \right)^2 \right] \right\} \right\rangle, \quad (6.15)$$

$$Q_2(\tau) = \left\langle \theta^2(\tau) \exp \left\{ -i \frac{\omega \epsilon_p \cos \kappa}{2} \left[\int_0^\tau d\tau' \theta^2(\tau') - \left(\int_0^\tau d\tau' \theta(\tau') \right)^2 \right] \right\} \right\rangle, \quad (6.16)$$

а $\theta(\tau')$ — одна из компонент вектора $\vec{\theta}(\tau')$.

Вычисление этих континуальных интегралов осуществим, используя метод Каца — Фейнмана [11, 12]. Перепишем выражение (6.15) в виде

$$Q_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \Psi_q(\theta, \tau; 0, 0), \quad (6.17)$$

где

$$\Psi_1(\theta, \tau; 0, 0) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^\tau d\tau' [\theta(\tau') + s]^2 \right\} \right\rangle; \quad (6.18)$$

$$\lambda = i \frac{\omega \epsilon_p}{2} \cos \kappa; \quad s = -\frac{q}{\sqrt{\lambda \tau}}. \quad (6.19)$$

Ψ_q -функция (6.18) является математическим ожиданием по отношению к интервалу $0 \leq \tau' < \tau$, а интегрированием по θ в (6.17) осуществляется усреднение по всем возможным состояниям в конечный момент времени $\tau' = \tau$. Ясно, что

$$Q_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \theta^2 \Psi_q(\theta, \tau; 0, 0). \quad (6.20)$$

Благодаря гауссовости выражения (6.18) и винеровской меры (6.11) по θ математическое ожидание Ψ_q может быть найдено явно. В соответствии с [11, 12] Ψ_q -функция является решением дифференциального уравнения (см. (3.24))

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_q = \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \Psi_q}{\partial \theta^2} - \lambda (\theta + s)^2 \Psi_q \quad (6.21)$$

с начальным условием $\Psi_q(\theta, 0; 0, 0) = \delta(\theta)$. Здесь можно использовать явный вид решения этого уравнения, данный выражением (3.33),

если принять в нем $v = 0$, или непосредственно воспользоваться результатами упражнения 3.3.9:

$$\Psi_q(\theta, \tau; 0, 0) = \left[\frac{1}{\pi\sigma(e^{2r\tau} - 1)} \right]^{1/2} \exp \left\{ -\lambda\tau^2 + \frac{r\theta^2}{2\sigma} + \frac{r\tau}{2} + \theta a(r) + \right. \\ \left. + \frac{\sigma}{2} \int_0^\tau d\tau' a^2(\tau') - \frac{1}{\sigma} (1 - e^{-2r\tau})^{-1} \left[\theta + \sigma \int_0^\tau d\tau' a(\tau') e^{r(\tau' - \tau)} \right]^2 \right\}, \quad (6.22)$$

где

$$r = \sqrt{2\lambda\sigma}; \quad a(\tau) = -2\lambda \int_0^\tau d\tau' se^{-r(\tau' - \tau)}. \quad (6.23)$$

После вычисления необходимых квадратур в (6.22) найдем

$$\Psi_q(\theta, \tau; 0, 0) = \left[\frac{re^{r\tau}}{\pi\sigma(e^{2r\tau} - 1)} \right]^{1/2} \exp \{ -aq^2 + 2bq\theta - c\theta^2 \}, \quad (6.24) \\ a = \frac{2}{r\tau} \frac{e^{r\tau} - 1}{e^{r\tau} + 1}, \quad b = \sqrt{\frac{\lambda}{r\tau^2}} \frac{e^{r\tau} - 1}{e^{r\tau} + 1}, \quad c = \frac{2}{2\sigma} \frac{e^{2r\tau} + 1}{e^{2r\tau} - 1}.$$

Поэтому после интегрирования по q и θ в соответствии с (6.17) и (6.20) для средних Q_1 и Q_2 получим

$$Q_1(\tau) = \sqrt{\frac{r\tau}{\text{sh } r\tau}}, \quad Q_2(\tau) = Q_1(\tau) \frac{2\sigma}{r} \text{th } \frac{r\tau}{2}, \quad (6.25)$$

где, напомним,

$$r = \sqrt{i\omega\sigma\epsilon_p \cos \kappa}. \quad (6.26)$$

Возвращаясь к (6.8) и (6.12), придем к следующему выражению для спектрально-угловой плотности излучения релятивистской частицы в аморфной среде:

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega d\Omega} \right\rangle_a = -\frac{e_0^2 \omega^2}{4\pi^2 \epsilon_p} T \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(-i\omega\tau + i\omega\epsilon_p \tau \cos \kappa) \times \\ \times \left[(1 - \epsilon_p v^2) \frac{r\tau}{\text{sh } r\tau} + \frac{\sigma\tau}{\text{ch}^2 \frac{r\tau}{2}} \right]. \quad (6.27)$$

Это выражение не зависит от азимутального угла вылета фотона и его резонансный характер указывает, что угловая зависимость плотности (6.27) определяется множителем $\exp(-i\omega\tau + i\omega\epsilon_p \tau \cos \kappa)$. Если (6.27) записать в виде

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega d\Omega} \right\rangle_a = -\frac{e_0^2 \omega \delta_p}{2\pi^2} T \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{r\tau}{\text{sh } r\tau} \left(1 + \frac{\omega\sigma}{2\delta_p} \frac{\text{sh } r\tau}{\text{ch}^2 \frac{r\tau}{2}} \right) \times \\ \times \exp[-i\delta_p \tau - i\omega\epsilon_p (1 - \cos \kappa)\tau], \quad (6.28)$$

где длина δ_p (длина формирования излучения) равна $\delta_p = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_p} - v^2 \right)$, то можно сделать вывод, что характерные значения полярного угла κ

вылета фотона малы

$$\kappa \leq \kappa_k = \frac{2}{\gamma_p}, \quad \gamma_p = \left(\frac{1}{\varepsilon_p} - v^2 \right)^{-1/2}. \quad (6.29)$$

Таким образом, индикатрисса излучения направлена вперед по ходу движения частицы и в основном сосредоточена внутри конуса с углом раствора, равным κ_k . Если $\kappa > \kappa_k$, то значение интеграла по τ , определяющего спектрально-угловое распределение (6.28), быстро уменьшается. Поскольку в случае релятивистских частиц $\gamma_p \gg 1$, а поэтому $\kappa_k \ll 1$, то в дальнейшем можно принять, что

$$r = \sqrt{i\omega\varepsilon_p}. \quad (6.30)$$

Если в (6.28) взять интеграл по τ от второго слагаемого в круглых скобках по частям, то окончательно получим

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega d\Omega} \right\rangle_a = \frac{e_0^2 \omega \delta_p}{2\pi^2} T \times \\ \times \operatorname{Re} \left\{ r \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau \operatorname{cth} r\tau \exp[-i\delta_p \tau - i\omega \tau \varepsilon_p (1 - \cos \kappa)] \right\}, \quad (6.31)$$

т. е. искомое выражение для спектрально-угловой плотности излучения релятивистской частицы в аморфной среде. Интегрируя выражение (6.32) по всем углам вылета фотона, найдем с точностью до γ_p^{-1}

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega} \right\rangle_a = -\frac{2e_0^2 \delta_p}{\pi} T \left\{ \operatorname{Im} \left[r \int_0^{\infty} d\tau \operatorname{cth} r\tau e^{-i\tau \delta_p} \right] - \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (6.32)$$

Это выражение для спектральной плотности излучения в аморфной среде ниже будет получено другим путем (см. формулу (6.59)).

Упражнения

6.2.1. (M15). Проанализировать геометрический смысл выражений (6.6) и (6.7).

6.2.2. (M15). При равномерном и прямолинейном движении в вакууме заряженная частица не излучает. Пусть $\varepsilon_p = 1$. Убедиться в том, что при $\sigma = 0$ выражение (6.32) обращается в нуль.

6.2.3. (M25). Пусть флуктуационные возмущения траектории заряженной частицы в аморфной среде испытывают затухание с декрементом ν . Показать, что результат (6.32) останется в силе, если в нем под r понимать величину $r' = \sqrt{\nu^2 + i\omega\varepsilon_p}$.

6.2.4. (M40). Получить выражения, аналогичные (6.31) и (6.32), но для поляризационных характеристик спектрально-углового распределения испускания фотонов.

6.2.5. (M40). Формула (6.31) описывает спектрально-угловое распределение излучения релятивистской частицы в аморфной среде; она относится к случаю, когда $\langle \theta(\tau) \rangle = 0$. Пусть мишень помещена во внешнее поле (например, однородное магнитное поле, силовые линии которого перпендикулярны исходному направлению движения частицы), тогда $\langle \theta(\tau) \rangle \neq 0$. Получить обобщение формулы (6.31) для этого случая.

6.2.6. (M30). Рассмотрим релятивистский электрон, движущийся в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной его силовым линиям. Пользуясь (6.1) и (6.6), получить выражение для спектральной плотности излучения (синхротронного излучения) [9].

6.2.7. (М30). Продолжение. Спектр синхротронного излучения состоит из линий, частота которых кратна ларморовской частоте Ω обращения электрона в магнитном поле. Пусть $\Omega = \Omega_0 + \delta\Omega(t)$, где $\delta\Omega(t)$ — флуктуирующая добавка к частоте обращения, являющаяся стохастическим винеровским процессом. Получить выражение для спектрального состава n -й гармоники синхротронного излучения.

6.2.8. (М30). Продолжение. Получить выражение для спектральной плотности синхротронного излучения в целом для случаев:

- а) $\delta\Omega(t)$ — винеровский процесс;
 б) $\delta\Omega(t)$ — ОУ-процесс, $\langle (\delta\Omega)^2 \rangle = \sigma_\Omega$.

6.2.9. (М35). Пусть релятивистский электрон движется в однородном магнитном поле в пространстве, содержащем разреженный газ. В результате каждого упругого рассеяния на атомах газа направление движения электрона изменяется на некоторую случайную величину. Пусть эта величина обладает свойствами винеровского процесса. Получить выражение для спектрально-углового распределения потока фотонов синхротронного излучения электрона.

6.3. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА В АМОРФНОЙ СРЕДЕ — СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ

В настоящем параграфе будет изучено влияние процессов многократного рассеяния и поляризации среды на излучение частиц (электронов и позитронов) высоких энергий в аморфной среде. С помощью континуального интегрирования будут воспроизведены формулы Мингдала и Тер-Микаеляна [6, 2] спектральной плотности излучения, полученные на основе кинетического метода.

Воспользуемся выражением (6.3) для спектрально-угловой плотности излучения. Выполнив в (6.3) интегрирование по углам излучения, найдем

$$\frac{dE}{d\omega} = -\frac{e_0^2 k}{\pi} \int dT \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin[k|\vec{r}(T+\tau) - \vec{r}(T)|]}{|\vec{r}(T+\tau) - \vec{r}(T)|} \times \\ \times \left[\vec{v}(T) \vec{v}(T+\tau) - \frac{1}{\varepsilon_p} \right] e^{-i\omega\tau}, \quad (6.33)$$

при этом используем обозначения § 6.2.

Разложение $\vec{v}(T+\tau)$ и $\vec{r}(T+\tau)$, аналогичное (6.6), приводит к

$$\frac{dE}{d\omega} = -\frac{e_0^2 k}{\pi} \int dT \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-i\omega\tau} \left[\frac{1}{\varepsilon_p} - \vec{v}^2 + \frac{1}{2} \vec{\theta}^2(\tau) \right] \times \\ \times \sin \left\{ k\omega\tau - \frac{k}{2} \int_0^\tau d\tau' \vec{\theta}^2(\tau') + \frac{k}{2\tau} \left(\int_0^\tau d\tau' \vec{\theta}(\tau') \right)^2 \right\} \equiv E'(\theta(\tau')). \quad (6.34)$$

Полученный функционал $E'(\vec{\theta}(\tau))$ имеет гауссов вид по случайной переменной $\vec{\theta}(\tau)$. Гауссовость является следствием того, что разложение (6.6) выполнено до членов второго порядка малости, что, в свою очередь, обусловлено резонансным характером выражения для $dE/d\omega$. В силу (6.9) и (6.11) мера, с помощью которой должно быть выполнено усреднение, также гауссова, поэтому математическое ожи-

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega} \right\rangle_a = \int d^2 \vec{\theta} E'(\vec{\theta}(r')) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^2 P_N E'(\vec{\theta}(\tau')) \quad (6.35)$$

является континуальным интегралом от гауссовой формы, который может быть вычислен аналитически.

Структура математического ожидания (6.35) аналогична (6.14) и, хотя можно было бы использовать полученные выше результаты для средних (6.15) и (6.16), вычислим интеграл другим способом, основанным на методе дискретизации. Разделяя усреднение, отвечающее обеим независимым компонентам $\theta_x(\tau)$ и $\theta_y(\tau)$ случайного процесса $\vec{\theta}(\tau)$, запишем

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega} \right\rangle_a = -\frac{2e_0^2 \delta_p}{\pi} T \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \left\{ \left(Q_{\omega}^2 + \frac{\gamma_p^2}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} Q_{\omega}^2 \right) e^{-i\tau \delta_p} - \left(Q_{-\omega}^2 + \frac{\gamma_p^2}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} Q_{-\omega}^2 \right) e^{-2i\omega \tau} \right\} \Big|_{\mu \rightarrow 0}, \quad (6.36)$$

где

$$Q_{\omega} = \left\langle \exp \left\{ \mu \theta^2(\tau) - \frac{i\omega}{2} \int_0^{\tau} d\tau' \theta^2(\tau') + \frac{i\omega}{2} \left(\int_0^{\tau} d\tau' \theta(\tau') \right)^2 \right\} \right\rangle; \quad (6.37)$$

$\theta(\tau')$ — одна из компонент вектора $\vec{\theta}(\tau')$; $\delta_p = \omega/2\gamma_p^2$; $\gamma_p = (\epsilon_p^{-1} - v^2)^{-1/2}$.

Перейдем к вычислению континуального интеграла (6.37). Прежде всего путем внешнего интегрирования по q добьемся, чтобы в показателе экспоненты в (6.37) был однократный интеграл по τ'

$$Q_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2} Q_{\omega}(q), \quad (6.38)$$

$$Q_{\omega}(q) = \left\langle \exp \left\{ \mu \theta^2(\tau) - \frac{i\omega}{2} \int_0^{\tau} d\tau' \theta^2(\tau') + q \sqrt{\frac{2i\omega}{\tau}} \int_0^{\tau} d\tau' \theta(\tau') \right\} \right\rangle. \quad (6.39)$$

Разобьем интервал $(0, \tau)$ на N отрезков длиной $\Delta = \tau/N$ каждый, тогда с учетом (6.11) получим ($\theta_0 = 0$)

$$Q_{\omega}(q) = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_{\omega}(N, q),$$

$$Q_{\omega}(N, q) = \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta_1 \dots d\theta_N}{(2\pi\sigma\Delta)^{N/2}} \exp \left\{ -\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\theta_{n+1} - \theta_n)^2}{2\sigma\Delta} + \mu \theta_N^2 - \frac{i\omega\Delta}{2} \sum_{n=1}^N \theta_n^2 + q \sqrt{\frac{2i\omega}{\tau}} \Delta \sum_{n=1}^N \theta_n \right\}, \quad (6.40)$$

что отвечает (1.14). Введем безразмерные переменные $y_n = \theta_n / \sqrt{2\sigma\Delta}$, тогда

$$Q_\omega(N, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \frac{dy_1 \dots dy_N}{\pi^{N/2}} \exp \left\{ b \sum_{n=1}^N y_n - \sum_{n,m=1}^N y_n y_m A_{nm} \right\}, \quad (6.41)$$

где $b = 2iq\Delta \sqrt{i\omega\sigma\Delta/\tau}$; A_{nm} — матричные элементы трехдиагональной якобиевой матрицы A вида

$$A = \begin{vmatrix} 2 + i\omega\sigma\Delta^2 & -1 & . & . & . & . & . & 0 & . & 0 \\ -1 & 2 + i\omega\sigma\Delta^2 & . & . & . & . & . & 0 & . & 0 \\ 0 & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 2 + i\omega\sigma\Delta^2 & . & -1 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & -1 & 1 + i\omega\sigma\Delta^2 - 2\sigma\mu\Delta & . \end{vmatrix}. \quad (6.42)$$

Для вычисления интеграла (6.36) заметим, что существует такая вещественная ортогональная матрица U , которая приводит матрицу A к диагональному виду, т. е. $(UAU^{-1})_{nm} = a_n \delta_{nm}$, $a_n > 0$. В интеграле (6.41) от переменных интегрирования y_n перейдем к новым переменным z_n согласно соотношению $y_n = \sum_{m=1}^N U_{nm} z_m$. Тогда

$$Q_\omega(N, q) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int dz_1 \dots dz_N \exp \left\{ b \sum_{m=1}^N \left(\sum_{n=1}^N U_{nm} \right) z_m \right\} \times \\ \times \prod_{j=1}^N (2\pi\sigma_j)^{-1/2} \exp \left(-\frac{z_j^2}{2\sigma_j} \right), \quad \sigma_j = \frac{1}{2a_j}, \quad (6.43)$$

или

$$Q_\omega(N, q) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \exp \left(\frac{1}{2} S_N \right), \quad (6.44)$$

$$S_N = b^2 \sum_{j=1}^N \left(\sum_{n=1}^N U_{nj} \right)^2 \sigma_j = \frac{b^2}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{n,m=1}^N U_{nj} U_{mj} a_j^{-1} = \frac{b^2}{2} \sum_{n,m=1}^N (A^{-1})_{nm}, \quad (6.45)$$

где A^{-1} — матрица, обратная к матрице A . Наша задача теперь — найти значения дисперсии S_N и детерминанта матрицы A . Воспользуемся рассуждениями, изложенными в § 2.2 для стохастического ОУ-процесса, которые перенесем на случай стохастического винеровского процесса (6.10). Выражение (6.45) для S_N можно преобразовать следующим образом [13]. Введем совокупность величин D_k — миноры $(N - k + 1)$ -порядка детерминанта матрицы A , расположенные в ниж-

нем правом углу матрицы (6.42), а также совокупность величин G_k — миноры k -го порядка детерминанта матрицы A , расположенные в верхнем левом углу матрицы (6.42):

$$D_1 = \det A, \dots, D_{N-2} = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha_N \end{vmatrix}, \quad D_{N-1} = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha_N \end{vmatrix}, \quad (6.46)$$

$$D_N = \alpha_N, \quad D_{N+1} = 1,$$

$$G_0 = 1, \quad G_1 = \alpha, \quad G_2 = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix}, \dots, \quad G_N = \det A,$$

где $\alpha = 2 + i\omega\sigma\Delta^2$; $\alpha_N = 1 + i\omega\sigma\Delta^2 - 2\sigma\mu\Delta$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих формул для элементов обратной матрицы:

$$(A^{-1})_{km} = \frac{1}{D_1} G_{k-1} D_{m+1} \quad \text{для } m \geq k, \quad (6.47)$$

$$(A^{-1})_{km} = \frac{1}{D_1} G_{m-1} D_{k+1} \quad \text{для } m < k,$$

а из определений величин D_k и G_k можно установить связь между ними

$$G_k D_{k+1} - G_{k-1} D_{k+2} = D_1 = G_N = \det A,$$

откуда следует рекуррентное соотношение

$$G_k = \frac{D_1}{D_{k+1}} + \frac{D_{k+2}}{D_{k+1}} G_{k-1}. \quad (6.48)$$

Итерируя это соотношение, выразим G_k в терминах величин D_l

$$G_k = D_1 D_{k+2} \sum_{l=1}^{k+1} (D_l D_{l+1})^{-1}. \quad (6.49)$$

Возвращаясь к (6.44), запишем $Q_\omega(N, q)$ следующим образом:

$$Q_\omega(N, q) = \frac{1}{\sqrt{D_1}} \exp \left\{ \frac{b^2}{4} \sum_{l=1}^N (D_l D_{l+1})^{-1} \left(\sum_{k=l}^N D_k \right)^2 \right\}. \quad (6.50)$$

Поскольку в (6.40) необходимо выполнить предельный переход $N \rightarrow \infty$, исследуем поведение величин D_k в этом пределе. С этой целью заметим, что величины D_k удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$D_k = (2 + i\omega\sigma\Delta^2) D_{k+1} - D_{k+2}, \quad 1 \leq k \leq N-2, \quad (6.51)$$

и, кроме того,

$$D_N = 1 + i\omega\sigma\Delta^2 - 2\sigma\mu\Delta, \quad D_N - D_{N-1} = 2\sigma\mu\Delta + O(\Delta^2). \quad (6.52)$$

Если теперь вместо D_k писать $D(k\Delta)$, то (6.51) перейдет в разностное уравнение, граничные условия для которого вытекают из равенств (6.52). В пределе $N \rightarrow \infty$ величина $D(k\Delta)$ приближается к значению в точке $\tau' = k\Delta$ непрерывной функции $D(\tau')$ [13], являющейся решением следующего дифференциального уравнения (получающегося из

разностного уравнения (6.51)):

$$\frac{d^2}{d\tau'^2} D(\tau') = i\omega\sigma D(\tau') \quad (6.53)$$

при $D(N\Delta) = D(\tau) = 1$ и $D'(\tau) = 2\sigma\mu$. Решение этого уравнения имеет вид

$$D(\tau') = \text{ch}[r(\tau' - \tau)] + \frac{2\sigma\mu}{r} \text{sh}[r(\tau' - \tau)], \quad (6.54)$$

$$r = \sqrt{i\omega\sigma}. \quad (6.55)$$

Перепишем теперь (6.50) в следующем виде с учетом того, что $b = 2iq\Delta \sqrt{i\omega\sigma\Delta/\tau}$:

$$Q_\omega(N, q) = \frac{1}{\sqrt{D(\Delta)}} \exp \left\{ -q^2 \frac{i\omega\sigma}{\tau} \Delta^3 \sum_{l=1}^N [D(l\Delta) D(l\Delta + \Delta)]^{-1} \times \right. \\ \left. \times \left[\sum_{k=l}^N D(k\Delta) \right]^2 \right\}.$$

Подставив это выражение в (6.40), выполним интегрирование по q , после чего устремим $N \rightarrow \infty$. При этом суммы можно заменить интегралами, а величину $D(k\Delta)$ непрерывной функцией $D(\tau')$ в точке $\tau' = k\Delta$. В результате получим

$$Q_\omega = \left\{ D(0) - \frac{i\omega\sigma}{\tau} D(0) \int_0^\tau \frac{d\tau'}{D^2(\tau')} \left[\int_{\tau'}^\tau d\tau'' D(\tau'') \right]^2 \right\}^{-1/2}. \quad (6.56)$$

Вернемся теперь к выражению (6.37). Если вычислить (с учетом (6.54)) временные интегралы в (6.56), то для $\mu \rightarrow 0$ найдем

$$Q_\omega|_{\mu \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{r\tau}{\text{sh } r\tau}}, \quad \frac{\partial}{\partial \mu} Q_\omega|_{\mu \rightarrow 0} = \frac{2\sigma}{r} \sqrt{\frac{r\tau}{\text{sh } r\tau}} \text{th } \frac{r\tau}{2}. \quad (6.57)$$

Тогда с точностью до членов порядка γ_ρ^{-1} получим

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega} \right\rangle_a = -\frac{2e_0^2 \delta_\rho}{\pi} T \left\{ \text{Im} \left(r \int_0^\infty d\tau \text{cth } r\tau e^{-i\delta_\rho \tau} \right) - \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (6.58)$$

Действительно,

$$\text{Im} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-i\delta_\rho \tau} \left(Q_\omega^2 + \frac{1}{2} \gamma_\rho^2 \frac{\partial}{\partial \mu} Q_\omega^2 \right) \Big|_{\mu \rightarrow 0} = \\ = \text{Im} r \int_0^\infty d\tau \frac{e^{-i\delta_\rho \tau}}{\text{sh } r\tau} \left(1 + \frac{2\sigma\gamma_\rho^2}{r} \frac{\text{ch } r\tau - 1}{\text{sh } r\tau} \right).$$

Выполняя во втором слагаемом в правой части этого равенства интегрирование по частям, получаем

$$\text{Im} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-i\delta_\rho \tau} \left(Q_\omega^2 + \frac{1}{2} \gamma_\rho^2 \frac{\partial}{\partial \mu} Q_\omega^2 \right) \Big|_{\mu \rightarrow 0} = \text{Im} r \int_0^\infty d\tau \text{cth } r\tau e^{-i\delta_\rho \tau}. \quad (6.59)$$

Основной вклад в (6.59) дает интервал времени $\tau \leq \delta_p^{-1}$, поэтому выражение (6.59) имеет порядок величины $|r| \delta_p^{-1}$. В интеграле по τ , содержащем величины $Q_{-\omega}$, основной вклад вносит интервал времени $\tau \leq \omega^{-1}$, поэтому

$$\operatorname{Im} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-2i\omega\tau} \left(Q_{-\omega}^2 + \frac{1}{2} \gamma_p^2 \frac{\partial}{\partial \mu} Q_{-\omega}^2 \right) \Big|_{\mu \rightarrow 0} \simeq \frac{\pi}{2} + O(|r| \omega^{-1}). \quad (6.60)$$

Подставляя (6.59) и (6.60) в формулу (6.36), получаем с требуемой точностью соотношение (6.58) в виде

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega} \right\rangle_a = \frac{4e_0^2 \sigma \gamma_p^2}{3\pi} T \Phi_M(s_a), \quad (6.61)$$

где $\Phi_M(s_a)$ — функция Мигдала [6],

$$\Phi_M(s) = 24s^2 \left\{ \int_0^{\infty} dx \operatorname{cth} x \sin 2sx e^{-2sx} - \frac{\pi}{4} \right\}; \quad (6.62)$$

$$\gamma_p = (\epsilon_p^{-1} - v^2)^{-1/2}; \quad s_a = \frac{\delta_p}{2|r|} = \frac{1}{8\gamma_p^2} \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma}}. \quad (6.63)$$

Формула (6.63) для спектральной плотности излучения релятивистской частицы в аморфной среде, найденная с помощью метода континуального интегрирования, полностью совпадает с соответствующим результатом для спектральной плотности излучения быстрой частицы в веществе (см. § 20 монографии [2]), найденным на основе предложенного Мигдалом [6] метода учета многократного рассеяния на излучение быстрой частицы в аморфной среде.

Упражнения

6.3.1. (M30). Пусть свойства аморфной среды таковы, что рассеяния по x и y направлениям характеризуются средними квадратами углов σ_x и σ_y . Пользуясь выражением, аналогичным (6.31), получить формулу для $\langle dE/d\omega \rangle_a$.

6.3.2. (M10). Получить дифференциальное уравнение для $D(\tau)$ из рекуррентного соотношения (6.51).

6.3.3. (M20). Дать физическую интерпретацию параметра $r = \sqrt{i\omega\sigma}$, определенного выражением (6.55).

6.3.4. (M30). Выражение (6.56) для $Q_{\omega}(\tau)$ при $\mu \rightarrow 0$ четно относительно τ . Введем функцию $q_{\omega}(\tau) = Q_{\omega}(-\tau)$. Получить выражение для этой функции с помощью метода дискретизации.

6.3.5. (M15). Найти асимптотики функции Мигдала $\Phi_M(s)$ в случаях $s \rightarrow 0$ и $s \rightarrow \infty$.

6.3.6. (M15). Показать, что если для $\omega \gg \omega_p$ имеем $\epsilon_p = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ (ω_p — плазменная частота), то в формуле (6.61) можно выделить явно множитель, соответствующий результату Бете — Гайтлера для спектральной плотности излучения релятивистской частицы в разреженной среде

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega} \right\rangle_a = \frac{dE_{B-H}}{d\omega} \frac{1}{1 + \gamma^2 \omega_p^2 / \omega^2} \Phi_M \left(s \left(1 + \gamma^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \right),$$

где $\frac{dE_{B-H}}{d\omega} = \frac{4e_0^2\sigma\gamma^2}{3\pi} T$; $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ — лоренц-фактор частицы; $s = \frac{1}{8\gamma^2} \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma}}$ — параметр Миндала [6].

6.3.7. (M25). Рассмотрим квадратичную форму

$$A = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (x_n - x_m)^2 = \sum_{n,m=1}^N x_n x_m B_{nm}.$$

Для матрицы B , определенной этим выражением, найти: а) детерминант; б) собственные значения и отвечающие им собственные векторы.

6.3.8. (M25). *Продолжение.* Та же задача, но для матрицы B' , определенной выражением

$$A' = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (x_n - x_m)^2 = \sum_{n,m=1}^N x_n x_m B'_{nm}.$$

6.3.9. (M35). Результат (6.57) был получен для случая, когда случайная переменная $\vec{n}(\tau)$ обладала свойствами стохастического винеровского процесса. Получить аналог выражения (6.57) для случая, когда $\vec{n}(\tau)$ обладает свойствами двухкомпонентного гармонического стохастического процесса.

6.4. ВЛИЯНИЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ И ПОЛЯРИЗАЦИИ СВЕТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В КРИСТАЛЛАХ

Приведенные в предыдущих параграфах формулы показывают, что спектральная плотность энергии, излученной частицей в аморфном веществе, существенно зависит от соотношения между средним квадратом угла рассеяния частицы на длине формирования и квадратом характерного угла излучения релятивистской частицы γ^{-2} .

При движении релятивистской частицы в кристалле под малым углом к одной из кристаллографических осей или плоскостей существенны корреляции между последовательными ее столкновениями с атомами решетки. В результате этих корреляций средний квадрат угла рассеяния частицы в кристалле может значительно превысить средний угол рассеяния в аморфной среде [14]. Поэтому при прохождении через кристалл характер излучения частицы может измениться при более низких энергиях частиц и в большей области частот, чем в аморфной среде [15]. Наиболее значительным различие углов рассеяния частицы в кристалле и аморфной среде оказывается при движении частицы под малым углом ψ к одной из кристаллографических осей (к оси z) вдали от плотно упакованных атомами кристаллографических плоскостей. При малых ψ и большой энергии падающей частицы ϵ , как известно [9, 16], для описания движения частицы в кристаллах можно пользоваться приближением непрерывной цепочки — потенциалом кристалла, усредненным вдоль оси z . Движение атомов может быть как финитным (каналирование), так и инфинитным (надбарьерное движение) по отношению к цепочкам атомов кристалла, параллельным оси z .

Финитное движение возможно, если угол ψ между падающей частицей и осью z мал по сравнению с критическим углом осевого каналирования $\psi_c = (4Ze_0^2/ea)^{1/2}$, где $Z|e_0|$ — заряд ядра атома кристалла; a — расстояние между атомами вдоль оси z . При $\psi > \psi_c$ все падающие на кристалл электроны будут совершать инфинитное движение по отношению к цепочкам атомов. В этой области углов ψ средние значения углов рассеяния электронов в кристалле достигают максимальной величины. Надбарьерная частица при движении в кристалле последовательно сталкивается с различными цепочками атомов, расположенными параллельно оси z , поэтому динамика этой частицы будет определяться особенностями ее рассеяния на отдельной цепочке атомов и особенностями многократного рассеяния на различных цепочках атомов. В поле непрерывного потенциала каждой цепочки атомов рассеяние происходит вдоль азимутального угла φ в плоскости, ортогональной оси z . При этом угол рассеяния частицы цепочкой θ равен (рис. 6.1)

$$\theta = 2\psi \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (6.64)$$

В результате многократного рассеяния на различных цепочках происходит перераспределение частиц по углу φ . Столкновения частицы с различными цепочками разнесены расстояниями, по порядку величины равными $\bar{a}/R\psi$, где $\bar{a}$ — среднее расстояние между цепочками; R — радиус экранировки атома. На таком расстоянии происходит значительный разброс прицельного параметра, вследствие чего столкновения частицы с различными цепочками можно считать случайными. В этом простейшем случае функция распределения частиц по углам удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} w(\varphi, z) = \frac{1}{2} \langle \varphi^2 \rangle \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} w(\varphi, z), \quad (6.65)$$

имеющему место благодаря малой величине азимутального угла рассеяния частицы в кристалле, а угол θ рассеяния для малых $\langle \varphi^2 \rangle$ равен

$$\theta = \psi\varphi. \quad (6.66)$$

Формулы (6.65) и (6.66) показывают, что $\theta(\tau)$ — винеровский процесс, и что если в начальный момент распределение по углам было дельтаобразным, то к моменту времени τ оно будет иметь вид

$$P(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_c\tau}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma_c\tau}\right), \quad (6.67)$$

где $\sigma_c = \psi^2 \langle \varphi^2 \rangle$ — средний квадрат угла рассеяния частицы на единице длины при движении в кристалле.

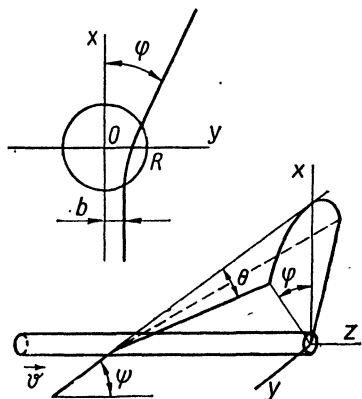


Рис. 6.1. Схема рассеяния частицы цепочкой атомов:

R — радиус экранировки атома; b — прицельный параметр

Используя соотношение (6.67), а также выражения (6.34) и (6.35), представим среднее значение спектральной плотности излучения релятивистской частицы в кристалле в виде континуального интеграла по винеровской мере $d_w\theta$

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega} \right\rangle_o = \int d_w\theta E'(\theta(\tau')), \quad (6.68)$$

$$E'(\theta(\tau')) = -\frac{e_0^2}{\pi} T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-i\omega\tau} \left[\frac{1}{\varepsilon_p} - v^2 + \frac{1}{2} \theta^2(\tau) \right] \times \\ \times \sin \left\{ \omega\tau - \frac{\omega}{2} \int_0^{\tau} d\tau' \theta^2(\tau') + \frac{\omega}{2\tau} \left(\int_0^{\tau} d\tau' \theta(\tau') \right)^2 \right\}. \quad (6.69)$$

Формула (6.69) отличается от соответствующего выражения для аморфной среды (6.34) только тем, что в (6.69) величина $\theta(\tau)$ однокомпонентна. Поэтому математическое ожидание $\langle dE/d\omega \rangle_c$ может быть выражено в терминах Q_ω , определяемых согласно (6.37) следующим образом:

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega} \right\rangle_c = -\frac{2e_0^2\delta_p}{\pi} T \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \left\{ \left(Q_\omega + \frac{1}{2} \gamma_p^2 \frac{\partial}{\partial \mu} Q_\omega \right) e^{-i\omega_p\tau} - \right. \\ \left. - \left(Q_{-\omega} + \frac{1}{2} \gamma_p^2 \frac{\partial}{\partial \mu} Q_{-\omega} \right) e^{-2i\omega\tau} \right\} \Big|_{\mu \rightarrow 0}. \quad (6.70)$$

Заменяя величину σ в (6.57) на σ_c , найдем

$$\left(Q_\omega + \frac{1}{2} \gamma_p^2 \frac{\partial}{\partial \mu} Q_\omega \right) \Big|_{\mu \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{r_c\tau}{\operatorname{sh} r_c\tau}} \left(1 + \frac{\gamma_p^2 \sigma_c}{r_c} \frac{\operatorname{ch} r_c\tau - 1}{\operatorname{sh} r_c\tau} \right), \quad (6.71)$$

где $r_c = \sqrt{i\omega\sigma_c}$. Поэтому находим окончательно

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega} \right\rangle_c = \frac{2e_0^2}{3\pi} \gamma_p^2 \sigma_c T \Phi(s_c), \quad (6.72)$$

где

$$s_c = \frac{1}{8\gamma_p^2} \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma_c}}, \quad (6.73)$$

а функция $\Phi(s)$ имеет вид

$$\Phi(s) = 48s^2 \left\{ \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-2sx}}{\sqrt{x \operatorname{sh} x}} \times \right. \\ \left. \times \left[\sin 2sx + \frac{1}{8s} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} (\sin 2sx + \cos 2sx) \right] - \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (6.74)$$

Эта формула описывает влияние как многократного рассеяния, так и поляризации среды на излучение релятивистских частиц в кристалле в области малых частот.

При произвольных значениях параметра s_c функция $\Phi(s_c)$ может быть найдена только численными методами. На рис. 6.2 представлены результаты вычисления функции $\Phi(s)$, определяемой выражением (6.74), и функции $\Phi_M(s)$, — выражением (6.62). Полученные кривые показывают, что обе функции близки друг к другу. Значения параметров s_a (см. (6.63)) и s_p (см. (6.73)) при заданных энергиях частицы и частоты излученного фотона могут значительно различаться.

Сравним теперь основные характеристики излучения релятивистских электронов в кристалле и аморфной среде в ряде важных для эксперимента случаев. Для простоты сравнение проведем применительно к случаю, когда потенциал отдельного атома среды представляет экранированный потенциал Кулона

$$U(r) = \frac{Ze_0 |e_0|}{r} \exp\left(-\frac{r}{R}\right). \quad (6.75)$$

Раскладывая величину γ_p по параметру ω_p/ω , $\gamma_p^2 \simeq \gamma^2 (1 + \gamma^2 \omega_p^2/\omega^2)$, запишем спектральные плотности энергии, излученной электроном в аморфной среде и кристалле, в виде

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega} \right\rangle_a = \frac{E'_{B-H}}{1 + \omega_{кр}^2/\omega^2} \Phi_M \left\{ \frac{1}{8} \left(1 + \frac{\omega_{кр}^2}{\omega^2} \right) \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{лп}}} \right\}, \quad (6.76)$$

$$\left\langle \frac{dE}{d\omega} \right\rangle_c = \frac{E'_{B-H}}{1 + \omega_{кр}^2/\omega^2} N \Phi \left\{ \frac{1}{8} \left(1 + \frac{\omega_{кр}^2}{\omega^2} \right) \sqrt{\frac{\omega}{\omega_c}} \right\}, \quad (6.77)$$

где $\omega_{лп} = \frac{1}{2} \sigma \gamma^4$; $\omega_c = 2N\omega_{лп}$; E'_{B-H} — спектральная плотность энергии, отвечающая результату Бете — Гайтлера; $\omega_{кр} = \gamma \omega_p$; $N = \sigma_c/2\sigma_a = \langle \theta_c^2 \rangle / \langle \theta_a^2 \rangle$; $\langle \theta_c^2 \rangle$ и $\langle \theta_a^2 \rangle$ — средние квадраты углов рассеяния частицы в кристалле и аморфной среде [2, 14],

$$\langle \theta_c^2 \rangle = \sigma_c T = 4\pi^2 Z^2 e_0^4 n T \frac{R}{\varepsilon^2 \psi a}, \quad (6.78)$$

$$\langle \theta_a^2 \rangle = 2\sigma T = 8\pi Z^2 e_0^4 n T \varepsilon^{-2} \ln(183Z^{-1/3}); \quad (6.79)$$

n — плотность атомов.

На рис. 6.3 и 6.4 представлены результаты вычисления спектральной плотности в аморфной среде и кристалле в случае, когда пучок электронов падает на кристалл вольфрама и кремния под углом $\psi = 2$ мрад к кристаллографической оси $\langle 100 \rangle$. Полученные результаты показывают, что при движении в кристалле область частот, в которой существенное влияние на излучение оказывает многократное рассеяние, значительно увеличивается по сравнению с соответствующей областью частот для аморфной среды.

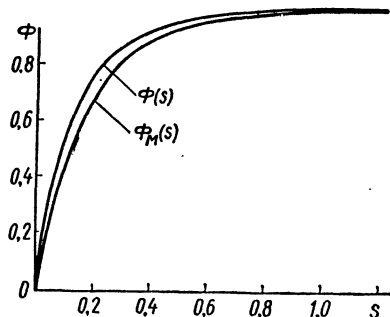


Рис. 6.2. Зависимость функций $\Phi_M(s)$ и $\Phi(s)$ для аморфной и кристаллических сред.

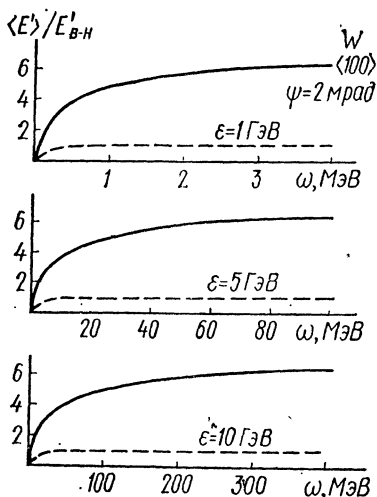


Рис. 6.3. Спектральная плотность излучения электронов энергии ϵ в аморфной среде (штриховая линия) и кристалле вольфрама.

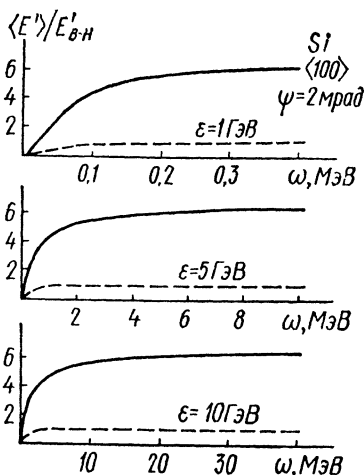


Рис. 6.4. Спектральная плотность излучения электронов энергии ϵ в аморфной среде (штриховая линия) и кристалле кремния.

Упражнения

6.4.1. (М20). Получить результат (6.72) из формул (6.70) и (6.71).

6.4.2. (М10). Изучить асимптотики функции $\Phi(s)$, определяемой выражением (6.74). Показать, что

$$\Phi(s) = 1, \quad s \rightarrow \infty,$$

$$\Phi(s) = \eta_0 s, \quad s \rightarrow 0,$$

где

$$\eta_0 = 6 \int_0^\infty dy \frac{\operatorname{ch} y - 1}{y \sqrt{\operatorname{sh}^3 y}}.$$

6.4.3. (М5). Продолжение. Каким-либо способом определить численное значение величины η_0 . Показать, что $\eta_0 = 8,0$.

6.4.4. (М10). Выражение (6.32) описывает спектрально-угловое распределение излучения релятивистской частицы в аморфной среде, а (6.72) — спектральную плотность излучения частицы в кристалле. Получить выражение для спектрально-углового распределения излучения релятивистской частицы в кристалле.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Программа определения вероятностных характеристик квантовооптических интегральных квадратичных функционалов

Ниже приведены описание программы, с помощью которой были получены некоторые численные результаты, изложенные в гл. 4, а также ее текст на фортране. Опишем кратко суть математической модели этой программы.

Вероятность $P(m)$ зарегистрировать m отсчетов за временной интервал T равна, согласно (4.13), интегралу Коши

$$P(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{(z - \lambda)^{m+1}} \frac{(-1)^m}{m!} Q(\lambda, T) |_{\lambda=1}, \quad (\text{П1})$$

т. е. взвешенному распределению Пуассона

$$P(m) = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} Q(\lambda, T) |_{\lambda=1}, \quad (\text{П2})$$

где $Q(\lambda, T)$ — производящая функция, подобная тем, что рассматривались в гл. 4. Полагая контур интегрирования в (П1) окружностью единичного радиуса на z -плоскости с центром в точке $z = \lambda = 1$ и переходя к фазе x в качестве новой переменной интегрирования, $z = \exp(ix)$, запишем

$$P(m) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} [\cos(xm) \operatorname{Re} Q(1 + e^{ix}, T) + \sin(xm) \operatorname{Im} Q(1 + e^{ix}, T)] \quad (\text{П3})$$

(мнимая часть интеграла (П1) тождественно равна нулю).

Численное значение интеграла (П3) находится в программе. С помощью небольшой переработки (изменение пределов интегрирования, тела подынтегральной и производящей функций) программу МАС можно применить для нахождения обратного преобразования Лапласа. Соответствующие результаты, приведены в гл. 3 и 5.

Краткое описание программы МАС:

1. Название: МАС.
2. Язык: ФОРТРАН-IV.
3. ЭВМ: ЕС-1040, БЭСМ-6.
4. Объем: 348 перфокарт, 265 операторов.
5. Назначение: Получение информации о статистической структуре квантовооптических интегральных квадратичных функционалов.
6. Подпрограммы (рис. П1):
 - 6.1. MAIN — (PROGRAM MАС) — запускающая программная единица. В ней осуществляется: а) присвоение констант; б) организация циклов; в) обращение к процедуре группового интегрирования; г) нормировка вероятности на единицу; д) печать результатов в виде массивов и графиков.

```

        PMAX = AMAX1 (PMAX, P (1, K), P (2, K), P (3, K))
        FMIN = AMIN1 (FMIN, F (1, K), F (2, K), F (3, K))
6      FMAX = AMAX1 (FMAX, F (1, K), F (2, K), F (3, K))
        PSHAG = (PMAX - PMIN)/50.0
        FSHAG = (FMAX - FMIN)/50.0
        DO 8 K = 1, KK
            JP = IFIX ((P (1, K) - PMIN)/PSHAG) + 1
            IP = IFIX ((P (2, K) - PMIN)/PSHAG) + 1
            MP = IFIX ((P (3, K) - PMIN)/PSHAG) + 1
            JF = IFIX ((F (1, K) - FMIN)/FSHAG) + 1
            IF = IFIX ((F (2, K) - FMIN)/FSHAG) + 1
            MF = IFIX ((F (3, K) - FMIN)/FSHAG) + 1
            A (JP) = H1
            B (JF) = H1
            IF (JP. NE. IP) A (IP) = H2
            IF (JF. NE. IF) B (IF) = H2
            IF ((MP. NE. IP). AND. (MP. NE. JP)) A (MP) = H3
            IF ((MF. NE. IF). AND. (MF. NE. JF)) B (MF) = H3
            PRINT 14, K, (A (IPP), IPP = 1,51), K, (B (IFF), IFF = 1,51), K
            A (JP) = H
            A (IP) = H
            A (MP) = H
            B (JF) = H
            B (IF) = H
8          B (MF) = H
            PRINT 12
            PRINT 10, LP, LF
10         FORMAT (5X, 1H0, 10I5, 6X, 1H0, 10I5)
12         FORMAT (4X, 2H*1, 10 (5H****1), 1H*, 4X, 2H*1, 10 (5H****1), 1H*)
14         FORMAT (1X, 12, 1X, 1H1, 51A1, 1H1, 13, 1X, 1H1, 51A1, 1H1, 13)
            RETURN
        END

```

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Некоторые континуальные интегралы от гауссовых форм

В этом приложении изложена сводка континуальных интегралов от гауссовых форм. Интегралы сведены в группы, отвечающие соответствующим случайным процессам (процесс Орнштейна — Уленбека, процесс Винера и др.). Хотя количество приведенных интегралов относительно невелико, они могут служить в качестве опорных, на базе которых можно искать значения других. Например, условный интеграл по ОУ-мере

$$J = \left\langle x_0 \left| \left[\int_0^t d\tau x^2(\tau) \right]^{-1} \right| x_t \right\rangle,$$

как легко видеть, равен

$$J = \int_0^\infty d\lambda \Psi_\lambda(x_0, x_t),$$

где

$$\Psi_\lambda(x_0, x_t) = \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_t \right\rangle,$$

а выражение для такого континуального интеграла приведено.

В этой сводке условные континуальные интегралы обозначены средними вида $\langle a | V | b \rangle$, где V — усредняемый функционал; бра- $\langle a |$ и кет- $| b \rangle$ векторы отвечают начальному и конечному состояниям соответствующего случайного процесса. Путем

интегрирования по случайным переменным в выделенные моменты времени условные континуальные средние приводятся к безусловным. Наиболее часто используемые обозначения вынесены в начало каждой из групп интегралов для данного случайного процесса.

1. Континуальные интегралы по мере, порождаемой стохастическим процессом Орнштейна—Уленбека. В интегралах этой группы используются следующие обозначения:

$x(\tau)$ — решение стохастического уравнения

$$\dot{x} + vx = f(\tau), \quad x(0) = x_0;$$

$x_0 = x(0)$ и $x_t = x(t)$ — значения процесса $x(\tau)$ в исходный $\tau = 0$ и конечный $\tau = t$ моменты времени;

$w(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_x}} \exp\left(-\frac{x_0^2}{\sigma_x}\right)$ — плотность распределения вероятностей случайного процесса $x(\tau)$ в момент $\tau = 0$;

v — декремент затухания;

$f(\tau)$ — порождающий случайный процесс, обладающий свойствами «белого» шума;

σ_x — интенсивность процесса $x(\tau)$, связанная с интенсивностью «белого» шума $f(\tau)$ соотношением $\sigma = v\sigma_x$;

λ — произвольный параметр;

$$r = (v^2 + 2\lambda v\sigma_x)^{1/2};$$

$$Q(\lambda) = \left[\frac{4rv e^{v'}}{(r+v)^2 e^{r'} - (r-v)^2 e^{-r'}} \right]^{1/2}.$$

$s(\tau)$ — произвольная квадратичноинтегрируемая функция.

Для унификации условных и безусловных математических ожиданий от некоторого функционала $V(x(\tau))$, $0 \leq \tau \leq t$, первые из них обозначены с помощью бра- $\langle x_0 |$ и кет- $| x_t \rangle$ векторов. а, вторые — интегрированием по одной из этих переменных x_0 , x_t или по обеим.

1.1.

$$\langle x_0 | 1 | x_t \rangle \equiv w(x_t, t; x_0, 0) = \frac{1}{[\pi\sigma_x(1 - e^{-2vt})]^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x_t - x_0 e^{-vt})^2}{\sigma_x(1 - e^{-2vt})}\right\}.$$

1.2.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_0 | 1 | x_t \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_x}} \exp\left(-\frac{x_t^2}{\sigma_x}\right).$$

1.3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \langle x_0 | 1 | x_t \rangle = 1.$$

1.4.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \langle x_0 | x_t | x_t \rangle = x_0 e^{-vt}.$$

1.5.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \langle x_0 | x_t | x_t \rangle = 0.$$

1.6.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \langle x_0 | x_t^2 | x_t \rangle = \frac{1}{2} \sigma_x$$

1.7.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \langle x_0 | x_t^3 | x_t \rangle = 0.$$

1.8.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \langle x_0 | x_t^4 | x_t \rangle = \frac{3}{4} \sigma_x^2.$$

1.9.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \langle x_0 | 1 | x_t \rangle = w(x_t).$$

1.10.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_{t+\tau} \langle x_0 | x_t x_{t+\tau} | x_{t+\tau} \rangle = g(t, t+\tau) = g(0, \tau) = \frac{1}{2} \sigma_x \exp(-v\tau).$$

1.11.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_{t_{2k+1}} \langle x_0 | x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_{2k+1}} | x_{t_{2k+1}} \rangle = 0.$$

1.12.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_{t_{2k}} \langle x_0 | x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_{2k}} | x_{t_{2k}} \rangle = \sum g(t_{n_1}, t_{n_2}) \dots g(t_{n_{2k-1}}, t_{n_{2k}}),$$

где функция $g(t_1, t_2)$ определена в интеграле 1.10, а суммирование распространяется на всевозможные разбиения $2k$ индексов на k пар.

1.13.

$$\langle x_0 | G_1(x_u) G_2(x_t) | x_t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx_u \langle x_0 | G_1(x_u) | x_u \rangle \langle x_u | G_2(x_t) | x_t \rangle,$$

где $G_1(x)$ и $G_2(x)$ — произвольные функции.

1.14.

$$\left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_t \right\rangle = \left[\frac{r}{\pi v \sigma_x (e^{2rt} - 1)} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{r+v}{2} t + \frac{r-v}{2v\sigma_x} (x_t^2 - x_0^2) - \frac{r}{v\sigma_x} \frac{(x_t - x_0 e^{-rt})^2}{1 - e^{-2rt}} \right\}.$$

1.15.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_t \right\rangle =$$

$$= \left[\frac{2re^{vt}}{(r+v)e^{rt} + (r-v)e^{-rt}} \right]^{1/2} \exp \left\{ -\frac{r^2 - v^2}{2v\sigma_x} \frac{x_0^2 (e^{rt} - e^{-rt})}{(r+v)e^{rt} + (r-v)e^{-rt}} \right\}.$$

1.16.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_t \right\rangle =$$

$$= \left[\frac{1}{\pi \sigma_x} \frac{2rv e^{v^2 t}}{(r+v) e^{rt} + (r-v) e^{-rt}} \right]^{1/2} \exp(-B_t x_t^2),$$

$$B_t = \frac{1}{2v\sigma_x} \frac{(r+v)^2 e^{rt} - (r-v)^2 e^{-rt}}{(r+v) e^{rt} + (r-v) e^{-rt}}.$$

1.17.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \omega(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_t \right\rangle =$$

$$= Q(\lambda) = \left[\frac{4rv e^{v^2 t}}{(r+v)^2 e^{rt} - (r-v)^2 e^{-rt}} \right]^{1/2}.$$

1.18.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \omega(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle x_0 \left| G \left[\int_0^t d\tau \gamma(\tau) x(\tau) \right] \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_t \right\rangle =$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi S_t D_t(0)} \right]^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} du G(u) \exp \left(-\frac{u^2}{2S_t} \right),$$

где $G(u)$ и $\gamma(\tau)$ — произвольные интегрируемые функции,

$$S_t = v\sigma_x \int_0^t d\tau \left\{ \frac{e^{v\tau}}{D_t(\tau)} \int_{\tau}^t d\tau' \gamma(\tau') D_t(\tau') \right\}^2,$$

$$D_t(\tau) = \frac{1}{2r} [(r+v) e^{(r-v)(t-\tau)} + (r-v) e^{-(r-v)(t-\tau)}].$$

1.19.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \omega(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_{t+\Delta} \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau x(\tau) x(\tau + \Delta) \right\} \right| x_{t+\Delta} \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \omega(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \frac{1 + e^{-v\Delta}}{2} \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_t \right\rangle \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \omega(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ +\lambda \frac{1 - e^{-v\Delta}}{2} \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_t \right\rangle =$$

$$= Q \left(\lambda \frac{1 + e^{v\Delta}}{2} \right) Q \left(-\lambda \frac{1 - e^{-v\Delta}}{2} \right).$$

1.20.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \omega(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_{t+\Delta} \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\frac{\lambda}{4} \int_0^t d\tau [x(\tau) + x(\tau + \Delta)]^2 \right\} \right| x_{t+\Delta} \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \omega(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \frac{1 + e^{-v\Delta}}{2} \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_t \right\rangle =$$

$$= Q \left(\lambda \frac{1 + e^{-v\Delta}}{2} \right).$$

1.21.

$$\begin{aligned}
& \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau [x(\tau) + s(\tau)]^2 \right\} \right| x_t \right\rangle = \\
& = \left[\frac{r}{\pi v \sigma_x (e^{2rt} - 1)} \right]^{1/2} \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau s^2(\tau) + \right. \\
& + \frac{r - v}{2} t + \frac{r - v}{2v\sigma_x} (x_t^2 - x_0^2) + x_t a(t) + \frac{v\sigma_x}{2} \int_0^t d\tau a^2(\tau) - \\
& - \frac{r}{v\sigma_x} (1 - e^{-2rt})^{-1} \left[x_t - x_0 e^{-rt} + v\sigma_x \int_0^t d\tau a(\tau) e^{r(\tau-t)} \right]^2 \Big\}, \\
& a(\tau) = -2\lambda \int_0^t d\tau' s(\tau') e^{-r(\tau'-\tau)}.
\end{aligned}$$

1.22.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle x_t \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau [x(\tau) + s(\tau)]^2 \right\} \right| x_i \right\rangle = \\
& = \left[\frac{2re^{vt}}{(r+v)e^{rt} + (r-v)e^{-rt}} \right]^{1/2} \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau s^2(\tau) + \frac{v\sigma_x}{2} \int_0^t d\tau a^2(\tau) + \right. \\
& + \frac{v-r}{2v\sigma_x} x_0^2 - \frac{r}{v\sigma_x (1 - e^{-2rt})} [b^2(t) - 2v\sigma_x b(t) e^{-rt} + x_0^2 e^{-2rt}] + \\
& + \left. \frac{[v\sigma_x a(t) (1 - e^{-2rt}) - 2rb(t) + 2rx_0 e^{-rt}]^2}{2v\sigma_x (1 - e^{-2rt}) [(r+v) + (r-v)e^{-2rt}]} \right\}, \\
& a(\tau) = -2\lambda \int_0^t d\tau' s(\tau') e^{-r(\tau'-\tau)}, \quad b(t) = v\sigma_x \int_0^t d\tau a(\tau) e^{r(\tau-t)}.
\end{aligned}$$

1.23.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau [x(\tau) + s(\tau)]^2 \right\} \right| x_t \right\rangle = \\
& = Q(\lambda) \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau s^2(\tau) + \frac{2\lambda^2 v\sigma_x / r}{(r+v)^2 e^{rt} - (r-v)^2 e^{-rt}} \int_0^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau_2 s(\tau_1) s(\tau_2) \times \right. \\
& \times \left. [(r+v) e^{r\tau_1} + (r-v) e^{-r\tau_1}] [(r+v) e^{r(t-\tau_2)} + (r-v) e^{-r(t-\tau_2)}] \right\}.
\end{aligned}$$

1.24.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau_1 \dots \int_0^t d\tau_N \left[\sum_{n=1}^N \varepsilon_n x(\tau_n) \right]^2 \right\} \right| x_t \right\rangle = \\
& = Q(\Lambda_1) (1 + \Lambda_1 \Lambda_2 J)^{-1/2},
\end{aligned}$$

$$\Lambda_i = \lambda i \sum_{n=1}^N \varepsilon_n^2, \quad \Lambda_s = \lambda \sum_{\substack{n,m=1 \\ n \neq m}}^N \varepsilon_n \varepsilon_m, \quad \rho = (v^2 + 2\Lambda_1 v \sigma_x)^{1/2},$$

$$J = \frac{4v^2 \sigma_x / \rho^3}{(\rho + v)^2 e^{\rho t} - (\rho - v)^2 e^{-\rho t}} [2v - (\rho + v) e^{\rho t} + (\rho - v) e^{-\rho t} + 2\rho^2 t e^{-\rho t}],$$

1.25.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau [x(\tau) + s(\tau)] [x(\tau + \Delta) + s(\tau + \Delta)] \right\} \right| x_t \right\rangle = \\ & = \left[\frac{4\rho_+ v e^{v t}}{(\rho_+ + v)^2 e^{\rho_+ t} - (\rho_+ - v)^2 e^{-\rho_+ t}} \frac{4\rho_- v e^{v t}}{(\rho_- + v)^2 e^{\rho_- t} - (\rho_- - v)^2 e^{-\rho_- t}} \right]^{1/2} \times \\ & \times \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau s(\tau) s(\tau + \Delta) - \int_0^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau_2 [U_+(\tau_1, \tau_2) - U_-(\tau_1, \tau_2)] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{\pm}(\tau_1, \tau_2) &= \frac{2\lambda^2 v \sigma_x R_{\pm}^2 / \rho_{\pm}}{(\rho_{\pm} + v)^2 e^{\rho_{\pm} t} - (\rho_{\pm} - v)^2 e^{-\rho_{\pm} t}} s_{\pm}(\tau_1) s_{\pm}(\tau_2) [(\rho_{\pm} + v) e^{\rho_{\pm} \tau_1} + \\ &+ (\rho_{\pm} - v) e^{-\rho_{\pm} \tau_1}] \times [(\rho_{\pm} + v) e^{\rho_{\pm}(\tau_1 - \tau_2)} + (\rho_{\pm} - v) e^{-\rho_{\pm}(\tau_1 - \tau_2)}], \end{aligned}$$

$$R_{\pm} = \frac{1 \pm e^{-v\Delta}}{2}, \quad \rho_{\pm} = (v^2 \pm 2\lambda v \sigma_x R_{\pm})^{1/2}, \quad s_{\pm}(\tau) = \frac{s(\tau) \pm s(\tau + \Delta)}{2}.$$

1.26.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_{t+\Delta} \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\frac{\lambda}{4} \int_0^t d\tau [x(\tau) + s(\tau) + x(\tau + \Delta) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + s(\tau + \Delta)]^2 \right\} \right| x_{t+\Delta} \right\rangle = \left[\frac{4\rho v e^{v t}}{(\rho + v)^2 e^{\rho t} - (\rho - v)^2 e^{-\rho t}} \right]^{1/2} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{\lambda}{4} \int_0^t d\tau [s(\tau) + s(\tau + \Delta)]^2 - \int_0^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau_2 U(\tau_1, \tau_2) \right\}, \end{aligned}$$

$$R = \frac{1 + e^{-v\Delta}}{2}, \quad \rho = (v^2 + 2\lambda v \sigma_x R)^{1/2},$$

$$\begin{aligned} U(\tau_1, \tau_2) &= \frac{2\lambda^2 v \sigma_x R / \rho}{(\rho + v)^2 e^{\rho t} - (\rho - v)^2 e^{-\rho t}} \frac{s(\tau_1) + s(\tau_1 + \Delta)}{2} \frac{s(\tau_2) + s(\tau_2 + \Delta)}{2} \times \\ & \times [(\rho + v) e^{\rho \tau_1} + (\rho - v) e^{-\rho \tau_1}] [(\rho + v) e^{\rho(\tau_1 - \tau_2)} + (\rho - v) e^{-\rho(\tau_1 - \tau_2)}]. \end{aligned}$$

1.27.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_{t+\Delta} \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau \left[\int_{\Delta_1}^{\Delta_2} d\Delta a(\Delta) x(\tau + \Delta) \right]^2 \right\} \right| x_{t+\Delta} \right\rangle = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda J \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_t \right\rangle = Q(\lambda J), \\ & J = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} d\Delta' \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} d\Delta'' a(\Delta') a(\Delta'') \exp(-v|\Delta' - \Delta''|), \end{aligned}$$

где $a(\Delta)$ — произвольная функция.

1.28.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_{t+\Delta_N} \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau \left[\sum_{n=1}^N a_n x(\tau + \Delta_n) \right]^2 \right\} \right| x_{t+\Delta_N} \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda J \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_t \right\rangle = Q(\lambda J),$$

$$J = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m \exp(-v |\Delta_n - \Delta_m|).$$

1.29.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_{t_1+\Delta+t_2} \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda_1 \int_0^{t_1} d\tau x^2(\tau) - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - \lambda \int_{t_1}^{t_1+\Delta} d\tau x^2(\tau) - \lambda_2 \int_{t_1+\Delta}^{t_1+\Delta+t_2} d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_{t_1+\Delta+t_2} \right\rangle =$$

$$= \left[\frac{16vp\rho_1\rho_2\rho_1\rho_2 \exp(vt_1 + v\Delta + vt_2)}{(1 + \rho^2) \rho (\rho_1 A_1 B_2 + \rho_2 A_2 B_1) + (1 - \rho^2) (\rho_1 \rho_2 A_1 A_2 + \rho^2 B_1 B_2)} \right]^{1/2},$$

$$\rho = (v^2 + 2\lambda v \sigma_x)^{1/2}, \quad \rho_1 = (v^2 + 2\lambda_1 v \sigma_x)^{1/2}, \quad \rho_2 = (v^2 + 2\lambda_2 v \sigma_x)^{1/2},$$

$$\rho = \exp(-\rho\Delta), \quad \rho_1 = \exp(-\rho_1 t_1), \quad \rho_2 = \exp(-\rho_2 t_2),$$

$$A_1 = (v + \rho_1) + (v - \rho_1) \rho_1^2, \quad B_1 = (v + \rho_1) + (\rho_1 - v) \rho_1^2,$$

$$A_2 = (v + \rho_2) + (v - \rho_2) \rho_2^2, \quad B_2 = (v + \rho_2) + (\rho_2 - v) \rho_2^2.$$

1.30.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_{t_1+t_2} \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda_1 \int_0^{t_1} d\tau x^2(\tau) - \lambda_2 \int_{t_1}^{t_1+t_2} d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_{t_1+t_2} \right\rangle =$$

$$= \left[\frac{8v\rho_1\rho_2\rho_1\rho_2 \exp(vt_1 + vt_2)}{\rho_1 A_1 B_2 + \rho_2 A_2 B_1} \right]^{1/2},$$

обозначения приведены в интеграле 1.29.

1.31.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_u \left\langle x_u \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^u d\tau V(x(\tau)) \right\} \right| x_u \right\rangle \left\langle x_u \left| \exp \left\{ -\lambda \int_u^t d\tau V(x(\tau)) \right\} \right| x_t \right\rangle =$$

$$= \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau V(x(\tau)) \right\} \right| x_t \right\rangle,$$

где $V(x(\tau))$ — произвольный функционал.

1.32.

$$\left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau V(x(\tau)) \right\} \right| x_t \right\rangle = \Psi(x_t, t; x_0, 0),$$

где $V(x(\tau))$ — произвольный функционал; $\Psi(x, t; x_0, 0)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = v \frac{\partial}{\partial x} (x\Psi) + \frac{1}{2} v \sigma_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi - \lambda V(x) \Psi$$

с начальным условием $\Psi(x, 0; x_0, 0) = \delta(x - x_0)$.

1.33.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_{t+\Delta} \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau V(x(\tau)) \right\} \right| x_{t+\Delta} \right\rangle = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dx_u w(x_u) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle x_u \left| \exp \left\{ -\lambda \int_u^t d\tau V(x(\tau)) \right\} \right| x_t \right\rangle,$$

где $V(x(\tau))$ — произвольный функционал.

1.34.

$$\left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau V(x(\tau)) \right\} \right| x_t \right\rangle = \\ = \lim_{M \rightarrow \infty} \left\langle x_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \sum_{m=0}^{M-1} \int_{mt/M}^{(m+1)t/M} d\tau V(x(\tau)) \right\} \right| x_t \right\rangle,$$

где $V(x(\tau))$ — произвольный функционал.

2. Континуальные интегралы по мере, порождаемой стохастическим винеровским процессом. В интегралах этой группы используются следующие обозначения:

$x(\tau)$ — решение стохастического уравнения $\dot{x} = f(\tau)$, $x(0) = 0$;

$x_t = x(t)$ — значение винеровского процесса $x(\tau)$ в конечный момент времени $\tau = t$;

$f(\tau)$ — порождающий случайный процесс, обладающий свойствами «белого» шума, $\langle f(\tau) f(\tau') \rangle = \sigma \delta(\tau - \tau')$;

λ — произвольный параметр;

$r = (2\lambda\sigma)^{1/2}$;

$Q(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}(rt)}}$;

$s(\tau)$ — произвольная квадратичноинтегрируемая функция.

Условные математические ожидания от некоторого функционала обозначены $\langle 0 | V(x(\tau)) | x_t \rangle$, а безусловные — интегрированием по x_t .

2.1.

$$\langle 0 | 1 | x_t \rangle = w(x_t, t; 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t}} \exp\left(-\frac{x_t^2}{2\sigma t}\right).$$

2.2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \langle 0 | x_t | x_t \rangle = 0.$$

2.3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \langle 0 | x_t^2 | x_t \rangle = \sigma t.$$

2.4.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \langle 0 | x_t^3 | x_t \rangle = 0.$$

2.5.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \langle 0 | x_t^4 | x_t \rangle = 3\sigma^2 t^2.$$

2.6.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_{t_2} \langle 0 | x_{t_1} x_{t_2} | x_{t_1} \rangle \equiv g(t_1, t_2) = \sigma \min(t_1, t_2).$$

2.7.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_{t_{2k+1}} \langle 0 | x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_{2k+1}} | x_{t_{2k+1}} \rangle = 0.$$

2.8.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_{t_{2k}} \langle 0 | x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_{2k}} | x_{t_{2k}} \rangle = \sum g(t_{n_1}, t_{n_2}) \dots g(t_{n_{2k-1}}, t_{n_{2k}}),$$

где функция $g(t_1, t_2)$ определена в интеграле 2.6, а суммирование распространяется на всевозможные разбиения $2k$ индексов на k пар.

2.9.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle 0 \left| \exp \left\{ - \int_0^t d\tau \frac{1 + \operatorname{sign} x(\tau)}{2} \right\} \right| x_t \right\rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \exp(-t \cos^2 \theta).$$

2.10.

$$\langle 0 | G_1(x_u) G_2(x_t) | x_t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx_u \langle 0 | G_1(x_u) | x_u \rangle \langle x_u | G_2(x_t) | x_t \rangle,$$

где $G_1(x)$ и $G_2(x)$ — произвольные функции.

2.11.

$$\begin{aligned} & \left\langle 0 \left| \exp \left\{ - \lambda \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_t \right\rangle = \\ & = \left[\frac{r}{\pi \sigma (e^{2rt} - 1)} \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{rt}{2} + \frac{r}{2\sigma} x_t^2 - \frac{r}{\sigma} \frac{x_t^2}{1 - e^{-2rt}} \right\}. \end{aligned}$$

2.12.

$$\begin{aligned} & \left\langle 0 \left| \exp \left\{ - \lambda \int_u^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_t \right\rangle = \left[\frac{rq}{\pi \sigma b} \right]^{1/2} \times \\ & \times \exp \left\{ - \frac{r}{2\sigma} \frac{1+q^2}{1-q^2} x_t^2 + \frac{2qr^2u}{\sigma b(1-q^2)} x_t^2 \right\}, \\ & q = e^{-r(t-u)}, \quad b = (1-q^2) + ru(1+q^2). \end{aligned}$$

2.13.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle 0 \left| \exp \left\{ - \lambda \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_t \right\rangle \equiv Q(\lambda) = \frac{1}{V \operatorname{ch}(rt)}.$$

2.14.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle 0 \left| G \left[\int_0^t d\tau \gamma(\tau) x(\tau) \right] \exp \left\{ - \lambda \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \right| x_t \right\rangle = \\ & = \frac{1}{V 2\pi S_t D_t(0)} \int_{-\infty}^{\infty} du G(u) \exp \left(- \frac{u^2}{2S_t} \right), \\ & S_t = \sigma \int_0^t d\tau \left\{ \frac{1}{D_t(\tau)} \int_{\tau}^t d\tau' \gamma(\tau') D_t(\tau') \right\}^2, \\ & D_t(\tau) = \operatorname{ch}(r(t-\tau)), \end{aligned}$$

$G(u)$ и $\gamma(\tau)$ — произвольные интегрируемые функции.

2.15.

$$\begin{aligned}
& \left\langle 0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau [x(\tau) + s(\tau)]^2 \right\} \right| x_t \right\rangle = \\
& = \left[\frac{r}{\pi \sigma (e^{2rt} - 1)} \right]^{1/2} \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau s^2(\tau) + \frac{rt}{2} + \frac{r}{2\sigma} x_t^2 + x_t a(t) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sigma}{2} \int_0^t d\tau a^2(\tau) - \frac{r}{\sigma (1 - e^{-2rt})} \left[x_t + \sigma \int_0^t d\tau a(\tau) e^{r(\tau-t)} \right]^2 \right\}, \\
& \quad a(\tau) = -2\lambda \int_0^\tau d\tau' s(\tau') e^{-r(\tau'-\tau)}.
\end{aligned}$$

2.16.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle 0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau [x(\tau) + s(\tau)]^2 \right\} \right| x_t \right\rangle = . \\
& = Q(\lambda) \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau s^2(\tau) + \frac{\sigma}{2} \int_0^t d\tau a^2(\tau) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{r}{\sigma} \frac{b^2(t) - 2\sigma b(t)}{1 - e^{-2rt}} + \frac{[\sigma a(t)(1 - e^{-2rt}) - 2rb(t)]^2}{2\sigma r(1 - e^{-4rt})} \right\}, \\
& \quad a(\tau) = -2\lambda \int_0^\tau d\tau' s(\tau') e^{-r(\tau'-\tau)}, \\
& \quad b(\tau) = \sigma \int_0^\tau d\tau a(\tau) e^{r(\tau-t)}.
\end{aligned}$$

2.17.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle 0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau \left[x(\tau) - \frac{\tau}{t} x_t \right]^2 \right\} \right| x_t \right\rangle = \sqrt{\frac{rt}{\operatorname{sh}(rt)}}.$$

2.18.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \left\langle 0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau x^2(\tau) + \frac{\lambda}{r} \left[\int_0^t d\tau x(\tau) \right]^2 \right\} \right| x_t \right\rangle = \\
& = Q(\lambda) \left[\frac{2rt}{rt + \operatorname{th}(rt)} \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

2.19.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dx_u \left\langle 0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^u d\tau V(x(\tau)) \right\} \right| x_u \right\rangle \left\langle x_u \left| \exp \left\{ -\lambda \int_u^t d\tau V(x(\tau)) \right\} \right| x_t \right\rangle = \\
& = \left\langle 0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau V(x(\tau)) \right\} \right| x_t \right\rangle,
\end{aligned}$$

где $V(x(\tau))$ — произвольный функционал.

$$\left\langle 0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau V(x(\tau)) \right\} \right| x_t \right\rangle = \Psi(x_t, t; 0, 0),$$

где $V(x(\tau))$ — произвольный функционал; $\Psi(x, t; 0, 0)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi - \lambda V(x) \Psi$$

с начальным условием $\Psi(x, 0; 0, 0) = \delta(x)$.

2.21.

$$\begin{aligned} & \left\langle 0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau V(x(\tau)) \right\} \right| x_t \right\rangle = \\ & = \lim_{M \rightarrow \infty} \left\langle 0 \left| \exp \left\{ -\lambda \sum_{n=0}^{M-1} \int_{n\Delta/M}^{(n+1)\Delta/M} d\tau V(x(\tau)) \right\} \right| x_t \right\rangle, \end{aligned}$$

где $V(x(\tau))$ — произвольный функционал.

3. Континуальные интегралы по мере, порождаемой стохастическим комплекснозначным процессом Орнштейна — Уленбека. В интегралах этой группы используются следующие обозначения:

$\alpha(\tau)$ — решение стохастического уравнения $\dot{\alpha} + \nu\alpha = f(\tau)$, $\alpha(0) = \alpha_0$;

$\alpha_0 = \alpha(0)$ и $\alpha_t = \alpha(t)$ — значения процесса $\alpha(\tau)$ в исходный $\tau = 0$ и конечный $\tau = t$ моменты времени;

$\omega(\alpha_0) = \frac{1}{\pi\sigma_\alpha} \exp\left(-\frac{|\alpha_0|^2}{\sigma_\alpha}\right)$ — плотность распределения вероятностей случайного процесса $\alpha(\tau)$ в момент $\tau = 0$;

ν — декремент затухания;

$f(\tau)$ — порождающий случайный комплекснозначный процесс, обладающий свойствами «белого» шума, $\langle f(\tau) f^*(\tau') \rangle = \sigma\delta(\tau - \tau')$; $\langle f(\tau) f(\tau') \rangle = 0$;

σ_α — интенсивность процесса $\alpha(\tau)$, связанная с интенсивностью «белого» шума $f(\tau)$ соотношением $\sigma = \nu\sigma_\alpha$;

λ — произвольный параметр;

$r = (\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma_\alpha)^{1/2}$;

$$Q(\lambda) = \frac{4r\nu e^{\nu t}}{(r + \nu)^2 e^{rt} - (r - \nu)^2 e^{-rt}};$$

$\beta(\tau)$ — произвольная квадратичноинтегрируемая функция.

Для унификации условных и безусловных математических ожиданий от некоторого функционала $V(\alpha(\tau))$, $0 \leq \tau \leq t$, первые из них обозначены с помощью бра- $\langle \alpha_0 |$ и кет- $| \alpha_t \rangle$ векторов, а вторые — интегрированием по одной из этих переменных α_0 , α_t или по обоим. Интегрирование на комплексной плоскости α выполняется по переменным $\text{Re } \alpha$ и $\text{Im } \alpha$, поэтому дифференциал обозначается $d^2\alpha$.

3.1.

$$\langle \alpha_0 | I | \alpha_t \rangle = \frac{1}{\pi\sigma_\alpha (1 - e^{-2\nu t})} \exp \left\{ -\frac{|\alpha_t - \alpha_0 e^{-\nu t}|^2}{\sigma_\alpha (1 - e^{-2\nu t})} \right\}.$$

3.2.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \alpha_0 | I | \alpha_t \rangle = \frac{1}{\pi\sigma_\alpha} \exp \left(-\frac{|\alpha_t|^2}{\sigma_\alpha} \right).$$

3.3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_t \langle \alpha_0 | I | \alpha_t \rangle = 1.$$

3.4.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_t \langle \alpha_0 | \alpha_t | \alpha_t \rangle = \alpha_0 e^{-\nu t}.$$

3.5.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_0 \omega(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_t \langle \alpha_0 | \alpha_t | \alpha_t \rangle = 0.$$

3.6.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_0 \omega(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_t \langle \alpha_0 | \alpha_t^* \alpha_t | \alpha_t \rangle = \sigma_{\alpha}.$$

3.7.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_0 \omega(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_t \langle \alpha_0 | \alpha_t^* \alpha_t^2 | \alpha_t \rangle = 0.$$

3.8.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_0 \omega(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_t \langle \alpha_0 | \alpha_t^* \alpha_t^2 | \alpha_t \rangle = \frac{3}{2} \sigma_{\alpha}.$$

3.9.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_0 \omega(\alpha_0) \langle \alpha_0 | 1 | \alpha_t \rangle = \omega(\alpha_t).$$

3.10.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_0 \omega(\alpha_0) \langle \alpha_0 | \alpha_0 | \alpha_t \rangle = \frac{\alpha_t e^{-\nu t}}{\pi \sigma_{\alpha}} \exp\left(-\frac{|\alpha_t|^2}{\sigma_{\alpha}}\right).$$

3.11.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_t \langle \alpha_0 | \alpha_t^* \alpha_t | \alpha_t \rangle = \sigma_{\alpha} (1 - e^{-2\nu t}) + |\alpha_0|^2 e^{-2\nu t}.$$

3.12.

$$\langle \alpha_0 | G_1(\alpha_u) G_2(\alpha_t) | \alpha_t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_u \langle \alpha_0 | G_1(\alpha_u) | \alpha_u \rangle \langle \alpha_u | G_2(\alpha_t) | \alpha_t \rangle,$$

где $G_1(\alpha)$ и $G_2(\alpha)$ — произвольные функции.

3.13.

$$\begin{aligned} & \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\alpha(\tau)|^2 \right\} \right| \alpha_t \right\rangle = \frac{r}{\pi \nu \sigma_{\alpha} (1 - e^{-2rt})} \times \\ & \times \exp \left\{ (\nu - r)t + \frac{r - \nu}{2\nu \sigma_{\alpha}} (|\alpha_t|^2 - |\alpha_0|^2) - \frac{r}{\nu \sigma_{\alpha}} \frac{|\alpha_t - \alpha_0 e^{-rt}|^2}{1 - e^{-2rt}} \right\}. \end{aligned}$$

3.14.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_t \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\alpha(\tau)|^2 \right\} \right| \alpha_t \right\rangle = \\ & = \frac{2re^{\nu t}}{(r + \nu)e^{rt} + (r - \nu)e^{-rt}} \exp \left\{ -\frac{r^2 - \nu^2}{2\nu \sigma_{\alpha}} |\alpha_0|^2 - \frac{e^{rt} - e^{-rt}}{(r + \nu)e^{rt} + (r - \nu)e^{-rt}} \right\}. \end{aligned}$$

3.15.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_0 \omega(\alpha_0) \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\alpha(\tau)|^2 \right\} \right| \alpha_t \right\rangle =$$

$$= \frac{2re^{v t} (\pi \sigma_{\alpha})^{-1}}{(r+v)e^{rt} + (r-v)e^{-rt}} \exp \left\{ -\frac{|\alpha_t|^2}{2v\sigma_{\alpha}} \frac{(r+v)^2 e^{rt} - (r-v)^2 e^{-rt}}{(r+v)e^{rt} - (r-v)e^{-rt}} \right\}.$$

3.16.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_0 \omega(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_t \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\alpha(\tau)|^2 \right\} \right| \alpha_t \right\rangle =$$

$$\equiv Q(\lambda) = \frac{4rv e^{vt}}{(r+v)^2 e^{rt} - (r-v)^2 e^{-rt}}.$$

3.17.

$$\left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\alpha(\tau) + \beta(\tau)|^2 \right\} \right| \alpha_t \right\rangle =$$

$$= \frac{re^{(v-r)t}}{\pi v \sigma_{\alpha} (1 - e^{-2rt})} \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\beta(\tau)|^2 + \frac{r-v}{2v\sigma_{\alpha}} (|\alpha_t|^2 - |\alpha_0|^2) + \right.$$

$$+ \alpha_t^* a^*(t) + \alpha_t^* a(t) + \frac{v\sigma_{\alpha}}{2} \int_0^t d\tau |a(\tau)|^2 -$$

$$\left. - \frac{r}{v\sigma_{\alpha}} (1 - e^{-2rt})^{-1} \left| \alpha_t - \alpha_0 e^{-rt} + v\sigma_{\alpha} \int_0^t d\tau a(\tau) e^{r(\tau-t)} \right|^2 \right\},$$

$$a(\tau) = -2\lambda \int_0^{\tau} d\tau' \beta(\tau') e^{-r(\tau'-\tau)}.$$

3.18.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_t \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\alpha(\tau) + \beta(\tau)|^2 \right\} \right| \alpha_t \right\rangle =$$

$$= \frac{2re^{vt}}{(r+v)e^{rt} + (r-v)e^{-rt}} \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\beta(\tau)|^2 + \frac{v\sigma_{\alpha}}{2} \int_0^t d\tau |a(\tau)|^2 - \right.$$

$$- \frac{r-v}{2v\sigma_{\alpha}} |\alpha_0|^2 - \frac{r|b(t)|^2}{v\sigma_{\alpha} (1 - e^{-2rt})} + \frac{2v\sigma_{\alpha} (1 - e^{-2rt})}{(r+v) + (r-v)e^{-2rt}} \left| a(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{rb(t)}{v\sigma_{\alpha} (1 - e^{-2rt})} \right|^2 \Bigg\},$$

$$a(\tau) = -2\lambda \int_0^{\tau} d\tau' \beta(\tau') e^{-r(\tau'-\tau)},$$

$$b(t) = v\sigma_{\alpha} \int_0^t d\tau a(\tau) e^{r(\tau-t)} - \alpha_0 e^{-rt}.$$

3.19.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_0 w(\alpha_0) \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\alpha(\tau) + \beta(\tau)|^2 \right\} \right| \alpha_t \right\rangle = \\
& = \frac{r e^{\nu t} (\pi \sigma_\alpha)^{-1}}{(r + \nu) e^{rt} + (r - \nu) e^{-rt}} \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\beta(\tau)|^2 + \frac{\nu \sigma_\alpha}{2} \int_0^t d\tau |a(\tau)|^2 + \right. \\
& \quad \left. + \alpha_t a^*(t) + \alpha_t^* a(t) + \frac{r - \nu}{2\nu \sigma_\alpha} |\alpha_t|^2 - \frac{r}{\nu \sigma_\alpha} \frac{(r + \nu) |b(t)|^2}{(r + \nu) + (r - \nu) e^{-2r}} \right\}, \\
& a(\tau) = -2\lambda \int_0^\tau d\tau' \beta(\tau') e^{-r(\tau' - \tau)}, \\
& b(t) = \alpha_t + \nu \sigma_\alpha \int_0^t d\tau a(\tau) e^{r(\tau - t)}.
\end{aligned}$$

3.20.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_0 w(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_t \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\alpha(\tau) + \beta(\tau)|^2 \right\} \right| \alpha_t \right\rangle = \\
& = Q(\lambda) \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |\beta(\tau)|^2 \right\} \times \\
& \times \exp \left\{ \frac{\lambda^2 \nu \sigma_\alpha / r}{(r + \nu)^2 e^{rt} - (r - \nu)^2 e^{-rt}} \int_0^t d\tau \int_\tau^t d\tau' [(r + \nu) e^{r\tau} + (r - \nu) e^{-r\tau}] \times \right. \\
& \quad \left. \times [(r + \nu) e^{r(t - \tau')} + (r - \nu) e^{-r(t - \tau')}] [\beta(\tau) \beta^*(\tau') + \beta^*(\tau) \beta(\tau')] \right\}.
\end{aligned}$$

3.21.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_0 w(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_t \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau_1 \dots \int_0^t d\tau_N \left| \sum_{n=1}^N e_n \alpha(\tau_n) \right|^2 \right\} \right| \alpha_t \right\rangle = \\
& = Q(\lambda) (1 + \Lambda_1 \Lambda_2 / \rho)^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\Lambda_1 = \lambda t \sum_{n=1}^N |e_n|^2, \quad \Lambda_2 = \lambda \sum_{\substack{n,m=1 \\ n \neq m}}^N e_n e_m^*, \quad \rho = (\nu^2 + 2\Lambda_1 \nu \sigma_\alpha)^{1/2},$$

$$J = \frac{4\nu^2 \sigma_\alpha / \rho^3}{(\rho + \nu)^2 e^{\rho t} - (\rho - \nu)^2 e^{-\rho t}} [2\nu - (\rho + \nu) e^{\rho t} + (\rho - \nu) e^{-\rho t} + 2\rho^2 t e^{-\rho t}].$$

3.22.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_0 w(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_{t+\Delta} \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\frac{\lambda}{4} \int_0^t d\tau |\alpha(\tau) + \alpha(\tau + \Delta) e^{i\omega_\alpha \Delta} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \beta(\tau) e^{i(\omega_\beta - \omega_\alpha)\tau} + \beta(\tau + \Delta) e^{i(\omega_\beta - \omega_\alpha)\tau + i\omega_\beta \Delta} \right|^2 \right\} \right| \alpha_{t+\Delta} \right\rangle =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\rho v c}{(\rho + v)^2 e^{\rho t} - (\rho - v)^2 e^{-\rho t}} \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau |B(\tau)|^2 \right\} \times \\
&\times \exp \left\{ \frac{2\lambda^2 v \sigma_\alpha R / \rho}{(\rho + v)^2 e^{\rho t} - (\rho - v)^2 e^{-\rho t}} \int_0^t d\tau \int_\tau^t d\tau' [(\rho + v) e^{\rho \tau} + (\rho - v) e^{-\rho \tau}] \times \right. \\
&\times [(\rho + v) e^{\rho(t-\tau')} + (\rho - v) e^{-\rho(t-\tau')}] [B(\tau) B^*(\tau') + B^*(\tau) B(\tau')] \Big\}, \\
&\rho = (v^2 + 2\lambda v \sigma_\alpha R)^{1/2}, \quad R = \frac{1}{2} (1 + e^{-v\Delta} \cos \omega_\alpha \Delta), \\
&B(\tau) = \frac{1}{2} [\beta(\tau) + \beta(\tau + \Delta) e^{i\omega_\beta \Delta}] e^{i(\omega_\beta - \omega_\alpha) \Delta}.
\end{aligned}$$

3.23.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_0 \omega(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_T \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau \left| \sum_{m=1}^M a_m \alpha(\tau + \Delta_m) \right|^2 \right\} \right| \alpha_T \right\rangle = Q(\lambda J), \\
&T = t + \max(\Delta_m), \quad J = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M a_m a_n^* \exp(-v |\Delta_m - \Delta_n|).
\end{aligned}$$

3.24.

$$\begin{aligned}
&\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_0 \omega(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_{M\Delta} \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau P_M \right\} \right| \alpha_{M\Delta} \right\rangle = Q(\lambda J), \\
&P_M = \left| \sum_{m=1}^M \rho^m e^{im\omega\Delta} \alpha(\tau + m\Delta) \right|^2, \\
&J = \frac{1}{1 - \rho^2} \frac{1 - \rho^2 e^{-2v\Delta}}{1 - 2\rho \cos \omega\Delta e^{-v\Delta} + \rho^2 e^{-2v\Delta}}.
\end{aligned}$$

3.25.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_0 \omega(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_{t+\Delta} \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau P \right\} \right| \alpha_{t+\Delta} \right\rangle = Q(\lambda J),$$

$$P = \left| \int_{\Delta'}^{\Delta} d\tau' a(\tau') \alpha(\tau + \tau') \right|^2,$$

$$J = \int_{\Delta'}^{\Delta} d\tau' \int_{\Delta'}^{\Delta} d\tau'' a(\tau') a^*(\tau'') \exp(-v |\tau' - \tau''|).$$

3.26.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_0 \omega(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_{t+\Delta} \times \\
&\times \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau \frac{\alpha(\tau) \alpha^*(\tau + \Delta) + \alpha^*(\tau) \alpha(\tau + \Delta)}{2} \right\} \right| \alpha_{t+\Delta} \right\rangle = \\
&= Q\left(\lambda \frac{1 + e^{-v\Delta}}{2}\right) Q\left(-\lambda \frac{1 - e^{-v\Delta}}{2}\right).
\end{aligned}$$

3.27.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_0 w(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_{t+\Delta} \left\langle \alpha_0 \right| \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} \int_0^t d\tau [\alpha(\tau) + \beta(\tau)] [\alpha^*(\tau + \Delta) + \beta^*(\tau + \Delta)] - \frac{\lambda}{2} \int_0^t d\tau [\alpha^*(\tau) + \beta^*(\tau)] [\alpha(\tau + \Delta) + \beta(\tau + \Delta)] \right\} \left| \alpha_{t+\Delta} \right\rangle =$$

$$= \frac{4\rho_+ v e^{v t}}{(\rho_+ + v)^2 e^{\rho_+ t} - (\rho_+ - v)^2 e^{-\rho_+ t}} \frac{4\rho_- v e^{v t}}{(\rho_- + v)^2 e^{\rho_- t} - (\rho_- - v)^2 e^{-\rho_- t}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} \int_0^t d\tau [\beta(\tau) \beta^*(\tau + \Delta) + \beta^*(\tau) \beta(\tau + \Delta)] - \right.$$

$$\left. - \lambda^2 \int_0^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau_2 [U_+(\tau_1, \tau_2) - U_-(\tau_1, \tau_2)] \right\},$$

$$U_{\pm}(\tau_1, \tau_2) = \frac{2v\sigma_{\alpha} R_{\pm}^2 / \rho_{\pm}}{(\rho_{\pm} + v)^2 e^{\rho_{\pm} t} - (\rho_{\pm} - v)^2 e^{-\rho_{\pm} t}} [a_{\pm}(\tau_1) a_{\pm}^*(\tau_2) + a_{\pm}^*(\tau_1) a_{\pm}(\tau_2)] \times$$

$$\times [(\rho_{\pm} + v) e^{\rho_{\pm} \tau_1} + (\rho_{\pm} - v) e^{-\rho_{\pm} \tau_1}] [(\rho_{\pm} + v) e^{\rho_{\pm}(\tau_2 - \tau_1)} + (\rho_{\pm} - v) e^{-\rho_{\pm}(\tau_2 - \tau_1)}],$$

$$\rho_{\pm} = (v^2 \pm 2\lambda v \sigma_{\alpha} R_{\pm})^{1/2}, \quad R_{\pm} = \frac{1 \pm e^{-v\Delta}}{2},$$

$$a_+(\tau) = \frac{\beta(\tau) + \beta(\tau + \Delta)}{2}, \quad a_-(\tau) = \frac{\beta(\tau) - \beta(\tau + \Delta)}{2}.$$

3.28.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_0 w(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_{t_1+\Delta+t_2} \left\langle \alpha_0 \right| \exp \left\{ -\lambda_1 \int_0^{t_1} d\tau |\alpha(\tau)|^2 - \right.$$

$$\left. - \lambda \int_{t_1}^{t_1+\Delta} d\tau |\alpha(\tau)|^2 - \lambda_2 \int_{t_1+\Delta}^{t_1+\Delta+t_2} d\tau |\alpha(\tau)|^2 \right\} \left| \alpha_{t_1+\Delta+t_2} \right\rangle =$$

$$= \frac{16vp\rho_1\rho_2\rho_1\rho_2 \exp(vt_1 + v\Delta + vt_2)}{(1+p^2)\rho(\rho_1 A_1 B_2 + \rho_2 A_2 B_1) + (1-p^2)(\rho_1 \rho_2 A_1 A_2 + \rho_2 B_1 B_2)},$$

$$\rho = (v^2 + 2\lambda v \sigma_{\alpha})^{1/2}, \quad \rho_1 = (v^2 + 2\lambda_1 v \sigma_{\alpha})^{1/2}, \quad \rho_2 = (v^2 + 2\lambda_2 v \sigma_{\alpha})^{1/2},$$

$$p = \exp(-\rho\Delta), \quad p_1 = \exp(-\rho_1 t_1), \quad p_2 = \exp(-\rho_2 t_2),$$

$$A_1 = (v + \rho_1) + (v - \rho_1) \rho_1^2, \quad B_1 = (v + \rho_1) + (\rho_1 - v) \rho_1^2,$$

$$A_2 = (v + \rho_2) + (v - \rho_2) \rho_2^2, \quad B_2 = (v + \rho_2) + (\rho_2 - v) \rho_2^2.$$

3.29.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_0 w(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha_{t_1+t_2} \left\langle \alpha_0 \right| \exp \left\{ -\lambda_1 \int_0^{t_1} d\tau |\alpha(\tau)|^2 - \right.$$

$$\left. - \lambda_2 \int_{t_1}^{t_1+t_2} d\tau |\alpha(\tau)|^2 \right\} \left| \alpha_{t_1+t_2} \right\rangle = \frac{8vp_1\rho_2\rho_1\rho_2 \exp(vt_1 + vt_2)}{\rho_1 A_1 B_2 + \rho_2 A_2 B_1},$$

обозначения приведены в интеграле 3.28.

3.30.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_u \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^u d\tau V(\alpha(\tau)) \right\} \right| \alpha_u \right\rangle \left\langle \alpha_u \left| \exp \left\{ -\lambda \int_u^t d\tau V(\alpha(\tau)) \right\} \right| \alpha_t \right\rangle = \\ = \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau V(\alpha(\tau)) \right\} \right| \alpha_t \right\rangle,$$

где $V(\alpha(\tau))$ — произвольный функционал.

3.31.

$$\left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau V(\alpha(\tau)) \right\} \right| \alpha_t \right\rangle = \Psi(\alpha_t, t; \alpha_0, 0),$$

где $V(\alpha(\tau))$ — произвольный функционал; $\Psi(\alpha, t; \alpha_0, 0)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = v \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha \Psi) + v \frac{\partial}{\partial \alpha^*} (\alpha^* \Psi) + 2v\sigma \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha \partial \alpha^*} - \lambda V(\alpha) \Psi$$

с начальным условием $\Psi(\alpha, 0; \alpha_0, 0) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0)$.

3.32.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_0 w(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_{t+\Delta} \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_u^t d\tau V(\alpha(\tau)) \right\} \right| \alpha_{t+\Delta} \right\rangle = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_u w(\alpha_u) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \alpha_t \left\langle \alpha_u \left| \exp \left\{ -\lambda \int_u^t d\tau V(\alpha(\tau)) \right\} \right| \alpha_t \right\rangle,$$

где $V(\alpha(\tau))$ — произвольный функционал.

3.33.

$$\left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau V(\alpha(\tau)) \right\} \right| \alpha_t \right\rangle = \\ = \lim_{M \rightarrow \infty} \left\langle \alpha_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \sum_{m=0}^{M-1} \int_{mt/M}^{(m+1)t/M} d\tau V(\alpha(\tau)) \right\} \right| \alpha_t \right\rangle,$$

где $V(\alpha(\tau))$ — произвольный функционал.

4. Континуальные интегралы по мере, порождаемой стохастическим гармоническим процессом. В интегралах этой группы используются следующие обозначения:

 $x(\tau)$ — решение стохастического уравнения $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = f(\tau)$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) \equiv u(0) = u_0$; $x_0 = x(0)$ и $x_t = x(t)$ — значение процесса $x(\tau)$ в исходный $\tau = 0$ и конечный $\tau = t$ моменты времени; $u_0 = u(0) \equiv x(0)$ и $u_t = u(t) \equiv \dot{x}(t)$ — значение производной $u(\tau) \equiv \dot{x}(\tau)$ в исходный и конечный моменты времени; β — декремент затухания; ω — частота; $f(\tau)$ — порождающий случайный процесс, обладающий свойствами «белого» шума, $\langle f(\tau) f(\tau') \rangle = \sigma \delta(\tau - \tau')$, с интенсивностью σ ; λ — произвольный параметр; $\Omega = (\omega^2 - \beta^2)^{1/2}$; $w(x_0, u_0) = \frac{\beta\omega}{\pi\sigma} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\sigma} x_0^2 - \frac{\beta}{\sigma} u_0^2\right)$ — стационарная плотность распределения вероятностей обеих компонент $x(\tau)$ и $u(\tau)$ ГС-процесса в исходный момент

$\tau = 0$, $\omega(x_0, u_0) = \omega(x_0) \omega(u_0)$, где

$$\omega(x_0) = \sqrt{\frac{\beta \omega^2}{\pi \sigma}} \exp\left(-\frac{\beta \omega^2}{\sigma} x_0^2\right);$$

$$\omega(u_0) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi \sigma}} \exp\left(-\frac{\beta}{\sigma} u_0^2\right).$$

Для унификации условных и безусловных математических ожиданий от некоторого функционала $V(x(\tau), u(\tau))$, $0 \leq \tau \leq t$, первые из них обозначены с помощью двухкомпонентных бра- $\langle x_0, u_0 |$ и кет- $| x, u \rangle$ векторов, а вторые — интегрированием по этим переменным.

4.1.

$$\begin{aligned} \langle x_0, u_0 | 1 | x_t, u_t \rangle &= \omega(x_t, u_t, t; x_0, u_0, 0) = \\ &= \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi \sqrt{\Delta}} \exp\left\{\omega_1 t + \omega_2 t - \frac{p}{\Lambda} y_1^2 e^{2\omega_1 t} + \frac{h}{\Delta} y_1 y_2 e^{\omega_1 t + \omega_2 t} - \frac{q}{\Delta} y_2^2 e^{2\omega_2 t}\right\} = \\ &= \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi^2 \Delta} e^{\omega_1 t + \omega_2 t} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 \exp\{-2ix_0(\omega_1 \eta_1 e^{-\omega_1 t} + \omega_2 \eta_2 e^{-\omega_2 t}) - \\ &\quad - 2iu_0(\eta_1 e^{-\omega_1 t} + \eta_2 e^{-\omega_2 t}) + 2ix_t(\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2) + 2iu_t(\eta_1 + \eta_2) - \\ &\quad - A\eta_1^2 - 2B\eta_1 \eta_2 - C\eta_2^2\}, \end{aligned}$$

$$\omega_1 = \beta + i\Omega, \quad \omega_2 = \beta - i\Omega, \quad \Omega = (\omega^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad \Lambda = 4pq - h^2,$$

$$p = \frac{\sigma}{4\omega_1} (e^{2\omega_1 t} - 1), \quad h = \frac{\sigma}{\omega_1 + \omega_2} (e^{\omega_1 t + \omega_2 t} - 1), \quad q = \frac{\sigma}{4\omega_2} (e^{2\omega_2 t} - 1),$$

$$y_1 = (u_t + \omega_1 x_t) - (u_0 + \omega_1 x_0) e^{-\omega_1 t}, \quad y_2 = (u_t + \omega_2 x_t) - (u_0 + \omega_2 x_0) e^{-\omega_2 t},$$

$$A = 4qe^{-2\omega_2 t}, \quad B = he^{-\omega_1 t - \omega_2 t}, \quad C = 4pe^{-2\omega_1 t}.$$

4.2.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_0, u_0 | 1 | x_t, u_t \rangle = \frac{\beta \omega}{\pi \sigma} \exp\left(-\frac{\beta \omega^2}{\sigma} x_t^2 - \frac{\beta}{\sigma} u_t^2\right).$$

4.3.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \langle x_0, u_0 | 1 | x_t, u_t \rangle &= \frac{(\omega_1 - \omega_2) e^{\omega_1 t + \omega_2 t}}{4 \sqrt{\pi \Delta} (A\omega_2^2 - 2B\omega^2 + C\omega_1^2)^{1/2}} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{[x_0 \omega^2 (e^{-\omega_2 t} - e^{-\omega_1 t}) + u_0 (\omega_2 e^{-\omega_2 t} - \omega_1 e^{-\omega_1 t}) - u_t (\omega_2 - \omega_1)]^2}{A\omega_2^2 - 2B\omega^2 + C\omega_1^2}\right\}, \end{aligned}$$

обозначения см. в интеграле 4.1.

4.4.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | 1 | x_t, u_t \rangle &= \frac{(\omega_1 - \omega_2) e^{\omega_1 t + \omega_2 t}}{4 \sqrt{\pi \Delta} (A - 2B + C)^{1/2}} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{[x_0 (\omega_1 e^{-\omega_1 t} - \omega_2 e^{-\omega_2 t}) + u_0 (e^{-\omega_1 t} - e^{-\omega_2 t}) - x_t (\omega_2 - \omega_1)]^2}{A - 2B + C}\right\}, \end{aligned}$$

обозначения см. в интеграле 4.1.

4.5.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | 1 | x_t, u_t \rangle = 1.$$

4.6.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | x_t | x_t, u_t \rangle = x_0 \left(\cos \Omega t + \frac{\beta}{\Omega} \sin \Omega t \right) e^{-\beta t} + \frac{u_0}{\Omega} \sin \Omega t e^{-\beta t}.$$

4.7.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | u_t | x_t, u_t \rangle = u_0 \left(\cos \Omega t - \frac{\beta}{\Omega} \sin \Omega t \right) e^{-\beta t} - x_0 \frac{\omega^2}{\Omega} \sin \Omega t e^{-\beta t}.$$

4.8.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | x_t^2 | x_t, u_t \rangle &= x_0^2 + \frac{\beta \sigma}{\omega^2} - \\ &- \frac{\beta \sigma}{\omega^2} \left(1 + \frac{\beta}{\Omega} \sin \Omega t + 2 \frac{\beta^2}{\Omega^2} \sin^2 \Omega t \right) e^{-2\beta t}. \end{aligned}$$

4.9.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | u_t^2 | x_t, u_t \rangle &= u_0^2 + \beta \sigma - \beta \sigma \left(1 - \frac{\beta}{\Omega} \sin \Omega t + \right. \\ &\left. + 2 \frac{\beta^2}{\Omega^2} \sin^2 \Omega t \right) e^{-2\beta t}. \end{aligned}$$

4.10.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | x_t u_t | x_t, u_t \rangle &= \left[u_0 \left(\cos \Omega t - \frac{\beta}{\Omega} \sin \Omega t \right) - x_0 \frac{\omega^2}{\Omega} \sin \Omega t \right] \times \\ &\times \left[x_0 \left(\cos \Omega t + \frac{\beta}{\Omega} \sin \Omega t \right) + \frac{u_0}{\Omega} \sin \Omega t \right] + \frac{\sigma}{\beta \Omega^2} \sin^2 \Omega t e^{-2\beta t}. \end{aligned}$$

4.11.

$$\int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | x_t | x_t, u_t \rangle = x_0 \left(\cos \Omega t + \frac{\beta}{\Omega} \sin \Omega t \right) e^{-\beta t}.$$

4.12.

$$\int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | u_t | x_t, u_t \rangle = -x_0 \frac{\omega^2}{\Omega^2} \sin \Omega t e^{-\beta t}.$$

4.13.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | x_t^2 | x_t, u_t \rangle &= \frac{\sigma}{\beta \omega^2} + \\ &+ \left(x_0^2 - \frac{\sigma}{\beta \omega^2} \right) \left(\cos \Omega t + \frac{\beta}{\Omega} \sin \Omega t \right)^2 e^{-2\beta t}. \end{aligned}$$

4.14.

$$\int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | u_t^2 | x_t, u_t \rangle = \frac{\sigma}{\beta} + \frac{\omega}{\Omega} \left(x_0^2 - \frac{\sigma}{\beta \omega^2} \right) \sin^2 \Omega t e^{-2\beta t}.$$

4.15.

$$\int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | x_t u_t | x_t, u_t \rangle = \\ = \frac{\omega}{\Omega} \left(\frac{\sigma}{\beta \omega^2} - x_0^2 \right) \sin \Omega t \left(\cos \Omega t + \frac{\beta}{\Omega} \sin \Omega t \right) e^{-2\beta t}.$$

4.16.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(x_0, u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | 1 | x_t, u_t \rangle = 1.$$

4.17.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(x_0, u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | x_t | x_t, u_t \rangle = 0.$$

4.18.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(x_0, u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | u_t | x_t, u_t \rangle = 0.$$

4.19.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(x_0, u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | x_t^2 | x_t, u_t \rangle = \frac{\sigma}{\beta \omega^2}.$$

4.20.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(x_0, u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | u_t^2 | x_t, u_t \rangle = \frac{\sigma}{\beta}.$$

4.21.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(x_0, u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \langle x_0, u_0 | x_t u_t | x_t, u_t \rangle = 0.$$

4.22

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} du' \langle x_0, u_0 | G_1(x', u') | x', u' \rangle \langle x', u' | G_2(x_t, u_t) | x_t, u_t \rangle = \\ = \langle x_0, u_0 | G_1(x', u') G_2(x_t, u_t) | x_t, u_t \rangle,$$

где $G_1(x, u)$ и $G_2(x, u)$ — произвольные функции.

4.23.

$$\left\langle x_0, u_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau u^2(\tau) \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle = \frac{r_1 - r_2}{2\pi \sqrt{\Delta}} \exp \left\{ (\beta \mp r) t - \right. \\ \left. - \omega^2 \frac{\beta - r}{\sigma} (x_t^2 - x_0^2) - \frac{\beta - r}{\sigma} (u_t^2 - u_0^2) - \frac{1}{\Lambda} [P y_1^2 e^{2r_2 t} + H y_1 y_2 e^{2r' t} - Q y_2^2 e^{2r_1 t}] \right\},$$

$$r = (\beta^2 + \lambda \sigma / 2)^{1/2}, \quad r_{1,2} = r \pm i(\omega'^2 - r^2)^{1/2}, \quad \omega' = (\omega^2 - r^2)^{1/2},$$

$$P = \frac{\sigma}{4r_1} (e^{2r_1 t} - 1), \quad H = \frac{\sigma}{r_1 + r_2} (e^{r_1 t + r_2 t} - 1), \quad Q = \frac{\sigma}{4r_2} (e^{2r_2 t} - 1),$$

$$\Delta = 4PQ - H^2, \quad y_1 = (u_t + r_1 x_t) - (u_0 + r_1 x_0) e^{-r_2 t},$$

$$y_2 = (u_t + r_2 x_t) - (u_0 + r_2 x_0) e^{-r_1 t}.$$

4.24.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \left\langle 0, 0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau u^2(\tau) \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle =$$

$$= 2re^{\beta t} \left\{ [(\beta + r)e^{rt} - (\beta - r)e^{-rt}]^2 + \frac{4r^2(r^2 - \beta^2)}{\omega'^2} \sin^2(\omega' t) \right\}^{-1/2}, \quad \omega' = (\omega^2 - r^2)^{1/2}.$$

4.25.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(x_0, u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \left\langle x_0, u_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau u^2(\tau) \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle =$$

$$= 4r\beta e^{\beta t} \left\{ [(r + \beta)^2 e^{rt} - (r - \beta)^2 e^{-rt}]^2 - \frac{4r^2(r^2 - \beta^2)^2}{\omega'^2} \sin^2(\omega' t) \right\}^{-1/2},$$

$$\omega' = (\omega^2 - r^2)^{1/2}.$$

4.26.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \left\langle 0, 0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau x(\tau) u(\tau) \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \exp \left(-\lambda \frac{x_t^2}{2} \right) \omega(x_t, u_t, t; 0, 0, 0),$$

где функция $\omega(x_t, u_t, t; 0, 0, 0)$ дана в интеграле 4.1.

4.27.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(x_0, u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \left\langle x_0, u_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau x(\tau) u(\tau) \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(x_0, u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \exp \left(-\lambda \frac{x_t^2 - x_0^2}{2} \right) \omega(x_t, u_t, t; x_0, u_0, 0),$$

где функция $\omega(x_t, u_t, t; x_0, u_0, 0)$ дана в интеграле 4.1.

4.28.

$$\left\langle x_0, u_0 \left| \exp \left\{ -\int_0^t d\tau [au^2(\tau) + 2bx(\tau)u(\tau) + cx^2(\tau)] \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle =$$

$$= \frac{\rho_1 - \rho_2}{2\pi \sqrt{D}} \exp \left\{ A\sigma t - A(u_t^2 - u_0) - 2B(x_t u_t - x_0 u_0) - C(x_t^2 - x_0^2) + \right.$$

$$\left. + 2\rho t - \frac{P}{D} z_1^2 e^{2\rho_1 t} + \frac{H}{D} z_1 z_2 e^{2\rho t} - \frac{Q}{D} z_2^2 e^{2\rho_2 t} \right\}.$$

$$\Omega = (\omega^2 + 2\sigma c)^{1/2}, \quad \rho = \left(\beta^2 + \frac{a + \Omega^2 - \omega^2}{2} \right)^{1/2}, \quad \rho_{1,2} = \rho \pm i(\Omega^2 - \rho^2)^{1/2},$$

$$A = \frac{\beta - \sigma}{\sigma}, \quad B = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{2\sigma}, \quad C = b + \frac{\beta\omega^2 - \rho\Omega^2}{\sigma}, \quad D = 4PQ - H^2,$$

$$P = \frac{\sigma}{4\rho_1} (e^{2\rho_1 t} - 1), \quad H = \frac{\sigma}{2\rho} (e^{2\rho t} - 1), \quad Q = \frac{\sigma}{4\rho_2} (e^{2\rho_2 t} - 1),$$

$$z_1 = (u_t + \rho_1 x_t) - (u_0 + \rho_1 x_0) e^{-\rho_1 t}, \quad z_2 = (u_t + \rho_2 x_t) - (u_0 + \rho_2 x_0) e^{-\rho_2 t}.$$

4.29.

$$\begin{aligned} & \left\langle 0, 0 \left| \exp \left\{ - \int_0^t d\tau [au^2(\tau) + 2bx(\tau)u(\tau) + cx^2(\tau)] \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle = \\ & = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2\pi \sqrt{D}} \exp \left\{ A\sigma t - Au_t^2 - 2Bx_t u_t - Cx_t^2 + \right. \\ & \quad \left. + 2\rho t - \frac{P}{D} y_1^2 e^{2\rho_1 t} + \frac{H}{D} y_1 y_2 e^{2\rho t} - \frac{Q}{D} y_2^2 e^{2\rho_1 t} \right\}, \\ & \quad y_1 = u_t + \rho_1 x_t, \quad y_2 = u_t + \rho_2 x_t, \end{aligned}$$

остальные обозначения определены в интеграле 4.28.

4.30.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(x_0, u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \times \\ & \times \left\langle x_0, u_0 \left| \exp \left\{ - \int_0^t d\tau [au^2(\tau) + 2bx(\tau)u(\tau) + cx^2(\tau)] \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle = \\ & = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\pi^2} \iiint \int d\eta_1 d\eta_2 dx_0 du_0 dx_t du_t \omega(x_0, u_0) \exp \{ A\sigma t - A(u_t^2 - u_0) - \\ & - 2B(x_t u_t - x_0 u_0) - C(x_t^2 - x_0^2) - \frac{\sigma}{\rho_2} \eta_1^2 (1 - e^{-2\rho_2 t}) - \frac{\sigma}{\rho} \eta_1 \eta_2 (1 - e^{-2\rho t}) - \\ & - \frac{\sigma}{\rho_1} \eta_2^2 (1 - e^{-2\rho_1 t}) + 2i\eta_1 [(u_t + \rho_1 x_t) - (u_0 + \rho_1 x_0) e^{-\rho_1 t}] + \\ & \quad + 2i\eta_2 [(u_t + \rho_2 x_t) - (u_0 + \rho_2 x_0) e^{-\rho_2 t}] \}. \end{aligned}$$

Остальные обозначения определены в интеграле 4.28.

4.31.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \omega(x_0, u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \times \\ & \times \left\langle x_0, u_0 \left| \exp \left\{ - \int_0^t d\tau [au^2(\tau) + 2bx(\tau)u(\tau) + cx^2(\tau)] \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle = \\ & = \frac{2\beta\omega(\rho_1 - \rho_2) e^{\beta t - \rho t}}{\sigma(A_0 C_0 - B_0^2)^{1/2} (AC - B^2)^{1/2} (A_\eta C_\eta - B_\eta^2)^{1/2}}, \end{aligned}$$

$$A_0 = \frac{\beta + \rho}{\sigma}, \quad B_0 = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\sigma}, \quad C_0 = -b + \frac{\rho\Omega^2 + \beta\omega^2}{\sigma},$$

$$A_\eta = \frac{\sigma}{\rho_2} (1 - e^{-2\rho_2 t}) + \frac{A\rho_1^2 - 2B\rho_1 + C}{AC - B^2} + \frac{A_0\rho_1^2 - 2B_0\rho_1 + C_0}{A_0 C_0 - B_0^2} e^{-2\rho_2 t},$$

$$B_\eta = \frac{\sigma}{\rho} (1 - e^{-2\rho t}) + \frac{A\Omega^2 - 2B\rho + C}{AC - B^2} + \frac{A_0\Omega^2 - 2B_0\rho + C_0}{A_0 C_0 - B_0^2} e^{-2\rho t},$$

$$C_\eta = \frac{\sigma}{\rho_1} (1 - e^{-2\rho_1 t}) + \frac{A\rho_2^2 - 2B\rho_2 + C}{AC - B^2} + \frac{A_0\rho_2^2 - 2B_0\rho_2 + C_0}{A_0 C_0 - B_0^2} e^{-2\rho_1 t},$$

остальные обозначения определены в интеграле 4.28.

4.32.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \left\langle 0, 0 \left| \exp \left\{ - \int_0^t d\tau [au^2(\tau) + 2bx(\tau)u(\tau) + cx^2(\tau)] \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle =$$

$$= \frac{(\rho_1 - \rho_2) e^{\beta t - \rho t}}{(AC - B^2)^{1/2} (A_\eta C_\eta - B_\eta^2)^{1/2}},$$

$$A_\eta = \frac{\sigma}{\rho_2} (1 - e^{-2\rho_2 t}) + \frac{A\rho_1^2 - 2B\rho_1 + C}{AC - B^2},$$

$$B_\eta = \frac{\sigma}{\rho} (1 - e^{-2\rho t}) + \frac{A\Omega^2 - 2B\rho + C}{AC - B^2},$$

$$C_\eta = \frac{\sigma}{\rho} (1 - e^{-2\rho_1 t}) + \frac{A\rho_2^2 - 2B\rho_2 + C}{AC - B^2},$$

остальные обозначения определены в интеграле 4.28.

4.33.

$$\left\langle x_0, u_0 \left| \exp \left\{ - \lambda \int_0^t d\tau [x(\tau) + X(\tau)]^2 \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2\pi \sqrt{D}} \exp \left\{ - \lambda \int_0^t d\tau X^2(\tau) + \right.$$

$$+ u_t a(t) + x_t b(t) - \frac{R}{D} - \frac{\beta\Omega^2 - \rho\Omega^2}{\sigma} (x_t^2 - x_0^2) +$$

$$\left. + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\sigma} (x_t u_t - x_0 u_0) - \frac{\beta - \rho}{\sigma} (u_t^2 - u_0^2) \right\},$$

$$\Omega = (\omega^4 + 2\lambda\sigma)^{1/4}, \quad \rho = \left(\beta^2 + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2} \right)^{1/2}, \quad \rho_{1,2} = \rho \pm i(\Omega^2 - \rho^2)^{1/2},$$

$$a(t) = 2\lambda \int_0^t d\tau X(\tau) \frac{\sin \Omega(t - \tau)}{\Omega} e^{\rho(t - \tau)},$$

$$b(t) = 2\rho a(t) - \dot{a}(t), \quad D = 4PQ - H^2,$$

$$P = \frac{\sigma}{4\rho_1} (e^{2\rho_1 t} - 1), \quad H = \frac{\sigma}{2\rho} (e^{2\rho t} - 1), \quad Q = \frac{\sigma}{4\rho_2} (e^{2\rho_2 t} - 1),$$

$$z_1 = (u_t + \rho_1 x_t) - (u_0 + \rho_1 x_0) e^{-\rho_1 t} + \sigma \int_0^t d\tau a(\tau) e^{\rho_1(\tau - t)},$$

$$z_2 = (u_t + \rho_2 x_t) - (u_0 + \rho_2 x_0) e^{-\rho_2 t} + \sigma \int_0^t d\tau a(\tau) e^{\rho_2(\tau - t)},$$

$$R = Pz_1^2 e^{2\rho_1 t} - H z_1 z_2 e^{2\rho t} + Q z_2^2 e^{2\rho_2 t},$$

 $X(\tau)$ — произвольная квадратичноинтегрируемая функция.

4.34.

$$\left\langle x_0, u_0 \left| \exp \left\{ - \lambda \int_0^t d\tau V(x(\tau), u(\tau)) \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle = \Psi(x_t, u_t, t; x_0, u_0, 0),$$

где $V(x(\tau), u(\tau))$ — произвольный функционал от стохастического процесса;
 $\Psi(x, u, t; x_0, u_0, 0)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = -u \frac{\partial}{\partial x} \Psi + \omega^2 x \frac{\partial \Psi}{\partial u} + 2\beta \frac{\partial}{\partial u} (u\Psi) + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} - \lambda V(x, u) \Psi$$

с начальным условием $\Psi(x, u, 0; x_0, u_0, 0) = \delta(x - x_0) \delta(u - u_0)$.

4.35.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_0 w(x_0, u_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_{t+\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} du_{t+\Delta} \times \\ & \times \left\langle x_0, u_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_{\zeta}^t d\tau V(x(\tau), u(\tau)) \right\} \right| x_{t+\Delta}, u_{t+\Delta} \right\rangle = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} dx_s \int_{-\infty}^{\infty} du_s w(x_s, u_s) \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{-\infty}^{\infty} du_t \times \\ & \times \left\langle x_s, u_s \left| \exp \left\{ -\lambda \int_{\zeta}^t d\tau V(x(\tau), u(\tau)) \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle. \end{aligned}$$

4.36.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx_s \int_{-\infty}^{\infty} du_s \left\langle x_0, u_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^s d\tau V(x(\tau), u(\tau)) \right\} \right| x_s, u_s \right\rangle \times \\ & \times \left\langle x_s, u_s \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau V(x(\tau), u(\tau)) \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle = \\ & = \left\langle x_0, u_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau V(x(\tau), u(\tau)) \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle. \end{aligned}$$

4.37.

$$\begin{aligned} & \left\langle x_0, u_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau V(x(\tau), u(\tau)) \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle = \\ & = \lim_{M \rightarrow \infty} \left\langle x_0, u_0 \left| \exp \left\{ -\lambda \sum_{m=0}^{M-1} \int_{m\delta/M}^{(m+1)\delta/M} d\tau V'(x(\tau), u(\tau)) \right\} \right| x_t, u_t \right\rangle. \end{aligned}$$

Изложение методов континуального интегрирования в данной книге преследовало цель дать представление о практических возможностях их использования в разнообразных задачах физики. Применимость континуального интегрирования как составного этапа исследовательского процесса обладает известной общностью в нестационарных нелинейных системах, что обусловлено их физическим содержанием.

Принятый подход к изложению (от исходных уравнений движения и функционалов до результатов в аналитической форме, «до графика») несколько сузил перечень методов вычисления континуальных интегралов и их приложений. Из всего многообразия методов континуального интегрирования и объектов их применения освещены лишь интегралы по гауссовой мере с потенциалами относительно простой структуры. Практически не описаны методы нахождения фейнмановских интегралов, вычисления пропагаторов и фейнмановских диаграмм, а также континуальных интегралов, основанных на операторных мерах. Сделано это не из-за стремления к компактности изложения или достаточного освещения в монографической литературе. Основной целью изложения было расширение применения методов континуального интегрирования на новые области физической науки и детальная демонстрация техники нахождения значений континуальных средних.

Отметим несколько направлений, перспективных для дальнейших исследований.

1. Новые возможности средств ЭВМ (прежде всего ~~быстродействие и дина-~~ машинного слова), несомненно, послужат стимулом к разработке алгоритмов вычисления функциональных интегралов для задач нелокальной и нелинейной физики. Особо перспективными представляются разработка алгоритмов вычисления простых интегралов по производящему параметру от континуальных средних, а также их детализация с учетом свойств мер, основанных на различных стохастических процессах.

2. С аналитической точки зрения представляется важным применение континуального подхода к объектам, описываемым системой линейных дифференциальных стохастических уравнений высокой размерности и, далее, линейными интегральными стохастическими уравнениями и линейными уравнениями в частных производных. Особо важными являются разработки методов, в том числе приближенных, нахождения континуальных средних от форм, отличных от гауссовых.

3. Помимо освещенных в данной работе, существуют другие методы исследования нелокальных объектов. К ним относятся прежде всего средства функционального и операторного анализа и их применения в квантовой теории поля и в стохастической механике, приложения в физике плазмы. Вместе с тем и в таких областях физики, как гидро- и аэродинамика, теория поверхностей твердого и жидких тел и взаимодействие с ними, метрология, теория конденсированных сред, теория автоматического управления и стохастических распределенных систем, оптоэлектроника и теория распространения многомодовых процессов и других, вполне возможно успешное разрешение задач, включающих континуальный подход с использованием методов нахождения континуальных средних.

«Стоит и дальше прилагать усилия, чтобы распространить метод интегралов по траекториям за его сегодняшние пределы. Несмотря на ограничения, ценность его весьма велика благодаря той помощи, которую он оказывает интуиции исследователя в соединении физического понимания сути дела с математическим анализом», — эти слова Р. Фейнмана и Л. Хибса, авторов книги «Квантовая механика и интегралы по траекториям», подтверждают необходимость новых исследований.

SUMMARY

The method known as path integration (PI) is at present employed very widely. It has become particularly popular in quantum mechanics, while other branches of physics have little or no recourse to it. In this book the presentation is based on solutions of series of problems of statistical radio physics, quantum optics and radiation high energy physics; it provides information on PI of the Gaussian forms that are most commonly dealt with in practice. The approach used in the book is based on analytical determination of probability characteristics of physical quantities lying on solutions of stochastic differential equations. This approach has yielded exact results and permitted the stochastic structure of integral square-law functionals at the output of inertial devices detecting signals against the background of the Gaussian noise to be described.

The book includes the introduction, six chapters and two appendices.

The introduction considers the physical situations whose analysis leads to the concept of the path integral.

Chapter 1 presents definitions, including that of the path integral, and the elements of the theory of the Gaussian measure referring to the Ornstein — Uhlenbeck process.

Chapter 2 reviews the Kac — Feynman, time discretization, Markoff process dimension raising and integration variable change methods to calculate path integrals. The relation of the Wiener integrals to the Feynman integrals is considered.

Chapter 3 deals with application of PI to statistical radiophysics. It considers statistical processes at integral square-law detector, correlator, interferometer, etc. output.

Chapter 4 deals with application of PI to problems of quantum optics on the basis of the complex-valued Ornstein — Uhlenbesk process (photoelectron statistics, heterodyning, intensity interferometry, etc.).

Chapter 5 considers the statistical structure of integral square-law functionals lying on the solution of the multidimensional Langevin equation. Functionals based on the harmonic stochastic process are studied in particular detail.

Chapter 6 studies radiation effects arising from scattering of relativistic charged particles by amorphous and crystalline media.

The chapters are further subdivided into sections, each including exercises containing additional information on the particular subject.

Appendix 1 presents a description and a FORTRAN text of a typical program to calculate the probability characteristics of the optical integral Gaussian functionals.

Appendix 2 summarizes path integrals with over one hundred results.

The book is addressed to scientists and post-graduate students who use statistical and applied methods, and also to under-graduate students of physics.

К главе 1

1. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии.— М.: Изд-во иностр. лит., 1947.— 168 с.
2. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы.— М.: Сов. радио, 1977.— 488 с.
3. Ахиезер А. И., Пелетминский С. В. Методы статистической физики.— М.: Наука, 1977.— 368 с.
4. Баруца-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения.— М.: Наука, 1969.— 511 с.
- ✓ 5. Гельфанд И. М., Яглом А. М. Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике // УМН.— 1956.— 11, № 1.— С. 77—114.
- ✓ 6. Дынкин Е. Б. Функционалы от траекторий марковских случайных процессов // Докл. АН СССР.— 1955.— 104, № 5.— С. 691—694.
7. Колмогоров А. Н. Основные проблемы теории вероятностей.— М.: Наука, 1974.— 119 с.
8. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов.— М.: Наука, 1971.— 664 с.
9. Фейнман Р., Хилс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям.— М.: Мир, 1968.— 382 с.
10. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.— 159 с.
11. Кузнецов Д. С. Специальные функции.— М.: Высш. шк., 1965.— 423 с.
12. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и стохастической физике.— М.: Атомиздат, 1976.— 256 с.
13. Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики.— М.: Наука, 1967.— 176 с.
14. Винер Н. Я — математик.— М.: Наука, 1964.— 353 с.
15. Далецкий Ю. Л., Фолин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.— М.: Наука, 1983.— 383 с.
16. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1965.— 235 с.
17. Глимм Дж., Джайфр А. Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов.— М.: Мир, 1981.— 415 с.
- ✓ 18. Блохинцев Д. И., Барбацов Б. М. Применение функциональных интегралов в квантовой механике и теории поля // УФН.— 1972.— 106, № 4.— С. 593—616.
- ✓ 19. Рамон П. Теория поля. Современный вводный курс.— М.: Мир, 1981.— 332 с.
20. Lax M. Classical Noise. I // Rev. Mod. Phys.— 1960.— 32.— P. 25.
21. Lax M. Classical Noise. II // J. Phys. Chem. Solids.— 1960.— 14.— P. 248.

* В списке литературы использованы сокращения названий следующих периодических изданий: ЖТФ — Журнал технической физики; ЖЭТФ — Журнал теоретической и экспериментальной физики; ТМФ — Теоретическая и математическая физика; УМН — Успехи математических наук, УФЖ — Украинский физический журнал; УФН — Успехи физических наук.

22. *Lax M.* Classical Noise. III: Nonlinear Markoff Process // *Rev. Mod. Phys.*—1966.— 38.— P. 359.
23. *Lax M.* Classical Noise. IV. Langevin Methods // *Ibid.*— P. 541.
24. *Lax M.* Quantum Noise. I // *Phys. Rev.*—1958.— 109.— P. 1921.
25. *Lax M.* Quantum Noise. II // *Ibid.*—1963.— 129.— P. 2342.
26. *Lax M.* Quantum Noise. III // *J. Phys. Chem. Solids.*—1964.— 25.— P. 487.
27. *Lax M.* Quantum Noise. IV // *Phys. Rev.*—1966.— 145.— P. 110.
28. *Lax M.* Quantum Noise. VII // *J. Quant. Electron.*—1967.— 3.— P. 27.
29. *Lax M.* Quantum Noise. IX // *Ibid.*—1967.— 3.— P. 47.
30. *Lax M.* Quantum Noise. X // *Phys. Rev.*—1967.— 157.— P. 213.
31. *Lax M.* Quantum Noise. XI // *Ibid.*—1968.— 172.— P. 350.
32. *Lax M.* Quantum Noise. XIII // *Ibid.*— P. 362.

К главе 2

1. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике.— М. : Мир, 1965.— 407 с.
2. *Фейнман Р., Хилбс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям.— М. : Мир, 1968.— 382 с.
3. *Фейнман Р.* Статистическая механика.— М. : Мир, 1978.— 407 с.
4. *Бом Д.* Квантовая теория.— М. : Наука, 1965.— 727 с.
5. *Свацинская А.* Прикладные методы теории случайных функций.— М. : Наука, 1968.— 463 с.
6. *Дюге Д.* Теоретическая и прикладная статистика.— М. : Наука, 1972.— 383 с.
7. *Мишина А. П., Проскуряков И. В.* Высшая алгебра.— М. : Наука, 1965.— 300 с.
8. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц.— М. : Наука, 1969.— 367 с.
9. *Гельфанд И. М., Яглом А. М.* Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике // *УМН.*—1956.— 11, № 1.— С. 77—114.
10. *Montroll E. W.* Markoff chains, Wiener integrals and quantum theory // *Communications pure appl. Math.*—1952.— 5.— P. 415—453.
11. *Cameron R. H., Martin W. T.* Evaluation of various Wiener integrals by use of certain Sturm—Liouville differential equations // *Bull. Amer. Math. Soc.*—1945.— 51, N 2.— P. 73—90.
12. *Лэкс М.* Флуктуации и когерентные явления.— М. : Мир, 1974.— 299 с.
13. *Lax M.* Classical Noise. III: Nonlinear Markoff Process // *Rev. Mod. Phys.*—1966.— 38, N 2.— P. 359—379.
14. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы.— М. : Сов. радио, 1977.— 488 с.
15. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника.— М. : Сов. радио, 1966.— 530 с.
16. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории.— М. : Мир, 1968.— 394 с.
17. *Мальцев А. А., Савищев А. И.* Точное вычисление статистических характеристик одноканального автокомпенсатора помех с корреляционной обратной связью.— *Радиотехника и электрон.*—1978.— 23, № 12.— С. 2543—2552.
18. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М. : Наука, 1955.— 703 с.
19. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения.— М. : Наука, 1975.— 303 с.
20. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиофизики. I — М. : Сов. радио, 1969.— 752 с.
21. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций.— М.; Л. : ГИТТЛ, 1950.— 703 с.
22. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье.— М.; Л. : ГИТТЛ, 1948.— 479 с.
23. *Го Х.-С.* Гауссовы меры в банаховых пространствах.— М. : Мир, 1979.— 176 с.
24. *Градиштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М. : Физматгиз, 1963.— 1100 с.
25. *Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю., Сидорова О. В.* Об одной линейной замене переменных при интегрировании в континуальном интеграле по условной мере Винера // *Крат. сообщ. ОИЯИ. Дубна.*—1984.— № 4-84.— С. 28—32.
26. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория.— М. : Физматгиз, 1963.— 702 с.

27. Люиселл У. Излучение и шумы в квантовой электронике.— М. : Наука, 1972.— 398 с.
28. Маслов В. П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана.— М. : Наука, 1976.— 190 с.
29. Шифр Л. Квантовая механика.— М. : Изд-во иностр. лит.— 1959.— 473 с.
30. Газазян А. Д. Рассеяние света на квантовом гармоническом осцилляторе // ТМФ.— 1969.— 10, № 3.— С. 360.
31. Васильев А. Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1976.— 293 с.
32. Березин Ф. А. Невнинеровские континуальные интегралы // ТМФ.— 1971.— 6.— С. 194—212.
33. Швингер Ю. Броуновское движение квантового осциллятора.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 71 с.
34. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т.— М. : Мир, 1981.— Т. 1. 527 с.; Т. 2. 751 с.
35. Клячкин В. Н. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах.— М. : Наука, 1980.— 336 с.
36. Гельфанд И. М., Фролов А. С., Ченцов Н. Н. Вычисление континуальных интегралов методом Монте-Карло // Изв. вузов. Математика.— 1958.— 6, № 5.— С. 32—45.
37. Татарский В. И. Представление решения некоторых дифракционных задач в форме гауссовых континуальных интегралов // Докл. АН СССР.— 1978.— 241, № 2.— С. 333—336.
38. Янович Л. А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам.— Минск : Наука и техника, 1976.— 383 с.
39. Коалычик И. М. Интеграл Винера // УМН.— 1963.— 18, № 1.— С. 97—131.
40. Сабельфельд К. К., Татарский В. И. О приближенном вычислении винеровских континуальных интегралов // Докл. АН СССР.— 1978.— 243, № 4.— С. 905—908.
41. Клячкин В. И., Татарский В. И. Приближение диффузионного случайного процесса в некоторых нестационарных статистических задачах физики // УФН.— 1973.— 110, № 4.— С. 499—536.
42. Jakeman E., Pike E. R. The intensity-fluctuation distribution of Gaussian light // J. Phys. A. (Gen. Phys.).— 1968.— Vol. 1.— P. 128—138.
43. Экснер П. Нестабильные квантовые системы и интегралы Фейнмана // Физика элементарных частиц и атомного ядра.— 1984.— 15, вып. 1.— С. 121—155.
44. Родригес К., Федянин В. К. Метод континуального интегрирования в проблеме полярона // Там же.— Вып. 4.— С. 870—934.
45. Прохоров Л. В. Гамильтоновы континуальные интегралы // Там же.— 1982.— 13, вып. 5.— С. 1094—1156.
46. Зельдович Б. Я., Переломов А. М., Попов В. С. Релаксация квантового осциллятора // ЖЭТФ.— 1968.— 55, № 2.— С. 589—605.
47. Далецкий Ю. Л. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями // УМН.— 1962.— 17, № 5.— С. 3—116.
48. Баршинский Ф. Ф., Лисица В. С. Броуновское движение атомов и фотонов и нелинейные эффекты в поглощении света // ЖЭТФ.— 1982.— 82, № 4.— С. 1058—1069.
49. Егоров А. Д., Соболевский П. Н., Янович Л. А. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов.— Минск : Наука и техника, 1985.— 310 с.
50. Brush S. G. Functional integrals and statistical physics // Rev. Mod. Phys.— 1961.— 33.— P. 79—92.

К главе 3

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. I.— М. : Сов. радио, 1969.— 718 с.
2. Тихонов В. Н., Миронов М. А. Марковские процессы.— М. : Сов. радио, 1977.— 488 с.
3. Райс С. Теория флуктуационных шумов // Теория передачи электрических сигналов при наличии помех.— М. : Изд-во иностр. лит., 1959.— С. 88—238.
4. Слепян Д. Флуктуации мощности случайного сигнала // Определение параметров случайных сигналов.— Киев : Гостехиздат УССР, 1962.— С. 123—146.

5. Siebert A. J. F. A systematic approach to a class of problems in the theory of noise and other random phenomena // Trans. IRE, IT-3.— 1957.— March.— P. 38—44.
6. Крылов В. И., Скобля Н. С. Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа.— Минск : Наука и техника, 1968.— 295 с.
7. Лукач Е. Характеристические функции.— М. : Наука, 1979.— 423 с.
8. Хусу А. П., Виттенберг Ю. Р., Пальмов В. А. Шероховатость поверхности.— М. : Наука, 1975.— 343 с.
9. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику.— М. : Наука, 1966.— 404 с.
10. Лампард Д. Г. Распределение вероятностей отфильтрованного произведения коррелированных стационарных процессов с нормальным законом распределения // Определение параметров случайных процессов.— Киев : Гостехиздат УССР, 1962.— С. 101—122.
11. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа.— М. : Физматгиз, 1961.— 524 с.
12. Lax M. Classical Noise. III: Nonlinear Markoff process // Rev. Mod. Phys.— 1966.— 38, N 2.— P. 359—379.
13. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления.— М. : Мир, 1974.— 299 с.
14. Котюк А. Ф., Ольшеский В. В., Цветков Э. И. Методы и аппаратура для анализа случайных процессов.— М. : Энергия, 1967.— 240 с.
15. Фомин Я. А. Теория выбросов случайных процессов.— М. : Связь, 1980.— 216 с.
16. Ширман Я. Д., Манжос В. И. Теория и практика обработки радиолокационной информации на фоне помех.— М. : Радио и связь, 1981.— 415 с.
17. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований.— М. : Сов. радио, 1978.— 376 с.
18. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи.— М. : Сов. радио, 1962.— 782 с.
19. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения.— М. : Наука, 1965.— 463 с.
20. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику.— М. : Наука, 1981.— 640 с.
21. Льюиселл У. Излучение и шумы в квантовой электронике.— М. : Наука, 1972.— 398 с.
22. Евсиков Ю. А., Чапурский В. В. Преобразование случайных процессов в радиотехнических устройствах.— М. : Высш. шк., 1977.— 264 с.
23. Лебедев В. Л. Случайные процессы в электрических и механических системах.— М. : Физматгиз, 1958.— 176 с.
24. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления.— М. : ГИТТЛ, 1957.— 659 с.
25. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах.— М. : Наука, 1968.— 660 с.
26. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.— М. : Сов. радио, 1961.— 558 с.
27. Большаков И. А., Ракошиц В. С. Прикладная теория случайных потоков.— М. : Сов. радио, 1978.— 248 с.
28. Казаков И. Е., Мальчиков С. В. Анализ стохастических систем в пространстве состояний.— М. : Наука, 1983.— 384 с.
29. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций.— М. : Мир, 1976.— 210 с.

К главе 4

1. Глаубер Р. Оптическая когерентность и статистика фотонов // Квантовая оптика и квантовая радиофизика.— М. : Мир, 1966.— С. 91—280.
2. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления.— М. : Мир, 1974.— 299 с.
3. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики.— М. : Мир, 1970.— 427 с.
4. Перина Я. Когерентность света.— М. : Мир, 1976.— 367 с.
5. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику.— М. : Наука, 1981.— 640 с.
6. Гальярди Р. М., Карп И. Оптическая связь.— М. : Связь, 1978.— 424 с.
7. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику.— М. : Наука, 1966.— 404 с.

8. *Bedard G.* Photon counting statistics in Gaussian light // *Phys. Rev.*— 1966.— 151, N 4.— P. 1038—1039.
9. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики.— М. : Наука, 1970.— 855 с.
10. *Hanbury Brown R., Twiss R. Q.* Correlation between photons into coherent beam of light // *Nature*.— 1956.— 177.— P. 27.
- 10a. *Hanbury Brown R., Twiss R. Q.* Interferometry of the intensity fluctuations in light // *Proc. Roy. Soc. A.*— 1957.— 242.— P. 300; — 1957.— 243.— P. 291.
11. *Ареки Ф., Скалли М., Хакен Г., Вайдлих В.* Квантовые флуктуации излучения лазера.— М. : Мир, 1974.— 234 с.
12. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники.— М. : Сов. радио, 1969.— 748 с.
13. *Шергметьев А. Г.* Статистическая теория лазерной связи.— М. : Связь, 1974.— 264 с.
14. *Курикина А. А.* Квантовая оптика и оптическая локация.— М. : Сов. радио, 1973.— 184 с.
15. *Потехин В. А., Татаринов В. И.* Теория когерентности электромагнитного поля.— М. : Связь, 1978.— 207 с.
16. *Кросиньяни Б., Ди Порто П., Бертолотти М.* Статистические свойства рассеянного света.— М. : Наука, 1980.— 206 с.
17. *Воробьев В. И.* Оптическая локация для радионинженеров.— М. : Радио и связь, 1983.— 175 с.
18. *Волохатюк В. А., Кочетков В. М., Красовский Р. Р.* Вопросы оптической локации.— М. : Сов. радио, 1971.— 256 с.
19. *Хелстром К.* Квантовая теория проверки гипотез и оценивания.— М. : Мир, 1979.— 344 с.
20. *О'Нейл Э.* Введение в статистическую оптику.— М. : Мир, 1966.— 254 с.
21. *Сороко Л. М.* Основы голографии и когерентной оптики.— М. : Наука, 1971.— 616 с.
22. *Татарский В. И.* Оператор числа фотонов, прошедших через пространственную точку // *ЖЭТФ*.— 1972.— 63, № 6.— С. 2077—2081.
23. *Тункин В. Г., Чиркин А. С.* Статистические свойства лазерного излучения // *Доп. к кн.: Я. Перина «Когерентность света»*.— М. : Мир, 1974.— С. 324—339.
24. *Росс М.* Лазерные приемники.— М. : Мир, 1969.— 519 с.
25. *Шестов Н. С.* Выделение оптических сигналов на фоне случайных помех.— М. : Сов. радио, 1967.— 347 с.
26. *Климонтович Ю. Л.* Кинетическая теория электромагнитных процессов.— М. : Наука, 1980.— 373 с.
27. *Гольцман Ф. М.* Основы теории интерференционного приема регулярных волн.— М. : Наука, 1964.— 283 с.
28. *Голубев Ю. М.* Шумы в линейных квантовомеханических устройствах // *Оптика и спектроскопия*.— 1970.— 28, № 2.— С. 342—349.
29. *Александров Е. Б., Голубев Ю. М., Ломакин А. В., Носкин В. А.* Спектроскопия флуктуаций интенсивности оптических полей с негауссовой статистикой // *УФН*.— 1983.— 140, № 1.— С. 547—582.
30. *Dioletis D.* N-time joint photon counting distributions for Gaussian light // *J. Phys. A (Gen. Phys.)*.— 1969.— Vol. 2.— P. 229—235.

К главе 5

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 280 с.
2. *Воводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления.— М. : Наука, 1984.— 318 с.
3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц.— М. : Наука, 1969.— 367 с.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М. : Наука, 1975.— Т. 3. 486 с.
5. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы.— М. : Сов. радио, 1977.— 488 с.
6. *Свешников А. А.* Прикладные методы теории случайных функций.— М. : Наука, 1968.— 463 с.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика (Нерелятивистская теория).— М. : Физматгиз, 1963.— 702 с.

8. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии.— М. : Изд-во иностр. лит., 1947.— 168 с.
9. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. I.—М. : Сов. радио, 1969.— 752 с.
10. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника.— М. : Сов. радио, 1966.— 530 с.
11. Хусу А. М., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А. Шероховатость поверхности.— М. : Наука, 1975.— 344 с.
12. Слепян Д. Флуктуации мощности случайного сигнала // Определение параметров случайных процессов. Киев : Гостехиздат УССР, 1962.— С. 123—146.
13. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике.— М. : Мир, 1965.— 407 с.
14. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям.— М. : Мир, 1968.— 382 с.
15. Найфэ А. Введение в методы возмущений.— М. : Мир, 1984.— 535 с.
16. Арино М., Колмогоров А. Н., Синай Я. Г. Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса // Докл. АН СССР.— 1962.— 146, № 4.— С. 747—750.
17. Клячкин В. И., Татарский В. И. Распределение вероятностей для площади, ограниченной гауссовским случайным контуром // Теория вероятностей и ее применение.— 1969.— 14, № 2.— С. 357—363.
18. Клячкин В. И., Татарский В. И. Приближение диффузионного случайного процесса в некоторых нестационарных статистических задачах физики // УФН.— 1973.— 110, № 4.— С. 499—536.
19. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику.— М. : Наука, 1981.— 640 с.
20. Lax M. Classical Noise III: Nonlinear Markoff process // Rev. Mod. Phys.— 1966.— 38, N 2.— P. 359—379.
21. Дерюгин И. А., Курашов В. Н. Статистические свойства многомодовых оптических полей // Оптика и спектроскопия.— 1970.— 29, № 2.— С. 345—353.
22. Перица Я. Когерентность света.— М. : Мир, 1976.— 367 с.
23. Люиселл У. Излучение и шумы в квантовой электронике.— М. : Наука, 1972.— 398 с.
24. Kheifets S. Application of the Green's function method to some nonlinear problems of an electron storage ring // Particle Accelerators.— 1984.— 15, N 2.— P. 67—98.
25. Голубев Ю. М., Фрадкин Э. Е. Влияние комбинационной связи на спектральные и статистические свойства многомодовых флуктуаций в лазере бегущей волны // ЖЭТФ.— 1972.— 63, № 6.— С. 2082—2093.
26. Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания.— М.: Мир, 1979.— 344 с.

К главе 6

1. Тер-Микаелян М. Л. Интерференционное излучение сверхбыстрых электронов // ЖЭТФ.— 1953.— 25, № 3.— С. 296—306.
2. Тер-Микаелян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях.— Ереван : Изд-во АН АрмССР, 1969.— 460 с.
3. Франк И. М. Развитие представлений о природе излучения Вавилова — Черенкова // УФН.— 1984.— 143, № 1.— С. 111—128.
4. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я. Пределы применимости теории тормозного излучения электронов и образования пар при больших энергиях // Докл. АН СССР.— 1953.— 92, № 3.— С. 535—536.
5. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я. Электронно-лавинные процессы при сверхвысоких энергиях // Там же.— № 4.— С. 735—738.
6. Мигдал А. Б. Тормозное излучение и образование пар при больших энергиях в конденсированной среде // ЖЭТФ.— 1957.— 32, № 4.— С. 633—646.
7. Bethe H., Heitler W. On the stopping of fast particles and the creation of position electrons // Proc. Roy. Soc.— 1934.— 146.— P. 83—112.
8. Гарибян Г. М., Ян Ши. Рентгеновское переходное излучение.— Ереван : Изд-во АН АрмССР, 1983.— 320 с.
9. Ахизер А. И., Шульга Н. Ф. Излучение релятивистских частиц в монокристаллах // УФН.— 1982.— 137, № 4.— С. 561—604.

10. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы.— М. : Сов. радио, 1977.— 488 с.
 11. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике.— М. : Мир, 1965.— 407 с.
 12. Фейнман Р., Гибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям.— М. : Мир, 1968.— 382 с.
 - ✓ 13. Гельфанд И. М., Яслом А. М. Интегрирование в функциональных пространствах и его применение к квантовой физике // УМН.— 1956.— 11, № 1.— С. 77—114.
 14. Шутьга Н. Ф., Фолин С. П., Трутень В. Н. О многократном рассеянии релятивистских частиц в кристаллах // ЖТФ.— 1982.— 52, № 11.— С. 2279—2280.
 15. Нагонов Н. Н., Шутьга Н. Ф. Об эффекте Ландау — Померанчука при движении релятивистских частиц в кристаллах // УфЖ.— 1982.— 27, № 5.— С. 789—790.
 16. Gemmel D. S. Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystals // Rev. Mod. Phys.— 1974.— 46, — P. 129—228.
 17. Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов.— М. : Атомиздат, 1973.— 374 с.
 18. Болотозский Б. М. Путь формирования и его роль в излучении движущихся зарядов // Тр. ФИАН.— 1982.— 140.— С. 95—139.
 19. Пахомов В. Е. О тормозном излучении // ЖЭТФ.— 1965.— 49, № 4.— С. 1222—1227.
 20. Барышевский В. Г. Каналирование, излучение и реакции в кристалле при высоких энергиях.— Минск : Изд-во Белорус. ун-та, 1982.— 255 с.
-