Академия наук СССР • Сибирское отделение

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КОУРОВСКАЯ ТЕТРАДЬ

(нерешённые задачи теории групп)

Издание четвертое, дополненное

Новосибирск 1973

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции.. 3

Часть 1. День проблем Первого Всесоюзного симпозиума по теории групп (Коуровка, 1965)

Вопросы.. 6

Ответы и комментарии.. 19

Часть 2. День проблем Второго Всесоюзного симпозиума по теории групп (Батуми, 1966)

Вопросы.. 23

Ответы и комментарии.. 37

Часть 3. День проблем Третьего Всесоюзного симпозиума по теории групп (Хрустальная, 1969)

Вопросы.. 42

Ответы и комментарии.. 52

Часть 4. День проблем Четвертого Всесоюзного симпозиума по теории групп (Академгородок, 1973)

Вопросы.. 55

Цитированная литература.................................... 70

Редакторы: М.И.Каргаполов (гл.редактор),
Ю.И.Мерзляков, В.Н.Ремесленников

ОТ РЕДАКЦИИ

Желая представить себе сегодняшнее лицо той или иной области математики, мы обычно обращаемся к полке со свежими номерами журналов или, экономя время, к соответствующим разделам реферативного журнала. Из статей мы узнаем, что нового произошло в данной области, какие вопросы удалось решить, а какие продвинуть, но гораздо реже – и то лишь в связи с полученными автором результатами – узнаем мы, какие вопросы автор решать не умеет, но считает интересными. Между тем сводка "сегодняшних проблем" имеет для развития всякой области ничуть не меньшее значение, чем сводка достижений, а видимые связи между той и другой часто обманчивы. Вот почему разумно время от времени публиковать сводки актуальных проблем с участием широкого круга авторов. "Коуровская тетрадь" – именно такой сборник нерешенных вопросов из области теории групп.

Настоящее издание "Коуровской тетради" является четвертым, первое вышло в 1965 году. Истекшее время показало, что идея собрать в одном месте вопросы, интересующие в данное время данную область математики, вполне оправдала себя. Из 235 задач третьего издания в настоящее время решены 75. По образцу "Коуровской тетради" возникли "Днестровская тетрадь" (1969) и "Свердловская тетрадь" (1969) – сборники нерешенных проблем теории колец и теории полугрупп.

В настоящем издании "Коуровская терадь" дополнена частью 4. Части 1–3 воспроизводятся по третьему изданию с небольшими редакционными изменениями. Комментарии к задачам обновлены и пополнены. Как и прежде, задачи, снабженные комментарием, отмечены звездочкой. Редакция благодарит всех лиц, сообщивших замечания по предыдущим изданиям.

Новые задачи и комментарии направляйте по адресу: Новосибирск, 90, Институт математики, "Коуровская тетрадь". *Все известные утверждения должны быть снабжены точными ссылками на литературу или другие источники.*

Часть 1. ДЕНЬ ПРОБЛЕМ ПЕРВОГО ВСЕСОЮЗНОГО СИМПОЗИУМА ПО ТЕОРИИ ГРУПП (Коуровка, 1965)

С 9 по 17 февраля 1965 года на Коуровской туристской базе под Свердловском состоялся Всесоюзный симпозиум по теории групп, организованный Институтом математики СО АН СССР, Свердловским отделением Математического института имени В.А.Стеклова и Уральским государственным университетом имени А.М.Горького. В симпозиуме участвовало 69 человек из 17 городов Советского Союза.

Работа симпозиума проходила в форме , близкой, с одной стороны, к форме математической школы, с другой – к форме традиционных алгебраических коллоквиумов. Читались циклы лекций по различным направлениям теории групп, причем для отдельных важных или новых результатов приводились полные доказательства или схемы доказательств. Кроме того, было сделано несколько сообщений о новых результатах. Отчет о симпозиуме см. в УМН, 20, № 4 (1965), 213–215.

Удачным оказалось включение в программу специального Дня проблем, который состоялся 16 февраля. Поставленные в этот день вопросы, как оригинальные, так и известные в литературе, но по той или иной причине представляющиеся особенно актуальными, сопровождались комментариями, а затем записывались авторами в особую тетрадь. Запись вопросов производилась и в другие дни на протяжении всей работы симпозиума. Естественно, что личные вкусы авторов существенно отразились на содержании этой тетради.

Одним из своих решений симпозиум поручил оргкомитету издать "Коуровскую тетрадь" отдельной брошюрой. Конечно, не все собранные здесь проблемы равноценны: одни из них имеют уже солидный возраст, и их трудность в достаточной степени проверена, другие возникли совсем недавно. Как бы то ни было, эти задачи отражают интересы значительной части советских групповиков и, можно надеяться, будут хорошим стимулом для дальнейших исследований в теории групп.

ВОПРОСЫ

1.1. Существуют ли конечно-порожденные полные группы, отличные от единичной? Равносильный вопрос: существуют ли конечно-порожденные простые полные группы, отличные от единичной?

Ю.А.БОГАН

1.2. Пусть G – группа, F – свободная группа со свободными порождающими $x_1,\dots,x_n$, R – свободное произведение групп G и F. Уравнением (с неизвестными $x_1,\dots,x_n$) над группой G назовем выражение вида $U(x_1,\dots,x_n)=1$, где левая часть есть элемент из R, не сопряженный в группе R ни с каким элементом $g\in G$. Группу G назовем алгебраически замкнутой, если любое уравнение над G имеет решение в этой группе. Существуют ли алгебраически замкнутые группы? Если требовать, чтобы $U(x_1,\dots,x_n)$ содержало неизвестные только в положительных степенях, то такие группы существуют [118].

Л.А.БОКУТЬ

1.3. (Проблема И.Капланского). Может ли групповое кольцо групп без кручения содержать делители нуля?

Л.А.БОКУТЬ

*1.4. (Проблема А.И.Мальцева). Существует ли кольцо без делителей нуля, не вложимое в тело, мультипликативная полугруппа ненулевых элементов которого вложима в группу?

Л.А.БОКУТЬ

1.5. (Известная проблема). Существует ли группа, групповое кольцо которой не содержит делителей нуля и не вложимо в тело?

Л.А.БОКУТЬ

1.6. (А.И.Мальцев). Вложимо ли групповое кольцо право-упорядоченной группы в тело?

Л.А.БОКУТЬ

1.7. Верно ли, что в простой конечной группе любая абелева подгруппа отлична от своего нормализатора?

В.М.БУСАРКИН

1.8. Описать простые конечные группы, имеющие подгруппу, содержащую централизатор любого своего неединичного элемента.

В.М.БУСАРКИН

1.9. Вложима ли (изоморфно) в прямое произведение конечных групп фактор-группа локально нормальной группы по второму члену её верхнего центрального ряда?

Ю.М.ГОРЧАКОВ

1.10. Автоморфизм φ группы G назовем расщепляющим, если для любого элемента $g \in G$ выполняется соотношение $g g^{\varphi} \ldots g^{\varphi^{n-1}} = 1$, где n – порядок φ. Будет ли нильпотентной разрешимая группа, имеющая регулярный расщепляющий автоморфизм простого порядка?

Ю.М.ГОРЧАКОВ

*1.11. (Э.Артин). Проблема сопряженности для групп кос B_n, где $n > 4$.

М.Д.ГРИНДЛИНГЕР

1.12. (В.Магнус). Проблема изоморфизма тривиальной группе для всех групп с n порождающими и n определяющими соотношениями, где $n > 2$.

М.Д.ГРИНДЛИНГЕР

1.13. (Дж.Столлингс). Если конечно-определенная группа тривиальна, то всегда ли можно заменить хотя бы одно определяющее слово примитивным элементом, не нарушая тривиальности группы?

М.Д.ГРИНДЛИНГЕР

*1.14. (Б.Нейман). Существует ли бесконечная простая конечно-определенная группа?

М.Д.ГРИНДЛИНГЕР

1.15. Решить проблему изоморфизма бесконечной циклической группе для всех групп узлов теоретико-групповыми методами. В.Хакен [110] решил ее топологическими методами.

М.Д.ГРИНДЛИНГЕР

1.16. Дано натуральное число n. Узнать, для каких подмножеств $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ и для каких элементов z_i, $i \in I$, из коммутанта группы $G = \text{гр}\,(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \mid \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] = 1)$ фактор-группа группы G по минимальной нормальной подгруппе, содержащей все $[a_i, b_i, \tau_i]$, $i \in I$, является группой без кручения (С.Папакирьякопулос). Э.Рапапорт доказала, что при $|I| = 1$ данная фактор-группа всегда будет группой без кручения [126].

М.Д.ГРИНДЛИНГЕР

*1.17. Выписать в явном виде порождающие элементы и определяющие соотношения какой-нибудь универсальной конечно-определенной группы. Существование таких групп доказано Г.Хигманом [112].

М.Д.ГРИНДЛИНГЕР

1.18. (А.Тарский). Существует ли алгоритм для определения разрешимости уравнений в свободной группе? Для уравнений с одним неизвестным такой алгоритм существует. Описать структуру всех решений уравнения, если оно имеет хотя бы одно решение.

Ю.Л.ЕРШОВ

1.19. (А.И.Мальцев). Какие подгруппы (подмножества) формульно определимы в свободной группе? Какие подгруппы относительно элементарно определимы в свободной группе? В частности, будет ли коммутант формульно (или относительно элементарно) определим в свободной группе?

Ю.Л.ЕРШОВ

1.20. Для каких групп (классов групп) решетка нормальных подгрупп формульно определима в решетке всех подгрупп? В частности, не будет ли решетка нормальных подгрупп свободной группы формульно определима в решетке всех её подгрупп?

Ю.Л.ЕРШОВ

1.21. Конечно ли множество конечных простых групп данного периода n ?

М.И.КАРГАПОЛОВ

1.22. Исследовать конечную группу, содержащую подгруппу A, взаимно простую со своими сопряженными и такую, что индекс A в ее нормализаторе "значительно меньше" порядка $|A|$.

М.И.КАРГАПОЛОВ

*1.23. Существуют ли бесконечные простые локально-конечные группы конечного ранга?

М.И.КАРГАПОЛОВ

*1.24. Всякая ли бесконечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой?

М.И.КАРГАПОЛОВ

1.25. Разрешимы ли универсальные теории класса конечных групп, класса конечных нильпотентных групп?

М.И.КАРГАПОЛОВ

*1.26. Следует ли из элементарной эквивалентности конечно-порожденных нильпотентных групп изоморфизм этих групп?

М.И.КАРГАПОЛОВ

1.27. Описать универсальную теорию свободных групп.

М.И.КАРГАПОЛОВ

1.28. Описать универсальную теорию свободной n-ступенно нильпотентной группы.

М.И.КАРГАПОЛОВ

1.29. (Проблема А.Тарского). Разрешима ли элементарная теория свободной группы?

М.И.КАРГАПОЛОВ

1.30. Разрешима ли универсальная теория разрешимых групп?

М.И.КАРГАПОЛОВ

1.31. Будет ли финитно-аппроксимируемая группа с условием максимальности конечным расширением полициклической группы?

М.И.КАРГАПОЛОВ

*1.32. Будет ли нильпотентной подгруппа Фраттини конечно-порожденной группы матриц над полем?

М.И.КАРГАПОЛОВ

1.33. (Проблема А.И.Мальцева). Описать группу автоморфизмов свободной разрешимой группы.

М.И.КАРГАПОЛОВ

*1.34. Всякая ли полициклическая упорядоченная группа имеет изоморфное представление целочисленными матрицами?

М.И.КАРГАПОЛОВ

1.35. Группа называется доупорядочиваемой, если каждый частичный порядок этой группы продолжается до линейного порядка.

*а) Будет ли доупорядочиваемой группой сплетение произвольных доупорядочиваемых групп?

*б) (А.И.Мальцев). Будет ли всякая подгруппа доупорядочиваемой группы также доупорядочиваемой группой?

в) (А.И.Мальцев, Л.Фукс). Существуют ли простые доупорядочиваемые группы?

М.И.КАРГАПОЛОВ

1.36. Если группа G факторизуема p-подгруппами, т.е. $G = AB$, где A и B – p-подгруппы, то будет ли сама G p-группой?

Ш.С.КЕМХАДЗЕ

1.37. Будет ли всякая подгруппа локально-нильпотентной группы квазиинвариантной?

Ш.С.КЕМХАДЗЕ

*1.38. Группу, в которой каждая циклическая подгруппа является членом некоторой нормальной системы группы, назовем N^0-группой. Будет ли $\tilde{N}$-группой всякая N^0-группа?

Ш.С.КЕМХАДЗЕ

1.39. Будет ли слабо нильпотентной группой произведение двух нормальных слабо нильпотентных подгрупп?

Ш.С.КЕМХАДЗЕ

1.40. Будет ли ниль-группой произведение двух нормальных ниль-подгрупп?

Ш.С.КЕМХАДЗЕ

*1.41. Подгруппа линейно упорядочиваемой группы называется относительно выпуклой, если она является выпуклой при некотором линейном упорядочении группы. Знание относительно выпуклых подгрупп полезно при рассмотрении вопросов описания способов упорядочения, гомоморфизмов, продолжения частичных порядков и частичного пополнения упорядочиваемых групп. При каких условиях подгруппа упорядочиваемой группы будет относительно выпуклой?

А.И.КОКОРИН

*1.42. Будет ли центр относительио выпуклой подгруппы отиосительно выпуклой подгруппой?

А.И.КОКОРИН

*1.43. Будет ли централизатор относительно выпуклой подгруппы относительно выпуклым?

А.И.КОКОРИН

*1.44. Будет ли относительно выпуклой подгруппой максимальная абелева нормальная подгруппа?

А.И.КОКОРИН

*1.45. Будет ли наибольшая локально-нильпотентная нормальная подгруппа относительно выпуклой?

А.И.КОКОРИН

1.46. При каких условиях нормализатор относительно выпуклой подгруппы будет относительно выпуклым?

А.И.КОКОРИН

*1.47. Подгруппа H группы G называется строго изолированной, если из $x \cdot g_1^{-1} x g_1 \ldots g_n^{-1} x g_n \in H$ следует $x, g_i^{-1} x g_i \in H$. Группа со строго изолированной единичной подгруппой называется δ-группой. Существуют ли δ-группы, не являющиеся упорядоченными группами? Или иначе; будет ли строго изолированная нормальная подгруппа упорядочиваемой группы относительно выпуклой подгруппой ?

А.И.КОКОРИН

*1.48. Будет ли упорядочиваемой группой свободное произведение упорядочиваемых групп с объединенной подгруппой, являющейся относительно выпуклой подгруппой в каждом из сомножителей?

А.И.КОКОРИН

*1.49. Автоморфизм φ линейно упорядоченной группы называется сохраняющим порядок, если из $x<y$ следует $x^{\varphi}<y^{\varphi}$. Можно ли линейно упорядочить абелеву строго изолированную нормальную подгруппу S -группы так, чтобы её порядок сохранялся под действием внутренних автоморфизмов всей группы? Положительный ответ на этот вопрос даст возможность существенно упростить условия упорядочиваемости группы Мальцева-Поддерюгина-Ригера.

А.И.КОКОРИН

*1.50. Будет ли упорядочиваемой группа сохраняющих порядок автоморфизмов линейно упорядоченной группы?

А.И.КОКОРИН

1.51. При каких условиях группа матриц над полем (комплексных чисел) упорядочиваема?

А.И.КОКОРИН

1.52 Описать группы, линейно упорядочиваемые единственным способом (противоположные порядки не считаются различными).

А.И.КОКОРИН

1.53. Описать все способы линейного упорядочения свободной нильпотентной группы с конечным числом порождающих. Как нетрудно видеть, этот вопрос сводится к описанию центральных систем из изолированных подгрупп.

А.И.КОКОРИН

1.54. Описать все способы линейного упорядочения свободной двуступенно разрешимой группы с конечным числом порождающих.

А.И.КОКОРИН

1.55. Получить элементарную классификацию линейно упорядоченных свободных групп с фиксированным числом порождающих.

А.И.КОКОРИН

*1.56. Группа называется доупорядочиваемой, если каждый частичный порядок ее можно продолжить до линейного. Будет ли доупорядочиваемой группой группа без кручения, фактор-группа по центру которой является доупорядочиваемой группой?

А.И.КОКОРИН

1.57.

1.58. Подгруппа упорядочиваемой группы, каждый линейный порядок которой можно продолжить до линейного порядка всей группы, называется σ -подгруппой. При каких условиях подгруппа упорядочиваемой группы будет σ -подгруппой?

А.И.КОКОРИН

1.59. Изучить свойства максимальных частичных порядков в упорядочиваемой группе. Отметим, например, что при любом максимальном частичном порядке упорядочиваемой группы её гиперцентры будут линейно упорядоченными.

А.И.КОКОРИН

1.60. Можно ли вложить двуступенно разрешимую упорядочиваемую группу в полную упорядочиваемую группу? Это является ослаблением известного вопроса о вложимости упорядочиваемых групп в полные упорядочиваемые группы. Известные случаи пополнения упорядочиваемых групп основаны на факте вложения нильпотентной группы без кручения в такую же полную, и, значит, в этих случаях специфические особенности упорядочиваемых групп не проявляются. Пополнение упорядочиваемых групп связано с возможностью переноса теории Артина-Шрайера формально-вещественных полей на формально-вещественные тела. Сведения о формально-вещественных телах имеются в книге [80] .

А.И.КОКОРИН

1.61. Можно ли упорядочиваемую группу вложить в упорядочиваемую группу с полной максимальной локально-нильпотентной нормальной подгруппой (соответственно с полной макси - мальной абелевой нормальной подгруппой)?

А.И.КОКОРИН

1.62. Изучить разрешимые упорядочиваемые группы.

А.И.КОКОРИН

1.63. Группа называется плотной, если она не имеет собственных изолированных подгрупп, отличных от единичной.

*а) Существуют ли плотные группы без кручения, отлич - ные от локально-циклических?

*б) Пусть для любой пары неединичных элементов x, y группы без кручения G имеет место соотношение $x^k = y^l$, где k, l - не равные нулю целые числа, зависящие от x, y. Будет ли G абелевой?

в) Дать описание плотных конечных групп.

П.Г.КОНТОРОВИЧ

1.64. Группа без кручения называется отделимой, если она представима в виде теоретико-множественной суммы двух своих собственных подполугрупп. Будет ли всякая R-группа отделимой? Для не R-групп существует пример Вигольда неотделимой группы.

П.Г.КОНТОРОВИЧ

1.65. Замкнут ли класс групп абелевых расширений абе - левых групп относительно операции прямой суммы?

Л.Я.КУЛИКОВ

1.66. Пусть заданы периодическая абелева группа T и несчетное кардинальное число m. Существует ли абелева группа без кручения $U = U(T, m)$ со следующим свойством: какова бы ни была абелева группа A без кручения мощности $\leq m$, равенство $\mathrm{Ext}(A, T) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда группа A вложима в группу U?

Л.Я.КУЛИКОВ

*1.67. Пусть заданы конечно-определенная группа G, свободная группа F, ранг которой равен минимальному числу порождающих группы G, и гомоморфизм группы F на G

с ядром N. Найти полную систему инвариантов фактор-группы группы N по взаимному коммутанту $[F, N]$.

Л.Я.КУЛИКОВ

*1.68. (А.Тарский). Пусть $\mathfrak{K}$ – класс групп, $Q\mathfrak{K}$ – класс всех гомоморфных образов групп из $\mathfrak{K}$. Будет ли $Q\mathfrak{K}$ аксиоматизируемым, если аксиоматизируем $\mathfrak{K}$?

Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ

*1.69. (Б.И.Плоткин). Как показал М.И.Каргаполов [18], существуют периодические локально-нильпотентные группы, не обладающие свойством RN^*. Существуют ли локально-нильпотентные группы без кручения, не обладающие свойством RN^* ?

Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ

*1.70. Пусть p – простое число, G – группа всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1+p\alpha & p\beta \\ p\gamma & 1+p\delta \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – рациональные числа со знаменателем, не делящимся на p. Обладает ли G свойством $\overline{RN}$? Если да, то свойство $\overline{RN}$ не переносится на подгруппы. Если нет, то существуют $\overline{RI}$-группы, не являющиеся $\overline{RN}$-группами.

Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ

*1.71. Пусть G – связная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем. Конечно ли число классов сопряженных максимальных разрешимых подгрупп группы G ? Известно, что для алгебраически незамкнутого поля это не так. В то же время классический результат Бореля-Шевалле показывает, что один сопряженный класс составляют максимальные связные разрешимые подгруппы группы G. Может быть, сформулированный вопрос связан с неприступной до сих пор проблемой классификации связных разрешимых алгебраических групп.

В.П.ПЛАТОНОВ

*1.72. Д.Херцигом показано, что связная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем разрешима, если она обладает рациональным регулярным автоморфизмом. Справедлив ли этот результат для произвольного поля? Можно показать, что для поля нулевой характеристики это так.

В.П.ПЛАТОНОВ

*1.73. Конечно ли число классов сопряженных максимальных периодических подгрупп в конечно-порожденной целочисленной линейной группе? Для разрешимых целочисленных групп это доказано А.И.Мальцевым, а для целочисленной части алгебраической группы (группы единиц) установлено Борелем и Хариш-Чандрой.

В.П.ПЛАТОНОВ

1.74. Описать все минимальные топологические группы, т.е. недискретные группы с дискретными замкнутыми подгруппами. Минимальные локально-бикомпактные группы описываются без особого труда. В то же время в общем случае проблема, вероятно, сложна.

В.П.ПЛАТОНОВ

*1.75. Классифицировать бесконечные простые периодические линейные группы. В настоящее время известны бесконечные серии таких групп над предельными полями, аналогичные классическим простым группам Ли. Более частный вопрос: будет ли бесконечная простая периодическая линейная группа счётной? Сформулированная задача, разумеется, связана с задачей классификации простых конечных групп, однако априори неясно, насколько эта связь тесная.

В.П.ПЛАТОНОВ

1.76. Существуют ли топологически простые локально-нильпотентные локально-бикомпактные группы?

В.П.ПЛАТОНОВ

1.77.

*1.78. Пусть группа G есть произведение двух полных абелевых p-групп конечного ранга. Будет ли G такой же?

Н.Ф.СЕСЕКИН

*1.79. Пусть в группе определена новая операция $*$, выражающаяся через основные групповые операции так:

$$x*y = x^{m_1}y^{n_1}\ldots x^{m_k}y^{n_k}.$$

Известно, что при $k=1$ и $m_1=1$, $n_1=-1$ или $m_1=-1$, $n_1=1$ (левое и правое деления) через операцию $*$ выражаются обе теоретико-групповые операции (умножение и взятие обратного элемента). Существуют ли операция $*$ с указанным свойством, отличные от левого и правого делений? Известно, что для абелева случая ответ отрицательный. Впервые эта задача упомянута Г.Хигманом и Б.Нейманом в 1952 г. В общем случае ожидается отрицательный ответ.

Ю.И.СОРКИН

*1.80. Существуют ли простые конечные группы, силовская 2 -подгруппа которых есть прямое произведение групп кватернионов?

А.И.СТАРОСТИН

1.81. Назовем шириной группы G наименьшую мощность $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}(G)$ со следующим свойством: всякая подгруппа, порождаемая конечным множеством из G , порождается его подмножеством мощности $\leq\mathfrak{m}$.

а) Будет ли всякая группа конечной ширины обладать условием минимальности для подгрупп?

б) Будет ли всякая группа с условием минимальности для подгрупп иметь конечную ширину?

*в) Те же вопросы при дополнительном условии локальной конечности (ясно, что группа конечной ширины периодическая). В частности, будет ли локально-конечная группа конечной ширины черниковской? Для ряда классов групп, например, для локально-радикальных групп, условие конечности ширины и условие минимальности для подгрупп равносильны.

Л.Н.ШЕВРИН

*1.82. Две системы тождественных соотношений называются эквивалентными, если они определяют одно и то же многообразие групп. Построить бесконечную систему тождеств, не эквивалентную никакой конечной.

А.Л.ШМЕЛЬКИН

1.83. Существует ли простая группа с неограниченными в совокупности порядками элементов, в которой выполняется нетривиальное тождественное соотношение?

А.Л.ШМЕЛЬКИН

*1.84. Найти условие, при котором полициклическая группа G аппроксимируется конечными p -группами. Предположительный ответ: G имеет нильпотентную нормальную подгруппу без кручения индекса p^k .

А.Л.ШМЕЛЬКИН

*1.85. Верно ли, что тождественные соотношения разрешимой группы класса 2 обладают конечной базой? Предположительный ответ: да.

А.Л.ШМЕЛЬКИН

1.86. Тот же вопрос для полициклических групп.

А.Л.ШМЕЛЬКИН

1.87. Тот же вопрос для матричных групп (хотя бы над полем характеристики 0).

А.Л.ШМЕЛЬКИН

*1.88. Верно ли, что если группа является матричной над полем нулевой характеристики и в ней не выполнено никакое нетривиальное тождественное соотношение, то она содержит неабелеву свободную подгруппу?

А.Л.ШМЕЛЬКИН

*1.89. Верно ли следующее утверждение? Пусть G - свободная разрешимая группа, a , b - ее элементы, порождающие в G одну и ту же нормальную подгруппу. Тогда в G найдется такой элемент x , что $b^{\pm 1} = x^{-1}ax$. (Аналог теоремы Магнуса о свободных группах.)

А.Л.ШМЕЛЬКИН

*1.90. Подгруппу H группы G назовем 2-бесконечно изолированной в G , если из того, что централизатор $C_G(h)$ некоторого элемента $h \neq 1$ из H в G содержит хотя бы одну инволюцию из G и пересекается с H по бесконечной подгруппе, вытекает, что $C_G(h) \leq H$. Пусть бесконечная простая локально-конечная группа G с черниковскими силовскими 2-подгруппами обладает собственной 2-бесконечно изолированной подгруппой H, причём некоторая силовская 2-подгруппа группы G содержится в H. Будет ли группа G изоморфна группе типа $PSL(2,k)$ над полем k нечётной характеристики?

В.П.ШУНКОВ

ОТВЕТЫ И КОММЕНТАРИИ

1.4. Да, существует [8, 94, 116].

1.11. Решена положительно [39, 104].

1.14. Да, существует [135].

1.17. Выписаны [9].

1.23. Нет, не существуют [87].

1.24. Нет, не всякая. Противоречащим примером служит группа $B(m,n)$, свободная в многообразии групп нечетного периода $n \geqslant 4381$ с конечным числом порождающих $m \geqslant 2$ [49].

1.26. Нет, не следует [15].

1.32. Да, будет. Более общо: подгруппа Фраттини линейной группы над конечно-порожденной областью целостности нильпотентна [53].

1.34. Да, всякая [90, 133]. Более того, голоморф любой полициклической группы допускает изоморфное представление целочисленными матрицами [45].

1.35. а) Не всегда. Например, сплетение $Z \wr (Z \wr Z)$, где Z - бесконечная циклическая группа, недоупорядочиваемо [29].

б) Не всегда [29].

1.38. Нет, не будет. Действительно, любая группа G с центральной системой $\{H_\alpha\}$ обладает свойством N^0, так как для всякого g из G система $\{\text{гр}(g, H_\alpha)\}$, пополненная единичной подгруппой и пересечениями всех подсистем, будет нормальной системой группы G, содержащей (g). С другой стороны, не всякая группа с центральной системой обладает свойством $\tilde{N}$ – достаточно рассмотреть свободные группы.

1.41. См. необходимые и достаточные условия в [28], стр. 35–43.

1.42. Не всегда [27].

1.43. Не всегда [21].

1.44. Не всегда [72].

1.45. Не всегда [72].

1.47. Да, существуют [7].

1.48. Не всегда [21].

1.49. Не всегда [7].

1.50. Не всегда [72].

1.63. а) Да, существуют [3]. б) Не всегда [3]. При ограничениях, указанных в комментарии к 1.24,

$$B(m,n) = \text{гр}\,(a_1,\ldots,a_m \mid A^n = 1;\ A^n \in \mathfrak{M}),$$

где $\mathfrak{M}$ – некоторое индуктивно определяемое множество слов от $a_1,\ldots,a_m$ [3]. Оба вопроса а), б) решаются в [3] при помощи группы

$$A(m,n) = \text{гр}\,(a_1,\ldots,a_m, d \mid a_i d = d a_i,\ A^n = d;\ 1 \leq i \leq m,\ A^n \in \mathfrak{M}).$$

Она без кручения, не коммутативна и для любых её неединичных элементов x, y существуют такие целые числа $k \neq 0$, $l \neq 0$, что $x^k = y^l$.

1.67. В [14] описан алгоритм нахождения инвариантов (конечно-порожденной абелевой) группы $N/[F, N]$ при $|F:N| < \infty$.

1.68. Не всегда [98].

1.69. Да, существуют [33, 78].

1.70. Да, обладает [50].

1.71. Да, это число конечно [56].

1.72. Нет, не справедлив [52]: легко видеть, что авто –

морфизм $x \to a^{-1}\check{x}a$ простой группы $SL(2,k)$ регулярен, где k – поле рациональных функций от переменной t над полем из двух элементов, $\check{x}$ – матрица, обратнотранспонирован – ная к x, $a = diag\,(1,t)$.

1.73. Не всегда. В самом деле, расширение H свободной группы с базой a, b посредством автоморфизма $\varphi: a \to a^{-1}$, $b \to b$ представимо матрицами над $\mathbb{Z}$. Элемент $c_n = \varphi b^{-n} a b^{n}$ имеет порядок 2 и гр (c_n) совпадает со своим централизато – ром в H. Пусть штрих обозначает изоморфизм группы H на её вторую копию H'. Противоречащим примером будет группа G, порожденная в $H \times H'$ элементами $a, \varphi, a', \varphi', bb'$. Действительно, она содержит подгруппы $T_n =$ гр (c_0, c_n'), $n \in \mathbb{Z}$, которые являются максимальными периодическими (даже в $H \times H$). Если T_n, T_m сопряжены элементом xy' из G, то $c_0^x = c_0$, $c_n'^{y} = c_m'$, откуда $x \in$ гр (c_0), $y \in b^{m-n}$ гр(c_m). Так как $xy' \in G$, то суммы показателей, с которыми b входит в x, y (в любой записи), должны совпадать, откуда $m = n$.

1.75. Да, будет [54, стр. 579].

1.78. Да, будет [70].

1.79. Да, существуют, – например, в классе 2-ступенно нильпотентных групп с коммутантом конечного периода [113].

1.80. Нет, не существуют [36].

1.81. в) Положительные ответы на все поставленные вопросы для локально-конечных групп вытекают из [85] и [87].

1.82. Построены [1], [139].

1.84. Предположительный ответ опровергнут в [69].

1.85. Да, верно [99].

1.88. Да, верно [137].

1.89. Нет, не верно [84].

1.90. Да, будет [88].

Часть 2. ДЕНЬ ПРОБЛЕМ ВТОРОГО ВСЕСОЮЗНОГО СИМПОЗИУМА ПО ТЕОРИИ ГРУПП (Батуми, 1966)

С 24 по 29 октября 1966 года в г.Батуми проходил Второй Всесоюзный симпозиум по теории групп, организованный Тбилисским математическим институтом им. А.Размадзе АН Грузинской ССР, Тбилисским государственным университетом и Батумским государственным педагогическим институтом им Ш.Руставели. В работе симпозиума участвовало 86 человек из 21 города Советского Союза. Отчет о симпозиуме см. в УМН, 22, № 3 (1967), 270–274.

За время, прошедшее после выхода в свет первого издания "Коуровской тетради", некоторые записанные в ней вопросы были решены, по другим наметились определенные сдвиги. Обсуждение этих, а также ряда новых задач, поставленных участниками Второго симпозиума, состоялось 29 октября. Как и в Коуровке, тетрадь нерешенных вопросов заполнялась на протяжении всей работы симпозиума, а часть задач поступила в редакцию уже после его закрытия.

ВОПРОСЫ

2.1. Описать конечные группы, силовская p-подгруппа которых максимальна.

В.А.БЕЛОНОГОВ, А.И.СТАРОСТИН

2.2. Квазигруппой называется группоид $Q(\cdot)$, в котором уравнения $ax=b$, $ya=b$ однозначно разрешимы при любых $a, b \in Q$. Квазигруппы $Q(\cdot)$ и $Q(\circ)$ изотопны, если существуют три подстановки (т.е. взаимно-однозначных отображения на себя) α, β, γ множества Q такие, что $x \circ y = \gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta y)$ для любых $x, y \in Q$. Известно [5], что все квазигруппы, изотопные группам, образуют примитивный класс $\mathfrak{K}$. Пусть $\bar{\mathfrak{K}}$ – некоторый примитивный класс квазигрупп.

а) Описать класс групп, изотопных квазигруппам из $\bar{\mathfrak{K}} \cap \bar{\mathfrak{K}}_1$.

б) При каких тождествах, характеризуюших $\bar{\mathfrak{K}}_1$, всякая группа будет изотопна некоторой квазигруппе из $\bar{\mathfrak{K}}' \cap \bar{\mathfrak{K}}_1$?

в) При каких условиях на $\mathfrak{K}_1$ всякая группа, изотопная квазигруппе из $\bar{\mathfrak{K}} \cap \bar{\mathfrak{K}}_1$, будет одноэлементной?

В.Д.БЕЛОУСОВ, А.А.ГВАРАМИЯ

*2.3. Квазинильпотентной (Γ -квазинильпотентной) называется конечная группа, у которой любые две подгруппы (максимальные подгруппы) A, B удовлетворяют одному из условий:

1) $A \leq B$,
2) $B \leq A$,
3) $N_A(A \cap B) \neq A \cap B \neq N_B(A \cap B)$.

Совпадают ли классы квазинильпотентных и Γ-квазинильпотентных групп?

Я.Г.БЕРКОВИЧ, М.И.КРАВЧУК

2.4. (С.Чейз [138], стр. 365). Пусть абелева группа A есть объединение $A = \bigcup_{\alpha<\Omega} A_\alpha$, где Ω – первый несчётный ординал, A_α – чистые подгруппы из A со следующими свойствами:

1) A_α – свободная абелева группа счётного ранга,
2) если $\beta<\alpha$, то A_β – прямое слагаемое группы A_α.

Будет ли A свободной абелевой группой?

Ю.А.БОГАН

2.5. Согласно Б.И.Плоткину группа называется NR-группой, если множество её ниль-элементов совпадает с локально-нильпотентным радикалом или, что равносильно, если каждый её внутренний ниль-автоморфизм локально-стабилен. Существует ли NR-группа, обладающая ниль-автоморфизмом, который не является локально-стабильным?

В.Г.ВИЛЯЦЕР

2.6. В NR-группе множество обобщенно центральных элементов совпадает с ниль-ядром. Не будет ли справедливо обратное, т.е. не будет ли группа, в которой множество обобщенно центральных элементов совпадает с ниль-ядром, NR-группой?

В.Г.ВИЛЯЦЕР

2.7. Установить мощность множества всех полнвербальных операций, действующих на классе всех групп (пока известно лишь, что эта мощность бесконечна и не превышает континуальной).

О.Н.ГОЛОВИН

2.8. (Проблема А.И.Мальцева). Существуют ли ассоциативные правильные операции, обладающие свойством наследственности по отношению к переходу от сомножителей к их подгруппам?

О.Н.ГОЛОВИН

2.9. Существуют ли правильные ассоциативные операции на классе групп, удовлетворяющие ослабленному мальцевскому требованию (т.е. условию склеиваемости мономорфизмов сомножителей любого произведения, вообще говоря, в гомоморфизм всего произведения) и не удовлетворяющие требованию склеиваемости эпиморфизмов сомножителей?

О.Н.ГОЛОВИН

2.10. Доказать для нильпотентных разложений группы аналог теоремы Ремака-Шмидта.

О.Н.ГОЛОВИН

2.11. (Известная проблема). Пусть каждая собственная подгруппа конечной группы G представима в виде прямого произведения холловой π-подгруппы и холловой π'-подгруппы, а сама группа G в таком виде не представима. Будет ли G группой Шмидта? Для π-разрешимых и π-отделимых групп задача решена.

Участники Гомельского алгебраического семинара

2.12. Пусть H - подгруппа группы G. Найти необходимые и (или) достаточные условия для того, чтобы (почти) каждые два элемента из H, сопряженные в G, были сопряжены и в H

М.Д.ГРИНДЛИНГЕР

*2.13. (Известная проблема). Пусть в периодической группе G каждый π-элемент перестановочен с каждым π'-элементом. Распадается ли G в прямое произведение максимальной π -подгруппы и максимальной π'-подгруппы?

С.Г.ИВАНОВ

2.14.

*2.15. Существуют ли группы без кручения, у которых фактор-группа по некоторому члену возрастающего центрального ряда является периодической с ограниченными в совокупности порядками элементов?

Г.А.КАРАСЕВ

*2.16. Группа G называется финитно-аппроксимируемой относительно сопряженности [22], если любые два её элемента сопряжены в G тогда и только тогда, когда в каждом конечном гомоморфном образе группы G сопряжены их образы. Будет ли G финитно-аппроксимируемой относительно сопряженности в следующих случаях: а) G - полициклическая группа, б) G - свободная разрешимая группа, в) G - группа (всех) целочисленных матриц, г) G - конечно-порожденная группа матриц, д) G- конечно-порожденная двуступенно разрешимая группа?

М.И.КАРГАПОЛОВ

*2.17. Верно ли, что сплетение $A \wr B$ двух групп, финитно-аппроксимируемых относительно сопряженности, тогда и только тогда само финитно-аппроксимируемо относительно сопряженности, когда либо A абелева, либо B конечна?

М.И.КАРГАПОЛОВ

*2.18. Вычислить ранги факторов нижнего центрального ряда свободной разрешимой группы.

М.И.КАРГАПОЛОВ

2.19. Являются ли финитно-отделимыми конечно-порожденные подгруппы свободной разрешимой группы?

М.И.КАРГАПОЛОВ

*2.20. Верно ли, что сплетения $A \wr B$ и $A_1 \wr B_1$ элементарно эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда группы A, B элементарно эквивалентны соответственно группам A_1, B_1 ?

М.И.КАРГАПОЛОВ

*2.21. а) (Известная задача, - см., например, [58, стр. 359].) Совпадают ли классы бэровых и фиттинговых групп?

б) Если нет, то совпадает ли пересечение класса бэровых групп и класса RI^*-групп с классом фиттинговых групп?

Ш.С.КЕМХАДЗЕ

2.22. Абстрактное теоретико-групповое свойство Σ называется радикальным (в нашем смысле), если в любой группе G подгруппа $\Sigma(G)$, порожденная всеми нормальными Σ-подгруппами, сама является Σ-подгруппой (называемой Σ-радикалом группы G). Радикальное свойство Σ называется сильно радикальным, если для всякой группы G фактор-группа $G/\Sigma(G)$ не содержит неединичных нормальных Σ-подгрупп.

а) Является ли свойство $\overline{RN}$ радикальным, сильно радикальным?

*б) Является ли свойство N^0 радикальным?

Ш.С.КЕМХАДЗЕ

2.23. Подгруппу H группы G назовем квазисубинвариантной, если через H проходит нормальная система группы G. Пусть $\mathfrak{K}$ - класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов. Группу G назовем $R^0(\mathfrak{K})$-группой, если всякий её неединичный гомоморфный образ обладает неединичной квазисубинвариантной $\mathfrak{K}$-подгруппой. Очевидно, класс $R^0(\mathfrak{K})$ шире, чем радикальные классы $R_0(\mathfrak{K})$ и $R(\mathfrak{K})$ в смысле А.Г.Куроша.

а) Совпадает ли класс $R^0(\mathfrak{K})$-групп с классом $\overline{RN}$-групп, если $\mathfrak{K}$ - класс абелевых групп?

б) При каких $\mathfrak{K}$ свойство $R^q(\mathfrak{K})$ будет сильно радикальным?

Ш.С.КЕМХАДЗЕ

2.24. Упорядочиваемы ли энгелевы группы без кручения?

А.И.КОКОРИН

2.25. а) Описать группы, линейно упорядочиваемые конечным числом способов [80] .

*б) Существуют ли группы, линейно упорядочиваемые счетным числом способов [24] ?

А.И.КОКОРИН

2.26. Охарактеризовать мультипликативные группы упорядочиваемых тел как абстрактные группы [80] .

А.И.КОКОРИН

2.27. Линейно упорядоченная группа называется у-простой, если в ней нет выпуклых нормальных подгрупп. Упорядочиваемая группа называется У-простой, если при любом линейном порядке она у-простая.

а) Охарактеризовать группы, которые могут быть сделаны у-простыми.

б) Охарактеризовать У-простые группы.

А.И.КОКОРИН

2.28. Всякую ли упорядочиваемую группу можно вложить в доупорядочиваемую группу?

А.И.КОКОРИН

2.29. П.Г.Конторович доказал, что класс конечных групп, любая собственная циклическая подгруппа которых содержится в собственной нормальной подгруппе, совпадает с классом групп, любая собственная циклическая подгруппа которых содержится в собственной нормальной подгруппе простого индекса. Совпадает ли класс конечных групп, любая собственная абелева подгруппа которых содержится в собственной нормальной подгруппе, с классом групп, любая собственная абелева подгруппа которых содержится в собственной нормальной подгруппе простого индекса?

П.Г.КОНТОРОВИЧ, В.Т.НАГРЕБЕЦКИЙ

*2.30. Существуют ли конечные группы, в которых некоторая силовская p -подгруппа покрывается отличными от неё силовскими p -подгруппами?

П.Г.КОНТОРОВИЧ, А.И.СТАРОСТИН

*2.31. Всякая ли группа, допускающая упорядочение с конечным числом выпуклых подгрупп, представима матрицами над полем?

В.М.КОПЫТОВ

2.32. Γ^p -квазинильпотентной называется конечная группа, порядок которой делится на простое число p и у которой пересечение любых двух различных максимальных подгрупп с порядками, делящимися на p, не самонормализуемо ни в одной из этих подгрупп. Будет ли непростой Γ^p -квазинильпотентная группа?

М.И.КРАВЧУК

2.33. Будет ли прямое слагаемое прямой суммы модулей с конечным числом порождающих прямой суммой модулей с конечным числом порождающих? Модули рассматриваются над нётеровым кольцом.

В.И.КУЗЬМИНОВ

2.34. Пусть $\varprojlim^{(p)}$ обозначает правый производный функтор функтора проективного предела. Обратный спектр абелевых групп ξ называется ацикличным, если $\varprojlim^{(p)}\xi = 0$ при $p>0$. Указать необходимые и достаточные условия для ацикличности спектра конечно-порожденных групп. Условия должны выражаться в терминах групп и проекций спектра.

В.И.КУЗЬМИНОВ

2.35. Пусть ξ - ацикличный спектр конечно-порожденных групп. Будет ли ацикличным спектр $\bigoplus_\alpha \xi_\alpha$, где каждый спектр ξ_α совпадает со спектром ξ?

В.И.КУЗЬМИНОВ

*2.36. (Проблема де Гроота). Будет ли свободной абелева группа всех непрерывных целочисленных функций на бикомпакте?

В.И.КУЗЬМИНОВ

2.37. Описать (простые) конечные группы, все силовские p-подгруппы которых для нечетных p циклические (циклические простого порядка).

В.Д.МАЗУРОВ

*2.38. (Старая проблема). Класс колец, вложимых в ассоциативные кольца с делением, универсально аксиоматизируем. Является ли он конечно-аксиоматизируемым?

А.И.МАЛЬЦЕВ

2.39. Существуют ли не конечно-аксиоматизируемые многообразия

*а) групп (проблема Неймана),

б) ассоциативных колец (проблема Шпехта),

*в) колец Ли?

А.И.МАЛЬЦЕВ

2.40. I -теорией (Q -теорией) класса $\mathfrak{K}$ (универсальных) алгебр называется совокупность всех тождеств (квазитождеств), истинных на всех алгебрах класса $\mathfrak{K}$. Существует ли конечно-аксиоматизируемое многообразие

а) групп,

*б) полугрупп,

в) колец (ассоциативных, лиевых),

I -теория (Q -теория) которого нерекурсивна? Замечание: нетрудно указать рекурсивно-аксиоматизируемое многообразие полугрупп с единицей, I -теория которого нерекурсивна (см. также [41]).

А.И.МАЛЬЦЕВ

2.41. Будет ли конечно-аксиоматизируемым многообразие, порожденное

*а) конечным ассоциативным кольцом,

б) конечным кольцом Ли,

в) конечной квазигруппой?

г) Какова минимальная мощность полугруппы, порождающей не конечно-аксиоматизируемое многообразие? По некоторым сведениям эта мощность больше 2, но не больше 6.

А.И.МАЛЬЦЕВ

2.42. Какова структура группоида квазимногообразий

а) всех полугрупп,

б) всех колец,

в) всех ассоциативных колец?

Ср. [42] .

А.И.МАЛЬЦЕВ

2.43. Назовем группу G FN-группой, если $\gamma_i G / \gamma_{i+1} G$ – свободная абелева группа и $\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i G = 1$, где $\gamma_{i+1} G = [\gamma_i G, G]$. Многообразие $\mathfrak{M}$ групп назовём Σ-многообразием (Σ-абстрактное свойство), если $\mathfrak{M}$-свободные группы обладают свойством Σ.

а) Какие свойства Σ сохраняются при перемножении и пересечении многообразий? Сохраняется ли свойство FN?

*б) Будут ли FN-многообразиями все многообразия, полученные перемножениями и пересечениями из нильпотентных многообразий $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots$? ($\mathfrak{N}_1$ – абелевы группы).

А.И.МАЛЬЦЕВ

*2.44. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ – подмногообразия многообразия групп $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$-произведением $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ называется $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \cap \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ – обычное произведение. Исследовать те многообразия групп $\mathfrak{M}$, для которых $\mathfrak{M}$-умножение коммутативно. Существуют ли неабелевы $\mathfrak{M}$ с коммутативным $\mathfrak{M}$-умножением и бесконечной решеткой подмногообразий?

А.И.МАЛЬЦЕВ

2.45. Доказать или опровергнуть следующие гипотезы:

а) (Ф.Холл). Если слово v конечнозначно на группе G, то вербальная подгруппа vG конечна.

б) (Ф.Холл). Если маргинальная подгруппа v^*G имеет в G конечный индекс m, то порядок vG конечен и делит некоторую степень m.

в) Если vG конечна, то индекс $|G : v^*G|$ конечен.

Для линейных групп все три гипотезы справедливы [43].

Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ

*2.46. Будем говорить, что группа почти вся обладает некоторым свойством, если она содержит нормальную подгруппу конечного индекса, обладающую этим свойством. Найти условия, при которых конечно-порожденная матричная группа почти вся аппроксимируется конечными p-группами по некоторому p.

Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ

*2.47. Каковы все абелевы группы, решетка всех эндомор фно допустимых подгрупп которых является цепью? Для не-редуцированных периодических групп и редуцированных групп, периодическая часть которых отлична от нуля, вопрос решен.

А.П.МИШИНА

2.48. (Проблема Я.Мыцельского). Пусть G – связная топологическая группа, локально удовлетворяющая некоторому тождественному соотношению $f_U \equiv 1$, где U – окрестность единицы в G. Верно ли, что тогда $f_G \equiv 1$?

В.П.ПЛАТОНОВ

2.49. (Проблема А.Сельберга). Пусть G – связная полупростая линейная группа Ли, соответствующее симметрическое пространство которой имеет ранг больше 1, Γ – такая дискретная подгруппа G, что G/Γ имеет конечный объем. Будет ли Γ арифметической подгруппой?

В.П.ПЛАТОНОВ

*2.50. (Гипотеза А.Сельберга). Пусть Γ – такая дискретная подгруппа связной группы Ли G, что фактор-пространство G/Γ некомпактно, но имеет конечный объем в мере Хаара. Тогда Γ содержит нетривиальный унипотентный элемент.

В.П.ПЛАТОНОВ

*2.51. (Проблема А.Бореля – Р.Стейнберга). Пусть G – полупростая алгебраическая группа, R_G – множество классов сопряженных унипотентных элементов G. Будет ли R_G конечным? Для поля нулевой характеристики это доказано Костантом-Борелем-Серром.

В.П.ПЛАТОНОВ

*2.52. (Проблема Брюа-Ивахори-Мацумото). Пусть G – полупростая алгебраическая группа над локально-компактным вполне несвязным полем. Будут ли максимальные компактные подгруппы G разбиваться в конечное число классов сопряженных? Оценить это число.

В.П.ПЛАТОНОВ

2.53. Описать максимальные подгруппы группы $SL(n,k)$

над произвольным бесконечным полем k .

В.П.ПЛАТОНОВ

*2.54. Существуют ли в $SL(n,k)$ максимальные подгруппы, не являющиеся замкнутыми в топологии Зарисского?

В.П.ПЛАТОНОВ

2.55. Определить максимальные подгруппы группы $SL(n,\mathbb{Z})$, $n \geq 3$, $\mathbb{Z}$ - кольцо целых чисел. Существуют ли в $SL(n,\mathbb{Z})$ максимальные подгруппы бесконечного индекса?

В.П.ПЛАТОНОВ

2.56. Классифицировать с точностью до изоморфизма абелевы связные алгебраические унипотентные линейные группы над полем положительной характеристики. Для случая поля нулевой характеристики это не представляет труда. С другой стороны, К.Шевалле решил проблему классификации указанных групп с точностью до изогении.

В.П.ПЛАТОНОВ

2.57. Проблема эквивалентности двух матриц в произвольной полупростой алгебраической группе над алгебраически замкнутым полем.

В.П.ПЛАТОНОВ

*2.58. Пусть G - векторное пространство, Γ - его группа автоморфизмов. Γ называется локально финитно стабильной, если для каждой её конечно-порожденной подгруппы Δ в G имеется конечный стабильный относительно Δ ряд. Если характеристика поля равна нулю и Γ локально финитно стабильна, то Γ есть локально-нильпотентная группа без кручения. Верно ли, что каждая локально-нильпотентная группа без кручения может быть так реализована?

Б.И.ПЛОТКИН

*2.59. Пусть Γ - произвольная нильпотентная группа, имеющая класс нильпотентности $n-1$. Всегда ли она допускает точное представление в качестве группы автоморфизмов некоторой абелевой группы со стабильным относительно Γ рядом длины n ?

Б.И.ПЛОТКИН

2.60. Выделить некоторые интересные классы алгебраических систем с тем свойством, что каждая группа может быть представлена как группа всех автоморфизмов подходящей алгебраической системы заданного класса.

Б.И.ПЛОТКИН

2.61. Пусть G - векторное пространство, Γ - его нётерова группа автоморфизмов, причём каждый элемент из Γ унипотентен. Верно ли, что такая Γ - стабильная группа автоморфизмов?

Б.И.ПЛОТКИН

2.62. Если G - конечномерное векторное пространство над полем и Γ - его группа автоморфизмов, каждый элемент которой стабилен, то и вся Γ стабильна (Э.Колчин). Верна ли теорема Колчина для пространств над телами?

Б.И.ПЛОТКИН

2.63. Пусть Γ - группа автоморфизмов векторного пространства G над полем нулевой характеристики, и допустим, что все элементы из Γ унипотентны, причём показатели унипотентности ограничены в совокупности. Будет ли такая Γ локально финитно стабильной?

Б.И.ПЛОТКИН

2.64. Образует ли множество ниль-элементов конечномерной линейной группы над телом её локально-нильпотентный радикал?

Б.И.ПЛОТКИН

*2.65. Обладает ли присоединенная группа радикального (в смысле Джекобсона) кольца центральной системой?

Б.И.ПЛОТКИН

2.66. Определяется ли R -группа решеткой своих подгрупп? Существует ли групповой изоморфизм такой группы, порождающий заданный её решеточный изоморфизм?

Л.Е.САДОВСКИЙ

2.67. Выяснить условия, при которых n -е нильпотентное произведение чистых нильпотентных групп (тех или иных классов) определяется своей решеткой подгрупп. Вопрос решается положительно, если это произведение свободно от кручения.

Л.Е.САДОВСКИЙ

2.68. Что можно сказать о решеточных изоморфизмах чистой разрешимой группы? Не будет ли такая группа строго определяться своей решеткой? Для свободных разрешимых групп этот вопрос, как известно, решается положительно.

Л.Е.САДОВСКИЙ

2.69. Пусть группа G есть произведение своих подгрупп A и B, каждая из которых нильпотентна с условием минимальности. Доказать или опровергнуть, что а) G разрешима, б) полные части подгрупп A и B перестановочны поэлементно.

Н.Ф.СЕСЕКИН

2.70. Пусть группа G есть произведение своих подгрупп A и B, каждая из которых локально-циклическая без кручения. Доказать, что либо A, либо B обладает неединичной подгруппой, нормальной в G. Описать группы, факторизуемые таким образом.

Н.Ф.СЕСЕКИН

2.71. Существует ли конечно-порожденная правоупорядочиваемая группа, совпадающая со своим коммутантом и, вследствие этого, не обладающая свойством RN ?

Д.М.СМИРНОВ

2.72. Пусть F – конечно-порожденная свободная группа, N – её нормальная подгруппа, V – эндоморфно допустимая подгруппа группы N. Будет ли хопфовой группа F/V, если фактор-группа F/N хопфова [92] ?

Д.М.СМИРНОВ

2.73. (Известная проблема.) Существуют ли бесконечные группы, все собственные подгруппы которых простого порядка?

А.И.СТАРОСТИН

2.74. (Известная проблема.) Описать конечные группы с разрешимыми централизаторами инволюций.

А.И.СТАРОСТИН

2.75. Пусть периодическая группа G содержит бесконечное множество конечных подгрупп, общее пересечение которых содержит неединичные элементы. Содержится ли тогда в G неединичный элемент, централизатор которого бесконечен?

С.П.СТРУНКОВ

2.76. Пусть Γ – голоморф абелевой группы A. При каких условиях A максимальна среди локально-нильпотентных подгрупп группы Γ?

Д.А.СУПРУНЕНКО

2.77. Пусть A, B – абелевы группы. При каких условиях всякое расширение A с помощью B является нильпотентной группой?

Д.А.СУПРУНЕНКО

2.78. Конечны или бесконечны множества всех разрешимых и всех абсолютно простых теоретико-групповых чисел? Существуют ли составные, но не разрешимые теоретико-групповые числа? Для определений см. [79].

П.И.ТРОФИМОВ

*2.79. Существуют ли полные (простые полные) группы с максимальными подгруппами?

М.С.ЦАЛЕНКО

2.80. Имеет ли произвольная группа с нормализаторным условием отличную от единицы абелеву нормальную подгруппу?

С.Н.ЧЕРНИКОВ

2.81. а) Существует ли такой аксиоматизируемый класс решеток $\mathfrak{L}$, что решетка всех подполугрупп полугруппы S изоморфна некоторой решетке из $\mathfrak{L}$ тогда и только тогда, когда S является свободной группой?

б) Тот же вопрос для свободных абелевых групп.

Аналогичные вопросы решены положительно для групп без кручения, непериодических групп, абелевых групп без кручения, абелевых непериодических групп, упорядочиваемых групп (соответствующие классы решеток даже конечно-аксиоматизируемы), так что, в частности, в сформулированных вопросах полугруппу S сразу можно считать группой (соответственно абелевой группой) без кручения.

Л.Н.ШЕВРИН

2.82. Можно ли группы с n -м условием Энгеля

$$[x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n}] = 1$$

определить тождественными соотношениями вида $u = v$, где u, v - слова без отрицательных степеней переменных? Для $n = 1,2,3$ это возможно.

А.И.ШИРШОВ

2.83. Пусть периодическая группа G представима в виде произведения двух локально-конечных подгрупп. Будет ли G локально-конечной?

В.П.ШУНКОВ

2.84. Пусть локально-конечная группа G представляется в виде произведения двух локально-нильпотентных подгрупп. Будет ли G локально-разрешимой?

В.П.ШУНКОВ

2.85. (А.Г.Курош). Пусть $\mathfrak{A}$ - некоторый класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов, $R_0(\mathfrak{A})$ - минимальный радикальный (по А.Г.Курошу) класс, содержащий $\mathfrak{A}$. Известно, что $R_0(\mathfrak{A})$ составляют все группы α-й ступени над $\mathfrak{A}$ и только они (здесь $\alpha = 1, 2, \ldots, \omega$). Существует ли для каждого α такой класс $\mathfrak{A}$, что $R_0(\mathfrak{A})$ составляют группы точно данной α-й ступени над $\mathfrak{A}$?

К.К.ЩУКИН

2.86. (А.Г.Курош). Описать все радикалы в классе конечных групп.

К.К.ЩУКИН

2.87. Для всякой первичной группы G и любого порядкового числа σ существует возрастающая вполне упорядоченная последовательность $\{H_\alpha\}$ первичных групп H_α, обладающая свойствами: 1) $G = H_0$, H_α нормальна в $H_{\alpha+1}$ для каждого $\alpha < \sigma$, $H_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} H_\alpha$ для каждого предельного числа $\lambda \leq \sigma$; 2) для каждой H_α существует изоморфизм $\theta_\alpha : H_{\alpha+1} \xrightarrow{\text{на}} Aut H_\alpha$, причем $H_\alpha \theta_\alpha = Int H_\alpha$, где $Aut H_\alpha$, $Int H_\alpha$ - соответственно группа всех и группа внутренних автоморфизмов H_α; 3) для каждой пары $\alpha < \beta \leq \sigma$ нормализатор $N_{H_\beta}(H_\alpha) = H_{\alpha+1}$, а централизатор $C_{H_\beta}(H_\alpha) = 1$.

Последовательность $\{H_\alpha\}$ называют башней автоморфизмов первичной группы G высоты σ (ср. [132, стр. 98]). Если существует такое порядковое число τ, что $H_\tau = H_{\tau+1}$, то τ называют собственной высотой башни. Имеет ли собственную высоту башня автоморфизмов произвольной первичной группы? Для монолитных первичных групп ответ утвердительный.

К.К.ЩУКИН

*2.88. π-подгруппа H группы G называется её холловой π-подгруппой, если для всякого $p \in \pi$ всякая силовская p-подгруппа группы H является силовской p-подгруппой и в G (см., например, [32], стр. 508). Является ли каждая холлова π-подгруппа произвольной группы её максимальной π-подгруппой?

М.И.ЭЙДИНОВ

ОТВЕТЫ И КОММЕНТАРИИ

2.3. Нет, не совпадают, - например, группа

$$G = \text{гр}\,(x, y, z, t \parallel x^4 = y^4 = z^2 = t^3 = 1,$$
$$[x, y] = z,\ [x, z] = [y, z] = 1,\ t^{-1}xt = y,\ t^{-1}yt = x^{-1}y^{-1})$$

Γ-квазинильпотентна, но не квазинильпотентна. В самом деле, $G/\Phi(G) \simeq \mathbf{A}(4)$, поэтому пересечение любых двух различных максимальных подгрупп A и B из G равно $\Phi(G)$, откуда

$$N_A(A \cap B) \neq A \cap B \neq N_B(A \cap B),$$

т.е. G Γ-квазинильпотентна. С другой стороны, если $A_1 = \text{гр}\,(zx^2, zy^2, t)$, $B_1 = \text{гр}\,(z, t)$, то $N_{A_1}(A_1 \cap B_1) = A_1 \cap B_1 = (t)$. Следовательно, G не квазинильпотентна. (Сообщено В.Д.Мазуровым.)

2.13. Не всегда. Рассмотрим группу $A = \mathbb{A}(m,n)$ из комментария к 1.63. В ней d – центральный элемент. Пусть p – простое число, не делящее n. Противоречащим примером будет группа $G = A/(d^{p^k})$ при $\pi = \{p\}$ и подходящем k. В самом деле, ясно, что $(d)/(d^{p^k})$ – её максимальная p-подгруппа. Допустим, что при любом k

$$A/(d^{p^k}) = (d)/(d^{p^k}) \times H_k/(d^{p^k}),$$

где H_k – подгруппа из A. Тогда

$$(d) \cap H_k = (d^{p^k}), \; (d) \cap H = 1, \text{ где } H = \cap H_k.$$

Так как H без кручения и изоморфно вкладывается в периодическую группу $A/(d) \simeq \mathbb{B}(m,n)$, то $H = 1$. Отсюда следует изоморфная вложимость группы A в декартово произведение абелевых групп A/H_k. Но это невозможно, так как A не коммутативна.

2.15. Да, существуют [2], – например, группа $\mathbb{A}(m,n)$ из комментария к 1.63: в ней d – центральный элемент, а $\mathbb{A}(m,n)/(d) \simeq \mathbb{B}(m,n)$, поэтому фактор-группа группы $\mathbb{A}(m,n)$ по её центру имеет конечный период.

2.16. а) Да, будет [62].
б) Да, будет [64].
в) Не всегда [57, 64, 63].
г) Не всегда [57, 64, 63].
д) Не всегда [24].

2.17. Нет, не верно [63].

2.18. См.[74, 12].

2.20. Нет, не верно – прямые сплетения элементарно эквивалентных групп могут не быть элементарно эквивалентными. В то же время прямые сплетения универсально эквивалентных групп универсально эквивалентны [76].

2.21. а) Нет, не совпадают [102].
б) Нет, не совпадает [65].

2.22. б) Нет, не является. Например, группа $SL(n,\mathbb{Z})$ при достаточно большом $n \geqslant 3$ содержит неабелеву конечную простую группу, а потому не обладает свойством N_0. В то же время, как указано в [22], стр. 64, она является произведением своих конгруэнц-подгрупп $mod\,2$ и $mod\,3$, обладающих центральными системами, а потому и свойством N^0 (см. комментарий к 1.38).

2.25. б) Да, существуют [97].

2.30. Да, существуют при любом простом p [37].

2.31. Нет, не всякая. Например, группа с порождающими a_n, b_n, c, d, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и определяющими соотношениями

$$[a_n, b_n] = c, \quad a_n^d = a_{n+1}, \quad b_n^d = b_{n+1},$$
$$[a_n, a_m] = [b_n, b_m] = [c, a_n] = [c, b_n] = 1, \quad n \neq m,$$
$$n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

разрешима, упорядочиваема с конечным числом выпуклых подгрупп и не аппроксимируема финитно, а потому и не представима матрицами над полем [81].

2.36. Да, будет [30, третье издание].

2.38. Нет, не является. В самом деле, из [101, стр. 281], вытекает явное задание этого класса системой аксиом $\{A\} \cup \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 \cup \ldots$, где A – условие отсутствия делителей нуля, $\mathfrak{A}_n$ – некоторый конечный набор квазитождеств, связанный со скалярными матрицами степени n. Любая конечная подсистема $\{A\} \cup \mathfrak{A}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{A}_k$ определяет более широкий класс, так как ей удовлетворяют все $(2k-2)$-фиры (см. [101], стр. 283), а в [100] для любых $1 < m < n$ построен $(m-1)$-фир U_{mn}, не вложимый в тело.

2.39. а) Да, существуют [51]. См. также **1.82.**
в) Да, существуют [140].

2.40. б) Да, существует [46].
2.41. а) Да, будет [34, 117].
2.43. б) Да, будут [11].
2.44. Да, существуют, – например, многообразие $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_p \mathfrak{A}_p$, где $\mathfrak{A}_p$ – многообразие абелевых групп простого периода p (сообщено Ю.М.Горчаковым 21 июня 1967 года на Красноярском краевом семинаре по алгебре (Красноярск, 21–24 июня 1967 г.)).

2.46. Конечно-порожденная матричная группа над полем нулевой характеристики почти по всем p почти вся аппроксимируется конечными p-группами [19, 43, 55]. Конечно-порожденная матричная группа над полем положительной характеристики p почти вся аппроксимируется конечными p-группами [55, 77]. Обобщения см. в [61, 142].

2.47. Характеризация таких групп дана в [95].

2.50. Доказана в [17].

2.51. Да, будет, если $p > 5$ и в некоторых других случаях [127]. В.П.Платонов сообщил, что он располагает положительным решением для $p > 2$. Здесь p – характеристика поля.

2.52. Да, будут [96, стр. 65]. Там же – формула для этого числа.

2.54. Да, существуют, если k – поле рациональных чисел [66] или произвольное алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики [67].

2.58. Нет, не верно [71].

2.59. Нет, не всегда: вопрос равносилен проблеме о размерных подгруппах, решенной отрицательно [129]. Формулировка этой проблемы: всегда ли m-я размерная подгруппа $d_m G = G \cap (1 + \Delta^m)$, где Δ – разностный идеал кольца $\mathbb{Z}G$, совпадает с m-м централом $\gamma_m G$? Очевидно, $\{d_m G\}$ – центральный ряд в G, поэтому $\gamma_m G \leq d_m G$. Известно [114], что $d_m G / \gamma_m G = d_m (G/\gamma_m G)$. Если $d_n G = \gamma_n G$, то ясно, что $G/\gamma_n G$ вкладывается в стабилизатор ряда

$$\mathbb{Z}G/\Delta^n \geq \Delta/\Delta^n \geq \ldots \geq \Delta^{n-1}/\Delta^n \geq 0.$$

Обратно, пусть $\gamma_n G = 1$ и G вкладывается в стабилизатор ряда

$$A \geq A_1 \geq \ldots \geq A_n = 0,$$

где A – абелева группа. Продолжим это вложение до гомоморфизма $\varphi : \mathbb{Z}G \to \operatorname{End} A$. Очевидно, $\Delta^n \varphi = 0$, поэтому $d_n G = 1$.

2.65. Не всегда [48].

2.79. Да, существуют, – см., например, [73].

2.88. Нет, не является. Пусть π – множество всех простых чисел. Существует несчётная локально-конечная группа G, в которой все силовские подгруппы конечны [91]. Подгруппа

H , порожденная силовскими подгруппами группы G , взятыми по одной для каждого простого числа, будет холловой π - подгруппой в G . Так как H счетна, то она не совпадает со всей π -группой G .

Часть 3. ДЕНЬ ПРОБЛЕМ ТРЕТЬЕГО ВСЕСОЮЗНОГО СИМПОЗИУМА ПО ТЕОРИИ ГРУПП (Хрустальная, 1969)

Со 2 по 8 февраля 1969 года на туристской базе "Хрустальная" под Свердловском состоялся Третий Всесоюзный симпозиум по теории групп, организованный Свердловским отделением математического института имени В.А.Стеклова, Институтом математики СО АН СССР и Уральским государственным университетом имени А.М.Горького. В работе симпозиума участвовало 94 человека из 19 городов Советского Союза. Отчет о симпозиуме см. в УМН, 24, № 4 (1969), 221–224.

В этой части приводятся задачи, поставленные на Третьем симпозиуме, а также присланные непосредственно в редакцию "Коуровской тетради" после выхода в свет ее второго издания.

ВОПРОСЫ

3.1. Описать конечные простые группы, содержащие две максимальные подгруппы взаимно простых порядков. Непростые группы с этим свойством известны.

В.А.БЕЛОНОГОВ, А.И.СТАРОСТИН

3.2. Классифицировать точные неприводимые (бесконечномерные) представления нильпотентной группы с тремя порождающими a, b, c и определяющими соотношениями $[a,b]=c$, $ac=ca$, $bc=cb$.

С.Д.БЕРМАН, А.Е.ЗАЛЕССКИЙ

3.3. (Известная проблема). Описать группу автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры ранга $n \geqslant 2$.

Л.А.БОКУТЬ

3.4. (Известные проблемы.) а) Общая проблема выводимости тождеств. Существует ли алгоритм, который по любой системе групповых слов $f_1, \ldots, f_m$ (от фиксированного множества переменных $x_1, x_2, \ldots$) и отдельному слову f выяснял бы, следует ли тождество $f=1$ из тождеств $f_1=1, \ldots, f_m=1$?

б) Частная проблема выводимости тождеств. Пусть заданы слова $f_1, \ldots, f_m$. Существует ли алгоритм, который по любому слову f выяснял бы, следует ли тождество $f=1$ из тождеств $f_1=1, \ldots, f_m=1$?

Л.А.БОКУТЬ

3.5. Может ли подгруппа приведенной свободной группы быть полной? В частности, может ли вербальная подгруппа приведенной свободной группы быть полной? Пример полной периодической абелевой вербальной подгруппы приведенной свободной группы давал бы ещё одно доказательство того, что существует многообразие групп, не задаваемое конечным числом тождеств.

Н.Р.БРУМБЕРГ

*3.6. Описать неразрешимые конечные группы, каждая разрешимая подгруппа которых обладает одним из следующих свойств: 1) 2-замкнута, 2) $2'$-замкнута, 3) изоморфна $S(4)$.

В.А.ВЕДЕРНИКОВ

3.7. Автоморфизм σ группы G называется алгебраическим, если для любого элемента $g \in G$ минимальная σ -допустимая подгруппа из G , содержащая g , имеет конечное число порождающих. Автоморфизм σ группы G называется e -автоморфизмом, если для любых σ -допустимых подгрупп A и B , где A - собственная подгруппа из B , в разности $B \setminus A$ найдется элемент x , для которого $[x, \sigma] \in A$. Всякий ли e -автоморфизм является алгебраическим?

В.Г.ВИЛЯЦЕР

*3.8. Пусть G - свободное произведение свободных групп A и B , V - вербальная подгруппа группы G , отвечающая уравнению $x^4=1$. Доказать, что если $a \in A \setminus V$, $b \in B \setminus V$, то $(ab)^2 \in V$.

Легко проверить, что в группе Бернсайда $B(4, \infty)$ все элементы энгелевы (ограниченного индекса). В случае положительного решения задачи можно показать, что не все элементы из $\mathfrak{B}(4,\infty)$ достижимы, что решает известную проблему.

В.Г.ВИЛЯЦЕР

*3.9. Существуют ли бесконечные периодические группы с максимальной конечной подгруппой?

Ю.М.ГОРЧАКОВ

3.10. Конечное ли число конечных простых неабелевых групп содержит собственное многообразие групп?

Ю.М.ГОРЧАКОВ

*3.11. Элемент g группы G называется обобщенно-периодическим [80], если существуют такие $x_1,\dots,x_n \in G$, что $x_1^{-1}gx_1 \cdots x_n^{-1}gx_n = 1$. Существуют ли конечно-порожденные группы без кручения, все элементы которых обобщенно-периодические?

Ю.М.ГОРЧАКОВ

3.12. (Известная проблема). Будет ли локально-разрешимой локально-конечная группа, обладающая полной силовской базой?

Ю.М.ГОРЧАКОВ

*3.13. Разрешима ли элементарная теория решеток подгрупп конечных абелевых групп?

Ю.Л.ЕРШОВ, А.И.КОКОРИН

3.14. Пусть G – конечная группа матриц степени n над телом T нулевой характеристики. Доказать, что G обладает разрешимой нормальной подгруппой H, индекс которой в G не превосходит некоторого числа $f(n)$, не зависящего ни от G, ни от T. Этот вопрос связан с теорией представлений конечных групп (индекс Шура).

А.Е.ЗАЛЕССКИЙ

*3.15. Будем говорить, что группа G U-вложима в класс групп $\mathfrak{K}$, если для всякой конечной подмодели $M \subset G$ найдется такая группа A из $\mathfrak{K}$, что M изоморфна некоторой подмодели из A. Известно, что в конечно-определенной группе, U-вложимой в конечные группы, положительно решается проблема равенства слов. Поэтому представляет интерес вопрос об отыскании условий U-вложимости групп в конечные группы. Будет ли U-вложимой в конечные группы

а) всякая группа с одним определяющим соотношением,

б) всякая группа, допускающая одно определяющее соотношение в многообразии разрешимых групп данной ступени?

М.И.КАРГАПОЛОВ

3.16. Проблема равенства слов в группе, допускающей одно определяющее соотношение в многообразии n-ступенно разрешимых групп, $n \geqslant 3$.

М.И.КАРГАПОЛОВ

3.17. Будет ли простой а) некоммутативная группа, линейно упорядочиваемая двумя способами, б) некоммутативная упорядочиваемая группа без нетривиальных нормальных относительно выпуклых подгрупп?

А.И.КОКОРИН

*3.18. (Б.Нейман [80]). Группа U называется универсальной для класса $\mathfrak{K}$ групп, если U содержит изоморфный образ каждой группы из $\mathfrak{K}$. Существует ли счётная группа, универсальная для класса счётных упорядочиваемых групп?

А.И.КОКОРИН

3.19. (А.И.Мальцев [40]). Существует ли для произвольной линейно-упорядоченной группы G абелева линейно упорядоченная группа, имеющая тот же порядковый тип, что и G?

А.И.КОКОРИН

3.20. Будут ли упорядочиваемые группы минимальным аксиоматизируемым классом, содержащим доупорядочиваемые группы?

А.И.КОКОРИН

3.21. Пусть $\mathfrak{K}$ – класс одноосновных моделей сигнатуры σ, θ – свойство, имеющее смысл для моделей класса $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_\theta$ – класс двуосновных моделей, у которых первое основное множество M берется из $\mathfrak{K}$, второе состоит из всех подмоделей модели M, обладающих свойством θ, а сигнатура состоит из знаков сигнатуры σ и знаков $\in$, $\subseteq$, имеющих обычный теоретико-множественный смысл. Элементарную теорию класса $\mathfrak{K}_\theta$ назовем элементно- θ -подмодельной теорией класса $\mathfrak{K}^\theta$. Разрешима ли

*а) элементно-сервантно-подгрупповая теория абелевых групп,

б) элементно-сервантно-подгрупповая теория абелевых групп без кручения,

*в) элементно- θ -подгрупповая теория абелевых групп, если множество θ -подгрупп линейно упорядочено по включению?

А.И.КОКОРИН

3.22. Пусть $\xi = \{G_\alpha, \pi_\beta^\alpha \mid \alpha, \beta \in I.\}$ – проективная система над направленным множеством I свободных абелевых групп с конечным числом порождающих. Будет ли $\varprojlim \xi \neq 0$, если проекции π_β^α -эпиморфизмы и $G_\alpha \neq 0$?

Равносильная формулировка. Пусть каждое конечное множество элементов абелевой группы A содержится в сервантной свободной конечно-порожденной подгруппе из A. Имеет ли тогда группа A прямое слагаемое, изоморфное бесконечной циклической группе?

В.И.КУЗЬМИНОВ

3.23.

3.24.

3.25. (Известная проблема.) Конечно ли число конечных простых групп, порядки которых делятся точно на три различных простых числа? Дж.Томпсон показал, что если простая группа имеет порядок $p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где p, q, r – простые числа и $p<q<r$, то $p=2$, $q=3$, $r=$ 5,7,13 или 17. Известные простые группы таких порядков исчерпываются следующими: $PSL(2,m)$, m = 5, 7, 8, 9, 17, $PSL(3,3)$, $U_3(3)$, $U_4(2)$.

В.Д.МАЗУРОВ

3.26. (Ф.Гросс [109].) Верно ли, что конечная группа периода $p^\alpha q^\beta$ имеет нильпотентную длину $\leq \alpha+\beta$? Для $\alpha=1$ или $\beta=1$ это верно [109]. Нильпотентная длина – число факторов самого короткого ряда с нильпотентными факторами.

В.Д.МАЗУРОВ

3.27. (Дж.Томпсон [134].) Будет ли простая конечная группа, у которой среди максимальных подгрупп есть нильпотентная, изоморфна одной из групп $PSL(2,q)$?

В.Д.МАЗУРОВ

*3.28. Если в конечной 2-группе G с циклическим центром любая абелева нормальная подгруппа порождается двумя элементами, то будет ли любая абелева подгруппа из G порождаться тремя элементами?

В.Д.МАЗУРОВ

*3.29. Важный круг вопросов относится к изучению теоретико-групповых конструкций в классе матричных групп. Например: при каких условиях сплетение матричных групп над полем само представимо матрицами над полем?

Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ

3.30. Абелева группа без кручения называется факторно-расщепляемой, если в любой ее фактор-группе периодическая часть выделяется прямым слагаемым. Каковы все факторно-расщепляемые абелевы группы (хотя бы в случае групп конечного ранга)? Частичные результаты см. в [59, 60].

А.П.МИШИНА

3.31. Каковы необходимые и достаточные условия, при которых всякая сервантная подгруппа вполне разложимой абелевой группы без кручения сама вполне разложима? Некоторые достаточные условия получены Бэром [32, стр. 180], Прохазкой [125] и Вангом [141].

А.П.МИШИНА

3.32. (П.Нейман.) Доказать, что свободное произведение двух свободных групп с объединенной конечно-порожденной подгруппой не является простой группой.

Д.И.МОЛДАВАНСКИЙ

3.33. Будут ли изоморфны две группы, каждая из которых задается одним определяющим соотношением и является гомоморфным образом другой? Известен пример двух неизоморфных групп, гомоморфно отображающихся друг на друга, одна из которых задается одним соотношением [93]. Можно показать, однако, что другая одним соотношением задана быть не может.

Д.И.МОЛДАВАНСКИЙ

3.34. (Известная проблема.) Проблема сопряженности для групп с одним определяющим соотношением. В случае, когда группа обладает элементами конечного порядка, алгоритм указан Ньюмэном [123].

Д.И.МОЛДАВАНСКИЙ

3.35. (К.Росс.) Пусть на группе G заданы две топологии σ и τ, так что образовались локально-компактные топологические группы G_σ и G_τ. Будут ли G_σ и G_τ топологически изоморфны, если множество замкнутых подгрупп у них одно и то же? Ответ утвердительный, если G_σ вполне несвязна или ее связная компонента единицы неабелева, а также в ряде других случаев [128].

Ю.Н.МУХИН

3.36.

3.37. Пусть все конечно-порожденные подгруппы локально-компактной группы G пронильпотентны. Можно ли утверждать, что всякая максимальная замкнутая подгруппа из G содержит коммутант G'? Для максимальных открытых подгрупп это так.

Ю.Н.МУХИН

3.38. Описать все топологические группы, не имеющие собственных замкнутых подгрупп. Известен пример нециклической группы с таким свойством [47].

Ю.Н.МУХИН

3.39. Описать конечные (простые) группы с самоцентрализующейся подгруппой простого порядка.

В.Т.НАГРЕБЕЦКИЙ

3.40. (И.Р.Шафаревич.) Пусть $SL(2,\mathbb{Z})^\wedge$ и $SL(2,\mathbb{Z})^-$ — пополнения группы $SL(2,\mathbb{Z})$, определяемые соответственно всеми подгруппами конечного индекса и конгруэнц-подгруппами, $\varphi : SL(2,\mathbb{Z})^\wedge \to SL(2,\mathbb{Z})^-$ — естественный гомоморфизм. Известно, что $\mathrm{Ker}\,\varphi$ — бесконечная некоммутативная группа (Ж.-П.Серр). Будет ли $\mathrm{Ker}\,\varphi$ свободной проконечной группой?

В.П.ПЛАТОНОВ

3.41. Будет ли локально-конечной компактная периодическая группа?

В.П.ПЛАТОНОВ

3.42. (Гипотеза Кнезера-Титса [136].) Пусть G -односвязная k-определенная простая алгебраическая группа, $E_k(G)$ - подгруппа, порожденная унипотентными k-элементами. Если $E_k(G)\neq 1$, то $G_k = E_k(G)$. Известно доказательство для k-разложимых групп (К.Шевалле) и p-адического поля k (В.П.Платонов).

В.П.ПЛАТОНОВ

3.43. Пусть m - бесконечная мощность. Группу G назовем m-наднильпотентной, если каждая циклическая подгруппа из G есть член некоторого возрастающего нормального ряда, доходящего до G и имеющего мощность, меньшую m. Нетрудно показать, что класс m-наднильпотентных групп есть радикальный класс. Верно или нет, что если m_1 и m_2 - две бесконечные мощности, $m_1 < m_2$, то существует группа G, которая m_2-наднильпотентна и m_1-полупроста?

Б.И.ПЛОТКИН

3.44. Пусть группа порождается своими субинвариантными разрешимыми подгруппами. Будет ли она локально-разрешимой?

Б.И.ПЛОТКИН

3.45. Пусть $\mathfrak{X}$ - наследственный радикал. Верно ли, что если G - локально-нильпотентная группа без кручения, то $\mathfrak{X}(G)$ - изолированная подгруппа в G?

Б.И.ПЛОТКИН

3.46. Существует ли группа, в которой имеется больше одной, но конечное число максимальных локально-разрешимых нормальных подгрупп?

Б.И.ПЛОТКИН

3.47. (Известная задача.) Верно или нет, что каждая локально-нильпотентная группа есть гомоморфный образ локально-нильпотентной группы без кручения?

Б.И.ПЛОТКИН

3.48. Можно показать, что относительно умножения классов наследственные радикалы образуют полугруппу. Интересной задачей является отыскание всех неразложимых элементов этой полугруппы. В частности, отметим задачу отыскания неразложимых радикалов, содержащихся в классе локально-конечных p-групп.

Б.И.ПЛОТКИН

3.49. Имеются ли соотношения в полугруппе, порожденной всеми неразложимыми радикалами?

Б.И.ПЛОТКИН

3.50. Пусть G – группа порядка $p^{\alpha}m$, $(p,m)=1$, p – простое число, k – алгебраически замкнутое поле характеристики p. Верно ли следующее утверждение: если k – размерность неразложимого проективного модуля, отвечающего 1-представленню группы G, равна p^{α}, то G обладает холловой p'-подгруппой? Обратное тривиально.

А.И.САКСОНОВ

3.51. Верно ли, что всякая конечная группа G, обладающая группой автоморфизмов Φ, регулярно действующей на множестве классов сопряженных элементов группы G (т.е. оставляющей на месте лишь единичный класс), разрешима? Проблема известна в случае, когда Φ – циклическая группа, порожденная регулярным автоморфизмом.

А.И.САКСОНОВ

3.52. Можно ли задать системой квазитождеств от конечного числа переменных квазимногообразие, порожденное свободной группой ранга 2?

Д.М.СМИРНОВ

*3.53. Дистрибутивна ли решетка $L(\mathfrak{N}_4)$ подмногообразий многообразия $\mathfrak{N}_4$ нильпотентных групп ступени ≤ 4? Известно, что решетка $L(\mathfrak{N}_3)$ дистрибутивна [115].

Д.М.СМИРНОВ

3.54.

3.55. Является ли бинарно разрешимая группа, все абелевы подгруппы которой имеют конечный ранг, локально-разрешимой?

С.П.СТРУНКОВ

*3.56. Будет ли 2-группа, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, локально-конечной? Для периодических групп нечётного периода аналогичный вопрос решается отрицательно [49].

С.П.СТРУНКОВ

3.57. Установить законы распределения неразрешимых и простых теоретико-групповых чисел в натуральном ряду. Для определений см. [79].

П.И.ТРОФИМОВ

*3.58. Пусть G – компактная нульмерная топологическая группа, все силовские p-подгруппы которой разложимы в прямое произведение циклических подгрупп порядка p. Будут ли все ее нормальные подгруппы дополняемы, т.е. найдется ли для любой замкнутой нормальной подгруппы F такая замкнутая подгруппа H, что $G=FH$, $F\cap H=1$?

В.С.ЧАРИН

*3.59. Пусть H – неразрешимая минимальная нормальная подгруппа конечной группы G. Пусть H обладает циклической силовской p-подгруппой для каждого простого p, делящего $|G:H|$. Доказать, что H обладает по крайней мере одним дополнением в группе G.

Л.А.ШЕМЕТКОВ

3.60. В работе [82] введено понятие p-длины произвольной конечной группы. Исследовать зависимость между p-длиной конечной группы и инвариантами c_p, d_p, e_p и др. ее силовской p-подгруппы.

Л.А.ШЕМЕТКОВ

3.61. Пусть σ – автоморфизм простого порядка p конечной группы G, имеющей холлову π-подгруппу с циклическими силовскими подгруппами. Пусть $p\in\pi$. Верно ли, что $C_G(\sigma)$ обладает по крайней мере одной холловой π-подгруппой?

Л.А.ШЕМЕТКОВ

3.62. (Известная проблема.) D_π-группой называют конечную группу, в которой любые две максимальные π-подгруппы сопряжены. Всегда ли расширение D_π-группы с помощью D_π-группы является D_π-группой?

Л.А.ШЕМЕТКОВ

3.63. Верно ли, что всякая конечная простая группа имеет абелеву силовскую подгруппу?

Л.И.ШИДОВ

*3.64. Описать конечные простые группы с силовской 2-подгруппой следующего типа:

$$\text{гр}\,(a,t \,\|\, a^{2^n} = t^2 = 1,\ t^{-1}at = a^{-1+2^{n-1}}),\ n>2.$$

В.П.ШУНКОВ

ОТВЕТЫ И КОММЕНТАРИИ

3.6. Описаны. Если в группе G, удовлетворяющей условиям задачи, существует подгруппа H, изоморфная $S(4)$, то нормальная подгруппа четвертого порядка из H совпадает со своим централизатором в G. Конечные группы, содержащие подгруппу четвертого порядка, совпадающую со своим централизатором, описаны в [108, 35]. Если же в G нет подгрупп, изоморфных $S(4)$, то G изоморфна одной из групп, описанных в [38].

3.8. Не может быть доказано [68]: если A, B – свободные группы с базами a_1, a_2 и b_1, b_2, то, например, базисные коммутаторы

$$a = [[a_1, a_2, a_2], [a_1, a_2]],$$
$$b = [[b_1, b_2, b_2], [b_1, b_2]]$$

не лежат в V, но $(ab)^2 \in V$. В самом деле, пусть B_k – свободная бернсайдова группа периода 4 с k свободными порождающими. В [143] доказано, что а) если H – подгруппа, порожденная l элементами свободной базы группы B_k, то $[\gamma_{3l-1} H, B_k] \leqslant \gamma_{3l+1} B_k$; б) $\gamma_{3k} B_k = 1$. Пусть черта обозначает гомоморфизм $G \to G/V \simeq B_4$. Легко видеть (см., например, там же), что $\bar{a}$, $\bar{b}$ – элементы второго порядка в $\bar{G}$ и, значит, достаточно установить их перестановочность (тогда будет $(\bar{a}\bar{b})^2=1$). Ввиду а), б) $[\bar{a},\bar{b}_1]=$ $=\prod u_i(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{b}_1)$, где u_i – коммутаторы веса $\geqslant 7$, явно содержащие третий аргумент. Применив эндоморфизм $\bar{a}_1\to\bar{a}_1$, $\bar{a}_2\to\bar{a}_2$, $\bar{b}_1\to\bar{b}$, получим $[\bar{a},\bar{b}]=\prod u_i(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{b})$. Здесь каждый сомножитель содержит подкоммутатор вида $[w_j(\bar{a}_1,\bar{a}_2),\bar{b}]^{\pm 1}$, который ввиду а), б) разлагается в произведение коммутаторов веса $\geqslant 7$ от $w_j(\bar{a}_1,\bar{a}_2)$, $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, явно содержащих первый аргумент. Таким образом, каждое $u_i(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{b})$ разлагается в произведение коммутаторов веса $\geqslant 12$ от $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{b}_1,\bar{b}_2$. Отсюда и из б) следует, что $[\bar{a},\bar{b}]=1$.

3.9. Да, существуют [2].

3.11. Да, существуют [13]. Другой пример:

$$G=\text{гр}\,(a,b\,\|\,a^{-1}b^2a=b^{-2},\ b^{-1}a^2b=a^{-2}).$$

Легко видеть, что $N=\text{гр}\,(a^2,b^2,(ab)^2)$ – абелева нормальная подгруппа в G, а $G/N\simeq\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$. Если $a^{2l}b^{2m}(ab)^{2n}=$ $=1$, то после сопряжения элементом a получим $a^{2l}b^{-2m}(ab)^{-2n}=1$, откуда $a^{4l}=1$. Так как существует очевидный гомоморфизм $G\to\mathrm{Hol}\,\mathbb{Z}$, посылающий a в число 1, то $l=0$. Аналогично $m=n=0$, и, значит, N – свободная абелева группа ранга 3. Квадраты элементов, не лежащих в N, не равны 1; например,

$$(a\cdot a^{2l}b^{2m}(ab)^{2n})^2=$$
$$=a^2\cdot a^{-1}(a^{2l}b^{2m}(ab)^{2n})a\cdot a^{2l}b^{2m}(ab)^{2n}=a^{4l+2}\neq 1.$$

Значит, G – группа без кручения. Так как квадрат любого элемента x из G лежит в N, то $x^2(x^2)^a(x^2)^b(x^2)^{ab}=1$. (Сообщено В.А.Чуркиным.)

3.13. Нет, не разрешима [25].

3.15. Пусть $\mathfrak{M}$ – квазимногообразие групп, $\mathfrak{K}$ – его подкласс, замкнутый относительно взятия подгрупп и конечных прямых произведений. Группа, конечно-определенная в $\mathfrak{M}$, тогда и только тогда U-вложима в класс $\mathfrak{K}$, когда она аппроксимируется группами из $\mathfrak{K}$ (А.И.Будкин, В.А.Горбунов, не опубликовано). Отсюда можно извлечь отрицательное решение вопроса а). Приведем ещё конкретные противоречащие примеры, основанные на других соображениях. Группа $G=(a,b \mid a^{-1}b^2a = b^3)$ нехопфова [93] и потому не является 2-ступенно разрешимой. Возьмем в ней элементы a, b, x_1, x_2, x_3, x_4 с условием $w=[[x_1,x_2],[x_3,x_4]]\neq 1$, добавим к ним 1 и обратные элементы, а также все начальные отрезки слова w в алфавите $\{x_i\}$ и все начальные отрезки слова $a^{-1}b^2ab^{-3}$ и каждого из слов x_i в алфавите $\{a,b\}$. Обозначим полученную модель через M. Если M вкладывалась бы в конечную группу G_0, то G_0 была бы, с одной стороны, метациклической группой, а с другой – содержала бы элементы с условием $[[x_1,x_2],[x_3,x_4]]\neq 1$, что невозможно. Значит, G не U-вложима в конечные группы (отрицательное решение вопроса а)). Так как группа $G/G^{(k)}$ при подходящем k также нехопфова [93], то по тем же причинам она не U-вложима в конечные группы (отрицательное решение вопроса б)).

3.18. Нет, не существует [20, 131].

3.21. а) Нет, не разрешима [25].
в) Нет, не разрешима [26].

3.28. Не всегда [6].

3.29. Для сплетений вопрос решен в [10].

3.53. Нет, не дистрибутивна [4].

3.56. Да, будет [86].

3.57. Да, будут [16].

3.59. Доказано [75, 83].

3.64. Описаны [89]: это в точности группы $PSL(3,q)$ при $q\equiv 3 \pmod 4$, $PSU(3,q)$ при $q\equiv 1 \pmod 4$ и M_{11}

Часть 4. ДЕНЬ ПРОБЛЕМ ЧЕТВЕРТОГО ВСЕСОЮЗНОГО СИМПОЗИУМА ПО ТЕОРИИ ГРУПП
(Академгородок, 1973)

С 5 по 8 февраля 1973 года в Академгородке под Новосибирском состоялся Четвертый Всесоюзный симпозиум по теории групп, организованный Институтом математики Сибирского отделения АН СССР и Новосибирским государственным университетом. В работе симпозиума принимали участие 98 человек из 20 городов Советского Союза, а также двое иностранных учёных. Отчет см. в УМН, 28, № 3 (1973), 235-239.

7 февраля состоялся традиционный День проблем, на котором участники симпозиума прослушали доклад-комментарий "О Коуровской тетради", а затем в общей дискуссии поставили ряд новых вопросов. Обсуждались также вопросы для "Коуровской тетради", предложенные зарубежными специалистами - частью записанные авторами в специальную тетрадь во время их пребывания в Академгородке (4.54, 4.55, 4.56, 4.65), частью - присланные по почте. Все эти вопросы и публикуются ниже.

ВОПРОСЫ

4.1. Найти бесконечную конечно-порожденную группу с тождественным соотношением вида $x^{2^n} = 1$.

С.И.АДЯН

4.2. а) Найти бесконечную конечно-порожденную группу периода < 100.

б) Существуют ли такие группы периода 5 ?

С.И.АДЯН

4.3. Построить конечно-определенную группу с неразрешимой проблемой равенства, в которой выполняется нетривиальное тождество.

С.И.АДЯН

4.4. Построить конечно-определенную группу с неразрешимой проблемой равенства, у которой все нетривиальные определяющие соотношения имеют вид $A^2=1$. Проблема интересует топологов.

С.И.АДЯН

4.5. а) (Проблема Милнора [122]). Верно ли, что произвольная конечно-порожденная группа имеет либо степенной, либо показательный рост? Это верно, например, для линейных групп [137] и свободных бернсайдовых групп нечётного периода $\geqslant 665$.

б) Решить проблему Милнора для конечно-определенных групп.

в) Доказать, что всякая конечно-порожденная группа с неразрешимой проблемой равенства имеет показательный рост.

С.И.АДЯН

4.6. (Ф.Холл.) Будут ли в многообразии метабелевых групп проективные группы свободными?

В.А.АРТАМОНОВ

4.7. (Известная задача.) Для каких кольцевых эпиморфизмов $R \to R'$ соответствующий групповой гомоморфизм $SL_n(R) \to SL_n(R')$ является эпиморфизмом (при фиксированном $n \geqslant 2$)? В частности, для каких колец R выполниется равенство $SL_n(R) = E_n(R)$?

В.А.АРТАМОНОВ

4.8. Suppose G is a finitely generated free-by-cyclic group. Is G finitely presented?

Г.БАУМСЛАГ (G.BAUMSLAG)

4.9. Let G be a finitely generated torsion-free nilpotent group. Are there only a finite number of non-isomorphic groups in the sequence $\alpha G, \alpha^2 G, \ldots$? Here αG denotes the automorphism group of G and $\alpha^{n+1} G = \alpha(\alpha^n G)$ for $n = 1, 2, \ldots$

Г.БАУМСЛАГ (G.BAUMSLAG)

4.10. A group G is called locally indicable if every non - trivial finitely generated subgroup of G has an infinite cyclic factor group. Is every torsion-free 1-relator group locally in - dicable?

Г.БАУМСЛАГ (G.BAUMSLAG)

4.11. Let F be the free group of rank 2 in some variety of groups. If F is not finitely presented is the multiplicator of F necessary infinitely generated?

Г.БАУМСЛАГ (G.BAUMSLAG)

4.12. Пусть G - конечная группа, A - группа её авто - морфизмов, стабилизирующая ряд

$$G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_n = \Phi(G).$$

Верно ли, что A нильпотентна? При $n=1$ это так.

Я.Г.БЕРКОВИЧ

4.13. Доказать, что конечная неабелева p -группа допускает внешний автоморфизм порядка p .

Я.Г.БЕРКОВИЧ

4.14. Let p be a prime number. What are the necessary and sufficient conditions for a finite group G in order that the group algebra of G over a field of characteristio p be indecomposable as a two-sided ideal? There exist some non-trivial examples, for instance, the group algebra of the Mathieu group M_{24} is indecomposable when p is 2.

Р.БРАУЭР (R.BRAUER)

4.15. Let G be a finite simple group whose order is divisible by a prime number p . Suppose that the order of the centralizer $C(x)$ lies below a fixed number n for all elements x of order p in G . Does there exist an upper bound for the order of

G which depends only on n ? A similar question has also been suggested in [107] .

Р.БРАУЭР (R.BRAUER)

4.16. Suppose that $\mathfrak{X}$ is a class of finite groups, meeting the following tow requirements: 1) subgroups and epimorphic images of $\mathfrak{X}$ -groups are $\mathfrak{X}$ -groups, 2) if the group $G = UV$ is the complex-product of its $\mathfrak{X}$ -subgroups U and V (neither of which need be normal), then $G \in \mathfrak{X}$. If π is a set of primes , then the class of all finite π -groups meets these requirements. Are these the only classes $\mathfrak{X}$ with the above properties? If $\mathfrak{X}$ is some such class and if π is the set of all primes which are orders of groups in $\mathfrak{X}$, then one may show that $\mathfrak{X}$ contains every soluble π -group.

Р.БЭР (R.BAER)

4.17. If $\mathfrak{V}$ is a variety of groups, denote by $\tilde{\mathfrak{V}}$ the class of all finite $\mathfrak{V}$ -groups. How to characterize the classes of finite groups of the form $\tilde{\mathfrak{V}}$ for $\mathfrak{V}$ a variety?

Р.БЭР (R.BAER)

4.18. Characterize the classes $\mathfrak{X}$ of groups, meeting the following requerements: subgroups, epimorphic images and groups of automorphisms of $\mathfrak{X}$ -groups are $\mathfrak{X}$ -groups, but not every countable group is a $\mathfrak{X}$ -group. Note that the class of all finite groups and the class of all almost cyclic groups meet these requirements.

Р.БЭР (R.BAER)

4.19. Denote by $\mathfrak{S}$ the class of all groups G with the following property: if U and V are maximal locally soluble sub -

groups of G, then U and V are conjugate in G (or at least isomorphic). It is almost obvious that a finite group G belongs to $\mathfrak{S}$ if and only if G is soluble. What can be said about the locally finite groups in $\mathfrak{S}$?

Р.БЭР (R.BAER)

4.20. Пусть F - свободная группа, N - её нормальная подгруппа. Верно ли, что декартов квадрат N m-сводится к N (т.е. существует алгоритм, который по произвольной паре слов w_1, w_2 из F строит слово w такое, что $w \in N$ тогда и только тогда, когда $w_1 \in N$ и $w_2 \in N$)? Положительный ответ на этот вопрос (даже для случая конечно-порожденной N) отрицательно решал бы следующую известную проблему: существуют ли конечно-определенные группы, проблема равенства в которых имеет произвольную наперед заданную рекурсивно-перечислимую m-степень неразрешимости?

М.К.ВАЛИЕВ

4.21. Let G be a finite group, p an odd prime number, P a Sylow p-subgroup of G, and the order of every non-identity normal subgroup of G is divisible by p. Suppose P has an element x which is conjugate with no other from P. Does x belong to the center of G ? For $p=2$, the answer is positive [106].

Г.ГЛАУБЕРМАН (G.GLAUBERMAN)

4.22. (J.G.Thompson). Let G be a finite group, A a group of automorphisms of G such that $|A|$ and $|G|$ are co-prime. Does there exist an A-invariant soluble subgroup of G such that $C_A(H)=1$?

Г.ГЛАУБЕРМАН (G.GLAUBERMAN)

4.23. Let G be a finite simple group, τ some element of a prime order, and α an automorphism of G whose order is co-prime with $|G|$. Suppose α centralizes $C_G(\tau)$. Is $\alpha=1$? For $|\tau|=2$, the answer is positive [105].

Г.ГЛАУБЕРМАН (G.GLAUBERMAN)

4.24. Suppose T is a Sylow 2-subgroup of a finite simple group G.

a) Suppose T has a nilpotence class $n>1$. The best possible bound for the exponent of the center of T is 2^{n-1}. This easily implies the bound $2^{n(n-1)}$ for the exponent of T, however, this is almost certainly too crude. What is the best possible bound?

b) Is it possible that T is the direct product of two proper subgroups?

c) Is $T' = \Phi(T)$? This would answer a).

d) Find a "small number" of subgroups $T_1, \ldots, T_n$ of T which depend only on the isomorphism class of T such that $\{N_G(T_1), \ldots, N_G(T_n)\}$ together control fusion in T with respect to G (in the sense of Alperin).

Д.ГОЛДШМИДТ (D.M.GOLDSCHMIDT)

4.25. Are there only finitely many simple groups which contain a self-centralizing subgroup of prime order $p \geqslant 5$ for a given p ?

Д.ГОЛДШМИДТ (D.M.GOLDSCHMIDT)

4.26. The group H is said to be quasisimple if $H' = H$ and $H/Z(H)$ is a simple group. A finite group H is said to be in standard form with a standard component L if L is a normal quasisimple subgroup of H and the Sylow 2-subgroups of $C_H(L)$ are cyclic or generalized quaternion groups.

a) Characterize the groups of Lie type of odd characteristic by the centralizers of involutions in standard form with standard component of Lie type of odd characteristic.

b) Characterize the groups of Lie type of characteristic 2 by the centralizers of elements of order 3 in standard form with standard components of Lie type of characteristic 2.

Д.ГОРЕНШТЕЙН (D.GORENSTEIN)

4.27. Описать простые конечные группы G, представимые в виде $G = ABA$, где A, B - абелевы подгруппы.

И.П.ДОКТОРОВ

4.28. Для заданного поля k характеристики $p>0$ охарактеризовать локально-конечные группы с полупростыми групповыми алгебрами над k.

А.Е.ЗАЛЕССКИЙ

4.29. Классифицировать неприводимые матричные группы над конечным полем, порожденные отражениями, т.е. матрицами с жордановой формой $diag(-1, 1, \ldots, 1)$.

А.Е.ЗАЛЕССКИЙ

4.30. Описать группы (конечные группы, абелевы группы), являющиеся группами всех автоморфизмов топологических групп.

М.И.КАРГАПОЛОВ

4.31. Описать решетку квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп.

М.И.КАРГАПОЛОВ

4.32. Проблема сопряженности для метабелевых групп.

М.И.КАРГАПОЛОВ

4.33. Пусть $\tilde{\mathfrak{K}}_n$ - класс групп с одним определяющим соотношением в многообразии n-ступенно разрешимых групп.

а) При каких условиях $\tilde{\mathfrak{K}}_n$-группа обладает нетривиальным центром? Может ли быть нетривиальным центр $\tilde{\mathfrak{K}}_n$-группы, $n \geqslant 2$, не допускающей двух порождающих?

б) Описать абелевы подгруппы $\tilde{\mathfrak{K}}_n$-групп.

в) Исследовать периодические подгруппы $\tilde{\mathfrak{K}}_n$-групп.

М.И.КАРГАПОЛОВ

4.34. Пусть v - групповое слово, $\tilde{\mathfrak{K}}_v$ - класс групп, определяемый следующим образом: $G \in \tilde{\mathfrak{K}}_v$ в том и только том случае, когда существует такое натуральное число $n = n(G)$, что всякий элемент вербальной подгруппы vG представляется в виде произведения n значений слова v на группе G. Для каких v классу $\tilde{\mathfrak{K}}_v$ принадлежат все конечно-порожденные разрешимые группы? Не будет ли таким слово $v(x,y) = x^{-1}y^{-1}xy$?

М.И.КАРГАПОЛОВ

4.35. (A known problem). Is there an infinite locally finite simple group satisfying the minimum condition for p -subgroups for every prime p ?

О.КЕГЕЛЬ (**O.H.KEGEL**)

4.36. Is there an infinite locally finite simple group G with an involution i such that the centralizer $C_G(i)$ is a Černikov group?

О.КЕГЕЛЬ (**O.H.KEGEL**)

4.37. Is there an infinite locally finite simple group G which is not linear such that for some prime p the p-subgroups of G either are of bounded derived length or of finite exponent?

О.КЕГЕЛЬ (**O.H.KEGEL**)

4.38. а) Какие известные простые конечные группы не могут встретиться в качестве композиционных факторов групп автоморфизмов конечных групп простого периода? В частности, могут ли встретиться группы Сузуки? Группы Матье? Группы Янко? Другие спорадические группы?

б) Описать композиционные факторы групп автоморфизмов конечных двуступенно нильпотентных групп простого периода.

В.Д.МАЗУРОВ

4.39. A countable group U is said to be SQ-universal if every countable group is isomorphic to a subgroup of a quotient group of U .Let G be a group which has a presentation with $z \geq 2$ generators and at most $z-2$ defining relations. Is G SQ-universal?

А.МАКБЕТ, П.НОЙМАН (**A.M.MACBEATH, P.M.NEUMANN**)

4.40. Пусть C – фиксированная неединичная группа (например, $C = Z_2$). Как показано в [45] , для любых групп A , B

все расщепляемые расширения группы B посредством группы A вкладываются некоторым единым способом в прямое произведение $A \times \mathrm{Aut}\,(B \wr C)$. Как они в нем расположены?

Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ

4.41. Точка z комплексной плоскости называется свободной, если матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$ порождают свободную группу. Какие точки свободны? Верно ли, что все точки вне ромба с вершинами ± 2, $\pm i$ свободны? Известно [119], что внешность "глаза", образованного окружностью $|z| = 1$ и касательными к ней из точек ± 2, целиком состоит из свободных точек, тогда как "зрачок" $|z| < \frac{1}{2}$ заполнен всюду плотно несвободными точками.

Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ

4.42. Верно ли, что

$$GL(n,\mathbb{R}) = D(n,\mathbb{R})\cdot O(n,\mathbb{R})\cdot UT(n,\mathbb{R})\cdot GL(n,\mathbb{Z})$$

при любом $n=1,2,\ldots$? Обозначения см., например, в [23]. Следствием этого равенства при данном n является положительное решение проблемы Минковского о произведении n линейных форм [120], которая для $n \geq 6$ остается открытой.

Ю.И. МЕРЗЛЯКОВ

4.43. Описать абелевы группы без кручения с конечным числом автоморфизмов.

В.Т.НАГРЕБЕЦКИЙ

4.44. (Известная задача.) Описать группы с абелевой группой автоморфизмов.

В.Т.НАГРЕБЕЦКИЙ

4.45. Let G be a free product amalgamating proper subgroups A and B of H and K respectively.

a) Suppose that H, K are finite and $|A:H|>2$, $|B:K|>2$. Is G SQ-universal? See 4.39.

b) Suppose that A, B, H, K are free groups of finite ranks. Is G SQ-universal? Or, contrastly, can G be simple?

П.НОЙМАН (P.M.NEUMANN)

4.46. Назовем многообразие групп предельным, если оно не может быть задано конечным числом тождеств, а любое его собственное подмногообразие конечно-базируемо. Из леммы Цорна следует, что любое многообразие, не имеющее конечной базы тождеств, содержит некоторое предельное подмногообразие.

а) Задать явно (тождествами или порождающей группой) хотя бы одно предельное многообразие.

б) Является ли множество предельных многообразий счетным? Известно, что оно бесконечно.

А.Ю.ОЛЬШАНСКИЙ

4.47. Существует ли такая счётная система групп, что любое многообразие групп порождается некоторой ее подсистемой?

А.Ю.ОЛЬШАНСКИЙ

4.48. Является ли конечно-базируемым любое многообразие A -групп, т.е. локально-конечных групп, силовские подгруппы которых абелевы?

А.Ю.ОЛЬШАНСКИЙ

4.49. Пусть G_1, G_2 – конечно-порожденные нильпотентные группы без кручения, причём $\mathrm{Aut}\, G_1 \simeq \mathrm{Aut}\, G_2$. Следует ли отсюда, что $G_1 \simeq G_2$?

В.Н.РЕМЕСЛЕННИКОВ

4.50. Каковы разрешимые многообразия групп, все конечно-порожденные группы которых финитно-аппроксимируемы?

В.Н.РЕМЕСЛЕННИКОВ

4.51. (Известная проблема [31].) Являются ли группы узлов финитно-аппроксимируемыми?

В.Н.РЕМЕСЛЕННИКОВ

4.52. Пусть G – конечно-порожденная группа без кручения, являющаяся расширением абелевой группы посредством нильпотентной группы. Будет ли G почти для всех простых чисел p почти вся аппроксимироваться конечными p-группами?

В.Н.РЕМЕСЛЕННИКОВ

4.53. Как доказал П.Пиккель [124] , существует лишь конечное число неизоморфиых конечно-порожденных нильпотентных групп с одним и тем же семейством конечных гомоморфных образов. Можно ли распространить теорему Пиккеля на полициклические группы?

В.Н.РЕМЕСЛЕННИКОВ

4.54. Are any two minimal relation-modules of a finite group isomorphic?

К.РОГГЕНКАМП (K.W.ROGGENKAMP)

4.55. Let G be a finite group, $\mathbb{Z}_p$ the localization at p. Does the Krull-Schmidt theorem hold for projective $\mathbb{Z}_pG$ -modules?

К.РОГГЕНКАМП (K.W.ROGGENKAMP)

4.56. Let R be a commutative Noetherian ring with 1, Λ an R-algebra, which is finitely generated as R-module. Put $T=\{U\in Mod(\Lambda)\ :\ \exists$ exact Λ-sequence $0\to P\to\Lambda^{(n)}\to U\to 0$, for some n, with $P_m\simeq\Lambda_m^{(n)}$ for every maximal ideal m of $R\}$. Denote by $G(T)$ the Grothendieck group of T relative to short exact sequences.

a) Describe $G(T)$; in particular, what does it mean: $[U]=[V]$ in $G(T)$?

b) Conjecture: If $\dim(max(R))=d<\infty$, and there are two epimorphisms $\varphi:\Lambda^{(n)}\to U$, $\psi:\Lambda^{(n)}\to V$, $n>d$, and $[U]=[V]$ in $G(T)$, then $Ker\varphi\simeq Ker\psi$.

К.РОГГЕНКАМП (K.W.ROGGENKAMP)

4.57. Пусть группа G есть произведение двух своих абелевых минимаксных подгрупп A и B. Доказать или опровергнуть следующие утверждения: а) $A_0B_0\neq 1$, где $A_0=\bigcap_{x\in G}A^x$ и аналогично определяется B_0 ; б) коммутант группы G -минимаксная подгруппа. В частном случае, когда A и B удовлетворяют условию минимальности или условию максимальности, оба утверждения справедливы.

Н.Ф.СЕСЕКИН

4.58. Пусть конечная группа G есть произведение своих подгрупп A и B, где A абелева, а B нильпотентна. Указать зависимость ступени разрешимости группы G от ступени нильпотентности группы B и порядка её коммутанта. В случае, когда B двуступенно нильпотентна, такая зависимость известна.

Н.Ф.СЕСЕКИН

4.59. (Ф.Холл.) Найти наименьшее натуральное число n с тем свойством, что любую счётную группу можно вложить в простую группу с n порождающими. Теорема Ф.Холла, сформулированная без доказательства в [121, стр. 86], утверждает, что $2 \leqslant n \leqslant 9$.

Д.М.СМИРНОВ

4.60. (Ф.Холл.) Какую мощность имеет множество простых групп с двумя порождающими, один из которых имеет порядок 2, а другой - порядок 3?

Д.М.СМИРНОВ

4.61. Существует ли линейная функция f со следующим свойством: если в конечной 2-группе G каждая абелева подгруппа порождается n элементами, то G порождается $f(n)$ элементами? Нельзя ли взять $f(n)=2n$?

С.А.СЫСКИН

4.62. Существует ли многообразие групп, определенное конечным числом тождеств, у которого неразрешима универсальная теория?

А.ТАРСКИЙ (A.TARSKI)

4.63. Существует ли неабелево многообразие групп (в частности, содержащее многообразие всех абелевых групп) с разрешимой элементарной теорией?

А.ТАРСКИЙ (A.TARSKI)

4.64. Существует ли многообразие групп, не допускающее неприводимой системы определяющих тождеств?

А.ТАРСКИЙ (A.TARSKI)

4.65. Conjecture: $(p^q-1)/(p-1)$ never divides $(q^p-1)/(q-1)$ if p, q are distinct primes. The validity of this conjecture would simplify the proof of solvability of groups of odd order [103], rendering unnecessary the detailed use of generators and relations.

Дж.ТОМПСОН(J.G.THOMPSON)

4.66. Let P be a presentation of a finite group G on m_P generators and r_P relations. The deficiency def G is the maximum of $m_P - r_P$ taken over all presentations P. Let G be a non-trivial finite group such that $G=G'$ and the multiplicator $M(G)=1$. Prove that def $(G^n) \to -\infty$ as $n \to \infty$. Here G^n stands for the nth direct power of G.

Дж.УАЙГОЛД (J.WIEGOLD)

4.67. Let G be a finite p-group. Show that the (special) rank of the multiplicator $M(G)$ of G is bounded in terms of the rank of G.

Дж.УАЙГОЛД (J.WIEGOLD)

4.68. Construct a finitely generated (infinite) characteristically simple group that is not a direct power of a simple group.

Дж.УАЙГОЛД (J.WIEGOLD)

4.69. Let G be a finite p-group, and suppose that $|G'| > p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ for some non-negative integer n. Prove that G is generated by the elements of breadths $\geq n$. The breadth of an element x of G is $b(x)$ where $|G:C(x)| = p^{b(x)}$.

Дж.УАЙГОЛД (J.WIEGOLD)

4.70. Пусть F – поле характеристики $\neq 2$, $\mathfrak{G}_F$ – группа преобразований $x \to ax+\alpha$ $(a, \alpha \in F,\ a \neq 0)$, обозначаемых символами $A=(a\ \alpha)$. Расширим $\mathfrak{G}_F$ до проективной плоскости, добавив символы $(0, \alpha)$ и бесконечно удаленную прямую. Тогда прямыми будут в точности централизаторы $\mathfrak{C}(A)$ элементов $A \in \mathfrak{G}_F$ и смежные классы по ним [130]. Существуют ли другие группы $\mathfrak{G}$, дополняемые до проективной плос -

кости так, чтобы прямыми были в точности смежные классы по централизаторам элементов из $\mathfrak{A}$?

Г.ШВЕРДТФЕГЕР (H. SCHWERDTFEGER)

4.71. Пусть A – некоторая группа автоморфизмов конечной группы G и G обладает рядом A -допустимых подгрупп $G=G_0>G_1>\ldots>G_k=1$ с простыми индексами $|G_i:G_{i+1}|$. Доказать, что A сверхразрешима.

Л.А.ШЕМЕТКОВ

4.72. Верно ли, что всякое многообразие групп, свободные группы которого аппроксимируются нильпотентными группами без кручения, разрешимо или совпадает с многообразием всех групп? Для положительного ответа достаточно показать, что всякое многообразие алгебр Ли над полем рациональных чисел, не содержащее конечномерных простых алгебр, разрешимо.

А.Л.ШМЕЛЬКИН

4.73. а) (Известная проблема.) Существует ли неабелево многообразие групп, все конечные группы которого абелевы?

б) Существует ли неабелево многообразие групп, все периодические группы которого абелевы?

А.Л.ШМЕЛЬКИН

4.74. Всякая ли 2-группа порядка > 2 не проста?

В.П.ШУНКОВ

4.75. Пусть G – периодическая группа, содержащая инволюцию i , и силовские 2-подгруппы группы G являются либо локально-циклическими, либо обобщенными группами кватернионов. Будет ли $iO_{2'}(G)$ центральным элементом в $G/O_{2'}(G)$?

В.П.ШУНКОВ

4.76. Пусть G – локально-конечная группа, содержащая элемент a простого порядка с конечным централизатором $C_G(a)$. Будет ли G почти разрешимой? Или хотя бы обладает ли G подгруппой конечного индекса, не содержащей a ?

В.П.ШУНКОВ

4.77. A.Rudvalis has discovered in 1972 a new simple group R of order $2^{14}.3^{3}.5^{3}.7.13.29$. He has shown that R possesses an involution i such that $C_R(i)=V\times F$, where V is a four-group (an elementary abelian group of order 4) and $F \simeq Sz(8)$.

a) Show that R is the only finite simple group G which possesses an involution i such that $C_G(i)=V\times F$, where V is a four-group and $F \simeq Sz(8)$.

b) Let G be a non-abelian finite simple group which possesses an involution i such that $C_G(i)=V\times F$, where V is an elementary abelian 2-group of order 2^n, $n \geqslant 1$, and $F \simeq Sz(2^m)$, $m \geqslant 3$. Show that $n=2$, $m=3$.

З.ЯНКО (Z.JANKO)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С.И.Адян, Бесконечные неприводимые системы группо - вых тождеств, ИАН СССР, сер. матем., 34, № 4 (1970), 715-734.

2. - , О подгруппах свободных периодических групп нечетного показателя, Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 112 (1971), 64-72.

3. - , О некоторых группах без кручения, ИАН СССР, сер. матем., 35, № 3 (1971), 459-468.

4. Ю.А.Белов, К вопросу о решетке нильпотентных много - образий групп класса 4, Алгебра и логика, 9, № 6 (1970), 623-628.

5. В.Д.Белоусов, Уравновешенные тождества в квазигруп - пах, Матем. сб., 70, № 1 (1966), 55-97.

6. Я.Г.Беркович, Об одном вопросе В.Д.Мазурова, Алгебра и логика, 9, № 1 (1970), 121.

7. В.В.Блудов, Пример неупорядочиваемой группы со строго изолированной единицей, Алгебра и логика, 11, № 6 (1972), 619-632.

8. Л.А.Бокуть, О вложении колец в тела, ДАН СССР, 175, № 4 (1967), 555-558.

9. М.К.Валиев, Примеры универсальных конечно-определен - ных групп, ДАН СССР, 211, № 2 (1973), 265-263.

10. Ю.Е.Вапнэ, Критерий представимости прямого сплетения групп матрицами, ДАН СССР, 195, № 1 (1970), 13-16.

11. Ю.М.Горчаков, Мультинильпотентные группы, Алгебра и логика, 6, № 3 (1967), 25-30.

12. - , Г.П.Егорычев, Ранги факторов нижнего центрального ряда свободной полинильпотентной группы, ДАН СССР, 204, № 1 (1972), 12-14.

13. А.П.Горюшкин, Пример конечно-порожденной $\mathcal{G}$ -периодической группы без кручения, СМЖ, 14, № 1 (1973), 204-207.

14. М.Д.Гриндлингер, К нахождению фактор-группы нормального делителя свободной группы по взаимному коммутанту, Матем. записки Уральского ун-та, 7, № 3 (1970), 72-76.

15. Б.И.Зильбер, Пример двух элементарно эквивалентных, но

не изоморфных конечно-порожденных метабелевых групп, Алгебра и логика, 10, №3 (1971), 309-315.

16. М.И.Кабенюк, О дополняемости подгрупп в компактных группах, СМЖ, 13, № 4 (1972), 939-943.

17. Д.А.Каждан, Г.А.Маргулис, Доказательство гипотезы Сельберга, Матем. сб., 75, № 1 (1968), 163-168.

18. М.И.Каргаполов, Об обобщенных разрешимых группах, Алгебра и логика, 2, № 5 (1963), 19-28.

19. – , О конечно-порожденных линейных группах, Алгебра и логика, 6, № 5 (1967), 17-20.

20. – , Об универсальных группах, Алгебра и логика, 9, № 4 (1970), 428-435.

21. – , А.И.Кокорин, В.М.Копытов. К теории упорядочиваемых групп, Алгебра и логика, 4, № 6 (1965), 21-28.

22. – , Ю.И.Мерзляков, Бесконечные группы, в сб., "Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1966", Москва, 1968, 57-90.

23. – , – , Основы теории групп, Москва, "Наука", 1972.

24. – , Е.И.Тимошенко, К вопросу о финитной аппроксимируемости относительно сопряженности метабелевых групп, в сб. "Четвертый Всесоюзный симпозиум по теории групп", Новоси - бирск, 1973, 86-88.

25. Г.Т.Козлов, Неразрешимость элементарной теории решеток подгрупп конечных абелевых p-групп, Алгебра и логика, 9, № 2 (1970), 167-171.

26. – , Неразрешимость теории абелевых групп с цепью подгрупп, в сб.: "Алгебра", Иркутск, 1972, 21-23.

27. А.И.Кокорин, В.М.Копытов, Относительно выпуклые под группы упорядочиваемых групп, СМЖ, 9, № 4 (1968), 833-839.

28. – , – , Линейно упорядоченные группы, Наука, 1972.

29. В.М.Копытов, К теории доупорядочиваемых групп, Алг ра и логика, 5, № 6 (1966), 27-32.

30. Коуровская тетрадь, Нерешенные задачи теории групп Новосибирск, 1-е изд., 1965; 2-е изд., 1967; 3-е изд., 1969.

31. Р.Кроуэлл, Р.Фокс, Введение в теорию узлов, Мир, 1967

32. А.Г.Курош, Теория групп, Наука, 1967.

33. Е.М.Левич, А.И.Токаренко, Замечание о локально-нильпотентных группах без кручения, СМЖ, 11, № 6 (1970), 1406-1408.

34. И.В.Львов, О многообразиях ассоциативных колец, Алгебра и логика, 12, № 3 (1973), 269-297.

35. В.Д.Мазуров, О конечных группах с данной силовской 2

подгруппой, ДАН СССР, 168, № 3(1966), 519–521.

36. – , Конечные группы, силовская 2-подгруппа которых – прямое произведение кватернионов, Алгебра и логика, 5, № 5 (1966), 55–58.

37. – , О покрытиях силовских подгрупп в конечных группах, Матем. записки Уральского ун-та, 7, № 3 (1970), 129–132.

38. – , В.М.Ситников, С.А.Сыскин, Конечные группы, разрешимые подгруппы которых 2-замкнуты или 2-замкнуты, Алгебра и логика, 9, № 3 (1970), 313–341.

39. Г.С.Маканин, Проблема сопряженности в группе кос, ДАН СССР, 182, № 3 (1968), 495–496.

40. А.И.Мальцев, Об упорядоченных группах, ИАН СССР, сер. матем., 13, № 6 (1949), 473–482.

41. – , Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп, Матем. сб., 69, № 1 (1966), 3–12.

42. – , Об умножении классов алгебраических систем, СМЖ 8, № 2 (1967), 346–365.

43. Ю.И.Мерзляков, Вербальные и маргинальные подгруппы линейных групп, ДАН СССР, 177, № 5 (1967), 1008–1011.

44. – , О матричном представлении автоморфизмов, расширений и разрешимых групп, Алгебра и логика, 7, № 3 (1968), 63–104.

45. – , Целочисленное представление голоморфов полициклических групп, Алгебра и логика, 9, № 5 (1970), 539–558.

46. В.Л.Мурский, Несколько примеров многообразий полугрупп, Матем. заметки, 3, № 6 (1968), 663–670.

47. А.Ф.Мутылин, Связные полные локально ограниченные поля, Полные не локально ограниченные поля, Матем. сб., 76, № 3 (1968), 454–472.

48. О.М.Нерославский, Структуры, связанные с радикальными кольцами, Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, № 2(1973), 5–10.

49. П.С.Новиков, С.И.Адян, О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка, ИАН СССР, сер. матем., 32, № 5 (1968), 1167–1190.

50. Г.А.Носков, Субнормальное строение конгруэнц-группы Мерзлякова, СМЖ, 14, № 3 (1973), 680–683.

51. А.Ю.Ольшанский, О проблеме конечного базиса тождеств в группах, ИАН СССР, сер. матем., 34, № 2 (1970), 376–384.

52. В.П.Платонов, Автоморфизмы алгебраических групп, ДАН СССР, 168, № 6 (1966), 1257–1260.

53. – , Подгруппа Фраттини линейных групп и финитная аппроксимируемость, ДАН СССР, 171, № 4 (1966), 798–801.

54. – , Теория алгебраических линейных групп и периодические группы, ИАН СССР, сер. матем., 30, № 3 (1966), 573–620.

55. – Об одной задаче для конечно-порожденных групп, ДАН БССР, 12, № 6 (1968), 492-494.

56. – , Доказательство гипотезы конечности для разрешимых подгрупп алгебраических групп, СМЖ, 10, №5 (1969),1084–1090.

57. – , Г.В.Матвеев, Группы аделей и финитная аппроксимируемость линейных групп относительно сопряженности, ДАН БССР, 14, № 9 (1970), 777-779.

58. Б.И.Плоткин, Группы автоморфизмов алгебраических систем, Наука, 1966.

59. Л.Прохазка, Заметка о структуре фактор-групп абелевых групп без кручения конечного ранга, Чехосл. матем. ж., 12, № 4 (1962), 529–535.

60. – , Заметка о факторно расщепляемых абелевых группах, Časop. pěstov. mat., 87, №4 (1962), 404–414.

61. В.Н.Ремесленников, Финитная аппроксимируемость метабелевых групп, Алгебра и логика, 7, № 4 (1968), 106–113.

62. – , Сопряженность в полициклических группах, Алгебра и логика, 8, № 6 (1969), 712-725.

63. – , Финитная аппроксимируемость групп относительно сопряженности, СМЖ, 12, № 5 (1971), 1085–1099.

64. – , В.Г.Соколов, Некоторые свойства вложения Магнуса, Алгебра и логика, 9, № 5 (1970), 566–578.

65. И.А.Рипс, Два предложения о бэровских группах, ДАН СССР, 186, № 2 (1969), 264-267.

66. Н.С.Романовский, Максимальные подкольца поля $\mathbb{Q}$ и максимальные подгруппы группы $SL(n, \mathbb{Q})$, Алгебра и логика, 6, № 4 (1967), 75–82.

67. – , Письмо в редакцию, Алгебра и логика, 7, № 3(1968), 123.

68. В.А.Романьков, О свободных группах в многообразии групп периода 4, Алгебра и логика, 9, № 2 (1970), 250.

69. К.Сексеибаев, К теории полициклических групп, Алгебра и логика, 4, № 4 (1965), 79–84.

70. Н.Ф.Сесекин, О произведении финитно связанных абелевых групп, СМЖ, 9, № 6 (1968), 1427-1430.

71. Л.А.Симонян, Некоторые примеры групп и алгебр Ли, СМЖ, 12, № 4 (1971), 837-843.

72. Д.М.Смирнов, Правоупорядоченные группы, Алгебра и логика, 5, № 6 (1966), 41-60.

73. В.Г.Соколов, О подгруппе Фраттини, Алгебра и логика, 7, № 2 (1968), 85-93.

74. – , Аналог формулы Витта для свободных разрешимых групп, Алгебра и логика, 8, № 3 (1969), 367-372.

75. С.А.Сыскин, О дополняемости в конечных группах, СМЖ, 12, № 2 (1971), 477-480.

76. Е.И.Тимошенко, О сохранении элементарной и универсальной эквивалентности при сплетении, Алгебра и логика, 7, № 4 (1968), 114-119.

77. А.И.Токаренко, Замечание о конечно-порожденных линейных группах, Труды Рижского алгебраического семинара, Рига, 1969, 280-281.

78. – , О локально финитно стабильных группах автоморфизмов, Латв. матем. ежегодник, 9, Рига, 1971, 221-223.

79. П.И.Трофимов, О конечных ненильпотентных группах, Второй Всесоюзный симпозиум по теории групп, Резюме сообщений и докладов, Тбилиси, 1967.

80. Л.Фукс, Частично упорядоченные алгебраические системы, Мир, 1965.

81. В.А.Чуркин, О непредставимости матрицами упорядоченной группы с конечным множеством выпуклых подгрупп, Тезисы докладов 6-й научной студенческой конференции НГУ, Новосибирск, 1968, 19.

82. Л.А.Шеметков, О частично разрешимых конечных группах, Матем. сб., 72, № 1 (1967), 97-107.

83. – , О существовании π -дополнений к нормальным подгруппам конечных групп, ДАН СССР, 195, № 1 (1970), 50-52.

84. А.Л.Шмелькин, Два замечания о свободных разрешимых группах, Алгебра и логика, 6, № 2 (1967), 95-109.

85. В.П.Шунков, О проблеме минимальности для локально-конечных групп, Алгебра и логика, 9, № 2 (1970), 220-248.

86. – , Об одном классе p -групп, Алгебра и логика, 9, № 4 (1970), 484-496.

87. – , О локально конечных группах конечного ранга, Алгебра и логика, 10, № 2 (1971), 199-225.

88. – , О периодических группах с почти регулярной инволюцией, Алгебра и логика, 11, № 4 (1972), 470-493.

89. J.Alperin, R.Brauer,D.Gorenstein, Finite groups with quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroups, Trans.Amer.Math. Soc.,151,N1(1970),1-261.

90. L.Auslander, On a problem of Philip Hall,Ann.Math.,86, N1(1967),112-117.

91. R.Baer, Lokal endlich-auflösbare Gruppen mit endlichen Sylowuntergruppen,J.reine angew.Math.,239/240 (1969),109-144.

92. G.Baumslag, Wreath products and extensions,Math.Z.,81, N4(1963),286-299.

93. _, D.Solitar, Some two-generator one-relator non-Hopfian groups,Bull.Amer.Math.Soc.,68,N3(1962),199-201.

94. A.Bowtell, On a question of Malcev, J.Algebra,7,N1, (1967),126-139.

95. M.-P.Brameret, Groupes ρ-réduits, Séminar Dubreil et Picot Fac.Sci.Paris,1962-1963,16,N2(1967),13/01-13/26.

96. F.Bruhat,J.Tits, Groupes réductifs sur un corps local, I,Publs math.IHES,N41(1972),5-251.

97. R.N.Buttsworth, A family of groups with a countable infinity of full orders, Bull.Austral.Math.Soc.,4,N1(1971),97-104.

98. F.J.Clare, Some reeults on elementary classes of groups, Notices Amer.Math.Soc.,20,N4(1973),A-444-A-445.

99. D.E.Cohen, On the laws of metabelian variety, J.Algebra,5,N3(1967),267-273.

100. P.M.Cohn, Some remarks on the invariant baais property, Topology,5,N3(1966),215-228.

101. - , Free rings and their relations, London-New York,1971.

102. R.S.Dark, A prime Baer group, Math.Z.,105,N4(1968), 294-298.

103. W.Feit,J.G.Thompson, Solvability of groupe of odd order,Pacif.J.Math.,13,N3(1963),775-1029.

104. F.A.Garside, The braid group and other groups,Quart. J.Math.,20,N78(1969),235-254.

105. G.Glauberman, Fixed pointe subgroups that contain centralizers of involutions,Ph.D.Thesis,University of Wiscon - sin,1965.

106. -, Central elements in core-free groups, J.Algebra,4,N3 (1966),403-420.

107. -, Subgroups of finite groups, Bull.Amer.Math. Soc.,73,N1(1967),1-12.

108. D.Gorenstein,J.Walter, On finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups, Illinois J.Math.,6,N4(1962),553-593.

109. F.Gross, On finite groups of exponent $p^m q^n$, J. Algebra,7,N2(1967),238-253.

110. W.Haken, Theorie der Normalflächen, Acta Math.,105, N3-4(1961),245-375.

111. P.Hall, Nilpotent groups, Canadian math.congress, 1957.

112. G.Higman, Subgroups of finitely presented groups, Proc.Royal Soc.,Ser.A,262(1961),455-475.

113. A.Hulanicki,S.Świerczkowski, On group operation other than xy or yx ,Publ.Math.Debrecen,9,N1/2(1962),142-148.

114. S.A.Jennings, The structure of a p-group over a modular field, Trans.Amer.Math.Soc.,50 (1941),175-185.

115. B.Jónsson, Varieties cf groups of nilpotency there, Notioes Amer.Math.Soc.,13,N4(1966),488.

116. A.Klein, Rings nonebeddable in fields with multiplicative semigroups embeddable in groups,J.Algebra,7,N1(1967), 100-125.

117. R.L.Kruse,Identities satisfied by a finite rings, J.Algebra,26,N2(1973),298-318.

118. F.Levin, Solutions of equations over groups, Bull. Amer.Math.Soc.,68,N6(1962),603-604.

119. R.C.Lyndon,J.L.Ullman, Groups generated by two parabolic linear fractional transformations,Canad.J.Math.,21,N6 (1969),1388-1403.

120. A.M.Macbeath, Factorization of matrices and Minkowski's conjecture, Proc.Glasgow Math.Assoc.,5, N 2 (1961),86-89.

121. A.Macintyre, On algebraically closed groups, Ann.Math., 96,N1(1972),53-97.

122. J.Milnor, Problem 5603, Amer.Math.Monthly,75,N6 (1968) 685-686.

123. B.B.Newman, Some results on one-relator groups,Bull. Amer.Math.Soc.,74,N3(1968),568-571.

124. P.F.Pickel, Finitely generated nilpotent groups with isomorphic finite quotients,Trans,Amer.Math.Soc.,160(1971),327-341.

125. L.Prochazka, A generalization of a theorem of R.Baer, Comment.math.Univ.carolinae,4,N3(1963),105-108.

126. E.S.Rapaport, Proof of conjecture of Papakyriakopoulos, Ann.Math.,79,N3(1964),506-513.

127. R.W.Richardson, Conjugacy classes in Lie algebras and algebraic groups, Ann.Math.,86,N1(1967),1-15.

128. N.W.Rickert, Locally compact topologies for groups, Trans.Amer.Math.Soc.,126,N2(1967),225-235.

129. E.Rips, On the fourth integer dimension subgroup, Israel J.Math.,12,N4(1972),342-346.

130. H.Schwerdtfeger,Projective geometry in the one-dimensional affine group, Canad.J.Math.,16,N4(1964),683-700.

131. D.B.Smith, On the number of finitely generated O-groups, Pacif.J.Math.,35,N2(1970),499-502.

132. W.Specht, Gruppentheorie, Springer Verlag,1956.

133. R.G.Swan, Representation of polycyclic groups, Proc. Amer.Math.Soc.,18,N3(1967),573-574.

134. J.G.Thompson, A special class of non-solvable groups, Math.Z.,72,N5(1960),458-462.

135. R.Thompson, see: An infinite family of finitely presented infinite simple groups, Notes taken by B.M.Hurley of four lectures given by Graham Higman, 29 p.p.,preprint.

136. J.Tits, Algebraic and abstract simple groups, Ann. Math.,80,N2(1964),313-329.

137. —, Free subgroups in linear groups.J.Algebra,20, N2(1972),250-270.

138. Topics in abelian groups, Proceedings of the sympo -

sium on abelian groups, Chicago,1963,1-368.

139. M.R.Vaughan-Lee, Uncoutably many varieties of groups, Bull.London.Math.Soc.,2,N6(1970),280-286.

140. -, Varieties of Lie algebras, Quart.J.Math.,21, N83(1970),297-308.

141. J.S.P.Wang, On completely decomposable groups,Proc. Amer.Math.Soc.,15,N2(1964),184-186.

142. B.A.F.Wehrfritz, Groups of automorphisms of soluble groups, Proc.London Math.Soc.,20,N1(1970),101-122.

143. C.R.B.Wright, On the nilpotency class of a group of exponent four, Pacif.J.Math.,11,N1(1961),387-394.