О. Г. Смолянов
Е. Т. Шавгулидзе

КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

МГУ

УДК 513.015.7+517.988+519.216

Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 150 с. — ISBN 5—211—00944—4.

Континуальные интегралы (интегралы Фейнмана) занимают одно из центральных мест в математическом аппарате теоретической физики и находят все более широкое применение для решения разнообразных математических задач. В монографии дан обзор различных определений континуальных интегралов и соответствующих обобщенных мер на бесконечномерных пространствах, установлены связи между ними, описаны свойства этих интегралов и классов интегрируемых функционалов. Приведены применения континуальных интегралов при решении эволюционных уравнений (в частности, уравнения Шредингера), при исследовании дифференциальных и псевдодифференциальных операторов и в других задачах.

Для научных работников, специализирующихся по математической физике.

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук *В. Ю. Бенткус*,
доктор физ.-мат. наук *Р. А. Минлос*

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

С $\frac{1603040000-020}{077(02)-90}$ 83—90

ISBN 5—211—00944—4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Надо сегодня сказать лишь то, что уместно сегодня.
Прочее все отложить и сказать в подходящее время.

Гораций

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге рассматриваются математические задачи, возникающие при исследовании одного из центральных объектов современной математической физики бесконечномерных систем, прежде всего квантовой теории, — континуального интеграла (его наиболее важный для приложений и исторически первый вариант носит название интеграла Фейнмана; именно ему и уделяется основное внимание в книге). Значение континуальных интегралов определяется тем, что они позволяют представить в «явном виде» решения различных задач, связанных с уравнениями, содержащими дифференциальные операторы с частными производными, и более общим образом — псевдодифференциальные операторы. В частности, с помощью континуального интеграла выражается ядро разрешающего оператора задачи Коши для уравнения Шредингера как в конечномерном, так и в бесконечномерном случае (соответствующие формулы, известные в конечномерном случае как формулы Фейнмана—Каца, а в бесконечномерном иногда называемые формулами Фейнмана—Каца—Нельсона, давно стали классическими)[1]. Кроме того, интегралы Фейнмана «в фазовом пространстве» естественным образом возникают при представлении бесконечномерных псевдодифференциальных операторов, действующих в пространствах функций и мер на бесконечномерном пространстве, и потому являются аппаратом, необходимым не только для решения основных задач теории, но и для самой их формулировки. Эффективность подхода, использующего континуальные интегралы, определяется сходством их формальных свойств со свойствами обычных интегралов по мере (Лебега), что позволяет, экстраполируя на континуальные интегралы известные приемы интегрального исчисления, получить довольно развитый и гибкий формальный аппарат.

Несмотря на все это, положение, сложившееся в литературе по континуальным интегралам, пожалуй, не имеет аналогов: с одной стороны, огромное количество работ, написанных на так

[1] В ситуации, которую мы называем конечномерной, речь идет об уравнении Шредингера относительно функции конечномерного аргумента (она зависит от «времени» и конечного числа пространственных координат); бесконечномерной мы называем здесь ситуацию, когда неизвестной является функция бесконечномерного аргумента, что соответствует задачам, возникающим в квантовой теории поля; но и в первой — «конечномерной» — ситуации уравнение Шредингера может рассматриваться как уравнение Гамильтона для бесконечномерной гамильтоновой системы.

называемом физическом уровне строгости, довольно большое — особенно за последние 10 лет — число публикаций в математических журналах — и почти полное отсутствие посвященных континуальным интегралам математических монографий. Конечно, основной причиной этого являются реальные математические трудности, возникающие при исследовании континуальных интегралов. Для того чтобы составить о них представление, достаточно заметить, что интеграл Фейнмана[1] в фазовом пространстве определяет преобразование Фурье; это преобразование Фурье переводит функции в меры (определенные на пространстве, сопряженном к тому, на котором определены функции). Если это последнее пространство конечномерно, то после отождествления мер с их плотностями определяемое так преобразование Фурье совпадет с классическим. Таким образом, теория интеграла Фейнмана — это бесконечномерный аналог классического гармонического анализа функций, определенных на конечномерном евклидовом пространстве. Именно математическими трудностями объясняется и то обстоятельство, что в течение почти двадцати лет после появления (в вышедшей в 1948 году работе Фейнмана) концепции континуального интегрирования она воспринималась только как изящный, но недостаточно понятный и в основном бесполезный способ переформулировки известных результатов. Еще в 1965 г. Фейнман и его соавтор по книге «Квантовая механика и интегралы по траекториям» Хибс были вынуждены оправдываться в том, что осмелились посвятить целую монографию этому подходу к квантовой механике. Положение резко изменилось только в 1967 г., когда в работе Л. Д. Фаддеева и В. Н. Попова с помощью континуальных интегралов был получен ранее неизвестный результат — проведено квантование калибровочных полей. Хотя примерно одновременно (и независимо) похожий результат был получен Брайсом де Виттом с помощью традиционной операторной техники, именно простота и естественность подхода Фаддеева—Попова, основанного на использовании континуального интеграла, привела к тому, что работа де Витта прошла незамеченной. Сейчас континуальный интеграл стал стандартным орудием математической физики. При этом в физических работах эти интегралы рассматривают

[1] Понятие интеграла Фейнмана аналогично понятию интеграла по гауссовской мере (и является его непосредственным обобщением). Именно каждой неотрицательно определенной квадратичной форме B на векторном пространстве E соответствует гауссовская мера на двойственном пространстве с преобразованием Фурье $\exp(-B(x))$; совершенно аналогично каждой вещественной квадратичной форме B_1 на E соответствует интеграл Фейнмана, задаваемый «мерой Фейнмана» с преобразованием Фурье $\exp(iB_1(x))$; иногда, отказываясь в этом последнем определении от требования вещественности, считают гауссовскую меру частным случаем «меры Фейнмана». Таким образом, понятие интеграла Фейнмана определяет не единственный объект, а целый класс объектов; этим и объясняется использование термина «интегралы» (а не «интеграл») Фейнмана.

теперь не как способ представления решений квантово-механических уравнений, а как исходную конструкцию, заменяющую эти уравнения (которые при этом вообще не вводятся). Это, разумеется, не освобождает от необходимости придания континуальным интегралам точного математического смысла, а также обоснования законности применения к ним «интегрального исчисления», аналогичного обычному. Но именно такого обоснования и не было до сих пор получено в математической литературе для ситуаций, возникающих в реалистических моделях квантовой теории поля. В настоящее время, по-видимому, существуют только две математические монографии, посвященные интегралу Фейнмана. Одна из них — книга Альбеверио и Хег-Крона [1] — даже в момент выхода (1976 г.) представляла в основном чисто методический (или по крайней мере чисто математический) интерес. В ней рассматриваются интегралы Фейнмана от функций, являющихся преобразованиями Фурье обычных счетно-аддитивных мер на бесконечномерном пространстве; поэтому наиболее интересные для физики задачи оказываются вне рамок теории Альбеверио и Хег-Крона. Следует также заметить, что в книге этих авторов не только очень узок запас интегрируемых функций, но и само интегральное исчисление для интегралов Фейнмана развито явно недостаточно. Еще одна математическая монография, в заглавии которой появляются слова «интеграл Фейнмана», — это книга В. П. Маслова. Противоположная по характеру книге Альбеверио и Хег-Крона, она содержит ряд глубоких оригинальных идей и, в частности, новый подход к исследованию интегралов Фейнмана по пространству траекторий. Хотя все эти идеи реализуются в ней применительно к конечномерной (но зато, вообще говоря, нелинейной) квантовой механике, они имеют смысл и могут быть применены и в бесконечномерном случае, что может представить интерес в связи с квантовой теорией струн. Часть этих идей — подходящим образом развитых — обсуждается ниже.

Основная цель предлагаемой монографии — дать математически корректное описание свойств интегралов Фейнмана в случаях, близких к встречающимся в реалистических моделях квантовой теории поля. При этом мы придерживаемся подхода, провозглашенного И. Г. Петровским в предисловии к одной из его книг: мы выбрали из теории континуальных интегралов лишь несколько вопросов, но стремились изложить их достаточно полно. В книге рассматриваются, в частности, связи между всеми известными в настоящее время определениями интеграла Фейнмана; описываются довольно широкие классы функционалов, интегрируемых по Фейнману (эти классы содержат экспоненты от полиномов), и доказываются — при естественных для физических приложений ограничениях — формулы типа формул Фейнмана—Каца и Фейнмана—Каца—Нельсона о представлении решений уравнений типа Шредингера континуальными интегралами. При этом рассматриваются как уравнения, содержащие конечномерные операторы, так и уравнения с бесконечномерными (дифференциальными и псевдодифференциальными) операторами, а интегралы берутся как по пространству траекторий со значениями в фазовом пространстве, так и по траекториям со значениями в конфигурационном пространстве (собственно, только в последнем случае получаемые формулы естественно связывать не только с Фейнманом, но и с Кацем и Нельсоном; для случая фазового пространства даже прототипы получаемых формул у Каца и Нельсона не встречались).

Значительная часть результатов книги ранее с полными доказательствами не публиковалась. Некоторые из этих результатов обсуждались с В. С. Владимировым, В. П. Масловым, Ю. М. Березанским, А. В. Углановым, А. Ю. Хренниковым и А. М. Чеботаревым. Нам приятно выразить им свою глубокую благодарность.

ГЛАВА I

Предварительные сведения

§ 1. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОДМНОЖЕСТВА ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть E_1 и E_2 — два векторных пространства и b: $E_1 \times E_2 \to R^1$, $(x_1, x_2) \mapsto \langle x_1, x_2 \rangle$ — билинейный функционал. Пусть, далее, Y — непустое подмножество пространства E_2, а X — векторное подпространство пространства E_1. Подмножество A в X назовем Y-цилиндрическим (или просто цилиндрическим, когда ясно, о каком Y идет речь), если существуют такое конечное семейство $(y_1, \ldots, y_n)$ элементов из Y и такое борелевское подмножество[1] B n-мерного евклидова пространства R^n, что

$$A = A_{y_1, \ldots, y_n; B} = A(y_1, \ldots, y_n; B) =$$
$$= \{x \in X, (\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle, \ldots, \langle x, y_n \rangle) \in B\}.$$

При этом будем говорить, что цилиндрическое множество $A(y_1, \ldots, y_n; B)$ задается, или определяется, элементами $y_1, \ldots$ $\ldots, y_n$ и борелевским множеством B (короче, набором $(y_1, \ldots, y_n; B)$). Конечно, одно и то же цилиндрическое множество может быть задано различными такими наборами. При фиксированных $y_1, \ldots, y_n$ семейство $\mathfrak{A}_{y_1, \ldots, y_n}$ всех множеств вида $A(y_1, \ldots$ $\ldots, y_n; B)$ представляет собой σ-алгебру подмножеств X.

Обозначим множество всех Y-цилиндрических подмножеств X через $\mathfrak{A}_Y$; очевидно, $\mathfrak{A}_Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{y_1, \ldots, y_n} \mathfrak{A}_{y_1, \ldots, y_n}$. Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть $E_1 = E_2 = R^n$ и $b(x_1, x_2) = (x_1, x_2)_n$, где $(\cdot, \cdot)_n$ — скалярное произведение в R^n, $X = E_1$, $Y = E_2$ и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в R^n. Тогда $\mathfrak{A}_{e_1, \ldots, e_n}$ — это просто σ-алгебра всех борелевских подмножеств в R^n.

2. Пусть S — множество, $X = E_1$ — линейное пространство (некоторых) числовых функций, определенных на S, $E_2 = E_1^*$ и $Y = \{f_s : s \in S\}$, где для каждого $s \in S$ f_s — линейный функционал на E_1, определяемый так: $f_s(\varphi) = \varphi(s)$. Тогда $A \in \mathfrak{A}_Y$ в том и

[1] Подмножество B топологического пространства T называется борелевским, если оно является элементом σ-алгебры, порожденной всеми замкнутыми подмножествами T.

только в том случае, когда существуют такие n элементов $s_1, \ldots$ $\ldots, s_n$ множества S и такое борелевское подмножество B n-мерного евклидова пространства, что $A=\{\varphi\in E_1,\ (\varphi(s_1), \ldots$ $\ldots, \varphi(s_n))\in B\}$.

3. Чаще всего в дальнейшем будем рассматривать случай, когда одно из пространств E_1, E_2 — локально выпуклое пространство (ЛВП), а другое — ему сопряженное.

Итак, пусть E_1 — ЛВП и $E_2=E_1'$. В такой ситуации, как обычно, положим $b(x_1, x_2)=x_2(x_1)$ ($x_2(x_1)$ — это значение линейного функционала $x_2\in E_2$ на элементе $x_1\in E_1$). При этом множество $A\subset X\subset E_1$ является Y-цилиндрическим ($Y\subset E_2$) в том и только в том случае, если для некоторого $n\in N$ существуют такие n линейных непрерывных функционалов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ на E_1, являющихся элементами Y, и такое борелевское подмножество B n-мерного евклидова пространства, что $A=\{x\in X,$ $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))\in B\}$.

Аналогично, если E_2 — ЛВП, $E_1=E_2'$, мы будем полагать $b(x_1, x_2)=x_1(x_2)$; в этом случае множество $A\subset X\subset E_1$ является Y-цилиндрическим ($Y\subset E_2$) в том и только в том случае, если для некоторого $n\in N$ существуют такие n элементов $y_1, \ldots, y_n$ множества Y и такое борелевское подмножество B n-мерного евклидова пространства, что

$$A=\{\varphi\in X\colon\ (\varphi(y_1), \ \ldots, \ \varphi(y_n))\in B\}.$$

Очевидно, что если $Y_1\subset Y_2$, то всякое Y_1-цилиндрическое множество является и Y_2-цилиндрическим (т. е. $\mathfrak{A}_{Y_2}\supset\mathfrak{A}_{Y_1}$). Хотя вообще обратное неверно, справедливо следующее

Предложение 1.1. *Если $\mathscr{L}(Y)$ — линейное подпространство, порожденное в E_2 множеством Y, то всякое $\mathscr{L}(Y)$-цилиндрическое множество является и Y-цилиндрическим.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{L}(Y)$-цилиндрическое множество задано набором $(y_1, \ldots, y_n;\ B)$. Тогда существуют такие $b_{ij}\in R^1$ и $y_{ij}\in Y$ ($i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, m$), что для каждого $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$

$$y_i=\sum_{j=1}^{m} b_{ij}y_{ij}.$$

Поэтому

$$A=\{x:(\langle x,\ y_1\rangle,\ \ldots,\ \langle x,\ y_n\rangle)\in B\}=\left\{x:\left(\left\langle x,\ \sum_{j=1}^{m} b_{ij}y_{ij}\right\rangle\right)\in B\right\}=$$

$$=\left\{x:\left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\,\langle x,\ y_{ij}\rangle\right)\in B\right\}=\{x:(\langle x,\ y_{ij}\rangle)\in L^{-1}B\},$$

где L — линейное отображение евклидова пространства R^{nm} в евклидово пространство R^n, переводящее элемент (λ_{ij}) этого пространства в элемент $\left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\lambda_{ij}\right)$ пространства R^n. Из предложения 1.1 вытекает, что если $\mathscr{L} \equiv \mathscr{L}(y_1, ..., y_n)$ — векторное подпространство, порожденное в E_2 семейством $(y_1, ..., y_2)$, то $\mathfrak{A}_{\mathscr{L}} = \mathfrak{A}_{y_1, \ldots, y_n}$, так что если два различных семейства $y_1, ..., y_n$ и $z_1, ..., z_k$ элементов из Y порождают в E_2 одно и то же векторное подпространство, то $\mathfrak{A}_{y_1, \ldots, y_n} = \mathfrak{A}_{z_1, \ldots, z_k}$.

Предложение 1.2. *Множество $\mathfrak{A}_Y$ всех Y-цилиндрических подмножеств пространства X является алгеброй множеств.*

Замечание 1. Вообще говоря, $\mathfrak{A}_Y$ не является σ-алгеброй; в частности, σ-алгеброй не является описанная в примере 2 алгебра цилиндрических подмножеств пространства функций на S, если S бесконечно.

Предложение 1.3. *Пусть, как и выше, $\mathscr{L}(Y)$ — линейное подпространство, порожденное в E_2 множеством Y. Тогда $A \in \mathfrak{A}_Y$ в том и только в том случае, если существуют борелевское подмножество B n-мерного евклидова пространства R^n и линейное отображение $L: X \to R^n$, такие, что $A = L^{-1}B$, причем L непрерывно при наделении пространства X топологией $\sigma(X, \mathscr{L}(Y))$.*

Доказательство. Пусть Y-цилиндрическое множество A задано набором $(y_1, ..., y_n; B)$. Тогда $A = L^{-1}B$, где непрерывное линейное отображение $L: (X, \sigma(X, \mathscr{L}(Y))) \to R^n$ определяется так: $L(x) = (\langle x, y_1 \rangle, ..., \langle x, y_n \rangle)$.

Пусть теперь $A = L^{-1}B$, где B — борелевское подмножество R^n, а L — непрерывное линейное отображение $(X, \sigma(X, \mathscr{L}(Y)))$ в R^n. Тогда для каждого $x \in X$ существуют такие числа $\lambda_i(x)$ $(i=1, 2, ..., n)$, что $L(x) = (\lambda_1(x), ..., \lambda_n(x))$; в силу непрерывности L существуют такие элементы y_i $(i=1, 2, ..., n)$ пространства $\mathscr{L}(Y)$, что $\lambda_i(x) = \langle x, y_i \rangle$ для каждого i. Но это означает, что $A \in \mathfrak{A}_{\mathscr{L}(Y)}$; в силу предложения 1.1 отсюда следует, что $A \in \mathfrak{A}_Y$.

Предложение 1.4. *Для того чтобы подмножество $A \subset X$ являлось Y-цилиндрическим, необходимо и достаточно, чтобы существовали $\sigma(X, \mathscr{L}(Y))$-замкнутое подпространство X_0 пространства X конечной соразмерности и борелевское подмножество B фактор-пространства X/X_0, такие, что $A = P_0^{-1}B$, где P_0 — каноническое отображение X на X/X_0. Подпространство X_0 называется образующим (или направляющим) подпространством множества A, а B — его основанием (в фактор-пространстве X/X_0).*

Доказательство. Достаточность вытекает из предыдущего предложения. Докажем необходимость. Пусть A — Y-цилиндрическое подмножество X. Тогда в силу предложения 1.3 $A = L^{-1}(\tilde{B})$, где $\tilde{B}$ — борелевское подмножество R^n, а L — непрерывное отображение $(X, \sigma(X, \mathscr{L}(Y)))$ в R^n. При этом можно считать, что $L(X)=R^n$, заменяя в противном случае R^n на $L(X)$. Положим $X_0=\ker L$. Тогда P_0 — каноническое отображение X на X/X_0, то существует такое взаимно однозначное отображение r: $X/X_0\to R^n$, что $L=r\circ P_0$. Поэтому, если положить $B=r^{-1}\tilde{B}$, будет справедливо равенство $A=P_0{}^{-1}B$.

Таким образом, для алгебры $\mathfrak{A}_Y$ всех Y-цилиндрических подмножеств пространства X существует такое множество $\mathscr{P}$ линейных отображений X в конечномерные линейные пространства, что $A\in\mathfrak{A}_Y$ в том и только в том случае, если $A\in P^{-1}\mathscr{B}^P$ для некоторого $P\in\mathscr{P}$; здесь $\mathscr{B}^P$ — σ-алгебра борелевских подмножеств того конечномерного линейного пространства L_P, в которое P отображает X. Кроме того, при этом выполняется следующее условие (А): каковы бы ни были P_1, $P_2\in\mathscr{P}$, существуют такое отображение $P_3\in\mathscr{P}$ и такие отображения P_{31}: $:L_{P_3}\to L_{F_1}$ и $P_{32}:L_{P_3}\to L_{P_2}$, что оказывается коммутативной следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
 & L_{P_1} \\
X \arrow[ur, "P_1"] \arrow[r, "P_3"] \arrow[dr, "P_2"'] & L_{P_3} \arrow[u, "P_{31}"'] \arrow[d, "P_{32}"] \\
 & L_{P_2}
\end{tikzcd}$$

Как это вытекает из предложения 4.1, примером такого множества $\mathscr{P}$ является совокупность канонических отображений пространства X на всевозможные его фактор-пространства по по замкнутым в топологии $\sigma(X, \mathscr{L}(Y))$ подпространствам конечной коразмерности (в этом случае для всех $P\in\mathscr{P}$, $P(X)=L_P$). Другим примером является множество

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{P(n;\ y_1,\ \ldots,\ x_n): y_1,\ \ldots,\ y_n\in Y\},$$

где для каждых $n\in N$ и $y_1,\ldots,y_n\in Y$ $P(n;\ y_1,\ldots,y_n)$ — отображение X в R^n, переводящее элемент $x\in X$ в вектор $(\langle x,\ y_1\rangle,\ldots$ $\ldots,\langle x,\ y_n\rangle)\in R^n$; отметим, что здесь $L_{P(n;y_1,\ldots,y_n)}=R^n$, причем, вообще говоря, $P(n;\ y_1,\ldots,y_n)(X)\neq R^n$.

Обратно, пусть задано некоторое множество $\mathscr{P}$ линейных отображений линейного пространства X в конечномерные линейные пространства, причем выполнено приведенное выше условие (А). Тогда (мы пользуемся введенными выше обозначениями) множество $\mathfrak{A}^{\mathscr{P}}=\{A: A\subset X;\ \exists\, P\in\mathscr{P},\ A\in P^{-1}\mathscr{B}^P\}$ представляет собой алгебру подмножеств X, причем $\mathfrak{A}^{\mathscr{P}}=\mathfrak{A}_Y$, где Y — множество всех линейных непрерывных функционалов на пространстве X, наделенном самой слабой среди топологий, для которых непрерывны все отображения из $\mathscr{P}$. Заметим, что $\mathfrak{A}^{\mathscr{P}}=\bigcup_{P\in\mathscr{P}}\mathfrak{A}^P$, где $\mathfrak{A}^P=P^{-1}\mathscr{B}^P$ для каждого P.

Отметим еще, что отображения p_{ij}, о которых говорится в условии (A), не определяются, вообще говоря, однозначно; это, однако, будет так, если все отображения из $\mathscr{P}$ сюръективны (для всякого множества $\mathscr{P}$ линейных отображений X в конечномерные линейные пространства, удовлетворяющего условию (A), существует удовлетворяющее этому же условию множество Q сюръективных линейных отображений X в конечномерные линейные пространства, такое, что $\mathfrak{A}^{\mathscr{P}}=\mathfrak{A}^{Q}$).

Предположим теперь, что для всякого $x\in X$ существует такой элемент $y\in Y$, что $\langle x, y\rangle\neq 0$ (при этом порожденное Y-замкнутое линейное подпространство пространства $(E_2, \sigma(E_2, X))$ совпадает с E_2).

Предложение 1.5. *Для того чтобы множество $A\subset X$ являлось Y-цилиндрическим, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечномерное линейное подпространство l пространства X, непрерывный в топологии $\sigma(X, \mathscr{L}(Y))$ проектор P в X, отображающий X на l, и борелевское подмножество B пространства l, такие, что $A=P^{-1}B$.*

Доказательство. Достаточность вытекает из предложения 1.3, поскольку в силу отделимости пространства $(X, \sigma(X, \mathscr{L}(Y)))$ (являющейся следствием тотальности множества Y) всякое его конечномерное подпространство также отделимо и потому изоморфно евклидову пространству соответствующей размерности.

Необходимость следует из предложения 1.4. В самом деле, пусть X_0 — замкнутое линейное подпространство в $X_\sigma\equiv(X, \sigma(X, \mathscr{L}(Y)))$, имеющее конечную коразмерность, P_0 — каноническое отображение X_σ на X_σ/X_0, B_A — борелевское подмножество в X_σ/X_0 и $A=P_0{}^{-1}B_A$. Пусть, далее, X_1 — линейное подпространство пространства X, алгебраически дополнительное к X_0. Тогда сужение P_0 на X_1 (обозначим это сужение через P_1) представляет собой взаимно однозначное непрерывное отображение, обладающее в силу отделимости X_σ/X_0 непрерывным обратным; таким образом, P_1 — изоморфизм X_1 на X_σ/X_0. Положим теперь $P=P_1{}^{-1}P_0$ и $B=P_1{}^{-1}B_A$. Тогда P — непрерывный проектор в X_σ, отображающий X_σ на X_1, B — борелевское подмножество в X_1 и $A=P^{-1}B$.

Ниже будем использовать следующие обозначения. Если $\mathfrak{A}$ — семейство подмножеств некоторого множества, то символом $\sigma(\mathfrak{A})$ обозначаем σ-алгебру подмножеств этого множества, порожденную семейством $\mathfrak{A}$; вместо символа $\sigma(\mathfrak{A}_Y)$ обычно используем символ σ_Y.

Предложение 1.6. *Пусть $Y_1\subset Y$, причем каждый элемент из Y является пределом некоторой последовательности элементов из Y_1 в пространстве $\mathscr{L}(Y)$, наделенном топологией $\sigma(\mathscr{L}(Y), X)$. Тогда $\sigma_Y=\sigma_{Y_1}$.*

Доказательство. Поскольку $\sigma_Y=\sigma(\mathfrak{A}_Y)$, достаточно установить, что $\mathfrak{A}_Y\subset\sigma_{Y_1}$; для этого в свою очередь достаточно показать, что каковы бы ни были $a\in R^1$ и $y\subset Y$,

$$A(y, (-\infty, a)) = \{x : \langle x, y\rangle < a\} \in \sigma_{Y_1}$$

(так как семейство всевозможных множеств такого вида порождает алгебру $\mathfrak{A}_Y$). Пусть для каждого $n \in N$ $y_n \in Y_1$ и $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Тогда, как легко проверить,

$$A(y, (-\infty, a)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x : \langle x, y_n\rangle < a - \frac{1}{k}\right\},$$

так что $A \in \sigma_{Y_1}$.

Далее будем сразу определять векторное пространство X и множество Y, не описывая предварительно пространств E_1 и E_2; в том случае, когда Y является частью X^*, предполагаем, что $\langle x, y\rangle = y(x)$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Если Z_1 и Z_2 — векторные пространства, то запись $Z_1 \Subset Z_2$ означает, что Z_1 — подпространство Z_2.

ЛВП X назовем квазигильбертовым, если на нем существует непрерывная норма, порождаемая скалярным произведением $X \times X \to R^1$, $(x_1, x_2) \mapsto \langle x_1, x_2\rangle_H$.

Пусть Y — квазигильбертово ЛВП, $X = Y'$, p — непрерывная гильбертова норма на Y, H — гильбертово пространство, получаемое пополнением Y по этой норме, φ — каноническое вложение Y в H, φ^* — сопряженное вложение пространства H' в X. В дальнейшем не будем различать элементы Y (соответственно H') и их образы в H (соответственно в X). Отождествив еще обычным образом H и H', получим тройку пространств $X \Supset H \Supset Y$, где Y всюду плотно в гильбертовом пространстве H и H всюду плотно в пространстве $(X, \sigma(X, Y))$ (последнее вытекает из инъективности отображения φ). Кроме того, если $h \in H$, $y \in Y$, то $\langle h, y\rangle_H = h(y)$ ($h(y)$ — значение h как элемента из X на элементе $y \in Y$).

Заметим теперь, что если P — конечномерный ортогональный проектор в H, область значений $\mathscr{L}_P$ которого содержится в Y, то P непрерывен в топологии, индуцированной в H топологией $\sigma(X, Y)$.

Это вытекает из того, что если $(y_1, \ldots, y_n)$ — ортогонормированный базис в $\mathscr{L}_P$, то для каждого элемента $h \in H$

$$Ph = \sum_{i=1}^{n} \langle Ph, y_i\rangle_H y_i = \sum_{i=1}^{n} \langle h, P_{y_i}\rangle_H y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle h, y_i\rangle_H y_i = \sum_{i=1}^{n} h(y_i) y_i,$$

причем для каждого $y \in Y$ отображение $h \mapsto h(y)$, $H \to R^1$ непрерывно в топологии $\sigma(X, Y)$. Поэтому он может быть продолжен по непрерывности на все X; это продолжение снова обозначим тем же символом P. Пусть Q — множество всех отображений $X \to Y$, каждое из которых можно получить таким способом;

элементы из Q по-прежнему называем конечномерными ортогональными проекторами.

Предложение 1.7. *Для того чтобы множество $A \subset X$ было Y-цилиндрическим, необходимо и достаточно, чтобы нашелся такой конечномерный ортогональный проектор $P \in Q$, что $A = P^{-1}B$, где B — некоторое борелевское множество из области значений $\mathscr{L}_P$ этого проектора.*

Доказательство. Достаточность вытекает из предложения 1.5, поскольку каждый проектор из множества Q непрерывен как отображение пространства $(X, \sigma(X, Y))$ в себя. Докажем необходимость. Пусть A—Y-цилиндрическое подмножество X, X_0 — его образующее подпространство и B — основание A в X/X_0. Пусть, далее, $X_0^{\perp}$ — ортогональное дополнение замкнутого подпространства $H \cap X_0$ пространства H и $X_0{}^0$ — поляра X_0 в Y; покажем сейчас, что $X_0^0 = X_0^{\perp}$.

Прежде всего, так как $\langle h, y\rangle_H = h(y) = 0$, если

$$h \in H \cap X_0 \text{ и } y \in X_0^0 (\subset Y), \text{ то}$$

$$X_0^0 \subset (H \cap X_0)^{\perp}. \tag{1.1}$$

Далее, поскольку $X_0 \cap (H \cap X_0)^{\perp} = (H \cap X_0) \cap (H \cap X_0)^{\perp} = \{0\}$, подпространство $(H \cap X_0)^{\perp}$ пространства X содержится в (некотором) подпространстве этого пространства, алгебраически дополнительном к подпространству X_0, и, следовательно,

$$\dim (H \cap X_0)^{\perp} \leqslant \dim X/X_0. \tag{1.2}$$

Но $\dim X_0{}^0 = \dim X/X_0$ (поскольку $(X_0{}^0)'$ изоморфно X/X_0); отсюда и из соотношений (1.1) и (1.3) вытекает, что

$$\dim X_0^0 = \dim (H \cap X_0)^{\perp} = \dim X/X_0; \tag{1.3}$$

поскольку $\dim X/X_0 < \infty$, из (1.1) и (1.3) следует, что $X_0{}^0 = (H \cap X_0)^{\perp}$.

Пусть теперь, как и в доказательстве предложения 1.5, P_0— каноническое отображение X на X/X_0 и B_A — борелевское подмножество в X/X_0, такие, что $A = P_0{}^{-1}B$; пусть еще $\widetilde{P}_0$ — изоморфизм X/X_0 на $X_0{}^0$, обратный к суже́нию P_0 на $X_0{}^0$, $P = \widetilde{P}_0 P_0$ и $B = P_0 B_A$. Тогда $A = P^{-1}B$, причем $P \in Q$, поскольку сужение P на H является проектором H на $(H \cap X_0)^{\perp}$. Предложение 1.7 доказано.

§ 2. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ МЕРЫ

Пусть E — векторное пространство (над полем вещественных чисел), G — подмножество алгебраического сопряженного E^* к E, $\mathfrak{A}_G$ — алгебра G-цилиндрических подмножеств E, T — ЛВП (над полем вещественных чисел).

Определение 1. Цилиндрической мерой на $(E, \mathfrak{A}_G)$ (короче, G-цилиндрической мерой) со значениями в T называется функция $\nu : \mathfrak{A}_G \to T$, обладающая следующими свойствами: (1) множество ее значений ограничено в T; (2) каковы бы ни были натуральное n и элементы $g_1, \ldots, g_n \in G$, сужение ν на σ-алгебру $\mathfrak{A}_{g_1, \ldots, g_n}$ счетно-аддитивно.

Отметим, что цилиндрическая мера на $(E, \mathfrak{A})_G$ является мерой (т. е. аддитивна на $\mathfrak{A}_G$).

Функция f на E со значениями в R^1 или C называется G-цилиндрической, если справедливо равенство $f(x) = \varphi(g_1(x), \ldots \ldots, g_n(x))$, где $n \in N$, φ — некоторая функция на R^n, а $g_1, \ldots, g_n \in \in G$. Если φ — борелевская функция на R^n (т. е. если она измерима как отображение $(R^n, \mathscr{B}_n)$ в $(R^1, \mathscr{B}_1)$), то цилиндрическая функция f измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_{g_1, \ldots, g_n}$ (являющейся, напомним, подалгеброй алгебры всех G-цилиндрических множеств в E), т. е. измерима как отображение $(E, \mathfrak{A}_{g_1, \ldots, g_n})$ в $(R^1, \mathscr{B}_1)$; такую цилиндрическую функцию называем борелевской. Так как сужение G-цилиндрической меры на каждую σ-алгебру $\mathfrak{A}_{g_1, \ldots, g_n}$ счетно-аддитивно, то для борелевских G-цилиндрических функций имеет смысл понятие интеграла Лебега относительно числовой G-цилиндрической меры. Интегралы от (числовых) функций по G-цилиндрическим мерам, принимающим значения в ЛВП, не совпадающем с R^1, будут встречаться очень редко — только от ограниченных функций и в предположении, что T секвенциально полно; в этом случае они определяются как пределы соответствующих интегральных сумм; существование таких пределов вытекает из секвенциальной полноты T.

Всюду далее, если не оговорено противное, предполагается, что G — векторное пространство.

Пусть еще $\tilde{T}$ — комплексификация пространства T, $\mathfrak{A}$ — алгебра подмножеств пространства E, содержащая алгебру $\mathfrak{A}_G$, причем ЛВП T секвенциально полно, ν — мера (т. е. аддитивная функция множества) на $\mathfrak{A}$ со значениями в T, причем сужение ν на $\mathfrak{A}_G$ представляет собой цилиндрическую меру на $(E, \mathfrak{A}_G)$ со значениями в T.

Определение 2. Преобразованием Фурье меры ν называется функция $\tilde{\nu} : G \to \tilde{T}$, определяемая равенством

$$\tilde{\nu}(g) = \int_E e^{ig(x)} \nu(dx)$$

(интеграл справа — это интеграл от ограниченной борелевской G-цилиндрической функции по мере со значениями в T).

Если E — гильбертово пространство и I — каноническое изоморфное отображеиие E на E', то функция $x \mapsto \tilde{\nu}_H(x) \equiv \nu(Ix)$ называется гильбертовым преобразованием Фурье меры ν. Таким образом, если E — гильбертово пространство, то гильбертово преобразование Фурье $\tilde{\nu}_H$ этой меры — функция на пространстве E, принимающая значения в T и определяемая равенством $\tilde{\nu}_H(x)=\int\limits_E e^{i(x,\,z)}\nu(dz)$ ($(\cdot,\ \cdot)$ — скалярное произведение в E).

Ниже будем пользоваться правилом замены переменных в интеграле; согласно этому правилу, если X — множество, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра его подмножеств, μ — счетно-аддитивная мера на $\mathfrak{A}$, F — измеримое отображение $(X,\ \mathfrak{A}_X)$ в измеримое пространство $(Z,\ \mathfrak{A}_Z)$ (Z — множество, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра его подмножеств) и μF^{-1} — образ μ при этом отображении, то

$$\int\limits_Z f(z)\,\mu F^{-1}(dz)=\int\limits_X f(F(x))\,\mu(dx)$$

для всякой измеримой функции f на $(Z,\ \mathfrak{A}_Z)$; это равенство означает, что стоящие в его левой и правой частях интегралы существуют или нет одновременно и в том случае, если существуют, равны.

Предложение 2.1. *Если μ и ν — две цилиндрические меры на $(E,\ \mathfrak{A}_G)$ со значениями в ЛВП T, причем $\tilde{\mu}(g)=\tilde{\nu}(g)$ для всех $g\in G$, то $\mu=\nu$ (т. е. цилиндрическая мера однозначно определяется по ее преобразованию Фурье).*

Доказательство. В силу теоремы Банаха—Хана достаточно доказать теорему для случая, когда $T=R^1$. Действительно, пусть это сделано и μ и ν — две цилиндрические меры со значениями в ЛВП T, обладающие совпадающими преобразованиями Фурье; тогда, каков бы ни был линейный непрерывный функционал f на T, $f(\tilde{\mu}(g))=f(\tilde{\nu}(g))$ для всех $g\in G$. Но функции $g\mapsto f(\tilde{\mu}(g))$ и $g\mapsto f(\tilde{\nu}(g))$ являются преобразованиями Фурье цилиндрических числовых мер $\mathfrak{A}_G\ni A\mapsto f(\mu(A))$ и $\mathfrak{A}_G\ni A\mapsto f(\nu(A))$ на $(E,\ \mathfrak{A}_G)$; поэтому эти меры должны совпадать (согласно принятому предположению). Это значит, что если $A\in\mathfrak{A}_G$, то $f(\mu(A))=f(\nu(A))$. Так как последнее равенство верно для каждого $f\in T'$, то в силу теоремы Банаха—Хана $\mu(A)=\nu(A)$. Таким образом, для каждого $A\in\mathfrak{A}_G$, $\mu(A)=\nu(A)$, т. е. $\mu=\nu$. Итак, пусть μ и ν — две числовые (т. е. принимающие значения в R^1) цилиндрические меры на $(E,\ \mathfrak{A}_G)$, причем $\tilde{\mu}(g)=\tilde{\nu}(g)$ для всех $g\in G$. Предположим сначала, что $E=R^n$, $G=R^n$ (при этом алгебра $\mathfrak{A}_G$ совпадает с σ-алгеброй всех борелевских подмножеств R^n), а ν, μ счетно-аддитивны на $\mathfrak{A}_G$. Для того чтобы доказать, что $\mu(A)=\nu(A)$ для всех $A\in\mathfrak{A}_G$, достаточно доказать, что $\mu(V)=\nu(V)$ для каждого открытого гиперпараллелепипеда V, т. е. множества вида $\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k,\ b_k)$, $a_k,\ b_k\in R^1$. Пусть (φ_n) — монотонно неубывающая последовательность непрерывных функций на R^n, сходящаяся к индикатору γ_V множества V (числовая функция φ на множестве X называется индикатором его подмножества X_1, если $\varphi(x)=1$ при $x\in X_1$ и $\varphi(x)=0$ при $x\notin X_1$); такая последовательность, очевидно, существует. Если для каждого n $\int \varphi_n\, d\nu = \int \varphi_n\, d\mu$, то по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (или же по теореме Беппо—Леви)

$$\mu(\nu) = \int \gamma_V\, d\mu = \lim \int \varphi_n\, d\mu = \lim \int \varphi_n\, d\nu = \int \gamma_V\, dV = \nu(V).$$

Таким образом, для доказательства того, что $\mu=\nu$, в рассматриваемой ситуации остается доказать, что $\int \varphi_n\, d\nu = \int \varphi_n\, d\mu$ для каждого $n \in N$. Докажем, что $\int \psi\, d\nu = \int \psi\, d\mu$ для каждой финитной непрерывной функции на R^n (функция называется финитной, если она обращается в нуль вне некоторого ограниченного множества; очевидно, все функции последовательности (φ_n) финитны). Пусть $\psi: R^n \to R^1$ — финитная непрерывная функция и V — гиперпараллелепипед, вне которого она обращается в нуль. Пусть, далее, (ψ_n) — последовательность тригонометрических многочленов, сходящаяся к ψ равномерно на каждом компактном множестве. Тогда

$$\int\limits_{R^n} \psi\, d\mu = \lim \int\limits_{R^n} \psi_n\, d\mu = \lim \int\limits_{R^n} \psi_n\, d\nu = \int\limits_{R^n} \psi\, d\nu$$

(третье равенство справедливо потому, что $\tilde{\mu}=\tilde{\nu}$). Таким образом, для случая, когда $E=R^n$, $G=R^n$, предложение доказано. Общий случай сводится к этому частному. Действительно, если $A \in \mathfrak{A}_G$, то существуют такие замкнутое в топологии $\sigma(E, G)$ векторное подпространство E_1 пространства E, обладающее конечной коразмерностью, и борелевское подмножество B (конечномерного отделимого) фактор-пространства E/E_1, что $A = \Phi^{-1}B$, где Φ — каноническое отображение $E \to E/E_1$. Поэтому $\nu=\mu$, если совпадают образы этих мер относительно канонического отображения Φ $(\nu A = (\nu\Phi^{-1})(B) = (\mu\Phi^{-1})(B) = \mu B)$. Но эти образы $\nu\Phi^{-1}$ и $\mu\Phi^{-1}$ являются мерами на конечномерном (отделимом) пространстве E/E_1, причем если g — линейный функционал на E/E (так как последнее пространство конечномерно, он обязательно непрерывен), то

$$\widetilde{\nu\Phi^{-1}}(g) = \int\limits_{E/E_1} e^{ig(z)} (\nu\Phi^{-1})(dz) = \int\limits_{E} e^{ig(\Phi(x))} \nu(dx) =$$

$$= \int\limits_{E} e^{i(\Phi^* g)(x)} \nu(dx) = \tilde{\nu}(\Phi^* g) = \tilde{\mu}(\Phi^* g) = \widetilde{\mu\Phi^{-1}}(g)$$

(мы воспользовались формулой замены переменной).

Таким образом, преобразования Фурье мер $\nu\Phi^{-1}$ и $\mu\Phi^{-1}$ совпадают; следовательно (поскольку пространство E/E_1 конечномерно), совпадают и сами эти меры; таким образом, совпадение цилиндрических мер μ и ν доказано.

Пример 1. Пусть $E=R^n$. Мера ν на σ-алгебре борелевских подмножеств называется (невырожденной) гауссовской, если существуют такие симметричный определенный оператор B в R^n (называемый корреляционным оператором меры ν) и элемент $a\in R^n$, называемый математическим ожиданием (или средним) меры ν, что, каково бы ни было $A\in\mathscr{B}_n$,

$$\nu(A)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det B)^{1/2}}\int\limits_A e^{\frac{-(B^{-1}x-a,x-a)}{2}}dx$$

($\det B$ — определитель матрицы оператора B в стандартном базисе). Преобразование Фурье (гильбертово) этой меры определяется равенством

$$\tilde{\nu}(z)=e^{\frac{-(Bz,z)}{2}+i(a,z)}.$$

Действительно,

$$\int e^{i(z,x)}\nu(dx)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det B)^{1/2}}\int e^{i(z,x)-\frac{(B^{-1}(x-a),x-a)}{2}}dx=$$

$$=e^{i(z,x)}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det B)^{1/2}}\int\limits_{R^n} e^{i(z,x)-\frac{(B^{-1}x,x)}{2}}dx,$$

если S — такое ортогональное преобразование R^n, что оператор $B_1=S^{-1}B^{-1}S$ является диагональным (ниже мы обозначаем собственные значения оператора B с учетом их кратностей через b_k; из положительной определенности B вытекает, что $b_k>0$ для всех k; числа b_k^{-1} образуют последовательность собственных значений оператора B^{-1}), то (здесь и далее $x=(x_k)=(z_k')=z'=$ $=S^{-1}z$)

$$\int\limits_{R^n} e^{i(z,x)-\frac{(B^{-1}x,x)}{2}}dx=\int\limits_{R^n} e^{i(z,Sx^2)-\frac{(S^{-1}B^{-1}Sx_2^2,x_1^2)}{2}}dx_2=$$

$$=\int\limits_{R^n} e^{i\left(\sum z_k'x_k\right)-\frac{\sum\limits_{k=1}^n b_k^{-1}x_k^2}{2}}dx=\prod_{k=1}^n\int\limits_{R^1} e^{i(z_k',x)-\frac{b_k^{-1}x^2}{2}}dx=$$

$$=(2\pi)^{n/2}\prod_{k=1}^n b_k e^{\frac{-b_k(z_k')^2}{2}}=(2\pi)^{n/2}(\det B)^{1/2}e^{\frac{-\sum\limits_{k=1}^n b_k(z_k')^2}{2}}=$$

$$=(2\pi)^{n/2}(\det B)^{1/2}e^{\frac{-(B_1z',z')}{2}}=(2\pi)^{n/2}(\det B)^{1/2}e^{\frac{-Bz,z}{2}}.$$

Подставляя полученное выражение в правую часть предыдущей цепочки равенств, получаем $\tilde{\nu}$.

Если E_1 и E_2 — два вещественных векторных пространства, G_1 и G_2 — векторные подпространства пространств E_1^* и E_2^*, f — линейное отображение E_1 в E_2, непрерывное при наделении пространств E_1 и E_2 топологиями $\sigma(E_1, G_1)$ и $\sigma(E_2, G_2)$, то прообразом (относительно этого отображения) каждого G_2-цилиндрического подмножества пространства E_2 является G_1-цилиндрическое подмножество пространства E_1. Действительно, если $A=\{x\in E_2, (g_k(x))\in B\}\in\mathfrak{A}_{G_2}$ $(B\in B_n$, B_n—σ-алгебра борелевских подмножеств в R^n), то $f^{-1}A=\{x\in \in E_1:((f^*g_k)(x))\in B\}\in\mathfrak{A}_{G_1}$. Поэтому для каждой G_1-цилиндрической меры на E_1 можно определить ее образ при отображении f — G_2-цилиндрическую меру νf^{-1} на E_2, задаваемую равенством $(\nu f^{-1})(A)=\nu(f^{-1}(A))$.

Предложение 2.2. *При перечисленных предположениях справедливо равенство*

$$\widetilde{\nu f^{-1}}(g)=\tilde{\nu}(f^*g)\quad (g\in G_2).$$

Доказательство.

$$\widetilde{\nu f^{-1}}(g)=\int\limits_{E_2} e^{ig(z)}(\nu f^{-1})(dz)=\int\limits_{E_1} e^{ig(f(x))}\nu(dx)=$$
$$=\int\limits_{E_1} e^{i(f^*g)(x)}\nu(dx)=\tilde{\nu}(f^*g)$$

(частный случай этого предложения фактически использовался при доказательстве предложения 2.2).

Пример 2. Из результата примера 1 и предложения 2.2 вытекает, что гауссовскую меру на R^n можно определить и иначе. Именно мера (на σ-алгебре $\mathscr{B}_n$ борелевских подмножеств пространства R^n) является (невырожденной) гауссовской в том и только в том случае, если ее преобразование Фурье $\tilde{\nu}$ определяется равенством $\tilde{\nu}(x)=e^{i(a,x)-\frac{(Bx,x)}{2}}$, где B — положительно определенный оператор в R^n, называемый корреляционным, а a — вектор из R^n, называемый средним значением меры ν. На этом пути определение гауссовской меры можно несколько обобщить так, чтобы не исключать случай, обычно называемый вырожденным. Именно, мера ν на $\mathscr{B}_n$ называется гауссовской, если ее преобразование Фурье определяется равенством

$$\tilde{\nu}(x)=e^{i(a,x)-\frac{(Bx,x)}{2}},$$

где B — неотрицательно определенный линейный оператор в R^n, а a — элемент из R^n (в этом примере мы отождествили R^n

и его сопряженное, так что фактически речь все время шла о гильбертовом преобразовании Фурье; если бы отождествления R^n и R^{n*} произведено не было, следовало бы считать B оператором в R^{n*}).

Пример 3. Если ν — гауссовская мера на σ-алгебре борелевских подмножеств R^n и f — линейное отображение R^n в R^k, то борелевская мера на R^k, являющаяся образом меры ν при этом отображении, также гауссовская; это вытекает из предложения 2.2 и примера 2.

В частности, если ν — гауссовская мера в R^n с корреляционным оператором B, имеющим ненулевое ядро $\ker B$, и G — ортогональное дополнение в R^n этого ядра, то ν является образом — относительно канонического вложения F: $G \to R^n$ — своего сужения на G; иначе это можно выразить, сказав, что ν сосредоточены на G.

Для простоты считаем, что математическое ожидание меры ν равно нулю. Пусть при этом ν_G — (гауссовская) мера на G с корреляционным оператором $B_{G'}$, являющимся сужением B на G (так как $B^* = B$, то $B(G) = G$). Таким образом,

$$\tilde{\nu}_G = e^{-\frac{(B_G x, x)}{2}} \text{ и } (\widetilde{\nu_G F^{-1}}) = \exp\left(\frac{-B_G F_z^*, F_z^*}{2}\right) = \exp\left(\frac{-(Bz, z)}{2}\right),$$

так как $FB_G F^* = B$. Поэтому, в силу предложения 2.1 $(\nu_G F^{-1}) = \nu$.

Пример 4. Пусть теперь, как и в начале параграфа, E — произвольное векторное пространство над полем вещественных чисел, G — векторное подпространство его алгебраического сопряженного. Цилиндрическая мера на $(E, \mathfrak{A}_G)$ называется гауссовской, если существуют такие неотрицательно определенный симметричный билинейный функционал b на $G \times G$ и линейный функционал a на G, что $\tilde{\nu}(g) = \exp\left(ia(g) - \frac{1}{2} b(g, g)\right)$; при этом функционал b называется корреляционным функционалом меры ν, а a — средним значением (или математическим ожиданием) этой меры. Как и для конечномерного случая, образом G_1-цилиндрической гауссовской меры в пространстве E_1 (мы пользуемся сейчас обозначениями и предположениями, приведенными перед предложением 2.2) при линейном отображении $f: E_1 \to E_2$ (непрерывном относительно топологий $\sigma(E_1, G_1)$ и $\sigma(E_2, G_2)$ пространств E_1 и E_2) является G_2-цилиндрическая гауссовская мера в E_2. Оказывается, верно следующее усиление формального обращения последнего утверждения: для того чтобы G-цилиндрическая мера ν на E была гауссовской, необходимо и достаточно, чтобы, каков бы ни был линейный функционал g на E, являющийся элементом пространства G, образ νg^{-1} меры ν относительно отображения $g: E \to R^1$ представлял бы собой гауссовскую меру на R^1. То, что для гауссовской G-цилиндрической меры это действительно так, вытекает из предложения 2.2. Докажем обратное.

Покажем сначала, что если все меры $\nu f^{-1}(f\in G)$ — гауссовские, то, каковы бы ни были $f_1,\ f_2\in G$, функция $x\mapsto f_1(x)\cdot f_2(x)$ интегрируема. В силу неравенства Коши—Буняковского

$$\int_E |f_1(x)|\,|f_2(x)|\,d\nu \leqslant \Big(\int_E (f_1(x))^2\,d\nu \int_E (f_2(x))^2\,d\nu\Big)^{1/2}.$$

Но для $k=1,\ 2$

$$\int_E (f_k(x))^2\,d\nu = \int t^2\,\nu f_k^{-1}(dt) < \infty,$$

так как νf_k^{-1} — гауссовская мера на R^1 (вырожденный случай не исключается; вырожденная гауссовская мера на R^1 — это просто нормированная мера, сосредоточенная в точке).

Определим линейный функционал a на G равенством:

$$a(g) = \int g(x)\,\nu(dx) = \int t\nu g^{-1}(dt)$$

(существование (и конечность) $a(g)$ вытекают из гауссовости меры νg^{-1}).

Определим далее билинейный функционал b на $G\times G$ равенством

$$b(g_1,\ g_2) = \int_E (g_1(x) - a(g_1))\,(g_2(x) - a(g_2)\,\nu(dx).$$

Конечно, он является неотрицательно определенным; действительно,

$$b(g,\ g) = \int_E (g(x) - a(g))^2\,\nu(dg) = \int_{R^1} \Big(t - \int t\nu g^{-1}(dt)\Big)^2\,\nu g^{-1}(dt) \geqslant 0$$

(заметим, что мера ν заранее не предполагалась неотрицательной). Тогда гауссовская G-цилиндрическая мера на E с корреляционным функционалом b и математическим ожиданием a совпадает с исходной мерой. Чтобы в этом убедиться, достаточно найти преобразование Фурье исходной меры. Проделаем соответствующую выкладку

$$\int_E e^{ig(x)}\nu(dx) = \int_{R^1} e^{it}\nu g^{-1}(dt) = e^{-\frac{b(g,g)}{2} + ia(g)}.$$

Цилиндрические меры могут быть или не быть счетно-аддитивными на своей области определения, т. е. на алгебре цилиндрических множеств (начиная с этого места, мы будем часто опускать явное указание на семейство функционалов, задающее цилиндрические множества). Оказывается, однако, что векторное пространство, на алгебре цилиндрических подмножеств которого задана цилиндрическая мера, можно расширить — с «сохранением алгебры цилиндрических множеств» — таким образом, чтобы мера стала счетно-аддитивной, причем это расширение можно выбрать общим для всех цилиндрических мер. Точный смысл сказанному придается определением и предложениями, которые сейчас будут сформулированы. Вплоть до примера 5 не предполагается, что G — векторное пространство.

Определение 2.3. Измеримым векторным пространством назовем пару $(E, \mathfrak{A}_G)$, где E — векторное пространство, G — множество линейных функционалов на E, разделяющее точки из E, $\mathfrak{A}_G$ — алгебра G-цилиндрических подмножеств E.

Определение 2.4. Говорим, что измеримое векторное пространство $(E_2, \mathfrak{A}_{G_2})$ является расширением измеримого векторного пространства $(E_1, \mathfrak{A}_{G_1})$, если существует такое инъективное отображение $f: E_1 \to E_2$, что отображение $\mathfrak{A}_{G_2} \ni A \mapsto f^{-1}(A)$ является изоморфизмом $\mathfrak{A}_{G_2}$ на $\mathfrak{A}_{G_1}$. При этом f называем отображением, задающим рассматриваемое расширение.

Предложение 2.3. *Для всякого измеримого векторного пространства $(E, \mathfrak{A}_G)$ существует такое его расширение $(\bar{E}, \mathfrak{A}_{\bar{G}})$, что, какова бы ни была числовая G-цилиндрическая мера ν на E, ее образ νf_1 относительно отображения f, задающего рассматриваемое расширение $f: E \to \bar{E}$, представляет собой счетно-аддитивную меру на $(\bar{E}, \mathfrak{A}_{\bar{G}})$.*

Это предложение вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть E_1 — векторное пространство, G_1 — некоторое множество линейных функционалов на E_1, разделяющее точки, из E_1. Тогда существуют векторное пространство E_2, множество G_2 линейных функционалов на E_2, разделяющее точки из E_2, и линейное отображение $f: E_1 \to E_2$, представляющее собой гомеоморфизм пространства $(E_1, \sigma(E_1, \mathscr{L}(G_1)))$ на его образ $(E_2, \sigma(E_2, \mathscr{L}(G_2)))$, такие, что какова бы ни была цилиндрическая мера ν на $(E_1, \mathfrak{A}_G)$, ее образ νf^{-1} относительно f представляет собой счетно-аддитивную меру на $(E_2, \sigma(E_2, \mathscr{L}(G_2)))$.*

Доказательство. Пусть S — базис Гамеля в $\mathscr{L}(G_1)$; обозначим через E_2 множество всех вещественных функций на S, через G_2 — множество всех линейных функционалов на E_2, имеющих вид $E_2 \ni \varphi \mapsto \varphi(s)$ $(s \in S)$, и определим отображение $f: E_1 \to E_2$ следующим образом: если $\psi \in E_1$, то $f(\psi) = \varphi (\in E_2)$, где $\varphi(s) = s(\psi)$ для каждого $s \in S$. Линейность и непрерывность f очевидны; его инъективность является следствием того, что G_1 разделяет точки из E_1; то, что образ νf^{-1} цилиндрической меры ν является счетно-аддитивной (цилиндрической) мерой, вытекает из теоремы Колмогорова.

Предположим теперь, что ν — счетно-аддитивная G-цилиндрическая мера на векторном пространстве E (как и ранее, G — векторное подпространство алгебраического сопряженного к E). Тогда ее можно продолжить на σ-алгебру, порожденную алгеброй $\mathfrak{A}_G$ G-цилиндрических множеств, причем это продолжение единственно. Далее, σ-алгебру, порожденную G-цилиндрическими множествами, обозначаем символом σ_G и называем G-цилиндрической σ-алгеброй. С другой стороны, если μ — счетно-аддитивная мера на σ-алгебре σ_G, то она однозначно восстанавливается по своему сужению на алгебру $\mathfrak{A}_G$ G-цилиндрических множеств. Поэтому из предложения 2.1 вытекает, что мера μ однозначно восстанавливается по своему преобразованию Фурье.

Отметим, что если E — ЛВП, $G=E'$ и ν — счетно-аддитивная мера на σ-алгебре борелевских подмножеств пространства E, то она, вообще говоря, не восстанавливается однозначно по своему преобразованию Фурье; можно лишь утверждать, что по преобразованию Фурье однозначно восстанавливается сужение ν на алгебру $\mathfrak{A}_{E'}$ и σ-алгебру $\sigma_{E'}$. Выделить среди различных мер на σ-алгебре борелевских подмножеств, обладающих одинаковыми преобразованиями Фурье, единственную можно с помощью каких-либо дополнительных требований; например, можно потребовать, чтобы выделенная мера была мерой Радона (т. е. чтобы ее значение на каждом множестве можно было с любой степенью точности аппроксимировать значениями, принимаемыми ею на содержащихся в этом множестве компактах). Среди мер, определенных на σ-алгебре борелевских множеств и обладающих заданным преобразованием Фурье, существует не более одной меры Радона (хотя может не существовать и ни одной).

Наша очередная цель — установление равенства Парсеваля. Предположим теперь, что E — ЛВП, E' — его сопряженное, наделенное какой-либо топологией, согласующейся с двойственностью между E и E', μ и ν — счетно-аддитивные меры на σ-алгебрах $\sigma_{E'}$ в E и σ_E в E' и функция $(g, x)\mapsto g(x)$ измерима относительно произведения σ-алгебр σ_E и $\sigma_{E'}$. Тогда справедливо следующее равенство, называемое равенством Парсеваля:

$$\int_E \tilde{\nu}(x)\,\mu(dx)=\int_{E'}\tilde{\mu}(g)\,\nu(dg)$$

(это означает, в частности, что обе его части имеют смысл). Для доказательства достаточно заметить, что при принятых предположениях существует интеграл $\int\limits_{E'\times E} e^{ig(x)}\nu(dg)\,\mu(dx)$, причем по теореме Фубини

$$\int e^{ig(x)}\nu(dg)\,\mu(dx)=\int\tilde{\nu}(x)\,\mu(dx)$$

и

$$\int e^{ig(x)}\nu(dg)\,\mu(dx)=\int\tilde{\mu}(g)\,\nu(dg).$$

Если для счетно-аддитивных мер равенство Парсеваля является теоремой, то для распределений на гильбертовом пространстве (определение этого термина сейчас будет приведено) равенство Парсеваля служит для определения преобразования Фурье (при этом именно справедливость равенства Парсеваля для обычных счетно-аддитивных мер показывает, что такое определение преобразования Фурье для распределений совпадает — когда рассматриваемое распределение является обычной счетно-аддитивной мерой — с определением преобразования Фурье для мер).

Перейдем теперь к описанию схемы, в рамках которой можно определить понятие распределения на ЛВП. Пусть E — вещественное ЛВП, E' — его сопряженное и наделенное топологией, согласующейся с двойственностью между E' и E; пусть, далее, $\mathcal{F}(E)$ — некоторое локально выпуклое пространство непрерывных комплекснозначных функций на E, содержащее подпространство, состоящее из преобразований Фурье некоторых счетно-аддитивных мер на σ_E, причем множества $\mathfrak{M}$ (являющееся векторным пространством) тех мер, преобразования Фурье которых являются элементами пространства $\mathcal{F}(E)$, достаточно для различения непрерывных ограниченных функций на E' (т. е. если f — такая непрерывная ограниченная функция на E', что для каждой меры $\mu \in \mathfrak{M}$, $\int f\, d\mu = 0$, то $f=0$). $\mathcal{F}(E)$-распределением на E называется линейный непрерывный функционал $F: \mathcal{F}(E) \to C$. Преобразованием Фурье распределения F называется линейный функционал $\tilde{F}$ на $\mathfrak{M}$, определяемый равенством: $\tilde{F}(\nu) = F(\tilde{\nu})$. В том случае, когда пространство $\mathfrak{M}$ содержит все меры, сосредоточенные в одноточечных множествах, преобразование Фурье можно считать функцией на E'; значение этой функции $\tilde{F}_\varphi$ в точке $y \in E'$ определяется равенством $\tilde{F}_\varphi(g) = \tilde{F}(\delta_g)$, где δ_g — мера, сосредоточенная в этой точке. Отметим еще, что так как $\tilde{\delta}_g = [x \mapsto e^{ig(x)}]$, то $\tilde{F}_\varphi(g) = F([x \mapsto e^{ig(x)}])$. Следует подчеркнуть, что сейчас описана лишь самая общая схема построения теории распределений на E; в частности, из принятых предположений отнюдь не вытекает, что по преобразованию Фурье распределение определяется однозначно. Далее будет рассмотрен ряд реализаций этой схемы.

§ 3. МЕРА ВИНЕРА

Всюду далее, говоря о цилиндрических подмножествах гильбертова пространства H, предполагаем, если не оговорено противное, что это — H'-цилиндрические множества, где H' — сопряженное к H пространство; при этом мы еще будем, как обычно, предполагать, что H' отождествлено с H (и в связи с этим использовать также термин «H-цилиндрическое множество»). Сказанное относится и к терминологии, связанной с цилиндрическими функциями.

Итак, пусть H — сепарабельное гильбертово пространство (над полем вещественных чисел). Корреляционным оператором гауссовской цилиндрической меры w на H, обладающей корреляционным функционалом b, называется линейный оператор B в H, соответствующий функционалу b (это значит, что для всех x_1, $x_2 \in H$ должно выполняться равенство $b(x_1, x_2) = (Bx_1, x_2)$). Отметим, что в соответствии с только что сказанным мы считаем (отождествив H' и H), что функционал b определен на $H \times H$; фактически это означает, что мы рассматриваем гильбертово преобразование Фурье. Из известного критерия счетной аддитивности произвольной неотрицательной цилиндрической меры в гильбертовом пространстве вытекает, что для счетной аддитивности цилиндрической гауссовской меры необходимо и достаточно, чтобы ее корреляционный оператор был ядерным.

Канонической гауссовской мерой на гильбертовом пространстве называется гауссовская цилиндрическая мера ν с нулевым математическим ожиданием, корреляционный оператор которой является тождественным отображением. Если P — ортогональный проектор в H, $\dim P(H) = n$, A — борелевское подмножество в $P(H)$, то $\nu(P^{-1}(A)) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{P(H)} e^{-(x,x)/2} dx$. В силу только что сказанного, если гильбертово пространство бесконечномерно, эта мера не является счетно-аддитивной (так как тождественное отображение бесконечномерного гильбертова пространства в себя не является ядерным).

Пусть снова H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, B — положительно определенный симметричный оператор в H и пространство $W_2^1 = w_2^1([0, 1], H)$ определяется так: $\varphi \in W_2^1$ в том и только в том случае, если функция φ определена на $[0, 1]$, принимает значения в H, абсолютно непрерывна[1], $\varphi(0) = 0$, и если существует и конечен интеграл $\int\limits_0^1 \|\varphi'(t)\|^2 dt$. Равенство $\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_0^1 (\varphi'(t)\, \psi'(t))\, dt$ определяет скалярное произведение в W_2^1; всюду ниже будем считать, что W_2^1 наделено этим скалярным произведением; относительно него оно является гильбертовым пространством.

---

[1] Абсолютная непрерывность гильбертовозначной функции определяется совершенно так же, как и абсолютная непрерывность числовых функций. Если пространство H сепарабельно — что мы предполагаем, — то свойства этих функций также оказываются аналогичными обычным. Для дальнейшего можно принять следующее определение: функция $f:[a, b]$ $(a, b \in R^1)$ называется абсолютно непрерывной, если существует такая интегрируемая (по Бохнеру) функция $g[a, b] \to R^1$, что для всех $t \in R^1$ справедливо равенство $f(t) = \int\limits_0^t g(\tau)\, d\tau + C$.

Пусть еще ν — гауссовская мера на W_2^1, обладающая нулевым математическим ожиданием и корреляционным функционалом b, определяемым равенством $b(\varphi, \psi) = \int\limits_0^1 (B\varphi'(t), \psi'(t))dt$; существование последнего интеграла вытекает из неравенства $|B\varphi'(t), \psi'(t)| \leqslant \|B\| \|\varphi'(t)\| \|\psi'(t)\|$ и того, что функция $t \mapsto \|\varphi'(t)\| \cdot \|\psi'(t)\|$ интегрируема ввиду интегрируемости функций $t \mapsto \|\varphi'(t)\|^2$ и $t \mapsto \|\psi'(t)\|^2$. Пусть, наконец, $C_H = C([0, 1], H)$ — пространство всех непрерывных функций на $[0, 1]$ со значениями в H, наделенное нормой $\|\cdot\|_C$, определяемой равенством $\|\varphi\|_C = \max\limits_t \|\varphi(t)\|_H$; относительно этой нормы оно является банаховым.

Мерой Винера на пространстве C_H с корреляционным оператором B называется C'_H-цилиндрическая мера w на C_H, являющаяся образом гауссовской меры ν на w_2^1 относительно канонического отображения $\psi w_2^1 \to C^2_H$, переводящего каждую функцию, являющуюся элементом пространства w_2^1, в ту же самую функцию, но рассматриваемую уже как элемент пространства $C([0, 1], H)$.

Прежде всего, из этого определения вытекает, что мера Винера с корреляционным оператором B является гауссовской (так как ее преобразование Фурье имеет согласно предложению 2.2, тот вид, который должно иметь преобразование Фурье гауссовской меры). Найдем теперь явную формулу для преобразования Фурье меры Винера. Заметим прежде всего, что пространство, сопряженное пространству C_H, можно описать так: $f \in C'([0, 1], H) \Leftrightarrow$ существует счетно-аддитивная H-значная мера ν_f ограниченной вариации, такая, что $\forall \varphi \in C_H$ $f(\varphi) = \int\limits_0^1 (\varphi = (t)\nu_f(dt))$, где интеграл справа определяется как предел интегральных сумм вида

$$\sum_{k=0}^{n} (\varphi(\xi_k), \nu_f(t_k, t_{k+1}]), \ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = 1,$$

$$\xi_k \in (t_k, t_{k+1}) \text{ при } \max_k |t_{k+1} - t_k| \to 0$$

(существование такого интеграла можно доказать совершенно так же, как доказывается существование интеграла Стилтьеса от непрерывной функции по функции ограниченной вариации). Далее, по предложению 2.2 $\tilde{w}(f) = \tilde{\nu}(\psi^* f)$ $(f \in C'_H)$, так что

$$\tilde{w}(f) = \exp \int\limits_0^1 (B(\psi^* f)'(t), (\psi^* f)'(t))\, dt.$$

При этом непосредственно проверяется

$$(\psi^* f)(t) = \int_0^t \int_E^1 \nu_f(d\xi)\, d\tau = \int_0^t \nu_f((\tau, 1])\, d\tau.$$

Поэтому

$$\widetilde{w}(f) = \exp\left(-\int_0^1 \int_0^1 \min(s,\ t)(B\nu_f(ds),\ \nu_f(dt))\right)$$

(эту формулу достаточно проверить для мер, каждая из которых сосредоточена в одной точке).

Это и есть та явная формула, которую мы хотели найти.

Приведем теперь еще два определения меры Винера (с корреляционным оператором B). С этого места предполагаем, что корреляционный оператор этой меры является ядерным; как будет видно из дальнейшего, ядерность корреляционного оператора является критерием счетной аддитивности меры Винера. Обозначим через $\mathscr{F}$ множество (линейных непрерывных) функционалов на $C([0,\ 1],\ H)$, определяемое так:

$$f \in \mathscr{F} \Leftrightarrow \exists t \in [0,\ 1],\ f(\varphi) = \varphi(t)\ (\varphi \in C).$$

Обозначим, далее, через w_1 $\mathscr{F}$-цилиндрическую меру, определяемую равенством (ниже $g_i \in H$, $t_i \in [0,\ 1]$, a_i, $b_i \in R^1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$);

$$w_1(\{\varphi \in C([0,\ 1],\ H);\ (g_i,\ \varphi(t_i)) \in (a_i,\ b_i);\quad i = 1,\ 2 \ldots n\}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,(t_1\,(t_2 - t_1)\ \ldots\ (t_n - t_{n-1}))^{1/2}\,(b\,(g_1,\ g_1)\ \ldots\ b\,(g_n g_n))^{1/2}} \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b} \cdot \int_{a_n}^{b_n} e^{-\frac{\tau_1^2}{2t_1 b(g_1, g_1)} - \frac{(\tau_2 - \tau_1)^2}{2(t_2 - t_1) b(g_2 g_2)} - \ldots - \frac{(\tau_n - \tau_{n-1})^2}{2(t_n - t_{n-1}) b(g_n, g_n)}}\,(d\tau_1\ \ldots\ d\tau_n).$$

Теорема 3.1. *$\mathscr{F}$-цилиндрическая мера w_1 совпадает с сужением на $\mathfrak{A}_{\mathscr{F}}(C)$ меры Винера с корреляционным оператором B.*

Доказательство. Достаточно проверить, что на $\mathscr{L}(\mathscr{F})$ совпадают преобразования Фурье этих мер. Но обе эти меры — гауссовы (для меры w это было показано выше, а для меры w_1 это вытекает из также приведенного выше критерия гауссовости цилиндрической меры, согласно которому для того, чтобы $\mathscr{L}(\mathscr{F})$-цилиндрическая мера была гауссовской, достаточно, чтобы всякий линейный функционал из $\mathscr{L}(\mathscr{F})$ переводил ее в гауссовскую меру на прямой; в рассматриваемом случае, как можно показать с помощью прямого вычисления, это действительно так). Поэтому для того, чтобы доказать совпадение их преобразований Фурье, достаточно доказать, что совпадают их корреляционные функционалы (математические ожидания обеих мер, очевидно, равны нулю). Но корреляционный функционал меры w_1 определяется так: если $g_1, g_2 \in \mathscr{F}$ (т. е. $g_i(\varphi)=\varphi(t_i)$), то

$$\int g_1(\varphi),\ g_2(\varphi)\, w_1(d\varphi) = (B g_1,\ g_2)\min(t_1,\ t_2)$$

(это равенство проверяется прямым вычислением с использованием приведенного только что определения w_1). Таким образом, $\tilde{w}_1(g)=\tilde{w}(g)$ при $g \in \mathscr{L}(\mathscr{F})$, что и требовалось.

Отметим еще, что σ-алгебра, порожденная в $C_H\mathscr{F}$-цилиндрическими подмножествами, и, σ-алгебра, порожденная C'_H-цилиндрическими подмножествами, совпадают каждая с σ-алгеброй борелевских подмножеств; поэтому, так как w_1 счетно-аддитивна (это еще предстоит доказать), то она однозначно продолжается до меры на σ-алгебре борелевских подмножеств; так как мера w_1 на $\mathfrak{A}_{\mathscr{F}}$ совпадает с мерой Винера w (с корреляционным оператором B), то и продолжения этих мер совпадают; именно поэтому определение меры w_1 можно рассматривать как еще одно определение меры Винера. Отметим попутно, что из сказанного вытекает еще один факт: именно, для доказательства счетной аддитивности C_H'-цилиндрической меры Винера с корреляционным оператором B достаточно доказать счетную аддитивность ее сужения на алгебру $\mathscr{F}$-цилиндрических множеств (проверьте это).

Продолжение (счетно-аддитивной) цилиндрической меры w_1 на σ-алгебру $\mathscr{B}$ борелевских подмножеств $C([0,\ 1],\ H)$ называется (борелевской) мерой Винера на $C([0,\ 1],\ H)$ (с корреляционным оператором B).

Прежде чем перейти к третьему определению меры Винера (которое одновременно позволит нам установить ее счетную аддитивность), введем еще один объект. Пусть $\mathscr{H}$ — произведение счетного числа экземпляров пространства H и μ — борелевская мера на $\mathscr{H}$, представляющая собой произведения счетного числа экземпляров гауссовской борелевской меры ν_B на H с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором B. Так как оператор B ядерный, то каждая из мер-сомножителей счетно-аддитивна; поэтому счетно-аддитивна на полукольце подмножеств вида $X(A_1, \ldots, A_k) = \{(h_n) \in \mathscr{H} : h_{n_k} \in A_k,\ k=1,\ 2, \ldots j\}$ (A_k — борелевские множества в H) и мера μ_1, определяемая для каждого такого множества равенством $\mu_1(X(A_1, \ldots, A_j)) = \prod_{k=1}^{j} \nu_B(A_k)$. Следовательно, ее счетно-аддитивное продолжение на порожденную этим полукольцом σ-алгебру (она совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств в $\mathscr{H}$) существует и единственно; это продолжение и является тем самым произведением счетного числа экземпляров гауссовской борелевской меры, которое мы обозначили символом μ.

Пусть F — отображение некоторого подмножества G пространства $\mathscr{H}$ в $C([0, 1], H)$, определяемое равенством

$$F(x_n)(t)=\frac{t}{\sqrt{\pi}}x_1+\sum_{n\geqslant 1}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^{n-1}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin kt}{k}x_k$$

(G — это подмножество тех элементов $(x_n : n=0, 1, 2, \ldots)$ пространства $\mathscr{H}$, для каждого из которых ряд, фигурирующий в последнем равенстве, сходится и определяет непрерывную функцию аргумента t, т. е. элемент пространства C_H). Покажем сейчас, что $\mu(G)=1$. Положим

$$s_{mn}(x)(t)=\sum_{k=m}^{n-1}\frac{\sin kt}{k}x_{k+1},\quad t_{mn}=\max_{0\leqslant t\leqslant\pi}|s_{mn}(x)(t)|,$$

тогда

$$t_{mn}\leqslant\max_{t\leqslant\pi}\left|\sum_{k=m}^{n-1}\frac{e^{ikt}}{k}x_{k+1}\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=m}^{n-1}\frac{|x_{k+1}|^2}{k^2}+2\sum_{l=1}^{n-m-1}\left|\sum_{j=m}^{m-l-1}\frac{(x_j,\ x_{j+l})}{(j)\ (j+l)}\right|;$$

$$\int_{\mathscr{H}}t_{mn}^2(x)\,\mu(dx)\leqslant\sum_{k=m}^{n-1}\frac{\operatorname{tr}B}{k^2}+\sum_{l=1}^{n-m-1}\left(\int_{\mathscr{H}}\left|\sum_{j=m}^{m-l-1}\frac{(x_j,\ x_{j+l})}{(j)\ (j+l)}\right|^2\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=m}^{n-1}\frac{\operatorname{tr}B}{k^2}+2\sum_{l=1}^{n-m-1}\left(\sum_{j=m}^{n-l-1}\frac{(\operatorname{tr}B)^2}{(j)^2\ (j+l)^2}\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{n-m}{m^2}+2(n-m)\left(\frac{n-m}{m^4}\right)^{1/2}\right)\operatorname{tr}B.$$

Но

$$\left(\int t_{mn}(x)\,\mu(dx)\right)^2\leqslant\int t_{mn}^2\,d\mu,$$

поэтому

$$\int(t_{m2m})\,d\mu\leqslant\sqrt{3}\,m^{-1/4}(\operatorname{tr}B)^{1/2},$$

$$\int\sum_{n\geqslant 1}t_{2^{n-1},2^n}(x)\mu(dx)\leqslant\sum_{n\geqslant 1}\int t_{2^{n-1},2^n}(x)\,\mu(dx)<\infty;$$

$$\mu\left\{x:\sum_{n\geqslant 1}t_{2^{n-1},2^n}(x)<\infty\right\}=1.$$

Следовательно, на подмножестве $\mathscr{H}$ полной меры μ исходный ряд сходится равномерно; иначе говоря, множество G тех

$(x_n)\in\mathscr{H}$, для которых функция $t\mapsto F((x_n))(t)$ непрерывна, имеет меру единица. Но если $g_1, g_2\in\mathscr{F}$, то

$$\int g_1((F(x))(t))\,g_2(F(x)(t))\,d\mu=\frac{ts}{\pi}(Bg_1, g_2)+$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k\geqslant 1}\frac{\sin kt\sin ks}{k^2}(Bg_1, g_2)=(Bg_1, g_2)\min(s, t).$$

Таким образом, корректно определено (на множестве полной меры) линейное отображение F пространства $\mathscr{H}$ в C_H; при этом если A — $\mathscr{F}$-цилиндрическое подмножество C_H, то $F^{-1}A$ — борелевское подмножество в $\mathscr{H}$. Поэтому можно определить $\mathscr{F}$-цилиндрическую меру ν в C_H как образ μ при отображении F. Эта мера является гауссовской (это доказывается аналогично тому, как выше проверялась гауссовость меры Винера), и ее корреляционный функционал совпадает с корреляционным функционалом меры Винера (а математическое ожидание равно нулю). Поэтому ν — это мера Винера.

Пусть E_0 — гильбертово пространство, ρ — каноническая гауссовская мера на E_0 (гауссовская цилиндрическая мера с тождественным корреляционным оператором и нулевым математическим ожиданием).

Будем говорить, что полунорма $p:E_0\to R$ измерима относительно меры ρ, если для любого положительного ε существует такой ортогональный проектор P_0 на конечномерное подпространство пространства H, что для любого другого ортогонального проектора P на конечномерное подпространство, ортогонального к проектору P_0, имеет место неравенство

$$\rho(\{x: p(P(x))>\varepsilon\})<\varepsilon.$$

Будем говорить, что норма $\|\cdot\|$ на пространстве E_0 измерима, если она является измеримой полунормой относительно меры ρ.

Теорема 3.2. *Если норма $\|\cdot\|$ измерима на пространстве E_0 и E — пополнение пространства E_0 по норме $\|\cdot\|$, то мера ρ порождает счетно-аддитивную борелевскую меру на пространстве E с нормой $\|\cdot\|$, и, наоборот, если мера ρ порождает счетно-аддитивную меру на пространстве E, то норма $\|\cdot\|$ измерима.*

Доказательство можно прочитать в книге Х.-С. Го.

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$ и нормой $\|\cdot\|_H$, $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — ортонормированный базис в пространстве H, T — положительно определенный самосопряженный оператор Гильберта — Шмидта, удовлетворяющий равенству $Te_n=\lambda_n e_n$ $\forall n$ $(\lambda_n\in R)$. Отметим, что тогда $\lambda_n>0$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2<\infty.$$

Обозначим через $C_0([0, t], H)$ пространство всех непрерывных отображений $x:[0, t]\to H$ $(t>0)$, таких, что $x(t)=0$. Введем норму $\|\cdot\|$ на пространстве $C_0([0, t], H)$, полагая

$$\|x\| = \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} \|x(\tau)\|_H$$

для любых $x\in C_0([0, t], H)$. Пространство $C_0([0, t], H)$ банахово относительно нормы $\|\cdot\|$.

Обозначим через F линейное подпространство пространства $C_0([0, t], H)$, состоящее из всех отображений $x:[0, t]\to TH$, для которых почти всюду существует производная $x'(\tau)\in TH$ и выполнено условие

$$\int_0^t (T^{-1}x'(\tau),\ T^{-1}x'(\tau))_H\, d\tau < \infty.$$

На пространстве F определим скалярное произведение, полагая

$$(x,\ y) = \int_0^t (T^{-1}x'(\tau),\ T^{-1}y'(\tau))_H\, d\tau.$$

Пространство F будет гильбертовым по отношению к скалярному произведению $(,)$.

Если теперь положить $E_0=F$, $E=C_0([0, t], H)$, то норма $\|\cdot\|$ будет измерима, а мера ρ порождает счетно-аддитивную винеровскую меру на пространстве $C_0([0, t], H)$.

§ 4. КВАЗИМЕРЫ

Введенное выше понятие цилиндрической меры не охватывает конструкций, связанных с «мерой Фейнмана». Чтобы включить и этот случай в рассматриваемую теорию, вместо алгебры всех цилиндрических множеств рассмотрим ее подалгебру, которую сейчас определим. Итак, пусть, как и раньше, E — векторное пространство, G — некоторое векторное пространство линейных функционалов на E. Для каждого $n\in\in N$ и каждого набора $g_1, \ldots, g_n\in G$ элементов из G обозначим символом $F_{g_1\ldots g_n}$ отображение $E\to R^n$, определяемое так: $F_{g_1\ldots g_n}(x)=(g_1(x), \ldots, g_n(x))$. Пусть, далее, $\mathscr{B}_n{}^f$ — алгебра подмножеств R^n, определяемая так: $A\in\mathscr{B}_n{}^n\Leftrightarrow A$ или $R^n\setminus A$ — ограниченное борелевсксе подмножество R^n. Обозначим, далее, через $\mathfrak{A}_{g_1\ldots g_2}$ алгебру множеств $F^{-1}_{g_1\ldots g_n}(\mathscr{B}_n^f)$, и пусть $\mathfrak{A}_G^f = \bigcup_{n,g_1\ldots g_n} \mathfrak{A}^f_{g_1\ldots g_n}$; $\mathfrak{A}_G^f$ представляет собой алгебру подмножеств E; ее элементы мы будем называть скалярно ограниченными G-цилиндрическими подмножествами пространства E. G-цилиндрической квазимерой на $\mathfrak{A}^f$ будем называть всякую меру ν (т. е. аддитивную функцию) на $\mathfrak{A}^f$, обладающую следующим свойством: каковы бы ни были $n\in N$, $g_1, \ldots, g_n\in G$ и ограниченное борелевское множество $B\subset R^n$, сужение ν на σ-алгебру подмножеств множества $F^{-1}_{g_1\ldots g_n}(B)$, состоящую из всех множеств вида $F^{-1}_{g_1\ldots g_n}(V)$, где V — борелевское подмножество R^n, содержащееся в B, счетно-аддитивно.

Но, будучи образом счетно-аддитивной меры μ, мера ν также счетно-аддитивна. Таким образом, доказана следующая

Теорема 4.1. *$\mathcal{F}$-цилиндрическая мера Винера на $C([0, 1], H)$ с некоторым ядерным корреляционным оператором B счетно-аддитивна.*

Отметим, что ядерность B и необходима для счетной аддитивности этой меры.

Пример 1. Пусть $E=R^n$. Квазимера ν на $\mathfrak{A}^f_{R^n}$ называется (невырожденной) квазимерой Фейнмана (классической), если существуют такие симметричный положительно определенный оператор B в R^n (называемый корреляционным оператором квазимеры ν) и элемент $a\in R^n$, называемый математическим ожиданием (или средним) квазимеры ν, что, каково бы ни было ограниченное борелевское подмножество $A\subset R^n$,

$$\nu(A)=(2\pi)^{-n/2}(\det B)^{-1/2}\int\limits_A e^{-i(B^{-1}(x-a),x-a)/2}\,dx$$

(как и выше, $\det B$ — определитель матрицы оператора B в стандартном базисе). Для борелевского подмножества $A\subset B^n$, обладающего ограниченным дополнением $R^n\setminus A$, полагаем $\nu(A)=1-\nu(R^n\setminus A)$.

Пример 2. Пусть снова $E=R^n$, причем размерность n четна. Симплектической квазимерой Фейнмана на R^n называется квазимера ν на R^n, значение которой на каждом ограниченном борелевском подмножестве $A\subset R^n$ определяется равенством $\nu(A)=\int\limits_A e^{i(x,z)}\,dx\,dz$; ее значение на борелевском подмножестве $A\subset R^n$, обладающем ограниченным дополнением, определяется равенством $\nu(A)=1-\nu(R^n\setminus A)$ $\left(x,\ z\in R^n,\ (x,\ z)=\sum\limits_1^k x_k z_k\right)$.

Пример 3. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)$. Стандартной квазимерой Фейнмана на H называется H-цилиндрическая квазимера ν_Φ на H, определяемая так: если P — ортогональный проектор H на конечномерное подпространство H_n пространства H ($\dim H_n=n$), и A — ограниченное борелевское подмножество в H_n, то

$$\nu_\Phi(P^{-1}A)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{H_n} e^{-i\frac{(x,x)}{2}}\,dx.$$

Сейчас мы опишем те цилиндрические функции, которые можно интегрировать по G-цилиндрическим квазимерам. G-цилиндрическую функцию f назовем финитной, если $f(x)=\varphi(g_1(x), \ldots, g_n(x))$, где $g_1, \ldots, g_n \in G$ и φ — финитная функция на R^n (функция на R^n называется финитной, если замыкание множества тех точек из R^n, на которых значение φ отлично от нуля, представляет собой ограниченное подмножество в R^n). Интеграл от цилиндрической финитной борелевской функции по цилиндрической квазимере определяется совершенно так же, как и интеграл от цилиндрической борелевской функции по цилиндрической мере.

Обозначим через $\mathscr{D}_G$ множество всех финитных цилиндрических функций f вида $f(x)=\varphi(g_1(x), \ldots g_n(x))$, где φ — финитные бесконечно дифференцируемые функции на R^n. $(n=1, 2, \ldots)$ (таким образом, $\varphi=\mathscr{D}(R^n)$). Непосредственно проверяется, что каждая такая цилиндрическая функция является преобразованием Фурье меры, сосредоточенной на подпространстве пространства G, порожденном функциями $g_1, \ldots, g_n$; в том случае, когда эти функции линейно независимы, она обладает плотностью относительно меры Лебега на этом пространстве (порождаемой выбором элементов $g_1, \ldots, g_n$ в качестве ортонормированного базиса); плотность является (конечномерным) преобразованием Фурье функции φ. Это обстоятельство позволяет определить преобразование Фурье G-цилиндрической квазимеры на E. Именно преобразованием Фурье такой квазимеры ν называется функция $\tilde{\nu}$ на G, обладающая следующим свойством: каковы бы ни были $g_1, \ldots, g_n \in G$, образующие линейно независимое семейство, и какова бы ни была функция $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$, если $\forall z \in R^n$

$$\tilde{\varphi}\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k g_k\Big) = \int_{R^n} e^{-i \sum z_k g_k (x_k e_k)} {}^{1} \, dx_1 \ldots dx_n$$

то

$$\int \tilde{\nu}(\Sigma z_k g_k)\tilde{\varphi}(\Sigma z_k g_k)\,dz_1 \ldots dz_k = \int \varphi(g_1(x_1), \ldots, g_n(x_n))d\nu.$$

Иначе говоря, преобразование Фурье определяется с помощью равенства Парсеваля. Следует подчеркнуть, что не всякая квазимера обладает преобразованием Фурье в этом смысле. Стандартная квазимера Фейнмана на H преобразованием Фурье обладает; оно определяется равенством

$$\tilde{\nu}(x) = e^{-i\frac{(x,x)}{2}}.\ ^{2}$$

---

[1] (e_k) — базис в E, биортогональный семейству g_k: $g_s(er)=S_s^r$.

[2] Преобразованием Фурье произвольной квазимеры можно — естественным образом — определить как функционал на комплексификации пространства H; однако такое определение нам в дальнейшем не понадобится.

Для цилиндрических квазимер имеют смысл конструкции, описанные выше для цилиндрических мер. В частности, для них естественным образом определяются образы при линейных отображениях, которые оказываются связанными с операцией преобразования Фурье той же самой формулой, что и приведенная в предложении 2.2 предыдущего параграфа для цилиндрических мер. В реальных задачах квазимеру Фейнмана удобно задавать с помощью ее преобразования Фурье. В частности, если E — векторное пространство, G — векторное подпространство его алгебраического сопряженного и b — билинейный функционал на $G\times G$, то G-цилиндрическая квазимера Фейнмана на E с корреляционным функционалом b (и нулевым математическим ожиданием), это по определению G-цилиндрическая квазимера w, преобразование Фурье которой определяется равенством $\tilde{w}(g)=\exp(-ib(g, g))$. Аналогично определяется квазимера Фейнмана и с ненулевым математическим ожиданием. Если E — гильбертово пространство, $G=E'(=E)$, то вместо корреляционного функционала удобно говорить о корреляционном операторе B, определяемом равенством $(Bx, x)=b(x, x)$. Если $C_H=C([0, 1], H)$ и $C_H'=(C([0, 1], H))'$ — то же, что и в предыдущем параграфе, то C_H'-цилиндрической квазимерой Фейнмана на C_H с корреляционным оператором $B(:H\to H)$ называется C_H'-цилиндрическая квазимера w на C_H, корреляционный функционал которой определяется равенством $\tilde{w}(f)=\exp\Big(-i\int\limits_0^1\times$ $\times\int\limits_0^1 \min(s, t)\Big)\nu_f(ds)\nu_f(dt)$, где используются обозначения, совпадающие с применявшимися в случае меры Винера.

§ 5. ГЛАДКИЕ МЕРЫ, ОБОБЩЕННЫЕ МЕРЫ И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть μ — счетно-аддитивная мера на локально выпуклом пространстве E, A — борелевское подмножество пространства E, h — вектор из пространства E. Будем говорить, что число $d_h\mu(A)$ является *производной по направлению* h меры μ на множестве A, если

$$d_h\mu(A)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\mu(A+th)-\mu(A)).$$

Меру ξ на пространстве E назовем производной меры μ по направлению h и обозначим ее символами $d_h\mu$, если для любого борелевского подмножества A пространства E выполнено равенство

$$\xi(A)=d_h\mu(A).$$

Отметим, что если мера μ счетно-аддитивна и для каждого борелевского подмножества A существует производная $d_h\mu(A)$, то мера μ дифференцируема по направлению h.

Пусть E, F — локально выпуклые пространства, находящиеся в двойственности $\langle E, F\rangle$, и их топология согласована с двойственностью.

Для каждой счетно-аддитивной меры μ на пространстве E определим ее преобразование Фурье $\widetilde{\mu}: F \to C$, полагая

$$\widetilde{\mu}(h') = \int e^{i\langle x, h'\rangle} \mu(dx).$$

Если мера μ дифференцируема по направлению h и счетно-аддитивна, то имеет место равенство

$$(\widetilde{d_h\mu})(h') = i\langle h, h'\rangle \widetilde{\mu}(h').$$

Отметим, что если мера μ счетно-аддитивна на пространстве E, то функция $\widetilde{\mu}: F \to C$ будет непрерывна и ограничена.

Пусть $M(E)$ — некоторое линейное пространство мер на пространстве E с локально выпуклой топологией, находящееся в двойственности с пространством $C_b(E)$:

$$< f, \mu >_{\mu(E)} = \int\limits_E f(x)\mu(dx)$$

$$\forall f \in C_b(E),\ \forall \mu \in \mu(E),$$

где $C_b(E)$ — пространство всех непрерывных ограниченных функций на E.

Обозначим через $M'(E)$ топологически сопряженное пространство к пространству $M(E)$, и его элементы назовем обобщенными функциями. Легко видеть, что имеет место каноническое вложение $C_b(E) \to M'(E)$.

Аналогично определим пространства обобщенных функций. Пусть $\mathscr{F}(E)$ — некоторое линейное пространство непрерывных ограниченных функций, наделенное структурой локально выпуклого пространства и находящееся в двойственности с пространством $M(E)$:

$$\left(\langle f, \mu\rangle_{\mathscr{F}(E)} = \int\limits_E f(x)\mu(dx)\right)$$

$$\forall f \in \mathscr{F}(E),\ \forall \mu \in M(E),$$

где $M(E)$ — пространство всех счетно-аддитивных мер на пространстве E. Обозначим через $\mathscr{F}'(E)$ топологически сопряженное пространство к пространству $\mathscr{F}(E)$, а его элементы назовем обобщенными мерами.

Легко видеть, что существует каноническое вложение $M(E) \to \mathscr{F}'(E)$.

Точно так же определяют пространства обобщенных мер и обобщенных функций на пространстве F.

Так как для любого $h' \in F$ функция $e_{h'}: E \to C$, задаваемая равенством $e_{h'}(x) = i\langle x, h' \rangle$, принадлежит пространству $C_b(E)$, то можно определить преобразование Фурье для обобщенных мер $\xi \in \mathscr{F}'(E)$:

$$\tilde{\xi}(h') = \xi(e_{h'}),$$

если пространство $\mathscr{F}(e_{h'})$ содержит подмножество $\{e_{h'} : h' \in F\}$.

На пространстве $\tilde{M}'(F)$ также можно определить преобразование Фурье как сопряженное отображение

$$\tilde{M}'(F) \to M'(F)$$

к отображению

$$M(E) \to \tilde{M}(F), \quad \mu \mapsto \tilde{\mu}.$$

ГЛАВА II

Различные определения интегралов Фейнмана

§ 1. ИНТЕГРАЛЫ ФЕЙНМАНА КАК ПРЕДЕЛЫ КОНЕЧНОКРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть E — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, E_0 — линейное подпространство, плотное в E, b — вещественная квадратичная форма на E_0, E_n — последовательность конечномерных подпространств пространства E_0, удовлетворяющих условиям:

1) $E_{n+1} \supset E_n$;
2) для любого n сужение b на E_n не вырождено;
3) линейное подпространство $E_\infty = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ плотно в E.

Зададим на каждом E_n меру Лебега λ_n и положим

$$C_n = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{E_n} e^{\frac{1}{2} ib(x) - \varepsilon\|x\|^2} \lambda_n(dx).$$

Рассмотрим функцию $f: E_\infty \to C$, сужения на E_n которой измеримы по Лебегу и для них существуют пределы

$$I_n(f) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{E_n} f(x)\, e^{\frac{1}{2} ib(x) - \varepsilon\|x\|^2} \lambda_n(dx).$$

Определение 1.1. Скажем, что функция f интегрируема по мере Фейнмана Φ_b^1, если существует предел

$$\Phi_b^1(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{I_n(f)}{C_n},$$

при этом величину $\Phi_b^1(f)$ назовем интегралом Фейнмана и обозначим через $\int f(x)\,\Phi_b^1(dx)$.

Замечание 1. Мерой Фейнмана является обобщенная мера Φ_b^1, определенная на пространстве всех функций, для которых определены интегралы Фейнмана. Отметим, что из свойств пределов следует линейность интеграла Фейнмана, поэтому это пространство функций будет линейным.

Замечание 2. Определение меры Фейнмана зависит от выбора последовательности конечномерных подпространств E_n.

Пусть квадратичная форма b удовлетворяет условиям:

A1) существуют подпространства $E_{0,1}$ и $E_{0,2}$ пространства E_0 и неотрицательные квадратичные формы b_1, b_2 на E_0, такие, что

$$b=b_1-b_2, \quad E_0=E_{0,1}\oplus E_{0,2}$$

$$b_1\,|_{E_{0,2}}=0,\ b_2\,|_{E_{0,1}}=0;$$

A2) $\bar{E}_{0,1}\cap\bar{E}_{0,2}=0$ (замыкание берется в E), $\bar{E}_{0,1}\oplus\bar{E}_{0,2}=E$;

A3) квадратичная форма $a=b_1+b_2$ невырождена и определяет скалярное произведение $(\cdot,\ \cdot)$ на E_0, причем пространство E_0 — гильбертово и подпространства $E_{0,1}$ и $E_{0,2}$ ортогональны между собой;

A4) гауссовская мера μ_a, порожденная квадратичной формой a (с нулевым средним), счетно-аддитивна на пространстве E, т. е. норма $\|\cdot\|$ измерима в гильбертовом пространстве E_0.

Пусть также F — банахово пространство и существует двойственность $\langle E,F\rangle$ между пространствами E, F, тогда существует непрерывное отображение $T:F\to E$, сопряженное к вложению $E_0\to E$. Так как подпространство E_0 плотно в пространстве E, то отображение T инъективно.

Отметим, что в силу условия (A2) пространство E является прямой суммой подпространств $\bar{E}_{0,1}$, $\bar{E}_{0,2}$. Определим для $\alpha>0$ отображение $I_\alpha:E\to E$, полагая

$$I_\alpha(x_1+x_2)=\alpha x_1+\frac{1}{\alpha}x_2$$

для любых $x_1\in\bar{E}_{0,1}$ и $x_2\in\bar{E}_{0,2}$.

Пусть M — конечномерное подпространство пространства E_0, удовлетворяющее равенству $M=(M\cap E_{0,1})\oplus(M\cap E_{0,2})$. На пространстве задано скалярное произведение, индуцированное из пространства E_0. Комплексификацию пространства M обозначим через M^C. Аналитическое продолжение по параметру α на $C\setminus\{0\}$ и C-линейное продолжение по переменной линейного оператора I_α обозначим через $I_\alpha{}^C$.

Л е м м а 1.1. *Если $p:M^C\to C$ — полином, то для любой точки $x\in M$ имеет место равенство*

$$p(x)e^{\frac{1}{2}ib(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(iD)\,e^{\frac{1}{2}ib(x)}, \tag{1.1}$$

где D — оператор дифференцирования по пространству M, p_k — полиномы на пространстве M^C, определяемые равенством

$$p_k(y)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\cdot\frac{(-i)^k}{k!}\int_M p\left(I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}}x\right)\left[\left(I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}}y,\ D\right)^k e^{-\frac{1}{2}(x,x)}\right]dx \tag{1.2}$$

(N — размерность пространства M).

Доказательство. Положим $A=I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}}$. В силу свойств полиномов Эрмита имеем равенство

$$p(Ax)e^{-\frac{1}{2}(x,x)}=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{p}_k(iD)e^{-\frac{1}{2}(x,x)} \tag{1.3}$$

для любых точек x из пространства M, где

$$\widetilde{p}_k(y)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\cdot\frac{(i)^k}{k!}\int_M p(Ax)[(y,\ D)^k e^{-\frac{1}{2}(x,x)}]\,dx. \tag{1.4}$$

Отметим, что если k больше порядка полинома p, то $\tilde{p}_k\equiv 0$. Поэтому бесконечная сумма в равенстве (1.1) имеет конечное число ненулевых членов.

Обозначим через b^C аналитическое продолжение квадратичной формы b с пространства M на пространство M^C. В силу равенства $(x,\ x)=-ib^C(Ax)$ для любых $x\in M$ и аналитичности обеих частей равенства (1.3) получим тождество

$$p(I^C_\alpha Ax)e^{\frac{1}{2}ib^C(I^C_\alpha Ax)}=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{p}\,((I^C_\alpha)^{-1}\,iD)\,e^{-\frac{1}{2}ib^C(I^C_\alpha Ax)}, \tag{1.5}$$

для любых точек $x\in M$ и любых чисел $\alpha\in C\setminus\{0\}$. Положим $\alpha=i\,\frac{\pi}{4}$ и $p_k(y)=\tilde{p}_k(Ay)$. Тогда равенство (1.5) влечет равенство (1.1), а формула (1.2) следует из равенства (1.4).

Обозначим через $\|\cdot\|_0$ норму в пространстве E_0, порожденную скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)$.

Наложим дополнительные ограничения на последовательность конечномерных подпространств E_n, требуя выполнения равенства $E_n=(E_n\cap E_{0,1})\oplus(E_n\cap E_{0,2})$ при любых n.

Предложение 1.1. *Пусть $p{:}E\to C$ — полином порядка m, μ — счетно-аддитивная мера на пространстве F, удовлетворяющая условиям*

$$\int_F \|y\|^k\,|\mu|\,(dy)<+\infty \tag{1.6}$$

при $k=1,\ \ldots,\ m$.
Тогда функция $f{:}E\to C$, определенная равенством

$$f(x)=p(x)\,\widetilde{\mu}(x)$$

$$\left(\widetilde{\mu}(x)=\int_F e^{i(x,y)}\,\mu\,(dy)\right),$$

будет интегрируемой по мере Фейнмана Φ_b^1, *причем*

$$\int f(x)\,\Phi_b^1(dx)=\sum_{k=0}^{m}\int_F p_k(y)\,e^{-\frac{1}{2}ib(Ty)}\,\mu(dy), \tag{1.7}$$

где

$$p_k(y)=\frac{(i)^k}{k!}\int_E [(I^C_{i\frac{\pi}{4}}Ty,\ D)^k p(x)]\,\mu_a(dx). \tag{1.8}$$

Доказательство. Введем фактор-пространство $F_n=F/E_n^{\perp}$ ($E^{\perp}=\{y\in F:\forall x\in E_n\ \langle x,\ y\rangle=0\}$), проектор $\pi_n':F\to F_n$ и ортогональный проектор $\pi_n:E_0\to E_n$ в гильбертовом пространстве E_0. Двойственность $\langle E,\ F\rangle$ порождает двойственность $\langle E_n,\ F_n\rangle$. Скалярное произведение $(\cdot,\ \cdot)$ в E_n определяет изоморфизм $j_n:F_n\to E_n$. Обозначим через μ_n образ меры $\underline{\mu}$ в пространстве F_n относительно отображения π_n' и через μ_n образ меры μ_n в пространстве E_n относительно отображения j_n. Имеет место равенство

$$\overline{\mu}_n=\mu\circ(\pi_n\circ T)^{-1}. \tag{1.9}$$

Нормы в пространствах F, F_n обозначим соответственно символами $\|\cdot\|_F$, $\|\cdot\|_{F_n}$. В силу неравенства (1.6) и оценки $\|\pi_n y\|_{F_n}\leqslant\leqslant\|y\|_F\ \forall\, y\in F$ для любого n выполнено неравенство

$$\int_{F_n}\|y\|^k_{F_n}\,|\mu_n|\,(dy)<+\infty \tag{1.10}$$

при $k=1,\ \ldots,\ m$.

Для каждого $\varepsilon>0$ и любого натурального n определим меру $\eta_{\varepsilon,n}$ на пространстве E_n, преобразование Фурье которой задано в пространстве E_n и имеет вид $\eta_{\varepsilon,n}(x)=e^{-\varepsilon\|x\|^2}$. Оценка (1.10) влечет выполнение неравенств

$$\int_{E_n}\|x'\|_0^k\,|\overline{\mu}_n|*|\lambda_{\varepsilon,n}|\,(dx')<+\infty \tag{1.11}$$

для любых $\varepsilon>0$ и натуральных n при $k=1,\ \ldots,\ m$. Положим

$$p_{k,n}(x')=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}}\cdot\frac{(-i)^k}{k!}\int_{E_n}p(I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}}x)\times$$

$$\times[(I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}}x',\ D)\,e^{-\frac{1}{2}(x,x)}]\,dx=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}}\frac{(i)^k}{k!}\times$$

$$\times\int_{E_n}[(I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}}x',\ D)\,p(I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}}x)]\,e^{-\frac{1}{2}(x,x)}, \tag{1.12}$$

где $N(n)$ — размерность пространства E_n, $k=0, 1, \ldots, m$. Из леммы 1.1 и равенства Парсеваля следуют равенства

$$\int_{E_n} f(x)\, e^{-\varepsilon\|x\|^2} e^{\frac{1}{2} ib(x)}\, dx = \sum_{k=0}^{m} \int_{E} [p_{k,n}(iD)\, e^{\frac{1}{2} ib(x)}]\, e^{-\varepsilon\|x\|^2}\, \tilde{\mu}(x)\, dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_n \int_{E_n} p_{k,n}(x')\, e^{-\frac{1}{2} ib(x')}\, \eta_{\varepsilon,n} * \bar{\mu}_n(dx'). \qquad (1.13)$$

Отметим, что существование интегралов

$$\int_{E_n} p_{k,n}(x')\, e^{-\frac{1}{2} ib(x')}\, \eta_{\varepsilon,n} * \bar{\mu}_n(dx')$$

следует из оценки (1.11).

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ в равенстве (1.13) и учитывая оценку (1.10), получим

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{m} C_n \int_{E_n} p_{k,n}(x')\, e^{-\frac{1}{2} ib(x')}\, \bar{\mu}_n(dx').$$

В силу равенства (1.9) имеем

$$I_n(f) = C_n \sum_{k=0}^{m} \int_{F} p_{k,n}(\pi_n Ty)\, e^{-\frac{1}{2} ib(\pi_n Ty)}\, \mu(dy). \qquad (1.14)$$

Из равенства (1.12) следует

$$p_k(y) = \lim_{n\to\infty} p_{k,n}(\pi_n Ty) \quad \forall\, y \in F, \qquad (1.15)$$

где полиномы p_k определены равенством (1.8).
Учитывая (1.14) и (1.15), получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n(f)}{C_n} = \sum_{k=0}^{m} \int_{F} p_k(y)\, e^{-\frac{1}{2} ib(Ty)}\, \mu(dy),$$

что влечет равенство (1.7) и интегрируемость функции f по мере Фейнмана $\Phi_b{}^1$.

Определим линейное пространство PM, как линейную оболочку в пространстве $C(E)$ всевозможных функций вида $p\tilde{\mu}$, где p — полином на пространстве E со значениями в C, а μ — счетно-аддитивная мера на пространстве F, удовлетворяющая условию

$$\int_{F} \|y\|^k\, \mu(dy) < +\infty$$

для любых натуральных k, не превосходящих порядка полинома p, и $\tilde{\mu}$ — преобразование Фурье меры μ, определенное в пространстве E.

Теорема 1.1. *Если функция f принадлежит пространству PM, то существует интеграл* $\int f(x)\,\Phi_b^1(dx)$.

Доказательство теоремы непосредственно следует из линейности интеграла Фейнмана и предложения 1.1.

Положим для каждого натурального n

$$C_n' = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{E_n} e^{\frac{1}{2} ib(x) - \varepsilon(x,x)}\, dx.$$

Возьмем произвольную функцию $f: E_\infty \to C$, сужения на E_n которой измеримы по Лебегу и имеют пределы

$$I_n'(f) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{E_n} f(x)\, e^{\frac{1}{2} ib(x) - \varepsilon(x,x)}\, dx.$$

Определение 1.2. Скажем, что функция f интегрируема по мере Фейнмана $\Phi_b{}^2$, если существует предел

$$\Phi_b^2(f) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{I_n'(f)}{C_n'},$$

при этом величину $\Phi_b{}^2(f)$ называем интегралом Фейнмана и обозначаем через $\int f(x)\,\Phi_b^2(dx)$.

Замечание. В определении предполагается, что квадратичная форма b удовлетворяет условиям (A1)—(A4).

Для каждого $r > 1$ определим открытое множество U_r в C, полагая

$$U_2 = \{\alpha \in C : 1/r < |\alpha| < r,\ 0 < \arg\alpha < \pi/4\}.$$

Через $\bar{U}_r$ будем обозначать замыкание множества U_r в C.

Введем пространство функций $\mathscr{F}U_r$, состоящее из всех функций $\varphi: E \to C$, таких, что для каждой из них существует функция $g: \bar{U}_\alpha \times E \to C$, непрерывная на $\bar{U}_\alpha \times E$, удовлетворяющая равенствам

$$g(1, x) = \varphi(x) \quad \forall x \in E,$$

$$g(\alpha\beta, x) = g(\beta, I_\alpha x)\ \forall x \in E,\ \forall \beta \in \bar{U}_r,\ \forall \alpha > 0 : \alpha\beta \in \bar{U}_r,$$

аналитичная по первому аргументу на множестве U_r при любом фиксированном значении второго аргумента из E, имеющая непрерывную на множестве $U_r \times E$ частную производную $g_\alpha'(\alpha, x)$ и для которой также функция $g(\alpha, x)\, e^{-\varepsilon\|x\|^2}$ и $g_\alpha'(\alpha, x)\, e^{-\varepsilon\|x\|^2}$ при $\forall \varepsilon > 0$ ограничены на пространствах $\bar{U}_r \times E$ и

$U_r \times E$ соответственно. Функцию g называем продолжением функции φ на множество $\bar{U}_r \times E$.

Для каждой функции $\varphi \in \mathcal{F} U_r$ зададим число

$$l(\varphi) = \inf_{\delta > 0} \left[\left(\int_E e^{2\delta \|x\|^2} \mu_a(dx) \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{x \in E} \left(e^{-\delta \|x\|^2} \left| g\left(e^{i\frac{\pi}{4}}, x\right) \right| \right) \right],$$

где g — продолжение функции φ на множестве $\bar{U}_r \times E$.

Лемма 1.2. *Если функция φ принадлежит пространству $\mathcal{F} u_r$, то для каждого натурального числа n определены полиномы*

$$p_{n,k,\varepsilon}(x') = \int_{E_n} e^{\frac{1}{2} ib(x) - \varepsilon(x,x)} \varphi(x) (x, x')^k \, dx$$

на пространстве E_n при любом $\varepsilon > 0$ и любом целом $k \geqslant 0$ и имеют место оценки

$$|p_{n,k,\varepsilon}(x')| \leqslant 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{k!} \, |C_n'| \, l(\varphi) \, \|x'\|_0^k \tag{1.16}$$

при $\forall x' \in E_n$, кроме того, для любых $x' \in E_n$ и $k \geqslant 0$ существует предел

$$p_{n,k}(x') = \lim_{\varepsilon \to +0} p_{n,k,\varepsilon}(x')$$

и выполнено равенство

$$p_{n,k}(x') = C_n' \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}} \int_{E_n} g\left(e^{i\frac{\pi}{4}}, x\right) \left(x, I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}} x'\right) e^{-\frac{1}{2}(x,x)} \, dx, \tag{1.17}$$

где g — продолжение функции φ на множество $\bar{U}_r \times E$, а скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ по аналитичности продолжается на $E_n{}^C \times E_n{}^C$ ($E_n{}^C$ — комплексификация пространства E_n).

Доказательство. Возьмем число τ, удовлетворяющее неравенствам $0 < \tau < \pi/4$, и произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть k — произвольное неотрицательное целое число. Положим для любого $x' \in E_n$

$$q_\tau(x') = \int_{E_n} e^{i\frac{1}{2} b(x) - \varepsilon(x,x)} (x, x')^k g(e^{i\tau}, x) \, dx.$$

Обозначим через $J(\alpha)$ определитель матрицы, задаваемой в произвольном ортонормированном базисе пространства E_n линейным отображением $I_\alpha \big|_{E_\alpha} : E_\alpha \to E_\alpha$. Функция J имеет аналитическое продолжение на множество $C \backslash \{0\}$. Это аналитическое продолжение также обозначаем символом J. Для любой точки $x' \in E_n$ и любого $\alpha > 0$ выполнено равенство

$$g_\tau(x') = J(\alpha) \int_{E_n} g(\alpha e^{i\tau}, x)(x, I_\alpha x')^k e^{\frac{1}{2} ib(I_\alpha x) - \varepsilon(I_\alpha x, I_\alpha x)} dx. \quad (1.18)$$

Ограниченность и непрерывность функции $g(\alpha, x) e^{-\delta \|x\|_0^2}$ на $\bar{U}_r \times E_n$ при любом $\delta > 0$ влечет непрерывность функции

$$\alpha \mapsto J(\alpha) \int_{E_n} g(\alpha e^{i\tau}, x)(x, I_\alpha^c x')^k e^{\frac{1}{2} ib^C(I_\alpha^C x) - \varepsilon(I_\alpha^C x, I_\alpha^C x)} dx$$

на множестве $(e^{-i\tau} \bar{U}_r) \cap \bar{U}_r$ при каждом фиксированном $x' \in E_n$, а ограниченность и непрерывность функции $g'_\alpha(\alpha, x) e^{-\delta \|x\|_0^2}$ на $U_r \times E_n$ при любом $\delta > 0$ влечет ее дифференцируемость на множестве $(e^{-i\tau} U_r) \cap U_r$, откуда следует ее аналитичность. Кроме того, эта функция будет постоянна при $1/r < \alpha < 1/r$ в силу (1.18), следовательно, она постоянна на множестве $e^{-i\tau} \bar{U}_r$. Поэтому

$$g_\tau(x) = J\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \tau\right)}\right) \int_{E_n} g\left(e^{i\frac{\pi}{4}}, x\right)\left(x, I^C_{e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \tau\right)}} x'\right)^k \times$$

$$\times e^{\frac{1}{2} ib^C\left(I^C_{e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \tau\right)}} x\right) - \varepsilon\left(I^C_{e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \tau\right)}} x,\ I^C_{e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \tau\right)}} x\right)} dx. \quad (1.19)$$

Переходя к пределу в равенстве (1.19), получим

$$p_{n,k,\varepsilon}(x') = J\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \int_{E_n} g\left(e^{i\frac{\pi}{4}}, x\right)\left(x, I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}} x'\right) e^{-\frac{1}{2}(x,x) - \varepsilon ib(x)} \cdot dx$$

и в силу равенства $C_n' = J\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}$ ($N(n)$ — размерность пространства E_n) имеем

$$p_{n,k,\varepsilon}(x') = C_n' \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}} \int_{E_n} g\left(e^{i\frac{\pi}{4}}, x\right) \times$$

$$\times \left(x, I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}} x'\right) e^{-\frac{1}{2}(x,x) - \varepsilon ib(x)} dx. \quad (1.20)$$

Равенство (1.17) следует из равенства (1.20) при переходе к пределу $\varepsilon\to+0$. Из равенства (1.20) следует неравенство

$$|p_{n,k,\varepsilon}(x')|\leqslant|C_n'|\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}}\times$$

$$\times\int_{E_n}|g(e^{i\frac{\pi}{4}},x)|\cdot|x,\ I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}}x'|^k e^{-\frac{1}{2}(x,x)}dx.$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$|p_{n,k,\varepsilon}(x')|\leqslant|C_n'|\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}}\int_{E_n}|g(e^{i\frac{\pi}{4}},x)|^2 e^{-\frac{1}{2}(x,x)}dx\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}}\int_{E_n}|(x,\ I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}}x')|^{2k} e^{\frac{1}{2}(x,x)}dx\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.21)$$

Для любого $\delta>0$ имеет место оценка

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}}\int_{E_n}|g(e^{i\frac{\pi}{4}},x)|^2 e^{-\frac{1}{2}(x,x)}dx\leqslant$$

$$\leqslant[\sup_{x\in E_n}(|g(e^{i\frac{\pi}{4}},x)|e^{-\delta\|x\|^2})]^2\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}}\int_{E_n}e^{2\delta\|x\|^2}e^{-\frac{1}{2}(x,x)}dx\leqslant$$

$$\leqslant[\sup_{x\in E}(|g(e^{i\frac{\pi}{4}},x)|e^{-\delta\|x\|^2})]^2\int_E e^{2\delta\|x\|^2}\mu_a(dx),$$

откуда следует неравенство

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}}\int_{E_n}|g(e^{i\frac{\pi}{4}},x)|^2 e^{-\frac{1}{2}(x,x)}dx\leqslant(l(\varphi))^2. \qquad (1.22)$$

Возьмем в пространстве E_n ортонормированный базис $l_1,\ldots$ $\ldots,l_{N(n)}$, такой, чтобы вектор $I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}}x'$ принадлежал бы линейной оболочке векторов e_1, e_2 в пространстве $E_n{}^C$, при этом предполагается, что вектор $x'\neq0$ фиксирован. Координаты вектора $x\in E$ обозначаем символами

$$x_1,\ \ldots,\ x_{N(n)}\ (x=x_1e_1+\ldots+x_{N(n)}e_{N(n)}).$$

Пусть x_1', x_2' — комплексные числа, удовлетворяющие равенству

$$I_{e^{i\frac{\pi}{4}}} x' = \| x' \|_0 (x_1' e_1 + x_2' e_2).$$

Тогда имеют место равенства

$$|x_1'|^2 + |x_2'| = 1,$$

$$(x, I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}} x') = \| x' \|_0 (x_1 x_1' + x_2 x_2'),$$

откуда

$$|(x, I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}} x')|^2 \leqslant \| x' \|_0^2 (x_1^2 + x_2^2).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}} \int_{E_n} |(x, I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}} x')|^{2k} e^{-\frac{1}{2}(x,x)} dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \| x' \|_0^{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1^2 + x_2^2) e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2 = 2^k \| x' \|_0^{2k},$$

и, учитывая оценки (1.21), (1.22), получим неравенство (1.16).

Обозначим через $M_1(F)$ пространство всех счетно-аддитивных комплекснозначных мер на пространстве F, удовлетворяющих соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} \frac{1}{\sqrt{k!}} C_T^k \int_F \| y \|_F^k |\mu|(dy) < +\infty, \tag{1.23}$$

где C_T — норма линейного отображения $T: F \to E_0$ (в пространстве E_0 берется норма $\|\cdot\|_0$).

П р е д л о ж е н и е 1.2. *Если функция $f: F \to C$ имеет вид $f = \varphi \cdot \tilde{\mu}$, где $\tilde{\mu}$ — преобразование Фурье меры $\mu \in M_1(F)$, а функция φ при некотором $r > 1$ принадлежит пространству $\mathscr{F} U_r$, то функция f интегрируема по мере Фейнмана Φ_b^2 и имеет место равенство*

$$\int f(x) \Phi_b^2(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_F p_k(y) \mu(dy), \tag{1.24}$$

где

$$p_k(y) = \frac{(i)^k}{k!} \int g(e^{i\frac{\pi}{4}}, x)(x, I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}} Ty) \mu_a(dx) \tag{1.25}$$

и g — продолжение функции φ на множество $\bar{U}_r \times E$.

Доказательство. Для любого натурального n и произвольного $\varepsilon>0$ имеют место равенства

$$\int_{E_n} e^{i(x,x')} e^{\frac{1}{2}ib(x)-\varepsilon(x,x)} \varphi(x)\,dx=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i)^k}{k!}\int_{E_n}(x,\ x')^k e^{\frac{1}{2}ib(x)-\varepsilon(x,x)}\varphi(x)\,dx=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i)^k}{k!}\cdot C_n'\cdot\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}}\int_{E_n} g(e^{i\frac{\pi}{4}},\ x)(x,\ I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}}x')e^{-\frac{1}{2}(x,x)-\varepsilon ib(x)}dx. \tag{1.26}$$

Последнее равенство следует из равенства (1.20). Отметим также, что сходимость ряда следует из оценки (1.16) для любого $x'\in E_n$. Положим

$$g_{n,\varepsilon}(x')=\int_{E_n} e^{i(x,x')} e^{\frac{1}{2}ib(x)-\varepsilon(x,x)}\varphi(x)\,dx.$$

Из леммы 1.2 и равенства (1.26) следует для любого $\varepsilon>0$ оценка

$$|g_{n,\varepsilon}(x')|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}2^{\frac{k}{2}}\frac{1}{\sqrt{k!}}|C_k'|\,l(\varphi)\,\|x'\|_0^k.$$

Применяя равенство Парсеваля, получим равенства

$$\int_{E_n} e^{\frac{1}{2}ib(x)-\varepsilon(x,x)} f(x)\,dx=\int_{E_n} g_{n,\varepsilon}(x')\,\overline{\mu}_n(dx),$$

откуда в силу (1.26), (1.16) и (1.23) имеем

$$\int_{E_n} e^{\frac{1}{2}ib(x)-\varepsilon(x,x)} f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i)^k}{k!}\int_{E_n} p_{n,k,\varepsilon}(x')\,\overline{\mu}_n(dx'), \tag{1.27}$$

где

$$p_{n,k,\varepsilon}(x')=\int_{E_n} e^{\frac{1}{2}ib(x)-\varepsilon(x,x)}\varphi(x)(x,\ x')^k\,dx.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to+0$ в равенстве (1.27), получим

$$I_n'(f)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i)^k}{k!}\int_{E_n} p_{n,k}(x')\,\overline{\mu}_n(dx'), \tag{1.28}$$

где функции $p_{n,k}$ определяются формулой (1.17). Положим

$$\overline{p}_{n,k}(x')=\frac{(i)^k}{k!\,C_n'}\,p_{n,k}(x')\quad \forall x'\in F_n \tag{1.29}$$

и, заменяя интегрирование по мере $\overline{\mu}_n$ на интегрирование по мере μ, получим

$$I_n'(f)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_F \overline{p}_{n,k}(\pi_n Ty)\,\mu(dy). \tag{1.30}$$

В силу (1.17) и (1.29) следует соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\overline{p}_{n,k}(\pi_n Ty)=p_k(y), \tag{1.31}$$

где функция p_k определена соотношением (1.25). Из равенств (1.30), (1.31) и оценок (1.27), (1.23) вытекает

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{C_n'}\,I_n'(f)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_F p_k(y)\,\mu(dy),$$

что влечет равенство (1.24).

Пусть $\mathcal{F}U=\bigcup\limits_{r>1}\mathcal{F}U_r$.

Для каждого $\delta>0$, удовлетворяющего соотношению

$$\int_E e^{2\delta\|x\|^2}\,\mu_a(dx)<+\infty, \tag{1.32}$$

на пространстве $\mathcal{F}U$ определим норму l_δ, полагая

$$l_\delta(\varphi)=[\sup_{0\leqslant\tau\leqslant\frac{\pi}{4},\,x\in E}(e^{-\delta\|x\|^2}|g(e^{i\frac{\pi}{4}},\ x)|)]\left(\int_E e^{2\delta\|x\|^2}\,\mu_a(dx)\right)^{\frac{1}{2}},$$

где g — продолжение функции φ. Зададим в пространстве $M_1(F)$ норму l_M равенством

$$l_M(\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}2^{\frac{k}{2}}\,\frac{1}{k!}\,C_T^k\int_F\|y\|_F^k\,|\mu|\,(dy).$$

Возьмем линейную оболочку LTM всех функций f из пространства $C(E)$, представимых в виде $f=\varphi\widetilde{\mu}$, где функция φ принадлежит пространству $\mathcal{F}U$, а $\widetilde{\mu}$ — преобразование Фурье меры μ из пространства $M_1(F)$. Для каждого $\delta>0$, удовлетворяющего условию (1.32), введем на пространстве $L\mathcal{F}M$ норму $\|\cdot\|_\delta$, считая

$$\|f\|_\delta=\inf(l_\delta(\varphi_1)\,l_M(\mu_1)+\ldots+l_\delta(\varphi_n)\,l_M(\mu_n))$$

$$f=\varphi_1\widetilde{\mu}_1+\ldots+\varphi_n\widetilde{\mu}_n,$$

где $\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in\mathcal{F}U,\ \mu_1,\ldots,\mu_n\in M_1(F)$, а инфинум берется по всевозможным представлениям

$$f=\varphi_1\tilde{\mu}_1+\ldots+\varphi_n\tilde{\mu}_n.$$

Обозначим через $\mathcal{F}M_\delta$ пополнение пространства LMF относительно нормы $\|\cdot\|_\delta$. Легко видеть, что имеет место включение $\mathcal{F}M_\delta\subset C(E)$ и для каждой функции $f\in\mathcal{F}M_\delta$ существуют последовательности функций $\varphi_n\in\mathcal{F}u$ и мер $\mu_n\in M_1(F)$, таких, что

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\tilde{\mu}_n \tag{1.33}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_\delta(\varphi_n)\cdot l_M(\mu_n)<+\infty. \tag{1.34}$$

Теорема 1.2. *Если функция f принадлежит пространству $\mathcal{F}M_\delta$, то она интегрируема по мере Фейнмана $\Phi_b{}^2$ и имеет место равенство*

$$\int f(x)\,\Phi_b^2(dx)=\sum_{n=1}^{\infty}\int\varphi_n(x)\,\tilde{\mu}_n(x)\,\Phi_b^2(dx), \tag{1.35}$$

где последовательности функций $\varphi_n\in\mathcal{F}U$ и мер $\mu_n\in M_1(F)$ удовлетворяют условиям (1.33), (1.34).

Доказательство. Пусть функция f принадлежит пространству $\mathcal{F}M_\delta$. Найдем последовательности функций $\varphi_n\in\mathcal{F}U$ и мер $\mu_n\in M_1(E)$, удовлетворяющие соотношениям (1.33), (1.34). Из неравенства $l(\varphi_n)\leqslant l_\delta(\varphi_n)$ и оценки (1.16) следует, что для любого $\varepsilon>0$ и произвольного натурального n выполнены неравенства

$$\left|\int_{E_n} e^{\frac{1}{2}ib(x)-\varepsilon(x,x)}\varphi_k(x)\,\tilde{\mu}(x)\,(dx)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int_F\left|\int_{E_n}(x,\ \pi_n Ty)^k e^{\frac{1}{2}ib(x)-\varepsilon(x,x)}\varphi_k(x)\,dx\right|\,|\mu_k|(dy)\leqslant$$

$$\leqslant|C_n'|\,l(\varphi_k)\sum_{m=0}^{\infty}2^{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{m!}}C_T^m\int_F\|y\|_F^k\,|\mu|_k(dy)\leqslant$$

$$\leqslant|C_n'|\,l_\delta(\varphi_n)\,l_M(\mu_k)\quad(k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{1.36}$$

т. е.

$$\left|\int_{E_n} e^{\frac{1}{2}ib(x)-\varepsilon(x,x)}\varphi_k(x)\,\tilde{\mu}_k(x)\,dx\right|\leqslant|C_n'|\,l_\delta(\varphi_k)\,l_M(\mu_k).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{E_n} e^{\frac{1}{2} ib(x)-\varepsilon(x,x)} f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{E_n} e^{\frac{1}{2} ib(x)-\varepsilon(x,x)} \varphi_k(x)\,\widetilde{\mu}_k(x)\,dx. \quad (1.37)$$

В силу оценок (1.34) и (1.36) ряд в равенстве (1.37) будет сходиться равномерно при $\varepsilon>0$, поэтому в равенстве (1.37) можно перейти к пределу при $\varepsilon\to+0$, откуда следует

$$\frac{1}{C_n'} I_n'(f)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{C_n'} I_n'(\varphi_k\widetilde{\mu}_k). \quad (1.38)$$

Оценка (1.36) влечет неравенство

$$\left|\frac{1}{C_n'} I_n'(\varphi_k\widetilde{\mu}_k)\right|\leqslant l_\delta(\varphi_k)\,l_M(\mu_k),$$

откуда в силу (1.34) следует равномерная сходимость по параметру n ряда из равенства (1.38). Из предложения 1.2 следует, что для любого натурального k функция $\varphi_k\mu_k$ интегрируема по мере Фейнмана, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n'(\varphi_k\widetilde{\mu}_k)}{C_n'}=\int\varphi_k(x)\,\widetilde{\mu}_k(x)\,\Phi_b^2(dx).$$

Следовательно, в равенстве (1.38) можно переходить к пределу при $n\to\infty$, откуда вытекает равенство (1.35).

§ 2. ДВА СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССА ФУНКЦИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО МЕРЕ ФЕЙНМАНА

Пусть E — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, E_0 — линейное подпространство, плотное в E, b — вещественная невырожденная квадратичная форма на E_0, определяющая на E_0 скалярное произведение $(\cdot,\ \cdot)$, относительно которого пространство E_0 будет гильбертовым; кроме того, предполагается, что F — банахово пространство, находящееся в двойственности $\langle E,\ F\rangle$ с пространством E, E_n — последовательность конечномерных подпространство пространства E_0, удовлетворяющих условиям (1)—(3) из параграфа 1. Также полагаем, что гауссовская мера μ_b, порожденная квадратичной формой b (с нулевым средним), счетно-аддитивна на пространстве E, т. е. норма $\|\cdot\|$ измерима в гильбертовом пространстве E_0.

Обозначим через $s\mathscr{F}_1$ класс всех непрерывных функций на E, представимых в виде

$$u(x)\,\widetilde{\mu}(x)\,e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} p_k(x)},$$

где n — произвольное натуральное число, $p_k(x)$ — однородные непрерывные функции на E, порядок однородности l_k которых удовлетворяет оценкам $0<l_k\leqslant 4$, такие, что если $l_k\geqslant 0$, то для любых $x\in E$ выполнено неравенство $p_k(x)\geqslant 0$, $\tilde{\mu}$ — преобразование Фурье счетно-аддитивной комплекснозначной меры $\mu\in\in M_1(F)$ и $u(x)$ — непрерывная комплекснозначная функция на E, такая, что существует функция $g:\bar{U}_0\times E\to C$ ($\bar{U}_0$ — замыкание в C множества $U_0=\{\alpha\in C: 0<\arg\alpha<\pi/4,\ \alpha\neq 0\}$), удовлетворяющая равенствам

$$g(1,\ x)=u(x)\qquad \forall x\in E,$$

$$g(\alpha\beta,\ x)=g(\beta,\ \alpha x)\quad \forall x\in E,\quad \forall \beta\in\overline{U_0},\quad \forall\alpha>0,$$

аналитичная по первому аргументу на множестве U_0, при любом фиксированном значении второго аргумента из E, непрерывная на $\bar{U}_0\times E$, для которой функции $g(\alpha,\ x)e^{-\varepsilon\|x\|^2}$ при любом фиксированном $\varepsilon>0$ ограничены на множестве $\bar{U}_0\times E$.

Теорема 2.1. *Если функция f принадлежит классу $s\mathcal{F}_1$, то функция f будет интегрируемой по мере Фейнмана Φ_b^2.*

Доказательство. Пусть

$$f(x)=u(x)\tilde{\mu}(x)e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}p_k(x)}$$

принадлежит классу $s\mathcal{F}_1$ и r — некоторое вещественное число, большее 1. Тогда

$$|e^{i\sum\limits_{l_k\geqslant 2}\alpha^{l_k}p_k(x)}|\leqslant 1$$

при $\forall\alpha\in\bar{U}_r$. Значит, функция f принадлежит пространству $\mathcal{F}M_\delta$ при некотором $\delta>0$ и в силу теоремы 1.2 она интегрируема по мере Фейнмана Φ_b^2.

Лемма 2.1. *Если функция $\varphi:R\to C$ представима в виде*

$$\varphi(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{it\tau+\alpha\tau^{2n}+p(\tau)}\,d\tau,$$

где n — натуральное число, $p:C\to C$ — полином степени, не превышающей $2n-1$, и α — комплексное число, удовлетворяющее неравенству $\operatorname{Re}\alpha<0$, то существуют положительные числа ε, C, такие, что будет иметь место оценка

$$|\varphi(t)|\leqslant Ce^{-\varepsilon t^{\frac{2n}{2n-1}}}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Функция

$$\beta\leftrightarrow\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{it(\tau+\beta)+\alpha(\tau+\beta)^{2n}+p(\tau+\beta)}\,d\tau$$

определена и аналитична на C, кроме того, она постоянна на R в силу равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\tau+\beta)+\alpha(\tau+\beta)^{2n}+p(\tau+\beta)}\,d\tau=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau+\alpha\tau^{2n}+p(\tau)}\,d\tau \quad (\beta\in R),$$

поэтому она будет постоянна на C, следовательно, для любого $\varepsilon>0$ имеет место равенство

$$\varphi(t)=e^{-\varepsilon t^{\frac{2n}{2n-1}}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau-\varepsilon t^{\frac{2n}{2n-1}}+\alpha(\tau+i\varepsilon t^{\frac{1}{2n-1}})^{2n}+p(\tau+i\varepsilon t^{\frac{1}{2n-1}})}\,d\tau. \quad (2.2)$$

Из условия $\operatorname{Re}\alpha<0$ следует, что существуют такие положительные ε, C_1, что имеет место оценка

$$-\varepsilon t^{\frac{2n}{2n+1}}+\operatorname{Re}[\alpha(\tau+i\varepsilon t^{\frac{1}{2n-1}})^{2n}+p(\tau+i\varepsilon t^{\frac{1}{2n-1}})]\leqslant C_1+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\alpha\tau^{2n} \quad (2.3)$$

для любых $t\in R$. Положим

$$C=\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau-\varepsilon t^{\frac{2n}{2n-1}}+\alpha(\tau+i\varepsilon t^{\frac{1}{2n-1}})^{2n}+p(\tau+i\varepsilon t^{\frac{1}{2n-1}})}\,d\tau\right|.$$

Из соотношений (2.2), (2.3) следует оценка (2.1).

Лемма 2.2. *Пусть $g:R\to R$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая равенству $g(0)=1$ и ограниченная вместе со своей первой производной, α_0 — положительное число, n — натуральное число, $\varphi:R^n\to R$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $\varphi'(x)\neq 0$ $\forall x\in R^n$, C — положительное число, $f:R^n\to R$ — непрерывно дифференцируемая функция, $Q:R^n\to R^n$ — отображение класса C^1 и $G:[0,\alpha_0]\times R^n\to R^n$ — отображение класса C^2, такие, что будут выполнены соотношения $G(0,x)=x$ $\forall x\in R^n$,*

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}[f(G(\alpha,x))\operatorname{Det}G'_x(\alpha,x)]\right|\leqslant\frac{c}{(1+\|x\|)^n},$$

$$|f(G(\alpha,x))\operatorname{Det}G'_x(\alpha,x)|\leqslant\frac{C}{(1+\|x\|)^n},$$

$$\|Q(x)\|(\|f'(x)\|+|f(x)|(1+\|\varphi'(x)\|))\leqslant\frac{C}{(1+\|x\|)^n},$$

$$|f(x)|\cdot|\operatorname{tr}Q'(x)|\leqslant\frac{C}{(1+\|x\|)^n},$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}G(0,x)=Q(x).$$

Тогда имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\limits_{\varphi(x)\geqslant 0} f(G(\alpha,\ x))\operatorname{Det} G_x'(\alpha,\ x)\,dx\,|_{\alpha=0}=$$

$$=\int\limits_{\varphi(x)\geqslant 0}[(Q(x),\ (f(x)\,g(\varphi(x)))_x')+f(x)\,g(\varphi(x))\operatorname{tr} Q_x'(x)]\,dx. \quad (2.4)$$

Доказательство. Из условий леммы следует, что

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\limits_{\varphi(x)\geqslant 0} f(G(\alpha,\ x))\operatorname{Det} G_x'(\alpha,\ x)\,dx\,|_{\alpha=0}=$$

$$=\int\limits_{\varphi(x)\geqslant 0}[(f'(x),\ Q(x))+f(x)\operatorname{tr} Q_x'(x)]\,dx=\int\limits_{\varphi(x)\geqslant 0}(\operatorname{div} f(x)\,Q(x))\,dx. \quad (2.5)$$

В силу теоремы Стокса

$$\int\limits_{\varphi(x)\geqslant 0}\operatorname{div}(f(x)\,Q(x))\,dx=-\int\limits_{\varphi(x)\geqslant 0}\left(\frac{\varphi'(x)}{\|\varphi'(x)\|},\ Q(x)\right)f(x)\,ds. \quad (2.6)$$

Учитывая равенство $g(\varphi(x))=1$ для любых $x\in R^n$, удовлетворяющих условию $\varphi(x)=0$, получим

$$-\int\limits_{\varphi(x)=0}\left(\frac{\varphi'(x)}{\|\varphi'(x)\|},\ Q(x)\right)f(x)\,ds=$$

$$=\int\limits_{\varphi(x)=0}\left(\frac{\varphi'(x)}{\|\varphi'(x)\|},\ Q(x)\right)f(x)\,g(\varphi(x))\,ds=$$

$$=\int\limits_{\varphi(x)\geqslant 0}[(Q(x),\ (f(x)\,g(\varphi(x)))_x')+f(x)\,g(\varphi(x))\operatorname{tr} Q_x'(x)]\,dx, \quad (2.7)$$

откуда в силу равенств (2.5)—(2.7) получим равенство (2.4).

Лемма 2.3. *Пусть C, α_1 — положительные числа, n — натуральное число, $\psi: R^n\to R$, $f: R^n\to R$, $g: R\to R$ — непрерывно дифференцируемые функции, такие, что $g(0)=1$, $\psi'(x)\neq 0$ $\forall x\in R^n$, и функция g ограничена вместе со своей первой производной; кроме того, $F:[0,\ \alpha_1]\times R^n\to R^n$ — отображение класса C^2, такое, что для любого $\alpha\in[0,\ \alpha_1]$ отображение $F(\alpha,\ \cdot): R^n\to R^n$ является диффеоморфизмом класса C^2, и выполнены соотношения*

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}f(F(\alpha,\ x))\operatorname{Det} F_x'(\alpha,\ x)\right|\leqslant\frac{C}{(1+\|x\|)^n},$$

$$|f(F(\alpha,\ x))\operatorname{Det} F_x'(\alpha,\ x)|\leqslant\frac{C}{(1+\|x\|)^n},$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial\alpha} F(\alpha, x) \right\| \|f'(F(\alpha, x))\| \,|\operatorname{Det} F'_x(\alpha, x)| \leqslant \frac{C}{(1+\|x\|)^n},$$

$$|f(F(\alpha, x))|\, \|(F'_x(\alpha, x))^{-1}\|\, |\operatorname{Det} F'_x(\alpha, x)| \leqslant \frac{C}{(1+\|x\|)^n},$$

$$|f(F(\alpha, x))| \left| \frac{\partial}{\partial\alpha} \operatorname{Det} F'_x(\alpha, x) \right| \leqslant \frac{C}{(1+\|x\|)^n}.$$

Пусть также для каждого $\alpha \in [0, \alpha_1]$ *существует* α_0, *такое, что отображения* $G(\Delta\alpha, x) = F(\alpha + \Delta\alpha, F^{-1}(\alpha, x))$,

$$Q(x) = \frac{\partial}{\partial\alpha} F(\alpha, F^{-1}(\alpha, x)), \quad \varphi(x) = \psi(F^{-1}(\alpha, x)),\ f,\ g$$

удовлетворяют условию леммы 2.2. Тогда имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \int\limits_{\psi(x)\geqslant 0} f(F(\alpha, x)) \operatorname{Det} F'_x(\alpha, x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\psi(x)\geqslant 0} \left[\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} F(\alpha, x),\ g(\psi(x)) f'(F(\alpha, x)) + \right.\right.$$

$$+ g'(\psi(x)) f(F(\alpha, x)) ((F'_x(\alpha, x))^{-1})^* \psi'(x)) \operatorname{Det} F'_x(\alpha, x) +$$

$$\left. + f(F(\alpha, x)) g(\psi(x)) \frac{\partial}{\partial\alpha} \operatorname{Det} F'_x(\alpha, x) \right] dx. \tag{2.8}$$

Доказательство. В силу леммы 2.2 имеем равенства

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \int\limits_{\psi(x)\geqslant 0} f(F(\alpha, x)) \operatorname{Det} F'_x(\alpha, x)\, dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\Delta\alpha} \int\limits_{\varphi(x')\geqslant 0} f(G(\Delta\alpha, x')) \operatorname{Det} G'_{x'}(\Delta\alpha, x')\, dx' \big|_{\Delta\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_{\varphi(x')\geqslant 0} [(Q(x'),\ g(\varphi(x')) f'_x(x') + f(x') g'(\varphi(x')) \varphi'_x(x')) +$$

$$+ f(x') g(\varphi(x')) \operatorname{tr} Q'_x(x')]\, dx.$$

Учитывая равенства

$$\varphi'_x(x') = ((F'_x(\alpha, F^{-1}(\alpha, x')))^{-1})^* \psi'_x(F^{-1}(\alpha, x)),$$

$$Q'_x(x') = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} F \right)'_x (\alpha, F^{-1}(\alpha, x')) (F'_x(\alpha, F^{-1}(\alpha, x')))^{-1},$$

производя замену $x = F^{-1}(\alpha, x^1)$ и замечая, что

$$\operatorname{Det} F'_x(\alpha, x) \operatorname{tr} \left[\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} F \right)'_x (\alpha, x) (F'_x(\alpha, x))^{-1} \right] = \frac{\partial}{\partial\alpha} \operatorname{Det} F'_x(\alpha, x),$$

получим равенство (2.8).

Пусть t — положительное число, $Q=R^n$, $(\cdot, \cdot)_q$ — скалярное произведение в Q, $\|\cdot\|_q$ — норма в Q, $l_1, \ldots, l_n$ — канонический ортонормированный базис в Q.

Обозначим через E пространство всех непрерывных отображений $x:[0, t]\to Q$, таких, что $x(t)=0$. Положим $E_C=C\otimes E$ ($E\subset E_C$). Введем норму $\|\cdot\|$ на пространстве E, полагая

$$\|x\|=\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|x(\tau)\|_q$$

для любых $x\in E$.

Обозначим через E_0 линейное подпространство пространства E, состоящее из почти всюду дифференцируемых отображений x, удовлетворяющих условию

$$\int_0^t \|x'(\tau)\|_q^2\,d\tau<\infty.$$

Определим на пространстве E_0 скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, полагая

$$(x, y)=\int_0^t (x'(\tau), y'(\tau))\,d\tau,$$

и зададим функцию $a(x)=(x, x)$. Обозначим через μ_a гауссовскую меру, порожденную квадратичной формой a и нулевым средним, на пространстве E. Отметим, что она будет счетно-аддитивной на пространстве E.

Зададим последовательность разбиений $(\tau_0^N, \ldots, \tau_k^N, \ldots, \tau_N^N)$, $(0=\tau_0^N<\tau_1^N<\ldots<\tau_{N-1}^N<\tau_N^N=t)$ отрезка $[0, t]$, таких, что

$$\lim_{N\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant N}|\tau_k^N-\tau_{k-1}^N|=0.$$

Обозначим через E_N линейное подпространство E, состоящее из всех ломаных, гладких на $(0, t)\setminus\{t_1^N, \ldots, t_{N-1}^N\}$.

Пусть $\mathcal{F}Q_{1,C}$ — класс аналитических функций на $Q_C=C^n(Q_C\supset Q)$, таких, что для любой функции $w\in\mathcal{F}Q_{1,C}$ и любых положительных ε, r существует такая константа $C_1(\varepsilon, r)$, что для любых α_1, $\alpha_2\in C$, q_0, q_1, $q_2\in Q$, удовлетворяющих условиям

$$|\alpha_1|\leqslant 2,\quad |\alpha_2|\leqslant 2,\quad 0\leqslant\arg\alpha_1\leqslant\pi/4,\quad 0\leqslant\arg\alpha_2\leqslant\pi/4,\quad \|q_0\|_q\leqslant 2,$$

выполнено неравенство

$$|w(q_0+\alpha_1q_1+\alpha_2q_2)|\leqslant C_1(\varepsilon, r)\,e^{\varepsilon\|q_1\|_q^4+\varepsilon\|q_2\|_q^2}. \tag{2.9}$$

Определим отображение $A_l:E\to E$, полагая

$$A_lx(\tau)=\int_\tau^t\Big[\sum_{k=1}^n (x(\tau_1), e_k)_q^{2l+1}e_k\Big]d\tau_1.$$

Предложение 2.1. *Пусть u — функция класса $\mathcal{F}Q_{1,c}$, $w: E_C \to C$ — аналитичная функция, такая, что для любого $\varepsilon>0$ существует $C>0$, при котором*

$$|D_h w(x)| \leqslant C\,\|h\|\, e^{\|x\|^\varepsilon} \quad \forall x,\ h\in E_C \tag{2.10}$$

(D_h — оператор дифференцирования по направлению h); кроме того, k — натуральное число, для каждого $l\leqslant 2k$ ($l\geqslant 1$) определен однородный полином $p_l: Q\to R$ степени l, причем $p_{2k}(q)>0$ $\forall q\neq 0$ и $P_l(x)=\int\limits_0^t P_l(x(\tau))\,d\tau$. Тогда для любого $\beta\in(0,\pi/8k)$ существуют натуральное число m и положительные числа $\mathfrak{x}$, $C_1, \ldots, C_{2k}$, такие, что для любых $r_1, \ldots, r_{2k+1}\in E$ выполнено равенство

$$\int\limits_E \exp\Bigg\{ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}\sum_{l=1}^{2k-1} r_l\left[(P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}}+C_lP_l(x)\right]^{\frac{1}{l}}+$$

$$+ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} r_{2k}\left[P_{2k}(x)-C_{2k}\sum_{l=1}^{2k-1}((P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}}+(C_lP_l(x))^{\frac{2k}{l}}\right]^{\frac{1}{2k}}+$$

$$+ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} r_{2k+1}(P_{2k}(x))^{\frac{1}{2k}}\Bigg\}\mu_a(dx)=$$

$$=\int\limits_{P_{2k}(A_mx)>P_{2k}(x)} \exp\Bigg\{i\sum_{l=1}^{2k-1} r_l\left[P_{2k}(\mathfrak{x}A_mx+e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}x)^{\frac{l}{2k}}+\right.$$

$$\left.+C_lP_l(\mathfrak{x}A_mx+e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}x)\right]^{\frac{1}{l}}+ir_{2k}\left[P_{2k}(\mathfrak{x}A_mx+e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}x)-\right.$$

$$-C_{2k}\sum_{l=1}^{2k-1}(((P_{2k}(\mathfrak{x}A_mx+e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}x))^{\frac{l}{2k}}+$$

$$\left.+C_lP_l(\mathfrak{x}A_mx+e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}x))^{\frac{2k}{l}}\right]^{\frac{1}{2k}}+$$

$$+ir_{2k+1}(P_{2k}(\mathfrak{x}A_mx+e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}x))^{\frac{1}{2k}}\Bigg\}\times$$

$$\times\exp\Bigg\{-\frac{\mathfrak{x}}{m+1}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}\sum_{l=1}^{n}(x(0),\ e_l)_q^{2m+2}-$$

$$-\mathfrak{x}^2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)}\int\limits_0^t\Bigg(\sum_{l=1}^{n}(x(\tau),\ e_l)_q^{4m+2}\Bigg)\,d\tau+$$

$$+\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}\frac{(2m+1)}{2}\int_0^t\left(\sum_{l=1}^n(x(\tau),\ e_l)_q^{2m}\right)d\tau\Bigg\}\times$$

$$\times u(\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}A_m x(0)+x(0))\,w(\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}A_m x+x)\,\mu_a(dx)+$$

$$+\int\limits_{P_{2k}(A_m x)\leqslant P_{2k}(x)}\exp\left\{ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}\sum_{l=1}^{2k-1}r_l\left[P_{2k}(\mathfrak{x}A_m x+x)^{\frac{l}{2k}}+\right.\right.$$

$$\left.+C_l P_l(\mathfrak{x}A_m x+x)\right]^{\frac{1}{l}}+ir_{2k}\Bigg[P_{2k}(\mathfrak{x}A_m x+x)-$$

$$-C_{2k}\sum_{l=1}^{2k-1}((P_{2k}(\mathfrak{x}A_m x+x))^{\frac{l}{2k}}+C_i P_l(\mathfrak{x}A_m x+x))^{\frac{2k}{l}}\Bigg]^{\frac{1}{2k}}+$$

$$\left.+ir_{2k+1}(P_{2k}(\mathfrak{x}A_m x+x))^{\frac{1}{2k}}\right\}\exp\left\{-\frac{\mathfrak{x}}{m+1}\sum_{l=1}^n(x(0),\ e_l)_q^{2m+2}-\right.$$

$$\left.-\mathfrak{x}^2\int_0^t\left(\sum_{l=1}^n(x(\tau),\ e_l)_q^{4m+2}\right)d\tau+\mathfrak{x}\frac{2m+1}{2}\int_0^t\left(\sum_{l=1}^n(x(\tau),\ e_l)_q^{2m}\right)d\tau\right\}\times$$

$$\times u(\mathfrak{x}A_m x(0)+x(0))\,w(\mathfrak{x}A_m x+x)\,\mu_a(dx)+$$

$$+\int_0^1(e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}-1)\,\mathfrak{x}\,d\alpha\int\limits_{P_{2k}(A_m x)>P_{2k}(x)}\exp\left\{ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}\times\right.$$

$$\times\sum_{l=1}^{2k-1}r_l\left[(P_{2k}(((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})A_m x+x))^{\frac{l}{2k}}+\right.$$

$$\left.+C_l r_l P_l(((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})A_m x+x)\right]^{\frac{1}{l}}+$$

$$+ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}r_{2k}\Bigg[P_{2k}(((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})A_m x+x)-$$

$$-\sum_{l=1}^{2k-1}r_l((P_{2k}(((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})A_m x+x))^{\frac{l}{2k}}+$$

$$+C_l r_l P_l(((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})A_m x+x))^{\frac{2k}{l}}\Bigg]^{\frac{1}{2k}}+$$

$$\left.+ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}r_{2k+1}(P_{2k}(((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})A_m x+x)^{\frac{1}{2k}})\right\}\times$$

$$\times \exp \Bigl\{-\frac{1}{m+1}((1-\alpha)\mathfrak{x}-\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})\sum_{l=1}^{n}(x(0),\ e_l)_q^{2m+2} -$$

$$-((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})^2\int_0^t\Bigl(\sum_{l=1}^{n}(x(\tau),\ e_l)_q^{4m+2}\Bigr)\,d\tau +$$

$$+((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})^{\frac{2m+1}{2}}\int_0^t\sum_{l=1}^{n}(x(\tau),\ e_l)_q^{2m}\,d\tau\Bigr\}\times$$

$$\times\exp\{-(P_{2k}(A_m x+x)-P_{2k}(x))^{4m+2}\}\times$$

$$\times\Bigl\{D_{A_m x}\Bigl\{\Bigl[ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}\Bigl[\sum_{l=1}^{2k-1}r_l\,[(P_{2k}(((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})A_m x+$$

$$+x))^{\frac{l}{2k}}+C_l r_l P_l(((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})A_m x+x)]^{\frac{1}{l}}+$$

$$+r_{2k}\Bigl[P_{2k}(((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})A_m x+x)-$$

$$-\sum_{l=1}^{2k-1}r_l((P_{2k}(((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})A_m x+x)^{\frac{l}{2k}}+$$

$$+C_l r_l P_l(((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})A_m x+x))^{\frac{2k}{l}}\Bigr]^{\frac{l}{2k}}+$$

$$+r_{2k+1}(P_{2k}(((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})A_m x+x))^{\frac{1}{2k}}\Bigr]-$$

$$-\frac{1}{m+1}((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})\sum_{l=1}^{n}(x(0),\ e_l)_q^{2m+2}-$$

$$-((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})^2\int_0^t\Bigl(\sum_{l=1}^{n}(x(\tau),\ e_l)_q^{4m+2}\Bigr)\,d\tau\Bigr]\times$$

$$\times u(((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})A_m x(0)+x(0))\times$$

$$\times w((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}A_m x+x)\Bigr\}+$$

$$+\Bigl\{-(4m+2)(P_{2k}(A_m x+x)-P_{2k}(x))^{4m+1}\times$$

$$\times \int_0^t \Big[\sum_{l=1}^n (e^{-((1-\alpha)\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})(2m+1)\int_\tau^t (x(\tau_1),e_l)_q^{2m}d\tau_1} \times$$

$$\times \int_\tau^t [(x(\tau_1),\ e_l)_q^{2m+1} e^{((1-\alpha)\mathfrak{x}-\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)(2m+1)})\int_{\tau_1}^t (x(\tau_2),e_l)_q^{2m}d\tau_2}]\, d\tau_1 e_l,$$

$$(2m+1)\sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial q_l} P_{2k}(A_m x(\tau))(x(\tau),\ e_l)^{2m} e_l +$$

$$+\sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial q_l} P_{2k}(x(\tau))\, e_l)_q \Big] d\tau + \frac{2m+1}{2}\int_0^t \Big(\sum_{l=1}^n (x(\tau),\ e_l)_q^{4m}) d\tau \Big\} \times$$

$$\times u(((1-\alpha)\,\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})\, Ax(0)+x(0)) \times$$

$$\times w(((1-\alpha)\,\mathfrak{x}+\alpha\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)})\, Ax+x)\Big\}\, \mu_a(dx) \tag{2.11}$$

и имеет место неравенство

$$\Big| \int_E \exp\Big\{ ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} \sum_{l=1}^{2k-1} r_l \left[(P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}} + C_l P_l(x)\right]^{\frac{1}{l}} +$$

$$+ ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} r_{2k}\Big[P_{2k}(x) - C_{2k}\sum_{l=1}^{2k-1} \left((P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}} + C_l P_l(x)\right)^{\frac{2k}{l}} \Big]^{\frac{1}{2k}} +$$

$$+ ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} r_{2k+1} (P_{2k}(x))^{\frac{1}{2k}} \Big\} \mu_a(dx) \Big| \leqslant C\exp\Big(\sum_{l=1}^{2k+1} |r_l|^{1+\frac{1}{4k}} \Big). \tag{2.12}$$

Доказательство. Возьмем натуральное число m. Найдем такие положительные числа $\mathfrak{x}$, $C_1, \ldots, C_{2k}, C_{2k+1}$, чтобы функция

$$s_1(\alpha,\ x,\ r_1,\ \ldots,\ r_{2k+1}) =$$

$$= \sum_{l=1}^{2k-1} r_l \Big[\Big(P_{2m}\Big(A_m x + \frac{1}{\alpha}\, x\Big)\Big)^{\frac{l}{2k}} + C_l P_l \Big(A_m x + \frac{1}{\alpha}\, x\Big) \Big]^{\frac{1}{l}} +$$

$$+ r_{2k} \Big[P_{2k}\Big(A_m x + \frac{1}{\alpha}\, x\Big) - C_{2k} \sum_{l=1}^{2k-1} \Big(\Big(P_{2k}\Big(A_m x + \frac{1}{\alpha}\, x\Big)\Big)^{\frac{l}{2k}} +$$

$$+ C_l P_l\Big(A_m x + \frac{1}{\alpha}\, x\Big)\Big)^{\frac{2k}{l}} \Big]^{\frac{1}{2k}} + r_{2k+1}\Big(P_{2k}\Big(A_m x + \frac{1}{\alpha}\, x\Big)\Big)^{\frac{1}{2k}}$$

была бы определена на пространстве $[\mathfrak{r}/10, +\infty)\times E\times R^{2k+1}$, кроме того, для любых $r_1, \ldots, r_{2k+1}\in R$, $x\in E$, удовлетворяющих $P_{2k}(A_m x)>P_{2k}(x)$, была бы аналитична на множестве $\{\alpha\in R:\alpha>\mathfrak{r}/10\}$ и аналитично продолжаема на множество $\{\alpha\in C:|\alpha|>\mathfrak{r}/10\}$, а также удовлетворяла бы оценке

$$\left|s_1(\alpha, x, r_1, \ldots, r_{2k+1})-\left(\sum_{l=1}^{2k+1} r_l\right)(P_{2k}(A_m x))^{\frac{1}{2k}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_{2k+1}\left(\sum_{l=1}^{2k+1}|r_l|\right)(P_{2k}(x))^{\frac{1}{2k}}. \tag{2.13}$$

Из оценок (2.9), (2.10), (2.13) и равенства (2.11) при $m>(2k+1)^2$ получим оценку

$$\left|\int_E \exp\left\{ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}\sum_{l=1}^{2k-1} r_l\left[(P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}}+C_l P_l(x)\right]^{\frac{1}{l}}+\right.\right.$$

$$+ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} r_{2k}\left[P_{2k}(x)-C_{2k}\sum_{l=1}^{2k-1}\left((P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}}+C_l P_l(x)\right)^{\frac{2k}{l}}\right]^{\frac{1}{2k}}+$$

$$\left.\left.+ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} r_{2k+1}(P_{2k}(x))^{\frac{1}{2k}}\right\}\mu_a(dx)\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_0\int_E \exp\left\{\frac{-\mathfrak{r}x^2}{10}\int_0^t\left(\sum_{l=1}^{n}(x(\tau), e_l)_q\right)^{4m+2}d\tau+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{l=1}^{2k+1}|r_l|\right)\left(\int_0^t P_{2k}(A_m x(\tau))\,d\tau\right)^{\frac{1}{2k}}\right\}\mu_a(dx), \tag{2.14}$$

где C_0 — некоторая константа. Из неравенства (2.14) следует оценка (2.12).

Остается доказать равенство (2.11). Для этого определим отображения

$$A_{m,N}:Q^N\to Q^N,\ F_N:R\times Q^N\to Q^N,\ \pi_N:Q^N\to E,$$

полагая

$$(\pi_N(q_1, \ldots, q_N))(\tau)=\begin{cases} q_N\dfrac{N(t-\tau)}{t} & \text{при } t\dfrac{N-1}{N}\leqslant\tau\leqslant t;\\ q_k\left(\dfrac{k}{N}t-\tau\right)\dfrac{N}{t}+q_{k+1}\left(\tau-\dfrac{k-1}{N}t\right)\dfrac{N}{t} & \\ \text{при } t\dfrac{k-1}{N}\leqslant\tau\leqslant\dfrac{k}{N}t\quad(1\leqslant k<N), & \end{cases}$$

$$A_{m,N}(q_1, \ldots, q_N) =$$

$$= \left(\left(\frac{t}{N(2m+2)} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{l_1=1}^{n} \left(\sum_{l_2=0}^{2m+1} (q_l, e_{l_1})^{l_2} (q_{l+1}, e_{l_1})^{2m+1-l_2} \right) e_{l_1} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{t}{N(2m+2)} \sum_{l_1=1}^{n} (q_N, e_{l_1})^{2m+1} e_{l_1} \right), \ldots, \frac{t}{N(2m+2)} \times$$

$$\times \sum_{l=k}^{N-1} \sum_{l_1=1}^{n} \left(\sum_{l_2=0}^{2m+1} (q_l, e_{l_1})^{l_2} (q_{l+1}, e_{l_1})^{2m-1-l_2} \right) e_{l_1} +$$

$$+ \frac{t}{N(2m+2)} \sum_{l_1=1}^{n} (q_N, e_{l_1})^{2m+1} e_{l_1}, \ldots$$

$$\left. \ldots, \frac{t}{N(2m+1)} \sum_{l_1=1} (q_N, e_{l_1})^{2m+1} e_{l_1} \right),$$

$$F_N(\alpha, q) = q + \alpha A_{m,N}(q), \quad q \in Q^N,$$

и зададим функции $f_N : Q^N \to C$, $\psi_N : Q^N \to R$, $P_{l,N} : Q^N \to R$ $(1 \leqslant \leqslant l \leqslant 2k)$, $g : R \to R$, полагая

$$g(\alpha) = e^{-\alpha^{4m+2}},$$

$$P_{l,N}(q_1, \ldots, q_N) =$$

$$= \frac{t}{N} \sum_{l=1}^{N} p_l(q_l), \quad \psi_N(q) = P_{2k,N}(A_{m,N} q) - P_{2k,N}(q),$$

$$f_N(q_1, \ldots, q_N) = u(q_1)\, w(\pi_N(q_1, \ldots, q_N)) \frac{1}{C(N)} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \sum_{l=1}^{N-1} \frac{(q_{l+1} - q_l, q_{l+1} - q_l)_q}{2\frac{t}{N}} - \frac{(q_N, q_N)_q}{2\frac{t}{N}} + \right.$$

$$+ i e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)} \sum_{l=1}^{2k-1} r_l \left[(P_{2k,N}(q))^{\frac{l}{2k}} + C_l P_{l,N}(q) \right]^{\frac{1}{l}} +$$

$$+ i e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)} r_{2k} \left[P_{2k,N}(q) - C_{2k} \sum_{l=1}^{2k-1} \left((P_{2k,N}(q))^{\frac{l}{2k}} + C_l P_{l,N}(q) \right)^{\frac{2k}{l}} \right]^{\frac{1}{2k}} +$$

$$\left. + i e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)} r_{2k+1} (P_{2k,N}(q))^{\frac{1}{2k}} \right\},$$

где $q=(q_1, \ldots, q_N)$, $C(N)=(2\pi)^{\frac{Nn}{2}}\left(\frac{t}{N}\right)^{\frac{Nn}{2}}$. Отметим, что при $\alpha>0$ отображение $F(\alpha, \cdot): Q^N \to Q^N$ является диффеоморфизмом класса C^∞, кроме того, имеет место равенство

$$\operatorname{Det}\left(\frac{F_N}{N}\right)'_q(\alpha, (q_1, \ldots, q_N)) =$$

$$= \prod_{l=1}^{n}\left[\left(1+\frac{t\alpha}{N(2m+2)}(2m+1)(q_N, e_l)\right)^{2m} \times\right.$$

$$\left.\times \prod_{l_1=1}^{N-1}\left(1+\frac{t\alpha}{N(2m+2)}\sum_{l_2=0}^{2m}(2m+1-l_2)(q_{l_1}, e_l)^{2m-l_2}(q_{l_1+1}, e_l)^{l_2}\right)\right], \tag{2.15}$$

поэтому

$$\int_{Q^N} f_N(q)\,dq = \int_{Q^N} f_N(F_N(\alpha, q))\operatorname{Det}((F_N)'_q(\alpha, q))\,dq.$$

Так как функции f_N, ψ_N, g и отображение F_N удовлетворяют условиям леммы 2.3, то для любых $\alpha_2>\alpha_1>0$ имеет место равенство

$$\int_{Q^N} f_N(q)\,dq = \int_{\psi_N(q)>0} f_N(F_N(\alpha_2, q))\operatorname{Det}((F_N)'_q(\alpha_2, q))\,dq +$$

$$+\int_{\psi_N(q)\leqslant 0} f_N(F_N(\alpha_1, q))\operatorname{Det}((F_N)'_q(\alpha_1, q))\,dq +$$

$$+\int_0^1(\alpha_2-\alpha_1)\,d\alpha\int_{\psi_N(x)>0}\Big\{[(((F_N)'_\alpha(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha), q),$$

$$g(\psi_N(q))f'_N(F_N(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha), q)))_{Q_N}+$$

$$+g'(\psi_N(q))f_N(F_N(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha), q))(((F_N)'_q(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha), q))^{-1}\times$$

$$\times(F_N)'_\alpha(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha), q), \psi'_N(q))_{Q_N}]\operatorname{Det}(F_N)'_q(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha), q)+$$

$$+f_N(F_N(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha), q))g(\psi_N(q))\times$$

$$\times\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\operatorname{Det}(F_N)'_q(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha), q))\Big\}\,dq \tag{2.16}$$

($(,)_{Q^N}$ — каноническое скалярное произведение в Q^N).

Определим для каждого натурального N отображение $\xi_N : E \to Q^N$, полагая

$$\xi_N(x) = \left(x(0),\ x\left(\frac{t}{N}\right),\ \ldots,\ x\left(\frac{kt}{N}\right),\ \ldots,\ x\left(\frac{(N-1)t}{N}\right)\right).$$

Для каждого $x \in E$ будут выполнены равенства

$$\lim_{N\to\infty} F_N(\alpha,\ \xi_N(x)) = F(\alpha,\ x), \tag{2.17}$$

$$\lim_{N\to\infty} \psi_N(\xi_N(x)) = \psi(x), \tag{2.18}$$

$$\lim_{N\to\infty} C(N) f_N(\xi_N(x)) \exp\left[\frac{\left(x\left(\frac{(N-1)t}{N}\right),\ x\left(\frac{(N-1)t}{N}\right)\right)_q}{2\frac{t}{N}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{N-1} \frac{\left(x\left(\frac{lt}{N}\right) - x\left(\frac{(l+1)t}{N}\right),\ x\left(\frac{lt}{N} + x\left(\frac{(l+1)t}{N}\right)\right)\right)_q}{2\frac{t}{N}}\right] = f(x), \tag{2.19}$$

где

$$F(\alpha,\ x) = x + \alpha A_m(x), \tag{2.20}$$

$$\psi(x) = P_{2k}(A_m(x)) - P_{2k}(x), \tag{2.21}$$

$$f(x) = \exp\left\{ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} \sum_{l=1}^{2k-1} r_l\left[(P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}} + C_l P_l(x)\right]^{\frac{1}{l}} + \right.$$

$$+ ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} r_{2k}\left[P_{2k}(x) - C_{2k}\sum_{l=1}^{2k-1}\left((P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}} + C_l P_l(x)\right)^{\frac{2k}{l}}\right]^{\frac{1}{2k}} +$$

$$\left. + ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} r_{2k+1}(P_{2k}(x))^{1/2k}\right\} u(x(0))\, w(x). \tag{2.22}$$

В силу (2.15)

$$J(\alpha,\ x) = \lim_{N\to\infty} \operatorname{Det}((F_N)'_q(\alpha,\ \xi_N(x))) =$$

$$= \exp\left[\alpha\frac{2m+1}{2}\int_0^t\left(\sum_{l=1}^m (x(\tau),\ e_l)_q^{2m}\right)d\tau\right], \tag{2.23}$$

кроме того,

$$\varphi(\alpha,\ x) = \lim_{N\to\infty}\left[C(N) f_N(F_N(\alpha,\ \xi_N(x)))\times\right.$$

$$\times \exp\left[\frac{\left(x\left(\frac{(N-1)t}{N}\right),\ x\left(\frac{(N-1)t}{N}\right)\right)_q}{2\frac{t}{N}}+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{l=1}^{N-1}\frac{\left(x\left(\frac{lt}{N}\right)-x\left(\frac{(l+1)t}{N}\right),\ x\left(\frac{lt}{N}\right)-x\left(\frac{(l+1)t}{N}\right)\right)_q}{2\frac{t}{n}}\right]\right]=$$

$$=f(x)\exp\left\{-\frac{\alpha}{m+1}\sum_{l=1}^{n}(x(0),\ e_l)_q^{2m+2}-\right.$$

$$\left.-\alpha^2\int_0^t\left(\sum_{l=1}^{n}(x(\tau),\ e_l)_q^{4m+2}\right)d\tau\right\} \qquad (2.24)$$

и в силу (2.17)

$$\lim_{N\to\infty}((F_N)'_q(\alpha,\ \xi_N(x)))^{-1}(F_N)'_\alpha(\alpha,\ \xi_N(x)),$$

$$\psi'_N(\xi_N(x)))_{Q^N}=D_{(F'_x(\alpha,x))^{-1}F'_\alpha(\alpha,x)}\psi(x)=$$

$$=\int_0^t\left[\left(\sum_{l=1}^{n}\left(e^{-\alpha(2m+1)\int_\tau^t(x(\tau_1),e_l)_q^{2m}d\tau_1}\int_\tau^t(x(\tau_1),\ e_l)_q^{2m+1}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\times e^{\alpha(2m+1)\int_{\tau_1}^t(x(\tau_2),e_l)^{2m}d\tau_2}d\tau_1\right)e_l,\ (2m+1)\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_l}P_{2k}(A_mx(\tau))\times$$

$$\left.\left.\times(x(\tau),\ e_l)^{2m}e_l+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_l}P_{2k}(x(\tau))e_l\right)_q\right]d\tau. \qquad (2.25)$$

Переходя к пределу в равенстве (2.16) при $N\to\infty$ и $q=\xi_N(x)$ и учитывая равенства (2.17)—(2.19), (2.23)—(2.25), получим

$$\int_E f(x)\mu_a(dx)=\int_{\psi(x)>0}\varphi(\alpha_2,\ x)J(\alpha_2,\ x)\mu_a(dx)+$$

$$+\int_{\psi(x)>0}\varphi(\alpha_1,\ x)J(\alpha_1,\ x)\mu_0(dx)+$$

$$+\int_0^1(\alpha_2-\alpha_1)d\alpha\int_{\psi(x)>0}[g(\psi(x))D_{F'_\alpha(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha),x)}\psi(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha),\ x)+$$

$$+g'(\psi(x))\varphi(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha),\ x)D_{(F'_x(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha),x))^{-1}F'_\alpha(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha),x)}\times$$

$$\times\psi(x)]\,J(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha),\ x)+\varphi(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha),\ x)\,g(\psi(x))\times$$

$$\times\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}J(\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha),\ x)\Big]\mu_a(dx). \qquad (2.26)$$

В равенстве (2.26) правая часть определена для α_2, $\alpha_1\in R$, удовлетворяющих условию $\alpha_2>\alpha_1>0$, и постоянна относительно этих переменных, кроме того, она аналитически продолжается в комплексную область

$$U=\{(\alpha_2,\ \alpha_1):\alpha_1,\ \alpha_2\in C,\ |\alpha_2\alpha+\alpha_1(1-\alpha)|>\mathfrak{x}/10\ \forall\,\alpha\in[0,\ 1]\},$$

следовательно, продолжение ее также будет постоянно в области U. Возьмем это продолжение для

$$\alpha_2=\mathfrak{x}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)},\quad \alpha_1=\mathfrak{x}$$

и, учитывая равенства (2.20)—(2.25), получим равенство (2.11).

Обозначим через $S\mathscr{F}_2$ класс функций $f:E\to C$, представимых в виде

$$f(x)=u(x(0))\,w(x)\,e^{i\sum\limits_{l=1}^{2k}\int\limits_0^t p_l(x(\tau))d\tau},$$

где u — функция класса $\mathscr{F}Q_{1,C}$, k — натуральное число, $p_{2k}:Q\to R$ — однородный полином степени $2k$, удовлетворяющий условию $p_{2k}(q)>0$ $\forall q\neq0$, $p_l:Q\to R$ — однородные полиномы степени l $(0<l<2k)$, $w:E_C\to C$ — аналитичная функция, такая, что для любого $\varepsilon>0$ существует $C>0$, при котором выполнено неравенство (2.10). Отметим, что полиномы p_l могут тождественно быть равны нулю при $l<2k$.

Теорема 2.2. *Если функция f принадлежит классу $s\mathscr{F}_2$, то она интегрируема по мере Фейнмана $\Phi_a{}^2$ и имеет место равенство*

$$\int f(x)\,\Phi_a^2(dx)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(r_1)\dots\varphi_{2k+1}(r_{2k+1})\times$$

$$\times\int\limits_E\exp\Big\{ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}\sum_{l=1}^{2k-1}r_l\,[(P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}}+C_lP_l(x)]^{\frac{1}{l}}+$$

$$+ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}r_{2k}\Big[P_{2k}(x)-C_{2k}\sum_{l=1}^{2k-1}((P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}}+C_lP_l(x))^{\frac{2k}{l}}\Big]^{\frac{1}{2k}}+$$

$$+ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}r_{2k+1}(P_{2k}(x))^{\frac{1}{2k}}\Big\}\,u(ix(0))\,w(ix)\,\mu_a(dx)\,dr_1\dots dr_{2k+1}, \quad (2.27)$$

где $C_1, \ldots, C_{2k+1}$ — *некоторые положительные константы,* $0<\beta<\pi/8k$,

$$P_l(x)=\int_0^t p_l(x(\tau))\,d\tau \quad (0<l\leqslant 2k),$$

$$\varphi_l(r_l)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ir_lr+i\frac{1}{C_l}r^le^{i\beta l}+i\frac{1}{2}C_{2k}r^{2k}e^{i\beta 2k}}\,dr \tag{2.28}$$

при $l>0$, $l<2k$,

$$\varphi_l(r_l)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ir_lr+i\frac{1}{2}r^{2k}e^{i\beta 2k}}\,dr \tag{2.29}$$

при $l=2k$, $2k+1$.

Доказательство. Выберем такие же константы, как и в предложении 2.1.

Обозначим через λ_N меру Лебега на пространстве E_N. Легко видеть, что подпространства E_N пространства E конечномерны. Положим

$$C(\alpha,\ N)=\int_{E_N} e^{\alpha\frac{1}{2}\int_0^t (x'(\tau),\,x'(\tau))_q d\tau}\,\lambda_N(dx)$$

при $\operatorname{Re}\alpha<0$.

Имеют место равенства

$$\frac{1}{\lim\limits_{\varepsilon\to+0} C(ie^{i\varepsilon},\ N)}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{E_N}\exp\left[ie^{i\varepsilon}\frac{1}{2}\int_0^t(x'(\tau),\ x'(\tau))_q\right]\times$$

$$\times\exp\left[ie^{i\varepsilon}\sum_{l=1}^{2k+1}P_l(x)\right]u(x(0))\,w(x)\,\lambda_N(dx)=$$

$$=\frac{1}{C(ie^{2i\beta},\ N)}\int_{E_N}\exp\left[ie^{2i\beta}\frac{1}{2}\int_2^t(x'(\tau),\ x'(\tau))_q\,d\tau\right]\times$$

$$\times\exp\left[i\sum_{l=1}^{2k+1}e^{i\rho l}P_l(x)\right]u(e^{i\beta}x(0))\,w(e^{i\beta}x)\,\lambda_N(dx). \tag{2.30}$$

В силу (2.28), (2.29)

$$\frac{1}{C(-1,\ N)}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(r_1)\ldots\varphi_{2k+1}(r_{2k+1})\times$$

$$\times \int_{E_N} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t (x'(\tau),\ x'(\tau))_q\, d\tau + ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}\times\right.$$

$$\times \sum_{l=1}^{2k-1} r_l \left[(P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}} + C_l P_l(x)\right]^{\frac{1}{l}} +$$

$$+ ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} r_{2k}\left[P_{2k}(x) - C_{2k}\sum_{l=1}^{2k-1}\left((P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}} + C_l P_l(x)\right)^{\frac{2k}{l}}\right]^{\frac{1}{2k}} +$$

$$\left. + ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} r_{2k+1}(P_{2k}(x))^{\frac{1}{2k}}\right\} v(ix(0))\, w(ix)\, \lambda_N(dx)\, dr_1 \ldots dr_{2k+1} =$$

$$= \frac{1}{C(ie^{2i\beta},\ N)} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(r_1) \ldots \varphi_{2k+1}(r_{2k+1}) \times$$

$$\times \int_{E_N} \exp\left\{\frac{1}{2} ie^{2i\beta}\int_0^t (x'(\tau),\ x'(\tau))_q\, d\tau +\right.$$

$$+ i\sum_{l=1}^{2k-1} r_l\left[(P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}} + C_l P_l(x)\right]^{\frac{1}{l}} +$$

$$+ ir_{2k}\left[P_{2k}(x) - C_{2k}\sum_{l=1}^{2k-1}\left((P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}} + C_l P_l(x)\right)^{\frac{2k}{l}}\right]^{\frac{1}{2k}} +$$

$$\left. + ir_{2k+1}(P_{2k}(x))^{\frac{1}{2k}}\right\} u(e^{i\beta}x(0))\, w(e^{i\beta}x)\, \lambda_N(dx)\, dr_1 \ldots dr_{2k+1} =$$

$$= \frac{1}{C(ie^{2i\beta},\ N)} \int_{E_N} \exp\left\{\frac{1}{2} ie^{2i\beta}\int_0^t (x'(\tau),\ x'(\tau))_q\, d\tau +\right.$$

$$\left. + i\sum_{l=1}^{2k+1} e^{i\beta l} P_l(x)\right\} u(e^{i\beta}x(0))\, w(e^{i\beta}x)\, \lambda_N(dx). \tag{2.31}$$

Из оценок (2.1), (2.12) следует равенство

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{C(-1,\ N)} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(r_1) \ldots \varphi_{2k+1}(r_{2k+1}) \times$$

$$\times \int_{E_N} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t (x'(\tau),\ x'(\tau))_q\, d\tau + ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} \times\right.$$

$$\times \sum_{l=1}^{2k-1} r_l \left[(P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}} + C_l P_l(x)\right]^{\frac{1}{l}} + ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} r_{2k} \times$$

$$\times \left[P_{2k}(x) - C_{2k}\sum_{l=1}^{2k-1} \left((P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}} + C_l P_l(x)\right)^{\frac{2k}{l}}\right]^{\frac{1}{2k}} +$$

$$\left.+ ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} r_{2k+1} (P_{2k}(x))^{\frac{1}{2k}}\right\} v(i(x(0)))w(ix)\,\lambda_N(dx)\, dr_1 \ldots dr_{2k+1} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(r_1) \ldots \varphi_{2k+1}(r_{2k+1}) \int_E \exp\left\{ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} \sum_{l=1}^{2k-1} r_l \left[(P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}} +\right.\right.$$

$$+ C_l P_l(x)\Big]^{\frac{1}{l}} + ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} r_{2k} \Big[P_{2k}(x) - C_{2k}\sum_{l=1}^{2k-1} \left((P_{2k}(x))^{\frac{l}{2k}} +\right.$$

$$\left.\left. + C_l P_l(x)\right)^{\frac{2k}{l}}\Big]^{\frac{1}{2k}} + ie^{i\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)} r_{2k+1} (P_{2k}(x))^{\frac{1}{2k}}\right\} u(ix(0)) \times$$

$$\times w(ix)\,\mu_a(dx)\, dr_1 \ldots dr_{2k+1}. \qquad (2.32)$$

В итоге равенства (2.30)—(2.32) дают равенство (2.27).

Следствие 1. Пусть $p_{l,m}: Q \to R$ — последовательность однородных полиномов степени l $(0 < l \leqslant 2k)$, равномерно сходящаяся на ограниченных множествах при $m \to \infty$ к $p_l: Q \to R$, причем $p_{2k,m}(y) > 0$, $p_{2k}(y) > 0$ $\forall m$, $\forall y \neq 0$; u_m — последовательность функций из класса $\mathcal{F}Q_{1,C}$, $w_m: E_C \to C$ — последовательность аналитических функций, поточечно сходящихся к функции $u \in \mathcal{F}Q_{1,C}$ и аналитической функции $w: E_C \to C$ соответственно, таких, что для любых положительных ε, r существуют положительные числа $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon, r)$, при которых будут выполнены неравенства

$$|D_h w_m(x)| \leqslant C_1(\varepsilon)\, \|h\|\, e^{\|x\|^{\varepsilon}}\ \forall x, \quad h \in E_C,$$

$$|u_m(q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)| \leqslant C_2(\varepsilon,\ r)\, e^{\varepsilon\|q_1\|_q^4 + \varepsilon\|q_2\|_q^2}$$

для любых m; q_0, q_1, $q_2 \in Q$, α_1, $\alpha_2 \in C$, удовлетворяющих

$$|\alpha_1| \leqslant 2,\ |\alpha_2| \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \arg\alpha_1 \leqslant \pi/4,$$

$$0 \leqslant \arg\alpha_2 \leqslant \frac{\pi}{4},\ \|q_0\|_q \leqslant r.$$

Тогда последовательность функций

$$f_m(x)=u_m(x(0))\,w_m(x)\,e^{i\sum\limits_{l=1}^{2k}\int\limits_0^t p_{l,m}(x(\tau))d\tau}$$

и функция

$$f(x)=u(x(0))\,w(x)\,e^{i\sum\limits_{l=1}^{2k}\int\limits_0^t p_{l,m}(x(\tau))d\tau}$$

будут интегрируемы по мере Фейнмана $\Phi_a{}^2$ и имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty}\int f_m(x)\,\Phi_a^2(dx)=\int f(x)\,\Phi_a^2(dx).$$

Доказательство непосредственно получается из оценок (2.1), (2.12) и равенств (2.11), (2.27).

§ 3. ИНТЕГРАЛЫ ФЕЙНМАНА КАК АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ПО ГАУССОВСКИМ МЕРАМ

Пусть E — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, E_0 — линейное подпространство, плотное в E, b — вещественная квадратичная форма на E_0, удовлетворяющая условиям (A1)—(A4) из параграфа 1. Так же, как в параграфе 1, введем гауссовскую меру μ_a на E (см. (A4)) и скалярное произведение $(\cdot,\ \cdot)$ на E_0 (см. (A3)). Пусть при $r>1$

$$U_r=\{\alpha\in C:1/2<|\alpha|<r,\quad 0<\arg|\alpha<\pi/4\}.$$

Для $\alpha>0$ определим отображение $I_\alpha:E\to E$, полагая

$$I_\alpha(x_1+x_2)=\alpha x_1+\frac{1}{\alpha}x_2$$

для любых $x_1\in\bar E_{0,1}$ и $x_2\in\bar E_{0,2}$ ($E_{0,1}$, $E_{0,2}$ — пространства, определенные в (A1)). Комплексификацию пространства E обозначим через E^C. Определим отображения $I_\alpha{}^C:E^C\to E^C$ для любого $\alpha\in C\setminus\{0\}$ как аналитическое продолжение по параметру α на $C\setminus\{0\}$ и C как линейное продолжение по переменной линейного оператора I_α.

Определение 3.1. Скажем, что функция f интегрируема по мере Фейнмана $\Phi_b{}^3$, если при некотором $r>1$ существуют интегралы $\int\limits_E f(I_\alpha x)\,\mu_a(dx)$ для любых $\alpha\in R$, удовлетворяющих неравенствам $1/r\leqslant\alpha\leqslant r$, и непрерывная функция $\varphi:\bar U_r\to C$, аналитическая на множестве U_r, такая, что

$$\varphi(\alpha)=\int\limits_E\varphi(I_\alpha x)\,\mu_a(dx)$$

при любом $\alpha \in R$, удовлетворяющем неравенствам $1/r \leqslant \alpha \leqslant r$.

При этом величину $\varphi(e^{i\frac{\pi}{4}})$ называем интегралом Фейнмана и обозначаем через $\int f(x) \Phi_b^3(dx)$.

Пусть F — банахово пространство и существует двойственность $\langle E, F\rangle$ между пространствами E, F. Зададим так же, как в параграфе 1, отображение $T: F \to E_0$.

Лемма 3.1. *Если $p: E \to C$ — полином порядка m, μ — счетно-аддитивная мера на пространстве F, то имеют место равенство*

$$\int_E p(x) \tilde{\mu}(x) \mu_a(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_F p_k(y) e^{-\frac{1}{2}(Ty, Ty)} \mu(dy) \tag{3.1}$$

и неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \int_F p_k(y) e^{-\frac{1}{2}(Ty, Ty)} \mu(dy) \right| \leqslant (\mu)(F) \left(\int_F (p(x))^2 \mu_a(dx) \right)^{1/2}, \tag{3.2}$$

где

$$p_k(y) = \frac{(-i)^k}{k!} \int_E p(x)\, d_{Ty}^k \mu_a(dx). \tag{3.3}$$

Доказательство. Возьмем последовательность конечномерных подпространств E_n пространства TF, удовлетворяющих условиям:

1) для любого n $E_{n+1} > E_n$;
2) для любого n $E_n = (E_n \cap E_{0,1}) \oplus (E_n \cap E_{0,2})$;
3) линейное подпространство $E_\infty = \bigcup E_n$ плотно в гильбертовом пространстве E_0.

Для каждого натурального n в силу свойств полиномов Эрмита имеем равенство

$$p(x) e^{-\frac{1}{2}(x, x)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{k,n}(iD) e^{-\frac{1}{2}(x, x)} \tag{3.4}$$

для любых точек x из пространства E_n, где

$$p_{k,n}(x') = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}} \frac{(-i)^k}{k!} \int_{E_n} p(x) \left[(x', D)^k e^{-\frac{1}{2}(x, x)}\right] dx$$

$$(N(n) = \dim E_n). \tag{3.5}$$

Заметим, что при $k > m$ $p_{k,n} \equiv 0$, поэтому все слагаемые в бесконечной сумме из равенства (3.4) с номерами, большими m, равны нулю.

Пусть $\pi_n : E_0 \to E_n$ — ортогональный проектор и

$$\bar{\mu}_n = \mu \circ (\pi_n \circ T)^{-1}. \tag{3.6}$$

В силу равенства (3.4) и равенства Парсеваля имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}} \int\limits_{E_n} \bar{\mu}(x)\, p(x)\, e^{-\frac{1}{2}(x,x)}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{E_n} p_{k,n}(x')\, e^{-\frac{1}{2}(x,x)} \bar{\mu}_a(dx')$$

и, учитывая равенство (3.6), получим

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}} \int\limits_{E_n} \bar{\mu}(x)\, p(x)\, e^{-\frac{1}{2}(x,x)}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{F} p_{k,n}(\pi_n T y)\, e^{-\frac{1}{2}(Ty,Ty)} \mu(dy). \tag{3.7}$$

Из равенств (3.3) и (3.5) следует

$$p_k(y) = \lim_{n\to\infty} p_{k,n}(\pi_n,\ Ty) \tag{3.8}$$

для любого $y \in F$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (3.7) и учитывая равенство (3.8), получим равенство (3.1).

Из свойств полиномов Эрмита следует, что имеет место равенство

$$\int\limits_{E} e^{\frac{1}{2}(x,x)} [p_{k,n}(iD)\, e^{-\frac{1}{2}(x,x)}]\, \overline{[p_{m,n}(iD)\, e^{-\frac{1}{2}(x,x)}]}\, dx = 0 \tag{3.9}$$

для любого натурального n и любых целых неотрицательных чисел m, k, не равных между собой, откуда получим равенства

$$\int\limits_{E_n} |p(x)|^2 e^{-\frac{1}{2}(x,x)}\, dx = \sum_{k,m=0}^{\infty} \int\limits_{E_n} e^{\frac{1}{2}(x,x)} [p_{k,n}(iD)\, e^{-\frac{1}{2}(x,x)}] \times$$

$$\times [p_{m,n}(iD)\, e^{-\frac{1}{2}(x,x)}]\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{E_n} e^{\frac{1}{2}(x,x)} |p_{k,n}(iD)\, e^{-\frac{1}{2}(x,x)}|^2\, dx. \tag{3.10}$$

Для любых натуральных n и целого неотрицательного k положим

$$a_{k,n} = \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}} \int\limits_{E_n} e^{\frac{1}{2}(x,x)} |p_{k,n}(iD)\, e^{-\frac{1}{2}(x,x)}|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

при $p_{k,n} \not\equiv 0$ и $a_{k,n} = 1$ при $p_{k,n} \equiv 0$. В силу неравенства Коши—Буняковского и (3.9), (3.10) имеют место соотношения

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}} \left| \int\limits_{E_n} \tilde{\mu}(x)\, [p_{k,n}(iD)\, e^{-\frac{1}{2}(x,x)}]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_{k,n}^2} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(a)}{2}}} \left| \int_{E_n} \widetilde{\mu}(x) [p_{k,n}(iD) e^{-\frac{1}{2}(x,x)}] \, dx \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}} \int_{E_n} e^{\frac{1}{2}(x,x)} | p_{k,n}(iD)^{-\frac{1}{2}(x,x)} |^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}} \int_{E_n} | \widetilde{\mu}(x) |^2 e^{-\frac{1}{2}(x,x)} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}} \int_{E_n} e^{\frac{1}{2}(x,x)} | p_{k,n}(iD) e^{-\frac{1}{2}(x,x)} |^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

и, учитывая (3.10) и равенство Парсеваля, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \int_{F} p_{k,n}(\pi_n Ty) e^{-\frac{1}{2}(Ty,Ty)} \mu(dy) \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\mu|(F) \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}} \int_{E_n} | p(x) |^2 e^{-\frac{1}{2}(x,x)} \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.11}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (3.11), в силу (3.8) получим оценку (3.2).

Лемма 3.2. *Пусть для каждого натурального n ряд $\sum_{=1}^{\infty} a_{k,n} (a_{k,n} \in C)$ сходится и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для любых n, $m > N$ выполнено неравенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} | a_{k,n} - a_{k,m} | < \varepsilon.$$

Тогда для каждого k существует предел

$$a_k = \lim_{n \to \infty} a_{k,n},$$

сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Из неравенства

$$|a_{k,n}-a_{k,m}| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k,m}-a_{k,n}|$$

следует, что для каждого k последовательность $a_{k,n}$ будет фундаментальной, откуда вытекает существование предела

$$a_k = \lim_{n\to\infty} a_{k,n}. \tag{3.13}$$

Докажем равномерную сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}$ при любом натуральном n.

Возьмем произвольное положительное ε. Из условия леммы следует, что существует такое натуральное N, что для любых натуральных n, $m>N$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{k,n}-a_{k,m}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.14}$$

Положим $m=N+1$. Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,m}$ следует существование такого натурального K, что для любого натурального $k>K$ выполнено неравенство

$$\left|\sum_{j=K}^{k} a_{j,m}\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.15}$$

В силу (3.14) и (3.15) для любого $n>N$ и любого $k>K$ выполнены неравенства

$$\left|\sum_{j=K}^{k} a_{j,n}\right| \leqslant \left|\sum_{j=K}^{k} (a_{j,n}-a_{j,m})\right| + \left|\sum_{j=K}^{k} a_{j,m}\right| <$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k,n}-a_{k,m}| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

откуда следует равномерная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}$, что в свою очередь влечет сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и равенство (3.12).

Лемма 3.3. *Если комплекснозначная функция f принадлежит пространству $\mathscr{L}_2(E, \mu_a)$ и μ — счетно-аддитивная мера на пространстве F, то имеют место равенство*

$$\int_E f(x)\,\tilde{\mu}(x)\,\mu_a(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_F p_k(y)\, e^{-\frac{1}{2}(Ty,Ty)}\,\mu(dy) \tag{3.16}$$

и неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \int_F p_k(y)\, e^{-\frac{1}{2}(Ty,Ty)}\,\mu(dy)\right| \leqslant |\mu|\,(F) \left(\int_E |f(x)|^2\,\mu_a(dx)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.17}$$

где

$$p_k(y) = \frac{(-i)^k}{k!} \int_E f(x)\, d_{Ty}^k \mu_a(dx). \tag{3.18}$$

Доказательство. Возьмем последовательность полиномов $q_n: E \to C$, сходящуюся в пространстве $\mathscr{L}_2(E, \mu_a)$ к функции f. Для такой последовательности будет иметь место равенство

$$\int_E f(x)\,(d_{T_y})^n\,\mu_a(dx) = \lim_{k\to\infty} \int_E q_k(x)\,(d_{T_y})^n\,\mu_a(dx)$$

для каждого $y \in F$ и любого натурального n, или

$$p_n(y) = \lim_{k\to\infty} q_{k,n}(y), \tag{3.19}$$

где

$$q_{k,n}(y) = \frac{(-i)^n}{n!} \int_E q_k(x)\, d_{Ty}^n\,\mu_a(dx).$$

Из леммы 3.1 следует равенство

$$\int_E q_n(x)\,\tilde{\mu}(x)\,\mu_a(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_F q_{n,k}(y)\, e^{-\frac{1}{2}(Ty,Ty)}\,\mu(dy) \tag{3.20}$$

для любых натуральных n.

Покажем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \int_F q_{n,k}(y)\, e^{-\frac{1}{2}(Ty,Ty)}\,\mu(dy)\right| \tag{3.21}$$

по параметру n.

Возьмем произвольное положительное ε. Так как последовательность полиномов q_n фундаментальна в пространстве

$\mathscr{L}_2(E, \mu_a)$, то найдется такое натуральное число N, что для любых $n, m>N$ выполнено неравенство

$$|\mu|(F)\left(\int\limits_E |q_n(x)-q_m(x)|^2\mu_a(dx)\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon,$$

откуда, учитывая равенство

$$q_{n,k}(y)-q_{m,k}(y)=\frac{(-i)^k}{k!}\int\limits_E (q_n(x)-q_m(x))\, d^k_{Ty}\mu_a(dx)$$

и неравенство (3.2), из леммы (3.1) получим неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left|\int\limits_F q_{n,k}(y)e^{-\frac{1}{2}(Ty,Ty)}\mu(dy)\right|-\left|\int\limits_F q_{m,k}(y)e^{-\frac{1}{2}(Ty,Ty)}\mu(dy)\right|\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int\limits_F (q_{n,k}(y)-q_{m,k}(y))\,e^{-\frac{1}{2}(Ty,Ty)}\mu(dy)\right|<\varepsilon. \quad (3.22)$$

Для ряда (3.21) выполнены все условия леммы 3.2, так как для любого натурального n ряд (3.21) сходится и выполнено неравенство (3.22), поэтому ряд (3.21) будет сходиться равномерно.

Из равномерной сходимости ряда (3.21) и равенства (3.19) следует, что в равенстве (3.20) можно перейти к пределу при $n\to\infty$, что влечет равенство (3.16).

В силу неравенства (3.2) леммы 3.1 имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int\limits_F q_{n,k}(y)e^{-\frac{1}{2}(Ty,Ty)}\mu(dy)\right|\leqslant|\mu|(F)\left(\int\limits_E|q_n(x)|^2\mu_a(dx)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

для каждого натурального n. Учитывая равномерную сходимость ряда (3.21) и равенство (3.19), в неравенстве (3.23) можно перейти к пределу при $n\to\infty$, откуда следует оценка (3.17).

Предложение 3.1. *Пусть r — вещественное число, большее единицы, $q: U_r\cdot E\to C$ $(U_r\cdot E\in E^C)$ — бесконечно дифференцируемая функция, такая, что для каждого $n\geqslant 0$*

$$\|g^{(n)}(I^C_\alpha)\|\in\mathscr{L}_2(E, \mu_a)\,\forall\,\alpha\in\overline{U}_2$$

и

$$a_n(g)=\sup_{\alpha\in\overline{U}_r}\int\|g^{(n)}(I^C_\alpha x)\|\,\mu_a(dx)<\infty, \quad (3.24)$$

кроме того, μ — счетно-аддитивная мера на F, такая, что

$$b_n(\mu)=\int\limits_F\|Ty\|^n\,|\mu|(dy)<\infty\ \ (a_n(g)\neq 0) \quad (3.25)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (r+1)^{2n} \, a_n(g) \, b_n(\mu) < \infty. \tag{3.26}$$

Пусть также $f: E \to C$ *— функция, определенная равенством* $f(x) = g(x) \tilde{\mu}(x)$, *где* $\tilde{\mu}$ *— преобразование Фурье меры* μ. *Тогда функция* f *интегрируема по мере Фейнмана* $\Phi_b{}^3$ *и имеет место равенство*

$$\int f(x) \Phi_b^3(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_F p_k(y) e^{-\frac{1}{2} ib(Ty)} \mu(dy), \tag{3.27}$$

где

$$p_k(y) = \frac{(i)^k}{k!} \int_E y^{(k)} (I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}} x)(I_i^C T y)^k \mu_a(dx). \tag{3.28}$$

Доказательство. Определим отображение $I_\alpha{}^*: F \to E$ для любого $\alpha > 0$ как сопряженное к отображению $I_\alpha: E \to E$ относительно двойственности $\langle E, F \rangle$. Имеет место равенство

$$I_\alpha T = T I_\alpha{}^*. \tag{3.29}$$

Из леммы 3.3 следует, что

$$\int_E f(I_\alpha x) \mu_a(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_F \tilde{p}_k(\alpha;\ I_\alpha^* y) e^{-\frac{1}{2}(TI_\alpha^* y, TI_\alpha^* y)} \mu(dy) \tag{3.30}$$

для любого $\alpha \in \bar{U}_2 \cap R$, где

$$\tilde{p}_k(\alpha, y) = \frac{(-i)^k}{k!} \int_E g(I_\alpha x) \, d^k_{Ty} \mu_a(dx). \tag{3.31}$$

Интегрируя по частям правую часть равенства (3.31), получим

$$\tilde{p}_k(\alpha, y) = \frac{(i)^k}{k!} \int_F g^{(k)}(I_\alpha x)(I_\alpha T y)^k \mu_a(dx). \tag{3.32}$$

Для каждого целого неотрицательного k определим функцию $q_k: \bar{U}_r \times E \to C$, полагая

$$q_k(\alpha, y) = \frac{(i)^k}{k!} \int_E g^{(k)}(I_\alpha^C x)(I_{\alpha^2}^C T y) \mu_a(dx). \tag{3.33}$$

Из оценки (3.24) следует, что

$$|q_k(\alpha, y)| \leqslant \frac{1}{k!} \|I_\alpha^C\|^{2k} \|Ty\|^k \int_E \|g^{(k)}(I_\alpha^C x)\| \mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k!} (r+1)^{2k} \|Ty\|^k a_k(g) \tag{3.34}$$

для $\forall\alpha\in\bar{U}_r$, $\forall y\in F$, откуда следует непрерывность функции p_k по первой переменной на множестве $\bar{U}_r$ и, учитывая аналитичность отображения $\alpha\mapsto g^{(k)}(I_\alpha^C x)(I_\alpha^C Ty)^k$, ее аналитичность на множестве U_r также по первой переменной. Из оценок (3.34], (3.25) и

$$\left|e^{-\frac{1}{2}(I_\alpha^C Ty,\, I_\alpha^C Ty)}\right|\leqslant 1$$

при $\forall\alpha\in\bar{U}_r$, $\forall y\in F$ следует, что для любого $\alpha\in\bar{U}_r$

$$\left|\int\limits_F q_k(\alpha,\ y)\,e^{-\frac{1}{2}(I_\alpha^C Ty,\, I_\alpha^C Ty)}\,\mu(dy)\right|\leqslant\frac{1}{k!}(r+1)^{2k}a_k(g)\,b_k(\mu). \quad (3.35)$$

Поэтому функция $\alpha\mapsto\int\limits_F q_k(\alpha,\ y)\,e^{-\frac{1}{2}(I_\alpha^C Ty,\, I_\alpha^C Ty)}\,\mu(dy)$ непрерывна на множестве $\bar{U}_r$ и аналитична на множестве U_r.

Определим функцию $\varphi:\bar{U}_r\to C$, полагая

$$\varphi(\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_F q_k(\alpha,\ y)\,e^{-\frac{1}{2}(I_\alpha^C Ty,\, I_\alpha^C Ty)}\,\mu(dy). \quad (3.36)$$

Из оценок (3.35) и (3.26) следует равномерная сходимость ряда в равенстве (3.36), а так как каждое слагаемое является непрерывной функцией на множестве $\bar{U}_r$ и аналитической функцией на множестве U_r, то функция φ также будет непрерывной на множестве $\bar{U}_r$ и аналитической на множестве U_r. Из равенств (3.30), (3.29), (3.32), (3.33) и (3.36) следует, что для любого вещественного α, удовлетворяющего неравенствам $1/r\leqslant\alpha\leqslant r$, имеет место равенство

$$\varphi(\alpha)=\int\limits_E f(I_\alpha(x))\,\mu_a(dx),$$

откуда следует интегрируемость функции f по мере Фейнмана $\Phi_b{}^3$.

Из равенства

$$q_k(e^{i\frac{\pi}{4}},\ x)=p_k(x)$$

в силу (3.33) и (3.28) и равенства (3.36) следует равенство (3.27).

Для каждого $r>1$ обозначим через $\mathcal{F}U_r^\infty$ пространство всех функций $g:E\to C$, таких, что каждая из них имеет функцию $\psi:\bar{U}_r\cdot E\to C$ $(\bar{U}_r\cdot E\in E^C)$, бесконечно дифференцируемую на $\bar{U}_r\cdot E$ относительно комплексного поля, такую, что для каждого

$$\|q^{(n)}(I_\alpha^C\cdot)\|\in\mathcal{L}_2(E,\ \mu_a)\ \forall\,\alpha\in\bar{U}_r$$

и

$$a_n(\psi)=\sup_{\alpha\in\overline{U}_r}\int_E \|\psi^{(n)}(I_\alpha^C x)\|\,\mu_a(dx)<\infty,\quad \psi|_g=g.$$

Функцию ψ назовем продолжением функции g на множество $\overline{U}_r\cdot E$.

Пусть $L\mathcal{F}M_r^\infty$ — линейная оболочка всех функций f из пространства $C(E)$, представимых в виде $f=\tilde{g}\mu$, где функция g принадлежит пространству $\mathcal{F}U_r^\infty$, а $\tilde{\mu}$ — преобразование Фурье меры μ, счетно-аддитивной на пространстве F и такой, что

$$l^\infty(q,\ \mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(r+1)^{2n}a_n(\psi)\int_F\|Ty\|^n\,|\mu|\,(dy)<\infty$$

(здесь ψ — продолжение функции g на $\overline{U}_r\cdot E$). Зададим на пространстве $L\mathcal{F}M_r^\infty$ норму $\|\cdot\|_r{}^\infty$, полагая

$$\|f\|_r^\infty=\inf\,(l^\infty(q_1,\ \mu_1)+\ldots+l^\infty(q_n,\ \mu_n)),\ f=q_1\tilde{\mu}_1+\ldots+q_n\tilde{\mu}_n,$$

где n — произвольное натуральное число, пары $(q_n,\ \mu_n)$ удовлетворяют условию $l^\infty(q_k,\ \mu_k)$, а инфинум берется по всевозможным представлениям

$$f=q_1\tilde{\mu}_1+\ldots+q_n\tilde{\mu}_n.$$

Обозначим через $\mathcal{F}M_r^\infty$ пополнение пространства $L\mathcal{F}M_r^\infty$ по норме $\|\cdot\|_r^\infty$.

Легко видеть, что пространство $\mathcal{F}M_r^\infty$ вкладывается в пространстве $\mathcal{L}_1(E,\ \mu)$ и для каждой функции $f_n\in\mathcal{F}M_r^\infty$ существуют последовательности функций $g_n\in\mathcal{F}U_r^\infty$ и счетно-аддитивных мер μ_n на F, таких, что

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}q_n\tilde{\mu}_n \tag{3.37}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}l^\infty(q_n,\ \mu_n)<\infty. \tag{3.38}$$

Теорема 3.1. *Если функция f принадлежит пространству $\mathcal{F}M_r^\infty$, то она интегрируема по мере Фейнмана $\Phi_b{}^3$ и имеет место равенство*

$$\int f(x)\,\Phi_b^3(dx)=\sum_{n=1}^{\infty}\int q_n(x)\,\tilde{\mu}_n(x)\,\Phi_b^3(dx), \tag{3.39}$$

где последовательности функций $q_n\in\mathcal{F}U_r^\infty$ и счетно-аддитивных мер μ_n на F удовлетворяют условиям (3.37) *и* (3.38).

Доказательство. Пусть функция f принадлежит пространству $\mathcal{F}U_r^\infty$. Найдем последовательности функций $q_n \in \mathcal{F}U_r^\infty$ и счетно-аддитивных мер μ_n на F, удовлетворяющих соотношениям (3.37)и (3.38).

Для каждого натурального n определим функцию $\varphi_n : \bar{U}_r \to C$, полагая

$$\varphi_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_F q_{k,n}(\alpha,\ y)\, e^{-\frac{1}{2}(I_\alpha^C Ty, I_\alpha^C Ty)}\, \mu(dy),$$

где

$$q_{k,n}(\alpha,\ y) = \frac{i}{k!} \int_E \psi^{(k)}(I_\alpha^C x)(I_\alpha^C Ty)^k\, \mu_a(dx),$$

а ψ_n — продолжение функции g_n на множество $\bar{U}_r \cdot E$. Из доказательства предложения 3.1 известно, что функция φ_n непрерывна на множестве $\bar{U}_r$ и аналитична на множестве U_r для любого вещественного α, удовлетворяющего неравенствам $1/r \leqslant \alpha \leqslant r$. Выполнено равенство

$$\varphi_n(\alpha) = \int_E q_n(I_\alpha(x))\, \tilde{\mu}_n(I_\alpha x)\, \mu_a(dx) \tag{3.40}$$

и имеет место оценка

$$\left| \int_F q_{k,n}(\alpha,\ y)\, e^{-\frac{1}{2}(I_\alpha^C Ty,\ I_\alpha^C Ty)}\, \mu_n(dy) \right| \leqslant \frac{1}{k!}(r+1)^{2k} a_k(\psi_n)\, \beta_k(\mu_n). \tag{3.41}$$

Из оценки (3.41) следует неравенство

$$|\varphi_n(\alpha)| \leqslant l^\infty(q_n,\ \mu_n) \tag{3.42}$$

для любых $\alpha \in \bar{U}_r$.

Положнм

$$\varphi(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\alpha). \tag{3.43}$$

В силу (3.42) и (3.38) ряд в равенстве (3.43) будет сходиться равномерно на множестве $\bar{U}_r$, поэтому функция φ будет определена и непрерывна на множестве $\bar{U}_r$ и аналитична на множестве U_r. Из равенства (3.41) следует, что

$$\varphi(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E q_n(I_\alpha x)\, \tilde{\mu}(I_\alpha x)\, \mu_a(dx) = \int_E f(I_\alpha x)\, \mu_a(dx)$$

$$\left(\frac{1}{r} \leqslant \alpha \leqslant r\right),$$

значит, функция f интегрируема по мере Фейнмана $\Phi_b{}^3$ и имеет место равенство (3.39).

Лемма 3.4. *Если функция g принадлежит пространству $\mathcal{F}U_r$, то для каждого целого неотрицательного k определена функция $p_k : \bar{U}_r \times F \to C$ равенством*

$$p_k(\alpha, y) = \int\limits_E \psi(\alpha, x)(I_\alpha^C x, Ty)^k \mu_a(dx), \tag{3.44}$$

где ψ — продолжение функции g на множество $\bar{U}_r \times E$ и имеет место оценка

$$|p_k(\alpha, y)| \leqslant r^{\frac{k}{2}} \sqrt{k!}\, l'(g)\, \|Ty\|_0,$$

$$l'(y) = \inf_{\delta>0} \Big(\int\limits_E e^{2\delta\|x\|^2} \mu_a(dx)\Big)^{\frac{1}{2}} \sup(e^{-\delta\|x\|^2} |g(\alpha x)|),$$

$$x \in E, \ \alpha \in \bar{U}_r. \tag{3.45}$$

Доказательство. Из неравенства Коши—Буняковского следует

$$|p_k(\alpha, y)| \leqslant \Big(\Big(\int\limits_E |\psi(\alpha, x)|^2 \mu_a(dx)\Big)^{\frac{1}{2}} \int\limits_E |(I_\alpha^C x, Ty)|^{2k} \mu_a(dx)\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.46}$$

Для любого $\delta > 0$ имеет место оценка

$$\int\limits_E |\psi(\alpha, x)|^2 \mu_a(dx) \leqslant [\sup_{x\in E,\ \alpha\in \bar{U}_r} (|\varphi(\alpha, x)|\, e^{-\delta\|x\|^2})]^2 \int\limits_F e^{2\delta\|x\|^2} \mu_a(dx),$$

откуда следует неравенство

$$\int\limits_E |\psi(\alpha, x)|^2 \mu_a(dx) \leqslant (l'(q))^2. \tag{3.47}$$

Возьмем в пространстве E_0 два вектора e_1, e_2, таких, что

$$\|e_1\|_0 = 1, \ \|e_2\|_0 = 1, \ (e_1, e_2) = 0,$$

и существовали бы числа x_1', x_2', удовлетворяющие равенству

$$I_\alpha^C Ty = x_1' e_1 + x_2' e_2$$

(здесь α, y — фиксированы и взяты из $\bar{U}_r$, F соответственно). Пусть M — линейная оболочка векторов e_1, e_2 и x_1, x_2 — координаты вектора $x \in M$ в базисе e_1, e_2 $(x = x_1 e_1 + x_2 e_2)$, тогда

$$\int\limits_E |(I_\alpha^C x, Ty)|^{2k} \mu_a(dx) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_M |(x, I_\alpha^C Ty)|^{2k} e^{-\frac{1}{2}(x,x)} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x_1' x_1 + x_2' x_2|^2 e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2 \leqslant (|x_1'|^2 + |x_2'|^2)^k k!\, 2^k,$$

откуда, учитывая

$$|x_1'|^2+|x_2'|^2\leqslant(r+1/r)^2\|Ty\|_0^2,$$

получим

$$\int_E |(I_\alpha^C x,\ Ty)|^{2k}\mu_a(dx)\leqslant 2^k k!\ (r+1/r)^{2k}\ \|Ty\|_0^{2k}. \tag{3.48}$$

Из оценок (3.46), (3.47), (3.48) следует (3.44).

Обозначим через $M_{2,r}(F)$ пространство всех счетно-аддитивных мер μ на F, удовлетворяющих соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}}\frac{1}{k!}\left(r+\frac{1}{r}\right)^k\int_F \|Ty\|_0^k\,|\mu|\,(dy)<\infty. \tag{3.49}$$

Предложение 3.2. *Если функция $f: E\to C$ имеет вид $f=g\widetilde{\mu}$, где $\widetilde{\mu}$ — преобразование меры $\mu\in M_{2,r}(F)$, и функция g принадлежит пространству $\mathcal{F}U_r$ при некотором $r>1$, то функция f интегрируема по мере Фейнмана Φ_b^3 и имеет место равенство*

$$\int f(x)\,\Phi_b^3(dx)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_F p_k(y)\,\mu(dy), \tag{3.50}$$

где

$$p_k(y)=\frac{(i)^k}{k!}\int_E \psi(e^{i\frac{\pi}{4}},\ x)\,(x,\ I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}}\,Ty)^k\,\mu_a(dx) \tag{3.51}$$

и ψ — продолжение функции g на множество $\bar{U}_r\times E$.

Доказательство. Определим функцию $\varphi: \bar{U}_r\to C$, полагая

$$\varphi(\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i)^k}{k!}\int_F\int_E \psi(\alpha,\ x)\,(I_\alpha^C x,\ Ty)^k\,\mu_a(dx)\,\mu(dy). \tag{3.52}$$

Из оценки (3.45) леммы 3.4 следует, что

$$\left|\int_F\int_E \psi(\alpha,\ x)\,(I_\alpha^C x,\ Ty)^k\,\mu_a(dx)\,\mu(dy)\right|\leqslant 2^{\frac{k}{2}}\sqrt{k!}\,l'\ (q)\int_E \|Ty\|_0^k\,|\mu|\,(dy),$$

откуда в силу (3.49) следует равномерная сходимость ряда из (3.52) на множестве $\bar{U}_r$.

Так как каждое слагаемое в ряде из равенства (3.52) является непрерывной функцией по α на множестве $\bar{U}_r$ и аналитической функцией на множестве U_r, то функция φ также непрерывна на множестве $\bar{U}_r$ и аналитична на множестве U_r.

Так как для любого вещественного α, удовлетворяющего неравенствам $1/r \leqslant \alpha \leqslant r$, выполнены равенства

$$\varphi(\alpha)=\int_E \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^k}{k!} \int_F (I_\alpha x,\ Ty)^k \mu(dy)\right] \psi(1,\ I_\alpha x)\, \mu_a(dx) =$$

$$= \int \tilde{\mu}(I_\alpha x)\, g(I_\alpha x)\, \mu_a(dx) = \int_E f(I_\alpha(x))\, \mu_a(dx),$$

то функция f будет интегрируема по мере Фейнмана Φ_b^3 и имеет место равенство

$$\int f(x)\, \Phi_b^3(dx) = \varphi(e^{i\frac{\pi}{4}}),$$

откуда следует равенство (3.50).

Для каждого $\delta>0$, удовлетворяющего соотношению (1.32), определим на пространстве $\mathscr{F}U_{r,\delta}$ норму $l'_{2,\delta}$, полагая

$$l'_{2,\delta}(y) = (\sup_{\alpha\in U_r,\ x\in E} (e^{-\delta\|x\|^2}\, |\psi(\alpha,\ x)|)) \left(\int_E e^{2\delta\|x\|^2} \mu_a(dx)\right)^{\frac{1}{2}},$$

где ψ — продолжение функции g. Зададим на пространстве $M_{2,r}(F)$ норму $l'_{M,2}$, полагая

$$l'_{M,2}(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} \frac{1}{\sqrt{k!}} \int_F \|Ty\|_0^k\, |\mu|\,(dy).$$

Возьмем линейную оболочку $L\mathscr{F}M_r$ всех функций f из пространства $C(E)$, представимых в виде $f=g\tilde{\mu}$, где функция g принадлежит пространству $\mathscr{F}U_r$, а $\tilde{\mu}$ — преобразование Фурье меры μ из пространства $M_{2,r}(F)$. Для каждого $\delta>0$, удовлетворяющего условию (1.32), определим на пространстве $L\mathscr{F}M_r$ норму $\|\cdot\|'_{2,\delta}$, полагая

$$\|f\|'_{r,\delta} = \inf(l'_{r,\delta}(g_1)\, l'_{M,r}(\mu_1) + \ldots + l'_{r,\delta}(g_n)\, l'_{M_r}(\mu_n)),$$

$$f = g_1\tilde{\mu}_1 + \ldots + g_n\tilde{\mu}_n,$$

где $g_1, \ldots, g_n \in \mathscr{F}U_r$, $\mu_1, \ldots, \mu_n \in M_{2,r}(F)$, а инфинум берется по всевозможным представлениям

$$f = g_1\tilde{\mu}_1 + \ldots + g_n\tilde{\mu}_n.$$

Обозначим через $\mathscr{F}M_{r,\delta}$ пополнение пространства $L\mathscr{F}M_r$ по норме $\|\cdot\|'_{r,\delta}$. Легко видеть, что имеет место включение $\mathscr{F}M_{r,\delta} \subset C(E)$ и для каждой функции $f\in\mathscr{F}M_{r,\delta}$ существуют последовательности функций $g_n \in \mathscr{F}U_r$ и мер $\mu_n \in M_{2,r}(F)$, таких, что

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \tilde{\mu}_n \tag{3.53}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} l'_{2,\delta}(g_n)\, l'_{M,r}(\mu_n) < \infty. \tag{3.54}$$

Теорема 3.2. *Если функция f принадлежит пространству $\mathscr{F}M_{r,\delta}$ при некотором $r>1$ и некотором $\delta>0$, удовлетворяющем условию* (1.32), *то функция f интегрируема по мере Фейнмана $\Phi_b{}^3$ и имеет место равенство*

$$\int f(x)\, \Phi_b^3(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n(x) \tilde{\mu}_n(x)\, \Phi_b^3(dx), \tag{3.55}$$

где последовательности функций $g_n \in \mathscr{F}U_r$ и мер $\mu_n \in M_{2,r}(F)$ удовлетворяют условиям (3.53), (3.54).

Доказательство. Пусть функция f принадлежит пространству $\mathscr{F}M_{r,\delta}$. Найдем последовательности функций $g_n \in \mathscr{F}U_r$ и мер $\mu_n \in M_{2,r}(F)$, удовлетворяющие соотношениям (3.53), (3.54).

Для каждого натурального n определим функцию $\varphi_n : \bar{U}_r \to C$, полагая

$$\varphi_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^k}{k!} \int_E \psi_n(\alpha,\ x)(I_\alpha^C x,\ Ty)^k\, \mu_a(dx)\, \mu_a(dy),$$

где ψ_n — продолжение функции g_n. В ходе доказательства предложения 3.2 была получена оценка

$$|\varphi_n(\alpha)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} \frac{1}{k!}\, l'(g_n) \int_F \|Ty\|_0^k\, |\mu_n|\,(dy),$$

т. е.

$$|\varphi_n(\alpha)| \leqslant l'_{r,\delta}(y_n)\, l'_{M,r}(\mu_n) \tag{3.56}$$

в силу $l'(g_n) \leqslant l'_{r,\delta}(g_n)$, и было доказано, что функция φ непрерывна на множестве $\bar{U}_r$ и аналитична на множестве U_r. Положим

$$\varphi(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\alpha). \tag{3.57}$$

Из оценок (3.56) и (3.54) следует равномерная сходимость ряда из равенства (3.57), что влечет существование и непрерывность функции φ на множестве $\bar{U}_r$, а также ее аналитичность на множестве U_r.

Из равенства

$$\varphi(\alpha)=\int_E g_n(I_\alpha x)\,\widetilde{\mu}_n(I_\alpha x)\,\mu_a(dx)$$

для любых α, удовлетворяющих неравенствам $1/r\leqslant\alpha\leqslant r$, следуют равенства

$$\varphi(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E g_n(I_\alpha x)\,\widetilde{\mu}_n(I_\alpha x)\,\mu_a(dx)=\int_E f(I_\alpha x)\,\mu_a(dx),$$

откуда вытекают интегрируемость по мере Фейнмана $\Phi_b{}^3$ функции f и равенство

$$\int f(x)\,\Phi_b^3(dx)=\varphi\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right). \tag{3.58}$$

Из предложения 3.2 следует, что

$$\varphi_n\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i)^k}{k!}\int_F\int_E\psi_n\left(e^{i\frac{\pi}{4}},\ x\right)(x,\ I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}}Ty)^k\,\mu_a(dx)\,\mu_n(dy)=$$

$$=\int g_n(x)\,\widetilde{\mu}_a(x)\,\Phi_b^3\,(dx),$$

и, учитывая (3.58), (3.57), получим (3.55).

Пусть теперь b — положительная квадратичная форма на E_0. Обозначим через $S\mathcal{F}_3$ класс всех непрерывных функций на E, представимых в виде

$$u(x)\,\widetilde{\mu}(x)\,e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}p_k(x)},$$

где n — произвольное натуральное число, $\widetilde{\mu}$ — преобразование Фурье меры μ, принадлежащей при некотором $r>1$ пространству $M_{2,r}(F)$, и p_k, u — функции на E, удовлетворяющие тем же требованиям, которые были введены для аналогичных функций при определении класса $S\mathcal{F}_1$.

Теорема 3.3. *Если функция f принадлежит классу $S\mathcal{F}_3$, то функция f будет интегрируемой по мере Фейнмана $\Phi_b{}^3$.*

Доказательство. Пусть

$$f(x)=u(x)\,\widetilde{\mu}(x)\,e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}p_k(x)}$$

принадлежит классу $S\mathcal{F}_3$. Найдем такое число $r>1$, что мера будет принадлежать пространству $M_{2,r}(F)$. Так как для любых $\alpha \in \bar{U}_r$ выполнено неравенство

$$|e^{i \sum\limits_{l_k \geqslant 2} \alpha^{l_k} p_k(x)}| \leqslant 1,$$

где l_k — порядок полинома однородной функции, то функция

$$u(x)\, e^{i \sum\limits_{k=1}^{n} p_k(x)}$$

будет принадлежать пространству $\mathcal{F} U_r$, откуда в силу предложения 3.2 получим, что функция f интегрируема по мере Фейнмана $\Phi_b{}^3$.

§ 4. ОДИН ВАЖНЫЙ КЛАСС ФУНКЦИОНАЛОВ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО МЕРЕ ФЕЙНМАНА

Пусть Q — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)_q$ и нормой $\|\cdot\|_q$, $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — ортонормированный базис в пространстве Q, T — положительно определенный самосопряженный оператор Гильберта—Шмидта, удовлетворяющий равенствам $Te_n = \lambda_n e_n$. Отметим, что тогда $\lambda_n > 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$. Пусть также t — положительное число.

Обозначим через E пространство всех непрерывных отображений $x: [0,\ t] \to Q$, таких, что $x(t) = 0$. Введем норму $\|\cdot\|$ на пространстве E, полагая

$$\|x\| = \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \|x(\tau)\|_q$$

для любых $x \in E$. Пространство E будет банаховым относительно нормы $\|\cdot\|$.

Обозначим через E_0 линейное подпространство пространства E, состоящее из всех отображений $x: [0,\ t] \to TQ$, принадлежащих пространству E, для которых почти всюду существует производная $x'(\tau) \in TQ$ и выполнено условие

$$\int\limits_0^t (T^{-1} x'(\tau),\ T^{-1} x'(\tau))_q \, d\tau < \infty.$$

На пространстве E_0 определим скалярное произведение $(\cdot,\ \cdot)$, считая

$$(x,\ y) = \int\limits_0^t (T^{-1} x'(\tau),\ T^{-1} y'(\tau))_q \, d\tau,$$

и положим $a(x)=(x, x)$. Пространство E_0 будет гильбертовым по отношению к скалярному произведению $(\cdot, \cdot)$ и норма $\|\cdot\|$ будет измеримой в гильбертовом пространстве E_0, т. е. гауссовская мера μ_a, порожденная квадратичной формой a (с нулевым средним), счетно-аддитивна на пространстве E.

Скажем, что отображение $p: E\to R$ принадлежит классу $S\mathcal{F}P_4$, если

$$p(x)=p_4(x, x, x, x) \ \forall x\in E,$$

где $P_4: E\times E\times E\times E\to R$ — 4-линейное симметричное отображение, такое, что для любых ненулевых $x\in E$

$$P_4(x, x, x, x)>0 \tag{4.1}$$

существует число $C_{4,1}$, для которого выполнено неравенство

$$P_4(x, x, x, x)\leqslant C_{4,1}\int\limits_0^t\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4(q_n(\tau))^6\right)^{\frac{2}{3}}d\tau \tag{4.2}$$

для любых $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n(\cdot)e_n\in E$ и существует число $C_{4,2}>0$, для которого выполнено неравенство

$$P_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\leqslant C_{4,2}(p(x_1)p(x_2)p(x_3)p(x_4))^{1/4}$$
$$\forall x_1, x_2, x_3, x_4, \in E. \tag{4.3}$$

Обозначим через E_C комплексификацию пространства E. Скажем, что отображение $f: E\to C$ принадлежит классу $S\mathcal{F}_4$, если оно представимо в виде

$$f(x)=e^{ip(x)}u(x) \quad \forall x\in E,$$

где p — отображение из класса $S\mathcal{F}P_4$, a $u: E_C\to C$ — непрерывное отображение, такое, что отображение $\alpha\mapsto u(x+\alpha y)$ $\forall x, y\in E$ будет голоморфным на C и имеет место оценка

$$|u(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)|\leqslant$$
$$\leqslant C_1(\varepsilon)e^{8(p(x_1)+p(x_2))(\operatorname{Im}\alpha_1+\operatorname{Im}\alpha_2)+\|x_1(0)\|_q^2+\|x_2(0)\|_q^2}e^{\varepsilon\|x_1(0)\|_{4,q}}$$
$$\forall\varepsilon>0, \quad \forall x_1, x_2\in E,$$
$$\forall\alpha_1, \alpha_2\in\{\alpha\in C: |\alpha|\leqslant 2;\ 0\leqslant\arg\alpha\leqslant\pi/4\}, \tag{4.4}$$

где в свою очередь $\|q\|_{4,q}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n^n \ \forall q=\Sigma q_ne_n\in Q.$

Теорема 4.1. *Если функция f принадлежит классу $S\mathcal{F}_4$, то она интегрируема по мере Фейнмана $\Phi_a{}^3$.*

Доказательство. Пусть функция f принадлежит классу $S\mathcal{F}_4$, тогда она представима в виде

$$f(x)=e^{ip(x)}u(x).$$

В свою очередь функция представима в виде

$$p(x)=P_4(x, x, x, x),$$

где p_4 — линейная симметричная функция. Функцию p_4 можно продолжить на $E_C\times E_C\times E_C\times E_C$, продолжая по линейности по каждому аргументу, а значит, также можно продолжить на пространство E_C функции p и f. Обозначим эти продолжения теми же символами.

Положим $U=\{\alpha\in C: 0\leqslant\arg\alpha<\pi/4,\ \alpha\neq 0\}$ и определим функцию $\varphi: U\to C$, полагая

$$\varphi(\alpha)=\int\limits_E f(\alpha x)\mu_a(dx). \tag{4.5}$$

Из оценки (4.4) следует, что для любого компактного подмножества $K\subset U$ найдутся положительные числа C, ε, такие, что будет иметь место неравенство

$$|f(\alpha x)|\leqslant Ce^{-\varepsilon p(x)\operatorname{Im}\alpha+\delta\|x(0)\|_q^2}$$

$$\left(\int e^{2\delta\|x(0)\|_q^2}\mu_a(dx)<+\infty\right)$$

для любых $x\in E$ и $\alpha\in K$. Следовательно, функция φ будет непрерывна на U, и так как для любого гладкого замкнутого контура $\gamma\subset U$ выполнены равенства

$$\int\limits_\gamma \varphi(\alpha)\,d\alpha=\int\limits_\gamma\left(\int\limits_E f(\alpha x)\mu_a(dx)\right)d\alpha=\int\limits_E\left(\int\limits_\gamma f(\alpha x)\,d\alpha\right)\mu_a(dx)=0,$$

то функция φ будет аналитична на множестве

$$U_0=\{\alpha\in C: 0<\arg\alpha<\pi/4,\ \alpha\neq 0\}.$$

Определим отображение $A: E\to E$, полагая

$$(Ax)(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_\tau^t (q_n(\tau_1))^3\,d\tau_1\right)\lambda_n^2 e_n$$

$$\forall\, x=\Sigma\, q_n(\cdot)\,e_n\in E.$$

Для любой непрерывной ограниченной функции g_n на R^n и произвольного $\beta>0$ выполнено равенство

$$\frac{1}{(2\pi\Delta t)^{n/2}}\int\limits_{R^n} g_n(y_1, \ldots, y_n)\, e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(y_k-y_{k+1})^2}{2\Delta t}}\, dy_1\ldots dy_n=$$

$$= \frac{1}{(2\pi\Delta t)^{n/2}} \int\limits_{R^n} g_n \left(x_1 + \frac{1}{4} \beta \sum_{l=1}^{n} \frac{x_l^4 - x_{l+1}^4}{x_l - x_{l+1}} \Delta t, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, x_k + \frac{1}{4} \beta \sum_{l=k}^{n} \frac{x_l^4 - x_{l+1}^4}{x_l - x_{l+1}} \Delta t, \ldots, x_n + \frac{1}{4} \beta x_n^3 \Delta t \right) \times$$

$$\times e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(x_k - x_{k+1})^2}{2\Delta t} - \frac{1}{4} \beta x_1^4 - \frac{1}{32} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k^4 - x_{k+1}^4}{x_k - x_{k+1}} \right)^2 \Delta t} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{4} \beta (3x_k^2 + 2x_k x_{k+1} + x_{k+1}^2 \right) dx_1 \ldots dx_n$$

(здесь $y_{n+1} = 0$, $x_{n+1} = 0$, $\Delta t = t/n$), откуда следует равенство

$$\int\limits_E g(x) \mu_a(dx) = \int g(x + \beta Ax) e^{-\frac{1}{4}\beta \|x(0)\|_{4,q} - \frac{1}{2}\beta^2 B_1(x) + \frac{3}{2}\beta B_2(x)} \mu_a(dx)$$

$$\forall g \in \mathscr{L}_1(E, \mu_a), \ \forall \beta > 0,$$

где

$$B_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^t q^6(\tau_1) d\tau_1 \right) \lambda_n^4,$$

$$B_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^t q_n^2(\tau_1) d\tau_1 \right) \lambda_n^2.$$

Пусть $\alpha \neq 0$, $\pi/8 < \arg \alpha < \pi/4$. Тогда для любого положительного β имеет место равенство

$$\int\limits_E f(\alpha, x) \mu_a(dx) = \int\limits_E f(\alpha x + \alpha\beta Ax) \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\beta \|x(0)\|_{4,q} - \beta^2 B_1(x) + \frac{3}{2}\beta B_2(x)} \mu_a(dx) \tag{4.6}$$

$$(B_1(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_\tau^t q_n^6(\tau_1) d\tau_1 \right) \lambda_n^n,$$

$$B_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_\tau^t q_n^2(\tau_1) d\tau_1 \right) \lambda_n^2.$$

Определим функцию $\psi_\alpha : U_1 \to C$, полагая

$$U_1 = \left\{\beta : |\beta| \geqslant \frac{1}{2},\ -\frac{\pi}{16} \leqslant \arg\beta \leqslant 0\right\}.$$

$$\psi_\alpha(\beta) = \int\limits_E f(\alpha x + \alpha\beta Ax)\, e^{-\frac{1}{4}\beta\|x(0)\|_{4,q} - \frac{1}{2}\beta^2 B_1(x) + \frac{3}{2}\beta B_2(x)} \cdot \mu_a(dx).$$

В силу оценок (4.2)—(4.4) для любого компактного подмножества $K \subset U_1$ будет существовать такое положительное число C, что для любых $x \in E$ и $\beta \in K$ будет выполнено неравенство

$$|f(\alpha x + \alpha\beta Ax)| \leqslant Ce^{\frac{1}{10}\|x(0)\|_{4,q} + \frac{1}{10}B_1(x) + \delta\|x(0)\|_q^2}.$$

Поэтому функция ψ_α будет определена и непрерывна на U_1 и, кроме того, аналитична внутри области U_1, так как для любого гладкого замкнутого контура $\gamma \in U_1$ имеют место равенства

$$\int\limits_\gamma \psi_\alpha(\beta)\, d\beta = \int\limits_E \Bigl(\int\limits_\gamma f(\alpha x + \alpha\beta Ax) \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{4}\beta\|x(0)\|_{4,q} - \frac{1}{2}\beta^2 B_1(x) + \frac{3}{2}\beta B_2(x)} \cdot d\beta\Bigr)\, \mu_a(dx) = 0.$$

Отметим, что для любых положительных C, ε существует число C_0, такое, что выполнена оценка

$$-B_1(x) + CB_2(x) - \varepsilon\,\|x\|^2 \leqslant C_0 \tag{4.7}$$

для любого $x \in E$.

Так как функция ψ_α постоянна на множестве $\{\beta : |\beta| > 1/2,$ $\arg\beta = 0\}$ в силу (4.6), то она будет постоянна на множестве U_1, следовательно, имеет место равенство

$$\varphi(\alpha) = \int f(\alpha x + e^{i\frac{\pi}{16}}\alpha Ax) \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{16}}\|x(0)\|_{4,q} - \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}B_1(x) + \frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{16}}B_2(x)} \times \mu_a(dx) \tag{4.8}$$

для любых $\alpha \neq 0$, $\pi/8 < \arg\alpha < \pi/4$. В силу оценок (4.2)—(4.4) следует, что существует такое положительное число C, что выполнено неравенство

$$|f(\alpha x + \alpha e^{-i\frac{\pi}{16}}Ax)| \leqslant Ce^{\frac{1}{8}\|x(0)\|_{4,q} + \frac{1}{8}B_1(x) + \delta\|x(0)\|_q^2}$$

$$\forall x \in E,\quad \forall \alpha \in \left\{\alpha \in C : \frac{1}{2} \leqslant |\alpha| \leqslant 2,\ \frac{\pi}{8} \leqslant \arg\alpha \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}, \tag{4.9}$$

откуда следует, что существует предел

$$\lim_{\substack{\alpha\to e^{i\frac{\pi}{4}}\\ \alpha\in U}} \varphi(\alpha).$$

Значит, функция f интегрируема по мере Фейнмана $\Phi_a{}^3$.

Следствие 1. Пусть f — продолжение на пространстве E_C функции из класса $S\mathscr{F}_4$. Тогда существует константа C, зависящая от констант C_4, $C_{4,2}$, $C_1(\varepsilon)$, $\delta>0$ из оценок (4.2)—(4.4), такая, что выполнена оценка

$$|f(e^{i\frac{\pi}{4}}x+e^{i\frac{3}{16}\pi}Ax)|\leqslant Ce^{\frac{1}{4}\|x(0)\|_{4,q}+\frac{1}{8}B_1(x)+\delta\|x(0)\|_q^2} \tag{4.10}$$

$$\forall x\in E\left(\int e^{2\delta\|x(0)\|_q^2}\mu_a(dx)<+\infty\right).$$

Кроме того, функция f интегрируема по мере Фейнмана $\Phi_a{}^3$ и имеет место равенство

$$\int f(x)\,\Phi_a^3(dx)=\int_E f(e^{i\frac{\pi}{4}}x+e^{i\frac{3}{16}\pi}Ax)\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{16}}\|x(0)\|_{4,q}-\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}B_1(x)+\frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{16}}B_2(x)}\times\mu_a(dx). \tag{4.11}$$

Доказательство. Оценка (4.10) следует непосредственно из оценок (4.2)—(4.4). Из доказательства теоремы (4.1) следует, что функция f интегрируема по мере Фейнмана $\Phi_a{}^3$ и

$$\int f(x)\,\Phi_a^3(dx)=\lim_{\substack{\alpha\to e^{i\frac{\pi}{4}}\\ \alpha\in U}}\varphi(\alpha).$$

Поэтому, равенство (4.11) следует из равенства (4.8) и оценок (4.7), (4.9).

Теорема 4.2. *Пусть p — функция из класса $s\mathscr{F}P_4$, U_n: $:E_C\to C$ — последовательность непрерывных отображений, таких, что для любого натурального n отображение $\alpha\mapsto U_n(x+\alpha y)$ $\forall x$, $y\in E$ будет голоморфным на C и для каждого $\varepsilon>0$ существует $C_1(\varepsilon)>0$, для которой выполнено неравенство*

$$|u_n(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)|\leqslant C_1(\varepsilon)\times$$

$$\times e^{\varepsilon(p(x_1)+p(x_2)+\|x_1(0)\|_q^2+\|x_2(0)\|_q^2+\|x_1(0)\|_{\varepsilon,q})}$$

$$\forall x_1,\ x_2\in E,\quad \forall n\in N,$$

$$\forall\alpha_1,\ \alpha_2\in\{\alpha\in C\ \ |\alpha|\leqslant 2,\ 0\leqslant\arg\alpha\leqslant\pi/4\}, \tag{4.12}$$

кроме того, для любого $x \in E_C$ существует предел

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

и функция $u: E_C \to C$ будет непрерывна, а отображение $\alpha \mapsto u(x+\alpha y)\ \forall x,\ y \in E$ будет голоморфно на C. Тогда функции $f_n = e^{ip} u_n$, $f = e^{ip} u$ интегрируемы по мере Фейнмана $\Phi_a{}^3$ и имеет место равенство

$$\int f(x)\,\Phi_a^3(dx) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,\Phi_a^3(dx). \tag{4.13}$$

Доказательство. Переходя к пределу в неравенстве (4.12) при $n \to \infty$, получим для функции u оценку (4.4). Следовательно, функции f_n, f принадлежат классу $S\mathcal{F}_4$ и в силу теоремы 4.1 интегрируемы по мере Фейнмана $\Phi_a{}^3$. Из оценки (4.12) и следствия 1 теоремы 4.1 следует существование константы $C > 0$, такой, что

$$|f_n(e^{i\frac{\pi}{4}} x + e^{i\frac{3}{16}\pi} Ax)| \leqslant C e^{\frac{1}{8}\|x(0)\|_{4,q} + \frac{1}{8} B_1(x) + \delta\|x(0)\|_q^2}$$

$$\forall\, n \in N, \quad \forall\, x \in E \left(\int e^{2\delta\|x(0)\|_q^2} \mu_a(dx) < +\infty \right),$$

откуда в силу (4.9) следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(e^{i\frac{\pi}{4}} x + e^{i\frac{3}{16}\pi} Ax) \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{16}} \|x(0)\|_{E,q} - \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{8}} B_1(x) + \frac{3}{2} e^{-i\frac{\pi}{16}} B_2(x)} \times$$

$$\times \mu_a(dx) = \int f(e^{i\frac{\pi}{4}} x + e^{i\frac{3}{16}\pi} Ax) \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{16}} \|x(0)\|_{4,q} - e^{-i\frac{\pi}{8}} \beta_1(x) + \frac{3}{2} e^{-i\frac{\pi}{16}} B_2(x)} \times \mu_a(dx),$$

что в свою очередь влечет в силу (4.11) равенство (4.13).

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ФЕЙНМАНА ПРИ ПОМОЩИ РАВЕНСТВА ПАРСЕВАЛЯ И ДРУГИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФЕЙНМАНА

Пусть E — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, E_0 — линейное подпространство, плотное в E, b — вещественная квадратичная форма на E_0, удовлетворяющая условиям (A1)—(A4) из параграфа 1, F — банахово пространство и существует двойственность $\langle E, F\rangle$ между пространствами E, F. Так же, как в § 1, введем гауссовскую меру μ_a на E (см. (А4)) и скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на E_0 (см. (А3)) и зададим отображение $T: F \to E_0$.

Обозначим через $M(F)$ пространство всех счетно-аддитивных комплекснозначных мер на пространстве F и через $\tilde{M}(E)$ — пространство всех функций E, являющихся преобразованиями Фурье мер из пространства $M(F)$.

Зададим на пространстве $\tilde{M}(F)$ норму $|\cdot|_M$, полагая

$$|\tilde{\mu}|_M = |\mu|(F),$$

где $\tilde{\mu}$ — преобразование Фурье меры μ. Пространство $\tilde{M}(E)$ будет полным пространством относительно нормы $|\cdot|_M$.

Пусть $\mathcal{F}$ — линейное пространство, состоящее из некоторого семейства комплекснозначных функций, определенных на E, содержащее множество $\tilde{M}(E)$. Пусть также на линейном пространстве $\mathcal{F}$ задана локально выпуклая топология, такая, что вложение $\tilde{M}(E) \to \mathcal{F}$ будет непрерывным.

Обозначим через $\mathcal{F}'$ пространство всех непрерывных линейных функционалов на пространстве $\mathcal{F}$ (обобщенных мер).

Напомним, что в пространстве $\tilde{M}(E)$ содержатся функции вида $e^{i\langle\cdot, y\rangle}$, где y — произвольная точка пространства F, и, следовательно, определено преобразование Фурье обобщенных мер: для каждой обобщенной меры $\nu \in \mathcal{F}'$ определяется функция $\tilde{\nu}: F \to C$ равенством

$$\tilde{\nu}(y) = \nu(e^{i\langle\cdot, y\rangle}).$$

Наложим дополнительное ограничение на пространство $\mathcal{F}$, требуя плотность множества $\tilde{M}(E)$ в пространстве $\mathcal{F}$.

Определение 5.1. Говорим, что на пространстве E задана мера Фейнмана $\Phi_b{}^4$, если существует обобщенная мера $\Phi_b{}^4$ из пространства $\mathcal{F}'$, удовлетворяющая равенству

$$\Phi_b^4(\tilde{\mu}) = \int_F e^{-i\frac{1}{2}b(y)}\mu(dy) \tag{5.1}$$

для любых $\mu \in M(F)$. Также говорим, что функция $f: E \to C$ интегрируема по мере Фейнмана $\Phi_b{}^a$, если она принадлежит пространству $\mathcal{F}$. Интегралом функции f назовем величину $\Phi_b{}^4(b)$ и обозначим через

$$\int f(x)\,\Phi_b^4(dx).$$

Замечание. Определение меры Фейнмана $\Phi_b{}^4$ зависит от выбора пространства функций $\mathcal{F}$.

Теорема 5.1. *Обобщенная мера ν из пространства $\mathcal{F}'$ является мерой Фейнмана Φ_b^4 тогда и только тогда, когда ее преобразование Фурье имеет вид*

$$\tilde{\nu}(y)=e^{-\frac{1}{2}ib(y)}. \tag{5.2}$$

Доказательство. Пусть ν — мера Фейнмана на пространстве E. Так как пространству $M(F)$ принадлежит при каждом $y\in F$ мера Дирака δ_y, сосредоточенная в точке y и

$$\tilde{\delta}_y(x)=\int\limits_F e^{i\langle x,y'\rangle}\delta_y(dy')=e^{i\langle x,y\rangle},$$

то в силу (5.1) имеем

$$\tilde{\nu}(y)=\int e^{i\langle x,y\rangle}\nu(dx)=\nu(\tilde{\delta}_y)=\int e^{-\frac{1}{2}ib(y')}\delta_y(dy')=e^{-\frac{1}{2}ib(y)},$$

что влечет равенство (5.2).

И обратно, пусть обобщенная мера ν из пространства $\mathcal{F}'$ имеет преобразование Фурье вида (5.2), тогда в силу равенства Парсеваля для любой меры μ из пространства $M(F)$ выполнено равенство

$$\int\limits_F e^{-\frac{1}{2}ib(y)}\mu(dy)=\int\limits_F\tilde{\nu}(y)\mu(dy)=\nu(\tilde{\mu}),$$

откуда следует, что обобщенная мера ν является мерой Фейнмана на Φ_b^4.

Теорема 5.2. *Если $\mathcal{F}=\tilde{M}(E)$, то существует мера Фейнмана Φ_b^4, определенная равенством* (5.1).

Доказательство. Легко видеть, что равенство (5.1) определяет линейный функционал на пространстве $\mathcal{F}$, поэтому достаточно проверить его непрерывность. Для этого заметим, что

$$\left|\int\tilde{\mu}(x)\Phi_b^4(dx)\right|=\left|\int\limits_F e^{-i\frac{1}{2}b(y)}\mu(dy)\right|\leqslant|\mu|(F)$$

для любого $\mu\in M(F)$, т. е. $|\Phi_b^4(\tilde{\mu})|\leqslant|\tilde{\mu}|_M$, что влечет непрерывность.

Пусть L — конечномерное подпространство пространства F. Обозначим через π_L проектор из пространства E в пространство $E/L^\perp$, где

$$L^\perp=\{x\in E:\forall y\in L\ \langle x,y\rangle=0\}.$$

Лемма 5.1. *Пусть p — полином на пространстве E, представимый в виде $p=q\circ\pi_L$, где q — полином на пространстве*

$E/L^{\perp}$ порядка m; μ — счетно-аддитивная мера на пространстве F, m раз дифференцируемая по подпространству L и удовлетворяющая условиям

$$\int_F \|y\|^k |\mu_L^l|(dy) < \infty \tag{5.3}$$

при $k=1, \ldots, m$; $l=0, 1, \ldots, m$. Тогда существует счетно-аддитивная мера η на пространстве F, такая, что

$$\widetilde{\eta}(x) = p(x)\widetilde{\mu}(x)$$

$$\left(\eta(x) = \int_F e^{i\langle x, y\rangle} \eta(dy)\right) \tag{5.4}$$

для любого $x \in E$, и выполнено равенство

$$\int_F e^{-i\frac{1}{2}b(Ty)} \eta(dy) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_F p_k(y) e^{-\frac{1}{2}ib(Ty)} \mu(dy), \tag{5.5}$$

где

$$p_k(y) = \frac{(i)^k}{k!} \int_E [(I_e^C{}_i \frac{\pi}{4} Ty, D) p(I_e^C{}_i \frac{\pi}{4} x)] \mu_a(dx).$$

Доказательство. Полином p определяет дифференциальный оператор $p(iD)$ m-порядка по подпространству L, а так как пространство $E/L^{\perp}$ конечномерно и мера μ m раз дифференцируема по подпространству L, то определена мера $\eta = p(iD)\mu$ и из свойств преобразования Фурье следует равенство (5.4).

Найдем последовательность конечномерных подпространств E_n пространства E_0, удовлетворяющих условиям (1)—(3) из § 1, а также равенству $E_n = (E_n \cap E_{0,1}) \oplus (E_n \cap E_{0,2})$, где подпространства $E_{0,1}$, $E_{0,2}$ определены в пункте (A1) из § 1.

Возьмем положительное ε и некоторое натуральное n. Так же, как в предложении 1.1, определим на пространстве E меру $\lambda_{\varepsilon,n}(\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,n}(x) = e^{-\varepsilon\|x\|^2})$. Зададим меры η_n, μ_n на пространстве E_0 равенством

$$\mu_n = \mu \circ (\pi_n \circ T)^{-1}, \tag{5.6}$$

$$\eta_n = \eta \circ (\pi_n \circ T)^{-1}, \tag{5.7}$$

где π_n — ортогональный проектор из пространства E_0 в пространство E_n.

Из соотношений (5.6), (5.7) следует оценка

$$\int_{E_n} \|x'\|_0^k |\mu_n| * |\lambda_{\varepsilon,n}| \; (dx') < +\infty \tag{5.8}$$

при $k=1, 2, \ldots, m$.

Из равенства Парсеваля следует

$$\int\limits_E e^{-\frac{1}{2}ib(x')}\lambda_{\varepsilon,n} * \eta_n(dx') = \frac{1}{C_n}\int\limits_{E_n} e^{\frac{1}{2}ib(x)} e^{-\varepsilon\|x\|^2}\tilde{\eta}(x)\,dx,$$

и в силу (5.4)

$$\int\limits_{E_n} e^{-\frac{1}{2}ib(x')}\lambda_{\varepsilon,n} * \eta_n(dx') = \frac{1}{C_n}\int\limits_{E_n} e^{\frac{1}{2}ib(x)} e^{-\varepsilon\|x\|^2} p(x)\,\tilde{\mu}(x)\,dx, \quad (5.9)$$

где $N(n)$ — размерность пространства E_n, а

$$C_n = \lim_{\delta\to+0}\int\limits_{E_n} e^{\frac{1}{2}ib(x)} e^{-\delta\|x\|^2}\,dx,$$

аналогично равенству (1.13) получим равенство

$$\int\limits_{E_n} p(x)\,e^{-\varepsilon\|x\|^2} e^{\frac{1}{2}ib(x)}\tilde{\mu}(x)\,dx =$$

$$= C_n\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{E_n} p_{k,n}(x')\,e^{-\frac{1}{2}ib(x')}\lambda_{\varepsilon,n} * \mu_n(dx'), \quad (5.10)$$

где

$$p_{k,n}(x') = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N(n)}{2}}}\,\frac{(i)^k}{k!}\int\limits_{E_n}\left[\left(I^{C}_{e^{i\frac{\pi}{4}}}x',\ D\right)p\left(I^{C}_{e^{i\frac{\pi}{4}}}x\right)\right]e^{-\frac{1}{2}(x,x)}\,dx, \quad (5.11)$$

и существование интегралов

$$\int\limits_{E_n} p_{k,n}(x')\,e^{-\frac{1}{2}ib(x')}\lambda_{\varepsilon,n} * \mu_n(dx')$$

следует из оценки (5.8).

Из равенств (5.9), (5.10) следует равенство

$$\int\limits_{E_n} e^{-\frac{1}{2}ib(x')}\lambda_{\varepsilon,n} * \eta_n(dx') = \sum_{k=0}^{m}\int\limits_{E_n} p_{k,n}(x')\,e^{-\frac{1}{2}ib(x')}\lambda_{\varepsilon,n} * \mu_n(dx'),$$

откуда, переходя к пределу при $\varepsilon\to+0$, получим

$$\int\limits_{E_n} e^{-\frac{1}{2}ib(x')}\eta_n(dx') = \int\limits_{E} p_{k,n}(x)\,e^{-\frac{1}{2}ib(x')}\mu_a(dx'). \quad (5.12)$$

В силу равенств (5.11) и (5.6) имеет место равенство

$$p_k(y) = \lim_{n\to\infty} p_{k,n}(\pi_n Ty).$$

Следовательно, можно перейти к пределу при $n\to\infty$ в равенстве (5.12), что влечет равенство (5.5).

Пусть функция f принадлежит пространству $\mathcal{F}M_r^\infty$ (см. § 3) **и представима в виде** $f=g\tilde{\mu}$, где функция g принадлежит пространству $\mathcal{F}U_r$, $\tilde{\mu}$ — преобразование Фурье счетно-аддитивной меры μ на F, такой, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(r+1)^{2n} a_n(\psi) \int_F \|Ty\|^n |\mu|(dy) < \infty$$

(здесь ψ — продолжение функции g на $U_r E$). Для каждой непрерывной ограниченной функции $\varphi: F\to C$ определим величину

$$l'_\varphi(g, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \int_F \varphi(y) p_k(y) \mu(dy) \right|,$$

где

$$p_k(y) = \frac{(i)^k}{k!} \int_e \psi^{(k)}(I^C_{i\frac{\pi}{4}} x)(I^C_i Ty)^k \mu_a(dx).$$

На пространстве $\mathcal{F}M_r^\infty$ определим преднорму l_φ^∞, полагая

$$l_\varphi^\infty(f) = \inf \left(\sum_{n=1}^{\infty} l'_\varphi(g_n, \mu_a) \right),$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \tilde{\mu}_n,$$

где инфинум берется по всевозможным представлениям

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \tilde{\mu}_n$$

и пары $(g_n, \tilde{\mu}_n)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} l^\infty(g_n, \mu_n) < \infty.$$

Обозначим через $\mathcal{F}M_{r,C}^\infty$ линейное пространство $\mathcal{F}M_r^\infty$ с локально выпуклой топологией, порожденной семейством преднорм l_φ^∞, где φ пробегает пространство непрерывных ограниченных функций на F со значениями в C. Легко видеть, что исходная топология на пространстве $\mathcal{F}M_r^\infty$ будет сильнее последней топологии.

Лемма 5.2. *Для каждого $r>1$ множество $\tilde{M}(E)$ плотно в пространстве $\mathcal{F}M_{r,C}^\infty$.*

Доказательство. Легко видеть, что достаточно показать, что любая функция $f\in\mathcal{F}_{r,C}^\infty$, представимая в виде $f=\tilde{\mu}\cdot(p\cdot\pi_L)$, принадлежит пространству $\tilde{M}(E)$, где L — конечномерное подпространство пространства F, π_L — проектор из пространства E на пространство $E/L^\perp$, p — полином порядка m на пространстве $F/L^\perp$ и μ — счетно-аддитивная мера на пространстве F, удовлетворяющая условиям

$$\int \|Ty\|_0^k |\mu|(dy)<\infty$$

при $k=1,\dots,m$ и m раз дифференцируемая по подпространству L. Положим $\eta=p(iD)\mu$. Так как мера μ m раз дифференцируема по подпространству L и полином p имеет порядок m, то $\eta\in M(F)$. Из свойств преобразования Фурье следует, что

$$\tilde{\eta}(x)=p(\pi_n x)\tilde{\mu}(x),$$

откуда получим, что функция f принадлежит множеству $\tilde{M}(E)$.

Теорема 5.3. *Если $\mathcal{F}=\mathcal{F}M_{r,C}^\infty$, то существует мера Фейнмана $\Phi_b{}^4$, причем, если функция f принадлежит пространству $\mathcal{F}M_{r,C}^\infty$, то имеет место равенство*

$$\int f(x)\Phi_b^4(dx)=\int f(x)\Phi_b^3(dx). \tag{5.13}$$

Доказательство. Пусть функция f принадлежит пространству $\mathcal{F}M_{r,C}^\infty$. Тогда ее можно представить в виде

$$f=\sum_{n=1}^{\infty} g_n\tilde{\mu}_n, \tag{5.14}$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} l^\infty(g_n,\ \mu_n)<\infty. \tag{5.15}$$

Положим

$$\Phi_b^4(f)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_F p_{n,k}(y)e^{-\frac{1}{2}ib(Ty)}\mu(dy), \tag{5.16}$$

где

$$p_{n,k}(y)=\frac{(i)^k}{k!}\int_E \psi_n^{(k)}(I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}}x)(I^C_{e^{i\frac{\pi}{4}}}Ty)^k\mu_a(dx).$$

Из теоремы 3.1 следует, что имеет место равенство (5.13). В силу (5.16) и (5.15) имеет место неравенство

$$\left| \int f(x)\, \Phi_b^4(dx) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} l^{\infty}(g_n,\ \mu_n), \tag{5.17}$$

причем из теоремы следует, что неравенство (5.17) выполнено для любого представления вида (5.14), откуда следует оценка

$$\left| \int f(x)\, \Phi_b^4(dx) \right| \leqslant \| f \|_r^{\infty},$$

а значит, функционал $\Phi_b{}^4$ непрерывен.

Теорема 5.4. *Если $f \in PM$, то имеют место равенства*

$$\int f(x)\, \Phi_b^1(dx) = \int f(x)\, \Phi_b^2(dx) = \int f(x)\, \Phi_b^3(dx) = \int f(x)\, \Phi_b^4(dx).$$

Доказательство теоремы следует из утверждений теорем 3.1, 5.3, 1.1, 1.2.

ГЛАВА III

Представление решений дифференциальных уравнений континуальными интегралами

§ 1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть Q — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_q$, a — положительно определенная квадратичная форма, определенная на линейном подпространстве Q_0, плотном в пространстве Q, задающая на Q_0 скалярное произведение $(\cdot,\ \cdot)_q$, относительно которого пространство Q_0 будет гильбертовым. Пусть также P — банахово пространство, находящееся в двойственности $\langle Q,\ P\rangle$ с пространством Q, и гауссовская мера μ_a, порожденная квадратичной формой a (с нулевым средним), счетно-аддитивна на пространстве Q, т. е. норма $\|\cdot\|_q$ измерима в гильбертовом пространстве Q_0.

Определим на пространстве Δ_a оператор Лапласса, порожденный скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)_a$, полагая для каждой дважды дифференцируемой функции $u: Q\to C$ и любой точки $q\in Q$

$$\Delta_a u(q) = \mathrm{tr}_{(\cdot,\cdot)_a} u''(q),$$

где выражение $\mathrm{tr}_{(\cdot,\cdot)_a} u''(q)$ в произвольном ортонормированном базисе $l_1, \ldots, l_n, \ldots$ в Q представимо

$$\mathrm{tr}_{(\cdot,\cdot)_a} u''(q) = \sum_{n=1}^{\infty} u''(q)(l_n,\ l_n).$$

Скажем, что поставлена задача Коши для уравнения Шредингера с потенциалом $v: Q\to R$, если задано уравнение Шредингера

$$\frac{\partial u(t,\ q)}{\partial t} = \frac{1}{2} i\alpha\Delta_a u(t,\ q) - iv(q)\,u(t,\ q) \quad (\alpha > 0) \tag{1.1}$$

и начальное условие

$$u(0,\ q) = u_0(q) \quad \forall\, q\in Q, \tag{1.2}$$

где $u_0: Q\to C$. Решением задачи Коши для уравнения Шредингера назовем функцию $u: [0,\ +\infty)\times Q\to C$, дифференцируемую по t для любых $t\in[0,\ +\infty)$, $q\in Q$, для которой определено выражение $\Delta_a u(t,\ \cdot)$ при любом $t\in[0,\ +\infty)$.

Пусть $T_p : P \to Q_0$ — сопряженный оператор к вложению $Q_0 \to Q$, где пространство Q_0 рассматривается с гильбертовой топологией, а пространства Q, P находятся в двойственности $\langle Q, P \rangle$.

Обозначим через $M_a(P)$ пространство всех счетно-аддитивных комплекснозначных мер на P, каждая из которых удовлетворяет условию

$$\int_P a(T_p P)\,\mu(dP) < +\infty. \tag{1.3}$$

Пусть $t>0$. Обозначим через E пространство всех непрерывных отображений $x : [0, t] \to Q$. Введем норму $\|\cdot\|$ на пространстве E, полагая

$$\|x\| = \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \|x(\tau)\|_q$$

для любого $x \in E$. Пространство E будет банаховым относительно нормы $\|\cdot\|$.

Обозначим через E_0 линейное подпространство пространства E, состоящее из всех отображений $x : [0, t] \to Q_0$, принадлежащих пространству E, для которых почти всюду существует производная $x'(\tau) \in Q_0$ и выполнено условие $x(t)=0$,

$$\int_0^t (x'(\tau),\ x'(\tau))_a\, d\tau < \infty.$$

На пространстве E_0 определим скалярное произведение $(\cdot,\ \cdot)$, считая

$$(x,\ y) = \int_0^t (x'(\tau),\ y'(\tau))\, d\tau,$$

и положим $b(x) = (x,\ x)$. Тогда пространство E_0 будет гильбертовым по отношению к скалярному произведению $(\cdot,\ \cdot)$ и норма $\|\cdot\|$ будет измеримой в гильбертовом пространстве E_0, т. е. гауссовская мера μ_b, порожденная квадратичной формой b (с нулевым средним), счетно-аддитивна на пространстве E.

Обозначим через F множество счетно-аддитивных мер на $[0, t]$ со значениями в пространстве P, имеющих ограниченную вариацию. Множество F будет банаховым пространством с нормой $\|y\|_F = |y|([0, t])$. Зададим двойственность $\langle E, F \rangle$, полагая

$$\langle x,\ y \rangle = \int_0^t \langle x(\tau),\ y(d\tau) \rangle$$

для любых $x \in E$, $y \in F$.

Сопряженное отображение $T : F \to E_0$ к вложению $E_0 \to E$ имеет вид

$$(Ty)(\tau) = T_P(y([0,\ \tau])) \quad \forall\, \tau \in [0,\ t]. \tag{1.4}$$

Обозначим через $\mathfrak{X}_F$ наименьшую σ-алгебру подмножеств пространства F, порожденную алгеброй цилиндрических подмножеств пространства F относительно двойственности $\langle E, F\rangle$.

Предложение 1.1. *Если ν — счетно-аддитивная мера на P, то существует счетно-аддитивная мера μ_ν на σ-алгебре $\mathfrak{X}_F$, удовлетворяющая равенству*

$$\int_F f(y)\,\mu_\nu(dy) = f(0) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \Big[\int_P \dots \int_P f(p_1\delta_{t_1} + \dots + p_n\delta_{t_n}) \times$$

$$\times \nu(dp_1)\dots\nu(dp_n)\Big]\,dt_1 \dots dt_n \tag{1.5}$$

(δ_τ — мера Дирака на $[0, t]$), сосредоточенная в точке $\tau \in [0, t]$) *для любой ограниченной функции $f: F \to C$, представимой в виде $f = f_0 \cdot T$, где f_0 непрерывная функция на E_0.*

Доказательство. Для каждого натурального n обозначим через D_n n-мерный симплекс.

$$D_n = \{(t_1, \dots, t_n) : t \geqslant t_1 \geqslant t_2 \geqslant \dots \geqslant t_n \geqslant 0\},$$

и определим вложение $\pi_n : D_n \times P^n \to F$ ($P^n = P \times \dots \times P$), полагая

$$\pi_n(t_1, \dots, t_n, p_1, \dots, p_n) = p_1\delta_{t_1} + \dots + p_n\delta_{t_n}.$$

Так как для каждого $x \in E$ отображение

$$D_n \times P^n \to F : (t_1, \dots, t_n, p_1, \dots, p_n) \mapsto$$

$$\mapsto \langle x, \pi_n(t_1, \dots, t_n, p_1, \dots, p_n)\rangle = \langle x(t_1), p_1\rangle + \dots + \langle x(t_n), p_n\rangle$$

непрерывно, то вложение π_n будет измеримым относительно σ-алгебры $\mathfrak{X}_F$ (на пространстве $D_n \times P^n$ берется борелевская σ-алгебра).

Мера $\lambda_n \otimes \nu \otimes \dots \otimes \nu$ является счетно-аддитивной на пространстве $D_n \times P^n$ (λ_n — мера Лебега на пространстве R^n). Следовательно, мера $\mu_{n,\nu} = \lambda_n \otimes \nu \otimes \dots \otimes \nu) \cdot \pi_n^{-1}$ будет счетно-аддитивной на σ-алгебре $\mathfrak{X}_F$, имеет место равенство

$$|\mu_{n,\nu}|(F) = \lambda_n(D_n)(|\nu|(P))^n = \frac{t^n}{n!}(|\nu|(P))^n. \tag{1.6}$$

Из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(|\nu|(P))^n < +\infty \tag{1.7}$$

будет сходиться по вариации ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_{n,\nu}$ и определять счетно-аддитивную меру $\mu_\nu = \delta + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{n,\nu}$ на σ-алгебре $\mathfrak{X}$.

В гильбертовом пространстве Q_0 наименьшая σ-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами, совпадает с σ-алгеброй борелевских подмножеств, поэтому функция f_0 будет измеримой относительно этой σ-алгебры, а значит, и функция f будет измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{X}_F$. Так как она ограничена, то она будет интегрируема по мерам μ_ν, $\mu_{n,\nu}$, и в силу оценки (1.7) и равенства (1.6) имеем равенство

$$\int_F f(y)\,\mu_\nu(dy) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_F f(y)\,\mu_{n,\nu}(dy).$$

Учитывая равенства

$$\int_F f(y)\,\mu_{n,\nu}(dy) = \int_0^t \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} \int_P \ldots \int_P f(\pi_n(t_1, t_2, \ldots, t_n, p_1, \ldots, p_n)) \times$$

$$\times\, \nu(dp_1) \ldots \nu(dp_n)\, dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \int_0^t \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} \int_P \ldots \int_P f(p_1\delta_{t_1} + \ldots + p_n\delta_{t_n}) \times$$

$$\times\, \nu(dp_1) \ldots \nu(dp_n)\, dt_1 \ldots dt_n,$$

получим равенство (1.5)

Теорема 1.1. *Если функции* $u_0 : Q \to C$, $v : Q \to R$

$$u_0(q) = \int_P e^{i\langle q, p\rangle} \nu_0(dp), \quad v(q) = \int_P e^{i\langle q, p\rangle}\, \nu(dp),$$

где ν_0, ν — *меры из пространства* $M_a(P)$, *то задача Коши для уравнения Шредингера* (1.1), (1.2) *имеет решение, представимое в виде*

$$u(t, q) = \int u(x(0) + q)\, e^{-i\int_0^t v(x(\tau)+q)\,d\tau}\, \Phi_b^3(dx). \tag{1.8}$$

Доказательство. Положим

$$u(t, q) = \int_P e^{i\langle q, p\rangle} e^{-\frac{1}{2} ia(T_p p)t}\, \nu_0(dp) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_0^t \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} \int_P \ldots \int_P e^{i\left\langle q, p + \sum_{k=1}^{n} p_k \right\rangle} \times$$

$$\times e^{-i\frac{1}{2}a\left(T_p\left(p+\sum_{k=1}^{n}p_k\right)\right)(t-t_1)-i\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}a\left(T_p\left(p+\sum_{l=k}^{n}p_l\right)\right)(t_{k-1}-t_k)}\times$$

$$\times e^{-i\frac{1}{2}a(T_pp)t_n}\nu(dp_1)\dots\nu(dp_n)\nu_0(dp)\,dt_1\dots dt_n. \qquad (1.9)$$

Из оценок

$$\left|\int_0^t\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{n-1}}\int_P\dots\int_P e^{i\left\langle q,p+\sum_{k=1}^{n}p_k\right\rangle}e^{-i\frac{1}{2}a\left(T_p\left(p+\sum_{k=1}^{n}p_k\right)\right)(t-t_1)}\times\right.$$

$$\times e^{-i\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}a\left(T_p\left(p+\sum_{l=k}^{n}p_l\right)(t_{k-1}-t_k)\right.}\times$$

$$\left.\times e^{-\frac{1}{2}ia(T_pp)t_n}\nu(dp_1)\dots\nu(dp_n)\nu_0(dp)\,dt_1\dots dt_n\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^t\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{n-1}}dt_1\dots dt_n(|\nu|(P))^n|\nu_0|(P)=\frac{1}{n!}(|\nu|(P))^n|\nu_0|(P) \quad (1.10)$$

и (1.7) следует сходимость ряда в равенстве (1.9). Имеет место равенство

$$\Delta_a u(t,q)=-\int_P e^{i\langle q,p\rangle}a(T_ap)e^{-\frac{1}{2}ia(T_p(p))}\nu_0(dp)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\int_0^t\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{n-1}}\int_P\dots\int_P e^{i\left\langle q,P+\sum_{k=1}^{\infty}p_k\right\rangle}\times$$

$$\times a\left(T_a\left(p+\sum_{k=1}^{n}p_k\right)\right)e^{-\frac{1}{2}ia\left(T_p\left(p+\sum_{k=1}^{n}p_k\right)\right)(t-t_1)}\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}i\sum_{k=2}^{n}a\left(T_a\left(p+\sum_{l=k}^{n}p_l\right)\right)(t_{k-1}-t_k)-\frac{1}{2}ia(T_pp)t_n}\times$$

$$\times\nu(dp_1)\dots\nu(dp_n)\nu_0(dp)\,dt_1\dots dt_n. \qquad (1.11)$$

Сходимость ряда в равенстве (1.11) следует из оценок

$$\left|\int_0^t\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{n-1}}\int_P\dots\int_P e^{i\left\langle q,p+\sum_{k=1}^{n}p_k\right\rangle}\times\right.$$

$$\times a\left(T_p\left(p+\sum_{k=1}^{n} p_k\right)\right) e^{-\frac{1}{2} ia\left(T_p\left(p+\sum\limits_{k=1}^{n} p_k\right)\right)(t-t_1)} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2} i \sum\limits_{k=2}^{n} a\left(T_p\left(p+\sum\limits_{l=k}^{n} p_l\right)\right)(t_{k-1}-t_k)-\frac{1}{2} ia(T_p p) t_n} \times$$

$$\times \nu(dp_1) \ldots \nu(dp_n) \nu_0(dp)\, dt_1 \ldots dt_n \Bigg| \leqslant \int_0^t \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_1 \ldots dt_n \times$$

$$\times \int_P \ldots \int_P a\left(T_p\left(p+\sum_{k=1}^{n} p_k\right)\right) |\nu|(dp_1) \ldots |\nu|(dp_n) |\nu_0|(dp) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n!}(n+1) \int_P \ldots \int_P \left[a(T_p p)+\sum_{k=1}^{n} a(T_p p)\right] \times$$

$$\times |\nu|(dp_1) \ldots |\nu|(dp_n) |\nu_0|(dp) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n+1}{(n-1)!}(|\nu|(P))^{n-1} \int_P (1+a(T_p p)) |\nu|(dp) \int_P (1+a(T_p p)) |\nu_0|(dp).$$

В силу (1.9), (1.11) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x)=\int_P e^{i\langle q, p\rangle}\left(-\frac{1}{2} ia(T_p(p))\right) e^{-\frac{1}{2} ia(T_p p) t} \nu_0(dp)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\left[\int_0^t \int_0^{t_2} \ldots \int_0^{t_{n-1}} e^{i\left\langle q, p+\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k\right\rangle} e^{-\frac{1}{2} ia\left(T_p\left(p+\sum\limits_{k=1}^{n} p_k\right)\right)(t-t_2)} \times\right.$$

$$\times e^{i \frac{1}{2} \sum\limits_{k=2}^{n} a\left(T_p\left(p+\sum\limits_{l=k}^{n} p_l\right)\right)(t_{k-1}-t_k)} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2} id(T_p p) t_n} \nu(dp_1) \ldots \nu(dp_n) \nu_0(dp)\, dt_1 \ldots dt_n+$$

$$+\int_0^t \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} e^{i\left\langle q, p+\sum\limits_{k=1}^{n} p_k\right\rangle}\left(-i \frac{1}{2} a\left(T_p\left(p+\sum_{k=1}^{n} p_k\right)\right)\right) \times$$

$$\times e^{-i \frac{1}{2} a\left(T_p\left(p+\sum\limits_{k=1}^{n} p_k\right)\right)(t-t_1)} e^{-i \frac{1}{2} \sum\limits_{k=2}^{n} a\left(T_p\left(p-\sum\limits_{l=k}^{n} p_l\right)\right)(t_{k-1}-t_k)} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2} ia(T_p p) t_n} \nu(dp_1) \ldots \nu(dp_n) \nu_0(dp)\, dt_1 \ldots dt_n = \frac{1}{2} i\Delta_a u(t, p) -$$

$$- i \int\limits_P e^{i\langle q, p_1\rangle} \nu(dp_1) \Bigl[\int\limits_P e^{i\langle q, p\rangle} e^{-\frac{1}{2} ia(T_p p) t} \nu_0(dp) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (-i)^{n-1} \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_2} \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} e^{i\left\langle q, p + \sum\limits_{k=2}^{n} p_k \right\rangle} \times$$

$$\times e^{-i\frac{1}{2} a\left(T_p\left(p + \sum\limits_{k=2}^{n} p_k\right)\right)(t - t_2)} e^{-i\frac{1}{2} \sum\limits_{k=3}^{n} a\left(T_p\left(p + \sum\limits_{l=k}^{n} p_l\right)\right)(t_{k-1} - t_k)} \times$$

$$\times e^{-i\frac{1}{2} T_p(p) t_n} \nu(dp_2) \ldots \nu(dp_n) \nu_0(dp)\, dt_1 \ldots dt_n \Bigr] =$$

$$= \frac{1}{2} i\Delta_a u(t, p) - iv(p) u(t, p), \tag{1.12}$$

откуда следует, что функция u является решением задачи Коши для уравнения Шредингера (1.1), (1.2), так как

$$u(0, q) = \int e^{i\langle q, p\rangle} \nu_0(dp) = u_0(q). \tag{1.13}$$

Вложение $\pi_0: P \to F: p \mapsto p\delta_0$ определяет меру $\delta_{\nu_0} = \nu_0 \cdot \pi_0^{-1}$ на σ-алгебре $\mathfrak{X}_F$.

Положим

$$\varphi_q(y) = e^{i\langle q, y([0, t])\rangle}$$

$$\forall\, y \in F \quad (y([0, t]) \in P)$$

и $\eta_q = \varphi_q(\delta_{\nu_0} * \mu_\nu)$.

Для любой ограниченной функции $f: F \to C$, измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{X}_\nu$, в силу (1.5) имеем

$$\int\limits_F f(y)\, \delta_{\nu_0} * \mu_\nu(dy) = \int\limits_F \int\limits_F f(y_1 + y_2)\, \delta_{\nu_0}(dy_1)\, \mu_\nu(dy_2) =$$

$$= \int\limits_F \Bigl(\int\limits_P f(y_1 + p\delta_0)\, \nu_0(dp) \Bigr) \mu_\nu(dy_2) = \int\limits_P f(p\delta_0)\, \nu_0(dp) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} f\Bigl(p\delta_0 + \sum_{k=1}^{n} p_k \delta_{t_k}\Bigr) \nu(dp_1) \ldots \nu(dp_n) \times$$

$$\times \nu_0(dp)\, dt_1 \ldots dt_n. \tag{1.14}$$

Значит, для любого $x \in E$ выполнены равенства

$$\widetilde{\eta}_q(x) = \int\limits_F e^{i\langle x, y\rangle} \eta_q(dy) = \int\limits_F e^{i\langle x,y\rangle} e^{i\langle q, y([0,t])\rangle} \delta_{\nu_0} * \mu_\nu(dy) =$$

$$= \int\limits_P e^{i\int\limits_0^t \langle x(\tau), p\rangle \delta_0(d\tau)} e^{i\langle q, p\rangle} \nu_0(dp) +$$

$$+ \sum_{n=1}^\infty (-i)^n \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} \int\limits_P \ldots \int\limits_P e^{i\int\limits_0^t \langle x(\tau), p\rangle \delta_0(d\tau)} e^{i\sum\limits_{k=1}^n \int\limits_0^t \langle x(\tau), p_k\rangle d_{t_k}(d\tau)} \times$$

$$\times e^{i\left\langle q, p + \sum\limits_{k=1}^n p_k\right\rangle} \nu(dp_1) \ldots \nu(dp_n) \nu_0(dp)\, dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \int\limits_P e^{i\langle x(0)+q, p\rangle} \nu_0(dp) + \sum_{n=1}^\infty (-i) \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} \left(\int\limits_P e^{i\langle x(0)+q, p\rangle} \nu_0(dp) \right) \times$$

$$\times \left(\prod_{k=1}^n \int\limits_P e^{i\langle x(t_k)+q, p_k\rangle} \nu(dp_k) \right) dt_1 \ldots dt_n = u_0(x(0)+q) +$$

$$+ \sum_{n=1}^\infty (-i)^n u_0(x(0)+q) \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} v(x(t_1)+q) \ldots v(x(t_n)+q)\, dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= u_0(x(0)+q) + u_0(x(0)+q) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-i)^n}{n!} \int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t v(x(t_1)+q) \ldots$$

$$\ldots v(x(t_n)+q) \times dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= u_0(x(0)+q) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-i)^n}{n!} \left(\int\limits_0^t v(x(\tau)+q)\, d\tau \right)^n =$$

$$= u_0(x(0)+q)\, e^{-i\int\limits_0^t v(x(\tau)+q)\, d\tau},$$

или

$$\widetilde{\eta}_q(x) = u_0(x(0)+q)\, e^{-i\int\limits_0^t v(x(\tau)+q)\, d\tau}. \tag{1.15}$$

Для каждого $y \in F$ положим

$$f(y) = e^{-\frac{1}{2} ib(Ty)}.$$

Функция f ограничена и измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{X}_F$, так как представима в виде $f = f_0 \circ T$, где $f_0 : E_0 \to C : x \to e^{-\frac{1}{2} ib(x)}$ — непрерывная функция в гильбертовом пространстве E_0. Кроме того, для каждого $y \in F$ вида $y = p\delta_0 + p_1\delta t_1 + \ldots + p_n \delta_{t_n}$ имеет место равенство

$$f(y) = e^{-\frac{1}{2} i \int\limits_0^t a(T_p(y([0, \tau])))d\tau} = e^{-\frac{1}{2} i \int\limits_0^1 a\left(T_p\left(p + \sum\limits_{t_k \leqslant \tau} p_k\right)\right) d\tau} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2} ia\left(T_p\left(p + \sum\limits_{k=1}^n p_k\right)\right)(t - t_1)]} e^{-\frac{1}{2} i \sum\limits_{k=2}^n a\left(T_p\left(p + \sum\limits_{l=k}^n p_l\right)\right)(t_{k-1} - t_k)} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2} ia(T_p p)t_n},$$

откуда в силу равенств (1.14), (1.9) получим

$$u(t, q) = \int\limits_F f(y) e^{i\langle q, y([0, t])\rangle} \delta_{v_0} * \mu(dy) = \int\limits_F e^{-\frac{1}{2} ib(Ty)} \eta_q(dy). \quad (1.16)$$

Из определения 5.1 главы II следует, что

$$u(t, q) = \int\limits_E \widetilde{\eta}_q(x) \Phi_b^A(dx),$$

и, учитывая равенство (1.13), получим (1.8).

Замечание. Из соотношений (1.9)—(1.12) следует, что функции $u(t, \cdot)$, $u'(t, \cdot)$ принадлежат пространству $\widetilde{M}(Q)$ и отображение $t \mapsto u'(t, \cdot)$ непрерывно в пространстве $\widetilde{M}(Q)$, откуда получим, что решение задачи Коши для уравнения Шредингера (1.1), (1.2), представленное в виде (1.8), принадлежит пространству $C^1([0, +\infty), \widetilde{M}(Q))$.

Определим на пространстве $\widetilde{M}_a(Q)$ норму $l_{M,a}$, полагая

$$l_{M,a}(\widetilde{\nu}) = \int\limits_P (a(T_p p) + 1)|\nu|(dp) \quad \forall \nu \in M_a(P).$$

Обозначим через $l_{Q,M}$ норму на пространстве $\widetilde{M}(Q)$. Тогда $l_{Q,M}(\widetilde{\nu}) = |\nu|(P)$ для любого $\nu \in M(P)$.

Обозначим через $\widetilde{M}'(Q)$, $\widetilde{M}_a'(Q)$ сильные сопряженные пространства к пространствам $\widetilde{M}(Q)$, $\widetilde{M}_a(Q)$ соответственно и через $l'_{M,a}$, $l'_{Q,M}$ нормы на пространствах $\widetilde{M}_a'(Q)$.

Отображение $\Delta_a : \tilde{M}_a(Q) \to \tilde{M}(Q) : \tilde{\nu} \mapsto \Delta_a \tilde{\nu}$ непрерывно в силу равенства

$$\Delta_a \tilde{\nu}(q) = \int_P e^{i\langle q, p\rangle} a(T_p p)\,\nu(dp) \quad \forall\, \nu \in M_a(P),$$

поэтому определено сопряженное к нему отображение $\tilde{M}'(Q) \to \tilde{M}_a'(Q)$, которое будет также непрерывно. Это отображение также обозначаем через Δ_a.

Поставим задачу Коши для обобщенного уравнения Шредингера

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi(t) = \frac{1}{2} i\Delta_a \xi(t) + v\xi(t), \tag{1.17}$$

задавая начальное условие

$$\xi(0) = \xi_0 \in \tilde{M}'(Q) \tag{1.18}$$

и требуя $\xi(t) \in \tilde{M}'(Q)$, $\frac{\partial}{\partial t}\xi(t) \in \tilde{M}_a'(Q)$. Отметим, что произведение v для $\forall v \in \tilde{M}(Q)$, $\forall \in \tilde{M}'(Q)$ определяется равенством $v(\tilde{\nu}) = (v\tilde{\nu})$ для любого $\nu \in M(R)$ и равенство (1.17) понимается как равенство элементов из пространства $\tilde{M}_a'(Q)$.

Теорема 1.2. *Если обобщенная мера ν_0 принадлежит пространству $M(Q)$ и функция v принадлежит пространству $\tilde{M}(Q)$, то существует решение $\xi : [0, +\infty) \to \tilde{M}'(Q)$ задачи Коши обобщенного уравнения Шредингера* (1.17), (1.18) *при* $\xi_0 = \gamma(\nu_0)$, *определяемое равенством*

$$\xi(t)(u) = \iint_Q u(x(0) + q)\, e^{-i\int_0^t v(x(\tau)+q)\,d\tau}\, \Phi_b^a(dx)\,\nu_0(dq) \tag{1.19}$$

для любого $u \in \tilde{M}(Q)$.

Доказательство. Из равенств (1.19), (1.14) следует равенство

$$\xi(t)(\tilde{\rho}) = \int_Q \int_F \int_P e^{-\frac{1}{2} ib(T(y+p\delta_\gamma))} e^{i\langle q, y([0,t])+p\delta_0\rangle} \nu_0(dq)\,\rho(dp)\,\mu_\nu(dy)$$

$$(v = \tilde{\nu},\ \nu \in M(P)), \tag{1.20}$$

откуда получим оценку

$$|\xi(t)(\tilde{\rho})| \leqslant |\nu_0|(Q)\,|\mu_\nu|(F)\,(\rho)(P) = |\nu_0|(Q)\,|\mu_\nu|(F)_{Q,M}(\tilde{\rho}).$$

Значит, при любом t обобщенная мера $\xi(t)$ принадлежит пространству $\tilde{M}'(Q)$. В силу (1.9), (1.20), производя замену

$$t_1' = t - t_n,\ \ldots,\ t_n' = t - t_1 \quad (t \geqslant t_1' \geqslant \ldots \geqslant t_n' \geqslant 0),$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi(t)(\widetilde{\rho})=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_Q\int\limits_P e^{i\langle q,p\rangle}e^{-\frac{1}{2}ia(T_p p)t}\nu_0(dq)\rho(dp)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_Q\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1'}\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}'}\int\limits_P\ldots\int\limits_P e^{i\langle q,p+\sum_{k=1}^{n}p_k\rangle}\times$$

$$\times e^{-i\frac{1}{2}a\left(T_p\left(p+\sum_{k=1}^{\infty}p_k\right)\right)t_k'}e^{-i\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}a\left(T_p\left(p+\sum_{l=k}^{\infty}p_l\right)\right)(t_{n+1-k}'-t_{n+2-k}')}\times$$

$$\times e^{-i\frac{1}{2}a(T_p p)(t-t_1')}\nu_0(dq)\nu(dp_1)\ldots\nu(dp_n)\rho(dp)\,dt_1'\ldots dt_n'=$$

$$=\int\limits_Q\int\limits_P e^{i\langle q,p\rangle}\left(-\frac{1}{2}ia(T_p(p))\right)e^{-\frac{1}{2}ia(T_p p)t}\nu_0(dq)\rho(dp)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\int\limits_Q\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1'}\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}'}\int\limits_P\ldots\int\limits_P e^{i\langle q,p+\sum_{k=1}^{n}p_k\rangle}\times$$

$$\times e^{-i\frac{1}{2}a\left(T_p\left(p+\sum_{k=1}^{n}p_k\right)\right)t_n'}e^{-i\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}a\left(T_p\left(p+\sum_{l=k}^{n}p_l\right)\right)(t_{n+1-k}'-t_{n+2-k}')}\times$$

$$\times e^{-i\frac{1}{2}a(T_p p)(t-t_1')}\left(-i\frac{1}{2}a(T_p p)\right)\nu_0(dq)\nu(dp_1)\ldots\nu(dp_n)\rho(dp)\times$$

$$\times dt_1'\ldots dt_n'+(-i)\int\limits_Q\int\limits_P\int\limits_P e^{i\langle q,p+p_1\rangle}e^{-i\frac{1}{2}a(T_p(p+p_1))t}\nu_0(dq)\nu(dp_1)\rho(dp)-$$

$$-i\sum_{n=2}^{\infty}(-i)^n\int\limits_Q\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_2'}\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}'}\int\limits_P\ldots\int\limits_P e^{i\langle q,p+\sum_{k=1}^{n}p_k\rangle}\times$$

$$\times e^{-i\frac{1}{2}a\left(T_p\left(p+\sum_{k=1}^{n}p_k\right)\right)t_n'-i\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1}a\left(T_p\left(p+\sum_{l=k}^{n}p_l\right)\right)(t_{n+1-k}'-t_{n+2-k}')}\times$$

$$\times e^{-i\frac{1}{2}a(T_p(p+p_n))(t-t_2')}\nu_0(dq)\nu(dp_1)\ldots\nu(dp_n)\rho(dp)\,dt_2'\ldots dt_n'=$$

$$=-\frac{1}{2}i\int\limits_Q\int\limits_P\int\limits_F e^{i\langle q,y([0,t])+p\rangle}e^{-\frac{1}{2}ib(T(y+p\delta_0))}a(T_p p)\times$$

$$\times \nu_0(dq)\,\rho(dp)\,\mu_\nu(dy) - i\int\limits_Q\int\limits_P\int\limits_P\int\limits_F e^{i\langle q, y([0,t]) + p + p_0\rangle}\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}ib(T(y+(p+p_0)\delta_0))}\nu_0(dq)\,\nu(dp_0)\,\rho(dp)\,\mu_\nu(dy) =$$

$$= \frac{1}{2}i\xi(t)(\widetilde{\Delta_a\rho}) - i\xi(t)(\widetilde{v\rho}) = \frac{1}{2}i(\Delta_a\xi(t))(\widetilde{\rho}) - i(v\xi(t))(\widetilde{\rho}),$$

или

$$\frac{d}{dt}\xi(t)(\widetilde{\rho}) = \frac{1}{2}i(\Delta_a\xi(t))(\widetilde{\rho}) - i(v\xi(t))(\widetilde{\rho})$$

для всех $\rho\in M_a(P)$. Откуда следует равенство (1.17).

Теорема 1.3. *Если функции u_0, v принадлежат пространству $\widetilde{M}_a(Q)$, то решение задачи Коши для уравнения Шредингера* (1.1), (1.2) *существует и единственно в классе* $C^1([0, +\infty), \widetilde{M}(Q))\cap C([0, +\infty), \widetilde{M}_a(Q))$ *и представимо в виде* (1.8).

Доказательство. Существование решения следует из теоремы 1.1. Остается доказать единственность решения.

Пусть u_1 — решение задачи Коши для уравнения Шредингера (1.1), (1.2), принадлежащее классу

$$C^1([0, +\infty), \widetilde{M}(Q))\cap C([0, +\infty), \widetilde{M}_a(Q)).$$

Положим

$$u(t, q) = u_1(t, q) - \int u_0(x(0)+q)\, e^{i\int\limits_0^t v(x(\tau)+q)\,d\tau}\,\Phi_b^4(dx).$$

Тогда функция u будет решением уравнения Шредингера (1.1), будет удовлетворять равенству $u(0, q) = 0\ \forall q\in Q$ и принадлежать пространству

$$C^1([0, +\infty), \widetilde{M}(Q))\cap C([0, +\infty), \widetilde{M}_a(Q)).$$

Пусть $t>0$. Возьмем произвольную меру γ_0, принадлежащую пространству $M(Q)$. Из теоремы 1.2 следует, что существует решение

$$\xi: [0, +\infty)\to\widetilde{M}'(Q)$$

обобщенного уравнения Шредингера

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi(t) = \frac{1}{2}i\Delta_a\xi(t)\, iv\xi(t), \tag{1.21}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$\xi(0) = \gamma(\gamma_0). \tag{1.22}$$

Определим функцию $\varphi: [0, t_0]\to C$, полагая $\varphi(t) = \xi(t_0 - t)\times\times(u, t, \cdot))$ при $t\in[0, t_0]$. Так как семейство векторов $\xi(t)$ при

$t\in[0, t_0]$ ограничено в пространстве $\tilde{M}'(Q)$ и $u\in C'([0, +\infty), \tilde{M}(Q))$, то имеет место равенство

$$\lim_{\Delta t\to 0} \xi(t_0-t-\Delta t)\left(\frac{1}{\Delta t}(u(t+\Delta t, \cdot)-u(t, \cdot))\right)=$$
$$=\xi(t_0-t)\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t, \cdot)\right)$$

при $t\in[0, t_0]$, откуда следует равенство

$$\varphi'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[\xi(t_0-t-\Delta t)(u(t+\Delta t, \cdot))-\xi(t_0-t)(u(t, \cdot))]=$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0} \xi(t_0-t-\Delta t)\left(\frac{1}{\Delta t}(u(t+\Delta t, \cdot)-u(t, \cdot))\right)+$$
$$+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[\xi(t_0-t-\Delta t)(u(t, \cdot))-\xi(t_0-t)(u(t, \cdot))]=$$
$$=\xi(t_0-t)\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t, \cdot)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial t}\xi(t_0-t)\right)(u(t, \cdot)). \qquad (1.23)$$

Из равенства (1.21) следует

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\xi(t_0-t)\right)(u(t, \cdot))=-\left(\frac{1}{2}i\Delta_a\xi(t_0-t)\right)(u(t, \cdot))+$$
$$+(iv\xi(t_0-t))(u(t, \cdot))=-\frac{1}{2}i\xi(t_0-t)(\Delta_a u(t, \cdot))+$$
$$+i(t_0-t)(vu(t, \cdot)),$$

и, учитывая (1.1), (1.23), получим

$$\varphi'(t)=\frac{1}{2}i\xi(t_0-t)(\Delta_a u(t, \cdot))$$
$$i\xi(t-t_0)(vu(t, \cdot))+\left(\frac{\partial}{\partial t}\overline{\xi(t_0-t)}\right)(u(t, \cdot))=0.$$

Значит, $\varphi(t_0)=\varphi(0)$. В силу (1.22) имеем

$$\int u(t_0, q)\nu_0(dq)=\varphi(0)=\xi(t_0)(u(Q, \cdot)),$$

т. е. $\int u(t_0, q)\nu_0(dq)=0$.

Так как мера ν_0 была произвольной, то из последнего равенства следует, что $u(t_0, q)$ $(\forall q\in Q)$ при всех $t_0>0$, что влечет равенство

$$u_1(t, q)=\int u_0(x(0)+q)e^{i\int_0^t v(x(\tau)+q)d\tau}\Phi_b^4(dx),$$

откуда следует единственность решения.

Теорема 1.4. *Если мера* ν_0 *принадлежит пространству* $M(Q)$ *и функция* v *принадлежит пространству* $\tilde{M}_a(Q)$, *то решение задачи Коши для обобщенного уравнения Шредингера* (1.17), (1.18) *существует и единственно.*

Доказательство. Существование решения следует из теоремы 1.2. Докажем единственность.

Пусть ξ_1 — решение задачи (1.17), (1.18). Положим

$$\xi(t)(w)=\xi_1(t)(w)-\int\limits_Q\left[\int w(x(0)+q)\,e^{-i\int\limits_0^t v(x(\tau)+q)\,d\tau}\,\Phi_b^a(dx)\right]\nu_0(dq)$$

$$\forall w\in\tilde{M}(Q).$$

Тогда отображение $t\mapsto\xi(t)$ будет решением обобщенного уравнения Шредингера (1.17), кроме того, будет выполнено равенство $\xi(0)=0$.

Пусть $t_0>0$. Возьмем произвольную функцию u_0 из пространства $\tilde{M}_a(Q)$. Из теоремы 1.3 следует, что существует решение u уравнения Шредингера

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,\ q)=\frac{1}{2}i\Delta_a u(t,\ q)\,ivu(t,\ q), \tag{1.24}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(0,\ q)=u_0(q) \tag{1.25}$$

и принадлежащее пространству

$$C^1([0,\ +\infty),\ \tilde{M}(Q))\cap C([0,\ +\infty),\ \tilde{M}_a(Q)).$$

В силу равенств (1.24), (1.25) имеем

$$\frac{d}{dt}[\xi(t)(u(t_0-t,\ \cdot))]=\left(\frac{d}{dt}\xi(t)\right)(u(t_0-t,\cdot))+$$

$$+\xi(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t_0-t,\ \cdot)\right)=\frac{1}{2}i\,(\Delta_a\xi(t))\,(u(t_0-t,\cdot))+$$

$$+iv\xi(t)(u(t_0-t,\ \cdot))-\xi(t)\left(\frac{1}{2}i\Delta_a u(t_0-t,\ \cdot)\right)-$$

$$-i\xi(t)\,(vu(t_0-t,\ \cdot))=\frac{1}{2}i\xi(t)\,(\Delta_a u\ (t_0-t,\ \cdot))+i\xi(t)(vu(t_0-t,\ \cdot))+$$

$$+\frac{1}{2}i\xi(t)(\Delta_a u(t_0-t,\ \cdot))-i\xi(t)(vu(t_0-t,\ \cdot))=0,$$

откуда следует

$$\xi(t_0)\,(u(0,\ \cdot\,))=\xi(0)\,(u(t_0,\ \cdot\,)),$$

т. е. в силу (1.25) $\xi(t_0)(u_0)=0$. Так как функция u_0 из пространства $\tilde{M}_a(Q)$ была взята произвольно, то из последнего равенства следует, что $\xi(t)=0$ $(\forall t\geqslant 0)$. Значит, решение единственно.

§ 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть Q, P — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_Q$ $\|\cdot\|_P$ соответственно, находящиеся в двойственности $\langle Q, P\rangle$. Пусть также a — непрерывная вещественная функция на пространстве P.

Обозначим через $M_a(P)$ пространство всех счетно-аддитивных комплекснозначных мер на P, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_P |a(P)|\,|\mu|(dp)<+\infty. \tag{2.1}$$

Функция a определяет псевдодифференциальный оператор $\hat{a}:$ $:\tilde{M}_a(Q)\to\tilde{M}(Q)$ (с символом a), полагая

$$(\widehat{a\tilde{\mu}})(q)=\int e^{i\langle q,p\rangle}a(P)\,\mu(dp), \tag{2.2}$$

где $\tilde{M}_a(Q)$ — фурье-образ пространства $M_a(Q)$, $\tilde{M}(Q)$ — фурье-образ пространства $M(Q)$, μ — произвольная мера из пространства $M_a(P)$ и $\tilde{\mu}$ — ее преобразование Фурье

$$\tilde{\mu}(q)=\int\limits_P e^{i\langle q,p\rangle}\mu(dp).$$

Пусть функция $h: P\times Q\to R$ представима в виде

$$h(p,\ q)=\int\limits_Q\int\limits_P e^{i\langle q_1,p\rangle}e^{i\langle q,p_1\rangle}\nu(dq,\ dp_1),$$

где ν — счетно-аддитивная борелевская комплекснозначная мера на банаховом пространстве $Q\times P$. Определим псевдодифференциальный оператор $\hat{h}_{qp}:\tilde{M}(Q)\to\tilde{M}(Q)$ с qp-символом h, полагая

$$\widehat{h}_{qp}f\ (q)=\int\limits_Q\int\limits_P e^{i\langle q,p_0\rangle}f\,(q+q_0)\,\nu(d\,(q_0,\ dp_0)), \tag{2.3}$$

и псевдодифференциальный оператор $\hat{h}_{qp}:\tilde{M}(Q)\to\tilde{M}(Q)$ с qp-символом h, полагая

$$\widehat{h}_{pq}f\ (q)=\int\limits_Q\int\limits_P e^{i\langle q_0+q,p_0\rangle}f\,(q+q_0)\,\nu\,(dq_0,dp_0), \tag{2.4}$$

где f — произвольная функция из пространства $\tilde{M}(Q)$.

Будем говорить, что поставлена задача Коши для уравнения Шредингера с псевдодифференциальным оператором, имеющим qp-символ $a-h$, если задано уравнение Шредингера

$$\frac{\partial u(t,\ q)}{\partial t}=i\widehat{a}u(t,\ q)-i\widehat{h}_{qp}u(t,\ q) \tag{2.5}$$

и начальное условие

$$u(0,\ q)=u_0(q)\quad \forall q\in Q, \tag{2.6}$$

где $u_0\in\tilde{M}_a(Q)$, $\forall t\geqslant 0\quad u(t,\ \cdot)\in\tilde{M}_a(Q)$. Аналогично определим задачу Коши для уравнения Шредингера с псевдодифференциальным оператором, имеющим pq-символ $a-h$, задавая уравнение Шредингера

$$\frac{\partial u(t,\ q)}{\partial t}=i\widehat{a}u(t,\ q)-i\widehat{h}_{pq}u(t,\ q) \tag{2.7}$$

и начальное условие (2.6).

Замечание. В случае, когда $Q=P=R^n$, a — полином на пространстве P и

$$h(p,\ q)=v(q)=\int\limits_P e^{i\langle q,p\rangle}\nu_1(dp)$$

($\nu_1\in M(P)$), т. е. $\nu=\nu_1\otimes\delta_0$ (δ_0 — мера Дирака на пространстве Q, сосредоточенная в нуле) уравнения Шредингера (2.5) и (2.7) приобретают одинаковый вид

$$\frac{\partial u(t,\ q)}{\partial t}=ia\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q}\right)u(t,\ q)-iv(q)\,u(t,\ q),$$

где a — линейный дифференциальный оператор на пространстве $Q=R^n$ с символом a, а $v:Q\to R$ — потенциал.

Обозначим через E_Q, E_P банаховы пространства измеримых по Борелю ограниченных отображений из отрезка $[0,\ t]$ в пространства Q, P соответственно с нормами

$$\|x_Q\|_{E_Q}=\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|x_Q(\tau)\|_Q$$

для $x_Q\in E_Q$ и

$$\|x_P\|_{E_P}=\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|x_P(\tau)\|_P$$

для $x_P\in E_P$. Положим $E=E_P\times E_Q$. Пространство E состоит из всех измеримых по Борелю ограниченных отображений из отрезка $[0,\ t]$ в пространство $P\times Q$ и норма $\|(x_P,\ x_Q)\|_E=\|x_P\|_{E_P}+$ $+\|x_Q\|_{E_Q}$ задает на нем банахову структуру.

Обозначим через F_Q, F_P пространства счетно-аддитивных мер на отрезке $[0,\ t]$ со значениями в пространствах Q, P соответственно, имеющих ограниченную вариацию. Пространства

F_Q, F_P будут банаховыми относительно норм $|y_Q|_Q=|y_a|([0, t])$ для $y_Q\in F_Q$ и $|y_P|_P=|y_P|([0, t])$ для $y_P\in F_P$. Положим $F=F_Q\times F_P$. Пространство F состоит из всех счетно-аддитивных мер на отрезке $[0, t]$ со значениями в пространстве $Q\times P$ ограниченной вариации, и норма $\|(y_Q, y_P)\|_F=|y_Q|_a+|y_P|_P$ задает на нем банахову структуру.

Для каждого натурального n определим вложение $\pi_n: D_n\times \times(Q\times P)^n\to F$, полагая

$$\pi_n(t_1, \ldots, t_n, (q_1, p_1), \ldots, (q_n, p_n))=(q_1, p_1)\delta_{t_1}+\ldots+(q_n, p_n)\delta_{t_n},$$

где $D_n=\{(t_1, ..., t_n): t\geqslant t_1\geqslant t_2\geqslant \ldots \geqslant t_n\geqslant 0\}$ — n-мерный симплекс и δ_τ — мера Дирака на $[0, t]$, сосредоточенная в точке $\tau\in \in[0, t]$.

Обозначим через B_F наибольшую σ-алгебру подмножеств пространства F, содержащуюся в σ-алгебре борелевских подмножеств, инвариантную относительно сдвигов на векторы из пространства F и умножения на число и такую, что для любого натурального n вложение π_n измеримо в этой σ-алгебре (в пространстве $D_n\times(Q\times P)^n$ берется σ-алгебра борелевских подмножеств).

Предложение 2.1. *Если ν — счетно-аддитивная мера на банаховом пространстве $Q\times P$, то существует единственная счетно-аддитивная мера μ_ν на σ-алгебре B_F, удовлетворяющая равенству*

$$\int\limits_F f(y)\mu_\nu(dy)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1}\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}}\left[\int\limits_Q\int\limits_P\ldots\int\limits_Q\int\limits_P f((q_1, p_1)\delta_{t_1}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(q_n, p_n)\delta_{t_n})\nu(dq_1, dp_1)\ldots\nu(dq_n, dp_n)\right]dt_1\ldots dt_n, \quad (2.8)$$

для любой ограниченной функции $f: F\to R$, измеримой относительно B_F.

Предложение 2.1 доказывается аналогично предложению 1.1.

Для пары пространств E_P, E_Q определим двойственность $\langle E_P, E_Q\rangle$, полагая

$$\langle x_P, y_Q\rangle=\int\limits_0^t\langle y_Q(d\tau), x_P(\tau)\rangle$$

для $x_P\in E_P$, $y_Q\in F_Q$. Аналогично для пары E_Q, E_P определим двойственность $\langle E_Q, E_P\rangle$, полагая

$$\langle x_Q, y_P\rangle=\int\limits_0^t\langle x_P(\tau), y_Q(d\tau)\rangle$$

для $x_Q\in E_Q$, $y_P\in F_P$. Двойственности $\langle E_P, F_Q\rangle\langle E_Q, F_P\rangle$ задают двойственность $\langle E, F\rangle$ равенством

$$\langle(x_P, x_Q), (y_Q, y_P)\rangle=\langle x_P, y_Q\rangle+\langle x_Q, y_P\rangle$$

для $x_P \in E_P$, $x_Q \in E_Q$, $y_Q \in F_Q$, $y_P \in F_P$. Цилиндрические подмножества пространства F относительно двойственности $\langle E, F\rangle$ содержатся в классе подмножеств B_F.

Лемма 2.1. *Если ν — счетно-аддитивная мера на банаховом пространстве $Q\times P$, то имеет место равенство*

$$\int e^{i\langle (x_P, x_Q), y\rangle} \mu_\nu(dy) = e^{-i\int\limits_0^t h(x_P(\tau), x_Q(\tau))d\tau}, \tag{2.9}$$

где $h(p, q) = \int e^{i\langle q, p_0\rangle} e^{i\langle q_0, p\rangle} \nu(dq_0, dp_0)$

и x_P, x_Q — произвольные функции из пространств E_P, E_Q соответственно.

Доказательство. Отметим, что отображение

$$y \mapsto e^{i\langle x_P, y_Q\rangle + i\langle x_Q, y_P\rangle}$$

из пространства F в R является цилиндрической функцией относительно двойственности $\langle E, F\rangle$, поэтому оно измеримо относительно σ-алгебры B_F. Следовательно, в силу предложения 2.1

$$\int e^{i\langle (x_P, x_Q), y\rangle} \mu_\nu(dy) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} \Big[\int\limits_Q \int\limits_P \ldots$$

$$\int\limits_Q \int\limits_P e^{i\langle (x_P, x_Q), (q_1, p_1)\delta_{t_1} + \ldots + (q_n, p_n)\delta_{t_n}\rangle} \nu(dq_1, dp_1)\ldots\nu(dq_n, dp_n)\Big] dt_1\ldots dt_n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} \prod_{k=1}^{n} \Big[\int\limits_Q \int\limits_P e^{i\langle q_k, x_P(t_k)\rangle} e^{i\langle x_Q(t_k), p_k\rangle} \times$$

$$\times \nu(dq_k, dp_k)\Big] dt_1\ldots dt_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_n} h(x_P(t_1), x_Q(t_1)) \times$$

$$\times \ldots h((x_P(t_n)), x_Q(t_n))\, dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \Big(\int\limits_0^t h(x_P(\tau), x_Q(\tau))\, d\tau \Big)^n = e^{-i\int\limits_0^t h(x_P(\tau), x_Q(\tau))d\tau},$$

откуда следует равенство (2.9).

Предложение 2.2. *Если непрерывная функция $a: P \to R$ удовлетворяет неравенству*

$$|a(p_1+p_2)| \leqslant C(|a(p_1)|+1)(|a(p_2)|+1) \tag{2.10}$$

при любых $p_1, p_2 \in P$ (C — некоторая положительная константа), функции $h: P\times Q \to R$, $u_0: Q\to C$ представимы в виде

$$h(p, q) = \int e^{i\langle q, p_0\rangle} e^{i\langle q_0, p\rangle} \nu(dq_0, dp_0), \tag{2.11}$$

$$u_0(q) = \int e^{i\langle q, p_0\rangle} \nu_0(dp_0), \tag{2.12}$$

где ν, ν_0 — счетно-аддитивные меры ограниченной вариации на пространствах $Q\times P$, P соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\int\limits_Q \int\limits_P |a(P)|\,|\nu|(dq, dp) < +\infty, \tag{2.13}$$

$$\int\limits_P |a(p)|\,|\nu_0|(dp) < +\infty, \tag{2.14}$$

то решение задачи Коши (2.5), (2.6) *существует и представимо в виде*

$$u(t, q) = \int\limits_P e^{i\langle q, p\rangle} e^{ia(P)t} \nu_0(dp) + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} \times$$

$$\times \Big[\int\limits_P \int\limits_Q \int\limits_P \ldots \int\limits_Q \int\limits_P e^{i\left\langle q, p + \sum\limits_{k=1}^{n} p_k \right\rangle} e^{ia\left(p + \sum\limits_{k=1}^{n} p_k\right)(t - t_1)} \times$$

$$\times e^{i\sum\limits_{k=2}^{n} a\left(p + \sum\limits_{l=k}^{n} p_l\right)(t_{k-1} - t_k) + ia(p)t_n} e^{i\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left\langle q_k, p + \sum\limits_{l=k+1}^{n} p_l \right\rangle + i\langle q_n, p\rangle} \times$$

$$\times \nu(dq_1, dp_1) \ldots \nu(dq_n, dp_n) \nu_0(dp) \Big] dt_1 \ldots dt_n. \tag{2.15}$$

Доказательство. Покажем, что при $t>0$ функция $u(t, \cdot)$ принадлежит пространству $\tilde{M}_a(Q)$.

Пусть $t>0$. Определим меру ρ_t на σ-алгебре борелевских подмножеств пространства P, полагая для каждого борелевского подмножества A пространства P.

$$\rho_t(A) = \int\limits_A e^{ia(P)t} \nu_0(dp) + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} \times$$

$$\times \Big[\int\limits_P \int\limits_Q \int\limits_P \ldots \int\limits_Q \int\limits_P \chi_A\left(p + \sum_{k=1}^{n} p_k\right) e^{ia\left(p + \sum\limits_{k=1}^{n} p_k\right)(t - t_k)} \times$$

$$\times e^{i\sum_{k=2}^{n-1} a\left(p+\sum_{l=k}^{n} p_l\right)(t_{k-1}-t_k)+ia(p)t_n} e^{i\sum_{k=1}^{n-1}\langle q_k, p+\sum_{l=k+1}^{n} p_l\rangle + i\langle q_n, p\rangle} \times$$

$$\times \nu(dq_1, dp_1)\dots\nu(dq_n, dp_n)\nu(dp)\Big]\,dt_1\dots dt_n, \qquad (2.16)$$

где χ_A — характеристическая функция множества A. Из оценки

$$|\rho_t(A)| \leqslant |\nu_0|(A) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{n-1}}\Big[\int_P\int_Q\int_P\dots\int_Q\int_P \chi_A\Big(p+\sum_{k=1}^{n} p_k\Big)\times$$

$$\times |\nu|(dq_1, dp_1)\dots|\nu|(dq_n, dp_n)|\nu_0|(dp)\Big]\,dt_1\dots dt_n \leqslant$$

$$\leqslant |\nu_0|(P)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}|\nu|(Q, P) = |\nu_0|(P)\exp(t|\nu|(Q, P))$$

следуют счетная аддитивность и ограниченность вариации меры ρ_t. В силу (2.10)

$$\int_P |a(p)|\,|\rho_t|(dp) \leqslant \int_P |a(p)|\,|\nu_0|(dp) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{n-1}}\Big[\int_P\int_Q\int_P\dots\int_Q\int_P\Big|a\Big(p+\sum_{k=1}^{n} p_k\Big)\Big|\,|\nu|(dq_1, dp_1)\dots$$

$$\dots|\nu|(dq_n, dp_n)|\nu_0|(dp)\Big]\,dt_1\dots dt_n \leqslant \int_P |a(p)|\,|\nu_0|(dp) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n C^{n+1}}{n!}\int_P(|a(p)|+1)|\nu_0|(dp)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\Big(\int_Q\int_P(a(p_k)+1)|\nu|(dq_k, dp_k)\Big) \leqslant (k+1)\int_P(|a(p)|+1)|\nu_0|(dp)\times$$

$$\times\exp\Big(C+\int_Q\int_P(|a(p)|+1)|\nu|(dq, dp)\Big),$$

откуда следует принадлежность меры ρ_t пространству $M_a(P)$. Из равенств (2.15), (2.16) следует, что

$$u(t, q) = \int_P e^{i\langle q, p\rangle}\rho_t(dp),$$

значит, $u(t, \cdot)\in\tilde{M}_a(Q)$.

Так как

$$u(0,\ q)=\int\limits_P e^{i\langle q,p\rangle}\nu_0(dp),$$

то функция u удовлетворяет начальному условию (2.6).

Остается проверить равенство (2.5). Имеют место равенства

$$\frac{\partial u(t,\ q)}{\partial t}=\int\limits_P e^{i\langle q,p\rangle} ia(p)\,e^{ia(p)t}\nu_0(dp)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\Bigl[\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1}\dots\int\limits_0^{t_{n-1}}\int\limits_P\int\limits_Q\int\limits_P\dots\int\limits_Q\int\limits_P e^{i\left\langle q,p+\sum\limits_{k=1}^n p_k\right\rangle} ia\left(p+\sum_{k=1}^n p_k\right)\times$$

$$\times e^{ia\left(p+\sum\limits_{k=1}^n p_k\right)(t-t_1)}\, e^{i\sum\limits_{k=2}^n a\left(p+\sum\limits_{l=k}^n p_l\right)(t_{k-1}-t_k)+ia(p)t_n}\times$$

$$\times e^{i\sum\limits_{k=1}^n\left\langle q_k,p+\sum\limits_{l=k+1}^n p_l\right\rangle+i\langle q_n,p\rangle}\nu(dq_1,\ dp_1)\dots\nu(dq_n,\ dp_n)\,\nu_0(dp)\,dt_1\dots$$

$$\dots dt_n+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_2}\dots\int\limits_0^{t_{n-1}}\int\limits_P\int\limits_Q\int\limits_P e^{i\left\langle q,p+\sum\limits_{k=1}^n p_k\right\rangle}\times$$

$$\times e^{ia\left(p+\sum\limits_{k=2}^n p_k\right)(t-t_2)+i\sum\limits_{k=3}^n a\left(p+\sum\limits_{l=k}^n p_l\right)(t_{k-1}-t_k)}\, e^{ia(p)t_n}\times$$

$$\times e^{i\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left\langle q_k,p+\sum\limits_{l=k+1}^n p_l\right\rangle+i\langle q_n,p\rangle}\nu(dq_1,\ dp_1)\dots\nu(dq_n,\ dp_n)\times$$

$$\times\nu_0(dp)\,dt_2\dots dt_n\Bigr]=i\int\limits_P a(p)\,e^{i\langle q,p\rangle}\rho_t(dp)-$$

$$-i\int\limits_Q\int\limits_P e^{i\langle q,p_1\rangle}\left(\int\limits_P e^{i\langle q+q_1,p\rangle}\nu_0(dp)\right)\nu(dq_1,\ dp_1)-$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty} i\int\limits_Q\int\limits_P e^{i\langle q,p_1\rangle}\Bigl(\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1}\dots\int\limits_0^{t_{n-1}}\int\limits_P\int\limits_Q\int\limits_P\dots\int\limits_Q\int\limits_P e^{i\left\langle q+q_1,p+\sum\limits_{k=2}^n p_k\right\rangle}\times$$

$$\times e^{ia\left(p+\sum\limits_{k=2}^n p_k\right)(t-t_2)+i\sum\limits_{k=3}^n a\left(p+\sum\limits_{l=k}^n p_l\right)(t_{k-1}-t_k)}\times$$

$$\times e^{ia(p)t_n} e^{i\sum_{k=2}^{n-1}\langle q_k, p+\sum_{l=k+1}^{n} p_l\rangle + i\langle q_n, p\rangle} \nu(dq_2, dp_2)\ldots\nu(dq_n, dp_n)\nu_0(dp)\times$$

$$\times(dt_2\ldots dt_n)\nu(dq_1, dp_1)\Big) = i\int_P a(p)e^{i\langle q,p\rangle}\rho_t(dp) -$$

$$-i\int_Q\int_P\int_P e^{i\langle q,p_0\rangle}e^{i\langle q+q_0,p\rangle}\nu(dq_0, dp_0)\rho_t(dp),$$

и в силу равенств (2.2), (2.3) получим равенство (2.5).

Предложение. 2.3. *Пусть* $a: P\to R$, $h: P\times Q\to R$, $u_0: Q\to\to C$ — *непрерывные функции и* ν, ν_0 — *счетно-аддитивные меры ограниченной вариации на пространствах* $Q\times P$, P *соответственно, такие, что выполнены соотношения* (2.10)—(2.14), *тогда решение задачи Коши* (2.6), (2.7) *существует и представимо в виде*

$$u(t, q) = \int_P e^{i\langle q,p\rangle}e^{ia(p)t}\nu_0(dp) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\int_0^t\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{n-1}}\times\Big[\int_P\int_Q\int_P\ldots\int_Q\int_P e^{i\langle q,p+\sum_{k=1}^{n}p_k\rangle} e^{ia\left(p+\sum_{k=1}^{n}p_k\right)(t-t_1)}\times$$

$$\times e^{i\sum_{k=2}^{n}a\left(p+\sum_{l=k}^{n}p_l\right)(t_{k-1}-t_k)+ia(p)t_n} e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle q_k, p+\sum_{l=k}^{n}p_l\rangle}\nu(dq_1, dp_1)\ldots$$

$$\ldots\nu(dq_n, dp_n)\nu_0(dp)\Big]dt_1\ldots dt_n. \tag{2.17}$$

Доказательство. Принадлежность пространству $\tilde{M}_a(Q)$ функции $u(t, \cdot)$ при каждом $t\geqslant 0$ и выполнение начального условия (2.6) проверяются точно также, как и в предложении (2.2). Остается доказать выполнение равенства (2.7). В силу (2.2), (2.4) имеют место равенства

$$\frac{\partial u(t, q)}{\partial t} = \int_P e^{i\langle q,p\rangle}ia(p)e^{ia(p)t}\nu_0(dp) + \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\times$$

$$\times\Big[\int_0^t\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{n-1}}\int_P\int_Q\int_P\ldots\int_Q\int_P \varepsilon^{i\langle q,p+\sum_{k=1}^{n}p_k\rangle} ia\Big(p+\sum_{k=1}^{n}p_k\Big)\times$$

$$\times e^{ia\left(p+\sum_{k=1}^{n}p_k\right)(t-t_1)+i\sum_{k=2}^{n}a\left(p+\sum_{l=k}^{n}p_l\right)(t_{k-1}-t_k)} e^{ia(p)t_n}\times$$

$$\times e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle q_k, p+\sum_{l=k}^{n} p_l\rangle} \nu(dq_1, dp_1)\dots\nu(dq_n, dp_n)\,\nu_0(dp)\,dt_1\dots dt_n +$$

$$+\int_0^t\int_0^{t_2}\dots\int_0^{t_{n-1}}\int_P\int_Q\int_P\dots\int_Q\int_P e^{i\langle q, p+\sum_{k=1}^{n} p_k\rangle}\times$$

$$\times e^{ia\left(p+\sum_{k=2}^{n} p_k\right)(t-t_2)+i\sum_{k=3}^{n} a\left(p+\sum_{l=k}^{n} p_l\right)(t_{k-1}-t_k)} e^{ia(p)t_n} e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle q_k, p+\sum_{l=k}^{n} p_l\rangle}\times$$

$$\times\nu(dq_1, dp_1)\dots\nu(dq_n, dp_n)\,\nu_0(dp)\,dt_2\dots dt_n\Big] =$$

$$= i\Big[\int_P a(p)\,e^{i\langle q, p\rangle}e^{ia(p)t}\nu_0(dp) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t_1}\dots$$

$$\dots\int_0^{t_{n-1}}\int_P\int_Q\int_P\dots\int_Q\int_P a\left(p+\sum_{k=1}^{n} p_k\right) e^{i\langle q, p+\sum_{k=1}^{n} p_k\rangle} e^{ia\left(p+\sum_{k=1}^{n} p_k\right)(t-t_1)}\times$$

$$\times e^{i\sum_{k=2}^{n} a\left(p+\sum_{l=k}^{n} p_l\right)(t_{k-1}-t_k)+ia(p)t_n} e^{i\sum_{k=1}^{n}\langle q_k, p+\sum_{l=k}^{n} p_l\rangle}\nu(dq_1, dp_1)\dots\nu(dq_n,$$

$$dp_n)\,\nu_0(dp)\,dt_1\dots dt_n\Big] - i\Big[\int_Q\int_P e^{i\langle q+q_1, p_1\rangle}\left(\int_P e^{i\langle q+q_1, p\rangle}\nu_0(dp)\right)\times$$

$$\times\nu(dq_1, dp_1) + \sum_{n=2}^{\infty}\int_Q\int_P e^{i\langle q+q_1, p_1\rangle}\Big(\int_0^t\int_0^{t_2}\dots\int_0^{t_{n-1}}\int_P\int_Q\int_P\dots$$

$$\dots\int_Q\int_P e^{i\langle q+q_1, p+\sum_{k=2}^{n} p_k\rangle} e^{ia\left(p+\sum_{k=2}^{n} p_k\right)(t-t_2)+i\sum_{k=3}^{n} a\left(p+\sum_{l=k}^{n} p_l\right)(t_{k-1}-t_k)}\times$$

$$\times e^{ia(p)t_n} e^{i\sum_{k=2}^{n}\langle q_k, p+\sum_{l=k}^{n} p_l\rangle}\nu(dq_2, dp_2)\dots\nu(dq_n, dp_n)\,\nu_0(dp)\,dt_2\dots dt_n\Big)\times$$

$$\times\nu(dq_1, dp_1)\Big] = i\widehat{a}u(t, q) - i\widehat{h}_{pq}u(t, q),$$

откуда следует равенство (2.7).

Введем отображение $T^+ : F \to E_P$, $T^- : F \to E_P$, полагая

$$(T^+(y_Q,\ y_P))(\tau) = y_P([\tau,\ t]),$$

$$(T^-(y_Q,\ y_P))(\tau) = y_P([\tau,\ t])$$

для любых $\tau \in [0,\ t]$, $y_Q \in F_Q$, $y_P \in F_P$. Обозначим через $FM(F_P,\ E_P)$ пространство всех отображений из пространства F_P в пространство борелевских комплекснозначных мер на E_P ограниченной вариации, таких, что каждое отображение $y_P \mapsto \mu_{y_P}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\sup\limits_{y_P \in F_P} |\mu_{y_P}|(E_P)$;

2) для любой ограниченной борелевской комплекснозначной функции φ, определенной на банаховом пространстве E_P и такой, что функции $\varphi \circ T^+$, $\varphi \circ T^-$ измеримы относительно σ-алгебры $\mathscr{B}_F$, функция

$$f_\varphi(y_Q,\ y_P) = \int e^{i\langle x_P, y_Q\rangle} \varphi(x_P)\, \mu_{y_P}(dx_P)$$

измерима относительно σ-алгебры $\mathscr{B}_F (f_\varphi : F \to C)$. Через $\mathscr{F}(F)$ обозначим пространство всех комплекснозначных функций f, определенных на пространстве $F = (F_Q \times F_P)$ и представимых в виде

$$f(y_Q,\ y_P) = \int e^{i\langle x_P, x_Q\rangle} \mu_{y_P}(dx_P), \tag{2.18}$$

где отображение $y_P \mapsto \mu_{y_P}$ принадлежит пространству $\mathscr{F}M(F_P,\ E_P)$.

Для каждой функции f из пространства $\mathscr{F}(F)$ определим функцию $\eta_a(f) : F \to C$, полагая

$$\eta_a(f)(y_Q,\ y_P) = \int e^{i\langle x_P, y_Q\rangle} e^{i\int\limits_0^t a(x_P(\tau))\,d\tau} \mu_{y_P}(dx_P), \tag{2.19}$$

где функция f и семейство мер μ_{y_P} связаны соотношением (2.18).

Обозначим через $M^+(F)$ множество всех неотрицательных счетно-аддитивных мер ρ, определенных на σ-алгебре $\mathscr{B}_F$, имеющих ограниченную положительную вариацию и удовлетворяющих следующему условию: для каждого множества X из семейства $\mathscr{B}_F$ существует множество A, принадлежащее семейству $\mathfrak{X}_F$, такое, что $X \in A$ и $\rho(A \backslash X) = 0$, где $\mathfrak{X}_F$ — наименьшая σ-алгебра подмножеств пространства F, содержащая все цилиндрические подмножества, порожденные двойственностью $\langle E,\ F\rangle$.

Каждая мера ρ из множества $M^+(F)$ задает на пространстве $\mathcal{F}(F)$ полунорму

$$s_\rho(f) = \int |\eta_a(f)(y)|\, \rho(dy). \tag{2.20}$$

Отметим, что для каждого $f \in \mathcal{F}(F)$ функция $\eta_a(f)$ ограничена и измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{B}_F$, в силу равенства (2.19) интеграл в равенстве (2.20) конечен.

Легко видеть, что семейство полунорм ($\rho \in M^+(F)$) определяет на пространстве $\mathcal{F}(F)$ локальную выпуклую топологию. Пространство всех непрерывных линейных функционалов на пространстве $\mathcal{F}(F)$ будем обозначать через $\mathcal{F}'(F)$.

Для каждого $x \in E$ определим функцию $e^x : F \to C$, полагая $e_x(y) = e^{i\langle x, y\rangle}$.

Лемма 2.2. *Функции $e^x (x \in E)$ принадлежат пространству $\mathcal{F}(F)$ и линейная оболочка множества $\{e_x : x \in E\}$ плотна в пространстве $\mathcal{F}(F)$.*

Доказательство. Пусть δ_{E_P, x_P} — мера Дирака на пространстве E_P, сосредоточенная в точке x_P. Для каждого $x = (x_P, x_Q) \in E$ отображение $y_P \mapsto e^{i\langle x_Q, y_P\rangle} \delta_{E_P, x_P}$ принадлежит пространству $\mathcal{F}M(F_P, E_P)$, поэтому в силу равенства

$$e_x(y_Q, y_P) = \int e^{i\langle x'_P, y_Q\rangle} e^{i\langle x_Q, y_P\rangle} \delta_{E_P, x_P}(dx'_P)$$

функция e_x будет принадлежать пространству $\mathcal{F}(F)$.

Остается доказать, что линейная оболочка семейства функций $e_x (x \in E)$ плотна в пространстве $\mathcal{F}(F)$. Пусть $f \in \mathcal{F}(F)$ и мера ρ принадлежит множеству $M^+(F)$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Так как функция $\eta_a(f)$ ограничена и измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{B}_F$, то найдутся натуральное n, комплексные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и попарно непересекающиеся множества $X_1, \ldots, X_n$ из σ-алгебры $\mathcal{B}_F$, такие, что

$$\int \left| \eta_a(f)(y) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{X_k}(y) \right| \rho(dy), \tag{2.21}$$

где χ_X — характеристическая функция множества X. Из принадлежности меры ρ множеству $M^+(F)$ следует существование множеств $A_1, \ldots, A_n$, принадлежащих σ-алгебре $\mathfrak{X}_F$, таких, что $A_k > X_k$, $\rho(A_k \setminus X_k) = 0$ при $k = 1, \ldots, n$. Из оценки

$$\int \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}(y) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{X_k}(y) \right| \rho(dy) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \int |\chi_{A_k}(y) - \chi_{X_k}(y)|\, \rho(dy) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|\, \rho(A_k - X_k) = 0$$

и неравенства (2.21) имеем

$$\int \left| \eta_a(f)(y) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}(y) \right| \rho(dy) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.22}$$

Так как мера ρ счетно-аддитивна и множества A_k ($k=1, \dots$ $\dots, n$) принадлежат σ-алгебре $\mathfrak{X}_F$, то для любого $k \leqslant n$ функцию χ_{A_k} можно приблизить цилиндрическими функциями с любой точностью относительно полунормы

$$g \mapsto \int_F |g(y)| \, \rho(dy).$$

В свою очередь ограниченные цилиндрические функции можно приблизить с любой точностью относительно той же полунормы линейными комбинациями функций $e_x (x \in E)$. Поэтому найдутся такие комплексные числа $\beta_1, \dots, \beta_l$ и точки $x_1 = (x_{1,P}, x_{1,Q}), \dots$ $\dots, x_l = (x_{l,P}, x_{l,Q})$, принадлежащие пространству E, что будет выполнено неравенство

$$\int \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}(y) - \sum_{k=1}^{l} \beta_k e_{x_k}(y) \right| \rho(dy) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.23}$$

Положим

$$c_k = \beta_k e^{-i \int_0^t a(x_{k,p}(\tau)) \, d\tau}.$$

Из равенств

$$\eta_a(e_{(x_P, x_Q)})(y_Q, y_P) = \int_{E_P} e^{i \int_0^t a(x'_P(\tau)) \, d\tau} e^{i \langle x'_P, y_Q \rangle} e^{i \langle x_Q, y_P \rangle} \times$$

$$\times \delta_{E_P}, \ x_P(dx'_P) = e^{i \int_0^t a(x_P(\tau)) \, d\tau} e_{(x_P, x_Q)}(y_Q, y_P)$$

следует

$$\eta_a\left(\sum_{k=1}^{l} c_k e_{x_k}\right) = \sum_{k=1}^{l} \beta_k e_{x_k}. \tag{2.24}$$

В силу (2.22)—(2.24)

$$s_\rho\left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k e_{x_k}\right) = \int \left| \eta_a(f)(y) - \sum_{k=1}^{l} \beta_k e_{x_k}(y) \right| \rho(dy) \leqslant$$

$$\leqslant \int \left| \eta_a(f)(y) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}(y) \right| \rho(dy) + \tag{2.25}$$

$$+ \int \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}(y) - \sum_{k=1}^{l} \beta_k e_{x_k}(y) \right| \rho(dy) < \varepsilon.$$

Значит, любую функцию f из пространства $\mathcal{F}(F)$ можно с произвольной точностью приблизить относительно полунормы s_ρ линейными комбинациями функций $e_x (x \in E)$.

Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_k$ — меры из множества $M^+(F)$. Заметим, что если меры ρ', ρ'' принадлежат множеству $M^+(F)$, то мера $\rho_0 = \rho' + \rho''$ тоже будет принадлежать множеству $M^+(F)$, так как для любого множества X из σ-алгебры $\mathcal{B}_F$ найдутся множества A', A'' из σ-алгебры $\mathfrak{X}_F$, такие, что $A' > X$, $A'' > X$, $\rho'(A' \setminus X) = 0$, $\rho''(A'' \setminus X) = 0$, а значит, множество также будет при $A = A' \cap A''$ принадлежать σ-алгебре $\mathfrak{X}_F$ и будут выполнены соотношения $\rho_0(A \setminus X) = \rho'(A \setminus X) + \rho''(A \setminus X) = 0$. Следовательно, мера $\rho = \rho_1 + \ldots + \rho_k$ будет принадлежать множеству $M^+(F)$. Из оценок

$$s_{\rho_m}(g) = \int |\eta_a(g)(y)| \, \rho_m(dy) \leqslant \int |\eta_a(g)(y)| \, |\rho| (dy) \leqslant s_\rho(g)$$

для любого $g \in \mathcal{F}(F)$ и $m = 1, \ldots, k$ и неравенства (2.25) следует, что

$$s_{\rho_m}\left(f - \sum_{m=1}^{l} c_m e_{x_m}\right) \leqslant s_\rho\left(f - \sum_{m=1}^{l} c_m e_{x_m}\right)$$

при $m = 1, \ldots, k$. Значит, линейные комбинации функций $e_x (x \in E)$ плотны в пространстве $\mathcal{F}(F)$.

Вложение j пространства P в пространство E, задаваемое равенством $j(P) = (0, p\delta_0)$, для каждой меры $\nu_0 \in M(P)$ определяет меру $\nu_0 \circ j^{-1}$, счетно-аддитивную на борелевской σ-алгебре банахова пространства F. Для каждой пары $\nu_0 \in M(P)$, $\nu \in M(Q \times P)$ свертка $\mu * (\nu_0 \circ j^{-1})$ мер μ_ν и $\nu_0 \circ j^{-1}$ будет счетно-аддитивной мерой ограниченной вариации, определенной на σ-алгебре $\mathcal{B}_F$. Обозначим через $\xi_{a,\nu,\nu_0,q}$ линейный функционал на пространстве $\mathcal{F}(F)$, задаваемый равенством

$$\xi_{a,\nu,\nu_0 q}(f) = \int \varphi_q(y) \, \eta_a(f)(y) \, \mu_\nu * (\nu_0 \circ j^{-1})(dy)$$

$$(\varphi_q(y) = e^{i\langle q, y_p([0,t])\rangle} \ \forall y \in F, \ \forall q \in Q)$$

для любой функции $f \in \mathcal{F}(F)$. Семейства множеств $\{j^{-1}(A) : A \in \mathfrak{X}\}$, $\{\pi_n^{-1}(A) : A \in \mathfrak{X}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ совпадают с борелевским σ-алгебрами пространств P, $D_n \times (Q \times P)^n$ соответственно, поэтому вариация $|\mu_\nu * (\nu_0 \circ j^{-1})|$ меры $\varphi_q \cdot \mu_\nu * (\nu_0 \circ j^{-1})$ будет принадлежать множеству $M^+(E)$. Значит, линейный функционал $\xi_{a,\nu,\nu_0,q}$ непрерывен в силу оценки

$$|\xi_{a,\nu,\nu_0,q}(f)| \leqslant \int |\eta_a(f)(y)|\ |\mu_\nu * (\nu_0 \circ j^{-1})|(dy),$$

т. е. он принадлежит пространству $\mathcal{F}'(F)$.

Обозначим через $\mathcal{F}_a(E)$ пространство всех комплекснозначных функций φ, определенных на пространстве E, каждая из которых φ представима в виде $\varphi=\tilde{\xi}$, где $\tilde{\xi}(x)=\xi(e_x)$ $\forall x\in E$ и $\xi\in\mathcal{F}'(F)$. Пространство $\mathcal{F}_a(E)$ будет линейным пространством и отображение из пространства $\mathcal{F}'(F)$ в пространство $\mathcal{F}_a(E)$, задаваемое преобразованием Фурье $\xi\mapsto\tilde{\xi}$, в силу леммы 2.2 будет линейным изоморфизмом. Определим на пространстве $\mathcal{F}'(F)$ сильную сопряженную топологию и зададим с помощью отображения $\xi\mapsto\tilde{\xi}$ локально выпуклую топологию на пространстве $\mathcal{F}_a(E)$ так, чтобы это отображение было бы топологическим изоморфизмом. Обозначим через $\mathcal{F}_a'(E)$ пространство всех линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{F}_a(E)$. Определим отображение $f\mapsto\tilde{f}$ из пространства $\mathcal{F}(F)$ в пространство $\mathcal{F}_a'(E)$, полагая $\tilde{f}(\tilde{\xi})=\xi(f)$ $\forall\xi\in\mathcal{F}'(F)$.

Квадратичные формы $a^+: F\to C$, $a^-: F\to C$, задаваемые равенствами $a^+(y_Q, y_P)=\langle T^+(y_Q, y_P), y_Q\rangle$, $a^-(y_Q, y_P)=\langle T^-(y_Q, y_P), y_Q\rangle$, являются измеримыми относительно σ-алгебры $\mathcal{B}_F$ функциями. Функции $g^+: F\to C$, $y\mapsto e^{ia^+(y)}$, $g^-: F\to C$, $y\mapsto e^{ia^-(y)}$ будут принадлежать пространству $\mathcal{F}(F)$, так как имеют место равенства

$$g^+(y)=\int e^{i\langle x_P, y_Q\rangle}\,\delta_{E_P,T^+y}(dx_P),$$

$$g^-(y)=\int e^{i\langle x_P, y_Q\rangle}\,\delta_{E_P,T^-y}(dx_P)$$

для любого $y=(y_Q, y_P)\in F$. В свою очередь меры удовлетворяют оценкам

$$|\delta_{E_P,\frac{1}{2}T^+y}|(E_P)=1,$$

$$|\delta_{E_P,\frac{1}{2}T^-y}|(E_P)=1,$$

и для любой ограниченной борелевской функции φ на пространстве E_P, для которой функции $\varphi\circ T^-$, $\varphi\circ T^+$ измеримы относительно σ-алгебры $\mathcal{B}_F$, функции

$$g_\varphi^+(y_Q, y_P)=\int e^{i\langle x_P, y_Q\rangle}\,\varphi(x_P)\,\delta_{E_P,T^+y}(dx_P)=$$

$$=\varphi(T^+y)\,e^{i\langle T^+y, y_Q\rangle},$$

$$g_{\varphi}^{-}(y_Q,\ y_P)=\int e^{i\langle x_P,y_Q\rangle}\varphi(x_P)\,\delta_{E_P,T^{-}y}(dx_P)=$$

$$=\varphi(T^{-}y)\,e^{i\langle T^{-}y,y_Q\rangle}\ \forall\, y=(y_Q,\ y_P)\in F$$

также будут измеримы относительно σ-алгебры $\mathscr{B}_F$.

Мерами Фейнмана $\Phi_a^4{+}$, $\Phi_a^4{-}$, порожденными квадратичными формами $2a^{+}$, $2a^{-}$ соответственно, на пространстве F будем называть «обобщенные меры» $\tilde{g}^{+}$, $\tilde{g}^{-}\in\mathscr{F}_a{}'(E)$. Скажем, что функция $f:E\to C$ интегрируема по мере Фейнмана $\Phi^4{}_a{+}$ (соответственно $\Phi^4{}_a{-}$), если она принадлежит пространству $\mathscr{F}_a(E)$. При этом величину $\tilde{g}^{+}(f)$ (соответственно $\tilde{g}^{-}(f)$) назовем интегралом Фейнмана по мере $\Phi_a^4{+}$ ($\Phi_a^4{-}$) и обозначим через $\int f(x)\,\Phi_a^4{+}\,(dx)$ $\left(\text{соответственно } \int f(x)\,\Phi_a{-}\,(dx)\right)$.

Лемма 2.3. *Пусть $a:P\to R$, $h:P\times Q\to R$, $u_0:Q\to C$ — непрерывные функции и ν, ν_0 — счетно-аддитивные борелевские меры ограниченной вариации на пространствах $Q\times P$, P соответственно, такие, что выполнены соотношения* (2.10)—(2.14). *Тогда для каждого $q\in Q$ имеет место равенство*

$$\tilde{\xi}_{a,\nu,\nu_0,q}(x)=u_0(x(0)+q)\times$$
$$\times\, e^{i\int_0^t a(x_P(\tau))d\tau-i\int_0^t h(x_P(\tau),x_Q(\tau)+q)\,d\tau}$$
$$\forall\, x=(x_P,\ x_Q)\in E. \tag{2.26}$$

Доказательство. В силу равенств

$$\eta_a(e_x)(y)=\int_{E_P}e^{i\int_0^t a(x'_P(\tau))\,d\tau}\,e^{i\langle x'_P,y_Q\rangle}\,e^{i\langle x_Q,y_P\rangle}\,\delta_{E_P,x_P}(dx'_P)=$$

$$=e^{i\int_0^t a(x_P(\tau))d\tau}\,e^{i\langle x_P,y_P\rangle}\,e^{i\langle x_Q,y_P\rangle}$$

имеем

$$\tilde{\xi}_{a,\nu,\nu_0,q}(x)=\xi_{a,\nu,\nu_0 q}(e_x)=$$

$$=\int_F\eta_a(e_x)\,\varphi_q(y_Q,\ y_P)\,\mu_\nu*(\nu_\gamma\circ\gamma^{-1})'(dy)=$$

$$=e^{i\int_0^t a(x_P(\tau))\,d\tau}\int_F e^{i\langle x_P,x_Q\rangle}\,e^{i\langle x_Q,y_P\rangle}\,e^{i\langle q,y_P([0,t])\rangle}\,\mu_\nu*(\nu_0\circ\gamma^{-1})\,(dy)=$$

$$= e^{i\int_0^t a(x_P(\tau))\,d\tau} \int_P \int_F e^{i\langle x_P, y_Q\rangle} e^{i\langle x_Q, y_P + p\delta_0\rangle} e^{i(q, y_P([0,t]) + p)} \nu_0(dp)\,\mu_\nu(dy) =$$

$$= e^{i\int_0^t a(x_P(\tau))\,d\tau} \int e^{i\langle x_Q(0)+q, p\rangle} \nu_0(dp) \int_F e^{i\langle x_P, y_Q\rangle} e^{i\int_0^t \langle x_Q(\tau)+q, y_P(d\tau)\rangle} \mu_\nu(dy),$$

откуда в силу (2.11), (2.12) и леммы 2.1 получим равенство (2.26).

Теорема 2.1. *Пусть* $a: P\to R$, $h: P\times Q\to R$, $u_0: Q\to C$ — *непрерывные функции и* ν, ν_0 — *счетно-аддитивные борелевские меры ограниченной вариации на пространствах* $Q\times P$, P *соответственно, такие, что выполнены соотношения* (2.10)—(2.14). *Тогда решение задачи Коши* (2.5), (2.6) *существует и представимо в виде*

$$u(t, q) = \int u_0(x_Q(0)+q)\, e^{i\int_0^t a(x_P(\tau))\,d\tau - i\int_0^t h(x_P(\tau),\, x_Q(\tau)+q)\,d\tau}\, \Phi_a^{4-}(dx). \tag{2.27}$$

Доказательство. Из леммы 2.3 и определения интеграла по мере Фейнмана Φ_a^{4-} следует

$$\int u_0(x(0)+q)\, e^{i\int_0^t a(x_P(\tau))\,d\tau - i\int_0^t h(x_P(\tau), x_Q(\tau)+q)\,d\tau} \times$$

$$\times\, \Phi_a^{4-}(dx) = \tilde{g}_{a^-}(\tilde{\xi}_{a,\nu,\nu_0,q}) = \xi_{a,\nu,\nu_0,q}(g_{a^-}) =$$

$$= \int_F \eta_a(g_{a^-})(y)\,\varphi_q(y)\,\mu_\nu * (\nu_0 \circ \gamma^{-1})(dy) =$$

$$= \int_F \Big(\int_{E_P} e^{i\int_0^t a(x_P(\tau))\,d\tau} e^{i\langle x_P, y_Q\rangle} \delta_{E_P, T^- y}(dx_P) \Big) \cdot \varphi_q(y)\,\mu_\nu * (\nu_0 \circ \gamma^{-1})(dy) =$$

$$= \int_F e^{i\int_0^t a(y_P([\tau,t])\,d\tau} e^{i\langle T^- y, y_Q\rangle} e^{i\langle q, y_P([0,t])\rangle} \mu_\nu * (\nu_0 \circ \gamma^{-1})(dy) =$$

$$= \int_P \int_F e^{i\int_0^t a(y_P([\tau,t])+p)\,d\tau} e^{i\int_0^t \langle y_Q(d\tau), y_P([\tau,t])+p\rangle} \times$$

$$\times\, e^{i\langle q, y_P([0,t])+p\rangle} \mu_\nu(dy)\,\nu_0(dp).$$

Из предложения 2.1 и равенства (2.27) следует

$$u(t,\ q)=\int\limits_P e^{ia(p)\,t}e^{i\,\langle q,p\rangle}\nu_0(dp)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_{n-1}}\Bigg[\int\limits_P\int\limits_Q\int\limits_P\cdots\int\limits_Q\int\limits_P e^{ia\left(p+\sum\limits_{k=1}^{n}p_k\right)(t-t_1)}\times$$

$$\times e^{i\sum\limits_{k=2}^{n}a\left(p+\sum\limits_{l=k}^{n}p_l\right)(t_{k-1}-t_k)+ia(p)t_n}\,e^{i\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left\langle q_k,p+\sum\limits_{l=k+1}^{n}p_l\right\rangle+i\langle q_n,p\rangle}\times$$

$$\times e^{i\left\langle q,p+\sum\limits_{k=1}^{n}p_k\right\rangle}\nu(dq_1,\ dp_1)\ldots\nu(dq_n,\ dp_n)\,\nu_0(dp)\Bigg]dt_1\ldots dt_n,$$

и в силу предложения 2.2 функция $u(t,\ q)$ будет решением задачи Коши (2.5), (2.6).

Теорема 2.2. *Пусть* $a: P\to R$, $h: P\times Q\to R$, $u_0: Q\to C$ — *непрерывные функции и* ν, ν_0 — *счетно-аддитивные борелевские меры ограниченной вариации на пространствах* $Q\times P$, P *соответственно, такие, что выполнены соотношения* (2.10)—(2.14). *Тогда решение задачи Коши* (2.6), (2.7) *существует и представимо в виде*

$$u(t,\ q)=\int u_0(x_a(0)+q)\times$$

$$\times e^{i\int\limits_0^t a(x_P(\tau))d\tau-i\int\limits_0^t h(x_P(\tau),\,x_Q(\tau)+q)d\tau}\,\Phi_{a^+}^4(dx). \qquad (2.28)$$

Доказательство. В силу леммы 2.3 имеем

$$u(t,\ q)=\widetilde{g}_{a^+}(\widetilde{\xi}_{a,\nu,\nu_0,q})=\xi_{a,\nu,\nu_0,q}(g_{a^+})=\int\limits_P\int\limits_F e^{i\int\limits_0^t a(y_P([\![\tau,t]\!])+p)d\tau}\times$$

$$\times e^{i\int\limits_0^t\langle y_Q(d\tau),\,y_P([\![\tau,t]\!])+p\rangle}\times e^{i\langle q,y_P([\![0,t]\!])+p\rangle}\mu_\nu(dy)\,\nu_0(dp).$$

Учитывая предложение 2.1, получим равенство (2.17). Следовательно, функция $u(t,\ q)$ является решением задачи Коши (2.6), (2.7).

Замечание 1. В работе Ф. А. Березина [34] предлагалось искать решения задачи Коши для уравнения Шредингера с псевдодифференциальным оператором и qp-символом (2.5), (2.6) в виде континуального интеграла

$$u(t,\ q)=\int u_0(x_Q(0)+q)\,e^{\,i\int\limits_{0+0}^{t} a(x_P(\tau-0))d\tau-i\int\limits_{0+0}^{t} h(x_P(\tau-0),\,x_Q(\tau)+q)\,d\tau}\times$$

$$\times e^{-i\int\limits_{0+0}^{t}\langle (x_Q)'(\tau),x_P(\tau)\rangle d\tau}\qquad \Pi\langle dx_Q,\ dx_P\rangle$$

и для уравнения Шредингера с псевдодифференциальным оператором с pq-символом $a—h$ (2.7) в виде континуального интеграла

$$u(t,\ q)=\int u_0(x_Q(0)+q)\,e^{\,i\int\limits_{0+0}^{t} a(x_P(\tau))d\tau}$$

$$\times e^{-i\int\limits_{0+0}^{t} h(x_P(\tau),x_Q(\tau-0)+q)\,d\tau}\ e^{-i\int\limits_{0+0}^{t}\langle (x_Q)'(\tau),x_P(\tau)\rangle d\tau}\qquad \Pi\langle dx_Q,\ dx_P\rangle,$$

см. также работу [3].

Отметим, что в решениях этих задач, представленных формулами (2.27), (2.28), «сдвиг по времени» также проявляется в квадратичных формах

$$a^-(y_Q,\ y_P)=\int\limits_0^t\langle y_Q(d\tau),\ y_P([\tau,\ t])\rangle,$$

$$a^+(y_Q,\ y_P)=\int\limits_0^t\langle y_Q(d\tau),\ y_P([\tau,\ t])\rangle,$$

задающих меры Фейнмана Φ_a^{4-}, Φ_a^{4+}.

Определим на пространстве $\widetilde{M}_a(Q)$ норму $l_{M,a}$, полагая

$$l_{M,a}(\widetilde{\rho})=\int\limits_P(|a(p)|+1)\,|\rho|\,(dp)$$

для любых $\rho\in M_a(P)$.

Замечание 2. Из равенства (2.16) и оценок из доказательства предложения (2.2) следует, что решение задачи Коши (2.5), (2.6), представленной в виде (2.27), принадлежит пространству $C^1([0,\ +\infty),\ \widetilde{M}(Q))\cap C([0,\ +\infty),\ \widetilde{M}_a(Q))$. Аналогично проверяются в силу соотношений из доказательства предложения (2.3), что решение задачи Коши (2.6), (2.7), представленное формулой (2.28), также принадлежит пространству $C^1([0,\ +\infty),\ \widetilde{M}(Q))\cap C([0,\ +\infty),\ \widetilde{M}_a(Q))$.

Обозначим символом $l_{Q,M}$ норму на пространстве $\widetilde{M}(Q)$ ($l_{Q,M}(\widetilde{\rho})=|\rho|(P)\ \ \forall\rho\in M(P)$), символами $\widetilde{M}'(Q)$, $\widetilde{M}_a'(Q)$ сильные сопряженные к пространствам $\widetilde{M}(Q)$, $\widetilde{M}_a(Q)$ соответственно, и символами $l'_{Q,M}$, $l'_{M,a}$ нормы на этих пространствах.

Отображение $\hat{a} : M_a(Q) \to \tilde{M}(Q) : \tilde{\rho} \mapsto \hat{a}\tilde{\rho}$ непрерывно в силу оценки

$$l_{Q,M}(\hat{a}, \tilde{\rho}) = \int_P |a(p)|\, |\rho|(dp) \leqslant l_{M,a}(\tilde{\rho});$$

следовательно, определено сопряженное к нему отображение $\hat{a}' : \tilde{M}'(Q) \to \tilde{M}_a'(Q)$, которое также будет непрерывно.

Из оценок

$$l_{Q,M}(\hat{h}_{qp}, \tilde{\rho}) \leqslant |\nu|(Q, P)\, |\rho|(P) \leqslant |\nu|(Q, P)\, l_{Q,M}(\tilde{\rho}),$$

$$l_{Q,M}(\hat{h}_{pq}\tilde{\rho}) \leqslant |\nu|(Q, P) \cdot l_{Q,M}(\tilde{\rho})$$

$$\forall \rho \in M(P)$$

(напомним, что

$$h(p, q) = \int_Q \int_P e^{i\langle q_1, p\rangle} e^{i\langle q, p_1\rangle} \nu((dq_1, dp_1))$$

следует непрерывность отображений $\hat{h}_{q,p} : \tilde{M}(Q) \to \tilde{M}(Q)$, $\hat{h}_{pq} : : \tilde{M}(Q) \to \tilde{M}(Q)$, значит, определены сопряженные отображения $\hat{h}'_{qp} : \tilde{M}'(Q) \to \tilde{M}'(Q)$, $\hat{h}'_{pq} : \tilde{M}'(Q) \to \tilde{M}'(Q)$, и они непрерывны.

Поставим задачу Коши для обобщенного уравнения Шредингера

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi(t) = i\hat{a}'\xi(t) - i\hat{h}'_{qp}\xi(t), \tag{2.29}$$

задавая начальное условие

$$\xi(0) = \xi_0 \in \tilde{M}'(Q) \tag{2.30}$$

и требуя $\xi(t) \in \tilde{M}'(Q)$, $\frac{\partial}{\partial t}\xi(t) \in \tilde{M}_a'(Q)$ (производная берется в слабой топологии на пространстве $\tilde{M}'_a(Q)$). Аналогично ставится задача Коши для обобщенного уравнения Шредингера

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi(t) = i\hat{a}'\xi(t) - i\hat{h}'_{pq}\xi(t), \tag{2.31}$$

задавая начальное условие (2.30) и требуя

$$\xi(t) \in \tilde{M}'(Q), \quad \frac{\partial}{\partial t}\xi(t) \in \tilde{M}_a'(Q).$$

В силу включения $M_a(P) \in M(P)$ и оценки

$$l_{M,a}(\varphi) \leqslant l_{Q,M}(\varphi) \ \forall \varphi \in \tilde{M}_a(Q)$$

пространство $\tilde{M}'(Q)$ можно считать линейным подпространством пространства $\tilde{M}'_a(Q)$, так как множество $\tilde{M}_a(Q)$ плотно в $\tilde{M}(Q)$, поэтому равенства (2.29), (2.31) определяются как равенства векторов из пространства $\tilde{M}'(Q)$.

Определим вложение $\alpha : M(Q) \to \widetilde{M}'(Q)$, полагая

$$\alpha(\rho)(f) = \int_Q f(q)\rho(dq) \ \forall \rho \in M(Q),\ \forall f \in \widetilde{M}(Q).$$

Теорема 2.3. *Если мера ν_0 принадлежит пространству $M(Q)$, функция $h : P \times Q \to R$ представима в виде*

$$h(p, q) = \int e^{i\langle q_1, p\rangle} e^{i\langle q, p_1\rangle} \nu(dq_1, dp_1)$$

($\nu \in M(Q \times P)$) и непрерывная функция $a : P \to R$ удовлетворяет соотношению (2.10), *то существует решение $\xi : [0, +\infty) \to \widetilde{M}'(Q)$ задачи Коши для обобщенного уравнения Шредингера* (2.29), (2.30) *при $\xi_0 = \alpha(\nu_0)$, задаваемое равенством*

$$\xi(t)(u) = \int_Q \left[\int u(x(0) + q) \times \right.$$

$$\left. \times e^{i\int_0^t a(x_P(\tau))d\tau - i\int_0^t h(x_P(\tau), x_Q(\tau)+q)d\tau} \Phi_{a}^{4-}(dx) \right] \nu_0(dq) \qquad (2.32)$$

для любого $u \in \widetilde{M}(Q)$.

Доказательство. Из равенства (2.32) следует, что для любого $\rho \in M(P)$ имеет место равенство

$$\xi(t)(\widetilde{\rho}) = \int_Q \int_F \int_P e^{i\int_0^t a(y_P([\tau, t]) + p)\, d\tau} e^{i\int_0^t \langle y_Q(d\tau), y_P([\tau, t]) + p\rangle} \times$$

$$\times e^{i\langle q, y_P([0, t]) + p\rangle} \rho(dp) \mu_\nu(dy) \nu_0(dq), \qquad (2.33)$$

откуда получим оценку

$$|\xi(t)(\widetilde{\rho})| \leqslant |\nu_0|(Q) |\mu_\nu|(F) |\rho|(P) = |\nu_0|(Q) |\mu_\nu|(F) l_{Q,M}(\widetilde{\rho}).$$

Значит, при любом $t \geqslant 0$ обобщенная мера $\xi(t)$ принадлежит пространству $\widetilde{M}'(Q)$. В силу (2.33), производя замену

$$t_1' = t - t_n, \ \ldots, t_n' = t - t_1 \ (t \geqslant t_1' \geqslant \ldots \geqslant t_n' \geqslant 0),$$

получим

$$\frac{d}{dt} \xi(t)(\widetilde{\rho}) = \frac{\partial}{\partial t} \int_Q \int_P e^{i\langle q, p\rangle} e^{a(p)t} \nu_0(dq) \rho(dp) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{\partial}{\partial t} \int_Q \int_0^t \int_0^{t_1'} \cdots \int_0^{t_{n-1}'} \int_P \int_Q \int_P \cdots \int_Q \int_P e^{i\langle q, p + \sum_{k=1}^n p_k\rangle} \times$$

$$\times e^{ia\left(p+\sum_{k=1}^{n} p_k\right)t_n'} e^{i\sum_{k=2}^{n} a\left(p+\sum_{l=k}^{n} p_l\right)(t_{n-k+1}'-t_{n-k+2}')} \times$$

$$\times e^{ia(p)(t-t_1')} e^{i\sum_{k=1}^{n-1}\left\langle q_k, p+\sum_{l=k+1}^{n} p_l\right\rangle} e^{i\langle q_n, p\rangle} e^{i\left\langle q, p+\sum_{k=1}^{n} p_k\right\rangle} \nu(dq_1, dp_1)\ldots$$

$$\ldots \nu(dq_n, dp_n)\rho_0(dp)\nu_0(dq)\,dt_1'\ldots dt_n' =$$

$$= \int_Q\int_P e^{i\langle q,p\rangle}\, ia(p)\, e^{ia(p)t}\nu_0(dq)\rho(dp) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\int_Q\int_0^t\int_0^{t_1'}\cdots\int_0^{t_{n-1}'}\int_P\int_Q\int_P\cdots\int_Q\int_P e^{i\left\langle q, p+\sum_{k=1}^{n} p_k\right\rangle}\times$$

$$\times e^{ia\left(p+\sum_{k=1}^{n} p_k\right)t_n'} e^{i\sum_{k=2}^{n} a\left(p+\sum_{l=k}^{n} p_l\right)(t_{n-k+1}'-t_{n-k+2}')}\times$$

$$\times e^{ia(p)(t-t')}\, ia(p)\, e^{i\sum_{k=1}^{n-1}\left\langle q_k, p+\sum_{l=k+1}^{n} p_l\right\rangle} e^{i\langle q_n, p\rangle}\times$$

$$\times \nu(dq_1, dp_1)\ldots\nu(dq_n, dp_n)\rho(dp)\nu_0(dq)\,dt_1'\ldots dt_n' +$$

$$+(-i)\int_Q\int_P\int_Q\int_P e^{i\langle q, p+p_1\rangle} e^{ia(p+p_1)t}\nu_0(dq)\nu(dq_1,\ldots, dp_1)\rho(dp)+$$

$$+(-i)\sum_{n=2}^{\infty}(-i)^n\int_Q\int_0^t\int_0^{t_2'}\cdots\int_0^{t_{n-1}'}\int_Q\int_P\cdots\int_Q\int_P e^{i\left\langle q, p+\sum_{k=1}^{n} p_k\right\rangle}\times$$

$$\times e^{ia\left(p+\sum_{k=1}^{n} p_k\right)t_n'} e^{i\sum_{k=2}^{n-1} a\left(p+\sum_{l=k}^{n} p_l\right)(t_{n-k+1}'-t_{n-k+2}')}\times$$

$$\times e^{ia(p+p_n)(t-t_2')} e^{i\sum_{k=1}^{n-1}\left\langle q_k, p+\sum_{l=k+1}^{n} p_l\right\rangle} e^{i\langle q_n, p\rangle}\times$$

$$\times \nu(dq_1, dp_1)\ldots\nu(dq_n, dp_n)\rho_0(dp)\nu_0(dq)\,dt_2'\ldots dt_n' =$$

$$= i\int_Q\int_P\int_F e^{i\int_0^t (y_P([\![\tau, t]\!])+p)\,d\tau}\, a(p)\, e^{i\int_0^t \langle y_Q(d\tau),\, y_P(]\!]\tau, t]\!])+p\rangle}$$

$$\times e^{i\langle q, y_P([\![0,t]\!])+p\rangle}\rho(dp)\mu_\nu(dy)\nu_0(dy) -$$

$$-i\int\limits_Q\int\limits_P\int\limits_Q\int\limits_P\int\limits_F e^{i\int\limits_0^t a(y_P([\tau,t])+p+p_0)} e^{i\int\limits_0^t \langle y_Q(d\tau),\, y_P([\tau,t])+p+p_0\rangle} \times$$

$$\times e^{i\langle q,\, y_P(]0,t])+p+p_0\rangle} e^{i\langle q_0,p\rangle} \rho(dp)\, \nu_0(dq)\, \nu(dq_0,\ dp_0)\, \mu_\nu(dy) =$$

$$= i\xi(t)(\widehat{a}\,\widetilde{\rho}) - i\xi(t)(\widehat{h}_{qp}\widetilde{\rho}) = i(\widehat{a}'\xi(t))(\widetilde{\rho}) - i(\widehat{h}'_{qp}\xi(t))(\widetilde{\rho})$$

для любого $\rho\in M_a(P)$, откуда следует равенство (2.29). Положив $t=0$ в равенстве (2.33), получим равенство (2.30).

Теорема 2.4. *Если мера ν_0 принадлежит пространству $M(Q)$ и функция $h: P\times Q\to R$ представима в виде*

$$h(p,\ q) = \int e^{i\langle q_1,p\rangle} e^{i\langle q,p_1\rangle} \nu(dq_1,\ dp_1) \quad (\nu\in M(Q\times P))$$

и непрерывная функция $a: P\to R$ удовлетворяет соотношению (2.10), *то существует решение $\xi: [0,\ +\infty)\to\widetilde{M}'(Q)$ задачи Коши для обобщенного уравнения Шредингера* (2.30), (2.31) *при $\xi_0=\alpha(\nu_0)$, задаваемое равенством*

$$\xi(t)(u) = \int\limits_Q \left[\int u(x(0)+q)\, e^{i\int\limits_0^t a(x_P(\tau))d\tau - i\int\limits_0^t h(x_P(\tau),\, x_Q(\tau)+q)d\tau} \times \right.$$

$$\left. \times\, \Phi_{a^+}^4(dx)\right] \nu_0(dq) \qquad (2.34)$$

для любого $u\in\widetilde{M}(Q)$.

Доказательство приводится аналогично доказательству теоремы 2.3.

Теорема 2.5. *Пусть $a: P\to R$, $h: P\times Q\to R$, $u_0: Q\to C$ — непрерывные функции и ν, ν_0 — счетно-аддитивные борелевские меры ограничений вариации на пространствах $Q\times P$, P соответственно, такие, что выполнены соотношения* (2.10)—(2.14). *Тогда решение задачи Коши* (2.5), (2.6) *существует и единственно в классе*

$$C^1([0,\ +\infty),\ \widetilde{M}(Q)) \cap C([0,\ +\infty),\ \widetilde{M}_u(Q))$$

и представимо в виде (2.27).

Доказательство. Существование решения следует из теоремы 2.1, поэтому достаточно доказать единственность.

Пусть u_1 — решение задачи Коши для уравнения Шредингера (2.5), (2.6), принадлежащее классу

$$C^1([0,\ +\infty),\ \widetilde{M}(Q)) \cap C([0,\ +\infty),\ \widetilde{M}_u(Q)).$$

Положим

$$u(t, q)=u_1(t, q)-\int u_0(x_Q(0)+q)\times$$

$$\times e^{i\int\limits_0^t a(x_P(\tau))d\tau-i\int\limits_0^t h(x_P(\tau), x_Q(\tau)+q)d\tau}\Phi^4_{a^-}(dx).$$

Тогда функция u будет решением уравнения Шредингера (2.5), удовлетворять равенству $u(0, q)=0$ $\forall q\in Q$ и принадлежать пространству

$$C^1([0, +\infty, \widetilde{M}(Q))\cap C([0, +\infty), \widetilde{M}_a(Q)).$$

Пусть $t_0>0$ и ν_0 — произвольная мера из пространства $M_a(P)$. Из теоремы 2.3 следует, что существует решение

$$\xi:[0, +\infty)\to\widetilde{M}'(Q)$$

обобщенного уравнения Шредингера (2.29), удовлетворяющее начальному условию $\xi(0)=\alpha(\nu_0)$. Определим функцию $\varphi:[0, t_0]\to C$, полагая $\varphi(t)=\xi(t_0-t)(u(t, \cdot))$ при $t\in[0, t_0]$. В силу (2.5), (2.29) выполнены равенства

$$\varphi'(t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\xi(t_0-t)\right)(u(t, \cdot))+\xi(t_0-t)\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t, \cdot)\right)=$$

$$=i(\widehat{a}'\xi(t_0-t))(u(t, \cdot))+i(\widehat{h}'_{qp}\xi(t_0-t))(u(t, \cdot))+$$

$$+\xi(t_0-t)\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t, \cdot)\right)=-i\xi(t_0-t)(\widehat{a}u(t, \cdot))+$$

$$+i\xi(t_0-t)(\widehat{h}_{qp}u(t, \cdot))+\xi(t_0-t)\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t, \cdot)\right)=$$

$$=\xi(t_0-t)\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t, \cdot)-i\widehat{a}u(t, \cdot)+i\widehat{h}_{qp}u(t, \cdot)\right)=0,$$

откуда следует равенство $\varphi(t_0)=\varphi(0)$, или

$$\int\limits_Q u(t_0, q)\nu_0(dq)=\xi(0)(u(t_0, \cdot))=\xi(t_0)(u(0, \cdot))=0.$$

Так как мера ν_0 из пространства $M(Q)$ бралась произвольным образом, то будет иметь место равенство

$$u(t, q)= \quad \forall q\in Q, \quad \forall t\geqslant 0.$$

Следовательно, решение единственно.

Теорема 2.6. *Пусть $a:P\to R$, $h:P\times Q\to R$, $u_0:Q\to C$ — непрерывные функции и ν, ν_0 — счетно-аддитивные борелевские меры ограниченной вариации на пространствах $Q\times P$, P соответственно, такие, что выполнены соотношения* (2.10)—

(2.14). *Тогда решение задачи Коши* (2.6), (2.7) *существует и единственно в классе*

$$C^1([0, +\infty), \widetilde{M}(Q)) \cap C([0, +\infty), \widetilde{M}_a(Q))$$

и представимо в виде (2.28).

Доказательство проводится аналогнчно доказательству теоремы 2.5.

Теорема 2.7. *Если мера* ν *принадлежит пространству* $M(Q)$, *функция* $h: P\times Q\to R$ *представима в виде*

$$h(p, q) = \int e^{i\langle q_1, p\rangle} e^{i\langle q, p_1\rangle} \nu(dq_1, dp_1) \quad (\nu \in M(Q\times P))$$

и непрерывная функция $a: P\to R$ *удовлетворяет соотношению* (2.10), *то решение задачи Коши* (2.29), (2.30) *существует и единственно.*

Доказательство. Существование решения следует из теоремы 2.3. Докажем единственность.

Пусть ξ_1 — решение задачи (2.29), (2.30). Положим

$$\xi(t)(w) = \xi_1(t)(w) - \int_Q \Big[\int w(x(0)+q) \times$$

$$\times e^{i\int_0^t a(x_P(\tau))d\tau - i\int_0^t h(x_P(\tau), x_Q(\tau)+q)d\tau} \Phi^4_{a^-}(dx)\Big] \nu_0(dq) \quad \forall w \in \widetilde{M}(Q).$$

Тогда отображение $t\mapsto\xi(t)$ будет решением обобщенного уравнения Шредингера (2.29), удовлетворяющее начальному условию $\xi(0)=0$.

Пусть $t_0>0$ и u_0 — произвольная функция из пространства $\widetilde{M}_a(Q)$. Из теоремы 2.5 следует существование решения u уравнения Шредингера (2.5), удовлетворяющего начальному условию $u(0, q) = u_0(q)$ и принадлежащего пространству

$$C^1([0, +\infty), \widetilde{M}(Q)) \cap C([0, +\infty), \widetilde{M}_a(Q)).$$

В силу равенств (2.5), (2.29) имеем

$$\frac{d}{dt}[\xi(t)(u(t_0-t, \cdot))] = \left(\frac{d}{dt}\xi(t)\right)(u(t_0-t, \cdot)) +$$

$$+\xi(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t_0-t, \cdot)\right) = \left(\frac{d}{dt}\xi(t)\right)(u(t_0-t, \cdot)) -$$

$$-\xi(t)(i\widehat{a}u(t_0-t, \cdot)) + \xi(t)(i\widehat{h}_{qp}u(t_0-t, \cdot)) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\xi(t) - i\widehat{a}'\xi(t) + i\widehat{h}'_{qp}\xi(t)\right)(u(t_0-t, \cdot)) = 0,$$

откуда следует

$$\xi(t_0)(u(0, \cdot)) = \xi(0)(u(t_0, \cdot)),$$

или $\xi(t_0)(u_0)=0$. Так как функция u_0 из пространства $\tilde{M}_a(Q)$ бралась произвольным образом, то имеет место равенство

$$\xi(t)=0 \quad (\forall t\geqslant 0),$$

Следовательно, решение единственно.

Теорема 2.8. *Если мера ν принадлежит пространству $M(Q)$, функция $h: P\times Q\to R$ представима в виде*

$$h(p,\ q)=\int e^{i(q_1,p)}e^{i(q,p_1)}\nu(dq_1,\ dp_1) \quad (\nu\in M(Q\times P))$$

и непрерывная функция $a: P\to R$ удовлетворяет соотношению (2.10), *то решение задачи Коши* (2.30), (2.31) *существует и единственно.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.7.

§ 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ВИДА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть Q — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)_q$ и нормой $\|\cdot\|_q$; $e_1,\ \ldots,\ e_n,\ \ldots$ — ортонормированный базис в пространстве Q; T — положительно определенный самосопряженный оператор Гильберта—Шмидта, удовлетворяющий равенствам $Te_n=\lambda_n l_n(\lambda_n\in R)$, т. е. векторы $e_1,\ \ldots,\ e_n,\ \ldots$ являются собственными векторами отображения T; $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \ldots$ — соответствующие им собственные значения, удовлетворяющие оценкам $\lambda_n>0,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2<0.$

Пусть также $P: Q\times Q\times Q\times Q\to R$ — 4-линейное симметричное отображение, такое, что для любых ненулевых $q\in Q$

$$P_4(q,\ q,\ q,\ q)>0, \tag{3.1}$$

существует число $C_{4,1}>0$, такое, что для любых $q=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\in Q$

$$P_4(q,\ q,\ q,\ q)\leqslant C_{4,1}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4\alpha_n^6\Big)^{2/3}, \tag{3.2}$$

и существует число $C_{4,2}>0$, такое, что для любых $q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4\in Q$

$$P_4(q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4)\leqslant C_{4,2}\, l(q_1)\, l(q_2)\, l(q_3)\, l(q_4), \tag{3.3}$$

где

$$l(x)=(P_4(q,\ q,\ q,\ q))^{1/4},$$

кроме того, $P_3: Q\times Q\times Q\to R, P_2: Q\times Q\to R,\ P_1: Q\to R$ — 3-, 2- и 1-

линейные симметричные отображения, такие, что выполнеиы для любых q_1, q_2, $q_3 \in Q$ неравенства

$$|P_3(q_1, q_2, q_3)| \leqslant C_3 l(q_1) l(q_2) l(q_3), \tag{3.4}$$

$$|P_2(q_1, q_2)| \leqslant C_2 l(q_1) l(q_2), \tag{3.5}$$

$$|P_1(q_1)| \leqslant C_1 l(q_1), \tag{3.6}$$

где C_3, C_2, C_1 — константы, не зависящие от q_1, q_2, q_3.

Определим функции $P: Q \to R$, $v: Q \to R$, полагая

$$P(q) = P_4(q, q, q, q), \tag{3.7}$$

$$v(q) = P_4(q, q, q, q) + P_3(q, q, q) + P_2(q, q) + P_1(q) + p_0, \tag{3.8}$$

где p_0 — некоторое вещественное число.
Положим

$$\Delta_T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Будем говорить, что поставлена задача Коши для уравиения Шредингера, если задано уравнение Шредингера

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, q) = \frac{1}{2} i \Delta_T u(t, q) + iv(q) u(t, q), \tag{3.9}$$

$$u(0, d) = u_0(q) \text{— начальное условие.} \tag{3.10}$$

Пусть t — положительное число. Пусть символы E, E_0, E_C, $\|\cdot\|$, $(\cdot, \cdot)$, a, $\|\cdot\|_{a,q}$ обозначают те же объекты, что эти символы обозначали в § 4 главы II.

Обозначим через $\mathcal{F} Q_C$ класс аналитичных функций на $Q_C = C \otimes Q$, таких, что для любой функции w из класса $\mathcal{F} Q_C$ и любых положительных ε, r существует такая константа $C_1(\varepsilon, r)$, что для любых q_0, q_1, q_2, h_1, $h_2 \in Q$, α_1, $\alpha_2 \in C$, удовлетворяющих условиям

$$\|q_0\|_q \leqslant r, \quad \|h_1\|_q \leqslant 1, \quad \|h_2\|_a \leqslant 1,$$

$$|\alpha_1| \leqslant 2, \quad |\alpha_2| \leqslant 2,$$

$$0 \leqslant \arg \alpha_1 \leqslant \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leqslant \arg \alpha_2 \leqslant \pi/4$$

выполнено неравенство

$$|D_{h_1} D_{h_2} w(q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)| \leqslant C_1(\varepsilon, r) e^{\varepsilon \|q_1\|_q^2 + \varepsilon \|q_2\|_q^2 + \varepsilon \|q_1\|_{4,q}}, \tag{3.11}$$

где символы D_h обозначают производную функции по направлению h.

Лемма 3.1. *Если функция w принадлежит классу $\mathcal{F} Q_C$, то для любых положительных ε, r существует такая константа*

$C_2(\varepsilon, r)$, что для любых h, q_0, q_1, $q_2 \in Q$, α_1, $\alpha_2 \in C$, удовлетворяющих

$$\|q_0\|_q \leqslant r, \quad \|h\|_q \leqslant 1,$$
$$|\alpha_1| \leqslant 2, \quad |\alpha_2| \leqslant 2,$$
$$0 \leqslant \arg \alpha_1 \leqslant \pi/4, \quad 0 \leqslant \arg \alpha_2 \leqslant \pi/4,$$

выполнены неравенства

$$|D_h w(q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)| \leqslant C_2(\varepsilon, r)\, e^{\varepsilon\|q_1\|_q^2 + \varepsilon\|q_2\|_q^2 + \varepsilon\|q\|_{4,q}}, \qquad (3.12)$$

$$|w(q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)| \leqslant C_2(\varepsilon, r)\, e^{\varepsilon\|q_1\|_q^2 + \varepsilon\|q_2\|_q^2 + \varepsilon\|q_1\|_{4,q}}. \qquad (3.13)$$

Доказательство. Неравенство (3.12) следует из неравенства (3.11) и оценки

$$| D_h w(q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2) | \leqslant | D_h w(0) | +$$
$$+ \max_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} (|D_{q_0} D_h w(\tau(q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2))| +$$
$$+ |\alpha_1 D_{q_1} D_h w(\tau(q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2))| + |\alpha_2 D_{q_2} D_h w(\tau(q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2))|).$$

Аналогично неравенство (3.13) следует из неравенства (3.12) и оценки

$$|w(q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2)| \leqslant |w(0)| + \max_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} (|D_{q_0} w(\tau(q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2))| +$$
$$+ |\alpha_1 D_{q_1} w(\tau(q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2))| + |\alpha_2 D_{q_2} w(\tau(q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2))|).$$

Лемма 3.2. *Если функция u_0 принадлежит классу $\mathcal{F}Q_C$, то функционалы*

$$x \mapsto e^{i\int_0^t v(q+x(\tau))\,d\tau} u_0(x(0) + q),$$

$$x \mapsto \Delta_T e^{i\int_0^t v(q+x(\tau))\,d\tau} u_0(x(0) + q),$$

определенные на пространстве E, интегрируемы по мере Фейнмана Φ_a^3 и имеет место равенство

$$\Delta_T \int e^{i\int_0^t v(q+x(\tau))\,d\tau} u_0(q + x(0))\, \Phi_a^3(dx) =$$

$$= \int \Delta_T e^{i\int_0^t v(q+x(\tau))\,d\tau} u_0(q + x(0))\, \Phi_a^3(dx). \qquad (3.14)$$

Доказательство. Положим

$$g(q, x) = e^{i\int\limits_0^t [v(q+x(\tau)) - p(x(\tau))]d\tau} u_0(q + x(0)).$$

Из оценок (3.1)—(3.13) следует, что для любых q, h, h_1, $h_2 \in E$ функционалы

$$e^{i\int\limits_0^t p(x(\tau))d\tau} g(q, x), \quad e^{i\int\limits_0^t p(x(\tau))d\tau} D_h g(q, x),$$

$$e^{i\int\limits_0^t p(x(\tau))d\tau} D_{h_1} D_{h_2} g(q, x), \quad e^{i\int\limits_0^t p(x(\tau))d\tau} \Delta_T g(q, x)$$

принадлежат классу $s\mathcal{F}P_4$ и в силу теоремы 4.1 главы II интегрируемы по мере Фейнмана $\Phi_a{}^3$.

Возьмем монотонную последовательность $\delta_n > 0$, стремящуюся к нулю. Из оценок (3.2)—(3.13) следует, что для любого фиксированного $h \in Q$ последовательность функционалов

$$\frac{1}{\delta_n} (g(q + \delta_n h, \cdot) - g(q, \cdot))$$

удовлетворяет условию теоремы 4.2 главы II, поэтому имеют место равенства

$$D_h \int e^{i\int\limits_0^t p(x(\tau))d\tau} g(q, x)\, \mu_a(dx) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\delta_n} \int e^{i\int\limits_0^t p(x(\tau))d\tau} [g(q + \delta_n h, x) - g(q, x)]\, \mu_a(dx) =$$

$$= \int e^{i\int\limits_0^t p(x(\tau))d\tau} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\delta_n} [g(q + \delta_n h, x) - g(q, x)]\, \mu_a(dx) =$$

$$= \int e^{i\int\limits_0^t p(x(\tau))d\tau} D_h g(q, x)\, \mu_a(dx). \tag{3.15}$$

Аналогично в силу теоремы 4.2 главы имеют место равенства

$$D_{h_1} \int e^{i\int\limits_0^t p(x(\tau))d\tau} D_{h_2} g(q, x)\, \mu_a(dx) = \int e^{i\int\limits_0^t p(x(\tau))d\tau} D_{h_1} D_{h_2} g(q, x)\, \mu_a(dx), \tag{3.16}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int e^{i\int_0^t p(x(\tau))d\tau}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\frac{\partial^2}{\partial q_k^2}g(q,\ x)\right)\mu_a(dx)=$$

$$=\int e^{i\int_0^t p(x(\tau))d\tau}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\frac{\partial^2}{\partial q_k^2}g(q,\ x)\right)\mu_a(dx)=$$

$$=\int e^{i\int_0^t p(x(\tau))d\tau}\Delta_T g(q,\ x)\mu_a(dx). \qquad (3.17)$$

Из равенств (3.15)—(3.17) следует равенство (3.14).

Теорема 3.1. *Если функция u_0 принадлежит классу $\mathcal{F}Q_C$, то задача Коши* (3.9), (3.10) *имеет решение u, представимое в виде*

$$u(t,\ q)=\int e^{i\int_0^t v(q+x(\tau))d\tau}u_0(q+x(0))\,\Phi_a^3(dx). \qquad (3.18)$$

Доказательство. Положим

$$w_1(t,\ q,\ \alpha)=\int_E e^{i\int_0^t v(q+\alpha x(\tau))\,d\tau}u_0(q+x(0))\,\mu_a(dx),$$

$$w_1(t,\ q,\ e^{i\frac{\pi}{4}})=\int e^{i\int_0^t v(q+x(\tau))d\tau}u_0(q+x(0))\,\Phi_a^3(dx),$$

$$w_2(t,\ q,\ \alpha)=\int\left[\frac{\alpha^2}{2}\Delta\left(e^{i\int_0^t v(q+\alpha x(\tau))\,d\tau}u_0(q+\alpha x(0))\right)+\right.$$

$$\left.+iv(q)e^{i\int_0^t v(q+\alpha x(\tau))d\tau}u_0(q+\alpha x(0))\right]\mu_a(dx),$$

$$w_2(t,\ q,\ e^{i\frac{\pi}{4}})=\int\left[\frac{1}{2}\Delta e^{i\int_0^t v(q+x(\tau))d\tau}u_0(q+x(0))+\right.$$

$$\left.+iv(q)e^{i\int_0^t v(q+x(\tau))d\tau}u_0(q+x(0))\right]\Phi_a^3(dx)$$

для любых $t>0$, $q\in Q$, $\alpha\in C$, удовлетворяющих неравенствам $\alpha\neq0$, $0\leqslant\arg\alpha\leqslant\pi/4$.

Так как функционалы

$$e^{i\int\limits_0^t v(q+x(\tau))d\tau} u_0(q+x(0)),$$

$$\Delta_T e^{i\int\limits_0^t v(q+x(\tau))d\tau} u_0(q+x(0))$$

интегрируемы по мере Фейнмана $\Phi_a{}^3$, то функции

$$\alpha \mapsto w_1(t,\ q,\ \alpha),\quad \alpha \mapsto w_2(t,\ q,\ \alpha)$$

будут непрерывны на множестве

$$u_0 = \left\{\alpha : \alpha \neq 0,\ 0 \leqslant \arg\alpha \leqslant \frac{\pi}{4}\right\} \cup \{e^{i\frac{\pi}{4}}\}$$

и аналитичны на множестве

$$\left\{\alpha : \alpha \neq 0,\ 0 \leqslant \arg\alpha \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Из свойств меры Винера μ_a следует, что функция w_1 при $\alpha > 0$ является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} w_1(t,\ q,\ \alpha) = \frac{\alpha^2}{2}\Delta_T w_1(t,\ q,\ \alpha) + iv(q)\, w_1(t,\ q,\ \alpha) \qquad (3.19)$$

с начальным условием $\lim\limits_{t\to+0} w_1(t,\ q,\ \alpha) = u_0(q)$. Поэтому при $\alpha > 0$

$$w_1(t,\ q,\ \alpha) = \int\limits_0^t w_2(\tau,\ q,\ \alpha)\, d\tau + u_0(q).$$

Из свойств аналитических функций следует, что равенство (3.19) будет иметь место также для всех α, принадлежащих множеству u_0. Значит,

$$\frac{\partial}{\partial t} w_1(t,\ q,\ e^{i\frac{\pi}{4}}) = w_2(t,\ q,\ e^{i\frac{\pi}{4}}), \qquad (3.20)$$

$$\lim_{t\to+0} w_1(t,\ q,\ e^{i\frac{\pi}{4}}) = u_0(q). \qquad (3.21)$$

Из леммы 3.2 следует равенство

$$w_2(t,\ q,\ e^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{i}{2}\Delta w_1(t,\ q,\ e^{i\frac{\pi}{4}}) + iv(q)\, w_1(t,\ q,\ e^{i\frac{\pi}{4}}). \qquad (3.22)$$

Из равенства $u(t,\ q) = w_1(t,\ q,\ e^{i\frac{\pi}{4}})$ в силу (3.20)—(3.22) получим равенства (3.9), (3.10).

§ 4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ВИДА В КОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $Q=R^n$, $(\cdot,\ \cdot)_q$ — скалярное произведение в Q, $\|\cdot\|_q$ — норма в Q, $p_1: Q\to R$ — полином степени, не превышающей $2l-1$, и $p_2: Q\to R$ — однородный полином степени $2l$, удовлетворяющий неравенству

$$p_2(q)>0 \quad \forall\, q\in Q\setminus\{0\}.$$

Пусть также

$$v(q)=\alpha_2 p_2(q)+p_1(q),$$

где $\alpha_2=\pm 1$.

На пространстве Q поставим задачу Коши для уравнения Шредингера

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,\ q)=\frac{1}{2}i\Delta u(t,\ q)+iv(q)\,u(t,\ q) \tag{4.1}$$

(Δ — оператор Лапласа в R^n), задавая начальное условие

$$u(0,\ q)=u_0(q). \tag{4.2}$$

Пусть t — положительное число. Обозначим через E пространство всех непрерывных отображений $x: [0,\ t]\to Q$, таких, что $x(t)=0$. Введем норму $\|\cdot\|$ на пространстве E, полагая

$$\|x\|=\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|x(\tau)\|_q$$

$$\forall\, x\in E.$$

Обозначим через E_0 линейное подпространство пространства E, состоящее из всех отображений $x: [0,\ t]\to Q$, принадлежащих пространству E, имеющих всюду производную $x'(\tau)$ и удовлетворяющих условию

$$a(x)=\int_0^t (x'(\tau),\ x'(\tau))_q\,d\tau<\infty.$$

Обозначим через $\mathcal{F}Q_{0,\,C}$ класс аналитических функций на $Q_C=C^n (Q\in Q_C)$, таких, что для любой функции их класса $w\in\mathcal{F}Q_{0,\,C}$ и любых положительных ε, r существует такая константа $C_1(\varepsilon,\ r)$, что для любых

$$q_0,\ q_1,\ q_2,\ h_1,\ h_2\in Q,\ \alpha_1,\ \alpha_2\in C,$$

удовлетворяющих условиям

$$\|q_0\|_q\leqslant r, \quad \|h_1\|_q\leqslant 1, \quad \|h_2\|_q\leqslant 1,$$

$$|\alpha_1|\leqslant 2, \quad |\alpha_2|\leqslant 2,$$

$$0\leqslant\arg\alpha_1\leqslant\pi/4, \quad 0\leqslant\arg\alpha_2\leqslant\pi/4,$$

выполнено неравенство

$$|D_{h_1}D_{h_2}w(q_0+\alpha_1q_1+\alpha_2q_2)|\leqslant C_1(\varepsilon,\ r)\,e^{\varepsilon\|q_1\|_q^4+\varepsilon\|q_2\|_q^2}, \tag{4.3}$$

где символы D_h обозначают производную функцию по направлению h.

Лемма 4.1. *Если функция w принадлежит классу $\mathscr{F}Q_{0,C}$, то для любых положительных ε, r существует такая константа $C_2(\varepsilon,\ r)$, что для любых $\alpha_1,\ \alpha_2\in C$; $q_0,\ q_1,\ q_2,\ h\in Q$, удовлетворяющих*

$$\|q_0\|_q\leqslant r,\quad \|h\|_q\leqslant 1,$$
$$|\alpha_1|\leqslant 2,\quad |\alpha_2|\leqslant 2,$$
$$0\leqslant \arg\alpha_1\leqslant \pi/4,\quad 0\leqslant \arg\alpha_2\leqslant \pi/4,$$

выполнены неравенства

$$|D_hw(q_0+\alpha_1q_1+\alpha_2q_2)|\leqslant C_2(\varepsilon,\ r)\,e^{\varepsilon\|q_1\|_q^4+\varepsilon\|q_2\|_q^2}, \tag{4.4}$$

$$|w(q_0+\alpha_1q_1+\alpha_2q_2)|\leqslant C_2(\varepsilon,\ r)\,e^{\varepsilon\|q_1\|_q^4+\varepsilon\|q_2\|_q^2}. \tag{4.5}$$

Доказательство леммы 4.1 аналогично доказательству леммы 3.1.

Теорема 4.1. *Если функция u_0 принадлежит классу $\mathscr{F}Q_{0,C}$, то задача Коши* (4.1), (4.2) *имеет решение u, представимое в виде*

$$u(t,\ q)=\int e^{i\int\limits_0^t v(q+x(\tau))\,d\tau}\,u_0(q+x(0))\,\Phi_a^2(dx). \tag{4.6}$$

Доказательство. Из определения интеграла Фейнмана следуют равенства

$$u(t,\ q)=\lim_{\substack{\max|t_k-t_{k-1}|\to 0\\ 1\leqslant k\leqslant N+1}}\ \lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{(N+1)n}{2}}}\times$$

$$\times\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{N+1}\sqrt{t_k-t_{k-1}}}\int\limits_Q\ldots\int\limits_Q e^{\frac{1}{2}(i-\varepsilon)\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{\|q_k-q_{k-1}\|_q^2}{t_k-t_{k-1}}}\times$$

$$\times e^{\frac{1}{2}(i-\varepsilon)\frac{\|q_N\|_q^2}{t-t_N}}\,e^{i\sum\limits_{k=1}^{N+1}v(q+q_{k-1})(t_k-t_{k-1})}\,u_0(q_0+q)\,dq_0\ldots dq_N\Bigg]=$$

$$= \lim_{\substack{\max|t_k-t_{k-1}|\to 0\\ 1\leqslant k\leqslant N+1}} \lim_{\varepsilon\to+0} \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{(N+1)n}{2}}} \int_0^t \frac{1}{\left(\prod_{k=1}^{N} \sqrt{t_k-t_{k-1}}\right)\sqrt{t'-t}} \times \right.$$

$$\times \int_Q \ldots \int_Q e^{\frac{1}{2}(i-\varepsilon)\sum_{k=1}^{N}\frac{\|q_k-q_{k-1}\|_q^2}{t_k-t_{k-1}}} e^{\frac{1}{2}(i-\varepsilon)\frac{\|q_N\|_q^2}{t-t_N}} \times \tag{4.7}$$

$$\times \left[\frac{1}{2}(i-\varepsilon)\Delta\left(e^{i\sum_{k=1}^{N} v(q-q_{k-1})(t_k-t_{k-1})} e^{iv(q-q_N)(t'-t_N)} u_0(q_0+q)\right) + \right.$$

$$+ iv(q+q_N)\, e^{i\sum_{k=1}^{N} v(q-q_{k-1})(t_k-t_{k-1})} e^{iv(q-q_N)(t'-t_N)} \times$$

$$\left. \left. \times u_0(q_0+q) \right] dq_0 \ldots dq_N\, dt' + u_0(q) \right]$$

$$(t_0=0,\ t_{N+1}=t,\ 0<t_1<\ldots<t_N<t'\leqslant t).$$

Учитывая равенства

$$\Delta u(t,\ q) = \lim_{\substack{\max|t_k-t_{k-1}|\to 0\\ 1\leqslant k\leqslant N+1}} \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{(N+1)n}{2}}} \frac{1}{\prod_{k=1}^{N+1}\sqrt{t_k-t_{k-1}}} \times$$

$$\times \int_Q \ldots \int_Q e^{\frac{1}{2}(i-\varepsilon)\sum_{k=1}^{N}\frac{\|q_k-q_{k-1}\|_q^2}{t_k-t_{k-1}}} e^{\frac{1}{2}(i-\varepsilon)\frac{\|q_N\|_q^2}{t-t_N}} \times$$

$$\times \Delta\left(e^{i\sum_{k=1}^{N+1} v(q-q_{k-1})(t_k-t_{k-1})} u_0(q_0+q)\right) dq_0 \ldots dq_N,$$

$$v(q)\,u(t,\ q) = \lim_{\substack{\max|t_k-t_{k-1}|\to 0\\ 1\leqslant k\leqslant N+1}} \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{(N+1)n}{2}}} \frac{1}{\prod_{k=1}^{N+1}\sqrt{t_k-t_{k-1}}} \times$$

$$\times \int_Q \ldots \int_Q e^{\frac{1}{2}(i-\varepsilon)\sum_{k=1}^{N}\frac{\|q_k-q_{k-1}\|_q^2}{t_k-t_{k-1}}} e^{\frac{1}{2}(i-\varepsilon)\frac{\|q_N\|_q^2}{t-t_N}} (v(q+q_N) \times$$

$$\times e^{i\sum_{k=1}^{N+1} v(q-q_{k-1})(t_k-t_{k-1})} u_0(q_0+q)\, dq_0 \ldots dq_N,$$

в силу следствия 1 теоремы 2.1 главы II и оценок (4.3) — (4.5) получим равенство

$$u(t,\ q)=\int_0^t \left[\ \frac{1}{2}\, i\Delta u(t',\ q)+iv(q)\,u(t',\ q)\right] dt' + u_0(q),$$

причем функция $\tau \mapsto \frac{1}{2} i\Delta u(\tau,\ q) + iv(q)\,u(\tau,\ q)$ будет непрерывна на $[0,\ t]$ при любом $q\in Q$, откуда в свою очередь следует, что функция u, задаваемая равенством (4.6), является решением задачи Коши (4.1), (4.2).

Заключительные замечания. Здесь мы называем некоторые направления исследований, связанные с теорией континуальных интегралов, но не нашедшие отражения в книге.

1. Исследование континуальных интегралов от функций, определенных на (супер)многообразиях и, возможно, принимающих значения в супералгебре.
2. Применение континуальных интегралов при квантовании гамильтоновых систем со связями, в том числе при квантовании калибровочных полей.
3. Применение континуальных интегралов в теории представлений (супер) групп.
4. Исследование связи континуальных интегралов с теорией Фейнмана — Маслова функций от некоммутирующих операторов.
5. Применение континуальных интегралов в спектральной теории операторов.
6. Исследование асимптотик континуальных интегралов.
7. Связь континуальных интегралов с теорией перенормировок.
8. Применение нестандартного анализа в теории континуальных интегралов.
9. В настоящее время довольно популярны квантовомеханические модели, при построении которых используются вместо (обычных) полей вещественных или комплексных чисел поле p-адических чисел или другие нетрадиционные поля (или кольца). Пока не ясно, насколько полезно в этих ситуациях применение континуальных интегралов.

Ни одно из этих направлений в настоящее время ни в какой мере нельзя считать завершенным; таким образом, в действительности мы перечислили возможные направления дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Книги

1. Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Mathematical theory of Feynman path integrals. Lecture notes in math. Berlin. Springer, 1976.

2. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.

3. Березин Ф. А., Шубин М. А. Уравнение Шредингера. М.: Наука, 1984.

4. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.

5. Васильев А. Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.

6. Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. Подход с использованием континуальных интегралов. М.: Мир, 1984.

7. Green M. B., Schwartz J. H., Witten E. Superstring theory. Cambridge Univ. Press, 1987.

8. Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979.

9. Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения на бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.

10. Ефимов Г. В. Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий. М.: Наука, 1986.

11. Exner P. Theory of open systems. Дубна, 1985.

12. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. Т. 1, 2. М.: Мир, 1980.

13. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965.

14. Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля. М.: Наука, 1980.

15. Маслов В. П. Комплексные цепи Маркова и интеграл Фейнмана для нелинейных систем. М.: Наука, 1976.

16. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.

17. Райдер Л. Квантовая теория поля. М.: Мир, 1987.

18. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1978.

19. Simon B. Functional integration and quantum physics. N. Y.: Academic press, 1979.

20. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.

21. Рамаджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.

22. Рамон П. Теория поля. Современный вводный курс. М.: Мир, 1984.

23. Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В. Калибровочные поля. М.: Изд-во МГУ, 1986.

24. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.

25. Фейнман Р. Статистическая механика. М.: Мир, 1984.

26. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами. М.: Мир, 1975.

27. Фейнман Р. Квантовая электродинамика. М.: Мир, 1964.

28. Functional integration. Theory and applications. N. Y., London, Plenum Press, 1979.

29. Feynman path integrals//Lecture notes in physics. 1979. N 106.

30. Шварц А. С. Квантовая теория поля и топология. М.: Наука, 1989.

2. Статьи

31. Алимов А. Л. О связи между континуальными интегралами и дифференциальными уравнениями//Теоретическая и математическая физика. 1972. Т. 2, № 2. С. 182—189.

32. Алимов А. Л. Представление решения краевой задачи в виде континуального интеграла//Записи ученых семинаров ЛОМИ. 1974. Т. 42. С. 6—11.

33. Алимов А. Л., Буслаев В. С. О континуальном интеграле для параболического уравнения второго порядка//Вестн. ЛГУ. Сер. математика. 1972. № 1. С. 5—14.

34. Березин Ф. А. Континуальный интеграл по траекториям в фазовом пространстве//УФН. 1980. Т. 132, вып. 3. С. 497—548.

35. Блохинцев Д. И., Барбашов Б. М. Применение функциональных интегралов в квантовой механике и теории поля//УФН. 1972. Т. 106, вып. 4. С. 593—615.

36. Watanabe H. Path integral for some systems of partial differential equations//Proc. Japan Acad. Ser. A. 1984. V. 60, N 3. P. 86—89.

37. Гельфанд И. М., Минлос Р. А. Решение уравнений квантованных полей//ДАН. 1954. Т. 97, № 2. С. 209—211.

38. Гельфанд И. М., Яглом А. М. Интегрирование в функциональных пространствах и его применения в квантовой физике//УМН. 1956. Т. 11, № 1. С. 77—114.

39. Далецкий Ю. Л. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями//УМН. 1962. Т. 17, № 5. С. 3—115.

40. Далецкий Ю. Л., Стремский В. В. Фейнмановские интегралы для уравнения Шредингера в функциональных производных//УМН. 1969. Т. 24, № 1. С. 191—192.

41. Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Обобщенные меры в функциональных пространствах//Теория вероятностей и ее применения. 1965. Т. 10, № 2. С. 329—343.

42. Dewitt-Morette C. Feynman's path integrals. Definition without limiting procedure//Comm. Math. Phys. 1972. V. 28. P. 47—67.

43. Евграфов М. А. Об одной формуле для представления фундаментального решения дифференциального уравнения континуальным интегралом//ДАН. 1970. Т. 191, № 5. С. 979—982.

44. Jonson G. W., Lapidus M. L. Generalized Dysonseries, generalized Feynman integral and Feynman operational calculus//Mem. Amer. Math. Soc. 1986. N 351. P. 1—78.

45. Jonson G. W. The equvalence of two approaches to the Feynman integral//J. Math. Phys. 1982. V. 23, N 11. P. 2090—2096.

46. Jonson G. W., Scoug D. Noteson the Feynman integral. III: The Schrödinger equation//Pacific J. Math., 1983. V. 105. P. 321—358.

47. Ito K. Wiener integral and Feynman integral//Proc. 4 th Berkoley Symp. Math. Stat and Probability. 1961. V. 9. P. 227—238.

48. Cameron R. H. A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals//J. Math. and Phys. 1960. V. 39, N 2. P. 126—140.

49. Cameron R. H., Storvick D. A. Some Banach algebras of analytic Feynman integrable functionals//Lecture Notes in math. 1980. N 798. P. 18—67.

50. Cameron R. H., Storvick D. A. Analitic Feynman integral solutions of an integral equation related to the Schrödinger equation//J. Analyse Math. 1980. V. 38. P. 34—66.

51. Kac M. On a distribution of urtain Wiener functionals//Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 66. P. 1—13.

52. Ктитарев Д. В. Формула Фейнмана в фазовом пространстве для одного класса систем псевдодифференциальных уравнений//Матем. заметки. 1987. Т. 42, № 1. С. 40—49.

53. Ктитарев Д. В. Формула Фейнмана для систем псевдодифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1988, № 2. С. 76—78.

54. Майков Е. В. τ-гладкие функционалы и интегрирование в функциональных пространствах//УМН. 1963. Т. 18, № 3. С. 243—244.

55. Майков Е. В. τ-полиномы и τ-аналитические функционалы//ДАН. 1964. Т. 156, № 5. С. 1025—1028.

56. Маслов В. П., Чеботарев А. М. Континуальный интеграл по ветвящимся траекториям//УМН. 1979. Т. 34. Вып. 5. С. 237—238.

57. Маслов В. П., Чеботарев А. М. Обобщенная мера в континуальном интеграле Фейнмана//Теоретическая и математическая физика. Т. 28, № 3. С. 291—307.

58. Маслов В. П., Чеботарев А. М. Скачкообразные процессы и их применение в квантовой механике//Итоги науки. Совр. проблемы математики. 1978. № 15.

59. Маслов В. П., Шишмарев И. А. О T-произведении гипоэллиптических операторов//Итоги науки. Совр. проблемы математики. 1976. № 8. С. 137—197.

60. Менский М. Б. Теоретико-групповой вывод интеграла по путям// //ТМФ. 1983. Т. 57, № 2. С. 217—231.

61. Смолянов О. Г. Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы для мер и квантование по Шредингеру//Третья международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов. 1981. Т. 2. С. 165—166.

62. Смолянов О. Г. Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы и квантование по Шредингеру//ДАН. 1982. Т. 263, № 3. С. 558—561.

63. Смолянов О. Г., Хренников А. Ю. Центральная предельная теорема для обобщенных мер на бесконечномерных пространствах//ДАН. 1985. Т. 281, № 2. С. 279—283.

64. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Различные определения меры Фейнмана и связи между ними//Четвертая международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов. 1985. Т. 3.

65. Smolyanov O. G., Shavgulidze E. T. Some properties and application of Feynman measures in the phase space Proc. of the Fourth Vilnius Conference. 1987. V. 2. P. 595—608.

66. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Преобразование Фурье и псевдодифференциальные операторы в суперанализе//ДАН. 1989. Т. 299, № 4. С. 816—820.

67. Смолянов О. Г., Хренников А. Ю. Алгебра бесконечномерных псевдодифференциальных операторов//ДАН. 1987. Т. 292, № 6. С. 1310—1314.

68. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Представление решений линейных эволюционных супердифференциальных уравнений второго порядка континуальными интегралами//ДАН. 1989. Т. 309, № 3. С. 545—549.

69. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Представление решений эволюционных супердифференциальных уравнений континуальными интегралами//УМН. 1967. Т. 42, № 4. С. 130—131.

70. Угланов А. В. Об одной конструкции фейнмановского интеграла// //ДАН. 1978. Т. 243, № 6. С. 1400—1409.

71. Угланов А. В. Фейнмановские меры со знаконеопределенным корреляционным оператором//ДАН. 1982. Т. 262, № 1. С. 37—40.

72. Feynman R. D. Space-tim approach to nonrelativistic quantum mechanics//Rev. Mod. Phys. 1948. V. 20, N 2. P. 367—387.

73. Feynman R. D. Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic iteration//Phys. Rev. 1950. V. 80. P. 440.

74. Feynman R. D. An operation calculus having applications in quantum electrodinamics//Phys. Rev. 1951. V. 84. P. 108—128.

75. Nelson E. Feynman integrals and the Schrödinger equation//J. Math. Phys. 1964. V. 5, N 3. P. 332—343.

76. Чеботарев А. М. Аппроксимативно полные множества обобщений меры Фейнмана//ДАН 1988. Т. 298, № 1. С. 52—57.

77. Чеботарев А. М. Достаточные условия регулярности скачкообразных марковских процессов//Теория вероятностей и ее применения. 1988. . 33, № 1. С. 25—39.
78. Владимиров В. С., Волович И. В. Суперанализ. I. Дифференциальное исчисление//ТМФ. 1984. Т. 59, № 1. С. 3—27.
79. Хренников А. Ю. Математические методы неархимедовой физики//УМН. 1990. Т. 45, вып. 4 (274). С. 80—110.
80. Хренников А. Ю. Функциональный суперанализ//УМН. 1988. . 43, вып. 2. С. 872—914.

Замечание к списку литературы. Полная библиография работ по континуальным интегралам должна была бы насчитывать несколько тысяч наименований, и составление такой библиографии — это самостоятельная задача, которую мы перед собой не ставили. Мы включили в список литературы, во-первых, те работы, которые цитируются в тексте, во-вторых, все известные нам книги на русском языке, в которых есть достаточно обширные разделы, посвященные описанию континуальных интегралов или их применениям, и, в-третьих, работы, в которых рассматриваются вещи, близкие к тем, о которых идет речь в книге. Наконец, мы включили несколько работ, которые давно считаются классическими. Отметим еще, что большие списки литературы по континуальным интегралам есть в книгах 1 и 11.

Работы, имеющиеся в сборниках 28 и 29, мы, естественно, отдельно в список литературы не включили.

Научное издание

СМОЛЯНОВ Олег Георгиевич
ШАВГУЛИДЗЕ Евгений Тенгизович

КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Зав. редакцией *Н. М. Глазкова*
Редактор *Л. А. Николова*
Художественный редактор *Л. В. Мухина*
Технический редактор *Г. Д. Колоскова*
Корректоры *Л. А. Айдарбекова, Т. С. Миля*

ИБ № 3655

Сдано в набор 12.03.90.
Подписано в печать 22.01.91.
Формат 60×90/16 Бумага тип. № 2
Гарнитура литературная. Высокая печать
Усл. печ. л. 9,5 Уч.-изд. л. 9,44
Тираж 1640 экз. Заказ 273 Изд. № 1271
Цена 2 р. 80 к.

Ордена «Знак Почета» издательство Московского уни
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы