Ю. Н. Бибиков

КУРС ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Допущено
Государственным комитетом СССР по народному образованию в качестве учебного пособия для студентов университетов, обучающихся по специальности «Математика»

Москва «Высшая школа» 1991

ББК 22.161.6
Б59
УДК 517.2

Рецензенты: кафедра дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова (зав. кафедрой проф. О. А. Олейник) и кафедра функционального анализа Белорусского государственного университета (зав. кафедрой проф. Я. В. Радыно)

Бибиков Ю. Н.
Б59 Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособие для ун-тов. — М.: Высш. шк., 1991. — 303 с.: ил.
ISBN 5-06-001006-6

В пособии содержатся все традиционные разделы курса обыкновенных дифференциальных уравнений. Излагаются важные как в теоретическом, так и в прикладном отношении разделы по теории дифференциальных уравнений с аналитическими правыми частями и по теории устойчивости движения.

Б $\frac{1602070100-202}{001(01)-91}$ 74—91 ББК 22.161.6
517.4

ISBN 5-06-001006-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие написано на основе курсов лекций, которые автор читает на математико-механическом факультете Ленинградского университета. Его содержание — изложение с полными доказательствами положений теории обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся теоретической основой для ее приложений в естествознании. С исследованием обыкновенных дифференциальных уравнений связано решение многих проблем механики, физики, биологии. Большое количество примеров такого рода можно найти, например, в книгах: *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М., 1959; *Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. М., 1978; *Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. М., 1987.

Первая глава, посвященная дифференциальным уравнениям первого порядка, в значительной степени играет роль введения в курс, последовательно излагаемый в остальных семи главах. Большое внимание в книге уделено таким традиционно включаемым в учебники по обыкновенным дифференциальным уравнениям вопросам, как существование, единственность и продолжаемость решений, зависимость их от начальных данных и параметров системы. В теории линейных уравнений и систем в дополнение к обычному материалу рассматриваются линейные системы с периодическими коэффициентами, функция Грина краевой задачи, в том числе функция Грина периодического и ограниченного решения. Подробно изложена теория общего решения и общего интеграла. Отдельные главы посвящены системам с аналитическими правыми частями, так как интегрирование рядами является одним из основных методов исследования дифференциальных уравнений в приложениях. В основу указанного материала положено вышедшее ранее учебное пособие автора «Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений» (Изд-во Ленинградского университета, 1981).

По мнению автора, учебник по дифференциальным уравнениям обязательно должен содержать материал, близкий к каким-либо направлениям современных исследований и к приложениям. Поэтому помимо изложения положений общей теории дифференциальных уравнений большое внимание в книге уделено теории нелинейных колебаний и устойчивости движения, играющих фундаментальную роль в теоретической механике. Рассматриваются вопросы существования и устойчивости колебаний квазилинейных, гамильтоновых и других систем. Особое внимание при этом уделено построению бифуркационных уравнений. Изучены устойчивость решений по первому приближению и простейшие критические случаи теории устойчивости движения. Даны основы первого и второго методов Ляпунова исследования дифференциальных уравнений, метода малого параметра и метода нормальных форм. Изложенная теория применяется к исследованию дифференциальных уравнений, описывающих колебания консервативной и диссипативной систем с одной степенью свободы, осциллятора ван-дер-Поля, биологической системы «хищник — жертва», изучено явление параметрического резонанса, исследуются колебания гамильтоновых и обратимых систем.

Пособие рассчитано на использование «Сборника задач по дифференциальным уравнениям» А. Ф. Филиппова. Для иллюстрации положений теории использовались примеры, взятые из этого задачника.

В обозначениях формул, лемм, теорем и т. д. применяется тройная нумерация. Так, формула (1.2.3) обозначает формулу с номером 3 в § 2 главы I.

При работе над книгой большую помощь автору оказали сотрудники кафедры дифференциальных уравнений ЛГУ Л. Я. Адрианова, А. Ф. Андреев, А. В. Осипов, С. Ю. Пилюгин, В. Е. Чернышев, Ю. В. Чурин, а также С. П. Токарев. Всем им автор выражает искреннюю благодарность.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел

$\mathbf{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел

$\mathbf{Z}$ — множество целых чисел

$\mathbf{R}$ — вещественная прямая, $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$ (n раз)

$\mathbf{C}$ — комплексная плоскость, $\mathbf{C}^n = \mathbf{C} \times \ldots \times \mathbf{C}$ (n раз)

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{colon}(x_1, \ldots, x_n)$ — элементы пространства $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$, рассматриваемые как векторы-столбцы

$\mathfrak{R}^{n,m}$ ($\mathfrak{M}^{n,m}$) — множество матриц с вещественными (комплексными) элементами, состоящих из n строк и m столбцов

$f: X \to Y$ — отображение (функция) f множества X в множество Y

$f \in C(X)$ ($f \in C^k(X)$) — непрерывная (k раз непрерывно дифференцируемая) на множестве X функция

$\exists$, $\forall$ — существует, для всякого

$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ — следует, эквивалентно

$\underset{k\to\infty}{\rightrightarrows}$ — равномерно сходится при $k \to \infty$

$r(A)$ — ранг матрицы A

$\det A$ — определитель матрицы A

$\mathrm{sp}\, A$ — след матрицы A

A^* — матрица, сопряженная с A

E_n — единичная $n \times n$-матрица

O_{nm} — нулевая матрица из n строк и m столбцов

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, производные по другим переменным обозначаются штрихом

(см. также § 3 гл. IV и § 1 гл. VIII)

Глава I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Общие положения

1. Задача Коши. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, заданная в некоторой области G плоскости Oxy (областью мы называем связное открытое множество). Уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y(x)) \tag{1.1.1}$$

называется дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной *.

Рассмотрим связное множество на вещественной оси, т. е. промежуток вида $\langle a, b\rangle$, где знак $\langle$ (или $\rangle$) может обозначать как включение [(или]), так и исключение ((или)) конца промежутка. При этом в последнем случае a и b могут быть несобственными числами, т. е. $a=-\infty$, $b=+\infty$.

Определение 1.1.1. *Функция* $y=\varphi(x)$, *определенная на промежутке* $\langle a, b\rangle$, *называется решением дифференциального уравнения* (1.1.1), *если выполняются следующие условия:*

1) $\varphi(x)$ *дифференцируема во всех точках* $\langle a, b\rangle$ *(если* $\langle a, b\rangle$ *содержит левый или правый конец, то существует соответственно левосторонняя или правосторонняя производная)*;

2) $(x,\varphi(x))\in G$ при всех $x\in\langle a,b\rangle$;

3) $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$ при всех $x\in\langle a,b\rangle$. (1.1.2)

Замечание 1. Из определения решения и непрерывности $f(x, y)$ следует в силу (1.1.2), что $\varphi'(x)$ непрерывна на $\langle a, b\rangle$.

Замечание 2. Существенно, что областью определения решения является связное множество.

Например, при каждом вещественном C функция $\varphi(x)=(C-x)^{-1}$, определенная при всех $x\neq C$, не является решением диф-

---

* Предположение непрерывности $f(x, y)$ будем считать выполненным и в дальнейшем специально не оговаривать.

ференциального уравнения

$$y' = y^2 \qquad (1.1.3)$$

(здесь область G — вся плоскость Oxy), хотя и выполняются условия 1)—3) определения 1.1.1, так как она задана на несвязном множестве. Вместе с тем сужения функции $\varphi(x)$ на интервалы $(-\infty, C)$ и $(C, +\infty)$ являются решениями уравнения (1.1.3) (рис. 1).

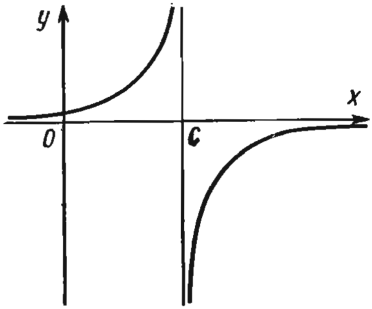

Рис. 1

Из рассмотренного примера видно, что дифференциальное уравнение (1.1.1) может иметь бесконечное множество решений. Далее мы увидим, что эта ситуация является общей. Поэтому, когда представляет интерес конкретное решение дифференциального уравнения, ставят дополнительные условия, выделяющие его из множества всех решений этого уравнения. Для уравнения (1.1.1) таким условием является начальное условие

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad (x_0\, y_0) \in G. \qquad (1.1.4)$$

Числа x_0, y_0 называются начальными данными, а задача отыскания решения, удовлетворяющего начальному условию (1.1.4), — *задачей Коши* или начальной задачей.

Наряду с задачей Коши с начальными данными (x_0, y_0) для дифференциального уравнения (1.1.1) рассмотрим (интегральное) уравнение

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds. \qquad (1.1.5)$$

Определение 1.1.2. *Функция $y = \varphi(x)$, определенная на промежутке $\langle a, b\rangle$, называется решением уравнения (1.1.5), если выполняются следующие условия:*

1) $\varphi(x)$ непрерывна на $\langle a, b\rangle$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$;

2) $(x, \varphi(x)) \in G$ при всех $x \in \langle a, b\rangle$;

3) при всех $x \in \langle a, b\rangle$

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds. \qquad (1.1.6)$$

Теорема 1.1.1. *Функция $y = \varphi(x)$ является решением задачи Коши для уравнения* (1.1.1) *с начальными условиями* (x_0, y_0) *тогда и только тогда, когда она является решением интегрального уравнения* (1.1.5).

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — решение задачи Коши для уравнения (1.1.1) с начальными данными (x_0, y_0). Тогда при $x \in \langle a, b\rangle$ выполняется (1.1.2), причем $x_0 \in \langle a, b\rangle$ и $\varphi(x_0) = y_0$. Свойства 1), 2) определения 1.1.2 вытекают из свойств 1), 2) определения 1.1.1. Интегрируя (1.1.2) в пределах от x_0 до $x \in \langle a, b\rangle$, получаем (1.1.6). Следовательно, $\varphi(x)$ — решение уравнения (1.1.5).

Пусть теперь $\varphi(x)$ — решение уравнения (1.1.5) на промежутке $\langle a, b\rangle$. В силу (1.1.6) $\varphi(x)$ дифференцируема на $\langle a, b\rangle$ и $\varphi(x_0) = y_0$. Это показывает, что для функции $\varphi(x)$ выполнены начальное условие (1.1.4) и условие 1) определения 1.1.1. Условие 2) определения 1.1.1 совпадает с условием 2) определения 1.1.2. Наконец, дифференцируя (1.1.6), получаем (1.1.2). Следовательно, $\varphi(x)$ — решение уравнения (1.1.1) с начальными данными (x_0, y_0). Теорема доказана.

Определение 1.1.3. *Будем говорить, что решение задачи Коши с начальными данными существует, если существуют интервал $(a, b) \ni x_0$ и решение $\varphi(x)$ уравнения* (1.1.1), *определенное на (a, b) и такое, что $\varphi(x_0) = y_0$.*

Теорема 1.1.2. *Решение задачи Коши для уравнения* (1.1.1) *с начальными данными $(x_0, y_0) \in G$ существует.*

Теорема 1.1.2 будет доказана в § 2 гл. I.

Кривая, являющаяся графиком некоторого решения дифференциального уравнения, называется *интегральной кривой*. Сопоставим каждой точке $(x_0, y_0) \in G$ прямую с угловым коэффициентом $k = f(x_0, y_0)$ проходящую через эту точку. Получившуюся картину назовем *полем направлений*, соответствующим дифференциальному уравнению (1.1.1), а каждую из прямых — направлением поля в соответствующей точке. Из определения (1.1.1) следует, что кривая, лежащая в области G, является интегральной кривой тогда и только тогда, когда она гладкая и касательная в каждой ее точке совпадает с направлением поля в данной точке. Это соображение может быть использовано для приближенного построения интегральных кривых.

При построении поля направлений данного уравнения целесообразно использовать *изоклины*. Так называются множества точек, в каждой точке которых направления поля имеют одинаковый угловой коэффициент. Очевидно, что изоклины задаются уравнением $f(x, y) = k$.

Пример 1.1.1. Построим поле направлений для дифференциального уравнения $y' = 2\dfrac{y}{x}\cdot$ В качестве области G можно взять любую из полуплоскостей $x > 0$ или $x < 0$. Изоклины, соответствующие направлениям поля с угловым коэффициентом, равным k, суть лучи $y = \dfrac{1}{2}kx\,(x \neq 0)$. Поле направлений в полуплоскости

$x>0$ изображено на рис. 2. Интегральные кривые имеют вид полупарабол. Легко проверить, что они действительно задаются уравнениями $y=Cx^2$ ($x>0$ или $x<0$), C — произвольная постоянная.

2. Продолжение решений.

Определение 1.1.4. *Будем говорить, что решение $y=\varphi(x)$, определенное на $\langle a, b\rangle$, продолжимо (может быть продолжено) вправо, если существует решение $y=\varphi_1(x)$, определенное на $\langle a, b_1\rangle$, $b_1>b$, сужение которого на $\langle a, b\rangle$ совпадает с $\varphi(x)$. Решение $y=\varphi_1(x)$ называется продолжением решения $y=\varphi(x)$ вправо.*

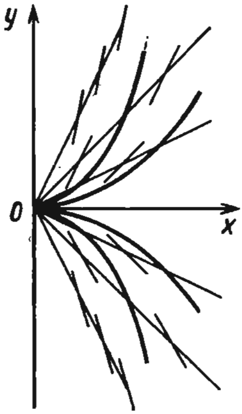

Рис. 2

Аналогично определяется продолжимость влево.

Рассмотрим решение $y=\varphi(x)$, определенное на замкнутом справа промежутке $\langle a, b]$. Покажем, что оно продолжимо вправо.

Для этого рассмотрим решение $y=\psi(x)$ с начальными данными $(b, \varphi(b))$. Так как по определению решения $(b, \varphi(b))\in G$, то решение $y=\psi(x)$ существует в силу теоремы 1.1.2. Пусть $\psi(x)$ определена на $[b, b+\Delta\rangle$. Положим по определению

$$\varphi_1(x)=\begin{cases} \varphi(x) \text{ при } x\in\langle a, b], \\ \psi(x) \text{ при } x\in[b, b+\Delta\rangle. \end{cases}$$

Легко проверить, что $y=\varphi_1(x)$ является решением уравнения (1.1.1) на промежутке $\langle a, b+\Delta\rangle$, а это и означает, что решение $y=\varphi(x)$ продолжимо вправо.

Аналогично доказывается, что решение, определенное на промежутке, замкнутом слева, продолжимо влево.

Определение 1.1.5. *Решение $y=\varphi(x)$ называется полным, если оно не может быть продолжено ни вправо, ни влево.*

Из сказанного выше следует, что областью определения полного решения всегда является интервал (α, β), называемый *максимальным интервалом существования* решения.

Пример 1.1.2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'=f(x), \tag{1.1.7}$$

где $f(x)$ определена (и по принятому соглашению непрерывна) в интервале (a, b). Пусть $G=\{(x, y): a<x<b, |y|<\infty\}$. Полными решениями уравнения (1.1.7) являются первообразные функции $f(x)$ и только они. Каждое полное решение уравнения (1.1.7) определено на интервале (a, b).

Пример 1.1.3. Рассмотрим уравнение

$$y'=g(y), \tag{1.1.8}$$

где $g(y)$ определена при $c<y<d$. Здесь $G=\{x, y: |x|<\infty, c<<y<d\}$. Предположим, что $g(y)\neq 0$ при $y\in(c, d)$, и пусть для определенности $g(y)>0$. Введем в (1.1.8) новую переменную Y, связанную с y формулой $Y=G(y)$, где $G(y)$ — некоторая первообразная функции $\frac{1}{g(y)}$. Пусть $Y(x)=G(y(x))$, где $y(x)$ — решение (1.1.8). Так как $g(y)\neq 0$, то $G(y)$ — непрерывно дифференцируемая функция и

$$Y'(x)=\frac{1}{g(y(x))}\,g(y(x))=1.$$

Следовательно, в переменных x, Y уравнение (1.1.8) имеет вид

$$\frac{dY}{dx}=1. \tag{1.1.9}$$

Уравнение (1.1.9) определено в области $D=\{x, Y): |x|<\infty, G(c)<Y<G(d)\}$ (заметим, что $G(y)$ — строго возрастающая функция). Решения (1.1.9) имеют вид $Y=x+C$, где C — произвольная постоянная, или

$$y=G^{-1}(x+C), \tag{1.1.10}$$

где G^{-1} — обратная по отношению к G функция. Функции (1.1.10) определены для тех значений x, при которых $x+C\in(G(c), G(d))$. Следовательно, они определены при всех x тогда и только тогда, когда расходятся интегралы

$$\int\limits_c^\alpha \frac{dy}{g(y)}, \quad \int\limits_\beta^d \frac{dy}{g(y)}, \tag{1.1.11}$$

где $\alpha\in(c, d)$, $\beta\in(c, d)$. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1.1.3. *Пусть в* (1.1.8) $g(y)\neq 0$. *Тогда*:

1) *множество всех решений уравнения* (1.1.8) *задается формулой* (1.1.10);

2) *если оба интеграла* (1.1.11) *расходятся, то все решения уравнения* (1.1.8) *продолжимы на интервал* $(-\infty, \infty)$;

3) *если хотя бы один из интегралов* (1.1.11) *сходится, то никакое решение* (1.1.8) *не продолжимо на интервал* $(-\infty, \infty)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $g(y)$ обращается в нуль на интервале (c, d). Прежде всего отметим, что если $g(\bar{y})=0$, то $y=\bar{y}$ — решение уравнения (1.1.8), определенное при всех x. Рассмотрим область

$$\bar{G}=\{x, y): -\infty<x<\infty, \ \bar{y}<y<\bar{\bar{y}}\},$$

где $g(\bar{y})=g(\bar{\bar{y}})=0$, $g(y)\neq 0$ при $y\in(\bar{y}, \bar{\bar{y}})$. Отсюда можно сделать вывод, что все решения сужения уравнения (1.1.8) на область $\bar{G}$

продолжимы на все значения x, если расходятся интегралы

$$\int\limits_{\bar{y}}^{\bar{y}+\Delta 1} \frac{1}{g(y)} dy \text{ и } \int\limits_{\bar{\bar{y}}}^{\bar{\bar{y}}} \frac{1}{g(y)}\, dy \tag{1.1.12}$$

при достаточно малом $\Delta > 0$. Тем самым и решения (1.1.8) с начальными данными из области $\bar{G}$ продолжимы на все значения x. Покажем, что они обладают этим свойством и в том случае, когда интегралы (1.1.12) (один или оба) сходятся.

Пусть, например, сходится интеграл $\int\limits_{\bar{\bar{y}}-\Delta}^{\bar{\bar{y}}} \frac{1}{g(y)} dy$. Для определенности считаем $g(y) > 0$ при $y \in (\bar{y}, \bar{\bar{y}})$. Возьмем

$$G(y) = \int\limits_{\bar{\bar{y}}-\Delta}^{\bar{\bar{y}}} \frac{1}{g(\eta)} d\eta.$$

В силу (1.1.10) решение уравнения (1.1.8) в области $\bar{G}$ с начальными данными $(x_0, y_0) \in \bar{G}$ имеет вид

$$y = G^{-1}(x + C_0), \quad C_0 = G(y_0) - x_0.$$

Это решение заведомо определено, если

$$x + C_0 \in (G(\bar{y}), G(\bar{\bar{y}})),$$

а так как $G(\bar{\bar{y}})$ — конечная величина, то оно определено при $x \in \in (G(\bar{y}) - C_0,\ G(\bar{\bar{y}}) - C_0]$, причем при $x = G(\bar{\bar{y}}) - C_0 = x_0 + G(\bar{\bar{y}}) - G(y_0)$ (рис. 3).

$$y = G^{-1}(G(\bar{\bar{y}})) = \bar{\bar{y}}$$

Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} G^{-1}(x + C_0) \text{ при } x \in [x_0, G(\bar{\bar{y}}) - C_0], \\ \bar{\bar{y}} \text{ при } x \in [G(\bar{\bar{y}}) - C_0, \infty). \end{cases}$$

Тогда $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (1.1.8) при $x \in [x_0, \infty]$. Следовательно, мы построили продолжение вправо на все значения $x \geqslant x_0$ решения с начальными данными $(x_0, y_0) \in \bar{G}$. Аналогично доказывается продолжимость влево. Таким образом, доказана продолжимость на все значения x любого решения с начальными данными из области $\bar{G}$.

В качестве примера рассмотрим уравнение (1.1.3). Интегралы $\int\limits_{-\infty}^{A} \frac{dy}{y^2}$ и $\int\limits_{A}^{\infty} \frac{dy}{y^2}$ $(A > 0)$ сходятся. Рассмотрим уравнение (1.1.3) на полуплоскостях $y>0$ и $y<0$. По теореме 1.1.3 никакое решение уравнения (1.1.3) не продолжимо на все значения x, кроме нулевого (см. рис. 1).

3. Единственность решения задачи Коши.

Определение 1.1.6. *Будем говорить, что область $A \subset G$ есть область единственности для уравнения* (1.1.1), *если два любых решения уравнения* (1.1.1), *графики которых принадлежат A, определенные на промежутке $\langle a, b\rangle$ и совпадающие при некотором $x_0 \in \langle a, b\rangle$, совпадают на всем $\langle a, b\rangle$.*

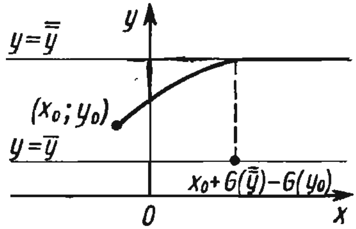

Рис. 3

Пример 1.1.4. Рассмотрим уравнение

$$y'=3y^{2/3}, \qquad (1.1.13)$$

где G — вся плоскость Oxy. Из (1.1.10) следует, что при каждом C функция $y=(x+C)^3$ является решением этого уравнения на интервале $(-\infty, \infty)$. Кроме указанного семейства решений уравнение (1.1.13) имеет решение $y=0$. Следовательно, ось $y=0$ состоит из точек, через которые проходит более одной интегральной кривой (рис. 4), т. е. G не является областью единственности. Однако полуплоскости $y>0$ и $y<0$ — области единственности (см. теорему 1.1.5).

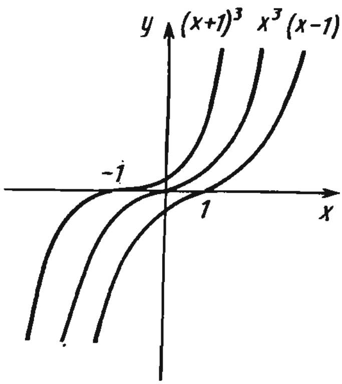

Рис. 4

Теорема 1.1.4. Если в области *G производная $\dfrac{df}{dy}$ существует и непрерывна, то G — область единственности.*

Теорема 1.1.4 (она будет доказана в § 3 гл. I) показывает, что при «хороших» правых частях в уравнениях (1.1.1) имеет место единственность решения задачи Коши. Единственность может иметь место и в случае, когда $f(x, y)$ обладает только свойством непрерывности.

Пример 1.1.5. Рассмотрим уравнение

$$y'=f(x)g(y), \qquad (1.1.14)$$

где $f(x)$ определена при $x \in (a, b)$, $g(y)$ определена при $y \in (c, d)$. Уравнение (1.1.14) называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Теорема 1.1.5. *Если $g(y)\neq 0$ при $y\in(c, d)$, то область*

$$G=\{x, y): a<x<b,\ c<y<d\}$$

есть область единственности для уравнения (1.1.14).

Доказательство. Выполним замену $Y=G(y)$, где $G(y)$ — некоторая первообразная функции $\frac{1}{g(y)}$. Рассуждая, как при выводе (1.1.9), получим

$$\frac{dY}{dx}=f(x). \qquad (1.1.15)$$

Уравнение (1.1.15) определено в области (считаем $g(y)>0$)

$$D=\{x, Y): a<x<b,\quad G(c)<Y<G(d)\}.$$

Его решения имеют вид

$$Y=F(x)+C, \qquad (1.1.16)$$

где $F(x)$ — первообразная $f(x)$; C — произвольная постоянная. Для уравнения (1.1.15) область D является областью единственности, т. е. если две интегральные кривые имеют общую точку, то они совпадают. А так как отображение, переводящее решение уравнения (1.1.14) в решения уравнения (1.1.15), имеет вид $x=x$, $Y=G(y)$, то оно взаимно однозначно, и, следовательно, указанное свойство сохраняется и для интегральных кривых уравнения (1.1.14) в области G. Это доказывает теорему 1.1.15.

Из уравнения (1.1.3) видно, что условие $g(y)\neq 0$ в теореме 1.1.5 не является необходимым для того, чтобы G была областью единственности. Вместе с тем уравнение (1.1.13) показывает, что нарушение этого условия может привести к потере единственности (см. рис. 1, 4).

4. Общее решение. Пусть G — область единственности для уравнения (1.1.1). Решение уравнения (1.1.1) с начальными данными (x_0, y_0) есть функция $y(x, x_0, y_0)$, определенная на множестве

$$D=\{(x, x_0, y_0): (x_0, y_0)\in G,\ x\in I(x_0, y_0)\},$$

где $I(x_0, y_0)$ — промежуток существования этого решения. Формула

$$y=y(x, x_0, y_0) \qquad (1.1.17)$$

задает все решения уравнения (1.1.1) с точностью до продолжения.

Определение 1.1.7. *Непрерывная функция $y=\varphi(x, C)$ называется общим решением уравнения* (1.1.1) *в области $A\subset G$, если для любой точки $(x_0, y_0)\in A$ уравнение $y_0=\varphi(x_0, C)$ имеет единственное решение $C_0=U(x_0, y_0)$ и функция $y=\varphi(x, C_0)$ явля-*

ется решением задачи Коши для уравнения (1.1.1) *с начальными данными* (x_0, y_0).

Из данного определения следует, что $U(x, y)$ — непрерывная функция. Чтобы в этом убедиться, перейдем в тождестве $y=\varphi(x, U(x, y))$ к пределу при $x_k \to x_0$, $y_k \to y_0$. Пусть $C_0=\lim U(x_k, y_k)$. Так как функция φ непрерывна, $y_0=\varphi(x_0, C_0)$, а это уравнение имеет единственное решение, то $C_0=U(x_0, y_0)$, что и требовалось доказать.

Обозначим множество точек (x, C), где $C=U(x, y)$, $(x, y)\in \in A$, через H. Отображение $T:(x, C)\to(x, \varphi(x, C))$ есть взаимно однозначное и взаимно-непрерывное отображение (гомеоморфизм) H на A. Из определения T следует, что T сопоставляет каждой интегральной кривой $y=\varphi(x, C_0)$, лежащей в области A, отрезок прямой $C=C_0$ в области H. Можно сказать, что гомеоморфизм T «выпрямляет» интегральные кривые.

Теорема 1.1.6 (о существовании общего решения). *Если G есть область единственности, то для каждой точки $(x_0, y_0)\in G$ можно указать окрестность, в которой существует общее решение уравнения* (1.1.1).

Доказательство этой теоремы приведено в § 4 гл. I.

Теорему 1.1.6 иногда называют теоремой о выпрямлении решений, так как она доказывает существование «выпрямляющего» гомеоморфизма T в окрестности каждой точки области единственности. Теорема 1.1.6 показывает, что множество решений дифференциального уравнения (1.1.1) в области единственности локально задается с помощью одного параметра (а не двух, как в формуле (1.1.17)).

Например, для уравнения (1.1.3) функция $y=(C-x)^{-1}$ является общим решением в областях $y>0$ и $y<0$, а функция $y= =C(1-Cx)^{-1}$ — общим решением в области $xy>-1$ и в областях, задаваемых неравенством $xy<-1$. Для уравнения (1.1.13) функция $y=(x-C)^3$ есть общее решение в областях $y>0$ и $y<0$, но не на всей плоскости Oxy, так как она не является областью единственности.

Из определения 1.1.7 следует, что общее решение в некоторой области задает любое решение уравнения (1.1.1), график которого принадлежит этой области. Поэтому выделение дифференциальных уравнений, для которых общее решение может быть записано в явном виде, является первой задачей теории дифференциальных уравнений.

Продолжение примера 1.1.5. Рассмотрим уравнение с разделяющимися переменными (1.1.14).

Теорема 1.1.7. *В условиях теоремы* 1.1.5 *общее решение уравнения* (1.1.14) *в области G существует и имеет вид*

$$y=G^{-1}(F(x)+C), \tag{1.1.18}$$

где C — произвольная постоянная; F, G — соответственно первообразные функций $f, \frac{1}{g}$.

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) \in G$. Рассмотрим уравнение

$$y_0 = G^{-1}(F(x_0) + C).$$

Оно имеет единственное решение $C_0 = G(y_0) - F(x_0)$. Функция $y = G^{-1}(F(x) + C_0))$ является решением задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0) в силу (1.1.16). Теорема вытекает из определения 1.1.7.

Пример 1.1.6. Уравнение

$$y' = p(x) y, \tag{1.1.19}$$

где $p(x)$ определена при $a < x < b$, называется линейным однородным дифференциальным уравнением (первого порядка). Согласно теореме 1.1.7, в области $G_1 = \{(x, y): a < x < b,\ y > 0\}$ общее решение уравнения (1.1.19) имеет вид

$$y = \exp\{P(x) + C\},$$

а в области $G_2 = \{(x, y): a < x < b,\ y < 0\}$ — следующий вид:

$$y = -\exp\{P(x) + C\}.$$

В этих формулах $P(x)$ — некоторая первообразная функция $p(x)$, C — произвольная постоянная. Кроме того, $y = 0$ $(a < x < b)$ также является решением уравнения (1.1.19), причем

$$G = \{(x, y): a < x < b,\ -\infty < y < \infty\}$$

является областью единственности в силу теоремы 1.1.4 (в этом можно убедиться и непосредственно). Объединяя полученные формулы в одну, получаем следующее выражение для общего решения уравнения (1.1.19) в области G:

$$y = C \exp\{P(x)\}. \tag{1.1.20}$$

Формула (1.1.20) может быть использована для построения общего решения уравнения

$$y' = p(x) y + q(x), \tag{1.1.21}$$

которое называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением (первого порядка). Мы предполагаем, что уравнение (1.1.21) определено в области G. Будем искать решение (1.1.21) в виде

$$y = C(x) \exp\{P(x)\}, \tag{1.1.22}$$

где $C(x)$ — непрерывно дифференцируемая в (a, b) функция, подлежащая определению. Подставляя (1.1.22) в (1.1.21), получаем следующее выражение для $C'(x)$:

$$C'(x) = q(x) \exp\{-P(x)\},$$

откуда

$$C(x)=\int_{x_0}^{x}\exp\{-P(s)\}q(s)\,ds+C,$$

где C — произвольная постоянная. Отсюда вытекает формула для общего решения уравнения (1.1.21):

$$y=\exp\{P(x)\}\left(C+\int_{x_0}^{x}\exp\{-P(s)\}q(s)\,ds\right). \qquad (1.1.23)$$

Тот факт, что равенство (1.1.23) удовлетворяет определению 1.1.7, проверяется непосредственно.

В рассмотренных примерах общее решение уравнения вычисляется с помощью конечного числа элементарных операций над функциями, входящими в уравнения, а также с помощью интегрирования этих функций и построения суперпозиций в конечном числе. В таких случаях говорят, что дифференциальное уравнение *интегрируется в квадратурах.*

Стандартным приемом интегрирования дифференциальных уравнений в квадратурах является приведение их к одному из исследованных ранее видов.

Пример 1.1.7. Уравнение

$$y'=p(x)y+q(x)y^{\alpha}\ (y>0) \qquad (1.1.24)$$

называется *уравнением Бернулли.* Полагая $u(x)=y^{1-\alpha}$ $(\alpha\neq 1)$, получаем линейное неоднородное уравнение

$$u'=(1-\alpha)p(x)u+(1-\alpha)q(x).$$

Пример 1.1.8. Уравнение (1.1.1), у которого правая часть $f(x, y)$ не меняется при замене x, y соответственно на tx, ty $(t\in\mathbf{R})$, называется однородным. Выполняя подстановку

$$y=xu(x), \qquad (1.1.25)$$

получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$u'=\frac{f(1,u)-u}{x}. \qquad (1.1.26)$$

Рассмотрим уравнение

$$y'=\frac{2xy}{x^2-\alpha^2y^2},\quad \alpha\neq 0. \qquad (1.1.27)$$

Формула (1.1.27) определяет четыре дифференциальных уравнения, заданные в каждом из секторов, на которые прямые $x=\pm\alpha y$ разбивают плоскость Oxy. Уравнение (1.1.27) — однородное. Выполняя подстановку (1.1.25), находим

$$u'=\frac{u(1+\alpha^2u^2)}{x(1-\alpha^2u^2)}\quad\left(x\neq 0,\ u\neq\pm\frac{1}{\alpha}\right).$$

Используя формулу (1.1.18), где

$$F(x)=\ln|x|,\ G(u)=\ln|u|-\ln(1+\alpha^2u^2),$$

получаем

$$\frac{|u|}{1+\alpha^2u^2}=|C|\cdot|x|,\ C\neq 0,$$

или

$$\frac{y}{x^2+\alpha^2y^2}=C.$$

Так как $y=0$ удовлетворяет (1.1.27), то возможность $C=0$ не исключается. Таким образом, общее решение уравнения (1.1.27) имеет вид

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1-4\alpha^2C^2x^2}}{2C\alpha^2},$$

причем знак «+» соответствует секторам, где $x^2-\alpha^2y^2<0$, знак «—» — секторам, где $x^2-a^2y^2>0$; $C>0$ при $y>0$, $C<0$ при $y<0$ (при $C=0$ $y=0$).

§ 2. Теорема существования

1. ε-решения.

Определение 1.2.1. *Пусть* $\varepsilon>0$. *Функция* $\psi(x)$ *класса* C^1 *на отрезке* $[a,b]$ *называется ε-решением дифференциального уравнения* (1.1.1), *если выполняются следующие условия*:

1) $(x,\psi(x))\in G$ *при всех* $x\in[a,b]$;

2) *при всех* $x\in[a,b]$

$$|\psi'(x)-f(x,\psi(x))|\leqslant\varepsilon.$$

Непрерывную на $[a,b]$ функцию будем называть *ε-решением* уравнения (1.1.1), если отрезок $[a,b]$ есть объединение конечного числа смежных отрезков, причем сужение $\psi(x)$ на каждый из этих отрезков — функция класса C^1, являющаяся ε-решением уравнения (1.1.1).

Определение 1.2.1 не означает, что при малом $\varepsilon>0$ ε-решение мало отличается от некоторого истинного решения, однако имеет место следующее утверждение.

Лемма 1.2.1. *Пусть последовательность* $\{\varepsilon_k\}_1^\infty$ *такова, что* $\varepsilon_k\to 0$ *при* $k\to\infty$, $\psi_k(x)$ *суть* ε_k*-решения на некотором отрезке* $[a,b]$, *причем* $\psi_k(x_0)=y_0$, *и при* $x\in[a,b]$ $(x,\psi_k(x))\in R$, *где* $R\subset G$ — *компактное множество.*

Если последовательность функций $\psi_k(x)$ *равномерно сходится на* $[a,b]$:

$$\psi_k(x)\underset{k\to\infty}{\rightrightarrows}\varphi(x),$$

то $\varphi(x)$ *есть решение уравнения* (1.1.1) *с начальными данными* (x_0,y_0).

Доказательство. Положим

$$\Delta_k(x)=\psi_k'(x)-f(x,\psi_k(x)). \tag{1.2.1}$$

Так как $\psi_k(x)$ есть ε_k-решение на $[a, b]$, то функция $\Delta_k(x)$ определена на $[a, b]$ и непрерывна на этом отрезке, за исключением, быть может, конечного числа точек, причем $|\Delta_k(x)|\leqslant\varepsilon_k$. Интегрируя (1.2.1) в пределах от x_0 до $x\in[a, b]$, получаем

$$\psi_k(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}[f(s,\psi_k(s))+\Delta_k(s)]\,ds. \tag{1.2.2}$$

Так как $\psi_k(x)\rightrightarrows\varphi(x)$, то $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Так как $(x, \psi_k(x))\in R$ при $x\in[a, b]$ и R — компакт, то и $(x, \varphi(x))\in R$ при $x\in[a, b]$. Пусть $\varepsilon>0$. Функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна на R, поэтому можно указать $\delta>0$ такое, что неравенство $|y_k-y|<\delta$ влечет $|f(x, y_k)-f(x, y)|<\varepsilon$, если $(x, y_k)\in R$, $(x, y)\in R$. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $K>0$, что при $k>K$

$$|f(x,\psi_k(x))-f(x,\varphi(x))|<\varepsilon,\quad |\Delta_k(x)|<\varepsilon$$

на промежутке $[a, b]$. При таких k

$$\left|\int_{x_0}^{x}f(s,\varphi(s))\,ds-\int_{x_0}^{x}[f(s,\psi_k(s))+\Delta_k(s)]\,ds\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(s,\varphi(s))-\right.$$

$$\left.-f(s,\psi_k(s))|\,ds\right|+\left|\int_{x_0}^{x}|\Delta_k(s)|\,ds\right|<2\varepsilon(b-a).$$

Поэтому в (1.2.2) можно перейти к пределу под знаком интеграла. В результате получим

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\varphi(s))\,ds.$$

Все условия определения 1.1.2 выполнены. По теореме 1.1.1 $\varphi(x)$ — решение уравнения (1.1.1) с начальными данными (x_0, y_0). Лемма доказана.

2. Ломаные Эйлера. Воспользуемся леммой 1.2.1 для построения решения задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0). Требуемые ε_k-решения можно получить с помощью ломаных Эйлера, которые определяются следующим образом. Пусть $(x_0, y_0)\in G$. Строим отрезок поля направлений в этой точке с концами в области G. Через правый конец (x_1, y_1) снова проводим отрезок поля направлений в этой точке, который рассматриваем при $x>x_1$. Если правый конец его $(x_2, y_2)\in G$, то продолжаем построение. Аналогичное построение осуществляем влево от точки x_0. В результате получаем ломаную, называемую *ломаной Эйлера.* Рангом дробления ломаной Эйлера будем называть наибольшую из разностей $|x_{k+1}-x_k|$, где x_k — абсциссы вершины ломаной.

Лемма 1.2.2. *Пусть $R\subset G$ — компактное множество. Для любого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta>0$ такое, что функция, определенная на отрезке $[a, b]$, графиком которой является ломаная Эйлера, проходящая через точку (x_0, y_0) и принадлежащая R, ранг дробления которой меньше δ, является ε-решением уравнения* (1.1.1) *на отрезке* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $y=\psi(x)$, $x\in[a, b]$ — уравнение ломаной Эйлера. Функция $\psi(x)$ есть непрерывная кусочно-линейная функция. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Из равномерной непрерывности $f(x, y)$ на R следует существование $\delta^*>0$ такого, что условие

$$(x', y')\in R,\ (x'', y'')\in R,\ |x'-x''|\leqslant\delta^*,\ |y'-y''|\leqslant\delta^*$$

влечет выполнение неравенства

$$|f(x', y')-f(x'', y'')|\leqslant\varepsilon.$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением отрезка $[x_0, b]$ (для $[a, x_0]$ рассуждения аналогичны). Пусть

$$M=\sup_R|f(x, y|.$$

Разобьем отрезок $[x_0, b]$ на отрезки $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0, 1, \ldots, l)$ длиной не более $\delta=\min\{\delta^*, \delta^*/M\}$ и построим на нем ломаную Эйлера $y=\psi(x)$ с вершинами в точках с абсциссами x_k $(k=0, 1, \ldots, l)$. Покажем, что $y=\psi(x)$ есть ε-решение.

Действительно, при $x\in(x_k, x_{k+1})$ по определению ломаных Эйлера

$$\psi'(x)-f(x, \psi(x))=f(x_k, \psi(x_k))-f(x, \psi(x)). \tag{1.2.3}$$

Но при $|x-x_k|\leqslant\delta$

$$|\psi(x)-\psi(x_k)|\leqslant M|x-x_k|\leqslant M\delta\leqslant\delta^*.$$

По определению δ^* и из (1.2.3) имеем

$$|\psi'(x)-f(x, \psi(x))|\leqslant\varepsilon$$

при $x\in(x_k, x_{k+1})$. А так как k — любое из чисел $0, 1, \ldots, l$, то последнее неравенство имеет место при всех $x\in[x_0, b]$, $x\neq x_k$. Лемма доказана.

Пусть теперь

$$R=\{(x, y): |x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b\},\ R\subset G,$$

$$M=\sup_R|f(x, y)|,\ h=\min\{a, b/M\}.$$

Отрезок $[x_0-h, x_0+h]$ называется *отрезком Пеано*, соответствующим точке (x_0, y_0). Будем обозначать его через $P(x_0, y_0)$. Отрезок Пеано определяется неоднозначно (его можно уменьшать и увеличивать за счет выбора R, т. е. чисел a и b). Пусть, далее,

$$K=\{(x, y): x \in P(x_0, y_0),\ |y-y_0| \leqslant M|x-x_0|\}.$$

Очевидно, что $K \subset R$ — компактное множество (на рис. 5 K — заштрихованное множество).

Ломаную Эйлера с любым рангом дробления можно продолжить на отрезок Пеано, причем она будет принадлежать K, так как угловые коэффициенты ее звеньев не превосходят M по абсолютной величине.

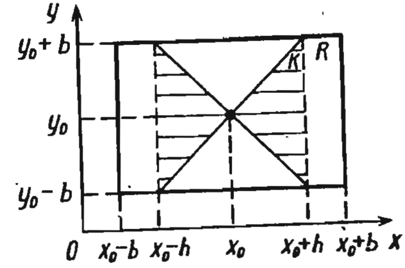

Рис. 5

3. Теорема существования. Предварительно сформулируем один результат из теории функций вещественной переменной. Рассмотрим последовательность функций $\{\psi_k(x)\}_1^\infty$, определенных на отрезке $[a, b]$. Последовательность $\psi_k(x)$ называется равномерно ограниченной, если существует $L>0$ такое, что $|\psi_k(x)| \leqslant L$ при всех $x \in [a, b]$, $k=1, 2, \ldots$ Последовательность $\psi_k(x)$ называется *равностепенно непрерывной*, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta>0$ такое, что условие

$$x', x'' \in [a, b],\ |x'-x''| \leqslant \delta$$

влечет выполнение неравенства

$$|\psi_k(x')-\psi_k(x'')| \leqslant \varepsilon$$

при всех $k=1, 2, \ldots,$

Лемма 1.2.3 (лемма Асколи — Арцела). *Из равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на $[a, b]$ последовательности $\psi_k(x)$ можно извлечь равномерно сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство леммы Асколи — Арцела можно найти, например, в кн.: Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1970.

Теперь можно сформулировать основной результат.

Теорема 1.2.1 (теорема Пеано). *Существует решение задачи Коши для уравнения* (1.1.1) *с начальными данными* $(x_0, y_0) \in G$, *определенное на отрезке Пеано.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, $\varepsilon_k>0$, $k=1, 2, \ldots$ По лемме 1.2.2 для каждого ε_k существует ломаная Эйлера, являющаяся графиком ε_k-решения $y=\psi_k(x)$ на отрезке Пеано P, причем $\psi_k(x_0)=y_0$. При $x \in P$, $k=1, 2, \ldots,$

$$|\psi_k(x)| \leqslant L=|y_0|+b \tag{1.2.4}$$

и
$$|\psi_k(x')-\psi_k(x'')|\leqslant M|x'-x''|.$$
Последнее означает, что
$$|x'-x''|\leqslant\delta=\varepsilon/M\Rightarrow|\psi_k(x')-\psi_k(x'')|\leqslant\varepsilon. \qquad (1.2.5)$$
Из (1.2.4) и (1.2.5) следует, что последовательность функций $\psi_k(x)$ является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на отрезке Пеано. По лемме 1.2.3 из этой последовательности можно извлечь равномерно сходящуюся подпоследовательность
$$\psi_{k_l}(x)\rightrightarrows\varphi(x).$$
Последовательность $\psi_{k_l}(x)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1.2.1. В силу этой леммы $\varphi(x)$ — решение уравнения (1.1.1) с начальными данными (x_0, y_0), определенное при $x\in P$. Теорема доказана.

Теорема 1.1.2 вытекает из теоремы 1.2.1.

Теорема 1.2.2. *Пусть* $\psi_k(x)$ $(k=1, 2,\ldots)$ — *последовательность* ε_k*-решений уравнения* (1.1.1) *на отрезке* $[a, b]$, *причем* $\varepsilon_k\to0$ *при* $k\to\infty$, $\psi_k(x_0)=y_0$ *и графики функций* $\psi_k(x)$ *принадлежат некоторому компакту* $R\subset G$. *Если решение* $\varphi(x)$ *уравнения* (1.1.1) *с начальными данными* (x_0, y_0) *продолжимо на* $[a, b]$ *и другого решения* (1.1.1) *с теми же начальными данными, продолжимого на* $[a, b]$, *не существует, то* $\psi_k(x)\rightrightarrows\varphi(x)$ *при* $k\to\infty$.

Доказательство. Предположим, что заключение теоремы неверно. Это означает, что существует положительное число Δ и подпоследовательность функций $\psi_{k_l}(x)$ и соответствующих точек $x_{k_l}\in[a, b]$ таких, что $|\varphi(x_{k_l})-\psi_{k_l}(x_{k_l})|\geqslant\Delta$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1.2.1, покажем, что последовательность $\psi_{k_l}(x)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на $[a, b]$. Таким образом, из нее можно извлечь подпоследовательность $\psi_{k_{l_j}}(x)$, равномерно сходящуюся на $[a, b]$ к некоторой функции $\psi(x)$, график которой лежит в R и, следовательно, в G. По лемме 1.2.1 $\psi(x)$ — решение уравнения (1.1.1) с начальными данными (x_0, y_0), определенное на $[a, b]$. Используя компактность отрезка $[a, b]$, можно считать, что и $x_{k_{l_j}}\to x^*\in[a, b]$. Переходя к пределу в неравенстве $|\varphi(x_{k_{l_j}})-\psi_{k_{l_j}}(x_{k_{l_j}})|\geqslant\Delta$, получаем, что $|\varphi(x^*)-\psi(x^*)|\geqslant\Delta$, а это противоречит предположению теоремы.

Пример 1.2.1. Рассмотрим задачу Коши с начальными данными $(0, y_0)$ для дифференциального уравнения
$$y'=y. \qquad (1.2.6)$$
Область G — вся плоскость Oxy, поэтому постоянные a и b, определяющие прямоугольник R, можно брать любыми, причем
$$h=\min\left\{a, \frac{b}{|y_0|+b}\right\}\to1 \quad \text{при} \quad a>1,\ b\to\infty.$$

По теореме 1.2.1 искомое решение определено на интервале $(-1, 1)$. Покажем, что на самом деле оно определено и может быть построено с помощью ломаных Эйлера при всех x.

Пусть x — произвольное число. Разобьем отрезок $[0, x]$ на k равных промежутков. Тогда ординаты вершин ломаной Эйлера с абсциссами $0, x/k, 2x/k, \ldots, x$ соответственно равны

$$y_0, y_0\left(1+\frac{x}{k}\right), \ldots, y_0\left(1+\frac{x}{k}\right)^k. \tag{1.2.7}$$

При $k\to\infty$ последняя ордината в (1.2.7) стремится к y_0e^x. Так как x — любое, а по теореме 1.1.4 G — область единственности, то, согласно теореме 1.2.2, ломаные Эйлера сходятся к y_0e^x равномерно на любом отрезке.

В заключение параграфа докажем утверждение, которое понадобится в дальнейшем.

Лемма 1.2.4. *Для любого компактного множества $K\subset G$ можно указать $\Delta(K)>0$ такое, что в качестве отрезка Пеано $P(x_0, y_0)$ для любой точки $(x_0, y_0)\in K$ можно взять отрезок $[x_0-\Delta, x_0+\Delta]$.*

Доказательство. Пусть CG — дополнение области G до плоскости Oxy. Покажем, что расстояние $\rho(K, CG)$ между множествами K и CG больше нуля. Предположим, что это не так. Тогда существуют последовательности $x_k\in K$ и $y_k\in CG$, для которых $\rho(x_k, y_k)\to 0$ при $k\to\infty$. Используя компактность K, рассмотрим сходящуюся подпоследовательность $x_{k_i}\to x_0\in K$ при $k_i\to\infty$. Так как K — ограниченное множество, то последовательность y_{k_i} ограничена. Поскольку CG замкнуто, последовательность y_{k_i} принадлежит компактному множеству и поэтому содержит сходящуюся подпоследовательность $y_{k_{i_j}}\to y_0\in CG$, $k_{i_j}\to\infty$. Тогда и $x_{k_{i_j}}\to x_0$ при $k_{i_j}\to\infty$. Отсюда $\rho(x_0, y_0)=0$, что невозможно, так как K и CG не имеют общих точек.

Из доказанного вытекает, что при некотором $\varepsilon>0$ K содержится в G вместе со своей замкнутой ε-окрестностью K_ε. Положим

$$M=\sup_{K_\varepsilon}|f(x, y)|.$$

Тогда для любой точки $(x_0, y_0)\in K$ имеем $P(x_0, y_0)=[x_0-\Delta, x_0+\Delta]$, где можно положить $\Delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{M\sqrt{2}}\right\}$. Лемма доказана.

§ 3. Теорема единственности

1. Лемма Гронуолла. Приведем вспомогательный результат, который (как и его различные обобщения) часто используется в теории дифференциальных уравнений.

Лемма 1.3.1. *Пусть* $\mu>0$, $f(x)\geqslant 0$, $\lambda(x)\geqslant 0$ — *непрерывные на* $\langle a, b\rangle$ *функции, удовлетворяющие там неравенству*

$$f(x)\leqslant\lambda(x)+\mu\left|\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds\right| \quad (x_0, x\in\langle a, b\rangle). \tag{1.3.1}$$

Тогда при всех $x\in\langle a, b\rangle$

$$f(x)\leqslant\lambda(x)+\mu\left|\int_{x_0}^{x}\exp\{\mu|x-s|\}\lambda(s)\,ds\right|. \tag{1.3.2}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $x\geqslant x_0$. Положим

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds.$$

Из (1.3.1) имеем

$$0\leqslant f(x)\leqslant\lambda(x)+\mu F(x), \tag{1.3.3}$$

или

$$F'(x)\leqslant\lambda(x)+\mu F(x). \tag{1.3.4}$$

Умножая (1.3.4) на $\exp\{-\mu(x-x_0)\}$, замечаем, что (1.3.4) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx}[\exp\{-\mu(x-x_0)\}F(x)]\leqslant\lambda(x)\exp\{-\mu(x-x_0)\}.$$

Интегрируя это выражение в пределах от x_0 до x, получаем

$$F(x)\exp\{-\mu(x-x_0)\}\leqslant\int_{x_0}^{x}\exp\{-\mu(s-x_0)\}\lambda(s)\,ds,$$

или

$$F(x)\leqslant\int_{x_0}^{x}\exp\{\mu(x-s)\}\lambda(s)\,ds.$$

Отсюда и из (1.3.3) следует

$$f(x)\leqslant\lambda(x)+\mu\int_{x_0}^{x}\exp\{\mu(x-s)\}\lambda(s)\,ds,$$

что совпадает с (1.3.2) при $x\geqslant x_0$. Случай $x\leqslant x_0$ оставляем для рассмотрения в качестве упражнения.

Частный случай. Пусть $\lambda=\text{const}$. Тогда

$$\left|\int_{x_0}^{x}\exp\{\mu|x-s|\}\,ds\right|=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu}(\exp\{\mu(x-x_0)\}-1) & \text{при } x\geqslant x_0,\\[2mm] \dfrac{1}{\mu}(\exp\{\mu(x_0-x)\}-1) & \text{при } x\leqslant x_0,\end{cases}$$

или

$$\mu\left|\int_{x_0}^{x}\exp\{\mu|x-s|\}\,ds\right|=\exp\{\mu|x-x_0|\}-1.$$

Отсюда и из (1.3.2) получаем

$$f(x)\leqslant\lambda\exp\{\mu|x-x_0|\}. \tag{1.3.5}$$

2. Теорема единственности. Теорема единственности легко доказывается с помощью формулы (1.3.5).

Теорема 1.3.1. *Пусть $\partial f/\partial y$ существует и непрерывна в области G. Тогда любые два решения уравнения* (1.1.1), *определенные при $x\in\langle a,\ b\rangle$ и совпадающие при некотором $x_0\in\langle a,\ b\rangle$, совпадают на всем $\langle a,\ b\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — два решения уравнения (1.1.1) на $\langle a,\ b\rangle$, причем $\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)=y_0$. Из (1.1.6) при $x\in\langle a,\ b\rangle$ имеем

$$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\int_{x_0}^{x}[f(s,\varphi_1(s))-f(s,\varphi_2(s))]\,ds.$$

Пусть $R\subset G$ — замкнутый прямоугольник с центром в точке $(x_0,\ y_0)$, U — окрестность точки x_0 в промежутке $\langle a,\ b\rangle$, столь малая, что $(x,\ \varphi_1(x))\in R$ и $(x,\ \varphi_2(x))\in R$ при $x\in U$. По формуле Лагранжа

$$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|\,ds\right|,$$

где $L=\sup\limits_{R}|\partial f/\partial y|$. Из формулы (1.3.5) при $\lambda=0$, $\mu=L$ следует, что

$$r(x)=|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|=0$$

при всех $x\in U$.

Пусть теперь β — правая граница промежутка $[x_0,\ b\rangle$, где $r(x)=0$. Покажем, что $\beta=b$.

Пусть это не так. Так как $r(x)$ — непрерывная функция, то $[x_0,\ \beta\rangle=[x_0,\ \beta]$. К точке $(\beta,\ \varphi_1(\beta))=(\beta,\ \varphi_2(\beta))$ применяем предыдущее рассуждение, откуда заключаем, что $r(x)=0$ в некоторой окрестности точки β. Значит, β не есть правая граница промежутка, где $r(x)$ обращается в нуль. Противоречие означает, что $\beta=b$. Аналогично доказывается, что левая граница указанного промежутка совпадает с a.

§ 4. Общее решение

В этом параграфе предполагается, что G — область единственности для уравнения (1.1.1).

Пусть $\bar{\varphi}(x)$ и $\bar{\bar{\varphi}}(x)$ — решения уравнения (1.1.1) на одном и том же отрезке $[a,\ b]$ и пусть также $\bar{\varphi}(x)<\bar{\bar{\varphi}}(x)$ при $x\in[a,\ b]$.

Положим

$$A = \{(x, y) : a < x < b,\ \bar{\varphi}(x) < y < \bar{\bar{\varphi}}(x)\}$$

и пусть $\bar{A}$ — замыкание области A, $\bar{A} \subset G$.

Лемма 1.4.1. *Любое решение уравнения* (1.1.1) *с начальными данными* $(x_0, y_0) \in A$ *продолжимо на отрезок* $[a, b]$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что решения с начальными данными из области A не могут покинуть A при $x \in [a, b]$, не нарушая единственности, так как A ограничена сверху и снизу интегральными кривыми.

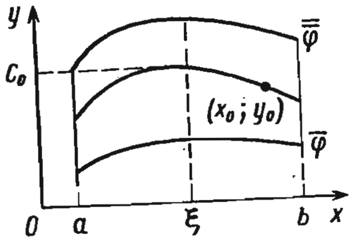

Рис. 6

Пусть $(x_0, y_0) \in A$. По лемме 1.2.4 и теореме 1.2.1 решение $\varphi(x)$ с начальными данными (x_0, y_0) определено на отрезке $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$, где $\Delta > 0$ не зависит от выбора (x_0, y_0). Рассуждая, как в начале п. 2 § 1, продолжаем решение $\varphi(x)$ с помощью решений с начальными данными $(x_0 - \Delta, \varphi(x_0 - \Delta))$ и $(x_0 + \Delta, \varphi(x_0 + \Delta))$ на отрезок $[x_0 - 2\Delta, x_0 + 2\Delta]$. Таким образом, за конечное число шагов мы продолжим решение $\varphi(x)$ на весь отрезок $[a, b]$. Лемма доказана.

Пусть $\xi \in (a, b)$. Обозначим через $y(x, x_0, y_0)$ решение с начальными данными $(x_0, y_0) \in A$. По лемме 1.4.1 функция $y(x, x_0, y_0)$ определена при $x = \xi$. Положим

$$y(x, \xi, C) = \varphi(x, C). \tag{1.4.1}$$

Теорема 1.4.1. *Функция* $y = \varphi(x, C)$ *есть общее решение уравнения* (1.1.1) *в области* A.

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) \in A$. Тогда равенство $y_0 = \varphi(x_0, C)$ определяет единственное $C_0 = y(\xi, x_0, y_0)$ в силу (1.4.1) (рис. 6), причем по этой же формуле $y = \varphi(x, C_0)$ — решение уравнения (1.1.1).

Осталось доказать непрерывность $\varphi(x, C)$. Обозначим через (c, d) интервал прямой $x = \xi$ в области A, т. е. положим $c = \bar{\varphi}(\xi)$, $d = \bar{\bar{\varphi}}(\xi)$. В силу (1.4.1) функция $\varphi(x, C)$ определена в прямоугольнике

$$H = \{(x, C) : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant C \leqslant d\}.$$

По лемме 1.4.1 интегральные кривые, определенные на отрезке $[a, b]$, заполняют замыкание $\bar{A}$ в области A полностью. Так как G — область единственности, то интегральные кривые не пересекаются. Это означает, что функция $\varphi(x, C)$ непрерывна по C при $C \in [c, d]$.

Предположим, что это не так. Тогда существуют величины $\varepsilon >$

>0, $\bar{x}\in[a, b]$ и последовательность $C_k\in[c, d]$, $C_k\to\bar{C}$ при $k\to\infty$, такие, что справедливо неравенство

$$|\varphi(\bar{x}, \bar{C})-\varphi(\bar{x}, C_k)|\geqslant\varepsilon.$$

Не нарушая общности, считаем, что C_k — монотонная последовательность. Так как интегральные кривые не пересекаются, то последовательность $\varphi(\bar{x}, C_k)$ также монотонна. Следовательно, существует предел

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(\bar{x}, C_k)=\bar{\varphi}.$$

Так как интегральные кривые не пересекаются, решение с начальными данными $(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{y}\in(\bar{\varphi}, \varphi(\bar{x}, \bar{C}))$, должно удовлетворять начальным условиям $(\xi, \bar{C})$ и, следовательно, совпадать с решением $y=\varphi(x, \bar{C})$. Но это не выполняется при $x=\bar{x}$.

Итак, $\varphi(x, C)$ непрерывна по C. С другой стороны, так как $\varphi(x, C)$ — решение уравнения (1.1.1), то

$$|\partial\varphi/\partial x|=|f(x, \varphi)|\leqslant M.$$

Следовательно, $\varphi(x, C)$ непрерывна по x равномерно относительно $C\in[c, d]$, поэтому $\varphi(x, C)$ непрерывна по совокупности переменных в прямоугольнике H. Теорема доказана.

Так как любую точку области G можно погрузить в область типа A, то теорема 1.1.6 является следствием теоремы 1.4.1. Общее решение (1.4.1) называется *общим решением в форме Коши*. Роль параметра C здесь играет начальное данное y_0, соответствующее $x_0=\xi$.

§ 5. Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме

1. Существование и единственность решений. До сих пор мы рассматривали дифференциальное уравнение (1.1.1). Переменные x и y входят в него несимметрично. Это проявляется, в частности, в том, что интегральные кривые не могут быть продолжены за точку с вертикальной касательной, так как поле направлений уравнения (1.1.1) не содержит направлений, параллельных оси ординат. Для того чтобы не исключать таких направлений, наряду с уравнением (1.1.1) рассматривают «перевернутое» уравнение

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x(y), y)}, \tag{1.5.1}$$

равносильное (1.1.1) всюду в G, где $f(x, y)\neq0$.

В уравнении (1.5.1) искомой является функция $x(y)$, обратная функции $y(x)$, удовлетворяющей уравнению (1.1.1).

Например, дифференциальное уравнение $y'=2\frac{y}{x}$ определено в областях $x>0$ и $x<0$. Добавляя к нему уравнение $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{2y}$, получим в качестве области определения всю плоскость Oxy, за исключением начала координат. При этом появляются новые интегральные кривые: $x=0$ $(y>0)$ и $x=0$ $(y<0)$ (см. рис. 2).

Существует форма записи дифференциального уравнения, объединяющая (1.1.1) и (1.5.1), — так называемая симметричная форма:

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0, \tag{1.5.2}$$

где M, N — непрерывные в некоторой области D функции. Точка $(x_0, y_0)\in D$ называется особой, если

$$M(x_0, y_0)=N(x_0, y_0)=0.$$

Обозначим множество особых точек через Q. В силу непрерывности M и N множество Q замкнуто. Следовательно, $D\setminus Q$ — открытое множество, и мы обозначаем компоненту связности $D\setminus Q$ через G. Из определения особой точки и непрерывности M и N следует, что для каждой точки $(x_0, y_0)\in G$ можно указать такую ее окрестность, где либо $M(x, y)\neq 0$, либо $N(x, y)\neq 0$. В этой окрестности уравнение (1.5.2) эквивалентно по крайней мере одному из уравнений

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy}=-\frac{N(x, y)}{M(x, y)}. \tag{1.5.3}$$

Определение 1.5.1. *Решением уравнения* (1.5.2) *называется функция* $y=\varphi(x)$ (*или* $x=\psi(y)$), *определенная на промежутке* $\langle a, b\rangle$, *если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\varphi(x)$ (*или* $\psi(y)$) *дифференцируема на* $\langle a, b\rangle$;

2) $(x, \varphi(x))\in D$ (*или* $(\psi(y), y)\in D$) *при всех* $x\in\langle a, b\rangle$ (*или* $y\in\langle a, b\rangle$);

3) *при всех* $x\in\langle a, b\rangle$

$$M(x, \varphi(x))+N(x, \varphi(x))\,\varphi'(x)=0 \tag{1.5.4а}$$

(*или при* $y\in\langle a, b\rangle$

$$M(\psi(y), y)\,\psi'(y)+N(\psi(y), y)=0). \tag{1.5.4б}$$

Из данного определения вытекает, что любая дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$ или $x=\psi(y)$, график которой состоит из особых точек уравнения (1.5.2), является решением этого уравнения. Такие решения называются особыми.

Задача Коши ставится так же, как и для уравнения (1.1.1). Если начальная точка $(x_0, y_0)\in G$, то из (1.5.4а) или из (1.5.4б) следует, что решение задачи Коши в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) является решением одного из уравнений (1.5.3). Поэтому можно использовать определения и результаты предыдущих параграфов, имеющие локальный характер. Из теорем 1.1.2 и 1.1.4 вытекают следующие утверждения.

Теорема 1.5.1. *Существуют решения уравнения* (1.5.2) *с любыми начальными данными* $(x_0, y_0) \in G$.

Теорема 1.5.2. *Пусть в области* $U \subset G$ *выполняется любое из предположений:*

1) $M(x, y) \neq 0$, $\partial M/\partial x$ *и* $\partial N/\partial x$ *существуют и непрерывны;*

2) $N(x, y) \neq 0$, $\partial M/\partial y$ *и* $\partial N/\partial y$ *существуют и непрерывны.*

Тогда U является областью единственности для второго из уравнений (1.5.3) в случае 1) и для первого из них в случае 2).

Если каждая область $U \subset G$, в которой либо $M \neq 0$, либо $N \neq 0$, является областью единственности для соответствующего уравнения (1.5.3), то будем говорить, что G есть область единственности для уравнения (1.5.2). Таким образом, если G можно представить как объединение областей U, в каждой из которых выполняются условия теоремы 1.5.2, то G — область единственности для уравнения (1.5.2).

Как и уравнение (1.1.1), в области G уравнение (1.5.2) определяет поле направлений с помощью уравнений (1.5.3). Таким образом, поле направлений определено всюду в области D, за исключением особых точек. Оно включает направления, параллельные координатным осям. По-прежнему интегральной кривой мы называем график решения уравнения (1.5.2). Таким образом, интегральной кривой является всякая гладкая кривая, принадлежащая области D, задаваемая уравнением вида $y = \varphi(x)$ либо $x = \psi(y)$, касательные к которой в каждой неособой точке совпадают с направлением поля в этой точке. Если в области единственности две интегральные кривые имеют общую точку, то они совпадают.

2. Интеграл. Требование к интегральной кривой, чтобы она была задана уравнением вида $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$, порождено определением 1.5.1, однако естественно под интегральной кривой уравнения (1.5.2) в области D понимать всякую гладкую кривую, касательные к которой совпадают в каждой неособой точке с направлением поля в этой точке. В окрестности каждой точки области G такая кривая является графиком функции, но в целом это уже не так. Поэтому интегральные кривые в целом целесообразно задавать с помощью уравнения $U(x, y) = 0$. Таким образом, приходим к понятию интеграла*, полезному и при рассмотрении уравнений вида (1.1.1).

Далее считаем, что G — область единственности для уравнения (1.5.2). Непрерывную в области G функцию $U(x, y)$ будем называть допустимой, если уравнение

$$U(x, y) = U(x_0, y_0), \quad (x_0, y_0) \in G \tag{1.5.5}$$

* В литературе до 40-х годов под интегралом дифференциального уравнения понималось то, что сейчас называется решением.

определяет единственную неявную функцию, т. е. если (1.5.5) имеет единственное непрерывное решение $y=\varphi(x)$ (или $x=\psi(y)$), определенное в некоторой окрестности точки x_0 (или y_0), причем $\varphi(x_0)=y_0$ (или $\psi(y_0)=x_0$).

Определение 1.5.2. *Допустимая функция $U(x, y)$ называется интегралом дифференциального уравнения* (1.5.2) *в области G, если для любой точки $(x_0, y_0)\in G$ неявная функция, определяемая уравнением* (1.5.5), *является решением задачи Коши для уравнения* (1.5.2) *с начальными данными (x_0, y_0).*

Теорема 1.5.3. *Для того чтобы допустимая функция $U(x, y)$ была интегралом дифференциального уравнения* (1.5.2) *в области G, необходимо и достаточно, чтобы $U(x, y)$ обращалось в постоянную вдоль любого решения уравнения* (1.5.2) *в области G, т. е. чтобы $U(x, \varphi(x))\equiv\text{const}$ при $x\in\langle a, b\rangle$, если $y=\varphi(x)$ — решение* (1.5.2) *на $\langle a, b\rangle$, или чтобы $U(\psi(y), y)\equiv\text{const}$ при $y\in\langle a, b\rangle$, если $x=\psi(y)$ — решение* (1.5.2) *на $\langle a, b\rangle$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $U(x, y)$ — интеграл в G и $y=\varphi(x)$ — решение дифференциального уравнения (1.5.2), определенное при $x\in\langle a, b\rangle$. В силу единственности решения уравнения (1.5.2) $y=\varphi(x)$ совпадает по определению интеграла в некоторой окрестности любой точки $x_0\in\langle a, b\rangle$ с решением уравнения $U(x, y)=U(x_0, \varphi(x_0))$. Поэтому в указанной окрестности $U(x, \varphi(x))=U(x_0, \varphi(x_0))$. Следовательно, $U(x, \varphi(x))$ постоянна в окрестности любой точки $x_0\in\langle a, b\rangle$, откуда и следует, что $U(x, \varphi(x))$ постоянна на всем $\langle a, b\rangle$, так как ее производная существует и равна тождественно нулю. Случай, когда решение имеет вид $x=\psi(y)$, рассматривается аналогично.

Достаточность. Пусть $y=\varphi(x)$ (для определенности) — решение дифференциального уравнения (1.5.2) на промежутке $\langle a, b\rangle$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0)=y_0$, $(x_0, y_0)\in G$. Тогда по условию при всех $x\in\langle a, b\rangle$ $U(x, \varphi(x))=U(x_0, y_0)$. Это означает, что $y=\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (1.5.5), а так как решение уравнения (1.5.5) единственно, то оно совпадает с $\varphi(x)$, т. е. $U(x, y)$ — интеграл в G. Теорема доказана полностью.

Пусть $U(x, y)$ непрерывна в G вместе с частными производными $\partial U/\partial x$ и $\partial U/\partial y$, $y=\varphi(x)$ — решение уравнения (1.5.2) на промежутке $\langle a, b\rangle$. По теореме 1.5.3 на $\langle a, b\rangle$ справедливо тождество

$$U(x, \varphi(x))\equiv U(x_0, \varphi(x_0)).$$

Дифференцируя это тождество и учитывая (1.5.4), получаем

$$N(x, \varphi)\frac{\partial U}{\partial x}(x, \varphi)-M(x, \varphi)\frac{\partial U}{\partial y}(x, \varphi)\equiv 0.$$

Аналогично, если $x=\psi(y)$, $y\in\langle a, b\rangle$ — решение уравнения (1.5.2), то при $y\in\langle a, b\rangle$

$$N(\psi, y)\frac{\partial U}{\partial x}(\psi, y)-M(\psi, y)\frac{\partial U}{\partial y}(\psi, y)\equiv 0.$$

Так как по теореме 1.5.1 интегральные кривые заполняют всю область G, то получаем следующее утверждение.

Следствие. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемая допустимая функция $U(x, y)$ была интегралом уравнения* (1.5.2) *в области G, необходимо и достаточно, чтобы при всех $(x, y)\in G$ выполнялось равенство*

$$N(x, y)\frac{\partial U}{\partial x}-M(x, y)\frac{\partial U}{\partial y}=0. \tag{1.5.6}$$

Определение 1.5.3. *Если $U(x, y)$ — интеграл уравнения* (1.5.2) *в области G, то равенство $U(x, y)=C$, где C — произвольная постоянная, называется общим интегралом уравнения* (1.5.2) *в области G.*

Очевидно, что общий интеграл задает в неявном виде все решения уравнения (1.5.2) из области G.

Уравнение

$$m_1(x)n_1(y)dx+m_2(x)n_2(y)dy=0 \tag{1.5.7}$$

называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными (в симметричной форме). Пусть $M(x, y)=m_1(x)n_1(y)$ и $N(x, y)=m_2(x)n_2(y)$ определены в области $D\{(x, y): a<x<b,\ c<y<d\}$. Пусть, далее,

$$S=\{(x, y): m_2(x)=0\}\cup\{(x, y): n_1(y)=0\}$$

и $B=\{(x, y): a_1<x<b_1,\ c_1<y<d_1\}$ — любая компонента связности открытого множества $D\setminus S$. Разделим (1.5.7) на $n_1(y)m_2(x)$ (эта операция называется разделением переменных). В результате получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{m_1(x)}{m_2(x)}dx+\frac{n_2(y)}{n_1(y)}dy=0 \tag{1.5.8}$$

с коэффициентами, непрерывными в области B. Пусть $R=B\setminus Q$, где Q — множество особых точек уравнения (1.5.8) в прямоугольнике B, т. е.

$$Q=\{(x, y)\in B: m_1(x)=n_2(y)=0\}.$$

Теорема 1.5.4. *Функция*

$$U(x, y)=\int_{x_0}^{x}\frac{m_1(s)}{m_2(s)}ds+\int_{y_0}^{y}\frac{n_2(s)}{n_1(s)}d(s),\quad (x_0, y_0)\in B, \tag{1.5.9}$$

является интегралом уравнения (1.5.7) *в области R.*

Доказательство. Так как область R не содержит особых точек уравнения (1.5.8), то в окрестности каждой точки области R уравнение (1.5.8) эквивалентно уравнению с разделяющимися переменными (1.1.14) или «перевернутому», причем выполняются условия теоремы 1.1.5. Следовательно, R — область единственности для уравнения (1.5.8).

Далее, поскольку в R особые точки отсутствуют, $\partial U/\partial x$ и $\partial U/\partial y$ не обращаются в нуль одновременно. По теореме о неявных функциях $U(x, y)$ — допустимая функция. Равенство (1.5.6), очевидно, выполняется. Следовательно, $U(x, y)$ — интеграл уравнения (1.5.8), а значит, и уравнения (1.5.7) в области R. Теорема доказана.

Замечание. Отрезки прямых $x=\text{const}$ и $y=\text{const}$, из которых состоит множество S, являются интегральными кривыми уравнения (1.5.7).

Пример 1.5.1. Рассмотрим уравнение

$$xdy-2ydx=0. \tag{1.5.10}$$

Здесь D — вся плоскость Oxy, S состоит из координатных осей, особая точка одна — начало координат, областью B является любой из координатных углов, причем $B=R$.

Общий интеграл в любом из координатных углов можно в силу (1.5.9) записать в виде

$$\ln|y|-2\ln|x|=C_1,$$

или

$$yx^{-2}=C \quad (C\neq 0),$$

где $C_1=\ln|C|$. Следовательно, интегральные кривые уравнения (1.5.10) — параболы $y=Cx^2\,(C\neq 0)$ и координатные оси. Кроме того, решениями являются также «составные» функции

$$y=\begin{cases} C_1x^2 \text{ при } x\geqslant 0, \\ C_2x^2 \text{ при } x\leqslant 0. \end{cases}$$

Пример 1.5.2. Рассмотрим уравнение

$$2xydx+(\alpha^2y^2-x^2)dy=0, \quad \alpha\neq 0 \tag{1.5.11}$$

(ср. с уравнением (1.1.27)). Выполним замену $y=ux\,(x\neq 0)$. Имеем

$$dy=udx+xdu.$$

Следовательно, (1.5.11) принимает вид

$$u(\alpha^2u^2+1)dx+x(\alpha^2u^2-1)du=0. \tag{1.5.12}$$

Как и в примере 1.5.1, $B=R$ — любой из координатных углов плоскости Oxu. По формуле (1.5.9) общий интеграл уравнения (1.5.12) в области B имеет вид

$$\ln|u|-\ln(\alpha^2u^2+1)-\ln|x|=C_1,$$

откуда

$$\frac{y}{x^2+\alpha^2 y^2}=C, \quad C\neq 0,$$

где $C_1=\ln|C|$. Таким образом, поскольку $y=0$ удовлетворяет (1.5.11), функция

$$U(x, y)=\frac{y}{x^2+\alpha^2 y^2} \tag{1.5.13}$$

является интегралом уравнения (1.5.11) во всей плоскости, за исключением начала координат.

3. Существование интеграла. Пусть $(\xi, \eta)\in G$ и пусть (для определенности) $N(\xi, \eta)\neq 0$. Будем рассматривать уравнение (1.5.2) в окрестности V точки (ξ, η), где $N\neq 0$. В § 4 было показано, что можно построить область, содержащую точку (ξ, η), в которой дифференциальное уравнение

$$y'=-\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \tag{1.5.14}$$

эквивалентное в V уравнению (1.5.2), имеет общее решение

$$y=\varphi(x, C), \quad a<x<b, \quad c<C<d. \tag{1.5.15}$$

Обозначим эту область через A, а прямоугольник, где определена функция (1.5.15), — через H. Так как интегральные кривые не пересекаются в A в силу единственности, то функция $\varphi(x, C)$ является строго возрастающей функцией $C\in(c, d)$. Следовательно, уравнение (1.5.15) определяет непрерывную строго возрастающую по y функцию $C=U(x, y)$, определенную в области A. Функция $U(x, y)$ является допустимой и построена таким образом, что она обращается в постоянную вдоль решений в области A. По теореме 1.5.3 $U(x, y)$ — интеграл уравнения (1.5.2) в области A. Таким образом, мы доказали, что уравнение (1.5.2) имеет интеграл в окрестности любой неособой точки.

Изучим множество интегралов в окрестности A точки (ξ, η). Пусть $U(x, y)$ — построенный выше интеграл, а $U_1(x, y)$ — другой интеграл в A. Согласно теореме 1.5.3

$$U_1(x, \varphi(x, C))=\Phi(C), \quad x\in(a, b), \tag{1.5.16}$$

а по построению

$$U(x, \varphi(x, C))=C, \quad x\in(a, b).$$

Из последнего равенства и из (1.5.16) имеем

$$U_1(x, \varphi)=\Phi(U(x, \varphi)). \tag{1.5.17}$$

Так как $\varphi(x, C)$ — общее решение в A, то (x, φ) — любая точка в A, и из (1.5.17) заключаем, что

$$U_1(x, y)=\Phi(U(x, y)).$$

С другой стороны, если $U(x, y)$ — некоторый интеграл, то при любой Φ, если $\Phi(U)$ — допустимая функция x, y, $U_1(x, y) = \Phi(U)$ — также является интегралом, так как $\Phi(U)$ обращается в постоянную вдоль решений вместе с U.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 1.5.5. *Если G есть область единственности, то для любой точки $(\xi, \eta) \in G$ можно указать ее окрестность, в которой существует интеграл $U(x, y)$ дифференциального уравнения* (1.5.2). При этом если $\Phi(U(x, y))$ — допустимая функция, то

$$U_1(x, y) = \Phi(U) \tag{1.5.18}$$

также является интегралом уравнения (1.5.2), и формула (1.5.18) содержит в себе все интегралы уравнения (1.5.2) в окрестности точки (ξ, η).

Пример 1.5.3. Уравнение

$$x\,dx + y\,dy = 0 \tag{1.5.19}$$

имеет интеграл $U = x^2 + y^2$, определенный при всех x и y (даже в окрестности особой точки $(0, 0)$). Интегральные кривые, определяемые общим интегралом $x^2 + y^2 = C$, суть окружности. Решений с начальным условием $(0, 0)$ уравнение (1.5.19) не имеет.

Пример 1.5.4. Для уравнения (1.5.10) в областях $x > 0$ и $x < 0$ интегралом является функция $U = yx^{-2}$, а в областях $y > 0$ и $y < 0$ интегралом является функция $U = y^{-1}x^2$. В окрестности особой точки $(0, 0)$ уравнение (1.5.10) не имеет интеграла. Действительно, интегральные кривые этого уравнения, как было показано ранее, суть параболы $y = Cx^2$ $(C \neq 0)$ и координатные оси. Все они проходят через начало координат. Если бы интеграл $U(x, y)$, определенный в окрестности начала координат, существовал, то он по теореме 1.5.3 был бы тождественно равен постоянной: $U(x, y) \equiv U(0, 0)$, но эта функция не является допустимой.

§ 6. Интегрирующий множитель

Продолжаем изучение дифференциального уравнения (1.5.2) в симметричной форме.

1. Уравнение в полных дифференциалах. Уравнение (1.5.2) называется уравнением в полных дифференциалах в области D, если левая часть (1.5.2) является дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$, т. е. если в D

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = dU.$$

В этом случае функция $y = \varphi(x)$ (или $x = \psi(y)$) класса $C^1(\langle a, b\rangle)$ — решение уравнения (1.5.2) тогда и только тогда, когда на $\langle a, b\rangle$ $U(x, \varphi(x)) \equiv \mathrm{const}$ (или $U(\psi(y), y) \equiv \mathrm{const}$). Так как

$$\partial U/\partial x = M(x, y), \quad \partial U/\partial y = N(x, y),$$

то по теореме о неявных функциях в области G, не содержащей особых точек, $U(x, y)$ есть допустимая функция. Следовательно, G — область единственности, а U — интеграл (1.5.2) в области G.

Таким образом, возникают две задачи: найти условия, при которых уравнение (1.5.2) является уравнением в полных дифференциалах, и найти интеграл $U(x, y)$ при выполнении этих условий. Эти вопросы рассмотрены в курсах анализа (см., например: *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. М., 1969), где доказывается следующая теорема.

Теорема 1.6.1. *Пусть область D односвязна и частные производные $\partial M/\partial y$ и $\partial N/\partial x$ существуют и непрерывны. Для того чтобы уравнение* (1.5.2) *было в D уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы всюду в D выполнялось равенство*

$$\partial M/\partial y = \partial N/\partial x. \tag{1.6.1}$$

При этом

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy, \tag{1.6.2}$$

где (x_0, y_0) — любая фиксированная точка области D, а интеграл в правой части равенства есть криволинейный интеграл второго рода по любому пути, соединяющему в D точки (x_0, y_0) и (x, y) (он не зависит от пути интегрирования).

Выбирая конкретные пути, получаем различные формулы для функции U. Например, если

$$D = \{(x, y) : a < x < b,\ c < y < d\},$$

то, интегрируя (1.6.2) по сторонам прямоугольника с вершинами в точках (x_0, y_0) и (x, y), имеем

$$U = \int_{x_0}^{x} M(s, y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} N(x, s)\,ds \tag{1.6.3}$$

и

$$U = \int_{y_0}^{y} N(x_0, s)\,ds + \int_{x_0}^{x} M(s, y)\,ds. \tag{1.6.4}$$

Если D — выпуклая область, то, интегрируя (1.6.2) по прямой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y), получим

$$U = \int_{x_0}^{x} [M(s, k(s - x_0) + y_0) + N(s, k(s - x_0) + y_0)]\,ds,$$

где $k = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$, $x \neq x_0$.

2. Интегрирующий множитель. Как видим, нахождение интеграла уравнения в полных дифференциалах не вызывает затруднений. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли произвольное уравнение (1.5.2) привести к уравнению в полных дифференциалах, умножая равенство (1.5.2) на некоторый множитель.

Определение 1.6.1. *Функция* $\mu(x, y)$, *определенная, непрерывная и не обращающаяся в нуль в области* D, *называется интегрирующим множителем дифференциального уравнения* (1.5.2), *если уравнение*

$$\mu M dx + \mu N dy = 0 \tag{1.6.5}$$

является в D *уравнением в полных дифференциалах.*

Уравнение (1.5.2) всегда имеет интегрирующий множитель, определенный в той же области, где существует интеграл $U(x, y)$ этого уравнения. Действительно, в силу (1.5.6) в этой области

$$\frac{\partial U/\partial x}{M} = \frac{\partial U/\partial y}{N},$$

причем если в некоторой точке знаменатель равен нулю, то и соответствующий числитель равен нулю. Тогда функция

$$\mu(x, y) = \frac{\partial U/\partial x}{M} = \frac{\partial U/\partial y}{N}$$

удовлетворяет определению 1.6.1, так как левая часть (1.6.5) равна dU.

Попытаемся найти интегрирующий множитель в явном виде. Предположим, что M и N являются функциями класса C^1. Будем и интегрирующий множитель искать в классе C^1. Так как (1.6.5) должно быть уравнением в полных дифференциалах, то в силу (1.6.1)

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

или

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \mu}{\partial x} N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{1.6.6}$$

Таким образом, дело сводится к нахождению функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению в частных производных (1.6.6). Вообще говоря, задача не упростилась. Однако в исключительных случаях уравнение (1.6.6) может быть использовано для нахождения интегрирующего множителя.

Теорема 1.6.2. *Пусть существует функция* $\omega(x, y)$ *класса* C^1 *такая, что в* D

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N\partial\omega/\partial x - M\partial\omega/\partial y} = \psi(\omega), \tag{1.6.7}$$

где $\psi(\omega)$ — непрерывная функция. Тогда

$$\mu=\exp\left\{\int\psi(\omega)d\omega\right\}. \qquad (1.6.8)$$

Доказательство. Ищем интегрирующий множитель $\mu=\mu(\omega)$; (1.6.6) принимает вид

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}N-\frac{\partial\omega}{\partial y}M\right)=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right),$$

или в силу (1.6.7) $d\mu/d\omega=\psi(\omega)\mu$. Теперь (1.6.8) вытекает из (1.1.20). Теорема доказана.

Пример 1.6.1. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (1.1.21), которое в симметричной форме (1.5.2) имеет вид

$$[p(x)y+q(x)]dx-dy=0. \qquad (1.6.9)$$

Особых точек нет, $D=G=\{(x, y): a<x<b, -\infty<y<\infty\}$. Условия теоремы 1.5.2 выполнены.

Интегрирующий множитель ищем в виде $\mu(x)$. Согласно (1.6.7)

$$\psi(x)=\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{N}=-p(x).$$

По теореме 1.6.2

$$\mu=\exp\{-P(x)\},\ \text{где}\ P(x)=\int_{x_0}^{x}P(s)ds,\quad x_0\in(a, b)$$

(отметим, что этот интегрирующий множитель был использован при доказательстве леммы 1.3.1). После умножения на μ получим

$$\exp\{-P(x)\}[p(x)y+q(x)]dx-\exp\{-P(x)\}dy=0.$$

Используем формулу (1.6.3) с $x_0\in(a, b)$, $y_0=0$. Находим общий интеграл в виде

$$\int_{x_0}^{x}\exp\{-P(s)\}q(s)ds-\int_{0}^{y}\exp\{-P(x)\}ds=-C,$$

откуда

$$y=\exp\{P(x)\}\left[C+\int_{x_0}^{x}\exp\{-P(s)\}q(s)ds\right],$$

что совпадает с (1.1.23). Решение задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0) имеет вид

$$y=y_0\exp\left\{\int_{x_0}^{x}p(s)ds\right\}+\int_{x_0}^{x}\exp\left\{\int_{s}^{x}P(t)dt\right\}q(s)ds. \qquad (1.6.10)$$

Формула (1.6.10) называется *формулой Коши.*

§ 7. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

Дифференциальным уравнением первого порядка, не разрешенным относительно производной, называется уравнение вида

$$F(x,\ y,\ y')=0, \tag{1.7.1}$$

где F — непрерывная функция в некоторой области $V\subset\mathbf{R}^3$.

Определение. 1.7.1. *Функция $y=\varphi(x)$, определенная на промежутке $\langle a,\ b\rangle$, называется решением дифференциального уравнения* (1.7.1), *если выполняются следующие условия:*

1) $\varphi(x)$ *дифференцируема на* $\langle a,\ b\rangle$;
2) $(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x))\in V$ *при* $x\in\langle a,\ b\rangle$;
3) *при* $x\in\langle a,\ b\rangle$ *справедливо тождество*

$$F(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x))\equiv 0. \tag{1.7.2}$$

Множество точек $(x,\ y,\ y')$ из $\mathbf{R}^3$, удовлетворяющих (1.7.1), обозначим через S. В дальнейшем предполагаем, что уравнение (1.7.1) допускает параметризацию

$$x=f(u,\ v),\quad y=g(u,\ v),\quad y'=h(u,\ v),$$

где h — непрерывная функция; f, g — непрерывно дифференцируемые в области $D\subset\mathbf{R}^2$ функции. Отображение $T\colon (u,\ v)\to(f(u,\ v),\ g(u,\ v),\ h(u,\ v))$ есть взаимно однозначное отображение D на S и в D справедливо тождество

$$F(f(u,\ v),\ g(u,\ v),\ h(u,\ v))\equiv 0. \tag{1.7.3}$$

Если уравнение (1.7.1) однозначно разрешимо относительно одной из своих переменных, то в качестве параметров можно взять две другие переменные.

Наряду с (1.7.1) рассмотрим в области D дифференциальное уравнение в симметричной форме

$$(g_u-hf_u)du+(g_v-hf_v)dv=0. \tag{1.7.4}$$

Уравнение (1.7.4) не что иное, как запись выражения $dy=y'dx$ в рассматриваемой параметризации.

Теорема 1.7.1. *Пусть в области $P\subset D$ выполняется условие*

$$\det\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v\end{pmatrix}\neq 0 \tag{1.7.5}$$

и $v=\psi(u)$ (или $u=\chi(v)$) — решение уравнения (1.7.4) с начальными данными $(u_0,\ v_0)\in P$, определенное в достаточно малой окрестности точки u_0 (или v_0). Тогда параметрические уравнения $x=f(u,\ \psi(u))$, $y=g(u,\ \psi(u))$ (или $x=f(\chi(v),v)$, $y=g(\chi(v),v)$) определяют функцию $y=\varphi(x)$ и эта функция является решением уравнения (1.7.1).

Доказательство. Рассмотрим случай, когда решение уравнения (1.7.4) имеет вид $v=\psi(u)$ (случай $u=\chi(v)$ рассматривается аналогично). В силу (1.7.4) имеем

$$\frac{d}{du} f(u, \psi(u)) = f_u - f_v \frac{g_u - hf_u}{g_v - hf_v} = \frac{f_u g_v - g_u f_v}{g_v - hf_v},$$

где в правой части равенства $v=\psi(u)$. В силу (1.7.5) $\frac{d}{du} f(u, \psi(u)) \neq 0$, следовательно, уравнение $x=f(u, \psi(u))$ однозначно разрешимо относительно u: $u=w(x)$. Тогда $\varphi(x)=g(w(x), \psi(w(x)))$, причем $\varphi(x)$ дифференцируема. Найдем $\varphi'(x)$. Имеем

$$\varphi'(x) = R(w(x), \psi(w(x))),$$

где

$$R(u, v) = \frac{g_u + g_v \psi'}{f_u + f_v \psi'}.$$

Так как $\psi(u)$ удовлетворяет (1.7.4), то

$$R(u, \psi(u)) = \left(g_u - g_v \frac{g_u - hf_u}{g_v - hf_v}\right) \bigg/ \left(f_u - f_v \frac{g_u - hf_u}{g_v - hf_v}\right)\bigg|_{v=\psi(u)} = h(u, \psi(u)).$$

Таким образом, (1.7.2) выполняется в силу (1.7.3). Теорема доказана.

Справедливо и в некотором смысле обратное утверждение.

Теорема 1.7.2. *Пусть $G \subset D$ — область, не содержащая особых точек уравнения (1.7.4), и $y=\varphi(x)$ — решение уравнения (1.7.1), определенное в достаточно малой окрестности начальной точки x_0, причем $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in T(G)$. Тогда в рассматриваемой параметризации этому решению соответствует решение $v=\psi(u)$ (или $u=\chi(v)$) уравнения (1.7.4) с начальной точкой $(u_0, v_0)=T^{-1}(x_0, \varphi(x_0), \varphi'(x_0))$.*

Доказательство. По условию теоремы

$$\varphi(f(u, v)) = g(u, v), \tag{1.7.6}$$

$$\varphi'(f(u, v)) = h(u, v) \tag{1.7.7}$$

при $(u, v)=T^{-1}(x, \varphi(x), \varphi'(x))$, в частности, при $(u, v)=(u_0, v_0)$. Рассмотрим функцию $\Phi(u, v)=g(u, v)-\varphi(f(u, v))$ в окрестности точки (u_0, v_0). В силу (1.7.6) $\Phi(u_0, v_0)=0$. Кроме того, так как

$$\Phi_u = g_u - \varphi'(f) f_u, \quad \Phi_v = g_v - \varphi'(f) f_v,$$

то в силу (1.7.7) хотя бы одна из величин $\Phi_u(u_0, v_0)$, $\Phi_v(u_0, v_0)$ отлична от нуля. По теореме о неявной функции уравнение $\Phi(u, v)=0$ определяет единственную дифференцируемую функцию $v=$

$=\psi(u)$ или $u=\chi(v)$, график которой содержит точку (u_0, v_0). Пусть это $v=\psi(u)$, $v_0=\psi(u_0)$. Тогда

$$\varphi(f(u, \psi(u)))=g(u, \psi(u)), \quad \varphi'(f(u, \psi(u)))=h(u, \psi(u)).$$

Дифференцируя первое тождество по u и учитывая второе, получаем, что $v=\psi(u)$ удовлетворяет уравнению (1.7.4), что и требовалось доказать.

Фиксируя $(u_0, v_0)\in D$, мы фиксируем $(x_0, y_0, y_0')\in S$. Это показывает, что задачу Коши для уравнения (1.7.1) целесообразно ставить следующим образом: найти такое решение $y=\varphi(x)$ уравнения (1.7.1), которое удовлетворяет условиям $\varphi(x_0)=y_0$, $\varphi'(x_0)=$ $=y_0'$, где $(x_0, y_0, y_0')\in S$. На множестве $T(P)$ задача Коши для уравнения (1.7.1) в силу теорем 1.7.1 и 1.7.2 эквивалентна задаче Коши для уравнения (1.7.4) на множестве P. Пусть G — область единственности для уравнения (1.7.4). Так как $P\subset G$, то и P — область единственности. Тогда решение задачи Коши для уравнения (1.7.1) с начальными данными $(x_0, y_0, y_0')\in T(P)$ существует и оно единственно.

Вид начального условия подсказывает способ построения продолжения решения уравнения (1.7.1). Пусть имеется решение $\varphi(x)$, определенное на отрезке $[a, b]$, причем $(b, \varphi(b), \varphi'(b))\in T(P)$. Определим решение $\psi(x)$ начальным условием $\psi(b)=\varphi(b)$, $\psi'(b)=\varphi'(b)$ и положим

$$\varphi_1(x)=\begin{cases} \varphi(x) \text{ при } x\in[a, b], \\ \psi(x) \text{ при } x\in[b, b+\varepsilon], \quad \varepsilon>0. \end{cases}$$

Решение $\varphi_1(x)$ назовем продолжением решения $\varphi(x)$ вправо. Аналогично определяется продолжение решения $\varphi(x)$ влево. Процедуру продолжения решения можно осуществлять бесконечное число раз. Важно, что при этом можно переходить из области одной параметризации в область другой параметризации и т. д. Таким образом, изложенный метод пригоден для построения решений и такого уравнения (1.7.1), которое не может быть параметризовано в целом, но может быть параметризовано «по кускам».

Условия теоремы 1.7.2 нарушаются на множестве $Q=D\setminus G$ особых точек уравнения (1.7.4). На множестве $T(Q)$ могут содержаться решения уравнения (1.7.1), которые не порождают решений (1.7.4). Рассмотрим это множество. Пусть R — образ Q в плоскости Oxy при отображении Φ: $x=f(u, v)$, $y=g(u, v)$.

Теорема 1.7.3. *Пусть $y=\varphi(x)$ — дифференцируемая функция, график которой лежит в R. Если в Q $|f_u|+|f_v|>0$, то $\varphi(x)$ — решение уравнения* (1.7.1).

Доказательство. Так как $\varphi(f(u, v))=g(u, v)$, то

$$g_u=\varphi'(f)f_u, \quad g_v=\varphi_v'(f)f_v. \tag{1.7.8}$$

Так как в Q имеем $g_u=hf_u$, $g_v=hf_v$, то в силу (1.7.8)

$$\varphi'(f)f_u=hf_u, \quad \varphi'(f)f_v=hf_v.$$

Сокращая на отличное от нуля f_u либо f_v, получаем $\varphi'(f)=h$. Следовательно, $F(x, \varphi(x), \varphi'(x))=F(f, g, h)=0$. Теорема доказана.

Полученные в теореме 1.7.3 решения называются особыми решениями уравнения (1.7.1). Они соответствуют особым точкам уравнения (1.7.4).

Итак, процедура решения уравнения (1.7.1) состоит в следующем. Нужно решить уравнение (1.7.4) в области G, состоящей из неособых точек, и построить соответствующие решения уравнения (1.7.1) (в области P это всегда возможно). Кроме того, следует найти особые решения уравнения (1.7.1).

Пример 1.7.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y=p(y')x+q(y'), \tag{1.7.9}$$

где p, q — функция класса C^1 на интервале (a, b), причем $p(v)\not\equiv v$ ни на каком подынтервале (a, b). В этом случае уравнение (1.7.9) называется уравнением Лагранжа. Вводя параметризацию $x=u$, $y=p(v)u+q(v)$, $y'=v$, получим уравнение (1.7.4) в виде

$$(p(v)-v)\,du+(p'(v)u+q'(v))\,dv=0. \tag{1.7.10}$$

Здесь

$$D=\{(u, v):\ |u|<\infty,\ a<v<b\},$$

$$Q=\{(u, v):\ p(v)=v,\ \ p'(v)u+q'(v)=0\},$$

$$G=D\quad Q,\ P=\{(u, v): p'(v)u+q'(v)\neq 0\}.$$

Если $p(\bar v)=\bar v$, то $v=\bar v$ — решение уравнения (1.7.10). Ему соответствует решение $y=\bar v x+q(\bar v)$ уравнения (1.7.9).

Теперь рассмотрим уравнение (1.7.10) в предположении, что $p(v)\neq v$ Тогда (1.7.10) — линейное неоднородное уравнение, общее решение которого имеет вид

$$u=A(v)C+B(v),$$

где C — произвольная постоянная. Условие (1.7.5) выполняется, если

$$p'(v)u+q'(v)\neq 0. \tag{1.7.11}$$

При выполнении неравенства (1.7.11) параметрические уравнения

$$x=A(v)C+B(v), \tag{1.7.12}$$

$$y=p(v)[A(v)C+B(v)]+q(v),\quad v\in(a, b),$$

определяют в силу теоремы 1.7.1 решения уравнения (1.7.9). Особых решений уравнение Лагранжа при условии $p(v)\neq v$ не имеет, так как в этом случае Q — пустое множество.

Рассмотрим частный случай уравнения (1.7.9)

$$y=\frac{2}{3}y'x+\frac{1}{3}y'^{3}. \tag{1.7.13}$$

В этом случае (1.7.10) имеет вид

$$-v du + 2(u+v) dv = 0. \tag{1.7.14}$$

Решению $v=0$ соответствует очевидное решение $y=0$. Общее решение уравнения (1.7.14) при $v>0$ и $v<0$ имеет вид

$$u = v^2 C - 2v,$$

причем оно удовлетворяет (1.7.14) при $v=0$. Неравенство (1.7.11) превращается в неравенство $u \neq -v$. Оно выполняется на решениях (1.7.14) при $v > C^{-1}$ и $v < C^{-1}$. При таких v параметрические уравнения

$$x = v^2 C - 2v,$$

$$y = \frac{2}{3} v^3 C - v^2$$

определяют решения уравнения (1.7.13). При $C=0$ это $y = -\frac{1}{4} x^2$. При $C \neq 0$ получаем следующие решения (1.7.13):

$$y = (3C^2)^{-1} \left(2 + Cx \pm 2\sqrt{1+Cx}\right) \left(-1 \pm \sqrt{1+Cx}\right),$$

где знаки «+» и «—» берутся одновременно.

Пример 1.7.2. Дифференциально уравнение

$$y = xy' - g(y') \tag{1.7.15}$$

называется уравнением Клеро. Предположим, что $g''(y')$ существует и непрерывна при $y' \in (a, b)$. Используя ту же параметризацию, что и в примере 1.7.1, получим вместо (1.7.10) уравнение

$$(u - g'(v)) dv = 0. \tag{1.7.16}$$

Оно имеет решения $v = C$, где C — произвольная постоянная из интервала (a, b). Этим решениям соответствуют решения

$$y = Cx - g(C), \quad C \in (a, b) \tag{1.7.17}$$

уравнения (1.7.15). Семейство (1.7.17) называется общим решением уравнения Клеро.

Уравнение (1.7.16) имеет также особое решение $u = g'(v)$. Ему соответствует множество точек в плоскости Oxy, определяемое уравнениями

$$x = g'(v), \quad y = vg'(v) - g(v), \quad v \in (a, b). \tag{1.7.18}$$

Если уравнения (1.7.18) определяют дифференцируемую функцию $y = \varphi(x)$, то по теореме 1.7.3 она является особым решением уравнения (1.7.15). Для этого достаточно потребовать, чтобы $g''(v)$ не обращалась в ноль. Изучим особое решение при условии $g''(v) \neq 0$ подробнее. Через G обозначим функцию, обратную

g'. Пусть G определена на интервале (α, β). В силу (1.7.18) особое решение $\varphi(x)$ определяется по формуле

$$\varphi(x) = G(x)g'(G(x)) - g(G(x)),$$

откуда

$$\varphi(x) = xG(x) - g(G(x)), \tag{1.7.19}$$

$$\varphi'(x) = G(x). \tag{1.7.20}$$

Формулы (1.7.19) и (1.7.20) показывают, что прямые семейства (1.7.17) являются касательными к кривой $y = \varphi(x)$ при $C = G(x)$.

Преобразование, сопоставляющее функции $g(v)$, $v \in (a, b)$ функцию $\varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$, определенную формулой (1.7.19), называется преобразованием Лежандра.

Теорема 1.7.4. *Суперпозиция двух преобразований Лежандра есть тождественное преобразование.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ — образ функции $g(v)$, $v \in (a, b)$ при преобразовании Лежандра. В силу (1.7.20)

$$\varphi''(x) = G'(x) = \frac{1}{g''(G(x))} \neq 0.$$

Следовательно, можно определить преобразование Лежандра функции $\varphi(x)$. Обозначим ее образ через $h(v)$. По определению преобразования Лежандра

$$h(v) = v\Phi(v) - \varphi(\Phi(v)),$$

где $\Phi(v)$ — функция, обратная по отношению к $\varphi'(x) = G(x)$, т. е. $\Phi(v) = g'(v)$. В силу (1.7.19)

$$h(v) = vg'(v) - g'(v)G(g'(v)) + g(G(g')),$$

т. е., поскольку $G(g'(v)) = v$,

$$h(v) = g(v).$$

Теорема доказана.

В качестве примера построим особое решение уравнения Клеро

$$y = xy' - (y')^4.$$

Имеем: $g(v) = v^4$, $g'(v) = 4v^3$, $G(x) = \left(\frac{1}{4}x\right)^{1/3}$. Следовательно, особое решение $y = \varphi(x)$ имеет в силу (1.7.19) вид

$$y = x\left(\frac{1}{4}x\right)^{1/3} - \left(\frac{1}{4}x\right)^{4/3} = 3\left(\frac{1}{4}x\right)^{4/3}.$$

Таким образом, преобразование Лежандра переводит функцию v^4 в функцию $3\left(\frac{1}{4}x\right)^{4/3}$.

Глава II

НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ

§ 1. Вспомогательные сведения

В этом параграфе изложены сведения из математического анализа, которые будут использоваться в дальнейшем.

1. Векторные функции скалярного аргумента. Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$ (n раз), где $\mathbf{R}$ — вещественная числовая прямая. Символ $\mathbf{R}^n$ обозначает векторное пространство, состоящее из векторов x с n вещественными координатами $x_1, \ldots, x_n$, которые мы будем рассматривать как векторы-столбцы. Обозначение:

$$x = \operatorname{colon}(x_1, \ldots, x_n), \quad 0 = \operatorname{colon}(0, \ldots, 0).$$

Одновременно $\mathbf{R}^n$ можно рассматривать как точечное (аффинное) пространство, элементами которого являются точки x с координатами $x_1, \ldots, x_n$, причем каждой паре точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ соответствует вектор, равный $y - x = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$. Векторное пространство $\mathbf{R}^n$ нормируем с помощью нормы

$$\|x\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

Тогда аффинное пространство $\mathbf{R}^n$ становится метрическим с расстоянием $\rho(x, y) = \|y - x\|$.

Замечание. Можно рассматривать и любую другую норму. В частности, рассматривать $\mathbf{R}^n$ как евклидово векторное и точечное пространство. В этом случае $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

В этом параграфе под окрестностью точки $x \in \mathbf{R}^n$ будем понимать ее шаровую окрестность, т. е. множество точек $y \in \mathbf{R}^n$ таких, что $\rho(x, y) < \alpha$ при некотором $\alpha > 0$. Говорят, что последовательность x^k ($x^k \in \mathbf{R}^n$, $k \in \mathbf{N}$) имеет пределом при $k \to \infty$ точку $a \in \mathbf{R}^n$ и обозначают

$$\lim_{k \to \infty} x^k = a,$$

если последовательность расстояний $\rho(x^k, a) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$. Из определения нормы видим, что сходимость последовательности x^k эквивалентна покоординатной сходимости, т. е. для любого j, $1 \leqslant j \leqslant n$, пределом последовательности $x^k{}_j$ координат точек x^k является a_j. Последовательность x^k называется последовательностью Коши, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $K > 0$ такое, что из $i \geqslant K$, $k \geqslant K$ вытекает $\|x^k - x^i\| \leqslant \varepsilon$. В $\mathbf{R}^n$ всякая сходящаяся последовательность есть последовательность Коши, и наоборот.

Рядом в $\mathbf{R}^n$ называется символ $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$, $x \in \mathbf{R}^n$. Его суммой S называется предел последовательности S^l его частичных сумм:

$$S = \lim_{l \to \infty} S^l, \quad S^l = \sum_{k=1}^{l} x^k.$$

Пусть $I \subset \mathbf{R}$, f — отображение I в $\mathbf{R}^n$. Тогда $f(t)$, $t \in I$, будем называть n-мерной векторной функцией скалярного аргумента t, определенной на множестве I. Поскольку сходимость в $\mathbf{R}^n$ покоординатная, непрерывность $f(t)$ (определяемая обычным образом) равносильна непрерывности координатных функций $f_i : I \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$. В дальнейшем для определения используем координатные признаки: $f(t)$ называется дифференцируемой в точке t, если дифференцируема каждая координатная функция $f_i(t)$, причем, по определению, полагаем

$$f'(t) = \mathrm{colon}(f_1'(t), \ldots, f_n'(t));$$

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}^n$ называется интегрируемой на $\langle a, b\rangle$, если интегрируема каждая из координатных функций, и, по определению,

$$\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)_i = \int_a^b f_i(t)\,dt, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Справедливо неравенство

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leqslant \left| \int_a^b \|f(t)\|\,dt \right|. \qquad (2.1.1)$$

Действительно,

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| = \max \left| \int_a^b f_i(t)\,dt \right| \leqslant \max_i \left| \int_a^b |f_i(t)|\,dt \right| \leqslant \left| \int_a^b \|f(t)\|\,dt \right|.$$

Рассмотрим последовательность функций $f^k : \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}^n$, $k \in \mathbf{N}$. Будем говорить, что последовательность сходится равномерно относительно $t \in \langle a, b\rangle$ к функции $f : \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}^n$, и обозначать

$$f^k(t) \underset{k \to \infty}{\rightrightarrows} f(t),$$

если последовательность $\|f^k(t) - f(t)\| \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно относительно $t \in \langle a, b\rangle$. Это равносильно равномерной покоординатной сходимости. Соответственно определяется равномерная сходимость функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f^k(t)$.

Признак Вейерштрасса: если при $t \in I$ $\|f^k(t)\| \leqslant \alpha_k$ и ряд $\Sigma \alpha_k$ сходится, то ряд $\Sigma f^k(t)$ сходится равномерно. При этом если $f^k(t)$ непрерывны на I, то и сумма ряда непрерывна на I.

2. Матричные функции скалярного аргумента. Рассмотрим матрицу X, состоящую из n строк и m столбцов. Элемент этой матрицы на пересечении i-й строки и j-го столбца будем обозначать через X_{ij}, $X_{ij} \in \mathbf{R}$. Запись:

$$X = \{X_{ij}\} \quad (i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, m).$$

Множество таких матриц будем обозначать через $\mathfrak{R}^{n,m}$. Так как сумма матриц из $\mathfrak{R}^{n,m}$ и умножение их на вещественные числа определяются как поэлементное суммирование и умножение, то пространство $\mathfrak{R}^{n,m}$ можно отождествить с пространством $\mathbf{R}^{nm}$. Это позволяет применять к $\mathfrak{R}^{n,m}$ определения из п. 1. В частности,

$$\|X\| = \max_{i,j} |X_{ij}|.$$

Для $X \in \mathfrak{R}^{n,m}$ и $Y \in \mathfrak{R}^{m,l}$ определено произведение $Z = XY \subset \mathfrak{R}^{n,l}$ по формуле

$$Z_{ij} = \sum_{k=1}^{m} X_{ik} Y_{kj}. \tag{2.1.2}$$

Из (2.1.2) и определения нормы матрицы следует, что

$$\|XY\| \leqslant m \|X\| \cdot \|Y\|. \tag{2.1.3}$$

Нулевой матрицей $0 \in \mathfrak{R}^{n,m}$ называют матрицу, все элементы которой равны нулю. Матрицу $X = E_n \in \mathfrak{R}^{n,n}$ называют единичной, если $X_{ij} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases}$$

Матрица $X \in \mathfrak{R}^{n,n}$ называется неособой, если $\det X \neq 0$. Неособая матрица имеет обратную матрицу X^{-1}, определяемую равенствами

$$XX^{-1} = X^{-1}X = E_n.$$

Матричной функцией $\Phi(t)$ скалярного аргумента t называется отображение $\Phi : (a, b) \to \mathfrak{R}^{n,m}$. Отождествляя $\mathfrak{R}^{n,m}$ и $\mathbf{R}^{nm}$, переносим на матричные функции определения и свойства векторных функций скалярного аргумента. В частности, функция $\Phi : \langle a, b \rangle \to \mathfrak{R}^{n,m}$ называется дифференцируемой, если дифференцируемы ее элементы $\Phi_{ij}(t)$, причем, по определению, $\Phi'(t) = \{\Phi'_{ij}(t)\}$. Сходимость в $\mathbf{R}^n$ покоординатная, поэтому

$$\Phi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} [\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)]. \tag{2.1.4}$$

Справедлива формула

$$(\Phi\Psi)' = \Phi'\Psi + \Phi\Psi'. \tag{2.1.5}$$

Действительно, в силу (2.1.2)

$$(\Phi\Psi)'_{ij}=\sum_{k=1}^{m}(\Phi'_{ik}\Psi_{kj}+\Phi_{ik}\Psi'_{kj}),$$

откуда и следует (2.1.5).

3. Векторные функции векторного аргумента. Множество $U\subset\mathbf{R}^n$ называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых множеств, каждое из которых не содержит предельных точек другого. Будем называть путем, соединяющим точки $x^1\in U$ и $x^2\in U$ и лежащим в U, непрерывное отображение $u:[0, 1]\mapsto U$, где $u(0)=x^1$, $u(1)=x^2$, $u(s)\in U$ $(s\in[0, 1])$.

Известно, что открытое множество связно тогда и только тогда, когда две произвольные его точки могут быть соединены путем, лежащим в этом множестве. Областью называется связное открытое множество. Область называется выпуклой, если в качестве пути, соединяющего произвольные точки x^1 и x^2 и лежащего в U, можно взять отрезок прямой, т. е.

$$u(s)=x^1+s(x^2-x^1). \tag{2.1.6}$$

Векторной функцией векторного аргумента, определенной в области $G\subset\mathbf{R}^m$, мы называем отображение $f:G\to\mathbf{R}^n$. Непрерывность этого отображения эквивалентна непрерывности каждой из координатных функций $f_i:G\to\mathbf{R}$, $i=1, ..., n$, как функций нескольких вещественных переменных. Функцию $f(x):G\to\mathbf{R}^n$ называют непрерывно дифференцируемой и пишут $f\in C^1(G)$, если в области G существуют и непрерывны всевозможные частные производные $\partial f_k/\partial x_i$ $i=1, ..., m;$ $k=1, ..., n$. Производной $\partial f/\partial x$ в точке $x_0\in G$ называется линейное отображение $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$, задаваемое матрицей Якоби:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)\dots\dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)\dots\dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_0)\end{pmatrix}. \tag{2.1.7}$$

С помощью (2.1.2) легко убедиться в справедливости следующего правила дифференцирования сложной функции. Пусть $u:G\subset\mathbf{R}^l\to D\subset\mathbf{R}^m$, $f:D\to\mathbf{R}^n$ — функции класса C^1, тогда $g(x)=f(u(x))$ есть функция класса C^1 в области G и

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}(u(x))\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2.1.8}$$

4. Формула конечных приращений. Пусть $f:G\to\mathbf{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая функция, $G\subset\mathbf{R}^m$ — выпуклая область.

Пусть, далее, $x^1 \in G$, $x^2 \in G$. Определим $u(s):[0, 1] \to \mathbf{R}^m$ по формуле (2.1.6). Так как G — выпуклая область, то $u(s) \in G$. Очевидно,

$$f(x^2)-f(x^1)=\int_0^1 \frac{df(u(s))}{ds}\,ds,$$

но так как в силу (2.1.8) и (2.1.6)

$$\frac{df(u(s))}{ds}=\frac{\partial f}{\partial x}(u(s))(x^2-x^1),$$

то

$$f(x^2)-f(x^1)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(u(s))\,ds\cdot(x^2-x^1). \tag{2.1.9}$$

Формула (2.1.9) называется *формулой конечных приращений.* При $n=m=1$ она превращается в формулу Лагранжа для скалярных функций.

Пусть теперь в (2.1.9) $x^2 \to x^1$. Тогда $u(s) \to x^1$. По непрерывности матрицы Якоби

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u(s))=\frac{\partial f}{\partial x}(x^1)+\Delta(x^1, x^2, s),$$

где $\Delta(x^1, x^2, s)$ — матрица, обладающая свойством $\|\Delta\| \to 0$ при $\|x^2-x^1\| \to 0$. Отсюда и из (2.1.9) получаем

$$f(x^2)=f(x^1)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^1)(x^2-x^1)+r(x^1, x^2), \tag{2.1.10}$$

где

$$\frac{\|r(x^1, x^2)\|}{\|x^2-x^1\|} \to 0 \text{ при } \|x^2-x^1\| \to 0. \tag{2.1.11}$$

Формула (2.1.10) называется *формулой Тейлора.*

5. Условие Липшица. Пусть $x \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^l$, D — множество в $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l$, G — область в $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l$, f — непрерывное отображение в $\mathbf{R}^n$. Введем следующие определения.

Функция $f(x, y): D \to \mathbf{R}^n$ удовлетворяет *условию Липшица* по x (*глобально* на D), если

$$(\bar{x}, y) \in D,\ (\bar{\bar{x}}, y) \in D \Rightarrow \|f(\bar{x}, y)-f(\bar{\bar{x}}, y)\| \leqslant L\|\bar{\bar{x}}-\bar{x}\|,$$

где $L>0$ — постоянная, не зависящая от выбора точек $(\bar{x}, y)$, $(\bar{\bar{x}}, y)$ (она называется *постоянной Липшица*).

Функция $f(x, y): G \to \mathbf{R}^n$ удовлетворяет *условию Липшица* по x *локально* в G, если для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ можно указать ее окрестность $V(x_0, y_0)$, сужение f на которую удовлетворяет условию Липшица глобально в $V(x_0, y_0)$.

Из определения нормы следует, что выполнение условия Липшица (локально или глобально) для векторной функции эквивалентно выполнению условия Липшица для каждой из координатных функций.

Очевидно, что если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по x глобально на множество D, то она равномерно непрерывна по x на этом множестве. С другой стороны, как показывает следующая лемма, из непрерывной дифференцируемости f по x в области G следует, что $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по x локально в G.

Лемма 2.1.1. *Если $f(x, y): G \to \mathbf{R}^n$ есть функция класса C^1 по x в области G, то она удовлетворяет условию Липшица по x локально в G.*

Доказательство. Рассмотрим окрестность V точки $(x_0, y_0) \in G$ такую, что $V \subset G$ и в V

$$|\partial f_k/\partial x_i| \leqslant M \quad (i=1,\dots, m; \quad k=1,\dots, n).$$

Такая окрестность существует в силу непрерывности $\partial f/\partial x$. Так как $V = V_m \times V_l$, где V_m и V_l — окрестности точек x_0 и y_0 в $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^l$ соответственно, а окрестность точки — выпуклая область, то к разности $f(\bar{x}, y) - f(\bar{\bar{x}}, y)$, где y рассматривается как параметр, можно применить формулу конечных приращений (2.1.9). Тогда для любого $y \in V_l$, используя (2.1.1) и (2.1.3), имеем

$$\|f(\bar{\bar{x}}, y) - f(\bar{\bar{x}}, y)\| \leqslant L\|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\|, \quad L = mM,$$

для любых точек $(\bar{x}, y) \in V$, $(\bar{\bar{x}}, y) \in V$, что и требовалось доказать.

Следующая лемма устанавливает связь между глобальным и локальным выполнением условия Липшица для данной функции.

Лемма 2.1.2. *Если $f(x, y): G \to \mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица (по x) в G глобально, то она удовлетворяет условию Липшица и локально. Если же f удовлетворяет в G условию Липшица локально, то она удовлетворяет условию Липшица на любом компактном подмножестве области G (глобально).*

Доказательство. Первое утверждение леммы вытекает из данных выше определений. Докажем второе. Если оно неверно, то существуют компакт $K \subset G$ и последовательности положительных чисел L_k, $k \in \mathbf{N}$, $L_k \to \infty$ и точек $(\bar{x}^k, y^k) \in K$, $(x^k, y^k) \in K$ таких, что

$$\|f(\bar{x}^k, y^k) - f(x^k, y^k)\| > L_k\|\bar{x}^k - \bar{\bar{x}}^k\|. \tag{2.1.12}$$

Так как K — компакт, то из последовательностей $(\bar{x}^k, y^k)$, $(\bar{\bar{x}}^k, y^k)$ можно выбрать сходящиеся последовательности $(\bar{x}^{k_l}, y^{k_l})$, $(\bar{\bar{x}}^{k_l}, y^{k_l})$. Пусть $(\bar{x}^{k_l}, y^{k_l}) \to (x_0, y_0)$, $(\bar{\bar{x}}^{k_l}, y^{k_l}) \to (\bar{\bar{x}}_0, y_0)$ при $k_l \to \infty$. Рассмотрим функцию $F(\bar{x}, \bar{\bar{x}}, y): U \to \mathbf{R}$, где $U \subset \mathbf{R}^{2m+l}$ состоит из точек окрестности $(\bar{x}_0, \bar{\bar{x}}_0, y_0)$ в пространстве $\mathbb{R}^{2m+l}$, у которых $\bar{x} \neq \bar{\bar{x}}$, определяемую формулой

$$F(\bar{x}, \bar{\bar{x}}, y) = \frac{\|f(\bar{x}, y) - f(\bar{\bar{x}}, y)\|}{\|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\|}.$$

Если радиус окрестности достаточно мал, то $F(\bar{x}, \bar{\bar{x}}, y)$ ограничена в U (при $\bar{x}_0 \neq \bar{\bar{x}}_0$ это следует из непрерывности f, а при $\bar{x}_0 = \bar{\bar{x}}_0 = x_0$ — из выполнения для f условия Липшица по x в окрестности точки (x_0, y_0)), что противоречит (2.1.12) для достаточно больших k_i. Полученное противоречие доказывает лемму.

6. Теорема о неявной функции. Пусть $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$, V — окрестность точки (x_0, y_0) в $\mathbb{R}^{m+l}$, $\Phi: V \to \mathbb{R}^l$ — непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$\det \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Тогда существуют окрестность W точки x_0 ($W \subset \mathbb{R}^m$) и единственная функция $\varphi(x) \in C^1(W)$ такая, что $\varphi(x_0) = y_0$ и при всех $x \in W$

$$\Phi(x, \varphi(x)) = \Phi(x_0, y_0). \tag{2.1.13}$$

Дифференцируя (2.1.13) по x, получаем следующее выражение для производной:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \varphi(x)). \tag{2.1.14}$$

§ 2. Системы дифференциальных уравнений. Общие положения

Пусть $f_1(x, y_1, \ldots, y_N), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_N)$ — непрерывные* в области G $(N+1)$-мерного пространства $Oxy_1 \ldots y_N$ скалярные функции. Пусть $N = m_1 + \ldots + m_n$. Совокупность уравнений

$$\begin{aligned} y_1^{(m_1)}(x) &= f_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(m_n)}(x) &= f_n\left(x, y_1 y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}\right) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

называется системой дифференциальных уравнений порядка n.

Определение 2.2.1. *Решением системы дифференциальных уравнений* (2.2.1) *называется совокупность n функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, определенных на промежутке $\langle a, b\rangle$ вещественной оси, если выполняются следующие условия:*

---

* Как и в гл. I, в дальнейшем условие непрерывности считается выполненным автоматически.

1) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — *соответственно* $m_1, \ldots, m_n$ *раз дифференцируемы при* $x \in \langle a, b\rangle$;

2) *при всех* $x \in \langle a, b\rangle$

$$\left(x, \varphi_1(x), \varphi_1'(x), \ldots, \varphi_1^{(m_1-1)}(x), \ldots, \varphi_n(x), \varphi_n'(x), \ldots, \varphi_n^{(m_n-1)}(x)\right) \in G;$$

3) *при всех* $x \in \langle a, b\rangle$

$$\varphi_1^{(m_1)}(x) = f_1\left(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n^{(m_n-1)}(x)\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n^{(m_n)}(x) = f_n\left(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n^{(m_n-1)}(x)\right).$$

Из определения следует, что $\varphi_k \in C^{m_k}(\langle a, b\rangle)$, $k=1, \ldots, n$. Важными частными случаями системы (2.2.1) являются: при $n=1$ — *дифференциальное уравнение порядка* m

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}), \tag{2.2.2}$$

а при $m_1 = \ldots = m_n = 1$ — *нормальная система дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Покажем, что любую систему (2.2.1) можно свести к нормальной системе N уравнений. Положим

$$\begin{aligned} &z_1 = y_1, z_2 = y_1', \ldots, z_{m_1} = y_1^{(m_1-1)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &z_{m_1+\ldots+m_{n-1}+1} = y_n, z_{m_1+\ldots+m_{n-1}+2} = y_n', \ldots, z_N = y_n^{(m_n-1)}. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Тогда (2.2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} &z_1' = z_2, \ldots, z_{m_1-1}' = z_{m_1}, z_{m_1}' = f_1(x, z_1, \ldots, z_N), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &z_{m_1+\ldots+m_{n-1}+1}' = z_{m_1+\ldots+m_{n-1}+2}, \ldots, \\ &z_N' = f_n(x, z_1, \ldots, z_N). \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Система (2.2.5) есть нормальная система N уравнений. Она эквивалентна системе (2.2.1) в том смысле, что если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — решение (2.2.1), то $\varphi_1, \varphi_1', \ldots, \varphi_1^{(m_1-1)}, \ldots, \varphi_n, \varphi_n', \ldots, \varphi_n^{(m_n-1)}$ — решение (2.2.5), а если $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ — решение (2.2.5), то $\varphi_1, \varphi_{m_1+1}, \ldots, \varphi_{m_1+\ldots+m_{n-1}+1}$ — решение (2.2.1).

Из сказанного следует, что, не уменьшая общности, можно ограничиться рассмотрением нормальных систем. Замена (2.2.4) показывает, как определения и утверждения, сделанные применительно к нормальным системам, можно перенести на случай систем вида (2.2.1) и, в частности, на случай одного уравнения (2.2.2).

Итак, заменяем N на n и рассматриваем систему (2.2.3). Определение 2.2.1 применимо к системе (2.2.3) как к частному случаю. Здесь G — область пространства $Oxy_1 \ldots, y_n$. Если $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — решение системы (2.2.3) на промежутке $\langle a, b\rangle$, то множество точек $(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, $x \in \langle a, b\rangle$, называется *интегральной кривой*. По определению решения интегральная кривая принадлежит области G.

Задача Коши для системы (2.2.3) становится следующим образом: найти решение $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ системы, определенное в окрестности точки x_0, которое удовлетворяет начальным условиям $\varphi_1(x_0)=y^0{}_1, \ldots, \varphi_n(x_0)=y^0{}_n$, где $(x_0, y^0{}_1, \ldots, y^0{}_n)$ — заданная точка из области G. Координаты этой точки называются начальными данными. Геометрически это означает, что требуется построить интегральную кривую, проходящую через заданную точку области G.

Теорема 2.2.1 (теорема Пеано). *Для каждой точки $(x_0, y^0{}_1, \ldots, y^0{}_n)$ существует решение задачи Коши с начальными данными $(x_0, y^0{}_1, \ldots, y^0{}_n)$, определенное на отрезке*

$$P(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) = [x_0 - h, x_0 + h],$$

где $h(x_0, y^0{}_1, \ldots, y^0{}_n)$ определяется следующим образом: пусть $R \subset G$,

$$R = \{(x, y_1, \ldots, y_n) : |x - x_0| \leqslant a, \ |y_i - y_i^0| \leqslant b, \ i = 1, \ldots, n\},$$

и $|f_k(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant M$, $k = 1, \ldots, n$, на R, тогда

$$h = \min\{a, b/M\}.$$

Отрезок P, построенный указанным образом по точке $(x_0, y^0{}_1, \ldots, y^0{}_n) \in G$, называется *отрезком Пеано*.

Теорема 2.2.1 доказывается с помощью ломаных Эйлера аналогично тому, как в § 2 гл. 1 она была доказана для $n=1$ (лемма Асколи — Арцела при $n>1$ справедлива). Поэтому доказательство теоремы 2.2.1 мы опускаем. В § 3 настоящей главы, используя построения, отличные от ломаных Эйлера, докажем теорему 2.2.1 в предложении, что $f_1, \ldots, f_n$ удовлетворяют условию Липшица по $y=(y_1, \ldots, y_n)$ локально. При этом G окажется областью единственности, т. е. любые два решения, определенные на промежутке $\langle a, b\rangle$ и совпадающие при некотором $x_0 \in \langle a, b\rangle$, совпадают на всем $\langle a, b\rangle$.

Наряду с интегральной кривой каждому решению сопоставляется другой геометрический объект — *траектория*.

Определение 2.2.2. *Траекторией решения* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *системы* (2.2.3), *определенного на промежутке* $\langle a, b\rangle$, *называется множество точек* $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, $x \in \langle a, b\rangle$, *пространства* $Oy_1 \dots y_n$, *называемого фазовым пространством.*

Очевидно, траектория решения является проекцией соответствующей интегральной кривой в фазовое пространство $Oy_1 \dots y_n$.

В то время как пересечение (с общей касательной) интегральных кривых означает нарушение единственности решения задачи Коши, траектории в фазовом пространстве могут пересекаться без нарушения единственности, так как начальная точка определяется $n+1$ координатой. Траектория может совпадать с точкой. Такая точка называется положением равновесия (точкой покоя). Так как положение равновесия является траекторией постоянного решения, то $(y^0_1, \dots, y^0_n)$ будет положением равновесия тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} f_1(x, y_1^0, \dots, y_n^0) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x, y_1^0, \dots, y_n^0) = 0 \end{gathered}$$

при всех x из некоторого промежутка $\langle a, b\rangle$.

3. Механическая интерпретация нормальной системы. Первоначальным стимулом к изучению дифференциальных уравнений явился тот факт, что уравнения движения механических систем принимают вид нормальной системы дифференциальных уравнений, если за неизвестные функции взять обобщенные скорости и координаты. При этом роль независимой переменной играет время. Каждому решению нормальной системы соответствует движение механической системы. Если область, в которой определены дифференциальные уравнения, есть область единственности, то процессы детерминированы. Траектория — это путь, по которому в фазовом пространстве движется точка, соответствующая механической системе. Название «положение равновесия» (или «точка покоя») приобретает ясный механический смысл. Традиционная механическая терминология и обозначения сохранились в теории дифференциальных уравнений до настоящего времени. Следуя этому, в дальнейшем будем называть независимую переменную временем и обозначать через t, фиксированные значения t — моментами времени. Систему (2.2.3) будем записывать в виде

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{gathered} \tag{2.2.6}$$

(точка обозначает дифференцирование по времени). Система (2.2.6) и является объектом дальнейших исследований.

4. Векторная запись нормальной системы. Рассмотрим систему (2.2.6). Пусть

$$x = \operatorname{colon}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

$$f : G \to \mathbf{R}^n, \ G \subset \mathbf{R}^{n+1}, \ f = \operatorname{colon}(f_1, \ldots, f_n).$$

Тогда (2.2.6) принимает вид дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{2.2.7}$$

где $f : G \to \mathbf{R}^n$ — непрерывная функция.

В соответствии с определением 2.2.1 решением дифференциального уравнения (2.2.7) назовем функцию $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}^n$, если выполнены следующие условия:

1) $\varphi(t)$ дифференцируема при всех $t \in \langle a, b\rangle$;
2) $(t, \varphi(t)) \in G$ при всех $t \in \langle a, b\rangle$;
3) $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ при всех $t \in \langle a, b\rangle$.

Важным частным случаем нормальных систем являются линейные системы. В скалярной форме линейная система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= P_{11}(t) x_1 + \ldots + P_{1n}(t) x_n + q_1(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= P_{n1}(t) x_1 + \ldots + P_{nn}(t) x_n + q_n(t). \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Здесь $P_{11}(t), \ldots, P_{nn}(t), q_1(t), \ldots, q_n(t)$ — непрерывные на интервале (a, b) скалярные функции. В векторной функции систему (2.2.8) записывают с помощью матрицы коэффициентов

$$P(t) = \{P_{ij}(t)\}, \ i, j = 1, \ldots, n,$$

следующим образом:

$$\dot{x} = P(t) x + q(t). \tag{2.2.9}$$

Легко видеть, что (2.2.8) — координатная запись (2.2.9).

Замечание. Если под x понимать вектор-строку $(x_1, \ldots, x_n)$, то вместо (2.2.9) векторная запись системы (2.2.8) принимает вид

$$\dot{x} = x P^*(t) + q(t),$$

где $P^*(t)$ — транспонированная матрица $P(t)$, $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$.

В векторной форме начальные данные задачи Коши принимают вид $(t_0, x_0) \in G$, где $t_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$, решение $\varphi(t)$ задачи Коши должно удовлетворять условию $\varphi(t_0) = x_0$.

Задаче Коши с начальными данными (t_0, x_0) для дифференциального уравнения (2.2.7) сопоставим интегральное уравнение в векторной форме

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds. \tag{2.2.10}$$

Определение 2.2.3. *Функция* $\varphi:\langle a, b\rangle\to\mathbf{R}^n$ *называется решением уравнения* (2.2.10), *если выполняются следующие условия:*

1) $\varphi(t)$ *непрерывна на промежутке* $\langle a, b\rangle$, $t_0\in\langle a, b\rangle$;

2) $(t, \varphi(t))\in G$ *при всех* $t\in\langle a, b\rangle$;

3) *при всех* $t\in\langle a, b\rangle$

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds. \qquad (2.2.11)$$

Используя правила дифференцирования и интегрирования функций со значениями в $\mathbf{R}^n$, точно так же, как теорему 1.1.1, докажем следующее утверждение.

Теорема 2.2.2. *Функция* $\varphi:\langle a, b\rangle\to\mathbf{R}^n$ *является решением задачи Коши для дифференциального уравнения* (2.2.7) *с начальными данными* $(t_0, x_0)\in G$ *тогда и только тогда, когда она является решением интегрального уравнения* (2.2.10).

§ 3. Теорема существования и единственности

1. Пусть даны уравнения (2.2.7) и начальная точка $(t_0, x_0)\in G$. Рассмотрим вопрос о существовании решения задачи Коши с этими начальными данными. Будем фактически строить искомое решение методом последовательных приближений. Как отмечалось в п. 2 § 2, это можно было бы сделать с помощью ломаных Эйлера. Здесь мы используем другую схему последовательных приближений — так называемые *последовательные приближения Пикара.* Определяются они следующим образом.

Нулевое приближение $\varphi^0:\langle a_0, b_0\rangle\to\mathbf{R}^n$ — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\varphi(t_0)=x_0$. Здесь положим $\varphi^0(t)=x_0$, $t\in\langle a_0, b_0\rangle$. Пусть $\langle a_1, b_1\rangle$ — такой промежуток, что $t_0\in(a_1, b_1)$ и при $t\in\langle a_1, b_1\rangle$ $(t, \varphi^0(t))\subset G$. Тогда первое приближение $\varphi^1:\langle a_1, b_1\rangle\to\mathbf{R}^n$ определим формулой

$$\varphi^1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x_0)\,ds. \qquad (2.3.1)$$

Вообще, при $k\in\mathbf{N}$, если $\varphi^{k-1}:\langle a_{k-1}, b_{k-1}\rangle\to\mathbf{R}^n$, $\langle a_k, b_k\rangle\subset\subset\langle a_{k-1}, b_{k-1}\rangle$, $t_0\in(a_k, b_k)$ и при $t\in\langle a_k, b_k\rangle$ $(t, \varphi^{k-1}(t))\in G$, то

$$\varphi^k(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi^{k-1}(s))\,ds. \qquad (2.3.2)$$

Отметим, что $\varphi^k(t_0)=x_0$, $k\in\mathbf{N}_0$. Таким образом, первые k приближении $\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^k$ определены на некотором промежутке $\langle a_k, b_k\rangle$, содержащем t_0 как внутреннюю точку.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $f(t, x):G\to\mathbf{R}^n$ *удовлетворяет условию Липшица по* x *(глобально) на замкнутом множестве* $D\subset G$. *Пусть,* *далее, все пикаровские приближения* (2.3.1), (2.3.2), *построенные по точке* $(t_0, x_0)\in D$, *определены на отрезке* $[a, b]$, *причем при* $t\in[a, b]$ $(t, \varphi^k(t))\in D$. *Тогда последовательность функций* $\varphi^k(t)$ *сходится равномерно на* $[a, b]$ *и предельная функция* $\varphi(t)$ *является решением уравнения* (2.2.7), *удовлетворяющим условию* $\varphi(t_0)=x_0$.

Доказательство. Вопрос о сходимости последовательности $\varphi^k(t)$ заменим эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi^k(t), \tag{2.3.3}$$

где $\psi^0=\varphi^0$, $\psi^k=\varphi^k-\varphi^{k-1}$, $k\in\mathbb{N}$. Наша цель — построить сходящийся числовой ряд, который мажорирует на $[a, b]$ ряд (2.3.3). Тогда по признаку Вейерштрасса (см. конец п. 1 § 1) ряд (2.3.3) будет сходиться равномерно на $[a, b]$.

Пусть L — постоянная Липшица функции $f(t, x)$ на множестве D,

$$N=\sup_{t\in[a,b]} \|f(t, x_0)\|. \tag{2.3.4}$$

Докажем, что при $t\in[a, b]$ и $k\in\mathbb{N}$

$$\|\psi^k(t)\|\leqslant \frac{N}{L}\,\frac{(L\,|t-t_0|)^k}{k!} \tag{2.3.5}$$

В силу (2.3.1), (2.3.4) и (2.1.1) при $t\in[a, b]$

$$\|\psi^1(t)\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|f(s, x_0)\|\,ds\right|\leqslant N\,|t-t_0|,$$

что доставляет базу для индукции по k. Далее, на основании (2.3.2)

$$\|\psi^{k+1}(t)\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|f(s, \varphi^k(s))-f(s, \varphi^{k-1}(s))\|\,ds\right|.$$

Так как f удовлетворяет на множестве D условию Липшица с постоянной Липшица L, то при $t\in[a, b]$

$$\|\psi^{k+1}(t)\|\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}\|\varphi^k(s)-\varphi^{k-1}(s)\|\,ds\right|=L\left|\int_{t_0}^{t}\|\psi^k(s)\|\,ds.\right.$$

Пусть (2.3.5) справедлива при некотором k. Тогда при $t\in[a, b]$

$$\|\psi^{k+1}(t)\|\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}\frac{N}{L}\,\frac{(L\,|s-t_0|)^k}{k!}\,ds\right|,$$

откуда

$$\|\psi^{k+1}(t)\| \leqslant \frac{N}{L} \frac{(L|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad t \in [a, b].$$

Тем самым справедливость (2.3.5) при $k \in \mathbf{N}$ доказана. Следовательно, при $t \in [a, b]$ ряд (2.3.3) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\|x_0\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N}{L} \frac{[L(b-a)]^k}{k!}.$$

Пусть $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ — предельная функция. Покажем, что $\varphi(t)$ — решение рассматриваемой задачи Коши. Очевидно, $\varphi(t_0) = x_0$, так как $\varphi^k(t_0) = x_0$ при всех k. Проверим, что $\varphi(t)$ — решение уравнения (2.2.10). Условие 1) определения 2.2.3 выполняется по признаку Вейерштрасса, условие 2) выполняется в силу замкнутости D. Осталось проверить справедливость (2.2.11). Перейдем в (2.3.2) к пределу при $k \to \infty$. Так как $\varphi^k \rightrightarrows \varphi$, а f удовлетворяет на D условию Липшица по x, то

$$f(t, \varphi^k(t)) \underset{k \to \infty}{\rightrightarrows} f(t, \varphi(t)).$$

Следовательно, в (2.3.2) можно перейти к пределу под знаком интеграла, что дает (2.2.11). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Ниже (теорема 2.3.2) будет доказано, что в условиях теоремы 2.3.1 любая область $U \subset D$ является областью единственности.

С л е д с т в и е. *Пусть (2.2.7) — линейная система, т. е.*

$$f(t, x) = P(t)x + q(t), \tag{2.3.6}$$

где $P : (a, b) \to \mathfrak{R}^{n,n}$, $q : (a, b) \to \mathbf{R}^n$. Для любых $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$ решение задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0) определено на всем интервале (a, b). При этом $G = (a, b) \times \mathbf{R}^n$ является областью единственности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $D = [\alpha, \beta] \times \mathbf{R}^n$, где $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Функция (2.3.6) удовлетворяет на D условию Липшица по x. Действительно, если $(t, \bar{x}) \in D$, $(t, \bar{\bar{x}}) \in D$, то

$$\|f(t, \bar{x}) - f(t, \bar{\bar{x}})\| \leqslant n\|P(t)\| \cdot \|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\| \leqslant L\|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\|,$$

где

$$L = n \max_{t \in [\alpha, \beta]} \|P(t)\|.$$

Последовательные приближения определены на $[\alpha, \beta]$. Так как D замкнуто, то все условия теоремы 2.3.1 выполнены. Поэтому если $t_0 \in [\alpha, \beta]$, то решение $\varphi_{\alpha,\beta}(t)$ задачи Коши определено на $[\alpha, \beta]$. Так как $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ — любой отрезок, то в силу сделанного выше замечания функция $\varphi(t):(a, b)\to\mathbf{R}^n$, сужение которой на $[\alpha, \beta]$ совпадает с $\varphi_{\alpha,\beta}(t)$, является решением на интервале (a, b), а G — областью единственности.

Пример 2.3.1. Рассмотрим скалярное уравнение $y'=y$. Для построения решения с начальными данными $(0, y_0)$ воспользуемся методом последовательных приближений Пикара. Имеем

$$\varphi^0=y_0,\ \varphi^1=y_0+\int\limits_0^x y_0 ds=y_0(1+x),$$

$$\varphi^2=y_0+\int\limits_0^x y_0(1+s) ds=y_0\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)$$

и по индукции докажем, что при всех $k\in\mathbf{N}$

$$\varphi^k(x)=y_0\left(1+x+\ldots+\frac{1}{k!}x^k\right). \tag{2.3.7}$$

При $k\to\infty$ $\varphi^k(x)\to y_0e^x$ [ср. (2.3.7) и (1.2.7)].

Задача 2.3.1. Найти в условиях теоремы 2.3.1 оценку погрешности для k-го приближения Пикара.

Ответ. $\dfrac{N}{L}\dfrac{(L(b-a))^{k+1}}{k!}$.

2. Чтобы применить теорему 2.3.1 для доказательства существования решения задачи Коши, нужно найти условия, при которых все пикаровские приближения (2.3.2) определены на общем отрезке. Оказывается, таким общим отрезком может служить отрезок Пеано (см. теорему 2.2.1).

Теорема 2.3.2 (теорема существования и единственности). *Пусть $f: G\to\mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица по x в области G локально. Тогда:*

1) *для любой начальной точки $(t_0, x_0)\in G$ существует решение задачи Коши, определенное на отрезке Пеано;*

2) *область G есть область единственности.*

Доказательство. Существование. По данному компакту $R\subset G$:

$$R=\{(t,x):|t-t_0|\leqslant a,\ \|x-x_0\|\leqslant b\}$$

определяем отрезок Пеано $[t_0-h,\ t_0+h]$, где

$$h=\min\{a, b/M\},\quad M=\sup_{(t,x)\in R}\|f(t,x)\|.$$

Покажем, что если положить $D=R$, $[a, b]=[t_0-h,\ t_0+h]$, то условия теоремы 2.3.1 выполнены. Так как $f(t, x)$ удовлетворяет в G условию Липшица по x локально, то она удовлетворяет условию Липшица по x на R (глобально) в силу леммы 2.1.2. Осталось доказать, что функции (2.3.2) определены при $t\in[t_0-h,\ t_0+h]$ и при этих t $(t,\ \varphi^k(t))\in R$. Поскольку $h\leqslant a$, достаточно доказать, что при $|t-t_0|\leqslant h$

$$\|\varphi^k(t)-x_0\|\leqslant b,\ k\in\mathbf{N}_0. \tag{2.3.8}$$

Применим индукцию по k. При $k=0$ неравенство очевидно. Оценим норму

$$\varphi^{k+1}(t)-x_0=\int\limits_{t_0}^{t} f(s,\varphi^k(s))\,ds.$$

Если предположить, что $\varphi^k(t)$ определено при $t\in[t_0-h,\ t_0+h]$ и (2.3.8) выполняется при некотором k, то в подынтегральной функции $(s,\ \varphi^k(s))\in R$. Тогда по определению M

$$\|\varphi^{k+1}(t)-x_0\|\leqslant M|t-t_0|\leqslant b,$$

что и требовалось доказать. Теперь существование решения задачи Коши, определенного при $|t-t_0|\leqslant h$, вытекает из теоремы 2.3.1.

Единственность. Рассмотрим два решения уравнения (2.2.7):

$$\varphi^i:\langle a,b\rangle\to\mathbf{R}^n,\ i=1,2,$$

причем при некотором $t_0\in\langle a,\ b\rangle$ $\psi^1(t_0)=\psi^2(t_0)$. Покажем, что $\psi^1(t)=\psi^2(t)$ при всех $t\in\langle a,\ b\rangle$.

Рассмотрим произвольный отрезок $[\alpha,\ \beta]\subset\langle a,\ b\rangle$, содержащий t_0. Положим

$$u(t)=\|\psi^1(t)-\psi^2(t)\|.$$

По теореме 2.2.2

$$u(t)=\left\|\int\limits_{t_0}^{t}(f(s,\psi^1(s))-f(s,\psi^2(s)))\,ds\right\|.$$

Так как интегральные кривые при $t\in[\alpha,\ \beta]$ — компактные множества, то по лемме 2.1.2 найдется постоянная $L>0$ такая, что

$$u(t)\leqslant L\left|\int\limits_{t_0}^{t}u(s)\,ds\right|,\ t\in[\alpha,\beta].$$

По лемме Гронуолла 1.3.1 $u(t)=0$ при $t\in[\alpha,\ \beta]$. Так как $[\alpha,\ \beta]$ — любой отрезок в $\langle a,\ b\rangle$, то $\psi^1(t)=\psi^2(t)$ при всех $t\in\langle a,\ b\rangle$. Теорема доказана.

Замечание. Из леммы 2.1.1 вытекает, что второе утверждение теоремы 2.3.2 при $n=1$ является усилением теоремы 1.1.4.

§ 4. Продолжение решений

Рассмотрим уравнение (2.2.7) и начальную точку $(t_0, x_0) \in G$. Предположим, что G является областью единственности. Даже при этом предположении решение задачи Коши определяется неединственным образом, так как решения могут отличаться областью определения. Так, для уравнения $y' = y$ из примера 2.3.1 функции $e^x : (-1, 1) \to \mathbf{R}$ и $e^x : (-2, 2) \to \mathbf{R}$ являются решениями задачи Коши с начальными данными (0, 1). «Полным» же решением является функция e^x, определенная при всех x.

К строгому определению «полного решения» можно прийти, используя понятие продолжения решения.

Определение 2.4.1. *Решение* $\varphi : \langle a, b \rangle \to \mathbf{R}^n$ *уравнения* (2.2.7) *называется продолжимыми вправо за точку* b, *если существует решение* $\psi : \langle a, b_1 \rangle \to \mathbf{R}^n$, $b_1 > b$, *сужение которого на* $\langle a, b \rangle$ *совпадает с* φ. *Решение* ψ *называется продолжением* φ *вправо.*

Аналогично определяется продолжение влево за точку a. В дальнейшем будем рассматривать вопросы продолжения решений только вправо, имея в виду, что теория продолжения влево строится совершенно аналогично.

Теорема 2.4.1. *Для того чтобы решение* $\varphi : [a, b) \to \mathbf{R}^n$ *уравнения* (2.2.7) *было продолжимо вправо, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел* $\lim\limits_{t \to b-0} \varphi(t) = \eta$ *и при этом* $(b, \eta) \in G$.

Доказательство. Необходимость указанных условий вытекает из определений решения и его продолжения.

Докажем их достаточность. Пусть $\varphi_1 : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$, $b \in (\alpha, \beta)$ — решение уравнения (2.2.7) с начальными данными (b, η). Это решение существует по теореме 2.2.1. Определим функцию $\psi : [a, \beta) \to \mathbf{R}^n$ следующим образом:

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t) \text{ при } t \in [a, b), \\ \varphi_1(t) \text{ при } t \in [b, \beta). \end{cases}$$

Положим

$$J(t) = \varphi(a) + \int_a^t f(s, \psi(s))\, ds.$$

При $t \in [a, b)$ $J(t) = \varphi(t) = \psi(t)$ по теореме 2.2.2 и согласно определению $\psi(t)$. При $t \in [b, \beta)$

$$J(t) = \varphi(a) + \int_a^b f(s, \varphi(s))\, ds + \int_b^t f(s, \varphi_1(s))\, ds =$$

$$= \eta + \int_b^t f(s, \varphi_1(s))\, ds = \varphi_1(t) = \psi(t)$$

по определению $\varphi_1(t)$ и $\psi(t)$. Следовательно, при $t\in[\alpha, \beta)$ $\psi(t)$ является решением интегрального уравнения (2.2.10), значит, решением дифференциального уравнения (2.2.7), сужение которого на $\{a, b\rangle$ есть $\varphi(t)$. Следовательно, $\varphi(t)$ продолжимо вправо. Теорема доказана.

Определение 2.4.2. *Решение $\varphi: I\to\mathbf{R}^n$ дифференциального уравнения* (2.2.7) *называется полным решением, а I — максимальным интервалом существования решения, если оно не продолжимо ни вправо, ни влево за I.*

Замечание. I — обязательно интервал, так как в противном случае по теореме 2.4.1 решение $\varphi(t)$ продолжимо за пределы I.

Полное решение можно получить с помощью следующей процедуры. Пусть $(t_0, x_0)\in G$ — начальная точка. По теореме 2.2.1 решение $\varphi^1(t)$ с начальными данными (t_0, x_0) определено на отрезке Пеано $[t_0-h(t_0, x_0), t_0+h(t_0, x_0)]$, соответствующем этой точке. Полагаем $t_1=t_0+h(t_0, x_0)$, $x_1=\varphi^1(t_1)$. Принимая точку (t_1, x_1) за начальную для решения $\psi(t)$, которое определено на отрезке Пеано $[t_1-h(t_1, x_1), t_1+h(t_1, x_1)]$, с помощью конструкции, описанной при доказательстве теоремы 2.4.1, получим продолжение $\varphi^2(t)$ решения $\varphi^1(t)$ вправо на отрезок $[t_0, t_1+h(t_1, x_1)]$. Это продолжение можно, в свою очередь, продолжить за точку $t_2=t_1+$ $+h(t_1, x_1)$ по той же схеме. Аналогично осуществляется продолжение влево. В результате получим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]\subset[a_2, b_2]\subset\ldots$ и решений $\varphi^k(t):[a_k, b_k]\to\mathbf{R}^n$, $\varphi^k(t_0)=x_0$. Положим

$$(\bar{a}, \bar{b})=\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k] \tag{2.4.1}$$

и пусть $\bar{\varphi}(t):(\bar{a}, \bar{b})\to\mathbf{R}^n$ — функция, сужение которой на $[a_k, b_k]$ есть $\varphi^k(t)$.

Величина $h(t, x)$ для точки $(t, x)\in G$ определяется неоднозначно. Однако согласно лемме 1.2.4, доказательство которой сохраняет силу и при $n>1$, для любого компакта $A\subset G$ можно указать $\Delta(A)$ такое, что в качестве $h(t, x)$ можно взять $h(t, x)=$ $=\Delta(A)$ для всех точек $(t, x)\in A$.

Рассмотрим бесконечную последовательность компактов $K_i\subset G$ таких, что

$$(t_0, x_0)\in K_1\subset K_2\subset\ldots, \bigcup_{i=1}^{\infty}K_i=G, \tag{2.4.2}$$

и положим

$$A_0=(t_0, x_0), \quad A_i=K_i\setminus K_{i-1}.$$

Каждая точка $(t, x)\in G$ принадлежит одному и только одному A_i, причем замыкание $\bar{A}_i$ множества A_i — компакт. Положим $\Delta_i=$

$=\Delta(\bar{A}_i)$. В описанной выше процедуре продолжения решения с начальными данными (t_0, x_0) берем $h(t, x)=\Delta_i$. Тем самым мы определяем интервал $(\bar{a}, \bar{b})$ в (2.4.1) и решение $\bar{\varphi}: (\bar{a}, \bar{b})\to\mathbf{R}^n$.

Рассмотрим некоторое решение $\varphi: (\alpha, \beta)\to\mathbf{R}^n$. Будем говорить, что решение φ удовлетворяет условию B, если либо $\beta=\infty$ $(\alpha=-\infty)$, либо для любого компакта $K\subset G$ можно указать $\delta>0$ такое, что при $t\in(\beta-\delta, \beta)$ $(t\in(\alpha, \alpha+\delta))$ точки интегральной кривой лежат вне K, т. е. $(t, \varphi(t))\in G\setminus K$.

Лемма 2.4.1. *Решение* $\bar{\varphi}: (\bar{a}, \bar{b})\to\mathbf{R}^n$ *удовлетворяет условию* B.

Доказательство. Пусть лемма неверна. Тогда $\bar{b}<\infty$ и существует бесконечная последовательность моментов $t_k\to\bar{b}-0$ при $k\to\infty$ таких, что $(t_k, \bar{\varphi}(t_k))\in K\subset G$. Пусть K_i — компакт из семейства (2.4.2), содержащий K. Так как решение после каждого t_k можно продолжить на отрезок длиной Δ_i, то можно считать $t_{k+1}-t_k\geqslant\Delta_i$, но это противоречит тому, что $\bar{b}<\infty$. Лемма доказана.

Теорема 2.4.2. *Для того чтобы решение* $\varphi: (\alpha, \beta)\to\mathbf{R}^n$ *уравнения* (2.2.7) *было полным, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условию* B.

Доказательство. Пусть пределы $\varphi(\beta-0)$ и $\varphi(\alpha+0)$ не существуют. Тогда по теореме 2.4.1 (α, β) — максимальный интервал существования. Предположим теперь, что выполнено условие B и существует предел $\varphi(\beta-0)=\eta$. Из условия B следует, что точка (β, η) не принадлежит G. По теореме 2.4.1 решение φ не может быть продолжено вправо за точку β. Следовательно, β — правый конец максимального интервала существования. Аналогично доказывается, что α — левый конец максимального интервала существования. Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть $\varphi: (\alpha, \beta)\to\mathbf{R}^n$ — полное решение. Рассмотрим решение $\bar{\varphi}: (\bar{a}, \bar{b})\to\mathbf{R}^n$, построенное по описанной выше процедуре, имеющее те же начальные данные, что и φ. Для решения $\bar{\varphi}$ условие B выполняется по лемме 2.4.1. Следовательно, по доказанной части теоремы 2.4.2 $\bar{\varphi}: (\bar{a}, \bar{b})\to\mathbf{R}^n$ — полное решение. Так как полное решение с фиксированными начальными данными определяется единственным образом, то φ и $\bar{\varphi}$ совпадают. Следовательно, $\varphi: (\alpha, \beta)\to\mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию B. Теорема доказана.

Следствие. *Решение* $\bar{\varphi}: (\bar{a}, \bar{b})\to\mathbf{R}$ — *полное.*

Замечание. Если $G=(a, b)\times D$, где (a, b) — временной интервал, $D\subset\mathbf{R}^n$ — область фазового пространства, то теорему 2.4.2 можно сформулировать следующим образом: решение $\varphi: (\alpha, \beta)\to\mathbf{R}^n$ — полное тогда и только тогда, когда либо $\beta=b$ $(\alpha=a)$, либо для каждого компакта $K\subset D$ можно указать такое $\delta>0$, что при $t\in(\beta-\delta, \beta)$ $(t\in(\alpha, \alpha+\delta))$ точки его траектории лежат вне K, т. е. $\varphi(t)\in D\setminus K$.

Следующая задача иллюстрирует, как теорему 2.4.2 можно применять для доказательства продолжимости решения на заданный промежуток.

Задача 2.4.1. Пусть $G=(a, b)\times\mathbf{R}^n$ и в G

$$\|f(t,x)\|\leqslant u(t)x+v(t), \tag{2.4.3}$$

где $u(t)$, $v(t)$ — неотрицательные непрерывные в интервале (a, b) функции. Доказать, что каждое решение уравнения (2.2.7) может быть продолжено на интервал (a, b).

Указание. В предположении, что утверждение неверно, перейти к интегральному уравнению (2.2.10) и с помощью леммы Гронуолла 1.3.1 построить компакт $K\subset\mathbf{R}^n$, который траектория не покидает вопреки теореме 2.4.2.

Заметим, что условие (2.4.3) выполняется для линейных систем. Системы дифференциальных уравнений, которые удовлетворяют условию (2.4.3), называются почти линейными.

§ 5. Системы дифференциальных уравнений общего вида

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида (2.2.1). С помощью замены (2.2.4) система (2.2.1) приводится к нормальной системе N уравнений (2.2.5). Запишем систему (2.2.5) в векторной форме, введя вектор неизвестной функции $z=\mathrm{colon}\,(z_1, \ldots, z_N)$ и обозначив независимую переменную через t:

$$\dot{z}=f(t,z), \tag{2.5.1}$$

где

$$f=\mathrm{colon}\left(z_2,\ldots,z_{m_1},f_1,\ldots,z_{m_1+\ldots+m_{n-1}+2},\ldots,z_N,f_n\right) \tag{2.5.2}$$

(таким образом, в этом случае $f_1, \ldots, f_n$ — лишь часть координат вектора f) — непрерывная в области $G\subset\mathbf{R}^{N+1}$ функция со значениями в $\mathbf{R}^N$.

Прежде всего нужно поставить задачу Коши для системы (2.2.1). В соответствии с общим принципом она должна совпадать с задачей Коши для системы (2.5.1) после замены (2.2.4). Отсюда приходим к следующей формулировке задачи Коши. Пусть $(t_0, z^0_1, \ldots, z^0_N)\subset G$, требуется найти такое решение $\varphi_1(t)$, $\ldots, \varphi_n(t)$ системы (2.2.1), которое удовлетворяет начальным условиям

$$\begin{gathered}\varphi_1(t_0)=z^0_1, \ldots, \varphi_1^{(m_1-1)}(t_0)=z^0_{m_1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_n(t_0)=z^0_{m_1+\ldots+m_{n-1}+1}, \ldots, \varphi_n^{(m_n-1)}(t_0)=z^0_N.\end{gathered} \tag{2.5.3}$$

Так как непрерывность векторной функции равносильна непрерывности всех координатных функций, то теорема 2.2.1 для системы (2.2.1) формулируется следующим образом.

Теорема 2.5.1. *Для каждой точки* $(t_0, z^0_1, \ldots, z^0_N) \subset G$ *существует решение* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ *системы* (2.2.1), *удовлетворяющее условиям* (2.5.3) *и определенное на отрезке Пеано, определяемом по функции* (2.5.2).

Если любые два решения системы (2.2.1), являющиеся решениями одной и той же задачи Коши и определенные на промежутке $\langle a, b\rangle$ совпадают на $\langle a, b\rangle$, то область G называется *областью единственности.*

Выполнение условия Липшица для векторной функции эквивалентно выполнению условия Липшица для каждой из координатных, поэтому теорема существования и единственности 2.3.2 для системы (2.2.1) формулируется следующим образом.

Теорема 2.5.2. *Пусть функции* $f_1(t, z), \ldots, f_n(t, z)$ *удовлетворяют условию Липшица по* z *в области* G *локально. Тогда справедливо утверждение теоремы* 2.5.1 *и область* G *есть область единственности.*

Рассмотрим отдельно уравнение (2.2.2), которое в переменных t, x имеет вид

$$x^{(m)} = f\left(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}\right). \tag{2.5.4}$$

Частным случаем теоремы 2.5.2 является следующее утверждение.

Теорема 2.5.3. *Пусть функция* $f(t, x_1, \ldots, x_m)$ *удовлетворяет условию Липшица по* $(x_1, \ldots, x_m)$ *в области* $G \subset \mathbf{R}^{m+1}$ *локально. Тогда для любой точки* $(t_0, x^0_1, \ldots, x^0_m) \in G$ *существует решение* $x = \varphi(t)$ *уравнения* (2.5.4), *удовлетворяющее начальным условиям* $\varphi(t_0) = x^0_1$, $\dot{\varphi}(t_0) = x^0_2$, ..., $\varphi^{m-1}(t_0) = x^0_m$, *при этом* G *является областью единственности.*

При рассмотрении вопроса о продолжении решений системы (2.2.1) следует иметь в виду, что в соответствии с формулами (2.2.4) продолжать нужно не только функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, образующие решение системы (2.2.1), но и их производные до порядка $m_1 - 1, \ldots, m_n - 1$ соответственно. Тогда теорема 2.4.1 принимает следующий вид.

Теорема 2.5.4. *Для того чтобы решение* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, *определенное на* $\langle a, b\rangle$, *было продолжимо вправо за точку* b, *необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы*

$$\lim \varphi_1(t) = \eta_1, \ldots, \lim \varphi_1^{(m_1-1)}(t) = \eta_{m_1},$$

$$\lim \varphi_n(t) = \eta_{m_1+\ldots+m_{n-1}+1}, \ldots, \lim \varphi_n^{(m_n-1)}(t) = \eta_N$$

при $t \to b - 0$ *и при этом* $(b, \eta_1, \ldots, \eta_N) \subset G$.

Сформулировать аналог теоремы 2.4.2 предлагаем в качестве упражнения.

§ 6. Автономные системы

1. Траектория автономных систем. Автономной системой дифференциальных уравнений называется система (2.2.1), правые части $f_1, \ldots, f_n$ которой не зависят от независимой переменной. Соответственно автономная система в векторной форме имеет вид

$$\dot{x}=f(x), \tag{2.6.1}$$

где $f: H\to\mathbf{R}^n$, $H\subset\mathbf{R}^n$ — область фазового пространства, причем мы предполагаем, что f удовлетворяет в H условию Липшица локально. Если $f(x)$ рассматривать как правую часть дифференциального уравнения, то

$$f:G\to\mathbf{R}^n,\ G=\mathbf{R}\times H.$$

Основным фактом теории автономного уравнения (2.6.1), определяющим его специфические свойства, является следующий простой результат.

Теорема 2.6.1. *Если $\varphi(t):(a,\ b)\to\mathbf{R}^n$ — решение уравнения* (2.6.1), *то $\psi(t)=\varphi(t+c):(a-c,\ b-c)\to\mathbf{R}^n$, $c\in\mathbf{R}$, также решение уравнения* (2.6.1).

Утверждение теоремы следует из того, что уравнение (2.6.1) не изменяется при замене t на $t+c$, $c\in\mathbf{R}$.

Следствие. *Пусть $x(t,\ t_0,\ x_0)$ — решение* (2.6.1) *с начальными данными $(t_0,\ x_0)$. Тогда*

$$x(t+c,t_0+c,x_0)=x(t,t_0,x_0) \tag{2.6.2}$$

при всех $t\in I$, где I — максимальный интервал существования $x(t,\ t_0,\ x_0)$.

Действительно, при $t=t_0$ левая и правая части (2.6.2) обращаются в x_0, откуда и вытекает (2.6.2), так как в силу теоремы 2.3.2 G — область единственности.

Положим в (2.6.2) $c=-t_0$ и обозначим $x(t_0,\ 0,\ x_0)=\varphi(t,\ x_0)$. Тогда получим, что решение $x(t,\ t_0,\ x_0)$ можно записать в виде

$$x=\varphi(t-t_0,x_0). \tag{2.6.3}$$

В механической интерпретации (2.6.3) означает, что положение движущейся точки определяется начальной точкой x_0 фазового пространства и интервалом времени, прошедшего после начального момента, но не самим начальным моментом.

В геометрической интерпретации (2.6.3) означает, что если две траектории уравнения (2.6.1) имеют общую точку, то они совпадают. Действительно, пусть $x_0\in H$ — общая точка двух траекторий. Тогда в силу (2.6.3) эти траектории параметрически задаются уравнениями

$$x=\varphi(t-t_1,x_0),\quad x=\varphi(t-t_2,x_0),$$

которые, очевидно, определяют одну и ту же кривую.

Таким образом, траектории автономных систем в фазовом пространстве обладают свойством непересечения, так же как и интегральные кривые систем общего вида в пространстве Otx. Поэтому при исследовании автономных систем целесообразно рассматривать именно траектории, а не интегральные кривые, так как они принадлежат пространству, размерность которого на единицу меньше. При этом, поскольку в силу (2.6.3) траектория вполне определяется начальной точкой x_0, мы можем и будем считать $t_0=0$. Тогда уравнение траектории примет вид $x=\varphi(t, x_0)$, где $\varphi(t, x_0)$ — решение с начальными данными $(0, x_0)$.

Пусть I — максимальный интервал существования решения $\varphi(t, x_0)$. Положим $x^*=\varphi(t, x_0)$. Это же решение можно представить в виде $\varphi(\tau-t, x^*)$, $\tau\in I$. Рассмотрим решение $\varphi(s, x^*)$. Оно определено при $s+t=\tau\in I$. Решения $\varphi(s, x^*)$ и $\varphi(t+s, x_0)$ определены при $s+t\in I$, $t\in I$ и совпадают при $s=0$. В силу единственности они совпадают при всех допустимых значениях параметров, т. е. справедлива формула

$$\varphi(s, \varphi(t, x_0))=\varphi(s+t, x_0)\,(t, s+t\in I). \tag{2.6.4}$$

Функцию $\varphi(t, x_0)$, $x_0\in H$, можно рассматривать как преобразование области H в себя с параметром t:

$$\varphi(t, x_0)=\varphi_t(x_0): H\to H.$$

Предположим, что все решения (2.6.1) продолжимы на все $t\in\mathbf{R}$. Тогда (2.6.4) принимает вид

$$\varphi_s\cdot\varphi_t=\varphi_{t+s}\,(t, s\in\mathbf{R}).$$

Очевидно, что φ_0 — тождественное преобразование. Следовательно, совокупность преобразований φ_t, $t\in\mathbf{R}$, образует группу относительно операции композиции преобразований.

2. Виды траекторий. Пусть x_0 — положение равновесия, т. е. $\varphi(t, x_0)=x_0$ при всех $t\in\mathbf{R}$. Для того чтобы точка x_0 была положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы $f(x_0)=0$.

Предположим теперь, что траектория решения $\varphi(t, x_0)$ не является положением равновесия, но имеет кратную точку, т. е. существуют t_1, t_2, $t_1<t_2$, также, что

$$\varphi(t_1, x_0)=\varphi(t_2, x_0). \tag{2.6.5}$$

Так как x_0 — не положение равновесия, то $\varphi(t_1, x_0)\neq 0$. Поэтому можем считать, что $\varphi(t, x_0)\neq\varphi(t_1, x_0)$ при $t\in(t_1, t_2)$. Обозначим $\omega=t_2-t_1$ и покажем, что $\varphi(t, x_0)$ — ω-периодическая функция.

Действительно, по теореме 2.6.1 функция $\psi(t)=\varphi(t+\omega, x_0)$ является решением уравнения (2.6.1) при $t\in[t_1-\omega, t_2-\omega=t_1]$, причем

$$\psi(t_1)=\varphi(t_1+\omega, x_0)=\varphi(t_2, x_0)=\varphi(t_1, x_0).$$

В силу единственности $\psi(t)=\varphi(t+\omega, x_0)$ и $\varphi(t, x_0)$ совпадают при всех $t\in[t_1-\omega, t_1]$. Применяя аналогичное рассуждение к решению $x(t)=\varphi(t-\omega, x_0)$, получим, что $\varphi(t, x_0)$ определено при $t\in[t_2, t_2+$ $+\omega]$ и функции $\varphi(t, x_0)$ и $\varphi(t-\omega, x_0)$ совпадают при этих t. Таким образом, можно продолжить $\varphi(t, x_0)$ на все $t\in\mathbf{R}$, при этом должно выполняться тождество

$$\varphi(t+\omega, x_0)=\varphi(t, x_0),$$

т. е. $\varphi(t, x_0)$ — периодическая функция с наименьшим периодом.

Траектория решения $\varphi(t, x_0)$ является замкнутой кривой. Такие траектории называются замкнутыми. Из приведенного рассуждения вытекает следующий результат.

Теорема 2.6.2. *Каждая траектория автономного уравнения* (2.6.1) *принадлежит одному из следующих трех типов:*

1) *положение равновесия;*

2) *замкнутая траектория, которой соответствует периодическое решение с положительным наименьшим периодом;*

3) *траектория без самопересечения, которой соответствует непериодическое решение.*

3. Предельные множества траекторий.

Определение 2.6.1. *Точка $q\in H$ называется ω-предельной точкой траектории $\varphi(t, x_0)$, определенной при всех $t\geqslant0$, если существует последовательность моментов $t_k\to\infty$, $t_k>0$ $(k\in N)$ таких, что $\varphi(t_k, x_0)\to q$ при $k\to\infty$. Множество Ω всех ω-предельных точек траектории называется ее ω-предельным множеством.*

Аналогично, для траектории $\varphi(t, x_0)$ при $t\leqslant0$ определяется понятие α-предельной точки как предела $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(t_k, x_0)$, если $t_k\to-\infty$, а также α-предельного множества A.

Определение 2.6.2. *Траектория $\varphi(t, x_0)$ называется положительно (отрицательно) устойчивой по Лагранжу (обозначение $\varphi\in L^+$ $(\varphi\in L^-)$), если существует компакт $K\subset H$ такой, что $\varphi(t, x_0)\in K$ при всех $t\geqslant0$ $(t\leqslant0)$, при которых $\varphi(t, x_0)$ определена.*

Теорема 2.6.3. *Положительно устойчивая по Лагранжу траектория продолжима на все положительные значения t и ее ω-предельное множество Ω не пусто (аналогичное утверждение справедливо и для траекторий $\varphi\in L^-$).*

Доказательство. Продолжимость решения $\varphi(t, x_0)$ гарантируется замечанием к теореме 2.4.2. Следовательно, $\varphi(t, x_0)\in K$ при всех $t\geqslant0$. Так как K — компакт, то из любой последовательности точек $\varphi(t_k, x_0)$, $k\in\mathbf{N}$, можно извлечь подпоследовательность, имеющую предел, т. е. Ω не пусто. Теорема доказана.

Теорема 2.6.4. *Предельное множество устойчивой по Лагранжу траектории* а) *компактно,* б) *связно.*

Доказательство проведем для случая $\varphi(t, x_0)\in L^+$ (случай $\varphi(t, x_0)\in L^-$ рассматривается аналогично).

а) Пусть $q_k \in \Omega$, $q_k \to q$ при $k \to \infty$. Так как q_k — ω-предельная точка траектории $\varphi(t, x_0)$, то существует последовательность точек

$$\varphi_k^j = \varphi(t_k^j, x_0) \quad (j \in \mathbf{N}, t_k^j \to \infty \text{ при } j \to \infty)$$

таких, что $\varphi^j{}_k \to q_k$ при $j \to \infty$. Для каждого $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbf{N}$ можно указать $k_0 > 0$, $j(k) \in \mathbf{N}$ такие, что при $k > k_0$ выполняются неравенства

$$\|q - q_k\| < \varepsilon, \quad \|q_k - \varphi_k^{j(k)}\| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$q_k^{j(k)} = \varphi(t_k^{j(k)}, x_0) \to q \text{ при } k \to \infty,$$

причем $t_k^{j(k)} \to \infty$ при $k \to \infty$, т. е. $q \in \Omega$. Тем самым Ω замкнуто. Ограниченность Ω вытекает из устойчивости траектории $\varphi(t, x_0)$ по Лагранжу, что и доказывает а).

б) Пусть Ω несвязно. Тогда Ω можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся множеств $\bar{\Omega}$, $\bar{\bar{\Omega}}$, каждое из которых не содержит предельных точек другого. Обозначим через d расстояние $\rho(\bar{\Omega}, \bar{\bar{\Omega}})$ между $\bar{\Omega}$ и $\bar{\bar{\Omega}}$. Так как в силу а) Ω компактно, то и $\bar{\Omega}$ и $\bar{\bar{\Omega}}$ компактны. Следовательно, $d > 0$. Существуют последовательности моментов $\bar{t}_k \to \infty$ и $\bar{\bar{t}}_k \to \infty$ такие, что $\rho(\varphi(\bar{t}_k, x_0), \bar{\Omega}) < d/2$ и $\rho(\varphi(\bar{\bar{t}}_k, x_0), \bar{\bar{\Omega}}) < d/2$ при всех $k \in \mathbf{N}$. Не нарушая общности, считаем, что $\bar{t}_1 < \bar{\bar{t}}_1 < \bar{t}_2 < \bar{\bar{t}}_2 < \ldots$. Пусть $\Omega_0 = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1, Ω_2, — открытые $d/2$-окрестности множеств $\bar{\Omega}$ и $\bar{\bar{\Omega}}$ соответственно. Множество Ω_0 открыто и несвязно, так как Ω_1 и Ω_2 не имеют общих точек. Следовательно, точки Ω_1 и Ω_2 нельзя соединить путем, лежащим в Ω_0. Поэтому для каждого k существует момент $t_k \in (\bar{t}_k, \bar{\bar{t}}_k)$, для которого $\rho(\varphi(t_k, x_0), \bar{\Omega}) \geqslant d/2$, $\rho(\varphi(t_k, x_0), \Omega) \geqslant d/2$. Точечное множество $\{\varphi(t_k, x_0)\}$ имеет точку сгущения $q^* \in \Omega$, что невозможно, так как $\rho(q^*, \bar{\Omega}) \geqslant d/2$, $\rho(q^*, \bar{\bar{\Omega}}) \geqslant d/2$. Противоречие доказывает б).

При $n=1$ автономная система (1) превращается в дифференциальное уравнение вида (1.1.8), фазовое пространство которого представляет собой интервал прямой. Нулям функции $f(x)$ соответствуют положения равновесия. Остальные траектории суть интервалы, границами которых являются либо положения равновесия, либо границы фазового пространства. Предельных множеств, отличных от положений равновесия, нет.

При $n=2$ предельные множества могут иметь более сложную структуру, однако она допускает простое описание (так называемая теория Пуанкаре — Бендиксона).

Теория предельных множеств при $n>2$ далека до завершения.

Пример 2.6.1. Рассмотрим автономную систему при $n=2$:

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - \mu),$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - \mu), \quad \mu > 0. \tag{2.6.6}$$

Для исследования (2.6.6) удобно в фазовой плоскости ввести полярные координаты $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $r \geqslant 0$. Из (2.6.6) получаем следующие уравнения для определения $\dot{r}(t)$, $\dot{\varphi}(t)$:

$$-r\sin\varphi + r(r^2 - \mu)\cos\varphi = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$r\cos\varphi + r(r^2 - \mu)\sin\varphi = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

откуда получаем

$$\dot{r} = r(r^2 - \mu), \quad \dot{\varphi} = 1.$$

Первое из этих уравнений легко интегрируется. Оно имеет решения $r=0$ и $r=\sqrt{\mu}$. При $0<r_0<\sqrt{\mu}$ решения $r(t, r_0)$ монотонно убывают от $\sqrt{\mu}$ до 0, а при $r_0>\sqrt{\mu}$ решения $r(t, r_0)$ монотонно возрастают от $\sqrt{\mu}$ до бесконечности. Так как $\varphi = t + \varphi_0$, то отсюда следует, что при $r_0 \neq 0$ и $r_0 \neq \sqrt{\mu}$ все траектории системы (2.6.6) образуют спирали, раскручивающиеся от окружности $r=\sqrt{\mu}$ к бесконечно удаленной точке или началу координат при неограниченном возрастании полярного угла. Начало координат является положением равновесия и одновременно ω-предельным множеством для всех траекторий, у которых $r_0<\sqrt{\mu}$. Если $r_0>\sqrt{\mu}$, то ω-предельное множество траектории пусто. Окружность $r=\sqrt{\mu}$ является замкнутой траекторией и одновременно α-предельным множеством для всех траекторий, отличных от положения равновесия.

Глава III

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Общие положения

Линейным дифференциальным уравнением порядка n называется дифференциальное уравнение вида

$$x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\ldots+p_n(t)x=q(t), \tag{3.1.1}$$

где $p_1, \ldots, p_n, q:(a, b)\to\mathbb{R}$ — непрерывные функции. С помощью замены

$$x=z_1,\ \dot{x}=z_2,\ldots,\ x^{(n-1)}=z_n \tag{3.1.2}$$

уравнение (3.1.1) приводится к нормальной системе

$$\dot{z}_1=z_2,\ldots,\ \dot{z}_{n-1}=z_n,$$

$$\dot{z}_n=-p_n(t)z_1-\ldots-p_1(t)z_n+q(t).$$

Эта система является линейной. Согласно следствию из теоремы 2.3.1 область $G=(a, b)\times\mathbb{R}^n$ является областью единственности, и решение с любыми начальными данными $t_0\in(a, b)$, $z^0_1, \ldots, z^0_n$ продолжимо на интервал (a, b). Следовательно, решение $\varphi(t)$ дифференциального уравнения (3.1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(t_0)=z_1^0,\ldots,\ \varphi^{(n-1)}(t_0)=z_n^0,\quad t_0\in(a, b), \tag{3.1.3}$$

существует, единственно и продолжимо на интервал (a, b).

Практика показывает, что недостаточно ограничиться изучением линейных дифференциальных уравнений (3.1.1), коэффициенты которых являются вещественными функциями. Поэтому мы предположим, что $p_1, \ldots, p_n, q:(a, b)\to\mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ — комплексная числовая плоскость. Представим $x:(a, b)\to\mathbb{C}$ в виде $x(t)=u(t)+$ $+iv(t)$, где $u, v:(a, b)\to\mathbb{R}$, $i=\sqrt{-1}$. Тем самым комплекснозначной функции $x(t)$ сопоставляется векторная функция $w(t)=$ $=\operatorname{colon}(u(t), v(t)):(a, b)\to\mathbb{R}^2$ (норма евклидова).

Функциональные свойства $x(t)$ и действия над $x(t)$ определяются как таковые над $w(t)$. Например, непрерывность и дифференцируемость $x(t)$ означают соответственно непрерывность и дифференцируемость $w(t)$, т. е. каждой из функций $u(t)$, $v(t)$, причем $\dot{x}(t)$ сопоставляется $\dot{w}(t)$, т. е. $\dot{x}(t)=\dot{u}(t)+i\dot{v}(t)$. Из определения производной $x(t)$ следует, что

$$\dot{x}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}. \tag{3.1.4}$$

Решением дифференциального уравнения (3.1.1) с комплекснозначными коэффициентами называется функция $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbf{C}$, если она n раз дифференцируема на $\langle\alpha, \beta\rangle$, и при всех $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$

$$\varphi^{(n)}(t) + p_1(t)\varphi^{(n-1)}(t) + \ldots + p_n(t)\varphi(t) = q(t). \tag{3.1.5}$$

Далее всегда предполагаем, что $p_1, \ldots, p_n, q : (a, b) \to \mathbf{C}$ — непрерывные функции. Поэтому из (3.1.5) следует, что $\varphi^{(n)}(t)$ непрерывна.

Пусть $p_k(t) = r_k(t) + is_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, $q(t) = g(t) + ih(t)$, $\varphi(t) = \psi(t) + i\chi(t)$, где r_k, s_k, g, h, ψ, χ — вещественные функции. Так как $t \in \mathbf{R}$, то (3.1.5) равносильно тождествам

$$\psi^{(n)}(t) + r_1(t)\psi^{(n-1)}(t) - s_1(t)\chi^{(n-1)}(t) + \ldots +$$
$$+ r_n(t)\psi(t) - s_n(t)\chi(t) = g(t),$$
$$\chi^{(n)}(t) + s_1(t)\psi^{(n-1)}(t) + r_1(t)\chi^{(n-1)}(t) + \ldots +$$
$$+ s_n(t)\psi(t) + r_n(t)\chi(t) = h(t).$$

Следовательно, функция $\varphi = \psi + i\chi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbf{C}$ является решением дифференциального уравнений (3.1.1) тогда и только тогда, когда $\psi, \chi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbf{R}$ являются решением системы

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + r_1 y^{(n-1)} - s_1 z^{(n-1)} + \ldots + r_n y - s_n z = g(t), \\ &z^{(n)} + s_1 y^{(n-1)} + r_1 z^{(n-1)} + \ldots + s_n y + r_n z = h(t). \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Начальные условия задачи Коши для комплексного уравнения (3.1.1) имеют вид (3.1.3), где $z^0{}_1 \in \mathbf{C}, \ldots, z^0{}_n \in \mathbf{C}$. Если $z^0{}_k = u^0{}_k + iv^0{}_k$ ($u^0{}_k, v^0{}_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, \ldots, n$), то условиям (3.1.3) соответствуют следующие начальные условия для системы (3.1.6):

$$\psi(t_0) = \overset{0}{u}_1,\ \dot\psi(t_0) = \overset{0}{u}_2, \ldots, \psi^{(n-1)}(t_0) = \overset{0}{u}_n,$$
$$\chi(t_0) = \overset{0}{v}_1,\ \dot\chi(t_0) = \overset{0}{v}_2, \ldots, \chi^{(n-1)}(t_0) = \overset{0}{v}_n.$$

Система (3.1.6) с помощью замены (2.2.4) сводится к нормальной линейной системе $2n$ уравнений (запишите матрицу ее коэффициентов). Поэтому решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям $(t_0, u^0{}_1, \ldots, u^0{}_n, v^0{}_1, \ldots, v^0{}_n) \in (a, b) \times \mathbf{R}^{2n}$, существует, единственно и продолжимо на интервал (a, b). Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1.1. *Решение дифференциального уравнения* (3.1.1) *с непрерывными комплекснозначными коэффициентами, удовлетворяющее начальным условиям* (3.1.3), *где* $z^0{}_1, \ldots, z^0{}_n$ — *любые комплексные числа,* $t_0 \in (a, b)$, *существует, единственно и продолжимо на интервал* (a, b) (*продолжение решения комплексного уравнения* (3.1.1) *определяется с помощью продолжения соответствующего решения вещественной системы* (3.1.6)).

Задача 3.1.1. Рассмотрим линейное уравнение первого порядка

$$\dot{x}=px+q(t),$$

где $p\in\mathbf{C}$, $q:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ — периодическая функция с периодом, равным ω. Доказать, что если $p\neq 2\pi ik/\omega$, $k\in\mathbf{Z}$, то это уравнение имеет единственное ω-периодическое решение

$$\varphi(t)=(1-e^{p\omega})^{-1}\int\limits_{t-\omega}^{t}e^{(t-s)}q(s)\,ds.$$

Под решением уравнения (3.1.1) в этой главе всегда понимается полное решение $\varphi:(a,b)\to\mathbf{C}$. Если при всех $t\in(a,b)q(t)=0$, то линейное дифференциальное уравнение называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*. В § 4 этой главы будет показано, что интегрирование неоднородного уравнения сводится к интегрированию однородного с той же левой частью.

Обозначим левую часть (3.1.1) через $L(x)$. Это оператор, действующий на множестве функций $x:(a,b)\to\mathbf{C}$ класса $\mathbf{C}^n$ со значениями на множестве $q:(a,b)\to\mathbf{C}$ непрерывных функций. Оператор L называется линейным дифференциальным оператором. Легко видеть, что он обладает следующими свойствами:

1) если $L(\varphi_1)$ и $L(\varphi_2)$ существуют, то существует и $L(\varphi_1+\varphi_2)$, причем

$$L(\varphi_1+\varphi_2)=L(\varphi_1)+L(\varphi_2); \tag{3.1.7}$$

2) если $L(\varphi)$ существует, $\alpha\in\mathbf{C}$, то существует и $L(\alpha\varphi)$ и

$$L(\alpha\varphi)=\alpha L(\varphi). \tag{3.1.8}$$

§ 2. Линейные однородные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(x)=x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\ldots+p_n(t)x=0. \tag{3.2.1}$$

1. Пространство решений линейного однородного уравнения.
Теорема 3.2.1. *Множество решений уравнения* (3.2.1) *образует комплексное векторное пространство.*

Доказательство. Утверждение теоремы означает: 1) если φ_1, φ_2 — решения (3.2.1), то и $\varphi_1+\varphi_2$ — решение (3.2.1); 2) если φ — решение (3.2.1), а $\alpha\in\mathbf{C}$, то $\alpha\varphi$ — решение (3.2.1). Оба этих утверждения непосредственно следуют из свойств линейности (3.1.7) и (3.1.8) оператора L. Теорема доказана.

Нашей основной целью является доказать, что пространство решений уравнения (3.2.1) является n-мерным векторным пространством.

Определение. *Функции* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m : (a, b) \to \mathbf{C}$ *называются линейно независимыми (над полем комплексных чисел), если выполнение при всех* $t \in (a, b)$ *тождества*

$$\alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_m\varphi_m(t) = 0, \quad \alpha_j \in \mathbf{C}, \quad j = 1, \ldots m,$$

возможно лишь тогда, когда $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_m = 0$.

В противном случае $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *называются линейно зависимыми.*

В частности, если две функции линейно зависимы, то одна из них получается из другой умножением на накоторое постоянное число. Вообще, линейная зависимость функций означает, что по крайней мере одна из них получается как линейная комбинация остальных с комплексными коэффициентами. Отсюда вытекает, что если среди рассматриваемых функций имеется хотя бы одна, тождественно равная нулю, то эти функции линейно зависимы, так как тождественный нуль можно рассматривать как линейную комбинацию произвольных функций с нулевыми коэффициентами.

Аналогично определяется линейная независимость и линейная зависимость функций над полем вещественных чисел. Для этого в данном выше определении следует считать $\alpha_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим n решений $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ уравнения (3.2.1). Составим определитель

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \ldots \varphi_n(t) \\ \dot\varphi_1(t) \ldots \dot\varphi_n(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) \ldots \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

называемый *определителем Вронского (вронскианом)* решений $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$.

Теорема 3.2.2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $W(t) = 0$ *при всех* $t \in (a, b)$;

2) $W(t) = 0$ *при некотором* $t \in (a, b)$;

3) *решения* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ *линейно зависимы.*

Достаточно доказать, что 1)$\Rightarrow$2), 2)$\Rightarrow$3), 3)$\Rightarrow$1). Импликация 1)$\Rightarrow$2) очевидна. Пусть теперь $W(t_0) = 0$ при некотором $t_0 \in (a, b)$. Рассмотрим алгебраическую линейную систему

$$\begin{gathered} C_1\varphi_1(t_0) + \ldots + C_n\varphi_n(t_0) = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1\varphi_1^{(n-1)}(t_0) + \ldots + C_n\varphi_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{gathered} \tag{3.2.2}$$

с неизвестными $C_1, \ldots, C_n$. Определитель этой системы есть $W(t_0)$, поэтому система (3.2.2) имеет нетривиальное решение $C^0{}_1, \ldots, C^0{}_n$. По теореме 3.2.1 функция $\varphi(t) = C^0{}_1\varphi_1(t) + \ldots + C^0{}_n\varphi_n(t)$ — решение уравнения (3.2.1), при этом $\varphi(t_0)=\dot\varphi(t_0)=\ldots=\varphi^{n-1}(t_0)=0$. Но таким начальным условиям удовлетворяет решение $x(t)\equiv 0$. В силу единственности эти решения совпадают на (a, b), т. е. при всех $t\in(a, b)$

$$C_1^0\varphi_1(t)+\ldots+C_n^0\varphi_n(t)=0,$$

причем не все $C^0_1, \ldots, C^0_n$ равны нулю. Это и означает, что $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ линейно зависимы. Импликация 2)$\Rightarrow$3) доказана.

Наконец, 3)$\Rightarrow$1), так как линейная зависимость $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ означает, что один из столбцов $W(t)$ при каждом $t\in(a, b)$ является линейной комбинацией остальных. Теорема доказана.

Имеет место *формула Лиувилля — Остроградского*

$$W(t)=W(t_0)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} p_1(s)\,ds\right\}. \qquad (3.2.3)$$

Мы не приводим доказательства этой формулы, так как она является частным случаем формулы (4.2.5), доказываемой в гл. IV.

2. Базис пространства решений. Каждое решение уравнения (3.2.1) однозначно определяется значениями его и производных до порядка $n-1$ включительно при фиксированном $t_0\in(a, b)$. Если записать эти n начальных значений в виде столбца, то множество начальных значений n решений образует матрицу $\Phi(t_0)$, которую будем называть *начальной* (при $t=t_0$). Очевидно, $W(t_0)=\det\Phi(t_0)$. Из теоремы 3.2.2 следует, что линейная независимость n решений эквивалентна условию, чтобы их начальная матрица при некотором $t=t_0$ была неособой, т. е. чтобы $\det\Phi(t_0)\neq 0$ (тогда она неособая при всех $t\in(a, b)$ по теореме 3.2.2).

Теорема 3.2.3. *Любые n решений дифференциального уравнения (3.2.1) с неособой начальной матрицей образуют базис пространства решений этого уравнения.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — решения с неособой начальной при $t=t_0$ матрицей. Мы должны доказать, что каждое решение $\varphi(t)$ уравнения (3.2.1) является линейной комбинацией решений $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$. Рассмотрим алгебраическую линейную систему

$$\begin{gathered} C_1\varphi_1(t_0)+\ldots+C_n\varphi_n(t_0)=\varphi(t_0),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1\varphi_1^{(n-1)}(t_0)+\ldots+C_n\varphi_n^{(n-1)}(t_0)=\varphi^{(n-1)}(t_0). \end{gathered} \qquad (3.2.4)$$

Поскольку определитель этой системы является определителем начальной матрицы, он отличен от нуля. Следовательно, система (3.2.4) имеет единственное решение $C^0_1, \ldots, C^0_n$. Тогда при всех $t\in(a, b)$

$$\varphi(t)=C_1^0\varphi_1(t)+\ldots+C_n^0\varphi_n(t). \qquad (3.2.5)$$

Действительно, слева и справа в (3.2.5) находятся решения, начальные данные которых при $t=t_0$ совпадают в силу (3.2.4). По теореме единственности левая и правая части (3.2.5) совпадают при всех $t \in (a, b)$. Следовательно, $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ образуют базис пространства решений, а $C^0_1, \ldots, C^0_n$ являются координатами $\varphi(t)$ в этом базисе. Теорема доказана.

Используя замечание, сделанное перед теоремой 3.2.3, ее можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.2.3. *Любые n линейно независимых решений системы* (3.2.1) *образуют базис пространства решений этого уравнения.*

Пусть $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — базис. Функция

$$x=C_1\varphi_1(t)+\ldots+C_n\varphi_n(t), \quad C_1,\ldots,C_n \in \mathbf{C} \tag{3.2.6}$$

называется *общим решением дифференциального уравнения* (3.2.1). Общее решение обладает следующими свойствами:

1) при каждом наборе $C_1, \ldots, C_n \in \mathbf{C}$ (3.2.6) является решением уравнения (3.2.1);

2) каждое решение уравнения (3.2.1) представимо в виде (3.2.6).

Базис пространства решений, т. е. любые n линейно независимых решений, называется *фундаментальной системой решений.* Из сказанного следует, что интегрирование дифференциального уравнения (3.2.1) сводится к нахождению фундаментальной системы решений.

Задача 3.2.1. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : (a, b) \to \mathbf{C}$ — n раз непрерывно дифференцируемые функции, определитель Вронского $W(t)$ которых отличен от нуля при $t \in (a, b)$. Найти дифференциальное уравнение (3.2.1), для которого $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ образуют фундаментальную систему решений. Доказать, что оно единственно.

Ответ:

$$W^{-1}(t)\det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n & x \\ \dot\varphi_1 & \cdots & \dot\varphi_n & \dot x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1^{(n)} & \cdots & \varphi_n^{(n)} & x^{(n)} \end{pmatrix}=0.$$

3. Замечание о вещественном уравнении (3.2.1). Предположим, что коэффициенты $p_1(t), \ldots, p_n(t)$ уравнения (3.2.1) являются вещественными функциями. Тогда если рассматривать только решения с вещественными начальными данными и под линейной независимостью решений понимать линейную независимость над полем вещественных чисел, то проведенные выше рассуждения дают следующий результат.

Теорема 3.2.4. *Множество решений вещественного дифференциального уравнения* (3.2.1) *с вещественными начальными дан-*

ными образует вещественное n-мерное векторное пространство, базисом которого являются любые n линейно независимых над полем вещественных чисел решений.

Вместе с тем для вещественного уравнения (3.2.1) можно рассматривать и комплексные начальные данные. Тогда множество его решений образует комплексное n-мерное векторное пространство. Вещественный базис является базисом как в вещественном, так и в комплексном пространствах решений. Рассмотрим вопрос: как от данного комплексного базиса пространства решений вещественного уравнения (3.2.1) перейти к вещественному базису?

Пусть комплексный базис имеет вид

$$\varphi_1 = u_1(t) + i v_1(t),\quad \bar{\varphi}_1 = u_1(t) - i v_1(t), \ldots, \varphi_m = u_m(t) + i v_m(t),$$

$$\bar{\varphi}_m = u_m(t) - i v_m(t),\quad \varphi_{2m+1}(t), \ldots, \varphi_n(t),$$

где $u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m, \varphi_{2m+1}, \ldots, \varphi_n (a, b) \to \mathbf{R}$. Функции $\varphi_{2m+1}, \ldots, \varphi_n$ — вещественные решения уравнения (3.2.1) по определению. Покажем, что $u_1(t)$, $v_1(t), \ldots, v_m(t)$ $u_m(t)$ также являются решениями уравнения (3.2.1). По определению решения при всех $t \in (a, b)$, $k = 1, \ldots, m$,

$$(u_k + i v_k)^{(n)} + p_1(t)(u_k + i v_k)^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)(u_k + i v_k) = 0. \quad (3.2.7)$$

Так как $p_1, \ldots, p_n$ — вещественны, то (3.2.7) равносильно

$$u_k^{(n)} + p_1 u_k^{(n-1)} + \ldots + p_n u_k = 0,$$

$$v_k^{(n)} + p_1 v_k^{(n-1)} + \ldots + p_n v_k = 0,$$

т. е. $u_k(t)$, $v_k(t)$ являются решениями уравнения (3.2.1). Покажем, что решения

$$u_1,\ v_1, \ldots, u_m,\ v_m,\ \varphi_{2m+1}, \ldots, \varphi_n$$

линейно независимы над полем вещественных чисел и, следовательно, образуют базис вещественного пространства решений.

Составим линейную комбинацию

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0,\quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}. \quad (3.2.8)$$

Покажем, что $\alpha_1 = \ldots \alpha_n = 0$. Равенство (3.2.8) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\alpha_1(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1) + \frac{1}{2i}\alpha_2(\varphi_1 - \bar{\varphi}_1) + \ldots + \alpha_n \varphi_n = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \frac{1}{i}\alpha_2\right)\varphi_1 + \frac{1}{2}\left(\alpha_1 - \frac{1}{i}\alpha_2\right)\bar{\varphi}_1 + \ldots + \alpha_n \varphi_n = 0.$$

Так как $\varphi_1, \bar{\varphi}_1, \ldots, \varphi_n$ — линейно независимы, то

$$\alpha_1+\frac{1}{i}\alpha_2=\alpha_1-\frac{1}{i}\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0,$$

следовательно, $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$, что и требовалось доказать.

§ 3. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$L(x)=x^{(n)}+p_1x^{(n-1)}+\ldots+p_n x=0, \tag{3.3.1}$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — комплексные постоянные. В этом параграфе будет указан в явном виде базис пространства решений уравнения (3.3.1).

Лемма 3.3.1. *Функции $\varphi_i(t)=t^{k_i}e^{\lambda_i t}$, $i=1, \ldots, n$,* где $k_i\in N_0$, $\lambda_i\in\mathbf{C}$, *линейно независимы при $t\in\mathbf{R}$, если $(k_i, \lambda_i)\neq(k_j, \lambda_j)$ при $i\neq j$.*

Доказательство. Пусть при всех $t\in\mathbf{R}$

$$\alpha_1\varphi_1(t)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(t)=0, \text{ или } \sum_{i=1}^{n}\alpha_i t^{k_i}e^{\lambda_i t}=0.$$

После приведения подобных при одинаковых $e^{\lambda_i t}$ получим

$$\sum_{i=1}^{m}P_i(t)e^{\lambda_i t}=0, \tag{3.3.2}$$

где $m\geqslant 1$ — число различных λ_i среди $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $P_i(t)$ — полиномы.

Индукцией по m покажем, что из (3.3.2) следует $P_i(t)=0$, $i=1, \ldots, m$. При $m=1$ утверждение очевидно. При $m>1$ запишем (3.3.2) в виде

$$\sum_{1}^{m-1}P_i(t)e^{\lambda_i t}+P_m(t)e^{\lambda}e^{\lambda_m t}=0,$$

или

$$\sum_{1}^{m-1}P_i(t)e^{(\lambda_i-\lambda_m)t}+P_m(t)=0.$$

Продифференцировав это тождество достаточное число раз по t, получим

$$\sum_{1}^{m-1}Q_i(t)e^{(\lambda_i-\lambda_m)t}=0. \tag{3.3.3}$$

Так как $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$, $i=1, \ldots, m-1$, то $Q_i(t)$ — полиномы той же степени, что и $P_i(t)$, при этом полином, тождественно равный ненулевой постоянной, не может аннулироваться. По индукционному предположению из (3.3.3) следует, что $Q_i(t) \equiv 0$, $i=1, \ldots, m-1$; следовательно, $P_i(t)=0$, $i=1, \ldots, m-1$, тогда и $P_m(t)=0$. Таким образом, $P_1(t)=\ldots=P_m(t)=0$. А так как коэффициенты этих полиномов суть постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$. Лемма доказана.

Подставляя в левую часть (3.3.1) функцию $e^{\lambda t}$, получим выражение

$$L(e^{\lambda t})=f(\lambda)e^{\lambda t}, \tag{3.3.4}$$

где полином

$$f(\lambda)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_n$$

называется *характеристическим полиномом уравнения* (3.2.1). Уравнение $f(\lambda)=0$ называется *характеристическим уравнением.*

Лемма 3.3.2. *Пусть λ^* — корень характеристического уравнения кратности m. Тогда функции $e^{\lambda^* t}$, $te^{\lambda^* t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda^* t}$ являются решениями уравнения* (3.3.4) *при $t \in \mathbf{R}$.*

Доказательство. Дифференцируя (3.3.4) k раз по λ (как функцию комплексной переменной), используя формулу Лейбница, получим

$$L(t^k e^{\lambda t})=\sum_{\nu=0}^{k} C_k^{\nu} f^{(\nu)}(\lambda) t^{k-\nu} e^{\lambda t}.$$

Так как λ^* — корень характеристического уравнения кратности m, то $f(\lambda^*)=f'(\lambda^*)=\ldots=f^{(m-1)}(\lambda^*)=0$. Следовательно, $L(t_k e^{\lambda^* t})=$ $=0$ при $k=0, 1, \ldots, m-1$, что и доказывает лемму.

Теорема 3.3.1. *Пусть λ_i, $i=1, \ldots, l$, — все разные корни характеристического уравнения с кратностями m_i. Тогда функции*

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t}, \ldots, t^{m_i-1}e^{\lambda_i t},\quad i=1, \ldots, l, \tag{3.3.5}$$

образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (3.3.1).

Доказательство. Согласно лемме 3.3.1 функции (3.3.5) линейно независимы. По лемме 3.3.2 каждая из этих функций является решением уравнения (3.3.1). По основной теореме алгебры число функций (3.3.5) равно n. Этим теорема доказана.

Замечание. Пусть коэффициенты уравнения (3.3.1) вещественны. Если характеристическое уравнение имеет комплексные корни, то базис (3.3.5) является комплексным. Чтобы получить вещественный базис, следует воспользоваться результатами п. 3 § 2. В результате в (3.3.5) каждая пара комплексно-сопряженных решений вида $t^k e^{\lambda t}$, $t^k e^{\bar{\lambda} t}$, где $\lambda=a+bi$, $\bar{\lambda}=a-bi$, заменится парой вещественных решений $t^k e^{at}\cos bt$, $t^k e^{at}\sin bt$.

Пример 3.3.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение движения линейной консервативной системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x}+a^2x=0, \quad a>0.$$

Здесь $f(\lambda)=\lambda^2+a^2$. Корни характеристического уравнения суть $\lambda_{1,2}=\pm ia$. По теореме 3.3.1 комплексным базисом является

$$\varphi_1=e^{iat}, \quad \varphi_2=e^{-iat}.$$

Используя замечание о вещественном базисе, найдем его в виде

$$\varphi_1=\sin at, \quad \varphi_2=\cos at.$$

Вещественное общее решение имеет вид

$$x=C_1\sin at+C_2\cos at, \text{ или } x=A\sin(at+\varphi),$$

где $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$ — амплитуда колебаний, $\varphi=\operatorname{arctg}(C_2/C_1)$ — начальная фаза.

Простейшим примером консервативной системы с одной степенью свободы является материальная точка, движущаяся под действием упругой силы пружины в вакууме.

Пример 3.3.2. Рассмотрим случай, когда движение происходит в среде, сопротивление которой пропорционально скорости движения. Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x}+k\dot{x}+a^2x=0,$$

где $k>0$ — коэффициент пропорциональности. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2+k\lambda+a^2=0,$$

а его корнями являются $\lambda_1=\frac{1}{2}(-k+\sqrt{k^2-4a^2})$, $\lambda_2=\frac{1}{2}(-k-\sqrt{k^2-4a^2})$. Возможны следующие случаи.

1. Дискриминант $D=k^2-4a^2>0$. Корни характеристического уравнения отрицательны и различны. Общее решение имеет вид

$$x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}.$$

2) $D=0$. Корни характеристического уравнения — кратные. Общее решение таково:

$$x=e^{-\frac{k}{2}t}(C_1+C_2t).$$

3) $D<0$. Корни λ_1 и λ_2 комплексно сопряжены:

$$\lambda_1=\frac{1}{2}(-k+i\sqrt{4a^2-k^2}), \quad \lambda_2=\frac{1}{2}(-k-i\sqrt{4a^2-k^2}).$$

Общее решение имеет вид

$$x = e^{-\frac{k}{2}t}\left(C_1 \sin\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-k^2}\,t + C_2\cos\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-k^2}\,t\right) =$$

$$= Ae^{-\frac{k}{2}t}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-k^2}\,t+\varphi\right).$$

Во всех случаях при возрастании времени материальная точка стремится к положению равновесия $x=0$. Если $4a^2>k^2$, то движение имеет характер затухающих колебаний.

§ 4. Линейные неоднородные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(x) = x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = q(t), \qquad (3.4.1)$$

где $p_1, \ldots, p_n, q:(a, b)\to\mathbf{C}$.

1. Метод неопределенных коэффициентов. Пусть $\psi:(a,b)\to\mathbf{C}$ — некоторое решение уравнение (3.4.1). Выполним в (3.4.1) замену, положив $x=y+\psi$. В силу (3.4.1)

$$L(y+\psi) = L(y) + L(\psi) = q,$$

а так как $L(\psi)=q$, то

$$L(y)=0. \qquad (3.4.2)$$

Уравнение (3.4.2) называется линейным однородиым уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (3.4.1).

Если $y=C_1\varphi_1+\ldots+C_n\varphi_n$ — общее решение однородного уравнения (3.4.2), то

$$x=C_1\varphi_1(t)+\ldots+C_n\varphi_n(t)+\psi(t) \qquad (3.4.3)$$

называется общим решением неоднородного уравнения (3.4.1). Так как при $C_1, \ldots, C_n\in\mathbf{C}$ формула $y=C_1\varphi_1+\ldots+C_n\varphi_n$ задает множество всех решений однородного уравнения (3.4.2), то из проведенных рассуждений следует, что формула (3.4.3) определяет множество всех решений неоднородного уравнения (3.4.1). Если $p_1, \ldots, p_n, q, \psi$ — вещественные функции, то формула (3.4.3) при $C_1, \ldots, C_n\in\mathbf{R}$ задает множество всех вещественных решений уравнения (3.4.1).

Таким образом, задача интегрирования уравнения (3.4.1) состоит в нахождении общего решения соответствующего однородного уравнения и хотя бы одного решения самого уравнения (3.4.1).

Рассмотрим частный случай, а именно, предположим, что все коэффициенты $p_1, \ldots, p_n$ — постоянные числа, а $q(t)$ имеет специальный вид

$$q(t)=g(t)e^{at}, \qquad (3.4.4)$$

где $a\in\mathbf{C}$, $g(t)$ — полином.

Общее решение соответствующего однородного уравнения находится по теореме 3.3.1. Частное решение уравнения (3.4.1) в рассматриваемом случае можно построить методом неопределенных коэффициентов, применимость которого вытекает из следующего утверждения.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $p_1, \ldots, p_n$ *в* (3.4.1) — *постоянные и выполнено условие* (3.4.4). *Если в* (3.4.4) a — *корень характеристического однородного уравнения* (3.4.2) *кратности* k (*если* a *не является корнем характеристического уравнения, то считаем* $k=0$), *то уравнение* (3.4.1) *имеет и притом единственное решение вида*

$$\psi(t)=t^k r(t)\,e^{at}, \tag{3.4.5}$$

где $r(t)$ — *полином той же степени, что и* $g(t)$. (*Если* $k\geqslant 1$, *то, говорят, что имеет место резонанс.*)

Доказательство. Требуется подобрать полином $r(t)$ так, чтобы функция (3.4.5) была решением уравнения (3.4.1). Применим метод неопределенных коэффициентов. Для этого представим $r(t)$ в виде

$$r(t)=\sum_0^m r_s t^s, \quad r_m\neq 0,$$

где r_s — постоянные, подлежащие определению из условия, что (3.4.5) удовлетворяет уравнению (3.4.1), m — степень полинома

$$g(t)=\sum_0^m g_s t^s, \quad g_m\neq 0.$$

Коэффициенты r_s определяем из равенства

$$L(t^k r(t)\,e^{at})=g(t)\,e^{at}. \tag{3.4.6}$$

Используя линейность оператора L, левую часть (3.4.6) представим в виде

$$L\left(\sum_0^m r_s t^{s+k} e^{at}\right)=\sum_0^m r_s L(t^{s+k}e^{at}). \tag{3.4.7}$$

Дифференцируя (3.3.4) $s+k$ раз по λ, получаем формулу

$$\frac{d^{s+k}}{d\lambda^{s+k}}(f(\lambda)\,e^{\lambda t})=L(t^{s+k}e^{\lambda t}). \tag{3.4.8}$$

Подставляя (3.4.8) при $\lambda=a$ в (3.4.7), найдем

$$L(\psi(t))=\sum_{s=0}^m r_s\left\{\frac{d^{s+k}}{d\lambda^{s+k}}(f(\lambda)\,e^{\lambda t})\right\}_{\lambda=a}=$$

$$=\sum_{s=0}^m r_s\sum_{\nu=0}^{s+k} C_{s+k}^{\nu} f^{(\nu)}(a)\,t^{s+k-\nu}e^{at}.$$

Отсюда и из (3.4.6) имеем

$$\sum_{s=0}^{m} r_s \sum_{\nu=0}^{s+k} C_{s+k}^{\nu} f^{(\nu)}(a)\, t^{s+k-\nu} = \sum_{s=0}^{m} g_s t^s, \tag{3.4.9}$$

причем по условию теоремы

$$f^{(\nu)}(a)=0,\ \nu=0,\ 1,\dots,\ k-1;\quad f^{(k)}(a)\neq 0. \tag{3.4.10}$$

Приравнивая слева и справа в (3.4.9) коэффициенты при одинаковых степенях t, получим уравнения для определения неизвестных величин r_s.

Приравнивая коэффициенты при t^m, имеем $s+k-\nu=m$, а так как в силу (3.4.10) $\nu \geqslant k$, то $s=m$, $\nu=k$. Следовательно, уравнение для определения r_m имеет вид

$$r_m C_{m+k}^{k} f^{(k)}(a) = g_m,$$

откуда на основании (3.4.10) r_m определяется единственным образом.

Приравнивая коэффициенты при t^i, $0 \leqslant i < m$, имеем $s+k-\nu=i$, а так как $\nu \geqslant k$, то $i \leqslant s$. В результате для определения r_i получим уравнение

$$r_i C_{i+k}^{k} f^{(k)}(a) + h(r_{i+1},\dots,r_m) = g_i, \tag{3.4.11}$$

где h зависит только от тех коэффициентов $r(t)$, индексы которых больше i. Поскольку r_m определяется однозначно, (3.4.11) показывает, что все коэффициенты r_i полинома $r(t)$ определяются единственным образом последовательно при уменьшении индекса i от m до 0. Тем самым теорема доказана.

Замечание 1. Метод неопределенных коэффициентов для отыскания частного решения $\psi(t)$ уравнения (3.4.1) может быть применен и в том случае, когда $q(t)=q_1(t)+\dots+q_l(t)$, где каждая функция $q_i(t)$, $i=1, \dots, l$, имеет вид (3.4.4). В этом случае $\psi(t)=\psi_1(t)+\dots+\psi_l(t)$, где $\psi_i(t)$, $i=1, \dots, l$ — частные решения соответственно уравнений $L(x)=q_i$, $i=1, \dots, l$, для нахождения которых можно применить теорему 3.4.1. Действительно,

$$L(\psi)=L(\psi_1)+\dots+L(\psi_l)=q_1+\dots+q_l=q.$$

Замечание 2. Пусть $p_1, \dots, p_n$ в (3.4.1) — вещественные постоянные,

$$q(t)=q_1(t)=g(t)\,e^{\alpha t}\cos\beta t \tag{3.4.12}$$

либо

$$q(t)=q_2(t)=g(t)\,e^{\alpha t}\sin\beta t, \tag{3.4.13}$$

где $g(t)$ — полином с вещественными коэффициентами, α, $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда решение (3.4.1) также можно найти методом неопределенных коэффициентов, если использовать то обстоятельство, что

(3.4.12) — вещественная часть, а (3.4.13) — мнимая часть функции

$$Q(t)=g(t)\,e^{(\alpha+i\beta)t}.$$

Если $\psi(t)$ есть решение уравнения $L(x)=Q(t)$, то $\mathrm{Re}\,\psi(t)$ является решением уравнения $L(x)=q_1(t)$, $\mathrm{Im}\,\psi(t)$ — решением уравнения $L(x)=q_2(t)$.

Пример 3.4.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение движения линейной консервативной системы с одной степенью свободы под действием периодической силы, которая в момент t равна $q(t)$:

$$\ddot{x}+a^2x=q(t),\quad a>0. \tag{3.4.14}$$

Пусть силовой член $q(t)$ имеет вид

$$q(t)=M\sin\omega t,\quad \omega>0.$$

Согласно замечанию 2 к теореме 3.4.1 вместо (3.4.14) используем уравнение

$$\ddot{x}+a^2x=Me^{i\omega t}. \tag{3.4.15}$$

Возможны следующие два случая:

1) $\omega\neq a$ — нерезонансный случай;
2) $\omega=a$ — резонансный случай.

В первом случае частное решение следует искать в виде

$$\psi(t)=be^{i\omega t}.$$

Подставляя $\psi(t)$ в (3.4.15), найдем

$$b(a^2-\omega^2)=M \quad \text{или} \quad \psi(t)=\frac{M}{a^2-\omega^2}e^{i\omega t},$$

следовательно, решением уравнения (3.4.14) является функция

$$\psi_1(t)=\frac{M}{a^2-\omega^2}\sin\omega t.$$

Используя результат примера 3.3.1, находим общее решение (3.4.14):

$$x=A\sin(at+\varphi)+\frac{M}{a^2-\omega^2}\sin\omega t, \tag{3.4.16}$$

т. е. в рассматриваемом случае движение представляет собой сумму собственных колебаний с частотой a и вынужденных колебаний с частотой ω.

Аналогично, если $q=M\cos\omega t$, то общее решение (3.4.14) имеет вид

$$x=A\sin(at+\varphi)+\frac{M}{a^2-\omega^2}\cos\omega t. \tag{3.4.17}$$

В случае резонанса ($a=\omega$) решение (3.4.15) ищем в виде

$$\psi(t)=bte^{i\omega t}.$$

После подстановки $\psi(t)$ в (3.4.15) находим $b=\dfrac{M}{2i\omega}$. Таким образом,

$$\psi(t)=\frac{Mt}{2i\omega}e^{i\omega t}, \quad \psi_1(t)=-\frac{Mt}{2\omega}\cos\omega t,$$

где $\psi_1(t)$ — решение уравнения (3.4.14). Следовательно, в случае резонанса общее решение уравнения (3.4.14) имеет вид

$$x=A\sin(\omega t+\varphi)-\frac{Mt}{2\omega}\cos\omega t.$$

Итак, при резонансе амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает при $t\to\infty$.

2. Метод вариации произвольных постоянных. Метод неопределенных коэффициентов приводит к простым вычислениям, но его можно применять только для линейных уравнений с постоянными коэффициентами, причем правая часть $q(t)$ должна иметь специальный вид (3.4.4). В общем случае для построения частного решения уравнения (3.4.1) используют метод вариации произвольных постоянных, иногда называемый методом Лагранжа.

Согласно этому методу решение уравнения (3.4.1) ищем в виде

$$\psi(t)=C_1(t)\varphi_1(t)+\ldots+C_n(t)\varphi_n(t),$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (3.4.2), а $C_1(t), \ldots, C_n(t)$ — функции класса $C^1(a, b)$, подлежащие определению [ср. с (1.1.22)]. Вид $\psi(t)$ объясняет название метода. Вычисляем последовательно производные функции $\psi(t)$ до порядка n включительно, налагая дополнительные условия на первые производные функций $C_1(t), \ldots, C_n(t)$. Имеем

$$\dot\psi(t)=C_1\dot\varphi_1+\ldots+C_n\dot\varphi_n+\dot C_1\varphi_1+\ldots+\dot C_n\varphi_n.$$

Полагаем $\dot C_1\varphi_1+\ldots+\dot C_n\varphi_n=0$. Тогда

$$\ddot\psi=C_1\ddot\varphi_1+\ldots+C_n\ddot\varphi_n+\dot C_1\dot\varphi_1+\ldots+\dot C_n\dot\varphi_n$$

и снова полагаем $\dot C_1\dot\varphi_1+\ldots+\dot C_n\dot\varphi_n=0$. Приравнивания при вычислении каждой производной до порядка $n-1$ включительно члены, содержащие $\dot C_1, \ldots, \dot C_n$ нулю, получим

$$\psi^{(n-1)}=C_1\varphi_1^{(n-1)}+\ldots+C_n\varphi_n^{(n-1)},$$

$$\psi^{(n)}=C_1\varphi_1^{(n)}+\ldots+C_n\varphi_n^{(n)}+\dot C_1\varphi_1^{(n-1)}+\ldots+\dot C_n\varphi^{(n-1)}.$$

Так как $\psi(t)$ должна быть решением уравнения (3.4.1), то, учитывая полученные выражения, находим

$$L(\psi)=C_1L(\varphi_1)+\ldots+C_nL(\varphi_n)+\dot{C}_1\varphi_1^{(n-1)}+\ldots+\dot{C}_n\varphi_n^{(n-1)}=q.$$

Так как $L(\varphi_1)=\ldots=L(\varphi_n)=0$, то окончательно $\dot{C}_1(t)$, ..., $\dot{C}_n(t)$ должны удовлетворять при $t\in(a, b)$ следующим уравнениям:

$$\begin{gathered}\dot{C}_1\varphi_1+\ldots+\dot{C}_n\varphi_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{C}_1\varphi_1^{(n-2)}+\ldots+\dot{C}_n\varphi_n^{(n-2)}=0,\\ \dot{C}_1\varphi_1^{(n-1)}+\ldots+\dot{C}_n\varphi_n^{(n-1)}=q.\end{gathered}\tag{3.4.18}$$

Система (3.4.18) есть линейная алгебраическая система уравнений для определения $\dot{C}_1$, ..., $\dot{C}_n$, определитель которой является определителем Вронского $W(t)$. Так как φ_1, ..., φ_n линейно независимы, то $W(t)\neq 0$ при $t\in(a, b)$. Решая (3.4.18), по формулам Крамера получаем следующее утверждение.

Теорема 3.4.2. *Дифференциальное уравнение* (3.4.1) *имеет решение*

$$\psi(t)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_{ni}(t)}{W(t)}q(t)\,dt,\quad (t_0,\ t\in(a, b)),\tag{3.4.19}$$

где φ_1, ..., φ_n — *фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения;* $W(t)$ — *ее определитель Вронского;* W_{ni} — *алгебраическое дополнение элемента определителя Вронского на пересечении n-й строки и i-го столбца.*

Пример 3.4.2. Рассмотрим уравнение (3.4.14) с силовым членом $q:(a, b)\to\mathbf{R}$ общего вида. Имеем $\varphi_1=\sin at$, $\varphi_2=\cos at$,

$$W=-a,\quad W_{21}=-\cos at,\quad W_{22}=\sin at.$$

По формуле (3.4.19)

$$\psi(t)=\sin at\int_{t_0}^{t}a^{-1}q(s)\cos as\,ds-\cos at\int_{t_0}^{t}a^{-1}q(s)\sin as\,ds$$

$$(t_0,\ t\in(a, b)),$$

или $$\psi(t)=a^{-1}\int_{t_0}^{t}\sin(a(t-s))\,q(s)\,ds.\tag{3.4.20}$$

Следовательно, общее решение уравнения (3.4.14) имеет вид

$$x=A\sin(at+\varphi)+a^{-1}\int_{t_0}^{t}\sin(a(t-s))\,q(s)\,ds.$$

3. Использование рядов Фурье. Пусть в уравнении (3.4.1) $p_1, \ldots, p_n$ — постоянные, $q(t+T)=q(t)$. Сопоставим $q(t)$ ее ряд Фурье:

$$q(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k e^{ik\omega t}, \quad \omega=\frac{2\pi}{T}.$$

Предположим, что уравнение (3.4.1) имеет периодическое решение $\psi(t)$ с тем же периодом T, что и $q(t)$. Так как $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема, то ее ряд Фурье равномерно сходится к $\psi(t)$:

$$\psi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k e^{ik\omega t}.$$

Теорема 3.4.3. *Если числа $ik\omega$, $k \in \mathbf{Z}$ не являются корнями характеристического уравнения $f(\lambda)=0$, то при всех $k \in \mathbf{Z}$*

$$\psi_k=\frac{q_k}{f(ik\omega)}. \tag{3.4.21}$$

Если же существуют целые p, для которых $f(ip\omega)=0$, то $q_p=0$, а при $k \neq p$ выполняются равенства (3.4.21). *При этом ψ_p — произвольные величины.*

Доказательство. Имеем

$$\psi^{(n)}(t)+p_1\psi^{(n-1)}(t)+\ldots+p_n\psi(t) \equiv q(t).$$

Умножая обе части этого равенства на $e^{-ik\omega t}$ и интегрируя в пределах от 0 до T, получим

$$\int_0^T e^{-ik\omega t}\psi^{(n)}(t)\,dt+\ldots+p_n\int_0^T e^{-ik\omega t}\psi(t)\,dt=\int_0^T e^{-ik\omega t}q(t)\,dt. \tag{3.4.22}$$

Используем m раз интегрирование по частям $(1 \leqslant m \leqslant n)$:

$$\int_0^T e^{-ik\omega t}\psi^{(m)}(t)\,dt=\psi^{(m-1)}(t)e^{-ik\omega t}\Big|_0^T+ik\omega\int_0^T e^{-ik\omega t}\psi^{(m-1)}(t)\,dt=\ldots$$

$$\ldots=(ik\omega)^m\int_0^T e^{-ik\omega t}\psi(t)\,dt=T\psi_k(ik\omega)^m.$$

Отсюда и из (3.4.22) имеем $f(i\omega k)\psi_k=q_k$, что дает (3.4.21). Отсюда же вытекает, что если $f(ip\omega)=0$, то $q_p=0$, а ψ_p — произвольная постоянная. Теорема доказана.

Замечание. Далее будет показано (см. замечание в конце п. 3 § 7 гл. IV), что если $f(ik\omega) \neq 0$ при целых k, то T-периодическое решение уравнения (3.4.1) существует и единственно. Таким образом, предположение о существовании периодического решения, содержащееся в теореме 3.4.3, в этом случае выполняется.

Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение имеет корни вида $ik\omega$, $k \in \mathbf{Z}$.

Теорема 3.4.4. *Пусть $f(ik\omega)=0$ при $k=p_1, \ldots, p_r$, а в ряде Фурье функции $q(t)$ $q_{p_1}=\ldots=q_{p_r}=0$. Тогда уравнение* (3.4.1) *имеет T-периодические решения.*

Доказательство проведем индукцией по n. При $n=1$ уравнение (3.4.1) имеет вид

$$\dot{x}-ip_1\omega x=q(t), \tag{3.4.23}$$

и его можно записать так:

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{e}^{-ip_1\omega t}x)=\mathrm{e}^{-ip_1\omega t}q(t).$$

Правая часть этого уравнения есть T-периодическая функция с равным нулю средним значением. Поэтому любая ее первообразная также является T-периодической функцией. Следовательно, все решения уравнения (3.4.23) — периодические с периодом, равным T.

Предположим теперь, что утверждение теоремы справедливо для уравнений (3.4.1) порядка $n-1$. Докажем, что тогда оно справедливо и для уравнений порядка n. Представим характеристический многочлен $f(\lambda)$ в виде

$$f(\lambda)=(\lambda-ip_1\omega)(\lambda^{n-1}+b_1\lambda^{n-2}+\ldots+b_{n-1}).$$

Тогда (3.4.1) имеет вид

$$\frac{d}{dt}(L_1(x))-ip_1\omega L_1(x)=q(t), \tag{3.4.24}$$

где

$$L_1(x)=x^{(n-1)}+b_1x^{(n-2)}+\ldots+b_{n-1}x.$$

Применим для решения (3.4.24) тот же подход, что и при рассмотрении уравнения (3.4.23). Запишем (3.4.24) в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{e}^{-ip_1\omega t}L_1(x))=\mathrm{e}^{-ip_1\omega t}q(t),$$

откуда

$$L_1(x)=\mathrm{e}^{ip_1\omega t}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-ip_1\omega\tau}q(\tau)\,d\tau-C\right)=Q(t). \tag{3.4.25}$$

Так как $q_{p_1}=0$, то $Q(t)$ — T-периодическая функция. Коэффициенты Q_k ее ряда Фурье определяются формулами

$$Q_k=\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{i(-k+p_1)\omega t}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-ip_1\omega\tau}q(\tau)\,d\tau-C\right)dt. \tag{3.4.26}$$

Выберем C равным среднему значению функции $\int\limits_0^t e^{-ip_1\omega\tau} q(\tau)\,d\tau$. Тогда $Q_{p_1}=0$. При $k\neq p_1$, интегрируя (3.4.26) по частям, получим

$$TQ_k=\frac{1}{i(p_1-k)\omega}e^{i(p_1-k)\omega t}\left(\int\limits_0^t e^{-ip_1\omega\tau}q(\tau)\,d\tau-C\right)\Bigg|_{t=0}^{t=T}-$$

$$-\frac{1}{i(p_1-k)\omega}\int\limits_0^T e^{i(p_1-k)\omega t}e^{-p_1\omega t}q(t)\,dt,$$

откуда

$$Q_k=\frac{q_k}{i(k-p_1)\omega},\quad k\neq p_1.$$

Следовательно, $Q_{p_1}=\ldots=Q_{p_r}=0$. К уравнению (3.4.25) применимо индукционное предположение, следовательно, оно имеет T-периодическое решение, что и требовалось доказать.

Глава IV

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Линейные системы дифференциальных уравнений введены в § 2 гл. II. В скалярной форме линейная система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=P_{11}(t)x_1+\ldots+P_{1n}(t)x_n+q_1(t),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_n&=P_{n1}(t)x_1+\ldots+P_{nn}(t)x_n+q_n(t),\end{aligned} \tag{4.0.1}$$

где $P_{jk}:(a,\ b)\to\mathbf{R}$, $q_j:(a,\ b)\to\mathbf{R}$ $(j,\ k=1,\ \ldots,\ n)$ — непрерывные функции. В векторной форме система (4.0.1) с помощью матрицы коэффициентов

$$P(t)=\{P_{jk}(t)\},\quad j,\ k=1,\ldots,n,$$

записывается в виде одного уравнения

$$\dot{x}=P(t)x+q(t). \tag{4.0.2}$$

Уравнение (4.0.2) называют как дифференциальным уравнением, имея в виду его векторную форму (4.0.2), так и системой дифференциальных уравнений, имея в виду его первоисточник (4.0.1).

В § 3 гл. II показано, что решение $\varphi(t)$ уравнения (4.0.2), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(t_0)=x_0$ $(t_0\in(a,\ b)$, $x_0\in\mathbf{R}^n)$, существует, единственно и продолжимо на интервал $(a,\ b)$. Как и в случае линейных уравнений, линейные системы будем рассматривать в предположении, что $P_{11},\ \ldots,\ P_{nn},\ q_1,\ \ldots,\ q_n$ — комплекснозначные непрерывные функции $t\in(a,\ b)$. Естественно поэтому понятие решения уравнения (4.0.2) распространить на комплекснозначные функции со значениями в пространстве $\mathbf{C}^n=\mathbf{C}\times\ldots\times\mathbf{C}$ (n раз). Элементами пространства $\mathbf{C}^n$ являются векторы x с n комплексными координатами $x_1,\ \ldots,\ x_n$, которые мы рассматриваем как вектор-столбцы. Норму в $\mathbf{C}^n$ определим, как и в $\mathbf{R}^n$, формулой

$$|x|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|.$$

Свойства и действия над функциями со значениями в $\mathbf{C}^n$ вытекают из свойств и действий над функциями со значениями в $\mathbf{R}^n$ (см. § 1 гл. II) и в $\mathbf{C}$ (см. § 1 гл. III).

Решением комплексной системы (4.0.2) будем называть функцию $\varphi\langle\alpha,\ \beta\rangle\to\mathbf{C}^n$, еасли при всех $t\in\langle\alpha,\ \beta\rangle$

$$\dot{\varphi}(t)=P(t)\varphi(t)+q(t). \tag{4.0.3}$$

Соответственно задача Коши — это задача нахождения решения $\varphi(t)$, удовлетворяющего условию

$$\varphi(t_0)=x_0 \quad (t_0\in(a,\ b),\ \ x_0\in\mathbb{C}^n). \tag{4.0.4}$$

Пусть $P=P^1+iP^2$, $q=q^1+iq^2$, $\varphi=\varphi^1+i\varphi^2$, $x=x_0^1+ix_0^2$, где q^1, $q^2:(a,\ b)\to\mathbb{R}^n$, φ^1, $\varphi^2:\langle\alpha,\ \beta\rangle\to\mathbb{R}^n$, x_0^1, $x_0^2\in\mathbb{R}^n$, P^1, P^2 — вещественные матрицы. Тогда (4.0.3) эквивалентно

$$\dot\varphi^1=P^1\varphi^1-P^2\varphi^2+q^1,$$

$$\dot\varphi^2=P^2\varphi^1+P^1\varphi^2+q^2,$$

или (в виде одного уравнения)

$$\dot\psi=Q\psi+r, \tag{4.0.5}$$

где $\psi=\operatorname{colon}(\varphi^1,\ \varphi^2)$, $r=\operatorname{colon}(q^1,\ q^2)$,

$$Q=\begin{pmatrix}P^1 & -P^2\\ P^2 & P^1\end{pmatrix},$$

причем $\psi(t_0)=y_0$, где $y_0=\operatorname{colon}(x_0^1,\ x_0^2)$. Тождество (4.0.5) означает, что $\psi:\langle\alpha,\ \beta\rangle\to\mathbb{R}^{2n}$ является решением вещественной линейной системы $2n$ уравнений с вещественным начальным условием. Как отмечалось, такое решение существует, единственно и продолжимо на $(a,\ b)$. Следовательно, решение комплексного уравнения (4.0.2) с начальным условием (4.0.4) существует, единственно и продолжимо на $(a,\ b)$ (продолжение решения комплексного уравнения (4.0.2) определяется с помощью продолжения решения вещественного уравнения (4.0.5)). В этой главе под решением уравнения (4.0.2) будем понимать полное решение $\varphi:(a,\ b)\to\mathbb{C}^n$.

Если $q(t)=0$, то уравнение (4.0.2) называется *линейным однородным уравнением* (системой), в противном случае — *неоднородным*. Основной проблемой является изучение однородного уравнения, так как будет показано (см. § 7), что интегрирование неоднородного уравнения сводится к интегрированию однородного.

§1. Линейные однородные системы

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot x=P(t)\,x, \tag{4.1.1}$$

где $x\in\mathbb{C}^n$, $P(t)=\{P_{jk}(t)\}$ $(j,\ k=1,\ \ldots,\ n)$ — матрица, элементы которой являются непрерывными на интервале $(a,\ b)$ комплекснозначными функциями.

1. Пространство решений уравнений (4.1.1).

Лемма 4.1.1. *Множество решений уравнения* (4.1.1) *образует комплексное векторное пространство.*

Доказательство. Утверждение леммы означает, что:

1) если φ^1, φ^2 — решения уравнения (4.1.1), то $\varphi^1+\varphi^2$ — решение уравнения (4.1.1);

2) если φ — решение уравнения (4.1.1), то при любом $\alpha \in \mathbf{C}$ $\alpha\varphi$ — решение уравнения (4.1.1).

Справедливость этих утверждений вытекает из правила умножения матрицы на матрицу (в рассматриваемом случае — на одностолбцовую матрицу-вектор). Лемма доказана.

Определение 4.1.1. *Функции $\varphi^1(t)$, ..., $\varphi^m(t) : (a, b) \to \mathbf{C}^n$ называются линейно независимыми (над полем комплексных чисел), если выполнение при всех $t \in (a, b)$ равенства*

$$\alpha_1\varphi^1(t) + \ldots + \alpha_m\varphi^m(t) = 0, \quad \alpha_j \in \mathbf{C}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

влечет

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0.$$

В противном случае функции $\varphi^1(t)$, ..., $\varphi^m(t)$ называются линейно зависимыми.

Если $\varphi^1(t)$, ..., $\varphi^m(t) : (a, b) \to \mathbf{R}^n$ и в определении 4.1.1 $\alpha_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, \ldots, m$, то φ^1, ..., φ^m называют линейно независимыми над полем вещественных чисел.

Линейная зависимость функции φ^1, ..., φ^m означает, что существует ненулевой набор постоянных α_1, ..., α_m такой, что при всех $t \in (a, b)$

$$\alpha_1\varphi^1(t) + \ldots + \alpha_m\varphi^m(t) = 0.$$

Постоянные α_1, ..., α_m, обладающие таким свойством, будем называть коэффициентами зависимости. Фиксируя в функциях φ^1, ..., φ^m переменную t, получаем постоянные векторы. Очевидно, что если функции $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ линейно зависимы, то при каждом $t_0 \in (a, b)$ векторы $\varphi^1(t_0)$, ..., $\varphi^m(t_0)$ также линейно зависимы. Обратное неверно, так как коэффициенты зависимости векторов $\varphi^1(t_0), \ldots, \varphi^m(t_0)$ могут зависеть от t_0 чего не допускает определение 4.1.1.

Пример 4.1.1. Рассмотрим векторные функции

$$\varphi^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \varphi^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

При каждом фиксированном t_0 векторы $\varphi^1(t_0)$ и $\varphi^2(t_0)$ линейно зависимы, но функции $\varphi^1(t)$, $\varphi^2(t)$ линейно независимы на $\mathbf{R}$, так как ни одна из них не получается из другой умножением на постоянное число.

Однако, как показывает доказываемая ниже теорема, если ограничиться рассмотрением только функций, являющихся решениями какого-либо дифференциального уравнения (4.1.1), то линейная зависимость функций на интервале (a, b) эквивалентна линейной зависимости их значений при любом фиксированном $t\in(a, b)$.

Теорема 4.1.1. *Пусть $\varphi^1, \ldots, \varphi^m : (a, b)\to\mathbf{C}^n$ — решения уравнения* (4.1.1). *Пусть далее при некотором $t_0\in(a, b)$ векторы $\varphi^1(t_0), \ldots, \varphi^m(t_0)$ линейно зависимы с коэффициентами зависимости $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Тогда функции $\varphi^1(t), \ldots, \varphi^m(t)$ линейно зависимы с коэффициентами зависимости $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.*

Доказательство. По условию теоремы существует ненулевой набор постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ такой, что

$$\alpha_1\varphi^1(t_0)+\ldots+\alpha_m\varphi^m(t_0)=0.$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(t)=\alpha_1\varphi^1(t)+\ldots+\alpha_m\varphi^m(t).$$

По лемме 4.1.1 $\psi(t)$ — решение уравнения (4.1.1), при этом оно удовлетворяет начальному условию $\psi(t_0)=0$. Этому же условию удовлетворяет тривиальное решение уравнения (4.1.1), поэтому в силу единственности $\psi(t)=0$ при всех $t\in(a, b)$, а это и означает, что $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ линейно зависимы на (a, b) с коэффициентами зависимости $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Теорема доказана.

Теорема 4.1.2. *Любые n линейно независимых решений уравнения* (4.1.1) *образуют базис пространства решений этого уравнения.*

Доказательство. Пусть решения $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ линейно независимы. По теореме 4.1.1 при каждом $t_0\in(a, b)$ векторы $\varphi^1(t_0), \ldots, \varphi^n(t_0)$ линейно независимы. Эти векторы образуют базис пространства $\mathbf{C}^n$, следовательно, любой вектор $x_0\in\mathbf{C}^n$ может быть разложен по элементам этого базиса. Пусть $\psi(t)$ — произвольное решение (4.1.1). Тогда

$$\psi(t_0)=\alpha_1\varphi^1(t_0)+\ldots+\alpha_n\varphi^n(t_0). \tag{4.1.2}$$

По теореме 4.1.1 решения $\psi, \varphi^1, \ldots, \varphi^n$ линейно зависимы с теми же коэффициентами зависимости, что и в (4.1.2), т. е. при всех $t\in(a, b)$

$$\psi(t)=\alpha_1\varphi^1(t)+\ldots+\alpha_n\varphi^n(t),$$

что и доказывает теорему.

Следствие. *Любые n решений, начальные значения которых при некотором t_0 линейно независимы, образуют базис пространства решений.*

Базис пространства решений называется также *фундаментальной системой решений.* Функция

$$x=C_1\varphi^1(t)+\ldots+C_n\varphi^n(t) \quad (C_1,\ldots, C_n\in\mathbf{C}), \tag{4.1.3}$$

где $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ — фундаментальная система решений, а $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, называется *общим решением уравнения* (4.1.1). Общее решение обладает следующими свойствами:

1) при любых комплексных $C_1, \ldots, C_n$ (4.1.3) является решением уравнения (4.1.1);

2) любое решение уравнения (4.1.1) представимо в виде (4.1.3).

2. Вещественный базис. Теперь предположим, что матрица коэффициентов $P(t)$ вещественна. Будем рассматривать только решения с вещественными начальными данными и под линейной независимостью понимать линейную независимость над полем вещественных чисел. Из проведенных выше рассуждений вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.1.3. *Множество решений уравнения* (4.1.1) *с вещественной матрицей коэффициентов, удовлетворяющих вещественным начальным данным, образует вещественное n-мерное векторное пространство. Любые n линейно независимых (над полем вещественных чисел) решений образуют базис этого пространства.*

Если рассматривать решения вещественного уравнения (4.1.1) с комплексными начальными данными, то вещественный базис является базисом и в комплексном пространстве решений по следствию из теоремы 4.1.2. Имеет смысл обратная задача: по данному комплексному базису вещественного уравнения (4.1.1) найти вещественный базис. Справедливо следующее утверждение, которое доказывается так же, как и аналогичное утверждение для линейных уравнений n-го порядка в п. § 2 гл. III.

Если комплексный базис имеет вид

$$\varphi^1 = u^1 + iv^1,\quad \bar{\varphi}^1 = u^1 - iv^1, \ldots, \varphi^m = u^m + iv^m,$$

$$\bar{\varphi}^m = u^m - iv^m,\quad \varphi^{2m+1}, \ldots \varphi^n, \tag{4.1.4}$$

где

$$u^1,\ v^1, \ldots, u^m,\ v^m,\ \varphi^{2m+1}, \ldots, \varphi^n : (a,\ b) \to \mathbf{R}^n, \tag{4.1.5}$$

то функции (4.1.5) *образуют вещественный базис уравнения* (4.1.1).

§ 2. Фундаментальные матрицы

1. Определитель Вронского. Рассмотрим матрицу $X = \{X_{ij}\}$, $X_{ij} \in \mathbf{C}$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$. Множество таких матриц будем обозначать через $\mathfrak{M}^{n,m}$. В этом параграфе рассматриваются матричные функции $X : (a,\ b) \to \mathfrak{M}^{n,m}$. Определения свойств таких функций и действий над ними получаем с помощью определений п. 2 §1 гл. II и п. 1 § 1 гл. III.

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение, по виду совпадающее с (4.1.1):

$$\dot{x} = P(t)\, x, \tag{4.2.1}$$

где $P : (a,\ b) \to \mathfrak{M}^{n,n}$ — непрерывная функция.

Определение 4.2.1. *Функция* $\Phi : (a, b) \to \mathfrak{M}^{n,m}$, *дифференцируемая при всех* $t \in (a, b)$, *называется решением уравнения* (4.2.1), *если при всех* $t \in (a, b)$

$$\dot{\Phi}(t) = P(t)\,\Phi(t). \tag{4.2.2}$$

Теорема 4.2.1. *Матричная функция* $\Phi : (a, b) \to \mathfrak{M}^{n,m}$ *является решением уравнения* (4.2.1) *тогда и только тогда, когда ее вектор-столбцы* $\varphi^1, \ldots, \varphi^m : (a, b) \to \mathbf{C}^n$ *являются решениями соответствующего уравнения* (4.1.1).

Доказательство. Пусть $\Phi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$. В силу (2.1.2) $P\Phi = (P\varphi^1, \ldots, P\varphi^m)$. Отсюда и из (4.2.2) получаем

$$\dot{\varphi}^k(t) = P(t)\,\varphi^k(t), \quad k = 1, \ldots, m,$$

что и требовалось доказать.

Далее будем рассматривать только квадратные матрицы-решения $\Phi : (a, b) \to \mathfrak{M}^{n,n}$ уравнения (4.2.1). Функция

$$W(t) = \det \Phi(t)$$

называется *определителем Вронского*, или *вронскианом*.

Теорема 4.2.2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $W(t) = 0$ *при всех* $t \in (a, b)$;

2) $W(t) = 0$ *при некотором* $t \in (a, b)$;

3) *решения* $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ *уравнения* (4.1.1) *линейно зависимы.*

Доказательство. Импликация 1)$\Rightarrow$2) очевидна. Импликация 2)$\Rightarrow$3) справедлива по теореме 4.1.1, так как условие $W(t) = 0$ означает, что столбцы определителя $W(t)$ линейно зависимы. Наконец, 3)$\Rightarrow$1) также справедлива, так как из линейной зависимости столбцов определителя следует, что определитель равен нулю. Теорема доказана.

Матрица-решение $\Phi : (a, b) \to \mathfrak{M}^{n,n}$ уравнения (4.2.1), определитель которой отличен от нуля, называется *фундаментальной матрицей*. Ее будем также называть фундаментальной матрицей уравнения (4.1.1). С помощью фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ формулу (4.1.3) общего решения уравнения (4.1.1) можно записать в виде

$$x = \Phi(t)\,C, \quad C \in \mathbf{C}^n. \tag{4.2.3}$$

Фундаментальная матрица, обладающая свойством $\Phi(t_0) = E$, называется нормированной при $t = t_0$. Если $\tilde{\Phi}(t)$ — нормированная при $t = t_0$ фундаментальная матрица, то (4.2.3) принимает вид

$$x = \tilde{\Phi}(t)\,x_0, \tag{4.2.4}$$

где x_0 — начальное при $t = t_0$ значение решения $x(t)$.

Пример 4.2.1. Рассмотрим гладкую плоскую кривую $x(s) : [0, s_0) \to \mathbf{R}^2$ в натуральной параметризации, т. е. в качестве параметра выбрана длина этой кривой, отсчитываемая от некоторой начальной точки. Обозначим через $\boldsymbol{\tau}(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ соответственно касательный вектор и единичный вектор нормали. Так как $s = \int_0^s \sqrt{\boldsymbol{\tau}^2(u)}\,du$, то $\boldsymbol{\tau}^2(s)=1$. Дифференцируя это тождество, получаем, что $\boldsymbol{\tau}'(s)\boldsymbol{\tau}(s)=0$, следовательно, $\boldsymbol{\tau}'(s)=k(s)\mathbf{n}(s)$, где $k(s):[0, s_0)\to\mathbf{R}$. Аналогично, $\mathbf{n}'(s)=\alpha(s)\boldsymbol{\tau}(s)$, причем $\alpha=\mathbf{n}\boldsymbol{\tau}= -\mathbf{n}\boldsymbol{\tau}'=-k$. Мы получили так называемые *формулы Френе:*

$$\boldsymbol{\tau}'(s)=k(s)\,\mathbf{n}(s),$$

$$\mathbf{n}'(s)=-k(s)\,\boldsymbol{\tau}(s).$$

Если $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ рассматривать как векторы-строки, то формулы Френе принимают вид матричного дифференциального уравнения (4.2.2), где

$$\Phi(s)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}(s)\\ \mathbf{n}(s)\end{pmatrix},\quad P(s)=\begin{pmatrix}0 & k(s)\\ -k(s) & 0\end{pmatrix}.$$

Нормированная при $s=0$ фундаментальная матрица $\widetilde{\Phi}(s)$ имеет вид

$$\widetilde{\Phi}=\begin{pmatrix}\cos\varphi(s) & \sin\varphi(s)\\ -\sin\varphi(s) & \cos\varphi(s)\end{pmatrix},\quad \text{где}\quad \varphi(s)=\int_0^s k(t)\,dt.$$

Отсюда вытекает геометрический смысл коэффициента $k(s)$: это угловая скорость вращения касательного вектора (а вместе с ним и нормали) с изменением s; $k(s)$ называется кривизной кривой в точке s.

2. Формула Лиувилля. Рассмотрим определитель Вронского некоторой матрицы-решения $\Phi(t)$. Вычисляя его разложением по элементам i-й строки, получаем

$$W=\sum_{k=1}^{n} W_{ik}\Phi_{ik},$$

где W_{ik} — алгебраическое дополнение элемента Φ_{ik}. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial W}{\partial \Phi_{ij}}=W_{ij}\quad (i, j=1, \dots, n),$$

так как при данном i W_{ik} от Φ_{ij} не зависят. Следовательно,

$$\dot{W}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial \Phi_{ij}}\dot{\Phi}_{ij}=\sum_{i,j=1}^{n} W_{ij}\dot{\Phi}_{ij}.$$

Так как в силу (4.2.2) и (2.1.2)

$$\Phi_{ij}=\sum_{k=1}^{n} P_{ik}\Phi_{kj},$$

то

$$\dot{W}=\sum_{i,k=1}^{n} P_{ik}\sum_{j=1}^{n} W_{ij}\Phi_{kj}.$$

Согласно свойству определителя

$$\sum_{j} W_{ij}\Phi_{kj}=0 \text{ при } i\neq k,$$

$$\sum_{j} W_{ij}\Phi_{kj}=W \text{ при } i=k.$$

Следовательно,

$$\dot{W}=\left(\sum_{i=1}^{n} P_{ii}\right)W.$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, находим

$$W(t)=W(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{i=1}^{n} P_{ii}(s)\right)ds\right\}. \qquad (4.2.5)$$

Формула (4.2.5) называется *формулой Лиувилля.*

Сумма диагональных элементов матрицы $P\in\mathfrak{M}^{n,n}$ называется следом матрицы и обозначается $\operatorname{sp} P$. Используя это обозначение, (4.2.5) можно переписать в виде

$$\det\Phi(t)=\det\Phi(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\operatorname{sp} P(s)\,ds\right\}. \qquad (4.2.5')$$

Формула (3.2.3) является частным случаем (4.2.5) (докажите это).

3. Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица. Следующая теорема показывает, что на множестве матриц-решений уравнения (4.2.1) справедлива формула общего решения, аналогичная (4.2.3).

Теорема 4.2.3. *Если* $\Phi(t)$ *— фундаментальная матрица, то:*

1) *при любой постоянной матрице* $C\in\mathfrak{M}^{n,m}$ *функция* $\Phi(t)C$ *есть решение уравнения* (4.2.1);

2) *если* $\Psi:(a, b)\to\mathfrak{M}^{n,m}$ *— решение уравнения* (4.2.1), *то существует* $C\in\mathfrak{M}^{n,m}$ *такая, что* $\Psi(t)=\Phi(t)C$, *при этом если* Ψ *— фундаментальная матрица, то* C *— неособая.*

Доказательство. По формуле (2.1.5)

$$\frac{d}{dt}(\Phi C) = \dot{\Phi} C,$$

а так как $\Phi(t)$ — решение уравнения (4.2.1), то

$$\frac{d}{dt}(\Phi C) = (P\Phi)\,C = P\,(\Phi C),$$

что доказывает первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения положим

$$C(t) = \Phi^{-1}(t)\,\Psi(t).$$

Тогда $\Psi(t) = \Phi(t)C(t)$. Дифференцируя это тождество по t, получим

$$P\Psi = P\Phi C + \Phi\dot{C},$$

откуда $\Phi\dot{C} = 0$. Умножая последнее тождество слева на Φ^{-1}, получим $\dot{C} = 0$. Следовательно, C — постоянная матрица. Из определения C вытекает также, что если $\Psi(t)$ — неособая матрица, то и C — неособая. Теорема доказана полностью.

4. Сопряженное уравнение. Пусть, по-прежнему, $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица. Дифференцируя по t тождество $\Phi^{-1}\Phi = E_n$, получим

$$\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}) = -\Phi^{-1}P. \tag{4.2.6}$$

Обозначим через X^* сопряженную с X матрицу, т. е. матрицу, к которой $X^*_{ij} = \overline{X}_{ji}$, где черта означает комплексную сопряженность. Из алгебры известна формула

$$(XY)^* = Y^*X^*. \tag{4.2.7}$$

В силу (4.2.6) и (4.2.7)

$$\frac{d}{dt}(\Phi^{-1})^* = -P^*(t)\,(\Phi^{-1})^*.$$

Уравнение

$$x = -P^*(t)\,x \tag{4.2.8}$$

называется уравнением, сопряженным с уравнением (4.1.1) (или с (4.2.1)). Мы доказали, следовательно, что если $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (4.1.1), то $(\Phi^{-1})^*$ является фундаментальной матрицей сопряженного уравнения (4.2.8).

Пусть $\Psi(t)$ — некоторая фундаментальная матрица уравнения (4.2.8). По теореме 4.2.3

$$\Psi(t) = (\Phi^{-1})^*C,$$

где C — постоянная неособая матрица. Отсюда

$$\Psi^*(t)=C^*\Phi^{-1}(t)$$

и

$$\Psi^*(t)\Phi(t)=B, \tag{4.2.9}$$

где $B=C^*$ — постоянная неособая матрица.

Равенству (4.2.9) можно дать следующее истолкование. Строки матрицы $\Psi^*(t)$ и столбцы матрицы $\Phi(t)$ являются решениями соответственно уравнений (4.2.8) и (4.1.1). Их произведение есть постоянная. Таким образом, каждое решение сопряженного уравнения можно рассматривать как линейный функционал на векторном пространстве решений уравнения (4.1.1). Другими словами, множество решений сопряженного с (4.1.1) уравнения образует векторное пространство, сопряженное по отношению к пространству решений уравнения (4.1.1).

Положим $U(t, x)=\Psi^*(t)x$. Координатные функции $U_i(t, x)$ называются *независимыми интегралами* системы (4.1.1). Они обладают следующим свойством: если $\varphi(t)$ — решение (4.1.1), то $U_i(t, \varphi(t))\equiv\mathrm{const}$. Это свойство вытекает из (4.2.9).

5. Понижение порядка линейной однородной системы. Предположим, что известно m, $1\leqslant m\leqslant n$, линейно независимых решений $\varphi^1, \ldots, \varphi^m: (a, b)\to\mathbf{C}^n$ уравнения (4.1.1). Образуем матрицу $\Phi_1=(\varphi^1,\ldots,\varphi^m)$, $\Phi_1\in\mathfrak{M}^{n,m}$. По теореме 4.1.1 векторы $\varphi^1(t),\ldots,\varphi^m(t)$ линейно независимы при каждом $t\in(a, b)$, следовательно, ранг $r(\Phi_1)=m$. Это означает, что для каждой точки $t_0\in(a, b)$ можно указать окрестность $I\subset(a, b)$, в которой некоторые m строк матрицы $\Phi_1(t)$ образуют ненулевой минор $\alpha(t)$. Для простоты предположим, что этот минор образуют первые m строк матрицы $\Phi_1(t)$. В дальнейшем будем считать $t\in I$.

Пусть $B\in\mathfrak{M}^{n,n-m}$ — постоянная матрица, первые m строк которой нулевые, а последние $n-m$ строк образуют единичную матрицу E_{n-m}. Положим

$$S(t)=(\Phi_1, B): I\to\mathfrak{M}^{n,n}.$$

Очевидно, что $\det S(t)=\alpha(t)\neq0$. В (4.1.1) выполним замену $x=S(t)y$. В результате получим

$$PSy=\dot{S}y+S\dot{y}. \tag{4.2.10}$$

Так как $PS=(P\Phi_1, PB)$, $\dot{S}=(P\Phi_1, 0)$, то

$$S\dot{y}=(P\Phi_1, PB)\,y-(P\Phi_1, 0)\,y=(0, PB)\,y$$

или

$$\dot{y}=(0, S^{-1}PB)\,y,\ 0\in\mathfrak{M}^{n,m}. \tag{4.2.11}$$

Полагая $y=\operatorname{colon}(y^1, y^2)$, $y^1 \in C^m$, $y^2 \in C^{n-m}$, запишем (4.2.11) в виде

$$\dot{y}^1 = Q_1(t)\, y^2, \tag{4.2.12}$$

$$\dot{y}^2 = Q_2(t)\, y^2, \tag{4.2.13}$$

где $Q_1 : I \to \mathfrak{M}^{m, n-m}$, $Q_2 : I \to \mathfrak{M}^{n-m, n-m}$ — известные функции.

Покажем, что интегрирование (4.1.1) сводится к интегрированию (4.2.13). Пусть $\widetilde{\Psi}_2(t) = (\psi_2^{m+1}, \ldots, \psi_2^n)$ — фундаментальная матрица уравнения (4.2.13). Из (4.2.12) находим квадратурами первые m координатных функций $\psi_1^{m+1}, \ldots, \psi_1^n$ линейно независимых решений $\psi^{m+1}(t) = \operatorname{colon}(\psi_1^{m+1}, \psi_2^{m+1})$, ..., $\psi^n(t) = \operatorname{colon}(\psi_1^n, \psi_2^n)$ уравнения (4.2.11). Пусть $\Psi_2(t) = (\psi^{m+1}, \ldots, \psi^n)$. Очевидно, что любые постоянные векторы $\psi^1, \ldots, \psi^m \in C^n$, последние $n-m$ координат которых равны нулю, являются решениями (4.2.11). Пусть в матрице $\Psi_1 = (\psi^1, \ldots, \psi^m)$ первые m строк образуют единичную матрицу E_m. Тогда матрица $\Psi(t) = (\Psi_1, \Psi_2)$ является фундаментальной матрицей уравнения (4.2.11), так как ее столбцы являются решениями этого уравнения по построению и $\det \Psi = \det \widetilde{\psi}_2 \neq 0$. Теперь фундаментальная матрица $\Phi(t)$ уравнения (4.1.1) находится по формуле $\Phi = S\Psi$.

Пример 4.2.2. Рассмотрим линейную однородную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= t^{-1}x_1 + tx_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= t^{-1}x_1 - tx_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2. \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Здесь

$$P(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & t & -1 \\ t^{-1} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} : (0, \infty) \to \mathfrak{M}^{3,3}.$$

Система (4.2.14) имеет решение $\varphi^1 = \operatorname{colon}(t, t, t^2)$. Тогда

$$S(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. замена, приводящая к понижению порядка, имеет вид

$$x_1 = ty_1, \quad x_2 = ty_1 + y_2, \quad x_2 = t^2 y_1 + y_3.$$

Обратная замена имеет вид

$$y_1 = t^{-1}x_1, \quad y_2 = x_2 - x_1, \quad y_3 = x_3 - tx_1.$$

Дифференцируя эти выражения по t и учитывая (4.2.14), получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 - t^{-1}y_3, \\ y_2 &= -2ty_2 + 2y_3, \\ \dot{y}_3 &= (1-t^2)\,y_2 + ty_3. \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Последние два уравнения системы (4.2.15) образуют самостоятельную систему двух уравнений, к интегрированию которой и сводится интегрирование системы (4.2.14).

§ 3. Подобные матрицы

Рассмотрим однородное уравнение (4.1.1). Его вид связан с выбором определенного базиса в пространстве $\mathbf{C}^n$. В качестве базиса можем взять любые n линейно независимых векторов $s^1, \ldots, s^n$. Установим, какой вид принимает (4.1.1) в новом базисе. Переход к новому базису определяет замену $x = Sy$, $S = (s^1, \ldots, s^n)$. Так как

$$y = S^{-1}\dot{x} = S^{-1}Px,$$

то в результате получим систему

$$\dot{y} = Q(t)\,y,$$

где

$$Q(t) = S^{-1}P(t)\,S. \tag{4.3.1}$$

Если две матрицы P и Q связаны с помощью некоторой неособой матрицы S соотношением (4.3.1), то говорят, что Q подобна P (запись: $Q \sim P$). Легко проверяется, что отношение подобия есть отношение эквивалентности, т. е. справедливы следующие свойства:

1) $P \sim P$ — рефлексивность,
2) $P \sim Q \Leftrightarrow Q \sim P$ — симметричность,
3) $P \sim Q$, $Q \sim R \Rightarrow P \sim R$ — транзитивность.

Следовательно, свойства решений уравнения (4.1.1), которые определяются теми свойствами матрицы коэффициентов, которые являются общими для класса эквивалентности матриц, подобных $P(t)$, не зависят от выбора базиса. Поэтому важио выявить величины, одинаковые для всех подобных матриц, и найти наиболее простой вид матрицы для данного класса эквивалентности. Эти вопросы решаются в курсах линейной алгебры. Здесь мы коротко изложим основные факты, опираясь на теорему о приведении матрицы к жордановой форме.

Лемма 4.3.1. *Характеристические уравнения подобных матриц совпадают.*

Действительно, пусть $A \in \mathfrak{M}^{n,n}$, $B = S^{-1}AS \in \mathfrak{M}^{n,n}$. Имеем

$$\det(B - \lambda E_n) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}E_n S) =$$
$$= \det S^{-1} \det(A - \lambda E_n) \det S = \det(A - \lambda E_n),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Определители и следы подобных матриц равны.*

Действительно, если характеристическое уравнение матриц A и B имеет вид

$$(-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

то

$$a_n = \det A = \det B,$$
$$a_1 = (-1)^{n-1} \operatorname{sp} A = (-1)^{n-1} \operatorname{sp} B.$$

Прежде чем формулировать другие свойства подобных матриц, введем терминологию и обозначения. Матрица $A \in \mathfrak{M}^{n,n}$ называется диагональной и обозначается

$$A = \operatorname{diag}\{A_1, \ldots, A_l\}.$$

если матрицы $A_k \in \mathfrak{M}^{r_k, r_k}$, $\Sigma r_k = n$, $k = 1, \ldots, l$, расположены вдоль главной диагонали, а все остальные элементы равны нулю. Матрица $A \in \mathfrak{M}^{n,n}$ называется верхнетреугольной, если $A_{ij} = 0$ при $i > j$, и нижнетреугольной, если $A_{ij} = 0$ при $j > i$. Диагональ с элементами A_{ij}, $j = i + p$ $(i = j + p)$, назовем p-й верхней (нижней) диагональю.

Лемма 4.3.2. *Каждая матрица* $A \in \mathfrak{M}^{n,n}$ подобна матрице

$$J = \operatorname{diag}\{J_0, J_1, \ldots, J_q\}, \tag{4.3.2}$$

где

$$J_0 = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} \tag{4.3.3}$$

($\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — *простые собственные числа* A),

$$J_k = \lambda_{p+k} E_{r_k} + Z_k, \quad k = 1, \ldots, q, \tag{4.3.4}$$

где $Z_k \in \mathfrak{M}^{r_k, r_k}$ — *матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением элементов первой верхней диагонали, которые равны 1,* λ_{p+k} — *кратные собственные числа A. Разным $k = 1, \ldots, q$ могут соответствовать равные между собой λ_{p+k}, при этом если кратность некоторого собственного числа равна l, то сумма r_k, соответствующих этому собственному числу, равна l.*

Следствие. *Так как*

$$\det J = \prod \lambda_i, \quad \operatorname{sp} J = \sum \lambda_i,$$

то на основании следствия к лемме 4.3.1

$$\det A = \prod \lambda_i, \quad \operatorname{sp} A = \sum \lambda_i. \tag{4.3.5}$$

Матрица (4.3.2) называется канонической или жордановой формой матрицы A. Степени $(\lambda-\lambda_{p+k})^{r_k}$ называются элементарными делителями (простыми при $r_k=1$), матрицы (4.3.4) — клетками Жордана.

Доказательство леммы 4.3.2 можно найти в курсах линейной алгебры.

Замечание. Каждая матрица A подобна матрице

$$J^*=\operatorname{diag}\{J_0, J_1^*, \ldots, J_q^*\},$$

где

$$J_k^*=\lambda_{p+k}E_{r_k}+\varepsilon Z_k, \quad \varepsilon\neq 0, \; k=1, \ldots, q. \tag{4.3.6}$$

Справедливость этого утверждения вытекает из равенства

$$JS=SJ^*, \tag{4.3.7}$$

где $S=\operatorname{diag}\{\overbrace{1, \ldots, 1}^{p \text{ раз}}, 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{r_1-1}, \ldots, 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{r_q-1}\}$.

Равенство (4.3.7) проверяется непосредственно. Этот результат является частным случаем общего утверждения, доказательство которого предлагается в качестве упражнения.

Задача 4.3.1. Доказать, что жорданова форма (4.3.2) подобна любой матрице $B=\operatorname{diag}\{B_0, B_1, \ldots, B_q\}$, где $B_0=J_0$, а $B_k\in\mathfrak{M}^{r_k r_k}$, $k=1, \ldots, q$, — верхние треугольные матрицы, диагональные элементы которых совпадают с диагональными элементами J_k, все элементы первой верхней диагонали отличны от нуля, остальные элементы произвольны.

Замечание. В формулировке леммы 4.3.2 и далее использовался верхнетреугольный вид жордановой формы матрицы. Можно использовать и нижнетреугольный вид жордановой формы, если под Z_k в (4.3.4) понимать матрицу, все элементы которой равны нулю, за исключением элементов первой нижней диагонали, равных единице. Соответственно изменяется и формулировка задачи 4.3.1.

Отметим также, что в жордановой форме (4.3.2) собственные числа, соответствующие одной клетке Жордана, имеют одинаковый номер.

Рассмотрим случай, когда $A\in\mathfrak{R}^{n,n}$. Несмотря на то, что A — вещественная матрица, ее жорданова форма, а также матрица S в преобразовании к жордановой форме могут оказаться комплексными из-за наличия у A комплексных собственных чисел. Если переходить к комплексным координатам нежелательно, то используют следующий результат.

Лемма 4.3.3. *Существует неособая матрица* $Q\in\mathfrak{R}_{n,n}$ *такая, что* $A=QIQ^{-1}$. Здесь $I=\operatorname{diag}\{J_0, J_1, \ldots, J_q, B_0, B_1, \ldots, B_r\}$; $J_0, \ldots, J_q$

определены в (4.3.3) *и* (4.3.4), *причем им соответствуют вещественные собственные числа матрицы* A;

$$B_0=\mathrm{diag}\,\{T_{p+q+1},\ldots,T_{p+q+s}\},$$

$$B_j=\begin{pmatrix} T_{p+q+s+j} & E_2 & O_2\ldots O_2 \\ O_2 & T_{p+q+s+j} & E_2\ldots O_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ O_2 & O_2 & T_{p+q+s+j}\end{pmatrix} j=1,\ldots r, \qquad (4.3.8)$$

где

$$T_k=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\lambda_k & -\mathrm{Im}\,\lambda_k \\ \mathrm{Im}\,\lambda_k & \mathrm{Re}\,\lambda_k\end{pmatrix}, \quad k=p+q+s+1,\ldots,p+q+s+r,$$

причем в (4.3.8) λ_k — *комплексные собственные числа.*

Доказательство леммы 4.3.3 опускаем. В п. 4 § 5 этой главы лемма будет доказана при $n=2$, когда матрица A имеет пару комплексно-сопряженных собственных чисел. Матрица I называется *вещественной жордановой формой матрицы* A.

§ 4. Функции от матриц

1. Матричные ряды. Рассмотрим бесконечную последовательность матриц A_k, $k\in\mathbb{N}$, $A_k\in\mathfrak{M}^{n,n}$. Будем говорить, что последовательность A_k сходится к матрице A:

$$\lim_{k\to\infty} A_k=A,$$

если $\|A-A_k\|\to 0$ при $k\to\infty$. Из определения нормы следует, что сходимость матриц эквивалентна поэлементной сходимости. Матричным рядом называется символ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, причем говорят, что этот ряд сходится к сумме $f\in\mathfrak{M}^{n,n}$, если к f сходится последовательность частичных сумм S_k, где

$$S_k=\sum_1^k A_i.$$

Пусть $A\in\mathfrak{M}^{n,n}$. Тогда можно определить степень матрицы A обычным образом: $A^k=A\ldots A$ (k раз).

Рассмотрим ряд, называемый степенным:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k=f(A), \quad a_k\in C, \ A\in\mathfrak{M}^{n,n},$$

где по определению положим $A^0=E_n$.

Лемма 4.4.1. *Пусть $A=S^{-1}JS$. Если сходится $f(J)$, то сходится $f(A)$ и*

$$f(A)=S^{-1}f(J)S. \qquad (4.4.1)$$

Если же $f(J)$ расходится, то и $f(A)$ расходится.

Доказательство. Имеет место формула

$$(S^{-1}JS)^i=S^{-1}J^iS, \quad i\in \mathbf{N}_0,$$

справедливость которой вытекает из определения степени матрицы.

Пусть $S_k(A)$ — частичная сумма ряда $f(A)$, тогда

$$S_k(A)=\sum_0^k a_i(S^{-1}JS)^i=S^{-1}\left(\sum_0^k a_iJ^i\right)S=S^{-1}S_k(J)S.$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, получаем (4.4.1).

Лемма 4.4.2. *Пусть*

$$J=\mathrm{diag}\{J_0, J_1, \ldots, J_q\}.$$

Если сходятся $f(J_0)$, $f(J_1)$, ..., $f(J_q)$, то сходится $f(J)$ и

$$f(J)=\mathrm{diag}\{f(J_0), f(J_1), \ldots, f(J_q)\}. \qquad (4.4.2)$$

Если же хоть один из рядов $f(J_k)$ расходится, то и $f(A)$ расходится.

Доказательство. По правилу умножения и сложения матриц частичная сумма

$$S_k(J)=\sum_0^k a_i\,\mathrm{diag}\{J_0^i, J_1^i, \ldots, J_q^i\}=$$

$$=\mathrm{diag}\left\{\sum_0^k a_iJ_0^i, \quad \sum_0^k a_iJ_1^i, \ldots, \quad \sum_0^k a_iJ_q^i\right\}=$$

$$=\mathrm{diag}\{S_k(J_0), S_k(J_1), \ldots, S_k(J_q)\}.$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, получаем (4.4.2).

Рассмотрим числовой ряд

$$f(z)=\sum_0^\infty a_iz^i, \ a_i\in \mathbf{C}, \ z\in \mathbf{C}.$$

Пусть ρ — радиус сходимости этого ряда. Как следствие лемм 4.4.1 и 4.4.2 получаем следующий результат.

Лемма 4.4.3. *Если все собственные числа λ_1, ..., λ_n матрицы A простые, то при $|\lambda_i|<\rho$, $i=1, \ldots, n$, ряд $f(A)$ сходится и*

$$f(A)=S^{-1}\,\mathrm{diag}\{f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\}S;$$

если же существуют λ_i такие, что $|\lambda_i|>\rho$, то ряд $f(A)$ расходится.

Действительно, по лемме 4.3.2 $A=S^{-1}J_0S$, где $J_0=\operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

При наличии кратных собственных чисел матрицы A необходимо рассмотреть $f(J_k)$, где J_k — клетка Жордана (4.3.4).

Лемма 4.4.4. *Если J_k — клетка Жордана* (4.3.4), $|\lambda_{p+k}|<\rho$, *то ряд $f(J_k)$ сходится и*

$$f(J_k)=\begin{pmatrix} f(\lambda_{p+k}) & f'(\lambda_{p+k}) & \ldots & \frac{1}{(r_k-1)!}f^{(r_k-1)}(\lambda_{p+k}) \\ 0 & f(\lambda_{p+k}) & \ldots & \frac{1}{(r_k-2)!}f^{(r_k-2)}(\lambda_{p+k}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & f(\lambda_{p+k}) \end{pmatrix} \tag{4.4.3}$$

Если же $|\lambda_{p+k}|>\rho$, то ряд $f(J_k)$ расходится.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму

$$S_l(J)=\sum_{j=0}^{l} a_i(\lambda E_r+Z)^i \tag{4.4.4}$$

(в (4.4.4) индекс k для кратности опущен). Так как E_r и Z коммутируют, поскольку $E_rZ=ZE_r=Z$, то справедлива формула

$$(\lambda E_r+Z)^i=\sum_{j=0}^{i} C_i^j\lambda^{i-j}Z^j.$$

Непосредственным умножением легко проверить, что Z^j, $1\leqslant j\leqslant r$ — матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением элементов j-й верхней диагонали, которые равны 1, а при $j\geqslant r$ $Z^j=0\in\mathfrak{M}^{r,r}$. Тогда

$$(\lambda E_r+Z)^i=\begin{pmatrix} \lambda^i & i\lambda^{i-1} & \ldots & \frac{i(i-1)\ldots(i-r+2)}{(r-1)!}\lambda^{i-r+1} \\ 0 & \lambda^i & \ldots & \frac{i(i-1)\ldots(i-r+3)}{(r-2)!}\lambda^{i-r+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & \lambda^i \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из (4.4.4) имеем

$$S_l(J_k)=\begin{pmatrix} S_l(\lambda_{p+k}) & S_l'(\lambda_{p+k}) & \ldots & \frac{1}{(r_k-1)!}S_l^{(r_k-1)}(\lambda_{p+k}) \\ 0 & S_l(\lambda_{p+k}) & \ldots & \frac{1}{(r_k-2)!}S_l^{(r_k-2)}(\lambda_{p+k}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & S_l(\lambda_{p+k}) \end{pmatrix}.$$

Переходя к пределу при $l \to \infty$, получаем (4.4.3).

Результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4.4.1. *Если λ_i, $i=1, \ldots, n$ — собственные числа матрицы A, f_i — степенной ряд и $|\lambda_i| < \rho$, то $f(A)$ сходится, причем $f(\lambda_i)$ являются собственными числами матрицы $f(A)$.*

Действительно, по лемме 4.4.1 если $A \sim J$, то $f(A) \sim f(J)$. В силу лемм 4.4.2 и 4.4.4 $f(J)$ имеет верхнетреугольный вид с числами $f(\lambda_1)$, ..., $f(\lambda_n)$ по главной диагонали. Следовательно, $f(\lambda_1)$, ..., $f(\lambda_n)$ — собственные числа матрицы $f(J)$, а значит, и $f(A)$.

Замечание. Пусть $t \in \mathbb{C}$. Рассмотрим $f(tA)$. Так как $A = S^{-1}JS$, то $tA = S^{-1}(tJ)S$. На основании лемм 4.4.1 и 4.4.2

$$f(tA) = S^{-1}\operatorname{diag}\{f(tJ_0),\ f(tJ_1), \ldots, f(tJ_q)\}S. \tag{4.4.5}$$

По лемме 4.4.2

$$f(tJ_0) = \operatorname{diag}\{f(t\lambda_1), \ldots, f(t\lambda_p)\}.$$

Для вывода формулы $f(tJ_k)$ заметим, что $tJ_k = t\lambda_{p+k}E_{r_k} + tZ_k$, причем $(tZ_k)^j$ — матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением элементов j-й верхней диагонали, равных t^j при $1 \leqslant j \leqslant r_k - 1$, а при $j \geqslant r_k$ $(tZ_k)^j = 0 \in \mathfrak{M}^{r_k, r_k}$. Отсюда, как при выводе (4.4.3), получаем

$$f(tJ_k) = \begin{pmatrix} f(\lambda_{p+k}t) & tf'(\lambda_{p+k}t) & \ldots & \dfrac{t^{r_k-1}}{(r_k-1)!} f^{r_k-1}(\lambda_{p+k}t) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ 0 & 0 & \ldots & f(\lambda_{p+k}t) \end{pmatrix}. \tag{4.4.6}$$

2. Экспоненциальная функция матрицы. В качестве примера рассмотрим степенной ряд

$$\sum_0^\infty \frac{1}{k!} A^k. \tag{4.4.7}$$

Так как радиус сходимости соответствующего числового ряда

$$\sum_0^\infty \frac{1}{k!} z^k = e^z$$

равен бесконечности, то по теореме 4.4.1 ряд (4.4.7) сходится при всех A. Сумма ряда (4.4.7) называется экспоненциальной функцией (экспонентой) и обозначается через e^A, если $\exp\{A\}$.

Если A и B коммутируют, то верна формула

$$e^{A+B} = e^A e^B. \tag{4.4.8}$$

Справедливость формулы (4.4.8) вытекает из ее справедливости для чисел, т. е. для случая $A \in \mathbf{C}$, $B \in \mathbf{C}$, так как если $AB = BA$, то коэффициенты ряда e^{A+B} для чисел и для матриц выражаются через коэффициенты рядов e^A и e^B по одинаковым формулам.

3. Логарифм матрицы. Под логарифмом матрицы подразумевается функция, обратная к экспоненциальной функции, т. е. $B \in \mathfrak{M}^{n,n}$ называется логарифмом $A \in \mathfrak{M}^{n,n}$ и обозначается через $\operatorname{Ln} A$, если $e^B = A$. Как известно, при $n=1$

$$\operatorname{Ln} A = \ln|A| + i \arg A + 2k\pi i, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Теорема 4.4.2. *Если A — неособая матрица, то $\operatorname{Ln} A$ существует.*

Доказательство разобьем на этапы.

1) Пусть $A = S^{-1}JS$ и $\operatorname{Ln} J$ существует. Тогда $\operatorname{Ln} A$ существует и можно положить $\operatorname{Ln} A = S^{-1}(\operatorname{Ln} J)S$. Действительно, на основании леммы 4.4.1, примененной к экспоненте, имеем

$$\exp\{\operatorname{Ln} A\} = S^{-1} \exp\{\operatorname{Ln} J\} S = S^{-1}JS = A.$$

2) Пусть $J = \operatorname{diag}\{J_0, J_1, \ldots, J_q\}$ и $\operatorname{Ln} J_j$, $j = 0, 1, \ldots, q$, существует. Тогда можно положить

$$\operatorname{Ln} J = \operatorname{diag}\{\operatorname{Ln} J_0, \operatorname{Ln} J_1, \ldots, \operatorname{Ln} J_q\}.$$

Действительно, по лемме 4.4.2

$$\exp\{\operatorname{Ln} J\} = \operatorname{diag}\{\exp\{\operatorname{Ln} J_0\}, \ldots, \exp\{\operatorname{Ln} J_q\}\} = \operatorname{diag}\{J_0, \ldots, J_q\} = J.$$

3) Пусть J — жорданова форма матрицы A. По доказанному, поскольку собственные числа A отличны от нуля,

$$\operatorname{Ln} J_0 = \operatorname{diag}\{\operatorname{Ln} \lambda_1, \ldots, \operatorname{Ln} \lambda_p\},$$

причем можно выбирать любую ветвь $\operatorname{Ln} \lambda_j$, $j = 1, \ldots, p$. Теперь построим логарифм клетки Жордана J_k, $k = 1, \ldots, q$. Опуская для кратности индекс k, имеем

$$J = \lambda E_r + Z, \quad J \in \mathfrak{M}^{r,r}, \ \lambda \neq 0.$$

Положим, по определению,

$$\operatorname{Ln} J = \operatorname{Ln} \lambda \cdot E_r + \sum_{1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\lambda} Z\right)^k, \tag{4.4.9}$$

где можно взять любую ветвь $\operatorname{Ln} \lambda$. Так как при $k \geqslant r$ $Z^k = 0$, то в (4.4.9) ряд в правой части сходится. Осталось доказать формулу

$$\exp\left\{\operatorname{Ln} \lambda \cdot E_r + \sum_{1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\lambda} Z\right)^k\right\} = \lambda E_r + Z. \tag{4.4.10}$$

Согласно формуле (4.4.8) (которая здесь применима) левая часть (4.4.10) равна

$$\exp\{\operatorname{Ln}\lambda\cdot E_r\}\cdot\exp\left\{\sum_1^\infty(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\lambda}Z\right)^k\right\}. \tag{4.4.11}$$

По доказанному в п. 2)

$$\exp\{\operatorname{Ln}\lambda\cdot E_r\}=\exp\{\operatorname{Ln}\lambda\}E_r=\lambda E_r. \tag{4.4.12}$$

Далее, по определению экспоненты

$$\exp\left\{\sum_{k=1}^\infty(-1)^k\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\lambda}Z\right)^k\right\}=E_r+\sum_{l=1}^\infty\frac{1}{l!}\left[\sum_{k=1}^\infty(-1)^k\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\lambda}Z\right)^k\right]^l. \tag{4.4.13}$$

Если Z — комплексное число, то известно, что результат подстановки ряда $u=\sum\limits_{k=1}^\infty(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\left(\frac{Z}{\lambda}\right)^k$ в ряд $\sum\limits_{l=1}^\infty\frac{1}{l!}u^l$ есть разложение функции

$$\exp\left\{\ln\left(1+\frac{Z}{\lambda}\right)\right\}-1=\frac{Z}{\lambda}.$$

Так как при $Z\in\mathfrak{M}^{r,r}$ коэффициенты при степенях Z в правой части ряда (4.4.13) вычисляются по тем же формулам, то

$$\exp\left\{\sum_1^\infty(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\lambda}Z\right)^k\right\}=E_r+\frac{1}{\lambda}Z.$$

Отсюда и из (4.4.11) и (4.4.12) вытекает (4.4.10). Теорема доказана полностью.

Замечание. Так как $\operatorname{Ln}\lambda_k$, $k=1, \ldots, n$ — многозначная функция, то и $\operatorname{Ln}A$ определяется не единственным образом. Однако из доказательства формулы (4.4.10) следует, что при вычислении логарифма каждой клетки Жордана следует рассматривать одну и ту же ветвь логарифма собственного числа.

Следствие. *Если λ_i, $i=1, \ldots, n$ — собственные числа матрицы A, то $\operatorname{Ln}\lambda_i$ — собственные числа $\operatorname{Ln}A$. Кроме того, собственному числу $\operatorname{Ln}\lambda_i$ матрицы $\operatorname{Ln}A$ соответствуют элементарные делители тех же кратностей, что и элементарные делители собственного числа λ_i матрицы A.*

Действительно, если $A\sim J$, то $\operatorname{Ln}A\sim\operatorname{Ln}J$. Пусть J — жорданова форма. Тогда по формуле (4.4.9) $\operatorname{Ln}J$ — верхнетреугольная матрица с числами $\operatorname{Ln}\lambda_1, \ldots, \operatorname{Ln}\lambda_n$ по главной диагонали. Следовательно, $\operatorname{Ln}\lambda_1, \ldots, \operatorname{Ln}\lambda_n$ — собственные числа $\operatorname{Ln}A$. Кроме того, каждая матрица $\operatorname{Ln}J_k$, $k=1, \ldots, q$, удовлетворяет условиям задачи 4.3.1, откуда и следует, что кратности соответствующих элементарных делителей J и $\operatorname{Ln}J$ совпадают.

§ 5. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

В этом параграфе рассмотрим систему (4.1.1) в предположении, что матрица коэффициентов $P(t)$ постоянна.

1. Фундаментальная матрица. Итак, рассмотрим уравнение

$$\dot{x}=Px, \tag{4.5.1}$$

где $x: \mathbf{R}\to\mathbf{C}^n$, $P\in\mathfrak{M}^{n,n}$.

Теорема 4.5.1. *Матрица* e^{tP} *является фундаментальной матрицей уравнения* (4.5.1).

Доказательство. Прежде всего покажем, что функция e^{tP} является решением уравнения (4.5.1). Используя (2.1.4), находим

$$\frac{d}{dt}(e^{tP})=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[e^{(t+\Delta t)P}-e^{tP}]=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{1}{\Delta t}(e^{\Delta tP}-E_n)\right]e^{tP}.$$

Отсюда и из определения экспоненты имеем

$$\frac{d}{dt}e^{tP}=Pe^{tP},$$

что и требовалось доказать по определению 4.2.1.

Далее, при $t=0$ $e^{tP}=E_n$ — неособая матрица, следовательно, матрица e^{tP} — неособая при всех $t\in\mathbf{R}$, т. е. e^{tP} — фундаментальная матрица. Теорема доказана.

Следствие. *По формулам* (4.2.3), (4.2.4) *общее решение уравнения* (4.5.1) *имеет вид*

$$x=e^{tP}C\quad(C\in\mathbf{C}^n), \tag{4.5.2}$$

а решение с начальными данными (t_0, x_0) *— следующий вид:*

$$x=e^{(t-t_0)P}x_0. \tag{4.5.3}$$

2. Структура фундаментальной матрицы. Для того чтобы найти фундаментальную систему решений уравнения (4.5.1), нужно записать в явном виде вектор-столбцы матрицы e^{tP} или какой-либо другой фундаментальной матрицы.

Пусть $P=SJS^{-1}$, где J — жорданова форма матрицы P. По лемме 4.4.1

$$e^{tP}=Se^{tJ}S^{-1},\text{ или } e^{tP}S=Se^{tJ}.$$

Согласно теореме 4.2.3 $e^{tP}S$ — фундаментальная матрица. Следовательно, достаточно записать в явном виде столбцы матрицы $\Phi(t)=Se^{tJ}$. Используя замечание в конце п. 1 предыдущего параграфа, находим

$$e^{tJ}=\operatorname{diag}\{e^{tJ_0}, e^{tJ_1}, \ldots, e^{tJ_q}\}, \tag{4.5.4}$$

где $e^{tJ_0}=\operatorname{diag}\{e^{t\lambda_1},\ldots,e^{t\lambda_p}\}$,

$$e^{tJ_k}=\begin{pmatrix} e^{t\lambda_{p+k}} & te^{t\lambda_{p+k}} & \dots & \dfrac{t^{r_k-1}}{(r_k-1)!}e^{t\lambda_{p+k}} \\ 0 & e^{t\lambda_{p+k}} & \dots & \dfrac{t^{r_k-2}}{(r_k-2)!}e^{t\lambda_{p+k}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_{p+k}} \end{pmatrix}.$$

Обозначим вектор-столбцы матриц $\Phi(t)$ и S через $\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)$ и $s^1, \dots, s^n$ соответственно. Умножая e^{tJ} на S слева, получим

$$\varphi^j(t)=s^je^{\lambda_j t},\quad j=1,\dots,p; \tag{4.5.5}$$

$$\varphi^{p+r_1+\dots+r_{k-1}+1}(t)=s^{p+r_1+\dots+r_{k-1}+1}e^{\lambda_{p+k}t},$$

$$\varphi^{p+r_1+\dots+r_{k-1}+2}(t)=\left(ts^{p+r_1+\dots+r_{k-1}+1}+s^{p+r_1+\dots+r_{k-1}+2}\right)e^{\lambda_{p+k}t}, \tag{4.5.6}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi^{p+r_1+\dots+r_k}(t)=\left(\frac{t^{r_k-1}}{(r_k-1)!}s^{p+r_1+\dots+r_{k-1}+1}+\dots+s^{p+r_1+\dots+r_k}\right)e^{\lambda_{p+k}t},$$

$$k=1,\dots,q.$$

Семейство решений (4.5.6), соответствующее каждому $k=1, \dots, q$, будем называть *группой решений*. Каждому кратному корню матрицы коэффициентов соответствует столько групп решений, сколько различных клеток Жордана соответствует ему в жордановой форме.

Если все собственные числа P простые, то фундаментальная система решений имеет вид (4.5.5). В этом случае коэффициенты при экспонентах оказываются постоянными векторами. Они постоянны и в том случае, когда имеются кратные собственные числа, но все элементарные делители простые, т. е. когда жорданова форма J диагональна.

Векторные коэффициенты $s^1, \dots, s^n$ в формулах (4.5.5), (4.5.6) можно найти из условия $PS=SJ$. Имеем

$$Ps^j=\lambda_j s^j,\quad j=1,\dots,p, \tag{4.5.7}$$

$$Ps^{p+r_1+\dots+r_{k-1}+1}=\lambda_{p+k}s^{p+r_1+\dots+r_{k-1}+1},$$

$$Ps^{p+r_1+\dots+r_{k-1}+2}=\lambda_{p+k}s^{p+r_1+\dots+r_{k-1}+2}+s^{p+r_1+\dots+r_{k-1}+1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{4.5.8}$$

$$Ps^{p+r_1+\dots+r_k}=\lambda_{p+k}s^{p+r_1+\dots+r_k}+s^{p+r_1+\dots+r_k-1},$$

$$k=1,\dots,q.$$

При этом векторы $s^1, \ldots, s^n$ должны образовывать неособую матрицу S.

Общее решение уравнения (4.5.1) имеет вид

$$x = C_1\varphi^1(t) + \ldots + C_n\varphi^n(t), \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{C}, \tag{4.5.9}$$

где $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ определяются формулами (4.5.5)—(4.5.8).

Из формул (4.5.5), (4.5.6) можно получить часто используемую оценку нормы фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ уравнения (4.5.1): существует постоянная $K>0$ такая, что если $\lambda > \operatorname{Re}\lambda_j$, $j=1, \ldots, n$, то при всех $t \geqslant 0$

$$\|\Phi(t)\| \leqslant K e^{\lambda t}. \tag{4.5.10}$$

Действительно, из (4.5.5), (4.5.6) заключаем, что при $t \geqslant 0$

$$e^{-\lambda t}\|\Phi(t)\| = \|e^{-\lambda t}\Phi(t)\| \leqslant K,$$

откуда и следует (4.5.10).

3. Метод Эйлера. Из формул (4.5.5)—(4.5.9) вытекает следующий практический метод нахождения общего решения уравнения (4.5.1).

Пусть λ_i, $i=1, \ldots, m$ — различные собственные числа матрицы коэффициентов P кратности k_i. Каждому λ_i сопоставляем функцию

$$\varphi^i(t) = Q^i(t) e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.5.11}$$

где $Q^i(t)$ — векторная функция, каждая компонента которой полином степени не выше $k_i - 1$, с неопределенными коэффициентами. Условие, согласно которому $\varphi^i(t)$ — решение уравнения (4.5.1), получаем в результате сокращения на $e^{\lambda_i t}$ соотношений для нахождения неопределенных коэффициентов в виде линейной системы из nk_i уравнений, которые оставят k_i из них произвольными, остальные будут выражаться через них единственным образом. Общее решение принимает вид

$$x = \sum_1^m \varphi^i(t). \tag{4.5.12}$$

Описанный метод построения общего решения называется *методом Эйлера.*

Рассмотрим случай, когда матрица коэффициентов P вещественна. С помощью метода Эйлера или по формулам (4.5.5)—(4.5.8) можно построить фундаментальную систему решеиий, но при наличии у P комплексных собственных чисел она содержит комплексные решения. Чтобы перейти к вещественной фундаментальной системе решений, следует воспользоваться результатами п. 2 § 1 гл. IV. Из (4.5.5)—(4.5.8) заключаем, что фундаментальная система решений (4.5.5), (4.5.6) имеет вид (4.1.4), поэтому, отделяя вещественные и мнимые части решений, найдем вещественную фундаментальную систему решений (4.1.5).

Пример 4.5.1. Найти общее решение системы

$$\dot{x}=4x-y, \quad \dot{y}=5x+2y. \tag{4.5.13}$$

Характеристическое уравнение матрицы коэффициентов имеет вид

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2-6\lambda+13=0.$$

Следовательно, ее собственные числа $\lambda_1=3+2i$, $\lambda_2=3-2i$. Так как собственные числа простые, то, используя (4.5.5) и (4.5.7), получаем формулы для фундаментальной системы решений φ^1, φ^2:

$$\varphi^1=s^1 e^{(3+2i)t}, \quad \varphi^2=s^2 e^{(3-2i)t},$$

где s^1, s^2 — собственные векторы матрицы коэффициентов. Пусть $s^1=\operatorname{colon}(s_1, s_2)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}=(3+2i)\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix},$$

откуда $s_2=(1-2i)s_1$. Положив $s_1=1$, найдем

$$\varphi^1(t)=\begin{pmatrix} e^{(3+2)t} \\ (1-2i)e^{(3+2i)t} \end{pmatrix}.$$

В качестве $\varphi^2(t)$ можно взять комплексно-сопряженный вектор $\overline{\varphi^1(t)}$. Однако для получения вещественной фундаментальной системы решений достаточно знать $\varphi^1(t)$. Отделяя вещественную и мнимую части в решении

$$\varphi^1=\begin{pmatrix} e^{3t}\cos 2t+ie^{3t}\sin 2t \\ e^{3t}(\cos 2t+2\sin 2t)+ie^{3t}(\sin 2t-2\cos 2t) \end{pmatrix},$$

получаем вещественную фундаментальную систему решений

$$\psi^1=\begin{pmatrix} e^{3t}\cos 2t \\ e^{3t}(\cos 2t+2\sin 2t) \end{pmatrix}, \quad \psi^2=\begin{pmatrix} e^{3t}\sin 2t \\ e^{3t}(\sin 2t-2\cos 2t \end{pmatrix}.$$

По формуле (4.1.3) находим общее решение:

$$x=e^{3t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t),$$

$$y=e^{3t}[(C_1-2C_2)\cos 2t+(2C_1+C_2)\sin 2t].$$

Пример 4.5.2. Решить систему

$$\begin{aligned} \dot{x}&=2x+y+z, \\ \dot{y}&=-z-2x, \\ \dot{z}&=y+2x+2z. \end{aligned} \tag{4.5.14}$$

Матрица коэффициентов имеет вид

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные числа $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$. Будем решать систему (4.5.14) методом Эйлера.

Решения, отвечающие простому собственному числу $\lambda_1=2$, ищем в соответствии с (4.5.11) в виде

$$x=s_1e^{2t}, \quad y=s_2e^{2t}, \quad z=s_3e^{2t}. \tag{4.5.15}$$

Подставляя (4.5.15) в (4.5.14) и сокращая на e^{2t}, получим следующую систему уравнений для определения s_1, s_2, s_3:

$$2s_1=2s_1+s_2+s_3,$$
$$2s_2=-2s_1-s_3,$$
$$2s_3=2s_1+s_2+2s_3,$$

откуда $s_2=-2s_1$, $s_3=2s_1$, s_1 — произвольно.

Решения, соответствующие двукратному собственному числу, ищем согласно (4.5.11) в виде

$$x=(a_1+a_2t)e^t,$$
$$y=(b_1+b_2t)e^t,$$
$$z=(c_1+c_2t)e^t.$$

Подставляя в (4.5.14) и сокращая на e^t, получаем

$$a_1+a_2=2a_1+b_1+c_1, \quad a_2=2a_2+b_2+c_2,$$
$$b_1+b_2=-2a_1-c_1, \quad b_2=-2a_2-c_2,$$
$$c_1+c_2=2a_1+b_1+2c_1, \quad c_2=2a_2+b_2+2c_2.$$

Из второго и четвертого уравнений находим: $a_2=0$, $b_2+c_2=0$, из первого и третьего: $a_1+b_2=0$, из пятого с учетом предыдущих соотношений: $c_1=b_2-b_1$. Следовательно, множество решений, соответствующих $\lambda_2=\lambda_3=1$, задается формулой

$$\begin{aligned} x&=-b_2e^t,\\ y&=(b_1+b_2t)e^t, \\ z&=(b_2-b_1-b_2t)e^t. \end{aligned} \tag{4.5.16}$$

Суммируя (4.5.15) и (4.5.16), получаем общее решение системы (4.5.14):

$$x=C_1e^{2t}-C_2e^t,$$
$$y=-2C_1e^{2t}+(C_3+C_2t)e^t,$$
$$z=2C_1e^{2t}+(C_2-C_3-C_2t)e^t,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

4. Траектории линейных систем на плоскости. Линейные системы с постоянными коэффициентами являются автономными системами. Поэтому для них важной задачей является изучение траекторий в фазовом пространстве. Рассмотрим этот вопрос для вещественных P в простейшем случае $n=2$, причем предположим, что $\det P \neq 0$. При этом предположении система имеет единственное положение равновесия в начале координат. С помощью линейного неособого преобразования $x=Sy$ приведем систему (4.5.1) к виду

$$\dot{y}=Jy, \qquad (4.5.17)$$

где J — жорданова форма матрицы P. В зависимости от вида собственных чисел имеют место различные случаи.

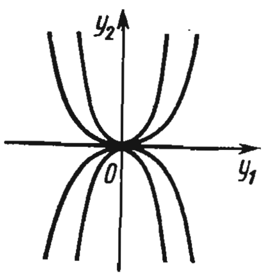

Рис. 7

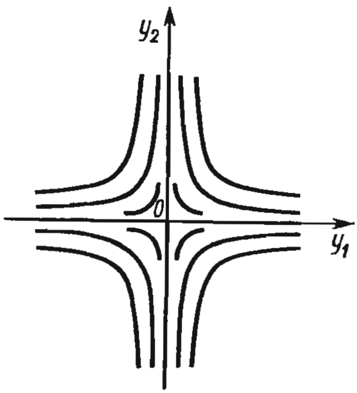

Рис. 8

1) λ_1, λ_2 вещественны, различны и $\lambda_1\lambda_2>0$. В этом случае $J=\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Параметрические уравнения траекторий таковы:

$$y_1=Ce^{\lambda_1 t}, \quad y_2=C_2e^{\lambda_2 t}, \quad t\in \mathbf{R},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Координатные полуоси являются траекториями, соответствующими $C_1=0$ или $C_2=0$. При $C_1\neq 0$, $C_2\neq 0$

$$\left(\frac{y_1}{C_1}\right)^{\lambda_2}=\left(\frac{y_2}{C_2}\right)^{\lambda_1}.$$

Картина расположения траекторий при $|\lambda_2|>|\lambda_1|$, имеющая специальное название — *узел*, изображена на рис. 7.

2) λ_1, λ_2 вещественны и $\lambda_1\lambda_2<0$. Полученные в случае узла формулы сохраняют силу. Соответствующая геометрическая картина, называемая *седлом*, изображена на рис. 8.

3) λ_1 и λ_2 — комплексно-сопряженные. Пусть $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$, $\beta>0$. В преобразовании $x=Sy$ $S=(s^1, s^2)$, где s^1 и s^2 — линейно независимые собственные векторы, соответствующие λ_1 и λ_2. Так как P вещественна, s^1 и s^2 можно выбрать комплексно-сопряженными. Тогда и $y_1=\bar{y}_2$. Чтобы не рассматривать комплексных решений, положим $y_1=z_1+iz_2$, $y_2=z_1-iz_2$, а в качестве фазовой плоскости возьмем плоскость Oz_1z_2. Переменная $z=\operatorname{colon}(z_1, z_2)$ связана с x соотношением

$$x=Sy=STz=Qz, \tag{4.5.18}$$

где

$$T=\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}, \quad Q=(s^1+s^2,\ i(s^1-s^2)).$$

Следовательно, Q — вещественная неособая матрица. Преобразование (4.5.18) приводит (4.5.1) к виду

$$\begin{aligned}\dot{z}_1&=\alpha z_1-\beta z_2,\\ \dot{z}_2&=\beta z_1+\alpha z_2,\end{aligned} \tag{4.5.19}$$

где матрица коэффициентов образует вещественную жорданову форму (4.3.8) матрицы P. Действительно,

$$\dot{z}_1=\frac{1}{2}(\dot{y}_1+\dot{y}_2)=\frac{1}{2}[(\alpha+i\beta)y_1+(\alpha-i\beta)y_2]=\alpha z_1-\beta z_2.$$

Аналогично получается и второе равенство (4.5.19).

Введем полярные координаты $z_1=r\cos\varphi$, $z_2=r\sin\varphi$, $r\geqslant 0$, или

$$y_1=re^{i\varphi}, \quad y_2=re^{-i\varphi}.$$

Имеем

$$\dot{y}_1=\dot{r}e^{i\varphi}+ire^{i\varphi}\dot{\varphi}=(\alpha+\beta i)re^{i\varphi}.$$

Отделяя вещественные и мнимые части, получим

$$\dot{r}=\alpha r, \quad \dot{\varphi}=\beta. \tag{4.5.20}$$

Следовательно,

$$r(t)=r_0e^{\alpha t}, \quad \varphi(t)=\beta t+\varphi_0.$$

При $\alpha\neq 0$ $r_0\neq 0$ траектории образуют спирали (рис. 9). Такое расположение траекторий называется *фокусом*. При $\alpha=0$, $r_0\neq 0$ все траектории — окружности. В этом случае получаем *центр*. В случае центра все решения системы (4.5.1) — периодические с периодом $2\pi/\beta$, что, впрочем, легко видеть и из формул .5.5).

Для того чтобы уяснить картину расположения траекторий в фазовой плоскости Ox_1x_2 системы (4.5.1), следует иметь в виду, что преобразование, которое было использовано при переходе от

(4.5.1) к (4.5.17) или (4.5.19), есть аффинное преобразование плоскости, оставляющее неподвижным начало координат. Оно состоит в повороте на некоторый угол вокруг начала координат и в сжатии (растяжении) относительно двух взаимно перпендикулярных осей. При этом прямые переходят в прямые, окружности превращаются в эллипсы.

Случай $\lambda_1=\lambda_2$ предлагаем рассмотреть самостоятельно в качестве упражнения. Здесь возникают два подслучая в зависимости от вида матрицы J.

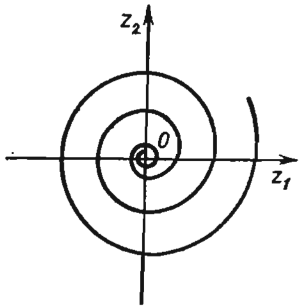

Рис. 9

§ 6. Линейные однородные системы с периодическими коэффициентами

В этом параграфе рассматривается уравнение

$$\dot{x}=P(t)x, \tag{4.6.1}$$

где $x(t):\mathbf{R}\to\mathbf{C}^n$, а функция $P(t):\mathbf{R}\to\to\mathfrak{M}^{n,n}$ удовлетворяет условию $P(t+\omega)==P(t)$, $\omega>0$, при всех $t\in\mathbf{R}$. Такие матричные функции будем называть *периодическими* с периодом ω или *ω-периодическими*. Результаты, которые будут здесь изложены, называются *теорией Флоке*.

1. Фундаментальная матрица.

Теорема 4.6.1. *Каждую фундаментальную матрицу уравнения* (4.6.1) *можно представить в виде*

$$\Phi(t)=G(t)e^{tR}, \tag{4.6.2}$$

где $G:\mathbf{R}\to\mathfrak{M}^{n,n}$ — ω-периодическая матрица, $R\in\mathfrak{M}^{n,n}$ — постоянная матрица.

Доказательство. Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (4.6.1). Тогда и матрица $\Psi(t)=\Phi(t+\omega)$ также является фундаментальной матрицей уравнения (4.6.2). Действительно,

$$\dot{\Phi}(t+\omega)=P(t+\omega)\Phi(t+\omega),$$

а в силу ω-периодичности $P(t)$ и определения $\Psi(t)$ отсюда следует, что

$$\dot{\Psi}(t)=P(t)\Psi(t).$$

Кроме того, функция $\Psi(t)$ — неособая при всех t, так как $\Phi(t)$ — неособая функция. По теореме 4.2.3 существует неособая матрица $B\in\mathfrak{M}^{n,n}$ такая, что при всех t

$$\Phi(t+\omega)=\Phi(t)B. \tag{4.6.3}$$

По теореме 4.4.2 B имеет логарифм. Положим

$$R=\frac{1}{\omega}\operatorname{Ln}B, \quad G(t)=\Phi(t)e^{-tR}.$$

Тогда (4.6.2) выполняется автоматически, и остается доказать, что $G(t+\omega)=G(t)$. Имеем

$$G(t+\omega)=\Phi(t+\omega)e^{-(t+\omega)R}=\Phi(t)Be^{-\omega R}e^{-tR}.$$

Так как $Be^{-\omega R}=E_n$, то

$$G(t+\omega)=\Phi(t)e^{-tR}=G(t).$$

Теорема доказана.

2. Мультипликаторы и характеристические показатели. Постоянная матрица B, определенная формулой (4.6.3), называется *матрицей монодромии.* Она определяется с помощью фундаментальной матрицы $\Phi(t)$, которая не единственна, поэтому и матрица монодромии не определена однозначно. Пусть $\Phi_1(t)$ — другая фундаментальная матрица уравнения (4.7.1). Определим с ее помощью матрицу монодромии B_1:

$$\Phi_1(t+\omega)=\Phi_1(t)B_1.$$

По теореме 4.2.3:

$$\Phi_1(t)=\Phi(t)S, \quad \det S\neq 0.$$

Следовательно,

$$\Phi(t+\omega)S=\Phi(t)SB_1.$$

Сравнивая это выражение с (4.6.3), заключаем, что

$$B=SB_1S^{-1}.$$

Таким образом, все матрицы монодромии подобны. Часто матрицей монодромии называют ту, которая порождается нормированной при $t=0$ фундаментальной матрицей $\widetilde{\Phi}(t)$. Тогда из (4.6.3) имеем

$$B=\widetilde{\Phi}(\omega). \tag{4.6.4}$$

Собственные числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$ матрицы монодромии называются *мультипликаторами* уравнения (4.6.1), а собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы R из теоремы 4.6.1 — *характеристическими показателями.* Из определения R на основании следствия к теореме 4.4.2 имеем

$$\lambda_j=\frac{1}{\omega}\operatorname{Ln}\mu_j, \quad j=1,\ldots, n,$$

при этом простым мультипликаторам соответствуют простые характеристические показатели, а кратным мультипликаторам — характеристические показатели с элементарными делителями той же кратности. Отметим также, что характеристические показатели определены с точностью до $2k\pi i$, $k\in\mathbf{Z}$ (с учетом замечания к теореме 4.4.2). Из (4.6.4) и формулы Лиувилля (4.2.5) следует, что

$$\det B=\exp\left\{\int\limits_0^\omega \operatorname{sp} P(t)\,dt\right\},$$

или

$$\mu_1\ldots\mu_n=\exp\left\{\int\limits_0^\omega \operatorname{sp} P(t)\,dt\right\}. \tag{4.6.5}$$

Пример 4.6.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}+p(t)x=0, \tag{4.6.6}$$

где $p(t)$ — ω-периодическая вещественная скалярная функция. Мультипликаторами уравнения (4.6.6) будем называть мультипликаторы соответствующей линейной системы, т. е. системы

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-p(t)x_1. \tag{4.6.7}$$

Система (4.6.7) является частным случаем системы (4.6.1) при $n=2$:

$$P(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -p(t) & 0\end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{sp} P(t)=0$, то в силу (4.6.5) произведение мультипликаторов равно единице:

$$\mu_1\mu_2=1. \tag{4.6.8}$$

Мультипликаторы являются собственными числами матрицы

$$\widetilde{\Phi}(\omega)=\begin{pmatrix}\varphi_1(\omega) & \varphi_2(\omega)\\ \dot{\varphi}_1(\omega) & \dot{\varphi}_2(\omega)\end{pmatrix},$$

где $\varphi_1(t)$ — решение уравнения (4.6.6), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi_1(0)=1$, $\dot{\varphi}_1(0)=0$, а $\varphi_2(t)$ — решение уравнения (4.6.6), удовлетворяющее условиям $\varphi_2(0)=0$, $\dot{\varphi}_2(0)=1$. Пусть

$$\mu^2-2a\mu+b=0 \tag{4.6.9}$$

— характеристическое уравнение для определения мультипликаторов. В силу (4.6.8) $b=1$. Поэтому (4.6.9) принимает вид

$$\mu^2-2a\mu+1=0,$$

где

$$a=\frac{1}{2}(\varphi_1(\omega)+\dot{\varphi}_2(\omega)). \tag{4.6.10}$$

Название «мультипликатор» (множитель) объясняется следующей теоремой.

Теорема 4.6.2. *Число* μ *является мультипликатором уравнения* (4.6.1) *тогда и только тогда, когда существует ненулевое решение* $\varphi(t)$ *этого уравнения такое, что при всех* t

$$\varphi(t+\omega)=\mu\varphi(t). \qquad (4.6.11)$$

Доказательство. Согласно (4.6.4) утверждение, что число μ есть мультипликатор, эквивалентно существованию ненулевого $x_0\in\mathbf{C}$, такого, что

$$\tilde{\Phi}(\omega)x_0=\mu x_0. \qquad (4.6.12)$$

По формуле (4.2.4) решение $\varphi(t)$, удовлетворяющее условию $\varphi(0)=x_0$, имеет вид

$$\varphi(t)=\tilde{\Phi}(t)x_0,$$

отсюда

$$\varphi(t+\omega)=\tilde{\Phi}(t)\tilde{\Phi}(\omega)x_0,$$

т. е. (4.6.12) эквивалентно

$$\varphi(t+\omega)=\mu\tilde{\Phi}(t)x_0=\mu\varphi(t).$$

Итак, утверждение «μ есть мультипликатор» эквивалентно (4.6.11). Теорема доказана.

3. Структура фундаментальной матрицы. Пусть $R=SJS^{-1}$, где R — из формулы (4.6.2), J — ее жорданова форма. По лемме 4.4.1 и теореме 4.6.1

$$\Phi(t)=G(t)Se^{tJ}S^{-1},$$

или

$$\Phi_1(t)=G_1(t)e^{tJ}, \qquad (4.6.13)$$

где $\Phi_1=\Phi S$ — фундаментальная матрица, $G_1=GS$ — ω-периодическая матрица. Обозначим через $\varphi^1(t),\dots,\varphi^n(t)$ и $g^1(t),\dots,g^n(t)$ вектор-столбцы матриц Φ_1 и G_1 соответственно; $\varphi^1(t),\dots,\varphi^n(t)$ образуют фундаментальную систему решений, $g^1(t),\dots,g^n(t)$ ω-периодичны. Матрица e^{tJ} имеет вид (4.5.4), где $\lambda_1\dots,\lambda_{p+q}$ — характеристические показатели уравнения (4.6.1). Из (4.6.13) и (4.5.4) получаем

$$\varphi^j(t)=g^j(t)e^{t\lambda_j},\quad j=1,\dots,p, \qquad (4.6.14)$$

$$\varphi^{p+r_1+\dots+r_{k-1}+1}(t)=g^{p+r_1+\dots+r_{k-1}+1}(t)e^{t\lambda_{p+k}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi^{p+r_1+\dots+r_k}(t)=\left(\frac{t^{r_k-1}}{(r_k-1)!}g^{p+r_1+\dots+r_{k-1}+1}(t)+\dots g^{p+r_1+\dots+r_k}(t)\right)e^{t\lambda_{p+k}},$$

$$k=1,\dots,q. \qquad (4.6.15)$$

Из этих формул видим, что в структуре фундаментальной матрицы линейной системы с периодическими коэффициентами характеристические показатели играют ту же роль, что и собственные числа матрицы коэффициентов в структуре фундаментальной матрицы линейной системы с постоянными коэффициентами.

4. Приводимость. Из формулы (4.6.2) следует, что фундаментальная матрица уравнения (4.6.1) представляет собой произведение неособой матрицы $G(t)$ на фундаментальную матрицу системы

$$\dot{x}=Rx \qquad (4.6.16)$$

с постоянными коэффициентами. Естественно поэтому ожидать, что замена

$$x=G(t)\,y \qquad (4.6.17)$$

преобразует уравнение (4.6.1) в уравнение (4.6.16).

Действительно, из (4.6.17) имеем

$$PGy=\dot{G}y+G\dot{y}. \qquad (4.6.18)$$

Так как $G=\Phi e^{-tR}$, то

$$\dot{G}=P\Phi e^{-tR}-\Phi e^{-tR}R=PG-GR.$$

Отсюда и из (4.6.18) имеем $\dot{y}=Ry$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.6.3. *Существует линейная замена переменных* (4.6.17), *где* $G(t)\colon \mathbb{R}\to\mathfrak{M}^{n,n}$ — *функция класса* C^1, ω-*периодическая, матрица* $G(t)$ — *неособая при всех* t, *переводящая уравнение* (4.6.1) *в линейное уравнение с постоянной матрицей коэффициентов, собственные числа которой суть характеристические показатели уравнения* (4.6.1).

Это свойство уравнения (4.6.1) называется *приводимостью.*

Замечание. Матрицы $G(t)$ в замене (4.6.17) и R в (4.6.16) комплексные. Они могут оказаться комплексными также и в том случае, когда $P(t)$ — вещественная матрица. Это объясняется тем, что хотя матрицу монодромии в этом случае всегда можно выбрать вещественной, но ее логарифм уже не обязан быть вещественным (примером такой матрицы является отрицательное число). Поэтому если мы хотим привести уравнение (4.6.1) с вещественными коэффициентами к вещественной же системе (4.6.16), а матрица монодромии не допускает вещественного логарифма, то поступаем следующим образом.

Рассматриваем $P(t)$ как матрицу с периодом, равным 2ω. По этому периоду строим матрицу монодромии. Так как

$$\Phi(t+2\omega)=\Phi(t+\omega)\,B=\Phi(t)\,B^2,$$

то матрица монодромии по периоду 2ω равна квадрату матрицы монодромии по периоду ω. Можно доказать (см.: *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1967), что если B — вещественная матрица, то B^2 имеет вещественный логарифм. Следовательно, для вещественного уравнения (4.6.1) всегда существует вещественная замена (4.6.17), где $G(t)$ — вещественная неособая при всех t 2ω-периодическая матричная функция класса C^1, переводящая уравнение (4.6.1) в уравнение с постоянной матрицей коэффициентов.

§ 7. Линейные неоднородные системы

1. Общее решение. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=P(t)x+q(t), \tag{4.7.1}$$

где $P:(a,\ b)\to\mathfrak{M}^{n,n}$, $q:(a,\ b)\to\mathbf{C}^n$. Пусть $\psi:(a,\ b)\to\mathbf{C}^n$ — решение уравнения (4.7.1). В (4.7.1) сделаем замену

$$x=y+\psi. \tag{4.7.2}$$

Из (4.7.2) имеем

$$P(y+\psi)+q=\dot{y}+P\psi+q, \text{ или } \dot{y}=P(t)y. \tag{4.7.3}$$

Так как $y=\Phi(t)C$, где $C\in\mathbf{C}^n$, $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (4.7.3), задает множество решений уравнения (4.7.3), то формула

$$x=\Phi(t)C+\psi(t) \tag{4.7.4}$$

задает множество решений уравнения (4.7.1). Функция (4.7.4) называется общим решением линейного неоднородного уравнения (4.7.4). Если $P(t)$, $q(t)$ — вещественные функции, то при $C\in\mathbf{R}^n$ формула (4.7.4) задает множество решений уравнения (4.7.1) с вещественными начальными данными.

Иногда имеет смысл рассматривать матричные линейные неоднородные дифференциальные уравнения (4.7.1), где $q:(a,\ b)\to\mathfrak{M}^{n,m}$. *Решением матричного уравнения* (4.7.1) называется дифференцируемая фуикция $\varphi:(a,\ b)\to\mathfrak{M}^{n,m}$, обращающая (4.7.1) в тождество:

$$\dot{\varphi}(t)=P(t)\varphi(t)+q(t).$$

Если $\psi:(a,\ b)\to\mathfrak{M}^{n,m}$ — решение матричного уравнения (4.7.1), то замена (4.7.2) приводит (4.7.1) к однородному матричному уравнению (4.7.3), совпадающему с уравнением (4.2.1). Если $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (4.7.3), то по теореме 4.2.3 формула

$$y=\Phi(t)C,\quad C\in\mathfrak{M}^{n,m},$$

задает множество решений матричного уравнения (4.7.3). Следовательно, при $C \in \mathfrak{M}^{n,m}$ формула (4.7.4) задает множество решений матричного уравнения (4.7.1).

2. Метод вариации произвольной постоянной.

Теорема 4.7.1. *Пусть $\Phi : (a, b) \to \mathfrak{M}^{n,n}$ — фундаментальная матрица однородного уравнения* (4.7.3). *Тогда*

$$x = \Phi(t) C + \int_{t_0}^{t} \Phi(t) \Phi^{-1}(s) q(s) ds, \tag{4.7.5}$$

где $C \in \mathbf{C}^n$, t_0, $t \in (a, b)$ — общее решение неоднородного уравнения (4.7.1).

Доказательство. Достаточно найти некоторое решение $\psi(t)$ уравнения (4.7.1). Используем метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Согласно этому методу решение $\psi(t)$ ищем в виде

$$\psi(t) = \Phi(t) C(t), \tag{4.7.6}$$

где $C(t) : (a, b) \to \mathbf{C}^n$ — функция класса C^1, подлежащая определению. Так как $\psi(t)$ — решение уравнения (4.7.1), то

$$\dot{\Phi} C + \Phi \dot{C} = P \Phi C + q.$$

Отсюда, поскольку $\dot{\Phi} = P\Phi$, получаем

$$\Phi \dot{C} = q, \tag{4.7.7}$$

следовательно,

$$\dot{C} = \Phi^{-1}(t) q(t).$$

В качестве C можно взять

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) q(s) ds, \quad t_0, t \in (a, b). \tag{4.7.8}$$

Теперь (4.7.5) следует из (4.7.4), (4.7.6), (4.7.8). Теорема доказана.

Аналогично доказываются следующие аналоги теоремы 4.7.1.

Теорема 4.7.1.′ *Предположим, что уравнение* (4.7.1) *вещественно. Пусть $\Phi(t)$ — вещественная фундаментальная матрица уравнения* (4.7.3). *Тогда формула* (4.7.5) *при $C \in \mathbf{R}^n$ задает общее решение уравнения* (4.7.1) *в вещественной области.*

Теорема 4.7.1.″ *Пусть в уравнении* (4.7.1) $q(t) : (a, b) \to \mathfrak{M}^{n,m}$ *и пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения* (4.7.3). *Тогда формула* (4.7.5) *при $C \in \mathfrak{M}^{n,m}$ задает общее решение матричного уравнения* (4.7.1).

На практике дело сводится к вычислению координатных функций $C_1(t),\ldots,C_n(t)$. Эти функции определяются из уравнения (4.7.7), которое в скалярной форме имеет вид

$$\varphi_1^1\dot{C}_1+\ldots+\varphi_1^n\dot{C}_n=q_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_n^1\dot{C}_1+\ldots+\varphi_n^n\dot{C}_n=q_n, \tag{4.7.9}$$

где $\varphi^1,\ldots,\varphi^n$ — фундаментальная система решений уравнения (4.7.3). Система (4.7.9) имеет единственное решение, так как ее определитель является определителем Вронского $W(t)=\det\Phi(t)$, который отличен от нуля при всех $t\in(a, b)$.

Рассмотрим частный случай, когда $P(t)=P$ — постоянная матрица. Тогда по теореме (4.5.1)

$$\Phi(t)=e^{tP},\quad \Phi^{-1}(t)=e^{-tP}.$$

Формула общего решения (4.7.5) принимает вид

$$x=e^{tP}C+\int\limits_{t_0}^{t}e^{(t-s)P}q(s)\,ds, \tag{4.7.10}$$

а решение с начальными данными $(t_0,\ x)$ — следующий вид:

$$x=e^{(t-t_0)P}x_0+\int\limits_{t_0}^{t}e^{(t-s)P}q(s)\,ds. \tag{4.7.11}$$

Формула (4.7.11) называется *формулой Коши.*

3. Периодические решения. Пусть $P(t)$, $q(t)$ в уравнении (4.7.1) — ω-периодические функции. Рассмотрим вопрос о существовании периодического решения уравнения (4.7.1) периода ω в этом случае.

Теорема 4.7.2. *Для того чтобы решение* $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{C}^n$ *уравнения* (4.7.1) *было ω-периодическим, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi(0)=\varphi(\omega). \tag{4.7.12}$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности рассмотрим функцию $\psi(t)=\varphi(t+\omega)$, которая в силу периодичности $P(t)$, $q(t)$ является решением уравнения (4.7.1), причем в силу (4.7.12)

$$\psi(0)=\varphi(\omega)=\varphi(0).$$

В силу единственности $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ совпадают при всех $t\in\mathbf{R}$, что и доказывает теорему.

Теорема 4.7.3. *Если среди мультипликаторов уравнения* (4.7.3) *нет равных единице, то уравнение* (4.7.1) *имеет единственное ω-периодическое решение.*

Доказательство. Формула (4.7.5) задает множество всех решений уравнения (4.7.1). В качестве $\Phi(t)$ возьмем нормированную при $t=0$ фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ уравнения (4.7.3). В силу (4.7.12) условие ω-периодичности решения с начальными данными $(0, x_0)$ имеет вид

$$x_0=\tilde{\Phi}(\omega)x_0+\int_0^{\omega}\tilde{\Phi}(\omega)\tilde{\Phi}^{-1}(s)q(s)\,ds. \qquad (4.7.13)$$

Это уравнение имеет единственное решение x_0 тогда и только тогда, когда матрица $E_n-\tilde{\Phi}(\omega)$ неособая, что эквивалентно отсутствию у матрицы $\tilde{\Phi}(\omega)$ собственных чисел (которые и являются мультипликаторами), равных единице. Теорема доказана.

Следствие. *Если P — постоянная матрица, $q(t+\omega)=q(t)$, то необходимым и достаточным условием существования у уравнения* (4.7.1) *единственного ω-периодического решения является отсутствие у матрицы P собственных чисел вида $2\pi ik/\omega$, $k\in\mathbf{Z}$.*

Запишем явно формулу для ω-периодического решения в этом случае. Имеем

$$\tilde{\Phi}(t)=e^{tP}.$$

Из (4.7.13) находим

$$x_0=(E_n-e^{\omega P})^{-1}\int_0^{\omega}e^{(\omega-s)P}q(s)\,ds.$$

Подставляя последнее равенство в (4.7.11) при $t_0=0$, находим периодическое решение в виде

$$\varphi(t)=e^{tP}(E_n-e^{\omega P})^{-1}\int_0^{\omega}e^{(\omega-s)P}q(s)\,ds+\int_0^{t}e^{(t-s)P}q(s)\,ds.$$

Умножив слева на $(E_n-e^{\omega P})$, имеем

$$(E_n-e^{\omega P})\varphi=e^{Pt}\left[\int_0^{\omega}e^{(\omega-s)P}q(s)\,ds+\int_0^{t}e^{-sP}q(s)\,ds-\int_0^{t}e^{(\omega-s)P}q(s)\,ds\right].$$

Так как

$$\int_{\omega}^{t}e^{(\omega-s)P}q(s)\,ds=\int_0^{t-\omega}e^{-sP}q(s)\,ds.$$

то

$$\varphi(t)=(E_n-e^{\omega P})^{-1}\int_{t-\omega}^{t}e^{(t-s)P}q(s)\,ds.$$

Это и есть искомая формула.

Задача 4.7.1. Пусть в уравнении (4.7.1) P — постоянная матрица, $q(t)$ ограничена при $t \in \mathbf{R}$. Доказать, что если все собственные числа матрицы P имеют отрицательные вещественные части, то уравнение (4.7.1) имеет единственное ограниченное решение

$$\Phi = \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)P} q(s)\,ds.$$

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение (3.4.1) с постоянными коэффициентами и ω-периодической правой частью $q(t)$. Так как корни характеристического уравнения совпадают с собственными числами матрицы коэффициентов соответствующей линейной системы (докажите это), то из теоремы 4.7.3 следует, что уравнение (3.4.1) имеет одно и только одно ω-периодическое решение, если среди корней характеристического уравнения нет чисел вида $\frac{2\pi i}{\omega} k$, $k \in Z$.

4. Эквивалентное интегральное уравнение. С помощью метода вариации произвольной постоянной можно построить интегральное уравнение, эквивалентное задаче Коши для нелинейного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = P(t)x + g(t, x), \tag{4.7.14}$$

где $P: (a, b) \to \mathfrak{R}^{n,n}$, $g: G \to \mathbf{R}^p$, $G = (a, b) \times D$, $D \subset \mathbf{R}^n$, способом, который отличен от изложенного в п. 4 § 2 гл. II.

Пусть $\tilde{\Phi}(t)$ — нормированная при $t = t_0$ фундаментальная матрица уравнения $\dot{x} = P(t)x$. Согласно методу вариации произвольной постоянной будем искать решение уравнения (4.7.14) с начальными данными $(t_0, x_0) \in G$ в виде

$$\varphi(t) = \tilde{\Phi}(t)C(t), \tag{4.7.15}$$

где $C(t)$ — неизвестная функция класса C^1 в окрестности $t = t_0$, $C(t_0) = x_0$. Рассуждая, как при выводе (4.7.8), получим

$$C(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \tilde{\Phi}^{-1}(s) g(s, \varphi(s))\,ds. \tag{4.7.16}$$

Рассмотрим интегральное уравнение, вид которого подсказан формулами (4.7.15) и (4.7.16):

$$x(t) = \tilde{\Phi}(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} \tilde{\Phi}(t)\tilde{\Phi}^{-1}(s) g(s, x(s))\,ds. \tag{4.7.17}$$

Определение 4.7.1. *Функция* $\varphi(t): \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbf{R}^n$ *называется решением интегрального уравнения* (4.7.17), *если* $\langle\alpha, \beta\rangle \in (a, b)$ *и выполняются условия:*

1) $\varphi(t)$ *непрерывна на* $\langle\alpha, \beta\rangle$, $t_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle$;

2) $(t, \varphi(t)) \in G$ *при* $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$;

3) *при* $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$$\varphi(t) = \tilde{\Phi}(t) x_0 + \int_{t_0}^{t} \tilde{\Phi}(t) \tilde{\Phi}^{-1}(s) g(s, \varphi(s)) ds.$$

Из проведенных рассуждений вытекает следующая теорема.

Теорема 4.7.4. *Функция* $\varphi(t) : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathrm{R}^n$ *является решением задачи Коши для уравнения* (4.7.14) *с начальными данными* $(t_0, x_0) \in G$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi(t)$ *является решением интегрального уравнения* (4.7.17).

Задача 4.7.2. Доказать, что решение $\varphi(t)$ уравнения

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = f(t, x)$$

(где $f(t, x)$ непрерывна при $|x| \leqslant 1$, $t \geqslant 0$ и $|f(t, x)| < 1$) с начальными данными: $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$ удовлетворяет при всех $t \geqslant 0$ неравенству $|\varphi(t)| < 1$.

Указание. Функция $\varphi(t)$ — решение интегрального уравнения

$$x(t) = \int_{0}^{t} [\mathrm{e}^{s-t} - \mathrm{e}^{2(s-t)}] f(s, x(s)) ds.$$

§ 8. Краевая задача

1. Однородная краевая задача. Рассмотрим линейное уравнение

$$\dot{x} = P(t) x, \tag{4.8.1}$$

где $P : (a, b) \to \mathfrak{M}^{n,n}$. На этот раз вместо задачи Коши поставим следующую краевую задачу: *найти решение* $x(t)$ *уравнения* (4.8.1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$Ax(\alpha) + Bx(\beta) = 0, \tag{4.8.2}$$

где $A, B \in \mathfrak{M}^{n,n}$, $\alpha, \beta \in (a, b)$ *заданы.*

Пусть $\Phi(t)$ — нормированная при $t = \alpha$ фундаментальная матрица уравнения (4.8.1). Так как множество решений (4.8.1) задается формулой (4.2.3), то будем искать решение краевой задачи (4.8.1), (4.8.2) в виде

$$x(t) = \Phi(t) C, \quad C \in \mathrm{C}^n.$$

Из (4.8.2) следует, что C определяется уравнением

$$[A + B\Phi(\beta)] C = 0.$$

Следовательно, краевая задача (4.8.1), (4.8.2) допускает нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\Delta = \det [A + B\Phi(\beta)] = 0.$$

Предположим, что $\Delta \neq 0$. Рассмотрим множество

$$Q = \{(t, s) : \alpha \leqslant t \leqslant \beta,\ \alpha \leqslant s \leqslant \beta,\ t \neq s\}.$$

Определение 4.8.1. *Функция* $G : Q \to \mathfrak{M}^{n,n}$ *называется функцией Грина краевой задачи* (4.8.1), (4.8.2), *если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) *при* $t \in [\alpha, s)$ *и* $t \in (s, \beta]$ $dG/dt = P(t)G$;

2) $AG(\alpha, s) + BG(\beta, s) = 0$ *при всех* $s \in (\alpha, \beta)$;

3) $G(s+0, s) - G(s-0, s) = E_n$.

Из условия 1) и теоремы 4.2.3 следует, что

$$G(t, s) = \begin{cases} \Phi(t)S(s) & \text{при } \alpha \leqslant t < s, \\ \Phi(t)T(s) & \text{при } s < t \leqslant \beta. \end{cases}$$

Из условий 2) и 3) получаем:

$$AS + B\Phi(\beta)T = 0, \quad \Phi(S - T) = -E_n,$$

откуда

$$S - T = -\Phi^{-1},$$

$$S(s) = -[A + B\Phi(\beta)]^{-1} B\Phi(\beta)\Phi^{-1}(s),$$

$$T(s) = \{E_n - [A + B\Phi(\beta)]^{-1} B\Phi(\beta)\}\Phi^{-1}(s).$$

Следовательно, $G(t, s)$ однозначно определяется формулой

$$G(t, s) = \begin{cases} -\Phi(t)[A + B\Phi(\beta)]^{-1} B\Phi(\beta)\Phi^{-1}(s) & \text{при } \alpha \leqslant t < s, \\ \Phi(t)\{E_n - [A + B\Phi(\beta)]^{-1} B\Phi(\beta)\}\Phi^{-1}(s) & \text{при } s < t \leqslant \beta. \end{cases} \tag{4.8.3}$$

Нетрудно убедиться, используя (4.8.3) и (4.2.6), что

$$\frac{dG}{ds} = -GP(s), \quad G(t, t-0) - G(t, t+0) = E_n.$$

2. Неоднородная краевая задача. Рассмотрим теперь *неоднородную краевую задачу*

$$\dot{x} = P(t)x + q(t), \tag{4.8.4}$$

$$Ax(\alpha) + Bx(\beta) = 0, \tag{4.8.5}$$

где $q : (a, b) \to \mathbf{C}^n$.

Теорема 4.8.1. *Если* $\Delta \neq 0$, *то неоднородная краевая задача* (4.8.4), (4.8.5) *имеет единственное решение, задаваемое формулой*

$$x(t) = \int_{\alpha}^{\beta} G(t, s)q(s)\,ds, \tag{4.8.6}$$

где $G(t, s)$ — *функция Грина однородной краевой задачи* (4.8.1), (4.8.2).

Доказательство. Для того чтобы убедиться, что функция $x(t)$ удовлетворяет (4.8.4), представим ее в виде

$$x(t)=\int_{\alpha}^{t} G(t, s)q(s)ds+\int_{t}^{\beta} G(t, s)q(s)ds,$$

откуда, используя свойства $G(t, s)$, получим

$$\dot{x}(t)=G(t, t-0)q(t)+\int_{\alpha}^{t} P(t)G(t, s)q(s)ds-G(t, t+0)q(t)+$$
$$+\int_{t}^{\beta} P(t)G(t, s)q(s)ds=P(t)x(t)+q(t).$$

Далее имеем

$$Ax(\alpha)+Bx(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} AG(\alpha, s)q(s)ds+\int_{\alpha}^{\beta} BG(\beta, s)q(s)ds=$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta} [AG(\alpha, s)+BG(\beta, s)]q(s)ds=0.$$

Таким образом, мы доказали, что функция (4.8.6) — решение краевой задачи (4.8.4), (4.8.5).

Докажем единственность. Пусть $x^1(t)$ и $x^2(t)$ — решения задачи (4.8.4), (4.8.5). Тогда $\varphi(t)=x^1(t)-x^2(t)$ — решение однородной задачи (4.8.1), (4.8.2). Так как по условию теоремы $\Delta\neq 0$, то $\varphi(t)=0$ при всех $t\in(a, b)$. Теорема доказана.

Теорема 4.7.3 является следствием теоремы 4.8.1. Действительно, пусть $P(t)$ и $q(t)$ в (4.8.4) периодичны с периодом ω. Полагаем $\alpha=0$, $\beta=\omega$, $A=-B=E_n$; тогда краевые условия совпадают с условием периодичности (4.7.12). Функция Грина принимает вид

$$G(t, s)=\begin{cases} \Phi(t)(E_n-\Phi(\omega))^{-1}\Phi(\omega)\Phi^{-1}(s) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant s, \\ \Phi(t)\{E_n+(E_n-\Phi(\omega))^{-1}\Phi(\omega)\}\Phi^{-1}(s) \text{ при } s<1\leqslant\omega, \end{cases} \tag{4.8.7}$$

а условие $\Delta\neq 0$ совпадает с условием отсутствия у уравнения (4.8.1) мультипликаторов, равных единице.

Единственное ω-периодическое решение уравнения (4.8.4) задается в силу (4.8.6) формулой

$$\varphi(t)=\int_{0}^{\omega} G(t, s)q(s)ds,$$

где $G(t, s)$ определяется формулой (4.8.7).

В заключение рассмотрим краевую задачу (4.7.14), (4.8.5) для нелинейного уравнения (4.7.14) в предположениях п. 3 § 7 гл. IV.

Рассмотрим порождаемое формулой (4.8.6) интегральное уравнение

$$x(t)=\int_{\alpha}^{\beta} G(t, s)g(s, x(s))ds. \tag{4.8.8}$$

Решением интегрального уравнения (4.8.8) будем называть всякую непрерывную функцию $x(t):[\alpha, \beta]\mapsto\mathbf{R}^n$, график которой принадлежит G и обращающую (4.8.8) в тождество по $t\in[\alpha, \beta]$.

Теорема 4.8.2. *Для того чтобы при* $\Delta\neq 0$ *функция* $x(t):[\alpha, \beta]\mapsto\mathbf{R}^n$ *была решением краевой задачи* (4.7.14), (4.8.5), *необходимо и достаточно, чтобы* $x(t)$ *была решением интегрального уравнения* (4.8.8).

Достаточность доказывается точно так же, как теорема 4.8.1. Для доказательства необходимости заметим, что решение $x(t)$ задачи (4.7.14), (4.8.5) является решением краевой задачи с краевыми условиями (4.8.5) для линейного неоднородного уравнения

$$\dot{x}=P(t)x+g(t, x(t)).$$

Так как $\Delta\neq 0$, то это решение единственно. По теореме 4.8.1 таким решением является функция (4.8.8). Следовательно, решение задачи (4.7.14), (4.8.5) является решением уравнения (4.8.8), это доказывает необходимость, а значит, и всю теорему.

§ 9. Ограниченные решения линейных систем

Пусть $P(t)$ и $q(t)$ в (4.8.1) и (4.8.4) определены при всех $t\in\mathbf{R}$. Поставим задачу (γ): найти ограниченные при $t\in\mathbf{R}$ решения этих систем.

Задача (γ) по своей постановке близка к краевой задаче, у которой $\alpha=-\infty$, $\beta=\infty$. Поэтому используем метод, изложенный в предыдущем параграфе. Сначала построим функцию Грина однородной задачи (γ). Предположим, что нулевое решение является единственным решением задачи (γ) для уравнения (4.8.1). Это означает, что каждое ненулевое решение (4.8.1) неограничено либо при возрастании, либо при убывании t. Обозначим через X_1 подпространство пространства решений уравнения (4.8.1), образованное ограниченными при $t\to-\infty$ решениями, а через X_2 — подпространство, образованное ограниченными при $t\to+\infty$ решениями. Возьмем некоторую фундаментальную матрицу $\Phi(t)$. Множество всех решений уравнения (4.8.1) имеет вид $\Phi(t)C$, $C\in\mathbf{C}^n$. Тогда подпространствам X_1 и X_2 соответствуют подпространства $\mathbf{C}^n$, которые будем обозначать по-прежнему через X_1 и X_2. X_1 и X_2 имеют единственный общий вектор (нулевой). Предположим, что сумма их размерностей равна n. В этом случае говорят, что уравнение (4.8.1) обладает свойством *дихотомии*.

Обозначим размерность X_1 через m, $0 \leqslant m \leqslant n$. Если $m=0$, то X_1 состоит только из нулевого вектора, а если $m=n$, то X_2 состоит только из нулевого вектора. В первом случае все решения (4.8.1) ограничены при $t \to +\infty$, а во втором — при $t \to -\infty$. Выберем в $\mathbf{C}^n$ базис, m векторов которого принадлежат X_1, а остальные $n-m$ векторов принадлежат X_2. Разлагая произвольный вектор C по элементам этого базиса, получим представление C в виде $C = C^1 + C^2$, где $C^1 \in X_1$, $C_2 \in X_2$. Пусть Γ — линейный оператор, сопоставляющий вектору C вектор C^1, т. е. $\Gamma C = C^1$. Тогда $(E_n - \Gamma) C = C^2$. Очевидно, сужение Γ на X_1 есть тождественный оператор, т. е. $\Gamma^2 = \Gamma$. Такие операторы называются *операторами проектирования*.

Образуем функцию

$$G(t, s) = \begin{cases} -\Phi(t)\Gamma\Phi^{-1}(s) & \text{при } t < s, \\ \Phi(t)(E_n - \Gamma)\Phi^{-1}(s) & \text{при } s < t. \end{cases}$$

Очевидно, $G(t, s)$ удовлетворяет определению 4.8.1, поэтому эту функцию можно назвать функцией Грина задачи (γ). Если все решения уравнения (4.8.1) ограничены, например, при $t \to -\infty$, то $\Gamma = E_n$ и

$$G(t, s) = \begin{cases} -\Phi(t)\Phi^{-1}(s) & \text{при } t < s, \\ 0 & \text{при } s < t. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда P — постоянная матрица. На основании сделанного предположения о единственности решения задачи (γ) собственные числа P не имеют нулевых вещественных частей. С помощью линейного неособого преобразования всегда можно привести P к виду $P = \operatorname{diag}\{P^-, P^+\}$, где P^- имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями, а P^+ — с положительными. Для этого достаточно привести P к жордановой форме. Тогда m — число собственных чисел с положительной вещественной частью, X_1 состоит из векторов с равными нулю первыми $n-m$ координатами, X_2 состоит из векторов с равными нулю последними m координатами. Таким образом, линейные системы с постоянными коэффициентами обладают свойством дихотомии, если $P = \operatorname{diag}\{P^-, P^+\}$.

В рассматриваемом случае

$$\Phi(t) = \operatorname{diag}\{e^{tP^-}, e^{tP^+}\}, \quad \Gamma = \operatorname{diag}\{O_{n-m}, E_m\}.$$

Следовательно,

$$G(t, s) = \begin{cases} \operatorname{diag}\{O_{n-m}, -e^{(t-s)P^+}\} & \text{при } t < s, \\ \operatorname{diag}\{e^{(t-s)P^-}, O_m\} & \text{при } s < t. \end{cases} \qquad (4.9.1)$$

Теорема 4.9.1. *Пусть* $P = \operatorname{diag}\{P^-, P^+\}$, а $q(t)$ *ограничена при* $t \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) q(s) ds$$

— *единственное ограниченное решение уравнения* (4.8.4).

Доказательство. Запишем $x(t)$ в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t, s) q(s) ds + \int_{t}^{\infty} G(t, s) q(s) ds. \qquad (4.9.2)$$

На основании (4.9.1) $x(t) = y(t) + z(t)$, где

$$y(t) = \begin{pmatrix} \bar{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{z}(t) \end{pmatrix},$$

$$\bar{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)P^-} q^1(s) ds, \quad \bar{z}(t) = -\int_{t}^{\infty} e^{(t-s)P^+} q^2(s) ds,$$

$q^1(s)$ образован первыми $n-m$ координатами $q(s)$, а $q^2(s)$ — последними m координатами. В силу (4.5.10) и ограниченности $q(s)$,

$$\|y(t)\| = \left\| \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)P^-} q^1(s) ds \right\| \leqslant K \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)\lambda} ds = \frac{K}{\lambda}, \quad K > 0, \ \lambda > 0$$

Аналогично доказывается и ограниченность $z(t)$. Дифференцируя (4.9.2) по t, получим, как и при доказательстве теоремы 4.8.1, что $x(t)$ удовлетворяет уравнению (4.8.4). Таким образом, $x(t)$ — решение задачи (γ) для уравнения (4.8.4).

Это решение единственно, так как разность любых двух таких решений является решением однородной задачи (γ), следовательно, она тождественно равна нулю. Теорема доказана.

Утверждение задачи 4.7.1 вытекает из теоремы 4.9.1 как частный случай.

Глава V

ОБЩИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений, записанную в векторной форме:

$$\dot{x}=f(t, x), \tag{5.0.1}$$

где $f: G\to\mathbf{R}^n$, $G\subset\mathbf{R}^{n+1}$ — область единственности. Начальной точкой $(t_0, x_0)\in G$ полное решение уравнения (5.0.1) определяется единственным образом, поэтому его можно записать в виде $x: D\to\mathbf{R}^n$, где

$$D=\{(t, t_0, x_0):(t_0, x_0)\in G,\ t\in I(t_0, x_0)\},$$

I — максимальный интервал существования.

На практике начальные данные t_0, x_0 всегда известны лишь с некоторой степенью точности. Поэтому даже в случае, когда речь идет о решении с конкретными начальными значениями, практически начальная точка (t_0, x_0) изменяется в некоторой окрестности заданной точки. Возникает вопрос, не приведет ли ошибка в выборе начальной точки к решению, существенно отличающемуся от искомого, т. е. фактически вопрос о непрерывности решения $x(t, t_0, x_0)$ и максимального интервала $I(t_0, x_0)$ как функции t_0, x_0 в данной точке.

В равной степени правая часть уравнения (5.0.1) содержит параметры (например, коэффициенты многочленов), определенные с лишь некоторой степенью точности. Будем считать, что число этих параметров конечно, т. е. в (5.0.1) $f=f(t, x, \mu)$, $\mu\in\mathbf{R}^m$. Решение оказывается функцией, зависящей также и от μ:

$$x=x(t, t_0, x_0, \mu): D_\mu\to\mathbf{R}^n,$$

где $D_\mu=\{(t, t_0, x_0, \mu):(t_0, x_0)\in G,\ \mu\in M,\ t\in I(t_0, x_0, \mu)\}$.

Глава V посвящена общему вопросу о характере зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных и параметров, а также ряду близких вопросов, в частности описанию множества решений с начальными данными из заданной области.

§ 1. Непрерывная зависимость решений от начальных данных и параметров

Рассмотрим дифференциальное уравнение, зависящее от параметра:

$$\dot{x}=f(t, x, \mu), \tag{5.1.1}$$

где $f: G_\mu\to\mathbf{R}^n$, $G_\mu\subset\mathbf{R}^{n+m+1}$ — область. Предположим, что в области $G_\mu f$ удовлетворяет условию Липшица по x локально:

$$f \in \mathrm{Lip}_x(G_\mu)\,\mathrm{loc}.$$

По теореме 2.3.2 $G=\{(t, x) : (t, x, \mu)\in G_\mu\}$ — область единственности для системы (5.1.1) при каждом фиксированном μ. Рассмотрим функцию $x(t, t_0, x_0, \mu)$ — решение системы (5.1.1) с начальными данными t_0, x_0 — определенную на множестве

$$D_\mu=\{(t, t_0, x_0, \mu):(t_0, x_0, \mu)\in G_\mu, \quad t\in I(t_0, x_0, \mu)\},$$

где $I(t_0, x_0, \mu)$ — максимальный интервал существования.

Теорема 5.1.1. *При сделанных предположениях D_μ — область и $x(t, t_0, x_0, \mu)$ непрерывна в D_μ.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что D_μ связно. Пусть $A'=(t', t'_0, x'_0, \mu')\in D_\mu$, $A''=(t'', t_0'', x_0'', \mu'')\in D_\mu$. Построим путь γ, лежащий в D_μ и соединяющий A' и A''. Из определения D_μ следует, что D_μ выпукло по t. Кроме того, так как по смыслу понятия максимального интервала существования $t_0\in I(t_0, x_0, \mu)$, то множество

$$\Gamma=\{(t_0, t_0, x_0, \mu):(t_0, x_0, \mu)\in G_\mu\}$$

— область гиперплоскости $t=t_0$, лежащая в D_μ. Отсюда получаем следующий способ построения γ: точки A' и A'' соединяем отрезками прямых с точками (t'_0, t'_0, x'_0, μ') и $(t''_0, t''_0, x''_0, \mu'')$ соответственно, а эти последние точки соединяем любым путем, лежащим в Γ.

Теперь нужно доказать, что существует $\delta^*>0$ такое, что если $(\bar t, \bar t_0, \bar x_0, \bar\mu)\in D_\mu$, то и ее δ^*-окрестность U^* также принадлежит D_μ и $x(t, t_0, x_0, \mu)$ непрерывна в U^*. Пусть $\bar x(t)$ — решение с начальными данными $(\bar t_0, \bar x_0)$, соответствующее $\mu=\bar\mu$. По определению D_μ оно определено при $t\in[\bar t_0, \bar t]$. Образуем $[\tau, T]=[\bar t_0-\delta^*, \bar t+\delta^*]$ при $\bar t\geqslant\bar t_0$ и $[\tau, T]=[\bar t-\delta^*, \bar t_0+\delta^*]$ при $\bar t\leqslant\bar t_0$. Продолжая $\bar x(t)$ за $[\bar t_0, \bar t]$ или $[\bar t, \bar t_0]$ и уменьшая δ^*, можно добиться, чтобы $\bar x(t)$ было определено на $[\tau, T]$.

Отсюда следует, что достаточно доказать следующее утверждение, равносильное теореме 5.1.1.

Теорема 5.1.1'. *Пусть в предположениях теоремы* 5.1.1 *дифференциальное уравнение $\dot x=f(t, x, \bar\mu)$ имеет решение $\bar x(t)$, определенное на отрезке $[\tau, T]$. Тогда существует $\delta^*>0$ такое, что решение $x(t, t_0, x_0, \mu)$ при $(t_0, x_0, \mu)\in V^*$:*

$$V^*=\{(t_0, x_0, \mu): t_0\in[\tau, T], \ \|x_0-\bar x(t_0)\|<\delta^*, \ \|\mu-\bar\mu\|<\delta^*\},$$

определено при $t\in[\tau, T]$ и функция $x(t, t_0, x_0, \mu)$ непрерывна на множестве $[\tau, T]\times V^*$.

Доказательство. Выберем и зафиксируем столь малое $\Delta>0$, чтобы замкнутая область

$$\Omega=\{(t, x, \mu): t\in[\tau, T], \ \|x-\bar x(t)\|\leqslant\Delta, \ \|\mu-\bar\mu\|\leqslant\Delta\}$$

принадлежала G_μ. Поскольку Ω — компакт, в силу леммы 2.1.2 $f(t, x, \mu)$ удовлетворяет на Ω условию Липшица по x (глобально) с некоторой постоянной Липшица L. Далее, так как f непрерывна в области G_μ, то она равномерно непрерывна на Ω. Следовательно, любому $\varepsilon>0$ соответствует множество чисел $\delta(\varepsilon)$, обладающих свойством

$$(t, x', \mu')\in\Omega,\ (t, x'', \mu'')\in\Omega,\ \|x'-x''\|\leqslant\delta,$$

$$\|\mu'-\mu''\|\leqslant\delta\Rightarrow\|f(t, x', \mu')-f(t, x'', \mu'')\|\leqslant\varepsilon.$$

Пусть теперь $\varepsilon_0>0$ удовлетворяет неравенству

$$(\varepsilon_0/L)(e^{L|T-\tau|}-1)<\Delta/2, \tag{5.1.2}$$

а δ^* — любое число из множества $\delta(\varepsilon_0)$ такое, что

$$\delta^*<\Delta/2. \tag{5.1.3}$$

Покажем, что выбранное таким образом δ^* — искомое. Пусть $(t_0, x_0, \mu)\in V^*$. Решение $x(t, t_0, x_0, \mu)$ будем строить методом последовательных приближений Пикара. За нулевое приближение x^0 возьмем

$$x^0=x_0+\bar{x}(t)-\bar{x}(t_0). \tag{5.1.4}$$

В соответствии с § 3 гл. II k-е приближение $(k\in N)$ определяем рекуррентным соотношением

$$x^k(t, t_0, x_0, \mu)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s, x^{k-1}(s, t_0, x_0, \mu), \mu)ds. \tag{5.1.5}$$

Лемма 5.1.1. *При всех $k\in\mathrm{N}_0$ последовательные приближения $x^k(t, t_0, x_0, \mu):[\tau, T]\times V^*\to\mathrm{R}^n$, определяемые формулами* (5.1.4), (5.1.5), *обладают следующими свойствами*:

а) $x^k(t, t_0, x_0, \mu)$ — *непрерывная функция;*

б) $(t, x^k(t, t_0, x_0, \mu), \mu)\in\Omega$;

в) $\|x^{k+1}(t, t_0, x_0, \mu)-x^k(t, t_0, \mu)\|\leqslant\dfrac{\varepsilon_0}{L}\,\dfrac{(L|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!}$.

Лемму 5.1.1 докажем индукцией по k. Сначала докажем а), б), в) при $k=0$. Справедливость а) при $k=0$ вытекает из (5.1.4). Справедливость б) при $k=0$ следует из (5.1.3) и (5.1.4), так как

$$\|x^0(t, x_0)-\bar{x}(t)\|=\|x_0-\bar{x}(t_0)\|<\delta^*<\Delta/2. \tag{5.1.6}$$

Докажем справедливость в) при $k=0$. В силу (5.1.4) и (5.1.5)

$$x^1-x^0=\int_{t_0}^{t} f(s, x^0, \mu)ds-\bar{x}(t)+\bar{x}(t_0).$$

Учитывая, что $\bar{x}(t)$ — решение уравнения (5.1.1) при $\mu=\bar{\mu}$, имеем

$$x^1-x^0=\int_{t_0}^{t}[f(s, x^0, \mu)-f(s, \bar{x}, \bar{\mu})]\,ds,$$

следовательно,

$$\|x^1-x^0\| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t}\|f(s, x^0, \mu)-f(s, \bar{x}, \bar{\mu})\|ds\right|.$$

Очевидно, что $(s, \bar{x}(s), \bar{\mu})\in\Omega$. Кроме того, в силу справедливости б) при $k=0$ $(s, x^0, \mu)\in\Omega$. Используя определение δ^*, получаем, что при $(t, t_0, x_0, \mu)\in[\tau, T]\times V^*$

$$\|x^1-x^0\|\leqslant\varepsilon_0|t-t_0|,$$

откуда и вытекает в) при $k=0$.

Предположим теперь, что утверждения а) — в) леммы 5.1.1 справедливы для приближений с номерами 0, 1, ..., $k-1$. Докажем их справедливость для k-го приближения.

а) Согласно п. б) индукционного предположения аргумент подынтегральной функции в (5.1.5) принадлежит Ω, согласно п. а) функция $x^k(t, t_0, x_0, \mu)$ непрерывна, следовательно, подынтегральная функция непрерывна как суперпозиция непрерывных функций, откуда и следует непрерывность x^k.

б) Достаточно доказать, что

$$\|x^k-\bar{x}\|\leqslant\Delta \text{ при } (t, t_0, x_0, \mu)\in[\tau, T]\times V^*.$$

Имеем

$$\|x^k-\bar{x}\| \leqslant\|x^k-x^{k-1}\|+\|x^{k-1}-x^{k-2}\|+\ldots+\|x^0-\bar{x}\|.$$

Отсюда, используя п. в) индукционного предположения, (5.1.6), (5.1.2) и (5.1.3), получаем оценку

$$\|x^k-\bar{x}\|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{L}\left[\frac{(L|T-\tau|)^k}{k!}+\ldots+L|T-\tau|\right]+\delta^*<$$

$$<\frac{\varepsilon_0}{L}(e^{L|T-\tau|}-1)+\frac{\Delta}{2}<\Delta.$$

в) В силу (5.1.5)

$$\|x^{k+1}-x^k\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|f(s, x^k, \mu)-f(s, x^{k-1}, \mu)\|ds\right|. \tag{5.1.7}$$

Используя утверждение п. б) леммы для приближений с номерами k и $k-1$ и учитывая, что $f(t, x, \mu)$ удовлетворяет на Ω условию Липшица с постоянной L, из (5.1.7) имеем

$$\|x^{k+1}-x^k\|\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}\|x^k-x^{k-1}\|ds\right|$$

при $(t, t_0, x_0, \mu)\in[\tau, T]\times V^*$. В силу п. в) индукционного предположения

$$\|x^{k+1}-x^k\|\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}\frac{\varepsilon_0}{L}\,\frac{(L|s-t_0|)^k}{k!}\,ds\right|=\frac{\varepsilon_0}{L}\,\frac{(L|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!},$$

что и доказывает справедливость п. в) для приближений с номером k. Лемма 5.1.1 доказана.

Дальнейший ход рассуждений аналогичен доказательству теоремы 2.3.1. Вопрос о сходимости последовательности заменяем эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$\sum_{0}^{\infty} y^k, \tag{5.1.8}$$

где $y^0=x^0$, $y^k=x^k-x^{k-1}(k\in\mathbf{N})$. В силу п. в) леммы 5.1.1 ряд (5.1.8) сходится равномерно относительно $(t, t_0, x_0, \mu)\in[\tau, T]\times V^*$ к предельной функции $x(t, t_0, x_0, \mu)$. Так как x^k непрерывны, то и $x(t, t_0, x_0, \mu)$ — непрерывная функция. Далее, так как $f(t, x, \mu)$ удовлетворяет на Ω условию Липшица по x, то

$$f(t, x^k, \mu)\underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} f(t, x(t, t_0, x_0, \mu), \mu).$$

Следовательно, в (5.1.5) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Имеем

$$x(t, t_0, x_0, \mu)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s, x(s, t_0, x_0, \mu), \mu)\,ds,$$

т. е. $x(t, t_0, x_0, \mu)$ — решение уравнения (5.1.1) с начальными данными (t_0, x_0). Теорема 5.1.1 доказана.

Следствие. *Если $G_\mu=(a, b)\times H_\mu$, где (a, b) — временной интервал, H_μ — область пространства (x, μ), и все решения продолжимы на интервал (a, b), то функция $x(t, t_0, x_0, \mu)$ непрерывна в области $(a, b)\times(a, b)\times H_\mu$.*

В частности, для линейной системы

$$\dot{x}=P(t, \mu)x,$$

где $P:(a, b)\times M\to\mathfrak{R}^{n,n}$ — непрерывная функция, фундаментальная матрица $\Phi(t, t_0, \mu)$, нормированная при $t=t_0$, непрерывна в области $(a, b)\times(a, b)\times M$. Если же $P(t, \mu)$ непрерывна в области Q_μ произвольного вида, то нормированная при фиксированном t_0 фундаментальная матрица $\Phi(t, \mu)$ непрерывна в той же области Q_μ.

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x}=f(x), \tag{5.1.9}$$

где $f\in\mathrm{Lip}(H)\,\mathrm{loc}$, $H\subset\mathbf{R}^n$ — область фазового пространства. Переформулируем теорему 5.1.1 на языке траекторий.

Теорема 5.1.2. *Пусть* $\varphi:[t_0, t_1]\to\mathbf{R}^n$ — *решение системы* (5.1.9), *причем* $\varphi(t_0)=x_0$, $\varphi(t_1)=x_1$. *Для любого* $\varepsilon>0$ *можно указать* $\delta>0$, *обладающее следующим свойством: любая траектория* $x=\psi(t)$ *системы* (5.1.9), *проходящая при* $t=T$ *через точку из* δ-*окрестности точки* x_0, *определена на промежутке* $[T, T+t_1-t_0]$ *и расстояние* $\rho(\varphi(t_0+t, \psi(T+t))<\varepsilon$ при $t\in[0, t_1-t_0]$. В частности, точка $\psi(T+t_1+t_0)$ принадлежит ε-окрестности точки x_1. Если $\varphi:[t_1, t_0]\to\mathbf{R}^n$, то аналогичное утверждение справедливо при $t\in\in[t_1-t_0, 0]$.

С помощью теоремы 5.1.2 можно установить еще одно свойство предельных множеств автономных систем (см. теорему 2.6.4).

Теорема 5.1.3. *Предельные множества траекторий автономных систем состоят из целых траекторий.*

Доказательство проведем для случая ω-предельного множества (случай α-предельного множества рассматривается аналогично). Пусть Ω есть ω-предельное множество траектории $x==\varphi(t, x_0)$ системы (5.1.9) и $q\in\Omega$. Пусть $\varphi(t, q)$ определена как функция t на $I(\tilde{q})$. Нужно доказать, что $\varphi(t, q)\in\Omega$ для любого $t\in I(q)$. По теореме 5.1.2 для любых $t\in I(q)$ и $\varepsilon_k>0$ можно указать $\delta_k(t)$ такое, что

$$r\in H,\ \rho(r, q)<\delta_k(t)\Rightarrow\rho(\varphi(t, r), \varphi(t, q))<\varepsilon_k. \qquad (5.1.10)$$

Пусть $t\in I(q)$ фиксировано, $\varepsilon_k\to0$, $N_k\to\infty$ при $k\to\infty$. Так как q — ω-предельная точка траектории $x=\varphi(t, x_0)$, то для каждого δ_k можно указать $t_k>N_k$ такое, что $\rho(\varphi(t_k, x_0), q)<\delta_k$. Отсюда и из (5.1.10) имеем

$$\rho(\varphi(t, \varphi(t_k, x_0)), \varphi(t, q))<\varepsilon_k.$$

Но в силу (2.6.4) $\varphi(t, \varphi(t_k, x_0))=\varphi(t'+t_k, x_0)$, следовательно,

$$\rho(\varphi(t+t_k, x_0), \varphi(t, q))<\varepsilon_k.$$

Это означает, что $\varphi(t, q)\in\Omega$, так как $t+t_k>t+N_k\to\infty$ при $k\to\infty$. Теорема доказана.

Свойство предельного множества, выраженное теоремой 5.1.3, называется его инвариантностью. Такое название объясняется тем, что в силу теоремы 5.1.3 предельное множество инвариантно относительно преобразования φ_t, определенного в §. 6 гл. II. Из теоремы 5.1.2 вытекает также, что φ_t — гомеоморфизм области H.

§ 2. Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам

Продолжим рассмотрение дифференциального уравнения (5.1.1).

1. Однократная дифференцируемость. Сохраняя обозначения и предположения § 1, допустим также, что $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial\mu$ существуют и непрерывны в области G_μ. Рассмотрим вопрос о дифференцируемости решения $x(t, t_0, x_0, \mu)$ в области D_μ.

Теорема 5.2.1. *Пусть* $\partial f/\partial x : G_\mu \to \mathfrak{R}^{n,n}$ и $\partial f/\partial \mu : G_\mu \to \mathfrak{R}^{n.m}$ — *непрерывные функции. Тогда решение* $x(t, t_0, x_0, \mu) : D_\mu \to \mathbf{R}^n$ *(непрерывное по теореме* 5.1.1) *имеет непрерывные производные* $\partial x/\partial t$, $\partial x/\partial t_0$, $\partial x/\partial x_0$, $\partial x/\partial \mu$. *При этом* $\partial x/\partial x_0$ — *нормированная при* $t=t_0$ *фундаментальная матрица линейного однородного уравнения*

$$\dot{y}=\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0, \mu), \mu)\, y, \tag{5.2.1}$$

$\partial x/\partial \mu$ — *матрица-решение линейного неоднородного уравнения*

$$\dot{y}=\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0, \mu), \mu) y+\frac{\partial f}{\partial \varphi}(t, x(t, t_0, x_0, \mu), \mu) \tag{5.2.2}$$

с начальными данными $(t_0, 0)$, *и справедлива формула*

$$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t, t_0, x_0, \mu)=-\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0, \mu)\, f(t_0, x_0, \mu). \tag{5.2.3}$$

Линейные уравнения (5.2.1) и (5.2.2) называются дифференциальными *уравнениями в вариациях* (по x_0 и μ соответственно) относительно решения $x(t, t_0, x_0, \mu)$. Они могут быть получены формальным дифференцированием тождества $\dot{x}(t, t_0, x_0, \mu)=f(t, x(t, t_0, x_0, \mu), \mu)$ по соответствующим переменным.

Доказательство. Сначала докажем существование производной решения по i-й координате начального вектора x_0. Решение $x(t, t_0, x_0, \mu)$ будем рассматривать на множестве $[\tau, T]\times V^*$, определенном в теореме 5.1.1′, условия которой выполняются.

Пусть $r>0$ достаточно мало и $|h|<r$. Положим (считая t_0, x_0, μ фиксированными)

$$x(t, h)=x(t, t_0, x_0+he_i, \mu),$$

$$\Delta x=x(t, h)-x(t, 0), \quad z(t, h)=\frac{\Delta x}{h}\ (h\neq 0), \tag{5.2.4}$$

где $e_i=(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ — i-й орт. Заметим, что в силу непрерывности $x(t, t_0, x_0, \mu)$

$$x(t, h)\xrightarrow[h\to 0]{} x(t, 0)=x(t, t_0, x_0, \mu) \tag{5.2.5}$$

равномерно по $t\in[\tau, T]$. Согласно определению решения

$$\frac{d(\Delta x)}{dt}=f(t, x(t, h), \mu)-f(t, x(t, 0), \mu).$$

По формуле конечных приращений (2.1.9)

$$\frac{d(\Delta x)}{dt}=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, 0)+s\Delta x, \mu)\, ds\cdot\Delta x. \tag{5.2.6}$$

Разделив (5.2.6) на $h \neq 0$, видим, что $z(t, h)$ является при $h \neq 0$, $t \in [\tau, T]$ решением линейного однородного уравнения

$$\dot{y} = A(t, h)\, y, \tag{5.2.7}$$

где

$$A(t, h) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, 0) + s\Delta x, \mu)\, ds.$$

При этом в силу (5.2.4) $z(t_0, h) = e_i$.

Из непрерывности $\partial f/\partial x$ и (5.2.5) следует, что

$$A(t, h) \underset{h \to 0}{\to} A(t, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0, \mu), \mu). \tag{5.2.8}$$

Функция $A(t, h)$ непрерывна при $t \in [\tau, T]$, $|h| < r$. На основании следствия из теоремы 5.1.1 решение $y(t, h)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$y(t_0, h) = e_i, \tag{5.2.9}$$

непрерывно там же, где и $A(t, h)$. Следовательно, существует предел $\lim y(t, h) = y(t, 0)$ при $h \to 0$. Но при $h \neq 0$ $y(t, h)$ совпадает с $z(t, h)$, так как обе эти функции являются решениями уравнения (5.2.7) с одинаковыми начальными данными. Таким образом, существует предел

$$\lim_{h \to 0} z(t, h) = y(t, 0). \tag{5.2.10}$$

Итак, мы доказали существование производной решения по i-й координате вектора x_0. Так как $i = 1, \ldots, n$ произвольно, то тем самым доказано существование производной $\partial x/\partial x_0$.

Далее, из (5.2.8)—(5.2.10) следует, что $\partial x/\partial x_0$ является нормированной при $t = t_0$ фундаментальной матрицей уравнения (5.2.1). Так как $x(t, t_0, x_0, \mu)$ непрерывна на множестве $[\tau, T] \times V^*$, то матрица коэффициентов уравнения (5.2.1) является непрерывной функцией t и параметров t_0, x_0, μ на этом множестве. По следствию из теоремы 5.1.1 фундаментальная матрица $\partial x/\partial x_0$ непрерывна как функция t, начального момента t_0 и параметров t_0, x_0, μ на множестве $[\tau, T] \times [\tau, T] \times V^*$. Следовательно, как функция t, t_0, x_0, μ она непрерывна на $[\tau, T] \times V^*$. Отсюда вытекает, что $\partial x(t, t_0, x_0, \mu)/\partial x_0$ существует и непрерывна в окрестности каждой точки области D_μ.

Утверждения теоремы относительно производной $\partial x/\partial \mu$ доказываются аналогично.

Существование и непрерывность $\partial x/\partial t$ вытекают из определения решения, непрерывности f и теоремы 5.1.1.

Для доказательства существования и непрерывности $\partial x/\partial t_0$ рассмотрим тождество

$$x(t, t_0, x_0(t_0, t, x)) \equiv x, \tag{5.2.11}$$

где $x_0(t_0, t, x)$ является значением решения с начальными данными (t, x) в момент t_0. Тождество (5.2.11) справедливо при $t_0 \in I(t, x)$ (параметр μ для краткости опущен).

Пусть Δt_0 — приращение. Из (5.2.11) имеем

$$x(t, t_0 + \Delta t_0, x_0(t_0 + \Delta t_0, t, x)) = x(t, t_0, x_0(t_0, t, x)). \tag{5.2.12}$$

Из (2.1.9), (5.2.12) и (2.1.8), поскольку x, $\partial x/\partial x_0$, $\partial x_0/\partial t_0$ непрерывны, получаем

$$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t, t_0, x_0) = \lim_{\Delta t_0 \to 0} (\Delta t_0)^{-1} [x(t, t_0 + \Delta t_0, x_0(t_0, t, x)) -$$

$$- x(t, t_0, x_0(t_0, t, x))] = \lim_{\Delta t_0 \to 0} (\Delta t_0)^{-1} [x(t, t_0 + \Delta t_0, x_0(t_0 + \Delta t_0, t, x)) -$$

$$- x(t, t_0, x_0(t_0 + \Delta t_0, t, x)] = \lim_{\Delta t_0 \to 0} (\Delta t_0)^{-1} [x(t, t_0, x_0(t_0, t, x)) -$$

$$- x(t, t_0, x_0(t_0 + \Delta t_0, t, x))] = -\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0)\frac{\partial x_0}{\partial t_0} =$$

$$= -\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0) f(t_0, x_0).$$

Следовательно, $\partial x/\partial t_0$ существует, непрерывна и удовлетворяет (5.2.3). Теорема 5.2.1 доказана.

Следствие. *Справедлива формула Лиувилля*

$$\det \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \operatorname{sp} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, t_0, x_0))\, ds\right\}. \tag{5.2.13}$$

Она вытекает из (5.2.1) и (4.2.5') (при фиксированном μ).

Пусть t_0 фиксировано. Тогда решение $x(t, t_0, x_0) = x_t(x_0)$ задает отображение T_t области фазового пространства в фазовое пространство. В условиях теоремы 5.1.1 T_t — гомеоморфизм, а в условиях теоремы 5.2.1 — диффеоморфизм (взаимно однозначное и взаимно непрерывно дифференцируемое преобразование). Как известно, элемент объема при отображении T_t задается дифференциалом $\left|\det \frac{\partial x_t(x_0)}{\partial x_0}\right| dx_0$. Отсюда с помощью (5.2.13) заключаем, что если $\operatorname{sp} \partial f/\partial x = 0$, то отображение T_t сохраняет объем.

Пример 5.2.1. Система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_k = \frac{\partial E}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial E}{\partial x_k}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{5.2.14}$$

называется *гамильтоновой* или канонической. Пусть $E(t, x, y)$: $G \to \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ — функция класса C^2 по x, y. Эта функция называется *функцией Гамильтона*. Обозначим

$$\frac{\partial E}{\partial y_k} = f_k, \quad -\frac{\partial E}{\partial x_k} = f_{n+k}, \ k = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{n+k}}{\partial y_k} \right) = 0.$$

Следовательно, отображение T_t сохраняет объем.

Пример 5.2.2. Найти производную по параметру в точке $\mu = 0$ решения $\varphi(t, \mu)$ уравнения

$$\dot{x} = x^2 + 2\mu t^{-1}, \quad G = \{(t, x): t > 0, |x| < \infty\},$$

удовлетворяющего условию $\varphi(1, \mu) = -1$.

По теореме 5.2.1 $y(t, \mu) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(t, \mu)$ — решение уравнения в вариациях

$$\dot{y} = 2\varphi(t, \mu)\, y + 2t^{-1},$$

удовлетворяющим условию $y(1, \mu) = 0$. Следовательно, искомая функция $\psi(t) = y(t, 0)$ является решением уравнения

$$\dot{y} = 2\varphi(t, 0)\, y + 2t^{-1},$$

удовлетворяющим условию $\psi(1) = 0$.

Так как $\varphi(t, 0)$ — решение уравнения $\dot{x} = x^2$ с начальными данными $(1, -1)$, то $\varphi(t, 0) = -t^{-1}$. Следовательно, для того чтобы получить $\psi(t)$, нужно решить уравнение

$$\dot{y} = 2t^{-1}(1 - y),$$

откуда с учетом начального условия найдем $\psi(t) = 1 - t^2$.

Задача 5.2.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка

$$x^{(n)} = f\left(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, \mu\right), \tag{5.2.15}$$

где f непрерывна вместе с $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^{(n-1)}}, \frac{\partial f}{\partial \mu}$ в области G_μ. Пусть $x(t, t_0, x_0, \dots, x_0^{(n-1)}, \mu)$ — решение уравнения (5.2.15) с начальными данными $(t_0, x_0, \dots, x_0^{(n-1)})$. Докажите, что функция $\frac{\partial x}{\partial x_0^i}(t, t_0, \dots, \mu)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ — решение уравнения

$$y^{(n)} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0, \dots, \mu), \dots, \mu)\, y + \dots$$

$$\dots + \frac{\partial f}{\partial x^{(n-1)}}(t, x(t, t_0, x_0, \dots, \mu), \dots, \mu)\, y^{(n-1)} \tag{5.2.16}$$

с начальными данными $(t_0, 0, ..., 1, ..., 0)$, где единица стоит среди нулей на $(i+1)$-м месте ($i=0$ соответствует $\frac{\partial x}{\partial x_0}$), а функция $\frac{\partial x}{\partial \mu}(t, t_0, x_0, \ldots, \mu)$ — решение уравнения

$$y^{(n)} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0, \ldots, \mu), \ldots, \mu)\, y + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x^{(n-1)}}(t, x(t, t_0, x_0, \ldots, \mu), \ldots, \mu)\, y^{(n-1)} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, x(t, t_0, x_0, \ldots, \mu), \ldots \mu) \qquad (5.2.17)$$

с начальными данными $(t_0, 0, ..., 0)$.

Пример 5.2.3. Найти $\frac{\partial x}{\partial \mu}(t, 0, 0, 1, 0)$, где $x(t, t_0, x_0, \dot{x}_0, \mu)$ — решение уравнения

$$\ddot{x} + 3x = 2\sin t + \mu \dot{x}^2 \qquad (5.2.18)$$

в обозначениях задачи 5.2.1.

Используя результат задачи 5.2.1, в силу (5.2.17) заключаем, что искомая функция является решением уравнения

$$\ddot{y} + 3y = (\dot{x}(t, 0, 0, 1, 0))^2$$

с начальными данными (0, 0, 0). Решая уравнение

$$\ddot{x} + 3x = 2\sin t,$$

из (3.4.16) при $a=\sqrt{3}$, $M=2$, $\omega=1$ находим $x(t, 0, 0, 1, 0) = \sin t$. Следовательно, искомая функция является решением уравнения

$$\ddot{y} + 3y = \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$$

с нулевыми начальными данными. Используя (3.4.17), на основании замечания 1 к теореме 3.4.1 получаем

$$\frac{\partial x}{\partial \mu}(t, 0, 0, 1, 0) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{3}\cos\sqrt{3}t.$$

2. Многократная дифференцируемость. Теорема 5.2.1 является частным случаем общего утверждения о степени гладкости решений дифференциальных уравнений, доказательство которого, однако, опирается на теорему 5.2.1.

Теорема 5.2.2. *Пусть всевозможные производные функции f по координатам векторов x и μ до порядка $l \geqslant 1$ существуют и непрерывны в области G_μ. Тогда решение $x(t, t_0, x_0, \mu)$ уравнения* (5.1.1) *и его всевозможные производные по координатам векторов*

x_0 и μ до порядка l включительно существуют и непрерывны в области D_μ.

Доказательство теоремы 5.2.2 проведем индукцией по l. При $l=1$ утверждение совпадает с теоремой 5.2.1.

Пусть теперь теорема верна с $l-1$ вместо l. По теореме 5.2.1 $\partial x/\partial x_0$ и $\partial x/\partial\mu$ являются матрицами-решениями уравнений (5.2.1) и (5.2.2) соответственно с фиксированными начальными данными. Коэффициенты линейных уравнений (5.2.1) и (5.2.2) $l-1$ раз непрерывно дифференцируемы по координатам векторов x_0 и μ в области D_μ, поскольку согласно условию теоремы и индукционному предположению функции $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial\mu$ и решение $x(t, t_0, x_0, \mu)$ обладают таким свойством. Тогда по индукции, учитывая линейность (5.2.1) и (5.2.2), заключаем, что их решения $l-1$ раз непрерывно дифференцируемы по координатам x_0 и μ, как по параметрам в области D_μ. Следовательно, решения исходного уравнения (5.1.1) l раз непрерывно дифференцируемы. Теорема доказана.

§ 3. Периодические решения квазилинейных систем

В этом параграфе на примере систем дифференциальных уравнений, мало отличающихся от линейных, мы покажем, как теоремы о непрерывности и дифференцируемости решений по начальным данным и параметрам применяются для решения важного в теоретическом и прикладном отношении вопроса о существовании периодических решений.

1. Периодические решения квазилинейных систем при отсутствии резонанса. *Квазилинейным дифференциальным уравнением* называется дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x}=Ax+g(t)+\mu h(t,x,\mu). \qquad (5.3.1)$$

Предположим, что $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ — ω-периодическая функция; $h:\mathbf{R}\times H\times(-\varepsilon, \varepsilon)\to\mathbf{R}^n$ — ω-периодическая по t, непрерывно дифференцируемая по x и μ при каждом $t\in\mathbf{R}$ в области $H\times(-\varepsilon, \varepsilon)$; A — постоянная матрица, собственные числа λ_j $(j=1,\dots,n)$ которой удовлетворяют условию отсутствия резонанса

$$\lambda_j\neq\frac{2\pi i}{\omega}k,\quad k\in\mathbf{Z},\ i=\sqrt{-1}. \qquad (5.3.2)$$

Число ε считаем достаточно малым, поэтому параметр μ будем называть *малым параметром*. При условии (5.3.2) на основании следствия из теоремы 4.7.3 дифференциальное уравнение, получающееся из (5.3.1) при $\mu=0$ (*«порождающее уравнение»*), имеет единственное ω-периодическое решение $\bar{x}(t)$. Будем считать, что его траектория лежит в области H.

Теорема 5.3.1. *При сделанных предположениях уравнение (5.3.1) имеет ω-периодическое решение $x(t, \mu)$, непрерывно диф-*

ференцируемое по μ в некоторой окрестности точки $\mu=0$, стремящееся при $\mu\to 0$ к порождающему решению $\bar{x}(t)$, причем решение, обладающее указанными свойствами, единственно.

Доказательство. Искомое периодическое решение будем искать в виде $x(t, x_0, \mu)$, где x_0 — начальное значение, соответствующее $t=0$. Поскольку $\bar{x}(t)$ определено при всех t, по теореме 5.1.1 при достаточно малых $|\mu|$ и $\|x_0-\bar{x}(0)\|$ решение $x(t, x_0, \mu)$ продолжимо по t на промежуток $[0, \omega]$. Совершенно так же, как и теорема 4.7.2, доказывается, что необходимое и достаточное условие ω-периодичности $x(t, x_0, \mu)$ имеет вид

$$x(\omega, x_0, \mu)=x(0, x_0, \mu)=x_0,$$

или

$$\Phi(x_0, \mu)=x(\omega, x_0, \mu)-x_0=0. \tag{5.3.3}$$

Положим $\bar{x}_0=\bar{x}(0)$. По теореме 5.2.1 функция $\Phi(x_0, \mu)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(\bar{x}_0, 0)$, причем $\Phi(\bar{x}_0, 0)=0$, поскольку $\bar{x}(t)$ есть ω-периодическое решение порождающего уравнения. Далее,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_0}(\bar{x}_0, \mu)=\frac{\partial x}{\partial x_0}(\omega, \bar{x}_0, 0)-E_n.$$

По теореме 5.2.1 $\dfrac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0, \mu)$ — нормированная при $t=0$ фундаментальная матрица уравнения в вариациях

$$\dot{y}=\left[A+\mu\frac{\partial h}{\partial x}(t, x(t, x_0 \mu), \mu\right]y.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(\omega, \bar{x}_0, 0)=e^{\omega A}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_0}(\bar{x}_0, 0)=e^{\omega A}-E_n.$$

При условии (5.3.2) матрица $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_0}(\bar{x}_0, 0)$ не имеет собственных чисел, равных нулю, поэтому ее определитель отличен от нуля. По теореме о неявной функции уравнение (5.3.3) имеет единственное решение $x_0(\mu)$, непрерывно дифференцируемое в окрестности точки $\mu=0$ и такое, что $x_0(0)=\bar{x}_0$. По теореме 5.2.1 решение $x(t, x_0(\mu), \mu)$ непрерывно дифференцируемо по μ в окрестности точки $\mu=0$, ω-периодично по t в силу (5.3.3), причем такое решение единственно, поскольку $x_0(\mu)$ — единственное решение (5.3.3). Теорема доказана.

Следствие. *Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка n:*

$$L(x)=x^{(n)}+a_1x^{n-1}+\ldots+a_nx=$$
$$=g(t)+\mu h(t,x,\dot{x},\ldots,x^{(n-1)},\mu), \qquad (5.3.4)$$

где $a_1,\ldots,a_n$ — постоянные, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ — ω-периодическая функция, $h:\mathbf{R}\times H\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to\mathbf{R}$ — ω-периодическая по t функция, непрерывно дифференцируемая при каждом t в области $H\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)$. Если корни λ_j, $j=1,\ldots,n$, характеристического уравнения, соответствующего $L(x)=0$, удовлетворяют условию (5.3.2), то уравнение (5.3.4) имеет ω-периодическое решение $x(t,\ \mu)$ такое, что $x(t,\ 0)=\bar{x}(t)$, где $\bar{x}(t)$ — ω-периодическое решение порождающего уравнения $L(x)=g(t)$, причем решение, обладающее указанными свойствами, единственно.

Для нахождения периодического решения порождающего уравнения удобно использовать разложение $g(t)$ в ряд Фурье (см. п. 3 § 4 гл. III).

Пример 5.3.1. Рассмотрим уравнение ван-дер-Поля с синусоидальной возмущающей силой

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+\alpha^2x=\lambda\sin t, \qquad (5.3.5)$$

играющее важную роль в электро- и радиотехнике. Условие (5.3.2) выполняется, если $\alpha\neq k$, $k\in\mathbf{Z}$. Порождающее уравнение $\ddot{x}+\alpha^2x=\lambda\sin t$ имеет, как показано в примере 3.4.1, единственное 2π-периодическое решение $\lambda(\alpha^2-1)^{-1}\sin t$. Таким образом, согласно теореме 5.3.1 уравнение (5.3.5) при нецелом α имеет единственное 2π-периодическое решение $x(t,\ \mu)$, удовлетворяющее условию $x(t,\ 0)=\lambda(\alpha^2-1)^{-1}\sin t$.

Чтобы получить более точную формулу для $x(t,\ \mu)$, используем формулу Тейлора (2.1.10) относительно переменной μ. Так как $x(t,\ \mu)$ непрерывно дифференцируема по μ, то

$$x(t,\mu)=\frac{\lambda}{\alpha^2-1}\sin t+\mu u(t)+o(\mu).$$

Подставляя выражение для $x(t,\ \mu)$ в (5.3.5), деля на μ и устремляя μ к нулю, получим в пределе

$$\ddot{u}+\alpha^2u=\left[1-\frac{\lambda^2}{(\alpha^2-1)^2}\sin^2 t\right]\frac{\lambda}{\alpha^2-1}\cos t.$$

Представляя правую часть в виде

$$\left[\frac{\lambda}{\alpha^2-1}-\frac{\lambda^3}{4(\alpha^2-1)^3}\right]\cos t+\frac{\lambda^3}{4(\alpha^2-1)^3}\cos 3t$$

и используя метод неопределенных коэффициентов, найдем

$$u(t)=\left[\frac{\lambda}{(\alpha^2-1)^2}-\frac{\lambda^3}{4(\alpha^2-1)^4}\right]\cos t-\frac{\lambda^3}{4(\alpha^2-1)^3(\alpha^2-9)}\cos 3t.$$

Задача 5.3.1. Найти с точностью до $o(\mu)$ 2π-периодическое решение уравнения Дуффинга

$$\ddot{x}+\alpha^2 x=\lambda\sin t+\mu\gamma x^3$$

в нерезонансном случае.

2. Периодические решения квазилинейных систем при резонансе. Рассмотрим уравнение (5.3.2) в предположениях п. 1, но теперь откажемся от выполнения условия (5.3.1). Тогда собственные числа матрицы A разобьются на две группы: $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ $(0<m\leqslant n)$, для которых это условие нарушено, и остальные (они могут отсутствовать), для которых оно выполняется. Очевидно, $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ имеют вид $\frac{2\pi i}{\omega}k$, $k\in\mathbf{Z}$. В дальнейшем предполагаем, что либо среди них нет кратных, либо им отвечают только простые элементарные делители.

Используя линейное неособое преобразование, систему (5.3.1) можно преобразовать так, чтобы матрица A была блочно диагональной: $A=\operatorname{diag}\{B,\ C\}$, где матрице B соответствуют собственные числа первой группы, а матрице C — собственные числа второй группы. Например, достаточно привести A к вещественной жордановой форме (4.3.8). В результате система (5.3.1) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{y}&=By+p(t)+\mu f(t,y,z,\mu),\\ \dot{z}&=Cz+q(t)+\mu g(t,y,z,\mu),\end{aligned}\tag{5.3.6}$$

где p, q — ω-периодические функции, а f и g удовлетворяют тем же условиям, что и h в (5.3.1). Рассмотрим порождающую систему

$$\dot{y}=By+p(t),\quad \dot{z}=Cz+q(t).\tag{5.3.7}$$

Нас интересуют ω-периодические решения этой системы. Так как для собственных чисел матрицы C условие (5.3.2) выполняется, то второе уравнение (5.3.7) имеет единственное ω-периодическое решение

$$\bar{z}(t)=(E_{n-m}-e^{\omega C})^{-1}\int\limits_{t-\omega}^{t}e^{(t-s)C}q(s)\,ds,\quad \bar{z}(0)=\bar{z}_0.$$

Первое же уравнение, поскольку $e^{\omega B}=E_m$, имеет в силу (4.7.13) ω-периодические решения тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\int\limits_0^{\omega}e^{-tB}p(t)\,dt=0.\tag{5.3.8}$$

При этом условии все решения $\bar{y}(t, y_0)$, $\bar{y}(0, y_0)=y_0$ первого уравнения (5.3.7) ω-периодические. Далее считаем, что (5.3.8) выполнено. Рассмотрим область $D\subset\mathbb{R}^m$ такую, что при $y_0\in D$ $(\bar{y}(t, y_0), \bar{z}(t))\in H$ при всех t. Будем искать ω-периодическое решение $y(t, y_0, z_0, \mu)$, $z(t, y_0, z_0, \mu)$ системы (5.3.6) с начальными данными $y_0\in D$, z_0 при $t=0$, обращающееся при $\mu=0$ в порождающее решение $\bar{y}(t, y_0)$, $\bar{z}(t)$.

По теореме 5.1.1′ решение $y(t, y_0, z_0, \mu)$, $z(t, y_0, z_0, \mu)$ определено при $t\in[0, \omega]$, если величины $|\mu|$, $\|z_0-\bar{z}_0\|$ достаточно малы. Из теоремы 4.7.4 следует, что необходимым и достаточным условием ω-периодичности решения $y(t, y_0, z_0, \mu)$, $z(t, y_0, z_0, \mu)$ является выполнение равенств

$$0=\Phi(y_0,z_0,\mu)=\int_0^\omega e^{-tB}f(t, y(t, y_0,z_0,\mu), \quad z(t, y_0,z_0,\mu),\mu)\,dt, \tag{5.3.9}$$

$$0=\Psi(y_0,z_0,\mu)=(e^{\omega C}-E_{n-m})z_0+\int_0^\omega e^{(\omega-t)C}[q(t)+$$
$$+\mu g(t, y(t, y_0, z_0, \mu), z(t, y_0, z_0\,\mu))]\,dt \tag{5.3.10}$$

[в (5.3.9) учтено (5.3.8)]. Полагая в (5.3.9) $\mu=0$, получим, что $\bar{y}(t, y_0)$ должно удовлетворять уравнению

$$W(y_0)=\int_0^\omega e^{-tB}f(t, \bar{y}(t, y_0), \bar{z}(t), 0)\,dt=0. \tag{5.3.11}$$

Пусть $W(\bar{y}_0)=0$. Очевидно, функции Φ, Ψ обращаются в нуль в точке $(\bar{y}_0, \bar{z}_0, 0)$ и непрерывно дифференцируемы в окрестности этой точки согласно теореме 5.2.1. Якобиан этих функций по переменным y_0, z_0 в указанной точке равен

$$\det\frac{\partial W}{\partial y_0}(\bar{y}_0)\det(e^{\omega C}-E_{n-m}). \tag{5.3.12}$$

Согласно свойству матрицы C второй из сомножителей в (5.3.12) отличен от нуля. Следовательно, если выполняется условие

$$\det\frac{\partial W}{\partial y_0}(\bar{y}_0)\neq 0, \tag{5.3.13}$$

то по теореме о неявной функции существует единственное решение $y_0(\mu)$, $z_0(\mu)$ системы (5.3.9), (5.3.10) такое, что $y_0(0)=\bar{y}_0$, $z_0(0)=\bar{z}_0$. При этом полученное решение непрерывно дифференцируемо по μ при достаточно малых $|\mu|$.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.3.2. *Если выполнено условие* (5.3.8), $\bar{y}_0$ *удовлетворяет уравнению* (5.3.11) *и справедливо* (5.3.13), *то система*

(5.3.6) *имеет ω-периодическое решение $y(t, \mu)$, $z(t, \mu)$, определенное и непрерывно дифференцируемое по μ в некоторой окрестности точки $\mu=0$ и обращающееся при $\mu=0$ в порождающее решение $\bar{y}(t, y_0)$, $\bar{z}(t)$. Решение, обладающее указанными свойствами, единственно.*

Если же (5.3.13) не имеет места, т. е. если $\det \frac{\partial W}{\partial y_0}(\bar{y}_0)=0$, то тем не менее теорема о неявной функции может быть применена к уравнению (5.3.10), которое определяет неявную функцию $z_0=z_0(y_0, \mu)$, $\bar{z}_0=z_0(\bar{y}_0, 0)$. Подставляя ее в левую часть (5.3.9), получим уравнение

$$V(y_0, \mu)=\Phi(y_0, z_0(y_0, \mu), \mu)=0,$$

удовлетворяющееся при $y_0=\bar{y}_0$, $\mu=0$. Очевидно, $V(y_0, 0)=W(y_0)$. Уравнение $W(y_0)=0$ определяет начальные значения $\bar{y}_0$ порождающих решений, а уравнение $V(y_0, \mu)=0$ — зависимость между y_0 и параметром μ для ω-периодического решения системы (5.3.6), соответствующего порождающему решению $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$, $\bar{z}(t)$. Оно называется *бифуркационным уравнением (уравнением разветвления)*, так как каждой непрерывной ветви $y_0(\mu)$, $y_0(0)=\bar{y}_0$, решения этого уравнения соответствует ω-периодическое решение системы (5.3.6), стремящееся при $\mu\to 0$ к порождающему решению.

Если решение бифуркационного уравнения имеет единственную ветвь, как, например, в условиях теоремы 5.3.2, то бифуркации порождающего решения не происходит. Если же таких ветвей две (или более), то говорят, что имеет место *бифуркация* порождающего решения.

Рассмотрим два важных частных случая.

Случай 1. Пусть все собственные числа матрицы A, принадлежащие первой группе, равны нулю. Тогда $B=0$ и условие (5.3.8) превращается в требование, чтобы среднее значение $p(t)$ было равно нулю. При этом

$$\bar{y}(t, y_0)=y_0+\int_0^t p(s)\,ds$$

и уравнение (5.3.11) для определения начальных значений $\bar{y}_0$ порождающих решений запишется в виде

$$W(y_0)=\int_0^\omega f\left(t, y_0+\int_0^t p(s)\,ds,\ (E_{n-m}-e^{\omega C})^{-1}\int_{t-\omega}^t e^{(t-s)C}q(s)\,ds, 0\right)dt=0.$$

Случай 2. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}+\alpha^2 x=q(t)+\mu f(t, x, \dot{x}, \mu),\quad (\alpha\neq 0), \tag{5.3.14}$$

где функция f непрерывно дифференцируема по x, $\dot{x}$, μ при всех x, $\dot{x}$ и $\mu\in(-\varepsilon, \varepsilon)$. Считаем, что период q и f по t равен 2π. При этом общность рассмотрения не снижается, так как этого всегда можно добиться переходом к новой независимой переменной τ по формуле $\tau=\frac{2\pi}{\omega}t$. Рассмотрим резонансный случай, т. е. считаем $\alpha\in\mathbf{Z}$. Согласно п. 3 § 4 гл. III порождающее уравнение

$$\ddot{x}+\alpha^2 x=q(t) \tag{5.3.15}$$

имеет 2π-периодические решения, если в разложении $q(t)$ в ряд Фурье отсутствует гармоника $e^{i\alpha t}$. Это условие соответствует (5.3.8). При его выполнении все решения (5.3.15) являются 2π-периодическими.

Уравнение (5.3.14) эквивалентно системе

$$\dot{x}=y,$$

$$\dot{y}=-\alpha^2 x+q(t)+\mu f(t,x,y,\mu),$$

причем $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0\end{pmatrix}$. Решая однородное уравнение $\ddot{x}+\alpha^2 x=0$, находим фундаментальную матрицу

$$e^{tB}=\begin{pmatrix} \cos\alpha t & \alpha^{-1}\sin\alpha t \\ -\alpha\sin\alpha t & \cos\alpha t\end{pmatrix}.$$

Пусть общее решение уравнения (5.3.15) имеет вид

$$x=C_1\cos\alpha t+\alpha^{-1}C_2\sin\alpha t+\psi(t),\quad \psi(0)=\dot{\psi}(0)=0,$$

где C_1, C_2 — начальные данные. Запишем уравнения (5.3.11), которые определяют C_1, C_2, соответствующие порождающим решениям:

$$W_1(C_1,C_2)=-\alpha^{-1}\int_0^{2\pi} f(t, C_1\cos\alpha t+\alpha^{-1}C_2\sin\alpha t+\psi(t),$$

$$-\alpha C_1\sin\alpha t+C_2\cos\alpha t+\dot{\psi}(t),0)\sin\alpha t\,dt=0, \tag{5.3.16}$$

$$W_2(C_1,C_2)=\int_0^{2\pi} f(t, C_1\cos\alpha t+\alpha^{-1}C_2\sin\alpha t+\psi(t),$$

$$-\alpha C_1\sin\alpha t+C_2\cos\alpha t+\dot{\psi}(t),0)\cos\alpha t\,dt=0.$$

Если якобиан функций W_1, W_2 по переменным C_1, C_2 в точке C_1^0, C_2^0, где $W_1=W_2=0$, отличен от нуля, то порождающему решению $\bar{x}=C_1^0\cos\alpha t+\alpha^{-1}C_2^0\sin\alpha t+\psi(t)$ соответствует единственное 2π-периодическое решение уравнения (5.3.14), стремящееся к нему при $\mu\to 0$ (см. пример 7.3.1).

3. Замечание об автономных квазилинейных системах. Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x}=Ax+g+\mu h(x,\mu), \tag{5.3.17}$$

где g и h удовлетворяют тем же условиям, что и в (5.3.1), но уже не зависят от t, в частности g — постоянный вектор. Так как автономную систему можно рассматривать как периодическую по t с произвольным периодом, то возникает вопрос: с каким периодом следует искать периодические решения?

Можно ожидать, что период решения «хорошо» (по крайней мере непрерывно) зависит от μ, поэтому прежде всего следует найти периодические решения порождающего уравнения

$$\dot{x}=Ax+g. \tag{5.3.18}$$

Считаем, что $\det A\neq 0$, так как в противном случае количество возможностей увеличивается. Тогда уравнение (5.3.18) имеет решение $x=x^*=A^{-1}g$. Его общее решение имеет вид

$$x=e^{tA}x_0+A^{-1}g.$$

Оно содержит периодические решения (отличные от x^*) лишь при наличии у A чисто мнимых собственных чисел. Каждой паре $\pm i\beta$ таких собственных чисел соответствуют периодические решения с периодом $2\pi/\beta$. Поэтому следует искать периодические решения с периодом $\omega(\mu)$, для которого $\omega(0)=2\pi/\beta$. Положим $\omega=\dfrac{2\pi}{\beta}(1+\mu\alpha)$. Выполним замену независимой переменной по формуле $t=(1+\mu\alpha)\tau$. Вместо (5.3.17) получим

$$\frac{dx}{d\tau}=(1+\mu\alpha)(Ax+g+\mu h),$$

или

$$\frac{dx}{d\tau}=Ax+g+\mu f(x,\mu,\alpha). \tag{5.3.19}$$

Теперь уже нас интересуют периодические решения (5.3.19) с определенным периодом $2\pi/\beta$. Задача свелась к уже рассмотренной в п. 2, так как имеет место резонанс, соответствующий $k=1$ (не исключены и другие резонансы, если матрица A имеет другие чисто мнимые собственные числа). Единственное отличие состоит в том, что уравнение (5.3.19) содержит дополнительный параметр α. Он будет определяться как функция μ вместе с начальным значением x_0 периодического решения. В результате получим $n+1$ скалярное неизвестное. Однако поскольку рассматриваемая система — автономная, можно за начальную при $t=0$ точку периодического решения принять любую точку ее траектории. Поэтому можно потребовать, например, чтобы при $t=0$ выполнялось равенство $\dot{x}_1=0$. Это даст дополнительное уравнение к n бифуркационным уравнениям.

Пример 5.3.2. Найдем периодическое решение уравнения ван-дер-Поля (5.3.5) при $\alpha=1$, $\lambda=0$:

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0, \tag{5.3.20}$$

служащего математической моделью лампового генератора на триоде. Корни характеристического уравнения порождающего уравнения таковы: $\pm i$. Новое время τ связано со старым формулой $t=(1+\mu\alpha)\tau$. Тогда (5.3.20) принимаст вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\mu(1+\mu\alpha)(x^2-1)\frac{dx}{d\tau}+(1+\mu\alpha)^2x=0,$$

или

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+x=\mu\left[(1-x^2)\frac{dx}{d\tau}-2\alpha(0)x\right]+O(\mu^2).$$

Ищем решение периода 2π. У порождающего уравнения любое решение — периодическое. Его можно представить в виде $x=A\cos(\varphi_0+\tau)$. Поскольку уравнение — автономное, сдвигом τ добьемся, чтобы $\varphi_0=0$. Система (5.3.16) для определения величин A, $\beta=\alpha(0)$ имеет вид

$$\int_0^{2\pi}[1-A^2\cos^2\tau)A\sin\tau+2A\beta\cos\tau]\sin\tau d\tau=0,$$

$$\int_0^{2\pi}[(1-A^2\cos^2\tau)A\sin\tau+2A\beta\cos\tau]\cos\tau d\tau=0.$$

В результате интегрирования получим

$$\frac{A}{2}-\frac{1}{8}A^3=0,\ A\beta=0, \tag{5.3.21}$$

откуда, считая, что $A\neq0$, находим $A^2=4$, $\beta=0$. Якобиан системы (5.3.21) равен $A\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}A^2\right)$. При $A=2$, $\beta=0$ он отличен от нуля. Следовательно, уравнение ван-дер-Поля имеет периодическое решение $x(t, \mu)$, для которого $x(t, 0)=2\cos t$. Его период равен $2\pi+O(\mu^2)$, так как $\beta=0$.

§ 4. Автономные системы на плоскости

Рассмотрим автономную двумерную систему

$$\dot{x}=f(x), \tag{5.4.1}$$

где $f\in C^1(H)$, $H\subset\mathbf{R}^2$ — область.

1. Центр и фокус. Предположим, что система (5.4.1) имеет положение равновесия. Поместив в него начало координат, получим, что $f(0)=0$. Используя формулу Тейлора (2.1.10) для $f(x)$, запишем (5.4.1) в виде

$$\dot{x}=Ax+X(x), \tag{5.4.2}$$

где

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(0), \quad \frac{\|X\|}{\|x\|}\to 0 \quad \text{при} \quad \|x\|\to 0. \tag{5.4.3}$$

Рассмотрим линейное приближение

$$\dot{x}=Ax. \tag{5.4.4}$$

Мы предполагаем, что оба собственных числа матрицы A — комплексно-сопряженные, равные $\alpha\pm i\beta$, $\beta>0$. Используя терминологию п. 4 § 5 гл. IV, рассмотрим случай центра и фокуса для системы (5.4.4). Случаи узла и седла также представляют большой интерес (см. § 3 и 5 гл. VIII).

В результате линейного неособого преобразования $x=Qy$ по формуле (4.5.18) получим систему

$$\dot{y}=By+Y(y), \tag{5.4.5}$$

где в силу (4.5.19) $B=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$, а для нелинейности $Y(y)$ сохраняется свойство (5.4.3), т. е.

$$\frac{\|Y\|}{\|y\|}\to 0 \quad \text{при} \quad \|y\|\to 0. \tag{5.4.6}$$

Положим $y_1=r\cos\varphi$, $y_2=r\sin\varphi$. Из соотношений

$$\dot{r}\cos\varphi-r\dot{\varphi}\sin\varphi=\alpha r\cos\varphi-\beta r\sin\varphi+Y_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$

$$r\sin\varphi+r\dot{\varphi}\cos\varphi=\beta r\cos\varphi+\alpha r\sin\varphi+Y_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

находим

$$\dot{r}=\alpha r+R(r,\varphi), \quad \dot{\varphi}=\beta+r^{-1}\Phi(r,\varphi), \tag{5.4.7}$$

где $\quad R=Y_1\cos\varphi+Y_2\sin\varphi, \quad \Phi=Y_2\cos\varphi-Y_1\sin\varphi.$

В силу (5.4.6)

$$r^{-1}R(r,\varphi)\to 0, \quad r^{-1}\Phi(r,\varphi)\to 0 \quad \text{при} \quad r\to 0, \tag{5.4.8}$$

причем R, Φ непрерывно дифференцируемы при $-\varepsilon<r<\varepsilon$, $-\infty<\varphi<\infty$ и 2π-периодичны по φ. Из (5.4.8) следует, что если ε достаточно мало, то $|r^{-1}\Phi(r,\varphi|<\frac{1}{2}\beta$. Исключая t из системы (5.4.7), получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{r(\alpha r+R)}{\beta r+\Phi} \quad \text{при } r\neq 0, \quad \frac{dr}{d\varphi}=0 \quad \text{при } r=0,$$

правая часть которого, как нетрудно убедиться, непрерывно дифференцируема при $-\varepsilon<r<\varepsilon$, $-\infty<\varphi<\infty$. При этом на основании (5.4.8) ее производная по r при $r=0$ равна α/β. Полученное уравнение можно представить в виде

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{\alpha}{\beta}r+P(r,\varphi), \tag{5.4.9}$$

где $P(r, \varphi)$ непрерывно дифференцируема при $-\varepsilon<r<\varepsilon$, $-\infty<\varphi<\infty$ и

$$\frac{\partial P}{\partial r}(0,\varphi)=\lim_{r\to 0} r^{-1}P(r,\varphi)=0. \tag{5.4.10}$$

Траектории системы (5.4.7) совпадают с интегральными кривыми уравнения (5.4.9), так как при $|r|<\varepsilon$ функция $\varphi(t)$ является строго возрастающей функцией t. Поэтому переход от траекторий системы (5.4.7) к интегральным кривым уравнения (5.4.9) означает лишь изменение параметризации.

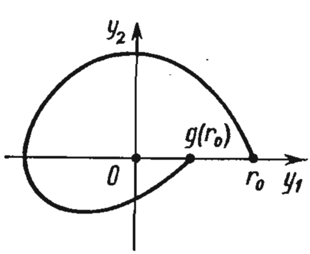

Рис. 10

Далее переменные r, φ будем трактовать как полярные координаты в плоскости Oy_1y_2, считая $r\geqslant 0$. Поведение интегральных кривых уравнения (5.4.9) удобно исследовать с помощью так называемой функции последования. Определяется она следующим образом.

Пусть $r(\varphi, r_0)$ — решение уравнения (5.4.9), определяемое начальным условием $r(0, r_0)=r_0$. Так как уравнение (5.4.9) имеет тривиальное решение $r=0$ $(-\infty<\varphi<\infty)$, то по теореме 5.2.1 функция $r(\varphi, r_0)$ непрерывно дифференцируема при $0\leqslant r<\delta^*$, $\varphi\in[0, 2\pi]$ при некотором $\delta^*>0$. Положим

$$g(r_0)=r(2\pi, r_0).$$

Функция $g(r_0)$ называется *функцией последования.* Она определена и непрерывно дифференцируема при $0\leqslant r<\delta^*$, причем $g(0)=0$. Геометрический смысл функции последования ясен из рис. 10, где кривая, соединяющая точки r_0 и $g(r_0)$, при $\varphi=0$ — интегральная кривая.

По теореме 2.6.2 если $g(\bar r)=\bar r$ при некотором $\bar r\in(0, \delta^*)$, то через точку $\varphi=0$, $r=\bar r$ проходит замкнутая траектория системы (5.4.7), если же $g(\bar r)\neq\bar r$, то соответствующая траектория незамкнута.

Используя теорему 5.2.1, нетрудно вычислить $g'(0)$. По формуле (5.2.13) имеем

$$g'(r_0)=\frac{\partial r(2\pi, r_0)}{\partial r_0}=\exp\left\{\int_0^{2\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\partial P}{\partial r}(r(\varphi, r_0),\varphi)\right)d\varphi\right\}.$$

Отсюда и из (5.4.10) получаем

$$g'(0)=\exp\left\{2\pi\frac{\alpha}{\beta}\right\}. \qquad (5.4.11)$$

Следовательно, $g'(r_0)<q<1$ при $\alpha<0$, если δ^* достаточно мало. По формуле Лагранжа $g(r_0)=g'(\theta r_0)r_0<qr_0(0<\theta<1)$ при $\alpha<0$.

Тогда $r_1=g(r_0)<\delta^*$ и определено $r_2=g(r_1)$, причем $r_2<qr_1$. По индукции определяем $r_k=g(r_{k-1})$ для всех $k\in\mathbf{N}$, при этом $r_k<qr_{k-1}$. Очевидно,

$$r_k<q^k r_0(k\in\mathbf{N}). \qquad (5.4.12)$$

Покажем, что

$$r_k=r(2\pi k, r_0). \qquad (5.4.13)$$

При $k=1$ (5.4.13) вытекает из определения $r_1=g(r_0)$. Предположим, что (5.4.13) выполняется при замене k на $k-1$. Рассмотрим функции $r(\varphi, r_{k-1})$ и $r(\varphi+2\pi(k-1), r_0)$. Так как правая часть уравнения (5.4.9) 2π-периодична по φ, то обе функции являются решениями уравнения (5.4.9) при $\varphi\geqslant 0$, причем при $\varphi=0$ их значения совпадают, так как по индукционному предположению $r_{k-1}=\varphi(2\pi(k-1), r_0)$. Полагая $\varphi=2\pi$, получаем (5.4.13).

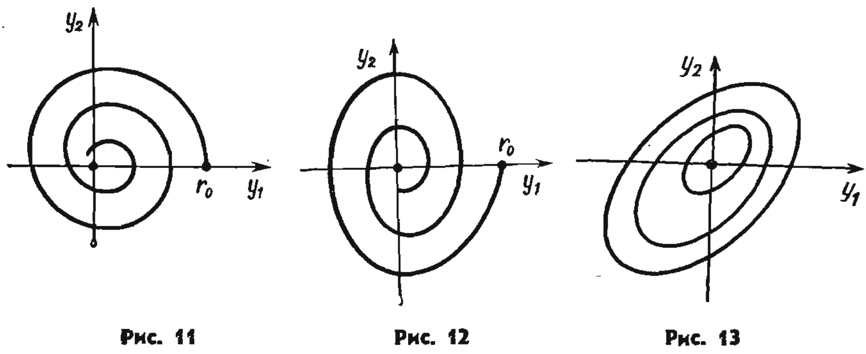

Рис. 11 Рис. 12 Рис. 13

В силу (5.4.12) $r_k\to 0$ при $k\to\infty$. Следовательно, траектории стремятся к началу координат при $\varphi\to\infty$ (а значит, и при $t\to\infty$), образуя спираль. Такое расположение траекторий называется *устойчивым фокусом* (рис. 11).

Если $\alpha>0$, то, заменяя в (5.4.7) φ на $-\varphi$, придем к уравнению вида (5.4.7), у которого $\alpha<0$. Поэтому получим такую же картину, как и в случае устойчивого фокуса, но при $\varphi\to-\infty$. Такое расположение траекторий называется *неустойчивым фокусом* (рис. 12).

Если же $\alpha=0$, т. е. $g'(0)=1$, то требуется дополнительное исследование функции $g(r_0)$ (см. п. 2 § 3 гл. VI). В примере 2.6.1

имеем устойчивый фокус. В частности, может оказаться, что $g(r_0)=r_0$ при всех $r_0\in[0, \delta^*]$. Тогда все траектории системы (5.4.7) в достаточно малой окрестности точки $r=0$ замкнуты, т. е. все решения оказываются периодическими. Такое расположение траекторий называется *центром* (рис. 13). Поскольку переменные x и y связаны аффинным преобразованием, то все траектории системы (5.4.2) в достаточно малой окрестности начала координат также замкнуты.

Пример 5.4.1. Система уравнений Вольтерра

$$\dot{x}=ax-bxy,$$

$$\dot{y}=-cy+dxy,$$

где a, b, c, d — положительные постоянные, рассматриваемая при $x>0$, $y>0$, описывает динамику изменения числа хищников $y(t)$ и их жертв $x(t)$ в изолированной среде. Система имеет положение равновесия в точке $(c/d, a/b)$, которому соответствуют чисто мнимые собственные числа матрицы коэффициентов системы в вариациях, равные $\pm i\sqrt{ac}$. Интегрируя уравнение с разделяющимися переменными

$$y'=\frac{-cy+dxy}{ax-bxy},$$

находим интеграл U в области $x>0$, $y>0$;

$$U=dx+by-c\ln x-a\ln y.$$

Покажем, что кривые, определяемые уравнением

$$U(x,y)=C, \quad \left(C>U\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)\right),$$

являются замкнутыми кривыми, окружающими положение равновесия и заполняющими всю область $x>0$, $y>0$.

Для этого введем полярные координаты $r, \varphi: x=\frac{c}{d}+r\cos\varphi$, $y=\frac{a}{b}+r\sin\varphi$. В результате несложных вычислений найдем

$$\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{dr\cos^2\varphi}{\frac{c}{d}+r\cos\varphi}+\frac{br\sin^2\varphi}{\frac{a}{b}+r\sin\varphi}>0.$$

Отсюда вытекает, что с удалением точки (x, y) от положения равновесия $(c/d, a/b)$ по любому лучу $\varphi=\mathrm{const}$ в области $x>0$, $y>0$ U монотонно возрастает от величины $U(c/a, a/b)$ до бесконечности. Следовательно, каждый луч пересекает кривую $U=C$ в одной и только одной точке, откуда и следует сделанное утверждение.

Так как указанные кривые являются траекториями рассматриваемой системы, то положение равновесия — центр, а все решения — периодические функции времени.

2. Предельные циклы. Предположим, что система (5.4.1) имеет замкнутую траекторию γ с наименьшим периодом $\omega>0$. Возьмем произвольную точку $x_0\in\gamma$ и проведем через нее нормаль $\mathbf{n}$ к γ единичной длины. Для определенности считаем, что $\mathbf{n}$ направлен во внешнюю область. Не нарушая общности, считаем также, что x_0 — начало координат (этого можно добиться заменой $y=x-x_0$). Точки на нормали $\mathbf{n}$ определяются единственной координатой ρ. В качестве ρ берем расстояние от точки нормали до начала координат, если точка лежит снаружи γ, и это расстояние, взятое с обратным знаком, если она лежит внутри γ. Начало координат O соответствует $\rho=0$ (рис. 14).

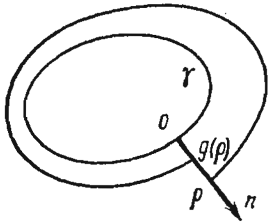

Рис. 14

Рассмотрим траектории $\varphi(t, \rho\mathbf{n})$, проходящие через точки нормали. Запишем уравнение

$$\Phi(t, s, \rho)=\varphi(t, \rho\mathbf{n})-s\mathbf{n}=0 \tag{5.4.14}$$

с неизвестными t, s (ρ — параметр).

Лемма 5.4.1. *Существует $\Delta>0$ такое, что в области $|\rho|<\Delta$ уравнение (5.4.14) имеет единственное решение $t=T(\rho)$, $s=g(\rho)$, удовлетворяющее условиям $T(0)=\omega$, $g(0)=0$, причем функции $T(\rho)$, $g(\rho)$ непрерывно дифференцируемы при $|\rho|<\Delta$.*

Доказательство. Так как $\varphi(t, 0)$ — решение с периодом ω, то по теореме 5.2.1 функция $\varphi(t, \rho\mathbf{n})$ определена и непрерывно дифференцируема по t и ρ в некоторой окрестности точки $t=\omega$, $\rho=0$. Тогда функция $\Phi(t, s, \rho)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(\omega, 0, 0)$. Так как $\varphi(t, 0)$ ω-периодична, то $\Phi(\omega, 0, 0)=0$. Рассмотрим Якобиан

$$J=\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)$$

в точке $(\omega, 0, 0)$. Имеем

$$J=\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, -\mathbf{n}\right)=\det(f(\varphi(t, \rho\mathbf{n})), -\mathbf{n}).$$

Следовательно, в точке $(\omega, 0, 0)$

$$J=\det(f(0), -\mathbf{n})\neq 0,$$

поскольку $f(0)$ и $\mathbf{n}$ — ортогональные векторы. Теперь утверждение леммы вытекает из теоремы о неявной функции.

Следствие. *Справедлива формула*

$$g'(0)=\exp\left\{\int_0^{\omega}\operatorname{sp}\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi,(t,0))\,dt\right\}. \tag{5.4.15}$$

Доказательство. Дифференцируя по ρ тождество

$$\Phi(T(\rho),g(\rho),\rho)=0 \text{ при } |\rho|<\Delta,$$

получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(T,g,\rho)T'+\frac{\partial\Phi}{\partial s}(T,g,\rho)\,g'=-\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}(T,g,\rho).$$

По формулам Крамера имеем

$$g'(\rho)=\frac{\det(\partial\Phi/\partial t\quad-\partial\Phi/\partial\rho)}{\det(\partial\Phi/\partial t,\ \partial\Phi/\partial s)}, \tag{5.4.16}$$

где правая часть вычисляется в точке $(T(\rho),\ g(\rho),\ \rho)$.

Рассмотрим решения $\varphi(t-t_0,\ x_0)$. В силу (5.2.3)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t-t_0,x_0)=-\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t-t_0,x_0)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t-t_0,x_0)f(x_0).$$

Отсюда и из (5.4.14) и (5.4.16) получаем

$$g'(\rho)=\frac{\det\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t,\rho\mathfrak{n})f(\rho\mathfrak{n}),\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t,\rho\mathfrak{n})\mathfrak{n}\right)}{\det(f(\varphi(t,\rho\mathfrak{n})),\ -\mathfrak{n})},$$

где $t=T(\rho)$. Отсюда

$$g'(\rho)=\det\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(T,\rho\mathfrak{n})\ \frac{\det(f(\rho\mathfrak{n}),\ -\mathfrak{n})}{\det(f(\varphi(T,\rho\mathfrak{n})),\ -\mathfrak{n})}.$$

Полагая $\rho=0$ и учитывая, что

$$\varphi(T(0),0)=\varphi(\omega,0)=0,$$

находим

$$g'(0)=\det\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(\omega,0).$$

По формуле (5.2.13)

$$\det\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(\omega,0)=\exp\left\{\int_0^{\omega}\operatorname{sp}\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t,0))\,dt\right\},$$

отсюда и следует (5.4.15). Следствие доказано.

Выясним геометрический смысл функций $T(\rho)$ и $g(\rho)$. Лемма 5.4.1 утверждает, что каждая траектория, пересекающая нормаль $\mathfrak{n}$ в точке $\rho\mathfrak{n}$ из Δ-окрестности начала координат, вновь пересечет ее через промежуток времени $T(\rho)$ в точке $g(\rho)\mathfrak{n}$. При этом так как функция $\varphi(t, \rho\mathfrak{n})$ непрерывно зависит от ρ, а $\varphi(t, 0)$ делает полный оборот вдоль γ при $t\in[0, \omega]$, то траектория $\varphi(t, \rho\mathfrak{n})$ также делает полный оборот при $t\in[0, T(\rho)]$, оставаясь в малой окрестности γ, если Δ достаточно мало (см. рис. 14).

Функция $g(\rho)$ называется *функцией последования* (ср. с п. 1).

Определение 5.4.1. *Замкнутая траектория γ автономного уравнения* (5.4.1) *называется устойчивым предельным циклом, если существует такое $\Delta>0$, что γ является ω-предельным множеством для любой траектории, проходящей через точку из Δ-окрестности кривой γ.*

Определение 5.4.2. *Замкнутая траектория γ называется неустойчивым предельным циклом, если существует такое $\Delta>0$, что γ является α-предельным множеством для любой траектории, проходящей через точку из Δ-окрестности кривой γ.*

Так как в реальной действительности время течет в положительном направлении, то на практике реализуются те периодические движения, которым соответствуют устойчивые предельные циклы. Такие движения называются *автоколебаниями.*

Теорема 5.4.1. *Если $h<0$*

$$h=\int_0^{\omega} \operatorname{sp} \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t,0))\,dt, \tag{5.4.17}$$

то γ является устойчивым предельным циклом; если $h>0$, то γ — неустойчивый предельный цикл.

Доказательство. Пусть сначала $h<0$. В силу (5.4.15)

$$g'(0)=e^h<1.$$

Покажем, что отсюда вытекает утверждение теоремы. По непрерывности $g'(\rho)<q<1$ при $|\rho|<\delta$, если $\delta>0$ достаточно мало. Пусть $|\rho_0|<\delta$. По формуле Лагранжа, так как $g(0)=0$, то $|g(\rho_0)|=|g'(\theta\rho_0)\rho_0|<q|\rho_0|$ $(0<\theta<1)$. Следовательно, если $\rho_1=g(\rho_0)$, то $|\rho_1|<\delta$ и определено $\rho_2=g(\rho_1)$, причем $|\rho_2|<q|\rho_1|$. По индукции определяем $\rho_k=g(\rho_{k-1})$ для всех $k\in\mathbf{N}$, при этом $|\rho_k|<q|\rho_{k-1}|$. Заметим, что так как траектории не пересекаются, если $\rho_0>0$, то при всех k $\rho_k>0$, если же $\rho_0<0$, то $\rho_k<0$. В дальнейшем будем рассматривать только траектории, лежащие снаружи γ (случай, когда они лежат внутри γ, рассматривается аналогично). Тогда $\rho_0>0$ и $0<\rho_k<q^k\rho_0$, следовательно, $\rho_k\to 0$ при $k\to\infty$. Покажем, что

$$\rho_k\mathfrak{n}=\varphi(t_k, \rho_0\mathfrak{n}), \tag{5.4.18}$$

где

$$t_k=\sum_{i=0}^{k-1}{}' T(\rho_i).$$

При $k=1$ (5.4.18) вытекает из определения $g(\rho)$ и $T(\rho)$. Предположим, что (5.4.18) выполняется при замене k на $k-1$. Рассмотрим

$$\rho_k=\varphi(T(\rho_{k-1}),\rho_{k-1}\mathfrak{n})=\varphi(T(\rho_{k-1}),\varphi(t_{k-1},\rho_0\mathfrak{n})).$$

Последнее соотношение справедливо по индукционному предположению. В силу (2.6.4)

$$\rho_k\mathfrak{n}=\varphi(t_{k-1}+T(\rho_{k-1}),\rho_0\mathfrak{n})=\varphi(t_k,\rho_0\mathfrak{n})$$

по определению t_k. Равенство (5.8.5) доказано.

Так как $T(0)=\omega$ и $T(\rho)$ непрерывна, то $t_k\to\infty$ при $k\to\infty$. Из (5.4.18) и определения 2.6.1 заключаем, что начало координат является ω-предельной точкой для траектории $\varphi(t, \rho_0\mathfrak{n})$. По теореме 5.1.3 вся траектория γ принадлежит ω-предельному множеству Ω траектории $\varphi(t, \rho_0\mathfrak{n})$. Покажем, что $\gamma=\Omega$. Возьмем $q\in\Omega$ и пусть $d=\rho(q, \gamma)$. Как было отмечено, если δ достаточно мало, отрезок траектории между двумя последовательными пересечениями нормали лежит в сколь угодно малой окрестности кривой γ. В данном случае $\rho_k<\delta$, поэтому это верно для всей полутраектории $\varphi(t, \rho_0\mathfrak{n})$ при $t\geqslant 0$. Следовательно, при $d>0$ q не может быть ω-предельной точкой траектории $\varphi(t, \rho_0\mathfrak{n})$, т. е. $d=0$ и $q\in\gamma$. Итак, $\gamma=\Omega$.

Осталось показать, что существует $\Delta>0$ такое, что если траектория проходит через точку из Δ-окрестности кривой γ, то она пересечет нормаль $\mathfrak{n}$ в δ-окрестности начала. Но это вытекает из непрерывной зависимости решений $\varphi(t, x_0)$ от начальной точки x_0 равномерно по $t\in[0, \omega]$, так как траектория $\varphi(t, 0)$ проходит через начало координат. Таким образом, выполняется определение 5.4.1, и при $h<0$ теорема 5.4.1 доказана.

Рассмотрим случай $h>0$. Выполним в системе (5.4.1) замену t на $-t$. Получим систему

$$\dot{x}=-f(x). \tag{5.4.19}$$

Замкнутая траектория γ сохранится, ей соответствует ω-периодическое решение $\varphi(-t, 0)$. Запишем величину h_1, определяемую формулой (5.4.17), для решения $\varphi(-t, 0)$ уравнения (5.4.19). Имеем

$$h_1=-\int_0^{\omega}\operatorname{sp}\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(-t,0))\,dt=\int_0^{-\omega}\operatorname{sp}\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t,0))\,dt=-h,$$

поскольку $\varphi(t+\omega, 0)=\varphi(t, 0)$. Следовательно, в уравнении (5.4.19) $h_1<0$ и применим полученный результат. Кривая γ является ω-предельным множеством для любой траектории $\varphi(t, x_0)$ уравнения (5.4.19), проходящей через точку x_0 из Δ-окрестности γ. Учитывая, что была произведена замена t на $-t$, из определения (2.6.1) заключаем, что для траекторий исходной системы (5.4.1), проходящих через Δ-окрестность γ, кривая γ является α-предельным множеством, что и доказывает теорему в силу определения 5.4.2.

Замечание. Попутно выяснен характер приближения соседних траекторий к γ при $t \to \infty$: они приближаются к γ, образуя бесконечное число витков спирали, как изнутри, так и снаружи.

В качестве примера рассмотрим уравнение ван-дер-Поля (5.3.20). Оно эквивалентно системе

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)\, x_2.$$

Как показано в примере 5.3.2, эта система имеет замкнутую траекторию, уравнения которой

$$x_1 = 2\cos t + O(\mu), \quad x_2 = -2\sin t + O(\mu).$$

Имеем $\omega = 2\pi + O(\mu^2)$, $\operatorname{sp} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \mu(1 - x_1^2)$. Следовательно,

$$h = \mu \int_0^{\infty} (1 - 4\cos^2 t)\, dt + O(\mu^2) = -2\pi\mu + O(\mu^2).$$

Отсюда заключаем, что при $\mu > 0$ замкнутая траектория — устойчивый предельный цикл, а при $\mu < 0$ она является неустойчивым предельным циклом.

В заключение отметим, что проведенные рассуждения сохраняют силу, если вместо нормали использовать любую прямую, проходящую через точку O и отличную от касательной к траектории в этой точке.

§ 5. Общее решение

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{5.5.1}$$

где $f: G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, и предложим, что в области G выполнены условия теоремы 5.1.1, т. е. $f \in \operatorname{loc} \operatorname{Lip}_x(G)$. Множество всех решений уравнения (5.5.1) задается функцией $x(t, t_0, x_0): D \to \mathbb{R}^n$, где

$$D = \{(t, t_0, x_0) : (t_0, x_0) \in G,\ t \in I(t_0, x_0)\}.$$

Определение 5.5.1. *Непрерывная функция*

$$x = \varphi(t, C): M \to \mathbb{R}^n, \quad M \subset \mathbb{R}^{n+1}, \tag{5.5.2}$$

называется общим решением уравнения (5.5.1) *в области G, если для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ уравнение $x_0 = \varphi(t_0, C)$ имеет един-*

ственное решение $C_0=U(t_0, x_0)$, $(t_0, C_0)\in M$, и $\varphi(t, C_0)$ — решение задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0).

Существуют и другие определения общего решения дифференциального уравнения (см.: *Шестаков А. А., Меренков Ю. Н.* Об определении общего решения дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. Т. XXII. 1986. № 5).

Возьмем произвольную точку $(\bar{t}_0, \bar{x}_0)\in G$. Покажем, как построить область $G_0\ni(\bar{t}_0, \bar{x}_0)$, в которой существует общее решение уравнения (5.5.1). Пусть $t=h(x): P\to\mathbf{R}$ (P — область) — непрерывно дифференцируемая функция, такая, что $\bar{t}_0=h(\bar{x}_0)$, причем поверхность S, задаваемая уравнением $t=h(x)$, принадлежит области G. Предположим, что S не касается интегральных кривых уравнения (5.5.1). Аналитически это условие записывается в виде

$$1-\frac{\partial h}{\partial x} f(h(x), x)\neq 0.$$

Вычислим два равных определителя

$$\det\begin{pmatrix} E_n & f \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & 1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ f & E_n\end{pmatrix}=I.$$

С одной стороны,

$$I=\det\begin{pmatrix} E_n & f \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & 1\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} E_n & -f \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & -\dfrac{\partial h}{\partial x}f+1\end{pmatrix}=$$

$$=1-\frac{\partial h}{\partial x} f.$$

С другой стороны,

$$I=\det\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ f & E_n\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\partial h}{\partial x} \\ 0 & E_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & -f\dfrac{\partial h}{\partial x}+E_n\end{pmatrix}=$$

$$=\det\left(E_n-f\frac{\partial h}{\partial x}\right),$$

следовательно,

$$1-\frac{\partial h}{\partial x} f(h(x), x)=\det\left(E_n-f(h(x), x)\frac{\partial h}{\partial x}\right)\neq 0. \qquad (5.5.3)$$

Рассмотрим множество $G_0\subset G$ точек, образуемых интегральными кривыми, которые проходят через поверхность S, т. е.

$$G_0=\{(t, x): t\in I(h(C), C),\quad x=x(t, h(C), C),\ C\in P\}.$$

Покажем, что G_0 — область. Пусть $(t_0, x_0) \in G_0$. Это означает, что существует $C_0 \in P$ такое, что $x(h(C_0), t_0, x_0) = C_0$. Рассмотрим функцию $\Phi(C, t, x) = C - x(h(C), t, x)$, определенную по теореме 5.1.1 в окрестности точки (C_0, t_0, x_0). Имеем $\Phi(C_0, t_0, x) = 0$,

$$\det \frac{\partial \Phi}{\partial C}(C_0, t_0, x_0) = \det\left(E_n - f(h(C_0), C_0)\frac{\partial h}{\partial C}(C_0)\right) \neq 0$$

в силу (5.5.3). По теореме о неявной функции уравнение $\Phi(C, t, x) = 0$ имеет решение $C(t, x)$, $C(t_0, x_0) = C_0$, определенное в некоторой окрестности V точки (t_0, x_0), а это и означает, что $V \subset G_0$. Очевидно также, что G_0 связно. Итак, G_0 — область. Пусть

$$Q = \{(t, C) : C \in P,\ t \in I(h(C), C)\}.$$

Определим функцию $\varphi : Q \to \mathbf{R}^n$ следующим образом:

$$\varphi(t, C) = x(t, h(C), C). \tag{5.5.4}$$

Теорема 5.5.1. *Равенство $x = \varphi(t, C)$ задает общее решение дифференциального уравнения* (5.5.1) *в области G_0. При этом если $\frac{\partial f}{\partial x}$ существует и непрерывна в G_0, то $\frac{\partial \varphi}{\partial C}$ существует и непрерывна в Q и* $\det \frac{\partial \varphi}{\partial C} \neq 0$.

Доказательство. Пусть $(t_0, x_0) \in G_0$. Рассмотрим уравнение $x_0 = \varphi(t_0, C)$. Оно имеет единственное решение $C_0 = U(t_0, x_0)$, где $(h(C_0), C_0)$ — точка пересечения интегральной кривой, проходящей через точку (t_0, x_0), с поверхностью S. Кроме того, $\varphi(t, C_0)$ — решение дифференциального уравнения (5.5.1) в силу (5.5.4), непрерывное по теореме 5.1.1. По определению 5.5.1 $\varphi(t, C)$ — общее решение уравнения (5.5.1) в области G_0.

Далее, если $\frac{\partial f}{\partial x}$ существует и непрерывна в G_0, то в области

$$D_0 = \{(t, t_0, x_0) : (t_0, x_0) \in G_0,\ t \in I(t_0, x_0)\}$$

по теореме 5.2.1 существуют и непрерывны $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ и $\frac{\partial x}{\partial t_0}$. Следовательно, существует и непрерывна $\frac{\partial \varphi}{\partial C}$ в силу (5.5.4). Кроме того,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} = \frac{\partial x}{\partial t_0}(t, h(C), C)\frac{\partial h}{\partial C} + \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, h(C), C).$$

Используя (5.2.3), получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, h(C), C)\left(E_n - f(h(C), C)\frac{\partial h}{\partial C}\right), \tag{5.5.5}$$

т. е. $\det \frac{\partial \varphi}{\partial C} = \det \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, h(C), C) \det\left(E_n - f(h(C), C)\frac{\partial h}{\partial C}\right)$.

Но
$$\det \frac{\partial x}{\partial x_0}(t,\ h(C),\ C) \neq 0,$$
так как $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ - фундаментальная матрица уравнения в вариациях (5.2.1),
$$\det \left(E_n - f \frac{\partial h}{\partial C}\right) \neq 0$$
в силу (5.5.3). Теорема доказана.

Теорема 5.5.1, показывает, что локально (в области G_0) множество решений задается n-мерным параметром C (а не $(n+1)$-мерным (t_0, x_0), как в функции $x(t, t_0, x_0)$).

В качестве поверхности S можно взять сечение области G гиперплоскостью $t = \bar{t}_0$, т. е.
$$S = \{(t, x) : t = \bar{t}_0,\quad x \in P\}.$$
В этом случае $h(x) = \bar{t}_0$. В силу (5.5.4) общее решение имеет вид $x = \varphi(t, x_0) = x(t, \bar{t}_0, x_0)$. Общее решение, задаваемое такой функцией, называется общим решением в форме Коши. В этой форме параметром является начальная точка x_0. Отметим, что эта конструкция была использована для построения общего решения в § 4 гл. I.

Если $G = (a, b) \times H$, где H — область фазового пространства, и любое решение (5.5.1) продолжимо на весь интервал (a, b), то общее решение в форме Коши существует во всей области G, так как в этом случае $G_0 = G$. Примером общего решения в форме Коши является формула Коши (4.7.11).

Следствие (теорема о выпрямлении интегральных кривых). *Отображение G_0 на Q, задаваемое равенством $(t, x) = (t, \varphi(t, C))$, есть диффеоморфизм, отображающий интегральные кривые уравнения (5.5.1) в прямые (t, C), где $C \in P$ фиксированы, $t \in I(h(C), C)$.*

Из теоремы 5.2.2 вытекает, что если $\varphi(t, C)$ — общее решение в форме Коши, то степень гладкости этого диффеоморфизма равна степени гладкости функции $f(t, x)$ по x.

§ 6. Общий интеграл

Продолжим рассмотрение дифференциального уравнения в условиях теоремы 5.5.1.

1. Первый интеграл.

Определение 5.6.1. *Непрерывная функция $U_1(t, x) : G \to \mathbf{R}$ называется интегралом (первым интегралом) уравнения* (5.5.1), *если для любого решения $\varphi(t) : \langle a, b \rangle \to \mathbf{R}^n$ имеет место тождество $U_1(t, \varphi(t)) \equiv \mathrm{const}$, $t \in \langle a, b \rangle$.*

Другими словами, интеграл обращается в постоянную вдоль любого решения уравнения (5.5.1) (ср. с теоремой 1.5.3).

Уравнение $U_1(t, x)=C$ определяет множество γ в пространстве $Otx_1 \ldots x_n$. Из определения 5.5.1 следует, что интегральные кривые, проходящие через точки множества γ, принадлежат γ. Вообще говоря, множество γ является n-мерной поверхностью, образованной интегральными кривыми. Такие поверхности называются интегральными.

Пусть $U_1(t, x)$ — непрерывно дифференцируемая в области G функция. На множестве таких функций определим линейный оператор D:

$$DU_1 = \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial x} f \tag{5.6.1}$$

со значениями в множестве непрерывных в G функций. Функция DU_1 называется производной функции U_1 в силу уравнения (5.5.1). Название объясняется формулой

$$DU_1(t, \varphi(t)) = \frac{d}{dt} U_1(t, \varphi(t)), \tag{5.6.2}$$

где $\varphi(t)$ — любое решение уравнения (5.5.1). Для доказательства формулы (5.6.2) достаточно продифференцировать $U_1(t, \varphi(t))$ по t. Из (5.6.2) вытекает следующая теорема.

Теорема 5.6.1. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемая функция $U_1(t, x): G \to \mathbf{R}$ была интегралом уравнения* (5.5.1), *необходимо и достаточно, чтобы $DU_1=0$ при всех $(t, x) \in G$.*

2. Независимые интегралы. Пусть теперь $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ существует и непрерывна в G, т. е. выполняются условия теоремы 5.2.1. Будем рассматривать только интегралы класса C^1. Из определения 5.5.1 следует, что вместе с интегралом U_1 интегралом является также любая непрерывная функция $U_2=\Phi(U_1)$. Такое семейство интегралов задается одним из его представителей. Поэтому возникает задача выделения интегралов, с помощью которых можно задать все интегралы (5.5.1). Такие интегралы называются независимыми. Строгое определение будет дано ниже, однако заметим, что в § 5 гл. I под интегралами понимались только независимые интегралы. Этим объясняется, что функции, тождественно равные постоянной, не являются интегралами согласно определению 1.5.2.

Пусть G_0 — область, определенная в § 5 с помощью некоторой поверхности S. По теореме 5.5.1 уравнение (5.5.1) имеет в G_0 общее решение $\varphi(t, C): Q \to \mathbf{R}^n$. Пусть $U_1(t, x)$ — интеграл (5.5.1) в области G_0. По определению 5.6.1 при всех $t \in I(h(C), C)$, $C \in P$, $U_1(t, \varphi(t, C))$ является функцией только C:

$$U_1(t, \varphi(t, C)) = V_1(C),$$

откуда

$$\frac{\partial V_1}{\partial C} = \frac{\partial U_1}{\partial x}(t, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial C},$$

а так как по теореме 5.5.1 $\frac{\partial\varphi}{\partial C}$ — неособая матрица, то

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}(t, \varphi) = \frac{\partial V_1}{\partial C}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right)^{-1}. \tag{5.6.3}$$

Из (5.5.5), (5.5.3) и теоремы 5.2.1 следует, что $\frac{\partial\varphi}{\partial C}$ — фундаментальная матрица уравнения в вариациях (5.2.1) при $x_0 = C$, $t_0 = h(C)$. Как показано в п. 5 § 2 гл. IV, матрица $\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right)^{-1}\right)^*$ (в силу вещественности сопряженная матрица совпадает с транспонированной) является решением линейного уравнения, сопряженного с (5.2.1). Перейдем в (5.6.3) к транспонированным матрицам:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}(t, \varphi)\right)^* = \left(\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial C}\right)^*\left(\frac{\partial V_1}{\partial C}\right)^*. \tag{5.6.4}$$

Следовательно, $\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}(t, \varphi)\right)^*$ – решение линейного уравнения, сопряженного с (5.2.1).

Рассмотрим m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ интегралов $U_1(t, x), \ldots, U_m(t, x)$ в области G_0. По доказанному функции $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}(t, \varphi)\right)^*$, $i = 1, \ldots, m$, являются решениями линейного уравнения, сопряженного с (5.2.1). Если $U = \mathrm{colon}\,(U_1, \ldots, U_m)$, то в силу (5.6.4)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}(t, \varphi)\right)^* = \left(\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial C}\right)^*\left(\frac{\partial V}{\partial C}\right)^*,$$

где $V(C) = U(t, \varphi(t, C))$. По теореме 4.1.1 решения $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}(t, \varphi(t, C))\right)^*$, $i = 1, \ldots, m$, линейно независимы на интервале $I(h(C), C)$ тогда и только тогда, когда линейно независимы векторы $\left(\frac{\partial V_i}{\partial C}\right)^*$, $i = 1, \ldots, m$, т. е. когда

$$r\left(\frac{\partial V}{\partial C}\right) = r\left(\frac{\partial U}{\partial x}(t, \varphi)\right) = m. \tag{5.6.5}$$

Определение 5.6.2. *Интегралы $U_1, \ldots, U_m : G_0 \to \mathbf{R}$ называются независимыми, если векторные функции $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}(t, \varphi(t, C))\right)^*$ $(i = 1, \ldots, m)$ линейно независимы на $I(h(C), C)$ при каждом $C \in P$.*

Так как $x = \varphi(t, C)$ — общее решение в области G_0, то (t, φ) есть любая точка G_0. Теперь из (5.6.5) вытекает следующая теорема.

Теорема 5.6.2. *Для того чтобы интегралы $U_1, \ldots, U_m : G_0 \to \mathbf{R}$ были независимы, необходимо и достаточно, чтобы в G_0*

$$r\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=m. \tag{5.6.6}$$

Формулу (5.6.6) можно использовать как определение независимости интегралов, заданных в произвольной области.

Определение 5.6.3. *Интегралы $U_1, \ldots, U_m : B \to \mathbf{R}$ называются независимыми, если $r\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=m$ в каждой точке области B.*

Определения 5.6.2 и 5.6.3 совпадают между собой при $B=G_0$, а также и с определением независимых интегралов линейных систем, данным в п. 5 § 2 гл. IV.

Теорема 5.6.3. *В условиях теоремы* 5.2.1:

а) *в области G_0 существуют n независимых интегралов уравнения* (5.5.1);

б) *если $U_1, \ldots, U_n$ — независимые интегралы системы* (5.5.1), *определенные в некоторой окрестности точки (t_0, x_0), то уравнение*

$$U(t, x)=U(t_0, x_0), \quad U=\operatorname{colon}(U_1, \ldots, U_n) \tag{5.6.7}$$

имеет единственное решение $x=\psi(t)$, являющееся решением системы (5.5.1) *с начальными данными (t_0, x_0).*

Доказательство. а) В силу теоремы 5.5.1 в области G_0 существует общее решение $x=\varphi(t, C)$ системы (5.5.1), причем $\frac{\partial\varphi}{\partial C}$ существует, непрерывна и $\det\frac{\partial\varphi}{\partial C}\neq 0$. Разрешая равенство $x=\varphi(t, C)$ относительно C, получим непрерывно дифференцируемую в области G_0 функцию $C=U(t, x)$. Поскольку $\varphi(t, C)$ — общее решение, $U(t, x)$ обращается в постоянную вдоль любого решения из области G_0. Кроме того,

$$\det\frac{\partial U}{\partial x}=\left[\det\frac{\partial\varphi}{\partial C}(t, U(t, x))\right]^{-1}.$$

Следовательно, координатные функции вектора $U(t, x)$ суть независимые интегралы системы (5.5.1) в области G_0.

б) Согласно определению 5.6.3 $\det\frac{\partial U}{\partial x}(t_0, x_0)\neq 0$. По теореме о неявной функции уравнение (5.6.7) имеет единственное решение $x=\tilde{\psi}(t)$, $x_0=\tilde{\psi}(t_0)$. С другой стороны, согласно определению 5.6.1 решение $x=\psi(t)$ системы (5.5.1) с начальными данными (t_0, x_0) также удовлетворяет (5.6.7). Поэтому $\psi(t)=\tilde{\psi}(t)$ в некоторой окрестности точки t_0. Теорема доказана.

Определение 5.6.4. *Если $U_1, \ldots, U_n : B \to \mathbf{R}$ — независимые интегралы, то равенство $U(t, x)=C$,* где $U=\operatorname{colon}(U_1, \ldots, U_n)$, *$C=U(t_0, x_0)$, называется общим интегралом системы* (5.5.1) *в области B.*

Согласно б) теоремы 5.6.3 общий интеграл определяет как неявную функцию любое решение (5.5.1) в области B. Из доказательства а) следует, что для получения общего интеграла достаточно разрешить формулу общего решения относительно произвольной постоянной.

Пусть $U_1, \ldots, U_n: B \to \mathbf{R}$ — независимые интегралы системы (5.5.1), а $U_{n+1}: B \to \mathbf{R}$ — еще один интеграл. Пусть также $\varphi(t, C)$ — общее решение в области B. Так как вдоль решений интегралы не зависят от t, то

$$U(t, \varphi(t, C)) = V(C), \tag{5.6.8}$$

$$U_{n+1}(t, \varphi(t, C)) = V_{n+1}(C). \tag{5.6.9}$$

В силу (5.6.5) $\det \frac{\partial V}{\partial C} \neq 0$. Следовательно, для произвольного C_0, соответствующего некоторому решению $x = \varphi(t, C_0)$, функция V в (5.6.8) имеет обратную функцию W, определенную в некоторой окрестности точки $V(C_0)$. Подставляя $C = W(U)$ в (5.6.9), получим $U_{n+1} = V_{n+1}(W(U))$, т. е. $U_{n+1} = \Phi_1(U)$, где $\Phi_1 = V_{n+1} \circ W$ Таким образом, локально каждый интеграл является некоторой функцией n независимых интегралов. В целом же интегралы $U_1, \ldots, U_n, U_{n+1}$ связаны соотношениями (5.6.8) и (5.6.9), где C играет роль n-мерного параметра.

3. Понижение порядка системы с помощью независимых интегралов. Пусть в некоторой области B известно m, $1 \leqslant m < n$, независимых интегралов. Тогда порядок системы можно понизить на m единиц.

Рассмотрим систему (5.5.1) в условиях теоремы 5.2.1. Пусть $U_1(t, x), \ldots, U_m(t, x)$ — независимые интегралы класса C^1, определенные в некоторой окрестности точки (t_0, x_0). Если положить $U^1 = \operatorname{colon}(U_1, \ldots, U_m)$, то согласно определению 5.6.3 в точке (t_0, x_0)

$$r\left(\frac{\partial U^1}{\partial x}\right) = m.$$

Пусть $x = \operatorname{colon}(x^1, x^2)$, $x^1 \in \mathbf{R}^m$, $x^2 \in \mathbf{R}^{n-m}$. Не нарушая общности, считаем, что в точке (t_0, x_0)

$$\det \frac{\partial U^1}{\partial x^1} \neq 0. \tag{5.6.10}$$

Систему (5.5.1) запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= f^1(t, x^1, x^2), \\ \dot{x}^2 &= f^2(t, x^1, x^2). \end{aligned} \tag{5.6.11}$$

В системе (5.6.11) перейдем к новым переменным y^1, x^2, полагая

$$y^1 = U^1(t, x^1, x^2). \tag{5.6.12}$$

В силу (5.6.10) уравнение (5.6.12) разрешимо относительно x^1:

$$x^1 = V^1(t,\ y^1,\ x^2), \tag{5.6.13}$$

где V^1 — функция класса C^1 в соответствующей области Q. Рассмотрим систему порядка $n-m$:

$$\dot{x}^2 = g(t,\ x^2,\ y^1), \tag{5.6.14}$$

где $g(t,\ x^2,\ y^1) = f^2(t,\ V^1(t,\ y^1,\ x^2),\ x^2) : Q \to \mathbf{R}^{n-m}$. В уравнении (5.6.14) y^1 является параметром.

Теорема 5.6.4. *Если* $W_1(t,\ x^2,\ y^1)$, ..., $W_{n-m}(t,\ x^2,\ y^1)$ *— независимые интегралы* (5.6.14), *то* U_1, ..., U_m, U_{m+1}, ..., U_n, *где*

$$U_{m+i}(t,\ x) = W_i(t,\ x^2,\ U^1(t,\ x)),\quad i = 1, \ldots, n-m, \tag{5.6.15}$$

— независимые интегралы (5.5.1).

Доказательство. Сначала покажем, что функции (5.6.15) — интегралы уравнения (5.5.1). Пусть $\varphi(t) = \operatorname{colon}(\varphi^1,\ \varphi^2)$ — решение (5.5.1). Так как $U^1(t,\ \varphi) = \mathrm{const}$ и из (5.6.11)—(5.6.13) имеем $\dot{\varphi}^2 = f^2(t,\ \varphi^1,\ \varphi^2) = f^2(t, V^1(t, U^1, \varphi^2), \varphi^2) = g(t, \varphi^2, U^1)$, то $U_{m+i}(t,\ \varphi) = W_i(t,\ \varphi^2,\ U^1(t,\ \varphi)) = \mathrm{const}$ $(i = 1, \ldots, n-m)$, поскольку W_i — интегралы (5.6.14) при постоянных y^1. Таким образом, U_1, ..., U_n — интегралы (5.5.1).

Для доказательства их независимости в области G_0 положим

$$U^2(t,\ x) = W^2(t,\ x^2,\ U^1) = \operatorname{colon}(U_{m+1}, \ldots, U_n)$$

и рассмотрим

$$\det \frac{\partial U}{\partial x} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial U^1}{\partial x^2} \\[2ex] \dfrac{\partial W^2}{\partial U^1}\dfrac{\partial U^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial W^2}{\partial U^1}\dfrac{\partial U^1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial W^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\det \frac{\partial U}{\partial x} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial U^1}{\partial x^2} \\[2ex] 0 & \dfrac{\partial W^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \det \frac{\partial U^1}{\partial x^1} \det \frac{\partial W^2}{\partial x^2} \neq 0$$

в силу (5.6.10) и поскольку W_1, ..., W_{n-m} — независимые интегралы уравнения (5.6.14) с параметром y^1. Теорема доказана.

Теорема 5.6.4 показывает, что интегрирование системы n уравнений в области, где известны m независимых интегралов, сводится к интегрированию системы $n-m$ уравнений, зависящих от m-мерного параметра.

Пример 5.6.1. Рассмотрим систему двух уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2},\qquad \frac{dz}{dx} = \frac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2}, \tag{5.6.16}$$

где $x^2-z^2-y^2\neq 0$. По теореме 5.6.1 функция $U_1(x, y, z)=y^{-1}z$ есть интеграл системы (5.6.16) при $y\neq 0$, $x^2-y^2-z^2\neq 0$. Действительно,

$$DU_1=\frac{2xz}{y(x^2-y^2-z^2)}-\frac{2xyz}{y^2(x^2-y^2-z^2)}\equiv 0.$$

В соответствии с (5.6.12) полагаем $v=y^{-1}z$. Получаем

$$z=vy,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2(1+v^2)}. \tag{5.6.17}$$

В уравнении (5.6.17), играющем роль (5.6.14), v следует рассматривать как параметр. Система (5.6.17) совпадает с (1.5.11) при $\alpha^2=1+v^2$, $x^2\neq y^2(1+v^2)$. Из (1.5.13) находим интеграл (5.6.17):

$$W(x, y, v)=\frac{x^2+(1+v^2)y^2}{y}.$$

Следовательно,

$$U_2(x, y, z)=W(x, y, y^{-1}z)=y^{-1}(x^2+y^2+z^2).$$

Таким образом, общий интеграл (5.6.16) при $y(x^2-y^2-z^2)\neq 0$ имеет вид

$$(y^{-1}z,\ y^{-1}(x^2+y^2+z^2))=(C_1, C_2).$$

В окрестности точек, где $y=0$, $z(x^2-y^2-z^2)\neq 0$, в качестве первого интеграла следует взять $U_1=z^{-1}y$. Тогда в силу симметрии $U_2=z^{-1}(x^2+y^2+z^2)$. Полуоси абсцисс также являются интегральными кривыми.

4. Интегралы автономных системы. Рассмотрим систему

$$\dot{x}=f(x), \tag{5.6.18}$$

где $f\in C^1(H)$, $H\subset \mathbf{R}^n$. Предположим, что область H не содержит положений равновесия системы (5.6.18). Пусть $x_0\in H$. Будем для определенности считать, что $f_n(x_0)\neq 0$. Обозначим через V область, содержащую точку x_0, в которой $f_n(x)\neq 0$. Тогда из (5.6.18) можно исключить t:

$$\frac{dx_i}{dx_n}=\frac{f_i(x_1,\dots,x_n)}{f_n(x_1,\dots x_n)},\quad i=1,\dots,n-1, \tag{5.6.19}$$

т. е. получена неавтономная система $n-1$ уравнений, правые части которой — функции класса C^1 в области V.

Если $U(x)$ — интеграл системы (5.6.19), то $U(x)$ — интеграл системы (5.6.18), и наоборот. Действительно, в области V траектории системы (5.6.18) совпадают с интегральными кривыми системы (5.6.19). Поэтому $U(x)$ обращается (или не обращается) в постоянную вдоль решений (5.6.18) и (5.6.19) одновременно.

Из результатов п. 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.6.5. *Пусть область H не содержит положений равновесия системы* (5.6.18). *Тогда для каждой точки H можно* *указать такую окрестность, в которой система* (5.6.18) *имеет ровно* $n-1$ *независимых интегралов, не зависящих от* t. *Любой не зависящий от* t *интеграл в этой окрестности является функцией указанных независимых интегралов.*

В окрестности положения равновесия независимые интегралы, не зависящие от t, могут как существовать, так и не существовать.

Пример 5.6.2. Рассмотрим линейную систему двух уравнений с постоянными коэффициентами. Предположим, что собственные числа матрицы коэффициентов системы имеют вещественные части одного знака, т. е. имеет место либо узел, либо фокус. Покажем, что в этом случае не может существовать независимого интеграла $U(x)$ системы, определенного в окрестности начала координат. Действительно, пусть $U(x)$ — такой интеграл. Рассмотрим траекторию $\varphi(t, x)$, проходящую через точку x из этой окрестности. Так как $U(\varphi(t, x))$ не зависит от t, а $\varphi(t, x) \to 0$ при $t \to +\infty$ либо при $t \to -\infty$, то в силу непрерывности интеграла $U(x) \equiv \equiv U(0)$, т. е. независимых интегралов не существует.

Пример 5.6.3. Рассмотрим систему Гамильтона

$$\dot{x}_k = \frac{\partial E}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial E}{\partial x_k}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{5.6.20}$$

где функция Гамильтона $E(x, y): H \to \mathbf{R}$, $H \subset \mathbf{R}^{2n}$, принадлежит классу C^2 в области H. Так как производная E в силу системы (5.6.20) равна

$$DE = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial E}{\partial x_k} \frac{\partial E}{\partial y_k} + \frac{\partial E}{\partial y_k}\left(-\frac{\partial E}{\partial x_k}\right)\right] = 0, \tag{5.6.21}$$

то в силу теоремы 5.6.1 $E(x, y)$ — интеграл системы (5.7.20) в области H. Однако если E зависит от t, то E уже не является интегралом. Отметим, что E является интегралом также и в окрестностях всех положений равновесия, которые существуют в H.

В заключение параграфа докажем *«теорему о выпрямлении траекторий»* автономных систем.

Теорема 5.6.6. *Для каждой неособой точки системы* (5.6.18) *можно указать ее окрестность* V *и диффеоморфизм* $F: V \to \mathbf{R}^n$ *так, что замена* $y = F(x)$ *приводит систему* (5.6.18) *к виду*

$$\dot{y} = \operatorname{colon}(0, \ldots, 0, 1). \tag{5.6.22}$$

Доказательство. Пусть в рассматриваемой окрестности V функция $f_n(x)$ отлична от нуля. По теореме 5.6.5 в V определены независимые интегралы $U_1(x), \ldots, U_{n-1}(x)$. Положим

$$\bar{x} = \operatorname{colon}(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad \bar{y} = \operatorname{colon}(y_1, \ldots, y_{n-1}),$$

$$U = \operatorname{colon}(U_1, \ldots U_{n-1}).$$

Согласно свойству интегралов отображение $(\bar{x}, x_n) \to (\bar{y}, x_n)$, где $\bar{y} = U(\bar{x}, x_n)$, есть диффеоморфизм, приводящий систему (5.6.18) к виду

$$\dot{\bar{y}} = 0, \quad \dot{x}_n = f_n^*(\bar{y}, x_n), \tag{5.6.23}$$

где $f_n^*(\bar{y}, x_n) = f_n(W(\bar{y}, x_n), x_n)$, а $W(\bar{y}, x_n)$ — функция, обратная $U(\bar{x}, x_n)$.

Далее, отображение $(\bar{y}, x_n) \to (\bar{y}, y_n)$, где

$$y_n = \int \frac{1}{f_n^*(\bar{y}, x_n)} dx_n,$$

— это диффеоморфизм, переводящий (5.6.23) в систему

$$\dot{\bar{y}} = 0, \quad \dot{y}_n = 1,$$

совпадающую с (5.6.22). Искомый диффеоморфизм есть композиция построенных выше диффеоморфизмов. Теорема доказана.

Глава VI

АНАЛИТИЧЕСКИЕ НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Аналитические функции нескольких переменных

В этом параграфе, следуя в основном гл. 1 книги *М. Эрве* «Функции многих комплексных переменных» (М., 1965), мы изложим основные положения теории аналитических функций многих комплексных переменных.

1. Аналитические функции. Пусть $u_{k_1}, ..., k_n$ — множество комплексных чисел с натуральными индексами $(n \geqslant 1)$. Символ

$$\sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{\infty} u_{k_1,\dots,k_n} \qquad (6.1.1)$$

называется n-кратным рядом. Если частичная сумма ряда

$$S_{k_1,\dots,k_n} = \sum_{l_1=1}^{k_1} \dots \sum_{l_n=1}^{k_n} u_{l_1,\dots,l_n}$$

стремится при $k_1 \to \infty, ..., k_n \to \infty$ к конечному пределу S, то говорят, что ряд (6.1.1) сходится к сумме S. В противном случае говорят, что ряд расходится. Если сходится ряд, составленный из модулей $u_{k_1,\dots,k_n}$, то ряд (6.1.1) называется абсолютно сходящимся.

Пусть даны точка $a=(a_1, ..., a_n)$ и числа $r_1>0, ..., r_n>0$. Область

$$P=\{x \in \mathbf{C}^n : |x_j - a_j| < r_j, \quad j=1,\dots, n\}$$

называется открытым поликругом с центром в точке a и радиусами $r_1, ..., r_n$. Соответственно замкнутым поликругом является множество

$$\overline{P}=\{x \in \mathbf{C}^n : |x_j - a_j| \leqslant r_j, \quad j=1,\dots, n\}.$$

Множество

$$\Gamma=\{x \in \mathbf{C}^n : |x_j - a_j| = r_j, \quad j=1,\dots, n\}$$

называется остовом поликруга P.

Лемма 6.1.1 (лемма Абеля). *Предположим, что степенной ряд*

$$\sum_{k_1,\dots,k_n \geqslant 0} a_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \qquad (6.1.2)$$

где $x \in \mathbf{C}^n$, *абсолютно** *сходится в точке* $b=(b_1, \ldots, b_n)$, *причем* $b_j \neq 0$ *при всех* $j=1, \ldots, n$. *Тогда:*

1) *ряд* (6.1.2) *сходится в каждой точке открытого поликруга* P *с центром в точке* $O \in \mathbf{C}^n$ *и радиусами* $|b_j|$;

2) *ряд* (6.1.2) *сходится равномерно на каждом компактном подмножестве поликруга* P.

Определение 6.1.1. *Функция* $f: U \to \mathbf{C}$ *называется аналитической (или голоморфной) в области* $U \subset \mathbf{C}^n$, *если для каждой точки* $b \in U$ *существуют открытый поликруг* $P \subset U$ *с центром в точке* b *и степенной ряд*

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n \geq 0} a_{k_1, \ldots, k_n} (x_1 - b_1)^{k_1} \ldots (x_n - b_n)^{k_n}, \tag{6.1.3}$$

сходящийся к функции $f(x)$ *в каждой точке.*

Теорема 6.1.1. *Пусть* $f_1, \ldots, f_m$ — *аналитические функции в области* $U \subset \mathbf{C}^n$ *и пусть при* $x \in U$ *точка* $(f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in V$, *где* V — *область пространства* $\mathbf{C}^m$. *Тогда если функция* g *аналитична в области* V, *то*

$$F(x) = g(f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

аналитична в области U.

Следствие. *Если* f *и* g — *аналитические функции в области* $U \subset \mathbf{C}^n$, *то функции* $f+g$, fg, f/g *(если* $g \neq 0$*) аналитичны в* U.

Теорема 6.1.2. *Пусть* f *аналитична в области* U. *Справедливы два утверждения:*

1) *для любых* $k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{N}_0$ *частные производные* $\dfrac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ *существуют и аналитичны в* U;

2) *пусть* $P \subset U$ — *открытый поликруг с центром в точке* $b \in U$ *и ряд* (6.1.3) *сходится к* $f(x)$ *в* P. *Тогда степенной ряд, полученный из* (6.1.3) *почленным дифференцированием* k_1 *раз по* x_1 ..., k_n *раз по* x_n, *сходится к* $\dfrac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ в P.

Следствие. *В* (6.1.3)

$$a_{k_1, \ldots, k_n} = \frac{1}{k_1! \ldots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} (b). \tag{6.1.4}$$

Тем самым ряд (6.1.3) *единственным образом определяется значениями* f *в любой окрестности точки* b. *Он называется рядом Тейлора функции* f *в точке* b.

Теорема 6.1.3 (принцип аналитического продолжения). *Пусть* f *и* g — *аналитические функции в области* $U \subset \mathbf{C}^n$ *и* $f=g$ *на*

---

* В этой главе рассматриваются только абсолютяо сходящиеся ряды. В дальнейшем слово «абсолютно» для краткости опускается.

некотором открытом подмножестве области U. Тогда $f=g$ всюду в U.

2. Интегральная формула Коши. Пусть $f(x)$ аналитична в поликруге P_1 с цетром в точке b и пусть $\bar{P}\subset P_1$ — замкнутый поликруг с центром в b и радиусами r_j, $j=1, \ldots, n$. Тогда для каждой точки открытого поликруга P имеем

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|y_n-b_n|=r_n} dy_n \ldots \int\limits_{|y_1-b_1|=r_1} \frac{f(y_1,\ldots,y_n)}{(y_1-x_1)\ldots(y_n-x_n)}\,dy_1, \qquad (6.1.5)$$

где интегрирование производится по окружностям $|y_j-b_j|=r_j$ с положительной ориентацией. Формула (6.1.5) вытекает из интегральной формулы Коши для функций одного комплексного переменного.

Следствие 1. *В указанных выше условиях ряд Тейлора* (6.1.3), (6.1.4) *для функции f сходится в P.*

Следовательно, если f аналитична в области $U\subset\mathbf{C}^n$, то ряд Тейлора для функции f в любой точке $b\in U$ сходится к f в любом поликруге с центром в b, содержащемся в U.

Действительно, подынтегральное выражение в (6.1.5) может быть разложено в ряд по степеням x_j-b_j, сходящийся в P. Его коэффициенты суть функции от y, определенные на остове Γ поликруга P. Поскольку f непрерывна, а следовательно, и ограничена на Γ, этот ряд, рассматриваемый как ряд из функций переменной y, равномерно сходится на Γ для каждой точки $x\in P$. Следовательно, его можно почленно интегрировать по окружностям $|y_j-b_j|=r_j$, $j=1,\ldots,n$. Получающийся в результате ряд по степеням x_j-b_j сходится к функции f в поликруге P. Теперь утверждение вытекает из следствия к теореме 6.1.2.

Следствие 2. (неравенства Коши). *В условиях следствия 1 в формуле* (6.1.3)

$$|a_{k_1,\ldots,k_n}| \leqslant \frac{1}{r_1^{k_1}\ldots r_n^{k_n}} \sup_{y\in\Gamma} |f(y)| . \qquad (6.1.6)$$

Неравенства (6.1.6) вытекают из (6.1.4) и (6.1.5).

Следствие 3 (оценки Коши). *Пусть $f(x)$ аналитична в области U и $|f(x)|<M$ в U. Если точка b принадлежит U вместе со своей r-окрестностью, то*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(b)\right| < \frac{M}{r}, \quad j=1,\ldots, n.$$

Требуемое неравенство вытекает из (6.1.4) и (6.1.6).

Следствие 4. *Если $f(t, x)$ непрерывна в области $(a, b)\times P_1$ и аналитична в P_1 при каждом $t\in(a, b)$, то $\int\limits_{t_0}^{t} f(s,x)\,ds$, $t_0, t\in(a, b)$, также аналитична в P_1.*

Действительно, так как $f(t, x)$ ограничена на каждом компактном подмножестве области $(a, b)\times P_1$, то в силу (6.1.6) ее ряд Тейлора, рассматриваемый как ряд из функций переменной t, сходится к $f(t, x)$ равномерно на $[\alpha, \beta]$ при каждом $x\in P$, где $[\alpha, \beta]\subset(a, b)$. Следовательно, его можно интегрировать по t, откуда и следует сделанное утверждение.

Теорема 6.1.4 (теорема Вейерштрасса). *Если последовательность $f_k(k\in\mathbf{N})$ функций, аналитических в области $U\subset\mathbf{C}^n$, равномерно сходится на каждом компактном подмножестве U, то:*

1) *предельная функция f аналитична в U;*

2) *для любой системы целых неотрицательных чисел $k_1, \ldots, k_n$ последовательность $\dfrac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f_k}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$ сходится к $\dfrac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$ в U; эта сходимость равномерна на каждом компактном подмножестве области U.*

Следствие. *Если ряд по степеням x_j-b_j, $j=1, \ldots, n$, сходится в открытом поликруге P с центром в b, то его сумма аналитична в P.*

3. Векторные и матричные аналитические функции.

Определение 6.1.2. *Аналитической m-мерной векторной функцией $f: U\to\mathbf{C}^m$ в области $U\subset\mathbf{C}^n$ называется отображение U в пространство $\mathbf{C}^m$, если координаты $f_1, \ldots, f_m$ являются аналитическими функциями в области U.*

Поскольку сходимость в $\mathbf{C}^m$ — покоординатная, утверждения п. 1, 2 в тех случаях, когда они имеют смысл при $m>1$ (лемма 6.1.1, теоремы 6.1.1—6.1.3, формула (6.1.5) и следствие 1 из нее, теорема 6.1.4 и следствие из нее), переносятся на случай $m>1$.

Теорема 6.1.5 (теорема о неявной функции). *Пусть $x\in\mathbf{C}^n$, $y\in\mathbf{C}^m$, $F(x, y): U\to\mathbf{C}^m$ — аналитическая в некоторой окрестности U точки (x_0, y_0) функция, причем*

$$\det\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\neq 0.$$

Тогда равенство $F(x, y)=F(x_0, y_0)$ определяет единственным образом функцию $y=f(x): V\to\mathbf{C}^m$, аналитическую в некоторой окрестности V точки x_0 и такую, что при $x\in V$ $(x, f(x))\in U$, $f(x_0)=y_0$ и $F(x, f(x))=F(x_0, y_0)$.

Следствие. *Пусть $g(y): W\to\mathbf{C}^n$ — аналитическая в некоторой окрестности точки $y_0\in\mathbf{C}^n$ функция, причем $\det\dfrac{\partial g}{\partial y}(y_0)\neq 0$. Тогда равенство $x=g(y)$ определяет единственным образом функцию $y=f(x): V\to\mathbf{C}^n$, аналитическую в некоторой окрестности V точки $x_0=g(y_0)$ и такую, что при $x\in V$ $f(x)\in W$ и $g(f(x))=x$.*

Функция f называется обратной по отношению к g. Легко видеть, что, в свою очередь, g является обратной по отношению к f.

Для доказательства следствия достаточно применить теорему 6.1.5 к функции $F(x, y)=x-g(y)$.

Определение 6.1.3. *Матричной аналитической функцией f: $U \to \mathfrak{M}^{n,m}$ в области $V \subset \mathbf{C}^p$ называется отображение области U в пространство $\mathfrak{M}^{n,m}$, если элементы f_{ij}, $i=1, \ldots, n$; $j=1, \ldots, m$, матрицы f являются аналитическими функциями в области U.*

4. Вещественные аналитические функции. Пусть $f: U \to \mathbf{C}^m$ аналитична в области $U \subset \mathbf{C}^n$, причем вместе с точкой x область U содержит комплексно-сопряженную точку $\bar{x}$, в частности U содержит точки пространства $\mathbf{R}^n$. Предположим, что справедлива формула

$$f(\bar{x})=\bar{f}(x). \tag{6.1.7}$$

Из (6.1.7) следует, что если $x \in \mathbf{R}^n$, то $f(x) \in \mathbf{R}^m$. В этом случае вещественную функцию $f: U \cap \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ называют вещественной аналитической функцией.

Дать определение аналитичности можно и для функции, определенной только в вещественной области. Именно, функцию f называют вещественной аналитической в области $V \subset \mathbf{R}^n$, если для каждой точки $b \in V$ существуют открытый поликруг $P \subset V$ с центром в точке b и степенной ряд (6.1.3) с вещественными коэффициентами, сходящийся к функции $f(x)$ в каждой точке $x \in P$.

Очевидно, что если выполнено первое определение, то выполнено и второе. Наоборот, если выполняется второе определение, то по лемме 6.1.1 и определению 6.1.1 функция $f(x)$, представляемая рядом (6.1.3), аналитична в некоторой комплексной окрестности U области V. Вместе с точкой x область U содержит и точку $\bar{x}$, причем выполняется (6.1.7), так как коэффициенты ряда (6.1.3) вещественны.

§ 2. Аналитичность решений по начальным данным и параметрам

1. Пусть G — область пространства $\mathbf{R}^{n+m+1}$. Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений, содержащую параметр:

$$\dot{x}=f(t, x, \mu), \; f: G \to \mathbf{R}^n, \tag{6.2.1}$$

где $t \in \mathbf{R}$ — время; $x \in \mathbf{R}^n$, $\mu \in \mathbf{R}^m$ — параметр. Будем предполагать, что для каждой точки $(t_0, x_0, \mu_0) \in G$ функция $f(t_0, x, \mu)$ является вещественной аналитической функцией переменной (x, μ) в некоторой окрестности точки (x_0, μ_0). Как всегда, будем предполагать также, что $f(t, x, \mu)$ непрерывна по совокупности переменных во всей комплексной области своего определения.

Поскольку аналитическая функция бесконечное число раз дифференцируема, по теореме 5.2.2 функция $x(t, t_0, x_0, \mu)$, представляющая решение дифференциального уравнения (6.2.1) с начальными данными (t_0, x_0), бесконечное число раз дифференцируема по x_0, μ в естественной области D своего задания:

$$D=\{(t, t_0, x_0, \mu): t\in I(t_0, x_0, \mu),\quad (t_0, x_0, \mu)\in G\},$$

где I — максимальный интервал существования решения $x(t, t_0, x_0, \mu)$.

Возникает вопрос об аналитичности решения $x(t, t_0, x_0, \mu)$ по x_0, μ.

Теорема 6.2.1. *При сделанных предположениях для любой точки $(\bar t, \bar t_0, \bar x_0, \bar\mu)\in D$ функция $x(\bar t, \bar t_0, x_0, \mu)$ вещественно-аналитична как функция x_0, μ в некоторой окрестности точки $\bar x_0$, $\bar\mu$.*

Теорему об аналитичности решения по начальным данным и параметрам часто формулируют в следующем виде, называемом *теоремой Пуанкаре о разложении.*

Теорема 6.2.1′. *Пусть выполнены сделанные предположения и дифференциальное уравнение*

$$\dot x=f(t, x, \mu_0)$$

имеет решение $\varphi:[a, b]\to\mathbf{R}^n$. Тогда существует $\delta^*>0$, такое, что функция $x(t, t_0, x_0, \mu)$ определена и непрерывна на множестве $[a, b]\times[a, b]\times V$, где

$$V=\{(x_0, \mu): \|x_0-\varphi(t_0)\|<\delta^*,\quad \|\mu-\mu_0\|<\delta^*\},$$

и при каждом t, $t_0\in[a, b]$ функция $x(t, t_0, x_0, \mu)$ является аналитической функцией переменной (x_0, μ) в поликруге V, т. е. она допускает в этом поликруге разложение в ряд

$$x(t, t_0, x_0, \mu)=\sum_{k_1,\ldots,k_n,\, l_1,\ldots,l_m} a_{k_1,\ldots,l_m}(t, t_0)(x_{10}-\varphi_1(t_0))^{k_1}\ldots$$

$$\ldots(x_{n0}-\varphi_n(t_0))^{k_n}(\mu_1-\mu_{10})^{l_1}\ldots(\mu_m-\mu_{m0})^{l_m} \qquad (6.2.2)$$

с непрерывными по t, $t_0\in[a, b]$ коэффициентами.

Теорема 6.2.1 вытекает из теоремы 6.2.1′. Для доказательства теоремы 6.2.1′ отметим, что в силу непрерывности $f(t, x, \mu)$ ограничена на замкнутом множестве

$$V_{2\Delta}=\{(t, x, \mu): t\in[a, b],\quad \|x-\varphi(t)\|\leqslant 2\Delta,\quad \|\mu-\mu_0\|\leqslant\Delta\},$$

если $\Delta>0$ достаточно мало. Из оценок Коши (см. следствие 3 в п. 2 § 1 гл. VI) следует, что на множестве

$$V_\Delta=\{(t, x, \mu): t\in[a, b],\quad \|x-\varphi(t)\|\leqslant\Delta,\quad \|\mu-\mu_0\|\leqslant\Delta\}$$

ограничена и производная $\partial f/\partial x$. По формуле (2.1.9), справедливой и для комплексных x, $f(t, x, \mu)$ удовлетворяет на V_Δ условию Липшица по x. Далее доказательство теоремы 6.2.1 дословно повторяет доказательство теоремы 5.1.1, если в лемме 5.1.1 к требованию непрерывности пикаровских приближений (5.1.5) как функций точки (t, t_0, x_0, μ) добавить требование их аналитичности по x_0, μ в V при каждом $t, t_0 \in [a, b]$ (что выполняется по теореме 6.1.1 и следствию 4 в п. 2 § 1) и воспользоваться теоремой 6.1.4 при предельном переходе.

Замечание. В равной степени теорема 6.2.1 справедлива и для комплекснозначной функции f в правой части (6.2.1) вещественного аргумента t и комплексных аргументов x и μ, если определение решения дифференциального уравнения распространить на комплексный случай, подобно тому, как это было сделано в гл. IV для линейных систем.

Частный случай. Пусть дифференциальное уравнение (6.2.1) — линейное:

$$\dot{x}=P(t, \mu)x+q(t, \mu), \tag{6.2.3}$$

где $P:(a, b)\times M \to \mathfrak{M}^{n,n}$, $q(t, \mu):(a, b)\times M \to \mathbf{C}^n$ — аналитические функции μ в области $M \subset \mathbf{C}^m$ при всех $t \in (a, b)$. Общее решение уравнения (6.2.3) имеет в силу (4.7.4) вид

$$x=\Phi(t, t_0, \mu)x_0+\psi(t, t_0, \mu),$$

где $\Phi(t, t_0, \mu)$ — нормированная при $t=t_0$ фундаментальная матрица однородного уравнения $\dot{x}=P(t, \mu)x$, $\psi(t, t_0, \mu)$ — решение уравнения (6.2.3) с начальными данными $(t_0, 0)$.

По теореме 6.2.1 функции $\Phi(t, t_0, \mu)$ и $\psi(t, t_0, \mu)$ аналитичны по μ в области M при всех $t, t_0 \in (a, b)$, так как любое решение линейного уравнения продолжимо на весь интервал (a, b). Следовательно, решения линейной системы с любыми начальными данными (t_0, x_0) аналитичны по параметру в той же области, что и коэффициенты правой части.

Теорему 6.2.1′ широко используют для построения решений дифференциальных уравнений.

Рассмотрим вещественную систему (6.2.1) при фиксированном значении параметра, т. е. систему

$$\dot{x}=f(t, x), \tag{6.2.4}$$

и предположим, что для каждого t функция $f(t, x)$ аналитична по x, т. е. что выполняются условия теоремы 6.2.1. Возьмем произвольную точку $\bar{t}_0$, $\bar{x}_0$ и построим в окрестности этой точки общее решение $x=\varphi(t, C)$ уравнения (6.2.4) в форме Коши (см. § 5 гл. V). Так как в этом случае роль C играет начальное значение x_0, то по теореме 6.2.1 функция $\varphi(t, C)$ является аналитической функцией C. Разрешая равенство $x=\varphi(t, C)$ относительно C, получим общий интеграл $C=U(t, x)$, где U аналитична по x.

Пусть теперь уравнение (6.2.4) автономно, т. е. $f(t, x)=f(x)$. По теореме 5.6.5 в некоторой окрестности V неособой точки $\bar{x}_0$ уравнение (6.2.4) имеет ровно $n-1$ независимых интегралов $U_1(x)$, ..., $U_{n-1}(x)$. В этих функциях одна из переменных x_i играет роль

t, следовательно, по остальным переменным U_k аналитичны. В § 4 настоящей главы будет показано, что из аналитичности $f(x)$ вытекает аналитичность решений по t. Поэтому $U_1, \ldots, U_{n-1}$ аналитичны и по x_i. Согласно теореме Гартогса из теории аналитических функций интегралы $U_1(x), \ldots, U_{n-1}(x)$ аналитичны в области V. Следовательно, «выпрямляющий» диффеоморфизм F из теоремы 5.6.6 в рассматриваемом случае является аналитическим.

§ 3. Метод малого параметра

Рассмотрим систему (6.2.1) в предположениях предыдущего параграфа. Будем считать, что размерность m пространства параметров равна единице и что параметр принимает значения из достаточно малой окрестности точки $\mu=0$. Таким образом,

$$G=H\times(-\varepsilon, \varepsilon),$$

где H — область $(n+1)$-мерного пространства t, x; $\varepsilon>0$ достаточно мало. Параметр μ в этом случае является малым параметром.

1. Разложение решения в ряд по степеням малого параметра. Пусть дана начальная точка $(t_0, x_0)\in H$. Будем искать решение $x(t, t_0, x_0, \mu)=x(t, \mu)$ уравнения (6.2.1) с этими начальными данными. Из тождества

$$\dot{x}(t, \mu)=f(t, x(t, \mu), \mu) \tag{6.3.1}$$

следует, что функция $x(t, 0)$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{x}=f(t, x, 0), \tag{6.3.2}$$

называемого *порождающим уравнением*. Согласно методу малого параметра на основании теоремы 6.2.1 решение $x(t, \mu)$ ищем в виде

$$x(t, \mu)=\sum_{k=0}^{\infty} C^{(k)}(t)\mu^k, \tag{6.3.3}$$

где $C^{(k)}(t)$ — векторные коэффициенты, подлежащие определению. Выполнение начальных условий приводит к соотношению

$$x_0=\sum_{k=0}^{\infty} C^{(k)}(t_0)\mu^k,$$

откуда получаем

$$C^{(0)}(t_0)=x_0, \quad C^{(k)}(t_0)=0 \quad (k\in \mathbf{N}). \tag{6.3.4}$$

Так как $C^{(0)}(t)=x(t,\ 0)$, то $C^{(0)}(t)$ — решение порождающего уравнения (6.3.2) с заданными начальными данными $(t_0,\ x_0)$. Пусть это решение определено при $t\in[a,\ b]$. Тогда по теореме 6.2.1′ ряд (6.3.3) сходится при каждом $t\in[a,\ b]$ при $\mu\in(-\varepsilon,\ \varepsilon)$, если ε достаточно мало.

По условию функцию $f(t,\ x,\ \mu)$ можно представить в виде ряда

$$f(t,\ x,\ \mu)=\sum_{k_1,\ldots,k_n,\ l>0} a^{(k_1,\ldots,k_n,\ l)}(t)\left(x_1-C_1^{(0)}(t)\right)^{k_1}\ldots\mu^l. \tag{6.3.5}$$

Подставляя (6.3.3) в (6.3.1), учитывая (6.3.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем

$$\dot{C}^{(k)}=g^{(k)}(C^{(0)},\ C^{(1)},\ldots,\ C^{(k)},\ t)\qquad (k\in\mathbf{N}),$$

причем в силу (6.3.4) $C^{(k)}(t_0)=0$. Если коэффициенты $C^{(0)}(t)$, $C^{(1)}(t)$, ... определять последовательно, то полученное уравнение примет вид

$$\dot{C}^{(k)}=F^{(k)}(t,\ C^{(k)}). \tag{6.3.6}$$

Таким образом, дело свелось к нахождению решений уравнений (6.3.6), аннулирующихся при $t=t_0$.

Для того чтобы уяснить характер зависимости $F^{(k)}$ от $C^{(k)}$, продифференцируем (6.3.1) k раз по μ. В результате получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^k x}{\partial\mu^k}\ (t,\ \mu)\right)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,\ x(t,\ \mu),\ \mu)\frac{\partial^k x}{\partial\mu^k}+$$

$$+h^{(k)}\left(t,\ x,\ \frac{\partial x}{\partial\mu},\ldots,\frac{\partial^{k-1}x}{\partial\mu^{k-1}},\ \mu\right).$$

Отсюда по формуле (6.1.4) имеем

$$\dot{C}^{(k)}=\frac{\partial f}{\partial x}(t,\ C^{(0)}(t),\ 0)C^{(k)}+p^{(k)}(t,\ C^{(0)},\ldots,\ C^{(k-1)}). \tag{6.3.7}$$

Таким образом, (6.3.6) — линейное неоднородное уравнение, определенное при $t\in[a,\ b]$, причем соответствующее однородное есть уравнение в вариациях относительно решения $C^{(0)}(t)$, порождающего уравнения (6.3.2). Вычислив достаточное число коэффициентов $C^{(k)}(t)$, получим приближенное решение $x(t,\ t_0,\ x_0,\ \mu)$ с любой степенью точности при малых μ.

Пример 6.3.1. Построим с точностью до $O(\mu^2)$ решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x}+3x=2\sin t+\mu\dot{x}^2, \tag{6.3.8}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0,\ \mu)=0,\quad \dot{x}(0,\ \mu)=1.$$

Так как рассматриваемое уравнение эквивалентно нормальной системе двух уравнений, в правой части которой вектор

$$f(t, x, \mu)=\begin{pmatrix} x_2 \\ 2\sin t - 3x_1 + \mu x_2^2 \end{pmatrix},$$

где $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, то искомое решение разлагается в ряд по степеням μ. Представляя $x(t, \mu)$ в виде

$$x(t, \mu)=\sum_{k=0}^{\infty} C^{(k)}(t)\mu^k,$$

подставляя это выражение в (6.3.8) и приравнивая последовательно свободный член и коэффициенты при степенях μ, μ^2 и т. д., получаем

$$\begin{aligned} &\ddot{C}^{(0)}+3C^{(0)}=2\sin t,\\ &\ddot{C}^{(1)}+3C^{(1)}=(C^{(0)})^2,\\ &\ddot{C}^{(2)}+3C^{(2)}=2\dot{C}^{(0)}\dot{C}^{(1)},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

Первое из уравнений (6.3.9) является порождающим. Решая его и учитывая начальное условие, находим $C^{(0)}=\sin t$. Тогда второе уравнение (6.3.9) принимает вид

$$\ddot{C}^{(1)}+3C^{(1)}=\cos^2 t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t.$$

Решая это уравнение с помощью формулы (3.4.17) и теоремы 3.4.1 с учетом нулевых начальных условий, найдем

$$C^{(1)}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{3}\cos\sqrt{3}t$$

(ср. с примером 5.2.3). Итак,

$$x(t, \mu)=\sin t+\mu\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{3}\cos\sqrt{3}t\right)+O(\mu^2).$$

Если найти решение с нулевыми начальными данными третьего из уравнений (6.3.9), то получим коэффициент разложения $x(t, \mu)$ при μ^2.

Пример 6.3.2. Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x}=P(t, \mu)x,$$

где $P:(a, b)\times(-\varepsilon, \varepsilon)\to\mathfrak{M}^{n,n}$ — аналитическая по μ функция при $|\mu|<\varepsilon$. Как отмечалось в предыдущем параграфе, нормированная при $t=t_0$ фундаментальная матрица $\Phi(t, t_0, \mu)$ аналитична по μ

при $|\mu|<\varepsilon$. Следовательно, ее можно разложить в сходящийся при $|\mu|<\varepsilon$ ряд

$$\Phi=\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_k(t,\ t_0)\mu^k.$$

Запишем уравнения для определения Φ_k. Пусть $P=\Sigma P_k\mu^k$. Имеем

$$\dot{\Phi}_0+\mu\dot{\Phi}_1+\ldots=(P_0+\mu P_1+\ldots)(\Phi_0+\mu\Phi_1+\ldots).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим

$$\dot{\Phi}_0=P_0\Phi_0, \tag{6.3.10}$$

$$\dot{\Phi}_1=P_0\Phi_1+P_1\Phi_0, \tag{6.3.11}$$

$$\dot{\Phi}_2=P_0\Phi_2+P_1\Phi_1+P_2\Phi_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

При $t=t_0$ $\Phi_0=E$, $\Phi_1=\Phi_2=\ldots=0$. Следовательно, Φ_0 — нормированная при $t=t_0$ фундаментальная матрица уравнения (6.3.10). Из (6.3.11), (4.7.8) и теоремы 4.7.1″ находим

$$\Phi_1=\Phi_0(t)\int_{t_0}^{t}\Phi_0^{-1}(s)P_1(s)\Phi_0(s)\,ds. \tag{6.3.12}$$

Остальные Φ_k определяются по аналогичным формулам.

Метод малого параметра может быть применен и к построению периодических решений квазилинейных уравнений в виде рядов по степеням μ. Эти решения были найдены в § 3 гл. V. Доказательство их существования было основано на том, что начальное значение x_0 такого решения, как функция малого параметра μ, определялось с помощью теоремы о неявной функции. В условиях § 3 гл. V $x_0(\mu)$ оказывалась непрерывно дифференцируемой функцией. Если же потребовать от правой части (5.3.1) аналитичность по $x_0\in H$ и $\mu\in(-\varepsilon,\ \varepsilon)$, то в силу теорем 6.2.1 и 6.1.5 функция $x_0(\mu)$ будет аналитической функцией μ. В этом случае периодическое решение $x(t,\ \mu)$ представляет собой ряд по степеням μ с периодическими коэффициентами, сходящийся в некоторой окрестности точки $\mu=0$. Теперь можно найти не только $\frac{\partial x}{\partial\mu}(t,\ 0)$, т. е. коэффициент разложения при μ, но и коэффициенты при более высоких степенях μ, что дает более точное представление искомого периодического решения.

Пример 6.3.3. Рассмотрим то же дифференциальное уравнение, что и в примере 6.3.1:

$$\ddot{x}+3x=2\sin t+\mu\dot{x}^2.$$

Но теперь будем искать не решение с определенными начальными данными, а периодическое решение периода 2π, которое существует согласно следствию из теоремы 5.3.1. Построим это решение, используя его аналитичность по μ, с точностью до $O(\mu^3)$.

Порождающее уравнение

$$\ddot{x}+3x=2\sin t$$

имеет единственное периодическое решение $\bar{x}(t)=\sin t$. Подставляя выражение

$$x(t,\mu)=\sin t+\sum_{k=1}^{\infty} C_k(t)\mu^k$$

в рассматриваемое уравнение и приравнивая коэффициенты при μ, находим

$$\ddot{C}_1+3C_1=\cos^2 t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t.$$

Методом неопределенных коэффициентов по теореме 3.4.1 находим периодическое решение

$$C_1(t)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cos 2t.$$

Далее, приравнивая коэффициенты при μ^2, получаем уравнение для определения $C_2(t)$:

$$\ddot{C}_2+3C_2=2\dot{\bar{x}}\dot{C}_1=2\cos t\sin 2t=\sin t+\sin 3t.$$

Отсюда

$$C_2(t)=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{6}\sin 3t.$$

Окончательно имеем

$$x(t,\mu)=\sin t+\mu\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)+\mu^2\left(\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{6}\sin 3t\right)+O(\mu^3).$$

Замечание. Фактически при вычислении конечного числа коэффициентов разложения решений по степеням μ мы используем не аналитичность правой части уравнения, а лишь существование производных до определенного порядка (см. теорему 5.2.2). Предположение аналитичности позволяет не ограничивать заранее число коэффициентов в разложении решения, которые могут быть найдены. Кроме того, аналитичность гарантирует сходимость ряда.

2. Проблема центра и фокуса. Метод малого параметра можно применять для построения решений аналитических систем дифференциальных уравнений и при отсутствии параметра в системе.

В этом случае роль параметра играет начальное значение решения.

Продолжим рассмотрение двумерной системы (5.4.2):

$$\dot{x}=Ax+X(x). \tag{6.3.13}$$

Предположим, что собственные числа матрицы A чисто мнимые, равные $\pm i\beta$, $\beta>0$, а функция $X(x)$ является вещественной аналитической в ε-окрестности точки $x=0$. Совместно с условием (5.4.3) это означает, что

$$X_j=\sum_{k_1+k_2=2}^{\infty} X_j^{(k_1,k_2)}x_1^{k_1}x_2^{k_2},\ j=1,2.$$

Было показано, что траектории системы (6.3.13) совпадают с точностью до аффинного преобразования (4.5.18) с интегральными кривыми дифференциального уравнения (5.4.9), т. е. уравнения (поскольку $\alpha=0$)

$$\frac{dr}{d\varphi}=P(r,\ \varphi), \tag{6.3.14}$$

где ряд

$$P(r,\ \varphi)=\sum_{k=2}^{\infty} P_k(\varphi)r^k$$

сходится при всех $\varphi\in\mathbf{R}$ в круге $|r|<\varepsilon$, его коэффициенты $P_k(\varphi)$ — непрерывные 2π-периодические функции (нетрудно убедиться, что они представляют собой полиномы от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$).

Поведение интегральных кривых уравнения (6.3.14) определяется функцией последования

$$g(r_0)=r(2\pi,\ r_0),$$

где $r(\varphi,\ r_0)$ — решение (6.3.14), определяемое начальным условием $r(0,\ r_0)=r_0$. Из теоремы 6.2.1 следует, что функция $r(\varphi,\ r_0)$ при каждом $\varphi\in[0,\ 2\pi]$ аналитична по r_0 в δ^*-окрестности точки $r_0=0$ при некотором $\delta^*>0$, не зависящем от $\varphi\in[0,\ 2\pi]$. Так как $r(\varphi,\ 0)\equiv 0$, то

$$r(\varphi,\ r_0)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\varphi)r_0^k, \tag{6.3.15}$$

где ряд (6.3.15) сходится при $|r_0|<\delta^*$, $\varphi\in[0,\ 2\pi]$. Следовательно,

$$g(r_0)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k r_0^k,$$

где $g_k=a_k(2\pi)$. Начальное условие дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(0)r_0^k=r_0.$$

Следовательно,

$$a_1(0)=1,\ a_k(0)=0 \quad (k=2, 3,\ldots). \tag{6.3.16}$$

Покажем, что с помощью метода неопределенных коэффициентов можно последовательно определить все коэффициенты $a_k(\varphi)$, а значит, и коэффициенты g_k. Подставляя (6.3.15) в (6.3.14), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k'(\varphi) r_0^k = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\varphi)\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_l(\varphi) r_0^l\right)^k.$$

Приравниваем здесь коэффициенты при $r_0 : a_1'(\varphi)=0$. Из (6.3.16) заключаем, что $a_1=1$. Далее, приравнивая коэффициенты при r_0^k, $k=2, 3, \ldots$, получаем

$$a_k' = F_k(a_j(\varphi),\ P_i(\varphi)) \quad (j=1,\ldots, k-1;\ i=2,\ldots, k),$$

где F_k — известный полином с целыми положительными коэффициентами. Отсюда и из (6.3.16) имеем

$$a_k(\varphi)=\int_0^{\varphi} F_k(a_j(s),\ P_i(s))\,ds.$$

Следовательно,

$$g_1=1, \quad g_k=\int_0^{2\pi} F_k(a_j(\varphi),\ P_i(\varphi))\,d\varphi \quad (k=2, 3,\ldots).$$

Нетрудно убедиться, что $g_2=0$. Действительно, $F_2=P_2(\varphi)$, а $P_2(\varphi)$ имеет среднее значение, равное нулю, так как представляет собой однородный полином от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ степени 3. Итак,

$$g(r_0)=r_0+\sum_{k=3}^{\infty} g_k r_0^k. \tag{6.3.17}$$

Пусть g_l — первый среди отличных от нуля коэффициентов g_k в (6.3.17). Если $g_l<0$, а r_0 достаточно мало, то

$$r_0-g(r_0)=-\sum_{k=l}^{\infty} g_k r_0^k > -\frac{1}{2} g_l r_0^l,$$

или

$$g(r_0)<\left(1+\frac{1}{2} g_l r_0^{l-1}\right) r_0.$$

Таким образом, последовательные пересечения интегральными кривыми полуоси $\varphi=0$ приближаются при возрастании полярного угла к точке $r=0$. Траектории образуют *устойчивый фокус* (см.

рис. 11). Аналогично, если $g_l>0$, то получаем предыдущую картину при замене φ на $-\varphi$. Следовательно, имеет место *неустойчивый фокус* (см. рис. 12). Если же все g_k в (6.3.17) равны нулю, то $g(r_0)\equiv r_0$. Это означает, что все интегральные кривые замкнуты, т. е. получаем *центр* (см. рис. 13).

Таким образом, мы доказали, что траектории системы (6.3.13) образуют либо фокус, либо центр. Задача различения этих двух случаев с помощью конечного числа действий над коэффициентами разложений функций X_1 и X_2 называется проблемой центра и фокуса.

Пример 6.3.4. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1=x_1+x_2,$$

$$\dot{x}_2=-2x_1-x_2-x_1^2x_2-x_1^3.$$

Собственные числа матрицы коэффициентов линейной части системы являются корнями уравнения $(1-\lambda)(-1-\lambda)+2=0$, т. е. $\lambda_{1,2}=\pm i$. Собственные векторы находим из соотношений $s^2=\overline{s^1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1^1 \\ s_2^1 \end{pmatrix}=i\begin{pmatrix} s_1^1 \\ s_2^1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$s^1=\begin{pmatrix} \frac{1}{i-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s^2=\begin{pmatrix} \frac{-1}{i+1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица Q преобразования (4.5.18) имеет вид

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{i-1} & \frac{-1}{i+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем замену (4.5.18):

$$x_1=-z_1+z_2, \quad x_2=2z_1$$

и ей обратную:

$$z_1=\frac{1}{2}x_2, \quad z_2=x_1+\frac{1}{2}x_2.$$

Выполняя замену, получаем систему

$$\dot{z}_1=\frac{1}{2}(-2x_1-x_2-x_1^2x_2-x_1^3)=-z_2-\frac{1}{2}(z_1-z_2)^2(z_1+z_2),$$

$$\dot{z}_2=x_1+x_2+\dot{z}_1=z_1-\frac{1}{2}(z_1-z_2)^2(z_1+z_2).$$

Переходим к полярным координатам $z_1 = r\cos\varphi$, $z_2 = r\sin\varphi$, $r \geqslant 0$. Имеем

$$\dot r = -\frac{1}{2} r^3 (\cos\varphi - \sin\varphi)^2 (\cos\varphi + \sin\varphi)^2,$$

$$\dot\varphi = 1 - \frac{1}{2} r^2 (\cos\varphi - \sin\varphi)^3 (\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Исключаем t:

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{2} r^3 \cos^2 2\varphi + O(r^5).$$

Записывая решение в виде

$$r(\varphi, r_0) = r_0 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(\varphi) r_0^k,$$

из предыдущего находим

$$a_2'(\varphi) = 0 \Rightarrow a_2(\varphi) = 0 \Rightarrow g_2 = 0,$$

$$a_3'(\varphi) = -\frac{1}{2}\cos^2 2\varphi \Rightarrow g_3 = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 2\varphi\, d\varphi < 0.$$

Следовательно, в окрестности начала координат траектории образуют устойчивый фокус.

3. **Бифуркация периодического решения.** Соединяя проблемы, рассмотренные в п. 1 и 2, рассмотрим уравнение, зависящее от малого параметра, для которого порождающим является уравнение (6.3.13):

$$\dot x = Ax + X(x) + \mu F(x, \mu). \qquad (6.3.18)$$

Поскольку в (6.3.13) $\det A \neq 0$, уравнение

$$Ax + X(x) + \mu F(x, \mu) = 0$$

в точке $x = 0$, $\mu = 0$ удовлетворяет условию теоремы 6.1.5 о неявной функции. Поэтому (6.3.18) имеет положение равновесия $x = \psi(\mu)$. Покажем, что если у порождающего уравнения имеет место фокус, то при $\mu \neq 0$ определенного знака уравнение (6.3.18) кроме положения равновесия $\psi(\mu)$ имеет и периодическое решение. Такое явление называется *бифуркацией* периодического решения.

Если в (6.3.18) x заменить на $\sqrt{|\mu|}\,x$, то получим систему вида

$$\dot x = Ax + \sqrt{|\mu|}\, h(x, \sqrt{|\mu|}),$$

которая является автономной квазилинейной системой относительно параметра $\sqrt{|\mu|}$. Ее можно исследовать методом, описанным в п. 3 § 3 гл. V. Однако мы используем другой подход, основанный на исследовании функции последования у порождающего уравнения. При таком подходе лучше используется специфика рассматриваемой задачи.

Прежде всего поместим начало координат в точку $x=\psi(\mu)$, т. е. сделаем замену $y=x-\psi(\mu)$. В результате, используя формулу Тейлора (2.1.10), получим систему

$$\dot{y}=B(\mu)\,y+Y(y,\mu), \tag{6.3.19}$$

где $B(\mu)=A+\frac{\partial X}{\partial x}(\psi)+\mu\frac{\partial F}{\partial x}(\psi,\mu)$; $B(\mu)$ — аналитическая при достаточно малых μ матричная функция. Так как $B(0)=A$, то ее собственные числа — $\alpha(\mu)\pm i\beta(\mu)$, $\alpha(0)=0$, $\beta(0)>0$. Функция $Y(y,\mu)$ аналитична в окрестности точки $y=0$, $\mu=0$ и удовлетворяет условию

$$Y(0,\mu)=0, \quad \frac{\partial Y}{\partial y}(0,\mu)=0,$$

т. е. разложения координатных функций по степеням y_1, y_2 начинаются с членов, не ниже второго порядка. Собственные числа матрицы $B(\mu)$ аналитичны по μ в окрестности точки $\mu=0$. Действительно, они определяются формулой

$$\alpha(\mu)\pm i\beta(\mu)=\frac{1}{2}\left(B_{11}+B_{22}\pm\sqrt{(B_{11}-B_{22})^2+4B_{12}B_{21}}\right),$$

где B_{kj} — аналитические функции. При $\mu=0$, поскольку $\beta(0)>0$, подкоренное выражение отлично от нуля, откуда и вытекает сделанное утверждение.

При $\mu=0$ имеем $y=x$. Следовательно, для (6.3.19) порождающим остается уравнение (6.3.13). Оно исследовано в п. 2, где было показано, что поведение его траекторий определяется функцией последования

$$g(r_0)=r_0+\sum_{k=3}^{\infty}g_k r_0^k. \tag{6.3.20}$$

Пусть $s^1(\mu)$ и $s^2(\mu)$ — собственные векторы $B(\mu)$. Легко видеть, что $s^1(\mu)$ и $s^2(\mu)$ аналитичны в окрестности $\mu=0$. Замена

$$y=Q(\mu)\,z, \tag{6.3.21}$$

где

$$Q=(s^1\,s^2)\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix},$$

а затем переход к полярным координатам преобразует (6.3.19), как было показано в § 4 гл. V, в систему

$$\dot{r} = \alpha(\mu) r + R(r, \varphi, \mu),$$
$$\dot{\varphi} = \beta(\mu) + \Phi(r, \varphi, \mu), \tag{6.3.22}$$

где функции R, Φ аналитичны при каждом φ по r, μ в некоторой окрестности точки $r=0$, $\mu=0$, непрерывны и 2π-периодичны по φ, причем

$$R(0, \varphi, \mu) = \Phi(0, \varphi, \mu) = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial r}(0, \varphi, \mu) = 0.$$

Траектории системы (6.3.22) при достаточно малых r, μ совпадают с интегральными кривыми дифференциального уравнения

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{d(\mu)}{\beta(\mu)} r + P(r, \varphi, \mu), \tag{6.3.23}$$

полученного из (6.3.22) исключением t. В уравнении (6.3.23) функция $P(r, \varphi, \mu)$ обладает теми же свойствами, что и $R(r, \varphi, \mu)$ в (6.3.22). Так как уравнение (6.3.23) имеет тривиальное решение $r=0$, то по теореме 6.2.1′ решение $r(\varphi, r_0, \mu)$ уравнения (6.3.23), определенное начальными условиями $r(0, r_0, \mu) = r_0$, аналитично по r_0, μ при $|r_0| < \delta^*$, $|\mu| < \delta^*$ для каждого $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Теперь можно определить функцию последования

$$f(r_0, \mu) = r(2\pi, r_0, \mu),$$

аналитическую при $|r_0| < \delta^*$, $|\mu| < \delta^*$. Для того чтобы траектория системы (6.3.22), проходящая через точку $\varphi=0$, $r=r_0$, была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы

$$h(r_0, \mu) = f(r_0, \mu) - r_0 = 0. \tag{6.3.24}$$

Поэтому вопрос существования периодических решений системы (6.3.22) сводится к вопросу существования нулей функции $h(r_0, \mu)$.

Уравнение (6.3.24) называется *бифуркационным уравнением*. Исследуем его подробнее. Пусть

$$f(r_0, \mu) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\mu) r_0^k.$$

В силу (5.4.11)

$$\frac{\partial f}{\partial r}(0, \mu) = f_1(\mu) = \exp\left\{\frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)} 2\pi\right\}.$$

В п. 2 показано, что $f_2(0)=0$. Отсюда, учитывая $\alpha(0)=0$, получаем

$$h(r_0,\mu)=\frac{\alpha'(0)}{\beta(0)}2\pi r_0\mu+\sum_{k=3}^{\infty}g_k r_0^k+r_0\mu^2 G_1(r_0,\mu)+r_0^2\mu G_2(r_0,\mu), \tag{6.3.25}$$

где G_1, G_2 — аналитические функции в области $|r_0|<\delta^*$, $|\mu|<\delta^*$. После сокращения на r_0 бифуркационное уравнение (6.3.24) принимает вид

$$H(r_0,\mu)=\frac{\alpha'(0)}{\beta(0)}2\pi\mu+\sum_{k=3}^{\infty}g_k r_0^{k-1}+\mu^2 G_1+r_0\mu G_2=0. \tag{6.3.26}$$

Предположим, что $\alpha'(0)\neq 0$. Тогда

$$H(0,0)=0,\quad \frac{\partial H}{\partial\mu}(0,0)=\frac{\alpha'(0)}{\beta(0)}2\pi\neq 0.$$

По теореме 6.1.5 уравнение (6.3.26) имеет единственное решение

$$\mu=\gamma(r_0),\quad \gamma(0)=0,$$

аналитическое в некоторой окрестности точки $r_0=0$.

Если в разложении функции (6.3.20) все коэффициенты g_k, $k=3, 4, \ldots$, равны нулю, то в силу (6.3.26) $\gamma(r_0)\equiv 0$. В этом случае траектории порождающего уравнения образуют центр и бифуркации периодических решений при ненулевых значениях параметра не происходит.

Если же не все коэффициенты g_k равны нулю, т. е.

$$g(r_0)=r_0+\sum_{k=l}^{\infty}g_k r_0^k,\quad g_l\neq 0,$$

то из (6.3.26) находим

$$\gamma(r_0)=-\frac{g_l\beta(0)}{2\pi\alpha'(0)}r_0^{l-1}+\sum_{k=l}^{\infty}\gamma_k r_0^k. \tag{6.3.27}$$

Отметим, что поскольку $r_0>0$, из (6.3.27) следует, что бифуркация происходит при значениях параметра, знак которых совпадает со знаком величины $-g_l\alpha'(0)$. Таким образом, бифуркация имеет место, когда устойчивый при $\mu=0$ фокус превращается при $\mu\neq 0$ в неустойчивый, и наоборот.

Модель такой ситуации дает пример 2.6.1. В системе (2.6.6) при $\mu\leqslant 0$ имеет место неустойчивый фокус, а при $\mu>0$ — устойчивый фокус. Следовательно, бифуркация происходит при переходе параметра μ с отрицательных значений на положительные (рис. 15).

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 6.3.1. *Пусть уравнение* (6.3.18) *удовлетворяет сделанным предположениям,* $\alpha(0)=0$, $\alpha'(0)\neq 0$, *и в порождающем уравнении* (6.3.13) *траектории образуют фокус. Тогда существует функция* $\gamma(r_0)$, *аналитическая и не равная тождественно нулю при* $|r_0|<\delta$, $\delta>0$, *такая, что при* $\mu=\gamma(r_0)$ *система* (6.3.22) *имеет в достаточно малой окрестности начала координат замкнутую траекторию, проходящую через точку* $\varphi=0$, $r=r_0$.

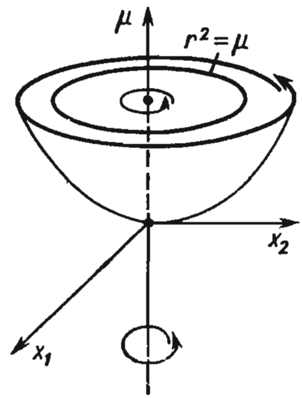

Рис. 15

Замечание. При $l>3$ в сколь угодно малой окрестности начала координат, если $|\mu|$ достаточно мало, могут существовать замкнутые траектории, отличные от найденной в теореме 6.3.1.

Как отмечалось в § 4 гл. V, изолированная замкнутая траектория реализуется на практике только в том случае, когда она является устойчивым предельным циклом. Поэтому важно установить, когда возникающая при изменении μ замкнутая траектория является устойчивым предельным циклом.

Теорема 6.3.2. *Если для порождающего уравнения имеет место устойчивый фокус, то замкнутая траектория, существование которой утверждается в теореме* 6.3.1, *является устойчивым предельным циклом.*

Доказательство. Зафиксируем $0<\bar r_0<\delta$ и $\bar\mu=\gamma(\bar r_0)$. Обозначим через Γ замкнутую траекторию системы (6.3.22) с $\mu=\bar\mu$, проходящую через точку $\varphi=0$, $r=\bar r_0$. Функция $\tilde f(\rho)=f(\rho+\bar r_0, \bar\mu)$ является функцией последования (см. § 4 гл. V) для траектории Γ. Как показано при доказательстве теоремы 5.4.1, для того чтобы Γ была устойчивым предельным циклом, достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\frac{\partial\tilde f}{\partial\rho}(0)<1$, что в силу (6.3.24) эквивалентно неравенству

$$\frac{\partial h}{\partial r_0}(\bar r_0,\bar\mu)<0. \tag{6.3.28}$$

Из (6.3.25) имеем

$$\frac{\partial h}{\partial r_0}(r_0,\mu)=\frac{\alpha'(0)}{\beta(0)}2\pi\mu+\sum_{k=l}^{\infty}kg_k r_0^{k-1}+\mu^2G_1+r_0\mu^2\frac{\partial G_1}{\partial r_0}+$$
$$+2r_0\mu G_2+r_0^2\mu\frac{\partial G_2}{\partial r_0}.$$

По формуле (6.3.27) положим здесь $r=\bar{r}_0$, $\bar{\mu}=\gamma(\bar{r}_0)$. Тогда получим

$$\frac{\partial h}{\partial r_0}(\bar{r}_0, \bar{\mu})=(l-1)\, g_l \bar{r}_0^{l-1}+F(\bar{r}_0), \tag{6.3.29}$$

где разложение F по степеням $\bar{r}_0$ начинается с членов порядка не ниже l. Так как $l \geqslant 3$, а по условию теоремы $g_l<0$, то в силу (6.3.29) неравенство (6.3.28) выполняется. Теорема доказана.

Пример 6.3.5. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1&=x_1+x_2, \\ \dot{x}_2&=-x_1^3-x_1^2 x_2+(\mu-2)\, x_1+(\mu-1)\, x_2. \end{aligned} \tag{6.3.30}$$

Собственные числа матрицы

$$B(\mu)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu-2 & \mu-1 \end{pmatrix}$$

суть $\frac{1}{2}(\mu \pm i\sqrt{4-\mu^2})$. Поэтому при $|\mu|<2$ они комплексные, причем $\beta(0)=1$, $\alpha(0)=0$, $\alpha'(0)=1/2$. Порождающая система совпадает с системой, рассмотренной в примере 6.3.4. Там было показано, что $g_3<0$, т. е. для порождающей системы имеет место устойчивый фокус. Следовательно, выполнены условия теорем 6.3.1 и 6.3.2. На основании этих теорем заключаем, что при каждом достаточно малом положительном значении параметра система (6.3.30) имеет единственное периодическое решение, которому соответствует устойчивый предельный цикл.

§ 4. Аналитичность решений как функций независимой переменной

Начиная с этого параграфа будем предполагать, что t — комплексная переменная: $t \in \mathbf{C}$. Для того чтобы подчеркнуть это обстоятельство, изменим обозначения переменных, т. е. будем рассматривать нормальную систему дифференциальных уравнений в векторной форме

$$\frac{dw}{dz}=f(z, w) \quad (z \in \mathbf{C},\ w \in \mathbf{C}^n) \tag{6.4.1}$$

и предполагать, что $f: G \to \mathbf{C}^n$ — аналитическая функция переменных z, w в области $G \subset \mathbf{C}^{n+1}$. Пусть $I \subset G$ — область.

Определение. 6.4.1. *Функция $\varphi: I \to \mathbf{C}^n$ называется решением дифференциального уравнения* (6.4.1) *в области I, если выполняются следующие условия:*

1) $\varphi(z)$ *аналитична в области* I,

2) $(z, \varphi(z))\in G$ *при всех* $z\in I$,

3) $\dfrac{d\varphi}{dz}=f(z,\varphi(z))$ *при всех* $z\in I$.

Задача Коши для уравнения (6.4.1) ставится обычным образом: пусть $(z_0, w_0)\in G$, требуется найти решение $\varphi(z)$ уравнения (6.4.1), определенное в некоторой окрестности точки z_0 и удовлетворяющее начальному условию $\varphi(z_0)=w_0$.

Вопросы существования и единственности решения задачи Коши можно решить с помощью метода последовательных приближений Пикара, подобно тому, как это делается в § 3 гл. II в вещественном случае. Дадим другое доказательство теоремы существования и единственности для аналитических систем дифференциальных уравнений, основанное на так называемом *методе Коши.*

Теорема 6.4.1 (теорема Коши). *Пусть* $(z_0, w_0)\in G$. *Тогда существует единственное решение задачи Коши с начальными данными* (z_0, w_0).

Доказательство. Выбираем в качестве новых переменных

$$\tilde{z}=z-z_0,\quad \tilde{w}=w-w_0. \tag{6.4.2}$$

Тогда придем к случаю, когда в задаче Коши начальная точка является началом координат в $\mathbf{C}^{n+1}$. Поэтому, не нарушая общности, можем считать, что $z_0=0$, $w_0=0$ и $f(z, w)$ аналитична в окрестности начала координат.

Решение, удовлетворяющее начальному условию, будем искать в виде ряда

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c^{(k)}z^k, \tag{6.4.3}$$

где $c^{(k)}\in\mathbf{C}^n$ — коэффициенты, подлежащие определению из условия, что $\varphi(z)$ — решение уравнения (6.4.1) (начальное условие учтено, так как в ряде (6.4.3) $c^{(0)}=0$).

В силу аналитичности f

$$f(z,w)=\sum_{k,l_1,\ldots,l_n\geqslant 0} a^{(kl_1,\ldots,l_n)}z^k w_1^{l_1}\ldots w_n^{l_n}, \tag{6.4.4}$$

причем ряд в правой части равенства сходится в некотором поликруге с центром в начале координат. Подставляя (6.4.3) в (6.4.1), учитывая (6.4.4), получим покоординатно

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,c_\nu^{(k+1)}z^k=\sum_{l,j_1,\ldots,j_n\geqslant 0} a_\nu^{(l,j_1,\ldots,j_n)}z^{l+j_1+\ldots+j_n}\times$$

$$\times\left(\sum_{m=1}^{\infty} c_1^{(m)}z^{m-1}\right)^{j_1}\ldots\left(\sum_{m=1}^{\infty} c_n^{(m)}z^{m-1}\right)^{j_n}.$$

Полагая $k=0$, найдем

$$c_\nu^{(1)}=a_\nu^{(0,\dots,0)}, \quad \nu=1,\dots,n.$$

Предположим, что коэффициенты $c_\nu^{(m)}$ при $1\leqslant m\leqslant k$ определены. Приравняем коэффициенты при z^k:

$$(k+1)\,c_\nu^{(k+1)}=P_\nu^{(k)}\left(c^{(m)}, a^{(l,j_1,\dots,j_n)}\right), \quad \nu=1,\dots n, \tag{6.4.5}$$

где $P_\nu^{(k)}$ — коэффициент при z^k в разложении по степеням z функции $f_\nu(z, \varphi_1(z),\dots,\varphi_n(z))$. Очевидно, что $P_\nu^{(k)}$ — полином от координат векторов — коэффициентов рядов (6.4.3) и (6.4.4) с целыми неотрицательными коэффициентами, причем в (6.4.5)

$$1\leqslant m\leqslant k, \quad 0< i+j_1+\dots+j_n\leqslant k. \tag{6.4.6}$$

Таким образом, из уравнений (6.4.5) все коэффициенты $c_\nu^{(k)}$ определяются единственным образом последовательно с возрастанием k. Ряд (6.4.3), коэффициенты которого удовлетворяют соотношениям (6.4.5), называется формальным решением уравнения (6.4.1). Если мы докажем сходимость ряда (6.4.3) в некоторой окрестности точки $z_0=0$, то в этой окрестности $\varphi(z)$ — решение уравнения (6.4.1), если, конечно, выполняется условие 2) определения 6.4.1. Из (6.4.5), поскольку коэффициенты полиномов неотрицательны, имеем

$$\left|c_\nu^{(k+1)}\right|\leqslant P_\nu^{(k)}\left(\left|c^{(m)}\right|, \left|a^{(l,j_1,\dots,j_n)}\right|\right), \quad \nu=1,\dots,n, \tag{6.4.7}$$

где $|\,a\,|$ означает вектор, координаты которого — модули координат вектора a. Рассмотрим степенные ряды (пока формальные, так как об их сходимости ничего неизвестно):

$$\hat{\varphi}_\nu(z)=\sum_{1}^{\infty}\left|c_\nu^{(k)}\right|z^k, \quad \nu=1,\dots,n. \tag{6.4.8}$$

Рассмотрим также ряды

$$\hat{f}_\nu(z, w)=\sum_{k\ l_1,\dots,l_n\geqslant 0}\left|a_\nu^{(k,l_1,\dots,l_n)}\right| z^k w_1^{l_1}\dots w_n^{l_n}, \quad \nu=1,\dots,n. \tag{6.4.9}$$

Ряды (6.4.9) сходятся в том же поликруге, что и разложение (6.4.4), так как по лемме Абеля 6.4.1 степенной ряд абсолютно сходится внутри поликруга сходимости. Следовательно, $\hat{f}(z, w)$ аналитична в том же поликруге, что и $f(z, w)$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\Phi(z,\psi)=0, \tag{6.4.10}$$

где

$$\Phi_\nu(z,\psi)=\psi_\nu-z\hat{f}_\nu(z,\psi), \quad \nu=1,\dots,n. \tag{6.4.11}$$

Функция $\Phi(z, \psi)$ аналитична в окрестности точки $z=0$, $\psi=0$, $\Phi(0, 0)=0$ и

$$\det \frac{\partial \Phi}{\partial \psi}(0,0)=1.$$

По теореме 6.1.5 о неявной функции уравнение (6.4.10) имеет единственное решение $\psi(z)$, аналитическое в некоторой окрестности точки $z=0$ и такое, что $\psi(0)=0$. Если обозначить

$$\psi_\nu(z)=\sum_1^\infty b_\nu^{(k)} z^k, \quad \nu=1, \ldots, n, \tag{6.4.12}$$

то, приравнивая в (6.4.11) коэффициенты при z^{k+1} нулю, получим

$$b_\nu^{(k+1)}=P_\nu^{(k)}\left(b^{(m)}, \left|a^{(l, j_1, \ldots, j_n)}\right|\right), \quad \nu=1, \ldots, n,$$

согласно определению $P_\nu^{(k)}$. Покажем, что

$$\left|c_\nu^{(k)}\right| \leqslant b_\nu^{(k)}, \quad \nu=1, \ldots, n. \tag{6.4.13}$$

Неравенство (6.4.13) докажем по индукции. При $k=1$

$$\left|c_\nu^{(1)}\right|=\left|a_\nu^{(0, \ldots, 0)}\right|=b_\nu^{(1)}, \quad \nu=1, \ldots, n.$$

Предположим теперь, что (6.4.13) выполняется для $c_\nu^{(m)}$ при $1 \leqslant m \leqslant k$. Из (6.4.6)—(6.4.11) следует

$$\left|c_\nu^{(k+1)}\right| \leqslant P_\nu^{(k)}\left(\left|c^{(m)}\right|, \left|a^{l, j_1, \ldots, j_n}\right|\right) \leqslant P_\nu^{(k)}\left(b^{(m)}, \left|a^{(l, j_1, \ldots, j_n)}\right|\right)=b_\nu^{(k+1)},$$
$$\nu=1, \ldots, n.$$

Тем самым (6.4.13) доказано.

Так как ряды (6.4.12) сходятся, то в том же круге сходятся и ряды (6.4.8), а значит, и ряд (6.4.3). Следовательно, $\varphi(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки $z_0=0$. По построению $\varphi(z)$ является решением уравнения (6.4.1). А так как коэффициенты ее разложения в ряд Тейлора определяются формулами (6.4.5) однозначно, то это решение единственно. Теорема доказана.

Замечание 1. Доказательство теоремы 6.4.1 сохраняет силу, если вместо $\hat{f}_\nu(z, w)$, определяемых посредством (6.4.9), положить

$$\hat{f}_\nu(z, w)=\sum_{k, l_1, \ldots, l_n \geqslant 0} d_\nu^{(k, l_1, \ldots, l_n)} z^k w_1^{l_1} \ldots w_n^{l_n},$$

где $\left|a_\nu^{(k, l_1, \ldots, l_n)}\right| \leqslant d_\nu^{(k, l_1, \ldots, l_n)}$ и ряд $\hat{f}_\nu$ сходится в некотором поликруге с центром в нулевой точке.

Замечание 2. Пусть, в частности, (6.4.1) — линейное уравнение

$$\frac{dw}{dz}=P(z) w+q(z), \tag{6.4.14}$$

где $P: I \to \mathfrak{M}^{n,n}$, $q: I \to \mathbf{C}^n$ — аналитические в области $I \subset \mathbf{C}$ функции. Пусть K — множество, содержащееся в области I вместе со своей замкнутой d-окрестностью $V_d (d > 0)$. Тогда существует $r > 0$ такое, что решение $\varphi(z)$ уравнения (6.4.14) с начальными данными $z_0 \in K$, $w_0 \in \mathbf{C}^n$ аналитично в круге $|z - z_0| < r$, причем r не зависит от z_0, w.

Доказательство. Пусть $\|P(z)\| \leqslant M$, $\|q(z)\| \leqslant M$ на V_d. После замены (6.4.2) получим $z_0 = 0$, $w_0 = 0$, при этом уравнение (6.4.14) останется линейным, у которого функции $P(z)$, $q(z)$ аналитичны в области, содержащей замкнутый круг $|z| \leqslant d$ внутри себя, причем на этом круге $\|P(z)\| \leqslant M$, $\|q(z)\| \leqslant M$. За систему (6.4.10)—(6.4.11) примем систему

$$\psi - z\left[\widehat{P}(z)\psi + \widehat{q}(z)\right] = 0, \tag{6.4.15}$$

где $\widehat{P}(z)$, $\hat{q}(z)$ — соответственно матричная и векторая функции, аналитические в круге $|z| < d$, компоненты которых являются мажорантными функциями по отношению к соответствующим компонентам $P(z)$, $q(z)$, т. е. коэффициенты их разложений по степеням z — положительные величины, не меньшие чем модули соответствующих коэффициентов в разложениях компонент $P(z)$, $q(z)$.

Выберем $\widehat{P}(z)$, $\hat{q}(z)$ следующим образом. Пусть $P_{ij}(z)$ — компоненты матрицы $P(z)$. В силу 6.1.6 можно положить

$$\widehat{P}_{ij}(z) = M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{d}\right)^k = \frac{M}{1 - z/d}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Аналогично,

$$\widehat{q}_i(z) = \frac{M}{1 - \dfrac{z}{d}}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6.4.16}$$

При таком выборе $\widehat{P}(z)$, $\hat{q}(z)$ уравнение (6.4.15) не зависит от точки (z_0, w_0). Из замечания 1 следует, что решение уравнения (6.4.14) при любой начальной точке аналитично в круге с центром в z_0 и радиусом, не зависящим от выбора этой точки.

Замечание 3. Формула (6.4.5) позволяет последовательно определить все коэффициенты разложения решения задачи Коши в ряд Тейлора. Вычисляя конечное число этих коэффициентов, найдем приближенное решение задачи Коши. Радиус сходимости ряда (6.4.3) можно оценить с помощью (6.4.10)—(6.4.11), если взять конкретную мажоранту $\hat{f}(z, w)$, например, с помощью неравенств Коши (6.1.6). Это соображение было использовано при оценке радиуса сходимости решений уравнения (6.4.14).

Пример 6.4.1. Построим приближенно с точностью до членов порядка $O(z^6)$ решение системы

$$\frac{dw_1}{dz}=5zw_2^2+\frac{1}{1-z},$$

$$\frac{dw_2}{dz}=w_1^3-w_2-e^z+1 \tag{6.4.17}$$

с начальными данными $z_0=w_1^0=w_2^0=0$.

Пусть $\varphi_\nu(z)=\sum\limits_1^\infty c_\nu^{(k)}z^k$, $\nu=1, 2$. Из (6.4.17) имеем

$$\sum_1^\infty kc_1^{(k)}z^{k-1}=5z\left(\sum_1^\infty c_2^{(k)}z^k\right)^2+\sum_0^\infty z^k,$$

$$\sum_1^\infty kc_2^{(k)}z^{k-1}=\left(\sum_1^\infty c_1^{(k)}z^k\right)^3-\sum_1^\infty c_2^{(k)}z^k-\sum_1^\infty\frac{1}{k!}z^k.$$

Приравнивая коэффициенты, получаем

при $z^0: c_1^{(1)}=1,\ c_2^{(1)}=0$;

при $z^1: 2c_1^{(2)}=1,\ 2c_2^{(2)}=-c_2^{(1)}-1=-1$;

при $z^2: 3c_1^{(3)}=1,\ 3c_2^{(3)}=-c_2^{(2)}-\frac{1}{2}=0$;

при $z^3: 4c_1^{(4)}=5\left(c_2^{(1)}\right)^2+1=1,\ 4c_2^{(4)}=\left(c_1^{(1)}\right)^3-c_2^{(3)}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$;

при $z^4: 5c_1^{(5)}=10c_2^{(1)}c_2^{(2)}+1=1$,

$$5c_2^{(5)}=3\left(c_1^1\right)^2c_2^{(2)}-c_2^{(4)}-\frac{1}{24}=\frac{5}{4}.$$

Итак,

$$\varphi_1(z)=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{5}z^5+O(z^6),$$

$$\varphi_2(z)=-\frac{1}{2}z^2+\frac{5}{24}z^4+\frac{1}{4}z^5+O(z^6).$$

§ 5. Аналитическое продолжение решений

1. Пусть функция $f: P_a\to\mathbf{C}$ аналитична в поликруге $P_a\subset\mathbf{C}^n$ с центром в точке $a\in\mathbf{C}^n$. Пару (f, P_a) будем называть элементом аналитической функции. Рассмотрим путь с началом в точке a и концом в точке $b\in\mathbf{C}^n$, т. е. непрерывное отображение u отрезка $[0, 1]$ в $\mathbf{C}^n$, причем $u(0)=a$, $u(1)=b$. Пусть P_b — поликруг с центром в b, $g: P_b \to \mathbf{C}$ — аналитическая функция. Элемент (g, P_b) называется аналитическим продолжением элемента (f, P_a) вдоль пути $u(t)$, если существует конечное число чисел $t_0=0, t_1, \dots, t_N=1$ и элементов (f_k, P_{x^k}), $x^k=u(t_k)$, $k=0, 1, \dots, N$, таких, что $f_0=f$, $f_N=g$, $P_{x^{k-1}} \cap P_{x^k}=D_k$ не пусто при $k=1, \dots, N$ и $f_{k-1}=f_k$ в областях D_k. По теореме 6.1.3 функции f_k определяются единственным образом.

Два пути $u_0: [0, 1] \to U$, $u_1: [0, 1] \to U$ называются *гомотопными* в U, если существует непрерывное отображение ψ квадрата $\{0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ в U такое, что

$$\psi(t, 0)=u_0(t), \quad \psi(t, 1)=u_1(t).$$

Каждому $s \in [0, 1]$ соответствует некоторый путь $u_s(t)=\psi(t, s)$. Можно сказать, что семейство путей u_s определяет непрерывную деформацию пути u_0 в путь u_1. Из определения аналитического продолжения следует, что аналитические продолжения одного и того же элемента вдоль путей с одинаковыми началом и концом совпадают, если эти два пути достаточно близки друг к другу. Отсюда следует, что аналитические продолжения вдоль гомотопных путей из a в b приводят к одной и той же аналитической функции в окрестности точки b.

Пусть теперь $f=(f_1, \dots, f_m): P_a \to \mathbf{C}^m$ — векторная аналитическая в поликруге P_a функция. Пару (f, P_a) назовем элементом векторной аналитической функции. Пусть (g, P_b) — элемент векторной аналитической функции $g=(g_1, \dots, g_m)$ такой, что элементы (g_k, P_b) являются аналитическим продолжением элементов (f_k, P_a), $k=1, \dots, m$, вдоль некоторого пути u. Тогда элемент (g, P_b) называется аналитическим продолжением элемента (f, P_a) вдоль пути u. Аналогично определяются элемент матричной аналитической функции и его аналитическое продолжение.

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{dz}=f(z, w), \tag{6.5.1}$$

где $f: P_{z_0, w_0} \to \mathbf{C}^n$ — аналитическая функция в некотором поликруге с центром в точке (z_0, w_0). По теореме 6.4.1 уравнение (6.5.1) определяет решение $\varphi: C \to \mathbf{C}^n$, где C — круг $|z-z_0|<r$, с начальными данными (z_0, w_0).

Теорема 6.5.1. *Пусть элемент (φ, C_1), где C_1 — круг с центром в точке z_1, есть аналитическое продолжение элемента (φ, C) вдоль пути $u(t): [0, 1] \to \mathbf{C}$, $u(0)=z_0$, $u(1)=z_1$. Если элемент $(f(z, w), P_{(z_0, w_0)})$ может быть аналитически продолжен вдоль пути*

$$v(t)=(u(t), \varphi(u(t))): [0, 1] \to \mathbf{C}^{n+1},$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая функция в окрестности точек $u(t)$, $t \in [0, 1]$, определенная с помощью аналитического продолжения *элемента* (φ, C) *вдоль пути* u, *то* $\varphi: C_1 \to \mathbf{C}^n$ *является решением дифференциального уравнения* (6.5.1), *правая часть которого* $f(z, w): P_1 \to \mathbf{C}^n$ *есть аналитическая функция в поликруге* P_1 *с центром в точке* $(z_1, \varphi(z_1))$, *получаемая аналитическим продолжением элемента* $(f, P_{(z_0, w_0)})$ *вдоль пути* $v(t)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $C \cap C_1 = D$ не пусто и $\varphi = \varphi^1$ в области D, то $\varphi^1: C_1 \to \mathbf{C}^n$ — решение уравнения (6.5.1) с продолженной $f(z, w)$.

Рассмотрим скалярные аналитические функции

$$\Phi_\nu(z) = \frac{d\varphi_\nu}{dz} - f_\nu(z, \varphi(z)),$$
$$\Phi^1_\nu(z) = \frac{d\varphi^1_\nu}{dz} - f_\nu(z, \varphi^1(z)), \quad \nu = 1, \dots, n. \tag{6.5.2}$$

По определению 6.4.1 $\Phi_\nu(z) = 0$ в круге C. Следовательно, $\Phi_\nu^1(z) = 0$ в области D. По теореме 6.1.3 $\Phi_\nu^{(1)} = 0$ в круге C_1. Это и означает, что $\varphi^1: C_1 \to \mathbf{C}^n$ — решение уравнения (6.5.1) в круге C_1. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 6.5.1 не означает, что если f аналитична во всем пространстве $\mathbf{C}^{n+1}$, то любое решение уравнения (6.5.1) может быть аналитически продолжено на всю плоскость $\mathbf{C}$.

Пример 6.5.1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dw}{dz} = w^2. \tag{6.5.3}$$

Здесь $G = \mathbf{C}^2$. Вещественный аналог уравнения (6.5.3) — это уравнение с разделяющимися переменными. Правила дифференцирования комплексных функций совпадают с правилами дифференцирования вещественных, поэтому функция $\varphi = (a - z)^{-1}$, полученная методом разделения переменных, является решением уравнения (6.5.3) при $z \neq a$ (a — любое комплексное число). Это решение не может быть продолжено вдоль пути, проходящего через точку $z = a$. Поскольку для решения с начальными данными (z_0, w_0) $a = z_0 + w_0^{-1}$, для уравнения (6.5.3) особая точка решения зависит от начальных данных. Такие особые точки называются подвижными.

Не всякое дифференциальное уравнение порождает подвижные особые точки. Из доказываемой ниже теоремы следует, что таким свойством не обладают линейные уравнения.

Теорема 6.5.2. *Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение*

$$\frac{dw}{dz} = P(z)w + q(z), \tag{6.5.4}$$

где $P: C \to \mathfrak{M}^{n,n}$, $q: C \to \mathbf{C}^n$ — *аналитические в круге* C *с центром* z_0 *функции. Если элементы* (P, C), (q, C) *могут быть аналитически* *продолжены вдоль некоторого пути с началом в точке z_0, то и решение уравнения* (6.5.4) *с начальными данными* $(z_0, w_0 \in \mathbf{C}^n)$ *может быть аналитически продолжено вдоль этого пути.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный путь u, соединяющий точки z_0 и z^*, вдоль которого могут быть продолжены элементы (P, C) и (q, C). Согласно замечанию 1 к теореме 6.4.1 существует постоянная $r>0$ такая, что решение уравнения (6.5.4) с продолженными $P(z)$, $q(z)$, определяемое начальными данными $(\tilde{z}, \tilde{w})$, где $\tilde{z}=u(t)$, $t\in[0, 1]$, определено в круге $|z-\tilde{z}|<r$, причем r не зависит от $(\tilde{z}, \tilde{w})$.

Рассмотрим последовательность точек $z_k=u(t_k)$, $0=t_0<t_1<$ $<\ldots$, и последовательность кругов C_k, $k=0, 1, \ldots$, с радиусом r и центрами в точках $u(t_k)$ таких, что

$$1/2r<|z_k-z_{k-1}|<r,\ k=1,2,\ldots .$$

Число таких кругов, покрывающих все точки $u(t)$, $t\in[0, 1]$, конечно. Для каждого $k=1, 2, \ldots$ определяем решение $\varphi^k: C_k \to \mathbf{C}^n$ с начальными данными $(z_k, \varphi^{k-1}(z_k))$. По теореме 6.4.1 такое решение единственно, поэтому построенная последовательность пар осуществляет аналитическое продолжение элемента решения с начальными данными (z_0, w_0) вдоль пути $u(t)$. Теорема доказана.

Замечание. Таким образом, любое решение линейной системы дифференциальных уравнений аналитично в области аналитичности его коэффициентов. Обратное неверно, т. е. особенности коэффициентов могут не являться особенностями решений.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{dw}{dz}=\frac{2w}{z}. \tag{6.5.5}$$

Для решения $w=z^2$ уравнения (6.5.5) точка $z=0$ не является особой, но является особой точкой для правой части уравнения. С другой стороны, точка $z=0$ — особая точка как для правой части уравнения

$$\frac{dw}{dz}=\frac{w}{2z}, \tag{6.5.6}$$

так и для его решений $w=\alpha z^{1/2}$, $\alpha\neq 0$.

§ 6. Изолированные особенности линейной однородной системы

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{dz}=P(z)w, \tag{6.6.1}$$

где $P: K\to\mathfrak{M}^{n,n}$ — однозначная аналитическая функция в некоторой окрестности особой точки z_0, т. е. в кольце $K=\{z: 0<|z-$

$-z_0|<a\}$. Однозначность аналитической функции в K означает, что аналитическое продолжение любого ее элемента вдоль любого пути в K с концом в точке $b \in K$ приводит к одной и той же аналитической функции в окрестности точки b. Для уравнения (6.6.1) справедливы утверждения § 1, 2 гл. IV, так как вещественность используется там только при доказательстве существования, единственности и продолжения решений. Из результатов предыдущего параграфа следует, что решение уравнения (6.6.1) с любыми начальными данными $\tilde{z} \in K$, $\tilde{w} \in \mathbf{C}^n$ может быть аналитически продолжено вдоль любого пути в K. При этом, как показывает пример уравнения (6.5.6), решение может оказаться неоднозначной аналитической функцией в кольце K. Задача, которой посвящены этот и следующий параграфы, — изучить характер неоднозначности решений в окрестности особой точки.

1. В дальнейшем, не нарушая общности, будем считать $z_0=0$ (этого всегда можно добиться, выбрав в качестве независимой переменной $z-z_0$, а в случае $z_0=\infty$ — переменную $1/z$).

Теорема 6.6.1. *Каждая фундаментальная матрица $\Phi: K \to \mathfrak{M}^{n,n}$ уравнения* (6.6.1) *может быть представлена в виде*

$$\Phi(z)=S(z)\,e^{\operatorname{Ln} z \cdot R},$$

где $R \in \mathfrak{M}^{n,n}$ — постоянная матрица, $S: K \to \mathfrak{M}^{n,n}$ — однозначная аналитическая матричная функция.

Доказательство. Пусть (Φ, C), $C \subset K$, — элемент фундаментальной матрицы, (Φ^*, C) — его продолжение вдоль окружности с центром в точке $z=0$, проходящей через центр круга C и ориентированной в положительном направлении. По теореме 6.5.2 в силу однозначности матрицы коэффициентов $P(z)$ матрица $\Phi^*(z)$ — фундаментальная матрица уравнения (6.6.1) в круге C. По теореме 4.2.3 в круге C

$$\Phi^*(z)=\Phi(z)\,B, \tag{6.6.2}$$

где B — неособая постоянная матрица. Так как C — любой круг в K, то (6.6.2) справедливо во всей K, если под Φ и Φ^* понимать аналитические продолжения функций $\Phi: C \to \mathfrak{M}^{n,n}$ и $\Phi^*: C \to \mathfrak{M}^{n,n}$ соответственно по всевозможным путям в K.

Положим (выбрав какую-либо ветвь логарифма)

$$R=\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Ln} B, \quad S(z)=\Phi(z)\,e^{-\operatorname{Ln} z \cdot R}. \tag{6.6.3}$$

Нужно доказать, что $S(z)$ не изменяет своего значения при обходе вдоль любого замкнутого контура в K. Очевидно, что любой замкнутый путь в K гомотопен многократному обходу описанной выше окружности в положительном и отрицательном направлениях. Обозначим через S^* результат однократного обхода точки $z=0$ в положительном направлении:

$$S^*(z)=\Phi^*(z)\,e^{-(\operatorname{Ln} z+2\pi i)R}.$$

Отсюда и из (6.6.2), (6.6.3) находим .

$$S^*(z)=\Phi(z)BB^{-1}e^{-\mathrm{Ln}\,z\cdot R}=S(z).$$

Аналогично доказывается, что $S(z)$ не изменяется при обходе окружности в отрицательном направлении. Следовательно, $S(z)$ не изменяется и при многократном обходе точки $z=0$ в любом направлении. Теорема доказана.

Матрица B, определяемая равенством (6.6.2), называется *матрицей монодромии* (ср. с определением матрицы монодромии в § 6 гл. IV). Матрица B определяется с помощью фундаментальной матрицы $\Phi(z)$, которая неединственна. Пусть Φ_1 — другая фундаментальная матрица и B_1 — ее матрица монодромии:

$$\Phi_1^*(z)=\Phi_1(z)B_1. \qquad (6.6.4)$$

Так как по теореме 4.2.3 $\Phi_1(z)=\Phi(z)T$, где T — постоянная неособая матрица (следовательно, и $\Phi_1^*(z)=\Phi^*(z)T$), то из (6.6.4) получаем

$$\Phi^*(z)=\Phi(z)TB_1T^{-1}.$$

Сравнивая с (6.6.2), имеем

$$B=TB_1T^{-1},$$

т. е. множество матриц монодромии образует класс эквивалентности по отношению подобия. Собственные числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$ матриц монодромии, называемые *мультипликаторами*, и соответствующие им элементарные делители являются инвариантами. Собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы R называются *характеристическими показателями*. В силу (6.6.3) на основании следствия из теоремы 4.4.2

$$\lambda_k=\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Ln}\,\mu_k,\quad k=1, \ldots, n, \qquad (6.6.5)$$

причем элементарные делители, соответствующие кратным собственным числам матриц B и R, имеют одинаковые кратности. Отметим, что характеристические показатели уравнения (6.6.1) определяются с точностью до целого слагаемого в зависимости от выбора ветви логарифма в (6.6.5).

2. Вид решений уравнения (6.6.1). Рассмотрим структуру фундаментальной матрицы уравнения (6.6.1). Пусть $R=TJT^{-1}$, где J — жорданова форма R, $\det T\neq 0$. По теореме 6.6.1 и лемме 4.4.1

$$\Phi(z)=S(z)Te^{\mathrm{Ln}\,z\cdot J}T^{-1}.$$

Если ввести в рассмотрение новую фундаментальную матрицу $\Phi_1=\Phi T$, то

$$\Phi_1=U(z)e^{\mathrm{Ln}\,z\cdot J}, \qquad (6.6.6)$$

где $U=S(z)T$ — однозначная аналитическая в K матричная функция. Пусть

$$\Phi_1=(\varphi^1,\ldots,\varphi^n),\ U=(u^1,\ldots,u^n),$$
$$\varphi^k, u^k: K\to\mathbf{C}^n,\ k=1,\ldots,n.$$

Используя формулы (4.4.5), (4.4.6) при $t=\operatorname{Ln} z$, имеем

$$e^{\operatorname{Ln} z\cdot J}=\operatorname{diag}\{e^{\operatorname{Ln} z\cdot J_0}, e^{\operatorname{Ln} z\cdot J_1},\ldots,e^{\operatorname{Ln} z\cdot J_q}\},$$

где $e^{\operatorname{Ln} z\cdot J_0}=\operatorname{diag}\{z^{\lambda_1},\ldots,z^{\lambda_p}\}$,

$$e^{\operatorname{Ln} z\cdot J_k}=\left\|\begin{matrix} z^{\lambda_{p+k}} & \operatorname{Ln} z\cdot z^{\lambda_{p+k}} & \ldots & \dfrac{(\operatorname{Ln} z)^{r_k-1}}{(r_k-1)!}z^{\lambda_{p+k}} \\ 0 & z^{\lambda_{p+k}} & \ldots & \dfrac{(\operatorname{Ln} z)^{r_k-2}}{(r_k-2)!}z^{\lambda_{p+k}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & z^{\lambda_{p+k}} \end{matrix}\right\|.$$

Отсюда и из (6.6.6) получаем

$$\varphi^j(z)=u^j(z)z^{\lambda_j},\ j=1,\ldots,p, \tag{6.6.7}$$

$$\varphi^{p+r_1+\ldots+r_{k-1}+1}(z)=u^{p+r_1+\ldots+r_{k-1}+1}(z)z^{\lambda_{p+k}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi^{p+r_1+\ldots+r_k}(z)=\left[u^{p+r_1+\ldots+r_{k-1}+1}(z)\frac{(\operatorname{Ln} z)^{r_k-1}}{(r_k-1)!}+\right.$$
$$\left.+\ldots+u^{p+r_1+\ldots+r_k}(z)\right]z^{\lambda_{p+k}},\ k=1,\ldots,q. \tag{6.6.8}$$

В формулах (6.6.7), (6.6.8) $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ — простые характеристические показатели; $\lambda_{p+1},\ldots,\lambda_{p+q}$ — кратные характеристические показатели; q — число элементарных делителей; r_k — их кратности. Семейство решений (6.6.8) называется группой решений. Из (6.6.8) видим, что фундаментальное семейство решений не содержит $\operatorname{Ln} z$ тогда и только тогда, когда диагональна жорданова форма матрицы R (или, что то же самое, диагональна жорданова форма матрицы монодромии B).

Координатные функции векторов $u^1(z),\ldots,u^n(z)$ являются однозначными аналитическими в K и потому могут быть разложены в ряд Лорана по степеням z. Возможны следующие три случая:

1) $z=0$ — обыкновенная точка, т. е. все указанные ряды Лорана не содержат отрицательных степеней z;

2) $z=0$ — полюс, т. е. существует наинизшая отрицательная степень z в указанных разложениях;

3) $z=0$ — существенно особая точка, т. е. разложение хоть одной из координатных функций содержит бесконечное число отрицательных степеней z.

Первые два случая в рассматриваемой ситуации неразличимы. Действительно, как отмечалось, характеристические показатели (6.6.5) определяются с точностью до целого слагаемого. Это слагаемое (положительное или отрицательное) всегда можно выбрать так, чтобы полюс превратился в обыкновенную точку, и наоборот. Таким образом, случай 2) можно не рассматривать.

В случае 1) изолированная особенность $z=0$ называется *регулярной*, в случае 3) — *иррегулярной*.

§ 7. Регулярная особенность линейного однородного уравнения второго порядка

1. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0, \tag{6.7.1}$$

где коэффициенты $p, q: K\to\mathbf{C}$ — однозначные аналитические функции в кольце $K=\{z:0<|z|<a\}$. Пусть $C=\{z:|z|<a\}$. Положим $y=\operatorname{colon}(w, dw/dz)$. Обозначая дифференцирование по z штрихом, запишем (6.7.1) в виде нормальной системы двух уравнений в векторной форме

$$y'=P(z)\,y,$$

где

$$P(z)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(z) & -p(z)\end{pmatrix}. \tag{6.7.2}$$

Система (6.7.2) принадлежит к типу систем, исследованных в предыдущем параграфе. Используя формулы (6.6.7), (6.6.8), запишем фундаментальную систему решений $\varphi^1(z)$, $\varphi^2(z)$ системы (6.7.2). Могут представиться два случая.

I. $\mu_1\neq\mu_2$. Тогда

$$\varphi^1(z)=u^1(z)\,z^{\lambda_1},$$

$$\varphi^2(z)=u^2(z)\,z^{\lambda_2},\ \ \lambda_1-\lambda_2\notin\mathbf{Z}. \tag{6.7.3}$$

II. $\mu_1=\mu_2$. Здесь возможны два подслучая:

а) $\varphi^1(z)=u^1(z)\,z^{\lambda_1}$,

$$\varphi^2(z)=u^2(z)\,z^{\lambda_2},\ \ \lambda_1-\lambda_2\in\mathbf{Z} \tag{6.7.4}$$

(две группы решений);

б) $\varphi^1(z)=u^1(z)\,z^{\lambda_1}$,

$$\varphi^2(z)=u^1(z)\,z^{\lambda_1}\operatorname{Ln}z+u^2(z)\,z^{\lambda_2},\ \ \lambda_1=\lambda_2 \tag{6.7.5}$$

(одна группа решений).

В (6.7.3)—(6.7.5) λ_1, λ_2 — характеристические показатели u^1, $u^2: K \to \mathbf{C}^2$ — однозначные аналитические функции.

Фундаментальное семейство решений уравнения (6.7.1) составляют первые координаты двумерных векторов φ^1, φ^2. Обозначим их через w_1, w_2, а первые координаты u^1, u^2 — через v_1, v_2. Тогда возможны следующие три вида фундаментального семейства решений уравнения (6.7.1).

I. $w_1(z) = v_1(z) z^{\lambda_1}$,

$$w_2(z) = v_2(z) z^{\lambda_2}, \quad \lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbf{Z}, \tag{6.7.6}$$

IIa. $w_1(z) = v_1(z) z^{\lambda_1}$,

$$w_2(z) = v_2(z) z^{\lambda_2}, \quad \lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbf{Z}, \tag{6.7.7}$$

IIб. $w_1(z) = v_1(z) z^{\lambda_1}$,

$$w_2(z) = v_1(z) z^{\lambda_1} \operatorname{Ln} z + v_2(z) z^{\lambda_2}, \quad \lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbf{Z}. \tag{6.7.8}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $z=0$ — регулярная точка для уравнения (6.7.1) (т. е. она является регулярной для системы (6.7.2). Это означает, что для функций $v_1(z)$, $v_2(z)$ $z=0$ — либо полюс, либо обыкновенная точка. Используя тот факт, что к характеристическим показателям можно прибавлять целые числа, выберем их из условия, чтобы $v_1(z)$ были аналитичны в C и $v_i(0) \neq 0$, $i=1, 2$. Теперь характеристические показатели в (6.7.6)—(6.7.8) фиксированы.

2. Выясним ограничения, которые накладывает на коэффициенты $p(z)$, $q(z)$ уравнения (6.7.1) условие регулярности особой точки $z=0$. Итак, предполагаем, что в (6.7.6)—(6.7.8) функции $v_i(z)$ аналитичны в круге C и $v^i(0) \neq 0$, $i=1$, 2. Пусть $W(z)$ — определитель Вронского решений $w_1(z)$, $w_2(z)$. В силу (4.2.5)

$$W'(z) = \operatorname{sp} P(z) W(z) = -p(z) W(z).$$

Следовательно,

$$p(z) = -W'(z)/W(z).$$

Положим $(w_2/w_1)' = V(z)$. Так как $W = w_1^2 V$, то

$$p(z) = -2\frac{w_1'}{w_1} - \frac{V'}{V}. \tag{6.7.9}$$

Далее рассматриваем кольцо $K_1 = \{z: 0 < |z| < a_1\}$ и круг $C_1 = \{z: |z| < a_1\}$, где a_1 достаточно мало. Из (6.7.6)—(6.7.8) имеем

$$w_1' = z^{\lambda_1 - 1}(\lambda_1 v_1 + z v_1'). \tag{6.7.10}$$

Следовательно,

$$\frac{w_1'}{w_1} = \frac{1}{z}\psi_1(z), \tag{6.7.11}$$

где $\psi_1(0)=\lambda_1$, $\psi_1(z)$ — аналитическая в круге C_1 функция. Вид решений $w_2(z)$ зависит от рассматриваемого случая в формулах (6.7.6)—(6.7.8). Рассмотрим случай I. Из (6.7.6) имеем

$$\frac{w_2}{w_1}=z^{\lambda_2-\lambda_1}\psi_2(z),\quad \psi_2(0)\neq 0.$$

Тогда $V=z^{\lambda_2-\lambda_1-1}\psi_3(z)$, где $\psi_3(z)=(\lambda_2-\lambda_1)\psi_2+z\psi_2'$ аналитична в C_1 и $\psi_3(0)\neq 0$, так как $\lambda_2-\lambda_1\neq 0$. Таким образом, V обладает теми свойствами w_1, которые использовались при выводе (6.7.11), следовательно,

$$\frac{V'}{V}=\frac{1}{z}\psi_4(z), \tag{6.7.12}$$

где ψ_4 аналитична в C_1. Отсюда из (6.7.9) и (6.7.11) следует, что в кольце K_1

$$p(z)=\frac{1}{z}p_1(z), \tag{6.7.13}$$

где $p_1(z)$ аналитична в C_1, следовательно, и в C.

Из случаев IIа и IIб рассмотрим только более сложный случай IIб. В силу (6.7.8)

$$\frac{w_2}{w_1}=z^k\psi_5(z)+\mathrm{Ln}\,z,\quad \psi_5(0)\neq 0,$$

где $\psi_4(z)$ аналитична в C_1 $k=\lambda_2-\lambda_1$ — целое число. Отсюда

$$V=z^{k-1}\left(k\psi_5+z\psi_5'+z^{-k}\right).$$

Если $k\geqslant 0$, то

$$V=z^{-1}\left(kz^k\psi_5+z^{k+1}\psi_5'+1\right)=z^{-1}\psi_6(z),$$

где ψ_6 аналитична в C_1 и $\psi_6(0)\neq 0$. Если $k<0$, то $k\psi_5+z\psi_5'+$ $+z^{-k}=\psi_7(z)$ также аналитична в C_1 и $\psi_7(0)=k\psi_5(0)\neq 0$. Тем самым доказано, что и в этом случае V обладает свойствами, которые использовались при выводе (6.7.11). Следовательно, справедлива формула (6.7.12), а вместе с ней и формула (6.7.13).

Мы доказали, что из условия регулярности особой точки $z=0$ следует, что в кольце K коэффициент $p(z)$ представим в виде (6.7.13), где $p_1(z)$ — аналитическая в круге C функция. В таком случае говорят, что $z=0$ является для $p(z)$ полюсом не выше первого порядка.

Чтобы выразить коэффициент $q(z)$, воспользуемся тождеством

$$w_1''(z)+p(z)w_1'(z)+q(z)w_1(z)=0,$$

справедливым в кольце K. Отсюда

$$q(z)=\frac{-w_1''-p(z)w_1'}{w_1(z)}. \tag{6.7.14}$$

В силу (6.7.10)

$$w_1' = z^{\lambda_1 - 1}\psi_8(z), \quad w_1'' = z^{\lambda_1 - 2}\psi_9(z),$$

где ψ_8, ψ_9 аналитичны в круге C. Тогда из (6.7.14) получаем

$$q(z) = z^{-2} q_1(z), \tag{6.7.15}$$

где $q_1(z)$ аналитична в C. При выполнении (6.7.15) говорят, что $z=0$ является для функции $q(z)$ полюсом не выше второго порядка.

Теорема 6.7.1 (теорема Фукса). *Для того чтобы точка $z=0$ была регулярной особой точкой для уравнения* (6.7.1), *необходимо и достаточно, чтобы она была полюсом не выше первого порядка для коэффициента $p(z)$ и полюсом не выше второго порядка для коэффициента $q(z)$, т. е. чтобы выполнялись* (6.7.13) *и* (6.7.15).

Теорема 6.7.1 допускает обобщение на случай линейного однородного уравнения произвольного порядка (см. п. 2 § 8 гл. VI).

Необходимость условий (6.7.13) и (6.7.15) уже доказана. Доказательству достаточности предпошлем лемму, имеющую самостоятельное значение.

3. **Лемма 6.7.1.** *Пусть λ_1, λ_2 ($\mathrm{Re}\,\lambda_1 \geqslant \mathrm{Re}\,\lambda_2$) — корни уравнения*

$$\lambda^2 + [p_1(0) - 1]\lambda + q_1(0) = 0. \tag{6.7.16}$$

Тогда: 1) *если $\lambda_1 - \lambda_2$ — не целое число, то уравнение* (6.7.1) *с коэффициентами* (6.7.13) *и* (6.7.15) *имеет два линейно независимых решения вида $w_i = z^{\lambda_i} v_i(z)$, $i = 1, 2$, где $v_i(z)$ — аналитические в круге C функции, причем $v_i(0) \neq 0$;*

2) *если $\lambda_1 - \lambda_2$ — целое число, то уравнение* (6.7.1) *имеет по крайней мере одно решение $w(z)$ указанного вида.*

Уравнение (6.7.16) называется *характеристическим* или *определяющим*; ряды по степеням z, представляющие решения вида указанного леммой, называются обобщенными степенными рядами.

Доказательство. Выполним замену $w = z^{\lambda} u$, где u — новая неизвестная функция, λ — комплексное число, которое мы определим позднее. Имеем

$$w' = z^{\lambda-1}(\lambda u + z u'),$$

$$w'' = z^{\lambda-2}(z^2 u'' + 2\lambda z u' + \lambda(\lambda - 1) u).$$

Подставляя эти выражения в умноженное на z^2 уравнение (6.7.1), получим

$$z^2 u'' + [2\lambda + p_1(z)] z u' + [\lambda(\lambda - 1) + \lambda p_1(z) + q_1(z)] u = 0. \tag{6.7.17}$$

Требуется доказать существование аналитического в круге C решения уравнения (6.7.17) с ненулевым свободным членом. Воспользуемся методом Коши. Решение $u(z)$ будем искать в виде степенного ряда с неопределенными коэффициентами

$$u=\sum_{0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_0 \neq 0. \tag{6.7.18}$$

Подставляя (6.7.18) в (6.7.17) и полагая $z=0$, получаем

$$[\lambda^2+(p_1(0)-1)\lambda+q_1(0)]\,c_0=0. \tag{6.7.19}$$

Так как $c_0 \neq 0$, то из (6.7.19) следует, что постоянная λ должна быть корнем уравнения (6.7.16), при этом c_0 может быть произвольным числом. Если $\lambda_1-\lambda_2$ не равно целому числу, то в качестве λ берем любой из корней уравнения (6.7.16); если $\lambda_1-\lambda_2$ равно целому числу, то полагаем $\lambda=\lambda_1$, причем $\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant \operatorname{Re}\lambda_2$.

Пусть

$$p_1(z)=\sum_{0}^{\infty} a_k z^k, \quad q_1(z)=\sum_{0}^{\infty} b_k z^k,$$

$$p^*(z)=p_1(z)-a_0, \quad q^*(z)=q_1(z)-b_0.$$

Тогда (6.7.17), учитывая (6.7.19), можно записать в виде

$$z^2u''+[2\lambda+a_0+p^*(z)]zu'+[\lambda p^*(z)+q^*(z)]\,u=0. \tag{6.7.20}$$

Подставив (6.7.18) и выражения

$$u'=\sum_{1}^{\infty} kc_k z^{k-1}, \quad u''=\sum_{2}^{\infty} k(k-1)\,c_k z^{k-2}$$

в (6.7.20) и приравняв нулю коэффициенты при z^k ($k \in \mathbf{N}$), получим

$$k(k-1)\,c_k+k(2\lambda+a_0)\,c_k+\sum_{k'=1}^{k}(k-k')\,a_{k'}c_{k-k'}+$$
$$+\sum_{k'=1}^{k}(\lambda a_{k'}+b_{k'})\,c_{k-k'}=0. \tag{6.7.21}$$

Так как по формуле Виета $a_0-1=-\lambda_1-\lambda_2$, то (6.7.21) можно записать в виде

$$A_k c_k=h_k(c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}),$$

где

$$A_k=\begin{cases} k(k+\lambda_1-\lambda_2) & \text{при } \lambda=\lambda_1, \\ k(k+\lambda_2-\lambda_1) & \text{при } \lambda=\lambda_2, \end{cases} \tag{6.7.22}$$

h_k — известная функция своих переменных. При выбранном λ $A_k \neq \neq 0$, поэтому коэффициенты ряда (6.7.18) определяются последовательно с возрастанием k, причем однозначно, если зафиксировать c_0. Положим $c_0=1$.

Построенный ряд формально удовлетворяет уравнению (6.7.1). Если мы докажем его сходимость, то его сумма будет являться решением уравнения (6.7.1).

Из (6.7.22) следует, что величины $(k-k')/A_k$, $1/A_k$ ограничены при $k\in\mathbf{N}$, $1\leqslant k'\leqslant k$. Отсюда и из (6.7.21) имеем

$$|c_k|\leqslant M\sum_{k'=1}^{k}(|a_{k'}|+|b_{k'}|)|c_{k-k'}| \tag{6.7.23}$$

при некотором $M>0$. Рассмотрим следующие степенные ряды:

$$\hat{u}(z)=\sum_{1}^{\infty}|c_k|z^k,$$

$$\hat{p}(z)=\sum_{1}^{\infty}|a_k|z^k,$$

$$\hat{q}(z)=\sum_{1}^{\infty}|b_k|z^k.$$

Здесь ряды $\hat{p}(z)$, $\hat{q}(z)$ сходятся при $|z|<a$ по лемме Абеля, сходимость же $\hat{u}(z)$ требуется доказать. Определим функцию $v(z)$ как решение уравнения

$$v-1=M(\hat{p}(z)+\hat{q}(z))v. \tag{6.7.24}$$

Уравнение (6.7.24) имеет решение

$$v(z)=\frac{1}{1-M(\hat{p}(z)+\hat{q}(z))}.$$

Так как $\hat{p}(0)=\hat{q}(0)=0$, то это решение аналитично в круге C_1, определенном в п. 1, если a_1 достаточно мало. Положим

$$v(z)=\sum_{0}^{\infty}d_kz^k.$$

Покажем по индукции, что $|c_k|\leqslant d_k$ $(k\in\mathbf{N})$. Так как $c_0=d_0=1$, то база для индукции имеется. Предположим, что $|c_j|\leqslant d_j$ при $1\leqslant j\leqslant k$. Тогда в силу (6.7.23), (6.7.24)

$$|c_{k+1}|\leqslant M\sum_{k'=1}^{k+1}(|a_{k'}|+|b_{k'}|)d_{k+1-k'}=d_{k+1},$$

что и требовалось доказать.

Отсюда заключаем, что в круге C_1 сходится и ряд $\hat{u}(z)$. Следовательно, $u(z)$ аналитична в C_1, а так как решения уравнения

(6.7.1) аналитичны в кольце K, то $u(z)$ аналитична в C. Лемма 6.7.1 доказана.

4. Доказательство достаточности в теореме 6.7.1. Если $\lambda_1-\lambda_2$ не равно целому числу, то построенные в лемме 6.7.1 решения имеют вид (6.7.6). Следовательно, $z=0$ регулярна, и в этом случае теорема доказана.

Рассмотрим случай $\lambda_1-\lambda_2=p\in\mathbf{Z}$. Одно решение $w_1(z)$ необходимого вида построено в лемме 6.7.1. Требуется найти линейно независимое с w_1 решение w_2 вида (6.7.7) или (6.7.8). Дальнейшие рассмотрения ведем в круге C_1 достаточно малого радиуса a_1. Положим, как и ранее,

$$V=(w_2/w_1)'.$$

В силу (6.7.9), (6.7.11) и (6.7.13)

$$V'=\left[-\frac{1}{z}(2\lambda_1+a_0)+R(z)\right]V, \tag{6.7.25}$$

где $R(z)$ — аналитическая в C_1 функция. Так как λ_1, λ_2 — корни уравнения (6.7.16), то

$$-2\lambda_1-a_0=\lambda_2-\lambda_1-1=-(p+1).$$

Линейное дифференциальное уравнение (6.7.25) имеет решение

$$V(z)=z^{-(p+1)}r(z), \tag{6.7.26}$$

где $r(z)$ — аналитическая в C_1 функция, являющаяся решением уравнения $V'=R(z)V$ и отличная от нуля. Пусть

$$r(z)=\sum_{0}^{\infty}\alpha_k z^k.$$

По определению $V(z)$ в силу (6.7.26)

$$\frac{w_2}{w_1}=\alpha_p \operatorname{Ln} z+z^{-p}r_1(z),$$

где $r_1(z)$ аналитична в C_1. Отсюда, учитывая вид w_1, получаем

$$w_2=\alpha_p v_1(z)z^{\lambda_1}\operatorname{Ln} z+z^{\lambda_1-p}r_1(z)v_1(z).$$

Так как $\lambda_1-p=\lambda_2$, функция $v_2(z)=r_1(z)v_1(z)$ аналитична в C_1, то $w_2(z)$ имеет вид, требуемый формулой (6.7.7) или (6.7.8) (если $\alpha_p=0$, получаем (6.7.7); если $\alpha_p\neq 0$, имеем (6.7.8)). Осталось только доказать, что $v_2(z)$ аналитична во всем круге C. Но это вытекает из аналитичности $v_2(z)$ в C_1, $v_1(z)$ в C и $w_2(z)$ в K. Теорема 6.7.1 доказана полностью.

5. Уравнение Бесселя. В качестве примера приложения построенной теории рассмотрим уравнение Бесселя:

$$w''+\frac{1}{z}w'+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)w=0, \tag{6.7.27}$$

где $n \geqslant 0$. Особая точка $z=0$ согласно теореме 6.7.1 является регулярной. Других особенностей в конечной части плоскости нет (проверьте, что $z=\infty$ является иррегулярной особой точкой).

В уравнении (6.7.27) $p_1(0)=1$, $q_1(0)=-n^2$, поэтому определяющее уравнение имеет вид $\lambda^2=n^2$, т. е. $\lambda_{1,2}=\pm n$ и $\lambda_1-\lambda_2=2n$.

I. Пусть $2n$ — не целое число. По лемме 6.7.1 уравнение (6.7.27) имеет фундаментальную систему решений

$$w_1=z^n v_1(z), \quad w_2=z^{-n} v_2(z),$$

где v_1, v_2 — целые функции, причем $v_1(0)\neq 0$, $v_2(0)\neq 0$ запишем $w_1(z)$ в виде обобщенного степенного ряда

$$w_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{n+k}, \quad c_0\neq 0. \tag{6.7.28}$$

Дифференцируя (6.7.28) и подставляя выражения для w_1' и w_1'' в уравнение (6.7.27), домноженное на z^2, получаем

$$\sum_{0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)c_k z^{n+k}+\sum_{0}^{\infty}(n+k)c_k z^{n+k}+$$
$$+\sum_{0}^{\infty}c_{k-2}z^{n+k}-n^2\sum_{0}^{\infty}c_k z^{n+k}=0. \tag{6.7.29}$$

Сокращаем (6.7.29) на z^n и приравниваем нулю коэффициент при z^k ($k\in\mathbf{N}_0$) в левой части (6.7.29). Имеем:

при $k=0: 0\cdot c_0=0$, следовательно, c_0 произвольно, (6.7.30)

при $k=1: [(n+1)^2-n^2]c_1=0$, следовательно, $c_1=0$; (6.7.31)

при $k>0: [(n+k)^2-n^2]c_k+c_{k-2}=0$ следовательно,

$$c_k=-\frac{c_{k-2}}{(2n+k)k}. \tag{6.7.32}$$

Формулы (6.7.30)—(6.7.32) позволяют последовательно определить все коэффициенты c_k. При k нечетном $c_k=0$.

Поскольку в рассматриваемом случае $2n$ — не целое число, коэффициенты обобщенного степенного ряда

$$w_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-n+k}, \tag{6.7.33}$$

также определяются по формулам (6.7.30)—(6.7.32), если в них заменить n на $-n$.

IIа. Пусть $2n$ — целое нечетное число: $2n=2p+1$. Коэффициенты ряда (6.7.28) определяются, как и в случае I, по формулам

(6.7.30) — (6.7.32). Коэффициенты c_k ряда (6.7.33) при $k<2p+1$ определяются по тем же формулам с заменой n на $-n$. Для определения c_{2p+1} получаем уравнение

$$0\cdot c_{2p+1}+c_{2p-1}=0,$$

но так как по доказанному $c_{2p-1}=0$, то c_{2p+1} можно взять произвольным. Полагая $c_{2p+1}=0$, остальные коэффициенты определяем по старым формулам, причем нечетные коэффициенты по-прежнему равны нулю. Таким образом, когда $2n$ нечетно, уравнение Бесселя не имеет решений, содержащих логарифм.

IIб. Пусть $2n$ четное: $n=p$. Коэффициенты ряда (6.7.28) определяются по старому правилу. При определении коэффициента ряда (6.7.33) встретится затруднение, так как он должен удовлетворять уравнению

$$0\cdot c_{2p}+c_{2p-2}=0,$$

не имеющему решений, поскольку $c_{2p-2}\neq 0$. Это означает, что линейно независимого с $w_1(z)$ решения в виде обобщенного степенного ряда не существует. Из общей теории следует, что линейно независимое решение $w_2(z)$ должно содержать логарифм. Его можно найти методом, изложенным в п. 4.

При определенном выборе произвольной постоянной c_0 решения уравнения Бесселя, представляемые обобщенными степенными рядами (6.7.28) и (6.7.33), называются функциями Бесселя первого рода. Они линейно независимы при $n\notin \mathbf{N}_0$. Если же $n\in \mathbf{N}_0$, то линейно независимое с (6.7.28) решение, содержащее логарифм, называется при определенном выборе произвольной постоянной функцией Бесселя второго рода.

§ 8. Линеаризация автономной системы в окрестности положения равновесия

1. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(x), \qquad (6.8.1)$$

где $f: V\to \mathbf{C}^n$, $V=\{x:\|x\|<a\}$. Пусть система (6.8.1) имеет положение равновесия $x=0$ и $f(x)$ аналитична в области V. Представим $f(x)$ в виде

$$f(x)=Ax+X(x),$$

где $A\in \mathfrak{M}^{n,n}=\operatorname{colon}(X_1,\dots, X_n)$,

$$X_l=\sum_{k+\dots+k_n=2}^{\infty} a_l^{(k_1,\dots,k)_n} x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}.$$

В системе (6.8.1) осуществим замену переменных

$$x = y + h(y), \tag{6.8.2}$$

где

$$h_i(y) = \sum_{k_1+\dots+k_n=2}^{\infty} c_i^{(k_1,\dots,k_n)} y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}. \tag{6.8.3}$$

Рассмотрим вопрос, при каких условиях замена (6.8.2) приводит (6.8.1) к линейной системе

$$\dot{y} = Ay. \tag{6.8.4}$$

Дифференцируя (6.8.2) в силу систем (6.8.1) и (6.8.4), имеем

$$A(y+h) + X(y+h) = Ay + \frac{\partial h}{\partial y} Ay.$$

Следовательно, $h(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial h}{\partial y} Ay - Ah = X(y+h). \tag{6.8.5}$$

Представим $h(y)$ в виде суммы

$$h(y) = \sum_{p=2}^{\infty} h^{(p)}(y),$$

где $h_i^{(p)}(y) = \sum\limits_{k_1+\dots+k_n=p} c_i^{(k_1,\dots,k_n)} y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}.$

Функцию $h^{(p)}(y)$ будем называть однородным векторным полиномом степени p.

Уравнение (6.8.5) разобьем на бесконечную последовательность уравнений

$$\frac{\partial h^{(p)}}{\partial y} Ay - Ah^{(p)} = g^{(p)}(y), \quad p = 2, 3, \dots, \tag{6.8.6}$$

где $g^{(p)}(y)$ — однородный векторный полином степени p, полученный выделением из ряда $X(y+h)$ по степеням $y_1, \dots, y_n$ членов порядка p. Так как разложения X_i не содержат линейных членов, то $g^{(p)}$ выражаются только через те $h^{(j)}$, у которых $j < p$. Таким образом, при $p=2$ во второй части равенства (6.8.6) находится известная функция $X^{(2)}(y)$, и вообще, если $h^{(2)}, \dots, h^{(p-1)}$ известны, то $g^{(p)}(y)$ также является известной функцией.

Каждый однородный векторный полином можно задать перечислением его коэффициентов в определенном порядке. Будем использовать лексикографический порядок, т. е. считать, что $a_i^{(k_1,\dots,k_n)}$ предшествует $a_k^{(l_1,\dots,l_n)}$ тогда и только тогда, когда положительна первая из ненулевых разностей $k-i$, $l_1-k_1, \dots, l_n-k_n$.

Рассмотрим несколько более широкий класс однородных векторных полиномов $h^{(p)}(y)$, считая, что $h^{(p)}: \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$, где m не обязательно равно n. Множество таких полиномов образует векторное пространство, которое можно отождествить с N-мерным комплексным векторным пространством H, где $N(n, m, p)$ — число коэффициентов в $h^{(p)}$ (включая равные нулю).

Рассмотрим оператор

$$Lh^{(p)} = \frac{\partial h^{(p)}}{\partial y} Py - Qh^{(p)},$$

где $P \in \mathfrak{M}^{m,m}$, $Q \in \mathfrak{M}^{n,n}$. Ясно, что L — линейный оператор, действующий в пространстве H, которому соответствует $N \times N$ матрица.

Лемма 6.8.1. *Собственные числа* $\Lambda_i^{(k_1,\ldots,k_n)}$ *оператора* L *задаются формулой*

$$\Lambda_i^{(k_1,\ldots k)} = k_1\lambda_1 + \ldots k_m\lambda_m - \varkappa_i, \quad i = 1,\ldots, n, \tag{6.8.7}$$

где $k_1 + \ldots + k_m = p$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — *собственные числа матрицы* P; $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ — *собственные числа матрицы* Q; k_i — *целые неотрицательные.*

Доказательство. Пусть $h^{(p)}(y)$ — нетривиальный векторный полином степени p; $S \in \mathfrak{M}^{m,m}$, $T \in \mathfrak{M}^{n,n}$ — неособые матрицы. Положим

$$y = Sx; \quad h^{(p)}(y) = Tg^{(p)}(x).$$

Имеем

$$Lh^{(p)}(y) = T\,\frac{\partial g^{(p)}(x)}{\partial x}\,S^{-1}Py - QTg^{(p)}(x). \tag{6.8.8}$$

Рассмотрим уравнение для определения собственных чисел оператора L

$$Lh^{(p)}(y) = \Lambda h^{(p)}(y).$$

В силу (6.8.8) это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial g^{(p)}(x)}{\partial x} S^{-1}PSx - T^{-1}Qg^{(p)}(x) = \Lambda g^{(p)}(x).$$

Следовательно, собственные числа L совпадают с собственными числами оператора L^*

$$L^*g^{(p)}(x) = \frac{\partial g^{(p)}(x)}{\partial x} S^{-1}PSx - T^{-1}QTg^{(p)}(x).$$

Выберем S и T так, чтобы $S^{-1}PS = J_1$ и $T^{-1}QT = J_2$ были нижнетреугольными жордановыми матрицами. Построим матрицу оператора L^*.

Если положить $L^*h^{(p)}=f^{(p)}$, то

$$f_i^{(p)}(x)=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial h_i^{(p)}}{\partial x_\nu}(\lambda_\nu x_\nu+\sigma_\nu x_{\nu-1})-\varkappa_i h_i^{(p)}-\tau_i h_{i-1}^{(p)},$$

где σ_ν, τ_i — соответственно недиагональные элементы матриц J_1, J_2. Они равны либо нулю, либо единице. Если обозначить

$$f_i^{(p)}(x)=\sum_{k_1+\ldots+k_m=p} b_i^{(k_1,\ldots,k_m)}x_1^{k_1}\ldots x_m^{k_m},$$

то

$$b_i^{(k_1,\ldots,k_m)}=(k_1\lambda_1+\ldots+k_m\lambda_m-\varkappa_i)\,c_i^{(k_1,\ldots,k_m)}+$$

$$+\sum_{\nu=2}^{m}(1+k_\nu)\sigma_\nu c_i^{(k_1,\ldots,k_{\nu-1}-1,\,k_\nu+1,\ldots,\,k_m)}-\tau_i c_{i-1}^{(k_1,\ldots,k_m)}. \qquad (6.8.9)$$

Следовательно, при лексикографическом перечислении коэффициентов матрица оператора L^* — нижнетреугольная с числами (6.8.7) по главной диагонали. Лемма доказана.

Теперь уже нетрудно доказать основное утверждение. Вернемся к рассмотрению системы (6.8.1). Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — собственные числа матрицы A. Положим

$$\lambda_i^{(k_1,\ldots,k_n)}=k_1\lambda_1+\ldots+k_n\lambda_n-\lambda_i,$$

где $i=1,\ldots,n$; k_i — целые неотрицательные, причем $k_1+\ldots+k_n\geqslant 2$.

Теорема 6.8.1. *Если*

$$\lambda_i^{(k_1\ldots,k_n)}\neq 0, \qquad (6.8.10)$$

то существует единственный (формальный) ряд $h(y)$, такой, что замена (6.8.2) *приводит систему* (6.8.1) *к виду* (6.8.4).

Доказательство. Достаточно доказать, что при всех $p=2, 3,\ldots$ уравнения (6.8.6), где $g^{(p)}(y)$ — заданный однородный векторный полином, имеют единственное решение. По лемме 6.8.1 собственные числа операторов левой части (6.8.6) — числа $\lambda_i^{(k_1,\ldots,k_n)}$ В силу (6.8.10) они отличны от нуля, откуда и следует сделанное утверждение.

Ряды $h_i(y)$ могут как сходиться в некоторой окрестности начала координат, так и расходиться в любой его окрестности. Приведем простое достаточное условие сходимости рядов (6.8.3).

Теорема 6.8.2. *Если собственные числа матрицы A простые и существует $\varepsilon>0$ такое, что*

$$\left|\lambda_i^{(k_1,\ldots,k_n}\right|\geqslant\varepsilon, \qquad (6.8.11)$$

то ряды (6.8.3) *сходятся в некоторой окрестности точки $y=0$.*

Доказательство. Не нарушая общности, считаем, что $A = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Из (6,8.9) следует, что коэффициенты $c_i^{(k_1,\ldots,k_n)}$ рядов (6.8.3) удовлетворяют уравнению

$$\lambda_i^{(k_1,\ldots,k_n)} c_i^{(k_1,\ldots,k_n)} = \{X_i(y+h)\}^{(k_1,\ldots,k_n)},$$

где правая часть обозначает коэффициент при $y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n}$ в разложении функции $X_i(y+h(y))$ по степеням $y_1, \ldots, y_n$. В силу (6.8.11)

$$\left|c_i^{(k_1,\ldots,k_n)}\right| \leqslant \varepsilon^{-1} \left|\{X_i(y+h)\}^{(k_1,\ldots,k_n)}\right|. \tag{6.8.12}$$

Рассмотрим степенные ряды

$$\hat{X}_i(x) = \sum_{k_1+\ldots+k_n=2}^{\infty} \left|a_i^{(k_1,\ldots,k_n)}\right| x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n},$$

сходящиеся по лемме Абеля при $\|x\| < a$. Из (6.8.12) следует, что решение $v_i(y), \ldots, v_n(y)$ системы

$$v_i(y) = \varepsilon^{-1} \hat{X}_i(y_1 + v_1, \ldots, y_n + v_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6.8.13}$$

мажорирует функции (6.8.3), т. е. если

$$v_i(y) = \sum_{k_1+\ldots+k_n=2}^{\infty} b_i^{(k_1,\ldots,k_n)} y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n},$$

то $\left|c_i^{(k_1,\ldots,k_n)}\right| \leqslant b_i^{(k_1,\ldots,k_n)}$.

Запишем систему (6.8.13) в векторной форме как уравнение

$$\Phi(y, v) = v - \varepsilon^{-1} \hat{X}(y+v) = 0. \tag{6.8.14}$$

Разложения $\hat{X}_i$ начинаются с членов не ниже второго порядка, поэтому

$$\Phi(0, 0) = 0, \quad \det \frac{\partial \Phi}{\partial v}(0, 0) = 1.$$

Согласно теореме 6.1.5 решение уравнения (6.8.14), а значит, и системы (6.8.13) аналитично в некоторой окрестности точки $y = 0$. Следовательно, в той же окрестности сходятся ряды (6.8.3), что и требовалось доказать.

2. Применим полученные результаты к исследованию линейной системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки, где последняя является полюсом первого порядка. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dw}{dz} = z^{-1} A(z) w, \tag{6.8.15}$$

где $A(z)$ — аналитическая при $|z|<a$ матрица. Линейное уравнение (6.8.15) заменим нелинейной системой

$$\frac{dw}{dt}=A(z)w, \quad \frac{dz}{dt}=z. \tag{6.8.16}$$

Исключая из (6.8.16) t при $z\neq 0$, получаем (6.8.15). Представим $A(z)$ в виде ряда

$$A(z)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k, \quad A_k\in \mathfrak{M}^{n,n}.$$

Предположим, что собственные числа $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ матрицы A_0 простые. Попытаемся с помощью формальной замены

$$w=u+h(u, v), \quad z=v+h_{n+1}(u, v) \tag{6.8.17}$$

привести (6.8.16) к линейной форме

$$\dot u=A_0 u, \quad \dot v=v. \tag{6.8.18}$$

Второе из уравнений (6.8.16) линейно, поэтому можно положить $h_{n+1}=0$, т. е. $v=z$. Теперь замена (6.8.17) принимает вид

$$w=u+h(u, z),$$

причем $h(u, z)$ линейна по u, так как первое из уравнений (6.8.16) линейно по w.

Итак, отыщем матричный ряд $H(z)$ без свободного члена такой, что замена

$$w=u+H(z)u \tag{6.8.19}$$

преобразует систему (6.8.16) в систему (6.8.18) при $v=z$. В рассматриваемом случае $A=\mathrm{diag}\{A_0, 1\}$, $\lambda_{n+1}=1$, $k_{n+1}\in\mathbf{N}$, $k_1+\dots+k_n=1$. Условие (6.8.10) принимает вид $k+\lambda_j-\lambda_i\neq 0$, $i, j=1,\dots,n$; $k\in\mathbf{N}$. По теореме 6.8.1 ряд $H(z)$ существует, если

$$k+\lambda_j-\lambda_i\neq 0, \tag{6.8.20}$$

где $k\in\mathbf{N}$; $i, j=1,\dots,n$. Более того, поскольку модули чисел (6.8.20) отделены от нуля, по теореме 6.8.2 матрица $H(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки $z=0$.

Исключив t из системы (6.8.18), получим уравнение

$$\frac{du}{dz}=z^{-1}A_0 u,$$

которое имеет фундаментальную матрицу

$$e^{A_0 \mathrm{Ln}\, z}=z^{A_0}.$$

Отсюда и из (6.8.19) следует, что уравнение (6.8.15) имеет фундаментальную матрицу

$$(E_n+H(z))z^{A_0},$$

и, значит, общее решение

$$w=(E_n+H(z))z^{A_0}C,\quad C\in\mathbf{C}^n.$$

Так как $A_0\sim\operatorname{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$, то существует неособая матрица S такая, что

$$z^{A_0}S=S\operatorname{diag}\{z^{\lambda_1},\ldots,z^{\lambda_n}\}.$$

Следовательно, матрица

$$(E_n+H(z))S\operatorname{diag}\{z^{\lambda_1},\ldots,z^{\lambda_n}\}$$

является фундаментальной для уравнения (6.8.15). Все ее элементы — обобщенные степенные ряды. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6.8.3. *Если в уравнении* (6.8.15) *собственные числа матрицы* $A(0)$ *не отличаются друг от друга на целое число, то* $z=0$ *есть регулярная особая точка и каждое решение представляет собой линейную комбинацию обобщенных степенных рядов.*

Замечание. Этим же методом, но несколько сложнее, можно доказать, что $z=0$ является регулярной особой точкой для уравнения (6.8.15) и без сделанного в теореме 6.8.3 ограничения. Однако в этом случае фундаментальные матрицы, вообще говоря, содержат $\operatorname{Ln} z$.

В заключение параграфа рассмотрим линейное однородное уравнение следующего вида:

$$w^{(n)}+z^{-1}p_1(z)w^{(n-1)}+\ldots+z^{-n}p_n(z)w=0, \tag{6.8.21}$$

где $p_i(z)$, $i=1,\ldots,n$, аналитичны при $|z|<a$. Положим

$$w_1=w,\ w_2=zw',\ldots,\ w_n=z^{n-1}w^{(n-1)}.$$

Тогда вектор $w=\operatorname{colon}(w_1,\ldots,w_n)$ удовлетворяет линейной системе

$$\frac{dw}{dz}=z^{-1}A(z)w, \tag{6.8.22}$$

где

$$A(z)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & -p_{n-2} & -p_{n-3} & \ldots & (n-1)-p_1 \end{pmatrix}$$

— аналитическая при $|z|<a$ матрица.

Из теоремы 6.8.3 и замечания к ней заключаем, что $z=0$ является регулярной особой точкой для системы (6.8.22), а значит, и для уравнения (6.8.21). Справедливо и обратное утверждение: можно доказать (см.: *Коддингтон Э., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958), что $z=0$ — регулярная особая точка для линейного однородного уравнения порядка n только в том случае, когда оно имеет вид (6.8.21). Характеристическое уравнение матрицы $A(0)$ имеет следующий вид:

$$\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)+p_1(0)\lambda(\lambda-1)\ldots$$
$$\ldots(\lambda-n+2)+\ldots+p_{n-1}(0)\lambda+p_n(0)=0. \qquad (6.8.23)$$

Уравнение (6.8.23) называется *определяющим уравнением* для дифференциального уравнения (6.8.21). Из сказанного выше следует, что если разности между корнями определяющего уравнения не равны целым числам, то уравнение (6.8.21) имеет n линейно независимых решений в виде обобщенных степенных рядов.

Глава VII

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Устойчивость в малом

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение, зависящее от m-мерного параметра μ

$$\dot{x}=f(t, x, \mu), \tag{7.1.1}$$

где $f:G_\mu\to\mathbf{R}^n$, G_μ — область в $\mathbf{R}^{n+m+1}$, $f\in\mathrm{Lip}_x(G_\mu)\mathrm{loc}$. Пусть это уравнение при $\mu=\bar{\mu}$ имеет решение $x=\bar{x}(t)$, определенное при $t\in[t_0, \infty)$. Зафиксируем t_0 и рассмотрим решения $x(t, x_0, \mu)$ уравнения (7.1.1) с начальными данными (t_0, x_0). Функция $x(t, x_0, \mu)$ определена в области $D_\mu=\{(t, x_0, \mu):(t_0, x_0, \mu)\in G_\mu, t\in I\}$, где $I(t_0, x_0, \mu)$ — максимальный интервал существования решения $x(t, x_0, \mu)$. По условию область D_μ содержит полупрямую $(t, \bar{x}(t_0), \bar{\mu})$ при $t\in[t_0, \infty)$.

Согласно теореме 5.1.1′ при любом $T>t_0$ решение $x(t, x_0, \mu)$ равномерно непрерывно на множестве $[t_0, T]\times V^*$, где $V^*=\{(x_0, \mu):\|x_0-\bar{x}(t_0)\|<\delta^*, \|\mu-\bar{\mu}\|<\delta^*\}$, в частности, непрерывно по (x_0, μ) в точке $(\bar{x}(t_0), \bar{\mu})$ равномерно относительно $t\in[t_0, T)$. Хотя сказанное справедливо для любого $T>t_0$, нельзя положить $T=\infty$. Прежде всего потому, что решение $x(t, x_0, \mu)$, $(x_0, \mu)\in V^*$, при сколь угодно малом δ^* может быть непродолжимым на $[t_0, \infty)$. Примером служит уравнение $\dot{x}=x^2$ при $G_\mu=\mathbf{R}^{m+2}$ с решением $\bar{x}(t)=0$, $t\in[t_0, \infty)$ (см. рис. 1).

Однако и в том случае, когда все решения $x(t, x_0, \mu)$ при $(x_0, \mu)\in V^*$ продолжимы на все $t\geqslant t_0$, непрерывность $x(t, x_0, \mu)$ в точке $(\bar{x}(t_0), \bar{\mu})$ может быть неравномерной относительно $t\in[t_0, \infty)$. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}=\mu x\ (x, \mu\in\mathbf{R}). \tag{7.1.2}$$

Его решение с начальными данными (t_0, x_0) имеет вид

$$x(t, x_0, \mu)=x_0\exp\{\mu(t-t_0)\}.$$

В качестве $\bar{x}(t)$ возьмем тривиальное решение $x=0$ при $\mu=\bar{\mu}$. Пусть $\bar{\mu}\geqslant 0$, $T>t_0$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta>0$ такое, что

$$|x_0|<\delta,\quad |\mu-\bar{\mu}|<\delta\Rightarrow|x_0\exp\{\mu(t-t_0)\}|<\varepsilon \tag{7.1.3}$$

при всех $t \in [t_0, T]$. Однако для $t \in [t_0, \infty)$ это неверно. Равномерная непрерывность в точке $(0, \bar{\mu} \geqslant 0)$ не имеет места. Если же $\bar{\mu} < < 0$, то (7.1.3) выполняется при всех $t \geqslant t_0$.

Определение 7.1.1. *Решение* $\bar{x}: (t_0, \infty) \to \mathbf{R}^n$ *уравнения* (7.1.1) *при* $\mu = \bar{\mu}$ *называется устойчивым в малом, если существует окрестность* $V^* \subset \mathbf{R}^{n+m}$ *точки* $(\bar{x}(t_0), \bar{\mu})$ *такая, что* $S = [t_0, \infty) \times V^* \subset \subset D_\mu$ *и функция* $x(t, x_0, \mu)$ *непрерывна по* (x_0, μ) *в точке* $(\bar{x}(t_0), \bar{\mu})$ *равномерно относительно* $t \in [t_0, \infty)$. *В противном случае решение* $\bar{x}(t)$ *называется неустойчивым в малом.*

В приведенном примере тривиальное решение $x=0$ уравнения (7.1.2) с $\mu = \bar{\mu}$ устойчиво в малом при $\bar{\mu} < 0$ и неустойчиво в малом при $\bar{\mu} \geqslant 0$.

В начале гл. V отмечалась важность вопроса о непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметров с точки зрения приложений. Во многих практических ситуациях равномерная непрерывность решения по x_0, μ должна быть гарантирована на сколь угодно большом промежутке времени. Поэтому вопрос об устойчивости решения в малом является одним из основных вопросов теории дифференциальных уравнений.

Положим в уравнении (7.1.1)

$$y = x - \bar{x}(t), \quad \alpha = \mu - \bar{\mu}. \tag{7.1.4}$$

Тогда

$$\dot{y} = F(t, y, \alpha), \tag{7.1.5}$$

где

$$F(t, y, \alpha) = f(t, y + \bar{x}(t), \alpha + \bar{\mu}) - f(t, \bar{x}(t), \bar{\mu}).$$

Решению $\bar{x}(t)$ уравнения (7.1.1) при $\mu = \bar{\mu}$ соответствует решение $y=0$, $t \in [t_0, \infty)$ уравнения (7.1.5) при $\alpha = 0$. Таким образом, вопрос от устойчивости в малом произвольного решения сведен к вопросу об устойчивости в малом нулевого (тривиального) решения при нулевом значении параметра. Определение 7.1.1 принимает следующий вид.

Определение 7.1.2. *Решение* $y(t) = 0$, $t \in [t_0, \infty)$ *уравнения* (7.1.5) *при* $\alpha = 0$ *называется устойчивым в малом, если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать* $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ *такие, что при* $\|y_0\| < \delta_1$, $\|\alpha\| < \delta_2$:

1) *решения* $y(t, y_0, \alpha)$ *уравнения* (7.1.5) *с начальными данными* t_0, y_0 *продолжимы на все* $t \in [t_0, \infty)$;

2) *при любом* $t \geqslant t_0$ *справедливо неравенство*

$$\|y(t, y_0, \alpha)\| < \varepsilon. \tag{7.1.6}$$

Предположим, что можно указать $\delta^* > 0$ такое, что $G_\mu \supset U$, где

$$U = \{(t, x, \mu): t \in [t_0, \infty), \ \|x - \bar{x}(t)\| < \delta^*, \ \|\mu - \bar{\mu}\| < \delta^*\}.$$

Тогда область определения уравнения (7.1.5) содержит множество

$$U^*=\{(t,\ y,\ \alpha): t\in[t_0,\ \infty),\quad \|y\|<\delta^*,\ \|\alpha\|<\delta^*\}.$$

В этом случае, согласно замечанию к теореме 2.4.2, так как в (7.1.6) можно полагать $\varepsilon<\delta^*$, то в определении 7.1.2 1) вытекает из 2), если (7.1.6) выполняется при $t\geqslant t_0$ из области определения $y(t,\ y_0,\ \alpha)$.

2. Устойчивость в малом по первому приближению. Пусть в дополнение к условиям п. 1 $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial \mu}$ существуют и непрерывны в области G_μ, причем $G_\mu\supset U$ при некотором $\delta^*>0$. Замена (7.1.4) переводит (7.1.1) в уравнение (7.1.5), область определения которого содержит U^*. По формуле Тейлора (2.1.10)

$$F(t,\ y,\ \alpha)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,\ \bar{x},\ (t),\ \bar{\mu})\,y+\frac{\partial f}{\partial \mu}(t,\ \bar{x}(t),\ \bar{\mu})\,\alpha+r(t,\ y,\ \alpha),$$

где $r(t,\ y,\ \alpha)$ — непрерывная вместе с $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial \alpha}$ на множестве U^* функция, причем

$$\frac{\|r(t,\ y,\ \alpha)\|}{\|(y,\ \alpha)\|}\to 0 \text{ при } \|y\|\to 0,\ \|\alpha\|\to 0.$$

Следовательно, уравнение (7.1.5) можно записать в виде

$$\dot{y}=\frac{\partial f}{\partial x}(t,\ \bar{x}(t),\ \bar{\mu})\,y+g(t,\ y)+h(t,\ y,\ \alpha), \tag{7.1.7}$$

где $g(t,\ y)$, $h(t,\ y,\ \alpha)$ — непрерывные вместе с $\partial g/\partial y$, $\partial h/\partial y$, $\partial h/\partial \alpha$ на U^* функции, причем

$$\frac{\|g(t,\ y)\|}{\|y\|}\to 0 \text{ при } \|y\|\to 0, \tag{7.1.8}$$

$$\|h(t,\ y,\ \alpha)\|\leqslant M(t)\|\alpha\|. \tag{7.1.9}$$

Линейное уравнение

$$\dot{y}=A(t)\,x,\quad A(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,\ \bar{x}(t),\ \bar{\mu}) \tag{7.1.10}$$

называется первым приближением уравнения (7.1.7). Оно совпадает с уравнением в вариациях (5.2.1) относительно решения $\bar{x}(t)$. Во многих случаях вопрос об устойчивости в малом тривиального решения уравнения (7.1.7) можно разрешить на основании исследования только первого приближения (7.1.10).

Пусть $A(t)=A$ — постоянная матрица. Тогда (7.1.7) принимает вид

$$\dot{y}=Ay+g(t,\ y)+h(t,\ y,\ \alpha). \tag{7.1.11}$$

Теорема 7.1.1. *Пусть собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, в (7.1.8) предельный переход осуществляется равномерно по $t \in [t_0, \infty)$, а в (7.1.9) $M(t) \leqslant M_0$, $M_0 > 0$, при $t \in [t_0, \infty)$. Тогда решение $y=0$ уравнения (7.1.11) при $\alpha=0$ устойчиво в малом.*

Доказательство. Пусть $y(t)=y(t, y_0, \alpha)$ — решение уравнения (7.1.11) с начальными данными (t_0, y_0). По теореме 4.7.4

$$y(t)=e^{(t-t_0)A}y_0+\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}[g(s, y(s))+h(s, y(s), \alpha)]\,ds.$$

Следовательно,

$$\|y(t)\| \leqslant n\|y_0\|\cdot \|e^{(t-t_0)A}\|+n\int_{t_0}^{t} \|e^{(t-s)A}\|(\|g\|+\|h\|)\,ds.$$

Так как собственные числа A имеют отрицательные вещественные части, то при некоторых $\lambda>0$, $K \geqslant 1$ в силу (4.5.10) и (7.1.9)

$$\|y(t)\| \leqslant nK\|y_0\|e^{-\lambda(t-t_0)}+nK\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)}(\|g\|+M_0\|\alpha\|)\,ds. \quad (7.1.12)$$

Пусть $0<\varepsilon_0<\lambda$. В силу равномерности предельного перехода в (7.1.8) существует $\delta_0>0$ такое, что

$$t \in [t_0, \infty),\ \|y\| \leqslant \delta_0 \Rightarrow \|g(t, y)\| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{nK}\|y\|. \quad (7.1.13)$$

Пусть $\|y_0\|<\delta_0$. Тогда $\|y(t)\| \leqslant \delta_0$ на некотором отрезке $[t_0, \bar{t}]$, $\bar{t} > t_0$. Из (7.1.12) и (7.1.13) заключаем, что при $t \in [t_0, \bar{t}]$

$$\|y(t)\| \leqslant nKe^{-\lambda(t-t_0)}[\|y_0\|+\lambda^{-1}M_0\|\alpha\|(e^{\lambda(t-t_0)}-1)]+$$
$$+\varepsilon_0\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)}\|y(s)\|\,ds. \quad (7.1.14)$$

Положим $a=nK(\|y_0\|-\lambda^{-1}M_0\|\alpha\|)$, $b=\lambda^{-1}nKM_0\|\alpha\|$,

$$\varphi(t)=e^{\lambda(t-t_0)}\|y(t)\|, \quad \psi(t)=a+be^{\lambda(t-t_0)}.$$

Тогда (7.1.14) принимает вид

$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \psi(t)+\varepsilon_0\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,ds, \quad t \in [t_0, \bar{t}].$$

Применяя лемму Гроноулла 1.3.1, получаем

$$\varphi(t) \leqslant \psi(t)+\varepsilon_0\int_{t_0}^{t} e^{\varepsilon_0(t-s)}\psi(s)\,ds,$$

откуда

$$\varphi(t)\leqslant\frac{\lambda b}{\lambda-\varepsilon_0}e^{\lambda(t-t_0)}+\left(a-\frac{\varepsilon_0 b}{\lambda-\varepsilon_0}\right)e^{\varepsilon_0(t-t_0)},\quad t\in[t_0,\bar t],$$

или

$$\|y(t)\|\leqslant\frac{\lambda b}{\lambda-\varepsilon_0}+\left(a-\frac{\varepsilon_0 b}{\lambda-\varepsilon_0}\right)e^{(\varepsilon_0-\lambda)(t-t_0)},\quad t\in[t_0,\bar t].\qquad(7.1.15)$$

Следовательно, при $t\in[t_0,\bar t]$

$$\|y(t)\|\leqslant\max\left\{a+b=nK\|y_0\|,\ \frac{\lambda b}{\lambda-\varepsilon_0}=\frac{nKM_0\|\alpha\|}{\lambda-\varepsilon_0}\right\}.\qquad(7.1.16)$$

Покажем, что если

$$\|y_0\|<\frac{\delta_0}{nK},\quad \|\alpha\|<\frac{\delta_0(\lambda-\varepsilon_0)}{nKM_0},\qquad(7.1.17)$$

то (7.1.15) и (7.1.16) имеют место при всех $t\geqslant t_0$. Достаточно доказать, что $\|y(t)\|<\delta_0$ при $t\geqslant t_0$. При значениях t, бо́льших t_0 и близких к t_0, это так, поскольку $nK\geqslant 1$.

Предположим, что существует момент $t^*>t_0$ такой, что $\|y(t^*)\|=\delta_0$ и что t^* — первый после t_0 такой момент, т. е. при $t\in[t_0,t^*)\ \|y(t)\|<\delta_0$. Тогда на $[t_0,t^*]$ справедливо неравенство (7.1.16), откуда $\|y(t^*)\|<\delta_0$ в силу (7.1.17), что противоречит определению t^*.

Теперь в силу (7.1.16) для произвольного $\varepsilon>0$ величины

$$\delta_1=\frac{\varepsilon}{nK},\quad \delta_2=\frac{(\lambda-\varepsilon_0)\varepsilon}{nKM_0}$$

гарантируют выполнение (7.1.6), если только

$$\delta_{1,2}<\delta^*,\quad \delta_1\leqslant\frac{\delta_0}{nK},\quad \delta_2\leqslant\frac{\delta_0(\lambda-\varepsilon_0)}{nKM_0}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Порождающее решение квазилинейного уравнения* (5.3.1) *устойчиво в малом, если собственные числа матрицы* A *в* (5.3.1) *имеют отрицательные вещественные части.*

Действительно, пусть $\bar x(t)$ — порождающеё решение. Положим в (5.3.1) $y=x-\bar x(t)$; тогда

$$\dot y=Ay+\mu F(t,y,\mu),$$

где $\|F\|=\|h(t,\bar x(t)+y,\mu)\|\leqslant M_0$ в силу периодичности h в (5.3.1) и $\bar x(t)$ по t. Поэтому условия теормы 7.1.1 выполняются.

§ 2. Устойчивость по Ляпунову

1. Предположим, что параметры уравнения (7.1.1) фиксированы. Тогда устойчивость в малом превращается в равномерную непрерывность по начальным данным. В этом случае устойчи-

вость в малом называется устойчивостью по Ляпунову. Ясно, что неустойчивость по Ляпунову влечет за собой неустойчивость в малом. Поэтому в дальнейшем будем говорить вместо «неустойчивость по Ляпунову» просто «неустойчивость».

Пусть выполнены условия п. 1 предыдущего параграфа. Поскольку параметры фиксированы, мы рассматриваем уравнение

$$\dot{x}=f(t, x), \tag{7.2.1}$$

где $f\in \mathrm{Lip}_x(G)\mathrm{loc}$. Предположим, что уравнение (7.2.1) имеет решение $\bar{x}(t)$, определенное при $t\in[t_0, \infty)$, и что $G\supset U=\{(t, x): t\in [t_0, \infty), \|x-\bar{x}(t)\|<\delta^*, \delta^*>0\}$. Выполним в (7.2.1) замену $y=x-\bar{x}(t)$. В результате получим уравнение

$$\dot{y}=h(t, y), h(t, 0)=0, \tag{7.2.2}$$

где $h(t, y)$ определена в области, содержащей множество $U^*=\{(t, y): t\in[t_0, \infty), \|y\|<\delta^*\}$. Пусть $y(t, y_0)$ — решение (7.2.2) с начальными данными (t_0, x_0).

Определение 7.2.1. *Решение $y(t)\equiv 0$ уравнения* (7.2.2) *называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta>0$ такое, что при всех $t\geqslant t_0$*

$$\|y_0\|<\delta \Rightarrow \|y(t, y_0)\|<\varepsilon \tag{7.2.3}$$

(*продолжимость решения, удовлетворяющего* (7.2.3), *на все $t\geqslant t_0$ вытекает из замечания к теореме* (2.4.2).

Определение 7.2.2. *Решение $y\equiv 0$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и существует $\Delta>0$ такое, что*

$$\|y_0\|<\Delta \Rightarrow \|y(t, y_0)\|\to 0 \text{ при } t\to\infty. \tag{7.2.4}$$

Неустойчивость решения $y\equiv 0$ означает следующее: существуют положительное $\varepsilon<\delta^*$, последовательность начальных точек $y^k\in\mathbf{R}^n$, $\|y^k\|\to 0$ при $k\to\infty$, и последовательность моментов времени $t_k>t_0$ такие, что $\|y(t_k, y^k)\|=\varepsilon$.

При исследовании вопроса об устойчивости решений часто прибегают к заменам переменных, позволяющим упростить вид рассматриваемого уравнения. Сделаем в (7.2.2) замену

$$y=F(t, z), \tag{7 2.5}$$

где функция $F(t, z)$ определена при $t\in]t_0, \infty)$, $\|z\|<\delta_0$ и непрерывна по z при $z=0$ равномерно относительно $t\in[t_0, \infty)$, причем $F(t, 0)=0$. Пусть (7.2.5) однозначно разрешимо относительно z: $z=G(t, y)$, где $G(t, y)$ определена на множестве U^* и непрерывна по y при $y=0$ равномерно относительно $t\in]t_0, \infty)$. Пусть уравнение (7.2.2) заменой (7.2.5) можно преобразовать в уравнение

$$\dot{z}=H(t, z). \tag{7.2.6}$$

Лемма 7.2.1. *При сделанных предположениях нулевое решение уравнения* (7.2.2) *устойчиво по Ляпунову, асимптотически устойчиво или неустойчиво тогда и только тогда, когда соответственно устойчиво по Ляпунову, асимптотически устойчиво или неустойчиво нулевое решение уравнения* (7.2.6).

Доказательство. Так как уравнения (7.2.2) и (7.2.6) равноправны, достаточно доказать, что из устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (7.2.6) вытекает устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (7.2.2).

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Используя равномерную непрерывность $F(t, z)$ при $z=0$, по данному ε находим $\varepsilon_1>0$ такое, чтобы

$$\|z\|<\varepsilon_1 \Rightarrow \|y\|<\varepsilon,$$

где $y=F(t, z)$. Пусть нулевое решение уравнения (7.2.6) устойчиво по Ляпунову. По ε_1 можно указать $\delta_1>0$ такое, что

$$\|z_0\|<\delta_1 \Rightarrow \|z(t, z_0)\|<\varepsilon_1, \quad t\in[t_0, \infty).$$

Используя непрерывность при $y=0$ функции $G(t_0, y)$ по δ_1, найдем $\delta>0$ такое, чтобы

$$\|y_0\|<\delta \Rightarrow \|z_0\|<\delta_1,$$

где $z_0=G(t_0, y_0)$. Теперь имеем

$$\|y_0\|<\delta \Rightarrow \|z_0\|<\delta_1 \Rightarrow \|z(t, z_0)\|<\varepsilon_1 \Rightarrow \|y(t, y_0)\|<\varepsilon.$$

Таким образом, из устойчивости по Ляпунову нулевого решения уравнения (7.2.6) следует устойчивость по Ляпунову нулевого решения уравнения (7.2.2).

Соответствующее утверждение, касающееся асимптотической устойчивости, доказывается аналогично.

Задача 7.2.1. Пусть уравнение (7.2.2) автономно, а его нулевое решение асимптотически устойчиво. Множество $A=\{y_0: \|y(t, y_0)\|\to 0$ при $t\to\infty\}$ называется областью притяжения решения $y=0$. Докажите, что A — действительно область, т. е. открытое и связное множество.

2. Устойчивость по Ляпунову линейных однородных систем. Пусть

$$\dot{x}=P(t)x \tag{7.2.7}$$

— вещественная система, $P:(\tau, \infty)\to\mathfrak{R}^{n,n}$, $\varphi:(\tau, \infty)\to\mathbf{R}^n$ — ее произвольное решение. Замена $y=x-\varphi(t)$ приводит (7.2.7) к виду $\dot{y}=Py$, т. е. произвольное решение уравнения (7.2.7) переводится в тривиальное решение того же уравнения. Следовательно, все решения уравнения (7.2.7) устойчивы по Ляпунову, асимптотически устойчивы или неустойчивы одновременно. Поэтому можно говорить об устойчивости уравнения (7.2.7), понимая под этим устойчивость всех его решений, в частности тривиального.

Приведем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 7.2.2. *Пусть* $\Phi(t)$, $\Psi(t):[t_0, \infty]\to\mathfrak{M}^{n,n}$ и $\Phi(t)=\Psi(t)Q(t)$ *или* $\Phi(t)=Q(t)\Psi(t)$, *где* $Q(t)$ — *неособая при всех* $t\in[t_0, \infty]$ *матрица, ограниченная по норме вместе с обратной* $Q^{-1}(t)$. *Тогда* $\Psi(t)$ *ограничена, не ограничена или бесконечно мала по норме при* $t\to\infty$ *тогда и только тогда, когда* $\Phi(t)$ *обладает таким свойством.* Лемма 7.2.2 вытекает из оценки (2.1.3).

Следствие. *Пусть* $t_0\in(\tau, \infty)$, $\Phi(t, t_0)$ — *нормированная при* $t=t_0$ *фундаментальная матрица уравнения* (7.2.7). *Любая фундаментальная матрица уравнения* (7.2.7) *ограничена, не ограничена или бесконечно мала по норме вместе с* $\Phi(t, t_0)$.

Теорема 7.2.1. 1) *Для того чтобы уравнение* (7.2.7) *было устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы его фундаментальные матрицы были ограничены при* $t\in[t_0, \infty)$. 2) *Для того чтобы уравнение* (7.2.7) *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы его фундаментальные матрицы были бесконечно малыми при* $t\to\infty$.

Доказательство. 1) Достаточность. Пусть $\Phi(t, t_0)$ ограиичена на $[t_0, \infty)$. Решение $x(t, x_0)$ в силу (4.2.4) задается формулой

$$x(t, x_0)=\Phi(t, t_0)x_0. \tag{7.2.8}$$

Так как $\|\Phi(t, t_0)\|\leqslant M$, то на основании (2.1.3)

$$\|x(t, x_0)\|\leqslant nM\|x_0\|.$$

Следовательно, уравнение (7.2.7) устойчиво по Ляпунову, так как устойчиво его тривиальное решение. Действительно, если $\delta=\varepsilon/(nM)$, то при всех $t\geqslant t_0$

$$\|x_0\|<\delta\Rightarrow\|x(t, x_0)\|<\varepsilon. \tag{7.2.9}$$

Необходимость. Пусть (7.2.7) устойчиво по Ляпунову. Значит, устойчиво его тривиальное решение. Тогда выполняется (7.2.9). Пусть $\varepsilon>0$ фиксировано. Положим $x_0=\mathrm{colon}(^1/_2\delta, 0, \dots, 0)$. Если $\Phi(t, t_0)=(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$, то $\Phi(t, t_0)x_0={}^1/_2\delta\varphi^1$. Из (7.2.8) и (7.2.9) имеем

$$\|{}^1/_2\delta\varphi^1\|={}^1/_2\delta\|\varphi^1\|<\varepsilon,$$

т. е. φ^1 ограничена. Аналогично доказывается ограниченность φ^k, $k=2, \dots, n$, а вместе с ними и матрицы $\Phi(t, t_0)$.

2) Достаточность. Пусть $\|\Phi(t, t_0)\|\to 0$ при $t\to\infty$. В силу (7.2.8) $\|x(t, x_0)\|\leqslant n\|x_0\|\cdot\|\Phi\|\to 0$ при всех x_0, что и дает асимптотическую устойчивость.

Необходимость. Пусть для любых $\|x_0\|<\Delta\|x(t, x_0)\|\to 0$ при $t\to\infty$. Положим $x_0=\mathrm{colon}(^1/_2\Delta, 0, \dots, 0)$. В силу (7.2.8) ${}^1/_2\Delta\|\varphi^1(t)\|\to 0$, следовательно, $\|\varphi^1(t)\|\to 0$. Аналогично докажем, что $\|\varphi^k(t)\| \to 0$, $k=2,\dots,n$, что означает $\|\Phi(t, t_0)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Теорема доказана.

Применим теорему 7.2.1 к исследованию устойчивости уравнения (7.2.7) с постоянной матрицей коэффициентов P. Согласно п. 2 § 5 гл. IV, уравнение (7.2.7) в этом случае имеет фундаментальную матрицу Se^{Jt}, $\det S \neq 0$, где J — жорданова форма матрицы P. По теореме 7.2.1, лемме 7.2.2 и следствию к ней устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость и неустойчивость уравнения (7.2.7) эквивалентны соответственно ограниченности, бесконечной малости и неограниченности матрицы e^{Jt} при $t \in [t_0, \infty)$. Структура этой матрицы видна из формулы (4.5.4) и последующих формул. Отсюда и из (4.5.5), (4.5.6) получаем следующую теорему.

Теорема 7.2.2. *Линейная однородная система с постоянными коэффициентами:*

1) *устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда среди собственных чисел матрицы коэффициентов нет таких, вещественные части которых положительны, а чисто мнимые и нулевые собственные числа либо простые, либо имеют только простые элементарные делители;*

2) *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы коэффициентов имеют отрицательные вещественные части.*

Рассмотрим теперь уравнение (7.2.7) с периодическими коэффициентами, т. е. $P: \mathbb{R} \to \mathfrak{R}^{n,n}$ и $P(t+\omega) = P(t)$. По формуле (4.6.13) уравнение (7.2.7) имеет в рассматриваемом случае фундаментальную матрицу $G(t)e^{Jt}$, где $G(t)$ — неособая ω-периодическая непрерывная матрица, тем самым ограниченная вместе с обратной, J — жорданова матрица, собственные числа λ_k, $k = 1, \dots, n$, которой — характеристические показатели уравнения (7.2.7). Из леммы 7.2.2 следует, что характеристические показатели играют при оценке фундаментальной матрицы ту же роль, что собственные числа P, когда P постоянна. Учитывая, что $\lambda_k = \omega^{-1} \times \times \operatorname{Ln} \mu_k$, где μ_k — мультипликаторы уравнения, получим следующий результат.

Теорема 7.2.3. *Линейная однородная система с периодическими коэффициентами:*

1) *устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы не превышают по модулю единицы, а равные единице по модулю либо простые, либо им соответствуют простые элементарные детали матрицы монодромии;*

2) *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда модули всех мультипликаторов меньше единицы.*

Пример 7.2.1. Рассмотрим уравнение (см. пример 4.6.1)

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \qquad (7.2.10)$$

где $p: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — ω-периодическая непрерывная функция. Уравнение (7.2.10) будем называть устойчивым по Ляпунову, асимптотически устойчивым, либо неустойчивым, если таковой является соответствующая ему линейная система (4.6.7). Из (4.6.9) и (4.6.10) находим мультипликаторы μ_1 и μ_2

$$\mu_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}, \tag{7.2.11}$$

где

$$a = \frac{1}{2} [\varphi_1(\omega) + \dot{\varphi}_2(\omega)], \tag{7.2.12}$$

а $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — решения (7.2.10), удовлетворяющие условиям $\varphi_1(0) = 1$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$; $\varphi_2(0) = 0$, $\dot{\varphi}_2(0) = 1$. Из (7.2.11) заключаем, что при $|a| > 1$ оба мультипликатора вещественны и один из них по абсолютной величине больше единицы, а при $|a| < 1$ мультипликаторы являются комплексно-сопряженными с модулями, равными единице. По теореме 7.2.3 при $|a| > 1$ уравнение (7.2.10) неустойчиво, а при $|a| < 1$ оно устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически.

3. Устойчивость по первому приближению. Вернемся к рассмотрению уравнения (7.2.1), где $f \in C_x^1(G)$. После замены $y = x - \bar{x}(t)$ получим уравнение (7.2.2), которое, используя формулу Тейлора (2.1.10), запишем в виде

$$\dot{y} = A(t) y + g(t, y), \tag{7.2.13}$$

где

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}(t)),$$

$$\frac{\|g(t, y)\|}{\|y\|} \to 0 \text{ при } \|y\| \to 0. \tag{7.2.14}$$

Теорема 7.2.4. *Пусть A — постоянная матрица, предельный переход в (7.2.14) выполняется равномерно по $t \in [t_0, \infty)$ и вещественные части собственных чисел матрицы A отрицательны. Тогда решение $y = 0$ уравнения (7.2.13) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 7.1.1. Поскольку параметры фиксированы, $\alpha = 0$, следовательно, $b = 0$, $a = nk\|y_0\|$. В силу (7.1.15)

$$\|y(t)\| \leqslant nk\|y_0\| \exp\{(\varepsilon_0 - \lambda)(t - t_0)\},$$

причем это неравенство выполняется при всех $t \geqslant t_0$, если $\|y_0\| \leqslant \frac{\delta_0}{nK}$. Тогда условие (7.2.3) в определении 7.2.1 выполняется при $\delta = \frac{\varepsilon}{nK}$ $(\varepsilon < \delta_0)$, а условие (7.2.4) в определении 7.2.2 выполняется при $\Delta = \frac{\delta_0}{nK}$. Теорема доказана.

Следующая теорема, которая будет доказана в § 5 гл. VII, показывает, что условия теоремы 7.2.4 весьма близки к необходимым.

Теорема 7.2.5. *Если A — постоянная матрица, предельный переход в (7.2.14) выполняется равномерно по $t \in [t_0, \infty)$, то для устойчивости по Ляпунову нулевого решения уравнения (7.2.13) необходимо, чтобы вещественные части собственных чисел матрицы A были неположительны.*

Рассмотрим теперь автономное уравнение (7.2.1):

$$\dot{x} = f(x), \tag{7.2.15}$$

где функция f непрерывно дифференцируема при $\|x - \bar{x}\| < \delta^*$, причем $f(\bar{x}) = 0$. Тогда $x = \bar{x}$ является положением равновесия уравнения (7.2.15). После замены $y = x - \bar{x}$ уравнение (7.2.13) принимает вид

$$\dot{y} = Ay + g(y), \tag{7.2.16}$$

где $A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$, функция $g(y)$ непрерывно дифференцируема при $\|y\| < \delta^*$ и

$$\frac{\|g(y)\|}{\|y\|} \to 0 \text{ при } \|y\| \to 0. \tag{7.2.17}$$

Из (7.2.17) и теорем 7.2.4 и 7.2.5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.2.6. *Если все собственные числа матрицы $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$ имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия $\bar{x}$ асимптотически устойчиво; если же хоть одно из собственных чисел имеет положительную вещественную часть, то оно неустойчиво.*

Пример 7.2.2. Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{7.2.18}$$

$$\dot{x}_2 = \cos(x_1 + x_2).$$

Координаты положений равновесия определяются из уравнений $x_2 = 0, \cos(x_1 + x_2) = 0$. Положения равновесия $\bar{x}^k = \left(\frac{\pi}{2}(2k+1),\ 0\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Соответствующие матрицы $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}^k)$ имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}^k) = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(x_1 + x_2) & -\sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}\right|_{x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ x_2 = 0},$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}^k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & (-1)^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа определяются уравнением

$$\lambda^2+(-1)^k\lambda+(-1)^k=0.$$

При k четном $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}\sqrt{3}$, при k нечетном $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\pm$ $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. По теореме 7.2.6 при k четном решения $\bar{x}^k$ системы (7.2.18) асимптотически устойчивы, а при k нечетном — неустойчивы.

Предположим теперь, что правая часть уравнения (7.2.1) и решение $\bar{x}(t)$ периодичны по t с одним и тем же периодом ω. Тогда в уравнении (7.2.13) $A(t+\omega)=A(t)$, $g(t+\omega, y)=g(t, y)$. Далее, так как $g(t, y)$ равномерно непрерывна на компакте $\{(t, y): t\in \in[t_0, t_0+\omega], \|y\|\leqslant 1/2\delta^*\}$, то в силу периодичности $g(t, y)$ (7.2.4) выполняется равномерно по $t\in[t_0, \infty)$. Поскольку $A(t)$ — периодическая матрица, на основании п. 4 § 6 гл. IV уравнение $\dot{y}=A(t)y$ приводимо, т. е. существует замена переменных

$$y=G(t)z, \tag{7.2.19}$$

где $G: \mathbf{R}\to\mathfrak{R}^{n,n}$ — периодическая (с периодом ω или 2ω) функция класса C^1, причем $\det G(t)\neq 0$, переводящая это уравнение в $\dot{z}= =Rz$ с постоянной матрицей коэффициентов R. Следовательно, замена (7.2.19) переводит (7.2.13) в уравнение

$$\dot{z}=Rz+\tilde{g}(t, z), \tag{7.2.20}$$

причем функция $\tilde{g}(t, \tilde{z})=G^{-1}g(t, Gz)$ определена и непрерывна в области вида U^*. Условие (7.2.14) также выполняется. Действительно,

$$\frac{\|\tilde{g}(t, z)\|}{\|z\|}\leqslant\frac{n^2\|G\|\cdot\|G^{-1}\|\cdot\|g(t, Gz)\|}{\|Gz\|}\xrightarrow[\|Gz\|\to 0]{}0$$

в силу (7.2.14), ограниченности G и G^{-1} и поскольку $\|z\|\to 0$ эквивалентно $\|Gz\|\to 0$. При этом, как отмечалось, имеет место равномерность по t.

Согласно лемме 7.2.1 вопрос об устойчивости тривиального решения уравнения (7.2.13) эквивалентен вопросу об устойчивости тривиального решения уравнения (7.2.20). Так как $\lambda_k=\omega^{-1}\operatorname{Ln}\mu_k$ (считаем период равным ω), где λ_k — собственные числа матрицы R, а μ_k — мультипликаторы линейного уравнения

$$\dot{y}=\frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}(t))\,y, \tag{7.2.21}$$

называемые также мультипликаторами периодического решения $\bar{x}(t)$, то из теорем 7.2.4 и 7.2.5 вытекает следующая теорема.

Теорема 7.2.7. *Если модули всех мультипликаторов периодического решения периодического уравнения (7.2.1) меньше единицы, то это решение асимптотически устойчиво. Если же модуль* *хоть одного из мультипликаторов больше единицы, то оно неустойчиво.*

В заключение рассмотрим смешанный случай; когда исследуется устойчивость ω-периодического решения $\bar{x}(t)$ автономного уравнения (7.2.15). Дифференцируя тождество $\dot{\bar{x}}(t)=f(\bar{x}(t))$, получаем

$$\ddot{\bar{x}}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t))\,\dot{\bar{x}}(t).$$

Следовательно, функция $\dot{\bar{x}}(t)$ является ω-периодическим решением уравнения в вариациях (7.2.21). По теореме 4.6.2 один из мультипликаторов равен единице. Если среди остальных мультипликаторов имеются такие, модули которых больше единицы, то решение $\bar{x}(t)$ неустойчиво по теореме 7.2.7. В противном случае теорема 7.2.7 неприменима.

Теорема 7.2.8. *Если $n-1$ мультипликаторов периодического решения уравнения* (7.2.15) *имеют модули, меньшие единицы, то это решение устойчиво по Ляпунову.*

Замечание. Уравнение (7.2.15) автономно, поэтому наряду с решением $\bar{x}(t)$ имеются и решения $\bar{x}(t+C)$, $C\in\mathbf{R}$, следовательно, решение $\bar{x}(t)$ не может быть асимптотически устойчивым.

Теорема 7.2.8 называется **теоремой Андронова — Витта.** Для аналитической $f(x)$ она будет доказана в § 10 гл. VIII.

По формуле (4.6.5), учитывая, что $\mu_1=1$, имеем

$$\mu_2\ldots\mu_n=\exp\left\{\int_0^\omega \operatorname{sp}\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t))\,dt\right\}.$$

Отсюда при $n=2$ получаем

$$\mu_2=\exp\left\{\int_0^\omega \operatorname{sp}\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t))\,dt\right\}. \qquad (7.2.22)$$

Следствие. *Если $n=2$ и*

$$h=\int_0^\omega \operatorname{sp}\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t))\,dt<0, \qquad (7.2.23)$$

то решение $\bar{x}(t)$ уравнения (7.2.15) *устойчиво по Ляпунову; если же $h>0$, то оно неустойчиво.*

Формула (7.2.22) объясняет геометрический смысл второго мультипликатора μ_2 при $n=2$. В силу (5.4.11) его значение равно значению производной функции последования замкнутой траектории, соответствующей решению $\bar{x}(t)$, в нуле. Согласно теореме 5.4.1 при выполнении (7.2.23) указанная замкнутая траектория представляет собой устойчивый предельный цикл. Следствие из теоремы 7.2.8 — более сильное утверждение, чем сама теорема.

Задача 7.2.2 (задача С. Ю. Пилюгина). Рассмотрим уравнение (7.2.15), в котором $f(0)=0$. Обозначим через $\varphi(t, x_0)$ траекторию, проходящую через точку x_0 при $t=t_0$. Предположим, что нулевое решение (7.2.15) асимптотически устойчиво, причем существуют число $\Delta>0$ и функция T: $[t_0, \infty)\to \mathbf{R}$, $T(t)\to 0$ при $t\to\infty$ такие, что $\|\varphi(t, x_0\|\leqslant T(t)\|x_0\|$ при $\|x_0\|<\Delta$, $t\in[t_0, \infty)$. Доказать, что в этом случае существуют положительные числа C, λ, δ такие, что при $\|x_0\|<\delta$, $t\in[t_0, \infty)$ справедливо неравенство

$$\|\varphi(t, x_0)\|<Ce^{-\lambda(t-t_0)}\|x_0\|. \qquad (7.2.24)$$

Если имеет место оценка (7.2.24), то говорят, что нулевое решение экспоненциально асимптотически устойчиво. Например, в условиях теоремы 7.2.4 нулевое решение уравнения (7.2.13) экспоненциально асимптотически устойчиво. Более того, как вытекает из доказательства теоремы 7.2.4, нулевое решение уравнения (7.2.13) экспоненциально асимптотически устойчиво при более слабых, чем в теореме 7.2.4, ограничениях на нелинейность $g(t, y)$. Достаточно, чтобы левая часть (7.2.14) удовлетворяла неравенству

$$\frac{\|g(t, y)\|}{\|y\|}\leqslant\varepsilon_0<\min\{|\operatorname{Re}\lambda_1|, \ldots, |\operatorname{Re}\lambda_n|\},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A (их вещественные части по условию отрицательны).

§ 3. Устойчивость периодических решений квазилинейных уравнений в критических случаях

Рассмотрим квазилинейное уравнение (5.3.1)

$$\dot{x}=Ax+g(t)+\mu h(t, x, \mu). \qquad (7.3.1)$$

Предположим, что g и h — ω-периодические по t функции, причем h — непрерывно дифференцируема по x и μ в области $H\times(-\varepsilon, \varepsilon)$ при каждом $t\in\mathbf{R}$, $H\subset\mathbf{R}^n$. Пусть уравнение (7.3.1) имеет ω-периодическое решение $\varphi(t, \mu)$, непрерывно дифференцируемое по μ при $\mu\in(-\varepsilon, \varepsilon)$. Условия существования таких решений даны в теоремах 5.3.1 и 5.3.2. Рассмотрим вопрос о его устойчивости по Ляпунову. Полагая $y=x-\varphi(t, \mu)$, получим

$$\dot{y}=P(t, \mu)y+\mu Y(t, y, \mu), \qquad (7.3.2)$$

где

$$P(t, \mu)=A+\mu\frac{\partial h}{\partial x}(t, \varphi(t, \mu), \mu); \qquad (7.3.3)$$

$$\frac{\|Y\|}{\|y\|}\to 0 \quad \text{при} \quad \|y\|\to 0. \qquad (7.3.4)$$

Так как $\left\|\mu\left(\frac{\partial h}{\partial x}y+Y\right)\right\|\leqslant\varepsilon_0\|y\|$ при сколь угодно малом $\varepsilon_0>0$, если $|\mu|$ достаточно мало, то вопрос об устойчивости $\varphi(t,\mu)$ нельзя решить на основании теорем об устойчивости по первому приближению лишь в тех случаях, когда матрица A имеет чисто мнимые или нулевые собственные числа и не имеет собственных чисел с положительной вещественной частью (см. замечание в конце § 2 и задачу 7.5.1). Такие случаи называются *критическими*. К рассмотрению критических случаев мы и переходим.

Рассмотрим линейное приближение для уравнения (7.3.2)

$$\dot{y}=P(t,\mu)\,y. \tag{7.3.5}$$

Лемма 7.3.1. *Пусть мультипликаторы $\alpha_j(\mu)$, $j=1,\ldots,n$, уравнения (7.3.5) можно разбить на три группы:*

1) $\alpha_j(0)=1$, $j=1,\ldots,k_1$, *причем этим мультипликаторам соответствуют простые элементарные делители, $\alpha_j(\mu)=1+\gamma_j(\mu)+o(\mu)$, где все γ_j различны;*

2) $\alpha_j(0)=\cos\varphi_j+i\sin\varphi_j$, $j=k_1+1\ldots,k_2$, где $\varphi_j\neq 2\pi ik$, $k\in\mathbf{Z}$, *и эти мультипликаторы — простые;*

3) $|\alpha_j(0)|<1$, $j=k_2+1,\ldots,n$.

Предположим также, что мультипликаторы из первых двух групп при $\mu\in[0,\varepsilon)$ удовлетворяют неравенству

$$|\alpha_j(\mu)|\leqslant 1+\mu\beta,\ \beta<0,\ j=1,\ldots,k_2. \tag{7.3.6}$$

Тогда при достаточно малых $\mu>0$ решение $\varphi(t,\mu)$ асимптотически устойчиво.

Доказательство. Так как $\alpha_j(0)$, $j=1,\ldots,n$, являются собственными числами матрицы $\exp\{\omega A\}$, то собственные числа λ_j матрицы A можно разбить на две группы: $\operatorname{Re}\lambda_j=0$, $j=1,\ldots,k_2$, и $\operatorname{Re}\lambda_j<0$, $j=k_2+1,\ldots,n$. Используя линейное неособое преобразование, можно добиться, чтобы в (7.3.3) $A=\operatorname{diag}(B,C)$, где матрицам B и C соответствуют указанные группы собственных чисел. Тогда система (7.3.5) принимает следующий вид:

$$\dot{u}=Bu+\mu(Q_{11}(t,\mu)u+Q_{12}(t,\mu)v),$$

$$\dot{v}=Cv+\mu(Q_{21}(t,\mu)u+Q_{22}(t,\mu)v).$$

С помощью преобразования

$$\begin{aligned}u&=\xi+\mu S(t,\mu)\eta,\\ v&=\eta+\mu T(t,\mu)\xi\end{aligned} \tag{7.3.7}$$

приведем эту систему к виду

$$\dot{\xi}=B\xi+\mu N_1(t,\mu)\xi,$$

$$\dot{\eta}=C\eta+\mu N_2(t,\mu)\eta.$$

Чтобы определить матрицы S и T для (7.3.7), продифференцируем (7.3.7) по t и приравняем в получившихся равенствах матричные коэффициенты при ξ и η. Получим

$$\dot{S}=BS-SC+Q_{12}+\mu(Q_{11}S-SN_2),$$
$$Q_{11}+\mu Q_{12}T=N_1,$$
$$\dot{T}=CT-TB+Q_{21}+\mu(Q_{22}T-TN_1),$$
$$Q_{22}+\mu Q_{21}S=N_2,$$

или

$$\begin{aligned}\dot{S}&=BS-SC+Q_{12}+\mu(Q_{11}S-SQ_{22}-\mu SQ_{21}S),\\ \dot{T}&=CT-TB+Q_{21}+\mu(Q_{22}T-TQ_{11}-\mu TQ_{12}T).\end{aligned} \tag{7.3.8}$$

Каждое из уравнений (7.3.8) можно рассматривать как квазилинейную систему относительно элементов матриц S или T. По лемме 6.8.1 собственные числа матрицы коэффициентов линейной части для первого из уравнений (7.3.8) имеют вид $\lambda_j-\lambda_r$, $r=1, ..., k_2$; $j=k_2+1, ..., n$, а для второго отличаются знаком. Так как $\operatorname{Re}\lambda_j<0$, $\operatorname{Re}\lambda_r=0$, то имеет место нерезонансный случай. По теореме 5.3.1 система (7.3.8) имеет непрерывно дифференцируемые по t, μ ω-периодические решения $S(t, \mu)$ и $T(t, \mu)$.

Далее, учитывая свойства собственных чисел матрицы B, можно с помощью линейной неособой замены переменной ξ добиться, чтобы $B=\operatorname{diag}(I, D)$, где собственные числа матрицы D не равны $\frac{2\pi i}{\omega}k$, $k\in\mathbf{Z}$, а собственные числа I равны $\frac{2\pi i}{\omega}k$, $k\in\mathbf{Z}$. Рассуждая, как и выше, приведем (7.3.5) к виду

$$\begin{aligned}\dot{z}&=Iz+\mu M_1(t,\mu)z,\\ \dot{w}&=Dw+\mu M_2(t,\mu)w,\\ \dot{\eta}&=C\eta+\mu M_3(t,\mu)\eta.\end{aligned} \tag{7.3.9}$$

Обозначим нормированные при $t=0$ фундаментальные матрицы каждого из уравнений (7.3.9) через $\Phi_j(t, \mu)$, $j=1, 2, 3$.

Как показано в теореме 7.2.4, при достаточно малых $|\mu|$ решение $\eta=0$ третьего из уравнений (7.3.9) экспоненциально асимптотически устойчиво. Следовательно,

$$\|\Phi_3\|\leqslant K_3e^{\beta_3t},\ K_3>0,\ \beta_3<0,\ t\geqslant 0.$$

Так как собственные числа матрицы $\Phi_2(\omega, \mu)$ по условию простые, то ее логарифм является непрерывно дифференцируемой функцией μ. Согласно теории Флоке (см. § 6, гл. IV) второе из уравнений (7.3.9) с помощью линейной неособой замены с непрерывно дифференцируемой по t и μ матрицей коэффициентов приводится к системе с постоянными коэффициентами

$$\dot{w}=R_2(\mu)w,$$

где собственные числа $\lambda_j(\mu)$ матрицы $R_2(\mu)$ простые и в силу (7.3.6) удовлетворяют при достаточно малых $\mu\geqslant 0$ неравенству

$$\operatorname{Re}\lambda_j(\mu)\leqslant\mu\beta^*,\quad \beta^*<0. \tag{7.3.10}$$

Следовательно,

$$\|\Phi_2\|\leqslant K_2e^{\mu\beta_2 t},\quad K_2>0,\quad \beta_2<0,\quad t\geqslant 0.$$

Наконец, $\Phi_1(\omega,\mu)=E_{k_1}+\mu\Psi(\mu)$. Ряд

$$\mu\Psi-\frac{1}{2}\mu^2\Psi^2+\frac{1}{3}\mu^3\Psi^3-\ldots$$

равномерно сходится при достаточно малых $|\mu|$ и его сумма является логарифмом $\Phi_1(\omega,\mu)$. Для чисел такое утверждение справедливо, следовательно, оно остается справедливым и для матриц. Поэтому логарифм $\Phi_1(\omega,\mu)$ — непрерывная (и даже непрерывно дифференцируемая) функция μ. Отсюда на основании теории Флоке заключаем, что первое из уравнений (7.3.9) непрерывным неособым преобразованием приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\dot{z}=\mu R_1(\mu)z,$$

где собственные числа $R_1(0)$ таковы:

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{1}{\mu\omega}\ln(1+\gamma_j\mu+o(\mu))=\frac{\gamma_j}{\omega},\quad j=1,\ldots,k_1.$$

Следовательно, они различны и их вещественные части отрицательны. Рассуждая, как при оценивании Φ_3, получим

$$\|\Phi_1\|\leqslant K_1e^{\mu\beta_1 t},\quad K_1>0,\quad \beta_1<0,\quad t\geqslant 0.$$

Итак, мы доказали, что нормированная при $t=0$ фундаментальная матрица $\Phi(t,\mu)$ уравнения (7.3.5) удовлетворяет при достаточно малых $\mu\geqslant 0$ неравенству

$$\|\Phi(t,\mu)\|\leqslant Ke^{\mu\gamma t},\quad K>0,\quad \gamma<0,\quad t\geqslant 0. \tag{7.3.11}$$

В силу (7.3.4) при достаточно малых $\|y\|$ $Y(t,y,\mu)$ допускает оценку $\|Y\|\leqslant\varepsilon_0\|y\|$, где $0<\varepsilon_0<|\gamma|$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 7.2.4, используя (7.3.11) и наличие множителя μ перед Y в (7.3.2), получим оценку

$$\|y(t,y_0)\|\leqslant nKe^{\mu(\varepsilon_0+\gamma)t}\|y_0\|$$

решения $y(t,y_0)$ уравнения (7.3.2) с начальными данными 0, y_0.

Следовательно, при достаточно малых $\mu>0$ нулевое решение уравнения (7.3.2) асимптотически устойчиво, причем Δ в определении 7.2.2 не зависит от μ. Лемма 7.3.1 доказана.

Замечание. При $\mu\in(-\varepsilon, 0)$ лемма остается справедливой, если в (7.3.6) $\beta>0$.

Таким образом, дело сводится к вычислению мультипликаторов уравнения (7.3.5). Они являются корнями уравнения

$$\det(\Phi(\omega,\mu)-\alpha E_n)=0, \tag{7.3.12}$$

где $\Phi(t, \mu)$ — нормированная при $t=0$ фундаментальная матрица уравнения (7.3.5). В силу (7.3.3), (6.3.10), (6.3.12)

$$\Phi(t, \mu)=e^{tA}+\mu\Phi_1(t)+\Phi_2(t,\mu). \tag{7.3.13}$$

В (7.3.13) $\|\Phi_2\|=o(\mu)$ и

$$\Phi_1(t)=\int_0^t e^{(t-s)A}P_1(s)e^{sA}ds, \tag{7.3.14}$$

где

$$P_1(s)=\frac{\partial h}{\partial x}(s, \bar{x}(s), 0), \tag{7.3.15}$$

а $\bar{x}(t)=\varphi(t, 0)$ — порождающее решение.

Положим $Q=\Phi_1(\omega)$. Рассмотрим чисто мнимое собственное число $i\Theta$ матрицы A. Имеем $\alpha_0=e^{i\omega\Theta}$ — собственное число матрицы $e^{\omega A}$. Будем искать мультипликатор $\alpha(\mu)$ такой, что $\alpha(0)=\alpha_0$. Пусть $\alpha(\mu)=\alpha_0+\mu\beta(\mu)$. В силу (7.3.13) и (7.3.14)

$$\det(e^{\omega A}+\mu Q-(\alpha_0+\mu\beta)E_n+\Phi_2(\omega,\mu))=0. \tag{7.3.16}$$

При $\mu=0$ (7.3.16) выполняется. Следовательно, (7.3.16) имеет вид

$$\mu(F'(\alpha_0)\beta+b)+0(\mu)=0,$$

где $F(\alpha)=\det(e^{\omega A}-\alpha E_n)$, b — некоторая постоянная. Предположим, что $F'(\alpha_0)\neq 0$, т. е. что α_0 — простое собственное число матрицы $e^{\omega A}$. Тогда $\beta(\mu)$ определяется однозначно, причем $\gamma=\beta(0)$ удовлетворяет уравнению $F'(\alpha_0)\gamma+b=0$. Пусть $\gamma=u+iv$. Имеем

$$\alpha(\mu)=\cos\Theta+i\sin\Theta+\mu(u+iv)+o(\mu),$$

$$|\alpha(\mu)|^2=1+2\mu(u\cos\Theta+v\sin\Theta)+o(\mu).$$

Следовательно, если для всех чисто мнимых собственных чисел $\pm i\Theta$ матрицы A выполняется неравенство

$$\mu(u\cos\Theta+v\sin\Theta)<0, \tag{7.3.17}$$

то на основании леммы 7.3.1 заключаем, что решение $\varphi(t, \mu)$ при достаточно малых по абсолютной величине μ асимптотически устойчиво.

Этот результат получен в предположении, что α_0 — простое собственное число матрицы $e^{\omega A}$. В нерезонансном случае это предположение оправдано. В резонансном случае $\alpha_0=1$ для всех резонансных собственных чисел матрицы A, т. е. для чисел вида $\frac{2\pi i}{\omega}k$, $k\in\mathbf{Z}$. Обозначим их общее количество через m. Тогда $\alpha_0=1$ является m-кратным собственным числом матрицы $e^{\omega A}$, и мы предположим, что ему соответствуют простые элементарные делители. Не нарушая общности, считаем $A=\operatorname{diag}\{B, C\}$, где $e^{\omega B}=E_m$, а для матрицы $e^{\omega C}$ единица не является собственным числом.

Таким образом, рассматриваемая система (7.3.1) — это система (5.3.6), т. е. система

$$\dot{y}=By+p(t)+\mu f(t, y, z, \mu),$$

$$\dot{z}=Cz+q(t)+\mu g(t, y, z, \mu).$$

Обозначим ее порождающее решение через $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$. Полагая $\alpha(\mu)=1+\mu\beta(\mu)$, найдем, как и ранее, что β удовлетворяет уравнению (7.3.16), в котором $\alpha_0=1$, $e^{\omega A}=\operatorname{diag}(E_m, e^{\omega C})$, т. е. уравнению

$$H(\beta, \mu)=\det\left\{\begin{pmatrix}\mu(Q_1-\beta E_m) & \mu Q_2\\ \mu Q_3 & e^{\omega C}-(1+\mu\beta)E_{n-m}+\mu Q_4\end{pmatrix}+\Phi_2(\omega, \mu)\right\}=$$
$$=0,$$

где Q_j, $j=1, 2, 3, 4$ — блоки матрицы Q соответствующих размерностей. Поскольку $\Phi_2=o(\mu)$, имеем

$$H(\beta, \mu)=\mu^m\det(Q_1-\beta E_m)\det(e^{\omega C}-E_{n-m})+o(\mu^m).$$

Так как 1 не является собственным числом матрицы $e^{\omega C}$, второй определитель отличен от нуля. Следовательно, $\gamma=\beta(0)$ является собственным числом матрицы Q_1. Предположим, что все собственные числа γ_j, $j=1, \ldots, m$, матрицы Q_1 — простые. Тогда получаем m различных мультипликаторов вида $\alpha_j=1+\mu\gamma_j+o(\mu)$. Согласно (7.3.14)

$$Q=\int_0^\omega e^{(\omega-t)A}P_1(t)e^{tA}dt,$$

где $P_1(t)$ определяется формулой (7.3.15). Следовательно,

$$Q_1=\int_0^\omega e^{-tB}\frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}(t), \bar{z}(t), 0)e^{tB}dt.$$

Матрицу Q_1 можно получить следующим образом. Рассмотрим функцию $W(y_0)$, определяемую (5.3.11):

$$W(y_0)=\int_0^\omega e^{-tB}f(t, \bar{y}(t, y_0), \bar{z}(t), 0)\,dt.$$

Здесь $\bar{y}(t, y_0)=e^{tB}y_0+\psi(t)$, $\psi(0)=0$. Легко видеть, что

$$Q_1=\frac{\partial W}{\partial y_0}(\bar{y}(0)).$$

Теперь на основании леммы 7.3.1 можно уточнить теоремы 5.3.1 и 5.3.2 следующим образом.

Теорема 7.3.1. 1) *В нерезонансном случае уравнение* (7.3.1) *при достаточно малых* $|\mu|$ *имеет единственное* ω*-периодическое решение, стремящееся при* $\mu\to 0$ *к порождающему решению. Это решение асимптотически устойчиво, если все собственные числа матрицы* A *имеют отрицательные вещественные части, а в критическом случае, если величины* (7.3.17), *соответствующие всем чисто мнимым собственным числам матрицы* A, *отрицательны.*

2) *В резонансном случае, если выполнены условия* (5.3.8), *у порождающего решения* $\bar{x}(t)=(\bar{y}(t), \bar{z}(t))$ *вектор* $\bar{y}(0)$ *удовлетворяет уравнению* (5.3.11) $W(y_0)=0$ и $\det\frac{\partial W}{\partial y_0}(\bar{y}(0))\neq 0$, *то уравнение* (7.3.1) *имеет при достаточно малых* $|\mu|$ *единственное* ω*-периодическое решение, стремящееся при* $\mu\to 0$ *к порождающему решению. Это решение асимптотически устойчиво при* $\mu\neq 0$, *если нерезонансные собственные числа* A *удовлетворяют 1), а собственные числа матрицы* $\frac{\partial W}{\partial y_0}(\bar{y}(0))$ *различны и имеют вещественные части одного знака, противоположного знаку* μ.

При $n=2$ вычисление γ упрощается. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка (5.3.15):

$$\ddot{x}+\alpha^2 x=q(t)+\mu f(t, x, \dot{x}, \mu),\ \alpha\neq 0, \tag{7.3.18}$$

при условиях, наложенных на уравнение (5.3.14), в частности, период по t предполагаем равным 2π. Пусть $x=\varphi(t, \mu)$ — 2π-периодическое решение этого уравнения. После замены $y=x-\varphi(t, \mu)$ получим

$$\ddot{y}+\alpha^2 y=\mu\frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi, \dot{\varphi}, \mu)\,y+\mu\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t, \varphi, \dot{\varphi}, \mu)\,\dot{y}+\mu F(t, y, \dot{y}, \mu),$$

где $\dfrac{|F(t, y, z, \mu)|}{\|(y, z)\|}\to 0$ при $\|(y, z)\|\to 0$. Изучим мультипликаторы уравнения в вариациях

$$\ddot{y}+\mu\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t, \varphi, \dot{\varphi}, \mu)\dot{y}+\left(\alpha^2+\frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi, \dot{\varphi}, \mu)\,y=0.\right. \tag{7.3.19}$$

Они удовлетворяют уравнению (4.6.9)

$$\rho^2-2a\rho+b=0, \tag{7.3.20}$$

где

$$a(\mu)=\frac{1}{2}\left[y_1(2\pi, \mu)+\dot{y}_2(2\pi, \mu)\right],$$

$$b(\mu)=\exp\left\{\mu\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial\dot x}(t,\varphi,\dot\varphi,\mu)\,dt\right\},$$

$y_1(t,\ \mu)$ — решение (7.3.19) с начальными данными $y_1(0,\ \mu)=1$, $\dot y_1(0,\ \mu)=0$, а $y_2(t,\ \mu)$ — решение с начальными данными $y_2(0,\ \mu)=0$, $\dot y_2(0,\ \mu)=1$. Положим

$$h=\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial\dot x}\left(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t),0\right)dt,$$

где $\bar x(t)=\varphi(t,\ 0)$ — порождающее решение. Имеем

$$b(\mu)=1+\mu h+o(\mu). \tag{7.3.21}$$

Предположим, что $\alpha\neq k/2$, k — целое число. Тогда

$$|a(0)|=|\cos 2\pi\alpha|<1.$$

Отсюда и из (7.3.20), (7.3.21) заключаем, что

$$\rho_{1,2}=a\pm\sqrt{a^2-b}=a\pm i\sqrt{b-a^2}.$$

Таким образом,

$$|\rho_{1,2}|=\sqrt{a^2+b-a^2}=1+\mu\sigma(\mu),$$

где $\sigma(0)=\frac{1}{2}h$. Из леммы 7.3.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 7.3.2. *Если в уравнении* (7.3.18) $\alpha\neq k/2$, $k\in\mathbf{Z}$,

$$h=\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial\dot x}\left(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t),0\right)dt<0,$$

где $\bar x(t)$ — *2π-периодическое решение порождающего уравнения, то при достаточно малых* $\mu>0$ *2π-периодическое решение* $\varphi(t,\ \mu)$ *этого уравнения, для которого* $\varphi(t,\ 0)=\bar x(t)$, *асимптотически устойчиво.*

Замечание. Если $h>0$, то, заменяя в (7.3.18) t на $-t$, получим уравнение такого же типа, у которого $h<0$. Отсюда заключаем, что при $h>0$, $\mu>0$ решение $\varphi(t,\ \mu)$ неустойчиво.

Применим теорему 7.3.2 к исследованию устойчивости 2π-периодического решения уравнения ван-дер-Поля

$$\ddot x+\mu(x^2-1)\dot x+\alpha^2x=\lambda\sin t,\quad \mu>0. \tag{7.3.22}$$

Из примера 5.3.1, где $\alpha\neq\frac{k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, имеем

$$\bar x(t)=\frac{\lambda}{\alpha^2-1}\sin t,\quad h=\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{\lambda^2}{(\alpha^2-1)^2}\sin^2 t\right)dt.$$

Условие $h<0$ принимает вид $(\alpha^2-1)^2<\frac{1}{2}\lambda^2$.

В случае резонанса, т. е. при целых $\alpha\neq 0$, в уравнении (7.3.18) постоянные C_1^0, C_2^0 в порождающем решении $\bar{x}=C_1^0\cos\alpha t+\alpha^{-1}C_2^0\sin\alpha t+\psi(t)$ удовлетворяют уравнениям (5.3.16). По теореме 7.3.1, если матрица Якоби левой части (5.3.16) имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями, то при достаточно малых $\mu>0$ 2π-периодическое решение $\varphi(t, \mu)$, соответствующее порождающему $\bar{x}(t)$, асимптотически устойчиво.

Пример 7.3.1. Рассмотрим уравнение ван-дер-Поля в случае главного резонанса

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+(1+\mu b)x=(\lambda+\mu\beta)\sin t\,(\mu>0). \tag{7.3.23}$$

Для применения теории, изложенной в п. 2 § 3 гл. V, необходимо [см. условие (5.3.8)], чтобы все решения порождающего уравнения $\ddot{x}+x=\lambda\sin t$ были 2π-периодическими. Отсюда вытекает, что в (7.3.23) $\lambda=0$, а порождающее уравнение таково: $\ddot{x}+x=0$. Его общее решение $x=C_1\cos t+C_2\sin t$. Запишем (7.3.23) в виде

$$\ddot{x}+x=\mu f(t, x, \dot{x}),$$

где $f=\beta\sin t-bx+(1-x^2)\dot{x}$. Система (5.3.16) принимает вид

$$W_1(C_1C_2)=-\int_0^{2\pi}F(t)\sin t\,dt=0,$$

$$W_2(C_1C_2)=\int_0^{2\pi}F(t)\cos t\,dt=0,$$

где

$$F=\beta\sin t-b(C_1\cos t+C_2\sin t)+[1-(C_1\cos t+C_2\sin t)^2]\times$$
$$\times(-C_1\sin t+C_2\cos t).$$

В результате интегрирования после сокращения на π получим

$$\begin{aligned} W_1&=bC_2+C_1-\frac{1}{4}C_1(C_1^2+C_2^2)-\beta=0,\\ W_2&=-bC_1+C_2-\frac{1}{4}C_2(C_1^2+C_2^2)=0. \end{aligned} \tag{7.3.24}$$

Матрица Якоби $J=\dfrac{\partial(W_1, W_2)}{\partial(C_1, C_2)}$ такова:

$$J=\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{4}A^2-\frac{1}{2}C_1^2 & b-\frac{1}{2}C_1C_2 \\ -b-\frac{1}{2}C_1C_2 & 1-\frac{1}{4}A^2-\frac{1}{2}C_2^2 \end{pmatrix},$$

где $A^2=C_1^2+C_2^2$,

$$\det J = \frac{3}{16} A^4 - A^2 + 1 + b^2, \ \operatorname{sp} J = 2 - A^2.$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы собственные числа матрицы J имели отрицательные вещественные части, является выполнение следующих двух неравенств:

$$\det J > 0, \ \operatorname{sp} J < 0. \tag{7.3.25}$$

Полагая $C_1 = A \sin\varphi$, $C_2 = A\cos\varphi$, получим, что (7.3.24) эквивалентно системе

$$\begin{gathered} A^2\left[b^2 + \left(1 - \frac{1}{4}A^2\right)^2\right] = \beta^2, \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{1}{4}A^2\right). \end{gathered} \tag{7.3.26}$$

Уравнение (7.3.26) — кубическое уравнение относительно A^2 (нас, естественно, интересуют его положительные решения). Перепишем его следующим образом:

$$\frac{1}{16}A^6 - \frac{1}{2}A^4 + (1 + b^2) A^2 - \beta^2 = 0. \tag{7.3.27}$$

Поскольку $\det J$ — производная левой части (7.3.27) по A^2, из (7.3.25) и теоремы 7.3.1 следует, что каждому простому корню A_0 уравнения (7.3.27) соответствует единственное асимптотически устойчивое 2π-периодическое решение уравнения (7.3.23), обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее решение

$$\bar{x} = A_0 \sin(\varphi + t),$$

где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{1}{4}A_0^2\right)$, если $A_0{}^2 > 2$ и график левой части (7.3.27) пересекает ось A^2 в точке $A_0{}^2$ в сторону возрастания A^2.

Подробно уравнение ван-дер-Поля, а также фигурирующее в задачах 5.3.1 и 7.3.1 уравнение Дуффинга, являющееся важным примером уравнения колебаний системы с одной степенью свободы с нелинейной восстанавливающей силой при периодическом внешнем воздействии, рассмотрено в книге: *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., 1956.

Задача 7.3.1. Исследовать вопрос о существовании устойчивых периодических решений уравнения Дуффинга в случае главного резонанса:

$$\ddot{x} + x = \mu(\beta \sin t - bx + \gamma x^3).$$

§ 4. Параметрический резонанс

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}+sp(t)x=0, \tag{7.4.1}$$

где $p(t+\omega)=p(t)$, s — параметр. Исследуем устойчивость этого уравнения при изменении параметра s.

При фиксированном s уравнение (7.4.1) рассматривалось в примере 7.2.1. Было показано, что его мультипликаторы определяются формулой

$$\rho_{1,2}=a\pm\sqrt{a^2-1}, \tag{7.4.2}$$

где

$$a=\frac{1}{2}(\varphi_1(\omega, s)+\dot{\varphi}_2(\omega, s)),$$

а $\varphi_1(t, s)$, $\varphi_2(t, s)$ образуют нормированную при $t=0$ фундаментальную систему решений уравнений (7.4.1). При $|a|>1$ уравнение (7.4.1) неустойчиво, при $|a|<1$ оно устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически.

При изменении параметра $a(s)$ непрерывно (даже аналитически) меняется. Возникает вопрос: при каких значениях s происходит переход от устойчивости к неустойчивости и наоборот? Будем предполагать, что $p(t)$ мало отличается от своего среднего значения, т. е.

$$p(t)=d(1+\mu f(t)),$$

где μ — малый параметр, $\int\limits_0^\omega f(t)\,dt=0$. Изменение устойчивости происходит при переходе a через значения ±1, при этом $a=\rho_{1,2}$. По теореме 4.6.2 при $a=1$ уравнение (7.4.1) имеет ω-периодическое решение, а при $a=-1$ оно имеет 2ω-периодическое решение. При других значениях a таких решений нет. Следовательно, нужно найти такие значения параметра, при которых (7.4.1) имеет периодические решения указанных периодов.

Если $sd<0$, то уравнению (7.4.1) соответствует двумерная квазилинейная система (7.3.1), у которой матрица A имеет одно положительное собственное число. В этом случае уравнение (7.4.1) неустойчиво при любых достаточно малых μ.

Не рассматривая случай $sd=0$, перейдем к случаю $sd>0$.

Полагая $sd=\lambda^2 (\lambda>0)$, получим уравнение

$$\ddot{x}+\lambda^2(1+\mu f(t))x=0, \tag{7.4.3}$$

эквивалентное системе двух дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -\lambda y, \qquad (7.4.4)$$
$$\dot{y} = \lambda(1+\mu f(t))x.$$

Уравнение (7.4.3) описывает, например, малые колебания маятника при периодическом изменении длины подвеса (качели), где x — угол отклонения оси подвеса от вертикали; λ^2 — величина, обратно пропорциональная длине подвеса; $\mu\lambda^2$ — амплитуда колебаний длины подвеса.

В плоскости Oxy перейдем к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $r\geqslant 0$. В результате получим систему

$$\dot{r} = \mu\lambda f(t) r\cos\varphi\sin\varphi,$$
$$\dot{\varphi} = \lambda + \mu\lambda f(t)\cos^2\varphi. \qquad (7.4.5)$$

Отметим, что, разделив (7.4.5) на λ и введя новую независимую переменную $\tau=\lambda t$, получим систему (7.4.5) с $\lambda=1$. Таким образом, изменение λ соответствует изменению периода функции $f(t)$ при фиксированном λ. Система (7.4.5) инвариантна относительно замены φ на $\pi+\varphi$. Поэтому необходимое и достаточное условие ω- и 2ω-периодичности решения системы (7.4.4) таково:

$$r(\omega)-r(0)=0, \quad \varphi(\omega)-\varphi(0)=\pi k, \quad k\in\mathbf{Z}. \qquad (7.4.6)$$

При k четном период равен ω, а при k нечетном — 2ω. Второе равенство в (7.4.6) равносильно равенству

$$\omega\lambda+\mu\lambda\int_0^\omega f(t)\cos^2\varphi\, dt = \pi k, \quad k\in\mathbf{Z}, \qquad (7.4.7)$$

где $\varphi=\varphi(t, \mu, \lambda, \varphi_0)$ — решение второго из уравнений (7.4.5), принимающее при $t=0$ значение φ_0. Уравнение (7.4.7) удовлетворяется при $\mu=0$, $\lambda=\frac{\pi}{\omega}k$. Производная левой части (7.4.7) по λ при $\mu=0$, $\lambda=\frac{\pi}{\omega}k$ равна $\omega\neq 0$. По теореме о неявной функции (7.4.7) определяет единственным образом функцию $\lambda(\mu, \varphi_0)$, $\lambda(0, \varphi_0)=\frac{\pi}{\omega}k$. В дальнейшем считаем $\lambda=\lambda(\mu, \varphi_0)$. Поскольку $\lambda>0$, можно ограничиться рассмотрением натуральных k. Функция $\varphi(t, \mu, \lambda, \varphi_0)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi=\varphi_0+\lambda t+\mu\lambda\int_0^t f(\tau)\cos^2\varphi\, d\tau.$$

Первое уравнение (7.4.6) равносильно следующему:

$$\int_0^\omega f(t)\sin 2\varphi\, dt = 0. \qquad (7.4.8)$$

В частности, при $\mu=0$ получаем уравнение

$$\int\limits_0^{\omega} f(t)\sin\left(2\varphi_0+\frac{2\pi k}{\omega}t\right)dt=0, \qquad (7.4.9)$$

которое эквивалентно следующему уравнению:

$$a_k\cos 2\varphi_0+b_k\sin 2\varphi_0=0,$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(t)$. Пусть $a_k^2+b_k^2>0$ (ограничимся рассмотрением этого случая). Тогда на промежутке $[0, \pi)$ существуют ровно два значения φ_0, отличающиеся на $\pi/2$, при которых (7.4.9) выполняется. При этом производная левая части (7.4.9) по φ_0 при указанных значениях φ_0 отлична от нуля. Следовательно, существуют ровно два решения $\varphi^1_0(\mu)$, $\varphi^2_0(\mu)$ уравнения (7.4.8) относительно φ_0. Эти решения аналитичны при малых μ и разность их значений при $\mu=0$ равна $\pi/2$. При каждом $k\in N$ им соответствуют два семейства (с параметром $r_0\in\mathbf{R}$) ω- или 2ω-периодических решений системы (7.4.5), а также (при каждом $k\in\mathbf{N}$) две функции $\lambda(\mu, \varphi^i_0(\mu))$, $i=1, 2$. Обозначим эти функции соответственно через $\lambda^k_1(\mu)$, $\lambda^k_2(\mu)$. Интервал $(\lambda^k_1, \lambda^k_2)$ называется k-й зоной неустойчивости уравнения (7.4.3). При $\lambda\in(\lambda^k_1, \lambda^k_2)$ имеет место неустойчивость, поскольку $|a(\lambda)|>1$ при $\mu\neq 0$ (см. рис. 16, где $\omega=2\pi$).

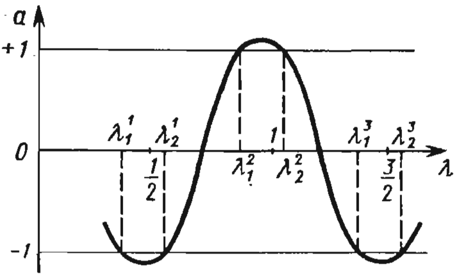

Рис. 16

Появление в уравнении (7.4.3) неустойчивости при определенных значениях параметра λ (или, что то же самое, при определенных значениях периода функции $f(t)$, если λ фиксировано) для сколь угодно малых μ называется *явлением параметрического резонанса*. Возвращаясь к трактовке (7.4.3) как уравнения движения маятника, заключаем, что при сколь угодно малых амплитудах колебаний длины подвеса возможно раскачивание маятника, если подходящим образом выбран период колебаний длины подвеса (раскачивание качелей).

Пример 7.4.1. Найдем первую зону неустойчивости для имеющего многочисленные практические применения уравнения Матье:

$$\ddot{x}+\lambda^2(1+\mu\cos t)x=0. \qquad (7.4.10)$$

Здесь $f=\cos t$, $\omega=2\pi$. При $k=1$ (7.4.9) принимает вид

$$\int_0^{2\pi}\cos t\sin(2\varphi_0+t)\,dt=\pi\sin 2\varphi_0=0.$$

Следовательно, $\varphi_0^1(0)=0$, $\varphi_0^2(0)=\pi/2$. Из уравнения

$$2\pi\lambda+\mu\lambda\int_0^{2\pi}\cos t\cos^2\left(\varphi_0+\frac{1}{2}t+O(\mu)\right)dt=\pi,$$

соответствующего (7.4.7), находим

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}+A_{1,2}\mu+O(\mu^2),$$

где

$$A_1=-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos t\cos^2\frac{t}{2}\,dt=-\frac{1}{8},$$

$$A_2=-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos t\sin^2\frac{t}{2}\,dt=\frac{1}{8}.$$

Итак, $\lambda_1^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\mu+O(\mu^2)$, $\lambda_2^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\mu+O(\mu^2)$.

§ 5. Второй метод Ляпунова

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=f(t,x), \tag{7.5.1}$$

где $f:G\to\mathbf{R}^n$, $G=\{(t,x):\|x\|<a,\ t\in(\tau,\infty)\}$. Предположим, что G — область единственности и $f(t,0)=0$ при всех $t\in(\tau,\infty)$, т. е. уравнение (7.5.1) имеет тривиальное решение $x=0$. Рассмотрим вопрос об устойчивости этого решения.

Изложим основы *второго метода Ляпунова* исследования устойчивости движения, с его помощью заново докажем теорему 7.2.4 и докажем теорему 7.2.5. Сущность второго метода Ляпунова заключается в исследовании поведения некоторой функции $V(t,x):G\to\mathbf{R}$ как функции t при замене x на произвольное решение уравнения (7.5.1). В дальнейшем используем определения 7.2.1 и 7.2.2, где $t_0\in(\tau,\infty)$.

Под функцией Ляпунова будем понимать любую непрерывную функцию $V:G\to\mathbf{R}$ такую, что $V(t,0)=0$ при всех $t\in(\tau,\infty)$. На множестве функций Ляпунова $V\in C^1(G)$ задан линейный оператор D, определяемый формулой (5.6.1)

$$DV=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f(t,x). \tag{7.5.2}$$

Напомним, что DV называется производной V в силу уравнения (7.5.1). Справедлива формула

$$DV(t, x(t, x_0)) = \frac{d}{dt} V(t, x(t, x_0)), \qquad (7.5.3)$$

где $x(t, x_0)$ — решение уравнения (7.5.1) с начальными данными (t_0, x_0).

Определение 7.5.1. *Функция Ляпунова $V(x)$, не зависящая от t, называется определенно-положительной, если в области G при $x \neq 0$ $V(x) > 0$. Функция Ляпунова $V(t, x)$ называется определенно-положительной, если существует определенно-положительная функция Ляпунова $W(x)$ такая, что $V(t, x) \geqslant W(x)$. Функция Ляпунова $V(t, x)$ называется определенно-отрицательной, если — $V(t, x)$ — определенно-положительная функция.*

Определение 7.5.2. *Функция Ляпунова $V(t, x)$ называется положительной, если $V(t, x) \geqslant 0$ в области G и отрицательной, если $V(t, x) \leqslant 0$ в G.*

Таким образом, функцию Ляпунова, тождественно равную в G нулю, можно рассматривать и как положительную, и как отрицательную.

Отметим следующее свойство определенно-положительных (и определенно-отрицательных) функций: *если* $\|x\| \leqslant a_1 < a$, *то*

$$\|x\| \to 0 \Leftrightarrow V(t, x) \to 0. \qquad (7.5.4)$$

Импликация $\Rightarrow$ в (7.5.4) вытекает непосредственно из определения функции Ляпунова и справедлива не только для знакоопределенных функций Ляпунова. Чтобы обосновать импликацию $\Leftarrow$, рассмотрим произвольную последовательность x_k, $\|x_k\| < a_1$, $k \in \mathbf{N}$, для которой $V(t, x_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Покажем, что $\|x_k\| \to 0$ при $k \to \infty$. Предположим, что это неверно. Тогда найдется подпоследовательность x_{k_i} и положительное число λ такие, что $\|x_{k_i}\| \geqslant \lambda$. Согласно определению 7.5.1 $V(t, x) \geqslant W(x)$, где $W(x)$ — определенно-положительная функция. Положим

$$l = \inf W(x),$$
$$\lambda \leqslant \|x\| \leqslant a_1.$$

Множество $\{x : \lambda \leqslant \|x\| \leqslant a_1\}$ компактно, поэтому по теореме анализа $l = W(x^*)$, где $\lambda \leqslant \|x^*\| \leqslant a_1$, следовательно, $l > 0$. Тогда $V(t, x_{k_i}) \geqslant l > 0$, что противоречит свойству последовательности x_k.

1. Теоремы второго метода Ляпунова

Теорема 7.5.1. *Пусть существует определенно-положительная функция Ляпунова $V(x) \in C^1(G)$, такая, что DV есть отрицательная функция. Тогда решение $x = 0$ уравнения* (7.5.1) *устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Пусть ε — произвольная положительная постоянная, $\varepsilon < a$. Положим

$$l = \inf V(x) \text{при } \|x\| = \varepsilon. \qquad (7.5.5)$$

Так как V определенно положительна, то $l>0$. По l найдем $\delta>0$ такое, чтобы

$$\|x\|<\delta \Rightarrow V(x)<l. \tag{7.5.6}$$

Пусть, кроме того, $\delta<\varepsilon$. Рассмотрим решение $x(t, x_0)$ при $\|x_0\|<\delta$. Покажем, что

$$\|x_0\|<\delta \Rightarrow \|x(t, x_0)\|<\varepsilon, \ t\in[t_0, \infty). \tag{7.5.7}$$

Пусть (7.5.7) не имеет места. Тогда существует $T>t_0$ такой, что $\|x(T, x_0)\|=\varepsilon$, а при $t\in[t_0, T)\ \|x\ \ (t, x_0)\|<\varepsilon$. В силу (7.5.3) и условия теоремы функция $V(x(t, x_0))$ является при $t\in[t_0\ T]$ невозрастающей функцией t. Так как в силу (7.5.6) $V(x_0)<l$, то тем более

$$V(x(T, x_0))\leqslant V(x_0)<l,$$

что противоречит определению T и (7.5.5). Таким образом, импликация (7.5.7) имеет место, а это и означает по определению 7.2.1 устойчивость решения $x=0$ по Ляпунову. Теорема доказана.

Следствие. *Если уравнение* (7.5.1) *имеет в области G определенно-положительный интеграл, не зависящий от t и уничтожающийся в начале кооординат, то решение $x=0$ устойчиво по Ляпунову.*

Справедливость этого утверждения вытекает из теоремы 5.6.1.

Пример 7.5.1. Рассмотрим уравнение движения нелинейной консервативной системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x}+g(x)=0, \tag{7.5.8}$$

где $g(x)$ — удовлетворяющая условию Липшица при $|x|<a$ функция такая, что

$$g(0)=0, \ xg(x)>0 \text{ при } x\neq 0. \tag{7.5.9}$$

Это, например, уравнение колебаний маятника, где $g(x)=\sin x$. Решение $x=0$ уравнения (7.5.8) будем называть *устойчивым по Ляпунову, асимптотически устойчивым или неустойчивым,* если таким свойством обладает тривиальное решение системы двух уравнений

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-g(x), \tag{7.5.10}$$

соответствующей уравнению (7.5.8).

В качестве функции Ляпунова возьмем полную энергию системы

$$V=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(s)\,ds. \tag{7.5.11}$$

В силу (7.5.9) V — определенно-положительная функция, а в силу (7.5.10) $DV=0$ (закон сохранения энергии). На основании следствия из теоремы 7.5.1 положение равновесия $x=0$ устойчиво по Ляпунову.

Теперь рассмотрим вопрос об асимптотической устойчивости.

Теорема 7.5.2. *Пусть существует определенно-положительная функция Ляпунова $V(x)\in C^1(G)$ такая, что DV определенно-отрицательная при $t\geqslant t_0$. Тогда решение $x=0$ уравнения (7.5.1) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Условия теоремы 7.5.1 выполнены, и решение $x=0$ устойчиво по Ляпунову. Следовательно, существует $\Delta>0$ такое, что

$$\|x_0\|<\Delta\Rightarrow\|x(t, x_0)\|<a_1<a \text{ при } t\in[t_0, \infty). \qquad (7.5.12)$$

Из определения 7.2.2 в силу (7.5.4) заключаем, что достаточно доказать импликацию

$$\|x_0\|<\Delta\Rightarrow V(x(t, x_0))\to 0 \text{ при } t\to\infty.$$

В дальнейшем считаем $\|x_0\|<\Delta$. В силу (7.5.3) и условия теоремы $V(x\ (t,\ x_0))$ — строго убывающая функция t.

Предположим, что теорема неверна. Тогда

$$\lim_{t\to\infty} V(x(t, x_0))=l>0. \qquad (7.5.13)$$

Отсюда, из (7.5.12) и из (7.5.4) следует, что при $t\geqslant t_0$

$$0<\lambda\leqslant\|x(t, x_0)\|\leqslant a_1<a.$$

По условию теоремы $-DV\geqslant W(x)$, где $W(x)$ — определенно-положительная функция. Пусть

$$l_1=\inf_{\lambda\leqslant\|x\|\leqslant a_1} W(x).$$

Из (7.5.3) следует, что при всех $t\geqslant t_0$

$$V(x(t, x_0))-V(x_0)\leqslant -l_1(t-t_0),$$

что противоречит определенной положительности $V(x)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

В случае, когда уравнение автономно, т. е. f не зависит от t, условия теоремы 7.5.2 можно ослабить.

Теорема 7.5.3. *Пусть уравнение* (7.5.1) *автономно, выполнены условия теоремы* 7.5.1 *и множество*

$$M=\{x: DV(x)=0\} \qquad (7.5.14)$$

не содержит целиком полных траекторий уравнений (7.5.1), *за исключением положения равновесия $x=0$. Тогда решение $x=0$ асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Используем доказательство теоремы 7.5.2 до формулы (7.5.13) включительно. Далее, пусть x^* — ω-предельная точка траектории $x(t,\ x_0)$. Из определения 2.6.1 и (7.5.13) следует, что $V(x^*)=l$. По теореме 5.1.3 все точки траектории $x(t,$

x^*) являются ω-предельными для траектории $x(t, x_0)$. Следовательно, для всех t, при которых определено решение $x(t, x^*)$, $V(x(t, x^*))=l$. Отсюда и из (7.5.3) следует, что при указанных t $x(t, x^*)\in \in M$, что противоречит условию теоремы, так как x^* не совпадает с началом координат. Теорема доказана.

Пример 7.5.2. Рассмотрим уравнение движения диссипативной системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0, \tag{7.5.15}$$

где $f(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условию Липшица при $|x|<a$, $g(x)$ удовлетворяет условию (7.5.9) и $f(x)>0$ при $|x|<a$. Докажем, что положение равновесия $x=0$ асимптотически устойчиво.

Соответствующая система двух уравнений имеет вид

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-f(x)y-g(x). \tag{7.5.16}$$

Функция Ляпунова (7.5.11) по-прежнему определенно-положительная, при этом

$$DV=y(-f(x)y-g(x))+g(x)y=-f(x)y^2.$$

Следовательно, DV — отрицательная функция и множество (7.5.14) — интервал оси абсцисс при $|x|<a$. Так как при $y=0$ $\dot{y}=-g(x)\neq 0$ при $x\neq 0$, то множество (7.5.14) не содержит целых траекторий, отличных от положения равновесия $x=y=0$.

По теореме 7.5.3 решение $x=y=0$ системы (7.5.16) асимптотически устойчиво, что и требовалось доказать.

Переходим к рассмотрению неустойчивости. Пусть $V(x)$ — функция Ляпунова. Обозначим через M^+ любую связную компоненту открытого множества $\{x : V(x)>0, \|x\|<a\}$ с началом координат на ее границе.

Теорема 7.5.4. *Пусть существует функция Ляпунова $V(x)\in \in C^1(G)$ такая, что M^+ не пусто и при $x\in M^+$, $t\geqslant t_0$ $DV\geqslant W(x)>0$. Тогда решение $x=0$ уравнения* (7.5.1) *неустойчиво.*

Доказательство. Пусть $0<a_1<a$. Будем рассматривать решения $x(t, x_0)$ с начальной точкой $x_0\in M^+$, $\|x_0\|<a_1$. Достаточно показать, что для каждого из этих решений можно указать момент T (для каждого решения свой) такой, что $\|x(T, x_0)\|=a_1$.

Пусть это неверно, т. е. существует решение $x(t, x^*)$, $x^*\in M^+$, удовлетворяющее при всех $t\geqslant t_0$ неравенству $\|x(t, x^*)\|<a_1$. Покажем, что траектория решения $x(t, x^*)$ принадлежит M^+ при $t\geqslant t_0$. Действительно, по определению M^+ она может покинуть область M^+ только через ту часть ее границы, где $V(x)=0$. Но это невозможно, так как $V(x^*)>0$ и при возрастании $t\geqslant t_0$ функция $V(x(t, x^*))$ строго возрастает, пока $x(t, x^*)\in M^+$, в силу (7.5.3).

Итак, доказано, что при $t>t_0$ $x(t, x^*)\in M^+$ и $V(x(t, x^*))> >V(x^*)>0$. Следовательно, по условию теоремы

$$DV(t, x(t, x^*))\geqslant W(x(t, x^*))\geqslant l>0$$

при $t > t_0$. Интегрируя (7.5.3) от t_0 до $t > t_0$, получаем

$$V(x(t, x^*)) \geqslant V(x^*) + l(t - t_0),$$

что противоречит ограниченности $V(x)$ при $\|x\| \leqslant a_1$. Противоречие доказывает теорему.

Пример 7.5.3. Рассмотрим уравнение (7.5.8), у которого условие (7.5.9) заменено на

$$g(0)=0, \ g(x)<0 \text{ при } 0<x<a. \qquad (7.5.17)$$

Докажем неустойчивость решения $x=0$.

Рассмотрим систему (7.5.10). В качестве функции Ляпунова возьмем $V=xy$. Имеем

$$DV = y^2 - xg(x), \quad M^+ = \{(x, y): 0<x<a, \ 0<y<a\}.$$

По теореме 7.5.4 решение $x=y=0$ системы (7.5.10) неустойчиво, что и требовалось доказать.

2. Устойчивость по первому приближению. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial x} Ax = U(x), \qquad (7.5.18)$$

где $U(x)$ — заданная квадратичная форма.

Лемма 7.5.1. *Если собственные числа матрицы A удовлетворяют условию*

$$\lambda_i + \lambda_k \neq 0, \quad i, k = 1, \ldots, n, \qquad (7.5.19)$$

то уравнение (7.5.18) *имеет единственное решение $V(x)$, являющееся квадратичной формой.*

Доказательство. По лемме 6.8.1 при $p=2$, $P=A$, $Q=0$, $m=n$ оператор левой части (7.5.18), действующий в пространстве квадратичных форм, имеет собственные числа, равные $\lambda_i + \lambda_k$, $i, k=1, \ldots, n$. В силу (7.5.19) они отличны от нуля, откуда и следует утверждение леммы.

В следующих двух леммах будут построены квадратичные формы, являющиеся функциями Ляпунова для линейного уравнения

$$\dot{x} = Ax \qquad (7.5.20)$$

и удовлетворяющие условиям теорем 7.5.2, 7.5.4.

Лемма 7.5.2. *Пусть все собственные числа матрицы A имеют отрицальные вещественные части, $U(x)$ — определенно-отрицательная квадратичная форма. Тогда уравнение* (7.5.18) *имеет единственное решение $V(x)$, являющееся определенно-положительной квадратичной формой.*

Доказательство. При сделанных предположениях (7.5.19) имеет место, поэтому на основании леммы 7.5.1 уравнение (7.5.18) имеет единственное решение $V(x)$, являющееся квадратичной формой. Покажем, что функция $V(x)$ определенно-положительная.

Предположим, что это неверно. Тогда существует $x_0 \neq 0$ такой, что $V(x_0) \leqslant 0$. Рассмотрим решение $x(t, x_0)$ уравнения (7.5.20). Из (7.5.3) имеем

$$\frac{d}{dt} V(x(t, x_0)) = U(x(t, x_0)) < 0,$$

следовательно, $V(x)$ принимает отрицательные значения. Так как квадратичная форма принимает значения одного знака на прямой, проходящей через начало координат, то для функции $-V(x)$ непуста область M^+ (см. теорему 7.5.4), являющаяся конусом с вершиной в начале координат. Но

$$\frac{\partial(-V)}{\partial x} Ax = -U(x)$$

принимает в M^+ только положительные значения, следовательно, по теореме 7.5.4 решение $x=0$ уравнения (7.5.20) неустойчиво, что противоречит теореме 7.2.2 и условию леммы. Лемма доказана.

Лемма 7.5.3. *Пусть матрица A имеет собственные числа с положительными вещественными частями. Тогда можно подобрать $\lambda \geqslant 0$ такое, что существует единственное решение $V(x)$ уравнения*

$$\frac{\partial V}{\partial x} Ax = \lambda V + U(x), \tag{7.5.21}$$

причем если $U(x)$ — определенно-положительная квадратичная форма, то область M^+ для квадратичной формы $V(x)$ непуста

Доказательство. Так как $V(x)$ — квадратичная форма, то уравнение (7.5.21) можно записать в виде

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left(A - \frac{1}{2}\lambda E_n\right) x = U(x). \tag{7.5.22}$$

Очевидно, что собственные числа матрицы $A - \frac{1}{2}\lambda E_n$ суть $\lambda_i - \frac{1}{2}\lambda$, $i = 1, \ldots, n$. Подберем $\lambda \geqslant 0$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\lambda_i + \lambda_k - \lambda \neq 0, \quad i, k = 1, \ldots, n. \tag{7.5.23}$$

При этом условии по лемме 7.5.1 уравнение (7.5.22) имеет единственное решение — квадратичную форму $V(x)$.

Осталось показать, что если $U(x)$ определенно-положительная, то M^+ непусто. Предположим, что M^+ пусто. Это означает, что $-V(x)$ — определенно-положительная квадратичная форма, в то время как ее производная в силу линейного уравнения

$$\dot{x} = (A - {}^1/_2\lambda E_n) x \tag{7.5.24}$$

равна $-U(x)$. Мы оказываемся в условиях теоремы 7.5.2, откуда следует, что решение $x=0$ уравнения (7.5.24) асимптотически устойчиво. Но очевидно, что выполнения (7.5.23) можно добиться при сколь угодно малом $\lambda \geqslant 0$, поэтому можно считать, что среди собственных чисел матрицы $A - 1/2\,\lambda E_n$ имеются такие, вещественные части которых положительны. По теореме 7.2.2 нулевое решение уравнения (7.5.24) неустойчиво. Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

Перейдем к доказательству теорем 7.2.4 и 7.2.5. Рассмотрим уравнение (7.5.1), у которого

$$f(t, x) = Ax + g(t, x), \tag{7.5.25}$$

где $A \in \mathfrak{R}^{n,n}$, $g: G \to \mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию

$$\frac{\| g(t, x) \|}{\| x \|} \xrightarrow[\|x\| \to 0]{} 0 \tag{7.5.26}$$

равномерно по $t \in [t_0, \infty)$.

Теорема 7.5.5 (см. теорему 7.2.4). *Если все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части и $g(t, x)$ удовлетворяет условию (7.5.26), то решение $x=0$ уравнения (7.5.1) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Построим функцию Ляпунова, удовлетворяющую условию теоремы 7.5.2 для линейного уравнения (7.5.20), и покажем, что она удовлетворяет условиям теоремы 7.5.2 и для уравнения (7.5.1).

Пусть $V(x)$ — квадратичная форма, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial x} Ax = -(x_1^2 + \ldots + x_n^2). \tag{7.5.27}$$

По лемме 7.5.2 $V(x)$ определенно-положительная. Определим ее производную DV в силу уравнения (7.5.1). Из (7.5.2) и (7.5.25) имеем

$$DV = \frac{\partial V}{\partial x} (Ax + g(t, x)).$$

Отсюда и из (7.5.27) получаем

$$DV = -(x_1^2 + \ldots + x_n^2) + \frac{\partial V}{\partial x}\, g(t, x). \tag{7.5.28}$$

Из (7.5.26) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $a > 0$ такое, что при $\|x\| < a$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\|g(t, x)\| \leqslant \varepsilon \|x\|.$$

Так как $V(x)$ — квадратичная форма, то $\partial V/\partial x = x^* B$, $B \in \mathfrak{R}^{n,n}$, и

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leqslant n \|B\| \cdot \|x\|.$$

Очевидно также, что $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \|x\|^2$. Из (7.5.28) и записанных неравенств следует, что

$$DV \leqslant -\frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) - \frac{1}{2}\|x\|^2 + \varepsilon n^2 \|B\| \cdot \|x\|^2.$$

Следовательно, DV — определенно-отрицательная функция при $\|x\|<a$, $t\in[t_0, \infty)$, если a выбрать по $\varepsilon=(2n^2\|B\|)^{-1}$. Итак, выполнены все условия теоремы 7.5.2, откуда следует, что решение $x=0$ уравнения (7.5.1) асимптотически устойчиво. Теорема 7.5.5 доказана.

Теорема 7.5.6 (см. теорему 7.2.5). *Если среди собственных чисел матрицы имеются такие, вещественные части которых положительны, и выполнено условие* (7.5.26), *то решение $x=0$ уравнения* (7.5.1) *неустойчиво.*

Доказательство. С помощью леммы 7.5.3 построим квадратичную форму $V(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial x}Ax=\lambda V+x_1^2+\ldots+x_n^2, \quad \lambda>0,$$

и такую, что область $M^{\cdot}$ для функции V непуста. Составим DV в силу уравнения (7.5.1). Имеем

$$DV=\lambda V+x_1^2+\ldots+x_n^2+\frac{\partial V}{\partial x}g(t, x).$$

Используя (7.5.26), как и при доказательстве теоремы 7.5.5, покажем, что если a достаточно мало, то при $\|x\|<a$, $t\in[t_0, \infty)$ функция

$$x_1^2+\ldots+x_n^2+\frac{\partial V}{\partial x}g(t, x)\geqslant\frac{1}{2}(x_1^2+\ldots+x_n^2).$$

Следовательно, так как в области M^+ $V(x)>0$, то при $x\in M^+$, $t\geqslant t_0$ имеем $DV\geqslant 1/2\ (x_1^2+\ldots+x_n^2)$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 7.5.4, откуда и следует, что нулевое решение уравнения (7.5.1) неустойчиво. Теорема доказана.

Задача 7.5.1. Докажите утверждение об устойчивости по первому приближению периодических решений квазилинейного уравнения (7.3.1), сделанное в начале § 3. Более точно — рассмотреть уравнение (7.3.2) при условиях (7.3.3), (7.3.4). Доказать, что:

1) если все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение уравнения (7.3.2) асимптотически устойчиво;

2) если у A существуют собственные числа с положительными вещественными частями, то нулевое решение уравнения (7.3.2) неустойчиво.

Условия теорем 7.5.5 и 7.5.6 нарушаются, если у матрицы A имеются собственные числа с нулевой вещественной частью и отсутствуют собственные числа с положительной вещественной частью. Такие случаи называются *критическими*. Критический случай с одной парой чисто мнимых собственных чисел матрицы A для автономной системы двух уравнений был исследован в п. 2 § 3 гл. VI при рассмотрении проблемы центра и фокуса. Устойчивому фокусу соответствует асимптотически устойчивое нулевое решение, случаю центра — нулевое решение, устойчивое по Ляпунову, но не асимптотически.

Глава VIII

МЕТОД НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Формальная и аналитическая эквивалентность систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим поведение решений автономных систем дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия. Не теряя общности, можно считать, что положение равновесия находится в начале координат. Предположим, что рассматриваемая система вещественно аналитична в некоторой окрестности начала координат. Таким образом, система имеет вид

$$\dot{x}=Ax+X(x), \tag{8.1.1}$$

где $A\in\mathfrak{R}^{n,n}$, $X:U\to\mathbf{R}^n$,

$$U=\{x:\|x\|<a\},\quad X=\operatorname{colon}(X_1,\ldots,X_n).$$

Здесь и далее в этой главе используем следующие обозначения:

$$X_k=\sum_{|q|=2}^{\infty}X_k^{(q)}x^q,\quad X_k^s=\sum_{|q|=s}X_k^q x^q,\quad k=1,\ldots,n, \tag{8.1.2}$$

$$x^q=x_1^{q_1}\ldots x_n^{q_n},\quad q_k\in\mathbf{N}_0,\quad |q|=q_1+\ldots+q_n.$$

Векторную функцию $X^s=\operatorname{colon}(X_1^s,\ldots,X_n^s)$ будем называть однородным векторным полиномом порядка s. Если можно указать окрестность начала координат, в которой все координатные ряды (8.1.2) сходятся, то векторный ряд $X(x)$ назовем сходящимся. Если же о сходимости ряда ничего не утверждается или он расходится в любой окрестности начала координат, то такой ряд будем называть формальным. При дифференцировании рядов и при подстановке ряда в ряд с формальными рядами «обращаемся» как со сходящимися. В дальнейшем, если не оговорено противное, разложения рассматриваемых рядов начинаются с членов не ниже второго порядка.

При изложении общих положений теории не будем предполагать вещественности системы (8.1.1). Таким образом, в (8.1.1) $x\in\mathbf{C}^n$, $A\in\mathfrak{M}^{n,n}$, $X:U\to\mathbf{C}^n$, $U\subset\mathbf{C}^n$. Сделанные определения и введенные обозначения сохраняют силу.

Рассмотрим сходящуюся систему (8.1.1) и выполним подстановку

$$x=y+h(y), \tag{8.1.3}$$

где $h(y)$ — сходящийся ряд. Пусть в результате получена система

$$\dot{y}=Ay+Y(y). \tag{8.1.4}$$

Считая, что x и y в (8.1.3) — это решения систем (8.1.1) и (8.1.4) соответственно, продифференцируем (8.1.3) по t. В результате приходим к соотношению

$$\frac{\partial h}{\partial y}Ay-Ah=X(y+h)-\frac{\partial h}{\partial y}Y-Y. \tag{8.1.5}$$

Для того чтобы замена (8.1.3) приводила систему (8.1.1) к виду (8.1.4), необходимо и достаточно, чтобы h в (8.1.3) удовлетворяла уравнению в частных производных (8.1.5).

Предположим теперь, что ряды X, Y, h — формальные. Будем говорить, что формальная замена (8.1.3) переводит (8.1.1) в (8.1.4), если ряд h удовлетворяет (8.1.5), причем (8.1.5) следует понимать как равенство рядов, т. е. равенство их коэффициентов в левой и правой частях при одинаковых степенях y^q.

Рассмотрим две формальные системы (8.1.1) и (8.1.4).

Определение 8.1.1. *Будем говорить, что системы* (8.1.1) *и* (8.1.4) *формально эквивалентны, если существует подстановка* (8.1.3), *где h — формальный ряд, которая переводит* (8.1.1) *в* (8.1.4). *Если, в частности, ряды X, Y, h — сходящиеся, то аналитические системы* (8.1.1) *и* (8.1.4) *будем называть аналитически эквивалентными.*

Ясно, что отношения формальной и аналитической эквивалентности систем являются отношениями эквивалентности.

Собственные числа матрицы A будем обозначать через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Пусть λ — вектор с координатами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; тогда (q, λ) — это скалярное произведение $q_1\lambda_1 + \ldots + q_n\lambda_n$.

Теорема 8.1.1. *Если выполняются неравенства*

$$(q, \lambda)-\lambda_k\neq 0, \quad k=1,\ldots, n; \quad |q|\geqslant 2, \tag{8.1.6}$$

то система (8.1.1) *формально эквивалентна любой наперед заданной системе* (8.1.4), *причем ряд h в* (8.1.3) *определяется единственным образом.*

Доказательство. Представим h в виде $h=\sum\limits_{s=2}^{\infty} h^s$, где $h^s(y)$ — векторный однородный полином порядка s. В силу (8.1.5)

$$\frac{\partial h^s}{\partial y}Ay-Ah^s=f^s(h^i, Y^j, X^k)-Y^s, \tag{8.1.7}$$

где $i<s$, $j<s$, $k\leqslant s$, f^s — известная функция своих аргументов. Следовательно, при $s=2$ правая часть (8.1.7) является известным векторным однородным полиномом, и вообще, если $h^2, \ldots, h^{s-1}$ известны, то и правая часть (8.1.7) также известна. По лемме 6.8.1 собственные числа оператора левой части (8.1.7) суть $(q, \lambda)-\lambda_k$.

В силу (8.1.6) они отличны от нуля, поэтому все h^s определяются уравнениями (8.1.7) единственным образом. Теорема доказана.

Теорема 6.8.1 о линеаризации является следствием теоремы 8.1.1.

§ 2. Нормальная форма системы дифференциальных уравнений

Предположим теперь, что условия (8.1.6) выполняются не при всех $k=1, \ldots, n$; $|q| \geqslant 2$. Тогда некоторые из уравнений (8.1.7) могут быть неразрешимы. Однако, используя теорему Кронекера — Капелли, подходящим выбором Y^s можно сделать указанные уравнения разрешимыми, хотя и не однозначно. В результате получим систему (8.1.4), формально эквивалентную системе (8.1.1).

Предположение, что $A=J$, где J — нижнетреугольная жорданова форма матрицы A (что можно достигнуть линейной неособой заменой переменных), т. е. рассмотрим систему

$$\dot{x}=Jx+X(x). \tag{8.2.1}$$

Уравнения (8.1.7) принимают вид

$$\frac{\partial h^s}{\partial y} Jy - Jh^s = f^s(h^i, Y^j, X^k) - Y^s, \quad i<s,\ j<s,\ k\leqslant s. \tag{8.2.2}$$

Если коэффициенты h^s расположить в лексикографическом порядке (см. § 8 гл. VI), то, как было показано при доказательстве леммы 6.8.1, матрица оператора левой части (8.2.2) является нижнетреугольной с величинами $(q, \lambda) - \lambda_k$ по главной диагонали. Следовательно, коэффициенты $h_k^{(q)}$ векторного однородного полинома определяются уравнениями

$$[(q, \lambda) - \lambda_k]\, h_k^{(q)} = f_k^{(q)} - Y_k^{(q)}, \tag{8.2.3}$$

где $f_k^{(q)}$ — известная величина, если вычислять эти коэффициенты в указанном порядке. Если

$$(q, \lambda) - \lambda_k \neq 0, \tag{8.2.4}$$

то $h_k^{(q)}$ определяется однозначно. Если же

$$(q, \lambda) - \lambda_k = 0, \tag{8.2.5}$$

то уравнение (8.2.3) разрешимо лишь при условии

$$Y_k^{(q)} = f_k^{(q)}. \tag{8.2.6}$$

При этом $h_k^{(q)}$ окажется произвольной величиной, ее можно положить равной нулю.

Определение 8.2.1. *Коэффициенты степенных рядов, соответствующие таким k, q, $k=1, \ldots, n$; $|q| \geqslant 2$, которые удовлетворяют*

(8.2.5), *будем называть резонансными. В противном случае, т. е. при выполнении* (8.2.4), *назовем их нерезонансными. Соотношение* (8.2.5) *называется резонансным соотношением.*

Данное определение имеет силу лишь в том случае, когда $A=J$ — жорданова матрица.

Таким образом, доказано, что система (8.2.1) формально эквивалентна любой системе

$$\dot{y}=Jy+Y(y) \tag{8.2.7}$$

с произвольными нерезонансными коэффициентами. При этом в ряде $h(y)$ резонансные коэффициенты можно выбирать произвольно. Остальные же коэффициенты h и Y при сделанном выборе произвольных коэффициентов определяются однозначно.

Определение 8.2.2. *Система* (8.2.7), *у которой все нерезонансные коэффициенты* $Y_k^{(q)}$ *равны нулю, называется нормальной формой системы* (8.2.1). *Преобразование* (8.1.3) *к нормальной форме* (8.2.7), *у которой все резонансные коэффициенты* $\bar{h}_k^{(q)}$ *равны нулю, будем называть стандартным нормализующим преобразованием.*

Отметим, что нормальная форма системы (8.2.1) определяется неоднозначно. Однако если рассматривать только стандартные нормализующие преобразования, то нормальная форма системы определяется единственным образом.

Пример 8.2.1. Пусть (8.2.1) имеет вид $\dot{x}=X(x)$, т. е. $A=0$. Резонансное соотношение (8.2.5) выполняется при всех k, q, следовательно, все коэффициенты являются резонансными. Нормальная форма совпадает с самой системой.

Пример 8.2.2. Пусть $n=2$, $\lambda_1=\alpha$, $\lambda_2=-\alpha$, $\alpha\neq0$. Резонансное соотношение имеет вид

$$(q_1-q_2-1)\alpha=0 \text{ при } k=1,$$

$$(q_1-q_2+1)\alpha=0 \text{ при } k=2.$$

Следовательно, нормальная форма (8.2.7) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1&=\alpha y_1+y_1P_1(y_1y_2),\\ \dot{y}_2&=-\alpha y_2+y_2P_2(y_1y_2),\end{aligned} \tag{8.2.8}$$

где P_1, P_2 — формальные ряды по степеням произведения y_1y_2 без свободных членов.

§ 3. Автономные системы на плоскости в окрестности положения равновесия

Рассмотрим вещественную систему (8.1.1) при $n=2$. В § 5 гл. IV было исследовано расположение траекторий у линеаризованной системы $\dot{x}=Ax$ при отсутствии у матрицы A нулевых и кратных собственных чисел. Были выявлены следующие типы расположения траекторий:

1) узел (см. рис. 7), соответствующий вещественным собственным числам одного знака;

2) седло (см. рис. 8), соответствующее вещественным собственным числам разных знаков;

3) фокус (см. рис. 9) или центр, соответствующие комплексно-сопряженным собственным числам.

С помощью приведения системы (8.1.1) к нормальной форме исследуем расположение ее траекторий в достаточно малой окрестности начала координат.

1. Узел. Пусть $|\lambda_1|<|\lambda_2|$. Резонансное соотношение (8.2.5) для определения резонансных k, q таково:

$$q_1\lambda_1+q_2\lambda_2-\lambda_k=0,\quad k=1,2;\quad q_1+q_2\geqslant 2. \tag{8.3.1}$$

При $k=1$ (8.3.1) не имеет решений. При $k=2$, если $\lambda_2\neq p\lambda_1$ с целым $p>1$, то (8.3.1) также не имеет решений. Если же $k=2$, $\lambda_2=p\lambda_1$, то $q_1=p$, $q_2=0$. Следовательно, нормальная форма имеет вид

$$\dot{y}_1=\lambda_1 y_1,\quad \dot{y}_2=\lambda_2 y_2 \tag{8.3.2}$$

в первом случае и

$$\dot{y}_1=\lambda_1 y_1,\quad \dot{y}_2=\lambda_2 y_2+b y_1^p \tag{8.3.3}$$

— во втором. В следующем параграфе будет доказано, что в рассматриваемом случае стандартное нормализующее преобразование сходится. Нормальная форма (8.3.2) — частный случай (8.3.3) при $b=0$. Полуоси оси y_2 являются траекториями. Чтобы найти остальные траектории, проинтегрируем уравнение

$$\frac{dy_2}{dy_1}=\gamma\frac{y_2}{y_1}+\frac{b}{\lambda_1}y_1^{p-1},\quad \gamma=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}>1.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y_2=y_1^\gamma\left(C+\frac{b}{\lambda_1}\int y_1^{-\gamma+p-1}dy_1\right)=\begin{cases} Cy_1^\gamma & \text{при } b=0,\\ y_1^\gamma\left(C+\dfrac{b}{\lambda_1}\ln|y_1|\right) & \text{при } b\neq 0.\end{cases}$$

В обоих случаях интегральные кривые касаются оси y_1 в начале координат. Каждую из этих кривых начало координат «разбивает» на две траектории. Получаем картину расположения траекторий типа изображенной на рис. 7 (узел). Для исходной системы в достаточно малой окрестности начала координат она подвергается аналитическому преобразованию, близкому аффинному. Координатные оси перейдут в кривые $x_1=h_1(0, y_2)$, $x_2=y_2+h_2(0, y_2)$ и $x_1=y_1+h_1(y_1, 0)$, $x_2=h_2(y_1, 0)$, где y_1 и y_2 следует рассматривать как параметры, изменяющиеся в некоторой окрестности нулевой точки. Первая из этих кривых началом координат разбивается на две полутраектории. Все остальные траектории в начале координат имеют общую касательную со второй кривой. Но сама вторая кривая состоит из полутраекторий лишь при $b=0$. В нелинейном случае такое расположение траекторий тоже называется узлом.

2. **Седло.** Резонансные соотношения (8.3.1) определяют резонансные q_1, q_2 по-разному в зависимости от типа числа $\gamma=\lambda_2/\lambda_1$. Если γ — иррациональное число, то (8.3.1) не имеет решений, т. е. нормальная форма линейна

$$\dot{y}_1=\lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2=\lambda_2 y_2. \tag{8.3.4}$$

Если $\gamma=-\frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, то из (8.3.1) при $k=1$ получаем $q_1-1-q_2\frac{m}{n}=0$, откуда $\frac{q_2}{q_1-1}=\frac{n}{m}$. Следовательно, при $k=1$ имеем $q_1-1=pm$, $q_2=pn$, $p\in\mathbf{N}$. Аналогично, при $k=2$ имеем $q_1=pm$, $q_2-1=pn$, $p\in\mathbf{N}$. Следовательно, при рациональном γ нормальная форма имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1&=\lambda_1 y_1+y_1\sum_{p=1}^{\infty}a_p(y_1^m y_2^n)^p, \\ \dot{y}_2&=\lambda_2 y_2+y_2\sum_{p=1}^{\infty}b_p(y_1^m y_2^n)^p. \end{aligned} \tag{8.3.5}$$

Из (8.3.4) и (8.3.5) (в последнем случае, если ряд в правой части равенства — сходящийся) заключаем, что расположение траекторий имеет тип седла. Но в этом случае не всегда можно отсюда сделать заключение о поведении траекторий системы (8.1.1), так как любое преобразование к нормальной форме (в том числе стандартное) может расходиться в любой окрестности начала координат. Однако другими методами можно доказать, что седлу в линейной системе соответствует седло в нелинейной системе, если рассматривать достаточно малую окрестность начала координат.

3. **Фокус.** В этом случае $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$, $\alpha\neq 0$, $\beta>0$. В § 4 гл. V было показано, что фокус для линейной системы переходит в фокус для нелинейной системы. Этот результат легко получается и методом приведения к нормальной форме. Покажем это. После приведения матрицы A к жордановой форме $J=\operatorname{diag}\{\alpha+i\beta, \alpha-i\beta\}$ получим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1&=(\alpha+i\beta)x_1+X_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2&=(\alpha-i\beta)x_2+X_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{8.3.6}$$

Как было показано в § 5 гл. V, переменные x_1 и x_2 — комплексно-сопряженные: $x_2=\bar{x}_1$ (в этой главе черта всегда означает комплексную сопряженность). Следовательно, и $X_2=\bar{X}_1$, причем под этим равенством следует понимать следующее: если

$$X_1=\sum_{q_1+q_2=2}^{\infty} X_1^{(q_1,q_2)}x_1^{q_1}x_2^{q_2},$$

то

$$X_2=\sum_{q_1+q_2=2}^{\infty} \overline{X_1^{(q_1,q_2)}}x_2^{q_1}x_1^{q_2},$$

т. е. X_2 получается из X_1 заменой коэффициентов разложения на сопряженные, x_2 на x_1, x_1 на x_2.

Из (8.3.1) вытекает, что нормальная форма системы (8.3.6) линейна

$$\dot{y}_1=(\alpha+i\beta)y_1, \quad \dot{y}_2=(\alpha-i\beta)y_2. \tag{8.3.7}$$

В следующем параграфе будет доказано, что стандартное нормализующее преобразование

$$\begin{aligned} x_1&=y_1+h_1(y_1, y_2),\\ x_2&=y_2+h_2(y_1, y_2) \end{aligned} \tag{8.3.8}$$

сходится. Покажем, что оно удовлетворяет условию

$$h_2=\bar{h}_1. \tag{8.3.9}$$

В силу (8.1.5)

$$\frac{\partial h_k}{\partial y_1}(\alpha+i\beta)y_1+\frac{\partial h_k}{\partial y_2}(\alpha-i\beta)y_2-\lambda_k h_k=X_k(y_1+h_1, \ y_2+h_2), \tag{8.3.10}$$
$$k=1,2.$$

Так как $X_2=\bar{X}_1$, то члены второго порядка в h_k комплексно сопряжены: $h_2{}^2=\bar{h}_1{}^2$. Пусть до членов порядка, меньшего s, $h_2=\bar{h}_1$. Тогда это свойство имеет место и для членов порядка s. Действительно, в силу (8.3.10)

$$\frac{\partial h_1^s}{\partial y_1}(\alpha+i\beta)y_1+\frac{\partial h_1^s}{\partial y_2}(\alpha-i\beta)y_2-(\alpha+i\beta)h_1^s=$$
$$=\{X_1(y_1+h_1, \ y_2+h_2)\}^s. \tag{8.3.11}$$

Подставим черту над всеми членами этого равенства. Получим, что $\bar{h}_1{}^s$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $h_2{}^s$, так как правая часть (8.3.11) зависит от $h_1{}^j$, $h_2{}^j$, для которых $j<s$. Следовательно, $h_2{}^s=\bar{h}_1{}^s$, что и требовалось доказать.

Если положить $x_1=u_1+iu_2$, $x_2=u_1-iu_2$, $y_1=v_1+iv_2$, $y_2=v_1-iv_2$, то из (8.3.8), переходя к вещественным и мнимым частям, получаем $u_1=v_1+g(v_1, v_2)$, $u_2=v_2+g_2(v_1, v_2)$, где g_1, g_2—вещественные сходящиеся ряды. Так как в плоскости Ov_1v_2, как показано в § 5 гл. IV, имеет место фокус, то и для исходной системы имеет место фокус.

4. Центр. Здесь $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$, $\beta > 0$. В § 3 гл. VI было показано, что центр для линейной системы либо остается центром, либо превращается в фокус (проблема центра и фокуса). После приведения A к жордановой форме, получим систему (8.3.6), где $\alpha = 0$.

В силу (8.2.8) нормальная форма системы (8.3.6) имеет вид

$$\dot{y}_1 = i\beta y_1 + y_1 P_1(y_1 y_2), \tag{8.3.12}$$

$$\dot{y}_2 = -i\beta y_2 + y_2 P_2(y_1 y_2),$$

где

$$P_k = \sum_{p=1}^{\infty} P_k^{(p)} (y_1 y_2)^p, \quad k = 1,2.$$

Покажем, что $h_2 = \bar{h}_1$, $P_2 = \bar{P}_1$. В силу (8.1.5)

$$\begin{gathered} \frac{\partial h_k}{\partial y_1}(i\beta y_1 + y_1 P_1) + \frac{\partial h_k}{\partial y_2}(-i\beta y_2 + y_2 P_2) - \lambda_k h_k = \\ = X_k(y_1 + h_1,\ y_2 + h_2) - y_k P_k, \quad k = 1,2. \end{gathered} \tag{8.3.13}$$

Так как $X_2 = \bar{X}_1$, то $h_2^2 = \bar{h}_1^2$. Пусть до членов порядка, меньшего s, $h_2 = \bar{h}_1$, $P_2 = \bar{P}_1$. Тогда это свойство имеет место и для членов порядка s. Действительно, $h^s{}_k$ и $P^s{}_k$ выражаются через $h^j{}_k$, $P^j{}_k$, у которых $j < s$, поэтому «проходит» рассуждение, использованное для доказательства (8.3.9).

Возможны следующие два случая.

1) $P_1 = iH(y_1 y_2)$, $P_2 = -iH(y_1 y_2)$, где H — ряд по степеням $y_1 y_2$ с вещественными коэффициентами. Этот случай называется *трансцендентным.*

2) $P_1 = G(y_1 y_2) + iH(y_1 y_2)$, $P_2 = G(y_1 y_2) - iH(y_1 y_2)$, где G и H — ряды по степеням $y_1 y_2$ с вещественными коэффициентами, причем

$$G = g(y_1 y_2)^N + \ldots, \quad g \neq 0.$$

Этот случай называется *алгебраическим.*

В следующем параграфе будет доказано, что в трансцендентном случае стандартное нормализующее преобразование (8.3.8) сходится. В алгебраическом же случае сходящегося нормализующего преобразования может не существовать. Однако метод нормальных форм применим в обоих случаях.

Сначала рассмотрим трансцендентный случай. В полярных координатах $y_1 = re^{i\varphi}$, $y_2 = re^{-i\varphi}$, $r \geqslant 0$, система (8.3.12) имеет вид

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\varphi} = \beta + H(r^2).$$

Следовательно, в плоскости r, φ траекториями являются окружности $r = C$, движения на них — периодические с периодом $\dfrac{2\pi}{\beta + H(C^2)}$.

Если положить $x_1=u_1+iu_2$, $x_2=u_1-iu_2$, $y_1=v_1+iv_2$, $y_2=v_1-iv_2$, то из (8.3.8), переходя к вещественным и мнимым частям, получаем

$$u_1=v_1+g_1(v_1, v_2), \quad u_2=v_2+g_2(v_1, v_2),$$

где g_1, g_2 — вещественные сходящиеся ряды. Таким образом, для исходной системы имеет место центр. Если окажется, что $H\equiv 0$, то периоды всех решений одинаковы и равны $2\pi/\beta$. В этом случае центр называется *изохронным*.

Рассмотрим алгебраический случай. Вместо формального преобразования (8.3.8) рассмотрим полиномиальное преобразование

$$x_1=y_1+h_1^{(2N+1)}(y_1, y_2),$$

$$x_2=y_2+h_2^{(2N+1)}(y_1, y_2),$$

где

$$h_k^{(2N+1)}=\sum_{q_1+q_2=2}^{2N+1} h_k^{(q_1,q_2)} y_1^{q_1} y_2^{q_2}.$$

Это преобразование, очевидно, сходящееся. В результате его применения получим систему, которая совпадает с нормальной формой до членов, порядка $\leqslant 2N+1$, что вытекает из (8.3.13). Указанную систему можно представить в виде

$$\dot{y}_1=i\beta y_1+gy_1(y_1y_2)^N+iy_1H^{(N)}+Y_1^*,$$

$$\dot{y}_2=-i\beta y_2+gy_2(y_1y_2)^N-iy_2H^{(N)}+Y_2^*,$$

где $Y_2^*=\bar{Y}_1^*$, их разложения начинаются с членов порядка не ниже $2N+2$, $H^{(N)}$ получаются из H отбрасыванием членов разложения порядка выше N относительно произведения y_1y_2. В полярных координатах

$$\dot{r}=gr^{2N+1}+R(r, \varphi),$$

$$\dot{\varphi}=\beta+H^{(N)}(r^2)+\Phi(r, \varphi),$$

где R, Φ — сходящиеся ряды по степеням r с 2π-периодическими по φ коэффициентами порядка не ниже $2N+2$ и $2N+1$ соответственно. При достаточно малых r имеем $|R|<\frac{1}{2}|g|r^{2N+1}$. Следовательно, при таких r справедливо неравенство $\frac{dr}{d\varphi}<0$ при $g<0$ и $\frac{dr}{d\varphi}>0$ при $g>0$. В первом случае функция последования, определенная в п. 1 § 4 гл. V, убывает, во втором — возрастает. Это, как показано в § 4 гл. V, соответствует фокусу — устойчивому при $g<0$ и неустойчивому при $g>0$. Таким образом, для определения наличия фокуса достаточно с помощью (8.3.8) привести (8.1.1) к нормальной форме (8.3.12) до первого члена разложения, коэффициент которого не является чисто мнимым числом.

Пример 8.3.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений из примера 6.3.4. В координатах z_1, z_2 соответствующих вещественной жордановой матрице коэффициентов линейного приближения, она имеет вид

$$\dot{z}_1=-z_2-\frac{1}{2}(z_1-z_2)^2(z_1+z_2),$$

$$\dot{z}_2=z_1-\frac{1}{2}(z_1-z_2)^2(z_1+z_2).$$

Переходя к комплексно-сопряженным переменным по формулам $y_1=z_1+iz_2$, $y_2=z_1-iz_2$, получим систему, второе уравнение которой является комплексно-сопряженным по отношению к первому. Поэтому можно ограничиться первым уравнением. Оно имеет вид

$$\dot{y}_1=iy_1-\frac{1}{4}\left[\left(y_2^3+y_1^2y_2\right)+i\left(y_1^3+y_1y_2^2\right)\right]. \tag{8.3.14}$$

С помощью полиномиального преобразования $y_1=u_1+h^3(u_1, u_2)$, $y_2=u_2+\bar{h}^3$, где h^3 — однородный полином третьего порядка, можно в (8.3.14) уничтожить все члены третьего порядка, кроме резонансного, который при этом не изменится. Следовательно, $g=-1/4$. Имеет место устойчивый фокус, что согласуется с результатом, полученным в примере 6.3.4.

§ 4. Нормальная форма на инвариантной поверхности

1. Пусть собственные числа матрицы A в системе (8.1.1) разбиты на две группы: $\lambda=(\lambda', \lambda'')$, где $\lambda'=(\lambda_1, ..., \lambda_m)$, $\lambda''=(\lambda_{m+1}, ..., ..., \lambda_n)$, причем ни одно из собственных чисел первой группы не содержится во второй группе. Не уменьшая общности рассмотрения, можно считать, что

$$A=\begin{pmatrix} J' & 0 \\ Z & A'' \end{pmatrix},$$

где $J'\in\mathfrak{M}^{m,m}$ — жорданова матрица с собственными числами $\lambda_1, ..., \lambda_m$, $A''\in\mathfrak{M}^{n-m,n-m}$, $Z\in\mathfrak{M}^{n-m,m}$. Таким образом, рассматриваемая система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}'&=J'x'+X'(x', x''), \\ \dot{x}''&=A''x''+\tilde{X}''(x', x'')\cdot \end{aligned} \tag{8.4.1}$$

В (8.4.1) и далее объекты с одним штрихом имеют размерность m, $1\leqslant m\leqslant n$, с двумя штрихами — размерность $n-m$ (они могут отсутствовать); тильда означает, что степенной ряд может содержать члены, линейные по переменной с одним штрихом.

Системе (8.4.1) сопоставим формально эквивалентную ей систему

$$\begin{aligned} \dot y' &= J'y' + Y'(y', y''), \\ \dot y' &= A''y'' + Y''(y', y''). \end{aligned} \tag{8.4.2}$$

Определение 8.4.1. *Если в системе* (8.4.2)

$$Y''(y', 0) = 0, \tag{8.4.3}$$

а разложение $Y'(y', 0)$ содержит только резонансные члены, т. е. m-мерная система

$$\dot y' = J'y' + Y'(y', 0) \tag{8.4.4}$$

имеет нормальную форму, то система (8.4.2) *называется нормальной формой на инвариантной поверхности системы* (8.4.1).

Название объясняется тем, что для системы (8.4.2) m-мерная плоскость $y''=0$ формально удовлетворяет этой системе. Следовательно, в аналитическом случае плоскость $y''=0$ является инвариантной, т. е. траектории системы (8.4.2), проходящие через точку этой плоскости, принадлежат ей при всех значениях t из области определения.

Пусть $q' = (q_1, \ldots, q_m)$.

Теорема 8.4.1. *Если выполняется неравенство*

$$(q', \lambda') - \lambda_k \neq 0, \quad k = m+1, \ldots, n; \quad |q'| \geqslant 1, \tag{8.4.5}$$

то система (8.4.1) *с помощью формальной замены*

$$\begin{aligned} x' &= y' + h'(y'), \\ x'' &= y'' + \tilde h''(y') \end{aligned} \tag{8.4.6}$$

приводится к нормальной форме на инвариантной поверхности, причем резонансные коэффициенты ряда $h'(y')$ произвольны, а нерезонансные его коэффициенты и все коэффициенты ряда $\tilde h''(y')$ при фиксированных резонансных коэффициентах ряда $h'(y')$ определяются однозначно.

Доказательство. Дифференцируя (8.4.6) в силу систем (8.4.1) и (8.4.2), получим

$$J'(y' + h') + X'(y' + h', y'' + \tilde h'') = J'y' + Y' + \frac{\partial h'}{\partial y'}(J'y' + Y'),$$

$$A''(y'' + \tilde h'') + \tilde X''(y' + h', y'' + \tilde h'') = A''y'' + Y'' + \frac{\partial \tilde h''}{\partial y'}(J'y' + Y').$$

Полагая $y''=0$ и учитывая (8.4.3), для определения h', $\tilde h''$ имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h'}{\partial y'} J'y' - J'h' &= X'(y' + h', \tilde h'') - \frac{\partial h'}{\partial y'} Y'(y', 0) - Y'(y', 0), \\ \frac{\partial \tilde h''}{\partial y'} J'y' - A''\tilde h'' &= \tilde X''(y' + h', \tilde h'') - \frac{\partial \tilde h''}{\partial y'} Y'(y', 0). \end{aligned} \tag{8.4.7}$$

Из (8.4.7) следует, что векторные однородные полиномы в разложениях h', $\bar{h}''$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial h'^s}{\partial y'} J'y' - J'h'^s = f'^s(h'^{i'}, h''^{i''}, Y^j, X^k) - Y'^s(y', 0),$$

$$i' < s,\ i'' < s,\ j < s,\ k \leqslant s, \tag{8.4.8}$$

$$\frac{\partial h''^s}{\partial y'} J'y' - A''h''^s = f''^s(h'^{i'}, h''^{i''}, Y^j, X^k),$$

$$i' \leqslant s,\ i'' < s,\ j \leqslant s,\ k \leqslant s.$$

Собственные числа оператора левой части второго уравнения (8.4.8) отличны от нуля в силу леммы 6.8.1 и условия (8.4.5). Разрешимость первого из уравнений (8.4.8) при надлежащем выборе коэффициентов Y'^s $(y', 0)$ обоснована в § 2. Следовательно, последовательно определяем сначала h''^1, затем h'^2, h''^2, h'^3, h''^3 и т. д. Утверждение теоремы о единственности h', $\bar{h}''$ вытекает из рассуждений § 2. Теорема доказана.

Нормальная форма на инвариантной поверхности системы (8.4.1) имеет то преимущество перед ее нормальной формой, что в (8.4.6) ряды h', $\bar{h}''$ являются рядами со степенями лишь m переменных, а не n переменных, как у нормализующего преобразования. Соответственно определению 8.2.2 преобразование (8.4.6), в котором все резонансные коэффициенты $h'(y')$ равны нулю, будем называть стандартным. В дальнейшем рассматриваем только стандартные преобразования. Тогда нормальная форма на инвариантной поверхности данной системы единственна.

2. Аналитическая эквивалентность системы (8.4.1) и ее нормальной формы на инвариантной поверхности. Рассмотрим вопрос о сходимости построенных в § 2 и 4 формальных преобразованиях. Так как нормальная форма системы является частным случаем нормальной формы на инвариантной поверхности при $m=n$, то достаточно рассмотреть преобразование (8.4.6).

Теорема 8.4.2. *Пусть:*

$$\text{I)}\ (q', \lambda') - \lambda_k \neq 0 \ \text{при}\ k = m+1, \dots, n; \tag{8.4.9}$$

$$\text{II)}\ |(q', \lambda') - \lambda_k| \geqslant \varepsilon > 0 \ \text{при}\ k = 1, \dots, n \tag{8.4.10}$$

для тех k, q', для которых $(q', \lambda') - \lambda_k \neq 0$, причем ε не зависит от k, q';

III) *выполняется любое из следующих двух условий:*

III$_1$) *вещественные части $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ имеют одинаковый знак,*

III$_2$) *в (8.4.2) $J' = \operatorname{diad}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ и при $k = 1, \dots, m$*

$$Y_k(y', 0) = \lambda_k y_k F(y'), \tag{8.4.11}$$

где $F = \sum\limits_{|q'|=1}^{\infty} F^{(q')} y'^{q'}$ *не зависит от k.*

Тогда если ряды X', $\tilde{X}''$ в (8.4.1) — сходящиеся, то и ряды h', $\tilde{h}''$ в стандартном преобразовании (8.4.6) — также сходящиеся.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $A''=J''$ — жорданова матрица, а $\tilde{X}''$ не содержит линейных членов, т. е. $\tilde{X}''=X''$, тогда и $\tilde{h}''=h''$. Приравнивая в (8.4.7) коэффициенты при $y'^{q'}$, получим следующие уравнения:

$$\delta_k Y_k^{(q',0)}+[(q',\ \lambda')-\lambda_k]\,h_k^{(q')}=g_k^{(q')},\quad k=1,\dots,n, \tag{8.4.12}$$

где

$$g_k^{(q')}=\{X_k(y'+h',\ h'')\}^{(q')}+\sigma_k h_{k-1}^{(q')}+$$
$$+\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{|r'|\geq 2} r_l h_k^{(r')} Y_l^{(q'-r'+e_l,\ 0)}+(q_l+1)\sigma_l h_k^{(q'-e_{l-1}+e_l)}\right), \tag{8.4.13}$$

$\{X_k(y'+h',\ h'')\}^{(q')}$—коэффициент при $y'^{q'}$ после подстановки ряда в ряд; $\delta_k=1$ при $k=1,\ \dots,\ m$; $\delta_k=0$ при $k=m+1,\ \dots,\ n$; σ_k — внедиагональные элементы J' и J''; $e_k=(0,\ \dots,\ 1,\ \dots,\ 0)$, где 1 стоит на k-м месте.

Покажем, что для резонансных $(k,\ q')$

$$Y_k^{(q',0)}=\{X_k(y'+h',\ h'')\}^{(q')},\quad k=1,\dots,m. \tag{8.4.14}$$

Имеем

$$(q',\ \lambda')-\lambda_k=(r',\ \lambda')-\lambda_k+(q'-r',\ \lambda')=0.$$

Но в (8.4.13) $Y_l^{(q'-r'+e_l,\ 0)}$ — резонансные, поэтому $(q'-r',\ \lambda')=0$, следовательно, $(r',\ \lambda')-\lambda_k=0$. Таким образом, в (8.4.13) $h_k^{(r')}$ — резонансные коэффициенты. Кроме того, если $\sigma_k\neq 0$, то $h_{k-1}^{(q')}$ — также резонансные коэффициенты, так как $(q',\ \lambda')-\lambda_{k-1}=(q',\ \lambda')-\lambda_k=0$, поскольку $\lambda_{k-1}=\lambda_k$, а $(k,\ q')$ — резонансный набор. Аналогично убеждаемся, что и $h_k^{(q'-e_{l-1}+e_l)}$ в (8.4.13) — резонансные коэффициенты. Теперь (8.4.14) вытекает из (8.4.12), (8.4.13), так как в стандартном преобразовании (8.4.6) все резонансные коэффициенты равны нулю.

Для нерезонансных $h_k^{(q')}$, $k=1,\dots,n$, из (8.4.10), (8.4.12), (8.4.13) получаем

$$\begin{aligned}|h_k^{(q')}|\leqslant{}&\varepsilon^{-1}|\{X_k(y'+h',\ h'')\}^{(q')}|+\varepsilon^{-1}\sigma_k|h_{k-1}^{(q')}|+\\&+|(q',\ \lambda')-\lambda_k|^{-1}\sum_{l=2}^{m}(q_l+1)\sigma_l|h_k^{(q'-e_{l-1}+e_l)}|+\\&+|(q',\ \lambda')-\lambda_k|^{-1}\sum_{|r'|\geqslant 2}|h_k^{(r')}|\left|\sum_{l=1}^{m} r_l Y_l^{(q'-r'+e_l,\ 0)}\right|.\end{aligned} \tag{8.4.15}$$

В случае III_1 $|(q', \lambda')-\lambda_k|^{-1}(q_l+1)\leqslant d$, а в случае III_2 $\sigma_2=\ldots=\sigma_m=0$. Далее, поскольку отличные от нуля $Y_l^{(q'-r'+e_l,\,0)}$ — резонансные, в (8.4.15) $(q', \lambda')=(r', \lambda')$. Отсюда вытекает, что в обоих случаях III_1 и III_2 можно указать d такие, чтобы выполнялось неравенство

$$|(q', \lambda')-\lambda_k|^{-1}\left|\sum_{l=1}^{m} r_l Y_l^{(q'-r'+e_l,\,0)}\right|\leqslant d\sum_{l=1}^{m}\left|Y_l^{(q'-r'+e_l,\,0)}\right|,$$

причем в случае $\mathrm{III}_2 Y_l^{(q'-r'+e_l,\,0)}=\lambda_l F^{(q'-r')}$. Отсюда и из (8.4.15) получаем следующую оценку нерезонансных коэффициентов:

$$|h_k^{(q')}|\leqslant\varepsilon^{-1}|\{X_k(y'+h', h'')\}^{(q')}+\varepsilon^{-1}\sigma|h_{k-1}^{(q')}|+$$
$$+d\sum_{l=1}^{m}\sum_{|r'|\geqslant 2}|h_k^{(r')}||Y_l^{(q'-r'+e_l,\,0)}|+d\sigma\sum_{l=2}^{m}|h_k^{(q'-e_{l-1}+e_l)}|,\qquad(8.4.16)$$

где $\sigma=\max\sigma_k$, $k=2, \ldots, n$. Для резонансных коэффициентов из (8.4.14) имеем

$$|Y_k^{(q',0)}|=|\{X_k(y'+h', h'')\}^{(q')}|,\quad k=1,\ldots, m.\qquad(8.4.17)$$

Пусть ряды X', X'' сходятся при $\|x\|<a$. Тогда в силу (6.1.6) для их коэффициентов справедлива оценка

$$|X_k^{(q)}|\leqslant a_1^{-|q|}\gamma,\qquad(8.4.18)$$

где $0<a_1<a$, $\gamma=\sup\limits_{\|x\|=a_1}\|X\|$. Положим

$$\widehat{X}(x)=\gamma\sum_{|q|=2}^{\infty}a_1^{-|q|}x^q.$$

На основании (8.4.18) ряд $\widehat{X}$ сходится при $\|x\|<a_1$ и мажорирует ряды X_k, $k=1, \ldots, n$.

Рассмотрим резонансные соотношения (8.2.5) в случае III_1. В этом случае число точек вида $(q', \lambda')-\lambda_k$, лежащих в ограниченной части комплексной плоскости, конечно. Поэтому при каждом k число векторов q', для которых $(q', \lambda')-\lambda_k=0$, тем более конечно. Следовательно, в случае III_1 $Y_l(y', 0)$ — полиномы. Положим $\widehat{Y}_l=\sum|Y_l^{(q',0)}|y'^{q'}$. Составим скалярное уравнение

$$\Phi(\eta, \varphi)=\varphi-\varepsilon^{-1}\widehat{X}(\eta+\varphi,\ldots, \eta+\varphi, \varphi,\ldots, \varphi)-$$
$$-\varepsilon^{-1}\sigma\varphi-d\varphi\sum_{l=1}^{m}\widehat{Y}_l(\eta,\ldots, \eta)\eta^{-1}-d\sigma\varphi=0.\qquad(8.4.19)$$

Здесь Φ — сходящийся ряд по степеням η, φ, $\Phi(0, 0)=0$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}(0, 0)=1-(\varepsilon^{-1}+d)\sigma\neq0$, если σ достаточно мало. Величину σ можно сделать сколь угодно малой в силу (4.3.6), причем ε и d от σ не зависят. По теореме 6.1.5 уравнение (8.4.19) определяет сходящийся ряд $\varphi(\eta)$, который на основании (8.4.16) мажорирует ряды $h_k(\eta, \ldots, \eta)$. В случае III_1 теорема показана.

Перейдем к рассмотрению случая III_2. Как отмечалось, в этом случае $\sigma_i=0$, $i=2, \ldots, m$. Докажем одновременно сходимость h_k и Y_i. Рассмотрим систему двух уравнений

$$\varphi-\varepsilon^{-1}\widehat{X}(\eta+\varphi, \ldots, \eta+\varphi, \varphi, \ldots, \varphi)-md\varphi\psi\eta^{-1}-\varepsilon^{-1}\sigma\varphi=0,$$

$$\psi-\widehat{X}(\eta+\varphi, \ldots, \eta+\varphi, \varphi, \ldots, \varphi)=0.$$

В силу (8.4.16) и (8.4.17) решение $\varphi(\eta)$, $\psi(\eta)$ этой системы соответственно мажорирует ряды $h_k(\eta, \ldots, \eta)$, $Y_i(\eta, \ldots, \eta)$, $k=1, \ldots, n$; $i=1, \ldots, m$. Чтобы было можно опять применить теорему о неявной функции, положим $\varphi=u\eta$, $\psi=v\eta$. Получим

$$\begin{aligned} &u-\varepsilon^{-1}\eta U(\eta, u)-mduv-\varepsilon^{-1}\sigma u=0,\\ &v-\eta V(\eta, u)=0, \end{aligned} \tag{8.4.20}$$

где U, V — сходящиеся ряды по степеням η, u и якобиан левой части (8.4.20) по u, v в точке $\eta=u=v=0$ равен $1-\varepsilon^{-1}\sigma\neq0$, если σ достаточно мало. По теореме 6.1.5 система (8.4.20) имеет единственное решение $u(\eta)$, $v(\eta)$ такое, что $u(0)=v(0)=0$, где $u(\eta)$, $v(\eta)$ — сходящиеся ряды. Следовательно, сходятся и $\psi(\eta)$, $\psi(\eta)$, а вместе с ними и h_k, Y_i. Теорема доказана полностью.

При $m=n$ получаем условия сходимости стандартного преобразования к нормальной форме. Отсюда вытекают утверждения § 3 о сходимости преобразования к нормальной форме в случае узла, фокуса и центра. Случай узла и фокуса охватывается условием III_1, случай центра — условием III_2.

Задача 8.4.1. Рассмотрим критический случай в теории устойчивости движения:

$$\operatorname{Re}\lambda_i=0 \text{ при } i=1, \ldots, m; \ \operatorname{Re}\lambda_j<0 \text{ при } j=m+1, \ldots, n, \ 1\leqslant m<n.$$

Докажите, что справедливы следующие утверждения.

А) Существует формальное преобразование

$$\begin{aligned} &x'=y'+h'(y', y''),\\ &x''=y''+\tilde{h}''(y'), \end{aligned} \tag{8.4.21}$$

приводящее (8.4.1) к виду

$$\begin{aligned} &\dot{y}'=J'y'+Y'(y'),\\ &\dot{y}''=A''y''+Y''(y', y''), \end{aligned} \tag{8.4.22}$$

где $Y''(y', 0)=0$, а $Y'(y')$ содержит только резонансные члены, т. е.

$$\dot{y}' = J'y' + Y' \tag{8.4.23}$$

— система в нормальной форме.

Б) Преобразование

$$x' = y' + h'(y', 0),$$

$$x'' = y'' + \tilde{h}''(y')$$

приводит (8.4.1) к нормальной форме на инвариантной поверхности (8.4.2), причем $Y'(y')$ в (8.4.22) и $Y(y', 0)$ в (8.4.2) совпадают.

В) Пусть для $Y'(y', 0)$ выполняются условия I, II и либо III_1, либо III_2 теоремы 8.4.2. Тогда если X', $\tilde{X}''$ в (8.4.1) сходятся, то и h', $\tilde{h}''$ в (8.4.21) также сходятся.

Г) Если система (8.4.22) — сходящаяся, а $V(y')$ — функция Ляпунова для системы (8.4.23), удовлетворяющая условиям теоремы 7.5.1 или 7.5.2, то функция $U = V(y') + W(y'')$, где $W(y'')$ — квадратичная форма, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial y''} A''y'' = -(y_{m+1}^2 + \ldots + y_n^2),$$

есть функция Ляпунова для системы (8.4.22), которая удовлетворяет условиям теоремы 7.5.1 или 7.5.2.

Система (8.4.22) называется квазинормальной формой системы (8.4.1). С помощью квазинормальной формы исследование вопроса об устойчивости нулевого решения в критических случаях сводится к исследованию только системы (8.4.23) в нормальной форме.

§ 5. Первый метод Ляпунова

Первый метод Ляпунова исследования решений уравнения (8.1.1) состоит в представлении решений в виде рядов по степеням каких-либо известных функций. Этими функциями, например, могут быть решения линейной системы с постоянными коэффициентами, если выполняются условия теорем 6.8.1 и 6.8.2 о линеаризации.

Рассмотрим сходящуюся систему (8.1.1) в предположении, что матрица A имеет ровно m, $1 \leqslant m \leqslant n$, собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ с отрицательными вещественными частями. Положим $\lambda' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\lambda'' = (\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n)$. Таким образом, $\operatorname{Re} \lambda_j \geqslant 0$, $j = m+1, \ldots, n$.

Представим (8.1.1) в форме (8.4.1). Условия I и II теоремы 8.4.2 выполнены согласно сделанному предположению, выполнено и условие III_1. Следовательно, существует сходящееся стандартное преобразование (8.4.6), приводящее (8.4.1) к нормальной форме на инвариантной поверхности (8.4.2). Изучим более подробно систему в нормальной форме

$$\dot{y}' = J'y' + Y'(y', 0), \tag{8.5.1}$$

соответствующую (8.4.2) на инвариантной плоскости $y''=0$. Пронумеруем $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в порядке убывания их вещественных частей: $\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant \operatorname{Re}\lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{Re}\lambda_m$. Положим

$$Q_k = \{q' : (q', \lambda') - \lambda_k = 0\}, \quad k=1, \ldots m. \tag{8.5.2}$$

Тогда Q_1 пусто. Вообще, если $q' \in Q_k$, $k>1$, то $q'=(q_1, \ldots, q_{k-1}, 0, \ldots, 0)$. Отсюда вытекает, что система (8.5.1) в координатной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_k &= \lambda_k y_k + \tilde{Y}_k(y_1, \ldots, y_{k-1}), \quad k=2, \ldots, m, \end{aligned} \tag{8.5.3}$$

где

$$\tilde{Y}_k = \sum_{q' \in Q_k} \tilde{Y}_k^{(q')} y'^{q'}, \tag{8.5.4}$$

$$\tilde{Y}_k^{(q')} = Y_k^{(q',0)} \text{ при } |q'| \geqslant 2; \quad \tilde{Y}_k^{(q')} = \sigma_k \text{ при } q'=e_{k-1}; \quad \tilde{Y}_k^{(q')} = 0$$

при $|q'|=1$, $q' \neq e_{k-1}$. Эта система легко интегрируется. Из первого уравнения имеем

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}. \tag{8.5.5}$$

При $k>1$ справедлива формула

$$y_k = e^{\lambda_k t}(C_k + \Phi_k(t, C_1, \ldots, C_{k-1})), \tag{8.5.6}$$

где Φ_k — полином по всем своим аргументам, аннулирующийся при $t=0$. Докажем формулу (8.5.6) индукцией по k. При $k=1$ (8.5.6) имеет место в силу (8.5.5). Считая, что (8.5.6) верно, рассмотрим решение $y_{k+1}(t)$. Из (8.5.3), (8.5.4) получаем

$$y_{k+1}(t) = e^{\lambda_{k+1} t} C_{k+1} + \int_0^t e^{\lambda_{k+1}(t-s)} \sum_{q' \in Q_{k+1}} \psi_{k+1}^{(q')}(s, C_1, \ldots, C_k) e^{(q', \lambda')s} ds,$$

где $\psi_{k+1}^{(q')}$ — полиномы. В силу (8.5.2), если $q' \in Q_{k+1}$, то $(q', \lambda') = \lambda_{k+1}$, следовательно,

$$y_{k+1}(t) = e^{\lambda_{k+1} t}\left(C_{k+1} + \int_0^t \sum_{q' \in Q_{k+1}} \psi_{k+1}^{(q')}(s, C_1, \ldots, C_k) ds\right). \tag{8.5.7}$$

Из (8.5.7) получаем формулу (8.5.6), соответствующую $k+1$. Формула (8.5.6) обоснована. На основании (8.5.6) заключаем, что если постоянные $C_1, \ldots, C_m$ достаточно малы по модулю, то $y'(t)$ при всех $t \geqslant 0$ принадлежит области сходимости рядов (8.4.6). При таких C_k, t функции (8.5.5), (8.5.6) можно подставить в (8.4.6). В результате получим утверждение, называемое теоремой Ляпунова о разложении.

Теорема 8.5.1. *При сделанных предположениях система* (8.4.1) *имеет аналитическое m-параметрическое семейство решений*

$$x_k(t)=x_k^{(1)}(C_1,\ldots,C_k,t)e^{\lambda_k t}+\sum_{|q'|=2}^{\infty} x_k^{(q')}(C_1\ldots,C_m,t)e^{(q',\lambda')t},$$

$$k=1,\ldots,m, \tag{8.5.8}$$

$$x_j(t)=\sum_{|q'|=1}^{\infty} x_j^{(q')}(C_1,\ldots,C_m,t)e^{(q',\lambda')t},\quad j=m+1,\ldots,n.$$

Ряды (8.5.8) равномерно сходятся при $t\geqslant 0$, $|C_k|<\Delta$, $k=1, \ldots, m$. Их коэффициенты являются полиномами от всех своих аргументов.

Если $m=n$, т. е. все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то (8.5.8) задает общее решение системы (8.4.1) в окрестности начала координат. В частности, отсюда вытекает теорема об устойчивости по первому приближению в аналитическом случае. Как отмечалось, исследование решений систем дифференциальных уравнений с помощью представления их в виде сходящихся рядов по степеням каких-либо известных функций (в данном случае по степеням экспонент) составляет основу первого метода Ляпунова исследования решений дифференциальных уравнений.

m-мерная плоскость $y''=0$ инвариантна для системы (8.4.2). Так как (8.4.1) и (8.4.2) аналитически эквивалентны в рассматриваемом случае, то система (8.4.1) также имеет m-мерную аналитическую инвариантную поверхность S^+, параметрически задаваемую уравнениями

$$x'=y'+h'(y'),\quad x''=\tilde{h}''(y'),$$

где y' — m-мерный параметр, изменяющийся в некоторой окрестности точки $y'=0$. Разрешая первое из этих уравнений относительно y' и подставляя получившееся выражение во второе, получим явное уравнение инвариантной поверхности S^+ вида $x''=\tilde{f}''(x')$, где $\tilde{f}''$ — аналитическая в окрестности точки $x'=0$ функция. Все траектории на S^+ стремятся к началу координат при $t\to\infty$.

Наиболее интересен случай, когда исходная система (8.1.1) вещественна. Возникает вопрос: является ли построенная поверхность S^+ вещественной для системы (8.1.1)? Можно доказать, что это так. Проблема вообще не возникает, если собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ вещественны.

До сих пор мы предполагали, что $\operatorname{Re}\lambda_i<0$, $i=1,\ldots,m$. Аналогично можно было бы рассмотреть случай, когда $\operatorname{Re}\lambda_i>0$, $i=1, \ldots, m$. Более того, один случай сводится к другому заменой t на $-t$. Поэтому теорема 8.5.1 верна в обоих случаях при $t\geqslant 0$ или при $t\leqslant\leqslant 0$ соответственно знаку $\operatorname{Re}\lambda_i$, $i=1, \ldots, m$. Если матрица A имеет собственные числа обоих знаков, то система (8.1.1) имеет обе инвариантные поверхности S^+ и S^-. Их размерность равна числу собственнных чисел с соответствующим знаком вещественной части.

Это имеет место в системе (8.1.1) при $n=2$ в случае седла для системы линейного приближения $\dot{x}=Ax$. В этом случае согласно теореме 8.5.1 система (8.1.1) имеет инвариантную аналитическую кривую S^+, уравнение которой имеет вид $x_2=f(x_1)$, и другую инвариантную кривую S^- с уравнением $x_1=g(x_2)$. Эти кривые разбиваются началом координат на две траектории. На первой из кривых указанные траектории стремятся к началу координат при $t\to\infty$, на второй — при $t\to-\infty$. Эти траектории называются *сепаратрисами*. Заметим, что доказать существование сепаратрис в § 3 приведением системы (8.1.1) к нормальной форме не удается из-за возможной расходимости нормализующего преобразования. С помощью нормальной формы на инвариантной поверхности эту трудность можно «обойти».

Пример 8.5.1. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\ddot{x}=\sin x.$$

Ему соответствует система двух уравнений

$$\dot{x}_1=x_2,$$
$$\dot{x}_2=\sin x_1=x_1-\frac{x_1^3}{6}+\dots.$$

Для линейного приближения имеет место случай седла. Найдем приближенно уравнения инвариантных кривых в достаточно малой окрестности точки $x_1=x_2=0$. Приведем матрицу коэффициентов линейного приближения к диагональному виду $J=\operatorname{diag}\{-1,\ 1\}$. Для этого выполним замену $x=Sy$ и $S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ найдем из соотношения

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad S^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Покоординатно искомая замена имеет вид $x_1=y_1+y_2$, $x_2=-y_1+y_2$, а ей обратная замена — следующий вид: $y_1=\frac{1}{2}(x_1-x_2)$, $y_2=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$. В переменных y_1, y_2 получим систему

$$\dot{y}_1=-y_1+\frac{1}{12}(y_1+y_2)^3+\dots,$$
$$\dot{y}_2=y_2-\frac{1}{12}(y_1+y_2)^3+\dots.$$

Найдем уравнение инвариантной кривой, соответствующей $\lambda_1=-1$. С помощью преобразования

$$y_1=z_1+h_1(z_1), \quad y_2=z_2+h_2(z_1)$$

приводим систему к нормальной форме на инвариантной поверхности

$$\dot{z}_1=-z_1+Z_1(z_1,z_2), \quad \dot{z}_2=z_2+Z_2(z_1,z_2),$$

где $Z_1=Z_2=0$ при $z_2=0$. Функции h_1, h_2 определяются из уравнений

$$-\frac{\partial h_1}{\partial z_1}z_1+h_1=\frac{1}{12}(z_1+h_1+h_2)^3+\ldots,$$

$$-\frac{\partial h_2}{\partial z_1}z_1-h_2=-\frac{1}{12}(z_1+h_1+h_2)^3+\ldots.$$

Отсюда $h_1^{(2)}=h_2^{(2)}=0$, $h_1^{(3)}=-\frac{1}{24}$, $h_2^{(3)}=\frac{1}{48}$, $h_1^{(4)}=h_2^{(4)}=0$.

Следовательно, $y_1=z_1-\frac{1}{24}z_1^3+O(z_1^5)$, $y_2=\frac{1}{48}z_1^3+O(z_1^5)$.

Из первого равенства имеем $z_1=y_1+\frac{1}{24}y_1^3+O(y_1^5)$, подставляя это равенство во второе, получим

$$y_2=\frac{1}{48}y_1^3+O(y_1^5).$$

Найти уравнение второй инвариантной кривой рекомендуем самостоятельно в качестве упражнения.

§ 6. Аналитическое семейство периодических решений

1. Рассмотрим вещественную аналитическую систему (8.1.1) и предположим, что матрица A имеет пару простых чисто мнимых собственных чисел $\pm i\lambda$ $(\lambda>0)$. Перейдем к переменной u по формуле $u=Sx$, где транспортированная матрица $S^*=(e_1,\ldots,s,\ \ldots,\bar{s},\ldots,e_n)$ получается из единичной заменой некоторых двух столбцов на s и $\bar{s}$ таким образом, чтобы $\det S^*\neq 0$. Здесь s и $\bar{s}$ — собственные векторы A^*, соответствующие собственным числам $i\lambda$ и $-i\lambda$. Выполняя замену, перенумеровав в случае необходимости координаты u, получим систему

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1&=i\lambda u_1+U_1(u_1,u_2,u''),\\
\dot{u}_2&=-i\lambda u_2+U_2(u_1,u_2,u''),\\
\dot{u}''&=A''u''+\tilde{U}''(u_1,u_2,u''),
\end{aligned} \tag{8.6.1}$$

соответствующую системе (8.4.1) при $m=2$, $u'=(u_1,\ u_2)$, $J'=\mathrm{diag}\{i\lambda,\ -i\lambda\}$, $u''=(u_3,\ \ldots,\ u_n)$. Вещественность исходной системы означает, что $u_2=\bar{u}_1$, а $u_3, \ldots, u_n$ — вещественны. Соответственно $U_2=\bar{U}_1$, а $\tilde{U}''$ принимает вещественные значения.

Условие (8.4.5) теоремы 8.4.1 для системы (8.6.1) принимает вид

$$(q_1-q_2)\, i\lambda \neq \lambda_k, \quad k=3, \ldots, n.$$

Так как q_1-q_2 — любое целое число, то это условие имеет вид условия отсутствия резонанса для периода, равного $\frac{2\pi}{\lambda}$

$$\lambda_k \neq ip\lambda, \quad p \in \mathbf{Z}; \quad k=3, \ldots, n. \tag{8.6.2}$$

При выполнении (8.6.2) система (8.6.1) с помощью замены

$$\begin{aligned} u_1 &= y_1 + h_1(y_1, y_2), \\ u_2 &= y_2 + h_2(y_1, y_2), \\ u'' &= y'' + \tilde{h}''(y_1, y_2) \end{aligned} \tag{8.6.3}$$

приводится к нормальной форме на инвариантной поверхности:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= i\lambda y_1 + y_1 P_1(y_1 y_2) + Y_1(y_1, y_2, y''), \\ \dot{y}_2 &= -i\lambda y_2 + y_2 P_2(y_1 y_2) + Y_2(y_1, y_2, y''), \\ \dot{y}'' &= A'' y'' + Y''(y_1, y_2, y''), \end{aligned} \tag{8.6.4}$$

где $Y_1(y_1, y_2, 0)=Y_2(y_1, y_2, 0)=0$, $Y''(y_1, y_2, 0)=0$; P_1, P_2 — ряды без свободных членов по степеням произведения $y_1 y_2$.

Так же как и при рассмотрении проблемы центра и фокуса в § 3, из (8.4.7) получим, что в (8.6.3) $y_2=\bar{y}_1$, $y_3, \ldots, y_n$ — вещественны. Следовательно, $Y_2=\bar{Y}_1$, $Y_3, \ldots, Y_n$ — вещественны, коэффициенты рядов P_1 и P_2 при одинаковых степенях $y_1 y_2$ комплексно сопряжены.

Условия I, II теоремы 8.4.2 выполнены, а условие III_2 означает, что $P_1=-P_2$, т. е. что

$$P_1 = -P_2 = iH(y_1 y_2), \tag{8.6.5}$$

где H — ряд по степеням $y_1 y_2$ с вещественными коэффициентами.

Пусть (8.6.5) имеет место. Тогда стандартное преобразование (8.6.3) сходится. Рассмотрим траектории системы (8.6.4) на инвариантной плоскости $y''=0$. Их дифференциальные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= iy_1(\lambda + H(y_1 y_2)), \\ \dot{y}_2 &= -iy_2(\lambda + H(y_1 y_2)). \end{aligned} \tag{8.6.6}$$

Такая система была исследована в § 3, где было показано, что в полярных координатах $y_1=re^{i\varphi}$, $y_2=re^{-i\varphi}$ система (8.6.6) имеет вид

$$\dot{r}=0, \quad \dot{\varphi}=\lambda+H(r^2).$$

Траектории этой системы суть окружности $r=C$. Им соответствуют периодические решения с периодом $\frac{2\pi}{\lambda+H(C^2)}$. Преобразование между переменными $x_1, \ldots, x_n$ системы (8.1.1) и переменными $\operatorname{Re} y_1$, $\operatorname{Im} y_1$, y'' является вещественным аналитическим. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 8.6.1. *Если выполнены условия* (8.6.2) *и* (8.6.5), *то система* (8.1.1) *имеет аналитическую двумерную инвариантную поверхность* Г, *заполненную в некоторой окрестности начала координат однопараметрическим семейством замкнутых траекторий, которым соответствуют периодические решения с периодами, близкими к* $2\pi/\lambda$.

Из (8.6.3) нетрудно получить уравнения как инвариантной поверхности Г, так и решений на ней. Уравнение поверхности Г в параметрической форме с параметрами y_1, y_2 находим, полагая в (8.6.3) $y''=0$:

$$\begin{aligned} u_1 &= y_1 + h_1(y_1, y_2), \\ u_2 &= y_2 + h_2(y_1, y_2), \\ u'' &= \tilde{h}''(y_1, y_2). \end{aligned} \qquad (8.6.7)$$

Эти уравнения записаны в комплексной форме. Чтобы получить вещественную форму, нужно в (8.6.7) по формуле $x=S^{-1}u$ перейти от переменных u, y к переменным x, $\operatorname{Re} y_1$, $\operatorname{Im} y_1$. В результате получим вещественные аналитические уравнения с вещественными параметрами $\operatorname{Re} y_1$, $\operatorname{Im} y_1$.

Чтобы получить уравнения периодических решений, сначала решим систему (8.6.6). Легко видеть, что $y_1 y_2$ — интеграл системы (8.6.6), так как его производная в силу системы (8.6.6) тождественно равна нулю. Следовательно, на решениях этой системы

$$y_1(t)\, y_2(t) = C_0^2 = y_1^0 y_2^0,$$

где y_k^0, $k=1, 2$ — начальные значения $y_k(t)$ при $t=0$. Отсюда и из (8.6.6) имеем

$$y_1(t) = y_1^0 e^{i(\lambda+H(C_0^2))t}, \quad y_2(t) = y_2^0 e^{-i(\lambda+H(C_0^2))t}.$$

Добавляя $y''=0$, получим уравнения периодических решений системы (8.6.4). Подставляя их в (8.6.7), после перехода к переменным $x=S^{-1}u$ имеем разложения периодических решений системы (8.1.1) в виде сходящихся при всех t рядов по степеням экспонент $\exp\{i(\lambda+H(C_0^2))t\}$.

Таким образом, как и в § 5, мы использовали первый метод Ляпунова. Нормальная форма системы указывает функции, по степеням которых следует искать разложения искомых решений. Эти функции являются решениями нормальной формы системы (или нормальной формы на инвариантной поверхности).

2. Гамильтоновы и обратимые системы. Мы построили однопараметрическое семейство периодических решений, рассматриваемой системы при выполнении условий (8.6.2) и (8.6.5). Второе из них накладывает существенные ограничения на нормальную форму на инвариантной поверхности (требуется выполнение бесконечного числа условий, аннулирующих вещественные части коэффициентов), при этом рассмотрение проблемы центра и фокуса показывает, что от этих ограничений отказаться нельзя, так как в этом случае, т. е. при фокусе, периодических решений нет. Тем не менее существуют важные классы систем дифференциальных уравнений, для которых условие (8.6.5) выполняется автоматически.

Рассмотрим вещественную аналитическую систему (8.1.1) с матрицей $A=\mathrm{diag}\,\{A', A''\}$, где

$$A'=\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$A''\in\mathfrak{R}^{n-2,n-2}$ и выполнено условие (8.6.2). Пусть в некоторой окрестности начала координат она обладает аналитическим интегралом $H(x)$. Напомним (см. п. 4 § 5 гл. V), что автономная система не обязана иметь в окрестности положения равновесия интеграл, не зависящий от t. Предположим, что разложение $H(x)$ начинается с членов второго порядка вида

$$H^2=x_1^2+x_2^2+H_2(x''),\quad x''=(x_3, \ldots, x_n).$$

Полагая $u_1=x_1+ix_2$, $u_2=x_1-ix_2$, $u''=x''$, приведем (8.1.1) к виду (8.6.1). Согласно сделанному предположению система (8.6.1) имеет интеграл $F(u_1, u_2, u'')$, квадратичные члены которого имеют вид

$$F^2=u_1u_2+F_2(u''). \tag{8.6.8}$$

Осуществим преобразование (8.6.3) к нормальной форме на инвариантной поверхности (8.6.4). Интеграл F преобразуется в формальный интеграл $G(y)$ системы (8.6.4). Это означает, что производная $G(y)$ в силу системы (8.6.4) является рядом с нулевыми коэффициентами, т. е. что

$$\frac{\partial G}{\partial y_1}(i\lambda y_1+y_1P_1+Y_1)+\frac{\partial G}{\partial y_2}(-i\lambda y_2+y_2P_2+Y_2)+$$
$$+\frac{\partial G}{\partial y''}(A''y''+Y'')=0. \tag{8.6.9}$$

Полагая в (8.6.9) $y''=0$, получим

$$i\lambda\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}y_1-\frac{\partial V}{\partial y_2}y_2\right)=-\frac{\partial V}{\partial y_1}y_1P_1-\frac{\partial V}{\partial y_2}y_2P_2, \tag{8.6.10}$$

где $V(y_1, y_2)=G(y_1, y_2, 0)$. Из (8.6.8) получаем

$$V=z+\ldots,\quad z=y_1y_2,$$

где точками обозначены члены порядка не ниже третьего по y_1, y_2.

Покажем, что V — ряд по степеням z. Линейной частью V является z. Предположим, что все члены разложения V по степеням y_1, y_2 порядка не выше s являются степенями z. Рассмотрим член разложения $V^{(q_1,q_2)}y_1^{q_1}y_2^{q_2}$, у которого $q_1+q_2=s+1$. Так как P_1 и P_2 — это ряды по степеням z без свободных членов, то в правой части (8.6.10) степень порядка $s+1$ обязательно должна быть степенью z. Следовательно, если $q_1 \neq q_2$, то

$$i\lambda(q_1-q_2)V^{(q_1,q_2)}=0,$$

откуда $V^{(q_1,q_2)}=0$. По индукции заключаем, что весь ряд V является рядом по степеням z. Но тогда левая часть (8.6.10) равна нулю, откуда

$$(P_1+P_2)\,z\frac{\partial V}{\partial z}=0.$$

Так как

$$z\,\frac{\partial V}{\partial z}=z+\ldots,$$

то $P_1+P_2=0$, а это означает выполнение условия (8.6.5).

Теорема 8.6.2. *Рассмотрим систему Гамильтона*

$$\dot{x}_{2k-1}=-\frac{\partial H}{\partial x_{2k}},$$
$$\dot{x}_{2k}=\frac{\partial H}{\partial x_{2k-1}},\quad k=1,\ldots,r. \tag{8.6.11}$$

Предположим, что функция Гамильтона — вещественная аналитическая функция в окрестности точки $x=0$, квадратичная часть которой имеет вид $H^2=(\lambda/2)(x_1^2+x_2^2)+H_2(x_3,\ldots,x_{2r})$, $\lambda>0$, причем собственные числа λ_k матрицы

$$A''=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}\left\{\frac{\partial^2 H_2}{\partial x_i\partial x_j}\right\},\ i,\ j,=3,\ldots,\ 2r,$$

удовлетворяют условию

$$\lambda_k\neq ip\lambda,\ p\in\mathbf{Z},\ k=3,\ldots,2r. \tag{8.6.12}$$

Тогда система (8.6.11) имеет однопараметрическое аналитическое семейство замкнутых траекторий, которым соответствуют периодические решения с периодами, близкими к $2\pi/\lambda$.

Доказательство. Система (8.6.11) — это система (8.1.1) при $n=2r$, $A=\operatorname{diag}\{A',A''\}$, где $A'=\begin{pmatrix}0&-\lambda\\\lambda&0\end{pmatrix}$, $A''=\left\{\dfrac{\partial H_2}{\partial x_i\partial x_j}\right\}$.

В примере 5.6.3 было показано, что функция Гамильтона H является интегралом системы (8.6.11). Следовательно, выполняется (8.6.5). Условие (8.6.12) совпадает с (8.6.2). Таким образом, выполнены все условия теоремы 8.6.1, что и доказывает теорему 8.6.2.

Теорема 8.6.2 находит важные приложения в небесной механике.

Другим примером систем, для которых выполняются условия теоремы 8.6.1, являются так называемые обратимые системы. Рассмотрим систему r дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{u}_k+\lambda_k^2 u_k=U_k(u,\dot{u}),\quad k=1,\dots,r, \qquad \lambda_k\neq 0, \tag{8.6.13}$$

где U_k — сходящиеся по степеням u, $\dot{u}$ ряды. Такая система называется обратимой, если U_k удовлетворяют следующему условию:

$$U_k(u,\dot{u})=U_k(u,-\dot{u}),\quad k=1,\dots,r. \tag{8.6.14}$$

При выполнении условия (8.6.14) система (8.6.13) инвариантна относительно замены t на $-t$ (обращения времени), чем и объясняется ее название.

Положим $u_k=x_{2k-1}$, $\dot{u}_k=-\lambda_k x_{2k}$, $k=1, \dots, r$. Тогда

$$\dot{x}_{2k-1}=-\lambda_k x_{2k},\qquad \dot{x}_{2k}=\lambda_k x_{2k-1}-\frac{1}{\lambda_k}U_k(x_1,\dots,x_{2r-1},-\lambda_1x_2,\dots,-\lambda_r x_{2r}). \tag{8.6.15}$$

Система (8.6.15) при $n=2r$ имеет вид (8.1.1) с матрицей $A=\operatorname{diag}\{A_1, \dots, A_r\}$, где

$$A_k=\begin{pmatrix}0 & -\lambda_k\\ \lambda_k & 0\end{pmatrix},\quad k=1,\dots,r.$$

Собственные числа A_k таковы: $\pm i\lambda_k$, $k=1, \dots, r$. Выделим одну пару, например $\pm i\lambda_1$, и предположим, что

$$\lambda_k\neq p\lambda_1,\quad p\in\mathbf{Z},\quad k=2,\dots,r. \tag{8.6.16}$$

Теорема 8.6.3. *При выполнении условий* (8.6.16) *система* (8.6.15), *а значит, и система* (8.6.13) *имеет аналитическое однопараметрическое семейство замкнутых траекторий с периодами, близкими к* $2\pi/\lambda_1$.

Доказательство. В (8.6.15) положим

$$v_k=x_{2k-1}+ix_{2k},\quad w_k=x_{2k-1}-ix_{2k},\quad k=1,\dots,r.$$

Тогда

$$\dot{v}_k=i\lambda_k v_k-\frac{i}{\lambda_k}U_k\left(\frac{w_j+v_j}{2},\frac{\lambda_j(w_j-v_j)}{2i}\right), \tag{8.6.17}$$

$$\dot{w}_k=-i\lambda_k w_k+\frac{i}{\lambda_k}U_k\left(\frac{w_j+v_j}{2},\frac{\lambda_j(w_j-v_j)}{2i}\right),\quad k,j=1,\dots,r.$$

Из (8.6.14) вытекает, что U_k — ряды по степеням v_j, w_j с вещественными коэффициентами. Запишем систему (8.6.17) в виде

$$\dot{v}_k = i\lambda_k v_k + iV_k(v, w),$$
$$\dot{w}_k = -i\lambda_k w_k - iV_k(v, w), \quad k = 1, \ldots, r. \tag{8.6.18}$$

Существует замена

$$v_k = \xi_k + h_k(\xi_1, \eta_1), \quad w_k = \eta_k + g_k(\xi_1, \eta_1), \quad h = 1, \ldots, r,$$

где h_k, g_k — вещественные формальные ряды, приводящая (8.6.18) к нормальной форме на инвариантной поверхности

$$\dot{\xi}_1 = i\lambda_1\xi_1 + i\xi_1 P(\xi_1\eta_1) + i\Xi_1(\xi, \eta),$$
$$\dot{\eta}_1 = -i\lambda_1\eta_1 - i\eta_1 P(\xi_1\eta_1) + i\mathrm{H}_1(\xi, \eta),$$
$$\dot{\xi}_k = i\lambda_k\xi_k + i\Xi_k(\xi, \eta),$$
$$\dot{\eta}_k = -i\lambda_k\eta_k + i\mathrm{H}_k(\xi, \eta), \quad k = 2, \ldots, r, \tag{8.6.19}$$

где Ξ_k, H_k, $k=1, \ldots, r$; P — вещественные ряды; Ξ_k, H_k аннулируются при $\xi_2 = \ldots = \xi_r = \eta_2 = \ldots = \eta_r = 0$. Действительно, ряды h_k, g_k должны удовлетворять уравнениям (8.4.7), где в рассматриваемом случае все слагаемые имеют множитель i. После сокращения на i получим вещественную систему, которая разрешима в силу условий (8.6.16) и в поле вещественных чисел, поскольку определение коэффициентов искомых рядов сводится к решению линейных алгебраических систем. Следовательно, условие (8.6.5) выполняется, а условие (8.6.2) совпадает с (8.6.16). Теорема 8.6.3 вытекает из теоремы 8.6.1.

Замечание. Очевидно, что при выполнении соответствующих неравенств типа (8.6.16) система (8.6.13) имеет r однопараметрических семейств решений с периодами, близкими к $2\pi/\lambda_k$, $k=1, \ldots, r$, которые соответствуют каждой паре собственных чисел. Аналогичное утверждение справедливо и для гамильтоновой системы (8.6.11), если квадратичная часть функции Гамильтона имеет вид

$$H^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \left(x_{2k-1}^2 + x_{2k}^2\right).$$

§ 7. Бифуркация периодических решений

Рассмотрим вещественную аналитическую систему (8.1.1) в предположениях § 6, т. е. предположим, что матрица A имеет пару чисто мнимых собственных чисел $\pm i\lambda$, $\lambda > 0$ и что остальные собственные числа $\lambda_3, \ldots, \lambda_n$ удовлетворяют условию (8.6.2). Предположим, что система (8.1.1) подвергается малому автономному возмущению. Используя малый параметр μ, возмущенную систему запишем в виде

$$\dot{x}=Ax+X(x)+\mu Q(\mu, x), \tag{8.7.1}$$

где Q — вещественная аналитическая в окрестности точки $\mu=0$, $x=0$ функция. Рассмотрим уравнение

$$Ax+X(x)+\mu Q(\mu, x)=0, \tag{8.7.2}$$

определяющее положения равновесия системы (8.7.1). Так как условие (8.6.2) «запрещает» матрице A иметь нулевые собственные числа, то $\det A\neq 0$. Следовательно, уравнение (8.7.2) определяет функцию $x=\varphi(\mu)$, $\varphi(0)=0$, аналитическую в окрестности точки $\mu=0$. При каждом μ из этой окрестности $\varphi(\mu)$ — положение равновесия системы (8.7.1).

Будем искать периодические решения системы (8.7.1) с периодом, близким к $2\pi/\lambda$, соответствующие $\mu\neq 0$ и достаточно малым по абсолютной величине. Аналогичная задача при $n=2$, т. е. при отсутствии $\lambda_3, \ldots, \lambda_n$, была рассмотрена в п. 3 § 3 гл. VI. Используем метод нормальных форм. Целью является построение бифуркационного уравнения, связывающие начальные данные и параметр, соответствующие искомым периодическим решениям.

Ранее в этой главе мы не рассматривали систем дифференциальных уравнений, зависящих от параметра. Чтобы свести систему (8.7.1) к рассмотренному типу, будем малый параметр μ трактовать как переменную, удовлетворяющую уравнению $\dot{\mu}=0$. Тогда (8.7.1) соответствует системе

$$\begin{aligned} &\dot{\mu}=0,\\ &\dot{x}=Ax+X(x)+\mu Q(\mu, x). \end{aligned} \tag{8.7.3}$$

Матрица коэффициентов ее линейного приближения такова:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ L & A \end{pmatrix},$$

где $L=Q(0, 0)$. Собственными числами матрицы B являются $0, i\lambda, -i\lambda, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Положим $\lambda'=(0, i\lambda, -i\lambda)$, $\lambda''=(\lambda_3, \ldots, \lambda_n)$. Приведем с помощью линейной неособой замены $x=Sy+\mu a$, где S — матрица, a — вектор, систему (8.7.3) к виду

$$\begin{aligned} &\dot{\mu}=0,\\ &y'=J'y'+Y'(\mu, y', y''),\\ &\dot{y}''=A''y''+\tilde{Y}''(\mu, y'\, y''), \end{aligned} \tag{8.7.4}$$

где $\tilde{Y}''$ содержит члены, линейные по μ, y'. Заметим, что роль переменной с одним штрихом играет вектор (μ, y').

Условие (8.4.5) теоремы 8.4.1 выполнено в силу (8.6.2). Следовательно, существует стандартное преобразование

$$y' = z' + h'(\mu, z'), \quad z' = \operatorname{colon}(z_1, z_2), \qquad y'' = z'' + \tilde{h}''(\mu, z') \tag{8.7.5}$$

к нормальной форме на инвариантной поверхности

$$\begin{gathered} \dot{\mu} = 0, \\ \dot{z}_1 = i\lambda z_1 + z_1 P_1(\mu, z_1 z_2) + Z_1(\mu, z', z''), \\ \dot{z}_2 = -i\lambda z_2 + z_2 P_2(\mu, z_1 z_2) + Z_2(\mu, z', z''), \\ \dot{z}'' = A'' z'' + Z''(\mu, z' z''), \end{gathered} \tag{8.7.6}$$

где Z_1, Z_2, Z'' аннулируются при $z''=0$; P_1 и P_2 — ряды по степеням μ и $z_1 z_2$ без свободных членов. В (8.7.5) переменная μ не изменяется, так как уравнение $\dot{\mu}=0$ имеет нормальную форму. Условия сходимости рядов h', $\tilde{h}''$ в силу теоремы 8.4.2 имеют вид

$$P_1(\mu, z_1 z_2) = -P_2(\mu, z_1 z_2) = iH(\mu, z_1 z_2), \tag{8.7.7}$$

где H — ряд по степеням μ, $z_1 z_2$ с вещественными коэффициентами.

Обозначим через $\operatorname{Re}\{X(x)^{\text{res}}\}$ вещественную часть резонансной части ряда $X(x)$. Другими словами, чтобы получить $\operatorname{Re}\{X(x)^{\text{res}}\}$, нужно удалить из разложения $X(x)$ нерезонансные члены, а в резонансных оставить только вещественную часть коэффициентов.

Теорема 8.7.1. *Существуют сходящиеся ряды* $h'(\mu, z')$, $\tilde{h}''(\mu, z')$ *такие, что система*

$$\begin{gathered} \dot{\mu} = 0, \\ \dot{y}' = J'y' + Y'(\mu, y' y'') + \Phi'(\mu, z'), \\ \dot{y}'' = A''y'' + \tilde{Y}''(\mu, y', y'') \end{gathered} \tag{8.7.8}$$

сходящейся заменой (8.7.5) *приводится к нормальной форме на инвариантной поверхности* (8.7.6), *которая удовлетворяет условию* (8.7.7). *В* (8.7.8)

$$\Phi'(\mu, z') = -\operatorname{Re}\{Y'(\mu, z' + h', \tilde{h}'')^{\text{res}}\}. \tag{8.7.9}$$

Доказательство. В силу (8.4.7) h' и $\tilde{h}''$ определяются соответственно уравнениями

$$\frac{\partial h'}{\partial z'} J'z' - J'h' = Y'(\mu, z' + h', \tilde{h}'') + \Phi' - \frac{\partial h'}{\partial z'} P' - P',$$

$$\frac{\partial \tilde{h}''}{\partial z'} J'z' - A''\tilde{h}'' = \tilde{Y}''(\mu, z' + h', \tilde{h}'') - \frac{\partial \tilde{h}''}{\partial z'} P',$$

где $P' = \operatorname{colon}(z_1 P_1(\mu, z_1 z_2), z_2 P_2(\mu, z_1 z_2))$. Из (8.4.14) следует, что

$$P' = Y'(\mu, z' + h', \tilde{h}'')^{\text{res}} + \Phi'(\mu, z').$$

На основании (8.7.9)

$$P' = i\,\mathrm{Im}\,\{Y'(\mu, z'+h', \tilde{h}'')^{\mathrm{res}}\} = \mathrm{colon}\,(iz_1 H(\mu, z_1 z_2) - iz_2 H(\mu, z_1 z_2)).$$

Таким образом, (8.7.7) выполняется. Из доказательства теоремы 8.4.2 тогда следует, что ряды h', $\tilde{h}''$ сходятся, что и требовалось доказать.

Из (8.7.7) следует, что уравнения $z_1 z_2 = C^2$, $z'' = 0$ при достаточно малых $|\mu|$, C^2 определяют замкнутую траекторию системы (8.7.6). Если $\Phi' = 0$, то системы (8.7.8) и (8.7.4) совпадают. Так как $\Phi' = \mathrm{colon}\,(z_1 G(\mu, z_1 z_2), z_2 G(\mu, z_1 z_2)$, где G — сходящийся ряд по степеням μ, $z_1 z_2$ без свободного члена с вещественными коэффициентами, то уравнение $\Phi' = 0$ при $z' \neq 0$ эквивалентно вещественному скалярному уравнению

$$G(\mu, C^2) = 0. \tag{8.7.10}$$

Каждому решению μ_0, $C_0{}^2$ уравнения (8.7.10) соответствует периодическое решение системы (8.7.4), которое получается подстановкой в (8.7.5) функций

$$\mu = \mu_0,\ z'' = 0,\ z_1 = z_1^0 e^{i\left(\lambda + H\left(\mu_0, C_0^2\right)\right)t},\ z_2 = z_2^0 e^{-i\left(\lambda + H\left(\mu_0, C_0^2\right)\right)t},$$
$$C_0^2 = z_1^0 z_2^0,$$

если $|\mu_0|$, $C_0{}^2$ достаточно малы. Уравнение (8.7.10) называется *бифуркационным уравнением.* Напомним, что построенные периодические решения «сосуществуют» с положениями равновесия $x = \varphi(\mu)$, соответствующими нулевому решению системы (8.7.6). Если

$$\frac{\partial G}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0, \tag{8.7.11}$$

то уравнение (8.7.10) определяет функцию $\mu(C^2)$, $\mu(0) = 0$, связывающую начальные значения периодических решений с соответствующим им значениями параметра. Возможен случай, когда $\mu(C^2) \equiv 0$. Этот случай заведомо имеет место, если невозмущенная система является гамильтоновой или обратимой и для нее выполнены условия теоремы 8.6.1. Действительно, тогда однопараметрическое семейство замкнутых траекторий существует при $\mu = 0$, а функция $\mu(C^2)$ — единственное решение бифуркационного уравнения, следовательно, $\mu(C^2) \equiv 0$. Бифуркация периодических решений при выполнении условия (8.7.11) называет бифуркацией Андронова — Хопфа.

§ 8. Нормальная форма периодической системы

Обобщим понятия нормальной формы и нормальной формы на инвариантной поверхности автономной системы на случай систем, правые части которых периодически зависят от t. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=P(t)x+X(t,x), \tag{8.8.1}$$

где $P:\mathbf{R}\to\mathfrak{M}^{n,n}$, $P(t+\omega)=P(t)$, X — сходящийся в некоторой окрестности точки $x=0$ ряд с ω-периодическими коэффициентами.

Как известно (см. § 6 гл. IV), линейная однородная система с периодическими коэффициентами приводима, поэтому с помощью линейного неособого преобразования с ω-периодической матрицей коэффициентов систему (8.8.1) можно привести к виду

$$\dot{y}=Ay+Y(t, y), \tag{8.8.2}$$

где A — постоянная матрица, а $Y(t, y)$ обладает теми же свойствами, что и $X(t, x)$ в системе (8.8.1). Выполним в (8.8.2) подстановку

$$y=z+h(t, z), \tag{8.8.3}$$

где $h(t, z)$ — ряд, сходящийся по степеням z с ω-периодическими дифференцируемыми коэффициентами. Пусть в результате подстановки получена система

$$\dot{z}=Az+Z(t, z). \tag{8.8.4}$$

Дифференцируя (8.8.3) по t в силу систем (8.8.2) и (8.8.4), получим уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial z}Az-Ah=Y(z+h)-\frac{\partial h}{\partial z}Z-Z. \tag{8.8.5}$$

Для того чтобы замена (8.8.3) приводила систему (8.8.2) к виду (8.8.4), необходимо и достаточно, чтобы h в (8.8.3) удовлетворяла уравнению (8.8.5). Если ряды Y, Z, h — формальные, то мы говорим, что формальная замена (8.8.3) переводит (8.8.2) в (8.8.4), если h удовлетворяет (8.8.5), причем (8.8.5) следует понимать как равенство рядов независимо от их сходимости.

Не нарушая общности, считаем, что в (8.8.4) $A=J$ — жорданова нижнетреугольная матрица. Аналогично выводу уравнения (8.2.3) покажем, что коэффициенты $h_k^{(q)}(t)$ ряда h удовлетворяют уравнениям

$$\dot{h}_k^{(q)}+[(q, \lambda)-\lambda_k]\,h_k^{(q)}=f_k^{(q)}-Z_k^{(q)},\quad k=1,\dots, n, \tag{8.8.6}$$

где $f_k^{(q)}(t)$— известная ω-периодическая функция, если определены предшествующие в лексикографическом порядке коэффициенты ряда h.

Если

$$(q, \lambda)-\lambda_k\neq ip\sigma,\quad \sigma=\frac{2\pi}{\omega},\quad p\in\mathbf{Z}, \tag{8.8.7}$$

то (8.8.6) имеет при любом выборе $\tilde{Z}_k^{(q)}(t)$ единственное ω-периодическое решение, определенное по формуле из задачи 3.1.1. Будем полагать $\tilde{Z}_k^{(q)}(t) \equiv 0$.

Пусть при некотором целом p

$$(q, \lambda) - \lambda_k + ip\sigma = 0. \tag{8.8.8}$$

Рассмотрим ряд Фурье

$$f_k^{(q)}(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_k^{(q,m)} e^{im\sigma t}.$$

Положим

$$Z_k^{(q)} = f_k^{(q,p)} e^{ip\sigma t}.$$

Уравнение (8.8.6) запишем в виде

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-ip\sigma t} h_k^{(q)}\right) = e^{-ip\sigma t} f_k^{(q)} - f_k^{(q,p)}.$$

Здесь в правой части находится ω-периодическая функция с равным нулю средним значением. Любая ее первообразная также является ω-периодической функцией. Определим $h_k^{(q)}(t)$ из условия $h_k^{(q)}(0) = 0$. При выполнении этого условия преобразование (8.8.3) будем называть стандартным. Стандартное преобразование определяется однозначно. Равенство (8.8.8) назовем резонансным соотношением, соответствующие коэффициенты при $e^{ip\sigma t} z^q$ — резонансными коэффициентами.

Итак, мы доказали, что с помощью стандартной замены (8.8.3) систему (8.8.2) можно привести к виду (8.8.4), где все нерезонансные коэффициенты равны нулю. При этом условии систему (8.8.4) называют нормальной формой системы (8.8.2).

Пример 8.8.1. Пусть A — нулевая матрица. Нормальная форма автономной системы, как отмечалось в примере 8.2.1, совпадает с самой системой. В периодическом случае резонансное соотношение (8.8.8) принимает форму равенства $ip\sigma = 0$, откуда $p = 0$. Это означает, что нормальной формой системы при $A = 0$ является автономная система.

Пример 8.8.2. Пусть система (8.8.2) вещественна, $n = 2$, $\omega = 2\pi$, $\lambda_{1,2} = \pm i\lambda$, λ — иррациональное число. Резонансные соотношения имеют следующий вид:

$$i(q_1 - q_2 - 1)\lambda = ip, \quad k = 1,$$

$$i(q_1 - q_2 + 1)\lambda = ip, \quad k = 2.$$

В обоих случаях $p = 0$, так как λ иррационально. Поэтому нормальная форма — автономная типа (8.2.8):

$$\dot{z}_1 = i\lambda z_1 + z_1 P_1(z_1 z_2),$$

$$\dot{z}_2 = -i\lambda z_2 + z_2 P_2(z_1 z_2),$$

при этом из (8.8.5) нетрудно видеть, что второе из уравнений является комплексно-сопряженным по отношению к первому.

Вопросы сходимости стандартных нормализующих преобразований для периодических систем решаются аналогично автономному случаю. Например, справедлива следующая теорема.

Теорема 8.8.1. *Если $J=\operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, для нерезонансных наборов k, q, p*

$$|(q, \lambda)-\lambda_k+ip\sigma|\geqslant\varepsilon>0, \tag{8.8.9}$$

где ε не зависит от k, q, p и нормальная форма (8.8.4) *является линейной системой, т. е. $Z(t, z)=0$, то если ряд Y в* (8.8.2) *— сходящийся, то и h в стандартном преобразовании* (8.8.3) *также является сходящимся рядом.*

Теорема 8.8.1 является частным случаем доказываемой ниже теоремы 8.8.2.

Следствие. *Если при $A=0$ нормальная форма имеет вид $\dot{z}=0$, то стандартное преобразование* (8.8.3) *сходится.*

Аналогично автономному случаю для периодических систем можно ввести понятие нормальной формы на инвариантной поверхности. Собственные числа матрицы разделим на две группы: $\lambda'=(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ и $\lambda''=(\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n)$. Приведем (8.8.2) к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}'&=J'y'+Y'(t, y', y''),\\ \dot{y}''&=A''y''+\tilde{Y}''(t, y', y''). \end{aligned} \tag{8.8.10}$$

Теорема 8.8.2. *Если выполняется условие*

$$(q', \lambda')-\lambda_k\neq ip\sigma,\ k=m+1,\ldots, n;\ |q'|\geqslant 1, \tag{8.8.11}$$

то система (8.8.10) *с помощью формальной замены*

$$\begin{aligned} y'&=z'+h'(t, z'),\\ y''&=z''+\tilde{h}''(t, z') \end{aligned} \tag{8.8.12}$$

приводится к нормальной форме на инвариантной поверхности

$$\begin{aligned} \dot{z}'&=J'z'+Z'(t, z', z''),\\ \dot{z}''&=A''z''+Z''(t, z', z''), \end{aligned} \tag{8.8.13}$$

где $Z''(t, z', 0)=0$, *а система на инвариантной плоскости $z''=0$*

$$\dot{z}'=J'z'+Z'(t, z', 0) \tag{8.8.14}$$

имеет нормальную форму.

При этом если $J'=\operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, для нерезонансных наборов k, q', p

$$|(q', \lambda')-\lambda_k+ip\sigma|\geqslant\varepsilon>0,\ k=1,\ldots, n;\ |q'|\geqslant 2, \tag{8.8.15}$$

а в (8.8.14) $Z'(t, z', 0)=0$, *то стандартное преобразование* (8.8.12) *является сходящимся.*

Доказательство. Первая часть теоремы доказывается аналогично теореме 8.4.1. Остановимся на доказательстве сходимости. Не нарушая общности, считаем, что $A=\operatorname{diag}(J', J'')$ — жорданова матрица, $\tilde{Y}''=Y''$, $\tilde{h}''=h''$. Так как $Z'(t, z', 0)=0$, то h', h'' удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial h'}{\partial t}+\frac{\partial h'}{\partial z'}J'z'-J'h'=Y'(t, z'+h', h''),$$

$$\frac{\partial h''}{\partial t}+\frac{\partial h''}{\partial z'}J'z'-J''h''=Y''(t, z'+h', h'').$$

Сначала рассмотрим те коэффициенты $h_k^{(q')}(t)$, для которых

$$\Lambda_k^{(q')}=(q', \lambda')-\lambda_k\neq ip\sigma, \quad p\in\mathbf{Z}.$$

В этом случае

$$h_k^{(q')}=\left(1-\exp\{-\omega\Lambda_k^{(q')}\}\right)^{-1}\int\limits_{t-\omega}^{t}\exp\{(s-t)\Lambda_k^{(q')}\}\times$$

$$\times[\{Y_k(s, z'+h'(s, z'), h''(s, z')\}^{(q')}+\tau_k h_{k-1}^{(q')}(s)]\,ds,$$

где τ_k — внедиагональные элементы матрицы J (они равны нулю при $k=1, ..., m+1$). Отсюда получаем следующую оценку:

$$|h_k^{(q')}|\leqslant\frac{1-\exp\{-\omega\operatorname{Re}\Lambda_k^{(q')}\}}{\operatorname{Re}\Lambda_k^{(q')}\left(1-\exp\{-\omega\Lambda_k^{(q')}\}\right)}\max_{t\in[0,\omega]}(\tau\,|\,h_{k-1}^{(q')}|+$$

$$+|\{Y_k(t, z'+h'(t, z'), h''(t, z'))\}^{(q')}|), \tag{8.4.16}$$

где $\tau=\max\tau_k$. Для тех коэффициентов $h_k^{(q')}(t)$, для которых

$$\Lambda_k^{(q')}+ip\sigma=0,$$

имеем

$$h_k^{(q')}=e^{ip\sigma t}\int\limits_0^t e^{-ip\sigma s}\{Y_k(s, z'+h'(s, z'), h''(s, z'))\}^{(q')}ds.$$

В силу (8.8.15) найдется $K>0$ такое, что при всех k, q' справедлива оценка

$$|h_k^{(q')}|\leqslant K\max_{t\in[0,\omega]}(|\{Y_k(t, z'+h'(t, z'), h''(t, z'))\}^{(q')}|+$$

$$+\tau\,|\,h_{k-1}^{(q')}(t)|).$$

Пусть ряды $Y_k(t, y)$ сходятся при $\|y\|=r$, $t\in\mathbf{R}$. Рассмотрим мажорантный степенной ряд

$$Y(y)=M\sum_{|q|=2}^{\infty}r^{-|q|}y^q,$$

где $M=\max|Y_k(t, y)|$ при $t\in\mathbf{R}$, $\|y\|=r$, $k=1, ..., n$.

Из (8.8.16) следует, что решение $v(\eta)$ уравнения

$$v = K\widehat{Y}(\eta + v, \ldots, \eta + v, v, \ldots, v) + \tau v \qquad (8.8.17)$$

мажорирует $h_k(t, \eta, \ldots, \eta)$. По теореме о неявной функции решение уравнения (8.8.17) аналитично в некоторой окрестности точки $\eta=0$. Следовательно, ряды $h_k(t, z')$ сходятся в той же окрестности точки $z'=0$ при всех $t \in \mathrm{R}$. Теорема доказана.

С помощью теоремы 8.8.2 можно исследовать квазилинейную систему (5.3.1) в аналитическом случае. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + g(t) + \mu f(t, x, \mu) \qquad (8.8.18)$$

при условии отсутствия резонанса (5.3.2)

$$\lambda_k \neq ip\sigma, \; k=1, \ldots, n; \quad p \in \mathbf{Z}. \qquad (8.8.19)$$

Заменой $y = x - \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — порождающее решение, приведем (8.8.18) к виду

$$\dot{y} = Ay + \mu F(t, y, \mu). \qquad (8.8.20)$$

Добавим к нему уравнение $\dot{\mu}=0$. Полученную систему рассмотрим как систему (8.8.10), где $y'=\mu$, $y''=y$. Условие (8.8.19) совпадает с (8.8.11), при этом выполнены и условия сходимости. Поэтому рассматриваемую систему аналитически с помощью преобразования

$$y = z + \mu h(t, \mu)$$

можно привести к эквивалентной системе

$$\dot{\mu} = 0; \quad \dot{z} = Az + \mu Z(t, z, \mu),$$

где $Z(t, 0, \mu) \equiv 0$. Решению $z=0$ этой системы соответствует аналитическое по μ решение $y = \mu h(t, \mu)$ системы (8.8.20), которому соответствует решение $x = \varphi(t) + \mu h(t, \mu)$ системы (8.8.18), обращающееся при $\mu=0$ в порождающее решение.

§ 9. Критический случай одного равного нулю характеристического показателя. Алгебраический случай

Рассмотрим вещественную систему уравнений

$$\dot{x}' = X'(t, x', x''), \qquad (8.9.1)$$

$$\dot{x}'' = A''x'' + \widetilde{X}''(t, x', x'')$$

в частном случае, когда $m=1$, $J'=\{0\}$, $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$, $j=2, \ldots, n$, сохраняя предположения предыдущего параграфа, в том числе и предположение об ω-периодичности функций X', $\widetilde{X}''$ по t. Это простейший критический случай в теории устойчивости движения.

Отметим, что к исследованию системы (8.9.1) приводится и критический случай одной пары чисто мнимых собственных чисел, когда остальные числа имеют отрицательные вещественные части, а рассматриваемая система — автономная. Действительно, в этом случае систему дифференциальных уравнений с помощью линейного неособого преобразования можно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}' &= I'y' + Y'(y', y''), \\ \dot{y}'' &= I''y'' + Y''(y', y''), \end{aligned} \tag{8.9.2}$$

где I' — вещественная жорданова матрица, соответствующая собственным числам с отрицательными вещественными частями,

$$I'' = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

В § 5 гл. VIII было показано, что система (8.9.2) аналитически эквивалентна своей нормальной форме на инвариантной поверхности, в частности, можно считать, что

$$Y''(y', 0) = 0. \tag{8.9.3}$$

Используя далее полярные координаты r, φ, имеем: $y_{n-1} = r\cos\varphi$, $y_n = r\sin\varphi$, где $(y_{n-1}, y_n) = y''$. В переменных r, φ, y' система (8.9.2) в силу (8.9.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{r} &= rR(\varphi, r, y'), \\ \dot{\varphi} &= \lambda + \Phi(\varphi, r, y'), \\ \dot{y}' &= I'y' + Y_*(\varphi, r, y'), \end{aligned} \tag{8.9.4}$$

где R, Φ, Y_* — сходящиеся по степеням r, y' ряды с 2π-периодическими по φ коэффициентами, аннулирующиеся при $r=0$, $y'=0$; разложение Y_* начинается с членов не ниже второго порядка. Рассматривая систему (8.9.4) в столь малой окрестности точки $r=0$, $y'=0$, что выполняется неравенство $|\Phi(\varphi, r, y')| < \frac{1}{2}\lambda$, можно принять φ за независимую переменную вместо t. Тогда получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= rR^*(\varphi, r, y'), \\ \frac{dy'}{d\varphi} &= \frac{1}{\lambda} I'y' + Y^*(\varphi, r, y'), \end{aligned}$$

где R^*, Y^* — ряды такого же характера, что и R, Y_* в (8.9.4). Легко видеть, что полученная система является частным случаем системы (8.9.1).

Поскольку для системы (8.9.1) условие (8.8.11) выполняется, при исследовании рассматриваемого критического случая (как и вообще критических случаев теории устойчивости движения) удобно использовать метод нормальных форм.

По теореме 8.8.2, учитывая пример 8.8.1, систему (8.9.1) с помощью формальной замены

$$
\begin{aligned}
x' &= y + h'(t, y),\\
x'' &= z + \tilde{h}''(t, y)
\end{aligned}
\tag{8.9.5}
$$

можно привести к нормальной форме на инвариантной поверхности:

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= Y(t, y, z),\\
\dot{z} &= A''z + Z(t, y, z),
\end{aligned}
\tag{8.9.6}
$$

где $Z(t, y, 0) = 0$, а $Y(t, y, 0)$ не зависит от t. Здесь $y \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{R}^{n-1}$. Возможны следующие два случая:

1) $Y(y, 0) = gy^N + \ldots$ (алгебраический). Постоянная $g \neq 0$ называется постоянной Ляпунова;

2) $Y(y, 0) \equiv 0$ (трансцендентный).

В этом параграфе рассматривается алгебраический случай.

Теорема 8.9.1. *Если N нечетное, $g < 0$, то нулевое решение системы* (8.9.1) *асимптотически устойчиво; если N нечетное, $g > 0$ или если N четное, то нулевое решение системы* (8.9.1) *неустойчиво.*

Задача 8.9.1. Докажите, что для системы (8.9.4), полученной указанным выше способом при рассмотрении критического случая одной пары чисто мнимых собственных чисел в автономной системе, N обязательно нечетно.

Доказательство теоремы 8.9.1. Выполним в (8.9.1) замену

$$
\begin{aligned}
x' &= y + f(t, y),\\
x'' &= z + \tilde{g}(t, y),
\end{aligned}
\tag{8.9.7}
$$

где f, $\tilde{g}$ получаются из h', $\tilde{h}''$ в (8.9.5) отбрасыванием степеней y^k при $k > N$. Замена (8.9.1) переводит систему (8.9.1) в систему

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= gy^N + Y^*(t, y, z),\\
\dot{z} &= A''z + Z^*(t, y, z)
\end{aligned}
\tag{8.9.8}
$$

со сходящейся правой частью, причем разложения $Y^*(t, y, 0)$, $Z^*(t, y, 0)$ в степенях y^k при $k \leqslant N$ совпадают с разложениями $Y(t, y, 0) - gy^N$, $Z(t, y, 0)$ соответственно, т. е. равны нулю.

Чтобы уничтожить в разложении Y^* степени $yz, \ldots, y^{N-1}z$, а также квадратичные по z члены, не зависящие от y, осуществим в (8.9.8) замену. Положим

$$
y = w + \sum_{k=1}^{N-1} w^k S_k(t, z) + Q(t, z),
\tag{8.9.9}
$$

где S_k — линейные формы переменных $z_1, \ldots, z_{n-1}$ с ω-периодическими коэффициентами, Q — квадратичная форма с такими же коэффициентами. Выберем S_k, Q таким образом, чтобы в первом уравнении получающейся в результате замены (8.9.9) системы

$$\dot{w}=gw^N+W(t, w, z), \qquad (8.9.10)$$
$$\dot{z}=A''z+Z_*(t, w, z)$$

разложение $W(t, w, 0)$ начиналось со степени w^k при $k>N$, разложения $\frac{\partial W}{\partial z_i}(t, w, 0)$, $i=1, \ldots, n-1$, начинались со степеней w^{k_i} при $k_i \geqslant N$, а разложение $W(t, 0, z)$ начиналось с членов не ниже третьего порядка. Дифференцируя (8.9.9) по t и учитывая (8.9.8) и (8.9.10), получим равенство

$$g\left(w+\sum_{k=1}^{N-1} w^k S_k+Q\right)^N+Y_*=gw^N+W+\sum_{k=1}^{N-1} kw^{k-1}(gw^N+W)S_k+$$
$$+\sum_{k=1}^{N-1} w^k\frac{\partial S_k}{\partial z}(A''z+Z_*)+\sum_{k=1}^{N-1} w^k\frac{\partial S_k}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial z}(A''z+Z_*)+\frac{\partial Q}{\partial t}, \qquad (8.9.11)$$

где Y_*, Z_* получаются из Y^*, Z^* заменой y по формуле (8.9.9). Из (8.9.11) следует, что разложение $W(t, w, 0)$ по степеням w не содержит членов порядка, меньшего или равного N. Дифференцируя (8.9.11) по z, полагая $z=0$ и приравнивая в получившемся равенстве члены при w^k, $k=1, \ldots, N-1$, получим, что уравнения, которым должны удовлетворять $S_k(t, z)$, чтобы выполнялось поставленное выше условие на $\frac{\partial W}{\partial z}(t, w, 0)$, имеют вид

$$\frac{\partial S_k}{\partial t}+\frac{\partial S_k}{\partial z}A''z=F_k(t, z), \quad k=1,\ldots, N-1, \qquad (8.9.12)$$

где F_k — известные линейные формы с ω-периодическими коэффициентами. Полагая в (8.9.11) $w=0$ и приравнивая квадратичные члены, найдем, что Q удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial z}A''z=G(t, z), \qquad (8.9.13)$$

где G — известная квадратичная форма с ω-периодическими коэффициентами.

Коэффициенты формы S_k образуют ω-периодическую векторную функцию переменной t, удовлетворяющую линейной неоднородной системе дифференциальных уравнений, матрицей коэффициентов которой является матрица A''. Так как собственные числа A'' имеют отрицательные вещественные части, то на основании следствия из теоремы 4.7.3 формы S_k, $k=1, \ldots, N-1$, определяются уравнениями (8.9.12) единственным образом. Аналогично, на основании леммы 6.8.1 заключаем, что и уравнение (8.9.13) определяет квадратичную форму Q единственным образом.

Согласно лемме 7.2.1 указанные замены таковы, что вопрос об устойчивости нулевого решения системы (8.9.1) эквивалентен вопросу об устойчивости нулевого решения системы (8.9.10).

Пусть сначала N четное. Рассмотрим функцию $V=w+U(z)$, где U — квадратичная форма с постоянными коэффициентами, определяемая уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial z} A''z = g\left(z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2\right). \tag{8.9.14}$$

По лемме 7.5.1 $U(z)$ — знакоопределенная квадратичная форма знака, знак которой противоположен знаку g. Производная V в силу системы (8.9.10) равна

$$DV = g\left(w^N + z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2\right) + W + \frac{\partial U}{\partial z} Z_*.$$

Так как разложения $W(t, w, 0)$, $Z_*(t, w, 0)$ начинаются с членов порядка не ниже $N+1$, разложение $\frac{\partial W}{\partial z}(t, w, 0)$ начинается с членов порядка не ниже N, разложение $W(t, 0, z)$ начинается с членов порядка не ниже третьего, причем $Z_*(t, w, z)$ не содержит членов порядка ниже второго по переменным w, z, то DV — знакоопределенная функция Ляпунова того же знака, что и g. Поскольку V принимает значения любого знака, для нее множество M^+ из теоремы 7.5.4 не пусто. Согласно указанной теореме заключаем, что нулевое решение системы (8.9.10) при четном N неустойчиво.

Рассмотрим случай нечетного N. Положим

$$V = \frac{1}{2} w^2 + U(z),$$

где $U(z)$ по-прежнему определяется уравнением (8.9.14). Производная V в силу системы (8.9.10) имеет вид

$$DV = g\left(w^{N+1} + z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2\right) + wW + \frac{\partial U}{\partial z} Z_*.$$

Как и ранее, DV — знакоопределенная функция Ляпунова, имеющая тот же знак, что и g. В то же время при $g<0$ V — определенно положительная квадратичная форма, а при $g>0$ область M^+ не пуста, так как в качестве M^+ может служить некоторый сектор, примыкающий к любой из полуосей оси Ow. В первом случае по теореме 7.5.2 нулевое решение системы (8.9.10) асимптотически устойчиво, во втором случае по теореме 7.5.4 оно неустойчиво. Теорема 8.9.1 доказана.

Выясним, к чему сводится вычисление постоянной Ляпунова в случае, когда система (8.9.1) автономна. Так как в разложении $h'(y)$ в (8.9.5) все коэффициенты — резонансные, то в стандартном преобразовании (8.9.5) $h'(y)=0$. Из (8.4.16) следует, что g — первый ненулевой коэффициент в $Y(y, 0)=X'(y, \tilde{h}''(y))$. В силу (8.4.7) уравнение для определения $\tilde{h}''$ имеет вид

$$A''\tilde{h}''+\tilde{X}''(y, \tilde{h}'')-\frac{\partial\tilde{h}''}{\partial y}Y(y, 0)=0.$$

Так как $Y(y, 0)=gy^N+\ldots$, то члены разложения $\tilde{h}''$ порядка, меньшего N, совпадают с соответствующими членами разложения неявной функции $z(y)$, определяемой уравнением

$$A''z+\tilde{X}''(y, z)=0. \tag{8.9.15}$$

Следовательно, g — первый ненулевой коэффициент в разложении функции $X'(y, z(y))$, где $z(y)$ определяется соотношением (8.9.15).

Задача 8.9.2 *. Исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{aligned}
\dot{x}&=(3m-1)x^2-(m-1)y^2-(n-1)z^2+(3n-1)yz-2mxz-2nxy,\\
\dot{y}&=-y+x+(x-y+2z)(y+z-x), \qquad\qquad (8.9.16)\\
\dot{z}&=-z+x-(x+2y-z)(y+z-x).
\end{aligned}$$

Ответ. Если $5m\neq 7n$, то нулевое решение неустойчиво; если $5m=7n>0$, то нулевое решение неустойчиво; если $5m=7n<0$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.

§ 10. Критический случай одного нулевого характеристического показателя. Трансцендентный случай

В трансцендентном случае выполнены условия сходимости стандартного преобразования (8.9.5) из теоремы (8.8.9). С помощью этого преобразования система (8.9.1) приводится к виду (8.9.6), где $Y(t, y, 0)=0$, $Z(t, y, 0)=0$.

Теорема 8.10.1. *Существует сходящийся ряд $H(t, w, z)$ такой, что $H(t, w, 0)=0$ и замена*

$$y=w+H(t, w, z) \tag{8.10.1}$$

приводит (8.9.6) *к виду*

$$\begin{aligned}
\dot{w}&=0,\\
\dot{z}&=A''z+Z(t, w+H, z).
\end{aligned} \tag{8.10.2}$$

---

* Задача 8.9.2 взята из основополагающего труда А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения».

Доказательство теоремы 8.10.1, которое проводится с помощью тех же методов, что и доказательство теорем 8.4.2 и 8.8.2, предлагаем выполнить самостоятельно в качестве упражнения (см. задачу 8.4.1).

Согласно лемме 7.2.1 вопрос об устойчивости нулевого решения системы (8.9.1) эквивалентен вопросу об устойчивости нулевого решения системы (8.10.1).

Теорема 8.10.2. *В трансцендентном случае нулевое решение системы* (8.9.1) *устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически.*

Доказательство. Достаточно доказать соответствующее утверждение для системы (8.10.2). Рассмотрим функцию

$$V = w^2 + U(z),$$

где $U(z)$ — определенно положительная квадратичная форма, определяемая уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial z} A'' z = -(z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2).$$

Ее производная в силу системы (8.10.2) такова:

$$DV = -(z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2) + \frac{\partial U}{\partial z} Z(t, w+H, z).$$

Так как $Z(t, w+H(t, w, 0), 0) = 0$, то DV — в достаточно малой окрестности точки $w = z_1 = \ldots = z_{n-1} = 0$ не принимает положительных значений (но принимает нулевые на оси Ow). По теореме 7.5.1 нулевое решение устойчиво по Ляпунову. При этом, так как система (8.10.2) имеет решения $w = C$, $z = 0$ при сколь угодно малых $|C|$, а эти решения, если $C \neq 0$, не стремятся к нулевому при $t \to \infty$, то нулевое решение не является асимптотически устойчивым. Теорема доказана.

Задача 8.10.1. Докажите, что если система (8.9.1) автономна и существует (формальный) ряд $F(x', x'', v)$ такой, что $F(x', x'', 0) = 0$ и

$$X'(x', x'') \equiv F(x', x'', A''x'' + \tilde{X}''(x', x'')),$$

то имеет место трансцендентный случай.

Используя результат этой задачи докажите, что при $m = n = 0$ решение системы (8.9.16) устойчиво по Ляпунову.

Задача 8.10.2. Система (8.10.2) имеет семейство решений

$$w = C, \quad z = 0, \qquad (8.10.3)$$

принадлежащих инвариантным гиперплоскостям $w = C$. Рассмотрим сужение системы (8.10.2) на эту гиперплоскость. Докажите, что если $|C|$ достаточно мало, то решение $z = 0$ рассматриваемой в задаче системы асимптотически устойчиво.

Решениям (8.10.3) системы (8.10.2) или, что то же самое, решениям $y = C$, $z = 0$ системы (8.9.6) соответствует однопараметрическое семейство периодических решений системы (8.9.1). Уравнения этих решений получаются из (8.9.5) и имеют следующий вид:

$$x' = C + h'(t, C),$$

$$x'' = \tilde{h}''(t, C),$$

где C — должно принадлежать области сходимости рядов h', $\tilde{h}''$.

Теорема 8.10.3. *Для того чтобы система (8.9.1) имела однопараметрическое семейство ω-периодических решений, стремящихся при стремлении параметра к нулю к нулевому решению, необходимо и достаточно, чтобы имел место трасцендентный случай.*

Достаточность уже доказана. Докажем необходимость. Предположим, что система (8.9.1) имеет указанное семейство периодических решений, но имеет место алгебраический случай. Тогда система (8.9.10) имеет периодические решения в любой окрестности начала координат. При доказательстве теоремы 8.9.1 во всех возможных ситуациях была построена функция Ляпунова $V(w, z)$ со знакоопределенной производной (в силу системы (8.9.10)). Следовательно, функция V, вычисленная на периодических решениях системы (8.9.10), является строго монотонной функцией t, что противоречит ее периодичности. Таким образом, случай не алгебраический. Теорема доказана.

Если правая часть уравнения (7.2.15) аналитична в окрестности замкнутой траектории $x = \bar{x}(t)$, то как простое следствие из теоремы 8.10.3 получаем утверждение теоремы 7.2.8.

Действительно, замены $y = x - \bar{x}(t)$ и (7.2.19) сводят вопрос об устойчивости решения $\bar{x}(t)$ системы (7.2.15) к вопросу об устойчивости нулевого решения системы (7.2.20), которая аналогична системе (8.9.1). Поскольку система (7.2.15) автономна, она вместе с $\bar{x}(t)$ имеет семейство периодических решений $\bar{x}(t+C)$, $C \in \mathbf{R}$ такого же периода, что и $\bar{x}(t)$. Отсюда следует, что для системы (7.2.20) выполнены в части необходимости условия теоремы 8.10.3. Следовательно, рассматриваемый случай — трансцендентный. По теореме 8.10.2 нулевое решение системы (7.2.20), а вместе с ним и решение $\bar{x}(t)$ системы (7.2.15), устойчиво по Ляпунову. Теорема 7.2.8 доказана.

Дополнение.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка называется уравнение

$$F(x_1 \dots, x_n, \ y_{x_1}, \dots, y_{x_n}, \ y) = 0, \tag{1}$$

где $F(x_1, \dots, x_n, \ p_1 \dots, p_n, \ y)$ — гладкая (дважды непрерывно дифференцируемая) функция в области $U \subset \mathbf{R}^{2n+1}$, причем

$$\sum_{i=1}^{n} (F_{p_i})^2 > 0. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем индекс внизу в виде одного из аргументов функции обозначает частную производную по этому аргументу. Уравнение

$$F(x_1 \dots, x_n, \ p_1, \dots, \ p_n, y) = 0 \tag{3}$$

определяет в силу (2) гиперповерхность $\Gamma \subset \mathbf{R}^{2n+1}$.

В области U определена дифференциальная форма

$$\omega = dy - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i. \tag{4}$$

Здесь dy, dx_i, $i = 1, \dots, n$, — базисные формы, которые на касательных векторах кривой $z(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t), \ p_1(t), \dots, p_n(t), \ y(t))$ принимают следующие значения: $dx_i(\dot z) = \dot x_i$, $dy(\dot z) = \dot y$.

Определение. *n-мерная регулярная поверхность $z = \Phi(v_1, \dots, v_n)$: $V \to \mathbf{R}^{2n+1}$, точки которой удовлетворяют уравнению* (3) *и касательные векторы которой аннулируют форму* (4), *т. е. удовлетворяют уравнению*

$$\omega = 0 \tag{5}$$

называется интегральной поверхностью уравнения (1).

Регулярность поверхности означает, что Φ — гладкая функция, а векторы $\Phi_{v_1}, \dots, \Phi_{v_n}$ — линейно независимы.

Легко видеть, что если гладкая функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяет (1), то равенствами $y = f(x_1, \dots, x_n)$, $p_i = f_{x_i}(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$ задается интегральная поверхность.

Сопоставим с уравнением (1) систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = F_{p_i}, \\ &\dot{p}_i = -F_{x_i} - F_y p_i, \quad i = 1, \ldots, n. \\ &\dot{y} = \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}, \end{aligned} \tag{6}$$

траектории которой называются *характеристиками.*

Нетрудно проверить, что функция $F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, y)$ является интегралом системы (6).

Используя введенное ранее обозначение $z = (x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, y)$, систему (6) запишем в виде

$$\dot{z} = Z(z). \tag{6'}$$

Задача Коши для уравнения (1) ставится следующим образом. Пусть в пространстве $Ox_1 \ldots x_n y$ задана n—1-мерная регулярная поверхность $x_1 = \psi_1(v_1, \ldots, v_{n-1}), \ldots, x_n = \psi_n(v_1, \ldots, v_{n-1})$, $y = h(v_1, \ldots, v_{n-1})$, $(v_1, \ldots, v_{n-1}) \subset V$. В R^{2n+1} рассмотрим поверхность $z = \varphi(v_1, \ldots, v_{n-1})$, где $\varphi = (\psi_1, \ldots, \psi_n, q_1, \ldots, q_n, h)$, причем $q_i(v_1, \ldots, v_{n-1})$ $(i = 1, \ldots, n)$ определяются соотношениями

$$F(\psi_1, \ldots, \psi_n, q_1, \ldots, q_n, h) = 0 \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \psi_{i v_k} = h_{v_k}, \ k = 1, \ldots, n-1. \tag{8}$$

Мы предполагаем, что уравнения (7), (8) однозначно определяют q_i как гладкие функции $v_1, \ldots, v_{n-1}$ в области $\bar{V}$.

Требуется найти интегральную поверхность $z = \Phi(v_1, \ldots, v_n)$ уравнения (1), удовлетворяющую начальному условию $\Phi(v_1, \ldots, v_{n-1}, 0) = \varphi(v_1, \ldots, v_{n-1})$.

Поверхность $z = \varphi(v_1, \ldots, v_{n-1})$ называется *начальной поверхностью задачи Коши.* В силу (7), (8) координаты точек начальной поверхности удовлетворяют уравнению (3), а ее касательные векторы — уравнению (5).

Начальная поверхность называется *нехарактеристической,* если характеристики ее не касаются.

Теорема. *Если начальная поверхность нехарактеристична, то существует единственное решение $z = \Phi(v_1, \ldots, v_{n-1}, t)$ задачи Коши, определенное при $(v_1, \ldots, v_{n-1}) \in \bar{V}$, $|t| < \delta$, $\delta > 0$.*

Доказательство. Пусть $z = w(\varphi(v_1, \ldots, v_{n-1}), t)$ — решение системы (6'), определенное при $|t| < \delta$ и удовлетворяющее условию $w(\varphi(v_1, \ldots, v_{n-1}), 0) = \varphi(v_1, \ldots, v_{n-1})$. Такое решение существует по теореме существования и единственности.

Положим $\Phi(v_1, ..., v_{n-1}, t) = w(\varphi(v_1, ..., v_{n-1}), t)$. Уравнение $z = \Phi(v_1, ..., v_{n-1}, t)$ задает в $\mathbf{R}^{2n+1}$ n-мерную регулярную поверхность, так как согласно теоремам 5.2.1 и 5.2.2 Φ — гладкая функция и в силу нехарактеристичности начальной поверхности

$$\operatorname{rank} \frac{\partial \Phi}{\partial (v_1, \ldots, v_{n-1}, t)} = \operatorname{rank} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial (v_1, \ldots, v_{n-1})}, \frac{\partial w}{\partial t} \right) = n.$$

Поскольку F — интеграл системы (6), то из (7) вытекает, что поверхность $z = \Phi(v_1, ..., v_{n-1}, t)$ удовлетворяет уравнению (3).

Покажем, что касательные векторы построенной поверхности удовлетворяют уравнению (5). Рассмотрим гладкую кривую $(v_1(s), ..., v_{n-1}(s), t(s))$ на поверхности и касательный вектор $l = (\dot{v}_1', ..., v'_{n-1}, t')$, определяемый этой кривой. Имеем

$$\omega(l) = \omega\left(\sum_{i=1}^{n-1} \Phi_{v_i} v_i' + \Phi_t t' \right) = \omega\left(\sum_{i=1}^{n-1} \Phi_{v_i} v_i' \right) + t' \omega(\Phi_t).$$

Так как $\Phi_t = Z(w)$, то

$$\omega(\Phi_t) = \dot{y} - \sum_{i=1}^{n-1} p_i \dot{x}_i = 0.$$

Далее

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Phi_{v_i} v_i' = \frac{\partial w}{\partial \varphi} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{v_i} v_i' \right)$$

можно рассматривать как $Dg^t(\rho')$, где ρ' — касательный вектор начальной поверхности, а Dg^t — дифференциал отображения g^t, порождаемого траекториями системы (6′) за время t.

По формуле (5.2.1), если $Dg^t(\rho') = (\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n, \gamma)$, то

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{px} & F_{pp} & F_{py} \\ A & B & C \\ F_{px} p & F_{pp} p + F_p & F_{py} p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \tag{9}$$

где для краткости записи введены следующие обозначения матричных блоков:

$$F_{px} = \begin{pmatrix} F_{p_1 x_1} \ldots F_{p_1 x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_{p_n x_1} \ldots F_{p_n x_n} \end{pmatrix}, \quad F_{pp} = \begin{pmatrix} F_{p_1 p_1} \ldots F_{p_1 p_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_{p_n p_1} \ldots F_{p_n p_n} \end{pmatrix}.$$

$$F_{px} p = \left(\sum_{i=1}^{n} F_{p_i x_1} p_i, \ \ldots, \ \sum_{i=1}^{n} F_{p_i x_n} p_i \right).$$

$$F_{pp} p + F_p = \left(\sum_{i=1}^{n} F_{p_i p_1} p_i + F_{p_1}, \ \ldots, \ \sum_{i=1}^{n} F_{p_i p_n} p_i + F_{p_n} \right),$$

$$F_{py}=\begin{pmatrix}F_{p_1y}\\ \vdots\\ F_{p_ny}\end{pmatrix},\quad F_{py}p=\sum_{l=1}^{n}F_{p_ly}p_l.$$

Выражения для блоков A, B, C нам не понадобятся.

В силу (6) и (9)имеем

$$\frac{d}{dt}\omega(Dg^t(\rho'))=\frac{d}{dt}\left(\gamma-\sum_{l=1}^{n}p_i\alpha_l\right)=$$

$$=\sum_{i,\ j=1}^{n}(F_{p_ix_j}p_i\alpha_j+F_{p_ip_j}p_i\beta_j)+\sum_{l=1}^{n}F_{p_l}\beta_i+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}(F_{p_ly}p_l\gamma+F_{x_l}\alpha_i+F_yp_l\alpha_i)-$$

$$-\sum_{i,\ j=1}^{n}(F_{p_lx_l}\alpha_jp_i+F_{p_lp_j}\beta_jp_l)-\sum_{l=1}^{n}F_{p_ly}\gamma p_l=$$

$$=F_y\sum_{l=1}^{n}p_i\alpha_l+\sum_{l=1}^{n}(F_{x_l}\alpha_l+F_{p_i}\beta_l).$$

Но поверхность $z=\Phi(v_1,..,v_{n-1},t)$ принадлежит гиперповерхности Γ, следовательно, ее касательные векторы ортогональны grad F, т. е.

$$\sum_{l=1}^{n}(F_{x_i}\alpha_i+F_{p_l}\beta_l)+F_y\gamma=0.$$

Отсюда вытекает, что при $|t|<\delta$

$$\frac{d}{dt}\omega(Dg^t(\rho'))=-F_y\omega(Dg^t(\rho')).$$

Так как $\omega(\rho')=0$, то $\omega(Dg^t(\rho'))=0$ при всех $|t|<\delta$. Существование решения задачи Коши доказано.

Докажем единственность. Поскольку решение задачи Коши для системы (6) единственно в силу гладкости ее правых частей, достаточно доказать, что вектор правой части (6) касается любой интегральной поверхности.

Если это не так в некоторой точке a, то, принимая интегральную поверхность за начальную и рассуждая как при доказательстве существования, построим $n+1$-мерную регулярную поверхность M.

Обозначим через T_aM касательное пространство M в точке a. Векторы T_aM удовлетворяют уравнению (5), следовательно, и уравнению

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dp_i = 0,$$

Дифференциальная форма $d\omega$ невырождена, так как матрица ее коэффициентов является симплектической единицей, определитель которой равен единице. Пусть $l \in R^{2n+1}$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ — базисные векторы T_aM. Тогда равенства $d\omega(l, \lambda_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n+1$, дают $n+1$ независимых условий, которым должны удовлетворять векторы l, чтобы они принадлежали T_aM. Отсюда вытекает, что $\dim T_aM \leqslant n$, а это противоречит предположению о размерности M. Теорема доказана полностью.

Итак, решение задачи Коши для уравнения (1) сводится к нахождению характеристик, т. е. к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6).

Частный случай. Уравнение

$$f_1(x_1, \ldots, x_n, y) y_{x_1} + \ldots + f_n(x_1 \ldots, x_n, y) y_{x_n} = R(x_1 \ldots, x_n, y), \quad (10)$$

где $f_1, \ldots, f_n$ — гладкие в некоторой области функции, не обращающиеся одновременно в нуль ни в одной точке этой области, называется *квазилинейным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка.*

Соответствующая система (6) содержит подсистему

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1, \ldots, x_n, y), \\ \dot{y} &= R(x_1, \ldots, x_n, y), \end{aligned} \quad (11)$$

траектории которой называются *характеристиками* квазилинейного уравнения (10). Начальная поверхность задается как $n-1$-мерная поверхность пространства $Ox_1 \ldots x_n y$. Если она нехарактеристична, то, проведя через каждую ее точку характеристику, получим n-мерную поверхность, которая называется *интегральной поверхностью* уравнения (10).

Если эта поверхность может быть задана уравнением $y = g(x_1, \ldots, x_n)$, то функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет уравнению (10).

Действительно, так как интегральная поверхность образована траекториями системы (11), то производная функции $y - g(x_1, \ldots, x_n)$ в силу системы (11) равна нулю

$$R - \sum_{i=1}^{n} \frac{dg}{dx_i} f_i = 0,$$

откуда и следует сделанное утверждение.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоколебания 156

Базис пространства решений 73, 90
Бифуркация 146, 185, 281

Вронскиан 71, 92
Выпрямляющий диффеоморфизм 161, 168

Группа решений линейной системы 108

Дихотомия 127

Задача Коши 50, 61
— краевая 124
Зона неустойчивости 243

Изоклина 7
Интеграл 96, 161
— общий 164
Интегральная кривая 50
— поверхность 162
Интегрирующий множитель 34

Квадратичная форма как функция Ляпунова 249
Квазинормальная форма системы 268
Критический случай 232, 252
— — алгебраический 288
— — трансцендентный 291
Лемма Абеля 170
— Гронуолла 22
Линеаризация 213
Логарифм матрицы 105
Ломаная Эйлера 17

Максимальный интервал существования решения 59
Матрица монодромии 115, 200
— фундаментальная 92
Метод вариации произвольных постоянных 82, 120
— Коши 191, 206
— Ляпунова второй 244
— — первый 268
— малого параметра 177
— неопределенных коэффициентов 79
— Эйлера 109
Мультипликатор 115, 200

Нормализующее преобразование стандартное 256
Нормальная форма системы 256
— — — на инвариантной поверхности 263

Отрезок Пеано 50

Поле направлений 7
Понижение порядка системы 96, 165
Последовательные приближения Пикара 53
Предельное множество 65
Приводимость 118
Проблема центра и фокуса 181
Продолжение решения 58
— — аналитическое 195
Производная в силу системы 162, 244

Резонанс 79, 144
— параметрический 243
Резонансный коэффициент 256
Решение 48, 191
— общее 158
— ограниченное 123, 127
— особое 26, 39
— полное 59
— порождающее 141
— формальное 207
Ряд матричный 101
— степенной обобщенный 205
Седло 112, 258
Сепаратриса 271
Система дифференциальных уравнений 48

— — — автономная 63
— — — Вольтерра 153
— — — гамильтоиова 168, 276
— — — квазилинейная 141
— — — линейная 52
— — — — неодиородиая 119
— — — — однородная 88
— — — — — с периодическимн коэффициентами 114
— — — — — с постоянными коэффициентами 107
— — — — — сопряжениая 95
— — — нормальная 49
— — — обратимая 277
Существование периодического решения 85, 121, 141, 144

Теорема Андронова — Витта 230
— Коши 191
— Ляпунова о разложении решеиий в ряды 270
— о дифференцируемости решения по начальным данным н параметрам 136, 140
— о непрерывности решений по начальным данным н параметрам 131
— о неявиой функции 48, 173
— о существовании и единственности решеиия 56
— о существовании общего ннтеграла 164
— о существовании общего решения 160
— об аналитичности решений по начальным данным и параметрам 175
— об устойчивости по первому приближению 221, 227, 251, 252
— Пеано 19
— Пуанкаре о разложении решений в ряды 175
— Фукса 205
Теория Флоке 114
Точка особая иррегуляриая 202
— — подвижная 197
— — регулярная 202
— предельная 65

Траектория 50
— замкнутая 65

Узел 112, 257
Уравнение бифуркационное 146, 187, 281
— дифференциальное Бернулли 15
— — Бесселя 208
— — в вариациях 136
— — в полных дифференцналах 32
— — с частнымн производными 294
— — Ван-дер-Поля 143, 149, 238, 239
— — Дуффинга 144, 240
— — Клеро 40
— — Лагранжа 39
— — линейное неоднородное 14, 78
— — — однородное 14, 70
— — — — с постояннымн коэффициентами 75
— — матричное 91
— — Матье 243
— — однородное 15
— — первого порядка в снмметричной форме 26
— — — — не разрешенное относнтельно прнзводной 36
— — порождающее 177
— — с разделяющимися переменными 11, 29
— интегральное, эквивалентное задаче Коши 52, 123
— — — краевой задаче 127
— определяющее 205, 218
— характеристическое 76, 205
Условие Липшица 46
Условия краевые 124
— начальные 50
Устойчивость асимптотическая 223
— — экспоненциальная 231
— в малом 219
— линейной системы 224
— периодического решения 229, 237
— по Лагранжу 65
— по Ляпунову 223
— положения равновесия 228
— предельного цикла 156

Фазовое пространство 51
Фокус 113, 152
Формула коиечных приращений 46
— Коши 121
— Лиувилля 72, 93
— Френе 93
Фуидаментальная система решеиий 73, 90
Фуикция аиалитическая 171
— Бесселя 210
— векторная 45
— Грина 125
— Ляпунова 244
— последования 151
Характеристический показатель 115, 200
— полином 76
Центр 113, 153, 261
— изохронный 261
Цикл предельный 156
Эквивалентность систем аналнтическая 254
— — формальная 254

Экспонеита матрицы 104
ε-решение 16

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Основные обозначения 4

Глава I

Дифференциальные уравнения первого порядка 5

§ 1. Общие положения 5
§ 2. Теорема существования 16
§ 3. Теорема единственности 21
§ 4. Общее решение 23
§ 5. Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме 25
§ 6. Интегрирующий множитель 32
§ 7. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной 36

Глава II

Нормальные системы дифференциальных уравнений. Вопросы существования решений 42

§ 1. Вспомогательные сведения 42
§ 2. Системы дифференциальных уравнений. Общие положения 48
§ 3. Теорема существования и единственности 53
§ 4. Продолжение решений 58
§ 5. Системы дифференциальных уравнений общего вида 61
§ 6. Автономные системы 63

Глава III

Линейные дифференциальные уравнения 68

§ 1. Общие положения 68
§ 2. Линейные однородные уравнения 70
§ 3. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами . . 75
§ 4. Линейные неоднородные уравнения 78

Глава IV

Линейные системы дифференциальных уравнений 87

§ 1. Линейные однородные системы 88
§ 2. Фундаментальные матрицы 91
§ 3. Подобные матрицы 98
§ 4. Функции от матриц 101
§ 5. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами . . 107
§ 6. Линейные однородные системы с периодическими коэффициентами 114
§ 7. Линейные неоднородные системы 119
§ 8. Краевая задача 124
§ 9. Ограниченные решения линейных систем 127

Глава V

Общие свойства решений систем дифференциальных уравнений 130

§ 1. Непрерывная зависимость решений от начальных данных и параметров 130

§ 2. Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам 135
§ 3. Периодические решения квазилинейных систем 141
§ 4. Автономные системы на плоскости 149
§ 5. Общее решение 158
§ 6. Общий интеграл 161

Глава VI

Аналитические нормальные системы дифференциальных уравнений 170

§ 1. Аналитические функции нескольких переменных 170
§ 2. Аналитичность решений по начальным данным и параметрам 174
§ 3. Метод малого параметра 177
§ 4. Аналитичность решений как функций независимой переменной . . . 190
§ 5. Аналитическое продолжение решений 195
§ 6. Изолированные особенности линейной однородной системы 198
§ 7. Регулярная особенность линейного однородного уравнения второго порядка 202
§ 8. Линеаризация автономной системы в окрестности положения равновесия 210

Глава VII

Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений 218

§ 1. Устойчивость в малом 218
§ 2. Устойчивость по Ляпунову 222
§ 3. Устойчивость периодических решений квазилинейных уравнений в критических случаях 231
§ 4. Параметрический резонанс 241
§ 5. Второй метод Ляпунова 244

Глава VIII

Метод нормальных форм в теории дифференциальных уравнений 253

§ 1. Формальная и аналитическая эквивалентность систем дифференциальных уравнений 253
§ 2. Нормальная форма системы дифференциальных уравнений 255
§ 3. Автономные системы на плоскости в окрестности положения равновесия 256
§ 4. Нормальная форма на инвариантной поверхности 262
§ 5. Первый метод Ляпунова 268
§ 6. Аналитическое семейство периодических решений 272
§ 7. Бифуркация периодических решений 278
§ 8. Нормальная форма периодической системы 281
§ 9. Критический случай одного равного нулю характеристического показателя. Алгебраический случай 286
§ 10. Критический случай одного нулевого характеристического показателя. Трансцендентный случай 291
Дополнение. Дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка 294
Предметный указатель 299