

ББК 22.161.6

К 79

УДК 517

Клингенберг В.

Лекции о замкнутых геодезических. Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. 416 с.

Монография известного западногерманского математика охватывает широкий круг вопросов, связанных с вариационным исчислением в целом, дифференциальной геометрией и теорией динамических систем. Наряду с новейшими результатами, в том числе самого автора, приведены малоизвестные достижения прежних лет. Книга удачно сочетает черты оригинальной монографии, обзора и учебного пособия.

Для специалистов по математическому анализу и дифференциальной геометрии, аспирантов и студентов университетов.

Редакция литературы по математическим наукам

К $\frac{1702040000-132}{041(01)-82}$ 7-82, ч. 1

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1978
All rights reserved. Authorized translation from
English language edition published by Springer-
Verlag Berlin — Heidelberg — New York.

© Перевод на русский язык с изменениями, «Мир»,
1982

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Изучение замкнутых геодезических было начато Дарбу [1], Адамаром [1], Пуанкаре [1] и Биркгофом [1] *) на грани 19-го и 20-го веков. Вопросы, которыми они занимались, были различны. Дарбу начал исследование проблемы: на каких поверхностях все геодезические замкнуты? Работа Адамара была посвящена поведению геодезических линий на поверхностях отрицательной кривизны (он не ограничивался замкнутыми геодезическими, но уделил им значительное внимание). Пуанкаре написал статью о замкнутых геодезических на овалоиде (замкнутой выпуклой поверхности); позднее Биркгоф нашел другой подход к той же задаче. (Если говорить не только о замкнутых геодезических, а вообще о поведении геодезических линий, то надо упомянуть еще и о тех случаях, когда удается проинтегрировать в квадратурах соответствующие дифференциальные уравнения **). Это направление, естественно, возникло раньше — наиболее известные результаты здесь были получены Клеро и Якоби.) Все упомянутые направления со временем получили значительное развитие. Они остаются основными направлениями в теории замкнутых геодезических и по сей день. В ходе развития во всех этих направлениях совершился переход от двумерных поверхностей к n -мерным многообразиям (однако некоторые результаты последних 20 лет являются новыми и для «классического» двумерного случая).

Интегрирование в квадратурах когда-то было почти единственным и уж во всяком случае главным методом исследования дифференциальных уравнений вообще и уравнений геодезических в частности. Подобное монопольное положение со временем было утрачено, а прогресс в интегрируемых задачах надолго прекратился. Однако в наши дни интерес к интегрируемым задачам возродился, причем многие из них прямо или косвенно связаны с геодезическими.

*) Ссылки в квадратных скобках относятся к библиографии в конце книги.

**) Замкнутые геодезические здесь не играют особой роли, но, конечно, в таких случаях сравнительно легко исследовать их свойства и с этим связаны интересные примеры.

Теперь о более новых направлениях. С современной точки зрения основная проблема направления исследований, начатого Дарбу, состоит в том, чтобы охарактеризовать важный класс римановых пространств — компактные симметрические пространства ранга 1 *) — в терминах очень простых свойств геодезических вроде их замкнутости. Полного решения этой проблемы пока нет, но уже известно довольно много. В частности, в классическом двумерном случае ситуация теперь выяснена.

Если направление Дарбу относится к «чистой» геометрии, то другие направления оказали заметное влияние и за ее пределами. Это не случайно: Адамар и Пуанкаре рассматривали свои задачи о геодезических как некие модельные задачи, в которых в относительно более простой геометрической ситуации проявляются какие-то особенности, свойственные, быть может, задаче трех тел. (И, как мы бы теперь сказали, вообще теории динамических систем.) Что ж, интуиция их не обманула.

Направление, начатое Адамаром, тесно связано и отчасти даже сливается с тем разделом теории динамических систем, где изучаются системы с «гиперболическим» поведением траекторий. В 60-е годы в этой области теория динамических систем безусловно доминировала над геометрией. Позднее в какой-то степени восстанавливается паритет этих дисциплин — выделяется круг вопросов, требующих более геометрического подхода.

К Адамару восходит также и теорема, дающая некоторую оценку снизу числа замкнутых геодезических на замкнутом римановом многообразии (уже без каких-либо предположений о его кривизне) в терминах свойств фундаментальной группы многообразия. Эта теорема является простейшим и исторически первым результатом вариационного исчисления в целом — раздела математики, в котором применяются топологические понятия и методы для качественного исследования вариационных задач (существование и оценка числа экстремалей, выяснение некоторых качественных свойств последних и соотношений между числом экстремалей различных типов). Однако возникновение вариационного исчисления в целом как самостоятельного направления произошло позднее и было связано с другой задачей, которую рассматривал Пуанкаре.

Как уже говорилось, это была задача о замкнутых геодезических на овалонде. (Впоследствии выяснилось, что условие выпуклости поверхности несущественно, а существенно только, чтобы она была гомеоморфна сфере.) Пуанкаре предложил

*) Это сферы, проективные пространства (вещественные, комплексные и кватернионные) и проективная плоскость Кэли, снабженные некоторой стандартной метрикой. Они встречаются в математике по самым различным поводам, и исторически все они были введены задолго до появления унифицирующего понятия симметрического пространства.

некоторый подход к этой задаче и полагал, что ему удалось доказать существование одной замкнутой геодезической без самопересечений. Биркгоф и Морс отметили ряд пробелов в аргументации Пуанкаре, а недавно выяснилось, что некоторые из его утверждений в общем случае неверны (хотя кое-что этот подход все же может дать; подробнее см. ⁽²⁶⁾ *). И тем не менее стимулирующее влияние удачной постановки вопроса в статье Пуанкаре оказалось столь важным, что многие считают Пуанкаре создателем вариационного исчисления в целом. Это неверно: вариационные соображения у Пуанкаре не играли значительной роли — в основной части своей статьи он пытался использовать соображения из теории динамических систем, связанные с «типичностью» определенных ситуаций. Трактровка геодезических линий как траекторий геодезического потока фактически была известна и до Пуанкаре, однако он, по-видимому, был первым, кто более или менее последовательно и явно пользовался ею **).

Открытие современного вариационного подхода к задаче о замкнутых геодезических принадлежит Биркгофу, доказавшему, что на поверхности, гомеоморфной сфере, всегда существует по крайней мере одна замкнутая геодезическая. После этого в 20—30-е гг. в работах Морса [2] и Люстерника и Шнирельмана [1], [2] был выработан характерный для вариационного исчисления в целом общий прием исследования и даны приложения к задаче о замкнутых геодезических. (Самым ярким приложением было найденное Люстерником и Шнирельманом доказательство того факта, что на поверхности, гомеоморфной сфере, всегда существуют три замкнутые геодезические без самопересечений.) Общий прием состоит в изучении изменения топологических свойств «области меньших значений» $f^{-1}(]-\infty, \kappa])$ для рассматриваемой функции f (последняя может быть и функционалом, рассматриваемым как функция на некотором функциональном пространстве) с изменением «уровня» κ . В «хороших» случаях изменения топологических свойств $f^{-1}(]-\infty, \kappa])$ происходят лишь при прохождении κ через критические значения f и оказываются определенным образом связанными со свойствами соответствующих критических точек.

*) Ссылки в круглых скобках относятся к примечаниям редактора в конце книги. Помимо ⁽²⁶⁾ см. также Аносов [5].

**) У Адамара такая трактовка выступает не столько в ходе исследования, сколько в замечаниях по поводу полученных результатов (хотя в наши дни геодезические на многообразиях отрицательной кривизны чаще всего рассматривают именно с этой точки зрения). Конечно, у Якоби при интегрировании уравнений геодезических на трехосном эллипсоиде явно использовалась соответствующая гамильтонова система (хотя возможно и более геометрическое изложение того же вопроса),

(В итоге получаются некие связи между топологическими свойствами области определения f и критическими точками, что позволяет, зная первые, делать заключения о последних, или наоборот.) При этом топологические свойства, которые рассматривали Люстерник и Шнирельман, с одной стороны, и Морс — с другой, были разными, так что можно говорить о двух разных теориях в вариационном исчислении в целом — теории Люстерника — Шнирельмана и теории Морса. Различие между ними сохранилось и при дальнейшем их развитии.

В «Лекциях о замкнутых геодезических» В. Клингенберга затронуты все названные выше направления, так что читатель получит хорошее общее представление о предмете. Однако различные вопросы и направления затронуты с разной степенью подробности, причем большая часть книги посвящена вариационному подходу к задаче о замкнутых геодезических *).

Книга четко делится на две части: гл. 1—3 и гл. 4, 5. Первая часть почти полностью посвящена вариационной теории. (Исключение составляет § 3.3 о «типичных» свойствах замкнутых геодезических и отчасти еще § 3.1, содержащий различные элементарные факты о геодезическом потоке и его трактовке как гамильтоновой системы. Эти факты используются как в «вариационном» § 3.2, так и в «динамическом» § 3.3.) Эта часть по своему характеру представляет собой сочетание учебника с систематическим изложением оснований. И то, и другое предполагает, чтобы изложение было детальным и по возможности не зависело от литературных ссылок. В первой части автор явно стремился к этому.

Половина второй части тоже посвящена вариационной теории (гл. 4, кроме части § 4.4, и § 5.1), а вторая ее половина (§ 5.2, 5.3, а также часть § 4.4, примыкающая к § 3.3) посвящена другим направлениям. Изложение здесь более краткое, имеющее характер введения или обзора, а отчасти даже программный характер (см. ниже). Здесь далеко не все доказывается, а приводимые доказательства нередко излагаются только в общих чертах. Заинтересовавшемуся читателю следует обратиться к цитированной литературе. Литературные ссылки не являются исчерпывающими (за исключением вариационной теории, где они, во всяком случае, очень полны), однако основные источники они содержат. В связи с этим надо сказать, что невариационные направления хорошо представлены в литературе.

Что же касается вариационного исчисления в целом, то хотя в различное время появилось несколько книг, содержащих не-

*) Этот круг вопросов иногда называют «периодической задачей вариационного исчисления в целом».

которые сведения по этому предмету (Зейферт и Трельфалль [1], Милнор [1], Постников [1]), во всех этих книгах речь идет о более простой двухточечной краевой задаче, тогда как вопрос о замкнутых геодезических намного сложнее во всех отношениях: сложнее локальная теория индекса, сложнее рассматриваемые функциональные пространства (они не являются бесконечномерными многообразиями) и, главное, сложнее переход от различных критических точек в функциональном пространстве к различным геодезическим на исходном римановом многообразии. Трудность здесь в том, что одна и та же замкнутая геодезическая, обойденная 1, 2, 3 и т. д. раз, дает различные критические точки в функциональном пространстве; таким образом, если нам удалось доказать, что в функциональном пространстве имеется много критических точек, отсюда еще не следует, что имеется много различных замкнутых геодезических. Поэтому вопрос о замкнутых геодезических, исторически послуживший главным стимулом при создании вариационного исчисления в целом, требует в дополнение к общеизвестным ныне соображениям, относящимся ко всему этому разделу математики, еще привлечения каких-то новых идей, специфических именно для данного вопроса.

До сих пор единственной книгой по вариационному исчислению в целом, где всерьез рассматривались замкнутые геодезические, была известная книга Морса [2], вышедшая в 1934 г. Теперь она безнадежно устарела и как раз в части, касающейся замкнутых геодезических, пожалуй, больше, чем в остальных своих частях,— достаточно сказать, что в то время даже еще не были полностью осознаны те трудности, о которых шла речь выше. (Я не говорю уже о том, что она не переведена на русский язык и у нас мало доступна.)

С 30-х гг. не только накопился значительный новый материал, но и стало ясно, что старый материал лучше с самого начала излагать по-новому. Действительно, в 60-е гг. были предложены три изменения.

1) Вместо функционала длины удобнее работать с функционалом, который в механике и физике называется «действием», а в некоторых математических работах «энергией», а также «интегралом Дирихле» ⁽¹⁵⁾.

2) Бесконечномерное функциональное пространство замкнутых кривых (как и соответствующее пространство в двухточечной краевой задаче) Морс аппроксимировал конечномерным с помощью ломаных геодезических, сводя тем самым вариационную задачу к задаче о критических точках функций на конечномерных многообразиях. Для того чтобы сравнивать свойства области меньших значений $f^{-1}(]-\infty, \kappa])$ при различных κ , применялись специальные «укорачивающие деформации» лома-

ных. Теперь действуют иначе — рассматривают исследуемый функционал как функцию на бесконечномерном пространстве и вместо специальных деформаций используют спуск по траекториям подходящей динамической системы *).

3) Выяснилось, что в задаче о замкнутых геодезических наиболее естественное (и наиболее нужное) функциональное пространство ПМ (пространство непараметризованных и неориентированных замкнутых кривых на исходном многообразии M) не является бесконечномерным многообразием. Поскольку работать с таким «плохим» пространством неудобно, приходится часто оперировать в «хорошем» пространстве параметризованных замкнутых кривых ЛМ, но так, чтобы все переносилось в ПМ при естественной проекции $ЛМ \rightarrow ПМ$. Хотя идеи о подобных изменениях высказывал не один только Клинггенберг, детальная разработка нового плана систематического изложения всего материала с учетом этих изменений является его заслугой. Можно надеяться, что изложение оснований предмета приняло более или менее окончательный вид.

Правда, здесь надо сделать три оговорки. Во-первых, сказанное относится только к замкнутым геодезическим в римановой геометрии. Морс рассматривал более общий случай финслеровой геометрии, который в настоящих «Лекциях» только упоминается два-три раза (со ссылками на литературу). Ограничение римановым случаем вполне оправдано как его «классичностью», так и тем, что в финслеровом случае пока нет столь же продвинутых результатов и, как мне кажется, пока не выработался столь же удачный новый вариант изложения оснований. Во-вторых, не исключено, что в теориях Люстерника—Шнирельмана и Морса целесообразно использовать различные функциональные пространства **). В теории Морса очень

*) Этот шаг был независимо совершен несколькими авторами, преследовавшими различные цели. Поэтому было предложено два варианта спуска: градиентный спуск, используемый в настоящей книге (литературные ссылки см. в предисловии автора) и параболический спуск, который впервые был еще до 60-х гг. совсем по другому поводу использован Мильграмом и Розенблотом (о нем см. Альбер [3], а также недавний обзор Иллса и Лемэра [1]). Первый проще второго, но имеет более узкую область применений, охватывающую, впрочем, задачу о замкнутых геодезических и вообще одномерные задачи вариационного исчисления в целом (т. е. задачи, в которых рассматриваемый функционал выражается в виде интеграла по одной независимой переменной). Применительно к этим задачам новый подход технически более удобен, более непосредствен и более отвечает духу времени, чем прежние элементарные, но громоздкие приемы. Для многомерных же задач (в которых функционал выражается в виде кратного интеграла) прежние приемы попросту не годятся.

**) Исторически так оно и было: Морс рассматривал ломаные геодезические, а Люстерник и Шнирельман — другие классы кривых, например всевозможные спрямляемые кривые.

естественно стремиться к тому, чтобы ΛM было гильбертовым многообразием (ибо вторую вариацию, как и всякий квадратичный функционал, удобнее всего рассматривать в гильбертовом пространстве), но в теории Люстерника — Шнирельмана такого побудительного мотива нет. Правда, остается еще то соображение, что излагаемый в «Лекциях» вариант удобен для градиентного спуска.

В-третьих, неприятно, что, хотя при непрерывном отображении $f: M \rightarrow N$, удовлетворяющем условию Липшица, кривые из ΛM переходят в кривые из ΛN , но возникающее таким путем отображение $\Lambda M \rightarrow \Lambda N$, вообще говоря, не непрерывно (при избранных здесь определениях пространства Λ и его топологии). (Пример имеется в моей статье [3].) Это может несколько усложнить доказательства (см. доказательство 2.3.9), а в некоторых случаях и привести к некоторому снижению общности результатов. Однако не видно, чем бы могла способствовать решению интересных задач замена «диффеоморфизма» на «липшицев гомеоморфизм» в формулировках тех или иных вспомогательных результатов. Поэтому данная неприятность не кажется существенной, по крайней мере в настоящее время (хотя нельзя поручиться, что ситуация не изменится).

Мне кажется, что в любом случае вариант, излагаемый в «Лекциях», имеет хорошие шансы остаться основным в научном отношении, не говоря уже о том, что он наиболее подходит для изучения. Другие варианты могут играть роль технически более сложных (или громоздких) модификаций, полезных для каких-то специальных целей и занимающих, так сказать, периферическое положение.

Наряду с полным отказом от обсуждения подобных вопросов, вполне оправдано еще одно ограничение, свойственное «Лекциям» — в них рассматриваются римановы метрики класса C^∞ (и под дифференцируемостью понимается бесконечная дифференцируемость, если не оговорено противное и если противное не явствует из контекста). В данном случае скрупулезное прослеживание того, сколько производных требуется в том или ином рассуждении, только загромодило бы изложение, не суля никаких принципиальных достижений.

Как известно, теория Морса ^{*)} со временем нашла ряд применений в математике — более всего в топологии, но также и в дифференциальной геометрии. Кроме того, построенная Мор-

^{*)} Как теория критических точек функций на конечномерных многообразиях (относится ли ее к вариационному исчислению в целом — дело вкуса), так и ее бесконечномерный (уже несомненно вариационный) аналог для функционалов длины и (или) действия на пространстве путей, соединяющих две заданные точки.

сом теория второй вариации *) (в терминах настоящей книги — индексной формы) оказалась полезной для теории дифференциальных уравнений. Лет 15 назад удивительный контраст с этими успехами теории Морса составляла ситуация в задаче о замкнутых геодезических, где почти все результаты были связаны с теорией Люстерника — Шнирельмана. Эта ситуация изменилась, когда Громулу и Мейеру [2] (кстати, они являются учениками Клингенберга) удалось доказать существование бесконечного числа замкнутых геодезических на замкнутых римановых многообразиях M с «достаточно сложными» кольцами когомологий. (Собственно, условие Громола — Мейера, так же как и излагаемое в настоящей книге его обобщение, формулируется в терминах когомологий AM ; позднее Виге-Пуарье и Сулливан [1] показали, что первоначальное условие Громола — Мейера можно переформулировать в терминах кольца когомологий самого M .) Доказательство получено с помощью дальнейшего развития теории Морса: по терминологии Клингенберга, речь идет об исследовании введенного им «комплекса Морса».

Клингенбергом предпринята попытка доказать существование бесконечного числа замкнутых геодезических для всех односвязных замкнутых многообразий, независимо от свойств их гомологий. Об этом говорится в § 4.3, 4.4, однако полных доказательств там нет. Пока что они вообще не опубликованы, поэтому осторожный читатель вправе рассматривать § 4.3 и начало § 4.4 не как анонс доказанной теоремы вместе с фрагментами доказательства, а как изложение некоей программы исследований **).

Мне кажется, эта программа представляет интерес в любом случае — хотя бы из-за различных вопросов, которые нужно выяснять ради ее осуществления и которые сохраняют свое значение независимо от успеха программы в целом.

Частичной реализации намеченной Клингенбергом программы посвящена работа Клингенберга и Шикаты [1]. Нужные свойства комплекса Морса там четко формулируются, но остается открытым вопрос, насколько общим является тот случай, когда комплекс Морса обладает этими свойствами.

*) Эта теория имеет локальный характер, т. е. связана с исследованием малой окрестности экстремали. В этом отношении она ближе к более ранним, «классическим» разделам вариационного исчисления, нежели к вариационному исчислению в целом. Но она была разработана именно в связи с развитием последнего (раньше свойства второй вариации исследовались лишь в той мере, в какой это было нужно для применений к условиям минимума функционала).

**) Незавершенный характер этой программы сказывается даже на языке. Например, нередко автор говорит о цепях и циклах так, как если бы речь шла просто о множествах. Отчасти в неясности языка отражается то, что нет полной ясности со свойствами комплекса Морса. Имеются и фактические неточности (некоторые из них мною отмечены).

Оценивая современную ситуацию, Клингенберг говорит, что, хотя теория Люстерника — Шнирельмана быстрее приводит к первым результатам, систематическое исследование комплекса Морса позволяет в конечном счете получить намного более глубокие результаты^{*)}. К этому стоит добавить, что за теорией Люстерника — Шнирельмана сохраняется некая специфическая область применений, которую в настоящее время можно ориентировочно охарактеризовать так. К ней относятся только некоторые многообразия и метрики — именно, многообразия гомотопического типа компактных симметрических пространств ранга 1 (быть может, и какие-то родственные им), а метрики, видимо, должны быть в каком-то смысле близки к стандартным (за исключением двумерного случая). Зато здесь доказывается существование не просто замкнутых геодезических, но замкнутых геодезических без самопересечений^{**)}. Не удивительно, что число таких геодезических, вообще говоря, конечно.

* *
*

Книга рассчитана на читателя, обладающего определенными познаниями в топологии. Используются основные понятия, относящиеся к гладким многообразиям и векторным расслоениям, — впрочем, как правило, это еще не топология, а по известному выражению Ленга, «ничья земля». Далее, предполагаются известными уже специфически топологические сведения, начиная с гомологий и кончая элементами теории характеристических классов (читатель, знакомый с последними, заведомо знает и все остальное, что здесь требуется). Систематически используются бесконечномерные гильбертовы многообразия, но опять-таки здесь надо только то, что относится к «ничьей земле» и содержится у Ленга [1] или Бурбаки [1]. Если в n -мерном случае читатель привык представлять себе «локальные координаты» не столько как набор n чисел, сколько как точку n -мерного евклидова пространства (к чему приучают все современные изложения), то ему уже нетрудно будет всюду заменить евклидово пространство гильбертовым. Нужно также знакомство с элементами римановой геометрии: связность Леви-Чивита, тензор кривизны. (Формально в начале книги приводятся все необходимые определения и рассуждения, относящиеся к связности Леви-Чивита, но это делается с целью

^{*)} Читатель не найдет этого высказывания в русском издании: оно содержалось в добавлении, которое при переводе пришлось опустить (см. ниже).

^{**)} И не слишком длинных. Клингенберг надеется, что это «улавливается» также и теорией Морса (§ 5.1).

проверки, что все проходит и в гильбертовом случае; для первоначального ознакомления такое изложение едва ли подходит.) В гл. 3 используются (в связи с трактовкой геодезического потока как гамильтоновой системы) внешние дифференциальные формы и стандартные операции над ними. Конечно, кое-где используются различные факты, выходящие (порой весьма далеко) за пределы сказанного выше; в таких случаях даются точные формулировки и литературные ссылки.

Отмечу некоторые обозначения, часто используемые в книге. Знак $:=$ означает, что величина, стоящая слева от него, по определению принимается равной тому, что стоит справа. Часто применяются функциональные обозначения с незаполненными аргументами (в русском издании последние для ясности отмечаются точками). Впрочем, это проводится не слишком последовательно. Для отображения, сопоставляющего каждому элементу t из своей области определения некоторое $f(t)$, иногда используется еще запись $(f(t))$ (обычно при ее употреблении областью определения является стандартная окружность $S := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *). Таким образом, одно и то же отображение может обозначаться через f , $f(\cdot)$ и $(f(t))$ (а в порядке уступки старой традиции — также и через $f(t)$). Пояснения различных других обозначений даются по ходу изложения.

Эта книга, подобно известной советскому читателю другой книге Клингенберга «Риманова геометрия в целом» (Громол, Клингенберг, Мейер [1]), возникла из записей его лекций, которые вначале были изданы Боннским университетом в виде препринта, а позднее вышли в издательстве «Шпрингер». Но если перед сдачей в издательство «Риманова геометрия в целом» подверглась редактированию и расширению (эта переработка была настолько существенной, что выполнившие ее Громол и Мейер стали соавторами), то с настоящими «Лекциями» этого не произошло. Отсюда сказывающиеся местами погрешности изложения, естественные для лекций по такому предмету, где еще не накопилось достаточного опыта преподавания: неровность, а кое-где даже пробелы и неточности. Материал гл. 1, § 2.1 и отчасти § 2.2, 2.4 излагался более подробно в ранее вышедшей книге Флашеля и Клингенберга [1]. Вполне естественно, что читатель отсылается к этой книге по поводу различных, так сказать, ответвлений от основной линии изложения. Но в «Лекциях» отсутствуют также и некоторые детали, существенные для самой этой «основной линии». Возможно, что для западного читателя, имеющего на своих полках книгу Флашеля и Клингенберга, это и не создает особых неудобств, но у нас

*) Конечно, в данном случае проще писать просто f . Обозначения «со скобками» становятся удобными, если вместо f стоит комбинация символов.

эта книга не переводилась. К тому же полного параллелизма между ней и соответствующими разделами «Лекций» все же нет.

При подготовке переводного издания замеченные неточности (в основной, «непрограммной», части книги) были исправлены — отчасти автором, отчасти мной. С согласия автора я пытался также восполнить мелкие пробелы и смягчить неровности изложения — в основном в первой части, в соответствии с ее характером. Это делалось частью путем исправлений в самом тексте книги, частью с помощью примечаний (все примечания в этой книге — подстрочные или вынесенные в конец — мои, а существенно измененные участки текста помечены темными треугольничками: они обозначают начало такого участка и его конец). С согласия автора мы решили опустить добавление, где предлагается упрощенное доказательство теоремы Люстерника — Шнирельмана о трех замкнутых геодезических, — оно оказалось неточным.

Гораздо более существенные изменения внесены самим автором или по его инициативе. Именно он прислал новый текст § 4.3 и сообщил, что Бальман обнаружил ошибку в одной теореме Альбера, некритически воспроизведенной в английском оригинале данной книги. «Спасение» заключительного результата § 2.3 — принадлежащей Клингенбергу теоремы 2.3.9 — потребовало значительных изменений в § 2.2, 2.3, а отчасти и раньше. Отмечу, что при этом существенную роль сыграла сообщенная мне Клингенбергом идея — использовать пространство Π_0 . Другая идея — использовать модификацию одной теоремы Бредона [1] — возможно, принадлежит мне (см. Аносов [3], [4]), однако надо отметить, что статья Бредона была, по крайней мере отчасти, стимулирована одним вопросом Клингенберга. После переработки § 2.3 я получил препринт Бальмана, Торбергсона и Циллера [1], а затем новую книгу Клингенберга [21] и его препринт [22], в которых тоже говорится об исправлении доказательства 2.3.9. Первый препринт не содержит подробностей, а у Клингенберга изложение дальше отходит от оригинала данной книги, чем предлагаемый здесь текст, и в данный момент я не берусь судить о полноте доказательства.

В книгу не могло попасть усиление теоремы 2.3.9, полученное позднее Бальманом, Торбергсоном и Циллером. В условиях этой теоремы ими доказано существование $g(n)$ замкнутых несамопересекающихся геодезических (с прежней оценкой длины), где $g(n)$ — то же, что в предложении 2.3.3. По-видимому, большего числа «коротких» замкнутых геодезических может и не существовать. Это подтверждается как давно известным примером трехосного эллипсоида, длины главных осей которого близки друг к другу,

так и следующим новым примером Циллера: на S^3 существуют обратимые финслеровы метрики, сколь угодно близкие к стандартной и имеющие всего $g(3) = 4$ «коротких» замкнутых геодезических. Недостаток этого примера в том, что он все-таки не риманов. (В то же время он иллюстрирует предварительный характер «программной части» настоящей книги — для него не выполняется заключение теоремы 5.1.1, а между тем в соответствующих рассуждениях Клингенберга фактически не используются какие-либо специфические свойства римановых метрик.)

Уместно будет упомянуть также и об одном направлении, выходящем за рамки настоящей книги, но близком к ней: о применении вариационного исчисления в целом к вопросу о периодических траекториях динамических систем, отличных от геодезических потоков. В течение длительного времени таких применений почти не было, но за последние 10 с небольшим лет (и особенно в самые последние годы) ситуация изменилась. Литературные ссылки (не полные, но достаточно представительные) см. в моей статье [5].

Считаю своим приятным долгом поблагодарить автора за сотрудничество при подготовке настоящего издания. Весьма полезными были обсуждения ряда вопросов с В. Бальманом, С. П. Новиковым, М. М. Постниковым, Е. Г. Складенко, Г. Торбергсоном, Д. Б. Фуксом, В. Циллером.

Д. В. Аносов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопрос о существовании замкнутых геодезических на римановом многообразии и свойствах соответствующих периодических траекторий геодезического потока стал предметом интенсивного изучения с тех пор, как в прошлом веке зародилась глобальная дифференциальная геометрия.

Наиболее простая ситуация возникает в случае замкнутых поверхностей отрицательной кривизны. В этом случае фундаментальная группа очень большая, и, как было показано Адамаром [1] в 1898 г., каждую негомотопную нулю замкнутую кривую можно продеформировать в замкнутую кривую минимальной длины в ее свободном гомотопическом классе. С точностью до параметризации эта замкнутая кривая единственна и представляет собой замкнутую геодезическую.

Вопрос о существовании замкнутой геодезической на односвязной замкнутой поверхности намного более сложен. Как отметил Пуанкаре [1] в 1905 г., эта задача имеет много общего с задачей о существовании периодических орбит в ограниченной задаче трех тел. Пуанкаре [1] привел набросок доказательства того, что на аналитической выпуклой поверхности, которая не слишком сильно отличается от стандартной сферы, всегда существует по крайней мере одна замкнутая геодезическая эллиптического типа, т. е. такая, что соответствующая периодическая траектория геодезического потока инфинитезимально устойчива.

В течение последующих трех десятилетий Биркгоф и Морс, с одной стороны, и Люстерник и Шнирельман — с другой, развили новые сильные методы, предназначенные для доказательства существования одной или, возможно, нескольких замкнутых геодезических на произвольных римановых многообразиях. Основными объектами этих исследований были римановы многообразия, которые с точки зрения их дифференциальной структуры (т. е. без учета метрики) являются сферами. Наиболее ранним исследованием в этой области является описание геодезических на эллипсоиде, данное Якоби [1], [2] в его лекциях по динамике в Кёнигсберге в 1842/43 г. Более поздним примером является монография Морса [2], вышедшая в 1934 г., в которой, помимо прочего, автор затратил много усилий, пытаясь

сосчитать числа Бетти над $\mathbb{Z}_2$ пространства непараметризованных замкнутых кривых на n -мерной сфере.

Однако удалось получить мало результатов о существовании более чем одной замкнутой геодезической на таких многообразиях. Вероятно, наиболее замечательным из них является теорема Люстерника и Шнирельмана [1], установленная ими в 1929 г. Они показали, что на односвязной компактной поверхности всегда существуют по крайней мере три замкнутые геодезические без самопересечений. Примерами поверхностей, на которых есть ровно три таких замкнутых геодезических, являются эллипсоиды, которые мало отличаются от обычной сферы. Отметим при этом, что на эллипсоиде всегда есть бесконечное число других однократных замкнутых геодезических, но, вообще говоря, они имеют самопересечения.

В 1951 г. Люстерник и Фет [1] доказали, что на любом компактном римановом многообразии всегда существует по крайней мере одна замкнутая геодезическая. Начиная с 60-х годов, теория замкнутых геодезических была значительно продвинута в работах Альбера, А. С. Шварца, Фета, Громола и Мейера, Элиассона и автора. Оглядываясь назад, можно сказать, что очень важной оказалась предложенная автором в 1965 г. (см. Клингенберг [3]) переформулировка теории Морса на пространстве замкнутых кривых на римановом многообразии. Последняя при этом рассматривается в рамках теории Морса на гильбертовых многообразиях, построенной в 1964 г. Пале и Смейлом [1].

Поразительное применение этого нового подхода было предложено в 1969 г. Громолом и Мейером [2]. Они доказали, что для любой римановой метрики на компактном односвязном дифференцируемом многообразии M существует бесконечно много замкнутых геодезических, если последовательность рациональных чисел Бетти пространства LM параметризованных замкнутых кривых неограничена.

Как недавно показали Виге-Пуарье и Сулливан [1], это предположение о рациональных числах Бетти выполнено в том и только в том случае, когда рациональное кольцо когомологий многообразия M не является срезанным кольцом полиномов. Таким образом, теорема Громола — Мейера неприменима в случае римановых метрик на сфере, т. е. в том случае, который был главным объектом исследования в теории замкнутых геодезических в течение почти всей ее предшествующей истории.

Для того чтобы получить результаты о существовании бесконечного числа замкнутых геодезических без каких-либо предположений о топологии дифференцируемого многообразия, на котором определена риманова метрика, автор воспользовался

теорией гамильтоновых систем и, в частности, исследованиями Пуанкаре и Биркгофа о поведении геодезического потока около периодической траектории. (Заметим, что периодические траектории геодезического потока находятся во взаимно однозначном соответствии с замкнутыми геодезическими.) Результатом такого подхода явилось доказательство того, что в типичной ситуации на любом компактном римановом многообразии с конечной фундаментальной группой существует бесконечное число однократных замкнутых геодезических; см. Клингенберг [9], [16].

В процессе работы над настоящей книгой мы добились успеха в решении одной из наиболее выдающихся проблем всей теории, а именно было доказано, что на любом компактном римановом многообразии с конечной фундаментальной группой всегда, а не только в типичной ситуации, существует бесконечно много однократных замкнутых геодезических. Этот результат является новым даже для выпуклых поверхностей, т. е. для того случая, который исследовал Пуанкаре в самом начале возникновения теории замкнутых геодезических более 70 лет назад.

В доказательстве этого результата существенно используется вся структура гильбертова многообразия замкнутых кривых и соответствующий комплекс Морса. Значительно меньшую роль играет геодезический поток. Однако можно ожидать, что при дальнейшей работе над типичными свойствами периодических траекторий будет больше использоваться теория Пуанкаре — Биркгофа гамильтоновых систем.

Цель этих лекций — дать в разумной степени полное, исчерпывающее и замкнутое в себе изложение основных методов и результатов теории замкнутых геодезических.

В гл. 1 мы приводим сжатое описание гильбертова многообразия $\mathcal{AM}$, точками которого являются замкнутые кривые на римановом многообразии M . Многообразие $\mathcal{AM}$ и его структура получаются из M функториально, и при переходе от M к $\mathcal{AM}$ никакая информация не теряется.

В гл. 2 излагается теория Морса — Люстерника — Шнирельмана на многообразии $\mathcal{AM}$. Строятся канонические действия групп S и $\mathbb{Z}_2$. Глава завершается описанием комплекса Морса многообразия $\mathcal{AM}$; это понятие существенно используется в дальнейшем.

В гл. 3 мы изучаем геодезический поток на касательном расщеплении TM риманова многообразия M . Помимо довольно полного изложения теоремы об индексе для замкнутых геодезических, много места в этой главе уделяется типичным свойствам геодезического потока.

Глава 4 посвящена основным результатам всей теории. После доказательства теоремы Фета, в котором используется опи-

сание структуры окрестности непараметризованной замкнутой геодезической, мы приводим модифицированное доказательство несколько усиленного варианта теоремы Громола — Мейера. Затем эта теорема вместе с построенной Сулливаном теорией минимальной модели для ΛM применяется к доказательству того, что на многообразии M всегда существует бесконечно много однократных замкнутых геодезических, если группа $\pi_1 M$ конечна. Решающим шагом в этом доказательстве является лемма, связывающая между собой кратности некоторых пар замкнутых геодезических. Завершают главу несколько теорем о существовании в типичной ситуации.

Глава 5 начинается с подробного доказательства теоремы о трех геодезических, которая является долгожданным обобщением на произвольные односвязные многообразия классического результата Люстерника и Шнирельмана о замкнутых геодезических на поверхностях, диффеоморфных S^2 . Затем приводятся некоторые результаты различного характера о многообразиях эллиптического типа, т. е. многообразиях с конечной фундаментальной группой. Последний параграф посвящен многообразиям гиперболического типа — таким, например, как многообразия, у которых кривизна по всем двумерным направлениям отрицательна. Такие многообразия имеют очень большую фундаментальную группу.

Эта книга написана на основе лекций, которые я читал в различных местах в течение последних десяти лет. Упомяну, например, лекции, прочитанные в Бонне в 1966/67 и 1972/73 гг., в Беркли в 1971 и 1974 гг., в Бомбее в 1972 г. и в Миннеаполисе в 1975 г.

Я хочу поблагодарить всех тех, чьи щедрые приглашения предоставили мне возможность читать лекции и проводить исследования, и кто своими замечаниями, критикой и поддержкой помог довести эти лекции до их теперешнего состояния.

Я обязан Вольфгангу Циллеру за внимательное и придирчивое чтение большей части рукописи и Гудлаугуру Торбергсону за помощь при чтении корректур. За неустанные усилия при перепечатке различных вариантов рукописи я благодарю Рути из Беркли, Кэти из Миннеаполиса и больше всего Корнелию из Бонна.

После долгих лет работы мне остается только надеяться, что мои усилия вдохновят молодое поколение математиков сделать то, чего не удалось сделать мне, и продолжить наступление на многочисленные еще не решенные проблемы теории замкнутых геодезических.

Вильгельм Клингенберг

ГИЛЬБЕРТОВО МНОГООБРАЗИЕ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ

В этой главе мы определим гильбертово многообразие ΛM , состоящее из H^1 -отображений параметризованной окружности S в компактное риманово многообразие M .

Мы покажем, что на ΛM можно внутренним образом ^{*} определить риманову метрику и дифференцируемую функцию E — интеграл энергии; при этом $\text{grad } E$ удовлетворяет условию (C) Пале — Смейла.

Это условие позволяет перенести классическую теорию Морса — Люстерника — Шнирельмана с дифференцируемых функций, определенных на евклидовом (т. е. конечномерном) многообразии, на функции, определенные на гильбертовом многообразии ⁽¹⁾.

1.1. Гильбертовы многообразия

Гильбертово многообразие M — это топологическое пространство (все топологические пространства в этой книге хаусдорфовы) со счетной базой, снабженное дифференцируемым атласом, образы карт ^{**} которого лежат в фиксированном сепарабельном гильбертовом пространстве M . Мы также будем говорить, что M моделируется посредством M ⁽²⁾.

Так же как в случае евклидова многообразия, многообразием M соответствует его касательное расслоение $\tau = \tau_M: TM \rightarrow M$, и так

^{*} В работе Флашеля и Клингенберга [1] приводятся два варианта излагаемой ниже теории — один из них аналогичен представленному в данных «Лекциях», а во втором M считается вложенным в некоторое евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ и ΛM рассматривается как подмножество гильбертова пространства $H^1(S, \mathbb{R}^N)$, состоящего из функций класса H^1 (он определяется ниже) на S со значениями в $\mathbb{R}^N$. Первый вариант характеризуется как «внутренний», а второй — как «внешний» в соответствии с традиционным употреблением этих слов в дифференциальной геометрии.

^{**} «Образы карт» — обычная вольность речи; точнее было бы сказать «образы областей определения карт». Аналогичную вольность допускают, когда говорят «отображение карты» или «точка принадлежит карте».

же, как в евклидовом случае, атлас $(\varphi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in A}$ многообразия M порождает атлас $(T\varphi_\alpha, TU_\alpha)_{\alpha \in A}$ многообразия TM .

Кроме того, мы будем рассматривать векторные расслоения $\pi: E \rightarrow M$ над многообразием M , стандартным слоем которых является банахово пространство E .

Это означает, что существует такой атлас на многообразии M , что для каждой карты (φ, U) этого атласа задано локальное представление (Φ, φ, U) , т. е. определена коммутативная диаграмма морфизмов

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & \varphi(U) \times E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \text{pr}_1 \\ U & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U) \end{array}$$

со следующими свойствами:

(i) ограничение Φ_r отображения Φ на проектирующийся в точку $r \in U$ слой $E_r = \pi^{-1}(r)$ является топологическим линейным изоморфизмом;

(ii) если (Φ, φ, U) и (Φ', φ', U') — локальные представления, то отображение

$$\Phi' \circ \Phi^{-1}: U \cap U' \rightarrow L(E; E), \quad r \mapsto \Phi'_r \circ \Phi_r^{-1},$$

дифференцируемо ⁽³⁾.

Подробнее см. Ленг [1], Элиассон [3], Флашель, Клингенберг [1] и Бурбаки [1].

Если точка $(x, \xi) \in \varphi(U) \times E$ является локальным представлением элемента из E , то ξ будем называть *главной частью* этого представления.

Локальное представление (Φ, φ, U) расслоения $\pi: E \rightarrow M$ определяет *) локальное представление касательного расслоения $\tau_E: TE \rightarrow E$

$$\begin{array}{ccc} T\pi^{-1}(U) & \xrightarrow{T\Phi} & \varphi(U) \times E \times M \times E \\ \downarrow \tau_E & & \downarrow \text{pr}_{1,2} \\ \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & \varphi(U) \times E \end{array}$$

Если $(x, \xi) \in \varphi(U) \times E$, то элемент из $\text{pr}_{1,2}^{-1}(x, \xi)$ будем обозначать через $(x, \xi, y, \eta) \in \{(x, \xi)\} \times M \times E$.

Введем фундаментальное понятие *связности* **) на расслоении $\pi: E \rightarrow M$. Связность — это отображение ⁽⁴⁾ $K: TE \rightarrow E$, такое,

*) Фактически $(T\Phi, \Phi, \pi^{-1}(U))$ индуцировано одной только верхней строкой коммутативной диаграммы для (Φ, φ, U) .

**) Точнее, *линейной связности*, но другие дифференциально-геометрические связности нам не понадобятся.

что для произвольного локального представления (Φ, φ, U) расслоения E существует дифференцируемое отображение $\Gamma_\varphi: \varphi(U) \rightarrow L(M, E; E)$, для которого локальное представление $K_\varphi := \Phi \cdot K \cdot T\Phi^{-1}$ отображения K

$$K_\varphi: \varphi(U) \times E \times M \times E \rightarrow \varphi(U) \times E$$

определяется соответствием $(x, \xi, y, \eta) \mapsto (x, \eta + \Gamma_\varphi(x)(y, \xi))$.

Отображения Γ_φ называются *символами Кристоффеля* ^(*).

Заметим, что K является морфизмом векторных расслоений из τ_E в π над π , т. е. что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{K} & E \\ \tau_E \downarrow & & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

и $K_\xi := K|T_\xi E \in L(T_\xi E; E_{\pi(\xi)})^*$. Это непосредственно следует из локального представления этой диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} (x, \xi, y, \eta) & \mapsto & (x, \eta + \Gamma_\varphi(x)(y, \xi)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, \xi) & \mapsto & (x) \end{array}$$

Пусть K — связность на $\pi: E \rightarrow M$. Для каждого $\xi \in E_p = \pi^{-1}(p)$ определим подпространства

$$T_{\xi v}E = \ker(T\pi: T_\xi E \rightarrow T_p M) \quad \text{и} \quad T_{\xi h}E = \ker(K_\xi: T_\xi E \rightarrow E_p),$$

которые мы назовем соответственно *вертикальным* и *горизонтальным* подпространствами в $T_\xi E$ ^(**).

1.1.1. Предложение. *Связность K на $\pi: E \rightarrow M$ определяет разложение $TE = T_h E \oplus T_v E$ касательного расслоения, такое, что $T_\xi E = T_{\xi h}E \oplus T_{\xi v}E$.*

^{*}) В бесконечномерном случае в определении морфизма векторных расслоений включается еще одно условие: возможность локального представления морфизма посредством дифференцируемых отображений карт в пространство непрерывных линейных отображений стандартных слоев (Ленг [1], Бурбаки [1]). Для K оно тоже выполнено.

^{**}) $T_{\xi v}E$ можно определить также следующим образом. Так как $E_p \hookrightarrow E$, для любого $\xi \in E_p$ имеем $T_\xi E_p \hookrightarrow T_\xi E$. Рассматривая $T_\xi E_p$ как подмногожество $T_\xi E$, нетрудно убедиться, что $T_{\xi v}E = T_\xi E_p$.

Поскольку E_p является векторным пространством, касательное пространство к E_p в любой его точке ξ естественно отождествляется с ним самим. Итак, имеем каноническое отождествление $J_\xi: E_p \rightarrow T_{\xi v}E$. Оно используется в основном тексте. Из локального представления сразу видно, что $J_\xi = (K|T_{\xi v})^{-1}$.

Точнее, при каноническом отождествлении $T_{\xi v}E$ с E_p , где $p = \pi(\xi)$, это разложение можно представить в виде *)

$$T_{\xi}E = (\text{id} - K) T_{\xi}E + K T_{\xi}E.$$

Доказательство. Из локального представления K_{φ} связности K видно, что если отождествить $T_{\xi v}E$ с E_p , т. е. отождествить $\{(x, \xi, 0, \eta)\} \in \{(x, \xi)\} \times M \times E$ с $\{(x, \eta)\} \in \{x\} \times E$, то $K_{\varphi}^2 = K_{\varphi}$ и $K_{\varphi} T_{\xi}E = T_{\xi v}E$; это означает, что K_{φ} — проекция. $\square$

Локальным представлением для $T_{\xi h}E$ является

$$\{(x, \xi, y, -\Gamma_{\varphi}(x)(y, \xi))\} \in \{(x, \xi)\} \times M \times E.$$

Если задана связность K на $\pi: E \rightarrow M$, то можно определить *ковариантную производную* дифференцируемого сечения $\xi: M \rightarrow E$, полагая $\nabla \xi := K \cdot T\xi$. Заметим, что $\nabla \xi$ является сечением расслоения **) $L(\tau; \pi): L(TM; E) \rightarrow M$.

Пользуясь локальным представлением (Φ, φ, U) , легко убедиться, что главная часть $\nabla \xi$ представляется в виде

$$\nabla \xi_{\varphi}(x) = D\xi_{\varphi}(x) + \Gamma_{\varphi}(x)(\cdot, \xi_{\varphi}(x)),$$

где $\xi_{\varphi}: \varphi(U) \rightarrow E$ — главная часть локального представления ξ .

Замечание. Пусть $\Xi(M)$ и $\Xi_E(M)$ — пространства сечений расслоений τ_M и π . Тогда ковариантная производная определяет отображение

$$\Xi(M) \times \Xi_E(M) \rightarrow \Xi_E(M), \quad (v, \xi) \mapsto \nabla \xi \cdot v,$$

локальное представление которого было выписано выше.

В то время как для евклидовых векторных расслоений над евклидовыми многообразиями такое отображение ∇ всегда определяет связность K , в нашей более общей ситуации это не всегда так; подробности можно найти в книге Флашеля и Клингенберга [1].

Для дальнейших приложений рассмотрим следующий частный случай индуцированного расслоения с индуцированной связностью. (Относительно более общей ситуации см. Элиассон [3].)

*) Если явно упоминается о каноническом отождествлении, то здесь надо вместо K писать $J_{\xi}K$. Разложение $T_{\xi}E$ можно описать еще так:

$$(T\pi | T_{\xi h}E)^{-1} \oplus J_{\xi}: T_{\pi(\xi)}M \oplus E_{\pi(\xi)} \rightarrow T_{\xi}E$$

есть изоморфизм.

**) Образ вектора $X \in TM$ под действием $\nabla \xi$ обозначается через $\nabla \xi \cdot X$ (а если надо подчеркнуть, что все это происходит в слое над p , — через $\nabla \xi(p) \cdot X$). Заметим, что в данных «Лекциях» не употребляется довольно распространенное обозначение $\nabla_X \xi$ для того же образа (ср. с аналогичным замечанием в (1), г), насчет $Df \cdot x$ и $D_x f$). Я все-таки буду иногда пользоваться этим обозначением.

Пусть $S = [0, 1] / \{0, 1\}$ — параметризованная окружность длины 1^{*)}. Пусть $c: S \rightarrow M$ — дифференцируемое отображение в базу M расслоения $\pi: E \rightarrow M$. Тогда определено индуцированное расслоение $c^*\pi$

$$\begin{array}{ccc} c^*E & \xrightarrow{\pi^*c} & E \\ \downarrow c^*\pi & & \downarrow \pi \\ S & \xrightarrow{c} & M \end{array}$$

со слоем $c^*\pi^{-1}(t) = E_{c(t)}$.

Пусть на $\pi: E \rightarrow M$ определена связность $K_\pi: TE \rightarrow E$. Тогда на $c^*\pi$ имеется связность $K_{c^*\pi}$, которая определяется следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} Tc^*E & \xrightarrow{T\pi^*c} & TE \\ \downarrow K_{c^*\pi} & & \downarrow K_\pi \\ c^*E & \xrightarrow{\pi^*c} & E \end{array}$$

Пусть ξ — сечение расслоения $c^*\pi$ ^{**)} . Так как на S определена каноническая координата $t \in [0, 1] / \{0, 1\}$, то главную часть сечения ξ обозначим через $\xi(t)$. Канонический касательный вектор к S будем обозначать через ∂t ^{***)} . Определим теперь

$$\nabla_c \xi := \nabla \xi \cdot \partial t = K_{c^*\pi} \cdot T\xi \cdot \partial t.$$

Вместо $\nabla_c \xi$ мы также будем писать $\nabla \xi$ ^{****)} .

^{*)} Удобно также представлять S в виде факторпространства $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (это даже топологическая факторгруппа, что оправдывает используемую кое-где запись вроде $t + \frac{1}{2}$). Строго говоря, «стандартная координата» t в S не является координатой в обычном смысле слова (так как это не число, а число по модулю $\mathbb{Z}$). Вызываемые этим незначительные изменения в различных формулировках совершенно очевидны и молчаливо подразумеваются как нечто само собою разумеющееся.

Иногда (см. 1.4.17 или начало § 2.2) S рассматривается как единичная окружность в плоскости комплексного переменного, и ее элементы обозначаются через e^{it} .

^{**)} При $E = TM$, $\pi = \tau$ понятие сечения расслоения $c^*\tau$, по существу, эквивалентно понятию векторного поля вдоль отображения c (Громол, Клингенберг, Мейер [1]), особенно если не проводить педантично различия между $\xi(t)$ и $\tau^*\xi(t)$. (Сказанное справедливо при любом E , если перенести определение векторного поля вдоль кривой на этот случай.)

^{***)} Более привычным было бы обозначение d/dt , $\partial/\partial t$ или ∂_t . Впрочем, у Клингенберга далее (в § 1.3) знаком ∂ фактически обозначается дифференцирование по t . Рассматривая t одновременно и как координату, и как определяемую ею точку в S , в соответствии с обычными соглашениями имеем: $\partial t = \partial$ (точка t) = ∂ (точка t)/ ∂t = канонический касательный вектор в $T_t S$.

^{****)} В более классических обозначениях $\nabla_c \xi(t)$ есть ковариантная производная $\frac{\nabla}{dt} \xi(t)$ поля $\xi(t)$ (более формально, поля $\pi^*\xi(t)$ вдоль кривой $c(t)$, рассматриваемая как элемент слоя расслоения c^*E над точкой t . С сокраще-

▲ Если отображение $c: S \rightarrow M$ всего лишь непрерывно, то можно образовать индуцированное расслоение $c^*\pi: c^*E \rightarrow S$, но его естественный векторный атлас (индуцированный при отображении c из векторного атласа для расслоения $E \rightarrow M$), вообще говоря, уже не будет удовлетворять обычным требованиям дифференцируемости. Формально это не позволяет говорить о дифференцируемости сечений $\xi: S \rightarrow c^*E$ или рассматривать связность в расслоении $c^*\pi$, ибо не определено даже T_c^*E . Однако естественно считать сечение ξ дифференцируемым в точке t , если в этой точке дифференцируемо отображение $\pi^*c\xi: S \rightarrow E$ (это, в частности, подразумевает, что $c(t)$ дифференцируемо в точке t). В этом случае можно определить ковариантную производную

$$\nabla_c \xi(t) := (\pi^*c)_t^{-1} \cdot K_{\pi} \cdot T(\pi^*c\xi) \cdot dt.$$

(Здесь $(\pi^*c)_t := (\pi^*c)|_{(c^*\pi)^{-1}(t): (c^*\pi)^{-1}(t) \rightarrow E_{c(t)}}$.)

Очевидно, понятие ковариантной производной можно определить и для векторного поля, заданного вдоль незамкнутой кривой. В более общем случае отображения $\xi: N \rightarrow E$ (N — дифференцируемое многообразие, E — расслоение над M с проекцией $\pi: E \rightarrow M$ и связностью $K: TE \rightarrow E$; о ξ говорят как о «векторном поле, заданном вдоль отображения $f: N \rightarrow M$, $f = \pi \circ \xi$ ») можно ввести ковариантную производную в точке $x \in N$ как

$$\nabla \xi(x): T_x N \rightarrow E_{f(x)}, \quad \nabla \xi(x) = K \cdot T_x \xi.$$

Если N — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ со «стандартными» координатами $(s_1, \dots, s_n)$, то можно говорить о «частной» ковариантной производной $\nabla \xi / \partial s_i = \nabla_i \xi$. Это есть ковариантная производная векторного поля $s_i \mapsto \xi(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$, заданного вдоль кривой $s_i \mapsto f(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$. ▲

Пусть (Φ, φ, U) — локальное представление расслоения π , и предположим, что $c(t) \in U$ при некотором $t \in S$. Положим $\Phi \cdot \pi^*c \cdot \xi(t) = \xi_\varphi(t)$. Тогда главная часть $\nabla_c \xi_\varphi(t)$ локального представления $\nabla_c \xi$ будет такой:

$$\nabla_c \xi_\varphi(t) = \dot{\xi}_\varphi(t) + \Gamma_\varphi(\varphi \circ c(t))((\varphi \circ c)'(t), \xi_\varphi(t)).$$

Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что $T\pi^*c \cdot T\xi \cdot dt$ локально имеет вид $(\varphi \circ c(t), \xi_\varphi(t), (\varphi \circ c)'(t), \dot{\xi}_\varphi(t))$, а затем применим K_π .

Для расслоения $\pi: E \rightarrow M$ определено ассоциированное расслоение

$$L_s^2(\pi): L_s^2(E) \rightarrow M,$$

нием $\nabla_c \xi$ до $\nabla \xi$ оказывается, что в рассматриваемом случае векторного расслоения над S символ $\nabla \xi$ формально имеет два различных смысла; это различие такое же, как между $\dot{f}(t)$ и $Df(t)$ в (1), т. е. оно несущественно и игнорируется в дальнейшем (при необходимости уточнить смысл $\nabla \xi$ можно обратиться к контексту).

в котором слой $L^2_s(E)_p$ над p состоит из непрерывных симметрических билинейных отображений в $\mathbb{R}$, см. Ленг [1]. Пусть $L^2_s(E)$ — модель этого слоя. Это пространство содержит в виде открытого подмножества множество $Ri(E)$ *положительно определенных форм*. Форма называется положительно определенной, если она

$$\geq \varepsilon \text{ (гильбертова метрика на } E)$$

при некотором $\varepsilon > 0$.

Риманова метрика на расслоении $\pi: E \rightarrow M$ — это такое дифференцируемое сечение $g: M \rightarrow L^2_s(E)$, что $g(p)$ — положительно определенная форма^{*)}.

Если на $\tau: TM \rightarrow M$ задана риманова метрика g , то M называется *римановым многообразием*, а метрика g называется также *римановой метрикой на M* .

Пусть g — риманова метрика на $\tau: E \rightarrow M$. Будем называть *связность K на τ римановой*, если выполнено следующее условие:

для любого открытого подмножества $U \subset M$ справедливо соотношение

$$(*) \quad Dg(\xi, \eta) \cdot v = g(\nabla \xi \cdot v, \eta) + g(\xi, \nabla \eta \cdot v),$$

где v — произвольное сечение расслоения $\tau_M|U$, ξ и η — произвольные сечения расслоения $\pi|U$ и $\nabla \xi = K \cdot T\xi$ — ковариантная производная, определенная отображением $K: T(E|U) \rightarrow E|U$.

Замечание. Если на M существует дифференцируемое разбиение единицы, то в предыдущем определении достаточно рассматривать только одно открытое подмножество U , равное M , см. Флашель, Клингенберг [1].

Пусть K — связность на $\tau: TM \rightarrow M$. Обозначим через $L^2_a(\tau; \tau): L^2_a(TM; TM) \rightarrow M$ ассоциированное с τ расслоение, стандартным слоем которого является $L^2_a(M; M)$ — множество кососимметрических билинейных отображений. Тогда *кручение* (или *тензор кручения*) связности K — это сечение T расслоения $L^2_a(\tau; \tau)$, которое определяется следующим образом. Рассмотрим представление $(T\varphi, \varphi, U)$ расслоения τ ; тогда главная часть сечения T

$$T_\varphi: \varphi(U) \rightarrow L^2_a(M; M)$$

задается соотношением

$$(**) \quad T_\varphi(x)(u, v) = \Gamma_\varphi(x)(u, v) - \Gamma_\varphi(x)(v, u).$$

Если $T \equiv 0$, то K называется *связностью без кручения*.

^{*)} Вместо $g(p)(\xi, \eta)$ (где $\pi(\xi) = \pi(\eta) = p$) автор дальше часто пишет $\langle \xi, \eta \rangle$ или $\langle \xi, \eta \rangle_p$.

1.1.2. Теорема. *На римановом многообразии существует и единственна риманова связность без кручения. Эта связность называется связностью Леви-Чивита.*

Доказательство. Пусть $(T\varphi, \varphi, U)$ — локальное представление расслоения $\tau: TM \rightarrow M$. Обозначим через $g_\varphi: \varphi(U) \rightarrow L_s^2(M)$ главную часть соответствующего локального представления римановой метрики g .

Рассмотрим соотношение

$$(***) \quad g_\varphi(x)(\Gamma_\varphi(x)(u, v), w) = \frac{1}{2}(Dg_\varphi(x) \cdot u(v, w) + \\ + Dg_\varphi(x) \cdot v(u, w) - Dg_\varphi(x) \cdot w(u, v)),$$

где $(u, v, w) \in M \times M \times M$ и $x \in \varphi(U)$. При помощи этого соотношения определяется непрерывное и обладающее всеми требуемыми свойствами дифференцируемости отображение

$$\Gamma_\varphi: \varphi(U) \rightarrow L^2(M; M).$$

Осталось проверить, что Γ_φ и $\Gamma_{\varphi'}$ удовлетворяют формуле преобразования для карт (φ, U) и (φ', U') :

$$D(\varphi' \cdot \varphi^{-1})\Gamma_\varphi = \Gamma_{\varphi'} \cdot (D(\varphi' \cdot \varphi^{-1}) \times D(\varphi' \cdot \varphi^{-1})) + D^2(\varphi' \cdot \varphi^{-1}).$$

Из этой формулы (вывод который предоставляется читателю) следует, что отображения связности

$$K_\varphi: \varphi(U \cap U') \times M \times M \times M \rightarrow \varphi(U \cap U') \times M,$$

$$K_{\varphi'}: \varphi'(U' \cap U) \times M \times M \times M \rightarrow \varphi'(U' \cap U) \times M$$

связаны соотношением

$$(\dagger) \quad T\varphi^{-1} \cdot K_\varphi \cdot TT\varphi = T\varphi'^{-1} \cdot K_{\varphi'} \cdot TT\varphi'$$

и, следовательно, задают всюду определенную связность $K: TTM \rightarrow TM$ *). В самом деле, $(\dagger)$ выполнено, так как для локальных представлений (x, ξ, y, η) и (x', ξ', y', η') многообразия TTM выполняются соотношения **)

$$x' = \varphi' \cdot \varphi^{-1}(x), \quad \xi' = D(\varphi' \cdot \varphi^{-1})\xi, \quad y' = D(\varphi' \cdot \varphi^{-1})y, \\ \eta' = D(\varphi' \cdot \varphi^{-1})\eta + D^2(\varphi' \cdot \varphi^{-1})(y, \xi).$$

*) См. (б), в).

**) Пусть $\psi = \varphi' \cdot \varphi^{-1}$; $(\dagger)$ эквивалентно тому, что $T\psi \cdot K_\varphi = K_{\varphi'} \cdot TT\psi$. Главная часть этого соотношения (которая только и нуждается в проверке) имеет вид

$$D\psi \cdot (\eta + \Gamma_\varphi(x)(y, \xi)) = \eta' + \Gamma_{\varphi'}(x')(y', \xi').$$

Последнее равенство непосредственно вытекает из формулы преобразования для Γ_φ и формул, связывающих штрихованные величины с нештрихованными.

Из определения Γ_Φ непосредственно следует, что локальные представления T_Φ тензора кручения тождественно равны нулю и что связность риманова, так как

$$(\text{****}) \quad Dg_\Phi(x) \cdot u(v, w) = g_\Phi(x) (\Gamma_\Phi(x)(u, v), w) + \\ + g_\Phi(x)(v, \Gamma_\Phi(x)(u, w)),$$

что является локальным вариантом формулы (*)⁽⁶⁾.

Для доказательства единственности связности Леви-Чивита заметим, что из $T=0$ (где T определяется согласно (**)) и (****) следует (***). $\square$

Наконец, заметим, что если на расслоении $\pi: E \rightarrow M$ определена риманова метрика g и $c^*\pi: c^*E \rightarrow S$ — расслоение, индуцированное отображением $c: S \rightarrow M$, то на $c^*\pi$ определена индуцированная риманова метрика c^*g , задаваемая равенством $c^*g = g \circ (\pi^*c \times \pi^*c)$.

1.2. Многообразие замкнутых кривых

Обозначим через M компактное (евклидово) многообразие, снабженное римановой метрикой g , которую мы также будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Пусть, кроме того, ∇ обозначает ковариантную производную на TM , соответствующую связности Леви-Чивита.

Замечание. Большая часть приведенной ниже конструкции проходит также в случае некомпактного риманова многообразия. Однако для наиболее интересных разделов теории компактность необходима. Поэтому мы будем предполагать, что M компактно.

Так же как в § 1.1, через S будем обозначать параметризованную окружность $[0, 1]/\{0, 1\}$. Далее положим

$C^0(S, M) :=$ множество C^0 -отображений S в M ;

$C^\infty(S, M) :=$ множество C^∞ -отображений S в M ;

$H^1(S, M) :=$ множество H^1 -отображений S в M .

Здесь отображение $c: S \rightarrow M$ называется H^1 -отображением, если оно абсолютно непрерывно и производная $\dot{c}(t)$ (которая почти всюду определена) интегрируема с квадратом по отношению к римановой метрике на M :

$$\int_S \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle_{c(t)} dt < \infty.$$

Заметим, что $C^\infty(S, M) \subset H^1(S, M) \subset C^0(S, M)$.

Снабдим множество $C^0(S, M)$ компактно-открытой топологией. Для того чтобы определить топологию (и даже структуру гиль-

бертова многообразия) на $H^1(S, M)$, рассмотрим для $c \in H^1(S, M)$ расслоение *) $c^*\tau: c^*TM \rightarrow S$ и обозначим через $H^r(c^*TM)$ множество H^r -сечений в $c^*\tau$, $r=0, 1$. При этом ξ называется H^0 -сечением, если оно интегрируемо с квадратом, т. е.

$$\langle \xi, \xi \rangle_0 := \int_S \langle \xi(t), \xi(t) \rangle_{c(t)} dt < \infty.$$

Таким образом, $H^0(c^*TM)$ становится сепарабельным гильбертовым пространством. ▲ Строго говоря, его элементы — это классы эквивалентных сечений, где под эквивалентностью понимается совпадение почти всюду (в смысле меры Лебега на S). Сечение ξ принадлежит $H^1(c^*TM)$, если оно абсолютно непрерывно (т. е. абсолютно непрерывны его локальные представители $\xi_\varphi(t) = p_2 \cdot T\varphi \cdot \tau^* c^* \xi(t)$), так что почти всюду определены $\nabla_c \xi(t)$, и если при этом

$$\int_S \langle \nabla_c \xi(t), \nabla_c \xi(t) \rangle_{c(t)} dt < \infty.$$

(В терминах локальных представлений последнее эквивалентно тому, что производные $\xi_\varphi(t)$ локально (т. е. в некоторой окрестности любой точки своей области определения) интегрируемы с квадратом.) ▲

Определим скалярное произведение в $H^1(c^*TM)$, полагая

$$\langle \xi, \xi \rangle_1 := \langle \xi, \xi \rangle_0 + \langle \nabla \xi, \nabla \xi \rangle_0,$$

где $\nabla \xi(t) = \nabla_c \xi(t)$ — почти всюду определенная ковариантная производная, ср. § 1.1.

Мы также будем рассматривать векторное пространство

$C^0(c^*TM)$:= множество непрерывных сечений,

которое наделим нормой $\|\xi\|_\infty := \sup_t |\xi(t)|$ (норма максимума модуля).

Норму на $H^r(c^*TM)$, определенную скалярным произведением, будем обозначать через $\|\cdot\|_r$, $r=0, 1$ **).

1.2.1. Предложение. Следующие включения:

$$H^1(c^*TM) \hookrightarrow C^0(c^*TM) \hookrightarrow H^0(c^*TM)$$

*) При $c \in C^\infty(S, M)$ это дифференцируемое векторное расслоение, а при $c \in H^1(S, M) = C^\infty(S, M)$ — непрерывное векторное расслоение ((³), г)).

**) В обозначениях для норм $\|\xi\|_0$, $\|\xi\|_1$ и $\|\xi\|_\infty$ индексы 0 и 1, в одной стороны, и ∞ — в другой, имеют различное происхождение. В первом случае индекс 0, соответственно 1, указывает, что берется L_2 -норма одного только сечения ξ , соответственно ξ и первой (ковариантной) производной $\nabla \xi$; то что используется норма есть L_2 -норма, никак не указывается в обозначениях. Во втором случае индекс ∞ указывает, что речь идет об L_∞ -норме сечения ξ .

непрерывны. Точнее,

- (i) если $\xi \in C^0$, то $\|\xi\|_0 \leq \|\xi\|_\infty$;
 (ii) если $\xi \in H^1$, то $\|\xi\|_\infty^2 \leq 2\|\xi\|_1^2$.

Доказательство *).

$$(1) \quad \|\xi\|_0^2 = \int_S \langle \xi(t), \xi(t) \rangle dt \leq \int_S \max |\xi(t)|^2 dt = \|\xi\|_\infty^2.$$

(2) Выберем t_1 так, чтобы при всех t выполнялось неравенство $|\xi(t)| \leq |\xi(t_1)|$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\xi\|_\infty^2 &= |\xi(t)|^2 + \int_t^{t_1} \frac{d}{dt} |\xi(t)|^2 dt \leq \\ &\leq |\xi(t)|^2 + 2 \int_t^{t_1} |\xi(t)| |\nabla \xi(t)| dt \leq |\xi(t)|^2 + \|\xi\|_0^2 + \|\nabla \xi\|_0^2. \end{aligned}$$

Здесь t любое. Проинтегрировав по S , получим

$$\|\xi\|_\infty^2 \leq \langle \xi, \xi \rangle_0 + \langle \xi, \xi \rangle_0 + \langle \nabla \xi, \nabla \xi \rangle_0 \leq 2\|\xi\|_1^2. \quad \square$$

Рассмотрим конечномерные векторные расслоения над S

$$\pi_j: E_j \rightarrow S, \quad 1 \leq j \leq k, \quad \varphi: F \rightarrow S$$

со стандартными слоями E_j и F соответственно, снабженные римановой метрикой **). Кроме того, мы также будем рассматривать ассоциированное расслоение

$$L(\pi_1, \dots, \pi_k; \varphi): L(E_1, \dots, E_k; F) \rightarrow S$$

полилинейных отображений, т.е. расслоение, стандартный слой ***) которого является векторным пространством полилинейных отображений $L(E_1, \dots, E_k; F)$. Римановы метрики на π_j и φ определяют норму на этом расслоении ****), для которой $|L(\xi_1, \dots, \xi_k)| \leq |L| |\xi_1| \dots |\xi_k|$.

*) Доказательство проходит и для более общего случая дифференцируемого векторного расслоения $E \rightarrow S$. Такой более общий случай нужен, например, для доказательства предложения 1.2.2 (если даже считать, что в 1.2.2 все $E_j = F = c^*TM$, то нужны еще некоторые расслоения, ассоциированные с этими E_j и F).

Далее можно считать, что векторное расслоение E — всего лишь непрерывное, но для сечений определена операция ∇ с надлежащими свойствами. Чтобы не вдаваться в аксиоматику последних, отметим, что для дальнейшего нужны те случаи, когда E и F — это или c^*TM , или одно из ассоциированных с ним расслоений.

**) А также связностью (она нужна, чтобы можно было далее говорить о норме $\|\cdot\|_1$ или хотя бы операцией ∇ (см. предыдущее примечание).

***). Его слой над x есть $L(\pi_1^{-1}(x), \dots, \pi_k^{-1}(x); \varphi^{-1}(x))$.

****). А связности в E_j и F индуцируют связность в L , для которой $\nabla(A(\xi_1, \dots, \xi_k)) = (\nabla A)(\xi_1, \dots, \xi_k) + A(\nabla \xi_1, \dots, \xi_k) + \dots + A(\xi_1, \dots, \nabla \xi_k)$.

Рассмотрим канонические включения

$$(*) \quad H^1(L(E_1, E_2, \dots, E_k; F)) \hookrightarrow \hookrightarrow L(H^0(E_1), H^1(E_2), \dots, H^1(E_k); H^0(F)),$$

$$(**) \quad H^1(L(E_1, E_2, \dots, E_k; F)) \hookrightarrow \hookrightarrow L(H^1(E_1), H^1(E_2), \dots, H^1(E_k); H^1(F)),$$

определяемые соответствием

$$A = (A(t)) \mapsto \{\tilde{A}: (\xi_1, \dots, \xi_k) \mapsto (A(t) \cdot (\xi_1(t), \dots, \xi_k(t)))\}.$$

1.2.2. Предложение. Включения (*) и (**) непрерывны и линейны. Точнее,

$$\|\tilde{A}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)\|_0^2 \leq 2^k \|A\|_1^2 \|\xi_1\|_0^2 \|\xi_2\|_1^2 \dots \|\xi_k\|_1^2, \\ \|\tilde{A}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)\|_1^2 \leq \text{const} \|A\|_1^2 \|\xi_1\|_1^2 \|\xi_2\|_1^2 \dots \|\xi_k\|_1^2.$$

Доказательство. (1) Ясно, что

$$\|\tilde{A}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)\|_0^2 \leq \|A\|_\infty^2 \|\xi_1\|_0^2 \|\xi_2\|_\infty^2 \dots \|\xi_k\|_\infty^2 \leq \\ \leq 2^k \|A\|_1^2 \|\xi_1\|_0^2 \|\xi_2\|_1^2 \dots \|\xi_k\|_1^2,$$

так как из-под знака интеграла можно вынести квадрат нормы максимума модуля $\|\cdot\|_\infty^2$ для всех элементов, кроме одного, и затем применить 1.2.1.

(2) Заметим, что

$$\nabla(A(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)) = (\nabla A)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) + \\ + A(\nabla \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) + A(\xi_1, \nabla \xi_2, \dots, \xi_k) + \dots + A(\xi_1, \xi_2, \dots, \nabla \xi_k).$$

Пользуясь соотношением $\left(\sum_1^l a_j\right)^2 \leq l \sum_1^l a_j^2$ и приемом, примененным в (1), найдем, что

$$\|\nabla \tilde{A}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)\|_0^2 \leq (k+1) 2^k (\|\nabla A\|_0^2 \|\xi_1\|_1^2 \|\xi_2\|_1^2 \dots \|\xi_k\|_1^2 + \\ + \|A\|_1^2 \|\nabla \xi_1\|_0^2 \|\xi_2\|_1^2 \dots \|\xi_k\|_1^2 + \dots + \|A\|_1^2 \|\xi_1\|_1^2 \|\xi_2\|_1^2 \dots \|\nabla \xi_k\|_0^2) \leq \\ \leq \text{const} \|A\|_1^2 \|\xi_1\|_1^2 \|\xi_2\|_1^2 \dots \|\xi_k\|_1^2. \quad \square$$

1.2.3. Предложение. Пусть $\mathcal{O}$ — такое открытое подмножество в тотальном пространстве дифференцируемого векторного расслоения*) $\pi: E \rightarrow S$ ($\dim E < \infty$), что $\mathcal{O}_t := \mathcal{O} \cap \pi^{-1}(t) \subset E_t$ при всех $t \in S$ непусто, и пусть π снабжено римановой метрикой и римановой связностью.

*) Формулировка предложения сохраняет смысл, а его доказательство дословно проходит и для расслоений c^*TM с $c \in H^1(S, M)$. В следующем же предложении дифференцируемость рассматриваемых расслоений уже существенна.

Утверждение. $H^1(\mathcal{O}) := \{\text{множество тех } \xi \in H^1(E), \text{ у которых } \xi(t) \in \mathcal{O}_t \text{ при всех } t \in S\}$ открыто *) в $H^1(E)$.

Доказательство. Пусть $\xi \in H^1(\mathcal{O})$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что если $\eta \in H^1(E)$ и $|\eta(t) - \xi(t)|^2 < 2\varepsilon^2$ для всех $t \in S$, то $\eta(t) \in \mathcal{O}_t$ для всех $t \in S$. Поэтому из 1.2.1 следует, что если $\|\eta - \xi\|_1 < \varepsilon$, то $\eta \in H^1(\mathcal{O})$.

1.2.4. Предложение. Пусть $\pi: E \rightarrow S$ и $\mathcal{O} \subset E$ — такие же, что и в 1.2.3. Пусть $\varphi: F \rightarrow S$ — дифференцируемое векторное расслоение ($\dim F < \infty$) с римановой метрикой и римановой связностью. Допустим, что $\tilde{f}: \mathcal{O} \rightarrow F$ — дифференцируемое послойное отображение, т. е. $\varphi \circ \tilde{f} = \pi$.

Утверждение. Индуцированное отображение

$$\tilde{f}: H^1(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(F), \quad (\xi(t)) \mapsto (f \circ \xi(t)),$$

непрерывно.

Доказательство. Если $\|\eta - \xi\|_1$ стремится к нулю, то $\|\eta - \xi\|_\infty$ и $\|\nabla \eta - \nabla \xi\|_0$ также стремятся к нулю и $\|\tilde{f}(\eta) - \tilde{f}(\xi)\|_0 \leq \|\tilde{f}(\eta) - \tilde{f}(\xi)\|_\infty$.

Заметим, что если $\dot{\eta}(t) = \dot{\eta}(t)_h + \dot{\eta}(t)_v$ — разложение на горизонтальную и вертикальную части **, то $\dot{\eta}(t)_h$ локально имеет вид $(t, \eta(t), \partial_t, -\Gamma_t(\partial_t, \eta(t)))^*$, т. е. зависит только от $\eta(t)$, в то время как $\dot{\eta}(t)_v$ может быть отождествлена с $\nabla \eta(t)$. Поэтому если мы обозначим через

$$Tf(\eta(t)) = D_1f(\eta(t)) + D_2f(\eta(t))$$

разложение Tf на его ограничения на горизонтальное и вертикальное пространства, то

$$\begin{aligned} \nabla(f \circ \eta) &= (f \circ \eta)_v' = (f \circ \eta)' - (f \circ \eta)_h' = \\ &= D_1f(\eta) \cdot \dot{\eta}_h + D_2f(\eta) \cdot \dot{\eta}_v - (f \circ \eta)_h' = D_2f(\eta) \cdot \nabla \eta + D_1f(\eta) \cdot \dot{\eta}_h - (f \circ \eta)_h'. \end{aligned}$$

Вычитая аналогичную формулу для $\nabla(f \circ \xi)$, получим

$$\begin{aligned} \nabla(f \circ \eta)(t) - \nabla(f \circ \xi)(t) &= D_2f(\eta(t)) \cdot \nabla \eta(t) - D_2f(\xi(t)) \cdot \nabla \xi(t) + \\ &+ \{D_1f(\eta(t)) \cdot \dot{\eta}_h(t) - D_1f(\xi(t)) \cdot \dot{\xi}_h(t)\} - \{(f \circ \eta)_h'(t) - (f \circ \xi)_h'(t)\}. \end{aligned}$$

Обе фигурные скобки стремятся к нулю при $\|\xi - \eta\|_\infty \rightarrow 0$, а

$$\begin{aligned} D_2f(\eta(t)) \cdot \nabla \eta(t) - D_2f(\xi(t)) \cdot \nabla \xi(t) &= \\ &= D_2f(\eta(t)) \cdot (\nabla \eta(t) - \nabla \xi(t)) + (D_2f(\eta(t)) - D_2f(\xi(t))) \cdot \nabla \xi(t) \end{aligned}$$

*) Но пока не исключено, что $H^1(\mathcal{O}) = \emptyset$ (например, $\mathcal{O}$ может состоять из двух связанных компонент, ни одна из которых не проектируется на всю S).

**) Здесь $\dot{\eta} := (T\eta) \partial_t \in T_{\eta}E$.

***) Собственно, в терминах локальных координат надо говорить не о векторе ∂_t , а о его локальном представлении — числе 1.

стремится к нулю в $\|\cdot\|_0$ -норме при $\|\eta - \xi\|_1 \rightarrow 0$. Следовательно, $\|\nabla \tilde{f}(\eta) - \nabla \tilde{f}(\xi)\|_0$ также стремится к нулю. $\square$ (*)

Сейчас мы докажем следующее небольшое обобщение фундаментальной леммы Пале [2].

1.2.5. Лемма. Пусть $\mathcal{O} \subset E$ и $f: \mathcal{O} \rightarrow F$ (обозначения те же, что и выше) — дифференцируемое послойное отображение.

Утверждение. Отображение $\tilde{f}: H^1(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(F)$ дифференцируемо и $D\tilde{f} = (D_2 f)^{\sim *}$.

Доказательство. Из 1.2.4 мы уже знаем, что $\tilde{f}$ непрерывно. Из формулы Тейлора следует, что

$$\begin{aligned} (\eta(t)) - f(\xi(t)) - D_2 f(\xi(t)) \cdot (\eta(t) - \xi(t)) = \\ = r(\xi(t), \eta(t)) \cdot (\eta(t) - \xi(t)), \end{aligned}$$

где

$$r(\xi, \eta) := \int_0^1 D_2 f(\xi + s(\eta - \xi)) ds - D_2 f(\xi);$$

r является послойным отображением некоторого $\mathcal{O}' \times \mathcal{O}' \subset \mathcal{O} \times \mathcal{O} \subset E \times E$ (произведения Уитни расслоений) с выпуклым $\mathcal{O}'$ в расслоении $L(\pi; \varphi): L(E; F) \rightarrow S$.

Из 1.2.4 следует, что индуцированное отображение

$$\tilde{r}: H^1(\mathcal{O}' \times \mathcal{O}') \rightarrow H^1(L(E; F))$$

непрерывно. Теперь

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(\eta) - \tilde{f}(\xi) - (D_2 \tilde{f}(\xi)) \cdot (\eta - \xi)\|_1 &= \|\tilde{r}(\xi, \eta) \cdot (\eta - \xi)\|_1 \leq \\ &\leq \text{const} \|\tilde{r}(\xi, \eta)\|_1 \|\eta - \xi\|_1, \end{aligned}$$

где $\|\tilde{r}(\xi, \eta)\|_1 \rightarrow 0$ при $\|\xi - \eta\|_1 \rightarrow 0$, так как $\tilde{r}(\xi, \xi) = 0$. Следовательно, $\tilde{f}$ дифференцируемо и $D\tilde{f} = (D_2 f)^{\sim}$.

Аналогично можно показать, что $D^* \tilde{f} = (D_1^* f)^{\sim}$. $\square$ (8)

Сейчас мы напомним следующий хорошо известный результат римановой геометрии; см., например, Громол, Клингенберг и Мейер [1] или Милнор [1].

1.2.6. Лемма. Пусть M — компактное риманово многообразие. Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим через $\mathcal{O}_\varepsilon$ открытую ε -окрестность нулевого сечения в расслоении $\tau: TM \rightarrow M$, т. е. $\mathcal{O}_\varepsilon := \{\xi \in TM, |\xi| < \varepsilon\}$. Иногда для краткости окрестность $\mathcal{O}_\varepsilon$ мы будем обозначать просто через $\mathcal{O}$.

* Строго говоря, $D\tilde{f}$ есть отображение $H^1(\mathcal{O}) \rightarrow L(H^1(E); H^1(F))$, а $(D_2 f)^{\sim}$ — отображение $H^1(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(L(E; F))$. Говорить об их равенстве можно, лишь подразумевая, что $H^1(L(E; F))$ рассматривается как часть $L(H^1(E); H^1(F))$ (см. (**) перед 1.2.2).

Утверждение. Существует такое $\varepsilon > 0$, что отображение

$$(\tau, \exp): \mathcal{O}_\varepsilon \rightarrow M \times M, \quad \xi \mapsto (\tau(\xi), \exp(\xi))$$

является диффеоморфизмом на открытую окрестность диагонали в $M \times M$.

В частности, $\exp|_{(\mathcal{O}_\varepsilon := \mathcal{O} \cap T_p M)}$ инъективно. $\square$

Для такого $\mathcal{O} \subset TM$ и отображения $c: S \rightarrow M$ класса H^1 положим

$$\mathcal{O}_c := c^* \mathcal{O} \subset c^* TM.$$

Тогда $\mathcal{O}_c$ является открытой окрестностью нулевого сечения в расслоении $c^* \tau$. Определим отображение $*$)

$$(\dagger) \quad \exp_c: H^1(\mathcal{O}_c) \rightarrow H^1(S, M),$$

полагая $\xi = (\xi(t)) \mapsto (\exp(\tau^* c \xi(t)))$. Введем обозначение

$$\mathcal{U}(c) := \exp_c H^1(\mathcal{O}_c).$$

▲ Проверим, что, когда $**$) $\xi \in H^1(\mathcal{O}_c)$, кривая $(e(t)) := (\exp \tau^* c \xi(t))$ действительно класса H^1 . Ясно, что $e(t)$ — непрерывная замкнутая кривая. Для любого $t_0 \in S$ возьмем какие-нибудь карты (φ, U) и (ψ, V) , содержащие точки $c(t_0)$ и $e(t_0)$ соответственно; если $T\varphi \cdot \tau^* c \xi(t_0) = (x_0, y_0)$, то в некоторой замкнутой шаровой окрестности W точки (x_0, y_0) определено и дифференцируемо отображение $g := \psi \cdot \exp \cdot (T\varphi)^{-1}$. Существует такая замкнутая дуга $\Delta \subset S$, содержащая t_0 в качестве своей внутренней точки, что $c(\Delta) \subset U$ и $T\varphi(\tau^* c \xi(\Delta)) \subset W$. Тогда при $t \in \Delta$

$$T\varphi \cdot \tau^* c \xi(t) = (\varphi c(t), \xi_\varphi(t)), \quad \psi e(t) = g(\varphi c(t), \xi_\varphi(t)),$$

и $\varphi c(t)$, $\xi_\varphi(t)$ — абсолютно непрерывные функции, производные которых интегрируемы с квадратом (на Δ). Но, очевидно, отображение g удовлетворяет условию Липшица, и потому под его действием абсолютно непрерывная функция $\Delta \rightarrow W$ переходит снова в абсолютно непрерывную функцию от t (так что обе функции почти всюду имеют производную), причем при почти всех t норма производной самое большее умножается на константу Липшица. $\square$

Ясно, что если $e \in \mathcal{U}(c)$, то $d_M(e(t), c(t)) < \varepsilon$ при всех t (здесь d_M — расстояние в M , индуцированное римановой метрикой).

^{*}) Заметим, что $H^1(\mathcal{O}_c)$ непусто, ибо содержит нулевое сечение.

^{**}) Собственно, здесь можно было бы считать, что $\xi \in H^1(c^* TM)$ (определив $\exp_c \xi$ для таких ξ той же формулой); просто нам будут нужны только $\xi \in H^1(\mathcal{O}_c)$.

Обратно, если $d_M(e(t), c(t)) < \varepsilon$ при всех t , то $e(t) = \exp \tau^* c \xi(t)$ с некоторым $\xi \in C^0(c^*TM)$, $\|\xi\|_\infty < \varepsilon$. Это верно не только при $c, e \in H^1(S, M)$, но и при $c, e \in C^0(S, M)$. Если же $c, e \in H^1(S, M)$, то $\xi \in H^1(c^*TM)$.

Последнее нуждается в доказательстве. Для любого $t_0 \in S$ возьмем такие же (φ, U) , (ψ, V) , W и Δ , как и выше. Ввиду 1.2.6 можно считать (уменьшив, если потребуется, W и соответственно уменьшив также и Δ), что существует обратный оператор $(D_2g(x, y))^{-1}$. По теореме о неявной функции у точки (x_0, z_0) , где $z_0 = g(x_0, y_0)$, имеется такая окрестность, являющаяся произведением $W_{x_0} \times W_{z_0}$ шаров с центрами в x_0, z_0 , и в этой окрестности определена такая дифференцируемая функция $h: W_{x_0} \times W_{z_0} \rightarrow W_{y_0}$, что $h(x_0, z_0) = y_0$, $g(x, h(x, z)) = z$, и если $g(x, y) = z$ ($x \in W_{x_0}, z \in W_{z_0}$ и $|y - y_0|$ также достаточно мало), то $y = h(x, z)$. Поэтому $\xi_\varphi(t) = h(\varphi c(t), \varphi e(t))$ при достаточно малых $|t - t_0|$. Отсюда следуют абсолютная непрерывность $\xi_\varphi(t)$ и интегрируемость $|\dot{\xi}_\varphi(t)|^2$. $\square \blacktriangle$

1.2.7. Предложение. *Отображение $\exp_c$ инъективно и*

$$\begin{aligned} \text{im } \exp_c &= \{e \in H^1(S, M); e(t) \in \exp(\mathcal{O} \cap T_{c(t)}M)\} = \\ &= \{e \in H^1(S, M); d_M(e(t), c(t)) < \varepsilon \text{ при всех } t\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Утверждение очевидно ввиду сказанного выше. $\square$

1.2.8. Лемма. *Пусть $c, d \in C^\infty(S, M)$. Тогда отображение*

$$\exp_d^{-1} \circ \exp_c: \exp_c^{-1}(\mathcal{U}(c) \cap \mathcal{U}(d)) \rightarrow \exp_d^{-1}(\mathcal{U}(d) \cap \mathcal{U}(c))$$

является диффеоморфизмом.

Доказательство. Для каждого $t \in S$ определим множества

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{c,t} &:= (\tau^*c)_t^{-1}(\mathcal{O} \cap T_{c(t)}M), \quad \mathcal{O}_{d,t} := (\tau^*d)_t^{-1}(\mathcal{O} \cap T_{d(t)}M), \\ \mathcal{O}_{c,d,t} &:= \mathcal{O}_{c,t} \cap (\exp \circ \tau^*c)^{-1} \cdot (\exp \circ \tau^*d) \mathcal{O}_{d,t}, \end{aligned}$$

и если $\mathcal{O}_{c,d,t} \neq \emptyset$ при всех $t \in S$, то положим $\mathcal{O}_{c,d} = \bigcup_t \mathcal{O}_{c,d,t}$,

а в противном случае положим $\mathcal{O}_{c,d} = \emptyset$.

Докажем, что множество $\mathcal{O}_{c,d}$ открыто в $\mathcal{O}_c$. Пусть $\xi \in \mathcal{O}_{c,d}$, т. е. $\xi \in \mathcal{O}_{c,d,t}$ при некотором t ; $|\xi| < \varepsilon$ и $d_M(\exp \tau^* c \xi, d(t)) < \varepsilon$. Тогда при всех $\xi' \in c^*TM$, достаточно близких к ξ , будет $|\xi'| < \varepsilon$ и $d_M(\exp \tau^* c \xi', d(c \tau^* \xi')) < \varepsilon$.

Далее,

$$H^1(\mathcal{O}_{c,d}) = \exp_c^{-1}(\mathcal{U}(c) \cap \mathcal{U}(d)),$$

ибо $\mathcal{U}(c) \cap \mathcal{U}(d) = \{e \in H^1(S, M); d_M(e(t), c(t)) < \varepsilon, d_M(e(t), d(t)) < \varepsilon \text{ при всех } t\}$.

Отображение $f_{d,c} := (\exp \cdot \tau^* d)^{-1} \cdot (\exp \cdot \tau^* c): \mathcal{O}_{c,d} \rightarrow d^* TM$ является послойным отображением и $\exp_{d^{-1}} \cdot \exp_c = f_{d,c}$. А поэтому лемма следует из 1.2.5. $\square$ ⁽⁹⁾

1.2.9. Теорема. Атлас

$$(\exp_c^{-1}, \mathcal{U}(c)), \quad c \in C^\infty(S, M),$$

задает структуру дифференцируемого гильбертова многообразия на $H^1(S, M)$. Этот атлас называется естественным.

Замечание. Моделью для $H^1(S, M)$ является любое из эквивалентных бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств $H^1(c^* TM)$, $c \in C^\infty(S, M)$ (ср. с ⁽²⁾).

Доказательство. (1) Карты естественного атласа моделируются сепарабельными гильбертовыми пространствами, реализованными в виде $H^1(c^* TM)$.

(2) Так как каждый элемент $d \in H^1(S, M)$ может быть приближен в d_∞ -метрике, где

$$d_\infty(c, c') := \sup_{t \in S} d_M(c(t), c'(t)),$$

элементом $c \in C^\infty(S, M)$, то для каждого d найдется такое c , что $d \in \mathcal{U}(c)$, т. е. множества $\mathcal{U}(c)$ образуют открытое покрытие ^{*} $H^1(S, M)$.

(3) Из 1.2.8 мы знаем, что естественный атлас принадлежит классу C^∞ .

Чтобы убедиться в том, что $H^1(S, M)$ имеет счетную базу, достаточно показать, что естественный атлас имеет счетный податлас. Для этого покажем, что для каждого целого $l > 0$ множество

$$H^1(S, M)^l := \left\{ c \in H^1(S, M); \int_S \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle dt < 2l \right\}$$

может быть покрыто конечным набором карт из естественного атласа.

Чтобы это доказать, выберем $\varepsilon > 0$ таким же, как в 1.2.6, а целое $m = m(\varepsilon, l)$ так, чтобы $18l < m\varepsilon^2$. Тогда для $e \in H^1(S, M)^l$ получим, что если $e_j := e(j/m)$ и $t \in [(j-1)/m, j/m]$, то

$$\begin{aligned} d_M(e_j, e(t))^2, d_M(e_{j-1}, e(t))^2 &\leq \left(\int_{(j-1)/m}^{j/m} |\dot{e}(t)| dt \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{m} \int_S \langle \dot{e}(t), \dot{e}(t) \rangle dt \leq 2l/m \leq \varepsilon^2/9. \end{aligned}$$

^{*} Пока что (2) является не открытым покрытием — ведь топологии в $H^1(S, M)$ мы еще не ввели, — а просто покрытием. (Ср. с ⁽²⁾.) Образы карт $\exp_c^{-1} \mathcal{U}(c) = H^1(\mathcal{O}_c)$ и образы пересечений $\exp_c^{-1}(\mathcal{U}(c) \cap \mathcal{U}(d)) = H^1(\mathcal{O}_{c,d})$ — открытые подмножества $H^1(c^* TM)$ (предложение 1.2.3 и лемма 1.2.8).

Отсюда следует, что $e \in [(j-1)/m, j/m]$ целиком лежит в шаре радиуса $e/3$ с центром в e_{j-1} и в шаре радиуса $e/3$ с центром в e_j .

▲ Существует такое конечное множество P точек M , что $e/4$ -шары с центрами в этих точках покрывают M . Для любого $e \in H^1(S, M)^1$ найдется такая последовательность $\{p_0, \dots, p_m\}$ точек из P , что $e_j \in B_{e/4}(p_j)$, $p_m = p_0$. Для такой последовательности

$$d_M(p_j, p_{j+1}) < 2e/4 + e/3 = 5/6e \quad \text{при } j=0, \dots, m-1.$$

Будем говорить, что $e(t)$ «проходит возле $\{p_0, \dots, p_m\}$ ».

Для каждой из конечного числа последовательностей $\{p_0, \dots, p_m\}$ из $m+1$ элементов множества P с $p_0 = p_m$ и $d_M(p_j, p_{j+1}) < 5/6e$ ($j=0, \dots, m-1$) построим кривую $c \in C^\infty(S, M)$ следующим образом. Пусть $\gamma_j(t)$, $0 \leq t \leq 1$, — кратчайшая геодезическая, соединяющая $\gamma_j(0) = p_j$ с $\gamma_j(1) = p_{j+1}$, а функция $\varphi: [0, 1/m] \rightarrow [0, 1]$ такова, что $\varphi \in C^\infty$, $\varphi \geq 0$, $\varphi = 0$ вблизи 0, $\varphi = 1$ вблизи $1/m$. Полагаем $c(t) := \gamma_j(\varphi(t - j/m))$ при $t \in [j/m, (j+1)/m]$. Докажем, что если $e(t)$ «проходит возле $\{p_0, \dots, p_m\}$ », то $d_M(c(t), e(t)) < e$ при всех t . Пусть $t \in [j/m, (j+1)/m]$. Тогда $d_M(c(t), p_j) < 5/12e$ или $d_M(c(t), p_{j+1}) < 5/12e$. Поэтому $d_M(c(t), e(t)) \leq d_M(c(t), p_j)$ или $p_{j+1}) + d_M(p_j$ или p_{j+1}, e_j или $e_{j+1}) + d_M(e_j$ или $e_{j+1}, e(t)) < 5/12e + 1/4e + 1/3e = e$.

Отсюда следует, что $e \in \mathcal{U}(c)$ при некотором c .

Наконец, проверка хаусдорфовости $H^1(S, M)$ сводится к тому, что вложение $H^1(S, M) \hookrightarrow C^0(S, M)$ непрерывно и $C^0(S, M)$ хаусдорфово. □

Замечание 1. В дальнейшем вместо $H^1(S, M)$ мы часто будем писать ΛM (при этом ΛM всегда подразумевается снабженным структурой гильбертова дифференцируемого многообразия согласно 1.2.9), а иногда и просто Λ . Топологию в ΛM можно описать еще следующим образом. Нам надо указать для точки $c \in \Lambda M$ фундаментальную систему окрестностей. Пусть $\{(\varphi_i, U_i)\}$ — такая конечная система карт многообразия M , что $c(S) \subset \bigcup U_i$. Разобьем S на конечное число таких замкнутых дуг Δ_i , что $c(\Delta_i) \subset U_{j(i)}$. Изменив, если потребуется, нумерацию карт и, возможно, снабдив одну и ту же карту несколькими номерами, можем считать, что $c(\Delta_i) \subset U_i$. В дальнейшем карты $\{\varphi_i, U_i\}$ и дуги Δ_i считаются фиксированными.

При достаточно малом $\delta_0 > 0$ вся $\sqrt{2} \delta_0$ -окрестность множества $\varphi_i c(\Delta_i)$ лежит в $\varphi_i(U_i)$. Рассмотрим при $0 < \delta \leq \delta_0$

$$\mathcal{V}_\delta := \{e \in \Lambda M; e(\Delta_i) \subset U_i, \|\varphi_i e(t) - \varphi_i c(t)\|_{H^1(\Delta_i, \mathbb{R}^n)} < \delta \text{ при всех } i\}$$

(здесь $H^1(\Delta_i, \mathbb{R}^n)$ и соответствующая норма определяются очевидным образом; $n = \dim M$). Оказывается, что при различных δ множества $\mathcal{V}_\delta$ образуют фундаментальную систему окрестностей точки c в ΛM . ▲

Замечание 2. Дифференцируемое отображение $f: M \rightarrow N$ индуцирует дифференцируемое отображение

$$H^1(S, f): H^1(S, M) \rightarrow H^1(S, N), \quad c(t) \mapsto f \circ c(t)$$

(мы будем также писать короче $\Delta f: \Delta M \rightarrow \Delta N$). Другими словами, мы построили функтор $H^1(S, \cdot)$ из категории компактных дифференцируемых многообразий и отображений в категорию гильбертовых многообразий и дифференцируемых отображений.

▲ Заметим также, что если $f_s: M \rightarrow N$, $0 \leq s \leq 1$, есть дифференцируемая гомотопия (т. е. $f_s(x)$ дифференцируемо зависит от (x, s)), то $\Delta f_s: \Delta M \rightarrow \Delta N$ тоже является дифференцируемой гомотопией. Замечания 1, 2 доказаны в работе Аносова [3]. ▲

В частности, дифференцируемая структура на $H^1(S, M)$ зависит только от дифференцируемой структуры на M .

Мы закончим этот параграф следующей теоремой.

1.2.10. Теорема. Вложение

$$H^1(S, M) \hookrightarrow C^0(S, M)$$

является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Будем рассматривать M как замкнутое подмногообразие некоторого евклидова пространства E . Пусть N — открытая трубчатая окрестность многообразия M в E . Тогда M является сильным деформационным ретрактом этой окрестности, причем соответствующую гомотопию

$$h_s: N \rightarrow N, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (h_0 = \text{id}, h_1(N) = M),$$

можно считать дифференцируемой.

Эта гомотопия индуцирует семейство отображений $\tilde{h}_s$, которое определяется с помощью соотношения $(\tilde{h}_s \circ c)(t) = h_s \circ c(t)$ и является гомотопической эквивалентностью как между $H^1(S, N)$ и $H^1(S, M)^*$, так и между $C^0(S, N)$ и $C^0(S, M)$.

* Здесь следует напомнить замечание в начале § 1.2: большая часть содержания данного параграфа проходит и для некомпактных многообразий (в частности, для N). Формально же вместо того, чтобы анализировать по существу, может ли некомпактность N повлиять на что-нибудь в наших рассуждениях, проще свести все к компактному случаю. Будем считать M вложенным не в евклидово пространство, а в некоторую сферу S^k , возьмем в качестве N трубчатую окрестность M в S^k и заметим, что дифференцируемую гомотопию h_s можно (уменьшив, если понадобится, N) продолжить до дифференцируемой гомотопии всей сферы S^k (сфера, конечно, уже не стягивается на M). Тогда $H^1(S, N)$ можно определить как подмножество в $H^1(S, S^k)$, состоящее из тех отображений $S \rightarrow S^k$, образ которых лежит в N . Из описания топологии $H^1(S, S^k)$ видно, что это подмножество открыто. Далее, взяв вне N на сфере какую-нибудь точку p , с помощью стереографической проекции строим диффеоморфизм φ области $S^k - p$ на евклидово пространство E . Очевидно, $(\varphi, S^k - p)$ является некоторой картой на S^k , и из замечания 1 легко

Таким образом, показано, что $H^1(S, M)$ гомотопически эквивалентно открытому множеству $U^1 := H^1(S, N)$ гильбертова пространства $H^1(S, E)$, а $C^0(S, M)$ гомотопически эквивалентно открытому множеству $U^0 := C^0(S, N)$ локально выпуклого банахова пространства $C^0(S, E)$ в норме максимума модуля.

Из 1.2.1 следует, что включение $H^1(S, E) \hookrightarrow C^0(S, E)$ непрерывно и имеет плотный образ $^{*)}$. Применяя теперь теорему Пале [3], получим, что U^1 и U^0 гомотопически эквивалентны. $(^{10}) \square$

1.3. Риманова метрика и интеграл энергии на многообразии замкнутых кривых

Повторим еще раз, что мы часто будем вместо $H^1(S, M)$ писать ΛM , а иногда даже просто Λ .

Наша первая цель состоит в том, чтобы определить два расслоения

$$\alpha^r := H^r(H^1(S, M)^* TM) \rightarrow H^1(S, M), \quad r=0, 1,$$

в которых слой над $c \in H^1(S, M)$ состоит из H^r -векторных полей вдоль c^{**} .

Сказанным $H^r(H^1(S, M)^* TM)$ определены как множества; определены и α^r . Чтобы дать точное определение всей структуры расслоений, рассмотрим естественную карту $(\exp_c^{-1}, \mathcal{U}(c))$ многообразия ΛM , соответствующую кривой $c \in C^\infty(S, M)$. Для $\xi \in \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ — такое же, как в § 1.2, рассмотрим отображение

$$\nabla_{\xi} \exp(\xi): T_{\xi} M \rightarrow T_{\exp \xi} M, \quad \eta \mapsto T \exp(\xi) \cdot (K|T_{\xi} TM)^{-1} \cdot \eta.$$

Заметим, что отображение $(K|T_{\xi} TM): T_{\xi} TM \rightarrow T_{\xi} M$ есть каноническое отождествление касательного пространства к слою $T_{\xi} M$ в точке ξ со слоем $T_{\xi} M$.

Ясно, что $\nabla_{\xi} \exp(\xi)$ — линейный изоморфизм.

вытекает, что $H^1(S, N)$ гомеоморфно подмножеству (очевидно, открытому) $U^1 := \{c \in H^1(S, E); c(S) \subset \Phi(N)\}$ гильбертова пространства $H^1(S, E)$. Аналогично, $C^0(S, N)$ гомеоморфно $U^0 := C^0(S, \Phi(N)) \subset C^0(S, E)$; здесь все очевидно.

$^{*)}$ Ссылка на 1.2.1 законна, ибо $H^1(S, E)$ и $C^0(S, E)$ можно рассматривать как пространства сечений тривиального расслоения $S \times E \rightarrow S$.

$^{**})$ Следует иметь в виду, что $H^r(H^1(S, M)^* TM)$ не является пространством сечений какого-то расслоения с пространством расслоения $H^1(S, M)^* TM$, как можно было бы подумать на основании обозначения; последнее на самом деле имеет другое происхождение:

$$\bigcup_{c \in H^1(S, M)} H^r(c^* TM) = H^r(H^1(S, M)^* TM).$$

Никакого объекта, обозначаемого $H^1(S, M)^* TM$, вообще не вводится, а смысл придается только более сложному обозначению $H^r(H^1(S, M)^* TM)$.

Теперь для $r=0, 1$ определим

$$\Phi_{r,c}^{-1}: H^1(\mathcal{O}_c) \times H^r(c^*TM) \rightarrow (\alpha^r)^{-1}\mathcal{U}(c),$$

полагая *)

$$(\xi(t), \eta_c(t)) \mapsto ((\tau^*e)_t^{-1} \cdot \nabla_2 \exp(\tau^*c\xi(t)) \cdot \tau^*c\eta_c(t)),$$

где $e := \exp_c \xi$ и $(\tau^*e)_t = \tau^*e|_{(e^*\tau)^{-1}(t)}$.

1.3.1. Теорема. *Отображения $\Phi_{r,c}^{-1}$ биективны, так что определены обратные к ним отображения $\Phi_{r,c}$. Тройки*

$$(\Phi_{r,c}, \exp_c^{-1}, \mathcal{U}(c)), \quad c \in C^\infty(S, M),$$

являются локальными представлениями расслоения

$$\alpha^r: H^r(H^1(S, M)^*TM) \rightarrow \Lambda M,$$

стандартным слоем которого является сепарабельное гильбертово пространство $H^r(c^*TM)$.

При этом α^1 канонически изоморфно касательному расслоению $\tau_{\Lambda M}: T\Lambda M \rightarrow \Lambda M$ многообразия ΛM .

Доказательство. $\blacktriangle$ Прежде всего докажем, что если $\xi \in H^1(\mathcal{O}_c)$ и $\exp_c \xi = e$, то

$$\Phi_{r,c}^{-1}|_{\xi \times H^r(c^*TM)}: \xi \times H^r(c^*TM) \rightarrow H^r(e^*TM)$$

есть топологический линейный изоморфизм. Для любого t_0 существуют карты (φ, U) и (ψ, V) , содержащие точки $c(t_0)$ и $e(t_0)$ соответственно: если $T\varphi \cdot \tau^*c\xi(t_0) = (x_0, y_0)$, то в некоторой замкнутой шаровой окрестности W точки (x_0, y_0) определено и дифференцируемо отображение $g := \psi \cdot \exp \cdot (T\varphi)^{-1}$, причем существует обратный оператор $(D_2g(x, y))^{-1}$. Найдется такая замкнутая окрестность $\Delta \ni t_0$ в S , что $c(\Delta) \subset U$ и $T\varphi(\tau^*c\xi(\Delta)) \subset W$. Тогда при $t \in \Delta$ главная часть локального представления для

$$\zeta(t) := (\tau^*e)_t^{-1} \cdot \nabla_2 \exp(\tau^*c\xi(t)) \cdot \tau^*c\eta(t)$$

есть $u(t) := D_2g(x(t), y(t)) \cdot z(t)$, где

$$x(t) := \varphi(c(t)), \quad y(t) := p_2 \cdot T\varphi \cdot \tau^*c\xi(t), \quad z(t) := p_2 \cdot T\varphi \cdot \tau^*c\eta(t).$$

*) Вначале $\Phi_{r,c}^{-1}$ надо понимать как единый символ, пока не доказана биективность соответствующего отображения, что позволит говорить о $\Phi_{r,c}$. Индекс c у η служит только для напоминания, что η — сечение c^*TM . Тогда, казалось бы, и у ξ надо ставить тот же индекс. Но то, что ξ есть сечение c^*TM , «само собой разумеется», тогда как η (при данном ξ) определяет некоторое векторное поле ζ вдоль кривой $e := \exp_c \xi$, т. е. некоторое сечение расслоения e^*TM ; как мы увидим в 1.3.1, можно сказать, что η есть главная часть представления ζ в векторной карте $(\Phi_{r,c}, \exp_c^{-1}, \mathcal{U}(c))$. Автор счел полезным подчеркнуть в обозначениях, что ζ представляется посредством векторного поля вдоль c .

Нормы производной $D_2g(x(t), y(t))$ и обратного к ней линейного оператора равномерно ограничены. Поэтому если $z(t)$ квадратично интегрируема на Δ , то и $u(t)$ тоже, и обратно, причем

$$c_1 \int_{\Delta} |\eta(t)|^2 dt \leq \int_{\Delta} |\zeta(t)|^2 dt \leq c_2 \int_{\Delta} |\eta(t)|^2 dt$$

с некоторыми $c_1, c_2 > 0$. Далее, $D_2g(x(t), y(t))$ является абсолютно непрерывной функцией t ввиду дифференцируемости D_2g и абсолютной непрерывности $x(t), y(t)$. (Вообще, если векторная функция f удовлетворяет условию Липшица в своей области определения W и $z: \Delta \rightarrow W$ — абсолютно непрерывная функция, то и $f \circ z$ тоже.) Наконец, производная

$$\frac{d}{dt} D_2g(x(t), y(t)) = D_1 D_2g(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + D_2 D_2g(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)$$

является суммой квадратично интегрируемых функций ($\dot{x}$ и $\dot{y}$) с ограниченными множителями, поэтому $\frac{d}{dt} D_2g$ квадратично интегрируема. Теперь ясно, что если $z(t)$ абсолютно непрерывна и имеет квадратично интегрируемую производную, то и $u(t)$ тоже, и обратно, причем

$$\begin{aligned} c_1 \int_{\Delta} \{|\nabla \eta(t)|^2 + |\eta(t)|^2\} dt &\leq \int_{\Delta} \{|\nabla \zeta(t)|^2 + |\zeta(t)|^2\} dt \leq \\ &\leq c_2 \int_{\Delta} \{|\nabla \eta(t)|^2 + |\eta(t)|^2\} dt \end{aligned}$$

с некоторыми $c_1, c_2 > 0$. Ясно, что S можно покрыть конечным числом окрестностей Δ^* так, чтобы для каждой из них имелись свои (φ, U) , (ψ, V) и W . Тем самым проверено выполнение условия (i) из определения векторного атласа **).

Займемся теперь условием (ii).

Пусть $e \in \mathcal{U}(c) \cap \mathcal{U}(d)$, $e = \exp_c \xi = \exp_d \chi$, $\xi \in H^1(\mathcal{O}_{c,d})$, $\chi \in H^1(\mathcal{O}_{c,d})$. Обозначая для краткости $\exp|_{T_x M}$ через $\exp_x$ (так что $D \exp_x(\xi) = \nabla_x \exp(\xi)$ при $\xi \in T_x M$), продифференцируем в точке $\xi(t) \in \mathcal{O}_{c,d,t}$ следующее отображение $\mathcal{O}_{c,d,t} \rightarrow T_{d(t)} M$:

$$\tau^* d \circ f_{d,c} | \mathcal{O}_{c,d,t} = (\exp | \mathcal{O}_{d(t)})^{-1} \circ \exp \circ (\tau^* c)_t,$$

*) Сначала открытых, а затем чуть меньших замкнутых.

**) Заметим, что фактически выше использовалось не то, что $c \in C^\infty(S, M)$, а только то, что $c \in H^1(S, M)$, и доказано следующее утверждение. Если $c \in H^1(S, M)$, $\xi \in H^1(\mathcal{O}_c)$ и $e = \exp_c \xi$ (т. е. $e(t) := \exp(\tau^* c_\xi^*(t))$), то отображение

$$\eta(t) \mapsto \zeta(t) := ((\tau^* e)_t^{-1} \cdot \nabla_x \exp(\tau^* c_\xi^*(t)) \cdot \eta(t))$$

переводит $\eta \in H^r(c^* TM)$ в $\zeta \in H^r(e^* TM)$ ($r=0, 1$). Полученное отображение $H^r(c^* TM) \rightarrow H^r(e^* TM)$ является ограниченным (относительно $\|\cdot\|_r$ -нормы) линейным оператором, имеющим ограниченный обратный.

где $f_{d,c}$ — то же, что и в 1.2.8. Очевидно, получится

$$\tau^* d \cdot D_2 f_{d,c}(\xi(t)) = D(\exp | \mathcal{O}_{d(t)})^{-1} \cdot D \exp_{c(t)}(\tau^* c \xi(t)) \cdot (\tau^* c)_t.$$

Здесь $D(\exp | \mathcal{O}_{d(t)})^{-1}$ берется в точке $\exp_{c(t)}(\tau^* c \xi(t)) = e(t) = \exp_{d(t)}(\tau^* d \chi(t))$ и поэтому равна

$$[D(\exp_{d(t)}(\tau^* d \chi(t)))]^{-1} = [\nabla_2 \exp(\tau^* d \chi(t))]^{-1}.$$

В итоге получаем

$$D_2 f_{d,c}(\xi(t)) = (\tau^* d)_t^{-1} \cdot [\nabla_2 \exp(\tau^* d \chi(t))]^{-1} \cdot \nabla_2 \exp(\tau^* c \xi(t)) \cdot (\tau^* c)_t.$$

Отсюда видно, что отображение $\Phi_{r,d} \cdot \Phi_{r,c}$ имеет вид $(\xi, \eta) \mapsto (\chi, \zeta)$, где $\chi = \exp_{d^{-1}} \cdot \exp_{c^{-1}} \cdot \xi$, а $\zeta(t) = D_2 f_{d,c}(\xi(t)) \cdot \eta(t)$. $\blacktriangle$

Рассмотрим сначала случай $r=1$. В этом случае, как видно из сказанного, отображение

$$(*) \quad \Phi_{1,d} \cdot \Phi_{1,c}^{-1}: H^1(\mathcal{O}_{c,d}) \times H^1(c^*TM) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{d,c}) \times H^1(d^*TM)$$

имеет вид $(\tilde{f}_{d,c}, (D_2 f_{d,c})^\sim)$, где $\tilde{f}_{d,c}$ — такое же, как и в 1.2.8.

Следовательно, отображения $(*)$ ведут себя как отображения перехода между локальными представлениями расслоения. Кроме того, так как $(D_2 f_{d,c})^\sim = D \tilde{f}_{d,c}$, то эти функции перехода в точности являются функциями перехода, определяющими структуру касательного расслоения на ΛM .

В случае $r=0$ заметим, что композиция дифференцируемого отображения

$$(D_2 f_{d,c})^\sim: H^1(\mathcal{O}_{c,d}) \rightarrow H^1(L(c^*TM; d^*TM))$$

с последующим непрерывным линейным вложением

$$H^1(L(c^*TM; d^*TM)) \hookrightarrow L(H^0(c^*TM); H^0(d^*TM))$$

(см. 1.2.2) дает дифференцируемое отображение. $\square$

Для $\xi \in \mathcal{O} \subset TM$ определим отображение $\nabla_1 \exp(\xi): T_{\tau\xi}M \rightarrow T_{\exp\xi}M$, полагая $\eta \mapsto T \exp(\xi) \cdot (T\tau | T_{\xi h}TM)^{-1} \cdot \eta$. Ясно, что это линейный изоморфизм.

Далее, определим отображение $\theta: \mathcal{O} \rightarrow L(TM; TM)$ с помощью формулы $\theta(\xi) := \nabla_2 \exp(\xi)^{-1} \cdot \nabla_1 \exp(\xi)$.

Для каждого $c \in C^\infty(S, M)$ рассмотрим послойное отображение *)

$$\theta_c := (\tau^* c)^{-1} \cdot \theta \cdot \tau^* c. \partial c: \mathcal{O}_c \rightarrow c^*TM.$$

*) Подробнее: если $\xi \in \mathcal{O}_c$ и $c^* \tau \xi = t$, то

$$\theta_c(\xi) = ((\tau^* c)_t^{-1} \cdot \theta(\tau^* c \xi(t)) \cdot \dot{c}(t)).$$

Наряду с $\dot{c}$ Клингенберг использует также обозначение ∂c ; у него имеется тенденция писать $\dot{c}(t)$, когда речь идет о векторе в TM , и $\partial c(t) := (\tau^* c)_t^{-1} \dot{c}(t)$, когда речь идет о векторе в c^*TM . Но это именно тенденция, которая не соблюдается педантично — иногда ∂c рассматривается как вектор в TM (см. например, в доказательстве предложения 1.3.2 оба равенства с левой частью ∂c).

1.3.2. Предложение. *Отображение $\partial: \Lambda M \rightarrow (\alpha^0)^{-1} \Lambda M$, сопоставляющее кривой $e \in \Lambda M$ ее касательное векторное поле $\partial e(t) = \dot{e}(t)$, является дифференцируемым сечением расслоения α^0 .*

В локальном представлении $H^1(\mathcal{O}_c) \times H^0(c^*TM)$ расслоения α^0 над $\mathcal{U}(c)$ главная часть ∂ , обозначаемая через

$$\partial_c: H^1(\mathcal{O}_c) \rightarrow H^0(c^*TM),$$

имеет вид

$$\partial_c \xi(t) := \nabla_c \xi(t) + \theta_c(\xi(t)).$$

Доказательство. Пусть $e(t) = \exp(\tau^* c \xi(t))$. Тогда

$$\partial e(t) = T \exp(\tau^* c \xi(t)) \cdot (\tau^* c \xi(t))'_h + \tau^* c \xi(t)'_v,$$

где справа указано разложение на горизонтальную и вертикальную компоненты. Так как

$$T\tau \cdot \tau^* c \xi(t)'_h = \partial c(t), \quad K \cdot \tau^* c \xi(t)'_v = \nabla(\tau^* c \xi(t)),$$

то

$$\begin{aligned} \partial e(t) &= \nabla_1 \exp(\tau^* c \xi(t)) \cdot \partial c(t) + \nabla_2 \exp(\tau^* c \xi(t)) \cdot \nabla(\tau^* c \xi(t)) = \\ &= \nabla_2 \exp(\tau^* c \xi(t)) \cdot \tau^* c \cdot (\nabla_c \xi(t) + \theta_c(\xi(t))). \end{aligned}$$

▲ Дифференцируемость отображения

$$\partial_c: \xi \mapsto (\nabla_c \xi(t) + \theta_c \xi(t)) \in H^0(c^*TM)$$

следует из того, что $\nabla_c: H^1(\mathcal{O}_c) \rightarrow H^0(c^*TM)$, $\xi \mapsto \nabla_c \xi$, — линейный ограниченный оператор, отображение $\tilde{\theta}_c: H^1(\mathcal{O}_c) \rightarrow H^1(c^*TM)$ дифференцируемо в силу 1.2.5 и вложение $H^1(c^*TM) \rightarrow H^0(c^*TM)$ — линейный ограниченный оператор. ▲ □

1.3.3. Теорема. *На расслоении $\alpha^0: H^0(H^1(S, M)^*TM) \rightarrow \Lambda M$ определена риманова метрика, которая характеризуется тем свойством, что на $(\alpha^0)^{-1}c = H^0(c^*TM)$, $c \in C^\infty(S, M)$, она задается произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$. Поэтому мы будем обозначать эту метрику через $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$.*

Доказательство. Определим отображение $G: \mathcal{O} \rightarrow L(TM; TM)$ с помощью равенства

$$\langle G(\xi) \cdot, \cdot \rangle_{\tau \xi} = \langle \nabla_2 \exp(\xi) \cdot, \nabla_2 \exp(\xi) \cdot \rangle_{\exp \xi}^*.$$

Из определения $\mathcal{O}$ следует, что $G(\xi)$ — (строго) положительно определенный самосопряженный оператор класса C^∞ . Отображение

$$G_c := (\tau^*c)^{-1} \circ G \circ (\tau^*c): \mathcal{O}_c \rightarrow L(c^*TM; c^*TM)$$

*1 Можно сказать еще так: $((\exp|_{\mathcal{O}_x})^{-1}, \exp|_{\mathcal{O}_x})$ есть некоторая карта многообразия M ; в этой карте риманова метрика в точке с координатами $\xi \in \mathcal{O}_x$ выражается посредством квадратичной формы $\eta \mapsto \langle G(\xi) \eta, \eta \rangle_x$.

является послойным отображением ^{*}), а отображение $\tilde{G}_c$, получающееся при композиции

$$H^1(\mathcal{O}_c) \rightarrow H^1(L(c^*TM; c^*TM)) \hookrightarrow L(H^0(c^*TM); H^0(c^*TM)),$$

— положительно определенный самосопряженный оператор класса C^∞ . Таким образом, $H^1(\mathcal{O}_c) \rightarrow L_s^2(H^0(c^*TM))$, $\xi \mapsto \langle \tilde{G}_c(\xi) \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика на тривиальном расслоении $H^1(\mathcal{O}_c) \times H^0(c^*TM) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_c)$.

Можно проверить, что эта метрика не зависит от выбора локального представления. (¹¹)

Наконец, $\tilde{G}_c = \text{id}$ при $\xi = 0$, т. е. на $H^0(c^*TM)$ эта метрика совпадает с $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$. Так как $C^\infty(S, M)$ плотно в $\Lambda M = H^1(S, M)$, то это свойство полностью характеризует метрику. $\square$

1.3.4. Лемма. Связность Леви-Чивита K на римановом касательном расслоении $\tau_M: TM \rightarrow M$ многообразия M индуцирует риманову связность K_{α^0} на $\alpha^0: H^0(H^1(S, M)^*TM) \rightarrow \Lambda M$.

Доказательство. Определим $\Gamma: \mathcal{O} \rightarrow L^2(TM; TM)$ с помощью равенства ^{**})

$$2 \langle G(\xi) \Gamma(\xi) \cdot (\eta, \zeta), \theta \rangle_{\tau_\xi} \equiv \langle D_2 G(\xi) \cdot (\eta, \zeta), \theta \rangle_{\tau_\xi} + \\ + \langle D_2 G(\xi) \cdot (\zeta, \eta), \theta \rangle_{\tau_\xi} - \langle D_2 G(\xi) \cdot (\theta, \eta), \zeta \rangle_{\tau_\xi},$$

которое должно тождественно выполняться при всех $\eta, \zeta, \theta \in T_{\tau_\xi} M$. Тогда

$$\Gamma_c = (\tau^*c)^{-1} \cdot \Gamma \cdot \tau^*c \cdot (\tau^*c \times \tau^*c): \mathcal{O}_c \rightarrow L^2(c^*TM; c^*TM)$$

— послойное отображение ^{***}). Следовательно, композиция (которую мы снова будем обозначать через $\tilde{G}_c$)

$$H^1(\mathcal{O}_c) \rightarrow H^1(L_s^2(c^*TM; c^*TM)) \hookrightarrow \\ \hookrightarrow L(H^1(c^*TM), H^0(c^*TM); H^0(c^*TM))$$

дифференцируема (ср. 1.2.2) и определяет символы Кристоффеля римановой связности K_{α^0} расслоения α^0 . То, что $\tilde{G}_c$ удовлетворяет

^{*}) Если $\xi \in \mathcal{O}_{c, t}$, $\eta \in (c^*\tau)^{-1}(t)$, то

$$G_c(\xi) \eta := (\tau^*c)_t^{-1} \circ G(\tau^*c\xi) \cdot \tau^*c \cdot \eta \in (c^*\tau)^{-1}(t),$$

т. е. $G_c(\xi) \in L((c^*\tau)^{-1}(t), (c^*\tau)^{-1}(t))$.

^{**}) Формула, определяющая Γ , означает, что в карте $((\exp|_{\mathcal{O}_x})^{-1}, \exp|_{\mathcal{O}_x})$ многообразия M символы Кристоффеля связности Леви-Чивита исходной римановой метрики в точке с координатами ξ суть $\Gamma(\xi) \cdot (\cdot, \cdot)$.

^{***}) Формула для Γ_c — несколько небрежная (из-за неоднозначности $(\tau^*c)^{-1}$ при возможном наличии самопересечений у c) запись того факта, что при $\xi \in \mathcal{O}_{c, t}$, $\eta, \zeta \in (c^*\tau)^{-1}(t)$

$$\Gamma_c(\xi) \cdot (\eta, \zeta) := (\tau^*c)_t^{-1} \circ \Gamma(\tau^*c\xi) \cdot (r^*c\eta, r^*c\zeta).$$

формулам перехода для символов Кристоффеля, следует непосредственно из определения; тот факт, что связность K_{α^0} риманова, содержится в равенстве

$$\langle (D\tilde{G}_c(\xi) \cdot \eta) \zeta, \theta \rangle_0 = \langle \tilde{G}_c(\xi) \tilde{\Gamma}_c(\xi) \cdot (\eta, \zeta), \theta \rangle_0 + \langle \tilde{G}_c(\xi) \tilde{\Gamma}_c(\xi) \cdot (\eta, \theta), \zeta \rangle_0,$$

где $\eta \in H^1(c^*TM)$ и $\zeta, \theta \in H^0(c^*TM)$, которое тоже непосредственно следует из определений; ср. с (****) в конце § 1.1. ⁽¹²⁾ □

1.3.5. Предложение. Ковариантная производная $\nabla_{\alpha^0} \partial$ сечения ∂ расслоения α^0 является дифференцируемым сечением расслоения

$$L(\alpha^1; \alpha^0): L(H^1(H^1(S, M)^*TM); H^0(H^1(S, M)^*TM)) \rightarrow \Lambda M.$$

Если $\xi \in H^1(\mathcal{O}_c)$ — локальное представление кривой $e \in \mathcal{U}(c)$ и $\zeta \in T_e \Lambda M$, а $\eta \in H^1(c^*TM)$ — локальное представление ζ , то главная часть локального представления $\nabla_{\alpha^0} \partial(e) \cdot \zeta$ равна

$$\nabla_c \eta + (D_2 \theta_c)^{\sim}(\xi) \cdot \eta + \tilde{\Gamma}_c(\xi) \cdot (\eta, \partial_c \xi)$$

(это есть H^0 -сечение расслоения $H^0(c^*TM)$, принимающее значение

$$\nabla_c \eta(t) + D_2 \theta_c(\xi(t)) \cdot \eta(t) + \Gamma_c(\xi(t)) \cdot (\eta(t), \partial_c \xi(t))$$

в точке $t \in S$, где $\partial_c \xi = \nabla_c \xi + \theta_c(\xi) \in H^0(c^*TM)$ — главная часть локального представления ∂e , см. 1.3.2).

Вместо $\nabla_{\alpha^0} \partial(e) \cdot \zeta$ мы будем писать $\nabla_{\alpha^0} \partial e \cdot \zeta$ и даже $\nabla \zeta$, если не будет опасности путаницы*). Заметим, что при $e=c$, т. е. при $\xi=0$ (тогда $\eta=\zeta$), на самом деле $\nabla_{\alpha^0} \partial e \cdot \zeta = \nabla_e \zeta$. ⁽¹³⁾

Доказательство. В терминах локального представления главная часть ковариантной производной равна

$$D\partial_c(\xi) \cdot \eta + \tilde{\Gamma}_c(\xi) \cdot (\eta, \partial_c \xi).$$

Поскольку $\nabla_c: H^1(c^*TM) \rightarrow H^0(c^*TM)$ линейно, а $\theta_c: \mathcal{O}_c \rightarrow c^*TM$ — послойное отображение и, следовательно, $D\tilde{\theta}_c = (D_2 \theta_c)^{\sim}$, то первое слагаемое здесь равно $\nabla \eta + (D_2 \theta_c)^{\sim}(\xi) \cdot (\eta)$. □

1.3.6. Теорема. На касательном расслоении $\alpha^1 \equiv \tau_{\Lambda M}$ многообразия ΛM определена риманова метрика, которая характеризуется тем, что на $T_e \Lambda M \cong H^1(c^*TM)$, где $c \in C^\infty(S, M)$, она совпадает с $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. Поэтому эту метрику мы также обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$.

*) Путаница может возникнуть, в частности (и, пожалуй, в особенности), тогда, когда (как это часто делается) главная часть $\Phi_{1,c}(\zeta)$, где $\zeta \in T_e \Lambda$, обозначается снова через ζ : следует ли понимать под $\nabla \zeta$ ковариантную производную $\nabla_e \zeta$ исходного $\zeta = \zeta_e \in H^1(e^*TM)$ вдоль кривой e или ковариантную производную $\nabla_c \zeta$ его локального представителя $\zeta = \zeta_c \in H^1(c^*TM)$ вдоль кривой c ? Использование сокращенных обозначений требует осторожности со стороны автора и внимания к контексту со стороны читателя.

Доказательство. Положим риманову метрику на $T_c \Lambda M$ равной

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_0 + \langle \nabla_{\alpha^0} de \cdot, \nabla_{\alpha^0} de \cdot \rangle_0.$$

То, что это дифференцируемое сечение расслоения $L_s^2(\tau_{\Lambda M}): L_s^2(T\Lambda M) \rightarrow \Lambda M$, следует из 1.3.3 и 1.3.5.

Ясно, что на $H^1(c^*TM)$, $c \in C^\infty(S, M)$, эта метрика совпадает с $\langle \cdot, \cdot \rangle_1^*$. Так как кривые $c \in C^\infty(S, M)$ плотны в $\Lambda M = H^1(S, M)$, то это свойство однозначно определяет метрику. $\square$

Определим открытую окрестность нулевого сечения расслоения $\tau_{\Lambda M}$, полагая

$$\tilde{\mathcal{O}} = \{\eta \in TH^1(S, M); \eta(t) \in \mathcal{O} \subset TM\},$$

где $\mathcal{O}$ такое же, как и в 1.2.6.

Ясно, что при $c \in C^\infty(S, M)$ **) имеет место соответствие $\tilde{\mathcal{O}} \cap T_c \Lambda M \cong H^1(\mathcal{O}_c)$ (при установленном выше каноническом изоморфизме $T_c \Lambda M$ с $H^1(c^*TM)$).

Сейчас мы покажем, что отображения

$$\exp_c: H^1(\mathcal{O}_c) \rightarrow \mathcal{U}(c)$$

могут быть «соединены» в дифференцируемое отображение

$$\widetilde{\exp}: \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \Lambda M,$$

которое обладает свойствами экспоненциального отображения связности на $\tau_{\Lambda M}$. Заметим, однако, что $\widetilde{\exp}$ не является экспоненциальным отображением связности Леви-Чивита, соответствующей римановой метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ на ΛM . Дальнейшие подробности можно найти у Флашеля и Клингенберга [1] (замечание к теореме 4.7 гл. II).

1.3.7. Теорема. Отображение

$$\tau_{\Lambda M} \times \widetilde{\exp}: \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \Lambda M \times \Lambda M, \quad (\eta(t)) \mapsto (\tau_M \eta(t), \exp \eta(t))$$

дифференцируемо. Оно диффеоморфно отображает некоторую открытую окрестность нулевого сечения на открытую окрестность диагонали в $\Lambda M \times \Lambda M$.

Доказательство. Напомним вид локального представления расслоения $\tau_{\Lambda M}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{1,c}^{-1}: H^1(\mathcal{O}_c) \times H^1(c^*TM) &\rightarrow (\tau_{\Lambda M})^{-1}\mathcal{U}(c), \\ (\xi(t), \eta_c(t)) &\mapsto (\nabla_2 \exp(\tau^* c \xi(t)) \cdot \tau^* c \eta_c(t)). \end{aligned}$$

*) Ввиду (13) совпадение имеет место при всех $c \in \Lambda M$.

**) Как и при всех $c \in \Lambda M$.

Отсюда видно, что локальное представление для $\widetilde{\text{exr}}$ следующее: $(\xi, \eta_c) \mapsto (\xi, \xi_c)$, где $\xi_c \in H^1(c^*TM)$ есть сечение^{*)}

$$t \mapsto (\text{exr} \cdot \tau^*c | \mathcal{O}_{c,t})^{-1} \cdot \text{exr} \cdot \nabla_2 \text{exr} (\tau^*c\xi(t)) \cdot \tau^*c\eta_c(t).$$

Отображение $(\xi, \eta_c) \mapsto \xi_c$ имеет вид $\tilde{f}$ для некоторого дифференцируемого послыйного отображения $\mathcal{O}_c \times c^*TM \rightarrow c^*TM$, так что $\widetilde{\text{exr}}$ дифференцируемо.

Отображение $\tau_{\Delta M} \times \widetilde{\text{exr}}$ взаимно однозначно отображает нулевое сечение расслоения $\tau_{\Delta M}$ на диагональ Δ произведения $\Delta M \times \Delta M$. Осталось показать, что его дифференциал в точке $0 \in T_{c,c}\Delta M$ является линейным изоморфизмом на $T_{(c,c)}(\Delta \times \Delta)$.

Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что локальное представление^{**)} дифференциала имеет вид

$$T(\tau_{\Delta M} \times \widetilde{\text{exr}})(0, \eta_c(t)) = (0, \eta_c(t)),$$

$$T(\tau_{\Delta M} \times \widetilde{\text{exr}})(\xi(t), 0) = (\xi(t), \xi(t)),$$

откуда следует утверждение теоремы. $\square$

Важным следствием является

1.3.8. Теорема. Каждому $c \in \Delta M$ соответствует естественная карта

$$(\text{exr}_c^{-1}, \mathcal{U}^c(c)),$$

где $\text{exr}_c := \widetilde{\text{exr}}|_{\mathcal{W} \cap T_c \Delta M}$, $\mathcal{W}$ — некоторая окрестность нулевого сечения расслоения $T\Delta M$, $\mathcal{U}^c(c) := \text{exr}_c(\mathcal{W} \cap T_c \Delta M)$.

Замечание. Здесь, возможно, надо несколько уменьшить^{***)} окрестность $\tilde{\mathcal{O}} \cap T_c \Delta M$ нуля пространства $T_c \Delta M$. ⁽¹⁴⁾

^{*)} Пока не исключено, что $\text{exr} \cdot \nabla_2 \text{exr} (\tau^*c\xi(t)) \cdot \eta(t)$ не лежит в ε -окрестности $c(t)$, а тогда написанная формула не имеет смысла. Чтобы избежать этого, проще всего считать, что $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\varepsilon$ в 1.3.7 определяется с помощью какого-то меньшего ε , чем раньше (но в доказательстве в $(\text{exr} \cdot \tau^*c | \mathcal{O}_{c,t})^{-1}$ фигурирует прежнее ε). Ср. с замечанием автора после 1.3.8.

^{**) В записи (ξ, η) для векторов из $T_0 T\Delta$ подразумевается разложение $T_0 T\Delta$ согласно 1.1.1 в прямую сумму горизонтального и вертикального подпространств, которые оба канонически изоморфны $T_c \Delta M$. (В точке 0 это разложение не зависит от связности.) В правых частях подразумевается разложение $T_{(c,c)}(\Delta \times \Delta) = T_c \Delta \oplus T_c \Delta$.}

^{***)} Одну из причин возможного уменьшения $\tilde{\mathcal{O}}$ см. в первом примечании к доказательству теоремы 1.3.7. Вторая причина состоит в том, что в 1.3.7 не уточнялось, в какой именно окрестности нулевого сечения отображение $\tau_{\Delta M} \times \widetilde{\text{exr}}$ является диффеоморфизмом на окрестность диагонали. По этой второй причине мы даже не можем утверждать, что уменьшенная окрестность нулевого сечения расслоения $T\Delta M$ имеет вид $\tilde{\mathcal{O}}$ с некоторым $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\varepsilon$, как в § 1.2. (На самом деле ценой более громоздких рассуждений можно было бы избежать уменьшения $\tilde{\mathcal{O}}$, но нам это не понадобится.)

Теперь мы определим функцию $E: \Lambda M \rightarrow \mathbb{R}$, которая называется *интегралом энергии* и задается соотношением ⁽¹⁵⁾

$$E(c) := \frac{1}{2} \langle \partial c, \partial c \rangle_0.$$

1.3.9. Лемма. *Функция E дифференцируема, а ее дифференциал имеет вид*

$$DE(c) \cdot \eta = \langle \partial c, \nabla \eta \rangle_0.$$

Доказательство. Дифференцируемость E следует из 1.3.2 и 1.3.3.

Для вычисления дифференциала функции E воспользуемся римановой связностью ∇_{α^0} на α^0 :

$$D \langle \partial c, \partial c \rangle_0 \cdot \eta = 2 \langle \partial c, \nabla_{\alpha^0} \partial c \cdot \eta \rangle_0$$

и вспомним, что $\nabla_{\alpha^0} \partial c \cdot \eta = \nabla \eta$. $\square$

1.3.10. Дополнение. *В терминах локального представления расслоения α^1 над $\mathcal{U}(c)$ функция E и ее дифференциал записываются в форме*

$$E_c := E \circ \exp_c: H^1(\mathcal{O}_c) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto \frac{1}{2} \langle \tilde{G}_c(\xi) \cdot \partial_c \xi, \partial_c \xi \rangle_0$$

и

$$DE_c(\xi) \cdot \eta = \langle \tilde{G}_c(\xi) \cdot \partial_c \xi, \nabla \eta + (D_2 \theta_c)^{\sim}(\xi) \cdot \eta \rangle_0 + \\ + \frac{1}{2} \langle (D_2 G_c)^{\sim}(\xi) \cdot (\eta, \partial_c \xi), \partial_c \xi \rangle_0.$$

Доказательство. В равенство

$$DE_c(\xi) \cdot \eta = \langle \tilde{G}_c(\xi) \cdot \partial_c \xi, \nabla_{\alpha^0} \partial_c(\xi) \cdot \eta \rangle_0$$

надо вместо второго аргумента подставить его выражение из 1.3.5 и воспользоваться тождеством, приведенным в конце доказательства 1.3.4, полагая в нем $\xi = \theta = \partial_c \xi$. $\square$

Важность функции E объясняется тем, что она позволяет просто описывать *замкнутые геодезические* в ΛM , т. е. дифференцируемые отображения $c: S \rightarrow M$, которые удовлетворяют соотношениям $\nabla \dot{c} = 0$, $\dot{c} \neq 0$.

1.3.11. Теорема. *Кривая $c \in \Lambda M$ является замкнутой геодезической или постоянным отображением в том и только в том случае, когда она является критической точкой функции E , т. е. $DE(c) = 0$.*

Доказательство. Если c дифференцируема, то, учитывая, что

$$\frac{d}{dt} \langle \partial c, \eta \rangle_{c(t)} = \langle \nabla \partial c, \eta \rangle_{c(t)} + \langle \partial c, \nabla \eta \rangle_{c(t)} \quad \text{и} \quad \int_S \frac{d}{dt} \langle \partial c, \eta \rangle_{c(t)} dt = 0,$$

имеем

$$DE(c) \cdot \eta = \langle \partial c, \nabla \eta \rangle_0 = - \langle \nabla \partial c, \eta \rangle_0.$$

Поэтому из $\nabla \partial c = 0$ следует $DE(c) = 0$. Для этого рассуждения не требуется бесконечной дифференцируемости, но вполне достаточно, чтобы $\partial c \in H^1(c^*TM)$.

Пусть теперь $DE(c) \cdot \eta = 0$ при всех $\eta \in T_c \Lambda M$. Тогда c является слабым решением уравнения $\nabla \partial c = 0$. Из теории эллиптических операторов следует, что c дифференцируема, а значит, является замкнутой геодезической или постоянным отображением (отображением в точку).

Однако ссылки на эту теорию можно избежать. Мы сейчас приведем прямое доказательство «достаточной дифференцируемости» c , аналогичное известной в вариационном исчислении лемме Дюбуа-Реймона.

Пусть $\xi(t)$ — такое параллельное H^1 -векторное поле вдоль $c(t)$ (не обязательно периодическое)*), т. е. $\nabla \xi(t) = 0$, что $\xi(1) = \xi(0)$, где $\xi(0)$ есть H^1 -векторное поле, тоже не обязательно периодическое, определенное уравнениями

$$\nabla \xi(t) = \partial c(t), \quad \xi(0) = 0.$$

Положим $\zeta(t) = t\xi(t) = \eta(t)$. Тогда $\eta(0) = \eta(1) = 0$, и можно считать, что $\eta \in H^1(c^*TM)$; далее,

$$\nabla \eta(t) = \partial c(t) - \xi(t).$$

Кроме того,

$$\langle \xi, \partial c - \xi \rangle_0 = \langle \xi, \nabla \eta \rangle_0 = \int_0^1 \frac{d}{dt} \langle \xi(t), \eta(t) \rangle dt = 0$$

и $0 = DE(c) \cdot \eta = \langle \partial c, \nabla \eta \rangle_0$. Поэтому

$$\langle \partial c - \xi, \partial c - \xi \rangle_0 = 0,$$

т. е. $\partial c(t) = \xi(t)$ — поле класса H^1 на отрезке $[0, 1]$.

Чтобы убедиться в том, что $\xi \in H^1(c^*TM)$, надо дополнительно установить, что $\partial c(1) = \partial c(0)$. Для этого можно воспользоваться предыдущим рассуждением, рассмотрев вместо $c(t)$ кривую $c(t + 1/2)$. ▲ Подробнее, E инвариантно относительно диффеоморфизма

$$\Lambda \rightarrow \Lambda, \quad (c(t)) \mapsto (c(t + 1/2)).$$

Поэтому точка o является критической тогда и только тогда, когда таковым является ее образ. Но если последний — класса H^1 на отрезке $[0, 1]$, то, в частности, отображение $t \mapsto \partial c(t + 1/2)$ непрерывно при $t = 1/2$, а это и означает, что $\partial c(0) = \partial c(1)$. □

*) То есть H^1 -отображение $[0, 1] \rightarrow TM$, для которого $\tau \circ \xi = c$.

Теорема 1.3.12. *Отображение $g: \Lambda M \rightarrow \Lambda M$, сопоставляющее каждой кривой $c: S \rightarrow M$ ту же самую (с геометрической точки зрения) кривую, параметризованную пропорционально длине дуги, является непрерывным отображением, гомотопным тождественному.*

Здесь следует пояснить, когда две кривые считаются одинаковыми с геометрической точки зрения. Имеется в виду эквивалентность в том смысле, как это определяется (в более общей, чем у нас, ситуации) в параграфе о непрерывных кривых в метрическом пространстве у Колмогорова и Фомина [1]. Мы ограничимся тем, что процитируем оттуда две фразы, содержащие наглядное описание идеи этого определения: «Порядок, в котором проходятся точки кривой (при изменении параметра — *Ред.*), мы будем считать существенным свойством самой кривой ... Однако при одинаковом порядке прохождения точек пространства выбор «параметра» мы будем считать несущественным». В книге Колмогорова и Фомина речь идет о незамкнутых кривых (параметр t пробегает некоторый отрезок $[a, b]$). Переход к замкнутым кривым очевиден, надо только иметь в виду, что в этом случае встает вопрос о том, какой должна быть начальная точка (gc) (0) кривой gc . На первый взгляд кажется естественным потребовать, чтобы начальные точки кривых gc и c совпадали, т. е. чтобы было $(gc)(0) = c(0)$; после этого g определяется однозначно. Будем пока считать, что в 1.3.12 g определено именно таким образом.

Если бы мы допускали возможность изменения начальной точки, то определение gc зависело бы от конкретного выбора начальной точки $(gc)(0) \in c(S)$ и, вообще говоря, g не было бы непрерывным. Но может оказаться удобным выбирать $(gc)(0)$ некоторым специальным образом и так, чтобы $(gc)(0)$, вообще говоря, не совпадало с $c(0)$; при этом специальном определении $(gc)(0)$ по-прежнему имеет место непрерывность g . См. § 2.2, замечание перед теоремой 2.2.6.

Доказательство теоремы 1.3.12 см. в работе Аносова [3]. ▲

1.4. Условие (C) Пале—Смейла и его следствия

Мы начнем с перечисления нескольких свойств многообразия ΛM , функции E и связанных с ними структур, которые можно рассматривать как аналоги для нелинейного случая (т. е. для многообразий) хорошо известных результатов о гильбертовом пространстве $H^1(S, E)$, где E — евклидово пространство.

1.4.1. Предложение. Пусть $c \in \Lambda M$. Тогда

$$d_M^2(c(t_0), c(t_1)) \leq |t_1 - t_0| 2E(c).$$

Доказательство. Имеем $d_M^3(c(t_0), c(t_1)) \leq \left(\int_{t_0}^{t_1} |\dot{c}(t)| dt \right)^2 \leq \left| \int_{t_0}^{t_1} 1^2 dt \right| \cdot \int_{t_0}^{t_1} |\dot{c}(t)|^2 dt. \quad \square$

1.4.2. Предложение. Пусть $c, c' \in \Lambda M$. Тогда

$$d_\infty^2(c, c') \leq 2d_\Lambda^2(c, c'),$$

где d_Λ — расстояние в ΛM , индуцированное римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$.

Замечание. Это предложение обобщает 1.2.1.

Доказательство. Достаточно показать, что для каждой дифференцируемой кривой $\kappa(s)$, $0 \leq s \leq 1$, в Λ , у которой $\kappa(0) = c$ и $\kappa(1) = c'$, выполняется неравенство $d_\infty^2(c, c') \leq 2L^2(\kappa)$, где $L(\kappa)$ — длина кривой в Λ . При этом мы предполагаем, что c и c' принадлежат одной компоненте связности многообразия ΛM . Если же c и c' принадлежат разным компонентам связности, то расстояние между ними полагаем равным ∞ .

Рассмотрим отображение

$$\tilde{\kappa}: S \times I \rightarrow M, \quad (t, s) \mapsto \kappa(s)(t).$$

Из локального представления видно, что отображение

$$Ev_t: H^1(S, M) \rightarrow M, \quad c \mapsto c(t),$$

дифференцируемо, и поэтому $\kappa(s)(t_0)$ при фиксированном $t = t_0$ — также дифференцируемая кривая. Выберем t_0 так, чтобы $d_\infty(c, c') = d_M(c(t_0), c'(t_0))$. Тогда

$$\begin{aligned} d_\infty^2(c, c') &= d_M^2(c(t_0), c'(t_0)) \leq \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial s}(t_0, s) \right| ds \right)^2 \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 \max_t \left| \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial s}(t, s) \right| ds \right)^2 \leq 2 \left(\int_0^1 \left\| \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial s}(s) \right\|_1 ds \right)^2 = 2L(\kappa)^2. \quad (16) \quad \square \end{aligned}$$

1.4.3. Предложение. Пусть $c, c' \in \Lambda M$. Тогда

$$| \sqrt{2E(c)} - \sqrt{2E(c')} | \leq d_\Lambda(c, c').$$

Замечание. Это есть нелинейный аналог неравенства

$$\| \nabla \xi \|_0 - \| \nabla \xi' \|_0 \leq \| \xi - \xi' \|_1.$$

Доказательство. Так же как в доказательстве 1.4.2, соединим c и c' лежащим в ΛM дифференцируемым путем $\kappa(s)$, $0 \leq s \leq 1$.

Будем сначала считать, что $\kappa(s) \notin \Lambda^0 M$ при всех s . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \|\partial \kappa(s)\|_0 &= \frac{d}{ds} (\langle \partial \kappa(s), \partial \kappa(s) \rangle_0)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\|\partial \kappa(s)\|_0} \left\langle \partial \kappa(s), \frac{\nabla}{\partial s} \partial \kappa(s) \right\rangle_0 \leq \left\| \frac{\nabla}{\partial s} \partial \kappa(s) \right\|_0 = \\ &= \left\| \nabla_{\alpha^0} \partial(\kappa(s)) \cdot \frac{d\kappa(s)}{ds} \right\|_0 = \left\| \nabla_{\kappa(s)} \frac{d\kappa(s)}{ds} \right\|_0 \leq \left\| \frac{d\kappa(s)}{ds} \right\|_1. \end{aligned}$$

Интегрируя, получаем $\sqrt{2E(\kappa(1))} - \sqrt{2E(\kappa(0))} \leq L(\kappa)$.

▲ Очевидно, полученное неравенство справедливо и в том случае, когда концам кривой $\kappa(s)$ разрешается принадлежать $\Lambda^0 M$ (но при $0 < s < 1$ по-прежнему $\kappa(s) \notin \Lambda^0 M$). Убедимся, что оно справедливо и в общем случае произвольной дифференцируемой кривой, соединяющей c и c' . Если $c, c' \in \Lambda^0 M$, то доказываемое утверждение тривиально. Если же, скажем, $c' \notin \Lambda^0 M$, но $\kappa(s) \in \Lambda^0 M$ при некотором s , то пусть $s_0 := \max \{s; \kappa(s) \in \Lambda^0 M\}$. Тогда кривая $\kappa'(s) := \kappa((s - s_0)/(1 - s_0))$ соединяет $c(s_0)$ и c' , причем

$$\begin{aligned} \sqrt{2E(c')} - \sqrt{2E(c)} &\leq |\sqrt{2E(c')}| = |\sqrt{2E(c')} - \sqrt{2E(\kappa(s_0))}| \leq \\ &\leq L(\kappa') \leq L(\kappa). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Так как неравенство выполнено при всех κ и остается справедливым при перестановке c и c' , то предложение 1.4.3 доказано. $\square$

1.4.4. Лемма. Включение

$$\Lambda M = H^1(S, M) \hookrightarrow C^0(S, M)$$

непрерывно и компактно, т. е. образ каждого ограниченного в ΛM подмножества имеет компактное замыкание в $C^0(S, M)$.

Доказательство. Непрерывность следует из 1.4.2. Компактность будет следовать из теоремы Арцела — Асколи, если для каждого связного и ограниченного $K \subset \Lambda M$ будут установлены два утверждения:

- (i) образ включения $K \hookrightarrow C^0(S, M)$ является равностепенно непрерывным семейством функций;
- (ii) для всех $t_0 \in S$ множество $K(t_0) := \{c(t_0); c \in K\}$ относительно компактно в M .

Утверждение (ii) очевидно, так как M компактно. Для того чтобы убедиться в выполнении (i), заметим, что для фиксированного $c_0 \in K$ существует такое $k_0 > 0$, что $d_\Lambda(c, c_0) < k_0$ при всех $c \in K$. Тогда из 1.4.3 следует существование такого $\kappa > 0$, что $E|K \leq \kappa$. А поэтому равностепенная непрерывность следует из 1.4.1. $\square$

Первым приложением этой леммы является

1.4.5. Теорема. В метрике d_Λ многообразие $\Lambda M = H^1(S, M)$ является полным метрическим пространством.

Доказательство. Пусть $\{c_m\}$ — последовательность Коши в Λ . Включение этой последовательности в полное пространство $C^0(S, M)$ показывает, что у нее есть предел $c_0 \in C^0(S, M)$.

Так как c_0 допускает приближение дифференцируемой кривой c , то можно предполагать, что для достаточно больших m кривые c_m принадлежат $\mathcal{U}(c)$. Положим $\exp^{-1}_{c_0}(c_m) = \xi_m \in H^1(\mathcal{O}_c)$.

Для окончания доказательства теоремы осталось заметить, что локальные представления

$$\langle G(\xi), \cdot \rangle_0 + \langle G(\xi) \nabla \cdot, \nabla \cdot \rangle_0$$

гильбертовой метрики пространства $T_{\exp_{c_0} \xi} \Lambda M$ в пространстве $T_c \Lambda M$, где $\xi \in H^1(\mathcal{O}_c)$, все эквивалентны гильбертовой метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ на $T_c \Lambda M \cong H^1(c^* TM)$. Таким образом, последовательность Коши $\{\xi_m\}$ в метрике, которая представляет расстояние d_Λ , является последовательностью Коши в стандартной метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ на $H^1(c^* TM)$. А так как последнее пространство полно, то теорема доказана. $\square$

Для каждого действительного κ обозначим через Λ^κ или $\Lambda^\kappa M$, соответственно через $\Lambda^{\leq \kappa}$ или $\Lambda^{\leq \kappa} M$, множество тех $c \in \Lambda$, для которых $E(c) \leq \kappa$, соответственно $E(c) < \kappa$.

Отметим, что $\Lambda^0 M$ состоит из постоянных отображений (одноточечных кривых) $c_p: S \rightarrow p \in M$. Следующее предложение дает некоторую информацию о канонических включениях $M \hookrightarrow \Lambda^0 M \hookrightarrow \Lambda M$.

1.4.6. Предложение. Включение

$$i: M \rightarrow \Lambda M, \quad p \mapsto c_p,$$

является изометрическим вполне геодезическим вложением.

Доказательство. Заметим, что $c_p \in C^\infty(S, M)$ и что естественная карта $(\exp_p^{-1}, \mathcal{U}(c_p))$, соответствующая кривой c_p , представляет кривые $c \in \mathcal{U}(p)$ в виде векторных полей $\xi(t) \in H^1(c_p^* TM)$, причем $\tau^*_{c_p} \xi(t) \in T_p M$.

Положим

$$T_p \Lambda^0 = \{\xi_0 \in T_{c_p} \Lambda; \xi_0 = \text{const}\},$$

$$T_p^\perp \Lambda^0 = \{\xi \in T_{c_p} \Lambda; \langle \xi, \xi_0 \rangle_1 = \langle \xi, \xi_0 \rangle_0 = 0 \text{ при всех } \xi_0 \in T_p \Lambda^0\}.$$

Это есть ортогональное разложение пространства $T_{c_p} \Lambda$, и элементы $\xi(t) \in H^1(\mathcal{O}_{c_p})$ с $\tau^*_{c_p} \xi(t) \in T_p \Lambda^0$ в точности являются координатами точек из $\Lambda^0 M$. Таким образом, $\Lambda^0 M$ — подмногообразие, а $T_p \Lambda^0$ — его касательное пространство.

Так как на $T_c \Lambda^0 M$ метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ совпадает с $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, то включение $M \rightarrow \Lambda^0 M$, $p \mapsto c_p$, изометрично. Наконец, $\Lambda^0 M$ — вполне геодезическое, потому что ^{*}1) для $c, c' \in \Lambda^0 M$ оценка 1.4.2 может быть улучшена до $d_\infty(c, c') = d_M(c, c') = d_\Lambda(c, c')$. (17) $\square$

С помощью римановой метрики на ΛM можно определить *градиентное поле* функции E . Оно задается условием, чтобы равенство

$$\langle \text{grad } E(c), \eta \rangle_1 = DE(c) \cdot \eta = \langle \partial c, \nabla \eta \rangle_0$$

тождественно выполнялось при всех $\eta \in T_c \Lambda M$.

Если c дифференцируемо, то, воспользовавшись интегрированием по частям, можно охарактеризовать $\text{grad } E(c)(t)$ как периодическое решение уравнения (18)

$$\nabla^2 \eta(t) - \eta(t) = \nabla \partial c(t).$$

Сейчас мы подошли к основному результату, который позволяет обобщить классическую теорию функций и их критических точек с евклидовых многообразий на гильбертовы многообразия. Это так называемое *условие (C) Пале — Смейла* [1]:

«Пусть $\{c_m\}$ — такая последовательность точек из ΛM , что

- (i) последовательность $\{E(c_m)\}$ ограничена,
- (ii) последовательность $\{\|\text{grad } E(c_m)\|_1\}$ стремится к нулю.

Тогда $\{c_m\}$ имеет предельные точки, и каждая ее предельная точка является критической точкой для E .»

Замечание. Условие (C) призвано возместить отсутствие локальной компактности многообразия ΛM .

1.4.7. Теорема. Многообразие ΛM , риманова метрика на нем и функция E удовлетворяют условию (C).

Доказательство (ср. Элиассон [2]). Из 1.4.1 вытекает, что последовательность $\{c_m\}$ равномерно непрерывна. Так как множество $\{c_m(t_0)\}$ относительно компактно, то по теореме Арцела — Асколи последовательность имеет предельную точку c_0 в $C^0(S, M)$.

Так же как в доказательстве 1.4.5, можно предположить, что все элементы некоторой подпоследовательности (мы снова обозначим ее через $\{c_m\}$) принадлежат области определения $\mathcal{U}(c)$ естественной карты $(\exp_c, \mathcal{U}(c))$, $c \in C^\infty(S, M)$, и образуют

^{*}1) Иначе это можно вывести из того, что $\Lambda^0 M$ есть множество тех c , которые инвариантны относительно всех изометрий $\tilde{\chi}_x: \Lambda \rightarrow \Lambda$, определяемых в § 2.2. Действительно, если $\gamma(s)$ — геодезическая линия в Λ , для которой $\gamma(0) \in \Lambda^0$ и $d\gamma(0)/ds \in T\Lambda^0$, то все $\tilde{\chi}_x \cdot \gamma(s)$ удовлетворяют тем же начальным условиям, что и $\gamma(s)$, т. е. совпадают с ней.

последовательность Коши в d_∞ -метрике на $C^0(S, M)$. Мы покажем, что элементы $\{\xi_m := \exp_c^{-1} c_m\}$ из $H^1(\mathcal{O}_c)$ образуют последовательность Коши в $\|\cdot\|_1$ -метрике в $H^1(c^*TM)$.

Прежде всего заметим, что так как $\|\xi_l - \xi_m\|_0 \leq \|\xi_l - \xi_m\|_\infty$, то $\|\xi_l - \xi_m\|_0$ стремится к нулю. Из локального представления 1.3.2 для $\partial_c \xi$ получим, что $\|\nabla \xi_m\|_0 \leq \|\partial_c \xi_m\|_0 + \|\tilde{\theta}_c(\xi_m)\|_0$ и

$$\kappa \|\partial_c \xi_m\|_0^2 \leq \langle \tilde{G}_c(\xi_m), \partial_c \xi_m, \partial_c \xi_m \rangle_0 = 2E(c_m)$$

при некотором $\kappa > 0$. Поэтому последовательность $\|\xi_m\|_1^2$ ограничена.

Из 1.3.2 мы видим, что

$$\|\nabla \xi - \nabla \eta\|_0 \leq \|\partial_c \xi - \partial_c \eta\|_0 + \|\tilde{\theta}_c(\xi) - \tilde{\theta}_c(\eta)\|_0.$$

Следовательно, достаточно показать, что

$$\|\partial_c \xi_l - \partial_c \xi_m\| \rightarrow 0 \quad \text{при } l, m \rightarrow \infty.$$

Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что, согласно 1.3.2, 1.3.3 и 1.3.10,

$$\begin{aligned} 2\kappa \|\partial_c \xi - \partial_c \eta\|_0^2 &\leq \langle \tilde{G}_c(\xi), (\partial_c \xi - \partial_c \eta), (\partial_c \xi - \partial_c \eta) \rangle_0 + \\ &\quad + \langle \tilde{G}_c(\eta), (\partial_c \xi - \partial_c \eta), (\partial_c \xi - \partial_c \eta) \rangle_0 = \\ &= 2DE_c(\xi) \cdot (\xi - \eta) - 2DE_c(\eta) \cdot (\xi - \eta) - \\ &\quad - \langle (\tilde{G}_c(\xi) - \tilde{G}_c(\eta)) \cdot (\partial_c \xi + \partial_c \eta), (\partial_c \xi - \partial_c \eta) \rangle_0 + \\ &\quad + 2 \langle \tilde{G}_c(\xi) \cdot \partial_c \xi, \tilde{\theta}_c(\xi) - \tilde{\theta}_c(\eta) - (D_2 \theta_c)^{\sim}(\xi) \cdot (\xi - \eta) \rangle_0 - \\ &\quad - 2 \langle \tilde{G}_c(\eta) \cdot \partial_c \eta, \tilde{\theta}_c(\xi) - \tilde{\theta}_c(\eta) - (D_2 \theta_c)^{\sim}(\eta) \cdot (\xi - \eta) \rangle_0 - \\ &\quad - \langle (D_2 G_c)^{\sim}(\xi) \cdot (\xi - \eta, \partial_c \xi), \partial_c \xi \rangle_0 + \\ &\quad + \langle (D_2 G_c)^{\sim}(\eta) \cdot (\xi - \eta, \partial_c \eta), \partial_c \eta \rangle_0. \end{aligned}$$

Поскольку $\|\xi_m\|_1$ ограничены, а следовательно, и $\|\partial_c \xi_m\|_0$ тоже ограничены и поскольку $\|\xi_l - \xi_m\|_0$ и $\|DE_c(\xi_l)\|_1$ стремятся к нулю, то каждое из слагаемых в правой части будет стремиться к нулю, если туда вместо ξ и η подставить ξ_l и ξ_m . Это завершает доказательство 1.4.7. $\square$

Через $Cr\Lambda$ будем обозначать множество критических точек функции E на многообразии $\Lambda = \Lambda M$. В качестве первого следствия теоремы 1.4.7 получаем:

1.4.8. Лемма. Для $\kappa > 0$ обозначим через K множество $Cr\Lambda \cap E^{-1}(\kappa)$. Пусть $\mathcal{U}$ — открытая окрестность K в Λ .

Утверждение. Существуют такие $\varepsilon = \varepsilon(\kappa, \mathcal{U}) > 0$ и $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что

$$\text{из } c \in (\Lambda^{\kappa+\varepsilon} - \Lambda^{(\kappa-\varepsilon)-}) \cap \mathcal{U} \quad \text{следует} \quad \|\text{grad } E(c)\|_1 \geq \eta.$$

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы не выполнено. Тогда найдется лежащая в $\mathcal{U}$ последовательность $\{c_m\}$, для

которой $\lim \| \text{grad } E(c_m) \|_1 = 0$ и $\lim E(c_m) = \kappa$. Из 1.4.7 следует существование принадлежащей K предельной точки этой последовательности, и мы получили противоречие. $\square$

Замечание. Особенно важным является случай $K = \emptyset$, где в качестве $\mathcal{U}$ можно выбрать $\emptyset$.

Другим непосредственным следствием 1.4.7 является

1.4.9. Предложение. $Cr\Lambda \cap E^{-1}(\kappa)$ и $Cr\Lambda \cap \Lambda^*$ компактны при каждом $\kappa \geq 0$. $\square$

Так же как и в случае конечных размерностей, для достаточно малого интервала, содержащего точку $0 \in \mathbb{R}$, существует начинающаяся в точке c интегральная кривая $\varphi_s c$ векторного поля $-\text{grad } E$ на Λ , см. Ленг [1].

1.4.10. Лемма. (i) $\frac{d}{ds} E(\varphi_s c) = -\|\text{grad } E(\varphi_s c)\|_1^2$, следовательно,

$$E(\varphi_{s_1} c) - E(\varphi_{s_0} c) = - \int_{s_0}^{s_1} \|\text{grad } E\|_1^2 ds \leq 0 \text{ при } s_1 \geq s_0;$$

$$(ii) \ d_\Lambda^2(\varphi_{s_1} c, \varphi_{s_0} c) \leq \left| \int_{s_0}^{s_1} \|\text{grad } E\|_1^2 ds \right| \cdot |s_1 - s_0| = |E(\varphi_{s_1} c) - E(\varphi_{s_0} c)| \times$$

$$\times |s_1 - s_0| \leq E(o) |s_1 - s_0| \text{ при } s_0, s_1 \geq 0.$$

Доказательство. (i) Пользуясь формулой $d\varphi_s c/ds = -\text{grad } E(\varphi_s c)$, получим

$$\frac{d}{ds} E(\varphi_s c) = DE(\varphi_s c) \cdot (-\text{grad } E(\varphi_s c)) = -\|\text{grad } E(\varphi_s c)\|_1^2;$$

$$(ii) \ d_\Lambda^2(\varphi_{s_1} c, \varphi_{s_0} c) \leq \left(\int_{s_0}^{s_1} \left\| \frac{d\varphi_s c}{ds} \right\|_1 ds \right)^2 \leq \left| \int_{s_0}^{s_1} \|\text{grad } E\|_1^2 ds \right| \cdot |s_1 - s_0|. \quad \square$$

Как следствие имеем:

1.4.11. Теорема. Отображение

$$\varphi_s: \Lambda \rightarrow \Lambda, \quad c \mapsto \varphi_s c,$$

определено при всех $s \geq 0$.

Замечание. Здесь мы существенно пользуемся тем фактом, что $E(\varphi_s c)$ ограничено снизу нулем. Если $E(\varphi_s c)$ ограничено также и сверху, то такое же рассуждение показывает, что $\varphi_s c$ определено также и при всех $s \leq 0$.

Доказательство. Допустим, что существует такое $c \in \Lambda$, что $\varphi_s c$ определено только для $s < s^+$, где $s^+ < \infty$. Рассмотрим лежащую в $[0, s^+]$ последовательность действительных чисел $\{s_m\}$ с $\lim s_m = s^+$. Из 1.4.10 (ii) следует, что $\{\varphi_{s_m} c\}$ является последователь-

ностью Коши, и поэтому, согласно 1.4.5, предел $\lim \varphi_{s_m} c$ существует. Его мы будем обозначать через $\varphi_{s^+} c$ *). По этой причине $\varphi_s c$ может быть определено также и на $[0, s^+ + \varepsilon[$ при некотором $\varepsilon > 0$. $\square$

Следующая лемма является весьма важной для доказательства существования критических точек вне Λ^0 .

1.4.12. Лемма. Допустим, что $\kappa \geq 0$ не является критическим значением, т. е. $\text{Cr} \Lambda \cap E^{-1}(\kappa) = \emptyset$. Тогда $\kappa > 0$ и существуют такие $\varepsilon > 0$ и $s_0 \geq 0$, что $\varphi_s \Lambda^{\kappa+\varepsilon} \subset \Lambda^{(\kappa-\varepsilon)}$ при всех $s \geq s_0$.

Доказательство. Из 1.4.8 следует, что для $\mathcal{U} = \emptyset$ существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$, что $\|\text{grad } E(c)\|_1 \geq \eta$ при всех c , удовлетворяющих условию $\kappa - \varepsilon \leq E(c) \leq \kappa + \varepsilon$.

Если $E(c) < \kappa - \varepsilon$, то и $E(\varphi_s c) < \kappa - \varepsilon$ при всех $s \geq 0$. Возьмем какое-нибудь $s_0 > 2\varepsilon/\eta^2$ и выведем противоречие из предположения, что существует такое c , для которого $\kappa - \varepsilon \leq E(c) \leq \kappa + \varepsilon$ и $E(\varphi_s c) \geq \kappa - \varepsilon$ при всех s из отрезка $0 \leq s \leq s_0$.

В самом деле, из 1.4.10(i) видно, что

$$E(\varphi_{s_0} c) = E(c) - \int_0^{s_0} \|\text{grad}(\varphi_s c)\|_1^2 ds \leq \kappa + \varepsilon - \eta^2 s_0 < \kappa - \varepsilon. \quad \square$$

Для последующих приложений докажем такое

1.4.13. Предложение. Рассмотрим дифференцируемое сечение $\omega: \Lambda M \rightarrow T^* \Lambda M$, определяемое условием: $\omega(c) \cdot \eta = -\langle \partial c, \eta \rangle_0$ при всех $\eta \in T_c \Lambda$.

Утверждение. Векторное поле u , двойственное ω по отношению к римановой метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, т. е. для которого $\langle u(c), \eta \rangle_1 = -\langle \partial c, \eta \rangle_0$ при всех $\eta \in T_c \Lambda$, задается формулой

$$u(c) = \nabla \text{grad } E(c) - \partial c.$$

Оно удовлетворяет соотношениям $\nabla u = \text{grad } E$, $\langle u, \text{grad } E \rangle_1 = 0$.

Доказательство. Дифференцируемость ω следует из того, что ω есть композиция дифференцируемых отображений

$$\Lambda \xrightarrow{\partial} \alpha^0 \rightarrow (\alpha^0)^* \rightarrow (\alpha^1)^*,$$

второе из которых является изоморфизмом векторного расслоения и сопряженного к нему, индуцированным римановой метри-

*) Точнее, пусть $c^+ = \lim \varphi_{s_m} c$. При достаточно малом δ , екажем при $|\delta| < \varepsilon$, можно говорить о $\varphi_{\delta} c^+$. При этом, когда $\delta < 0$, $\varphi_{\delta} c^+ = \lim \varphi_{s_m + \delta} c = \varphi_{s^+ + \delta} c$. Поэтому траектория точки c может быть определена и в интервале $[0, s^+ + \varepsilon]$, а именно: при $s \in [s^+, s^+ + \varepsilon]$ полагаем $\varphi_s c = \varphi_{s - s^+} c^+$; это законно, ибо совпадает с исходным $\varphi_s c$ при $s \in]s^+ - \varepsilon, s^+]$.

кой, а третье сопряжено к вложению $\alpha^1 \hookrightarrow \alpha^0$. Доказываемые формулы достаточно установить для $c \in C^\infty(S, M)^*$. В этом случае если за u принять приведенное выше выражение, то с помощью формулы для $\text{grad } E$, следующей за 1.4.6, получится, что $\nabla u = \text{grad } E$. Тогда $\nabla^2 u(c) - u(c) = \partial c$, откуда следует, что действительно $\omega(c) \cdot \eta = \langle u, \eta \rangle_1$.

Чтобы получить последнее утверждение, заметим, что для произвольного $w \in T_c \Lambda$

$$2 \langle w, \nabla w \rangle_0 = \int_S d \langle w(t), w(t) \rangle = 0,$$

а если также и $\nabla w \in T_c \Lambda = H^1(c^* TM)$, то $\langle w, \nabla w \rangle_1 = \langle w, \nabla w \rangle + \langle \nabla w, \nabla w \rangle = 0$. Отсюда при $w = u$, $\nabla w = \text{grad } E$ получается наше утверждение **). □

1.4.14. Предложение. *Существуют $\varepsilon > 0$ и $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$, такие, что при всех $c \in \Lambda^\varepsilon$*

$$\|\text{grad } E(c)\|^2 \geq \alpha 2E(c).$$

Доказательство. Из 1.4.13 получаем

$$\|\text{grad } E(c)\|^2 = \langle \partial c, \nabla \text{grad } E(c) \rangle_0 = 2E(c) + \langle \partial c, u(c) \rangle_0.$$

▲ Мы докажем, что при достаточно малом $E(c)$ имеет место оценка

$$(*) \quad |\langle \partial c, u(c) \rangle_0| \leq \beta (\|\text{grad } E(c)\|^2 + E(c)/2)$$

с некоторым $\beta < 4$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\text{grad } E(c)\|^2 &\geq 2E(c) - \beta (\|\text{grad } E(c)\|^2 + E(c)/2), \\ (1 + \beta) \|\text{grad } E(c)\|^2 &\geq (2 - \beta/2) E(c), \end{aligned}$$

что и представляет собой требуемый результат, поскольку $2 - \beta/2 > 0$.

Чтобы доказать (*), допустим сначала, что в некоторой окрестности точки $c(0) = c(1)$ на M , содержащей всю кривую c , существуют евклидовы координаты. Обозначая локальные представления c , u и $\text{grad } E$ в этих координатах теми же символами,

*) В аргументации «по непрерывности», позволяющей перейти от C^∞ к H^1 , в данном случае имеется небольшая тонкость: в доказываемом выражении для u оба слагаемых являются непрерывными сечениями α^0 , так что если $c_n \in C^\infty(S, M)$, $c_n = c$ в ΛM , то сначала заключаем, что $u(c_n) \rightarrow \nabla \text{grad } E(c) - \partial c$ в α^0 . Но, с другой стороны, u является непрерывным сечением α^1 , так что $u(c_n) \rightarrow u(c)$ в α^1 , а значит, и в α^0 . Отсюда уже следует, что $u(c) = \nabla \text{grad } E(c) - \partial c$.

**) Между прочим, уравнение для u имеет смысл и однозначно определяет u при всех $c \in \Lambda M$, причем это то же самое u , о котором говорится в 1.4.13 (см. (18), б)). Поэтому $\text{grad } E(c) = \nabla (\nabla^2 - 1)^{-1} \partial c$ при всех $c \in \Lambda M$ (тогда как при наличии у c надлежащих свойств дифференцируемости $\text{grad } E(c) = (\nabla^2 - 1)^{-1} \nabla \partial c$).

получаем из $\nabla u(c) = \text{grad } E(c)$, что для $u(t) := u(c)(t)$

$$u(t) = u(0) + \int_0^t (\text{grad } E(c))(s) ds.$$

Введем обозначения $(\text{grad } E(c))(s) = y(s)$, $\int_0^t y(s) ds = z(t)$. Поскольку

$$\|z\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |z(t)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |y(t)| = \|y\|_\infty \leq 2\|y\|_1$$

(ср. с 1.2.1), то, используя тот факт, что $c(0) = c(1)$ (вследствие чего $\int_s \langle \dot{c}(t), v \rangle dt = 0$ для любого постоянного вектора v), получаем

$$\begin{aligned} |\langle \partial c, u \rangle_0| &= \left| \int_s \langle \dot{c}(t), u(0) \rangle dt + \int_s \langle \dot{c}(t), z(t) \rangle dt \right| = \\ &= \left| \int_s \langle \dot{c}(t), z(t) \rangle dt \right| \leq \sqrt{2E(c)} \|z\|_\infty \leq 2\sqrt{2E(c)} \|\text{grad } E(c)\|_1, \end{aligned}$$

т. е. (*) выполняется при $\beta = 2$. $\blacktriangle$

В общем случае, когда не существует локальных евклидовых координат, заметим, что при достаточно малом $E(c)$ кривая c целиком лежит в малой окрестности своего начала $c(0)$ на M , ибо $L(c) := \text{длина } c \leq \sqrt{2E(c)}$.

Следовательно, нормальные координаты в точке $c(0)$ *) будут сколь угодно мало отличаться от евклидовых координат, если только $E(c)$ выбрано достаточно малым, причем это свойство выполняется равномерно для всех кривых c на M , так как M — компакт.

Таким образом, мы доказали (*) и, следовательно, 1.4.14. (19) $\square$

1.4.15. Теорема. Существует такое $\varepsilon > 0$, что для каждого элемента $c \in \Lambda^\varepsilon M$ начинающаяся в c траектория потока, порожденного полем $-\text{grad } E$, имеет единственную предельную точку, которая принадлежит $\Lambda^0 M$ — множеству односточечных кривых. Эти траектории имеют конечную длину. Кроме того, $\Lambda^0 M$ является сильным деформационным ретрактом множества $\Lambda^\varepsilon M$.

Замечание. Это было доказано Кархером [2]. Элиассон [4] дал другое доказательство, которое тесно связано с конструкцией устойчивого многообразия для $\Lambda^0 M$ (ср. с § 2.5).

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ таким же, как в 1.4.14, и так, чтобы в $\Lambda^\varepsilon - \Lambda^0$ не было критических точек. Последнее условие обязательно будет выполняться для всех достаточно малых ε ,

*) То есть координаты, отвечающие карте $(\varphi \circ (\exp|_{\mathcal{O}_{c(0)}})^{-1}, \exp|_{\mathcal{O}_{c(0)}})$, где $\varphi: T_{c(0)}M \rightarrow \mathbb{R}^{\dim M}$ — изометрия.

так как при $E(c) \leq \varepsilon$ выполняются неравенства $L(c) \leq \sqrt{2E(c)} \leq \sqrt{2\varepsilon}$, а известно, что на компактном римановом многообразии нет замкнутых геодезических произвольно малой длины; см. Громоу, Клингенберг, Мейер [1].

Согласно 1.4.14, для $c \in \Lambda^\varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} L(\text{траектория } \varphi_s c) &= \int_0^\infty \left\| \frac{d}{ds} \varphi_s c \right\|_1 ds = \int_0^\infty \|\operatorname{grad} E(\varphi_s c)\|_1 ds = \\ &= \int_0^\infty \|\operatorname{grad} E\|_1^{-1} \cdot \left(-\frac{dE}{ds}(\varphi_s c) \right) ds \leq \alpha^{-1/2} \int_0^{E(c)} (2E)^{-1/2} dE = \alpha^{-1/2} \sqrt{2E(c)}, \end{aligned}$$

так как $E(\varphi_\infty c) = 0^*$.

Вследствие этого траектория $\varphi_s c$ имеет ровно одну предельную точку, которую мы обозначим через $\varphi_\infty c$ и которая должна лежать в $\Lambda^0 M$.

Определим теперь деформацию $\Phi_\tau: \Lambda^\varepsilon \rightarrow \Lambda$, $0 \leq \tau \leq 1$, полагая $\Phi_\tau c := \varphi_{s(\tau)} c$, если $c \notin \Lambda^0$, где $s(\tau) := \operatorname{tg}(\pi\tau/2)$, и $\Phi_\tau c := c$, если $c \in \Lambda^0$.

Осталось показать, что $\Phi_\tau c$ непрерывно зависит от τ и c . Для этого достаточно заметить, что в соответствии с нашими оценками длина траектории $\varphi_s c$ становится малой равномерно по всем c , если $E(c)$ достаточно мало. Поэтому для предельной точки $\Phi_1 c = \varphi_\infty c \in \Lambda^0$ и для любой ее окрестности $B_{2\delta}(\Phi_1 c)$ радиуса 2δ можно выбрать столь малое $\eta > 0$, что длина траектории любой точки из Λ^η меньше δ . Таким образом, осталось убедиться в существовании такой окрестности точки c , что каждая траектория с началом в точке из этой окрестности попадает в $\Lambda^\eta \cap B_\delta(\Phi_1 c)$. Но такая окрестность существует в силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий на конечном отрезке времени. $\square$

1.4.16. Следствие. Множества $\Lambda^\varepsilon M$, $\varepsilon > 0$, образуют фундаментальную систему окрестностей множества $\Lambda^0 M$.

Доказательство. Из доказательства 1.4.15 мы знаем, что если $c \in \Lambda^\varepsilon M$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, то расстояние $d_\Lambda(c, \Lambda^0 M)$ меньше заданного $\rho > 0$. С другой стороны, из 1.4.3 следует, что если $d_\Lambda(c, \Lambda^0 M)$ достаточно мало, то c принадлежит заданному $\Lambda^{\varepsilon'} M$, $\varepsilon' > 0$. $\square$

* На самом деле здесь еще не надо знать ничего о $\varphi_\infty c$ (т. е. о $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_s c$);

просто $\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{E(c)} \frac{d}{ds} E(\varphi_s c) ds \leq \int_0^{E(c)} \frac{d}{ds} E(\varphi_s c) ds$, ибо $\lim_{s \rightarrow \infty} E(\varphi_s c) \geq 0$.

Геометрия риманова гильбертова многообразия $(\Lambda M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ до сих пор не изучена достаточно подробно. Например, не ясен геометрический смысл геодезических на ΛM , рассматриваемых как однопараметрические семейства замкнутых H^1 -кривых на M .

В 1.4.5 мы убедились, что $(\Lambda M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ — полное метрическое пространство. Теорема Хопфа — Ринова (ср. Громол, Клингенберг, Мейер [1]), состоящая в том, что на полном конечномерном связном римановом многообразии любые две точки можно соединить минимальной геодезической, в общем случае не выполняется для римановых гильбертовых многообразий. Элиассон показал, однако, что на $(\Lambda M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ утверждение теоремы Хопфа — Ринова справедливо (неопубликовано).

Мы приведем здесь результат, устанавливающий некоторую связь между замкнутыми геодезическими на M и замкнутыми геодезическими на $(\Lambda M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$.

1.4.17. Предложение. Пусть $c = (c(t))$ — замкнутая геодезическая. Тогда кривая $\kappa_c(s) = e^{2\pi i s} \cdot c := (c(t-s))$, где $s \in S$ и $t \in S$, является замкнутой геодезической на ΛM длины $L(c) := \text{длина } c$.

Доказательство. Так как $\nabla \partial c = 0$, то $\|\kappa'_c(s)\|^2 = \langle -\partial c, -\partial c \rangle_0 = = L^2(c)$, т. е. $\kappa_c(s)$ параметризована пропорционально длине дуги и имеет длину $L(c)$.

Осталось показать, что κ_c локально минимизирует расстояние. Выберем достаточно малое $\varepsilon > 0$. Пусть $\lambda(s)$, $0 \leq s \leq \varepsilon$, — произвольная кривая в Λ , идущая из $\kappa_c(0) = \lambda(0)$ в $\kappa_c(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)$. Положим $\lambda(s)(t) = \tilde{\lambda}(t, s)$. Так как $c(t-s)$, $0 \leq s \leq \varepsilon$, — кривая минимальной длины, соединяющая точки $c(t)$ и $c(t-\varepsilon)$, то

$$\int_0^\varepsilon |\partial \tilde{\lambda}(t, s) / \partial s| ds \geq \int_0^\varepsilon |\dot{c}(t-s)| ds.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial \tilde{\lambda}(t, s)}{\partial s} \right| dt \leq \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial \tilde{\lambda}(t, s)}{\partial s} \right|^2 dt \right)^{1/2} = \left\| \frac{d\lambda}{ds} \right\|_0 \leq \left\| \frac{d\lambda}{ds} \right\|_1,$$

$$\int_0^\varepsilon ds \int_0^1 \left| \frac{\partial \tilde{\lambda}(t, s)}{\partial s} \right| dt \leq \text{длина } \lambda,$$

так что

$$(\text{длина } \lambda) \geq \int_0^\varepsilon \int_0^1 |\partial \tilde{\lambda}(t, s) / \partial s| dt ds \geq (\text{длина } \kappa_c | [0, \varepsilon]). \quad \square$$

В заключение этой главы упомянем об одном обобщении теории замкнутых геодезических, а именно о теории геодезических, инвариантных относительно изометрий. ▲ Геодезическая (не обя-

зательно замкнутая) $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ называется *инвариантной относительно изометрии* $A: M \rightarrow M$, если существует такое t_0 , что $Ac(t) = c(t + t_0)$ при всех t . При $A = \text{id}_M$ и $t_0 \neq 0$ это понятие сводится к обычным замкнутым геодезическим. Если же A имеет конечный порядок (т. е. $A^n = \text{id}_M$ при некотором n) и $t_0 \neq 0$, то геодезическая, инвариантная относительно A , замкнута, но, вообще говоря, не всякая замкнутая геодезическая инвариантна относительно A . Роль, которую в теории замкнутых геодезических играет ΛM , в теории геодезических, инвариантных относительно изометрии A , играет пространство H^1 -отображений $c: [0, 1] \rightarrow M$, для которых $c(1) = Ac(0)$. (Очевидно, оно приспособлено для «улавливания» как раз тех инвариантных относительно A геодезических, для которых $t_0 \neq 0$. Если же $Ac(t) = c(t)$ при всех t , то, очевидно, геодезическая $c(t)$ целиком лежит во вполне геодезическом подмногообразии неподвижных точек изометрии A , и вопрос о таких геодезических относится к свойствам этого подмногообразия.) Основы теории и первые результаты см. в работах Грове [1], [2]. Для случая, когда A имеет конечный порядок, известны более продвинутые результаты, аналогичные результатам об обычных геодезических, приведенным в § 4.2 настоящей книги (Грове, Танака [1], Грове, Гальперин, Виге-Пуарье [1]). ▲

ТЕОРИЯ МОРСА — ЛЮСТЕРНИКА — ШНИРЕЛЬМАНА НА МНОГООБРАЗИИ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ

В качестве первого применения результатов гл. 1 мы разовьем теорию Люстерника — Шнирельмана на $(\Lambda M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1, E)$. В частности, следуя Люстернику и Фету, мы докажем существование по крайней мере одной замкнутой геодезической на произвольном компактном римановом многообразии.

В § 2.2 мы изучим каноническое действие на многообразии ΛM группы $O(2)$ (в частности, действие $SO(2) \cong S$ на ΛM и действие $\mathbb{Z}_2 \cong O(2)/SO(2)$ на $\tilde{\Lambda M} := \Lambda M/S$) и таким образом придем к пространству ΠM , состоящему из непараметризованных замкнутых кривых на M . Затем мы подробно опишем пространство ΓS^n окружностей на стандартной n -мерной сфере S^n . С самого начала развития теории замкнутых геодезических чрезвычайно важную роль играли те классы гомологий пространства ΠS^n , которые могут быть представлены циклами, принадлежащими ΓS^n . Как мы увидим в гл. 4 и 5, такая ситуация сохранилась и до наших дней.

§ 2.4 посвящен подробному изложению теории Морса на $(\Lambda M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1, E)$. При этом предполагается, что все замкнутые геодезические принадлежат невырожденным критическим подмногообразиям. В последнем параграфе приводится усовершенствование этой теории, достигаемое путем введения комплекса Морса. Этот комплекс содержит в очищенном и сжатом виде всю существующую для нас информацию о $(\Lambda M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1, M)$.

2.1. Теория Люстерника — Шнирельмана на ΛM

Мы продолжаем пользоваться понятиями и обозначениями, введенными в гл. 1. В частности, напомним, что мы рассматриваем полугруппу уменьшающих E деформаций *)

$$\varphi_s: \Lambda M \rightarrow \Lambda M, \quad c \mapsto \varphi_s c, \quad s \geq 0,$$

определяемых как сдвиги по траекториям векторного поля — $\text{grad } E$.

*) В прошлом, когда работали непосредственно с функционалом длины, использовался более выразительный термин: «сокращающие (или укорачивающие) деформации», но с переходом к E от него пришлось отказаться.

Непустое множество $\mathcal{A}$ таких непустых подмножеств $A \subset \Lambda = \Lambda M$, что для каждого из них $E|A$ ограничено, назовем φ -семейством, если оно замкнуто относительно φ_s , т. е. если из $A \in \mathcal{A}$ следует, что $\varphi_s A \in \mathcal{A}$ при всех $s \geq 0$.

Примеры φ -семейств. (i) Множество элементов $\{\varphi_s c; s \geq 0\}$ траектории потока φ_s образует φ -семейство. Вообще, если A — такое непустое подмножество Λ , что $E|A$ ограничено, то множество $\{\varphi_s A; s \geq 0\}$ является φ -семейством.

(ii) Множество всех элементов связной компоненты пространства Λ составляет φ -семейство.

(iii) Рассмотрим свободный гомотопический класс непрерывных отображений k -мерной сферы в Λ . Множество образов этих отображений является φ -семейством, потому что $f: S^k \rightarrow \Lambda$ и $\varphi_s \circ f: S^k \rightarrow \Lambda$ лежат в одном и том же гомотопическом классе.

(iv) Пусть ω — отличный от нуля класс сингулярных гомологий многообразия Λ (коэффициенты любые). Для каждого сингулярного цикла $u \in \omega$ обозначим через $|u|$ его носитель, т. е. объединение образов составляющих u сингулярных симплексов. Тогда $E||u|$ ограничено и $\varphi_s u$ гомологично u ; следовательно, $\{u; u \in \omega$ (т. е. u — цикл, представляющий ω)} есть φ -семейство *).

▲ (v) Пусть точки подмножества $\Lambda' \subset \Lambda$ образуют φ -семейство (т. е. $\varphi_s \Lambda' \subset \Lambda'$ при всех $s \geq 0$), и пусть $\omega \in H_*(\Lambda, \Lambda')$ (сингулярные гомологии с любыми коэффициентами). Тогда $\{u; u \in \omega\}$ есть φ -семейство. ▲

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Назовем φ -семейство $\mathcal{A}$ φ -семейством $\Lambda \bmod \Lambda^\alpha$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что промежуток $[\alpha, \alpha + \varepsilon]$ не содержит критических значений $E^{(20)}$ и из $A \in \mathcal{A}$ следует, что $A \not\subset \Lambda^{\alpha+\varepsilon}$.

При $\alpha < 0$ снова получаем понятие φ -семейства многообразия Λ .

Примером φ -семейства $\Lambda \bmod \Lambda^\alpha$ является множество, состоящее из носителей $|u|$ циклов u , представляющих нетривиальный класс гомологий из $\Lambda \bmod \Lambda^\alpha$ с тем же самым α **). При этом особый интерес представляет случай $\alpha = 0$. ▲ Если в примере (v) $\Lambda^0 \subset \Lambda'$, то $\{u; u \in \omega\}$ является φ -семейством $\Lambda \bmod \Lambda^0$. ▲

*) Сказанное, очевидно, никак не зависит от того, что $\omega \neq 0$; просто при $\omega = 0$ соответствующее φ -семейство бесполезно для наших целей.

**) Здесь предполагается, что если для любого $\varepsilon > 0$ в классе гомологий $\omega \in H_*(\Lambda \bmod \Lambda^\alpha)$ имеются сингулярные относительные циклы u , носители которых лежат в $\Lambda^{\alpha+\varepsilon}$, то $\omega = 0$. Это верно в том случае, когда $\alpha = 0$ (см. последнюю фразу из утверждения теоремы 1.4.15; в основном именно этот случай и нужен для дальнейшего), и в ряде других случаев (например, если $Cr\Lambda \cap E^{-1}(\alpha)$ состоит из невырожденных критических многообразий (см. § 2.4) и, конечно, если $\alpha \notin E(Cr\Lambda)$), но не всегда. Аналогичное утверждение для функций на конечномерных замкнутых многообразиях тоже верно не всегда.

Число

$$\kappa_{\mathcal{A}} := \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup E|A$$

назовем критическим уровнем Φ -семейства $\mathcal{A}$ многообразия $\Lambda \bmod \Lambda^\alpha$.

То что $\kappa_{\mathcal{A}}$ является также и критическим значением функции E , вытекает из следующей теоремы.

2.1.1. Теорема. Пусть $\kappa = \kappa_{\mathcal{A}}$ — критический уровень Φ -семейства $\mathcal{A}$ многообразия $\Lambda \bmod \Lambda^\alpha$. Тогда $\kappa > \alpha$ и существует такое $c \in Cr\Lambda$, что $E(c) = \kappa$.

2.1.2. Дополнение. Пусть $\mathcal{U}$ — открытая окрестность критического множества $K = Cr\Lambda \cap E^{-1}(\kappa)$. Тогда существует такое $A' \in \mathcal{A}$, что $\Phi_s A' \subset \mathcal{U} \cup \Lambda^{\kappa-\varepsilon}$ при всех $s \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что $\kappa \leq \alpha$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A \in \mathcal{A}$, что $A \subset \Lambda^{\kappa+\varepsilon}$, а это находится в противоречии с определением Φ -семейства $\Lambda \bmod \Lambda^\alpha$.

Предположим, что $Cr\Lambda \cap E^{-1}(\kappa)$ пусто. Тогда, согласно 1.4.12, существуют такие $\varepsilon > 0$ и $s_0 \geq 0$, что $\Phi_{s_0} A \subset \Lambda^{(\kappa-\varepsilon)-}$ для каждого $A \subset \Lambda^{\kappa+\varepsilon}$. А поскольку для каждого $\varepsilon > 0$ найдется лежащее в $\Lambda^{\kappa+\varepsilon}$ множество $A \in \mathcal{A}$, то получается противоречие с определением $\kappa = \kappa_{\mathcal{A}}$. Таким образом, теорема доказана.

Согласно 1.4.15, для доказательства дополнения достаточно рассмотреть случай $\kappa > 0$.

Для заданной окрестности $\mathcal{U}$ множества K выберем такую окрестность $\mathcal{U}^\rho$ этого множества, чтобы она лежала строго внутри $\mathcal{U}$ в том смысле, что при некотором $\rho > 0$

$$d_\Lambda(c, c') \geq \rho \quad \text{для} \quad c \in \mathcal{U}^\rho, c' \notin \mathcal{U}.$$

Такая окрестность, конечно, существует, так как K компактно, а топология задается метрикой d_Λ .

Согласно 1.4.8, существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$, что $\|\text{grad } E(c)\|_1 \geq \eta$, когда

$$(*) \quad c \in \mathcal{U}^\rho \cap (\Lambda^{\kappa+\varepsilon} - \Lambda^{(\kappa-\varepsilon)-}).$$

Заметим, что мы вправе считать ε сколь угодно малым и что η с уменьшением ε не уменьшается.

Пусть $\Phi_s c$, $0 \leq s \leq s_0$, — траектория (точнее, дуга траектории), которая идет из точки $c \in \mathcal{U}^\rho \cap (\Lambda^{\kappa+\varepsilon} - \Lambda^{(\kappa-\varepsilon)-})$ в точку $c' = \Phi_{s_0} c \in \mathcal{U}$ и целиком содержится в $\Lambda^{\kappa+\varepsilon} - \Lambda^{(\kappa-\varepsilon)-}$. Эта траектория обязательно содержит дугу, которая лежит в $\mathcal{U}^\rho \cap (\Lambda^{\kappa+\varepsilon} - \Lambda^{(\kappa-\varepsilon)-})$ и длина которой $> \rho$; поэтому используя 1.4.10, можно оценить величину, на которую уменьшается E при движении по этой

траектории:

$$E(c) - E(c') = \int_0^{s_0} \|\text{grad } E(\varphi_s c)\|_1^2 ds \geq \eta^2 s_0 \geq \eta^2 \rho^2 / (\kappa + \varepsilon).$$

Следовательно, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то можно быть уверенным, что траектория $\varphi_s c$ точки $c \in \mathcal{U}^0 \cap \Lambda^{\kappa+\varepsilon}$ никогда не покинет множество $(\mathcal{U} \cup \Lambda^{(\kappa-\varepsilon)-}) \cap \Lambda^{\kappa+\varepsilon}$, так как в противном случае значение E вдоль этой траектории уменьшится более чем на 2ε , и траектория войдет в $\Lambda^{(\kappa-\varepsilon)-}$.

Теперь ясно, что для любого $c \in \Lambda^{\kappa+\varepsilon}$ найдется такое $s_0 \in [0, 2\varepsilon/\eta^2]$, что $\varphi_s c \in (\mathcal{U} \cap \Lambda^{\kappa+\varepsilon}) \cup \Lambda^{(\kappa-\varepsilon)-}$ при всех $s \geq s_0$. Действительно, пока $\varphi_s c \in \mathcal{U}^0 \cap (\Lambda^{\kappa+\varepsilon} - \Lambda^{(\kappa-\varepsilon)-})$, имеем $\frac{d}{ds} E(\varphi_s c) \leq -\eta^2$, поэтому $\varphi_s c$ не может лежать в этом множестве при всех $s \in [0, 2\varepsilon/\eta^2]$. Значит, существует такое $s_0 \in [0, 2\varepsilon/\eta^2]$, что либо $\varphi_{s_0} c \in (\mathcal{U}^0 \cap \Lambda^{\kappa+\varepsilon})$ — и тогда мы можем применить наш предыдущий результат, либо $\varphi_{s_0} c \in \Lambda^{(\kappa-\varepsilon)-}$ — и тогда $\varphi_s c$ останется в $\Lambda^{(\kappa-\varepsilon)-}$ при всех $s \geq s_0$.

В частности, $\varphi_s \Lambda^{\kappa+\varepsilon} \subset \mathcal{U} \cap \Lambda^{\kappa-}$ при всех $s \geq 2\varepsilon/\eta^2$. Возьмем теперь такое $A \in \mathcal{A}$, что $A \subset \Lambda^{\kappa+\varepsilon}$, и положим $A' := \varphi_{2\varepsilon/\eta^2} A$. Тем самым дополнение доказано. $\square$

Замечание. Предположим, что все множества A из семейства $\mathcal{A}$ компактны и что K разбито на конечное число непересекающихся замкнутых подмножеств $K_1, \dots, K_m$. Тогда среди последних существует такое подмножество, скажем K_i , что для каждой его открытой окрестности $\mathcal{U}_i$ найдется такое $A \in \mathcal{A}$, что при всех $s \geq 0$

$$\varphi_s A \cap (\mathcal{U}_i \cup \Lambda^{\kappa-}) \neq \emptyset, \quad \text{но } \varphi_s A \not\subset \Lambda^{\kappa-}$$

(и даже $\varphi_s A \cap \mathcal{U}_i \not\subset \Lambda^{\kappa-}$). В этом случае мы будем говорить, что представитель A семейства $\mathcal{A}$ висит на K_i , или повисает на K_i (при градиентном спуске). ⁽²¹⁾

▲ Доказательство. Пусть $\mathcal{U}_i$ — малые окрестности K_i ; $\mathcal{U}_i$ можно считать непересекающимися. Берем такие меньшие окрестности $\mathcal{V}_i$, что если $c \in \mathcal{V}_i$, то $\varphi_s c \in \mathcal{U}_i \cup \Lambda^{\kappa-}$ при всех $s \geq 0$ (см. доказательство 2.1.2). Согласно 2.1.2, существует такое $A \in \mathcal{A}$, что $\varphi_s A \subset (\bigcup \mathcal{V}_i) \cup \Lambda^{\kappa-}$ при всех $s \geq 0$. Допустим, что при некотором $s = s_i$

$$(*) \quad \varphi_{s_i} A \cap \mathcal{U}_i \subset \Lambda^{\kappa-}.$$

Докажем, что тогда

$$(**) \quad \varphi_s A \cap \mathcal{U}_i \subset \Lambda^{\kappa-} \quad \text{при всех } s \geq s_i.$$

Действительно, если $c \in A$, то либо $c \in \Lambda^{\kappa-}$, либо $c \in \mathcal{V}_j$ с некоторым $j \neq i$, либо $c \in \mathcal{V}_i$ и $\varphi_{s_i} c \notin \mathcal{U}_i$, либо $c \in \mathcal{V}_i$ и $\varphi_{s_i} c \in$

$\in \mathcal{U}_i$. В первом случае $\varphi_s c \in \Lambda^{*-}$ при всех $s \geq 0$. Во втором при всех $s \geq 0$ будет $\varphi_s c \in \Lambda^{*-} \cup \mathcal{U}_j$, а значит, $\varphi_s c \notin \mathcal{U}_i - \Lambda^{*-}$, так что при доказательстве (***) этот случай можно не рассматривать. В третьем случае из того, что для $c \in {}^{\circ}\rho_i$

$$(***) \quad \varphi_s c \in \mathcal{U}_i \cup \Lambda^{*-} \quad \text{при всех } s \geq 0,$$

следует, что $\varphi_{s_i} c \in \Lambda^{*-}$. Наконец, в четвертом случае из (*) тоже следует, что $\varphi_{s_i} c \in \Lambda^{*-}$. В обоих последних случаях заключаем, что $\varphi_s c \in \Lambda^{*-}$ при всех $s \geq s_i$.

Если теперь для любого i найдется такое s_i , что выполняется (*), то в силу (**) при $s \geq \max s_i$ будет $\varphi_s A \subset \Lambda^{*-}$.

До сих пор компактность элементов A семейства $\mathcal{A}$ не использовалась. Теперь воспользуемся ею. Из $\varphi_s A \subset \Lambda^{*-}$ следовало бы, что $\sup E|_{\varphi_s A} = \max E|_{\varphi_s A} < \kappa$, а это противоречит определению $\kappa = \kappa_{\mathcal{A}}$ *). $\square \blacktriangle$

В качестве первого приложения предыдущей теоремы получаем

2.1.3. Теорема. *Предположим, что M неодносвязно. В этом случае каждому нетривиальному ($\neq 1$) классу смежности фундаментальной группы $\pi_1 M$ многообразия M отвечает связная компонента Λ' пространства $\Lambda = \Lambda M$, которая не содержит одноточечных кривых, т. е. элементов из Λ^0 .*

Утверждение. Функция E достигает своей нижней грани κ' на Λ' , а множество $E^{-1}(\kappa') \cap \Lambda'$ целиком состоит из замкнутых геодезических.

Доказательство. Напомним, что точки множества Λ' образуют φ -семейство. Его критическое значение κ' положительно, так как кривые c , для которых $E(c)$ и, следовательно, $L(c)$ (длина c) достаточно малы, гомотопны нулю.

Если $c \in E^{-1}(\kappa') \cap \Lambda'$ не является критической точкой E , то $\|\text{grad } E(c)\|_1 > 0$ и $E(\varphi_s c) < \kappa'$, но $\varphi_s c \in \Lambda'$ — противоречие. $\square$

Замечание. Можно (так часто и делается) доказывать предыдущую теорему совсем по-другому, не прибегая к рассмотрению пространства ΛM . Вместо этого рассматривают универсальное риманово накрывающее многообразие $\tilde{M}$ для M . Тогда каждый нетривиальный элемент τ фундаментальной группы $\pi_1 M$ определяет изометрию многообразия $\tilde{M}$, которая не имеет неподвижных

*) Использование компактности здесь необходимо: существуют такие φ -семейства $\mathcal{A}$ с некомпактными элементами, что $A \subset \Lambda^{\kappa(A)}$ для некоторых (и даже для всех) $A \in \mathcal{A}$. Например, $\mathcal{A}$ может состоять из единственного множества $A = \Lambda^{*-}$, где κ — какое-нибудь положительное критическое значение E .

точек. Можно показать, что функция

$$f(\tilde{p}) := \text{расстояние между } \tilde{p} \text{ и } \tau\tilde{p}$$

достигает своей нижней грани на $\tilde{M}$ *).

Обозначим эту нижнюю грань через ω . Заметим, что $\omega > 0$. Пусть $\tilde{p}$ — такая точка из M , что расстояние $d(\tilde{p}, \tau\tilde{p}) = \omega$, а $\tilde{c}$ — геодезическая длины ω , соединяющая точки $\tilde{p}$ и $\tau\tilde{p}$. Тогда проекция c геодезической $\tilde{c}$ на многообразие M является геодезической на M , на которой функция E принимает свое минимальное значение в классе кривых, гомотопных c^{**} .

Это доказательство в частных случаях было предложено Адамаром [1] и Картаном [2] (доказательство которого содержит ошибку). См. также книгу Буземана [1]. Берже [1] приводит полное доказательство.

Теперь приступим к доказательству существования замкнутой геодезической в случае, когда $\pi_1 M = 0$. Для этого прежде всего заметим, что справедлива следующая лемма.

2.1.4. Лемма. Отображение

$$\gamma: \Lambda M \rightarrow M, \quad c \mapsto c(0) = c(1),$$

гомотопически эквивалентно некоторому расслоению в смысле Серра, слой которого имеет гомотопический тип ΩM — пространства петель многообразия M .

Отображение γ имеет сечение, которое каждой точке $p \in M$ ставит в соответствие одноточечную кривую $c_p: S \rightarrow p \in M$.

Доказательство. Напомним, что отображение называется рас-

*). Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы для каждой точки $q \in M$ ε -окрестность этой точки $\mathcal{U}_\varepsilon(q)$ накрывалась как в прямом произведении. Пусть q_i — конечная ε -сеть в M , а $\tilde{q}_i$ — какие-нибудь прообразы точек q_i в $\tilde{M}$. Обозначим через K объединение замкнутых ε -окрестностей этих точек в $\tilde{M}$. Тогда для каждой точки $\tilde{p} \in \tilde{M}$ найдется такое σ из $\pi_1 \tilde{M}$, что $\sigma\tilde{p} \in K$. Выберем теперь последовательности $\tilde{p}_n \in \tilde{M}$ так, чтобы $d_{\tilde{M}}(\tilde{p}_n, \tau\tilde{p}_n) \rightarrow \omega := \inf d_{\tilde{M}}(\tilde{p}, \tau\tilde{p})$, и обозначим через σ_n такие элементы из $\pi_1 \tilde{M}$, что $\sigma_n \tilde{p}_n \in K$. Пусть $\sigma_{n_i} \tilde{p}_{n_i}$ — сходящаяся подпоследовательность. В этом случае $\sigma_{n_i} \tilde{p}_{n_i} \rightarrow \tilde{q}$ и $d_{\tilde{M}}(\tilde{q}, \sigma_{n_i}^{-1} \tau \sigma_{n_i} \tilde{q}) \rightarrow \omega$. Поэтому для бесконечного числа i точки $\sigma_{n_i} \tau \sigma_{n_i}^{-1} \tilde{q}$ должны совпадать, а их расстояние до $\tilde{q}$ равно ω . Тогда $d_{\tilde{M}}(\sigma_{n_i}^{-1} \tilde{q}, \tau \sigma_{n_i}^{-1} \tilde{q}) = \omega$.

**). Непосредственно ясно, что c является геодезической петлей (т. е. $c: [0, 1] \rightarrow M$ — геодезическая линия и $c(0) = c(1)$) с указанным минимальным свойством. Но если бы это не была замкнутая геодезическая, т. е. в точке $c(0) = c(1)$ она имела бы «угол», то ее длину можно было бы еще уменьшить, «сгладив» участок около «угла».

слоением Серра, если гомотопия в базе может быть поднята в гомотопию в пространстве расслоения. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^1(S, M) = \Lambda M & \xrightarrow{j} & C^0(\dot{S}, M) \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma_M \\ M & \xrightarrow{\text{Id}} & M \end{array}$$

Для отображения справа утверждение леммы хорошо известно, см., например, Спеньер [1], Шварц А. С. [1]*), а согласно 1.2.10, отображение j является гомотопической эквивалентностью. $\square$ ⁽²²⁾

2.1.5. Следствие. Точная гомотопическая последовательность расслоения γ расщепляется:

$$\dots \pi_k \Omega \rightarrow \pi_k \Lambda \rightarrow \pi_k M \rightarrow \pi_{k-1} \Omega \rightarrow \dots$$

$\quad \quad \quad \nwarrow \quad \quad \quad \nearrow$
 $\quad \quad \quad i_k \quad \quad \quad$

Следовательно, при $k \geq 2$ (а если M односвязно, то и при $k = 1$)

$$\pi_k \Lambda M \cong \pi_k M + \pi_{k+1} M.$$

Доказательство. Это утверждение является стандартным результатом алгебраической топологии; см. Шварц А. С. [1], Спеньер [1]. $\square$ ⁽²³⁾

Теперь мы можем доказать знаменитую теорему Люстерника и Фета; см. Люстерник, Фет [1] и Фет [1]. Наше доказательство аналогично доказательству Оливьера [1].

2.1.6. Теорема. Пусть $\pi_1 M = 0$. Тогда на M существует замкнутая геодезическая.

Доказательство. Хорошо известный результат алгебраической топологии утверждает, что существует такое минимальное $k + 1 \geq 2$, что

$$\pi_{k+1} M = H_{k+1}(M; \mathbb{Z}) \neq 0,$$

а также что для заданного простого поля $\mathbb{Z}_p$ существует мини-

* Пусть $C^0([0, 1], M)$ — пространство всех непрерывных отображений $c: [0, 1] \rightarrow M$ (топология в котором в общем случае определяется как компактно-открытая топология, а в данном случае может определяться и как обычная C^0 -топология с помощью метрики в M). Тогда отображение

$$p: C^0([0, 1], M) \rightarrow M \times M, \quad c \mapsto (c(0), c(1)),$$

является расслоением в смысле Серра (и даже Гуревича), см., например, Спеньер [1], (2.8.3). Но, очевидно, $C^0(S, M)$ естественно отождествляется с $p^{-1}\Delta$, где $\Delta = \{(m, m); m \in M\}$ — диагональ прямого произведения, а $\gamma^0 = c \mid p^{-1}\Delta$.

маленькое $l+1 \geq 2$, при котором

$$\pi_{l+1}M \otimes \mathbb{Z}_p = H_{l+1}(M, \mathbb{Z}_p) \neq 0^*).$$

Из 2.1.5 мы знаем, что $\pi_k \Lambda M = \pi_{k+1}M \neq 0$. Возьмем теперь в качестве φ -семейства $\mathcal{A}$ множество образов отображений $f: S^k \rightarrow \Lambda M$, составляющих нетривиальный гомотопический класс. Тогда $\kappa = \kappa_{\mathcal{A}} > 0$. В самом деле, в противном случае для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое отображение f из этого гомотопического класса, что $f(S^k) \subset \Lambda^\varepsilon$. Но тогда, согласно 1.4.15, отображение $f: S^k \rightarrow \Lambda M$ гомотопно некоторому отображению $f': S^k \rightarrow \Lambda^0 M \cong M$, т. е. рассматриваемый гомотопический класс тривиален, и мы пришли к противоречию. $\square$

Сейчас мы дадим доказательство теоремы 2.1.6, которое несколько отличается от приведенного выше. В частности, в нем не содержится ссылок на теорему 1.4.15. Это доказательство представляет собой адаптацию первоначального доказательства Люстерника и Фета (см. Люстерник и Фет [1], Фет [1]).

Начнем со следующей конструкции. Фиксируем полусферу H^{k+1} на S^{k+1} и обозначим через $D^k \subset \partial H^{k+1}$ замкнутый полуэкватор сферы S^{k+1} . Для каждого $p \in D^k$ определим элемент $a_p: S \rightarrow S^{k+1}$ пространства ΛS^{k+1} следующим образом: если $p \in D^k$ — ∂D^k , то a_p — параметризованная окружность на S^{k+1} , которая выходит из точки p в направлении H^{k+1} и лежит в плоскости, перпендикулярной k -мерному пространству, содержащему ∂D^k ; если же $p \in \partial D^k$, то a_p — постоянное отображение $S \rightarrow p$.

Итак, мы определили отображение

$$\delta^k: (D^k, \partial D^k) \rightarrow (\Lambda S^{k+1}, \Lambda^0 S^{k+1}), \quad p \mapsto a_p.$$

Предположим, что у нас есть дифференцируемое отображение $f: S^{k+1} \rightarrow M$, которое гомотопически нетривиально. Оно индуцирует дифференцируемое отображение f^*)

$$f^* := \Lambda f \cdot \delta^k: (D^k, \partial D^k) \rightarrow (\Lambda M, \Lambda^0 M).$$

2.1.7. Предложение. *Индукция отображениями $\varphi_s: \Lambda \rightarrow \Lambda$ гомотопия $\varphi_s \cdot f^*$, $s \geq 0$, отображения f^* индуцирует в свою очередь гомотопию f_s , $s \geq 0$, отображения $f = f_0$. Эта гомотопия определяется так:*

*) Существуют такие k , что $H_{k+1}(M, \mathbb{Z}) \neq 0$ (например, из односвязности следует ориентируемость M , поэтому $H_{\dim M}(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$). Для наименьшего такого k по теореме Гуревича $\pi_{k+1}M = H_{k+1}(M; \mathbb{Z})$. Второе равенство доказывается аналогично с использованием теоремы Гуревича по модулю p . Последняя является следствием обобщенной теоремы Гуревича, формулируемой в терминах классов Серра абелевых групп (Спеньер [1]), но была доказана еще до оформления этой теории (Серр [1]).

**) Здесь $(\Lambda f)(c) = f \circ c$; ср. с замечанием в конце § 1.2.

для $q \in \partial D^k \subset S^{k+1}$ полагаем $f_s(q) = f(q)$;
 для $q \in S^{k+1} - \partial D^k$ полагаем $f_s(q) = \varphi_s f^* a_p(t)$, где $p \in D^k - \partial D^k$
 и $t \in S$ однозначно определяются из равенства $q = a_p(t)$.

Доказательство очевидно. $\square$

2.1.8. Теорема. Пусть отображение $f: S^{k+1} \rightarrow M$ гомотопически нетривиально. Тогда критическое значение κ φ -семейства $\{\varphi_s \cdot \Lambda f \cdot \delta^k(D^k)\}$ больше нуля и, следовательно, существует такая замкнутая геодезическая c , что $E(c) = \kappa$.

Доказательство. Допустим, что критическое значение κ равно нулю. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $s_0 \geq 0$, что $\varphi_{s_0} \cdot \Lambda f \cdot \delta^k(D^k) \subset \Lambda^\varepsilon$. Из 2.1.7 получаем, что f гомотопно отображению f_{s_0} . Но f_{s_0} переводит все лежащие на S^{k+1} окружности и одноточечные кривые $a_p(t)$, $p \in D^k$, в кривые $f_{s_0} a_p(t)$, на которых функция E принимает значения $\leq \varepsilon$.

Если ε достаточно мало, то эти кривые лежат в малой окрестности их начальной точки $f_{s_0} a_p(0)$, которая диффеоморфна диску и допускает ретракцию в $f_{s_0} a_p(0)$. Следовательно, f гомотопически эквивалентно композиции $S^{k+1} \xrightarrow{D^k} f_{s_0} M$ (первое отображение здесь тождественно на ∂D^k и в обозначениях из 2.1.7 имеет вид $q \mapsto p$ на $S^{k+1} - \partial D^k$), т. е. гомотопически эквивалентно нулю. Мы пришли к противоречию. $\square$ ⁽²⁴⁾

Замечание. В предыдущих теоремах мы для каждого нетривиального гомотопического класса многообразия M построили замкнутую геодезическую. В общем случае таких классов может быть много. Однако это не означает, что мы таким способом обязательно получим много разных замкнутых геодезических.

Прежде всего различные φ -семейства вполне могут иметь один и тот же критический уровень. В излагаемом ниже методе, позволяющем получить несколько замкнутых геодезических, используются гомотопии, а не гомотопические группы. Этот метод основан на понятии подчиненных гомологических классов, идущем от Люстерника и Шнирельмана [1], [2], [3] *). Оно будет описано ниже, причем вначале в несколько упрощенной обстановке.

*) Собственно, в работах Люстерника и Шнирельмана первоначально использовался введенный Люстерником [2] топологический инвариант — категория. Фролов и Эльсгольц [1], руководствовавшиеся замечаниями Понтрягина о работе Шнирельмана [1], дали оценку категории замкнутого многообразия через другой инвариант — длину, которую они определяли в терминах пересечений циклов. После этого Люстерник в цикле работ 40-х гг., итоги которым подведены в его монографии [1] и обзоре [3], использовал когомологии — уже для функциональных пространств и примерно так же, как это делается ниже. В конце концов оказалось, что во многих — и притом наиболее важных — случаях можно вообще не упоминать о категории, а работать с подчиненными классами, как и делается в настоящей книге.

При этом, однако, мы должны иметь в виду еще и то, что различные замкнутые геодезические c и c' могут получаться из одной и той же геодезической при обходе ее различное число раз; иными словами, может существовать такая замкнутая геодезическая c_0 , что $c(t) = c_0(mt)$, $c'(t) = c_0(m't + r)$, $r = \text{const}$, m и m' целые и $m \neq m'$. Здесь подразумевается, что $E(c) \neq E(c')$. Если же $E(c) = E(c')$, то может случиться, что $c'(t) = c(\pm t + r)$; правда, эта последняя трудность преодолевается (§ 2.2). ⁽²⁵⁾

Мы продолжаем рассматривать гомологии и когомологии с коэффициентами в произвольном поле.

2.1.9. Лемма. Умножение Чеха $\frown$ для пары $(\Lambda - \Lambda^0, \Lambda^e - \Lambda^0)$

$$H_*(\Lambda - \Lambda^0, \Lambda^e - \Lambda^0) \otimes H^*(\Lambda - \Lambda^0) \supset H_*(\Lambda - \Lambda^0, \Lambda^e - \Lambda^0)$$

индуцирует линейное отображение

$$H_*(\Lambda, \Lambda^0) \otimes H^*(\Lambda - \Lambda^0) \rightarrow H_*(\Lambda, \Lambda^0)$$

(которое мы тоже будем обозначать символом $\frown$). Здесь $\varepsilon > 0$ предполагается таким, чтобы Λ^0 было деформационным ретрактом Λ^e .

Доказательство. Мы считаем известными определение и свойства произведения Чеха для пары $(\Lambda - \Lambda^0, \Lambda^e - \Lambda^0)$; см. Спеньер [1]. Так как Λ^0 — сильный деформационный ретракт множества Λ^e , то из точной гомологической последовательности тройки $(\Lambda, \Lambda^e, \Lambda^0)$ следует, что $H_*(\Lambda, \Lambda^0) = H_*(\Lambda, \Lambda^e)$, а с помощью вырезания получаем *) $H_*(\Lambda, \Lambda^e) = H_*(\Lambda - \Lambda^0, \Lambda^e - \Lambda^0)$. $\square$

▲ **Замечание.** Обычное произведение Чеха можно задать на цепях и коцепях посредством явной формулы (см. Спеньер [1] или Милнор, Сташеф [1]) **):

$$C_{m+n}(\Lambda - \Lambda^0) \otimes C^n(\Lambda - \Lambda^0) \supset C_m(\Lambda - \Lambda^0),$$

$$[\delta] \frown \eta = \langle \eta, [\sigma \cdot \omega_n] \rangle [\sigma \cdot \alpha_m].$$

Здесь δ — произвольный $(m+n)$ -мерный сингулярный симплекс пространства $\Lambda - \Lambda^0$, т. е. непрерывное отображение $\Delta^{m+n} \rightarrow \Lambda - \Lambda^0$ (где Δ^{m+n} — «стандартный» $(m+n)$ -мерный симплекс; для определенности можно считать, что $\Delta^{m+n} \subseteq \mathbb{R}^{m+n+1}$ и его i -я вершина e_i^{m+n} имеет i -ю координату 1 и прочие координаты 0); $\alpha_m: \Delta^m \rightarrow \Delta^{m+n}$ и $\omega_n: \Delta^n \rightarrow \Delta^{m+n}$ — стандартные линейные изоморфизмы соответственно на «переднюю» m -мерную и «заднюю» n -мер-

*) Здесь использовано то, что теория сингулярных гомологий удовлетворяет более сильной аксиоме вырезания (Спеньер [1], (4.6.5)), чем это требуется в аксиомах Стинрода — Эйленберга (там же, (5.4.14)).

**) Мы говорим здесь о цепях и коцепях в $\Lambda - \Lambda^0$, поскольку сейчас именно они нам нужны, но формула имеет, конечно, общий характер.

ную грани симплекса Δ^{m+n} , так что

$$\alpha_m(e_i^m) = e_i^{m+n}, \quad i = 1, \dots, m+1; \quad \omega_n(e_j^n) = e_{m+j}^{m+n}, \quad j = 1, \dots, n+1;$$

$[\tau]$ для сингулярного симплекса τ обозначает соответствующую этому симплексу образующую группы цепей; $\langle \eta, c \rangle$ — значение коцепи η на цепи c . Из этой формулы следует, что для любой цепи u и коцепи η носитель $|u \cap \eta| \subset |u|$. Однако умножение

$$H_*(\Lambda, \Lambda^0) \otimes H^*(\Lambda - \Lambda^0) \rightarrow H_*(\Lambda, \Lambda^0)$$

мы не задавали на уровне цепей и коцепей, а ввели посредством специального рассуждения. Поэтому и утверждение о носителях здесь становится другим, а именно:

Если $u \in \omega \in H_*(\Lambda, \Lambda^0)$, V — открытая окрестность множества $|u| \cap \Lambda^0$, $\zeta \in H^*(\Lambda - \Lambda^0)$ и $\omega' = \omega \cap \zeta$, то у ω' имеется такой представитель u' , что $|u'| \subset |u| \cup V$. Если, кроме того, $\zeta|_U = 0$ для некоторого открытого подмножества $U \subset \Lambda - \Lambda^0$ (т. е. ζ переходит в нуль при отображении $H^*(\Lambda - \Lambda^0) \rightarrow H^*(U)$, индуцированном вложением $U \hookrightarrow \Lambda - \Lambda^0$) и W — такое открытое множество, что его замыкание $\bar{W} \subset U$, то существует такой цикл $u' \in \omega'$, что $|u'| \subset (|u| - W) \cup V$.

Можно считать, что $V \subset \Lambda^e$, где e — то же, что и в 2.1.9. Пусть $\Phi_i: \Lambda^e \rightarrow \Lambda^e$ — гомотопия, построенная в доказательстве 1.4.15. Пусть относительный цикл $u_1 \in Z_{m+n}(\Lambda, \Lambda^0)$ получается из u при столь мелком подразделении, что: а) образы $|\sigma_i|$ сингулярных симплексов из u_1 , пересекающиеся с Λ^0 , целиком лежат строго внутри V , равно как и все $\Phi_\tau(|\sigma_i|)$, $0 \leq \tau \leq 1$; б) если нам еще заданы U и W , то $|\sigma_i| \subset U$ при $|\sigma_i| \cap W \neq \emptyset$. Запишем

u_1 в виде $u_1 = \sum_{i=1}^q a_i [\sigma_i]$, где все σ_i различны, все $a_i \neq 0$ и

нумерация такова, что $|\sigma_i| \cap \Lambda^0 = \emptyset$ при $i \leq p$ и $|\sigma_i| \cap \Lambda^0 \neq \emptyset$ при $i > p$ (p — некоторое число). Положим

$$u_2 := \sum_{i=p+1}^q a_i [\sigma_i], \quad u_3 := \sum_{i=1}^p a_i [\sigma_i] = u_1 - u_2.$$

Тогда $u_3 \in C_*(\Lambda - \Lambda^0)$. Запишем ∂u_3 в виде $\sum b_j [\tau_j]$, где τ_j — различные сингулярные симплексы и все $b_j \neq 0$. Поскольку $\partial u_3 = \partial u_1 - \partial u_2$, $|\partial u_3| \cap \Lambda^0 = \emptyset$ и $|\partial u_1| \subset \Lambda^0$, то τ_j суть грани некоторых сингулярных симплексов σ_i , входящих в u_2 . Поэтому

$$(*) \quad \bigcup_{\tau} \Phi_\tau(|\partial u_3|) \subset V.$$

В частности, $|\partial u_3| \subset \Lambda^e$ и u_3 определяет тот самый элемент

группы $H_{m+n}(\Lambda - \Lambda^0, \Lambda^e - \Lambda^0)$, который при наших изоморфизмах

$$H_{m+n}(\Lambda - \Lambda^0, \Lambda^e - \Lambda^0) \cong H_{m+n}(\Lambda, \Lambda^e) \cong H_{m+n}(\Lambda, \Lambda^0)$$

соответствует ω .

Чтобы получить $\omega \cap \zeta$, надо взять какой-нибудь коцикл $\eta \in \in Z^n(\Lambda - \Lambda^0)$, являющийся представителем ζ , образовать произведение

$$u_3 \cap \eta \in Z_m(\Lambda - \Lambda^0, \Lambda^e - \Lambda^0) \subset Z_m(\Lambda, \Lambda^e)$$

и взять такой относительный цикл $u' \in Z_m(\Lambda, \Lambda^0) \subset Z_m(\Lambda, \Lambda^e)$, который гомологичен $u_3 \cap \eta \bmod C_m(\Lambda^e)$.

Если нам заданы U и W , то из того, что образ ζ в $H^n(U)$ равен нулю, следует, что ζ есть образ некоторого элемента группы $H^n(\Lambda - \Lambda^0, U)$; иными словами, коцикл $\eta \in \zeta$ можно выбрать таким образом, что $\langle \eta, [\tau] \rangle = 0$ для любого сингулярного симплекса τ с $\tau| \subset U$. Тогда $|u_3 \cap \eta| \subset |u_3| - W \subset |u| - W$. Осталось подобрать u' . Гомотопия $\Phi_\tau: \Lambda^e \rightarrow \Lambda^e$ определяет соответствующую цепную гомотопию $D: C_*(\Lambda^e) \rightarrow C_*(\Lambda^e)$, которую можно применить, в частности, к

$$\partial(u_3 \cap \eta) = \partial u_3 \cap \eta \pm u_3 \cap \delta \eta = \partial u_3 \cap \eta$$

(в последнем равенстве здесь использовано то, что $\delta \eta = 0$). Так как это цикл, то при применении к нему $D\partial$ получится нуль. Стало быть,

$$\partial(u_3 \cap \eta + D(\partial u_3 \cap \eta)) = (\Phi_1)_{m-1}(\partial u_3 \cap \eta) \in C_{m-1}(\Lambda^0),$$

т. е., положив $u' := u_3 \cap \eta + D(\partial u_3 \cap \eta)$, имеем $u' \in Z_m(\Lambda, \Lambda^0)$, и u' даже не только гомологично, но и равно $u_3 \cap \eta \bmod C_m(\Lambda^e)$. Наконец, носитель $|u'| \subset |u_3 \cap \eta| \cup |D(\partial u_3 \cap \eta)|$, где, как мы знаем, $|u_3 \cap \eta| \subset |u| - W$, а по построению цепной гомотопии

$$|D(\partial u_3 \cap \eta)| \subset \bigcup_{\tau} \Phi_{\tau}(|\partial u_3 \cap \eta|) \subset \bigcup_{\tau} \Phi_{\tau}(|\partial u_3|),$$

что ввиду (*) содержится в V . $\square \blacktriangle$

Пусть w' и w — ненулевые гомологические классы $\Lambda \bmod \Lambda^0$, размерности которых равны соответственно k и $k+l$. Будем говорить, что класс w' *подчинен* классу w , если существует такой l -мерный класс когомологий ζ пространства $\Lambda - \Lambda^0$, что $w' = w \cap \zeta$.

2.1.10. Теорема. Пусть $w, w' \in H_*(\Lambda, \Lambda^0)$ и класс w' подчинен классу w . Тогда критические уровни κ и κ' классов w и w' *)

*) Подразумеваются критические уровни определяемых этими классами $\mathcal{C}$ -семейств, состоящих из носителей принадлежащих этим классам относительных циклов,

удовлетворяют неравенству $\kappa \geq \kappa' > 0$. Если $\kappa = \kappa'$, то множество критических точек из $E^{-1}(\kappa)$ имеет ненулевые когомологии Чеха в размерности $l = \dim \omega - \dim \omega' > 0$. Отсюда следует^{*)}, что это множество имеет размерность в смысле покрытий $\geq l$.

Доказательство. Оба значения κ и κ' должны быть > 0 , потому что циклы, представляющие соответственно ω и ω' , образуют ϕ -семейство пространства Λ по модулю Λ^0 .

▲ Для каждого цикла $u \in \omega$ существует такой цикл $u' \in \omega'$, что $|u'| \leq |u| \cup V$, где V — сколь угодно малая окрестность множества $|u| \cap \Lambda^0$. Когда она достаточно мала, будет $E|V| < \kappa$, поэтому $E|u'| \leq E|u|$. Следовательно, $\kappa' \leq \kappa$.

Допустим теперь, что $\kappa' = \kappa$. Положим $Cr\Lambda \cap E^{-1}\kappa = K$. Пусть $\omega' = \omega \cap \zeta$, $\zeta \in H^l(\Lambda - \Lambda^0)$. Докажем, что $\zeta|U \neq 0$ для каждой открытой окрестности U множества K в $\Lambda - \Lambda^0$. Действительно, пусть $\zeta|U = 0$. Возьмем какую-нибудь меньшую окрестность W множества K , для которой $\bar{W} \subset U$. Найдется такой представитель $u \in \omega$, что $|u| \subset W \cup \Lambda^{\kappa-}$. Но тогда, согласно замечанию к 2.1.9, найдется такой представитель $u' \in \omega'$, что $|u'| \subset (|u| - W) \cup V \subset \Lambda^{\kappa-}$ (окрестность V множества $|u| \cap \Lambda^0$ по-прежнему берем столь малой, что $E|V| < \kappa$). Значит, $\kappa' < \kappa$.

Итак, $\zeta|U \neq 0$ для любой окрестности $U \supset K$. Но тогда предел прямого спектра групп по всем этим окрестностям $\lim H^l(U) \neq 0$. (В самом деле, возьмем образ ζ в какой-нибудь из этих групп, скажем $\zeta|U_0 \in H^l(U_0)$. Образ $\zeta|U_0$ в предельной группе может равняться нулю в том и только том случае, когда равняется нулю образ $\zeta|U_0$ в какой-нибудь из групп $H^l(U)$, $U \subset U_0$, т. е. $\zeta|U$.) А этот предел совпадает с группой когомологий Чеха $H^l_{\check{C}}(K)$. Действительно, у любого открытого подмножества $U \subset \Lambda$ сингулярные когомологии совпадают с когомологиями Чеха (см. Спеньер [1], теорема 6.9.1; ввиду локальной стягиваемости Λ каждая точка $c \in U$ жестко вложена в U относительно сингулярных когомологий), а для последних $\lim H^l_{\check{C}}(U) = H^l_{\check{C}}(K)$ — это есть присущее им свойство жесткости (Спеньер [1], теорема 6.6.2). □ ▲

2.1.11. Следствие. Пусть ω_i , $1 \leq i \leq r$, — ненулевые классы гомотопий $\Lambda \bmod \Lambda^0$, каждый из которых подчинен следующему, и $0 \leq k_1 < \dots < k_r$, где $k_i = \dim \omega_i$.

Обозначим критический уровень ω_i через κ_i . Тогда

$$0 \leq \kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_r$$

^{*)} Из определения когомологий Чеха с помощью покрытий сразу следует, что в каждом достаточно мелком открытом покрытии есть $l+1$ элементов с непустым пересечением. (Заметим кстати, что, поскольку $Cr\Lambda \cap E^{-1}(\kappa)$ — метризуемый компакт, для него все «разумные» определения размерности совпадают.)

и для каждого κ_i существуют замкнутые геодезические на E -уровне κ_i . Кроме того, если $\kappa_j = \kappa_{j+j'}$, $j' > 0$, то множество замкнутых геодезических на E -уровне κ_j имеет размерность в смысле покрытий $\geq k_{j+j'} - k_j$.

Замечание. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_r$ те же, что и выше. Тогда, согласно определению, $\omega_{i-1} = \omega_i \cap \zeta_{i-1}$. Поэтому, воспользовавшись формулой $(\omega \cap \zeta) \cap \zeta' = \omega \cap (\zeta \cup \zeta')$, получим

$$\omega_1 = \omega_r \cap (\zeta_1 \cup \dots \cup \zeta_{r-1}),$$

т. е. существуют $(r-1)$ когомологических классов положительной размерности пространства $\Lambda - \Lambda^0$, такие, что их $\cup$ -произведение не равно нулю.

Верхняя грань числа когомологических классов топологического пространства, $\cup$ -произведение которых не равно нулю, называется (когомологической) длиной этого пространства. При этом все когомологические классы, кроме одного, должны иметь положительную размерность *).

Это понятие тесно связано с понятием категории топологического пространства; точнее, длина пространства дает оценку снизу для его категории (см. Шварц Дж. [1], Пале [4]) **).

Из предыдущих результатов мы уже знаем, что если в $H^*(\Lambda M - \Lambda^0 M)$ есть $r-1$ таких элементов ζ_i , $1 \leq i \leq r-1$, что $\dim \zeta_i > 0$ и $\zeta_1 \cup \dots \cup \zeta_{r-1} \neq 0$, и если существует $\omega \in H_*(\Lambda M, \Lambda^0 M)$, для которого $\omega \cap (\zeta_1 \cup \dots \cup \zeta_{r-1}) \neq 0$, то на многообразии M существует по крайней мере r различных замкнутых геодезических. При этом мы пока предполагаем, что фигурирующие в 2.1.11 критические уровни κ_i все различны. В противном случае мы должны были бы исключить возможность того, что множество замкнутых геодезических на E -уровне $\kappa_j = \kappa_{j+j'}$, $j' > 0$, является просто $O(2)$ -орбитой единственной замкнутой геодезической c , т. е. все эти геодезические имеют вид $c(\pm t + r)$ (подробнее это будет обсуждаться в § 2.2). Действительно, такие замкнутые геодезические, которые отличаются лишь параметризацией, мы не будем считать различными по существу. В 2.2.11 мы дадим такую формулировку, которая исключит эту возможность.

Кроме того, здесь уместно еще раз напомнить сделанное перед 2.1.9 замечание о том, что различные замкнутые геодези-

*1) Обычно определение длины формулируют без оговорки «кроме одного», поэтому у Клингенберга длина на единицу больше, чем обычно.

Заметим, что если длина $\Lambda - \Lambda^0 \geq r$, то отсюда еще не следует существование цепочки из r подчиненных классов гомологий — ведь у нас когомологии и гомологии берутся не для одного и того же пространства: когомологии — для $\Lambda - \Lambda^0$, а гомологии — для (Λ, Λ^0) .

**1) Категории посвящен обзор: Джеймс [1].

ческие могут получаться из одной геодезической при обходе ее различное число раз. Другие комментарии можно найти у Флашеля и Клингенберга [1].

2.2. Пространство непараметризованных замкнутых кривых

В этом параграфе мы будем рассматривать пространства непараметризованных замкнутых кривых на многообразии M . Они получаются с помощью факторизации пространства Λ по непрерывному S -действию и непрерывному $O(2)$ -действию. При этом получают пространства соответственно ориентированных и неориентированных замкнутых кривых.

Идея рассматривать неориентированные замкнутые кривые восходит к самому началу развития теории замкнутых геодезических, ср. Люстерник и Шнирельман [1] и Морс [2]. Однако при этом более старом подходе отождествляются параметризованные замкнутые кривые, которые переходят друг в друга под действием намного более обширной группы, например группы диффеоморфизмов окружности S . При нашем подходе мы будем отождествлять кривые c и c' только в том случае, если существует такое $r \in S$, что $c'(t) = c(t+r)$ или $c'(t) = c(-t+r)$. Это дает нам возможность пользоваться результатами теории, описывающей действие окружности на гильбертовом многообразии. Заметим, однако, что это действие не дифференцируемо, а только класса H^1 *).

По этой причине наш подход кажется более естественным. Кроме того, различные определения пространства замкнутых кривых приводят к одинаковому гомотопическому типу, потому что **) группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности допускает ретракцию на $SO(2) = S$.

Как мы увидим, риманова структура на ΛM и интеграл энергии E согласованы с S -действием и с обращающей ориентацию инволюцией на ΛM . Грубо говоря, это вынуждает функцию E иметь больше критических точек, чем было бы необходимо при

*) Утверждение об H^1 -действии представляет собой вольность речи, реальный смысл которой сводится к напоминанию, что кривые c у нас класса H^1 . Формально оно не имеет смысла: под степенью гладкости действия понимают степень гладкости зависимости $z \cdot c$ от пары $(z, c) \in S \times \Lambda M$, а мы не вводили понятия H^1 -отображений, кроме как для отображения окружности (или отрезка). Если же говорить по существу о степени гладкости $z \cdot c$, то она такова: при фиксированном z зависимость $z \cdot c$ от c является гладкой, а зависимость от z (при фиксированном c) — только непрерывной. Вообще говоря, $z \cdot c$ не имеет производной по z ни при каком z (см. замечание перед 2.2.2), так что здесь нет не только гладкости класса C^1 , но даже и класса H^1 .

**) Очевидно, это следует также из 1.3.12 (с учетом замечания перед 2.2.6), причем с указанием геометрически естественных конкретных отображений, осуществляющих гомотопическую эквивалентность по-разному определенных пространств замкнутых кривых.

отсутствию согласованности, или приводит к другому, тесно связанному с первым явлению: пространство непараметризованных кривых обязано иметь «больше» гомотопий, чем пространство параметризованных кривых ΛM (по крайней мере в случае $\mathbb{Z}_2$ -коэффициентов). Этот факт впервые был отмечен Морсом в его вычислении «круговых чисел связности»^{*} (которое, кстати, было неверным); см. Морс [2], а также Ботт [1].

▲ Группа $O(2)$ естественно действует на окружности S , рассматриваемой как единичная окружность в $\mathbb{R}^2$ (или, что то же самое, в $\mathbb{C}$; точка с координатой $t \bmod 1$ — это $e^{2\pi i t}$). Следовательно, можно определить действие $O(2)$ на отображения $c: S \rightarrow M$ формулой $\chi(\alpha, c) = \alpha \cdot c := c \cdot \alpha^{-1}$. Здесь в правой части стоит α^{-1} ; это сделано потому, что при таком определении получается $\alpha \cdot (\beta \cdot c) = (\alpha\beta) \cdot c$.

Группа $O(2)$ состоит из двух связных компонент. Компоненту единицы, $SO(2)$, можно отождествить с окружностью S (считая, что элемент с координатой $t \bmod 1$ действует на плоскости, как умножение на $e^{2\pi i t}$ действует на комплексные числа). Она является нормальной подгруппой. Поэтому факторизацию ΛM по определенному выше действию $O(2)$ можно осуществить в два этапа — сначала факторизуем по $SO(2)$, затем полученное факторпространство факторизуем по $O(2)/SO(2) = \mathbb{Z}_2$. В качестве представителя элемента последней группы, отличного от единицы, можно взять любой элемент из $O(2) - SO(2)$; ради определенности возьмем отражение в оси x , т. е. элемент $\sigma: (x, y) \mapsto (x, -y)$. Очевидно, $z\sigma = \sigma z^{-1}$ при $z \in S$. Все элементы из $O(2) - SO(2)$ являются инволюциями и однозначно представляются в виде $z\sigma$, $z \in S$. ▲

Рассмотрим сначала действие S на ΛM . Оно определяется отображением

$$\tilde{\chi}: S \times \Lambda M \rightarrow \Lambda M, \quad (z, c) \mapsto z \cdot c,$$

где $z \cdot c(t) = c(t - r)$, $z = e^{2\pi i r} \in S$.

2.2.1. Лемма. *Отображение $\tilde{\chi}$ определяет непрерывное действие окружности на ΛM . При каждом $z \in S$ отображение*

$$\tilde{\chi}_z: \Lambda M \rightarrow \Lambda M, \quad c \mapsto z \cdot c,$$

является изометрией, которая оставляет функцию E инвариантной.

Доказательство. Рассмотрим естественные карты, отвечающие элементу $c \in C^\infty(S, M)$ и элементу $z \cdot c \in C^\infty(S, M)$. В этих кар-

^{*} Они совпадают с числами Бетти вводимого ниже пространства $PM \bmod P^0M$ (это установил А. С. Шварц [1], и он же обнаружил ошибку у Морса, о которой будет сказано далее).

тах отображение $\tilde{\chi}_z$ представляется линейным изоморфизмом

$$H^1(c^*TM) \rightarrow H^1((z \cdot c)^*TM), \quad (\xi(t)) \mapsto (\xi(t-r)).$$

Из определений функции E и метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ на ΛM непосредственно видно, что $E(z \cdot e) = E(e)$ и $\langle T\tilde{\chi}_z \cdot, T\tilde{\chi}_z \cdot \rangle_1 = \langle \cdot, \cdot \rangle_1$.

Остается показать, что $\tilde{\chi}$ непрерывно. Так как $\tilde{\chi}_z$ — изометрия, то

$$d_\Lambda(z_1 \cdot e_1, z_2 \cdot e_2) = d_\Lambda(e_1, z_1^{-1}z_2 \cdot e_2),$$

так что непрерывность достаточно проверить при $z=1$. Имеем

$$d_\Lambda(e_1, z \cdot e_2) \leq d_\Lambda(e_1, c) + d_\Lambda(c, z \cdot c) + d_\Lambda(e_2, c).$$

Поскольку $C^\infty(S, M)$ плотно в $H^1(S, M)$, то при достаточно малом $d_\Lambda(e_1, e_2)$ первое и третье слагаемые также будут малыми при подходящем выборе c . Поэтому достаточно показать, что $d_\Lambda(c, z \cdot c)$ стремится к нулю при $z \rightarrow 1$, $c \in C^\infty(S, M)$.

Пусть при $t \in S$, $z = e^{2\pi i r} \in \mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ — малая дуга окружности $|z|=1$, содержащая z в качестве своей внутренней точки, будет $\xi_z = \exp_c^{-1}(z \cdot c)$ и

$$\xi(t, z) := (\pi^*c)_t^{-1}(\exp|_{\mathcal{O}_{c(t)}})^{-1}c(t-r) = \xi_z(t).$$

Отображение

$$S \times \mathcal{U} \rightarrow c^*TM, \quad (t, z) \mapsto \xi(t, z),$$

принадлежит классу C^∞ и ξ_1 — нулевое сечение в c^*TM . Отсюда следует, что $\|\xi_z\|_\infty \rightarrow 0$ и $\|\nabla_c \xi_z\|_\infty \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 1$, а тем более $\|\xi_z\|_1 \rightarrow 0$.

Наконец заметим, что отображение $\tilde{\chi}$ не дифференцируемо, так как в противном случае при каждом $c \in \Lambda$ отображение $z \in S \mapsto z \cdot c \in \Lambda$ также было бы дифференцируемым. В частности, это означает, что касательный вектор $d(z \cdot c)/dz$ при $z=1$ должен был бы быть элементом $T_c\Lambda$. Но этот вектор равен $-\partial c$, который не обязан быть элементом $T_c\Lambda$ *). □

*) Более формально: это H^1 -сечение $d(z \cdot c)/dz$ в точке t должно принимать значение $-\partial c(t)$ (что невозможно). Действительно, отображение

$$ev_t: \Lambda \rightarrow M, \quad c \mapsto c(t),$$

дифференцируемо, причем если $\zeta \in T_c\Lambda = H^1(c^*TM)$, то $Te v_t \cdot \zeta = \zeta(t)$. Поэтому для любой C^1 -кривой $z \mapsto \varphi(z)$ в Λ значение в точке t H^1 -сечения $d\varphi(z)/dz \in H^1(\varphi(z)^*TM)$ равно

$$\frac{d\varphi(z)}{dz}(t) = Te v_t \cdot \frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{d}{dz} ev_t \varphi(z) = \frac{d\tilde{\varphi}(t, z)}{dz},$$

где $\tilde{\varphi}(t, z) = \varphi(z)(t)$.

Заметим еще, что поскольку все $\tilde{\chi}_z$ — изометрии, то из существования производной $d(z \cdot c)/dz$ при каком-нибудь z следовало бы ее существование при всех z , так что, когда $\partial c \notin H^1(c^*TM)$, эта производная не существует ни при каком z .

2.2.2. Следствие 1. Если c — критическая точка функции E , то и вся орбита $S.c$ состоит из критических точек.

Это есть непосредственное следствие леммы 2.2.1. $\square$

Группа изотропии *) $\tilde{I}(c)$ элемента c по отношению к S -действию определяется как подгруппа, образованная теми элементами $z \in S$, для которых $z.c = c$.

2.2.3. Следствие 2. $\tilde{I}(c)$ — замкнутая подгруппа группы S , т. е. или $\tilde{I}(c) = S$, что равносильно тому, что $c \in \Lambda^0 M =$ пространство однотоочечных кривых, или $\tilde{I}(c)$ — циклическая группа конечного порядка.

Доказательство. Заметим, что отображение $\tilde{\chi}_c: S \rightarrow \Lambda$, при котором $z \mapsto z.c$, непрерывно. Поэтому $\tilde{I}(c) = (\tilde{\chi}_c)^{-1}(c)$ замкнуто. $\square$

Будем говорить, что кривая $c \in \Lambda M$ является m -кратным повторением, если $\tilde{I}(c) = \mathbb{Z}_m$. Если $m = 1$, то c будем также называть *однократной* **) кривой.

Замечание. Пусть $\tilde{I}(c) = \mathbb{Z}_m$. Тогда $c(t + 1/m) = c(t)$ при всех $t \in S$.

Если $c \in \Lambda$, то определим m -кратное повторение кривой c , полагая $c^m(t) := c(mt)$. Ясно, что $\tilde{I}(c^m)$ содержит $\mathbb{Z}_m$.

Если $\tilde{I}(c) = \mathbb{Z}_m$, то кривая c_0 , определенная равенством $c_0(t) = c(t/m)$, однократная и $c = c_0^m$. При этом c_0 мы будем называть *однократной кривой, отвечающей (соответствующей) элементу c* .

Определим пространство $\tilde{\Pi}M$ непараметризованных ориентированных замкнутых кривых на многообразии M как факторпространство пространства ΛM , полученное факторизацией ΛM по S -действию $\tilde{\chi}$. Пусть $\tilde{\pi}: \Lambda M \rightarrow \tilde{\Pi}M = \Lambda M / \tilde{\chi}S$ — отображение факторизации.

Пространство $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}M$ будем рассматривать с фактортопологией, т. е. множество $B \subset \tilde{\Pi}$ будем считать открытым тогда и только тогда, когда открыт его прообраз при отображении $\tilde{\pi}$.

Ясно, что $E: \tilde{\Pi}M \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Элемент $\tilde{c} \in \tilde{\Pi}$ будем называть *критическим*, если c — образ при отображении $\tilde{\pi}$ критической точки многообразия Λ .

*) Ее называют также *стабильной* или *стационарной* (под)группой (для) элемента c .

**) В оригинале: prime, что можно было бы перевести как «простая». Однако это противоречило бы тому, что обычно под «простой кривой» понимают кривую без самопересечений. (В английском языке такой коллизии не возникает, так как в английском названии для кривых без самопересечений используется прилагательное simple, а не prime.)

Пространство $\tilde{\Pi}$ можно описать по-другому, сказав, что его точками являются орбиты S -действия $\tilde{\chi}$. При такой интерпретации критические точки пространства $\tilde{\Pi}$ — это S -орбиты критических точек из Λ .

2.2.4. Теорема. Уменьшающая E деформация φ_s пространства ΛM индуцирует уменьшающую E деформацию $\tilde{\varphi}_s$ пространства $\tilde{\Pi} M$. Эта деформация определяется следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda M & \xrightarrow{\varphi_s} & \Lambda M \\ \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \tilde{\pi} \\ \tilde{\Pi} M & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_s} & \tilde{\Pi} M \end{array}$$

Доказательство. Пользуясь тем, что S -действие $\tilde{\chi}$ является изометрией, которая не изменяет функцию E , получим *)

$$\text{grad } E(z \cdot c) = Tz \cdot \text{grad } E(c).$$

Поэтому $\varphi_s z \cdot c = z \cdot \varphi_s c$ и, следовательно, теорема доказана. $\square$

Рассмотрим изменяющее ориентацию отображение **)

$$\theta: \Lambda M \rightarrow \Lambda M, \quad c(t) \mapsto c(1-t).$$

Ясно, что $\theta^2 = \text{id}$, т. е. θ определяет $\mathbb{Z}_2$ -действие на ΛM .

2.2.5. Теорема. Отображение θ — изометрия, оставляющая функцию E инвариантной. Кроме того, $z \cdot \theta(c) = \theta(z^{-1} \cdot c)$, т. е. θ переводит орбиты S -действия $\tilde{\chi}$ снова в орбиты S -действия $\tilde{\chi}$, следовательно, определяет инволюцию на $\tilde{\Pi} M$. Ее мы будем обозначать через $\tilde{\theta}$.

Доказательство. В картах, отвечающих согласно 1.3.8 элементам c и θc , отображение $\theta|_{\mathcal{U}^0}(c): \mathcal{U}^0(c) \rightarrow \mathcal{U}^0(\theta c)$ представляется как ограничение на $\mathcal{W} \cap T_c \Lambda M$ линейной изометрии гильбертовых

*) Действительно, при всех $\xi \in T_c \Lambda$ ввиду изометричности $T\tilde{\chi}_z(c)$

$$\langle T\tilde{\chi}_z(c) \cdot \text{grad } E(c), T\tilde{\chi}_z(c) \cdot \xi \rangle_1 = \langle \text{grad } E(c), \xi \rangle_1 = DE(c) \cdot \xi.$$

Но

$$\langle \text{grad } E(z \cdot c), T\tilde{\chi}_z(c) \cdot \xi \rangle = DE(z \cdot c) \cdot T\tilde{\chi}_z(c) \cdot \xi = D(E \circ \tilde{\chi}_z)(c) \cdot \xi = DE(c) \cdot \xi$$

(ибо $E \circ \tilde{\chi}_z = E$). А каждое $\eta \in T_{z \cdot c} \Lambda$ имеет вид $T\tilde{\chi}_z(c) \cdot \xi$ с некоторым ξ . Поэтому при всех этих η

$$\langle T\tilde{\chi}_z(c) \cdot \text{grad } E(c), \eta \rangle_1 = \langle \text{grad } E(z \cdot c), \eta \rangle_1,$$

что и означает справедливость доказываемого равенства.

**) Это просто другое обозначение для действия на ΛM инволюции σ , введенной в начале этого параграфа.

пространств

$$H^1(c^*TM) \rightarrow H^1((\theta c)^*TM), \quad \xi(t) \mapsto \xi(1-t).$$

Кроме того, легко видеть, что $E(\theta c) = E(c)$.

Для того чтобы доказать последнее утверждение теоремы *), заметим, что если $z = e^{2\pi i r}$, то

$$(z \cdot (\theta c))(t) = (\theta c)(t-r) = c(1-t+r) = z^{-1} \cdot c(1-t) = (\theta z^{-1} \cdot c)(t). \quad \square$$

Определим пространство (неориентированных) непараметризованных замкнутых кривых **) многообразие M , полагая

$$\tilde{P}M := \tilde{P}M /_{\theta} Z_2.$$

Это пространство будем рассматривать с фактортопологией.

Пусть $\phi: \tilde{P}M \rightarrow PM$ — отображение факторизации. Композицию отображений ϕ и π будем обозначать через π ; это есть отображение $\pi: \Lambda M \rightarrow PM$.

Пользуясь S -действием $\tilde{\chi}$ и инволюцией θ , можно описать $O(2)$ -действие χ на ΛM следующим образом:

$$\chi(\alpha, c) = \begin{cases} z \cdot c, & \text{если } \alpha = z \in SO(2) \cong S, \\ z \cdot \theta c, & \text{если } \alpha = z\sigma \in O(2) - SO(2). \end{cases}$$

Ясно, что PM канонически изоморфно факторпространству $\Lambda M /_{\chi} O(2)$.

Мы можем интерпретировать PM как пространство орбит $O(2)$ -действия χ на многообразии ΛM . Очевидно, что функция E постоянна вдоль этих орбит. Поэтому ее можно рассматривать как непрерывную функцию на PM . Критическими точками функции E на PM по определению называются орбиты критических точек $O(2)$ -действия χ . Поэтому отличная от константы (т. е. не принадлежащая $P^0M := \pi \Lambda^0 M$) критическая точка пространства PM определяет две иммерсии окружности S в ΛM :

$$z \mapsto z \cdot c \quad \text{и} \quad z \mapsto z \cdot \theta(c).$$

Обычно эти иммерсии различны, и даже их образы не пересекаются, но при некоторых «исключительных» c это не так. С этим мы встретимся ниже.

▲ **Замечание.** Ясно, что непрерывное эквивариантное отображение $h: \Lambda M \rightarrow \Lambda N$ определяет «накрываемые» им непрерывные

*) Оно, конечно, следует из того, что $z\sigma = \sigma z^{-1}$.

**) Прежде, когда факторизацию производили по всей группе диффеоморфизмов окружности, такое название вполне соответствовало смыслу входящих в него слов. При факторизации же по $O(2)$ от параметризации кое-что остается (то время, за которое точка, движущаяся по закону $c(t)$, проходит данную дугу, не меняется при замене c на $\alpha \cdot c$), так что название является довольно условным.

отображения $\tilde{h}: \tilde{P}M \rightarrow \tilde{P}N$ и $\bar{h}: PM \rightarrow PN$, а эквивариантная гомотопия $h_s: \Lambda M \rightarrow \Lambda N$ — соответствующие гомотопии $\tilde{h}_s: \tilde{P}M \rightarrow \tilde{P}N$ и $h_s: PM \rightarrow PN$. Примером могут служить отображение Λf и гомотопия Λf_s из замечания 2 в § 1.2. Соответствующие отображения факторпространств будем обозначать через

$$\tilde{P}f \text{ или } \tilde{P}f_s: \tilde{P}M \rightarrow \tilde{P}N, \quad Pf \text{ или } Pf_s: PM \rightarrow PN.$$

Ясно также, что если h или h_s не эквивариантны, но все-таки сохраняют орбиты $O(2)$ и $SO(2)$ (т. е. переводят каждую орбиту в (вообще говоря, другую) орбиту), то тоже можно перейти к соответствующим отображениям факторпространств. Примером может служить отображение g из 1.3.12. Дополнительно к 1.3.12 можно обеспечить, чтобы гомотопия, соединяющая $\text{id}_{\Lambda M}$ и g , тоже сохраняла орбиты, так что $\tilde{g}$ и $\bar{g}$ тоже гомотопны тождественным отображениям.

Построение g в 1.3.12 зависит от выбора начальной точки $(gc)(0)$; см. обсуждение в конце § 1.3. (Напротив, $\tilde{g}$ и $\bar{g}$ при различном выборе $(gc)(0) \in c(S)$ получаются одинаковыми.) Легко видеть, что при сделанном ранее выборе: $(gc)(0) = c(0)$ отображение g не эквивариантно, хотя и сохраняет орбиты $O(2)$ и $SO(2)$. При доказательстве сделанного выше дополнения к теореме 1.3.12 оказывается удобным наряду с определением $(gc)(0) = c(0)$ пользоваться также и определением $(gc)(0)$ по некоторому другому правилу, при котором g оказывается эквивариантным. см. Аносов [3]. ▲

Следующая теорема является аналогом теоремы 2.2.4 для пространства PM .

2.2.6. Теорема. *Деформация φ_s на ΛM определяет деформацию ψ_s на PM . Эта деформация описывается коммутативной диаграммой*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda M & \xrightarrow{\varphi_s} & \Lambda M \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ PM & \xrightarrow{\psi_s} & PM \end{array}$$

Доказательство. Так как $O(2)$ -действие на ΛM является изометрией, которая оставляет функцию E неизменной, то для каждого $\alpha \in O(2)$ имеем

$$T\alpha \cdot \text{grad } E(c) = \text{grad } E(\alpha \cdot c),$$

где отображение $\alpha: \Lambda M \rightarrow \Lambda M$ определяется соответствием $c \mapsto \chi(\alpha, c)$. Поэтому $\varphi_s \alpha \cdot c = \alpha \cdot \varphi_s c$. □

Для каждого действительного числа κ определим множества

$$\tilde{\Pi}^\kappa := \{\tilde{c} \in \tilde{\Pi}; E(\tilde{c}) \leq \kappa\}, \quad \Pi^\kappa := \{c \in \Pi; E(c) \leq \kappa\}.$$

Другими словами, $\tilde{\Pi}^\kappa = \tilde{\Pi} \Lambda^\kappa$ и $\Pi^\kappa = \Pi \Lambda^\kappa$.

Заметим, что $\tilde{\Pi}^0$ и Π^0 канонически изоморфны пространству $\Lambda^0 M \cong M$.

2.2.7. Теорема. *Существует такое $\varepsilon > 0$, что $\tilde{\Pi}^0$ — сильный деформационный ретракт $\tilde{\Pi}^\varepsilon$, а Π^0 — сильный деформационный ретракт Π^ε .*

Доказательство. Это следует из 1.4.15 и соответственно из 2.2.4 или 2.2.6, если заметить, что построение Φ_τ по φ_ε в доказательстве 1.4.15 эквивариантно относительно действий S и θ .

Следующая лемма утверждает существование среза S -действия $\tilde{I}$ на ΛM (об этом понятии ^{*} см. Пале [1]).

2.2.8. Лемма. *Пусть $c \in \Lambda M - \Lambda^0 M$. Тогда для каждого $z \in S$ существует срез $\Sigma(z, c)$, т. е. такая проходящая через точку z, c локальная гиперповерхность коразмерности 1 многообразия ΛM , что*

(i) $z, \Sigma(c) = \Sigma(z, c)$;
(ii) для каждого $z \notin \tilde{I}(c)$ множества $\Sigma(z, c)$ и $\Sigma(c)$ не пересекаются;

(iii) существует такая открытая окрестность U точки 1 на S , что отображение $U \times \Sigma(c) \rightarrow \Lambda M$, $(z, e) \mapsto z, e$, является гомеоморфизмом на открытую окрестность кривой c в ΛM ;

(iv) $\tilde{I}(c)$ действует как группа изометрий на $\Sigma(c)$, если $\Sigma(c)$ рассматривать с индуцированной метрикой. Это действие оставляет c инвариантным. В частности, индуцированное действие $\tilde{I}(c)$ на касательном пространстве к $\Sigma(c)$ в точке c является ортогональным представлением группы $\tilde{I}(c)$ в гильбертовом пространстве.

Замечание. Важность понятия среза связана в основном с тем, что $\tilde{\Pi}|_{\Sigma(c)}$ (или $\tilde{\Pi}|_{\Sigma(z, c)}$, где z — любая точка из S) отображает $\Sigma(c)$ (или $\Sigma(z, c)$) на открытую окрестность точки $\tilde{\Pi}(c)$. Это отображение определяется факторизацией изометрического действия на $\Sigma(c)$ группы изотропии $\tilde{I}(c)$ кривой c .

Доказательство (ср. Кархер [2]). Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы ограничение на ε -шар в $T_c \Lambda$ отображения $\tilde{\text{exr}}|_{T_c \Lambda}$ было диффеоморфизмом на некоторую окрестность $\mathcal{U}^c$ точки c в Λ ; его мы обозначим exr_c . Пусть H_ε — пересечение гиперповерхности $\omega = 0$ в $T_c \Lambda$ с ε -шаром (здесь ω то же, что в 1.4.13). Пусть, далее, $\Sigma(c) := \text{exr}_c H_\varepsilon$.

^{*} Это общее понятие в теории компактных групп преобразований. Формулировка леммы 2.2.8 содержит его определение в нужном нам случае.

Определим $\Sigma(z, c)$ аналогичным образом. Тогда, поскольку все наши определения эквивариантны, (i) выполнено. Кроме того, S действует как группа изометрий. Поэтому выполнено и (iv).

Рассмотрим в произведении некоторой окрестности U точки 1 на S и окрестности $\mathcal{U}^c$ функцию

$$f: U \times \mathcal{U}^c \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(z, e) = -\langle \partial c, \exp_c^{-1} z \cdot e \rangle_0 = \omega(\exp_c^{-1} z \cdot e)$$

(чтобы $\exp_c^{-1} z \cdot e$ было определено при всех $(z, e) \in U \times \mathcal{U}^c$, возможно, придется несколько уменьшить e , определяющее $\mathcal{U}^c$). Ниже мы докажем, что f имеет производную $D_1 f(z, e)$, которая непрерывна по (z, e) и в точке $(1, c)$ равна $\langle \partial c, \partial c \rangle_0 \neq 0$. Поскольку $f(1, c) = 0$, из теоремы о неявной функции следует, что существует такое непрерывное отображение $e \mapsto z(e) \in U$, что $z(c) = 1$, $f(z(e), e) = 0$, и если $f(z, e) = 0$ при $(z, e) \in U \times \mathcal{U}^c$, то $z = z(e)$. (При этом, возможно, надо уменьшить U и e .) Но выполнение равенства $f(z, e) = 0$ эквивалентно тому, что $z \cdot e \in \Sigma(c)$, $e \in \Sigma(z^{-1} \cdot c)$. Тем самым доказано (iii) (отображение, обратное к упомянутому там, имеет вид $e \mapsto (z^{-1}(e), z(e) \cdot e) \in U \times \Sigma(c)$), а также (ii), $\blacktriangle$ однако (ii) пока что не для всех $z \notin \tilde{I}(c)$, а только для $z \in U - \{1\}$.

Докажем (ii) для всех $z \notin \tilde{I}(c)$. Пусть сначала $z \in U \cdot \tilde{I}(c)$, $z \notin \tilde{I}(c)$, т. е. $z = z_1 z_2$, $z_1 \in U$, $z_1 \neq 1$, $z_2 \in \tilde{I}(c)$. Тогда

$$\Sigma(z \cdot c) = z_1 \cdot \Sigma(z_2 \cdot c) = z_1 \cdot \Sigma(c),$$

что по доказанному не пересекается с $\Sigma(c)$. Наконец, имеется такое $\delta > 0$, что $d_\Lambda(c, z \cdot c) > \delta$ для всех $z \notin U \cdot \tilde{I}(c)$. Уменьшив, если понадобится, e (определяющее $\mathcal{U}^c$), получим, что $\mathcal{U}^c \cap \cap z \cdot \mathcal{U}^c = \emptyset$ при $z \notin U \cdot \tilde{I}(c)$; в частности, $\Sigma(c) \cap \Sigma(z \cdot c) = \emptyset$.

Остается убедиться, что f обладает нужными свойствами. Из определения f видно, что $f(z z_0, e) = f(z, z_0 \cdot e)$, поэтому дифференцируемость f в точке (z_0, e) , принадлежащей области определения f , равносильна дифференцируемости f в точке $(1, z_0 \cdot e)$. (Это рассуждение годится не только для $(z_0, e) \in U \times \mathcal{U}^c$, но и вообще для всех тех (z_0, e) , для которых имеет смысл определение f посредством соответствующей формулы, т. е. для которых $d_\Lambda(z_0 \cdot e, c) < e$, где e то же, что в 1.3.8.) Мы докажем, что

$$D_1 f(1, \exp_c \xi) = \langle \partial c, \partial_c \xi \rangle_0^*.$$

* Ранее ∂_c определялось лишь при $c \in C^\infty(S, M)$, но аналогично можно определить

$$\partial_c: \{\xi \in T_c M; \|\xi\|_1 < e\} \rightarrow H^0(c^* TM)$$

и при любом $c \in \Lambda M$. Это по-прежнему есть главная часть локального представления сечения ∂ расслоения α^0 в некоторой векторной карте, — именно, векторной карте $(\Phi_{0,c}, \exp_c^{-1} \mathcal{U}(c))$, введенной в (14). Заметим, что $\partial_c \xi$ непрерывно зависит от ξ ввиду непрерывности сечения ξ .

Отсюда будет следовать непрерывность $D_1 f$ (действительно, из сказанного видно, что $D_1 f(z, e) = \langle \partial c, \partial_c \exp_c^{-1} z \cdot e \rangle_0$ (причем не только при $(z, e) \in U \times {}^0 V^0$, но и вообще при любых z, e , для которых $d_\Lambda(z \cdot e, c) < \varepsilon$ с ε из 1.3.8), а непрерывность правой части по (z, e) следует из 2.2.1, 1.3.7 и 1.3.2), а также и то, что $D_1 f(1, c) = \langle \partial c, \partial c \rangle_0$.

Рассмотрим непрерывное отображение

$$\eta: U \rightarrow H^0(c^*TM), \quad \eta(z) := \exp_c^{-1}(z \cdot \exp_c \xi),$$

где $\xi \in T_c \Lambda$ и $\|\xi\|_1 < \varepsilon$. (Здесь можно взять и ε из 1.3.8, только тогда U , вообще говоря, будет зависеть от ξ , что несущественно.) Достаточно доказать, что существует производная $D\eta(1)$ и что она равна $-\partial_c \xi$. (Если бы мы рассматривали $\eta(z)$ как функцию со значениями в $H^1(c^*TM)$, то производной не существовало бы.) Будем пользоваться аддитивными обозначениями для S вместо мультипликативных, соответственно будем писать h вместо z . Надо доказать, что при $h \rightarrow 0$

$$\|\eta(h) - \xi + h \partial_c \xi\|_0 = o(h).$$

Обозначим $\tilde{\eta}(h, t) := \eta(h)(t)$ ($h \in U, t \in S$), $\varphi(t, h) := \frac{1}{h} \|\tilde{\eta}(h, t) - \xi(t) + h \partial_c \xi(t)\|$; мы хотим доказать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \varphi^2(t, h) dt = 0.$$

Достаточно доказать следующее (ср. с концом (12), в)):

1) $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(t, h) = 0$ при почти всех t ;

2) для любого $\varepsilon > 0$ имеется такое $\delta > 0$, что если B — измеримое множество меры $\text{mes } B < \delta$, то $\int_B \varphi^2(t, h) dt < \varepsilon$ при всех h .

Пусть $e := \exp_c \xi$ и t таково, что существует $\dot{e}(t)$. Тогда $\tilde{\eta}(0, t) = \xi(t)$,

$$\exp \tau^* c \cdot \tilde{\eta}(h, t) = (e^{2\pi i h} \cdot e)(t) = e(t - h),$$

$$\dot{e}(t) = - \frac{d}{dh} \Big|_{h=0} e(t - h) = - \nabla_2 \exp(\tau^* c \xi(t)) \cdot \tau^* c \cdot \frac{\partial}{\partial h} \Big|_{h=0} \tilde{\eta}(h, t),$$

т. е. существует производная $\frac{\partial}{\partial h} \Big|_{h=0} \tilde{\eta}(h, t)$, и она равна $-\partial_c \xi(t)$ (по самому определению последнего). Тем самым доказано 1). Кроме того, при любом t при почти всех $h \in U$ (именно, при тех h , при которых существует $\dot{e}(t - h)$)

$$\dot{e}(t - h) = - \frac{d}{dh'} (e^{2\pi i h'} \cdot (e^{2\pi i h} \cdot e))(t) =$$

$$= - \nabla_2 \exp(\tau^* c \tilde{\eta}(h, t)) \cdot \tau^* c \cdot \frac{\partial}{\partial h'} \Big|_{h'=0} \tilde{\eta}(h + h', t) =$$

$$= - \nabla_2 \exp(\tau^* c \tilde{\eta}(h, t)) \cdot \tau^* c \cdot \frac{\partial}{\partial h} \tilde{\eta}(h, t),$$

откуда следует, что при фиксированном t функция $h \mapsto \tilde{\eta}(h, t)$ абсолютно непрерывна и $\left| \frac{\partial}{\partial h} \tilde{\eta}(h, t) \right| \leq C |\dot{e}(t-h)|$ с некоторой константой C ; в частности, $\partial \tilde{\eta} / \partial h$ квадратично интегрируема. Ясно также, что $|\partial_c \xi(t)| \leq C |\dot{e}(t)|$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если B — измеримое множество и $\text{mes } B < \delta$, то $\int_B |\dot{e}(t)|^2 dt < \varepsilon$. Докажем, что тогда $\int_B \varphi^2(t, h) dt < 4C^2\varepsilon$. Имеем

$$\left(\int_B \varphi^2(t, h) dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{J_1} + \sqrt{J_2},$$

где

$$J_1 = \frac{1}{h^2} \int_B |\tilde{\eta}(h, t) - \xi(t)|^2 dt, \quad J_2 = \int_B |\partial_c \xi(t)|^2 dt.$$

Ясно, что $J_2 \leq C^2 \int_B |\dot{e}(t)|^2 dt < C^2\varepsilon$. Далее,

$$\begin{aligned} |\tilde{\eta}(h, t) - \xi(t)|^2 &= |\tilde{\eta}(h, t) - \tilde{\eta}(0, t)|^2 = \left| \int_0^h \frac{\partial}{\partial h'} \tilde{\eta}(h', t) dh' \right|^2 \leq \\ &\leq C \int_0^h dh' \int_0^h |\dot{e}(t-h')|^2 dh' = Ch \int_0^h |\dot{e}(t-h')|^2 dh', \end{aligned}$$

откуда

$$J_1 \leq \frac{C^2}{h} \int_B dt \int_0^h |\dot{e}(t-h')|^2 dh' = \frac{C^2}{h} \int_0^h dh' \int_B |\dot{e}(t-h')|^2 dt.$$

Но $\int_B |\dot{e}(t-h')|^2 dt$ есть интеграл от $|\dot{e}(t)|^2$ по «сдвинутому» множеству B ; поэтому он $< \varepsilon$. Значит,

$$J_1 \leq \frac{C^2}{h} \int_0^h \varepsilon dh' = C^2\varepsilon. \quad \square$$

Замечание. Как видно из доказательства, построение среза $\Sigma(c)$ зависит от параметра $\varepsilon > 0$, характеризующего «размеры» среза. Будем на минуту писать $\Sigma_\varepsilon(c)$. Срезы $\Sigma_\varepsilon(c)$ определены и обладают свойствами (i)–(iv) для всех достаточно малых ε , скажем для $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0(c)[$ (где $\varepsilon_0(c)$, конечно, одно и то же для всех c из одной и той же $SO(2)$ -орбиты). Чтобы убедиться в этом, не надо даже пересматривать доказательство с точки зрения его зависимости от ε . Если $\Sigma_\varepsilon(c)$ (где ε фиксировано, а c пробегает $SO(2)$ -орбиту) — срез и $0 < \delta < \varepsilon$, то очевидно, что

$$\Sigma_\delta(c) := \text{exp}_c H_\delta = \delta\text{-окрестность } c \text{ в } \Sigma_\varepsilon(c)$$

тоже обладает свойствами (i) — (iv). Отметим еще, что когда U пробегает окрестности точки 1 на S , а ε — малые положительные числа, то $U \cdot \Sigma_\varepsilon(c)$ пробегает фундаментальную систему окрестностей точки c в ΛM . (Мы уже знаем, что это действительно окрестности, а если $\mathcal{W}$ — какая-нибудь заданная окрестность точки c , то при достаточно малых U и ε будет $z \cdot e \in \mathcal{W}$ при всех $z \in U$ и всех e с $d_\Lambda(e, c) < \varepsilon$, в частности при $e \in \Sigma_\varepsilon(c)$.) Отсюда следует, что $\tilde{\pi}(U \cdot \Sigma_\varepsilon(c)) = \tilde{\pi}(\Sigma_\varepsilon(c))$ пробегает фундаментальную систему окрестностей точки $\tilde{\pi}c$ в $\tilde{\Pi}M$, а $\pi(\Sigma_\varepsilon(c))$ — точки πc в ΠM . $\blacktriangle$

2.2.9. Следствие. $\tilde{\Pi}M$ и ΠM локально стягиваемы.

Доказательство. Если $c = c_p$ — одноточечная кривая, образ которой есть точка $p \in M$, то окрестность этой кривой в ΛM мы можем стянуть с помощью Φ_t на окрестность точки $c_p \in \Lambda^0 M$ в $\Lambda^0 M$, а затем по $\Lambda^0 M$ в точку p , снова эквивариантно относительно действий соответственно $SO(2)$ и $O(2)$ (на $\Lambda^0 M$ эти действия тривиальны).

Пусть теперь $E(c) > 0$. Каноническая ретракция вдоль лучей^{*}, переводящая $\Sigma(c)$ в c , коммутирует с изометрическим действием группы $\tilde{I}(c)$ и поэтому определяет локальную ретракцию окрестности точки $\tilde{\pi}(c)$ на $\tilde{\Pi}M$ в $\tilde{\pi}(c)$. Кроме того, эта ретракция коммутирует с изометрией θ и, следовательно, определяет также локальную ретракцию ΠM в $\pi(c)$. $\square$

Для $\tilde{\Pi}M$ и ΠM можно определить аналог понятия ϕ -семейства. Ради краткости мы явно введем это понятие только для пространства $\Pi = \Pi M$.

ϕ -семейство $\mathcal{B}$ пространства Π по модулю Π^α определяется как образ при проекции $\pi: \Lambda \rightarrow \Pi$ ϕ -семейства $\mathcal{A}$ многообразия Λ по модулю Λ^α ; ср. с § 2.1.

Равным образом ψ -семейство может быть описано как ϕ -семейство, элементы которого замкнуты относительно действия χ группы $O(2)$.

Следующая теорема является непосредственным следствием 2.1.1.

2.2.10. Теорема. Пусть $\kappa = \kappa_{\mathcal{B}}$ — критический уровень ψ -семейства $\mathcal{B}$ пространства $\Pi \bmod \Pi^\alpha$, т. е.

$$\kappa_{\mathcal{B}} = \inf_{B \in \mathcal{B}} \sup E|B.$$

Тогда $\alpha < \kappa$ и существуют критические точки E -уровня κ . $\square$

^{*} Точнее, вдоль образов лучей из H_θ .

Напомним, что критическую точку из Π можно рассматривать как $O(2)$ -орбиту критической точки из Λ .

Примером ψ -семейства является семейство, образованное носителями циклов какого-нибудь фиксированного нетривиального гомологического класса $\Pi \bmod \Pi^0$.

Так же, как в § 2.1, в рассматриваемой ситуации можно ввести понятие *подчиненных гомологических классов* из $H_*(\Pi \bmod \Pi^0)$. Это ненулевые гомологические классы w и w' из $H_*(\Pi \bmod \Pi^0)$, для которых можно указать когомологический класс положительной размерности ξ из $H^*(\Pi - \Pi^0)$, такой, что $w' = w \frown \xi$.

Очень важно отметить, что образ при канонической проекции ненулевого гомологического класса $\Lambda \bmod \Lambda^0$ не всегда является ненулевым гомологическим классом $\Pi \bmod \Pi^0$.

Как мы уже показали, Π локально стягиваемо. Отсюда вытекает следующий аналог теоремы 2.1.10.

2.2.11. Теорема. Пусть w и w' — подчиненные гомологические классы $\Pi \bmod \Pi^0$. Тогда критические уровни κ и κ' классов w и w' удовлетворяют неравенству $\kappa \geq \kappa' > 0$. Если $\kappa = \kappa'$, то множество критических элементов из $E^{-1}(\kappa)$ (здесь E рассматривается как функция на Π) непусто и имеет размерность в смысле покрытий $\geq \dim \xi > 0$. $\square$

Ясно, что имеет место следствие, аналогичное следствию 2.1.11.

▲В прошлом пытались использовать именно такое следствие, имея в виду приложения прежде всего к тому случаю, когда M есть сфера. Однако недавно выяснилось, что в этом случае в $H^*(\Pi - \Pi^0)$ слишком мало коциклов (по крайней мере в рассматриваемых размерностях). К счастью, оказывается, что можно заменить здесь Π^0 другим подпространством

$$\Pi_\theta := \theta \tilde{\Pi}_\theta, \quad \text{где } \tilde{\Pi}_\theta = \{\tilde{c} \in \tilde{\Pi}; \tilde{\theta}\tilde{c} = \tilde{c}\},$$

и при этом положение улучшается.

Докажем сначала, что Π_θ является окрестностным слабым деформационным ретрактом в Π . Иными словами, для каждой окрестности $\mathcal{U}$, содержащей Π_θ , существует такая окрестность $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, что вложение $\Pi_\theta \hookrightarrow \mathcal{U}'$ является гомотопической эквивалентностью.

Прежде всего заметим, что Π_θ инвариантно относительно потока ψ_t , т. е. $\psi_t \Pi_\theta \subset \Pi_\theta$ ($t \geq 0$). Это следует из того, что $\tilde{\psi}_t \tilde{\Pi}_\theta \subset \tilde{\Pi}_\theta$, а это в свою очередь вытекает из равенства $\tilde{\psi}_t \tilde{\theta} = \tilde{\theta} \psi_t$.

Далее ясно, что на Π_θ нет критических точек функции E , за исключением точек из Π^0 . Поэтому можно определить гомотопию

$$\Psi_\tau(\tilde{c}) = \psi_{t_\tau(\pi\tau/2)}(\tilde{c}), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

переводящую Π_θ в Π_θ (ср. с 1.4.15). Тем самым мы доказали, что вложение $\Pi^0 \hookrightarrow \Pi_\theta$ — гомотопическая эквивалентность.

Пусть теперь $\mathcal{U}$ — некоторая открытая окрестность Π_θ , не содержащая критических точек функции E , за исключением точек из Π^0 . Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\Pi^{\varepsilon-} \subset \mathcal{U}$ и ε удовлетворяло утверждению теоремы 2.2.7. Тогда для каждого $\bar{c} \in \Pi_\theta$ существует такое t_0 , что $\psi_{t_0} \bar{c} \in \Pi^{\varepsilon-}$. Кроме того, $\psi_t \bar{c} \in \mathcal{U}$ при $0 \leq t \leq t_0$. Поэтому существует такая окрестность $\mathcal{U}_{\bar{c}}$ точки $\bar{c}$, что $\psi_t \mathcal{U}_{\bar{c}} \subset \mathcal{U}$ при $0 \leq t \leq t_0$ и $\psi_{t_0} \mathcal{U}_{\bar{c}} \subset \Pi^{\varepsilon-}$. Теперь ясно, что окрестность $\mathcal{U}' = \left(\bigcup_{\substack{\bar{c} \in \Pi_\theta \\ t \geq 0}} \psi_t \mathcal{U}_{\bar{c}} \right) \cup \Pi^{\varepsilon-}$ тоже гомотопически эквивалентна Π^0 посредством деформации

$$\Psi'_t(\bar{c}) = \psi_{tg(\pi/2)}(\bar{c}), \quad \bar{c} \in \mathcal{U}', \quad 0 \leq t \leq 1,$$

совпадающей на Π_θ с Ψ_t . Следовательно, Π_θ — окрестностный слабый деформационный ретракт.

Имеет место лемма, аналогичная лемме 2.1.9.

2.2.12. Лемма. Умножение Чеха $\frown$ для пары $(\Pi - \Pi_\theta, \mathcal{U}' - \Pi_\theta)$

$$H_*(\Pi - \Pi_\theta, \mathcal{U}' - \Pi_\theta) \otimes H^*(\Pi - \Pi_\theta) \frown H_*(\Pi - \Pi_\theta, \mathcal{U}' - \Pi_\theta)$$

индуцирует линейное отображение

$$H_*(\Pi, \Pi_\theta) \otimes H^*(\Pi - \Pi_\theta) \rightarrow H_*(\Pi, \Pi_\theta),$$

которое мы также будем обозначать символом $\frown$.

Доказательство этой леммы повторяет доказательство 2.1.9. $\square$

Замечание о носителях, сделанное после 2.1.9, дословно на наш случай не переносится, — ведь там было существенно, что при деформации Φ_t образы точек, достаточно близких к $|u| \cap \Lambda^0$, не выходят из V , между тем как при деформации Ψ'_t образы любых точек могут выходить из окрестности V множества $|u| \cap \Pi_\theta$. Оказывается, однако, что для данного гомологического класса $\omega \in H_{m+n}(\Pi, \Pi_\theta)$ нет необходимости рассматривать произвольные его представители: для наших целей достаточно рассматривать только такие $u \in \omega$, что $|u| \cap \Pi_\theta \subset \Pi^{0*}$.

Прежде всего, если такие представители существуют, то их

^{*} Можно рассматривать умножение в 2.2.12 как умножение

$$H_*(\Pi, \Pi^0) \otimes H^*(\Pi - \Pi_\theta) \rightarrow H_*(\Pi, \Pi^0),$$

поскольку из точной гомологической последовательности тройки (Π, Π_θ, Π^0) следует, что $H_*(\Pi, \Pi^0) = H_*(\Pi, \Pi_\theta)$. Но будем ли мы исходить из $H_*(\Pi, \Pi^0)$ или из $H_*(\Pi, \Pi_\theta)$, — все равно нужны представители с указанным выше специальным свойством.

носители образуют ψ -семейство. Ясно, что если $c \in |u| \cap \Pi^0$, то и $\psi_s c \in \psi_s(|u|) \cap \Pi^0$ при $s \geq 0$; но надо еще убедиться, что если $c \in |u| - \Pi_0$, то и $\psi_s c \in \psi_s(|u|) - \Pi_0$. Иными словами, не только Π_0 , но и $\Pi - \Pi_0$ инвариантно относительно ψ_s , $s \geq 0$. Если $\tilde{c} = \theta \tilde{c}$, $\tilde{\theta} \tilde{c} \neq \tilde{c}$ и $\tilde{\theta} \tilde{\psi}_s \tilde{c} = \tilde{\psi}_s \tilde{c}$ при некотором $s > 0$, то пусть s_0 — наименьшее такое s и $\tilde{c}_0 := \tilde{\psi}_{s_0} \tilde{c}$. Тогда для точки $\tilde{c}_0$ нарушается единственность локальной траектории: $\tilde{\psi}_{s+s_0} \tilde{c} \neq \tilde{\theta} \tilde{\psi}_{s+s_0} \tilde{c}$ при малых $s < 0$, между тем обе эти функции от s являются траекториями и при $s = 0$ проходят через $\tilde{c}_0$.

Убедимся, далее, что такие представители действительно существуют. Возьмем какую-нибудь непрерывную функцию $\tau: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\tau(\tilde{c}) \geq 0$ при всех $\tilde{c}$, $\tau|_{\Pi_0} = 1$ и $\tau|_{\Pi - \mathcal{U}'} = 0$. Положим $\Psi(\tilde{c}) := \Psi'_{\tau(\tilde{c})}(\tilde{c})$, где Ψ'_τ — то же, что и выше (перед 2.2.12). Ясно, что $\Psi: \Pi \rightarrow \Pi$ — непрерывное отображение, переводящее всякий цикл u в гомологичный ему цикл u_1 , причем носитель последнего $|u_1| = \Psi(|u|)$ может пересекаться с Π_0 только в точках Π^0 .

Поскольку точки $|u_1|$ получаются из точек $|u|$ сдвигом по траекториям потока ψ_s в направлении убывания E , то $E||u_1| \leq \leq E||u|$. А отсюда следует, что критический уровень ψ -семейства $\{|u|; u \in \omega, |u| \cap \Pi_0 \subset \Pi^0\}$ совпадает с критическим уровнем ω большего ψ -семейства $\{|u|; u \in \omega\}$.

Для $u \in \omega$ (где ω — ненулевой элемент $H_{m+n}(\Pi, \Pi_0)$), для которых $|u| \cap \Pi_0 \subset \Pi^0$, справедливо замечание о носителях в таком же виде, как и после 2.1.9. А именно, пусть V — открытая окрестность множества $|u| \cap \Pi^0$, $\zeta \in H^*(\Pi - \Pi_0)$ и $\omega' = \omega \cap \zeta$. Тогда у ω' имеется такой представитель u' , что $|u'| \subset |u| \cup V$. Если, кроме того, $\zeta|_U = 0$ для некоторого открытого подмножества $U \subset \subset \Pi - \Pi_0$ и W — такое открытое множество, что его замыкание $\bar{W} \subset U$, то существует такой цикл $u' \in \omega'$, что $|u'| \subset (|u| - W) \cup V$.

Можно считать, что $V \subset \mathcal{U}'$, где $\mathcal{U}'$ — та же окрестность Π_0 , что и в 2.2.12; она должна быть такой, чтобы для нее была определена гомотопия Ψ'_τ , в остальном же ее выбор безразличен (в частности, нет условия $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, поскольку нет никакого $\mathcal{U}$). Можно считать, что точки, достаточно близкие к $|u| \cap \Pi_0 \subset \Pi^0$, при этой гомотопии не выходят из V . Поэтому годится рассуждение из § 2.1. По-прежнему считаем, что относительный цикл $u_1 \in Z_{m+n}(\Pi, \Pi^0)$ получается из u при столь мелком подразделении, что: а) образы $|\sigma_i|$ сингулярных симплексов из u_1 , пересекающиеся с Π^0 , целиком лежат в V , равно как и все $\Psi'_\tau(|\sigma_i|)$, $0 \leq \tau \leq 1$; б) если нам еще заданы U и W , то $|\sigma_i| \subset U$ при

$|\sigma_i| \cap W \neq \emptyset$. Запишем u_1 в виде $u_1 = \sum_{i=1}^q a_i [\sigma_i]$, где все $a_i \neq 0$, все σ_i различны и нумерация такова, что $|\sigma_i| \cap \Pi_0 = \emptyset$ при $i \leq p$

и $|\sigma_i| \cap \Pi^0 \neq \emptyset$ при $i > p$. Положим

$$u_2 := \sum_{i=p+1}^q a_i [\sigma_i], \quad u_3 := \sum_{i=1}^p a_i [\sigma_i] = u_1 - u_2.$$

Тогда $u_3 \in C_*(\Pi - \Pi_0)$. Запишем du_3 в виде $\sum b_j [\tau_j]$, где τ_j — различные сингулярные симплексы и все $b_j \neq 0$. Поскольку $du_3 = du_1 - du_2$, $|du_3| \cap \Pi^0 = \emptyset$ и $|du_1| \subset \Pi^0$, то τ_j суть грани некоторых сингулярных симплексов из u_2 . Поэтому

$$(*) \quad \bigcup_{\tau} \Psi'_{\tau}(|du_3|) \subset V.$$

Дальше доказательство проводится совершенно так же, как и раньше. $\square$

Теперь можно определить подчинение гомологических классов в смысле умножения Чеха 2.2.12.

Пусть w' и w — ненулевые гомологические классы $\Pi \bmod \Pi_0$ размерностей соответственно k и $k+l$. Будем говорить, что класс w' подчинен классу w , если существует такой l -мерный класс когомологий ξ пространства $\Pi - \Pi_0$, что $w' = w \wedge \xi$.

Следующая теорема соответствует теореме 2.1.10.

2.2.13. Теорема. Пусть $w, w' \in H_*(\Pi, \Pi_0)$ и класс w' подчинен классу w . Тогда критические уровни κ, κ' классов w и w' удовлетворяют неравенству $\kappa \geq \kappa' > 0$. Если $\kappa = \kappa'$, то множество критических точек из $E^{-1}(\kappa)$ имеет ненулевые когомологии Чеха в размерности $l = \dim w - \dim w' > 0$. Отсюда следует, что размерность этого множества в смысле покрытий $\geq l$.

Доказательство. Уровни κ и κ' должны быть > 0 , потому что циклы, представляющие соответственно w' и w , образуют ψ -семейства пространства $\Pi \bmod \Pi^0$.

Пусть u — такой представитель w , что $|u| \cap \Pi_0 \subset \Pi^0$. Тогда, согласно замечанию, существует такой цикл $u' \in w'$, что $|u'| \subset \subset |u| \cup V$, где V — сколь угодно малая окрестность множества $|u| \cap \Pi^0$, и поэтому можно считать, что $E|V| < \kappa$. Значит, $E||u'| < E||u|$. Мы видели, что κ совпадает с $\inf E||u|$, где нижняя грань берется по всем представителям $u \in w$ с $|u| \cap \Pi_0 \subset \Pi^0$. Следовательно $\kappa' \leq \kappa$.

Допустим теперь, что $\kappa' = \kappa$. Положим $Cr \Pi \cap E^{-1}(\kappa) = K$. Пусть $w' = w \wedge \xi$, $\xi \in H^l(\Pi - \Pi_0)$. Докажем, что $\xi|U \neq 0$ для каждой открытой окрестности U множества K в $\Pi - \Pi_0$. Действительно, пусть $\xi|U = 0$. Возьмем какую-нибудь меньшую окрестность W множества K , для которой $\bar{W} \subset U$. Найдется такой представитель $u \in w$, $|u| \cap \Pi_0 \subset \Pi^0$, что $|u| \subset W \cup \Pi^{\kappa-}$. Но тогда, согласно замечанию к 2.2.12, найдется такой представитель $u' \in w'$, что $|u'| \subset (|u| - W) \cup V \subset \Pi^{\kappa-}$ (окрестность V множества $|u| \cap \Pi^0$

берется по-прежнему столь малой, что $E \mid V < \kappa$). Значит, $\kappa' < \kappa$.

Далее, рассуждая так же, как в конце доказательства 2.1.10, получим последнее утверждение теоремы. $\square$

2.2.14. Следствие. Пусть w_i , $1 \leq i \leq r$, — ненулевые гомологические классы $\Pi \bmod \Pi_0$, каждый из которых подчинен следующему, и $0 \leq k_1 < \dots < k_r$, где $k_i = \dim w_i$. Обозначим критический уровень w_i через κ_i . Тогда

$$0 < \kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_r,$$

и для каждого κ_i существуют замкнутые геодезические на E -уровне κ_i . Кроме того, если $\kappa_j = \kappa_{j+j'}$, $j' > 0$, то множество замкнутых геодезических E -уровня κ_j имеет размерность в смысле покрытий $\geq k_{j+j'} - k_j$.

В заключение мы покажем, что при построении гомологий пространства Π достаточно пользоваться только некоторыми специальными сингулярными симплексами. Сначала сформулируем один результат общего характера.

Пусть X — паракомпактное топологическое пространство. Пусть некоторые из его сингулярных симплексов объявлены «специальными», причем если $\sigma: \Delta^q \rightarrow X$ — специальный сингулярный симплекс, а $\varphi: \Delta^p \rightarrow \Delta^q$ — линейное отображение (т. е. ограничение на Δ^p некоторого линейного отображения несущих линейных пространств этих симплексов; p и q здесь любые), то и $\sigma \circ \varphi: \Delta^p \rightarrow X$ — тоже специальный симплекс. Обозначим для любого открытого подмножества $U \subset X$ через $\bar{C}_*(U)$ цепной комплекс, порожденный специальными сингулярными симплексами с носителями в U (и с обычным оператором границы; ясно, что грани специальных симплексов сами специальные), а через $\bar{H}^*(U)$ — когомологии этого комплекса с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. В этих условиях и обозначениях для локально стягиваемых X имеет место следующая теорема.

2.2.15. Теорема. Если для любой точки $x \in X$

$$\lim \bar{H}^*(U) = H^*(x)$$

(предел прямого спектра по всем окрестностям $U \ni x$), то гомологии цепного комплекса $\bar{C}_*(X)$ с коэффициентами в любой группе G совпадают с $H_*(X; G)$.

Доказательство см. в работе Аносова [4]. Оно выходит за пределы настоящей книги. Заметим только, что все нужные для него рассуждения имеются в статье Бридона [1], хотя формально такой теоремы там нет. $\square$

Применим 2.2.15 к случаю $X = \Pi$, считая специальными те сингулярные симплексы, которые можно представить в виде $\pi \circ \sigma$

(проекция $\pi: \Lambda \rightarrow \Pi$ та же, что и выше) с такими $\sigma: \Delta^q \rightarrow \Lambda$, что отображения

$$\tilde{\sigma}: \Delta^q \times S \rightarrow M, \quad \tilde{\sigma}(x, t) = \sigma(x)(t),$$

являются C^∞ -отображениями.

2.2.16. Теорема. $H_*(\Pi; G) =$ гомологии $\bar{C}_*(\Pi)$ с коэффициентами в G .

Доказательство сводится к проверке выполнения условия из 2.2.15; см. Аносов [4]. $\square \blacktriangle$

2.3. Замкнутые геодезические на сферах

Простейшими односвязными компактными многообразиями условно являются сферы. На самом деле можно даже сказать, что теория замкнутых геодезических началась с попытки Пуанкаре доказать существование замкнутой геодезической на выпуклой поверхности; см. Пуанкаре [1]. Однако Морс [2] считал его доказательство неудовлетворительным. ⁽²⁶⁾

Доказательство существования замкнутой геодезической на произвольной поверхности рода 0 было дано Биркгофом [1] (см. также Биркгоф [2]). Позже Люстерник и Шнирельман [1] показали, что на такой поверхности всегда существуют по крайней мере три замкнутые геодезические без самопересечений — результат, который в общем случае не может быть улучшен, так как на эллипсоиде с тремя различными осями, длины которых отличаются не слишком сильно, замкнутыми геодезическими без самопересечений являются только три главных эллипса этого эллипсоида; см. 5.1.2.

Биркгоф [3] показал, что на n -мерной аналитической поверхности, которая по модулю своей римановой структуры является сферой, всегда существует по крайней мере одна замкнутая геодезическая.

Далее Морс, с одной стороны, и Люстерник и Шнирельман — с другой, почти одновременно создали более изощренные топологические методы для исследования проблемы о существовании более чем одной замкнутой геодезической на n -мерном римановом многообразии. При этом особое внимание они уделили случаю, когда многообразие диффеоморфно n -мерной сфере.

Основные результаты Морса содержатся в его монографии [2], где среди прочего он исчерпывающе изучает гомологии пространства непараметризованных замкнутых кривых на сфере. Особенно его интересовали «круговые числа связности» сферы, которые совпадают с числами Бетти $\mathbb{Z}_2$ -гомологий пространства PS^n .

Однако, как было показано А. С. Шварцем [1], его результаты оказались ошибочными. Он упустил из виду тот факт, что действие группы S на ΛM не является свободным. Аналогичная ошибка была затем повторена Боттом [1] и Сидзумой [1].

В этом параграфе мы применим развитые ранее методы к исследованию проблемы о существовании нескольких замкнутых геодезических на многообразии, гомотопически эквивалентном S^n . Эти методы являются результатом совместных усилий Морса, Люстерника и Шнирельмана, а также С. И. Альбера и автора, работы которых относятся к более позднему периоду.

Однако здесь мы пока не сможем доказать существования более чем одной однократной замкнутой геодезической на таком многообразии, если только риманова метрика не удовлетворяет некоторым ограничениям на кривизну; см. 2.3.8. Лишь в § 4.3 нам удастся доказать существование бесконечного числа однократных замкнутых геодезических, применяя для этого некоторые ранее не замеченные аспекты теории Морса на ΛM . См. также § 5.1, где доказывается существование $2n - 1$ «коротких» замкнутых геодезических.

Мы начнем с описания хорошо известного подмножества пространства ΛS^n , а именно пространства AS^n *параметризованных окружностей на S^n* .

Для того чтобы определить AS^n , будем считать, что сфера S^n вложена стандартным образом в $\mathbb{R}^{n+1}$ в виде гиперповерхности постоянной кривизны, равной 1. *Окружностью на S^n* назовем или одноточечную кривую, или пересечение S^n с двумерной плоскостью из $\mathbb{R}^{n+1}$, расстояние которой до начала координат в $\mathbb{R}^{n+1}$ меньше 1. Когда мы говорим о параметризованной окружности, мы имеем в виду (в предположении, что окружность не есть одноточечная кривая), что параметр выбран пропорционально длине дуги. Через A^0S^n обозначим подмножество одноточечных кривых, которое изоморфно S^n .

Пространство AS^n содержит в виде подпространства *пространство BS^n параметризованных больших кругов*. Ясно, что BS^n изоморфно многообразию Штифеля $V(2, n-1)$, состоящему из ортонормированных 2-реперов в начале координат в $\mathbb{R}^{n+1}$. Поэтому $BS^n = O(n+1)/O(n-1)$ и $\dim BS^n = 2n - 1$; см., например, Милнор и Стасеф [1].

Рассмотрим AS^n как подпространство ΛS^n . Пространства AS^n и BS^n инвариантны относительно $O(2)$ -действия χ на ΛS^n . Пространства

$$\Gamma S^n := AS^n / \chi O(2), \quad \Delta S^n := BS^n / \chi O(2)$$

мы назовем соответственно *пространством (непараметризованных) окружностей* и *(непараметризованных) больших кругов на S^n* . Через $\Gamma^0 S^n$ обозначим $A^0 S^n / O(2) \cong S^n$. Пространство ΔS^n изоморфно

грасманову многообразию^{*)} $G(2, n-1)$, элементами которого являются двумерные плоскости, проходящие через начало координат в $\mathbb{R}^{n+1}$. Следовательно, $\Delta S^n = O(n+1)/O(2) \times O(n-1)$ и $\dim \Delta S^n = 2n-2$.

Определим отображение

$$\alpha: AS^n - A^0 S^n \rightarrow BS^n,$$

ставя в соответствие параметризованной окружности параметризованный большой круг, который получается из нее следующим образом: сначала плоскость, в которой лежит окружность, параллельно переносится в начало координат в $\mathbb{R}^{n+1}$, а затем лежащая в этой плоскости окружность раздувается в большой круг.

Окружности, лежащие над фиксированным большим кругом, однозначно определяются вектором, указывающим положение их центра в $\mathbb{R}^{n+1}$, поэтому слой $\alpha^{-1}(S^1)$ над большим кругом $S^1 \in BS^n$ есть открытый $(n-1)$ -мерный диск. Таким образом, α определяет некоторое расслоение на $(n-1)$ -мерные диски над BS^n .

Так как α коммутирует с $O(2)$ -действием χ на $AS^n - A^0 S^n$, то определено факторотображение

$$\gamma: \Gamma S^n - \Gamma^0 S^n \rightarrow \Delta S^n.$$

Отображение γ представляет собой проекцию расслоения над ΔS^n , слоями которого являются $(n-1)$ -мерные диски.

Легко видеть, что γ — расслоение на диски для канонического $(n-1)$ -мерного векторного расслоения γ^{n-1} над $\Delta S^n = G(2, n-1)$; ср. Милнор и Сташеф [1], Спеньер [1]**). Из теории векторных расслоений известно, что $\mathbb{Z}_2$ -когомологии $\Gamma \bmod \Gamma^0$ могут быть записаны в виде

$$H^*(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n) = y^{n-1} \cup H^*(G(2, n-1)),$$

где y^{n-1} — класс Тома расслоения γ .

▲ Точнее говоря, непосредственно получается, что если $\Gamma^e S^n = \Gamma S^n \cap \Pi^e S^n$ (окружности длины $\leq \sqrt{e}$), то с помощью умноже-

^{*)} Грасманово многообразие, которое Клингенберг обозначает через $G(a, b)$, другие авторы могут обозначать через $G(a+b, a)$ или $G_a(\mathbb{R}^{a+b})$; последнее обозначение, принятое в книге Милнора и Сташефа [1], наиболее выразительно и исключает возможность путаницы.

^{**)} Согласно общепринятой терминологии, каноническим векторным расслоением над $G(2, n-1)$ является расслоение γ^2 , слой которого над точкой грасманова многообразия, по определению являющейся некоторой двумерной плоскостью, состоит из всех точек этой плоскости. В более подробных обозначениях, принятых в книге Милнора и Сташефа [1], это расслоение обозначается $\gamma^2(\mathbb{R}^{n+1})$. Стало быть, γ^2 — естественная проекция $BS^n \rightarrow \Delta S^n$. Расслоение же γ является ортогональным дополнением расслоения γ^2 в тривиальном расслоении $G(2, n-1) \times \mathbb{R}^{n+1}$. Если заменить $G(2, n-1)$ на $G(n-1, 2)$ — помощью диффеоморфизма этих многообразий Грасмана (Милнор, Сташеф [1], лемма 5.1), то γ станет каноническим расслоением γ^{n+1} над $G(n-1, 2)$ (расслоением $\gamma^{n-1}(\mathbb{R}^{n+1})$).

ния в когомологиях

$$H^i(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n) \otimes H^{n-1}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n) \hookrightarrow H^{i+n-1}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n)$$

можно определить изоморфизм Тома

$$H^i(\Delta S^n) \cong H^i(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n) \rightarrow H^{i+n-1}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n), \\ x \mapsto x \cup y^{n-1},$$

где y^{n-1} — класс Тома расслоения γ . Далее используем изоморфизмы

$$H^j(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n) \cong H^j(\Gamma S^n, \Gamma^e S^n) \cong H^j(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n)$$

(вырезание и точная гомологическая последовательность тройки $(\Gamma S^n, \Gamma^e S^n, \Gamma^0 S^n)$ с учетом очевидной деформации $\Gamma^e S^n$ на $\Gamma^0 S^n$). Это позволяет придать изоморфизму Тома такой смысл, как в предыдущем абзаце. Аналогично заключаем, что можно говорить о произведении Чеха

$$H_i(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n) \otimes H^{n-1}(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n) \hookrightarrow H_{i-n+1}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n)$$

и об изоморфизме Тома в гомологиях

$$H_i(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n) \rightarrow H_{i-n+1}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n) = H_{i-n+1}(\Delta S^n),$$

$$a \mapsto a \cap y^{n-1}. \blacktriangle$$

Мы хотим более подробно описать когомологии $\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n$, т. е. $H^*(G(2, n-1))$. Для этого сначала определим цикл $[a_1, a_2]$ пространства $G(2, n-1)$, где a_1 и a_2 — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq n-1$.

Цикл $[a_1, a_2]$ по определению состоит из всех больших кругов сферы $S^{a_2+1} := \left\{ \sum_0^{a_2+1} x_i^2 = 1 \right\}$, которые пересекаются со сферой *)

$S^{a_1} := \left\{ \sum_0^{a_1} x_i^2 = 1 \right\}$ (эти сферы считаются естественно вложенными в S^n).

*) Очевидно, мы получим эквивалентное определение, сказав, что $[a_1, a_2]$ состоит из всех двумерных плоскостей в $\mathbb{R}^{a_2+2}$, проходящих через начало координат 0 и имеющих нетривиальное (не сводящееся к 0) пересечение с $\mathbb{R}^{a_1+1}$ (вложенным в $\mathbb{R}^{a_2+2}$ таким образом, что к набору a_1+1 чисел справа дописывается $a_2 - a_1 + 1$ нулей). При таком определении $[a_1, a_2]$ — частный случай так называемых многообразий Шуберта. Подробнее (и точнее) о многообразиях Шуберта и о том, как с их помощью вычисляются гомологии многообразий Грассмана, см. в книге Милнора и Стасефа. Следует предупредить, что там используется иная система обозначений, нежели здесь, соотношение между ними указано в примечании на стр. 66 русского издания упомянутой книги. Отметим еще, что в настоящей книге $[a_1, a_2]$ обозначает в зависимости от контекста как многообразие Шуберта, так и соответствующие ему цикл mod 2 и класс гомологий.

Ясно, что $[a_1, a_2]$ — цикл размерности $a_1 + a_2$. При $a_1 = 0$ это очевидно. Для того чтобы убедиться в этом при $a_1 > 0$, представим $[a_1, a_2] - [a_1 - 1, a_1 - 1]$ как тотальное пространство расслоения над P^{a_1} со слоем $P^{a_2} - P^{a_1-1}$, где P^k — действительное проективное пространство размерности k . Для этого заметим, что не лежащий в S^{a_1} большой круг S^* однозначно определяется своими точками пересечения с S^{a_1} и точками пересечения с a_2 -мерной сферой, принадлежащей S^{a_1+1} и ортогональной $S^{a_1} \cap S$. При этом в качестве точек пересечения S с указанной a_2 -мерной сферой может получиться любая пара диаметрально противоположных точек последней, кроме тех, которые принадлежат S^{a_1} . Границей $[a_1, a_2] - [a_1 - 1, a_1 - 1]$ служит $[a_1 - 1, a_1 - 1]$, имеющее в $[a_1, a_2]$ коразмерность ≥ 2 .

2.3.1. Предложение. Совокупность $n(n+1)/2$ циклов $[a_1, a_2]$ образует базис $\mathbb{Z}_2$ -гомологий пространства $G(2, n-1)$. Кроме того, $G(2, n-1)$ содержит такие непересекающиеся подмногообразия типа $G(2, n-2)$ и P^{n-1} , что $G(2, n-1) - G(2, n-2)$ является расслоением π_{n-1} над P^{n-1} на открытые $(n-1)$ -мерные диски, а $G(2, n-1) - P^{n-1}$ является расслоением π'_1 над $G(2, n-2)$ на 1-мерные диски.

2.3.2. Дополнение. Обозначим через (a_1, a_2) , $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq n-1$, базис $H^*(G(2, n-1))$, двойственный базису $\{[a_1, a_2]\}$. Тогда $\cup$ -произведение удовлетворяет следующим соотношениям:

$$(i) (a_1, a_2) = (0, a_1) \cup (0, a_2) + (0, a_1 - 1) \cup (0, a_2 + 1);$$

$$(ii) (0, a) \cup (a_1, a_2) = \sum (a_1 + i, a_2 + a - i),$$

$$0 \leq i \leq \min(a, a_2 - a_1).$$

В правых частях мы считаем, что $(a, b) = 0$, если условие $0 \leq a \leq b \leq n-1$ не выполнено.

Замечание. Аддитивная структура на $H_*(G(2, n-1))$ и $H^*(G(2, n-1))$ была определена Эресманом [1]. Мультипликативная структура на $H^*(G(2, n-1))$ была определена Чжэнем [1].

Другой путь описания кольца когомологий пространства $G(2, n-1)$ состоит в следующем (см. Борель [1]). Обозначим через $S(x_1, \dots, x_p)$ алгебру симметрических полиномов от переменных $x_1, \dots, x_p$, а через $S^+(x_1, \dots, x_p)$ — подалгебру, порожденную полиномами, отличными от константы. В этих терминах кольцо $H^*(G(2, n-1))$ может быть описано как

$$S(u_1, u_2) \otimes S(u_3, \dots, u_{n+1}) / S^+(u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n+1}).$$

При этом элементарные симметрические полиномы $u_1 + u_2$ и $u_1 \cdot u_2$ являются классами Штифеля — Уитни ω^1 и ω^2 канонического $\mathbb{R}^2$ -расслоения над $G(2, n-1)$ (расслоения γ^2); они соответ-

^{*} Те S , которые лежат в S^{a_1} , образуют $[a_1 - 1, a_1 - 1]$.

ствуют элементам $(0, 1)$ и $(1, 1)$. Элементарные симметрические полиномы от $u_2, \dots, u_{n+1}$ представляют классы Штифеля — Уитни $\bar{w}^1, \dots, \bar{w}^{n-1}$ введенного выше $\mathbb{R}^{n-1}$ -расслоения γ^{n-1} над $G(2, n-1)$. Они соответствуют элементам $(0, 1), \dots, (0, n-1)$ ⁽²⁷⁾. ▲ Можно исключить из описания алгебры $H^*(G(2, n-1))$ упоминание об u_i и сказать, что эта алгебра порождается классами Штифеля — Уитни w^1, w^2 и $\bar{w}^1, \dots, \bar{w}^{n-1}$ расслоений γ^2 и γ , подчиненными лишь следующим соотношениям (Милнор, Сташеф [1], задача 7.В):

$$(1 + w^1 + w^2)(1 + \bar{w}^1 + \dots + \bar{w}^{n-1}) = 1.$$

Здесь имеется по одному соотношению в каждой из размерностей $1, 2, \dots, n+1$; первые $n-1$ из них позволяют выразить $\bar{w}^i$ через w^1 и w^2 , после чего последние два дают нетривиальные соотношения между w^1 и w^2 . Алгебра $H^*(G(2, n-1))$ есть алгебра многочленов от w^1 и w^2 , профакторизованная по этим двум соотношениям. Размерность обоих $> n-1$, так что все $\bar{w}^i \neq 0$. При $n > 2$ соотношения имеют размерность > 2 , а при $n=2$ они дают, что $w^2 = (w^1)^2$ и $(w^1)^3 = 0$ (что и понятно, ибо $G(2, 1)$ есть проективная плоскость). ▲

Доказательство предложения 2.3.1. Будем считать, что $G(2, n-2)$ вложено в $G(2, n-1)$, т. е. элементами $G(2, n-2)$ являются большие круги на $S^{n-1} = \left\{ \sum_0^{n-1} x_i^2 = 1 \right\}$. Вложим также P^{n-1} в S^n , взяв в качестве элементов из P^{n-1} большие круги на S^n , проходящие через ось x_n .

Определим отображение

$$\pi_{n-1}: G(2, n-1) - G(2, n-2) \rightarrow P^{n-1},$$

при котором каждый большой круг переходит в элемент пространства P^{n-1} , который получается из этого большого круга путем его вращения вокруг точек пересечения этого круга с S^{n-1} ; вращение происходит в трехмерном пространстве, содержащем большой круг и ось x_n . (Если же большой круг содержит ось x_n , то он уже является элементом P^{n-1} .) Если точки пересечения большого круга с S^{n-1} лежат на прямой p , то его образ при отображении π_{n-1} — это пересечение S^n с плоскостью, натянутой на ось x_n и прямую p . Всевозможные большие круги, пересекающие S^{n-1} по $p \cap S^{n-1}$, образуют $(n-1)$ -мерное проективное пространство, но к $G(2, n-1) - G(2, n-2)$ принадлежат только те из них, которые не лежат в S^{n-1} , так что в итоге слоем π_{n-1} является $P^{n-1} - P^{n-2} = \mathbb{R}^{n-1}$ (или открытый $(n-1)$ -мерный диск). Определим теперь

$$\pi'_1: G(2, n-1) - P^{n-1} \rightarrow G(2, n-2).$$

Для этого будем вращать большой круг (если он еще не принадлежит S^{n-1}) вокруг его точек пересечения с S^{n-1} до тех пор, пока он сам не окажется в S^{n-1} . Вращение происходит в трехмерном евклидовом пространстве, содержащем ось x_n и плоскость рассматриваемого большого круга. Всевозможные большие круги, лежащие в этом пространстве, образуют проективную плоскость, но к $G(2, n-1) - P^{n-1}$ принадлежат только те из них, которые не проходят через ось x_n , так что в итоге слоем π'_1 является $P^2 - P^1 = \mathbb{R}^1$.

С помощью изоморфизма Тома получим *)

$$\begin{aligned} H_*(G(2, n-1), G(2, n-2)) &= H_{*- (n-1)}(P^{n-1}), \\ H_*(G(2, n-1), P^{n-1}) &= H_{*-1}(G(2, n-2)). \end{aligned}$$

Под действием изоморфизма Тома циклы $[a_1, n-1]$ (точнее, их образы в $H_*(G(2, n-1), G(2, n-2))$) переходят в нетривиальные циклы пространства P^{n-1} (28), а соответствующие классы гомологий образуют базис. Воспользовавшись теперь точной гомологической последовательностью пары $(G(2, n-1), G(2, n-2))$ **) и применяя индукцию по n , получим 2.3.1. $\square$

За доказательством 2.3.2 мы отсылаем читателя к другим источникам (Чжэнь [1], Альбер [1]). Отметим только, что геометрически вполне очевидно, что индекс пересечения $[a_1, a_2]$ и $[n-1-a_2, n-1-a_1]$ равен 1, в то время как индекс пересечения цикла $[a_1, a_2]$ и всех остальных циклов размерности $2n-2-a_1-a_2$ равен нулю mod 2.

2.3.3. Предложение. Длина многообразия $G(2, n-1)$ равна $g(n) = 2n - s - 1$, где $0 \leq s = n - 2^k < 2^k$.

Замечание. Это было доказано Альбером [1]. В терминах того описания кольца $H^*(G(2, n-1))$, которое было приведено сразу

*) Множество плоскостей, образующих с $\mathbb{R}^n$ угол $< \varepsilon$, является некоторой окрестностью U множества $G(2, n-2)$ в $G(2, n-1)$. При этом $G(2, n-2)$ является сильным деформационным ретрактом U (вращаем каждую плоскость вокруг линии ее пересечения с $\mathbb{R}^n$, пока она не попадет в $\mathbb{R}^n$). Поэтому

$$\begin{aligned} H(G(2, n-1), G(2, n-2)) &= H(G(2, n-1), U) = \\ &= H(G(2, n-1) - G(2, n-2), U - G(2, n-2)). \end{aligned}$$

В то же время $U - G(2, n-2)$ можно интерпретировать как расслоение над P^{n-1} , каждый слой которого получается из слоя расслоения π_{n-1} путем выбрасывания некоторого меньшего диска. Поэтому

$$H(G(2, n-1) - G(2, n-2), U - G(2, n-2))$$

описывается с помощью изоморфизма Тома. Аналогичное рассуждение применимо к $H(G(2, n-1), P^{n-1})$.

**) Поскольку $H_*(G(2, n-1)) \rightarrow H_*(G(2, n-1), G(2, n-2))$ — эпиморфизм, эта точная последовательность сводится к коротким:

$$0 \rightarrow H_i(G(2, n-2)) \rightarrow H_i(G(2, n-1)) \rightarrow H_i(G(2, n-1), G(2, n-2)) \rightarrow 0.$$

после формулировки 2.3.2, доказываемый ниже результат означает, что для $\omega^1 = u_1 + u_2$ и $\omega^2 = u_1 \cdot u_2$

$$(\omega^1)^{2n-2s-2} (\omega^2)^s \neq 0.$$

Доказательство. Сначала выведем формулу

$$(*) \quad (0, 1)^{2^k-1} = (0, 2^k - 1).$$

Для этого воспользуемся индукцией. При $k=1$ формула верна. Предположим, что она верна и для $k-1$. Тогда с помощью 2.3.2 получим

$$\begin{aligned} (0, 1)^{2^k-1} &= (0, 1) \cup (0, 1)^{2^{k-1}-1} \cup (0, 1)^{2^{k-1}-1} = \\ &= (0, 1) \cup (0, 2^{k-1}-1) \cup (0, 2^{k-1}-1) = \\ &= (0, 1) \cup \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} (i, 2^k - 2 - i) = (0, 2^k - 1). \end{aligned}$$

Напомним, что мы используем $\mathbb{Z}_2$ -коэффициенты. Поэтому

$$(0, 1)^{2n-2s-2} = (0, 2^k - 1) \cup (0, 2^k - 1) = \sum_{i=0}^{2^k-1} (i, 2^{k+1} - 2 - i) \neq 0$$

и $(0, 1)^{2n-2s-1} = (0, 2^{k+1} - 1) = 0$. Умножение на $(1, 1)$ дает *)

$$(1, 1) \cup (0, 1)^{2n-2s-2} = \sum_{i=0}^{2^k} (i, 2^{k+1} - i),$$

и далее индукцией по p

$$(1, 1)^p \cup (0, 1)^{2n-2s-2} = \sum_{i=0}^{2^k+p-1} (i, 2^{k+1} + 2p - 2 - i),$$

так что

$$(1, 1)^s \cup (0, 1)^{2n-2s-2} = \sum_{i=0}^{2^k+s-1} (i, 2^{k+1} + 2s - 2 - i) = (n-1, n-1).$$

Следовательно, длина $G(2, n-1)$ больше либо равна $g(n)$. Если бы длина была больше $g(n)$, то в соответствующем произведении количество одномерных коциклов должно было бы быть больше $2n-2s-2$ **). Но так как $(0, 1)$ — единственный

*) Так как $(1, 1) = (0, 1)^2 + (0, 2)$, то в данном случае умножение на $(1, 1)$ совпадает с умножением на $(0, 2)$.

**) Формально: пусть в произведении имеется i_j сомножителей размерности j (где $j=1, \dots, r$, а $i_j \geq 0$). Если

(а) $i_1 + 2i_2 + \dots + ri_r \leq 2n-2$ (ограничение на размерность произведения).

(б) $i_1 \leq 2n-2s-2$ (иначе $(0, 1)^{i_1} = 0$),

(в) $i_1 + i_2 + \dots + i_r \geq 2n-s-2$ (длина не меньше $g(n)$),

то из (а) и (в) следует

коцикл размерности 1, это невозможно без обращения в нуль. $\square$

Напомним, что у нас имеется расслоение $\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n$ на $(n-1)$ -мерные открытые диски с базой $\Delta S^n = G(2, n-1)$ и с проекцией γ . Из 2.3.1 видно, что базис гомологий для $\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n$ можно получить так: надо по каждому циклу $[a_1, a_2]$ из ΔS^n построить цикл $\{a_1, a_2\}$ из $\Gamma S^n \bmod \Gamma^0 S^n$ размерности $a_1 + a_2 + n - 1$, который состоит из окружностей, параллельных окружностям из $[a_1, a_2]$, т. е. $\{a_1, a_2\}$ есть замыкание $\gamma^{-1}[a_1, a_2]$ в ΓS^n (при этом замыкании к $\gamma^{-1}[a_1, a_2]$ присоединяются еще некоторые одноточечные окружности).

▲ Наряду с введенным ранее произведением Чеха

$$H_*(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n) \otimes H^*(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n) \hookrightarrow H_*(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n),$$

нужным для определения изоморфизма Тома, мы будем пользоваться еще произведением Чеха

$$H_*(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n) \otimes H^*(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n) \hookrightarrow H_*(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n),$$

аналогичным 2.1.9 (и строящимся с использованием $\Gamma^e S^n$ вместо $\Lambda^e S^n$). Докажем, что при этой последней операции, если $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$, то

$$\{a_1, a_2\} \cap (b_1, b_2) = \delta_{a_1 b_1} \{0, 0\}.$$

Доказательство состоит в вычислении $(\{a_1, a_2\} \cap (b_1, b_2)) \cap y^{n-1}$. Оказывается, это есть $\delta_{a_1 b_1} (0, 0)$, откуда и следует доказываемое утверждение^{*)}. А чтобы вычислить указанное тройное произведение, вспомним, что используемые здесь произведения происходят из произведений

$$\begin{aligned} H_{a_1+a_2+n-1}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n) \otimes H_{a_1+a_2}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n) &\hookrightarrow \\ &\hookrightarrow H_{n-1}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n), \\ H_{n-1}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n) \otimes H^{n-1}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n) &\hookrightarrow \\ &\hookrightarrow H_0(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n). \end{aligned}$$

При этом мы временно считаем, что $\{a_1, a_2\} \in H_*(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n)$, и т. д. Пользуясь еще произведением

$$\begin{aligned} H_{a_1+a_2}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n) \otimes H^{n-1}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n) &\hookrightarrow \\ &\hookrightarrow H_{a_1+a_2+n-1}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n), \end{aligned}$$

(г) $i_2 + 2i_3 + \dots + (r-1)i_r \leq s$,

а из (б) и (в) следует

(д) $i_2 + i_3 + \dots + i_r \geq s$;

(г) и (д) совместимы лишь при $i_3 = \dots = i_r = 0$, $i_2 = s$.

^{*)} См. (28). Как и там, в рассматриваемой сейчас размерности имеется только один изоморфизм

$$H_{n-1}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n) \rightarrow H_0(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n) = H_0(\Delta S^n).$$

Однако ниже нам понадобится еще, что $\{a_1, a_2\} \cap y^{n-1} = [a_1, a_2]$.

таким же произведением с обратным порядком сомножителей и произведениями

$$H_*(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n) \otimes H^*(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n) \subset \\ \subset H_*(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n), \\ H_{a_1+a_2}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n) \otimes H^{a_1+a_2}(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n) \rightarrow H_0(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n),$$

имеем (см. Спеньер [1], (5.6.18), (5.6.11) и снова (5.6.18)):

$$(\{a_1, a_2\} \cap (b_1, b_2)) \cap y^{n-1} = \{a_1, a_2\} \cap ((b_1, b_2) \cup y^{n-1}) = \\ = \{a_1, a_2\} \cap (y^{n-1} \cup (b_1, b_2)) = (\{a_1, a_2\} \cap y^{n-1}) \cap (b_1, b_2) = \\ = [a_1, a_2] \cap (b_1, b_2) = \delta_{a_1 b_1}(0, 0). \blacktriangle$$

Из сказанного и из 2.3.3 получаем

2.3.4. Лемма. *Классы гомологий, представителями которых являются $n(n+1)/2$ циклов $\{a_1, a_2\}$, образуют базис $\mathbb{Z}_2$ -гомологий $\Gamma S^n \bmod \Gamma^0 S^n$.*

В $H_*(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n)$ существуют $g(n) = 2n - s - 1$ последовательно подчиненных гомологических классов, которые получаются с помощью $\cap$ -произведения между фундаментальным циклом $\{n-1, n-1\}$ и возрастающим числом сомножителей

$$(0, 1), (0, 1)^2, \dots, (0, 1)^{2n-2s-2}, \dots, (0, 1)^{2n-2s-2} \cup (1, 1)^s$$

произведения

$$(0, 1)^{2n-2s-2} \cup (1, 1)^s = (n-1, n-1).$$

$\blacktriangle$ Альбер [1] пытался доказать, что при каноническом вложении $i: (\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n) \hookrightarrow (\Pi S^n, \Pi^0 S^n)$ эти $g(n)$ гомологических классов остаются подчиненными в смысле умножения

$$H_*(\Pi S^n, \Pi^0 S^n) \otimes H^*(\Pi S^n - \Pi^0 S^n) \rightarrow H_*(\Pi S^n, \Pi^0 S^n).$$

Для этого он пытался доказать, что отображение когомологий

$$i^*: H^*(\Pi S^n - \Pi^0 S^n) \rightarrow H^*(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n)$$

эпиморфно. Но, как обнаружил Бальман, при $n > 2$ это неверно *) (Аносов [3]).

Мы видели, что можно понимать подчинение в смысле другого умножения:

$$H_*(\Pi S^n, \Pi^0 S^n) \otimes H^*(\Pi S^n - \Pi^0 S^n) \supset H_*(\Pi S^n, \Pi^0 S^n)$$

(первый сомножитель здесь, по существу, тот же, но второй, как мы увидим, другой). Кроме того, для нашей цели (теоремы 2.3.9) нужно только, чтобы при каноническом вложении $i: (\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n) \hookrightarrow$

*) Для одномерных когомологий неверное утверждение об эпиморфизме восходит к Люстернику [1], работу которого и продолжал Альбер. По-видимому, они были введены в заблуждение аналогией (лучше сказать, надеждой на аналогию) со случаем $n=2$.

$\hookrightarrow (PS^n, P_0S^n)$ оставались подчиненными не все $g(n)$ указанных выше классов, а только n классов $\{0, 0\}, \{0, 1\}, \dots, \{0, n-1\}$. Это и будет доказано. Как мы увидим, подчинение классов $i_* \{0, p\}$ осуществляется посредством чеховского умножения на некоторый коцикл $(0, 1)' \in H^1(PS^n - P_0S^n)$:

$$i_* \{0, p\} \cap (0, 1)' = i_* \{0, p-1\}, \quad 1 \leq p \leq n-1.$$

Этот одномерный коцикл таков, что при отображении $H^1(PS^n - P_0S^n) \rightarrow H^1(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n)$, индуцированном вложением *) $i: \Gamma S^n - \Gamma^0 S^n \hookrightarrow PS^n - P_0S^n$, он переходит в $(0, 1)$.

Итак, нас интересуют коцикл $(0, 1)'$ и относительные циклы $i_* \{0, p\}$. Начнем с первого. Причина, по которой $PS^n - P_0S^n$ больше подходит для наших целей, чем $PS^n - P^0S^n$, состоит в том, что проекция $\Lambda S^n - \pi^{-1}(P_0S^n) \rightarrow PS^n - P_0S^n$ больше похожа на расслоение, чем $\Lambda S^n - \Lambda^0 S^n \rightarrow PS^n - P^0S^n$. Конечно, это все-таки не расслоение, но если факторизацию по действию χ группы $O(2)$ осуществить в два шага

$$\Lambda S^n - \pi^{-1}(P_0S^n) \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{P}S^n - \tilde{P}_0S^n \xrightarrow{\phi} PS^n - P_0S^n,$$

то ввиду того, что действие $\tilde{\theta}$ группы $\mathbb{Z}_2$ на $\tilde{P}S^n - \tilde{P}_0S^n$ является свободным, на втором шаге имеется уже настоящее расслоение со слоем и структурной группой $\mathbb{Z}_2 = O(1)$ (стало быть, его можно считать главным). В качестве $(0, 1)'$ мы возьмем первый (и единственный) характеристический класс Штифеля—Уитни w'_1 этого расслоения (или, если угодно, ассоциированного с ним векторного расслоения со слоем $\mathbb{R}$ **).

Определение $(0, 1)'$ как бы моделирует одно из возможных определений первого характеристического класса m -мерного векторного расслоения $E \rightarrow B$ над клеточным разбиением. Это определение связано с интерпретацией этого класса w_1 как препятствия (единственного!) к ориентируемости расслоения. Считая, что исходное расслоение снабжено римановой метрикой, т. е. что его структурная группа редуцирована до $O(m)$, рассмотрим ассоциированное с ним расслоение E' со слоем $V_m(\mathbb{R}^m) = V(m, 0) =$ соответствующее многообразие Штифеля (элементы последнего суть ортонормированные базисы $\mathbb{R}^m$). Слой E'_b расслоения E' над точкой $b \in B$ состоит из всевозможных ортонормированных базисов слоя E_b расслоения E над b . Проекцию $E' \rightarrow B$ можно осу-

*) Мы позволяем себе обозначать одним и тем же символом i вложения $(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n) \hookrightarrow (PS^n, P_0S^n)$ и $\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n \rightarrow PS^n - P^0S^n$, а далее — еще и $\Lambda S^n \hookrightarrow PS^n - P_0S^n$.

**) Можно следующим образом наглядно описать гомоморфизм $\omega: \pi_1(PS^n - P_0S^n, c) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, соответствующий этому коциклу. Пусть путь $\gamma \in \pi_1(PS^n - P_0S^n, c)$. Накроем путь γ путем $\tilde{\gamma}$ в $\tilde{P}S^n - \tilde{P}_0S^n$. Если $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$, то $\omega(\alpha) = 0$, а если $\tilde{\gamma}(0) \neq \tilde{\gamma}(1)$, то $\omega(\alpha) = 1$. В свете сказанного далее это описание делает очевидным, что $i^*w'_1 = w_1$.

шесть в два шага:

$$E' \rightarrow \tilde{B} \rightarrow B,$$

где на первом шаге осуществляется факторизация по очевидному действию $SO(m)$, т. е. каждая из двух компонент связности слоя E'_0 «сжимается» в одну точку и полученное таким образом множество $\tilde{B}$ (его элементы можно интерпретировать как ориентации слоев расслоения E) снабжается надлежащей структурой. Тогда ω_1 совпадает с первым классом Штифеля — Уитни расслоения $\tilde{B} \rightarrow B$ и элементарно описывается так же, как в последнем подстрочном примечании.

Хотя $\pi|_{\Delta S^n} - \pi^{-1}(\Pi_0 S^n)$ не является расслоением, его ограничения $\pi|_{\pi^{-1}(i\Delta S^n)}$ и $\pi|_{\pi^{-1}(i(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n))}$ являются таковыми и совпадают (при естественных отождествлениях) с расслоениями γ^2 и $\gamma^* \gamma^2$: $\Delta S^n - A^0 S^n \rightarrow \Gamma S^n - \Gamma^0 S^n$. Факторизация по $S = SO(2)$, рассматриваемая на $\pi^{-1}(i\Delta S^n)$ и $\pi^{-1}(i(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n))$, совпадает с переходом от E' к $\tilde{B}$ для этих расслоений, так что соответствующие накрытия $\tilde{B} \rightarrow B$ совпадают с ограничениями расслоения (накрытия) $\theta|_{\Pi S^n - \Pi_0 S^n}$ над $i\Delta S^n$ и $i(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n)$. Отсюда следует, что $i^* \omega'_1 = \omega_1$.

Теперь рассмотрим классы $[0, 0], [0, 1], \dots, [0, n-1]$ в $\Delta S^n = G(2, n-1)$. Соответствующие многообразия Шуберта, если описывать их в терминах плоскостей, состоят из плоскостей, проходящих через фиксированную ось x_0 и лежащих соответственно в $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^{n+1}$. Такая плоскость однозначно определяется лежащей в ней прямой p , перпендикулярной оси x_0 ; прямая p должна содержаться в ортогональном дополнении оси x_0 в $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^{n+1}$. Отсюда ясно, что $[0, n-1]$ есть проективное пространство P^{n-1} , определенным образом вложенное в $G(2, n-1)$, и что $[0, q]$ суть проективные пространства P^q , вложенные в $P^{n-1} = [0, n-1]$ в соответствии с вложениями $\mathbb{R}^{q+1} \subset \mathbb{R}^n$.

Алгебра когомологий $H^*(P^{n-1})$ имеет одномерную образующую v^1 , удовлетворяющую единственному соотношению $(v^1)^n = 0$, причем хорошо известно (хотя бы из двойственности Пуанкаре), что если $[P^q]$ — определяемый P^q цикл в P^{n-1} , то $[P^q] \cap v^1 = [P^{q-1}]$. Покажем, что $v^1 = \omega^1|_{[0, n-1]}$, так что в $G(2, n-1)$ выполняется $[0, q] \cap (0, 1) = [0, q-1]$ ($q = 1, \dots, n-1$). Как мы знаем (замечание после формулировки 2.3.2 и (26)), $\langle \bar{\omega}^1, [0, 1] \rangle = 1$. Если на минуту принять более формальные обозначения, то это можно записать в виде $\langle \bar{\omega}^1, (hj)_* [0, 1] \rangle = 1$, где j, h — естественные вложения

$$[0, 1] \xrightarrow{j} [0, n-1] \xrightarrow{h} G(2, n-1).$$

Иными словами, $\langle h^* \bar{\omega}^1, j_* [0, 1] \rangle = 1$. Но из соотношений, имеющих в $H^*(G(2, n-1))$ (замечание после формулировки 2.3.2),

следует, что $\overline{\omega}^1 = \omega^1$; между тем v^1 однозначно характеризуется тем, что $\langle v^1, j_*[0, 1] \rangle = 1$; значит, $h^*\omega^1 = v^1$.

Теперь покажем, что классы $\{0, q\}$ последовательно подчинены друг другу относительно умножения

$$H_*(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n) \otimes H^*(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n) \rightarrow H_*(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n),$$

а именно $\{0, q\} \cap (0, 1) = \{0, q-1\}$. Это явствует из того, что

$$\begin{aligned} (\{0, q\} \cap (0, 1)) \cap y^{n-1} &= (\{0, q\} \cap y^{n-1}) \cap (0, 1) = \\ &= [0, q] \cap (0, 1) = [0, q-1]. \end{aligned}$$

Обоснование проведенной выкладки такое же, как и выше при вычислении $\{a_1, a_2\} \cap (b_1, b_2)$. Как и там, нужно, вернуться к тем группам, для которых первоначально определяется умножение Чеха, т. е. считать, что

$$\begin{aligned} \{0, q\}, y^{n-1} &\in H_*(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n), \\ (0, 1) &\in H^1(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n). \end{aligned}$$

Наконец, займемся относительными циклами $i_*\{0, q\}$. Имеем

$$\begin{aligned} i_*\{0, q\} \cap (0, 1)' &= i_* (\{0, q\} \cap i^*(0, 1)') = \\ &= i_* (\{0, q\} \cap (0, 1)) = i_*\{0, q-1\}. \end{aligned}$$

Здесь в обосновании нуждается первое равенство. Вернемся к первоначальному определению произведения Чеха. Тогда надо считать, что в левой части первого равенства речь идет об умножении

$$\begin{aligned} H_*(\Pi S^n - \Pi_0 S^n, \mathcal{U}' - \Pi_0 S^n) \otimes H^*(\Pi S^n - \Pi_0 S^n) &\rightarrow \\ &\rightarrow H_*(\Pi S^n - \Pi_0 S^n, \mathcal{U}' - \Pi_0 S^n), \end{aligned}$$

где $\mathcal{U}'$ — такая же окрестность $\Pi_0 S^n$, как в 2.1.2, а в правой части — об умножении

$$\begin{aligned} H_*(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n) \otimes H^*(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n) &\rightarrow \\ &\rightarrow H_*(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n). \end{aligned}$$

При этом i рассматривается как вложение

$$i: (\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n) \hookrightarrow (\Pi S^n - \Pi_0 S^n, \mathcal{U}' - \Pi_0 S^n)$$

(ясно, что при достаточно малом ε будет $\Gamma^e S^n \subset \Pi^e S^n \subset \mathcal{U}'$). Теперь равенство обосновывается ссылкой на известное свойство обычного произведения Чеха (см. Спеньер [1], (5.6.16)).

Следовательно, классы $i_*\{0, q\}$ являются подчиненными друг другу классами в $\Pi S^n \bmod \Pi_0 S^n$, если только они не обращаются в нуль. Если бы было $i_*\{0, q\} = 0$, то и $i_*\{0, r\} = 0$ при всех $r < q$; значит, достаточно доказать, что $i_*\{0, 0\} \neq 0$.

2.3.5. Теорема. При $q < n-1$ и любой группе коэффициентов G имеем $H_q(PS^n; G) = 0$. В группе $H_{n-1}(PS^n; \mathbb{Z}_2)$ образ $j_*[0, n-1]$ класса $[0, n-1]$ при естественном вложении $j: G(2, n-1) \hookrightarrow PS^n$ отличен от нуля.

Доказательство см. в работах Аносова [3], [4]. При доказательстве строится такой когомологический класс $\alpha \in H^{n-1}(PS^n; \mathbb{Z}_2)$, что $j^*\alpha = (0, n-1)$.

2.3.6. Следствие. $i_*\{0, 0\} \neq 0$, где i по-прежнему обозначает вложение $(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n) \hookrightarrow (PS^n, P_0 S^n)$.

Доказательство следствия 2.3.6. В § 2.2 сразу же после определения $P_0 M$ было показано, что $P_0 M$ имеет гомотопический тип $P^0 M$, т. е. M . Когда $M = S^n$, из точной гомологической последовательности пары $(PS^n, P_0 S^n)$ следует, что если k обозначает вложение $(PS^n, \emptyset) \hookrightarrow (PS^n, P_0 S^n)$, то $k_*: H_q(PS^n) \rightarrow H_q(PS^n, P_0 S^n)$ — мономорфизм**¹ при $q < n$. Поэтому для того, чтобы вывести 2.3.6 из 2.3.5, достаточно установить, что

$$(*) \quad k_* j_* [0, n-1] = i_* \{0, 0\}.$$

Обозначая через h естественное вложение $(G(2, n-1), \emptyset) \hookrightarrow (\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n)$, мы докажем, что при индуцированном отображении гомологий $h_*[0, n-1] = \{0, 0\}$. Отсюда следует (*), ибо $ih = kj$.

Обозначим через E расслоение на диски, ассоциированное с векторным расслоением γ . Как мы знаем, $H_*(E, \partial E) = H_*(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n)$ (ср. с изоморфизмом $H_*(\Gamma S^n - \Gamma^0 S^n, \Gamma^e S^n - \Gamma^0 S^n) = H_*(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n)$ в рассуждениях, предшествующих 2.3.4). При этом отождествлении отображение h_* совпадает с композицией

$$H_*(G(2, n-1)) \rightarrow H_*(E) \xrightarrow{h'_*} H_*(E, \partial E)$$

отображений гомологий, индуцированных соответствующими вложениями. При первом из этих вложений база вкладывается в E как нулевое сечение; в гомологиях индуцируется отображение γ_*^{-1} . Итак, $h_* = h'_* \gamma_*^{-1}$. Поэтому

$$(**) \quad \langle y^{n-1}, h_*[0, n-1] \rangle = \langle (\gamma^*)^{-1} h'^* y^{n-1}, [0, n-1] \rangle.$$

Убедимся, что старший класс Штифеля — Уитни расслоения E

$$(***) \quad \overline{w}^{n-1} = (\gamma^*)^{-1} h'^* y^{n-1}.$$

Действительно, обозначим изоморфизм Тома в когомологиях через φ . Он является композицией

$$H^k(G(2, n-1)) \xrightarrow{\gamma^*} H^k(E) \xrightarrow{\cup y^{n-1}} H^{k+n-1}(E, \partial E),$$

^{*}1 Здесь мы пишем j , а не i , потому что сейчас надо отличать это вложение от i , которое используется в следствии 2.3.6.

^{**}2 И даже изоморфизм при $q < n-1$.

т. е. $\varphi = (\cdot \cup y^{n-1}) \cdot \gamma^*$. Применим φ к интересующему нас классу когомологий:

$$\varphi(\gamma^*)^{-1} h^* y^{n-1} = (h^* y^{n-1}) \cup y^{n-1} = y^{n-1} \cup y^{n-1}.$$

Но известно, что $\overline{\omega}^{n-1} = \varphi^{-1}(y^{n-1} \cup y^{n-1})$ (см. Милнор, Сташеф [1]).

Формула (***) является аналогом известной для ориентируемых расслоений связи между классами Эйлера и старшим классом Штифеля — Уитни. (См. Милнор, Сташеф [1], свойство 9.5. Непосредственно перед этим там по несколько иному поводу проведено воспроизведенное выше рассуждение, фактически доказывающее (***)).

Теперь (**) можно переписать в виде

$$\langle y^{n-1}, h_*[0, n-1] \rangle = \langle \overline{\omega}^{n-1}, [0, n-1] \rangle,$$

что, как мы знаем, равно 1. Но $H_{n-1}(E, \partial E) = \mathbb{Z}_2$ и $\langle y^{n-1}, \{0, 0\} \rangle = 1$ (ведь $\{0, 0\}$ есть образующий элемент группы H_{n-1} (слой, граница слоя), а класс Тома как раз и характеризуется тем, что при ограничении на пару (слой, граница слоя) он принимает на этом образующем элементе значение 1). Поэтому $h_*[0, n-1] = \{0, 0\}$. $\square$ ⁽²⁹⁾ $\blacktriangle$

Как следствие 2.3.6 и 2.2.14 (см. также обсуждение перед 2.3.5) получаем такую теорему.

2.3.7. Теорема. Пусть M — риманово многообразие, диффеоморфное n -мерной сфере S^n посредством диффеоморфизма $h: S^n \rightarrow M$. Возьмем такое $\kappa^* > 0$, что $h_\Gamma(\Gamma S^n) \subset \Pi^{\kappa^*} M$, где $h_\Gamma := Ph$ (вложение $\Gamma S^n \hookrightarrow \Pi S^n$).

Утверждение. В пространстве ΠM имеется n критических уровней

$$0 < \kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_n < \kappa^*,$$

которые являются критическими уровнями n попарно подчиненных гомологических классов из $H_*(\Pi M, \Pi_0 M)$.

В частности, если два из этих уровней совпадают, то в M существует бесконечное число замкнутых геодезических, различающихся как элементы ΠM ⁽³⁰⁾.

Замечание. В этой теореме не утверждается, что построенные n замкнутых геодезических являются однократными или (если они являются кратными повторениями некоторых однократных замкнутых геодезических) что соответствующие однократные замкнутые геодезические все попарно различны. Результат такого типа будет доказан значительно позднее с использованием совершенно других методов; см. § 5.1.

В случае $n=2$ Люстерник и Шнирельман [1], пользуясь специальными деформациями, уменьшающими E , которые переводят

образы окружностей в кривые без самопересечений, смогли показать, что образы трех попарно подчиненных циклов $h_{\Gamma^*} \{0, 0\}$, $h_{\Gamma^*} \{0, 1\}$, $h_{\Gamma^*} \{1, 1\}$ из $\Gamma S^2 \bmod \Gamma^0 S^2$ повисают на трех замкнутых геодезических, которые не только однократные, но даже не имеют самопересечений.

При $n > 2$ существование замкнутых геодезических без самопересечений было доказано только для тех случаев, когда риманова метрика на M подчинена некоторым специальным ограничениям. Формулировки результатов в этом направлении можно найти у Клингенберга [7] и Альбера [2]. Все они основаны на следующей теореме (см. Клингенберг [1] и Громол, Клингенберг, Мейер [1]).

2.3.8. Теорема. Пусть M — односвязное компактное риманово многообразие, кривизна которого K (во всех точках и по всем двумерным направлениям) удовлетворяет соотношению

$$K_0/4 < K \leq K_0$$

с некоторым $K_0 > 0$. Тогда длина каждой геодезической петли на M больше либо равна $2\pi/\sqrt{K_0}$, и, следовательно, замкнутая геодезическая длины $< 4\pi/\sqrt{K_0}$ не имеет самопересечений.

▲ Кроме того, существует гомеоморфизм $h: S^n \rightarrow M$, удовлетворяющий условию Липшица вместе с обратным гомеоморфизмом h^{-1} и обладающий следующими свойствами. Обозначим через $p_{\pm}$ точки $(\pm 1, 0, \dots, 0) \in S^n$. Тогда ограничение

$$h|(S^n - p_{\pm}): S^n - p_{\pm} \rightarrow M^n - h(p_{\pm})$$

является диффеоморфизмом. Образ $h(S^{n-1})$ «экватора» $S^{n-1} = \{x \in S^n; x_0 = 0\}$ является некоторым дифференцируемым подмногообразием M^* многообразия M коразмерности 1, состоящим из всех тех точек $q \in M$, для которых $d(h(p_{\pm}), q) = d(h(p_{-}), q) < \pi/\sqrt{K_0}$.

При отображении h четвертушки проходящего через p_{+} и p_{-} большого круга, соединяющие p_{+} или p_{-} с S^{n-1} , переходят в геодезические отрезки (дуги геодезических линий) на M , являющиеся кратчайшими путями между своими концами.

Приведенная формулировка содержит в точности то, что нужно для дальнейшего. Формально она отличается от обычной формулировки «теоремы о сфере», имеющейся в книге Громола, Клингенберга и Мейера, поэтому стоит дать некоторые пояснения, выделив в доказательстве теоремы о сфере те моменты, которые оправдывают данную формулировку. Основная часть доказательства этой теоремы состоит в доказательстве следующих фактов.

Пусть q_+ , q_- — «диаметрально противоположные» точки M , т. е. $d_M(q_+, q_-) = \max_{x, y \in M} d(x, y)$; положим

$$D_{\pm} := \{\xi \in T_{p_{\pm}} S^n; |\xi| \leq \pi/2\};$$

$$H_{\pm} := \text{полусфера } S^n \text{ с центром в } p_{\pm} = \exp D_{\pm};$$

$$D'_{\pm} := \{\xi \in T_{q_{\pm}} M; |\xi| \leq \pi/2\};$$

$$U_{\pm} := \{\xi \in T_{q_{\pm}} M; |\xi| < \pi/\sqrt{K_0}\};$$

$$B_{\pm} := \{x \in M; d_M(x, q_{\pm}) < \pi/\sqrt{K_0}\}.$$

Тогда $B_+ \cup B_- = M$; отображения $\exp|U_{\pm}: U_{\pm} \rightarrow B_{\pm}$ — диффеоморфизмы; при каждом $\xi \in T_{q_{\pm}} M$, $|\xi| = 1$, на геодезическом отрезке $\exp([0, \pi/\sqrt{K_0}])\xi$ имеется ровно одна точка множества

$$M^* := \{x \in M; d_M(x, q_+) = d_M(x, q_-)\},$$

причем длина $l_{\pm}(\xi)$ части этого отрезка между $q_{\pm}$ и точкой из M^* дифференцируемо зависит от ξ .

После того как это доказано, нетрудно получить и теорему о сфере, и все добавления к ней, содержащиеся в 2.3.8. Ясно, что

$$(\exp|U_{\pm})^{-1}M^* = \{\xi \in U_{\pm}; |\xi| = l_{\pm}(\xi/|\xi|)\}$$

суть гладкие подмногообразия в $T_{q_{\pm}} M$, ограничивающие некоторые замкнутые области $V_{\pm}$, диффеоморфные $D'_{\pm}$; диффеоморфизмы $\varphi_{\pm}: D'_{\pm} \rightarrow V_{\pm}$ можно построить так, чтобы точки, лежащие на одном прямолинейном луче, исходящем из нуля, оставались бы на том же луче, и чтобы $\varphi_{\pm}$ совпадало с тождественными преобразованиями в некоторой окрестности $U'_{\pm}$ нуля пространства $T_{q_{\pm}} M$. Зафиксировав какие-нибудь (линейные) изометрии $A_{\pm}: D_{\pm} \rightarrow D'_{\pm}$, определим

$$h_{\pm} := \exp \circ \varphi_{\pm} \circ A_{\pm} \circ (\exp|D_{\pm})^{-1}: H_{\pm} \rightarrow M.$$

Эти отображения являются диффеоморфизмами $D_{\pm}$ на некоторые замкнутые области $W_{\pm}$ в M — замыкания компонент связности $M - M^*$; $M = W_+ \cup W_-$ и $W_+ \cap W_- = M^*$. Положим

$$g := (h_+|S^{n-1})^{-1} \circ (h_-|S^{n-1}): S^{n-1} \rightarrow S^{n-1},$$

$$f := (\exp|\partial D_+)^{-1} \circ g \circ (\exp|\partial D_+): \partial D_+ \rightarrow \partial D_+,$$

продолжим f до гомеоморфизма $F: D_+ \rightarrow D_+$ «по радиусам», т. е. посредством формул

$$F(0) = 0, \quad F(\xi) = \frac{2}{\pi} |\xi| f(\pi \xi/2 | \xi|) \quad \text{при } \xi \neq 0,$$

и определим, наконец, $h: S^n \rightarrow M$ как

$$h|H_- := h_-, \quad h|H_+ := h_+ \circ (\exp|D_+) \circ F \circ (\exp|D_+)^{-1}.$$

После сказанного все утверждения из 2.3.8 становятся достаточно очевидными. Заметим только, что если взять на M возле q_+ карту $((\exp \cdot A_+ | A_+^{-1} U'_+)^{-1}, \exp U'_+)$, а на S^n возле p_+ карту $((\exp | A_+^{-1} U'_+)^{-1}, \exp(A_+^{-1} U'_+))$ (при этом мы отождествляем $T_{p_+} S^n$ с $\mathbb{R}^n$), то (если считать U'_+ малым шаром с центром в нуле)

$$h(\exp(A_+^{-1} U'_+)) \subset \exp U'_+,$$

и соответствующее локальное представление для h имеет вид $x \mapsto F(x)$. Поэтому утверждение об условии Липшица для h следует из того, что F удовлетворяет условию Липшица (см. ниже), а для h^{-1} оно следует из того, что F^{-1} получается путем продолжения «по радиусам» дифференцируемого отображения $f^{-1}: \partial D^+ \rightarrow \partial D^+$ и потому задается посредством формул, аналогичных формулам для F . При проверке условия Липшица для F , чтобы не иметь дела с несущественными множителями, перейдем к эквивалентному вопросу для отображения $\Phi: D^n \rightarrow D^n$ (где D^n — единичный шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в 0), задаваемого посредством формул

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(x) = |x| \varphi(x/|x|) \quad \text{при } x \neq 0,$$

где φ — некоторый диффеоморфизм сферы $S^{n-1} = \partial D^n$. Стандартное вычисление показывает, что при $x \neq 0$

$$D\Phi(x) \cdot y = \varphi(x/|x|) \langle x/|x|, y \rangle + \varphi'(x/|x|) \cdot (y - \langle x/|x|, y \rangle (x/|x|))$$

($\varphi'(x/|x|) \cdot z$ определено только для z , касающихся S^{n-1} в точке $x/|x|$; но $y - \langle x/|x|, y \rangle x$ как раз и принадлежит к числу таких z). Отсюда ясно, что существует такое L , что $|D\Phi(x)| \leq L$ при всех $x \neq 0$. Если прямолинейный отрезок, соединяющий x и y , не проходит через 0, то

$$\Phi(y) - \Phi(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \Phi(x + t(y-x)) dt = \int_0^1 D\Phi(x + t(y-x)) \cdot (y-x) dt,$$

откуда $|\Phi(y) - \Phi(x)| \leq L|y-x|$. Далее, если $y \neq 0$ и $\varepsilon > 0$, то $|\Phi(y) - \Phi(\varepsilon y)| \leq L|y - \varepsilon y|$, откуда $|\Phi(y)| \leq L|y|$. Наконец, если прямолинейный отрезок, соединяющий x и y , проходит через 0, то

$$|\Phi(y) - \Phi(x)| \leq |\Phi(y)| + |\Phi(x)| \leq L|y| + L|x|;$$

но в этом случае $|y-x| = |y| + |x|$. $\blacktriangle$

Используя 2.3.8, легко доказать следующую теорему (см. Клинггенберг [7]):

2.3.9. Теорема. Пусть риманово многообразие M гомеоморфно S^n , и пусть его кривизна K (во всех точках и по всем двумерным

направлениям) удовлетворяет соотношению

$$(\dagger) \quad K_0/4 < K \leq K_0$$

с некоторым $K_0 > 0$. Тогда на M существует n замкнутых геодезических без самопересечений, длины которых лежат в интервале $[2\pi/\sqrt{K_0}, 4\pi/\sqrt{K_0}]$.

Доказательство. ▲ Отображение h , о котором говорится в 2.3.8, и обратное отображение h^{-1} удовлетворяют условию Липшица, так что они переводят абсолютно непрерывные кривые снова в абсолютно непрерывные кривые. При этом при почти всех t норма вектора скорости может самое большее умножаться на константу Липшица; значит, если $c \in H^1(S, S^n)$ и $d \in H^1(S, M)$, то $h \cdot c \in H^1(S, M)$ и $h^{-1} \cdot d \in H^1(S, S^n)$, так что возникают отображения

$$\Lambda h: \Lambda S^n \rightarrow \Lambda M, \quad c \mapsto h \cdot c,$$

и

$$\Lambda h^{-1}: \Lambda M \rightarrow \Lambda S^n, \quad d \mapsto h^{-1} \cdot d,$$

очевидно, обратные по отношению друг к другу. Ниже мы проверим, что в нашем случае они непрерывны и, следовательно, являются гомеоморфизмами. После факторизации по действию χ группы $O(2)$ получаются взаимно обратные гомеоморфизмы

$$Ph: PS^n \rightarrow PM, \quad Ph^{-1}: PM \rightarrow PS^n.$$

При этом ясно, что

$$Ph(P_\theta S^n) = P_\theta M, \quad Ph(PS^n - P_\theta S^n) = PM - P_\theta M.$$

Поэтому, хотя h — не обязательно диффеоморфизм^{*)}, мы можем воспользоваться теоремой 2.3.7. Очевидно, в ней условие $h_\Gamma(\Gamma S^n) \subset \Pi^*$ — можно заменить условием, чтобы относительные циклы $h_\Gamma \cdot \{0, q\}$, $q = 0, \dots, n-1$, были гомологичны относительным циклам $z_0, \dots, z_{n-1}$, носители которых лежат в $\Pi^* - M$. Мы как раз и покажем, что при $\kappa^* = 8\pi^2/K_0$ можно построить такие z_q . Отсюда будет следовать, что на M существуют n различных (как элементы PM) замкнутых геодезических длины $< 4\pi/\sqrt{K_0}$. А тогда из 2.3.8 будет следовать утверждение теоремы.

Опишем, как строятся относительные циклы z_i .

Рассмотрим сначала более простой вопрос о циклах многообразия $h_\Gamma([0, n-1])$. Из 2.3.8 следует, что большие круги, проходящие через p_+ и p_- , переходят при отображении h в кривые длины $< 4\pi/\sqrt{K_0}$. В 2.3.8 ничего не говорится о значении

^{*)} По крайней мере в 2.3.8 не утверждается, что h — диффеоморфизм. Диффеоморфность S^n и M доказана при более сильных ограничениях на кривизну (см. Громол, Клингенберг, Мейер [1]).

$E(h_T \bar{c})$ для $\bar{c} \in [0, n-1]$, поэтому неясно, будет ли $h_T([0, n-1]) \subset \Pi^{*+}$. Но можно на линиях $h_T \bar{c}$, $\bar{c} \in [0, n-1]$, перейти к параметризации, пропорциональной длине дуги. Этот переход можно осуществить так, что при этом многообразии $h_T([0, n-1])$ подвергнется некоторой непрерывной деформации (см. 1.3.12 и замечание перед 2.2.6), а следовательно, циклы $h_{T*}[0, q]$ заменятся гомологичными им циклами. Носители последних уже содержатся в Π^{*+} . ▲

Так как не ясно, будут ли при отображении h образы всех окружностей, параллельных некоторому большому кругу из $[0, n-1]$, иметь длину $< 4\pi/\sqrt{K_0}$, то мы заменим цикл $\{0, n-1\}$ следующим гомологичным ему циклом. Каждая отличная от точки окружность из $\{0, n-1\}$ пересекает экватор S^{*n-1} ровно в двух точках q_1 и q_2 (и однозначно определяется ими). Заменим эту окружность замкнутой кривой, составленной из двух половинок больших кругов, соединяющих точки p_- и p_+ и проходящих через q_1 и q_2 . Окружности, вырождающиеся в лежащую на экваторе точку q , заменим кривой, состоящей из двух половинок большого круга, соединяющих точки p_- и p_+ и проходящих через q сначала в одном, а потом в другом направлении.

▲ Эту замену можно осуществить посредством некоторой гомотопии

$$(*) \quad f_s: (\{0, n-1\}, \{0, n-1\}^0) \rightarrow (\Pi S^n, \Pi_0 S^n)$$

$(\{0, n-1\}^0$ — множество одноточечных окружностей из $\{0, n-1\}$), которую мы сейчас опишем. Обозначим через $\bar{c}_{q_1 q_2}$ окружность из $\{0, n-1\}$, проходящую через точки q_1 и q_2 экватора S^{*n-1} . Пусть $\bar{c}'_{q_1 q_2}$ — ортогональный ей большой круг, идущий из p_+ в p_- . Окружности $\bar{c}_{q_1 q_2}$ и $\bar{c}'_{q_1 q_2}$ пересекаются в двух точках; из них ближайшую к p_+ обозначим через $r_+(q_1, q_2)$, а другую (ближайшую к p_-) — через $r_-(q_1, q_2)$. (Когда в некотором рассуждении q_1 и q_2 фиксированы, будем писать короче r_+ , r_- .) Если $q_1 = q_2 = q$, то $r_+ = r_- = q$, а если точки q_1, q_2 диаметрально противоположны, то $r_+ = p_+$, $r_- = p_-$. Пусть $r_+(s) = r_+(q_1, q_2, s)$ — точка на $\bar{c}'_{q_1 q_2}$, расположенная на дуге $r_+ p_+$ этого большого круга (той из двух дуг с этими концами, которая короче) и отстоящая от r_+ на s -ую долю длины этой дуги. Аналогично определим $r_-(s) = r_-(q_1, q_2, s)$. Определим $f_s(\bar{c}_{q_1 q_2})$ как кривую, состоящую из двух дуг окружностей, из которых одна идет из $r_1(s)$ в $r_2(s)$ через q_1 , а вторая — из $r_2(s)$ в $r_1(s)$ через q_2 , и параметризованную пропорционально длине дуги. Отметим, что определение $\bar{c}_{q_1 q_2}$ и $f_s(\bar{c}_{q_1 q_2})$ не зависит от того, какую из точек q_1, q_2 мы считаем первой, а какую — второй (т. е. $\bar{c}_{q_1 q_2} = \bar{c}_{q_2 q_1}$ и $f_s(\bar{c}_{q_1 q_2}) = f_s(\bar{c}_{q_2 q_1})$), так что мы действительно построили семейство отображений $f_s: \{0, n-1\} \rightarrow \Pi S^n$, очевидно переводящих $\{0, n-1\}^0$ в $\Pi_0 S^n$. При этом, как уже отмечалось, длины всех кривых $\Pi h \cdot f_1(\bar{c})$ меньше $4\pi/\sqrt{K_0}$.

Проверим непрерывность $f_s(\bar{c})$ по $(\bar{c}, s)$. Если $q_1 = q_2 = q$, $s = 0$, то при всех q'_1, q'_2 , достаточно близких к q , и s' , достаточно близких к 0, кривая $f_{s'}(\bar{c}_{q'_1 q'_2})$ целиком содержится в малой окрестности точки q на S^n . Но она состоит из двух дуг окружностей и, целиком умещающаяся в малом шаре, должна иметь малую длину, а ее параметризация пропорциональна длине дуги, так что $E(f_{s'}(\bar{c}_{q'_1 q'_2}))$ тоже мало; поэтому нетрудно убедиться, что как элемент ΠS^n она лежит в малой окрестности одноточечной кривой $f_0(\bar{c}_{qq})$. Если $q_1 \neq q_2$ или $s \neq 0$, то две плоскости, проходящие соответственно через точки $q_1, r_+(q_1, q_2, s), r_-(q_1, q_2, s)$ и $q_2, r_+(q_1, q_2, s), r_-(q_1, q_2, s)$, дифференцируемо зависят от (q_1, q_2, s) , равно как и лежащие в этих плоскостях центры окружностей, проходящих через указанные точки. Обозначим через $c_{q_1 q_2}(s)$ параметризованную и ориентированную кривую, получающуюся при обходе с постоянной скоростью дуг этих окружностей в таком порядке: сначала $r_+(s)q_1 r_-(s)$, затем $r_-(s)q_2 r_+(s)$. Из сказанного выше ясно, что $c_{q_1 q_2}(s)(t)$ дифференцируемо зависит от (q_1, q_2, s, t) на множествах

$$\{(q_1, q_2, s); q_1 \neq q_2 \text{ или } s \neq 0\} \times [0, 1/2] \text{ и } \{\text{те же } (q_1, q_2, s)\} \times [1/2, 1]$$

(по отдельности) как точка $\mathbb{R}^{n+1}$, а стало быть, и как точка S^n . Непрерывность же по этим аргументам имеет место на всем множестве $S^{*n-1} \times S^{*n-1} \times [0, 1] \times [0, 1]$.

При фиксированных q_1, q_2, s ($q_1 \neq q_2$ или $s \neq 0$) из 1.3.7 следует, что, когда q'_1, q'_2, s' достаточно близки к q_1, q_2, s ,

$$\xi(q'_1, q'_2, s', t) := (\tau_{S^n} \cdot, \exp \cdot)^{-1}(c_{q_1 q_2}(s)(t), c_{q'_1 q'_2}(s')(t))$$

непрерывно зависит от своих аргументов, дифференцируемость же имеет место отдельно при $0 \leq t \leq 1/2$ и при $1/2 \leq t \leq 1$. Но $\xi(q_1, q_2, s, t) = 0$ при всех t . Значит, если $q'_1 \rightarrow q_1, q'_2 \rightarrow q_2, s' \rightarrow s$, то $\xi \rightarrow 0$ даже в C^1 -норме на отрезках $0 \leq t \leq 1/2$ и $1/2 \leq t \leq 1$. а тем более в H^1 -норме на $[0, 1]$. Наконец, поскольку

$$c_{q'_1 q'_2}(s') = \exp_{c_{q_1 q_2}(s)} \xi \quad \text{и} \quad f_s \bar{c}_{q_1 q_2} = \Pi c_{q_1 q_2}(s),$$

то $f_s \bar{c}_{q_1 q_2}$ непрерывно (в топологии пространства ΠS^n) зависит от (q_1, q_2, s) , т. е. от $(\bar{c}_{q_1 q_2}, s)$.

Итак, мы действительно построили гомотопию $(*)$, для которой f_0 совпадает с тождественным вложением, а длины всех кривых $\Pi h \cdot f_1(\bar{c})$ меньше $4\pi/\sqrt{K_0}$. После этого с помощью некоторой гомотопии $\bar{g}'$: $\Pi M \rightarrow \Pi M$ перейдем к параметризации, пропорциональной длине дуги (см. 1.3.12 и замечание перед 2.2.6). Получится, что при всех $\bar{c} \in \{0, n-1\}$

$$E(\bar{g}^1 \cdot \Pi h \cdot f_1(\bar{c})) < \kappa^*,$$

$\bar{g}'(\Pi_0 M) \subset \Pi_0 M$ (ведь накрывающая гомотопия g' в ΛM сохраняет орбиты $O(2)$ и $SO(2)$, и если у c эти две орбиты совпадают, то и у $g'c$ — тоже).

Для завершения доказательства нам надо проверить непрерывность отображений Λh и Λh^{-1} . Воспользуемся замечанием 1 в § 1.2 между 1.2.9 и 1.2.10. На S^n возьмем атлас, состоящий из двух карт: $(\varphi, S^n - p_+)$, где φ строится с помощью стереографической проекции, и

$$(**) \quad ((\exp | A_+^{-1} U_+')^{-1}, \exp (A_+^{-1} U_+'))$$

(см. обсуждение 2.3.8), а на M — атлас, состоящий из двух карт:

$$(\psi = \varphi \circ (h^{-1} | M - q_+), M - q_+)$$

и

$$(***) \quad ((\exp \cdot A_+ | A_+^{-1} U_+')^{-1}, \exp U_+').$$

Если $e, c \in \Lambda S^n$, $e \rightarrow c$ в ΛS^n и $c(\Delta) \subset S^n - p_+$, то при e , достаточно близком к c , корректна запись $\varphi \cdot (e | \Delta)$, и $\varphi \cdot (e | \Delta) \rightarrow \varphi \cdot (c | \Delta)$ в $H^1(\Delta; \mathbb{R}^n)$. Но $\psi \cdot h \cdot (e | \Delta) = \varphi \cdot (e | \Delta)$, $\psi \cdot h \cdot (c | \Delta) = \varphi \cdot (c | \Delta)$, так что $\psi \cdot ((\Lambda h \cdot e) | \Delta) \rightarrow \psi \cdot ((\Lambda h \cdot c) | \Delta)$ в $H^1(\Delta; \mathbb{R}^n)$. Если, наоборот, $e, c \in \Lambda M$, $e \rightarrow c$ в ΛM и $c(\Delta) \subset M - q_+$, то точно так же заключаем, что

$$\varphi \cdot ((\Lambda h^{-1} \cdot e) | \Delta) \rightarrow \varphi \cdot ((\Lambda h^{-1} \cdot c) | \Delta).$$

Остается проверить, что делается в картах (**) и (***). Очевидно, все сводится к следующему утверждению.

Пусть U — некоторый открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в 0, а $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ — некоторый диффеоморфизм. Определим гомеоморфизм $F: U \rightarrow U$ посредством формул

$$F(0) = 0, \quad F(x) = |x| f(x/|x|) \quad \text{при } x \neq 0.$$

Ниже через L обозначена его константа Липшица (см. конец обсуждения 2.3.8). Ясно, что под действием F кривые из

$$H^1(\Delta; U) = \{x: \Delta \rightarrow U; x \in H^1(\Delta; \mathbb{R}^n)\}$$

переходят снова в кривые из $H^1(\Delta; U)$. Утверждается, что если $y \rightarrow x$ в $H^1(\Delta; U)$, то $F \cdot y \rightarrow F \cdot x$ в $H^1(\Delta; U)$.

Пусть $C = \{t; x(t) = 0\}$ (не исключается, что $C = \emptyset$; тогда, конечно, значительная часть последующих рассуждений, оставаясь формально правильной, становится бессодержательной). Ясно, что $\|F \cdot y - F \cdot x\|_\infty \rightarrow 0$ при $\|x - y\|_\infty \rightarrow 0$, так что надо доказать, что $\|(F \cdot y)' - (F \cdot x)'\|_0 \rightarrow 0$, когда $y \rightarrow x$ в $H^1(\Delta; U)$.

Для любого $\varepsilon > 0$ имеется такое $\delta > 0$, что если множество B измеримо и $\text{mes } B < \delta$, то $\int_B |\dot{x}(t)|^2 dt < \varepsilon$. Существует такое открытое множество $G \supset C$, что $\text{mes}(G - C) < \delta$. Ясно, что некоторая

ρ -окрестность $U_\rho(x(\Delta - G))$ не содержит 0 и $F|_{U_\rho(x(\Delta - G))}$ является диффеоморфизмом. Пусть $\|y - x\|_\infty$ столь мало, что $y(\Delta - G) \subset U_\rho(x(\Delta - G))$; если $t \in \Delta - G$ и существуют $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, то

$$\begin{aligned} |(F \cdot y)^\cdot(t) - (F \cdot x)^\cdot(t)| &= |DF(y(t)) \cdot \dot{y}(t) - DF(x(t)) \cdot \dot{x}(t)| \leq \\ &\leq |DF(y(t)) \cdot (\dot{y}(t) - \dot{x}(t))| + |(DF(y(t)) - DF(x(t))) \cdot \dot{x}(t)| \leq \\ &\leq L|\dot{y}(t) - \dot{x}(t)| + C_1\|y - x\|_\infty|\dot{x}(t)|, \end{aligned}$$

где C_1 — некоторая константа (зависящая, вообще говоря, от G и ρ). Следовательно, когда $y \rightarrow x$ в $H^1(\Delta; U)$, то

$$\int_{\Delta - G} |(F \cdot y)^\cdot - (F \cdot x)^\cdot|^2 dt \rightarrow 0.$$

Пусть $B = G - C$, так что $\text{mes } B < \delta$. Имеем $\int_B |(F \cdot x)^\cdot|^2 dt \leq L^2 \int_B |\dot{x}|^2 dt < L^2 \varepsilon$; далее,

$$\left(\int_B |\dot{y}|^2 dt \right)^{1/2} \leq \|\dot{y} - \dot{x}\|_0 + \left(\int_B |\dot{x}|^2 dt \right)^{1/2},$$

поэтому

$$\int_B |(F \cdot y)^\cdot|^2 dt \leq L^2 \int_B |\dot{y}|^2 dt \leq L^2 (\|\dot{y} - \dot{x}\|_0 + \sqrt{\varepsilon})^2.$$

В итоге

$$\begin{aligned} \left(\int_B |(F \cdot y)^\cdot - (F \cdot x)^\cdot|^2 dt \right)^{1/2} &\leq \left(\int_B |(F \cdot x)^\cdot|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_B |(F \cdot y)^\cdot|^2 dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq L\|\dot{y} - \dot{x}\|_0 + 2L\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Наконец, ясно, что если в неизолированной точке t множества C существует $\dot{x}(t)$, то $\dot{x}(t) = 0$. Но таковы почти все точки C . Значит, для

$$C' = \{t; t \in C, \dot{x}(t) \text{ определено и } = 0\}$$

имеем $\text{mes}(C - C') = 0$, так что вместо $\int_C$ можно рассматривать $\int_{C'}$.

А если $\dot{x}(t) = 0$, то из условия Липшица следует, что $(F \cdot x)^\cdot(t)$ существует и $= 0$. Остается только интеграл

$$\int_{C'} |(F \cdot y)^\cdot|^2 dt \leq L^2 \int_{C'} |\dot{y}|^2 dt = L^2 \int_{C'} |\dot{y} - \dot{x}|^2 dt \leq L^2 \|\dot{y} - \dot{x}\|_0^2.$$

Окончательно получается, что

$$\lim_{y \rightarrow x} \int_{\Delta} |(F \cdot y)^\cdot - (F \cdot x)^\cdot|^2 dt \leq 4L^2 \varepsilon.$$

А так как ε произвольно, то этот предел равен нулю. $\square \blacktriangle$

Замечание. В этом параграфе для построения подчиненных гомологических классов мы использовали подпространство ΓS^n пространства ΠS^n ; элементами этого подпространства являются окружности. Аналогично при построении подчиненных гомологических классов других симметрических пространств ранга 1 (т. е. проективных пространств над комплексными числами, кватернионами и числами Кэли) можно также воспользоваться некоторыми подпространствами окружностей в Π . Подробности можно найти в работах Клинггенберга [2] и [6].

Примерно таким способом Элиассон [1] построил подчиненные гомологические классы многообразий Грассмана $G(2, n-1)$.

2.4. Теория Морса на ΛM

В этом параграфе мы подробно изучим поведение потока $\varphi_s: \Lambda M \rightarrow \Lambda M$ в окрестности критической точки.

Для того чтобы получить полную картину происходящего и изучить топологию пространства $\Lambda^* \bmod \Lambda^{<} \kappa$ в том случае, когда κ — критическое значение функции E , надо предположить, что лежащие в $E^{-1}(\kappa)$ критические точки образуют невырожденное критическое подмногообразие. Тогда, так же как и в случае функции, которая определена на евклидовом многообразии и критические точки которой образуют невырожденные критические многообразия, на пространстве ΛM можно построить теорию Морса.

Заметим, что у нас имеется некоторая особенность, связанная с наличием действия группы $O(2)$ на ΛM . Это обстоятельство приводит к построению эквивариантной теории Морса.

В первую очередь мы определим *индексную форму* ^{*)} в критической точке $c \in \Lambda M$ функции E . Так мы теперь назовем гессиан $D^2E(c)$ этой функции ⁽³¹⁾. Вычислим $D^2E(c)$. Пусть ξ, ξ' — элементы из $T_c \Lambda M$. Рассмотрим такое дифференцируемое отображение

$$\kappa: [0, 1]^2 \rightarrow \Lambda M, \quad (s, s') \mapsto \kappa(s, s'),$$

что $\kappa(0, 0) = c$, $(\partial \kappa / \partial s)(0, 0) = \xi$, $(\partial \kappa / \partial s')(0, 0) = \xi'$. Тогда

$$D^2E(c)(\xi, \xi') = \partial^2 E(\kappa(0, 0)) / \partial s \partial s'.$$

Чтобы получить выражение для $D^2E(c)$ в явных терминах, напомним некоторые формулы из римановой геометрии на M (см. Громол, Клинггенберг, Мейер [1]).

Определим сначала отображение

$$\tilde{\kappa}: [0, 1]^2 \times S \rightarrow M,$$

^{*)} Автор часто говорит о «форме» там, где для многих читателей более привычным был бы термин «функционал».

полагая $\tilde{\kappa}(s, s', t) = \kappa(s, s')(t)$. Здесь κ то же, что и выше. Тогда $(\partial\tilde{\kappa}/\partial t)(0, 0, t) = \dot{c}(t)$. Положим

$$\begin{aligned}(\partial\tilde{\kappa}/\partial s)(s, s', t) &= \xi(t; s, s'), & (\partial\tilde{\kappa}/\partial s')(s, s', t) &= \xi'(t; s, s'), \\(\partial\tilde{\kappa}/\partial t)(s, s', t) &= \dot{c}(t; s, s').\end{aligned}$$

Если $\tilde{\kappa}$ дифференцируемо, то можно показать, что *)

$$\begin{aligned}(\text{i}) \quad \nabla(\nabla\xi'(t) \cdot \dot{c}(t)) \cdot \xi(t) &= \\&= R(\xi(t), \dot{c}(t), \xi'(t)) + \nabla(\nabla\xi'(t) \cdot \xi(t)) \cdot \dot{c}(t).\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\langle R(\xi(t), \partial c(t), \xi'(t)), \partial c(t) \rangle &= -\langle R(\xi(t), \partial c(t), \partial c(t)), \xi'(t) \rangle, \\R(\xi, \partial c, \xi') &= -R(\partial c, \xi, \xi'), \quad \langle R(\xi, \partial c, \xi'), \partial c \rangle = \langle R(\xi', \partial c, \xi), \partial c \rangle.\end{aligned}$$

Если $c \in Cr\Lambda$, то для $\xi, \xi' \in T_c\Lambda$ положим

$$\begin{aligned}(\text{ii}) \quad \tilde{R}(\xi, \partial c, \xi')(t) &:= R(\xi(t), \partial c(t), \xi'(t)), \\ \tilde{R}_c(\xi)(t) &:= R(\xi(t), \partial c(t), \partial c(t)).\end{aligned}$$

Используя ковариантную производную ∇_{α^0} на расслоении $\alpha^0: H^0(H^1(S, M)^*TM) \rightarrow H^1(S, M)$, из (i) и (ii) получим

$$\begin{aligned}(\text{i}') \quad \nabla_{\alpha^0}(\nabla\xi') \cdot \xi &= \tilde{R}(\xi, \partial c, \xi') + \nabla(\nabla_{\alpha^0}\xi' \cdot \xi), \\(\text{ii}') \quad \langle \tilde{R}(\xi, \partial c, \xi'), \partial c \rangle_0 &= -\langle \tilde{R}_c(\xi), \xi' \rangle_0, \\ \langle \tilde{R}_c(\xi), \xi' \rangle_0 &= \langle \tilde{R}_c(\xi'), \xi \rangle_0.\end{aligned}$$

$\nabla\xi'$ в левой части (i)' рассматривается как векторное поле $\xi' = \xi'(s)$ вдоль кривой $c': [0, 1] \rightarrow \Lambda M$, $c'(s) = \kappa(s, 0)$ (имеющей касательный вектор $\xi(s)$), а $\nabla\xi'$ — как сечение расслоения α^0 вдоль той же кривой; в левой части (i)' стоит ковариантная производная этого сечения вдоль этой кривой. При фиксированном s (в конечном счете нам нужно $s=0$) значение этого сечения есть некоторый элемент из $H^0(c(s)^*TM)$. Значение последнего в точке

*) В (i) ∇ имеет несколько иной смысл, нежели в § 1.1, и обозначает ковариантную производную векторного поля вдоль отображения $\tilde{\kappa}$ (Громол, Клинггенберг, Мейер [1]). Более привычным образом (i) можно записать так:

$$R(\xi, \dot{c})\xi' = \nabla_{\xi}\nabla_{\dot{c}}\xi' - \nabla_{\dot{c}}\nabla_{\xi}\xi'$$

(справа могут также стоять знаки $\nabla/\partial s = \nabla_{\xi}$, $\nabla/\partial t = \nabla_{\dot{c}}$; R — тензор кривизны; член с $\nabla_{[\xi, \dot{c}]}$, где $[\cdot, \cdot]$ — скобка Ли, пропадает, ибо $[\xi, \dot{c}] = 0$, и оттого не выписан). Хотя у ξ, ξ' и $\dot{c}$ указан только аргумент t , в (i) подразумевается их зависимость также и от s (другое дело, что после выполнения дифференцирований можно положить $s=0$). Напротив, s' можно с самого начала считать равным нулю, — его роль исчерпывается тем, чтобы обеспечить продолжение ξ' на ненулевые s .

$t \in S$ дается левой частью (i). Аналогично интерпретируется правая часть (i)'.

Очевидно, $\tilde{K}_c$ можно рассматривать как ограниченный линейный оператор в $H^0(c^*TM)$ или $H^1(c^*TM)$. Это разные операторы (хотя по понятным причинам они и обозначаются одинаково; ср. с (18), б)). Первый из них, согласно второй из формул (ii)', является самосопряженным. Чтобы понять, что следует из этой формулы для второго оператора, перепишем ее так:

$$\langle i\tilde{K}_c(\xi), i\xi' \rangle_0 = \langle i\xi, i\tilde{K}_c(\xi') \rangle_0,$$

где, как и в (18), б), $i: H^1(c^*TM) \rightarrow H^0(c^*TM)$ — естественное вложение. Отсюда

$$\langle i^*i\tilde{K}_c(\xi), \xi' \rangle_1 = \langle \xi, i^*i\tilde{K}_c(\xi') \rangle_1.$$

Иными словами, в $H^1(c^*TM)$ самосопряженным является оператор $i^*i\tilde{K}_c$. ▲

2.4.1. Лемма. Пусть c — критическая точка функции E на многообразии ΛM . Тогда индексная форма $D^2E(c)$ представляется в виде

$$D^2E(c)(\xi, \xi') = \langle \xi, \xi' \rangle_1 - \langle (\tilde{K}_c + \text{id})\xi, \xi' \rangle_0.$$

Доказательство. $c \in C^\infty(S, M)$ ввиду 1.3.11. Доказываемую формулу достаточно установить для $\xi, \xi' \in C^\infty(S, M)$, ибо обе ее части непрерывны по ξ, ξ' в топологии $T_c\Lambda M = H^1(c^*TM)$. Если $\xi, \xi' \in C^\infty(c^*TM)$, то рассмотренное выше отображение $\tilde{K}$ можно взять дифференцируемым, и тогда заведомо справедливы (i)' и (ii)'. Но $DE(c') \cdot \xi' = \langle \partial c', \nabla \xi' \rangle_0$ (c' то же, что и выше),

$$D \langle \partial c', \nabla \xi' \rangle_0 \cdot \xi = \langle \nabla_{\alpha^0} \partial(c') \cdot \xi, \nabla \xi' \rangle_0 + \langle \partial c', \nabla_{\alpha^0} (\nabla \xi') \cdot \xi \rangle_0.$$

Здесь $\nabla_{\alpha^0} \partial(c') \cdot \xi = \nabla \xi$ (см. 1.3.5 и последующее обсуждение), а $\nabla_{\alpha^0} (\nabla \xi') \cdot \xi$ можно выразить согласно (i)'. Поэтому

$$\begin{aligned} D \langle \partial c', \nabla \xi' \rangle_0 \cdot \xi|_{s=0} &= \langle \nabla \xi, \nabla \xi' \rangle_0 + \langle \partial \partial c', \nabla_{\alpha^0} (\nabla \xi') \cdot \xi \rangle_0 = \\ &= \langle \xi, \xi' \rangle_1 + \langle \partial c, \tilde{R}(\xi, \partial c, \xi') \rangle_0 - \langle \xi, \xi' \rangle_0 + \langle \partial c, \nabla (\nabla_{\alpha^0} \xi' \cdot \xi) \rangle_0. \end{aligned}$$

Но при $s=0$ последнее слагаемое равно нулю, так как $DE(c) = 0$. С помощью (ii)' получаем требуемую формулу. □

Пусть c — критическая точка функции E на ΛM . С помощью формы $D^2E(c)$, как обычно, определим самосопряженный оператор $A_c: T_c\Lambda \rightarrow T_c\Lambda$, полагая

$$\langle A_c \xi, \xi' \rangle_1 = \langle \xi, A_c \xi' \rangle_1 = D^2E(c)(\xi, \xi').$$

2.4.2. Теорема. Оператор A_c имеет вид

$$A_c = \text{id} + k_c,$$

где $k_c = -(1 - \nabla^2)^{-1} \cdot (\tilde{K}_c + 1)$ — компактный оператор, характеризующийся равенством

$$\langle k_c \xi, \xi' \rangle_1 = - \langle (\tilde{K}_c + 1) \xi, \xi' \rangle_0.$$

▲ *Замечание.* В (1^8) , б), с различных точек зрения рассмотрен оператор $(1 - \nabla^2)^{-1}$ (на самом деле, как там отмечено, этим символом могут обозначаться различные операторы). Сейчас мы будем рассматривать $(1 - \nabla^2)^{-1}$ как оператор i^*i в $H^1(c^*TM)$; при этом $\tilde{K}_c$ тоже будем рассматривать как оператор в $H^1(c^*TM)$. Это согласуется с приведенной в 2.4.2 характеристикой k_c . ▲

2.4.3. Следствие 1. Либо оператор A_c имеет лишь конечное число собственных значений, среди которых есть 1, либо собственные значения образуют ограниченное счетное бесконечное множество, единственной предельной точкой которого является 1. Каждое собственное значение, кроме 1, имеет конечную кратность. Любой элемент из $T_c\Lambda M$ аппроксимируется линейными комбинациями собственных векторов. Пусть

$$T_c\Lambda M = T_c^-\Lambda M + T_c^0\Lambda M + T_c^+\Lambda M$$

— ортогональное разложение касательного пространства $T_c\Lambda$ на подпространства, натянутые на те собственные векторы оператора A_c , у которых собственные значения соответственно < 0 , $= 0$ и > 0 . Тогда размерности $\dim T_c^-\Lambda M$ и $\dim T_c^0\Lambda M$ конечны.

Числа $\dim T_c^-\Lambda M$ и $\dim T_c^0\Lambda M - 1$ мы назовем соответственно индексом и дефектом геодезической c и будем иногда обозначать $\text{ind } c$ и nulc .

Доказательство. ▲ Оператор A_c , а значит, и $A_c - \text{id}$ есть самосопряженный оператор в $H^1(c^*TM)$. Тот факт, что $\langle (\tilde{K}_c + 1) \xi, \xi' \rangle_0$, где $\xi, \xi' \in H^1(c^*TM)$, можно записать в виде $\langle (1 - \nabla^2)^{-1} \cdot (\tilde{K}_c + 1) \xi, \xi' \rangle_1$, соответствует упомянутому выше определению $(1 - \nabla^2)^{-1}$ как i^*i . В связи с (ii) уже отмечалось, что оператор $i^*i\tilde{K}$ самосопряжен. Оператор i^*i , конечно, тоже самосопряжен. Отсюда ясно, что

$$A_c - \text{id} = -(1 - \nabla^2)^{-1} \cdot (\tilde{K}_c + 1).$$

Компактность k_c следует из доказанной в (1^8) , б), компактности i^*i . (Она является проявлением общего факта — компактности обращения эллиптического дифференциального оператора, в данном случае — оператора $1 - \nabla^2$.) ▲

Следствие 1 является вариантом хорошо известного утверждения о самосопряженных операторах, которые имеют вид «тождественный оператор плюс компактный оператор». □

2.4.4. Следствие 2. *Собственные векторы оператора A_c , отвечающие собственному значению $\lambda \in \mathbb{R}$, являются периодическими решениями дифференциального уравнения*

$$(*) \quad (\lambda - 1)(\nabla^2 - 1)\xi - (\tilde{K}_c + 1)\xi = 0.$$

Доказательство. Если $\xi \in H^1(c^*TM)$ и $A_c\xi = \lambda\xi$, то ввиду 2.4.2

$$(\lambda - 1)\xi = -(1 - \nabla^2)^{-1} \cdot (\tilde{K}_c + 1)\xi.$$

Отсюда следует, что $\xi \in C^\infty(c^*TM)$ (когда $c \in C^\infty(S, M)$, оператор $(1 - \nabla^2)^{-1}$ повышает гладкость, см. (18), б), и если уже известно, что $\xi \in C^r(c^*TM)$, — а при $r=0$ это так, ибо $H^1 \subset C^0$, — то $\xi \in C^{r+2}(c^*TM)$.

Итак, собственные векторы A_c дифференцируемы. А тогда (*) есть другая запись для $A_c\xi = \lambda\xi$. $\square$

Назовем замкнутое дифференцируемое подмногообразие B многообразия ΛM *критическим*, если $E|_B = \text{const}$, B замкнуто относительно действия $\tilde{\chi}$ группы S и целиком состоит из критических точек функции E .

Заметим, что критические подмногообразия компактны. Примерами критических подмногообразий являются:

- (i) орбита критической точки под действием χ группы $O(2)$;
- (ii) множество одноточечных кривых $\Lambda^0 M$, см. 1.4.6 *).

2.4.5. Предложение. *Пусть B — критическое подмногообразие многообразия ΛM . Тогда касательное пространство $T_c B$ подмногообразия B в точке $c \in B$ принадлежит ядру ***) $T_c^0 \Lambda$ индексной формы $D^2 E(c)$.*

Доказательство. Пусть $\xi \in T_c B$ и $\eta \in T_c \Lambda$. Нам надо показать, что $D^2 E(c)(\xi, \eta) = 0$.

Для того чтобы в этом убедиться, рассмотрим такое дифференцируемое отображение

$$\kappa: [0, 1]^2 \rightarrow \Lambda M, \quad \kappa: (r, s) \mapsto \kappa(r, s),$$

что

$$\kappa(0, 0) = c, \quad \kappa(r, 0) \subset B, \quad (\partial\kappa/\partial r)(0, 0) = \xi, \quad (\partial\kappa/\partial s)(0, 0) = \eta.$$

*) Хотя действие $\tilde{\chi}: S \times \Lambda M \rightarrow \Lambda M$ недифференцируемо, но, когда $c \in C^\infty(S, M)$ (в частности когда $c \in Cr \Lambda$), отображение $z \mapsto \tilde{\chi}(z, c)$ — класса C^∞ . Это обеспечивает гладкость B в (i). Гладкость $\Lambda^0 M$ устанавливается по ходу доказательства 1.4.6.

**) В оригинале «pull-space». В отечественной литературе наряду с «ядром» используются термины: дефектное или изотропное подпространство, нуль-пространство. Все они имеют также и другие значения. Мне кажется, что для «ядра» опасность путаницы всего меньше.

Тогда

$$\frac{d}{ds} E(\kappa(r, 0)) = DE(\kappa(r, 0)). (\partial \kappa / \partial s)(r, 0) = 0.$$

Дифференцируя по r , заключаем, что

$$D^2 E(c)(\xi, \eta) = \partial^2 E(\kappa(0, 0)) / \partial r \partial s = 0. \quad \square$$

Заметим, что если c — произвольная замкнутая геодезическая, не вырождающаяся в одну точку, то, так как она является частью 1-мерного критического подмногообразия $\tilde{\chi}(S, c) = S.c$, ядро оператора A_c содержит ненулевой вектор ∂c . Поэтому дефект c и был выше определен не как $\dim T_c^0 \Lambda M$, а как $\dim T_c^0 \Lambda M - 1$.

Если для всех элементов c критического подмногообразия B индекс c постоянен, то мы будем называть это число *индексом B* . Аналогично если дефект индексной формы $D^2 E(c)$ одинаков для всех $c \in B$, то мы назовем его *дефектом B* .

Если критическое подмногообразие B имеет определенные индекс и дефект, причем дефект B совпадает с размерностью B , т. е. при всех $c \in B$ выполняется $T_c B = T_c \Lambda$, то B называется *невыврожденным критическим подмногообразием*.

Если c — замкнутая геодезическая и если орбита $S.c$ невырожденна, то c называется *невыврожденной замкнутой геодезической*. Это эквивалентно тому, что дефект c равен 0, или тому, что дефект индексной формы $D^2 E(c)$ равен 1.

2.4.6. Предложение. $\Lambda^0 M$ — невырожденное критическое подмногообразие индекса 0.

Доказательство. Полагая в 2.4.4 $c = \text{const}$ и, следовательно, $\tilde{K}_c = 0$, получим

$$(\lambda - 1) \nabla^2 \xi - \lambda \xi = 0^*).$$

Это уравнение не имеет нетривиальных периодических решений при $\lambda < 0$. Поэтому индекс $\Lambda^0 M$ равен 0. При $\lambda = 0$ периодическими решениями являются только решения вида $\xi = \text{const}$. Следовательно, $T_c^0 \Lambda M = T_c \Lambda^0 M$. $\square$

В качестве подготовки к основной теореме Морса рассмотрим *риманово векторное расслоение с действием группы $O(2)$* **). Так мы будем называть векторное расслоение

$$\mu: N \rightarrow B,$$

*) Что является обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\lambda - 1) (d^2 \xi / dt^2) - \lambda \xi = 0$$

в $T_c M$.

**) Автор пишет короче: $O(2)$ -vector bundle. Однако обычно термин G -расслоение означает другой объект — расслоение со структурной группой G ,

которое имеет своей базой компактное многообразие B , а стандартным слоем — гильбертово пространство и которое снабжено некоторой дополнительной структурой. Во-первых, на расслоении задана риманова метрика, которую мы, имея в виду последующие применения, будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ (см. § 1.1). Во-вторых, задано такое непрерывное действие группы $O(2)$

$$\chi: O(2) \times N \rightarrow N,$$

что при каждом $\alpha \in O(2)$ отображение $\chi_\alpha := \chi(\alpha, \cdot): N \rightarrow N$ является изометрическим отображением расслоений.

Отсюда следует, что $O(2)$ действует также и на B , причем проекция μ и нулевое сечение $c \mapsto 0_c$, $c \in B$, $0_c \in N$, эквивариантны.

Для $\varepsilon > 0$ через $D_\varepsilon \mu$ будем обозначать ассоциированное с μ расслоение на шары радиуса ε расслоения μ (короче будем говорить о расслоении на ε -диски). Через $D\mu$ будем обозначать расслоение на (открытые) единичные шары расслоения μ . Предположим, что задана дифференцируемая инвариантная функция

$$E: D_\varepsilon \mu \rightarrow \mathbb{R}.$$

Функцию E мы назовем *функцией Морса*, если нулевое сечение (отождествляемое с B) является невырожденным критическим подмногообразием функции E , индекс которого $k \geq 0$, и если оператор A_c , соответствующий индексной форме $D^2 E(c)$, при любом $c \in B$ имеет вид «тождественный оператор плюс компактный оператор».

Ясно, что в этом примере моделируется следующая ситуация. Пусть $B \subset \Lambda M$ является невырожденным критическим подмногообразием индекса k для энергии E и $E(B) = \kappa$. Пусть $\mu: N \rightarrow B$ — нормальное расслоение этого многообразия. Оно является римановым векторным расслоением с действием $O(2)$.

При $\varepsilon > 0$ рассмотрим расслоение на ε -диски $D_\varepsilon \mu$ расслоения μ . Слой этого расслоения над точкой $c \in B$ состоит из таких элементов $\xi \in N_c$, что $\|\xi\|_1 < \varepsilon$. С помощью экспоненциального отображения $\exp$ связности Леви-Чивита мы можем при достаточно малом ε отобразить $D_\varepsilon \mu$ на открытую окрестность подмногообразия B в ΛM . Вместо $\exp$ мы можем также воспользоваться введенным в 1.3.7 отображением $\tilde{\exp}$, ибо $\|\cdot\|_1$ -норма мажорирует $\|\cdot\|_\infty$ -норму, см. 1.2.1.

Тогда функция $E \circ \exp: D_\varepsilon \mu \rightarrow \mathbb{R}$ является функцией Морса расслоения μ .

Теперь мы докажем обобщенную лемму Морса.

2.4.7. Лемма. Пусть μ — риманово расслоение над B с действием $O(2)$ и E — такая инвариантная функция Морса, что $E|_B = 0$.

Утверждение. Существуют такое $\varepsilon > 0$, такой эквивариантный послыйный диффеоморфизм

$$\psi: D_\varepsilon \mu \rightarrow \psi D_\varepsilon \mu \subset N$$

и такое эквивариантное дифференцируемое сечение расслоения $L(\mu; \mu): L(N; N) \rightarrow B$

$$B \rightarrow L(N; N), \quad c \mapsto P_c,$$

что P_c — послыйная ортогональная проекция и

$$E \circ \psi(\xi) = \|P_c \xi\|_1^2 - \|(id - P_c) \xi\|_1^2, \quad c = \mu(\xi).$$

Замечание. В том случае, когда B — точка, обобщение леммы Морса на гильбертовы многообразия было доказано Пале [2], см. также Дж. Шварц [1]. Для тривиального $O(2)$ -действия (т. е. когда $O(2)$ -действие отсутствует) эта лемма была доказана Мейером [1]. Вассерман [1], [2] доказал лемму в предположении дифференцируемого $O(2)$ -действия. Однако здесь нам нужен случай непрерывного $O(2)$ -действия. Мы увидим, что доказательства приведенных выше вариантов этой леммы могут быть без особых усилий перенесены на наш случай.

Доказательство. Чтобы упростить обозначения, мы не будем специально отмечать тот факт, что, возможно, функция E определена только в малой окрестности нулевого сечения расслоения μ .

Ограничение функции E на N_c можно записать в виде

$$E(\eta) = \int_0^1 (1-t) D^2 E(t\eta) \cdot (\eta, \eta) dt,$$

т. е. $E(\eta) = \int_0^1 (1-t) \frac{d^2}{dt^2} E(t\eta) dt$, что получается интегрированием

по частям из $E(\eta) = \int_0^1 \frac{d}{dt} E(t\eta) dt$. Тогда

$$h(\eta) \cdot (\xi, \xi') := \int_0^1 (1-t) D^2 E(t\eta) \cdot (\xi, \xi') dt$$

— эквивариантная симметрическая билинейная форма. (Эквивариантность h означает, что $h(\chi_\alpha \eta) \cdot (\chi_\alpha \xi, \chi_\alpha \xi') = h(\eta) \cdot (\xi, \xi')$. Это следует из аналогичного тождества с $D^2 E(t\eta)$ вместо $h(\eta)$.)

Так как форма $D^2(E|N_c)(0_c)$ невырожденна, то $h(\eta)$ также невырожденна в некоторой ε -окрестности нулевого сечения расслоения N . Соответствующий форме $h(\eta)$ самосопряженный оператор $k(\eta)$ определяется равенством

$$\langle k(\eta) \xi, \xi' \rangle_1 = h(\eta) \cdot (\xi, \xi').$$

Наша первая цель состоит в том, чтобы для достаточно малых $\varepsilon > 0$ определить на $D_\varepsilon \mu$ такое дифференцируемое отображение $m: D_\varepsilon \mu \rightarrow L(\mu; \mu)$, которое переводит слой над $c \in B$ в слой над c , эквивариантно^{*}), значения которого являются обратимыми операторами и для которого

$$\langle k(\eta) \eta, \eta \rangle_1 = \langle k(0_c) m(\eta) \eta, m(\eta) \eta \rangle_1.$$

Другими словами, мы ищем такое семейство операторов $m(\eta)$, которое удовлетворяет соотношению

$$(*) \quad m(\eta)^* k(0) m(\eta) = k(\eta),$$

где через 0 мы для краткости обозначили (и дальше нередко будем так обозначать) сечение 0_c , а * обозначает сопряженный оператор.

Рассмотрим оператор $l(\eta) = k(0)^{-1} k(\eta)$. Если $\|\eta\|_1$ достаточно малое, то он будет близким к тождественному и, следовательно, имеет квадратный корень, который мы будем обозначать через $m(\eta)$ ^{**}).

Для того чтобы показать, что $m(\eta)$ удовлетворяет (*), заметим прежде всего, что из $l(\eta)^* = k(\eta) k(0)^{-1}$ следует

$$l(\eta)^* k(0) = k(\eta) l(\eta).$$

Но $m(\eta)$ при $\|l(\eta)\| < 1$ может быть представлен в виде степенного ряда по $(1 - l(\eta))$, в который разлагается $(1 - (1 - l(\eta)))^{1/2}$, а $m(\eta)^*$ представляется в виде того же степенного ряда по $(1 - l(\eta)^*)$. Следовательно, предыдущее соотношение выполняется, если в нем $l(\eta)$ и $l(\eta)^*$ заменить на $m(\eta)$ и $m(\eta)^*$, ибо $(1 - l(\eta))^* k(0) = k(0) (1 - l(\eta))^n$. Поэтому

$$m(\eta)^* k(0) m(\eta) = k(0) m(\eta) m(\eta) = k(0) l(\eta) = k(\eta),$$

и тем самым соотношение (*) доказано.

Убедимся в эквивариантности m . Ввиду эквивариантности h

$$\langle k(\chi_\alpha \eta) \chi_\alpha \xi, \chi_\alpha \xi' \rangle_1 = \langle k(\eta) \xi, \xi' \rangle_1, \quad \chi_\alpha^* (k \cdot \chi_\alpha) \chi_\alpha = k,$$

а так как χ_α — изометрия, то $\chi_\alpha^* = \chi_\alpha^{-1}$. Поэтому k эквивариантно (в том же смысле, в каком мы хотим установить эквивариантность m). При $\eta = 0$ отсюда следует, что $k(0_{\chi_\alpha c}) \chi_\alpha = \chi_\alpha k(0_c)$.

^{*} Эквивариантность m означает, что $m(\chi_\alpha \eta) \cdot \chi_\alpha \xi = \chi_\alpha (m(\eta) \xi)$ или $m \cdot \chi_\alpha = \chi_\alpha m \chi_\alpha^{-1}$.

^{**} Вообще говоря, существует много различных «корней». В данном случае подразумевается «корень», получающийся при подстановке оператора A вместо x в известное биномиальное разложение для $\sqrt{1+x}$: $\sqrt{1+A} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/2}{i} A^i$. (Этот операторный ряд сходится при $\|A\| < 1$.) Другую интерпретацию см. в (32).

(Иными словами, $c \mapsto k(0_c)$ есть эквивариантное сечение расслоения $L(\mu; \mu)$.) Теперь непосредственно получается эквивариантность l , затем $(1-l)^n$ и, наконец, всего ряда для m .

При достаточно малом $\|\eta\|_1$ отображение $\varphi'^{-1}: \eta \mapsto \xi' = m(\eta) \eta$ обратимо. Дифференцируемость этой функции доказана у Пале [2]*). Из определения видно, что

$$\begin{aligned} E(\varphi'(\xi')) &= h(\varphi'(\xi')) \cdot (\varphi'(\xi'), \varphi'(\xi')) = \langle k(\varphi'(\xi')) \varphi'(\xi'), \varphi'(\xi') \rangle_1 = \\ &= \langle k(0_{\mu\varphi'(\xi')}) m(\varphi'(\xi')) \varphi'(\xi'), m(\varphi'(\xi')) \varphi'(\xi') \rangle_1 = \\ &= \langle k(0_{\mu\xi'}) \xi', \xi' \rangle_1. \end{aligned}$$

Так как мы предположили, что $k(0_c)$ (самосопряженный оператор, соответствующий гессиану $D^2E(c)$ в точке $0_c = c \in B$) имеет вид «тождественный оператор плюс компактный оператор», то мы можем ввести такие новые координаты ξ , связанные с ξ' преобразованием $\xi' = \varphi(\xi)$, где φ — некоторое эквивариантное сечение $B \rightarrow L(\mu; \mu)$, и такую ортогональную проекцию P_c , что

$$\langle k(0_c) \xi', \xi' \rangle_1 = \|P_c \xi'\|_1^2 - \|(\text{id} - P_c) \xi'\|_1^2.$$

Наконец, положим $\varphi' \circ \varphi = \psi$. Дiffeоморфизм ψ искомый, и, следовательно, лемма доказана, за исключением проверки дифференцируемости P_c , которую можно найти у Мейера [1]**). $\square$

Замечание. Последнее преобразование координат $\xi' = \varphi(\xi)$ и ортогональная проекция P_c могут быть получены с помощью собственных векторов оператора $k(0_c)$. Если ξ'_λ — проекция вектора ξ' на собственный вектор e_λ , собственное значение которого $\lambda \neq 0$, то определим компоненту ξ_λ вектора $\xi = \varphi^{-1}(\xi')$, полагая $\xi_\lambda = \sqrt{|\lambda|} \xi'_\lambda$; P_c — проекция слоя N_c на подпространство, натянутое на собственные векторы, собственные значения которых положительны. Если кратность собственного значения λ больше 1, то при любом выборе системы ортогональных друг другу собственных векторов, отвечающих λ , φ^{-1} получается одним и тем же. Теперь ясно, что эквивариантность φ следует из эквивариантности сечения $c \mapsto k(0_c)$ расслоения $L(\mu; \mu)$.

2.4.8. Следствие. *Предположим, что критическое множество $B = E^{-1}(x) \cap Cr\Lambda$ многообразия ЛМ является невырожденным критическим подмногообразием индекса k . Пусть $\mu: N \rightarrow B$ — нормаль-*

*) Дифференцируемость по η (как в слое, так и вообще в $D_\mu\mu$) почти очевидна: на каждом шаге построения определяемые объекты дифференцируемы. Обратимость φ'^{-1} (пока она не доказана, φ'^{-1} надо понимать как некий слитный символ) следует из того, что при $\eta = 0$

$$D\varphi'^{-1}(\eta) \cdot \xi = m(\eta) \xi + (Dm(\eta) \cdot \xi) \cdot \eta = \xi + (Dm(0) \cdot \xi) \cdot 0 = \xi.$$

**) Ссылка на Мейера [1] законна, ибо определение P_c не зависит от действия $O(2)$ и, следовательно, доказательство, относящееся к тому случаю, когда никакого действия $O(2)$ нет, годится и для наших целей. См. также (33), в).

ное расслоение. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует такой эквивариантный диффеоморфизм φ расслоения $D_\varepsilon \mu$ на шары радиуса ε , ассоциированного с расслоением μ , на открытую окрестность подмногообразия B , что

$$E \circ \varphi(\xi) = \kappa + \|P_c \xi\|_1^2 - \|(id - P_c)\xi\|_1^2, \quad c = \mu(\xi),$$

где P_c — эквивариантные послойные ортогональные проекции.

Кроме того, κ — изолированное критическое значение E .

Доказательство. Напомним, что выше мы построили эквивариантный диффеоморфизм расслоения $D_\varepsilon \mu$ на окрестность множества B , используя отображение $\exp$. $\square$

Следуя Пале [2], фиксируем какую-нибудь дифференцируемую функцию $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\lambda(x) = 0$ при $x \geq 1$, $\lambda(x) = 1$ при $x \leq 1/2$, причем всюду в $(1/2, 1)$ ее производная отрицательна. С помощью λ определим функцию $\sigma(s)$, $s \in [0, 1]$, как единственное решение уравнения $\lambda(\sigma)/(1 + \sigma) = 2(1 - s)/3$.

Утверждение. Функция σ непрерывна и строго монотонно возрастает на $[0, 1]$. Она дифференцируема на $[0, 1]$ с производной $\dot{\sigma} > 0$. Кроме того, $\sigma(0) = 1/2$, $\sigma(1) = 1$ и если $\varepsilon > 0$, то из

$$-\varepsilon \leq u^2 - v^2 \leq -\varepsilon + \frac{3\varepsilon}{2} \lambda(u^2/\varepsilon) \quad \text{и} \quad u^2 \leq \varepsilon$$

следует, что $u^2 \leq \varepsilon \sigma(v^2/(\varepsilon + u^2))$.

Доказательство можно найти у Пале [2]*).

2.4.9. Предложение. Пусть $\mu: N \rightarrow B$ — риманово векторное расслоение с действием $O(2)$, снабженное эквивариантной ортогональной проекцией $s \mapsto P_s$, $s \in B$, $P_s \in L(N_s; N_s)$, коядро которой имеет размерность k . Рассмотрим для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, $3\varepsilon < \delta^2$, эквивариантные функции

$$E(\xi) = \|P_c \xi\|_1^2 - \|(id - P_c)\xi\|_1^2, \quad c = \mu(\xi),$$

$$F(\xi) = E(\xi) - \frac{3\varepsilon}{2} \lambda(\|P_c \xi\|_1^2/\varepsilon), \quad c = \mu(\xi),$$

определенные на расслоении на δ -диски $D_{\delta\mu}$ **).

Утверждение. Пространство $N_F := \{\xi \in D_{\delta\mu}; F(\xi) \leq -\varepsilon\}$ получается из пространства $N_E := \{\xi \in D_{\delta\mu}; E(\xi) \leq -\varepsilon\}$ с помощью

*) Положим $x = u^2/\varepsilon$, $y = v^2/\varepsilon$. Надо доказать, что из $x \leq 1$, $y \geq 0$, $-1 \leq x - y \leq -1 + 3/2 \lambda(x)$ следует $x \leq \sigma(y/(1+x))$ (все прочее доказывается достаточно непосредственно). При наших условиях $y \leq 1+x$, так что $s := y/(1+x) \in [0, 1]$, и неравенство $x \leq \sigma(s)$ имеет смысл. Если $x \leq 1/2$, то все ясно. Пусть $1/2 < x \leq 1$, так что $x = \sigma(s_1)$ с некоторым $s_1 \in [0, 1]$. Тогда

$$1 - s = 1 - y/(1+x) \leq 3/2 \lambda(x)/(1+x) = 1 - s_1,$$

откуда $s_1 \leq s$ и $x = \sigma(s_1) \leq \sigma(s)$.

**) Имеется в виду, что, хотя эти функции определены с помощью написанных формул на всем N , мы их будем рассматривать только на $D_{\delta\mu}$.

эквивариантного приклеивания расслоения на ручки $D\mu^- \oplus D\mu^+$, которое есть прямая сумма (сумма Уитни) расслоений на единичные замкнутые шары, ассоциированных с подрасслоениями μ^- и μ^+ , состоящими соответственно из ядра и образа проекции $P = \{P_c\}^*$.

Замечание. Эквивариантное приклеивание расслоения на ручки $D\mu^- \oplus D\mu^+$ к N_E означает следующее: существует такой эквивариантный гомеоморфизм h , отображающий $D\mu^- \oplus D\mu^+$ на замкнутое подмножество H пространства N_F , что

- (i) $N_F = N_E \cup H$;
- (ii) $h|_{\partial D\mu^- \oplus D\mu^+}$ — эквивариантный диффеоморфизм своей области определения на свой образ $\partial N_E \cap H$;
- (iii) $h|_{D\mu^- \oplus D\mu^+}$ — эквивариантный диффеоморфизм на образ $N_F - N_E$.

Относительно этой теоремы можно сделать то же замечание, что и после формулировки леммы 2.4.7.

Доказательство. Определим гомеоморфизм $h: D\mu^- \oplus D\mu^+ \rightarrow N_F$, полагая

$$h(\xi_- + \xi_+) = (\varepsilon \sigma(\|\xi_-\|^2) \|\xi_+\|^2 + \varepsilon)^{1/2} \xi_- + (\varepsilon \sigma(\|\xi_-\|^2))^{1/2} \xi_+,$$

где σ — введенная выше функция, $\xi_- = (\text{id} - P)\xi$ и $\xi_+ = P\xi$. Имеем

$$\begin{aligned} \|h(\xi_- + \xi_+)\|^2 &= (\varepsilon \sigma(\|\xi_-\|^2) \|\xi_+\|^2 + \varepsilon) \|\xi_-\|^2 + \varepsilon \sigma(\|\xi_-\|^2) \|\xi_+\|^2 \leq \\ &\leq 2\varepsilon \|\xi_-\|^2 + \varepsilon \|\xi_+\|^2 \leq 3\varepsilon < \delta^2, \end{aligned}$$

$$E(h(\xi_- + \xi_+)) = \varepsilon [\sigma(\|\xi_-\|^2) \|\xi_+\|^2 (1 - \|\xi_-\|^2) - \|\xi_-\|^2] \geq -\varepsilon,$$

$$\begin{aligned} F(h(\xi_- + \xi_+)) &= \varepsilon \left[\sigma(\|\xi_-\|^2) \|\xi_+\|^2 (1 - \|\xi_-\|^2) - \|\xi_-\|^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \lambda (\sigma(\|\xi_-\|^2) \|\xi_+\|^2) \right] \leq \\ &\leq \varepsilon \left[\sigma(\|\xi_-\|^2) (1 - \|\xi_-\|^2) - \|\xi_-\|^2 - \frac{3}{2} \lambda (\sigma(\|\xi_-\|^2)) \right] = -\varepsilon \end{aligned}$$

(здесь использовано то, что $\frac{3}{2} \lambda (\sigma(\|\xi_-\|^2)) = (1 - \|\xi_-\|^2) (1 + \sigma(\|\xi_-\|^2))$),

$$\|Ph(\xi_- + \xi_+)\|^2 = \varepsilon \sigma(\|\xi_-\|^2) \|\xi_+\|^2 \leq \varepsilon.$$

Следовательно, $\text{im } h$ принадлежит множеству

$$H := \{\xi; E(\xi) \geq -\varepsilon, F(\xi) \leq -\varepsilon, \|\xi_+\|^2 \leq \varepsilon\}$$

(из этих неравенств следует, что $\|\xi_-\|^2 \leq 2\varepsilon$ и $\|\xi\|^2 \leq 3\varepsilon < \delta^2$). Более того, h является гомеоморфизмом на все H и h^{-1} имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon + \|P\eta\|^2}} (\text{id} - P)\eta + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \left(\frac{\|(\text{id} - P)\eta\|^2}{\varepsilon + \|P\eta\|^2} \right)}} P\eta.$$

*) Ниже автор называет μ^- и μ^+ отрицательным и положительным подрасслоениями.

При $\eta \in H$ (и вообще при $E(\eta) \geq -\varepsilon$) аргумент u σ лежит в $[0, 1]$, так что написанное отображение определено и непрерывно. Отсюда же видно, что $\|(id - P)h^{-1}(\eta)\|_1 \leq 1$, а то, что $\|Ph^{-1}(\eta)\|_1 \leq 1$, доказывается с помощью утверждения, сформулированного перед предложением 2.4.9. (Надо положить в этом утверждении $u = P\eta$, $v = (id - P)\eta$. Его посылки выполняются в силу трех неравенств, фигурирующих в определении H .)

Так как $\sigma|_{[0, 1]}$ дифференцируемо и $\dot{\sigma} \neq 0$, то $h|_{D\mu^- \oplus D\mu^+}$ дифференцируемо, равно как и $h^{-1}|_{H - \partial N_E}$. Наконец, для $\xi = \xi_- + \xi_+ \in \partial D\mu^- \oplus D\mu^+$ имеем $h(\xi) = (\varepsilon \|\xi_+\|_1 + \varepsilon)^{1/2} \xi_- + \varepsilon^{1/2} \xi_+$, т. е. $h|_{\partial D\mu^- \oplus D\mu^+}$ — диффеоморфизм на свой образ

$$\partial N_E \cap H = \{\xi \in D\mu; E(\xi) = -\varepsilon, \|\xi_+\|_1 \leq \varepsilon\}.$$

Заметим, что все приведенные определения и конструкции эквивариантны. Таким образом, теорема 2.4.9 доказана. $\square$

Теперь мы можем сформулировать основную теорему теории Морса для функции E на многообразии ΛM .

Здесь также справедливы те замечания, которые были сделаны после формулировки 2.4.7.

2.4.10. Теорема. *Предположим, что в $\Lambda = \Lambda M$ множество всех критических точек, принадлежащих E -уровню κ , является невырожденным критическим подмногообразием B .*

*Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что гильбертово многообразие с краем *) $\Lambda^{\kappa+\varepsilon}$ эквивариантно диффеоморфно своему подмножеству, которое тоже является гильбертовым многообразием с краем и получается из $\Lambda^{\kappa-\varepsilon}$ приклеиванием к нему расслоения на ручки типа $D\mu^- \oplus D\mu^+$. Здесь $\mu = \mu^- \oplus \mu^+$ — разложение нормального расслоения μ подмногообразия B на отрицательное и положительное подрасслоения. Кроме того, упомянутое подмножество является сильным деформационным ретрактом пространства $\Lambda^{\kappa+\varepsilon}$ при некоторой эквивариантной гомотопии последнего.*

Доказательство. Из 2.4.8 мы знаем, что существует такой эквивариантный диффеоморфизм φ некоторого расслоения на открытые шары $D_{2\varepsilon}\mu$ нормального расслоения μ подмногообразия B , что

$$E \circ \varphi(\xi) = \kappa + \|P\xi\|^2 - \|(id - P)\xi\|^2.$$

Выберем ε так, чтобы $0 < \varepsilon < \delta^2$ и чтобы κ было единственным критическим значением в $]-3\varepsilon + \kappa, \kappa + 3\varepsilon[$. Определим на

*) В этой книге гильбертовы многообразия с краем не вводились, но необходимые для этого модификации соответствующих определений достаточно очевидны.

$W := \{e \in \Lambda M; E(e) > \kappa - 2\varepsilon\}$ функцию F , полагая

$$F(e) = \begin{cases} E(e) - \frac{3\varepsilon}{2} \lambda(\|P \cdot \varphi^{-1}(e)\|/\varepsilon) & \text{при } e \in \varphi D_{2\delta}\mu, \\ E(e) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $e = \varphi(\xi)$ принадлежит W и $F(e) \neq E(e)$, то $\lambda(\|P\xi\|/\varepsilon) \neq 0$; поэтому $\|P\xi\| < \varepsilon$, $E(e) < \kappa + \varepsilon$ и $E(e) = \kappa + \|P\xi\| - \|(id - P)\xi\| > \kappa - 2\varepsilon$ и, следовательно, $\|\xi\| < 4\varepsilon < 4\delta^2$. Другими словами, замыкание множества $\{e \in W \cap \varphi D_{2\delta}\mu; E(e) \neq F(e)\}$ принадлежит внутренности $\varphi D_{2\delta}\mu$, что доказывает дифференцируемость F (напомним, что F определена только в W).

Отсюда также следует, что $\{e \in W; E(e) \leq \kappa + \varepsilon\} = \{e \in W; F(e) \leq \kappa + \varepsilon\}$.

Поэтому из 2.4.9 получаем, что пространство

$$N_F := \{e \in W \cap \varphi D_{2\delta}\mu; F(e) \leq \kappa - \varepsilon\}$$

получается из пространства

$$N_E := \{e \in W \cap \varphi D_{2\delta}\mu; E(e) \leq \kappa - \varepsilon\}$$

эквивариантным приклеиванием к нему расслоения на ручки типа $D_\mu^- \oplus D_\mu^+$. Тот факт, что сейчас мы рассматриваем не все $e \in D_{2\delta}\mu$, а только те из них, которые лежат в W , ничего не меняет. Ведь

$$N_F - N_E \subset \{e \in \varphi D_{2\delta}\mu; E(e) > \kappa - \varepsilon, F(e) \leq \kappa - \varepsilon\},$$

и если мы добавим к N_F, N_E точки из $\varphi D_{2\delta}\mu - W$ (где, стало быть, $E(e) \leq \kappa - 2\varepsilon$), чтобы новые N_F и N_E непосредственно соответствовали N_F и N_E из 2.4.9, то это не повлияет на $N_F - N_E$.

Ясно, что $N_F \subset \Lambda^{\kappa+\varepsilon}$. Далее, критическое подмногообразие B содержится во внутренности $\text{int } N_F$, ибо если $c \in B$, то $c \in W$ и $F(c) = \kappa - 3/2\varepsilon < \kappa - \varepsilon$. Иными словами, $U = \text{int } N_F$ — открытая окрестность B и, согласно 1.4.8, на $U \cap (\Lambda^{\kappa+\varepsilon} - \Lambda^{\kappa-\varepsilon})$ функция $\|\text{grad } E\|_1$ отделена от нуля. Естественно попытаться использовать для построения эквивариантной деформации $\Lambda^{\kappa+\varepsilon}$ на $\Lambda^{\kappa-\varepsilon} \cup N_F$ деформацию φ_s ; ср. Пале [2]. ▲ Для этого прежде всего докажем, что при достаточно малом δ (и любом $\varepsilon < \delta^2$)

$$(*) \quad \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} F(\varphi_s \cdot \varphi(\xi)) < -\alpha \|\xi\|^2 \quad \text{в } W \cap \varphi D_{2\delta}\mu$$

с некоторым $\alpha > 0$.

φ_s — траектория поля $-\text{grad } E$ в ΛM , а $\varphi^{-1} \cdot \varphi_s \cdot \varphi$ в пределах своего определения — траектория поля $w := -(T\varphi)^{-1} \text{grad } E$ на $D_{2\delta}\mu$. Ясно, что $-w(\xi)$ есть градиент функции $E \cdot \varphi$ относительно римановой метрики

$$\langle \eta, \eta' \rangle := \langle T\varphi(\xi) \cdot \eta, T\varphi(\xi) \cdot \eta' \rangle_1 \quad \text{при } \eta, \eta' \in T_\xi N$$

на $D_{2\delta}\mu$. Если $c \in B$, то 0_c — положение равновесия. Согласно ⁽³¹⁾, в), «линейное приближение» $\{T(\varphi^{-1} \cdot \varphi_s \cdot \varphi) | T_c N\}$ возле 0_c — поток на $T_{0_c} N$, определяемый градиентом гессиана $D^2(E \cdot \varphi)(0_c)$ (как квадратичной функции на $T_{0_c} N$) относительно римановой метрики $\{\cdot, \cdot\} | T_{0_c} N$.

Напомним, что $\varphi = \exp \cdot \psi$ (если угодно, $\exp$ может обозначать и $\tilde{\exp}$ из 1.3.7), где ψ — отображение из 2.4.7; оно имеет вид $\psi = \varphi' \cdot \Phi$, где через Φ сейчас обозначено отображение, которое в 2.4.7 обозначалось через φ (это есть послойный линейный изоморфизм). Отметим, что

$$T \exp(0_c) | T_{0_c} T \Lambda M = J_{0_c}^{-1},$$

а отображение $T\varphi'(0_c): T_{0_c} N \rightarrow T_c \Lambda M$ в терминах естественного разложения $T_{0_c} N = T_c B \oplus T_{0_c} N_c$ описывается так: оно совпадает с естественным вложением на первом слагаемом и с $J_{0_c}^{-1} | T_{0_c} N_c$ — на втором. Продолжив Φ на $T_{0_c} N$ как $\Phi\eta = \mu_* \eta + \Phi \cdot J_{0_c}^{-1} \cdot (\eta - \mu_* \eta)$, получим, что на $T_{0_c} N$

$$\{\eta, \eta'\} = \langle \Phi\eta, \Phi\eta' \rangle_1 = \langle \Phi^2 \eta, \eta' \rangle_1$$

(мы пишем Φ^2 вместо $\Phi^* \Phi$, поскольку из определения Φ видна его самосопряженность, но это несущественно). Далее, гессиан $E \cdot \varphi$ легко определяется из того, что $E \cdot \varphi$ — квадратичный функционал на N_c , а на нулевом сечении $E \cdot \varphi$ тождественно равно κ (или, если угодно, из известных свойств A_c). Если $\eta \in T_{0_c} N$ в соответствии с имеющимися разложениями и отождествлениями

$$T_{0_c} N = T_c B \oplus N_c = T_c^0 \Lambda N \oplus T_c^+ \Lambda M \oplus T_c^- \Lambda M$$

записать в виде $\eta = \eta_0 + \eta_+ + \eta_-$, то

$$D^2(E \cdot \varphi)(0_c) \cdot (\eta, \eta') = 2 \langle \eta_+, \eta'_+ \rangle_1 - 2 \langle \eta_-, \eta'_- \rangle_1.$$

Теперь легко найти и соответствующее градиентное векторное поле на $T_{0_c} N$. Заметим, что по отношению к скалярному произведению $\langle B\eta, \eta \rangle_1$ градиент функции $\eta \rightarrow \langle C\eta, \eta \rangle_1 = \langle B(B^{-1}C)\eta, \eta \rangle_1$ равен $2B^{-1}C\eta$. Поэтому в нашем случае градиент есть $2\Phi^{-2}\eta_+ - 2\Phi^{-2}\eta_-$.

Напомним, что это есть $T\omega(0_c) \cdot \eta$ (ср. ⁽³¹⁾, в)). Поэтому

$$(**) \quad -\omega(\xi) = 2\Phi^{-2}\xi_+ - 2\Phi^{-2}\xi_- + o(\|\xi\|_1).$$

(Здесь мы рассматриваем $2\Phi^{-2}\xi_+$ и $2\Phi^{-2}\xi_-$ как векторы в $T_\xi T_{0_c} N$. Чтобы убедиться в правильности (**), воспользуемся картой, содержащей c . При всевозможных c потребуется лишь конечное число карт, поэтому в (**) оценка o равномерна по $c = \mu\xi \in B$.)

Теперь ясно, что

$$D(F \circ \varphi)(\xi) \cdot \omega(\xi) = -4 \langle \xi_+, \Phi^{-2} \xi_+ \rangle_1 - 4 \langle \xi_-, \Phi^{-2} \xi_- \rangle_1 + \\ + 6\lambda' (\|\xi_+ \|_1^2 / e) \langle \xi_+, \Phi^{-2} \xi_+ \rangle_1 + o(\|\xi\|_1^2).$$

(Очень существенно, что, согласно (**), вектор $\omega(\xi)$ направлен почти по $N_{\mu\xi}$ (с точностью до $o(\|\xi\|_1)$), а $D(E \circ \varphi)(\xi) = O(\|\xi\|_1)$ (поскольку $D(E \circ \varphi)(\mu\xi) = 0$). Поэтому производную $D(E \circ \varphi)(\xi) \cdot \omega(\xi)$ с точностью до $o(\|\xi\|_1^2)$ можно вычислять так, как если бы все происходило в гильбертовом пространстве N_{C_1}). Чтобы получить (*), остается вспомнить, что $\lambda' \leq 0$ и что Φ^{-2} — самосопряженный положительный оператор, спектр которого отделен от нуля.

Докажем теперь, что

(***) если $e \in N_F \cup \Lambda^{x-e}$, то $\varphi_s e \in N_F \cup \Lambda^{x-e}$ для всех $s > 0$.

Если $e \in \Lambda^{x-e}$ или $e \in B$, то все ясно. Если $e \in N_F - (B \cup \Lambda^{x-e})$, то $e \in W \cap \varphi D_{2\delta\mu}$; согласно (*), $F(\varphi_s e)$ убывает, пока $\varphi_s e$ не выйдет (если выйдет) из $W \cap \varphi D_{2\delta\mu}$. Пока этого не произойдет, $F(\varphi_s e) \in N_F$. Если $\varphi_s e$ никогда не выйдет из $W \cap \varphi D_{2\delta\mu}$, то тоже все ясно. Пусть $s = s_1$ — первый момент, когда $\varphi_s e \notin W \cap \varphi D_{2\delta\mu}$. Еще раньше, скажем при $s = s_2 < s_1$, $\varphi_s e$ должна будет выйти из расслоения на ручки (т. е. из $N_F - N_E$), а поскольку $\varphi_s e$ все еще лежит в $W \cap \varphi D_{2\delta\mu}$ и, значит, все еще принадлежит N_F , то $\varphi_{s_2} e \in \Lambda^{x-e}$. Тогда $\varphi_s e \in \Lambda^{x-e}$ при всех $s > s_2$.

Далее, функция $\tau(e) = \min \{s \in \mathbb{R}; \varphi_s e \in N_F \cup \Lambda^{x-e}\}$ — то s , для которого $\varphi_s e \in W$ и $F(\varphi_s e) = x - e$, дифференцируема в своей области определения (которая является открытым множеством *). Для доказательства этого локального факта достаточно применить теорему о неявной функции к уравнению относительно s :

$$F(\varphi_s e) = x - e.$$

Заметим, что функция $(s, e) \mapsto F(\varphi_s e)$ в своей области определения (которая является открытым множеством) дифференцируема по (s, e) и $dF(\varphi_s e)/ds < 0$. Последнее следует из (*), если $\varphi_s e \in$

* Мы сейчас рассматриваем $\varphi_s e$ как для $s \geq 0$, так и для $s < 0$. Как известно (Ленг [1], Бурбаки [1]), если X — дифференцируемое векторное поле на банаховом многообразии, то для любой точки e этого многообразия существует максимальный интервал $]\alpha(e), \omega(e)[$ (конечный или бесконечный), на котором может быть определено решение $\varphi_s e$ дифференциального уравнения $d\varphi_s e/ds = X(\varphi_s e)$, проходящее при $s=0$ через точку e , причем любое другое решение с тем же начальным условием определено на некотором подынтервале $J \subset]\alpha(e), \omega(e)[$ и совпадает на J с $\varphi_s e$. Кроме того, множество $\{(s, e); \varphi_s e \text{ определено}\}$ открыто. В нашем случае ($X = -\text{grad } E$ на ΛM) $\omega(e) = \infty$ при всех e (1.4.11), но не утверждается, что $\alpha(e) = -\infty$. Однако если $\sup_{s \in]\alpha(e), \omega(e)[} E(\varphi_s e) = \lim_{s \rightarrow \alpha(e)} E(\varphi_s e) < \infty$, то $\alpha(e) = \infty$ (ср. с замечанием к 1.4.11).

$\in \varphi D_{2\delta} \mu \cap W$, и очевидно в противном случае, когда $F(\varphi_s e) = E(\varphi_s e)$.

Из того, что $\|\text{grad } E\|_1 \geq \alpha > 0$ на $\mathbb{L}Z \cap (\Lambda^{x+\varepsilon} - \Lambda^{x-\varepsilon})$, сразу следует, что за время $2\varepsilon/\alpha^2$ любая траектория $\varphi_s c$, $c \in \mathbb{L}Z \cap (\Lambda^{x+\varepsilon} - \Lambda^{x-\varepsilon})$, попадет в $\Lambda^{x-\varepsilon} \cup N_F$. Значит, τ определено и положительно на $\Lambda^{x+\varepsilon} - (\Lambda^{x-\varepsilon} \cup N_F)$. Построение эквивариантной деформации Φ_s , ретрагирующей $\Lambda^{x+\varepsilon}$ на $\Lambda^{x-\varepsilon} \cup N_F$, теперь очевидно:

$$\Phi_s e = \begin{cases} \varphi_{s\tau(e)} e, & \text{если } e \in \Lambda^{x+\varepsilon} - (\Lambda^{x-\varepsilon} \cup N_F), \\ e & \text{для остальных } e. \end{cases}$$

Непрерывность $\Phi_s e$ следует из того, что τ непрерывна и $\tau(e) = 0$, когда

$$e \in \overline{\Lambda^{x+\varepsilon} - (\Lambda^{x-\varepsilon} \cup N_F)} \cap (\Lambda^{x-\varepsilon} \cup N_F) = \{c; F(c) = x - \varepsilon\}.$$

Приступаем к построению эквивариантного диффеоморфизма $\Phi: \Lambda^{x+\varepsilon} \rightarrow \Lambda^{x-\varepsilon} \cup N_F$. Если $e \in \Lambda^{x+\varepsilon} - (\Lambda^{x-\varepsilon} \cup N_F)$, то имеется не только $\tau(e)$, для которого $\varphi_{\tau(e)} e \in \{F = x - \varepsilon\}$, но и такое $\tau_1(e) < 0$, для которого $E(\varphi_{\tau_1(e)} e) = x + \varepsilon$. (Ведь из сказанного ранее следует, что для любого e либо $\alpha(e) = -\infty$ и $\lim_{s \rightarrow -\infty} E(\varphi_s e) < x + 2\varepsilon$, либо $\lim_{s \rightarrow \alpha(e)} E(\varphi_s e) \geq x + 2\varepsilon$. Но если $\varphi_s e \in \Lambda^{x+2\varepsilon} - (\Lambda^{x-\varepsilon} \cup N_F)$, то $dE(\varphi_s e)/ds \leq -\alpha^2$ с некоторым $\alpha > 0$, так что в $\Lambda^{x+\varepsilon} - (\Lambda^{x-\varepsilon} \cup N_F)$ нет траекторий с $\lim_{s \rightarrow -\infty} E(\varphi_s e) < x + 2\varepsilon$.) При

этом $\sigma(e) := \tau(e) - \tau_1(e)$ постоянна вдоль траектории и дифференцируема в своей области определения (состоящей из тех e , траектории которых проходят через $\Lambda^{x+\varepsilon} \cup (\Lambda^{x-\varepsilon} \cup N_F)$), причем $0 < \sigma(e) < 2\varepsilon/\alpha^2$. Возьмем какую-нибудь неубывающую дифференцируемую функцию $f(t)$, определенную при всех $t \in \mathbb{R}$, для которой $f'(t) < 2/3$ при всех t , $f(t) = 0$ при $t \leq -2$ и $f(t) = 1$ при $t \geq 0$. Положим

$$\Phi(e) = \begin{cases} \varphi_{\sigma(e)f(\alpha^2\tau(e)/2\varepsilon)} e & \text{при } e \in \Lambda^{x+\varepsilon} - \varphi_{7\varepsilon/\alpha^2}(\Lambda^{x+\varepsilon}), \\ e & \text{при } e \in \varphi_{7\varepsilon/\alpha^2}(\Lambda^{x+\varepsilon}). \end{cases}$$

Дифференцируемость Φ следует из того, что уже при $e \in \varphi_{6\varepsilon/\alpha^2}(\Lambda^{x+\varepsilon})$

$$\tau(e) \leq -\frac{4\varepsilon}{\alpha^2}, \quad f\left(\frac{\alpha^2\tau(e)}{2\varepsilon}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_{\sigma(e)f(\alpha^2\tau(e)/2\varepsilon)} e = e.$$

Отсюда же видно, что если $\varphi_s e$ при каких-нибудь s попадает в $\Lambda^{x+\varepsilon} - (\Lambda^{x-\varepsilon} \cup N_F)$, то

$$\Phi e = \varphi_{\sigma(e)f(\alpha^2\tau(e)/2\varepsilon)} e.$$

Биективность Φ следует из того, что под его действием те точки e ,

траектории которых не попадают в $\Lambda^{\kappa+\varepsilon} - (\Lambda^{\kappa-\varepsilon} \cup N_F)$, переходят сами в себя, а все остальные точки $\Lambda^{\kappa+\varepsilon}$ лежат на положительных полутраекториях вида $\varphi_s e$, где $E(e) = \kappa + \varepsilon$; такая полутраектория биективно переходит в положительную полутраекторию $\varphi_s \varphi_{\tau(e)} e$. Действительно,

$$\Phi \varphi_s e = \varphi \sigma(\varphi_s e) f(\alpha^2 \tau(\varphi_s e)/2\varepsilon) \varphi_s e = \varphi \sigma(e) f(\alpha^2 (\tau(e) - s)/2\varepsilon) + s e,$$

а

$$\frac{d}{ds} \left[\sigma(e) f\left(\frac{\alpha^2}{2\varepsilon} (\tau(e) - s)\right) + s \right] = -\sigma(e) \frac{\alpha^2}{2\varepsilon} f' + 1 > 1 - f' > \frac{1}{3},$$

и при $s=0$ выражение в квадратных скобках равно $\sigma(e) = \tau(e)$.

Наконец, проверим обратимость $T\Phi(e)$ в произвольной точке e_0 . Пусть $s_0 := \sigma(e_0) f(\alpha^2 \tau(e_0)/2\varepsilon)$. В терминах карт $(\exp_{c_0}^{-1}, \mathcal{V}^0(c_0))$ и $(\exp_{\varphi_{s_0} c_0}^{-1}, \mathcal{V}^0(\varphi_{s_0} c_0))$ и при достаточной близости (s, e) к (s_0, e_0) можно представить $\varphi_s e$ некоторым отображением

$$|s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon| \times \exp_{c_0}^{-1} \mathcal{V}^0(c_0) \rightarrow \exp_{\varphi_{s_0} c_0}^{-1} \mathcal{V}^0(\varphi_{s_0} c_0), \quad (s, \xi) \mapsto \varphi(s, \xi)$$

(уменьшив при необходимости $\mathcal{V}^0(c_0)$, мы вправе считать, что $\varphi|_{s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon} \mathcal{V}^0(c_0) \subset \mathcal{V}^0(\varphi_{s_0} c_0)$, так что $\varphi(s, \xi)$ действительно определено при всех $\xi \in \exp_{c_0}^{-1} \mathcal{V}^0(c_0)$). Введем обозначение

$$F(\xi) := \sigma(\exp_{c_0} \xi) f\left(\frac{\alpha^2}{2\varepsilon} \tau(\exp_{c_0} \xi)\right).$$

Тогда Φe при e , достаточно близком к e_0 , представляется отображением $\Psi: \xi \mapsto \varphi(F(\xi), \xi)$, производная которого равна

$$D\Psi(\xi) = D_1\varphi(F(\xi), \xi) \cdot DF(\xi) + D_2\varphi(F(\xi), \xi),$$

$$\text{т. е. } D\Psi(\xi) \cdot \eta = D_1\varphi(F(\xi), \xi) \cdot (DF(\xi) \cdot \eta) + D_2\varphi(F(\xi), \xi) \cdot \eta.$$

Здесь $DF(\xi) \cdot \eta$ есть просто число. Если вектор $-\text{grad } E(e)$ в карте $(\exp_{c_0}^{-1}, \mathcal{V}^0(c_0))$ локально представляется векторным полем $X(\xi)$, то

$$D_1\varphi(F(\xi), \xi) = D_2\varphi(F(\xi), \xi) \cdot X(\xi)$$

(что является перефразировкой известного факта, что вдоль каждой траектории потока задающее этот поток векторное поле является одним из решений уравнения в вариациях). Итак, мы должны убедиться в обратимости линейного оператора

$$\eta \mapsto D_2\varphi(F(\xi), \xi) \cdot (\eta + (DF(\xi) \cdot \eta) X(\xi))$$

или, поскольку $D_2\varphi$ обратим (ведь φ_s при фиксированном s диффеоморфно отображает свою область определения), в обратимости оператора

$$\eta \mapsto A\eta := \eta + (DF(\xi) \cdot \eta) X(\xi).$$

(Зависимость A от ξ не отражена в обозначениях. Собственно, нам надо только $\xi=0$, что соответствует e_0 , но доказательство

от этого не зависит.) Имеем

$$DF(\xi) \cdot A\eta = DF(\xi) \cdot \eta + (DF(\xi) \cdot \eta)(DF(\xi) \cdot X(\xi)).$$

$DF(\xi) \cdot X(\xi)$ является локальным представлением для $\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left[\sigma(\varphi_s e) \times \times f \left(\frac{\alpha^2}{2\varepsilon} \tau(\varphi_s e) \right) \right]$, что, как мы видели, $> -2/3$. Поэтому

$$DF(\xi) \cdot \eta = \frac{DF(\xi) \cdot A\eta}{1 + DF(\xi) \cdot X(\xi)},$$

и если $\zeta = A\eta$, то

$$\eta = \zeta - (DF(\xi) \cdot \eta) X(\xi) = \zeta - \frac{DF(\xi) \cdot \zeta}{1 + DF(\xi) \cdot X(\xi)} X(\xi).$$

Пока что мы убедились, что оператор

$$B\zeta := \zeta - \frac{DF(\xi) \cdot \zeta}{1 + DF(\xi) \cdot X(\xi)} X(\xi)$$

является корректно определенным ограниченным линейным оператором, который переводит $A\eta$ в η , т. е. является левым обратным для A . Но непосредственное вычисление показывает, что он является и правым обратным, так что A действительно обратим. $\blacktriangle \square$

Замечание. Вообще говоря, может случиться, что критическое множество, лежащее на E -уровне κ , разлагается на несколько $O(2)$ -инвариантных невырожденных критических подмногообразий, скажем $B_1, \dots, B_k$. Тогда эти B_i не пересекаются (и находятся друг от друга на некотором положительном расстоянии). Используя приведенную в теореме конструкцию, можно показать, что $\Lambda^{\kappa+\varepsilon}$ эквивариантно диффеоморфно многообразию, являющемуся его подмножеством и получающемуся из $\Lambda^{\kappa-\varepsilon}$ приклеиванием расслоений на ручки, каждое из которых соответствует своему B_i . Это многообразие является эквивариантным деформационным ретрактом $\Lambda^{\kappa+\varepsilon}$.

2.4.11. Следствие. Пусть выполнены предположения теоремы 2.4.10. Тогда $H_*(\Lambda^{\kappa}, \Lambda^{\kappa-}) = H_{*-k}(B)$, где k — индекс B . При этом в случае, когда отрицательное расслоение μ^- над B неориентируемо, гомологии берутся с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. В частности, если B есть $O(2)$ -орбита невырожденной замкнутой геодезической индекса k , то $H_i(\Lambda^{\kappa}, \Lambda^{\kappa-}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ при $i = k, k+1$ и 0 в противном случае. Для коэффициентов в $\mathbb{Z}$ верно то же самое (с заменой $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$), если μ^- ориентируемо, в противном случае $H_k(\Lambda^{\kappa}, \Lambda^{\kappa-}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ и $H_i(\Lambda^{\kappa}, \Lambda^{\kappa-}) = 0$ для остальных i .

Доказательство. Сначала эквивариантно продеформируем $\Lambda^{\kappa+\varepsilon}$ в $\Lambda^{\kappa-\varepsilon} \cup_h (D\mu^- \oplus D\mu^+)$ (см. 2.4.10). $\blacktriangle$ Затем воспользуемся тем фак-

том, что если 0^+ — нулевое сечение расслоения $\bar{D}\mu^+$, то

$$(*) \quad (\partial\bar{D}\mu^- \oplus \bar{D}\mu^+) \cup (\bar{D}\mu^- \oplus 0^+)$$

— сильный деформационный ретракт $\bar{D}\mu^- \oplus \bar{D}\mu^+$. (Соответствующую деформацию можно построить, считая, что при ней каждая точка ξ с $\|P\xi\|_1 \neq 0$ движется по прямой в слое $N_{\mu\xi}$, соединяющей $2P\xi/\|P\xi\|_1$ с ξ , в направлении от ξ к множеству $(*)$ и со скоростью, пропорциональной длине отрезка этой прямой от ξ до пересечения со $(*)$. Это построение не имеет смысла, если $P\xi = 0$; точки ξ с $P\xi = 0$ лежат в $\bar{D}\mu^- \oplus 0^+$ и не должны двигаться при деформации. Чтобы убедиться в непрерывности, можно либо задать это построение явными формулами, либо доказать геометрически, что при деформации смещение точки ξ не превосходит $(\sqrt{5}/2)\|\xi\|_1$.) Это позволяет эквивариантно продеформировать $\Lambda^{x-e} \cup_h (\bar{D}\mu^- \oplus \bar{D}\mu^+)$ в $\Lambda^{x-e} \cup_h (\bar{D}\mu^- \oplus 0^+)$ (напомним, что h переводит в Λ^{x-e} точки $\partial\bar{D}\mu^- \oplus \bar{D}\mu^+$, так что при деформации приклеенных к Λ^{x-e} ручек те точки, по которым произведено приклеивание, остаются неподвижными). Следовательно,

$$H_*(\Lambda^{x+e}, \Lambda^{x-e}) = H_*(\Lambda^{x-e} \cup_h \bar{D}\mu^-, \Lambda^{x-e}) = H_*(\bar{D}\mu^- \cup \mathcal{U}, \partial\bar{D}\mu^- \cup \mathcal{U}),$$

где $\mathcal{U}$ — произвольная окрестность $\partial\bar{D}\mu^-$ (точнее, $h(\partial\bar{D}\mu^-)$) в Λ^{x-e} . Эту окрестность можно выбрать такой, чтобы она стягивалась на $\partial\bar{D}\mu^-$ (аналог трубчатой окрестности для подмногообразия — в данном случае даже компактного подмногообразия — края $\partial\Lambda^{x-e}$ многообразия с краем Λ^{x-e}). ▲ Поэтому

$$H_*(\Lambda^{x+e}, \Lambda^{x-e}) = H_*(\bar{D}\mu^-, \partial\bar{D}\mu^-).$$

Справа стоят гомологии пространства Тома отрицательного расслоения μ^-B . Изоморфизм Тома дает:

$$H_*(\Lambda^{x+e}, \Lambda^{x-e}) = H_{*-k}(B).$$

Наконец, так как $H_*(\Lambda^{x+e}, \Lambda^x) = 0$ и $H_*(\Lambda^{x-}, \Lambda^{x-e}) = 0$, то из точной гомологической последовательности троек $(\Lambda^{x+e}, \Lambda^x, \Lambda^{x-})$ и $(\Lambda^x, \Lambda^{x-}, \Lambda^{x-e})$ получаем утверждение следствия (при нашем соглашении о коэффициентах).

▲ Особо надо рассмотреть тот случай, когда $B = O(2)$. с, μ^- неориентируемо и группа коэффициентов есть $\mathbb{Z}$. В этом случае неориентируемы оба расслоения $\mu^-|S.c$ и $\mu^-|S.\theta.c$ (θ — то же, что в § 2.2), ибо $T\theta$ осуществляет изоморфизм между ними. Таким образом, все сводится к утверждению о гомологиях пространства Тома неориентируемого расслоения над S , которое легко доказывается с помощью подходящего клеточного разбиения, имеющего 3 клетки: 0-мерную, k -мерную и $(k+1)$ -мерную. ▲ □

Следствием 2.4.10 и 2.4.11 являются обобщенные неравенства Морса.

2.4.12. Теорема. Пусть числа $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_0 < \kappa_1$, не являются критическими значениями функции E . Предположим, что для всех лежащих в интервале $[\kappa_0, \kappa_1]$ критических значений κ критическое множество $E^{-1}(\kappa) \cap \text{Cr} \Lambda$ разлагается в невырожденные $O(2)$ -инвариантные критические подмногообразия B с индексом $k(B)$. Обозначим через b_l l -е число Бетти для $\mathbb{Z}_2$ -коэффициентов.

Утверждение. При всех $m \geq 0$

$$\sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} b_l(\Lambda^{\kappa_1}, \Lambda^{\kappa_0}) \leq \sum_B \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} b_{l-k(B)}(B)$$

и, следовательно,

$$b_m(\Lambda^{\kappa_1}, \Lambda^{\kappa_0}) \leq \sum_B b_{m-k(B)}(B).$$

Здесь суммы в правых частях берутся по всем невырожденным критическим подмногообразиям, на которых функция E принимает значения, лежащие в интервале $[\kappa_0, \kappa_1]$. При достаточно больших m неравенства превращаются в равенства.

Доказательство. Если интервал $[\kappa_0, \kappa_1]$ содержит только одно критическое значение, скажем κ , то теорема немедленно следует из 2.4.11, так как в этом случае $H_*(\Lambda^{\kappa_1}, \Lambda^{\kappa_0}) = H_*(\Lambda^{\kappa}, \Lambda^{\kappa-})$.

Пусть теперь на интервале $[\kappa_0, \kappa_1]$ лежат ровно два критических значения, скажем κ и κ' , $\kappa < \kappa'$. Докажем теорему в этом предположении. Общий случай можно доказать с помощью индукции по числу критических значений.

Из точной гомологической последовательности тройки $(\Lambda^{\kappa_1}, \Lambda^{\kappa_{1/2}}, \Lambda^{\kappa_0})$, где $\kappa_0 < \kappa < \kappa_{1/2} < \kappa' < \kappa_1$, и из равенств $H_*(\Lambda^{\kappa_1}, \Lambda^{\kappa_{1/2}}) = H_*(\Lambda^{\kappa'}, \Lambda^{\kappa'-})$ и $H_*(\Lambda^{\kappa_{1/2}}, \Lambda^{\kappa_0}) = H_*(\Lambda^{\kappa}, \Lambda^{\kappa-})$ получаем ⁽³³⁾

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} b_l(\Lambda^{\kappa_1}, \Lambda^{\kappa_0}) &\leq \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} b_l(\Lambda^{\kappa'}, \Lambda^{\kappa'-}) + \\ &+ \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} b_l(\Lambda^{\kappa}, \Lambda^{\kappa-}), \end{aligned}$$

причем это неравенство становится равенством, если $m \geq \max \{l; \text{ в этой формуле хоть одно } b_l \neq 0 \}$.

Теперь для окончания доказательства теоремы остается применить 2.4.11. $\square$

2.5. Комплекс Морса

В этом параграфе мы приведем важное уточнение обычной теории Морса, развитой в § 2.4 для $\langle \Lambda M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1, E \rangle$. Оно относится к тому случаю, когда выполняется условие, что все замкнутые геодезические на M невырождены, т. е. критические орбиты $S.c. E(c) > 0$, являются невырожденными критическими

подмногообразиями. Кажется весьма правдоподобным, однако, что требуется лишь предположение, что критическое множество в ΛM разлагается на невырожденные критические подмногообразия. Это заведомо так, если M — симметрическое пространство; мы покажем это в том частном случае, когда M — сфера со стандартной метрикой.

Основными новыми элементами теории являются неустойчивые и локальные устойчивые многообразия $(^{34})$ критической S -орбиты. При каждом $\kappa > 0$ замыкание неустойчивых многообразий в $\Lambda^* M$ определяет комплекс Морса $\mathcal{M}^* M$ $(^{35})$. Он является каноническим конечномерным представлением многообразия $\Lambda^* M$ в том смысле, что $\Lambda^* M$ допускает ретракцию на $\mathcal{M}^* M$. Комплекс Морса инвариантен относительно действия $\tilde{\chi}$ группы S и действия θ группы $\mathbb{Z}_2$, а также относительно действия, индуцированного группой изометрий многообразия M . Наиболее важно то, что векторное поле $\text{grad } E$ касается $\mathcal{M}^* M$ и поле $\text{grad } E|_{\mathcal{M}^* M}$ полно (т. е. траектория $\varphi_s c$ при $c \in \mathcal{M}^* M$ определена для всех s).

Мы закончим этот параграф детальным изучением комплекса Морса для ΛS^n .

Пусть c — невырожденная замкнутая геодезическая кратности m . Тогда

$$z \mapsto z^{1/m} \cdot c, \quad \text{где } z \in S, \quad \text{а } z^{1/m} \cdot c \in \Lambda M,$$

является вложением окружности как невырожденного критического многообразия $S \cdot c$ в смысле § 2.4. Пусть

$$\mu = \mu(S \cdot c): N = N(S \cdot c) \rightarrow S$$

— нормальное расслоение этого подмногообразия. Оно разлагается на положительное и отрицательное подрасслоения, $\mu = \mu^+ \oplus \mu^-$,

$$\mu^\pm = \mu^\pm(S \cdot c): N^\pm = N^\pm(S \cdot c) \rightarrow S.$$

Напомним, что в § 2.4 было показано, что действие $\tilde{\chi}$ группы S на ΛM индуцирует действия S на μ , $\mu^\pm$, которые согласованы с разложением $^{*)}$. Кроме того, отображение $\theta: \Lambda M \rightarrow \Lambda M$ определяет каноническое отождествление $\mu(S \cdot c)$ с $\mu(S \cdot \theta c)$.

Пусть $E|_{S \cdot c} = \kappa$ и $\text{ind } c = k$.

2.5.1. Теорема. Пусть c — невырожденная замкнутая геодезическая. Тогда существуют вложения $^{**})$

$$W_u = W_u(S \cdot c): (N^-(S \cdot c), S) \rightarrow (\Lambda^* M, S \cdot c),$$

$$W_s = W_s(S \cdot c): (N^+(S \cdot c), S) \rightarrow (\Lambda M - \Lambda^* M, S \cdot c),$$

$^{*)}$ При наших соглашениях при $m > 1$ действие S на базе этих расслоений отличается от обычного действия S на себе: действие элемента $z \in S$ на S , рассматриваемой как база, — это прежнее действие z^m на S .

$^{**})$ Здесь и далее S при необходимости рассматривается как нулевое сечение соответствующего расслоения.

обладающие следующими свойствами:

- (i) W_u и W_s коммутируют с действиями S и Z_2^*);
 (ii) $TW_u|N_z^-: N_z^- \rightarrow T_{z^{1/m}.c} \Lambda M$ и $TW_s|N_z^+: N_z^+ \rightarrow T_{z^{1/m}.c} \Lambda M$
 (в этой записи векторные пространства $N_z^\pm$ отождествляются со своими касательными пространствами в нуле) суть линейные изоморфизмы, совпадающие с каноническими отождествлениями;
 (iii) положим $W_u|N_z^- = W_{uu}(z.c)$ и $W_s|N_z^+ = W_{ss}(z.c)$. Элементы c^* , принадлежащие образу $W_{uu}(z^{1/m}.c)$, характеризуются тем, что $\lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi_s c^* = z^{1/m}.c$; элементы c^* , принадлежащие образу $W_{ss}(z^{1/m}.c)$, характеризуются тем, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_s c^* = z^{1/m}.c$.

Мы называем $W_u(S.c)$ и $W_{uu}(c)$ соответственно *неустойчивым* и *сильно неустойчивым* многообразиями орбиты $S.c$ и точки c^{**}). Аналогично, $W_s(S.c)$ и $W_{ss}(c)$ называются соответственно *устойчивым* и *сильно устойчивым* многообразиями $S.c$ и c^{***}) (36).

Замечание. $z.W_{uu}(c) = W_{uu}(z^{1/m}.c)$, $z.W_{ss}(c) = W_{ss}(z^{1/m}.c)$, $\theta W_{uu}(c) = W_{uu}(\theta c)$, $\theta W_{ss}(c) = W_{ss}(\theta c)$.

Доказательство. (а) Так же, как в § 2.4, мы с помощью экспоненциального отображения отождествляем тотальное пространство $D = D(S.c)$ расслоения на достаточно малые шары, ассоциированного с $\mu(S.c)$, с трубчатой окрестностью орбиты $(S.c)$. В 1.4.13 мы определили эквивариантное векторное поле u на ΛM , которое $\neq 0$ вне $\Lambda^0 M$ (ибо $\omega \neq 0$ вне $\Lambda^0 M$) и ортогонально полю $\text{grad } E$. Кроме того, $u = -\partial c$, если c — критическая точка функции E .

Следовательно, в базисной точке z поле u касается $S.c$ и ортогонально слою D_z расслоения D над точкой z . Поэтому если

*) Короче говоря, они коммутируют с действием $O(2)$. Утверждение о действии элементов $O(2) = SO(2)$ подразумевает, что мы одновременно рассматриваем $S.c$ и $\theta.S.c$; впрочем, если мы уже построили $W_u(S.c)$, коммутирующее с действием S и обладающее свойствами (ii), (iii), то $W_u(\theta.S.c)$ можно определить как $\theta.W_u(S.c) \cdot (T\theta|N^-(\theta.S.c))$. Аналогично для W_s .

**) Хотя эта «точка» (подразумевается точка пространства ΛM) и является геодезической линией, нежелательно говорить об «устойчивом многообразии геодезической c », ибо применительно к геодезическим «гиперболического» типа за этим словосочетанием уже прочно установился совершенно другой смысл (см. 3.3.5).

***) Чаше эти названия применяют к образам этих отображений. Клингенберг тоже следует этому обычному словопотреблению, когда говорит, например, о замыканиях неустойчивых многообразий. По большей части это не создает опасности путаницы, но в доказательстве теоремы 2.5.1 все-таки лучше различать отображения и их образы, поэтому в этом доказательстве в обозначениях для образов будет использоваться V вместо W . В отличие от W , V однозначно характеризуются перечисленными в теореме их свойствами (фактически одним только (iii)).

выбрать диаметр расслоения D достаточно малым, то u будет трансверсально слоям расслоения D всюду.

Будем называть горизонтальным пространством $T_{\xi}^0 N$ в точке $\xi \in D_z(S.c)$ одномерное подпространство касательного пространства $T_{\xi} D$, порожденное $u(\xi)$. Мы получаем разложение

$$T_{\xi} D = T_{\xi}^- N \oplus T_{\xi}^0 N \oplus T_{\xi}^+ N,$$

где $T_{\xi}^{\pm} N$ — подпространства вертикального пространства (= касательного пространства к слою в точке ξ), которые параллельны соответственно $N_z^{\pm}$ (здесь $z = \mu(\xi)$ и подразумевается отождествление $T_{\xi} N_z$ с N_z).

Вместе с тем мы воспользуемся векторным полем u для введения в D локальных координат возле точки $z_0 \in S \subset D$ (z_0 — единица группы S), отождествляя окрестность точки z_0 в D с окрестностью начала в $N_{z_0}^- \oplus \mathbb{R} \oplus N_{z_0}^+$. (Точка (ξ_-, ξ_0, ξ_+) отождествляется с первым пересечением исходящей из $\xi_- + \xi_+$ траектории поля u с $N_z^{1/m}.c$, $z = e^{2\pi i \xi_0}$.)

Так как $\langle \text{grad } E, u \rangle_1 = 0$, то $\text{grad } E(\xi)$ в точке $\xi = (\xi_-, \xi_0, \xi_+) \in N_{z_0}^- \oplus \mathbb{R} \oplus N_{z_0}^+$ с достаточно малыми $\|\xi_-\|_1$, $\|\xi_+\|_1$ имеет вид

$$\text{grad } E = (A^- \cdot \xi_- + C^-(\xi), C^0(\xi), A^+ \cdot \xi_+ + C^+(\xi)) \in T_{\xi}^- N \oplus T_{\xi}^0 N \oplus T_{\xi}^+ N.$$

Здесь $A^{\mp} = A|T_{z_0}^{\mp 1/m}.c\Lambda$, где $A := A_{z.c}: T_{z.c}\Lambda \rightarrow T_{z.c}\Lambda$ — самосопряженный оператор, соответствующий $D^2 E(z.c)$, см. 2.4.2. Таким образом, A^- — самосопряженный оператор в k -мерном пространстве, собственные значения которого строго отрицательны, а A^+ — положительно определенный оператор в настоящем гильбертовом пространстве.

▲ Заметим, что существует такое $a > 0$, что

$$\|e^{tA^-}\|_1 < e^{-at} \quad \text{и} \quad \|e^{-tA^+}\|_1 \leq e^{-at} \quad (t \geq 0)$$

(здесь используется самосопряженность A^- и A^+). Выберем b , удовлетворяющее условиям $0 < b < a < 2b$. Положим $\varepsilon := (a - b)/6$. Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы при $\|\xi_1\| < \delta$, $\|\xi'_1\| < \delta$ было

$$(i) \quad \|C^*(\xi)\|_1 < \varepsilon (\|\xi_-\|_1 + \|\xi_+\|_1), \quad \|C^*(\xi) - C^*(\xi')\|_1 \leq \varepsilon \|\xi - \xi'\|_1,$$

где ξ обозначает (ξ_-, ξ_0, ξ_+) , а индекс $*$ принимает значения из множества $\{-, 0, +\}$.

(b) В этом и следующем пунктах мы докажем, что каждая траектория $\varphi_s(c^*)$ либо со временем выходит из некоторой малой r -окрестности кривой $S.c$, либо стремится к некоторой точке $z.c$ этой кривой, причем будет дана оценка скорости этого стремления.

Пусть $\varphi_s(c^*)$ принадлежит достаточно малой r -окрестности $S.c$ при всех $s \geq 0$. Убедимся сначала, что тогда при всех $s \geq 0$

$$(ii) \quad \|P\varphi_s(c^*)\|_1 \geq 2\|(1 - P)\varphi_s(c^*)\|_1$$

(в связи с такой записью напомним, что некоторая трубчатая окрестность $S.c$ у нас отождествлена с D).

Предположим, что $\|P\varphi_{s_0}(c^*)\|_1 < 2\|(1-P)\varphi_{s_0}(c^*)\|_1$. Пусть $\varphi_{s_0}(c^*) \in N_{z.c}$. Вместо того чтобы вести рассмотрение в окрестности точки $z.c$, удобнее, пользуясь эквивариантностью, перейти к траектории $z^{-1}.\varphi_s(c^*) = \varphi_s(z^{-1}.c^*)$, $s \geq s_0$. Для нее «начальная точка» $\varphi_{s_0}(z^{-1}.c^*) \in N_{z_0}$, и можно пользоваться введенными выше координатами в окрестности точки z_0 . Пусть в этих координатах наша траектория, пока она лежит в δ -окрестности z_0 , имеет вид

$$\varphi_s(z^{-1}.c^*) = \xi(s) = (\xi_-(s), \xi_0(s), \xi_+(s)).$$

При $s = s_0$ выполняется неравенство

$$(iii) \quad \|\xi_-(s)\|_1 > \frac{1}{2}\|\xi_+(s)\|_1, \|\xi_0(s)\|_1$$

(ведь на N_{z_0} координаты ξ_- , ξ_+ совпадают с $(1-P)\xi$ и $P\xi$, а $\xi_0 = 0$). Тогда по непрерывности (iii) имеет место на некотором интервале вида $[s_0, s_1]$. Но пока оно выполняется,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\|\xi_-(s)\|^2 &= 2\langle \xi_-(s), -A\xi_-(s) - C^-(\xi(s)) \rangle_1 \geq \\ &\geq 2a\|\xi_-(s)\|^2 - 2e\|\xi_-(s)\|_1\|\xi(s)\|_1 > \\ &> (2a - 8e)\|\xi_-(s)\|^2 > \frac{4}{3}a\|\xi_-(s)\|^2 \end{aligned}$$

(ибо $\|\xi(s)\|_1 \leq \|\xi_-(s)\|_1 + \|\xi_0(s)\|_1 + \|\xi_+(s)\|_1 < 4\|\xi_-(s)\|_1$ и $2a - 8e \geq 2a - \frac{4}{3}(a - b) = \frac{2}{3}a + \frac{4}{3}b > \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a$);

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\|\xi_+(s)\|^2 &= 2\langle \xi_+(s), -A^+\xi_+(s) - C^+(\xi(s)) \rangle_1 \leq \\ &\leq -2a\|\xi_+(s)\|^2 + 2e\|\xi_+(s)\|_1\|\xi(s)\|_1 \leq \\ &\leq (-2a + 2e)\|\xi_+(s)\|^2 + 8e\|\xi_-(s)\|^2 < \\ &< 8e\|\xi_-(s)\|^2 < \frac{4}{3}a\|\xi_-(s)\|^2. \end{aligned}$$

Стало быть, $\|\xi_-(s)\|_1$ на $[s_0, s_1]$ растет быстрее, чем $\|\xi_0(s)\|_1$, а $\|\xi_-(s)\|^2$ — быстрее, чем $\|\xi_+(s)\|^2$ (и тем более чем $\|\frac{1}{2}\xi_+(s)\|^2$), а неравенство (iii) выполняется и при $s = s_1$ тоже, если только при $s = s_1$ траектория не выходит из δ -окрестности точки c . Если она не выходит, то получается, что максимальный интервал, на котором выполняется (iii), должен быть одновременно и открытым справа, и замкнутым, т. е. он совпадает с полуосью $s \geq s_0$. Но тогда из тех же оценок видно, что со временем $\varphi_s(z^{-1}.c^*)$ все-таки выйдет из δ -окрестности c .

Итак, $\|\xi(s_1)\|_1 = \delta$. По непрерывности при $s = s_1$ выполняется (iii), по крайней мере с заменой строгого неравенства на нестрогое; поэтому $\|\xi_-(s_1)\|_1 \geq \frac{2}{5}\delta$. При достаточно малом r отсюда следует, что $\varphi_s(z^{-1}.c^*)$ выходит из r -окрестности $S.c$, что противоречит сделанному предположению.

(с) Мы видим, что (ii) выполняется при всех $s \geq 0$. Перейдя, если потребуется, к некоторой $\varphi_s(z^{-1} \cdot c^*)$, можем считать, что $c^* \in N_{z_0}$. Докажем, что $\varphi_s(c^*)$ не покидает δ -окрестности z_0 при $s \geq 0$ и стремится при $s \rightarrow \infty$ к некоторой точке кривой $S.c$.

Во всяком случае, некоторое время $\varphi_s(c^*)$ лежит в этой окрестности и потому представляется в виде $(\xi_-(s), \xi_0(s), \xi_+(s))$, причем

$$(iv) \quad \|\xi_+(s)\|_1 > \|\xi_-(s)\|_1$$

(мы вправе считать, что если $\|P\xi\|_1 \geq 2\|(1-P)\xi\|_1$, то $\|\xi_+\|_1 > \|\xi_-\|_1$). Используя (iv) и (i), находим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \|\xi_+(s)\|_1^2 &= 2 \langle \xi_+(s), -A^+ \xi_+(s) - C^+(\xi(s)) \rangle_1 \leq \\ &\leq -2a \|\xi_+(s)\|_1^2 + 2\varepsilon \|\xi_+(s)\|_1 (\|\xi_-(s)\|_1 + \|\xi_+(s)\|_1) \leq \\ &\leq (-2a + 4\varepsilon) \|\xi_+(s)\|_1^2 \leq -2b \|\xi_+(s)\|_1^2. \end{aligned}$$

Значит,

$$(v) \quad \|\xi_+(s)\|_1 \leq \|\xi_+(0)\|_1 e^{-bs}.$$

Далее,

$$\left\| \frac{d}{ds} \xi_0(s) \right\|_1 = \|C^0(\xi(s))\|_1 \leq \varepsilon (\|\xi_-(s)\|_1 + \|\xi_+(s)\|_1) \leq 2\varepsilon \|\xi_+(s)\|_1,$$

а поскольку $\xi_0(0) = 0$, то

$$\begin{aligned} (vi) \quad \|\xi_0(s)\|_1 &\leq \int_0^s 2\varepsilon \|\xi_+(0)\|_1 e^{-b\sigma} d\sigma \leq \\ &\leq (2\varepsilon/b) \|\xi_+(0)\|_1 < 1/3 \|\xi_+(0)\|_1 \end{aligned}$$

(ведь $\varepsilon \leq (a-b)/6 < b/6$). Если r достаточно мало (скажем $r < \delta/10$), то из (iv) – (vi) следует, что $\varphi_s(c^*)$, во-первых, не выходит из δ -окрестности z_0 и, во-вторых, стремится к некоторой точке $z.c$ (т. е. $\xi_+(s)$ и $\xi_-(s) \rightarrow 0$ и существует $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_0(s) = \xi_0(\infty)$).

Стремление происходит с экспоненциальной скоростью и показатель экспоненты не меньше, чем b : для ξ_+ и ξ_- это ясно, а

$$\begin{aligned} (vii) \quad \|\xi_0(s) - \xi_0(\infty)\|_1 &\leq \int_1^\infty 2\varepsilon \|\xi_+(0)\|_1 e^{-b\sigma} d\sigma \leq \\ &\leq (2\varepsilon/b) \|\xi_+(0)\|_1 e^{-bs} < \|\xi_+(0)\|_1 e^{-bs}. \end{aligned}$$

(d) В (b) мы фактически не использовали того, что $\varphi_s c^*$ не выходит из r -окрестности $S.c$; именно, в (b) и (с) доказано следующее утверждение, несколько более сильное, чем требовалось.

Пусть $c^* \in N_{z.c} \cap (r\text{-окрестность } S.c)$ и $[0, s_1]$ — максимальный интервал полуоси $s \geq 0$, на котором $\varphi_s c^*$ принадлежит δ -окрестности $z.c$. Если при всех $s \in [0, s_1]$ выполняется (ii), то $s_1 = \infty$ и существует $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_s c^* \in S.c$, причем стремление к пределу происходит с экспоненциальной скоростью (см. (v), (iv), (vii)).

Если заменить (ii) условием

$$(viii) \quad \|P\varphi_s(c^*)\|_1 \geq l \|(1-P)\varphi_s(c^*)\|_1$$

с каким-нибудь фиксированным $l > 0$, то предыдущее утверждение останется в силе, только при этом может понадобиться уменьшить δ (с тем чтобы достичь надлежащей малости ε) и r . С другой стороны, поскольку *)

$$E(\xi) = \kappa + 1/2 \langle A^+ \xi_+, \xi_+ \rangle_1 + 1/2 \langle A^- \xi_-, \xi_- \rangle_1 + o(\|\xi\|_1^2),$$

то при достаточно малом δ из того, что $\lim E(\varphi_s c^*) \geq \kappa$, следует, что для всех тех s , при которых $\varphi_s(c^*) \in (\delta\text{-окрестность } S.c)$, выполняется (viii) с некоторым $l > 0$. Сопоставляя сказанное, заключаем, что если c^* достаточно близко к $S.c$, то траектория $\varphi_s c^*$ со временем либо входит в Λ^κ , либо стремится к некоторой точке $z.c \in S.c$, причем в последнем случае

$$(ix) \quad d_\Lambda(\varphi_s c^*, z.c) < 5e^{-sb} P c^*,$$

если только $c^* \in D$. $\blacktriangle$

(е) Теперь рассмотрим при фиксированных $\xi_+ \in N_{z_0}^-$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$ (с достаточно малым $\|\xi_+\|_1 + |\xi_0|$; требуемая степень малости будет уточнена далее) следующее интегральное уравнение (в котором $s \geq 0$):

$$(x) \quad u(s; \xi_+, \xi_0) = (u_-(s; \xi_+, \xi_0), u_0(s; \xi_+, \xi_0), u_+(s; \xi_+, \xi_0)) = \\ = \left(\int_s^\infty e^{(t-s)A^-} \cdot C^-(u(t; \xi_+, \xi_0)) dt, \xi_0 + \int_s^\infty C^0(u(t; \xi_+, \xi_0)) dt, \right. \\ \left. e^{-sA^+} \cdot \xi_+ + \int_s^0 e^{-(s-t)A^+} \cdot C^+(u(t; \xi_+, \xi_0)) dt \right).$$

Предположим на минуту, что у нас (уже) есть решение уравнения (x) с экспоненциально убывающими u_+ , u_- . Тогда

$$du(s; \xi_+, \xi_0)/ds = -\text{grad } E(u(s; \xi_+, \xi_0)),$$

$$(xi) \quad u(0; \xi_+, \xi_0) = \left(-\int_0^\infty e^{-tA^-} \cdot C^-(u(t; \xi_+, \xi_0)) dt, \right. \\ \left. \xi_0 + \int_0^\infty C^0(u(t; \xi_+, \xi_0)) dt, \xi_+ \right)$$

и $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s; \xi_+, \xi_0) = (0, \xi_0, 0)$, причем стремление происходит с экспоненциальной скоростью. Иными словами, $u(s; \xi_+, \xi_-)$ описывает в терминах используемых координат положительную полутраекторию поля $-\text{grad } E$ в ΛM , которая при $s \rightarrow \infty$ стре-

*) Здесь $\xi_+ = P\xi$, $\xi_- = (1-P)\xi$ (a не координаты, введенные возле z_0).

мится к $e^{2\pi i \xi_0/m}$. с. Обратно, любая такая полутраектория, целиком лежащая в малой окрестности z_0 , описывается некоторым решением $u(s; \xi_+, \xi_0)$ с экспоненциально убывающими $u_{\pm}$.

Чтобы доказать существование решения уравнения (х), мы обобщим доказательство существования устойчивых многообразий, приведенное у Коддингтона и Левинсона [1]. Используем итерации, которые мы начнем с $u^0(s; \xi_+, \xi_0) = (0, \xi_0, 0)$. Мы утверждаем, что

$$(xii) \quad \|u^{n+1}(s; \xi_+, \xi_0) - u^n(s; \xi_+, \xi_0)\|_1 \leq \|\xi_+\|_1 2^{-n} e^{-sb},$$

где через $u^k(s; \xi_+, \xi_0)$ обозначена k -я итерация. Отсюда, очевидно, будет следовать существование решения $u(s; \xi_+, \xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u^n(s; \xi_+, \xi_0)$, удовлетворяющего условию

$$(xiii) \quad \|u(s; \xi_+, \xi_0) - (0, \xi_0, 0)\|_1 \leq 2 \|\xi_+\|_1 e^{-sb}.$$

Чтобы доказать (xii), заметим, что это неравенство верно при $n=0$, так как

$$u^1(s; \xi_+, \xi_0) = (0, \xi_0, e^{-sA^+} \cdot \xi_+).$$

При $n > 0$ из (i) и предположения индукции получаем

$$\begin{aligned} \|u^{n+1} - u^n\|_1 &\leq \int_s^\infty e^{-(t-s)a} e \|\xi_+\|_1 2^{-(n-1)} e^{-tb} dt \leq \\ &\leq e \|\xi_+\|_1 2^{-(n-1)} e^{-sb} (a+b)^{-1} < \|\xi_+\|_1 2^{-n} e^{-sb}/3. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $e(a+b)^{-1} = (a-b)(a+b)^{-1}/6 < 1/6$.

Аналогично

$$\begin{aligned} \|u_0^{n+1} - u_0^n\|_1 &\leq \int_s^\infty e \|\xi_+\|_1 2^{-(n-1)} e^{-tb} dt = \\ &= (a-b) \|\xi_+\|_1 2^{-n} e^{-sb}/3b < \|\xi_+\|_1 2^{-n} e^{-sb}/3 \end{aligned}$$

(в последнем неравенстве используем, что $(a-b)/b < 1$) и

$$\begin{aligned} \|u_+^{n+1} - u_+^n\|_1 &\leq \int_0^s e^{-(s-t)a} e \|\xi_+\|_1 2^{-(n-1)} e^{-tb} dt \leq \\ &\leq e \|\xi_+\|_1 2^{-(n-1)} e^{-sa} (e^{s(a-b)} - 1)/(a-b) < \\ &< \|\xi_+\|_1 2^{-n} e^{-sb}/3. \end{aligned}$$

▲ Выполняя эти оценки, мы считаем, что $\|u^n\|_1, \|u^{n-1}\|_1 < \delta$. Из $u^0 = 0$ и предположения индукции следует, что для $\|u^n\|_1, \|u^{n-1}\|_1$ выполняется такое же неравенство, как (xiii). Поэтому приводимые ниже рассуждения годятся для тех ξ_+, ξ_0 , для которых $2\|\xi_+\|_1 + \|\xi_0\|_1 < \delta$.

(f) Уменьшив, если понадобится, δ , будем считать, что $u(s; \xi_+, \xi_0)$ определено при $\|\xi_+\|_1 < \delta$, $|\xi_0| < \delta$. Определим локальное сильно устойчивое многообразие $V_{ss}^{\text{loc}}(z.c)$ точки $(z.c)$, где $z = e^{2\pi i \xi_0/m}$ и $|\xi_0| < \delta$, как

$$\{u(0; \xi_+, \xi_0); \|\xi_+\|_1 < \delta\}.$$

Покажем, что если положительная полутраектория $\varphi_s c^* \rightarrow z.c$, то эта полутраектория начиная с некоторого момента лежит на $V_{ss}^{\text{loc}}(z.c)$. Заменяя c^* на некоторое $\varphi_{s_0} c^*$, можем считать, что полутраектория $\varphi_s c^*$ целиком лежит в той окрестности точки c , где введены координаты (ξ_-, ξ_0, ξ_+) и где $|\xi_0| < \delta$, $\|\xi_+\|_1 < \delta$. В терминах этих локальных координат $\varphi_s c^*$ представляется как некоторое $\xi(s)$. Из (ix) следует, что $\xi(s)$ удовлетворяет оценке вида (xiii), но только, быть может, с некоторым дополнительным множителем K (скажем, $K=10$) в правой части. Как уже отмечалось, тогда $\xi(s)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений (x) с $\xi_+ = \xi_+(0)$. (Для компонент ξ_0 и ξ_+ это очевидно, а

$$\xi_-(s) = e^{-(s-\sigma)A^-} \cdot \xi_-(\sigma) - \int_{\sigma}^s e^{-(s-t)A^-} \cdot C^-(\xi(t)) dt,$$

и, положив $\sigma \rightarrow \infty$, получим нужное интегральное уравнение для ξ_- -компоненты.) Сравним $\xi(s)$ и построенное выше решение $u(s; \xi_+, \xi_0)$ с $\xi_+ = \xi_+(0)$, $\xi_0 = \xi_0(\infty)$. Поскольку они оба стремятся к $(0, \xi_0, 0)$ как e^{-bs} , то

$$(xiv) \quad m := \sup_{0 \leq s < \infty} e^{sb} \|u(s; \xi_+, \xi_0) - \xi(s)\|_1 < \infty.$$

Вычитая уравнения для u и ξ и используя (i), получаем, что компоненты разности $u - \xi$ оцениваются через интегралы

$$\begin{aligned} & e \int_s^{\infty} e^{-(t-s)b} \|u(t; \xi_+, \xi_0) - \xi(t)\|_1 dt, \\ & e \int_s^{\infty} \|u(t; \xi_+, \xi_0) - \xi(t)\|_1 dt, \quad e \int_0^s e^{-(s-t)b} \|u(t; \xi_+, \xi_0) - \xi(t)\|_1 dt. \end{aligned}$$

Подставляя сюда получающуюся из (xiv) оценку $\|u(s; \xi_+, \xi_0) - \xi(s)\|_1 \leq m e^{-sb}$ и вычисляя соответствующие интегралы, умноженные на e^{sb} , получаем, что

$$e^{sb} \|u(s; \xi_+, \xi_0) - \xi(s)\|_1 \leq \frac{me}{a+b} + \frac{me}{b} + \frac{me}{a-b} (1 - e^{-s(a-b)}) \leq m/2.$$

Отсюда $m \leq m/2$ и $m=0$.

Положим теперь

$$V_{ss}(z.c) := \{c^*; \varphi_s c^* \rightarrow z.c \text{ при } s \rightarrow \infty\}.$$

Очевидно, что если $\varphi_s c^* \rightarrow c$, то $z \cdot \varphi_s c^* \rightarrow z \cdot c$, и обратно. Поэтому $z \cdot V_{ss}(c) = V_{ss}(z \cdot c)$. Когда z достаточно близко к z_0 (так что определены $V_{ss}^{\text{loc}}(z \cdot c)$), то $V_{ss}(z \cdot c) \supset V_{ss}^{\text{loc}}(z \cdot c)$ и $V_{ss}(z \cdot c)$ совпадает с $V_{ss}^{\text{loc}}(z \cdot c)$ в некоторой окрестности точки $z \cdot c$. Можно также сказать, что $V_{ss}(z \cdot c)$ получается продолжением $V_{ss}^{\text{loc}}(z \cdot c)$ с помощью отрицательных полутраекторий $\varphi_s c^*$, $c^* \in V_{ss}^{\text{loc}}(z \cdot c)$, $s \leq 0$. Некоторые осложнения вызывает тот факт, что эти полутраектории могут не быть определенными для всех $s < 0$ (во всяком случае, обратного мы не доказывали). Поэтому временно заменим поле $-\text{grad } E$ на $-\frac{\text{grad } E}{1 + \|\text{grad } E\|_1^2}$. Траектории последнего обозначим через $\psi_s c^*$; легко видеть, что они определены для всех s . При этом $\varphi_s c^* = \psi_{\tau(c^*, s)} c^*$, где $\tau(c^*, s) := s + E(c^*) - E(\varphi_s c^*)$. (Действительно, $d\tau(c^*, s)/ds = 1 + \|\text{grad } E(\varphi_s c^*)\|_1^2$.) Как мы знаем, если максимальный интервал существования $\varphi_s c^*$ есть $] -\alpha(c^*), \infty[$ и $\alpha(c^*) < \infty$, то $E(\varphi_s c^*) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow -\alpha(c^*)$. Поэтому отрицательные полутраектории $\varphi_s c^*$ и $\psi_s c^*$ состоят из одних и тех же точек. Теперь ясно, что

$$V_{ss}(c) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \psi_{-n}(V_{ss}^{\text{loc}}(c)),$$

причем $\psi_{-n}(V_{ss}^{\text{loc}}(c)) \subset \psi_{-n-1}(V_{ss}^{\text{loc}}(c))$. Считая доказанной дифференцируемость $u(t; \xi_+, \xi_0)$ по (ξ_+, ξ_0) (см. работы, указанные в ⁽³⁶⁾), заключаем сначала, что $V_{ss}^{\text{loc}}(c)$ и $V_s^{\text{loc}}(c) := \bigcup_{|\xi_0| < \delta} V_{ss}^{\text{loc}}(e^{2\pi i \xi_0/m} \cdot c)$ — дифференцируемые подмногообразия гильбертова многообразия ΛM , а затем, что дифференцируемыми подмногообразиями ΛM являются $V_{ss}(c)$ (значит, и все $V_{ss}(z \cdot c)$) и

$$V_s(S \cdot c) := \bigcup_{z \in S} V_{ss}(z \cdot c)$$

(вместо $\bigcup_{z \in S}$ достаточно взять $\bigcup_{i=1}^n z_i \cdot \bigcup_{n=0}^{\infty} \psi_{-n}(V_s^{\text{loc}}(c))$, где $z_1, \dots, z_n, z_k$ — некоторый конечный набор элементов группы S).

(г) Докажем, что

$$(xv) \quad T_{z \cdot c} V_{ss}(z \cdot c) = N_{z \cdot c}^+ = T_{z \cdot c}^+ \Lambda M.$$

Ввиду эквивариантности достаточно убедиться в этом при $z = z_0$. В этом случае в координатном представлении $N_{z_0}^- \oplus \mathbb{R} \oplus N_{z_0}^+$ подпространство $\xi_0 = 0$, $\xi_- = 0$ совпадает с $N_{z_0}^+ = T_{z_0}^+ \Lambda M$, поэтому достаточно установить, что

$$u(0; \xi_+, 0) = (o(\|\xi_+\|_1), o(\|\xi_+\|_1), \xi_+).$$

Из (xiii), (i) и (xi) следует, что

$$(xvi) \quad \|u_-(0; \xi_+, 0)\|_1 \leq \frac{2\varepsilon}{a+b} \|\xi_+\|_1, \quad |u_0(0; \xi_+, 0)| \leq \frac{2\varepsilon}{b} \|\xi_+\|_1.$$

Но ε в (i) может быть сделано сколь угодно малым при достаточно малом δ ; тогда (xvi) будет иметь место при условии, что $u(s; \xi_+, \xi_0)$ не выходит из области $\|\xi\|_1 < \delta$. Последнее, как мы знаем, гарантировано, если $2\|\xi_+\|_1 + |\xi_0| < \delta$, т. е. в нашем случае $\|\xi_+\|_1 < \delta/2$. Поэтому $\|u_+\|_1$ и $|u_0|$ суть $o(\|\xi_+\|_1)$.

Из (xv) следует, что $V_{ss}(z.c)$ и $V_s(S.c)$ локально (в некоторой окрестности $S.c$) можно представить как образы отображений $W_{ss}(z.c)$ и $W_s(S.c)$ с надлежащими свойствами. После этого можно с помощью потока ψ_s продолжить эти отображения до отображений, образы которых уже целиком дают $V_{ss}(z.c)$ и $V_s(S.c)$ (при этом надо специально позаботиться о гладкости). Подробности предоставляются читателю.

(h) Построение неустойчивых многообразий производится совершенно аналогично. Ограничимся тем, что укажем соответствующие интегральные уравнения, определяющие при достаточно малых $\xi_-\|_1$ и $|\xi_0|$ некоторые $v(s; \xi_-, \xi_0)$ с $s \leq 0$. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} v(s; \xi_-, \xi_0) &= (v_-(s; \xi_-, \xi_0), v_0(s; \xi_-, \xi_0), v_+(s; \xi_-, \xi_0)) = \\ &= \left(e^{sA^-} \cdot \xi_- - \int_0^s e^{-(s-t)A^-} \cdot C^-(v(t; \xi_-, \xi_0)) dt, \right. \\ &\quad \left. \xi_0 - \int_{-\infty}^s C^0(v(t; \xi_-, \xi_0)) dt, - \int_{-\infty}^s e^{(t-s)A^+} \cdot C^+(v(t; \xi_-, \xi_0)) dt \right). \end{aligned}$$

Их решения $v(s; \xi_-, \xi_0)$ являются координатными представлениями траекторий $\varphi_s c^*$, стремящихся к точке $e^{2\pi i \xi_0/m} \cdot c$ при $s \rightarrow -\infty$ с определенной экспоненциальной скоростью. Дополнительно доказывается, что любая отрицательная полутраектория $\varphi_s c^*$ с убыванием s либо выходит из малой окрестности кривой $S.c$, либо стремится к некоторой точке этой кривой с экспоненциальной скоростью. (При этом не возникает никаких осложнений из-за того, что отрицательная полутраектория может не быть определена при всех $s < 0$, ибо для такой полутраектории $E(\varphi_s c^*) \rightarrow \infty$, так что она выходит из малой окрестности кривой $S.c$. А в другом месте доказательства — при продолжении локальных многообразий с помощью положительных полутраекторий — теперь возникает даже небольшое упрощение, ибо положительные полутраектории определены при всех $s > 0$.) $\blacktriangle \square$

Замечание. Одним из следствий теоремы 2.5.1 является такое утверждение. Если среди предельных точек траектории $\varphi_s c^*$, $s \geq 0$,

имеется невырожденная замкнутая геодезическая c , то $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_s c^* = c$.

Это уже было доказано Элиассоном [4].

Теперь предположим, что все замкнутые геодезические многообразия M невырождены. Тогда у каждой критической орбиты $S.c$, $E(c) = \kappa > 0$, есть неустойчивое многообразие

$$W_u(S.c): (N-(S.c), S) \rightarrow (\Lambda^* M, S.c),$$

где $N-(S.c)$ — тотальное пространство k -мерного векторного расслоения над S .

Из § 2.4 мы уже знаем, что если κ — критический уровень, а $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $\Lambda^* M$ получается из $\Lambda^{\kappa-\varepsilon} M$ приклеиванием отрицательного расслоения над каждой из критических орбит $S.c_j$, $S.\theta c_j$, $1 \leq j \leq k$.

Теперь мы разовьем это подробнее в несколько других терминах, вводя при $\kappa^* \geq 0$ комплекс Морса $\mathcal{M}^{\kappa^*} M$ многообразия ΛM . Он является замыканием неустойчивых многообразий $W_u(S.c)$ тех критических орбит $S.c$, для которых $E(c) \leq \kappa^*$.

$\mathcal{M}^0 M$ совпадает с M , ибо, когда $E(c) = 0$, $W_u(S.c) = c$. Если κ_0 — наименьшее положительное критическое значение, то $\mathcal{M}^{\kappa_0} M$ состоит из многообразия M , к которому приклеено конечное число пар $W_u(S.c_0)$ и $W(S.\theta c_0)$ расслоений на диски вместе со своими краями; приклеиваемые W_u соответствуют тем c_0 , для которых $E(c_0) = \kappa_0$. В случае когда $\text{ind } c_0 = 0$, $W_u(S.c_0) \cong S.c_0$; таким образом, $\mathcal{M}^{\kappa_0} M$ может и не быть связным, даже если ΛM связно. То же верно для $\mathcal{M}^{\kappa} M$ при любом κ .

Вообще, если κ' — положительное критическое значение, то $\mathcal{M}^{\kappa'} M$ получается из $\mathcal{M}^{\kappa} M$, где $\kappa < \kappa'$ — максимальное критическое значение $< \kappa'$, приклеиванием конечного числа таких расслоений на диски $W_u(S.c')$ и $W_u(S.\theta c')$, для которых $E(S.c' \cup S.\theta c') = \kappa'$. При произвольном κ^* принимаем, что $\mathcal{M}^{\kappa^*} M$ по определению равно $\mathcal{M}^{\kappa} M$, где κ — наибольшее критическое значение $\leq \kappa^*$.

Объединение всех $\mathcal{M}^{\kappa^*} M$, $\kappa^* \rightarrow \infty$, называется также полным комплексом Морса $\mathcal{M} M$ многообразия ΛM .

2.5.2. Лемма. Комплекс Морса $\mathcal{M}^{\kappa^*} M$ содержит только полные φ -траектории $\varphi_s c^*$, $s \in \mathbb{R}$. Для этих траекторий корректно определены предельные точки $\varphi_{\infty} c^*$ и $\varphi_{-\infty} c^*$. Эти точки являются критическими точками и также принадлежат $\mathcal{M}^{\kappa^*} M$. Таким образом, на $\mathcal{M}^{\kappa^*} M$ определено действие $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \times \mathcal{M}^{\kappa^*} M \rightarrow \mathcal{M}^{\kappa^*} M, \quad (s, c^*) \mapsto \varphi_s c^*.$$

Кроме того, $\mathcal{M}^{\kappa^*} M$ замкнут как относительно S -действия $\tilde{\chi}$ группы S и действия θ группы $\mathbb{Z}_2$, так и относительно действия, индуцированного группой изометрий многообразия M .

Доказательство непосредственно следует из приведенных выше определений и конструкций, которые все эквивариантны. $\square$

Предыдущие рассуждения применимы только к тем многообразиям M , у которых все замкнутые геодезические невырождены. Однако есть интересные примеры, для которых это предположение не выполнено; в частности, таковы неприводимые симметрические пространства. Циллер [1] показал, что для такого многообразия M критическое множество в ΛM разлагается на невырожденные критические подмногообразия.

Здесь мы рассмотрим только сферу S^n со стандартной метрикой постоянной кривизны, равной 1. Гомологии пространства ΛS^n изучались многими авторами; см., в частности, Морс [2], Иллс [1], Шварц А. С. [1], Элиассон [2].

2.5.3. Предложение. *Критическое множество $Cr\Lambda S^n$ разлагается на невырожденные критические подмногообразия $\Lambda^0 S^n \cong S^n$ и $B_q = B_q S^n$, которые состоят из q раз пройденных больших кругов, $q = 1, 2, \dots$. Многообразие B_q изоморфно многообразию Штифеля $V(2, n-1)$, состоящему из ортогональных 2-реперов в $\mathbb{R}^{n+1}$. Отсюда, в частности, следует, что $\dim B_q = 2n-1$, $E|_{B_q} = 2\pi^2 q^2$ и $\text{ind } B_q = (2q-1)(n-1)$.*

Доказательство. Пусть $c \in B_q$ или, что то же самое, $|\dot{c}| = 2\pi q$. Воспользовавшись специальным видом тензора кривизны на S^n , получим *)

$$\begin{aligned}\tilde{K}_c(\xi)(t) &= R(\xi(t), \dot{c}(t), \dot{c}(t)) = \\ &= -\langle \dot{c}(t), \xi(t) \rangle \dot{c}(t) + \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle \xi(t) = \\ &= -\langle \dot{c}(t), \xi(t) \rangle \dot{c}(t) + 4\pi^2 q^2 \xi(t).\end{aligned}$$

Поэтому $(\tilde{K}_c + 1)\xi \neq 0$ при $\xi \neq 0$ (если ξ и c всюду линейно зависимы, то $\tilde{K}_c(\xi) = 0$ и $(\tilde{K}_c + 1)\xi = \xi \neq 0$; в противном случае ненулевое слагаемое $(4\pi^2 q^2 + 1)\xi$ в выражении для $(\tilde{K}_c + 1)\xi$ не может сократиться). Ввиду 2.4.4 это означает, что $\lambda = 1$ не является собственным значением оператора A_c . Тогда уравнение для собственных векторов из 2.4.4 можно переписать в виде

$$(*) \quad \nabla^2 \xi + \frac{4\pi^2 q^2 + \lambda}{1 - \lambda} \xi + \frac{1}{\lambda - 1} \langle \dot{c}, \xi \rangle \dot{c} = 0.$$

Разложив ξ на две компоненты — касательную к $\dot{c}$, которую можно записать в виде $\xi(t) = \alpha(t) \dot{c}(t)$, и ортогональную к c «вертикальную» компоненту $\xi(t) \perp \dot{c}(t)$, мы видим, что (*) распа-

*) См., например, Громол, Клингенберг, Мейер [1], § 3.6, (24) (а также § 3.7, 3.8).

дается на отдельные уравнения для этих компонент:

$$(\text{кас.}) \quad \ddot{\alpha}(t) + \lambda \alpha(t)/(1 - \lambda) = 0,$$

$$(\text{верт.}) \quad \nabla^2 \xi + (4\pi^2 q^2 + \lambda) \xi/(1 - \lambda) = 0.$$

▲ Заметим, что если рассматривать S^n как стандартную сферу в $\mathbb{R}^{n+1}$, то во всех точках большого круга $c(t)$ подпространства касательного пространства $T_{c(t)}S^n$, ортогональные к $\dot{c}(t)$ (т. е. состоящие из вертикальных векторов), будут параллельны друг другу в смысле обычного параллелизма в $\mathbb{R}^{n+1}$. Поэтому для вертикальных векторов параллельное перенесение вдоль c совпадает с обычным параллельным перенесением в $\mathbb{R}^{n+1}$. Из любого касательного к S^n вектора $\xi_0 \perp \dot{c}(0)$ при параллельном перенесении вдоль c получается периодическое векторное поле вдоль c (тогда как в общем случае после параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой вектор не обязан возвращаться в исходное положение), которое мы будем обозначать тем же символом ξ_0 . ▲

При $\lambda < 0$ уравнение (кас.) не имеет периодических решений. Уравнение (верт.) имеет нетривиальные решения, если

$$\lambda = 4\pi^2 (p^2 - q^2)/(1 + 4\pi^2 p^2), \quad p = 0, 1, \dots, q - 1.$$

При $p = 0$ (верт.) сводится к $\nabla^2 \xi = 0$, поэтому решениями являются $\xi(t) = \xi_0$, $\xi_0 \perp \dot{c}$. При $0 < p < q$ решениями будут $\xi(t) = \xi_0 \cos 2\pi p t + \xi_1 \sin 2\pi p t$, где $\xi_0, \xi_1 \perp \dot{c}$. Поэтому размерность пространства $T_c \Lambda S^n$ в точке $c \in B_q$ равна

$$(n - 1) + (q - 1) 2(n - 1) = (2q - 1)(n - 1).$$

В случае $\lambda = 0$ (кас.) имеет решение $\alpha = \alpha_0$, а (верт.) имеет решение

$$\xi(t) = \xi_0 \cos 2\pi q t + \xi_1 \sin 2\pi q t,$$

где $\xi_0, \xi_1 \perp \dot{c}$. Следовательно, дефект $B_q = 2n - 1 = \dim B_q$, т. е. B_q невырожденно. □

Теперь нетрудно определить $\mathbb{Z}_2$ -гомологии пространства ΛS^n ; см. Клингенберг [4].

2.5.4. Теорема. Пусть $n > 2$. Тогда гомоморфизм вложения в $\mathbb{Z}_2$ -гомологиях

$$i_*: H_*(\Lambda^{2q^2\pi^2} S^n, \Lambda^0 S^n) \rightarrow H_*(\Lambda^{2q^2\pi^2} S^n, \Lambda^0 S^n)$$

инъективен. Следовательно,

$$H_*(\Lambda S^n, \Lambda^0 S^n) = \bigoplus_{q \geq 1} H_{*-(2q-1)(n-1)}(V(2, n-1)).$$

Замечание. Циллер [1] доказал соответствующую теорему для произвольного глобального симметрического пространства. Мы

ограничимся случаем $n \geq 4$; случаи $n=2$ и $n=3$ требуют отдельного рассмотрения; см. Шварц А. С. [1], Элиассон [2] и Клейн [1].

Доказательство. Мы утверждаем, что ни один из циклов пространства $\Lambda^{2q^2\pi^2}S^n$ не исчезает при приклеивании отрицательного расслоения $\mu_{\bar{q}}$ над B_q . Иными словами, в точной гомологической последовательности тройки $(\Lambda^{2q^2\pi^2}S^n, \Lambda^{2q^2\pi^2}S^n, \Lambda^0S^n)$ связывающий гомоморфизм

$$(*) \quad H_k(\Lambda^{2q^2\pi^2}S^n, \Lambda^{2q^2\pi^2}S^n) \rightarrow H_{k-1}(\Lambda^{2q^2\pi^2}S^n, \Lambda^0S^n)$$

тривиален при всех k .

Для того чтобы в этом убедиться, заметим прежде всего, что $\mathbb{Z}_2$ -гомологии многообразия $V(2, n-1) \cong B_q$ отличны от нуля лишь в размерностях $0, n-1, n$ и $2n-1$, в каждой из которых $H_i(V(2, n-1); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Это сразу следует из точной последовательности Гизина (см. Милнор, Стасеф [1]) расслоения

$$V(2, n-1) \rightarrow S^n \text{ со слоем } S^{n-1} \quad (2\text{-репер } (a_1, a_2) \mapsto a_1),$$

если написать ее для когомологий и заметить, что у данного расслоения классы Штифеля—Уитни равны нулю (ведь оно ассоциировано с касательным расслоением сферы) и оттого в последовательности Гизина отображение, получающееся при умножении на n -й класс Штифеля—Уитни, тривиально.

Относительные гомологии $H_*(\Lambda^{2q^2\pi^2}S^n, \Lambda^{2q^2\pi^2}S^n; \mathbb{Z}_2)$ совпадают с относительными гомологиями пространства Тома отрицательного расслоения $\mu_{\bar{q}}$ над B_q по модулю базисной точки (см. 2.4.11). Размерность слоя $\mu_{\bar{q}}$ равна $(2q-1)(n-1)$. Можно предполагать по индукции, что

$$H_*(\Lambda^{2q^2\pi^2}S^n, \Lambda^0S^n) = \bigoplus_{\substack{q' \geq 1 \\ q' < q}} H_{*-(2q'-1)(n-1)}(V(2, n-1)).$$

Допустим, что связывающий гомоморфизм $(*)$ нетривиален. В левой части $(*)$ ненулевые группы стоят лишь при $k = (2q-1)(n-1) + j$, где $j = 0, n-1, n, 2n-1$, а в правой части — когда $k-1$ имеет вид $(2q'-1)(n-1) + i$, где $q' < q$ и $i = 0, n-1, n, 2n-1$. Итак,

$$(2q-1)(n-1) + j - 1 = (2q'-1)(n-1) + i,$$

т. е. $2(q-q')(n-1) + j = i + 1$. Тогда $i + 1 \geq j + 2(n-1) \geq 2n-2$; при $n > 3$ это $> n+1$, так что для i возможно только значение $2n-1$. Значит, $2(q-q')(n-1) + j = 2n$. При $q-q' > 1$ это невозможно. Значит, $q-q' = 1$ и $j = 2$. Но при $n > 3$ среди допустимых для j значений нет 2.

Теорема доказана. $\square$

Для построения комплекса Морса многообразия ΛS^n рассмотрим каноническое вложение $i_q: B_q \hookrightarrow \Lambda S^n$ критического подмногообразия B_q . Оно индуцирует нормальное расслоение над B_q :

$$\mu_q = \mu(B_q): N(B_q) \rightarrow B_q.$$

Разложение слоя $N_{c_q}(B_q)$ над c_q на положительное и отрицательное подпространства $N_{c_q}^+(B_q)$ и $N_{c_q}^-(B_q)$ определяет подрасслоения

$$\mu_q^\pm = \mu^\pm(B_q): N^\pm(B_q) \rightarrow B_q.$$

Здесь размерность слоя расслоения $\mu^-(B_q)$ равна индексу B_q , т. е. $(2q-1)(n-1)$, в то время как слой расслоения $\mu^+(B_q)$ — настоящее гильбертово пространство.

Напомним, что B_q изоморфно многообразию Штифеля $V(2, n-1) = SO(n+1)/SO(n-1)$. Изометрическое действие группы $SO(n+1)$ на S^n определяет изометрическое действие $SO(n+1)$ на ΛS^n , оставляющее функцию E инвариантной. Это следует из того, что определения многообразия ΛM , римановой метрики на нем и функции E являются внутренними.

В частности, расслоения $\mu(B_q)$ и $\mu^\pm(B_q)$ переходят в себя под действием группы $SO(n+1)$.

Мы воспользуемся этим для доказательства того, что у каждого невырожденного критического подмногообразия B_q есть устойчивое и неустойчивое многообразия. Положим $E|_{B_q} = 2\pi^2 q^2 = \kappa(q)$.

2.5.5. Теорема. При каждом $q = 1, 2, \dots$ существуют интeктивные иммерсии *)

$$W_u(B_q): (N^-(B_q), B_q) \rightarrow (\Lambda^{\kappa(q)}, B_q),$$

$$W_s(B_q): (N^+(B_q), B_q) \rightarrow (\Lambda - \Lambda^{\kappa(q)-}, B_q),$$

обладающие следующими свойствами:

(i) иммерсии эквивариантны как по отношению к S -действию $\tilde{\chi}$ и $\mathbb{Z}_2$ -действию θ , так и по отношению к $SO(n+1)$ -действию;

(ii) ограничения иммерсий на базу, т. е. на многообразие B_q , являются каноническими вложениями;

(iii) при $c_q \in B_q$ дифференциал $TW_u(B_q)(c_q)|_{N_{c_q}^-(B_q)}$ является каноническим отображением пространства $N_{c_q}^-(B_q)$ на подпространство $T_c \Lambda S^n$, порожденное собственными векторами индексной формы $D^2 E(c_q)$, отвечающими отрицательным собственным значениям. Соответствующее утверждение верно также и для $TW_s(B_q)(c_q)|_{N_{c_q}^+(B_q)}$;

*) На самом деле даже вложения.

(iv) элементы c^* , принадлежащие образу $W_u(B_q)$, характеризуются тем, что $\lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi_s c^* \in B_q$, а элементы c^* , принадлежащие образу $W_s(B_q)$, характеризуются тем, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_s c^* \in B_q$. В обоих случаях если $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_s c^* = c_q$, то c^* принадлежит образу ограничения соответствующего отображения на $N_{c_q}^\pm(B_q)$.

Замечание. Мы назовем $W_s(B_q)$ и $W_u(B_q)$ соответственно устойчивым и неустойчивым многообразиями невырожденного критического подмногообразия B_q , а

$$W_{ss}(c_q) := W_s(B_q) \setminus N_{c_q}^+(B_q) \quad \text{и} \quad W_{uu}(c_q) := W_u(B_q) \setminus N_{c_q}^-(B_q)$$

соответственно *сильно устойчивым* и *сильно неустойчивым* многообразиями точки $c_q \in B_q$.

Доказательство *). Пусть $\delta_q: D(B_q) \rightarrow B_q$ — расслоение на диски над B_q , соответствующее расслоению μ_q . Если диски достаточно малы, то с помощью экспоненциального отображения мы можем отождествить $D(B_q)$ с трубчатой окрестностью многообразия B_q в ЛМ. Это отождествление определяет на $D(B_q)$ риманову метрику $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, функцию E и соответствующее градиентное векторное поле $\text{grad } E$.

Группа $SO(n+1)$ переводит векторное поле $\text{grad } E$ в себя. В частности, группа изотропии $SO(n-1)$ точки c_q базы B_q оставляет инвариантным лежащий над этой точкой слой D_{c_q} расслоения $D(B_q)$. Так как $SO(n+1)$ действует на B_p транзитивно, то касательное пространство орбиты группы $SO(n+1)$, проходящей через точку $\xi \in D_{c_q}$, трансверсально к $T_\xi D_{c_q} \cong N_{c_q}$.

Следовательно, касательное пространство $T_\xi SO(n+1)$ орбиты группы $SO(n+1)$, проходящей через точку $\xi \in D_{c_q}$, содержит «горизонтальное» подпространство $T_\xi^\perp N(B_q)$, которое дополнительно «вертикальному» пространству $T_\xi D_{c_q} \cong N_{c_q}$. Фиксируем $T_\xi^\perp N(B_q)$ так, чтобы оно было ортогонально $T_\xi SO(n+1) \cap T_\xi D_{c_q}$. Через $T_\xi^\perp N(B_q)$ обозначим подпространства пространства $T_\xi D_{c_q}$, параллельные $N_{c_q}^\pm$. Таким образом, мы можем покомпонентно отождествить

$$\begin{aligned} T_\xi D(B_q) &= T_\xi^- N(B_q) \oplus T_\xi^0 N(B_q) \oplus T_\xi^+ N(B_q) \\ \subset T_{c_q} D(B_q) &= N_{c_q}^-(B_q) \oplus T_{c_q} B_q \oplus N_{c_q}^+(B_q), \end{aligned}$$

*) Здесь приводятся только некоторые моменты доказательства. Поскольку необходимые уточнения в общем аналогичны имеющимся в доказательстве 2.5.1, то восполнение пробелов можно предоставить читателю (см., впрочем, (37)).

где для отождествления $T_{\xi}^*N(B_q)$ с $T_{c_q}B_q$ мы воспользовались проекцией расслоения $\mu(B_q)$.

Мы также используем это разложение для введения локальных координат около c_q ⁽⁸⁷⁾.

Действие $SO(n+1)$ на $D(B_q)$ изометрично и сохраняет E . Поэтому $\text{grad } E$ ортогонально $T_{\xi}^*N(B_q)$. При $\xi=0$ пространство $T_{\xi}^*N(B_q)$ совпадает с $T_{c_q}B_q$. Поэтому $\text{grad } E(\xi)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \text{grad } E(\xi) &= (A^-\xi_- + C^-(\xi), C^0(\xi), A^+\xi_+ + C^+(\xi)) \in \\ &\in N_{c_q}^-(B_q) \oplus T_{c_q}B_q \oplus N_{c_q}^+(B_q), \end{aligned}$$

где

$$\xi = (\xi_-, \xi_0, \xi_+) \in N_{c_q}^-(B_q) \oplus T_{c_q}B_q \oplus N_{c_q}^+(B_q).$$

Здесь через $A^{\pm}$ обозначено ограничение самосопряженного оператора A_{c_q} (см. 2.4.2) на $T_{c_q}^{\pm}\Lambda M \cong N_{c_q}^{\pm}(B_q)$. Для $C^*(\xi)$, где $*$ $\in \{-, 0, +\}$, выполняются соотношения

$$(*) \quad \|C^*(\xi)\|_1 < \varepsilon (\|\xi_-\|_1 + \|\xi_+\|_1), \quad \|C^*(\xi) - C^*(\xi')\|_1 \leq \varepsilon \|\xi - \xi'\|_1,$$

где $\varepsilon > 0$ может быть сделано произвольно малым, если только $\|\xi\|_1$ и $\|\xi'\|_1$ достаточно малы.

Это в точности те же предположения, что и в доказательстве 2.5.1. Поэтому мы можем сделать те же заключения. $\square$

Замечание. Существование устойчивого и неустойчивого многообразий может быть доказано в общей ситуации, а именно для любых невырожденных критических подмногообразий из ΛM . Это было показано Дёйстерматом, который воспользовался усовершенствованной техникой Перрона [1]. Результат Дёйстермата не опубликован. Однако имеется его рукопись, которая озаглавлена «Устойчивые многообразия» и датирована августом 1972 г.

Во всяком случае, теперь мы можем определить комплекс Морса $\mathcal{M}^*S^n$ так же, как и выше, т. е. как замыкание неустойчивых многообразий из Λ^*S^n .

Для последующего применения мы включили в этот параграф несколько фактов о пространстве петель $(\Omega M, *)$ компактного риманова многообразия M с базисной точкой $*$ и, в частности, об устойчивых и неустойчивых многообразиях в $(\Omega S^n, *)$. Впервые для изучения пространства $(\Omega M, *)$ теория гильбертовых многообразий с функцией E , удовлетворяющей условию (C), была применена Пале [2].

Напомним, что, согласно 2.1.4, в расслоении

$$\gamma: \Lambda M \rightarrow M, \quad c \mapsto c(0) = c(1),$$

γ является дифференцируемой субмерсией (см. также Грове [1]), так что все слои являются дифференцируемыми многообразиями.

Слой $(\Omega M, *)$ над точкой $* \in M$ состоит из H^1 -отображений $c: ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (M, *)$. Функция $E^\Omega = E|_{\Omega M}$ дифференцируема, а критическими точками этой функции являются в точности те геодезические, начало и конец которых находится в точке $*$ и которые параметризованы отрезком $[0, 1]$ («геодезические петли в $*$ »).

На $(\Omega M, *)$ определена каноническая риманова метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, индуцированная метрикой, имеющейся в ΛM . Касательное пространство $T_c \Omega M$ в точке $c \in \Omega M$ состоит из H^1 -векторных полей $\xi(t)$, $t \in [0, 1]$, вдоль c , обращающихся в нуль при $t=0$ и $t=1$. Соответствующее градиентное векторное поле $\text{grad } E^\Omega$ удовлетворяет условию (C).

Пусть $c \in (\Omega M, *)$ — критическая точка. Обозначим через $T_c^\pm \Omega M$ подпространства касательного пространства $T_c \Omega M$, порожденные собственными векторами индексной формы $D^2 E^\Omega(c)$, отвечающими соответственно положительным и отрицательным собственным значениям. Число $\dim T_c^\pm \Omega M$ всегда конечно; оно называется индексом геодезической c в $(\Omega M, *)$. Геодезическая c как критическая точка в $E^\Omega(c)$ называется невырожденной, если $D^2 E^\Omega(c)$ не имеет собственных значений, равных нулю.

Пусть c — замкнутая геодезическая из ΛM , у которой $c(0) = c(1) = *$. Тогда индекс c как критической точки функции E не меньше индекса c , рассматриваемой как критическая точка функции E^Ω ⁽³⁸⁾.

В рассматриваемой ситуации можно также определить понятие невырожденного критического подмногообразия из $(\Omega M, *)$. Это такое связное замкнутое подмногообразие B , целиком состоящее из критических точек, что при всех $c \in B$ его касательное пространство $T_c B$ совпадает с ядром формы $D^2 E^\Omega(c)$.

В качестве важного примера мы рассмотрим многообразие $M = S^n$, т. е. сферу постоянной кривизны, равной 1. В $(\Omega S^n, *)$ критическими точками являются, помимо тривиальной геодезической $c = *$, q раз повторенные большие круги, проходящие через точку $*$, $q = 1, 2, \dots$. Индекс q раз повторенного большого круга, рассматриваемого как критическая точка в $(\Omega S^n, *)$, равен $(2q-1)(n-1)$ ⁽³⁹⁾.

Каноническое изометрическое действие группы $SO(n)$ на $(S^n, *)$ индуцирует изометрическое действие $SO(n)$ на $(\Omega S^n, *)$, оставляющее функцию E^Ω инвариантной. $(n-1)$ -параметрическое семейство q раз повторенных больших кругов, проходящих через точку $* \in S^n$, образует невырожденное критическое подмногообразие B_q^Ω , которое изоморфно S^{n-1} и индекс которого равен $(2q-1)(n-1)$. Группа $SO(n)$ действует транзитивно на B_q^Ω .

Пусть $\mu_q^\Omega = \mu(B_q^\Omega): N(B_q^\Omega) \rightarrow B_q^\Omega$ — нормальное расслоение подмногообразия B_q^Ω в $(\Omega S^n, *)$. Обозначим через $\mu_q^{\Omega \pm}: N^\pm(B_q^\Omega) \rightarrow B_q^\Omega$

положительное и отрицательное подрасслоения расслоения μ_q^Ω , порожденные собственными векторами формы D^2E^Ω , отвечающими соответственно положительным и отрицательным собственным значениям. Тогда $SO(n)$ -действие на $(\Omega S^n, *)$ индуцирует $SO(n)$ -действие на $\mu_q^\Omega = \mu_q^{\Omega-} \oplus \mu_q^{\Omega+}$, которое оставляет это разложение инвариантным.

Пусть $\kappa(q) := E^\Omega|_{B_q^\Omega} = 2\pi^2 q^2$. Теми же методами, что и при доказательстве 2.5.5, можно показать, что имеет место

2.5.6. Теорема. При каждом $q = 1, 2, \dots$ существуют инъективные иммерсии

$$\begin{aligned} W_u(B_q^\Omega): (N^-(B_q^\Omega), B_q^\Omega) &\rightarrow (\Omega^{\kappa(q)} S^n, B_q^\Omega), \\ W_s(B_q^\Omega): (N^+(B_q^\Omega), B_q^\Omega) &\rightarrow (\Omega S^n - \Omega^{\kappa(q)} S^n, B_q^\Omega), \end{aligned}$$

обладающие следующими свойствами:

- (i) иммерсии эквивариантны по отношению к $SO(n)$ -действию;
- (ii) ограничения иммерсий на базу, т. е. на многообразие B_q^Ω , являются каноническими вложениями;
- (iii) для $c \in B_q^\Omega$ отображения

$$\begin{aligned} TW_u(B_q^\Omega)|_{N_c^-(B_q^\Omega)}: N_c^-(B_q^\Omega) &\rightarrow T_c^-\Omega S^n, \\ TW_s(B_q^\Omega)|_{N_c^+(B_q^\Omega)}: N_c^+(B_q^\Omega) &\rightarrow T_c^+\Omega S^n \end{aligned}$$

являются каноническими изоморфизмами;

- (iv) элементы c^* , принадлежащие образу $W_u(B_q^\Omega)$, характеризуются тем, что $\lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi_s c^* \in B_q^\Omega$, а элементы c^* , принадлежащие образу $W_s(B_q^\Omega)$, характеризуются тем, что $\lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi_s c^* \in B_q$. В обоих случаях если $\lim \varphi_s c^* = c$, то c^* принадлежит образу ограничения соответствующего отображения на $N_c^\mp(B_q^\Omega)$.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК

В этой главе мы изложим новый аспект теории замкнутых геодезических. Если в предыдущих главах замкнутая геодезическая рассматривалась как обладающий некоторым свойством элемент пространства всех замкнутых кривых (а именно такой элемент, который является критической точкой функции E), то теперь замкнутую геодезическую (а точнее, касательное векторное поле вдоль нее) мы будем рассматривать как замкнутую (периодическую) траекторию геодезического потока на касательном расслоении риманова многообразия.

Геодезический поток является частным случаем гамильтонова потока. Это предоставляет в наше распоряжение развитую теорию гамильтоновых систем, в которой для нас особый интерес представляют те ее части, которые относятся к замкнутым траекториям.

В § 3.1 мы дадим набросок теории гамильтоновых систем, уделяя при этом особое внимание случаю геодезического потока. Следующий параграф посвящен теореме об индексе, а § 3.3 — изучению типичных свойств геодезического потока. Большую роль в этом параграфе играет теорема о неподвижной точке Биркгофа — Льюиса. Доказательство Мозера этой теоремы для дифференцируемого случая содержится в добавлении к этой главе.

3.1. Гамильтоновы системы

В этом параграфе мы изложим основы теории гамильтоновых систем и затем определим геодезический поток как частный случай системы такого вида.

Симплектическое многообразие — это четномерное многообразие N , снабженное внешней дифференциальной замкнутой 2-формой ($^{(40)}$) α максимального ранга, т. е. $d\alpha = 0$, и если $\dim N = 2n$, то n -я внешняя степень α^n всюду $\neq 0$.

Атлас на симплектическом многообразии (N, α) называется *симплектическим атласом*, если в каждой его карте (φ, U) форма α

представляется канонической симплектической формой на $\mathbb{R}^{2n}$, т. е.

$$\alpha = \varphi^* \left(\sum_1^n dx^i \wedge dy^i \right),$$

где $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ — координаты на $\varphi(U)$. Из леммы Дарбу (см. Арнольд [4], Стернберг [2], Мозер [7]) следует, что на симплектическом многообразии всегда существует симплектический атлас.

Для такого атласа координатные преобразования $\varphi' \cdot \varphi^{-1}$ являются каноническими или симплектическими преобразованиями. Это означает, что если преобразование $\varphi' \cdot \varphi^{-1}$ имеет вид

$$x'^i = x'^i(x, y), \quad y'^i = y'^i(x, y),$$

то $\sum_i dx'^i \wedge dy'^i = \sum_i dx^i \wedge dy^i$. Последнее равенство означает, что матрица

$$d(\varphi' \cdot \varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} & \frac{\partial x'^i}{\partial y^j} \\ \frac{\partial y'^i}{\partial x^j} & \frac{\partial y'^i}{\partial y^j} \end{pmatrix}$$

является симплектической, т. е. ${}^t d(\varphi' \cdot \varphi^{-1}) \cdot J \cdot d(\varphi' \cdot \varphi^{-1}) = J$, где *)

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & +E_n \\ -E_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Наиболее важным примером симплектического многообразия является кокасательное расслоение.

3.1.1. Предложение. На кокасательном расслоении T^*M дифференцируемого (евклидова) многообразия имеется каноническая симплектическая структура α , которая определяется следующим образом. Рассмотрим диаграмму, составленную из отображений расслоений:

$$\begin{array}{ccc} TT^*M & \xrightarrow{\tau_{T^*M}} & T^*M \\ T\tau_M^* \downarrow & & \downarrow \tau_M^* \\ TM & \xrightarrow{\tau_M} & M \end{array}$$

Определим 1-форму θ на T^*M , полагая

$$\theta: T_{\omega}T^*M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto \omega.T\tau_M^*\xi,$$

и затем положим $\alpha = -d\theta$.

*) Роль J ясна из того, что если $p \in U$ и $Z, Z' \in T_pM$, то $2\alpha(Z, Z') = -\langle J(T\varphi)Z, (T\varphi)Z' \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2n}$.

Доказательство. В локальных координатах диаграмма имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccc} (x, y, \xi, \eta) & \longrightarrow & (x, y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, \xi) & \longrightarrow & (x) \end{array}$$

Здесь мы, как обычно, координаты $x^i \cdot \tau_M^*$ на T^*M обозначаем короче через x^i . Тогда в локальных координатах θ запишется как $\sum_i y^i dx^i$. Следовательно, форма α имеет вид $\sum_i dx^i \wedge dy^i$, т. е. является замкнутой 2-формой максимального ранга $^*)$. $\square$

Заметим, что естественный атлас на T^*M является симплектическим (или каноническим) атласом для симплектической формы $\alpha = -d\theta$.

Гамильтоновой системой (N, α, H) называется симплектическое многообразие (N, α) , снабженное дифференцируемой функцией $H: N \rightarrow \mathbb{R}$, которая называется *функцией Гамильтона*.

Соответствующее *гамильтоново векторное поле* ζ_H определяется соотношениями

$$(*) \quad i_{\zeta_H} \alpha = dH \quad \text{или} \quad \alpha_*(\zeta_H) = \frac{1}{2} dH.$$

Здесь i_ζ обозначает внутреннее умножение, т. е. $i_\zeta \alpha(\eta) = 2\alpha(\zeta, \eta)$, а $\alpha_*: TN \rightarrow T^*N$ — изоморфизм векторных расслоений, определяемый невырожденной 2-формой α , т. е. $\alpha_*|_{T_p N}: T_p N \rightarrow T_p^* N$ отображает вектор ζ в линейную форму $\alpha(\zeta, \cdot)$.

В симплектических локальных координатах (x^i, y^i) соотношение $(*)$ имеет вид

$$\sum_i \xi_H^i dy^i - \sum_i \eta_H^i dx^i = \sum_i H_{x^i} dx^i + \sum_i H_{y^i} dy^i.$$

Поэтому локальное представление для ζ_H есть $(H_{y^i}, -H_{x^i})$. Другими словами, в этих координатах уравнения, описывающие

$^*)$ Заметим, что для аналитической механики традиционным является использование формы $d\theta$, а не $-d\theta$ (при этом пишут q^i вместо x^i и p_i вместо y^i). Гамильтоново векторное поле в этом случае определяется из условия $i_{\zeta_H} \alpha = -dH$, так что оно совпадает с тем, которое вводится далее. Симплектические диффеоморфизмы (т. е. диффеоморфизмы, сохраняющие α) там называются каноническими преобразованиями.

гамильтонов поток, определяемый полем ζ_H , принимают вид

$$\frac{dx^i}{dt} = H_{y^i}, \quad \frac{dy^i}{dt} = -H_{x^i},$$

т. е. являются уравнениями Гамильтона.

Исходящая из точки $p \in N$ интегральная кривая гамильтонова векторного поля будет обозначаться через $\varphi_{t,p}$.

3.1.2. Предложение. Пусть (N, α, H) — гамильтонова система. Тогда функция H остается постоянной вдоль траекторий гамильтонова потока и этот поток сохраняет α .

Доказательство. Напомним, что для производной Ли имеет место следующая формула (см. Абрахам, Марсен [1], Ленг [1], Стернберг [2]):

$$L_{\zeta_H} \beta = d(i_{\zeta_H} \beta) + i_{\zeta_H} d\beta.$$

Так как $i_{\zeta_H} \alpha = dH$, то

$$dH \cdot \zeta_H = 2\alpha(\zeta_H, \zeta_H) = 0, \quad L_{\zeta_H} \alpha = d dH + i_{\zeta_H} d\alpha = 0. \quad \square$$

Теперь мы переходим к наиболее интересному для нас случаю. Пусть M — риманово многообразие. Скалярное произведение на нем будем обозначать через $g(\cdot, \cdot)$ или $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть (T^*M, α) — кокасательное расслоение этого многообразия, снабженное канонической 2-формой α . В качестве функции Гамильтона возьмем кинетическую энергию, т. е. функцию

$$H^*: T^*M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \frac{1}{2} \langle \omega, \omega \rangle^*,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle^* = g^*$ обозначает метрику, двойственную к $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Пусть $g^{ik}(x)$ — локальное представление фундаментального тензора метрики g^* в естественных локальных координатах (x, y) на T^*M , соответствующих координатам (x) на M . Тогда

$$H^*(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} g^{kl}(x) y^k y^l.$$

Следовательно, уравнения Гамильтона принимают вид

$$\frac{dx^i}{dt} = H_{y^i}^* = \sum_l g^{il}(x) y^l, \quad \frac{dy^i}{dt} = -H_{x^i}^* = -\frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial g^{kl}(x)}{\partial x^i} y^k y^l.$$

Риманова метрика $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ на M определяет изоморфизм расслоений

$$g_*: TM \rightarrow T^*M, \quad X \mapsto \langle X, \cdot \rangle.$$

При этом симплектическая форма α на T^*M переносится в симплектическую форму $(g_*)^* \alpha$ на TM , которую мы снова будем обо-

значать через α . Другими словами, если Z и Z' — элементы из $T_x TM$, то *)

$$\alpha(Z, Z') = \alpha(Dg_* Z, Dg_* Z').$$

3.1.3. Предложение. Для симплектической формы α на TM выполняется соотношение

$$2\alpha(Z, Z') = \langle Z_h, Z'_v \rangle - \langle Z'_h, Z_v \rangle,$$

где $Z = (Z_h, Z_v)$ и $Z' = (Z'_h, Z'_v)$ — разложения на горизонтальную и вертикальную компоненты.

Замечание. Здесь мы отождествили $T_{xh} TM$ с $T_{\tau x} M$ и $T_{xv} TM$ с $T_{\tau x} M$ посредством линейных биекций $T\tau|_{T_{xh} TM}$ и $K|_{T_{xv} TM}$.

Доказательство. Обе части равенства определены инвариантно. Поэтому достаточно проверить 3.1.3 в некоторых специальных координатах.

В качестве таких координат выберем координаты, ортонормированные **) в точке $p = \tau_M X$. Тогда имеем

$$x^i(p) = 0, \quad g_{ik}(x(p)) = \delta_{ik}; \quad \Gamma_{ik}^l(x(p)) = 0.$$

В этих координатах локальным представлением для диаграммы

$$\begin{array}{ccc} TTM & \xrightarrow{Tg_*} & TT^*M \\ \downarrow \tau_{TM} & & \downarrow \tau_{T^*M} \\ TM & \xrightarrow{g_*} & T^*M \end{array}$$

в точке $X \in T_p M$ является диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (0, \dot{x}, \xi, \xi) & \xrightarrow{\text{id}} & (0, y, \xi, \eta) = (0, \dot{x}, \xi, \xi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (0, \dot{x}) & \xrightarrow{\text{id}} & (0, y) = (0, \dot{x}) \end{array}$$

*) Собственно говоря, согласно принятым ранее обозначениям, следовало бы писать Tg_* , а не Dg_* . Но теперь автор все чаще пишет D вместо T .

**) Как видно из следующей же строчки, требуется не только ортонормированность в обычном смысле, но и обращение в 0 символов Кристоффеля в точке $x(p)$. Специального названия для таких координат, кажется, нет (хотя, как известно, имеются названия некоторых более узких классов координат — координаты Ферми, нормальные координаты Римана). По терминологии Картана [2] метрика $\sum (dx^i)^2$ является евклидовой метрикой, соприкасающейся с g в точке p . Возможно, автор понимает «нормальные координаты» как «нормальные координаты Римана» (хотя использует в данном случае только часть свойств последних).

Кроме того, горизонтальное и вертикальное подпространства в точке X представляются как $\{(0, \dot{x})\} \times \mathbb{R}^n \times \{0\}$ и $\{(0, \dot{x})\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^n$ соответственно.

Так как α записывается в виде $\sum_i dx^i \wedge dy^i$, то

$$2\alpha(Z, Z') = \sum_i (\xi^i \eta'^i - \xi'^i \eta^i) = \langle Z_h, Z'_v \rangle - \langle Z'_h, Z_v \rangle. \quad \square$$

Замечание. Естественные координаты $(x, \dot{x})$ на TM , которые соответствуют координатам (x) на M , в общем случае не являются симплектическими координатами для индуцированной симплектической формы α . Точнее, локально изоморфизм g_* представим в виде

$$(x^i, \dot{x}^i) \mapsto (x^i, y^i) = \left(x^i, \sum_k g_{ik}(x) \dot{x}^k \right).$$

Поэтому форма $\sum_i dx^i \wedge dy^i$ переходит в форму $\sum_i dx^i \wedge d\left(\sum_k g_{ik}(x) \dot{x}^k\right)$, которая, вообще говоря, не равна $\sum_i dx^i \wedge d\dot{x}^i$.

Определим *геодезическую пульверизацию* *) на касательном расщеплении TM риманова многообразия M как векторное поле **)

$$S: TM \rightarrow TTM, \quad X \mapsto (X, 0) \in T_{Xh}TM \oplus T_{Xv}TM.$$

Интегральная кривая поля S с началом в точке $X \in TM$ будет обозначаться через $\varphi_t X$. Отображение

$$\varphi_t: TM \rightarrow TM$$

называется *геодезическим потоком* на TM .

3.1.4. Предложение. Если $\varphi_t X_0$ — интегральная кривая геодезической пульверизации с началом в точке X_0 , то $\dot{c}(t) = \tau_M \cdot \varphi_t X_0$ — геодезическая, определяемая начальным условием $\dot{c}(0) = X_0$.

Наоборот, если $c(t)$ — геодезическая, то $\dot{c}(t) = \varphi_t \dot{c}(0)$.

Доказательство. Имеем $\dot{c}(t) = T\tau \frac{d}{dt} \varphi_t X_0 = T\tau(\varphi_t X_0, 0) = \varphi_t X_0$,

$$\nabla \dot{c}(t) = K \frac{d}{dt} \dot{c}(t) = K(\varphi_t X_0, 0) = 0,$$

*) Английский термин spray переводят также «струя», но последний термин в § 3.3 будет использоваться в другом смысле.

**) Напомним еще раз, что в предложении 1.1.1 были описаны канонические изоморфизмы $T_p M$ с $T_{Xh} TM$ и $T_{Xv} TM$ ($X \in T_p M$), использование которых и подразумевается, когда вектор из $T_X TM$ рассматривается как пара векторов из $T_p M$.

т. е. $\tau \cdot \varphi_* X_0$ — геодезическая. Пусть теперь, наоборот,

$$\nabla \dot{c}(t) = 0.$$

Тогда, рассматривая $\dot{c}(t)$ как кривую в TM , имеем *)

$$\frac{d}{dt} \dot{c}(t) = (\dot{c}(t), 0) = S(\dot{c}(t)),$$

т. е. $\dot{c}(t)$ — интегральная кривая поля S . $\square$

3.1.5. Лемма. Пусть M — риманово многообразие.

Утверждение. Изоморфизм расслоений $g_*: TM \rightarrow T^*M$ переводит геодезическую пульверизацию S в гамильтоново векторное поле ζ_{H^*} системы (T^*M, α, H^*) , где функция Гамильтона $H^* =$ кинетическая энергия на T^*M .

Следовательно, S — гамильтоново векторное поле системы (TM, α, H) с функцией Гамильтона $H(X, X) = 1/2 \langle X, X \rangle =$ кинетическая энергия на TM .

Доказательство. Выберем те же координаты, что и в доказательстве 3.1.3. В этих координатах X представляется как $(0, \dot{x})$, $S(X)$ — как $(0, \dot{x}, \dot{x}, 0)$, а отображение $g_*|_{T_p M}$ — как $(0, \dot{x}) \mapsto (0, \dot{x})$ (т. е. оно задается формулой $y = \dot{x}$). С другой стороны, $H^*(x, y) = 1/2 \sum g^{ij}(x) y^i y^j$, где $g^{ij}(0) = \delta_{ij}$ и $\partial g^{ij}(0)/\partial x^k = 0$. Поэтому $\zeta_{H^*}(X)$ представляется как

$$(0, y, H_y^*(0, y), -H_x^*(0, y)) = (0, \dot{x}, \dot{x}, 0). \quad \square$$

Начиная с этого места мы считаем, что $\dim M = n + 1$. Через M продолжаем обозначать риманово многообразие.

Пусть $c(t)$ — геодезическая. Определим поле Якоби вдоль $c(t)$ как такое векторное поле $Y(t)$ вдоль $c(t)$, которое удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 Y(t) + R(Y(t), \dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 0.$$

Последнее называется *уравнением Якоби*.

3.1.6. Лемма. Поля Якоби $Y(t)$ вдоль геодезической $c(t)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с инвариантными векторными полями **) $\tilde{Y}(t)$ вдоль траектории $\varphi_* \dot{c}(0) = \dot{c}(t)$, т. е. полями, для которых

$$T\varphi_t(\tilde{Y}(0)) = \tilde{Y}(t).$$

*) Вообще, если векторное поле $X(t)$ вдоль кривой $c(t)$ рассматривается как кривая в TM , то в терминах нашего представления $T_X TM$ имеем

$$\frac{d}{dt} X(t) = (\dot{c}(t), \nabla X(t)).$$

**) То есть, в классических терминах, — решениями системы уравнений в вариациях.

Это соответствие устанавливается так *):

$$Y(t) \leftrightarrow \dot{Y}(t) = (Y(t), \nabla Y(t)) \in T_{\dot{c}(t)h}TM \oplus T_{\dot{c}(t)v}TM.$$

Доказательство **). Положим $X_0 = \dot{c}(0)$, и пусть

$$A = (A_h, A_v) \in T_{X_0h}TM \oplus T_{X_0v}TM = T_{X_0}TM.$$

Пусть, далее, $\kappa(s)$, $s \geq 0$, — кривая в TM , $\kappa(0) = X_0$, $\kappa'(0) = A$. Положим $\tilde{\kappa}(s, t) = \varphi_t \kappa(s)$, $\tilde{c}(s, t) := \tau \cdot \tilde{\kappa}(s, t)$, так что $t \mapsto \tilde{c}(s, t)$ (при фиксированном s) есть геодезическая линия и $\tilde{\kappa}(s, t) = = \partial \tilde{c}(s, t) / \partial t$. Тогда $T\varphi_t \kappa'(0) = T\varphi_t A = (A_h(t), A_v(t))$ — инвариантное относительно потока векторное поле вдоль $\varphi_t X_0$, порожденное вектором A . Таким образом, $(A_h(t), A_v(t)) = \partial \tilde{\kappa}(0, t) / \partial s$.

Из определений имеем

$$\frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial s}(s, t) = \left(T\tau \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial s}(s, t), K \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial s}(s, t) \right) = \left(\frac{\partial \tilde{c}(s, t)}{\partial s}, \frac{\nabla}{\partial s} \tilde{\kappa}(s, t) \right),$$

$$\text{а } \frac{\nabla}{\partial s} \tilde{\kappa}(s, t) = \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{c}(s, t) = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \tilde{c}(s, t)$$

(законность перестановки операций дифференцирования проверяется путем очевидного вычисления в локальных координатах; используем, что у связности Леви-Чивита кручение равно нулю).

Значит, $A_h(t) = \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(0, t)$ и $A_v(t) = \nabla A_h(t)$.

Используя формулу (i) в начале § 2.4 с заменой $(\xi'(t), \dot{c}(t), \xi(t))$ на $(\dot{c}(t), A_h(t), \dot{c}(t))$ и сделанные там замечания, получаем

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_h(t) &= \nabla A_v(t) = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial \tilde{c}(s, t)}{\partial t} \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial \tilde{c}(s, t)}{\partial t} \Big|_{s=0} + R \left(\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}, \frac{\partial \tilde{c}(s, t)}{\partial t} \Big|_{s=0} \right) = \\ &= R(\dot{c}(t), A_h(t), \dot{c}(t)) = -R(A_h(t), \dot{c}(t), \dot{c}(t)) \end{aligned}$$

(ведь $\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial \tilde{c}(s, t)}{\partial t} = 0$). Стало быть, $A_h(t)$ — поле Якоби.

*) Иными словами,

$$\dot{Y}(t) = \frac{dY(t)}{dt} = TY(t) \cdot \frac{d}{dt}.$$

Заметим, что в дальнейшем автор часто называет инвариантными векторными полями поля Якоби, хотя, строго говоря, это разные вещи.

**) Доказательство при переводе пришлось исправить. При этом я позволил себе воспользоваться стандартными обозначениями $\frac{\nabla}{\partial t}$, $\frac{\nabla}{\partial s}$, хотя Клингенберг их не употребляет: без них формулы были бы более громоздкими и менее наглядными.

Таким образом, мы построили линейное отображение из $(2n+2)$ -мерного пространства инвариантных векторных полей $T\varphi_t A$ вдоль $\varphi_t \dot{c}(0)$ в $(2n+2)$ -мерное пространство полей Якоби вдоль $c(t)$. Ядро этого отображения — нуль. Следовательно, теорема доказана. $\square$

3.1.7. Следствие. Пусть $Y(t)$ и $Z(t)$ — поля Якоби вдоль геодезической $c(t)$. Тогда

$$(*) \quad 2\alpha(\tilde{Y}(t), \tilde{Z}(t)) = \langle Y(t), \nabla Z(t) \rangle - \langle Z(t), \nabla Y(t) \rangle = \text{const.}$$

В частности, если $\dot{c} \neq 0$, то поля Якоби, ортогональные $\dot{c}$ (которое само является полем Якоби), т. е. такие поля Якоби, для которых выполняется соотношение $^{*)}$

$$\langle \dot{c}(t), Y(t) \rangle = \langle \dot{c}(t), \nabla Y(t) \rangle = 0 \quad \text{при всех } t,$$

образуют $2n$ -мерное подпространство.

Доказательство. Дифференцируя $(*)$ и подставляя затем выражение для второй ковариантной производной из уравнения Якоби, получим, что $(*)$ обращается в нуль. С другой стороны, из 3.1.2 мы знаем, что α инвариантна относительно потока:

$$2\alpha((T\varphi_t)\tilde{Y}(0), (T\varphi_t)\tilde{Z}(0)) = 2\alpha(\tilde{Y}(0), \tilde{Z}(0)).$$

Поэтому $(*)$ следует также и из 3.1.6, 3.1.3.

Если $\dot{c} \neq 0$, то инвариантные векторные поля, порожденные начальными данными $(\dot{c}(0), 0)$ и $(0, \dot{c}(0))$, образуют двумерное подпространство, невырожденное по отношению к форме α . Поля Якоби, ортогональные $\dot{c}$, образуют ортогональное дополнение $^{(41)}$ этого подпространства. $\square$

Назовем траекторию $\varphi_t X_0$ *периодической*, если $X_0 \neq 0$ и существует такое $\omega > 0$, что $\varphi_\omega X_0 = X_0$.

Мы будем рассматривать только случай $|X_0| = 1$; ясно, что каждой периодической траектории $\varphi_t X_0$ соответствует корректно определенная периодическая траектория $\varphi_t X_0 / |X_0|$, которая обладает этим свойством $^{(42)}$. Кроме того, в данный момент мы будем предполагать, что ω — наименьшее положительное число, удовлетворяющее уравнению $\varphi_\omega X_0 = X_0$. Такое ω называется (*минимальным, наименьшим* $^{**})$ *периодом* периодической траектории $\varphi_t X_0$.

$^{*)}$ Второе из которых следует из первого, — надо продифференцировать и учесть, что $\nabla \dot{c} = 0$.

$^{**})$ В оригинале: *prime*, что находится в соответствии с термином *prime cycle* (§ 2.2).

3.1.8. Предложение. *Периодические траектории находятся во взаимно однозначном соответствии с однократными замкнутыми геодезическими:*

(i) если $\varphi_t X_0$ — периодическая траектория периода ω , то $c(t) := \tau_M \varphi_{\omega t} X_0$, $0 \leq t \leq 1$, есть однократная замкнутая геодезическая, для которой значение E равно $\kappa = \omega^2/2$;

(ii) если $c(t)$ — однократная замкнутая геодезическая, для которой значение E равно κ , то $\varphi_{\dot{c}}(\dot{c}(0)) / |\dot{c}(0)|$ — периодическая траектория периода $\omega = \sqrt{2\kappa}$.

Доказательство немедленно получается из 3.1.4. $\square$

Замечание. Излагаемая ниже конструкция отображения Пуанкаре^{*)}, соответствующего замкнутой траектории геодезического потока, проходит также и для замкнутой траектории произвольной гамильтоновой системы (N, α, H) , если только на этой траектории $dH \neq 0$ (Абрахам, Марсден [1]). Так как нас интересует только случай геодезического потока, то и результаты мы сформулируем только в этом специальном случае.

Пусть $X_0 \in T_1 M$ — расслоению единичных касательных векторов на M (⁴²). Тогда через $\Sigma = \Sigma(X_0)$ обозначим локальную трансверсальную гиперповерхность (короче, локальное сечение) потока в точке X_0 .

Сейчас мы построим некоторый специальный пример такой гиперповерхности. Пусть $\tau X_0 = p_0 \in M$, и пусть $D_\varepsilon^n(X_0)$ есть ε -диск в $T_{p_0} M$, ортогональный к $X_0 \in T_{p_0} M$ (напомним, что $\dim M = \dim T_{p_0} M = n+1$). Выберем ε столь малым, чтобы ε -диск с центром в точке $p_0 \in T_{p_0} M$ принадлежал области определения нормальной системы координат Римана, см. 1.2.6.

Пусть $T_1 \exp D_\varepsilon^n(X_0)$ — ограничение единичного касательного расслоения на проходящую через точку p_0 n -мерную локальную гиперповерхность $\exp D_\varepsilon^n(X_0)$. Определим теперь $\Sigma = \Sigma_\varepsilon(X_0)$ как пересечение $T_1 \exp D_\varepsilon^n(X_0)$ с ε -шаром $B_\varepsilon^{2n+2}(X_0)$, центр которого находится в точке $X_0 \in TM$. Здесь мы пользуемся метрикой на TM , которая индуцирована разложением $TTM = T_h TM \oplus \oplus T_v TM$ и каноническим отождествлением

$$T\pi: T_{X_0} TM \rightarrow T_{p_0} M, \quad K: T_{X_0} TM \rightarrow T_{p_0} M, \quad p_0 = \tau X_0.$$

3.1.9. Предложение. *При достаточно малых $\varepsilon > 0$ ограничение формы α на $\Sigma = \Sigma_\varepsilon(X_0)$ индуцирует симплектическую структуру.*

Доказательство. Введем возле точки $p_0 = \tau X_0$ с помощью некоторой карты (φ, U) такие локальные координаты $(x^0, x^1, \dots, x^n)$ на M , которые ортонормированы в p_0 , для которых все

^{*)} Говорят также «отображение (или функция) последования».

$\partial g_{ij}(\varphi(p_0))/\partial x^k = 0$ и в которых X_0 представляется в виде $(1, 0, \dots, 0)$. Пусть $(x^i, \dot{x}^i)$ и (x^i, y^i) — естественные координаты в TM и T^*M , индуцированные (x^i) . Тогда $T_{X_0}\Sigma$ представляется плоскостью $dx^0 = 0, d\dot{x}^0 = 0$, т. е. $\alpha|_{T_{X_0}\Sigma}$ представляется как $\sum_{i>0} dx^i \wedge dy^i$.

Действительно, Σ в окрестности точки X_0 является пересечением подмногообразий $TM|_{\exp D_s^2(X_0)}$ и T_1M . Касательные пространства к ним в X_0 суть

$$\{Z; Z \in T_{X_0}TM, \langle Z_h, X_0 \rangle = 0\} \quad \text{и} \quad \{Z; Z \in T_{X_0}TM, \langle Z_v, X_0 \rangle = 0\}.$$

Они пересекаются трансверсально, поэтому

$$T_{X_0}\Sigma = \{Z; Z \in T_{X_0}TM, \langle Z_h, X_0 \rangle = \langle Z_v, X_0 \rangle = 0\}.$$

В терминах введенных локальных координат

$$\langle Z_h, X_0 \rangle = dx^0(T\varphi \cdot Z), \quad \langle Z_v, X_0 \rangle = d\dot{x}^0(T\varphi \cdot Z),$$

$$a \quad dy^i|_{T_{\varphi(p_0)}\mathbb{R}^{2n+2}} = d\dot{x}^i|_{T_{\varphi(p_0)}\mathbb{R}^{2n+2}}. \quad \square^{(43)}$$

3.1.10. Лемма. Пусть $\varphi_t X_0$ — периодическая траектория с минимальным периодом ω . Пусть, далее, $\Sigma = \Sigma(X_0)$ — локальное сечение потока в точке X_0 .

Утверждение. Существуют такие открытые окрестности Σ_0 и Σ_ω точки X_0 на Σ и такая дифференцируемая функция $\delta: \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}$, что $\delta(X_0) = 0$ и отображение

$$X \mapsto \varphi_{\omega+\delta(X)} X$$

является некоторым симплектическим диффеоморфизмом

$$\mathcal{P}: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_\omega.$$

Кроме того, $\varphi_t X \notin \Sigma$ при $0 < t < \omega + \delta(X)$.

Мы назовем $\mathcal{P}$ отображением Пуанкаре или отображением последования (соответствующим периодической траектории $\varphi_t X_0$ или замкнутой геодезической c^*).

*1 И локальному сечению Σ . Вообще говоря, $\mathcal{P}$ могло бы зависеть и от того, как именно Σ уменьшено до Σ_0 и Σ_ω , однако из доказательства видно, что при различном выборе Σ_0 и Σ_ω полученные отображения совпадают в некоторой окрестности X_0 .

Позднее мы иногда будем говорить об отображении Пуанкаре для «периодической траектории» $\varphi_t X_0$, которая как замкнутая кривая неодиократна, т. е. которая рассматривается как периодическая функция $t \mapsto \varphi_t X_0$ с периодом ω , хотя этот период для нее уже не является минимальным. Пусть минимальным периодом будет ω_0 , а $\mathcal{P}_0$ — соответствующее отображение Пуанкаре в смысле 3.1.10; пусть $\omega = k\omega_0$, $k > 1$. Тогда под отображением Пуанкаре «за период ω » мы будем понимать, естественно, $\mathcal{P} := \mathcal{P}_0^k$ (при этом может оказаться необходимым уменьшить область определения). Изменение по сравнению с 3.1.10 состоит теперь в том, что нельзя утверждать, будто $\varphi_t X \notin \Sigma$ при $0 < t < \omega + \delta(X)$; напротив, $\varphi_t X \in \Sigma$ в некоторые моменты, близкие к $\omega_0, \dots, (k-1)\omega_0$.

Доказательство. Нас интересует только тот случай, когда M полно (или даже компактно), поэтому проведем доказательство, предполагая, что отображения $\varphi_t: T_1M \rightarrow T_1M$ определены при всех $t \in \mathbb{R}$ и составляют однопараметрическую группу диффеоморфизмов.

Вектор $S(X_0) = (X_0, 0)$ ортогонален $T_{X_0}\Sigma$. Действительно, при $Z \in T_{X_0}\Sigma$

$$\langle S(X_0), Z \rangle = \langle X_0, Z_h \rangle = 0$$

(см. доказательство 3.1.9). Поэтому, взяв на Σ достаточно малую окрестность Σ_1 точки X_0 , получим, что при $X \in \bar{\Sigma}_1$ вектор $S(X)$ трансверсален к $T_X\Sigma_1$. Отсюда легко вывести, что существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что

$$\varphi_t\Sigma_1 \cap \Sigma_1 = \emptyset \quad \text{при} \quad |t| < \varepsilon_1.$$

Так как $\varphi_t X_0 \neq X_0$ для $0 < t < \omega$, то существуют такая окрестность U точки X_0 на T_1M и такое $\varepsilon > 0$, что $\varphi_\omega|U: U \rightarrow \varphi_\omega U$ есть диффеоморфизм и $\varphi_t U \cap U = \emptyset$ при $\varepsilon < t < \omega - \varepsilon$. При этом чем меньше U , тем меньше можно взять ε . Пусть U таково, что годится $\varepsilon = \varepsilon_1$.

Возьмем окрестность Σ_2 точки ρ_0 на Σ , для которой $\bar{\Sigma}_2 \subset \subset \varphi_\omega^{-1}U \cap U \cap \Sigma$. Рассмотрим отображение

$$\psi:]-\varepsilon_2 + \omega, \omega + \varepsilon_2[\times \Sigma_2 \rightarrow T_1M, \quad (t, X) \mapsto \varphi_t X.$$

При достаточно малом $\varepsilon_2 > 0$ имеем $\text{im } \psi \subset U$ (можно считать, что $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$). Отображение $T\psi$ имеет в точке (ω, X_0) ранг $n+1$. (Действительно, пространство $\text{im } T\psi(\omega, X_0)$ порождено вектором $S(X_0)$ и пространством $T_{\varphi_\omega(X_0)}T_{X_0}\Sigma$. Но вектор $S(X_0) = T_{\varphi_\omega(X_0)}S(X_0)$ трансверсален к последнему пространству, поскольку $S(X_0)$ трансверсален к $T_{X_0}\Sigma$.) Поэтому при достаточно малых ε и Σ_2 отображение

$$\psi:]-\varepsilon + \omega, \omega + \varepsilon[\times \Sigma_2$$

будет диффеоморфизмом; обозначим его снова через ψ . Поскольку $X_0 \in \text{im } \psi$, некоторая открытая окрестность Σ_ω точки X_0 на Σ содержится в $\text{im } \psi$.

Определим

$$\chi: \Sigma_\omega \rightarrow \chi(\Sigma_\omega) \subset \Sigma$$

($\chi(\Sigma_\omega)$ мы и примем за Σ_0) и $\eta: \Sigma_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ посредством соотношения

$$\psi(\omega + \eta(X'), \chi(X')) = \varphi_{\omega + \eta(X')} \chi(X') = X'.$$

Тогда χ^{-1} — искомое отображение Пуанкаре $\mathcal{P}$ и $\delta(X) := \eta \cdot \chi^{-1}(X)$.

Осталось показать, что $\mathcal{F}$ симплектическое. Для того чтобы убедиться в этом, снова рассмотрим отображение ψ и заметим, что $\mathcal{F}(X) = \psi(\omega + \delta(X), X)$. Положим

$$T\psi|T[-\varepsilon + \omega, \varepsilon + \omega] = T_1\psi, \quad T\psi|T\Sigma = T_2\psi.$$

Отображение $T_2\psi$ симплектическое^{*)}, а

$$T_1\psi(t, X) \cdot \xi = (\text{некоторое число}) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_t X;$$

это число мы будем сейчас обозначать через $(T_1\psi \cdot \xi)$.

Поскольку $2\alpha\left(\frac{d}{dt} \varphi_t X, \cdot\right) = dH(\varphi_t X)$ и оттого $2\alpha(T_1\psi \cdot \xi, \cdot) = (T_1\psi \cdot \xi) dH$, а $H|_\Sigma = \text{const}$, так что^{**)} $dH \cdot T_2\psi = 0$, находим

$$\begin{aligned} 2\alpha(T\mathcal{F} \cdot \xi, T\mathcal{F} \cdot \eta) &= 2\alpha(T_1\psi \cdot T\delta \cdot \xi + T_2\psi \cdot \xi, T_1\psi \cdot T\delta \cdot \eta + T_2\psi \cdot \eta) = \\ &= 0 + (T_1\psi \cdot T\delta \cdot \xi) dH \cdot T_2\psi \cdot \eta - (T_1\psi \cdot T\delta \cdot \eta) dH \cdot T_2\psi \cdot \xi + \\ &\quad + 2\alpha(T_2\psi \cdot \xi, T_2\psi \cdot \eta) = 2\alpha(\xi, \eta). \quad \square \end{aligned}$$

Замечания. 1) Важность отображения Пуанкаре $\mathcal{F}$ связана с тем, что периодические точки X отображения $\mathcal{F}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с периодическими траекториями потока, целиком лежащими возле данной периодической траектории $\varphi_t X_0$, $0 \leq t \leq \omega$. Точнее, если $X \in \Sigma$ — такая точка, что при некотором целом $N = N(X) > 0$ выполняется соотношение

$$\mathcal{F}^N X = X,$$

то $\varphi_t X$ — периодическая траектория. Если $N(X)$ — минимальное целое число, обладающее этим свойством, то период траектории $\varphi_t X$ приблизительно равен $N\omega$.

2) Отображение $\mathcal{F}$ зависит от выбора локальной трансверсальной гиперповерхности Σ (ее не обязательно выбирать именно так, как описано перед 3.1.9). Но если Σ' — другая локальная трансверсальная гиперповерхность (возможно, взятая не возле X_0 , а возле некоторого $X_1 = \varphi_{t_1} X_0$) и $\mathcal{F}'$ — соответствующее отображение Пуанкаре, то ограничения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ на некоторые окрестности X_0 в Σ и X_1 в Σ' сопряжены посредством некоторого диффеоморфизма этих окрестностей, переводящего симплектическую структуру в одной из них в симплектическую структуру в другой.

^{*)} Точнее, $T_i\psi$ определяются так:

$$T_1\psi(t, X) \cdot \xi = T\psi(t, X) \cdot (\xi, 0_X)$$

(где 0_X — нуль $T_X\Sigma$) и аналогично для $T_2\psi$. Симплектичность $T_2\psi$ означает, что $\alpha(T_2\psi \cdot \xi, T_2\psi \cdot \eta) = \alpha(\xi, \eta)$. Это следует из того, что $T_2\psi(t, X) = T\varphi_t|T_X\Sigma$.

^{**)} Действительно, $H \circ \varphi_t = H$, $dH \cdot T\varphi_t = dH$, поэтому $dH \cdot T_2\psi(t, X) = dH \cdot (T\varphi_t|T\Sigma) = dH|T\Sigma = 0$.

3.2. Теорема об индексе для замкнутых геодезических

В этом параграфе мы свяжем индекс замкнутой геодезической, введенный в § 2.4, со свойствами линеаризованного геодезического потока вдоль соответствующей замкнутой траектории. Полученные результаты найдут впоследствии важные приложения. Материал этого параграфа содержится в статье Клингенберга [15]. Нормальная форма 3.2.4 для симплектических преобразований впервые (в несколько другом виде) была получена Вильямсоном [1]*).

Мы начнем с рассмотрения *линейного симплектического преобразования* $P: V \rightarrow V$ *действительного симплектического векторного пространства*, $\dim V = 2n$. Другими словами, мы рассматриваем пространство V с заданной на нем билинейной кососимметрической невырожденной формой α и линейное преобразование P , сохраняющее α , т. е. $\alpha(PX, PY) = \alpha(X, Y)$.

Удобно комплексифицировать V , т. е. рассматривать пространство $V_{\mathbb{C}} := V \otimes \mathbb{C} \cong V \oplus iV$. Кроме того, мы будем рассматривать α как косоэрмитову форму на $V \otimes \mathbb{C}$ (**):

$$(X, Y) \mapsto \alpha(X, Y); \quad X, Y \in V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}}; \quad \alpha(X, Y) \in \mathbb{C},$$

а отображение $P: V \rightarrow V$ продолжим до $P: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$, полагая $Pi = iP$. Для простоты пространство $V_{\mathbb{C}}$ мы снова будем обозначать через V .

*1 В указанной работе речь идет о нормальной форме для линейных отображений, кососимметрических по отношению к α (см. ниже в основном тексте) в действительном пространстве. Тот же вопрос (а также аналогичный вопрос о симметрических отображениях) заново рассмотрен Ягломом [1], не зная о работе Вильямсона. Симплектическим же линейным преобразованиям посвящена работа Вильямсона [2]. У Вильямсона [1], [2] подход является более алгебраическим, а у Яглома — более геометрическим (в этом отношении данная книга ближе к работе Яглома). Клингенберг не доводит исследования до полной классификации — для его целей это не нужно; впрочем, это уже нетрудно сделать после всего того, что сказано в настоящей книге (включая некоторые уточнения в примечаниях). Еще одно изложение вопроса о классификации симплектических линейных преобразований имеется у Кушмана и Дейстермата [1].

В связи с историей вопроса замечу, что обнаруженное Вильямсоном различие между двумя типами собственных значений линейных симплектических преобразований, равных по модулю единице, было впоследствии по другому поводу переоткрыто М. Г. Крейном для случая простых элементарных делителей (в общем случае рассматриваемые М. Г. Крейном понятия отличаются от тех, которые нас здесь интересуют). С тех пор оно играет важную роль в теории линейных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами. Подробности и библиографию см. у Якубовича и Старжинского [1]. Введение в эту теорию имеется в работах Арнольда, Авеца [1] и Арнольда [4].

Подпространство $U \subset V$ называется *действительным* ^{*}), если $\bar{U} = U$. Оно называется *невыврожденным*, если форма $\alpha|_U$ невырождена, т. е. для каждого $X \in U$, $X \neq 0$, существует такое $Y \in U$, что $\alpha(X, Y) \neq 0$. Подпространство U называется *изотропным*, если $\alpha|_U \equiv 0$.

3.2.1. Предложение. Пусть $P: V \rightarrow V$ — симплектическое преобразование $\blacktriangle$ исходного действительного V , т. е. действительное симплектическое преобразование комплексифицированного V $\blacktriangle$.

(i) Если ρ — собственное значение P , то $\bar{\rho}$, ρ^{-1} и $\bar{\rho}^{-1}$ также являются собственными значениями P .

(ii) Пусть $V(\rho)$ — корневое подпространство преобразования P , отвечающее собственному значению ρ , т. е. $V(\rho) = \{X \in V; \text{существует целое } k \geq 0, \text{ при котором } (P\rho^{-1} - 1)^k X = 0^{**})\}$. Тогда V является ортогональной суммой невырожденных подпространств вида

$$\begin{aligned} V(\rho) \oplus V(\bar{\rho}^{-1}), & \quad \text{если } \rho\bar{\rho} \neq 1, \\ V(\rho), & \quad \text{если } \rho\bar{\rho} = 1. \end{aligned}$$

Доказательство. (i) Так как P действительно, то $\bar{\rho}$ и ρ являются собственными значениями одновременно. Рассмотрим изоморфизм

$$\alpha_*: V \rightarrow V^*, \quad X \mapsto \alpha(X, \cdot).$$

Тогда $\alpha(PX, Y) = \alpha(X, P^{-1}Y)$, т. е. $\alpha_* \cdot P = {}^tP^{-1} \cdot \alpha_*$, или ${}^tP^{-1} = \alpha_* \cdot P \cdot (\alpha_*)^{-1}$, где ${}^tP$ — преобразование в V^* , сопряженное к P . Значит, числа ρ^{-1} и ρ также являются собственными значениями одновременно.

(ii) Покажем, что при $\rho\bar{\rho} \neq 1$

$$\alpha(V(\rho), \overline{V(\sigma)}) = 0.$$

Для того чтобы убедиться в этом, обозначим через $V_j(\rho)$, где j — целое, $j \geq 0$, подпространство пространства $V(\rho)$, которое аннулируется преобразованием $(P\rho^{-1} - 1)^j$. Для $X \in V_1(\rho)$ и $Y \in$

^{*}) Название объясняется не столько аналогией с числами, сколько тем, что подпространства $U \subset V$, для которых $\bar{U} = U$, — это в точности те подпространства, которые получаются комплексификацией подпространств исходного действительного векторного пространства. Для действительных подпространств безразлично, понимать ли ортогональность относительно спаривания $(X, Y) \mapsto \alpha(X, Y)$ или относительно $(X, Y) \mapsto \alpha(X, \bar{Y})$. То же справедливо для определяемых далее в основном тексте невырожденности и изотропности.

^{***)} Мы вправе говорить о ρ^{-1} и писать $(P\rho^{-1} - 1)^k X = 0$ вместо обычного $(P - \rho^{-1})X = 0$, ибо $\rho \neq 0$. Действительно, если $PX = 0$, то $\alpha(X, Y) = \alpha(PX, PY) = 0$ для любого Y , что противоречит невырожденности α .

$\in V_1(\sigma)$ имеем

$$\alpha(X, \bar{Y}) = \alpha(PX, P\bar{Y}) = \rho\bar{\rho}\alpha(X, \bar{Y}),$$

откуда $\alpha(X, \bar{Y}) = 0$. Предположим, что мы уже знаем, что

$$\alpha(V_{r-1}(\rho), V_s(\bar{\sigma})) = \alpha(V_r(\rho), V_{s-1}(\bar{\sigma})) = 0.$$

Для $(r, s) = (1, 2)$ или $(2, 1)$ это так, — ведь $V_1(\rho)$ ортогонально $V_1(\sigma)$, а $V_0(\rho) = 0$ и $V_0(\sigma) = 0$ ортогональны всему V . При $X \in V_r(\rho)$, $Y \in V_s(\sigma)$ имеем

$$\alpha((P\rho^{-1} - 1)X, P\bar{Y}) = \alpha(X, (P\bar{\sigma}^{-1} - 1)\bar{Y}) = 0,$$

и, следовательно,

$$\alpha(X, \bar{Y}) = \bar{\sigma}^{-1}\alpha(X, P\bar{Y}) = \bar{\sigma}^{-1}\rho^{-1}\alpha(PX, P\bar{Y}) = \bar{\sigma}^{-1}\rho^{-1}\alpha(X, \bar{Y}),$$

откуда $\alpha(X, \bar{Y}) = 0$.

Наконец, так как для каждого $X \in V(\rho)$, $X \neq 0$, существует такой вектор X^* , что $\alpha(X, X^*) \neq 0$, то форма $\alpha|V(\rho) \oplus V(\bar{\rho}^{-1})$ в случае $\rho\bar{\rho} \neq 1$ и форма $\alpha|V(\rho)$ в случае $\rho\bar{\rho} = 1$ являются невырожденными^{*)}, ибо $V(\rho)$ ортогонально всем остальным подпространствам $V(\sigma)$. $\square$

3.2.2. Предложение. Пусть $\rho \neq 0$. Тогда

$$(*) \quad \alpha((P\rho^{-1} - 1)^j X, \bar{Y}) = (-1)^j \alpha((P\rho^{-1})^j X, (P\rho - 1)^j \bar{Y}).$$

Доказательство. $\alpha((P\rho^{-1} - 1)^j X, \bar{Y}) = \alpha(P\rho^{-1}(P\rho^{-1} - 1)^{j-1} X, \bar{Y}) - \alpha((P\rho^{-1} - 1)^{j-1} X, \bar{Y}) = -\alpha(P\rho^{-1}(P\rho^{-1} - 1)^{j-1} X, (P\rho - 1)\bar{Y})$. $\square$

3.2.3. Лемма. Пусть ρ — такое собственное значение преобразования P , что $\rho\bar{\rho} = 1$. Пусть, далее, $k = k_\rho$ — наибольшее целое ≥ 0 , такое, что $(P\bar{\rho} - 1)^k \neq 0$ на $V(\rho)$.

Утверждение. (i) Если $k = 2l - 1$, то существует такой вектор $X \in V(\rho)$, что элементы $(P\bar{\rho} - 1)^j X$, $0 \leq j \leq k$, образуют базис невырожденного подпространства^{***)} и

$$\alpha((P\bar{\rho} - 1)^j X, (P\rho - 1)^{j-1} \bar{X}) = \pm 1.$$

(ii) Если $k = 2l$, то существует такой вектор $X \in V(\rho)$, что элементы $(P\bar{\rho} - 1)^j X$, $0 \leq j \leq k$, образуют базис невырожденного

^{*)} Здесь подразумевается «косозермитизированная» α .

^{**)} Стоит предупредить, что при $|\rho| = 1$ автор часто пишет $\bar{\rho}$ вместо ρ^{-1} .

Полезно также иметь в виду, что $(P\rho^{-1} - 1)|V(\rho) = N|V(\rho)$, где N — нильпотентное линейное отображение, фигурирующее в представлении $P = S(1 + N)$, где S полупростое (= диагонализуемое) и $SN = NS$. (Утверждение о существовании и единственности такого представления — один из вариантов формулировки теоремы о жордановой нормальной форме.)

^{***)} Легко видеть, что оно порождается также и векторами $P^j X$, $j \geq 0$, так что это есть так называемое циклическое подпространство, порожденное X .

подпространства *) и

$$\alpha((P\bar{p}-1)^l X, (Pp-1)^l \bar{X}) = \pm i.$$

Доказательство. Положим $V_1^k(\rho) = (P\bar{p}-1)^k V(\rho)$. Используя 3.2.2, разложение $(P\bar{p})^r = (1 + P\bar{p} - 1)^r = 1 + r(P\bar{p} - 1) + \dots$ и снова 3.2.2, получим, что при $X, Y \in V(\rho)$

$$(**) \quad \alpha((P\bar{p}-1)^{k-r} X, (Pp-1)^r \bar{Y}) = (-1)^{k-r} \alpha(X, (Pp-1)^k \bar{Y}).$$

Таким образом, если в левой части (**) изменить r на 1 («один раз перекинуть оператор $P\bar{p}-1$ с X на Y или с Y на X »), то у этой левой части изменится знак.

Предположим, что $\alpha((P\bar{p}-1)^k X, \bar{X}) = 0$ для всех $(P\bar{p}-1)^k X \in V_1^k$. В V_1^k существует ненулевой вектор $(P\bar{p}-1)^k X$. Для него существует такой вектор $Y \in V(\rho)$, что

$$\alpha((P\bar{p}-1)^k X, \bar{Y}) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ i, & \text{если } k \text{ четно.} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha((P\bar{p}-1)^k Y, \bar{X}) &= (-1)^k \alpha(Y, (P\bar{p}-1)^k \bar{X}) = \\ &= (-1)^{k+1} \overline{\alpha((P\bar{p}-1)^k X, \bar{Y})} = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ i, & \text{если } k \text{ четно.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } ***) \quad \alpha((P\bar{p}-1)^k (X+Y), \overline{X+Y}) &= \alpha((P\bar{p}-1)^k X, \bar{Y}) + \\ &+ \alpha((P\bar{p}-1)^k Y, \bar{X}) = \begin{cases} 2, & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ 2i, & \text{если } k \text{ четно.} \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, можно предполагать, что существует $X \in V_1^k(\rho)$, при котором

$$\alpha((P\bar{p}-1)^l X, (Pp-1)^{l-1} \bar{X}) \neq 0, \quad k=2l-1,$$

$$\alpha((P\bar{p}-1)^l X, (Pp-1)^l \bar{X}) \neq 0, \quad k=2l.$$

При замене X на λX эти величины умножаются на $|\lambda|^2$. Из полученной выше формулы (**) при $Y=X$ видно, что первое выражение — действительное, в то время как второе — чисто мнимое.

*) См. последнее примечание на предыдущей странице.

**) Суть приведенного рассуждения состоит в том, что:

а) билинейная форма $\Phi_{k+1}(X, Y) := \alpha((P\bar{p}-1)^k X, \bar{Y})$ на $V(\rho) = V_{k+1}(\rho)$ при нечетном k эрмитова, а при четном — косоэрмитова (и превращается в эрмитову при делении на i);

б) ее ядро совпадает с $V_k(\rho)$. Далее фактически используется форма

$$\psi_{k+1}(X, Y) := \alpha((P\bar{p}-1)^l X, (Pp-1)^{k-l} \bar{Y}) \quad (k=2l-1 \text{ или } 2l),$$

отличающаяся от Φ_{k+1} только знаком $(-1)^{k-l}$ (ввиду (**)).

Невырожденность циклического подпространства, порожденного X , следует из того, что ограничение α на это подпространство имеет в базисе $(P\bar{\rho} - 1)^j X$ матрицу коэффициентов (матрицу Грама) с ненулевыми элементами на побочной диагонали и нулями ниже нее. $\square$

3.2.4. Теорема. Пусть $P: V \rightarrow V$ — действительное симплектическое преобразование. Тогда существует такое ортогональное разложение

$$V = V_{nc} \oplus V_{co}$$

на невырожденные действительные инвариантные подпространства, что ограничение $P|_{V_{nc}}$ некомпактно, а ограничение $P|_{V_{co}}$ компактно, т. е. принадлежит компактной подгруппе группы $Sp(V)$.

Подпространство V_{nc} допускает ортогональное разложение

$$V_{nc} = V_{su} \oplus V_{od} \oplus V_{ev}$$

на невырожденные инвариантные действительные подпространства. Здесь

V_{su} — ортогональная прямая сумма подпространств $V(\rho) \oplus V(\bar{\rho}^{-1})$, $|\rho| \neq 1$;

V_{od} — ортогональная прямая сумма подпространств $V_{od, \rho}$, имеющих базис вида $(P\bar{\rho} - 1)^j X$, $0 \leq j \leq 2l - 1$, $l \geq 1$, $|\rho| = 1$;

V_{ev} — прямая сумма подпространств $V_{ev, \rho}$, имеющих базис вида $(P\bar{\rho} - 1)^j X$, $0 \leq j \leq 2l$, $l \geq 1$, $|\rho| = 1$ *). ⁽⁴⁵⁾

3.2.5. Дополнение. V_{su} имеет максимальное изотропное инвариантное действительное подпространство V_s , порожденное подпространствами $V(\rho)$ с $|\rho| < 1$;

V_{od} имеет максимальное изотропное действительное инвариантное подпространство $V_{od, in}$, порожденное подпространствами $V_{od, in, \rho} \subset V_{od, \rho}$, имеющими базис, состоящий из элементов $(P\bar{\rho} - 1)^j X$, $l \leq j \leq 2l - 1$;

V_{ev} имеет изотропное действительное инвариантное подпространство $V_{ev, in}$, порожденное подпространствами $V_{ev, in, \rho} \subset V_{ev, \rho}$, имеющими базис вида $(P\bar{\rho} - 1)^j X$, $l + 1 \leq j \leq 2l$.

Замечание. Подпространство $V_{ev, in}$ не является максимальным изотропным подпространством. Для каждого из k_{ev} действительных подпространств $V_{ev, \rho} \oplus \bar{V}_{ev, \rho}$, которые составляют пространство V_{ev} , подпространства $V_{ev, in, \rho} \oplus \bar{V}_{ev, in, \rho}$ имеют размерность на 2 меньшую, чем максимальное изотропное подпространство.

*) Происхождение нижних индексов nc , co и т. д. достаточно ясно; стоит только пояснить, что su происходит от stable, unstable (ср. с V_s в 3.2.5). Кроме того, in происходит от unitary, а e , по словам автора, ничего не означает и ставится просто, чтобы как-то обозначить соответствующее пространство (оно появится дальше).

Доказательство. Ясно, что V_{su} корректно определено. Поэтому рассмотрим собственное значение ρ , по модулю равное 1. Пусть $k = k_\rho$ равно максимальному l , при котором $(P\bar{\rho} - 1)^l \neq 0$ на $V(\rho)$. Предположим, что $k > 0$. Из 3.2.3 мы получаем существование невырожденного подпространства $V_{od, \rho}$ или $V_{ev, \rho}$ в зависимости от того, нечетно k или четно. $\blacktriangle$ При $\rho \neq \pm 1$ это подпространство ортогонально своему комплексно сопряженному (ибо вообще $V(\rho)$ и $V(\bar{\rho}) = \overline{V(\rho)}$ ортогональны). Значит,

$$V_{od, \rho} \oplus \bar{V}_{od, \rho} \quad \text{или} \quad V_{ev, \rho} \oplus \bar{V}_{ev, \rho}$$

— невырожденное инвариантное действительное подпространство, и мы можем его «отщепить», т. е. перейти к рассмотрению его ортогонального дополнения. При $\rho = \pm 1$ и нечетном k из доказательства 3.2.3 видно, что вектор X , порождающий соответствующее $V_{od, \rho}$, можно взять действительным. Тогда $V_{od, \rho}$ будет действительным, и можно перейти к его ортогональному дополнению. Сложнее всего случай, когда $\rho = \pm 1$ и k четно. В этом случае мы, как и раньше, берем $V_{ev, \rho} + \bar{V}_{ev, \rho}$, однако теперь оба слагаемых лежат в одном и том же $V(\rho)$, и потому неясно, будут ли они ортогональны и является ли сумма $V_{ev, \rho} + \bar{V}_{ev, \rho}$ прямой (т. е. верно ли, что $V_{ev, \rho} \cap \bar{V}_{ev, \rho} = \{0\}$), а следовательно, неясно и то, является ли подпространство $V_{ev, \rho} + \bar{V}_{ev, \rho}$ невырожденным. Первое обеспечивается только путем дополнительных построений при выборе X и нам не понадобится; мы непосредственно докажем второе и третье, после чего по-прежнему можно будет перейти к ортогональному дополнению невырожденного инвариантного действительного подпространства $V_{ev, \rho} \oplus \bar{V}_{ev, \rho}$.

Мы докажем, что матрица Грама G формы $\alpha(X, \bar{Y})$ по отношению к системе векторов

$$X, (\pm P - 1)X, \dots, (\pm P - 1)^k X, \bar{X}, (\pm P - 1)\bar{X}, \dots, (\pm P - 1)^k \bar{X}$$

невырожденна; это гарантирует и линейную независимость этих векторов, и невырожденность формы $\alpha(X, \bar{Y})$ на соответствующем подпространстве. Очевидно, G разбивается на квадратные клетки порядка $k+1$:

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где, нумеруя элементы матриц A, B, C, D индексами $i, j = 0, \dots, k$, имеем

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \alpha((\pm P - 1)^i X, (\pm P - 1)^j \bar{X}), \\ B_{ij} &= \alpha((\pm P - 1)^i X, (\pm P - 1)^j X), \\ C_{ij} &= \alpha((\pm P - 1)^i \bar{X}, (\pm P - 1)^j \bar{X}), \\ D_{ij} &= \alpha((\pm P - 1)^i \bar{X}, (\pm P - 1)^j X). \end{aligned}$$

Из различных вытекающих отсюда соотношений для этих коэффициентов отметим только следующие. При $i + j > k$ все они равны нулю (пользуясь формулой (**)) из доказательства 3.2.3, несколько раз «перебрасываем» оператор $\pm P - 1$ на один из аргументов формы α с другого аргумента). Если же $i + j = k$, то $A_{ij} \neq 0$ и $D_{ij} \neq 0$ (выбор X и «переброска» $\pm P - 1$), а $B_{ij} = C_{ij} = 0$. Последнее получается так: учитывая, что $k = 2l$, имеем

$$\begin{aligned} B_{i, k-i} &= \alpha((\pm P - 1)^i X, (\pm P - 1)^{k-i} X) = \\ &= (-1)^{l-i} \alpha((\pm P - 1)^i X, (\pm P - 1)^i X) = 0 \end{aligned}$$

и аналогично для C . Чтобы доказать невырожденность матрицы G , умножим ее справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

(невырожденность A явствует из отмеченных свойств A_{ij}). Определитель при этом не меняется, так что достаточно доказать, что

$$(CA^{-1}B)_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i + j \geq k.$$

Если из уравнения $x'_i = \sum_{j=0}^{k-i} A_{ij} x_j$ выразить x_i через x'_j , то матрицей коэффициентов в этих выражениях будет A^{-1} . Но непосредственно из уравнений видно, что x_0 выражается через x'_k , x_1 — через x'_{k-1} и x'_k и т. д., т. е. $(A^{-1})_{ij} = 0$ при $i + j < k$. Теперь

$$(CA^{-1}B)_{ij} = \sum_{r,s} C_{ir} (A^{-1})_{rs} B_{sj}.$$

Слагаемые могут быть $\neq 0$ лишь при

$$(a) \quad i + r < k, \quad s + j < k, \quad r + s \geq k.$$

Нас интересуют (i, j) с

$$(b) \quad i + j \geq k.$$

Но условия (a) и (b) несовместимы. $\blacktriangle$

Итак, во всех случаях мы «отщепляем» некоторое невырожденное действительное инвариантное подпространство, дающее нужный вклад в V_{od} или V_{ev} , и переходим к его ортогональному дополнению. К последнему применяем те же самые рассуждения.

Если $k = 0$, то получаем подпространство, базисом которого является элемент X , такой, что $PX = \rho X$, $\alpha(X, X) = \pm i$. В этом случае X вместе с $\bar{X}$ добавляется к V_{co} . Это доказывает 3.2.4.

Дополнение следует из теоремы и ее доказательства. $\blacktriangle$ Пояснения требует только изотропность пространства $\Sigma \oplus V_{ev, in, \rho}$ при $\rho = \pm 1$. По построению оно является ортогональной прямой

суммой подпространств, имеющих вид

$$V_{ev, in, \rho} \oplus \bar{V}_{ev, in, \rho}.$$

Здесь оба слагаемых изотропны, однако их ортогональности друг другу мы пока не проверяли. Но при $i, j > l$

$$\alpha((\pm P - 1)^i X, (\pm P - 1)^j Y) = \pm \alpha((\pm P - 1)^{i+j} X, Y) = 0,$$

ибо $i + j > 2l = k$. $\blacktriangle \square$

3.2.6. Лемма. Пусть $V^{2n} = V_{in}^{2p} \oplus V_{in}^{2q}$ — ортогональное разложение на невырожденные действительные подпространства. Пусть $V_{in}^p \subset V_{in}^{2p}$ — инвариантное действительное изотропное подпространство и $V_v^n \subset V^{2n}$ — изотропное подпространство *).

Утверждение. (i) Проекция $V_v^n \cap (V_{in}^p \oplus V_{in}^{2q})$ на V_{in}^{2q} параллельно V_{in}^p является максимальным действительным изотропным подпространством $V_{in}^q \subset V_{in}^{2q}$.

(ii) $V_v^n := V_{in}^p \oplus V_{in}^q$ — максимальное изотропное подпространство в V^{2n} .

(iii) Существует такое $V_v^q \subset V_v^n$, что $V_v^n = V_{in}^p \oplus V_v^q$.

Доказательство. Положим $V_v^n \cap V_{in}^p = V_{in}^k$, где k — размерность этого подпространства. Пусть V_{in}^{2p} — изотропное дополнение V_{in}^p в V_{in}^{2p} , т. е. дополнение, само являющееся изотропным подпространством **). Пусть, далее, V^{*l} — проекция V_v^n на V_{in}^{2p} параллельно $V_{in}^p \oplus V_{in}^{2q}$. Для каждого $X^* \in V^{*l}$ найдется такое $X' \in V_{in}^p \oplus V_{in}^{2q}$, что $X^* + X' = X_v \in V_v^n$ и любое $X_v \in V_v^n$ представлено в таком виде. Поэтому при любых $X^* \in V^{*l}$, $Y \in V_{in}^k$ имеем

$$\alpha(X^*, Y) = \alpha(X^* + X', Y) = \alpha(X_v, Y) = 0$$

(используем сначала, что $Y \in V_{in}^p$ и что V_{in}^p изотропно, а V_{in}^{2q} ортогонально V_{in}^p ; затем — что $Y \in V_v^n$ и что V_v^n изотропно). Но

*) В самой лемме инвариантность V_{in}^p не используется, но она играет роль при применении леммы (см., например, конец доказательства 3.2.11). Использование индекса v в V_v^n связано с тем, что при этом применении у нас появится понятие «вертикального подпространства» и это будет как раз V_v^n .

**) Существование такого дополнения легко доказывается и является известным фактом линейной алгебры (например, он формально следует из теоремы Витта о продолжении линейных отображений, сохраняющих симметрическую или кососимметрическую билинейную форму, а по существу устанавливается при доказательстве этой теоремы).

V^{*l} и V_{in}^k изотропны (как подпространства изотропных подпространств). Поэтому $V^{*l} + V_{in}^k$ изотропно. Сумма здесь прямая: $V^{*l} \cap V_{in}^k \subset V_{in}^{*p} \cap V_{in}^p = \{0\}$. Так как ограничение $\alpha|_{V_{in}^p \oplus V_{in}^{*p}}$ невырожденно, то $k+l \leq p$, т. е. $\dim(V_v^n \cap (V_{in}^p \oplus V_{un}^{*q})) = n-l \geq n+k-p$. Поэтому проекция $V_{un}^{q'}$ этого пространства на V_{un}^{*q} параллельно V_{in}^p имеет размерность $q' \geq n-p=q$.

Однако для любых X, Y из $V_{un}^{q'}$ найдутся такие элементы X', Y' из V_{in}^p , что их суммы дадут элементы из V_v^n ; поэтому

$$\alpha(X, Y) = \alpha(X + X', Y + Y') = 0$$

(используем сначала, что $\alpha(V_{in}^p, V_{un}^{*q}) = 0$ и что V_{in}^p изотропно, а затем — что V_v^n изотропно). Поэтому $V_{un}^{q'}$ изотропно. Значит, $q' = q$, что и доказывает (i). Части (ii) и (iii) непосредственно следуют из наших конструкций. (В качестве V_v^n берем q -мерное подпространство в $V_v^n \cap (V_{in}^p \oplus V_{un}^{*q})$, проектирующееся (параллельно V_{in}^p) на все V_{un}^q .) $\square$

3.2.7. Предложение. Пусть $V^q \subset V^{2q}$ — действительное максимальное изотропное подпространство. Пусть $|\rho| = 1$ и ρ не является собственным значением симплектического изоморфизма $P: V^{2q} \rightarrow V^{2q}$.

Утверждение. $Q_\rho(X, Y) := -2\alpha(X, (P\rho - 1)^{-1}Y)$ — эрмитова форма на V^q . Ядром формы Q_ρ является $V^q \cap (P\bar{\rho} - 1)V^q$.

Доказательство. Положим $(P\bar{\rho} - 1)^{-1}X = S$, $(P\bar{\rho} - 1)^{-1}Y = T$. Тогда $Q_\rho(X, Y) = -2\alpha(X, \bar{T})$, $\bar{Y} = -T + P\rho\bar{T}$,

$$\begin{aligned} 0 &= 2\alpha(X, Y) = -2\alpha(X, \bar{T}) + 2\alpha(X, P\rho\bar{T}) = \\ &= Q_\rho(X, Y) + 2\alpha(P\bar{\rho}S - S, P\rho\bar{T}) = \\ &= Q_\rho(X, Y) + 2\alpha(S, \bar{T}) - 2\alpha(S, P\rho\bar{T}) = \\ &= Q_\rho(X, Y) + 2\alpha((P\rho - 1)\bar{T}, S) = Q_\rho(X, Y) - \overline{Q_\rho(Y, X)}. \end{aligned}$$

Наконец, Y принадлежит ядру Q_ρ тогда и только тогда, когда $\alpha(V^q, \bar{T}) = 0$, т. е. $T \in V^q$. Следовательно, $Y \in V^q \cap (P\bar{\rho} - 1)V^q$. $\square$

▲ **Замечание.** В тех же предположениях если $Y \in V^q$ принадлежит ядру Q_ρ , то $Y = (P\bar{\rho} - 1)X$, $X \in V^q$; значит, $PX = \rho(X + Y) \in V^q$. Итак, $PX \in V^q$ и $X \in V^q$; иными словами, $X \in V^q \cap P^{-1}V^q$. Обратно, если $X \in V^q \cap P^{-1}V^q$, то $X \in V^q$ и $PX \in V^q$, а тогда $Y := (P\bar{\rho} - 1)X$ — элемент из ядра Q_ρ . Следовательно, $P\bar{\rho} - 1$ изоморфно отображает $V^q \cap P^{-1}V^q$ на ядро Q_ρ , а потому дефект Q_ρ не зависит от ρ . (Напомним еще раз, что все это относится к тому случаю, когда ρ не является собственным значением P .)

Покажем, что индекс Q_ρ как функция от ρ постоянен на тех дугах окружности $S^1 = \{\rho; |\rho| = 1\}$, на которые ее разбивают собственные значения ρ_j преобразования P , равные по модулю единице. Это вытекает из следующих общих фактов: если на V^q имеется некоторая эрмитова форма Q_λ , непрерывно зависящая от некоторого параметра λ (он может принимать значения в произвольном топологическом пространстве; в нашем случае $\lambda \in S^1 - (\cup \rho_j)$), то

индекс Q_λ — полунепрерывная снизу функция λ ,
(индекс + дефект) Q_λ — полунепрерывная сверху функция λ .

(В нашем случае, когда дефект постоянен, получается, что индекс непрерывен по λ , так что, будучи целочисленным, он должен быть постоянным на компонентах связности $S^1 - (\cup \rho_j)$.) Поскольку

$$(\text{индекс} + \text{дефект}) Q_\lambda = q - \text{дефект } Q_\lambda,$$

то достаточно доказать только полунепрерывность дефекта. Снабдив на минуту V^q положительно определенной эрмитовой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$, представим $Q_\lambda(X, Y)$ в виде $\langle A_\lambda X, Y \rangle$ с эрмитовым оператором A_λ ; тогда индекс Q_λ равен числу отрицательных собственных значений A_λ (с учетом кратности), т. е. числу отрицательных корней уравнения $\det(x - A_\lambda) = 0$, коэффициенты которого непрерывно зависят от λ , причем старший коэффициент равен 1. Очевидно, при малом изменении λ число отрицательных корней может только увеличиться (если нулевой корень станет отрицательным). ▲

Теперь мы подошли к важному обобщению понятия индекса замкнутой геодезической c . Напомним, что $\text{ind } c = I_c$ определялся как размерность отрицательного подпространства индексной формы $D^2E(c)$ на пространстве $T_c\Lambda = T_c\Lambda M$, элементами которого являются периодические H^1 -векторные поля вдоль c (см. 2.4.1).

Пусть $\rho \in \mathbb{C}$, $|\rho| = 1$. Обозначим через ${}_\rho T_c\Lambda = {}_\rho T_c\Lambda M$ гильбертово пространство комплекснозначных H^1 -векторных полей $\xi(t)$ вдоль $c(t)$ (т. е. $\xi(t) \in T_{c(t)}M \otimes \mathbb{C} \cong T_{c(t)}M \oplus iT_{c(t)}M$, $\text{Re } \xi$ и $\text{Im } \xi$ — вещественные H^1 -поля), удовлетворяющих условию $\bar{\rho}\xi(1) = \xi(0)$, со скалярным произведением

$$\langle \xi, \bar{\xi}' \rangle_1 = \langle \xi, \bar{\xi}' \rangle_0 + \langle \nabla \xi, \nabla \bar{\xi}' \rangle_0;$$

ср. с § 1.2. Здесь

$$\langle \xi, \bar{\eta} \rangle_0 = \int_S \langle \xi(t), \bar{\eta}(t) \rangle dt.$$

▲ Сейчас подразумевалось, что ξ определено при $0 \leq t \leq 1$. В зависимости от контекста иногда удобнее считать, что $t \in \mathbb{R}$ или хотя бы $t \in [0, m]$ — см., например, запись $\xi_i(mt)$ в 3.2.8.

Тогда вместо «краевого условия» $\zeta(1) = \rho\zeta(0)$ подразумевается выполнение условия $\zeta(t+1) = \rho\zeta(t)$ при всех t (при которых оно имеет смысл). Заметим, что последнее условие имеет смысл и для полей класса H^0 . Полезно иметь в виду, что при его выполнении $\langle \zeta(t+1), \bar{\eta}(t+1) \rangle = \langle \zeta(t), \bar{\eta}(t) \rangle$ (почти всюду, если ζ и η — класса H^0) и

$$\langle \zeta, \bar{\eta} \rangle_0 = \frac{1}{m} \int_0^m \langle \zeta(t), \bar{\eta}(t) \rangle dt.$$

Когда говорят, что ζ — класса C^n , то это означает не только C^n -дифференцируемость ζ на $[0, 1]$, но и то, что при продолжении ζ на $\mathbb{R}$ посредством соотношения $\zeta(t+1) = \rho\zeta(t)$ получается поле класса C^n . Иными словами, не только $\zeta(1) = \rho\zeta(0)$, но и производные $\nabla^v \zeta(1) = \rho \nabla^v \zeta(0)$ при $v = 1, \dots, n$. $\blacktriangle$

Далее, на ${}_\rho T_c \Lambda$ определена ρ -индексная форма

$$D^2 E_\rho(c)(\zeta, \bar{\zeta}') = \langle \zeta, \bar{\zeta}' \rangle_1 - \langle (\tilde{K}_c + \text{id}) \zeta, \bar{\zeta}' \rangle_0.$$

Так же как в 2.4.2, можно показать, что соответствующий самосопряженный оператор ${}_\rho A_c$ имеет вид $\text{id} + {}_\rho k_c$, где ${}_\rho k_c$ — компактный оператор^{*)}. В частности, размерность отрицательного подпространства оператора ${}_\rho A_c$ и размерность его ядра конечны. Эти размерности называются ρ -индексом геодезической c , $I_c(\rho)$, и ρ -дефектом геодезической c , $N_c(\rho)$. При этом мы предполагаем, что $\rho \neq 1$. Если $\rho = 1$, то в соответствии с предыдущими определениями (см. § 2.4) определим $N_c(1)$ как размерность ядра оператора A_c минус единица.

По поводу интерпретации ρ -индекса см. (46) и 4.1.5.

Важность этих понятий впервые была обнаружена Боттом [3]; она связана со следующими фактами. Напомним, что мы опреде-

^{*)} Как и раньше, ${}_\rho k_c = (1 - \nabla^2)^{-1} \cdot (\tilde{K}_c + \text{id})$, где $(1 - \nabla^2)^{-1}$ — оператор, сопряженный с вложением $i: {}_\rho T_c \Lambda M \hookrightarrow H^0(c^* TM)$, а $\tilde{K}_c(\zeta)(t) := R(\zeta(t), \dot{c}(t), \dot{c}(t))$; ясно, что $\tilde{K}_c$ переводит ${}_\rho T_c \Lambda M$ в себя. (На зависимость $(1 - \nabla^2)^{-1}$, i и $\tilde{K}_c$ от ρ наши обозначения не указывают.) Мы рассматриваем $(1 - \nabla^2)^{-1}$ только на ${}_\rho T_c \Lambda M$ (т. е. фактически речь идет об операторе $(1 - \nabla^2)^{-1} \cdot i$); в этом случае его компактность очевидна. Мотивировка обозначения $(1 - \nabla^2)^{-1}$ та же, что и выше. По-прежнему, когда ζ — класса C^2 (или хотя бы когда ζ — класса C^1 , а $\nabla \zeta$ — класса H^1 и $\zeta(t+1) = \rho\zeta(t)$), имеем

$$\langle \nabla \zeta, \bar{\nabla \zeta}' \rangle_0 = - \langle \nabla^2 \zeta, \bar{\zeta}' \rangle_0$$

(интеграл от $\frac{d}{dt} \langle \nabla \zeta, \bar{\zeta}' \rangle_0$ равен нулю из-за краевого условия). С другой стороны, дифференциальное уравнение $(1 - \nabla^2)\zeta = \eta$ при любом η , удовлетворяющем условию $\eta(t+1) = \rho\eta(t)$, имеет единственное решение, удовлетворяющее тому же условию, и $\zeta = (1 - \nabla^2)^{-1} \eta$.

лили m -кратное повторение c^m замкнутой геодезической c с помощью равенства $c^m(t) = c(mt)$; см. § 2.2.

3.2.8. Предложение. Пусть ρ — примитивный корень из единицы степени m . Пусть $c = c(t)$, $0 \leq t \leq 1$, — замкнутая геодезическая. Существует такой линейный изоморфизм ^{*})

$$i: T_{c^m} \Lambda \rightarrow \bigoplus_{1 \leq l \leq m} \rho^l T_c \Lambda, \quad \zeta \mapsto (\zeta_1, \dots, \zeta_m),$$

$$\text{что} \quad \zeta_l(t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \rho^{l(1-j)} \zeta \left(\frac{t+j-1}{m} \right).$$

Обратное отображение есть сумма $\oplus j_l$ отображений

$$j_l: \rho^l T_c \Lambda \rightarrow T_{c^m} \Lambda, \quad \zeta_l(t) \mapsto \zeta_l(mt)$$

(т. е. $(j_l \zeta_l)(t) = \zeta_l(mt)$).

▲ **Замечание.** Поясним смысл 3.2.8. $z := e^{2\pi i/m}$ изометрически действует на ΛM (§ 2.2). Поскольку $\tilde{\chi}_z \cdot c^m = c^m$, то $T\tilde{\chi}_z(c^m)$ — изометрия $T_{c^m} \Lambda$, продолжающаяся до унитарного оператора при комплексификации. Его m -я степень равна id , так что собственные значения суть ρ^l . Собственные векторы, отвечающие собственному значению ρ^l , — это векторы из подпространства $j_l(\rho^l T_c \Lambda)$. В 3.2.8 описано разложение вектора ζ на компоненты, лежащие в этих подпространствах. Все это понадобится нам в § 4.1, а пока формально проще дать следующее «вычислительное» доказательство 3.2.8. ▲

Доказательство (ср. Клингенберг [15]). Легко проверить, что $\zeta_l \in \rho^l T_c \Lambda$. Ясно также, что отображение i линейное. Обратное отображение определяется соответствием $(\zeta_1(t), \dots, \zeta_m(t)) \mapsto \sum_{l=1}^m \zeta_l(mt)$.

В самом деле, $\sum_l \sum_j \frac{1}{m} \rho^{l-j} \zeta(t+j-1) = \zeta(t)$, так как

$$\sum_l \rho^{l(1-j)} = \begin{cases} 0 & \text{для } j \neq 1, m > 1, \\ m & \text{для } j = 1. \quad \square \end{cases}$$

3.2.9. Теорема. Пусть c — замкнутая геодезическая и c^m — ее m -кратное повторение. Тогда индекс c^m равен сумме ρ -индексов c по всем корням ρ степени m из единицы, а дефект c^m равен аналогичной сумме ρ -дефектов c :

$$I(c^m) = \sum_{\rho^m=1} I_c(\rho), \quad N_{c^m}(1) = \sum_{\rho^m=1} N_c(\rho).$$

^{*}) $T_{c^m} \Lambda$ подразумевается комплексифицированным.

Доказательство. Пусть $\zeta(t) = \sum_k \zeta_k(mt)$, $\zeta'(t) = \sum_l \zeta'_l(mt)$ и ρ — примитивный корень из единицы степени m (см. 3.2.8). Тогда

$$\begin{aligned} D^2 E(c^m)(\zeta, \bar{\zeta}') &= \sum_{k,l} \int_0^{1/m} (\langle \nabla \zeta_k(mt), \nabla \bar{\zeta}'_l(mt) \rangle - \\ &\quad - \tilde{K}_c(\zeta_k(mt), \bar{\zeta}'_l(mt))) dt \times [1 + \rho^{(k-l)} + \dots + \rho^{(m-1)(k-l)}] = \\ &= \sum_k D^2 E(c^m)(j_k \zeta_k, j_k \bar{\zeta}'_k). \end{aligned}$$

Таким образом, $D^2 E(c^m)$ — прямая сумма ограничений $D^2 E(c^m)|_{j_k(\rho^k T_c \Lambda)}$ формы $D^2 E(c^m)$ на прямые слагаемые пространства $T_{c^m} \Lambda$, описанные в 3.2.8. $\square$ (46)

Замечание. Предыдущий результат получен Боттом [3]. Он демонстрирует полезность функции $\rho \mapsto I_c(\rho)$, $\rho \in S^1 \subset \mathbb{C}$, $I_c(\rho) \in \mathbb{N}$. Эта функция дает полную информацию об индексе всех кратных повторений замкнутой геодезической *). Основная цель этого параграфа состоит в том, чтобы показать, как эта функция определяется линейной частью геодезического потока вдоль соответствующей замкнутой траектории геодезического потока.

Мы по-прежнему рассматриваем замкнутую геодезическую c длины ω и соответствующую замкнутую периодическую траекторию $\varphi_t X_0$, $X_0 = \dot{c}(0)/|\dot{c}(0)|$ периода ω . При этом мы не предполагаем, что c однократна, т. е. $\varphi_t X_0$ имеет минимальный период ω .

Касательное расслоение $\tau_{T_1 M}: TT_1 M \rightarrow T_1 M$ имеет подрасслоения

$$\tau_h^n: T_h^n T_1 M \rightarrow T_1 M, \quad \tau_v^n: T_v^n T_1 M \rightarrow T_1 M,$$

которые определяются следующим образом. Слой расслоения τ_h^n

* Можно сказать еще так. Исследование $D^2 E(c^m)$ очевидным образом эквивалентно исследованию функционала

$$\int_0^m \{ \langle \nabla \xi, \nabla \bar{\xi} \rangle - \langle R(\xi(t), \dot{c}(t), \dot{c}(t)), \bar{\xi}(t)) \rangle \} dt,$$

задающегося тем же выражением, что и $D^2 E(c)$, но на другом классе вектор-функций — на вектор-функциях, определенных на интервале $[0, m]$ и удовлетворяющих «периодическому краевому условию» $\xi(0) = \xi(m)$ (разумеется, по-прежнему эти функции класса H^1 и $\xi(t) \in T_{c(t)} M$). Теорема 3.2.9 сводит задачу об индексе этого функционала к определению индексов функционалов на «стандартном» единичном интервале, задающихся снова тем же выражением, что и $D^2 E(c)$, но при других краевых условиях. В связи с этим заметим, что почти во всех работах интересующего нас направления (как и в теории дифференциальных уравнений) рассматриваются и более общие самосопряженные краевые условия.

над $X_0 \in T_1 M$ состоит из тех $(X, 0) \in T_{X_0} TM$, для которых $\langle X, X_0 \rangle = 0$, а слой расслоения τ_v^n над $X_0 \in T_1 M$ состоит из тех $(0, Y) \in T_{X_0} TM$, для которых $\langle Y, X_0 \rangle = 0^*)$.

Дифференцируемое отображение $\mathbb{R} \rightarrow T_1 M$, $t \mapsto \varphi_t X_0$, индуцирует расслоения $\tau_h^n: V_h^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau_v^n: V_v^n \rightarrow \mathbb{R}$. Прямую сумму $\tau_h^n \oplus \tau_v^n$ этих расслоений мы будем обозначать также через $\tau^{2n}: V^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$.

Так как $\varphi_\omega X_0 = X_0$, можно образовать факторрасслоения над $S_\omega := \mathbb{R} \bmod \omega \mathbb{Z}$:

$$\tau_h^n: V_h^n \rightarrow S_\omega, \quad \tau_v^n: V_v^n \rightarrow S_\omega, \quad \tau^{2n}: V^{2n} \rightarrow S_\omega.$$

На слоях расслоения τ^{2n} определена симплектическая форма α ; см. 3.1.3. Кроме того, дифференциал $T\varphi_t$ геодезического потока действует как однопараметрическая группа симплектических линейных послойных отображений на τ^{2n} ; см. 3.1.6, 3.1.7. В частности,

$$T\varphi_\omega: V^{2n}(0) \rightarrow V^{2n}(\omega) = V^{2n}(0)$$

— линейное симплектическое преобразование. Оно является дифференциалом отображения Пуанкаре $\mathcal{P}$ в точке $X_0 \in \Sigma$; см. 3.1.10. По этой причине $T\varphi_\omega|_{V^{2n}(0)}$ мы будем обозначать также через P и называть линейным отображением Пуанкаре $***)$.

Теперь применим к симплектическому преобразованию $P: V^{2n}(0) \rightarrow V^{2n}(0)$ результаты, полученные в начале этого параграфа. Согласно 3.2.4, мы можем написать $V^{2n}(0) = V_{su} \oplus V_{od} \oplus V_{ev} \oplus V_{co}$, и, кроме того, у нас определено действительное инвариантное изотропное подпространство $V_{in}^p = V_s \oplus V_{od, in} \oplus V_{ev, in}$; см. 3.2.5. Заметим, что $PV_{in}^p = V_{in}^p$, ибо это так для всех прямых

$^*)$ Слой $(\tau_v^n)^{-1} X_0 = T_{X_0} T_1 M \cap T_{X_0} TM$, но $(\tau_h^n)^{-1} X_0$ не совпадает с $T_{X_0} T_1 M \cap T_{X_0} TM$; последнее пересечение есть само $T_{X_0} TM$.

$^{**})$ «Обратные образы» предыдущих расслоений τ_v^n и τ_h^n при этом отображении. Эти «обратные образы» (и еще некоторые расслоения в следующем абзаце) автор обозначает теми же буквами. Смысл всегда ясен из контекста. Как это часто бывает, верхние индексы здесь показывают размерность слоя, а не всего пространства расслоения. Слой над точкой t обозначается через $V_h^n(t)$, $V_v^n(t)$, $V^{2n}(t)$.

$^{***})$ Более общо, $\mathcal{P}$ может строиться с помощью других локальных трансверсальных гиперповерхностей, нежели та конкретная гиперповерхность, которая описана перед 3.1.9. Дифференциал $\mathcal{P}$ в точке пересечения гиперповерхности с рассматриваемой периодической траекторией мы тоже будем называть линейным отображением Пуанкаре. По существу, это последнее отображение P определено, если фиксирована некоторая гиперплоскость V в касательном пространстве к фазовому многообразию в рассматриваемой точке периодической траектории, трансверсальная к вектору фазовой скорости. В общем случае $T\varphi_\omega V \neq V$, поэтому P , вообще говоря, не совпадает с $T\varphi_\omega|_V$, но получается из этого ограничения при последующем проектировании на V параллельно вектору фазовой скорости.

слагаемых V_s , $V_{od, in, \rho}$, $V_{ev, in, \rho}$; для последних двух это видно из формулы

$$P(P\bar{\rho} - 1)^j X = \rho(P\bar{\rho} - 1)^{j+1} X + \rho(P\bar{\rho} - 1)^j X.$$

Для каждого $V_{ev, \rho, \bar{\rho}} := V_{ev, \rho} \oplus \bar{V}_{ev, \rho}$ рассмотрим двумерное подпространство

$$V_{ev, in, \rho, \bar{\rho}} := \{(P\bar{\rho} - 1)^j \tilde{X}, (P\rho - 1)^j \bar{\tilde{X}}\},$$

где $(P\bar{\rho} - 1)^j \tilde{X}$, $(P\rho - 1)^j \bar{\tilde{X}}$, $0 \leq j \leq 2l$, $l > 0$, — базис $V_{ev, \rho, \bar{\rho}}$.

Замечание. $PV_{ev, in, \rho, \bar{\rho}} = V_{ev, in, \rho, \bar{\rho}} \bmod V_{ev, in, \rho} \oplus V_{ev, in, \bar{\rho}}$. Определим $V_{ev, in}$ как прямую сумму этих $V_{ev, in, \rho, \bar{\rho}}$. Тогда $\dim V_{ev, in} = 2k_{ev}$, где k_{ev} — число подпространств $V_{ev, \rho, \bar{\rho}}$. (Ср. с замечанием после 3.2.5.)

Положим

$$V_{in}^{2q} = V_{co} \oplus V_{ev, in}$$

и определим $V_{in}^q \subset V_{in}^{2q}$ как проекцию $V_v^n(0) \cap (V_{in}^p \oplus V_{in}^{2q})$ в V_{in}^{2q} параллельно V_{in}^p ; см. 3.2.6 *). Положим $V_e^n := V_{in}^p \oplus V_{in}^q$. Это лагранжево подпространство в $V^{2n}(0)$ (47).

Для $t \in [0, \omega]$ положим $W(t) := V_v^n(t) \cap T\Phi_t V_e^n$.

3.2.10. Предложение. *Предположим, что $i_0 = \dim W(t_0) > 0$. Выберем такой базис*

$$\tilde{Y}_j(t) = (Y_j(t), \nabla Y_j(t)), \quad 1 \leq j \leq n,$$

полей Якоби для $T\Phi_t V_e^n$, что $\tilde{Y}_j(t_0)$, $1 \leq j \leq i_0$, является базисом для $W(t_0)$.

Утверждение. (i) *Элементы $\nabla Y_j(t_0)$, $1 \leq j \leq i_0$, и $Y_j(t_0)$, $j > i_0$, линейно независимы.*

*) Здесь мы не определили, что такое V_{in}^{2p} . Однако очевидно, что можно следующим образом изменить формулировку леммы 3.2.6: считать, что задано не разложение $V^{2n} = V_{in}^{2p} \oplus V_{in}^{2q}$, а невырожденное действительное подпространство V_{in}^{2q} и действительное изотропное подпространство V_{in}^p , для которого $\alpha(V_{in}^p, V_{in}^{2q}) = 0$. Тогда можно вернуться к первоначальной формулировке, определив V_{in}^{2p} как ортогональное (в смысле α) дополнение к V_{in}^{2q} .

В нашем случае невырожденность V_{in}^{2q} следует из невырожденности его ортогональных прямых слагаемых V_{co} (см. 3.2.4) и $V_{ev, in, \rho, \bar{\rho}}$ — из 3.2.3 (ii) видно, что матрица Грама формы $(X, Y) \mapsto \alpha(X, \bar{Y})$ относительно двух векторов $(P\bar{\rho} - 1)^j \tilde{X}$, $(P\rho - 1)^j \bar{\tilde{X}}$ есть $\begin{pmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \mp i \end{pmatrix}$.

(ii) При достаточно малом $|t - t_0| \neq 0$ поля $Y_j(t)$, $1 \leq j \leq n$, линейно независимы. В частности, существует лишь конечное число таких $t \in [0, \omega]$, что $W(t) \neq 0$.

Доказательство. Если $\dot{Y}(t_0) \in W(t_0)$, то $Y(t_0) = 0$. Поэтому векторы $\{\nabla Y_j(t_0); 1 \leq j \leq i_0\}$ линейно независимы. Векторы $\{Y_k(t_0); i_0 + 1 \leq k \leq n\}$ тоже линейно независимы: ведь если бы было $\sum_{k > i_0} a_k Y_k(t_0) = 0$, то $\sum_{k > i_0} a_k \dot{Y}_k(t_0) \in W(t_0)$, а это противоречит тому, что $\dot{Y}_j$, $1 \leq j \leq n$, — базис $T\Phi_i V_i^n$. Наконец, векторы $\nabla Y_1(t_0), \dots, \nabla Y_{i_0}(t_0)$ ортогональны (в смысле римановой метрики) векторам $Y_{i_0+1}(t_0), \dots, Y_n(t_0)$, поскольку $0 = \alpha(\dot{Y}_j, \dot{Y}_k) = -\langle \nabla Y_j(t_0), Y_k(t_0) \rangle$ для $j \leq i_0$, $k > i_0$. Итак, (i) доказано. (ii) легко следует из (i) (при достаточно малых $|t - t_0|$ в подходящей локальной системе координат координаты $Y_j(t)$, $1 \leq j \leq i_0$, с точностью до $o(t - t_0)$ совпадают с координатами $(t - t_0) \nabla Y_j(t_0)$). $\square$

▲ **Замечание.** Обозначим

$$V^n(t) := \{X \in T_{c(t)}M; \langle \dot{\sigma}(t), X \rangle = 0\}.$$

Очевидным образом возникает расслоение $V^n \rightarrow S_\omega$, имеющее $V^n(t)$ своим слоем над t . Отображения $T\tau, K: TTM \rightarrow TM$ (второе из них является отображением связности Леви-Чивита, отвечающей используемой римановой метрике на M) индуцируют послойные отображения $T\tau, K: V^{2n} \rightarrow V^n$, которые мы позволяем себе обозначать теми же самыми символами и которые в терминах используемого нами представления (X, Y) для элементов $V^{2n}(t)$ имеют вид

$$T\tau.(X, Y) = X, \quad K.(X, Y) = Y.$$

В этих терминах утверждение (i) из 3.2.10 состоит в том, что имеет место ортогональное прямое разложение

$$V^n(t_0) = T\tau \cdot T\Phi_{t_0} \cdot V_e^n \oplus K \cdot W(t_0). \quad \blacktriangle$$

Пусть $\rho \in S^1$ не является собственным значением оператора $P = T\Phi_\omega$. Мы хотим определить некоторое отображение ζ_ρ пространства $W := \bigoplus_{0 \leq t < \omega} W(t)$ в пространство ${}_\rho T_c \Lambda = {}_\rho T_c \Lambda M$, где c — по-прежнему замкнутая геодезическая, соответствующая периодической траектории $\Phi_t X_0$. Заметим, что $\dim W < \infty$.

Пусть $\dot{Y}(t_0) \in W(t_0)$, $\dot{Y}(t)$ — инвариантное векторное поле вдоль $\Phi_t X_0$, $\dot{Y} = (Y, \nabla Y)$. Возьмем инвариантное поле $\tilde{Z}(t)$ с начальным значением $\tilde{Z}(0) = (P\rho - 1)^{-1} \dot{Y}(0)$. Пусть Z — соответствующее поле Якоби, т. е. $\tilde{Z} = (Z, \nabla Z)$.

Заметим, что $\bar{\rho}\tilde{Z}(t+\omega) = \tilde{Z}(t) + \tilde{Y}(t)$ при всех t , ибо

$$\bar{\rho}\tilde{Z}(t+\omega) = T\varphi_t \cdot P\bar{\rho}\tilde{Z}(0) = T\varphi_t \cdot P\bar{\rho}(P\bar{\rho} - 1)^{-1}\tilde{Y}(0),$$

$$Z(t) + Y(t) = T\varphi_t \cdot (P\bar{\rho} - 1)^{-1}\tilde{Y}(0) + T\varphi_t \cdot \tilde{Y}(0),$$

$$a \quad P\bar{\rho}(P\bar{\rho} - 1)^{-1} = (P\bar{\rho} - 1)^{-1} + 1.$$

Определим $\xi = \xi_\rho(\tilde{Y}(t_0)) \in {}_\rho T_c \Lambda$ следующим образом:

$$\xi(t) = Z(\omega t) + Y(\omega t) = \bar{\rho}Z(\omega t + \omega), \quad 0 \leq t \leq t_0/\omega;$$

$$\xi(t) = Z(\omega t), \quad t_0/\omega \leq t \leq 1.$$

Тогда, как явствует из сказанного, $\xi(t_0/\omega -) - \xi(t_0/\omega +) = 0$, $\nabla \xi(t_0/\omega -) - \nabla \xi(t_0/\omega +) = \omega \nabla Y(t_0)$, $\bar{\rho}\xi(1) - \xi(0) = \bar{\rho}\nabla \xi(1) - \nabla \xi(0) = 0^*$.

Мы видим, что действительно ξ — элемент из ${}_\rho T_c \Lambda$, причем $\nabla \xi$ — гладкое везде, кроме, быть может, точки t_0 .

Обычным образом $\xi_\rho(Y)$ можно рассматривать и как функцию на всей оси t со значениями в $T_{c(t)}M$; тогда $\nabla \xi_\rho(Y)(t)$ имеет разрывы лишь при $t \equiv t_0/\omega \pmod{\mathbb{Z}}$, а на отрезках $[t_0/\omega + k, t_0/\omega + k + 1]$

$$\xi_\rho(Y)(t) = \rho^k Z(\omega t - \omega k).$$

3.2.11. Предложение. Отображение

$$\xi_\rho: W \rightarrow {}_\rho T_c \Lambda M$$

линейно и инъективно. Кроме того, если $\xi = \xi_\rho(\tilde{Y}(t_0))$, $\xi' = \xi_\rho(\tilde{Y}'(t'_0))$, то $D^2 E_\rho(\xi, \xi') = Q_\rho(\tilde{Y}'_{un}, \tilde{Y}'_{un})\omega$, где Q_ρ — такая же, как в 3.2.7, а $\tilde{Y}_{un}$, $\tilde{Y}'_{un}$ — компоненты векторов $\tilde{Y}(0)$, $\tilde{Y}'(0) \in V_c^n = V_{in}^p \oplus V_{un}^q$ в V_{un}^q .

Доказательство. Ясно, что $\xi_\rho|W(t_0)$ инъективно. Кроме того, из $\xi_\rho(\tilde{Y}(t_0)) = \xi_\rho(\tilde{Y}'(t'_0))$ и $\tilde{Y}(t_0) \neq 0$, $\tilde{Y}'(t'_0) \neq 0$ следует, что $t_0 = t'_0$, т. е. ξ_ρ инъективно.

Пусть теперь $t'_0 \leq t_0$. Запишем $\int_S$ в выражении для $D^2 E_\rho(c)(\xi, \xi')$ как интеграл от t_0/ω до $t_0/\omega + 1$. Тогда, воспользовавшись интегрированием по частям, получим

$$D^2 E_\rho(c)(\xi, \xi') = \int_{t_0/\omega}^{t_0/\omega+1} \frac{d}{dt} \langle \nabla \xi, \xi' \rangle dt - \int_{t_0/\omega}^{t_0/\omega+1} \langle \nabla^2 \xi + \tilde{K}_c(\xi), \xi' \rangle dt.$$

Вычитаемое, очевидно, равно нулю, а уменьшаемое равно $\langle \nabla \xi, \xi' \rangle|_{t_0/\omega+1}^-$. Но

$$\begin{aligned} \langle \nabla \xi(t_0/\omega + 1 -), \xi'(t_0/\omega + 1 -) \rangle &= \langle \rho \nabla \xi(t_0/\omega -), \bar{\rho} \xi'(t_0/\omega -) \rangle = \\ &= \langle \nabla \xi(t_0/\omega -), \xi'(t_0/\omega -) \rangle, \end{aligned}$$

* При $t_0 = 0$ соответствующие условия таковы:

$$\bar{\rho}\xi(1) = \xi(0) \quad \text{и} \quad \bar{\rho}\nabla \xi(1 -) - \nabla \xi(0 +) = \omega \nabla Y(0).$$

поэтому

$$D^2 E_p(c)(\xi, \xi') = \langle \nabla \xi(t_0/\omega -) - \nabla \xi(t_0/\omega +), \xi'(t_0/\omega) \rangle = \\ = \omega \langle \nabla Y(t_0), Z'(t_0) \rangle.$$

Далее,

$$2\alpha(\tilde{Y}(0), \tilde{Z}'(0)) = 2\alpha(\tilde{Y}(t_0), \tilde{Z}'(t_0)) = -\langle \nabla Y(t_0), Z'(t_0) \rangle$$

(другое слагаемое в выражении для α равно нулю, ибо $Y(t_0) = 0$).
Значит,

$$D^2 E_p(c)(\xi, \xi') = -2\alpha(\tilde{Y}(0), (P\rho - 1)^{-1} \tilde{Y}'(0)) \omega = Q_p(\tilde{Y}'_{un}, \tilde{Y}'_{un}) \omega.$$

Переход от $Q_p(\tilde{Y}(0), \tilde{Y}'(0))$ к $Q_p(\tilde{Y}_{un}, \tilde{Y}'_{un})$ возможен потому, что $\alpha(V_{in}^p, V_e^n) = 0$ (см. конец (47)). $\square$

Теперь мы в состоянии доказать теорему о ρ -индексе; см. Клингенберг [15], Кушман, Дёйстермат [1].

3.2.12. Теорема. Пусть c — замкнутая геодезическая. Пусть P — линейное отображение Пуанкаре для соответствующей замкнутой траектории геодезического потока, и пусть $\rho \in \mathbb{C}$, $|\rho| = 1$.

Утверждение. (i) ρ -дефект $N_c(\rho)$ геодезической c равен размерности собственного подпространства отображения P , отвечающего собственному значению ρ .

(ii) Пусть ρ не является собственным значением P . Тогда ρ -индекс геодезической c равен $I_c(\rho) = J_c + M_\rho$, где

$$J_c = \sum_{0 < t < \omega} \dim W(t) + \dim(V_e^n(0) \cap V_{in}^p),$$

$$M_\rho = (\text{индекс} + \text{дефект}) Q_p.$$

Замечание. Индекс $I_c(\rho)$ выражается как сумма двух величин: J_c , которая не зависит от ρ , и M_ρ , которая зависит только от ρ и P . Таким образом, если ни одно из собственных значений отображения P не является корнем из единицы, то мы получаем следующую формулу для индексов всех кратных повторений c^m геодезической c (см. 3.2.9):

$$\text{ind } c^m = mJ_c + \sum_{\rho^m = 1} M_\rho.$$

Существование такой формулы для $I_c(\rho)$ (и, как следствие, для $I(c^m)$) было доказано Боттом [3]. Однако он не определил константу J_c , и у него не было явного описания M_ρ (см. подстрочное примечание в конце настоящего параграфа *).

* Отметим еще, что Эдвардс получал некоторое описание разности $I_c(\rho)$ и индекса $D^2 E_p(c)$ (очевидно, не зависящего от ρ), из которого описания видно, что эта разность зависит только от P и ρ . (См. Эдвардс [1], предложения 2.6 и 8.3. На самом деле там рассматриваются более общие краевые условия. См. также Кушман, Дёйстермат [1].)

Наконец, заметим, что теорема демонстрирует важность функции $\rho \mapsto M_\rho$, $\rho \in S^1 - \{\rho_j\}$. Как мы видели в замечании после 3.2.7, M_ρ остается постоянной на компонентах связности $S^1 - \{\rho_j\}$. «Скачки» возможны только в точках ρ_j . Подробнее см. 3.2.16, Клингенберг [15].

Доказательство. Ядро оператора ${}_\rho A_\epsilon = \text{id} + {}_\rho k_\epsilon$ состоит из решений уравнения

$$(\dagger) \quad \nabla^2 \zeta(t) + \tilde{K}_\epsilon(\zeta)(t) = 0,$$

удовлетворяющих условию $\bar{\rho}\zeta(1) = \zeta(0)$, $\bar{\rho}\nabla\zeta(1) = \nabla\zeta(0)$. Для $\rho = 1$ это следует из 2.4.4. Для произвольного ρ , $|\rho| = 1$, это можно доказать так же, как 2.4.4. Действительно, то, что ζ принадлежит ядру $D^2E_\rho(c)$, означает, что

$$D^2E_\rho(c)(\zeta, \bar{\eta}) = 0 \quad \text{для всех } \eta \in {}_\rho T_c \Lambda.$$

Так как ζ дифференцируемо^{*)}, то мы можем с помощью интегрирования по частям переписать это условие в виде

$$(\dagger\dagger) \quad \langle \nabla^2 \zeta + \tilde{K}_\epsilon(\zeta), \bar{\eta} \rangle_0 = - \langle \nabla \zeta(t), \bar{\zeta}'(t) \rangle \Big|_{t=0}^{t=1} = 0, \quad \text{для всех } \eta \in {}_\rho T_c \Lambda.$$

Но $(\dagger\dagger)$ при $\zeta \in {}_\rho T_c \Lambda$ эквивалентно $(\dagger)$ и условию $\bar{\rho}\nabla\zeta(1) = \nabla\zeta(0)$.

Решение ζ уравнения $(\dagger)$, удовлетворяющее условию $\langle \zeta(t), \dot{\zeta}(t) \rangle = 0$, определяет поле Якоби $Y(t) = \zeta(t/\omega)$, для которого $\bar{\rho}\tilde{Y}(\omega) = \tilde{Y}(0)$, т. е. $(P\bar{\rho} - 1)\tilde{Y} = 0$. Обратно, такое $\tilde{Y}$ определяет решение $\zeta(t) := Y(t\omega)$ уравнения $(\dagger)$. Наконец, заметим, что при $\rho \neq 1$ эти ζ и Y ортогональны c (при всех t). Тем самым мы доказали (i).

Для того чтобы доказать (ii), рассмотрим отображение $\lambda_\rho: \zeta_\rho W \rightarrow V_{un}^q$, которое элементу $\zeta_\rho(\tilde{Y}(t_0))$ ставит в соответствие компоненту $\tilde{Y}_{un}(0)$ вектора $\tilde{Y}(0) \in V_\epsilon^n$ в разложении $V_\epsilon^n = V_{in}^p \oplus V_{un}^q$. Из 3.2.11 следует, что это отображение корректно определено. Отметим, что λ_ρ сюръективно, — более того, уже $\lambda_\rho|_{W(0)}$ сюръективно, ибо каждое $\tilde{Y}_{un}(0) \in V_{un}^q$ встречается как компонента некоторого элемента из $V_\epsilon^q \subset W(0) = V_\epsilon^n(0) \cap V_\epsilon^n$ (см. 3.2.6 (iii)).

Подпространство $\zeta_\rho W \subset {}_\rho T_c \Lambda$ не содержит ненулевых элементов из ядра формы $D^2E_\rho(c)$ ^{**)}. Из 3.2.11 мы знаем, что $D^2E_\rho(c)(\zeta, \zeta') =$

^{*)} Поскольку $\zeta = - {}_\rho k_\epsilon \zeta$ и ${}_\rho k_\epsilon$ повышает гладкость.

^{**)} Поскольку при $\det(P\bar{\rho} - 1) \neq 0$ ядро тривиально. Впрочем, и при $\det(P\bar{\rho} - 1) = 0$ в $\zeta_\rho W$ нет ненулевых элементов из ядра — последние дифференцируемы, а каждый ненулевой элемент из $\zeta_\rho W$ имеет «излом».

$= Q_p(\lambda_p \zeta, \lambda_p \zeta') \omega$. Поэтому

$$(\dagger \dagger \dagger) \quad I_c(\rho) \geq (\text{индекс} + \text{дефект}) D^2 E_\rho(c) | \zeta_\rho W,$$

$$\text{индекс } D^2 E_\rho(c) | \zeta_\rho W = \text{индекс } Q_\rho,$$

$$\text{дефект } D^2 E_\rho(c) | \zeta_\rho W = \dim \ker \lambda_p + \text{дефект } Q_\rho.$$

▲ Поясним $(\dagger \dagger \dagger)$. Пусть $E \subset \zeta_\rho W$ — подпространство размерности (индекс + дефект) $D^2 E_\rho(c) | \zeta_\rho W$, на котором $D^2 E_\rho(c) \leq 0$. Аналогично 2.4.3 разложим ${}_\rho T_c \Lambda$ на подпространства, отвечающие отрицательным, нулевым и положительным значениям ${}_\rho A_c$:

$${}_\rho T_c \Lambda = {}_\rho T_c^- \Lambda \oplus {}_\rho T_c^0 \Lambda \oplus {}_\rho T_c^+ \Lambda.$$

Пусть p_- , p_0 , p_+ — проекции на эти подпространства. Тогда $\ker(p_- | E) = 0$ (откуда и следует, что $\dim E \leq \dim {}_\rho T_c^- \Lambda = I_c(\rho)$). В самом деле, если $\zeta \in E$, $\zeta \neq 0$ и $p_- \zeta = 0$, то $p_+ \zeta \neq 0$ (иначе $\zeta \in {}_\rho T_c^0 \Lambda$, т. е. $\zeta_\rho W$ содержало бы ненулевой элемент из ядра гессиана $D^2 E_\rho(c)$ *). А тогда $D^2 E_\rho(c)(\zeta, \xi) = \langle {}_\rho A_c p_+ \zeta, p_+ \xi \rangle_1 > 0$. ▲

Поскольку

$$\dim \ker \lambda_p = \sum_{0 < t < \omega} \dim W(t) + \dim \ker \lambda_p | W(0) = J_c,$$

$$(\text{ind} + \text{nul}) Q_\rho = M_\rho,$$

то остается только доказать, ▲ что в $(\dagger \dagger \dagger)$ на самом деле можно поставить знак равенства. Используя введенные выше обозначения, это можно перефразировать так: $p_- E = {}_\rho T_c^- \Lambda$. Справедливость такой перефразировки не зависит от выбора E , который не единствен. Выбирая E подходящим образом, можно показать, что достаточно доказать ▲ следующее: если дифференцируемый элемент $\xi \in {}_\rho T_c \Lambda$ таков, что $\xi \neq 0$ и $D^2 E_\rho(c)(\zeta, \xi) = 0$ при всех $\zeta \in \zeta_\rho W$, то $D^2 E_\rho(c)(\xi, \xi) \geq 0$. ▲ Достаточно даже доказать это только для таких ξ , для которых $\langle \dot{c}(t), \xi(t) \rangle = 0$ при всех t . ▲ ⁽⁴⁸⁾

Пусть $\zeta = \zeta_\rho(\tilde{Y}(t_0))$. Тогда $0 = D^2 E_\rho(c)(\zeta, \xi) = \langle \nabla Y(t_0), \xi(t_0/\omega) \rangle$ (то же вычисление, что в доказательстве 3.2.11). Если $\tilde{Y}_j(0)$, $1 \leq j \leq n$, — действительный базис пространства V_n^p , то, согласно 3.2.10, $\xi(t)$ можно записать в виде $\xi(t) = \sum_l \omega^l(t) Y_l(t\omega)$ с дифференцируемыми $\omega^l(t)$. ⁽⁴⁹⁾

Мы можем предположить, что $\tilde{Y}_j(0) \in V_{ln}^p$, $1 \leq j \leq p$, $\tilde{Y}_k(0) \in V_{ln}^q$, $k > p$ (см. 3.2.6). Следовательно, $\omega^k(0) = 0$ при $k > p$ ⁽⁵⁰⁾. Так как $PV_{ln}^p = V_{ln}^p$, то $\tilde{Y}_l(\omega) = \sum_i a_i^l \tilde{Y}_i(0)$, $1 \leq j$, $l \leq p$. Из

*1 Как видно, в этом рассуждении не используется, что ${}_\rho T_c^0 \Lambda = \{0\}$.

$\bar{\rho}\xi(1) = \xi(0) \in V_{in}^p$ следует, что $\omega^k(1) = 0$, $k > p$, и $\omega'(0) = \sum_i \bar{\rho} a_i^l \omega^l(1)$, $1 \leq j, l \leq p$. ⁽⁵⁰⁾ Тогда

$$D^2 E_p(c)(\xi, \xi) = \int_S \left| \sum_j \dot{\omega}'(t) Y_j(t\omega) \right|^2 dt + \\ + \int_0^1 \frac{d}{dt} \left\langle \sum_k \omega^k(t) \nabla Y_k(t\omega), \sum_j \bar{\omega}'(t) Y_j(t\omega) \right\rangle dt \omega.$$

▲ Это равенство получается так: выражение в правой части, если в нем выполнить дифференцирование и заменить $(\nabla^2 Y_k)(t\omega)$ на $-R(Y_k(t\omega), \dot{c}(t\omega), \dot{c}(t\omega))$, отличается от стандартного выражения для $D^2 E_p(c)(\xi, \xi)$ на

$$\sum_{k,j} \omega^k(t) \bar{\omega}'(t) 2\alpha(\tilde{Y}_j(t\omega), \tilde{Y}_k(t\omega)) \omega.$$

Но последнее равно нулю, так как V_ε^n изотропно. Отбрасывая теперь $\int |\cdot|^2 dt$ и учитывая, что $\sum \bar{\omega}' Y_j = \xi$ и $\xi(1) = \bar{\rho}\xi(0)$, получаем

$$D^2 E_p(c)(\xi, \xi) \geq \omega \left\langle \sum_k \omega^k(t) \nabla Y_k(t\omega), \xi(t) \right\rangle \Big|_0^1 = \\ = \omega \left\langle \bar{\rho} \sum_k \omega^k(1) \nabla Y_k(\omega) - \sum_k \omega^k(0) \nabla Y_k(0), \xi(0) \right\rangle.$$

Можно считать, что суммирование ведется по $k=1, \dots, p$. Тогда

$$\bar{\rho} \sum_{k=1}^p \omega^k(1) \nabla Y_k(\omega) = \bar{\rho} \sum_{k,j=1}^p \omega^k(1) a_k^j \nabla Y_j(0) = \sum_{j=1}^p \omega^j(0) \nabla Y_j(0)$$

и $\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$. ▲ □

Замечание. В некоторых случаях $V_{in}^{2q} = 0$, т. е. $p = n$, $V_\varepsilon^n = V_{in}^n$.

Это происходит тогда, когда в разложении 3.2.4 пространства V^{2n} по отношению к P подпространства V_{ev} и V_{co} оба равны нулю. Важным примером является случай, когда отображение P гиперболическое, т. е. не имеет собственных значений, равных по модулю единице. Тогда соответствующая замкнутая геодезическая также называется гиперболической.

3.2.13. Следствие 1. *Предположим, что замкнутая геодезическая с гиперболическая. Тогда*

$$I_c(\rho) = \sum_{0 \leq t < \omega} \dim(V_v^n(t) \cap V_s^n(t)), \quad \text{ind } c^n = m \text{ ind } a.$$

Здесь $V_s^n(t) = T\varphi_t V_s^n(0)$ — так называемое устойчивое подпростран-

ство, образованное теми полями Якоби $^{**})$, ортогональными к $\dot{c}$ $^{***})$, которые стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство (см. Клингенберг [12]). Согласно предположению, $V^{2n}(0) = V_s^n(0) + V_u^n(0)$ (см. 3.2.5). Здесь $V_s^n(0)$ порождено корневыми подпространствами $V(\rho)$ с $|\rho| < 1$, в то время как $V_u^n(0)$ порождено $V(\rho)$ с $|\rho| > 1$. Остается добавить, что в нашем случае $V_{un}^{2n} = \{0\}$, $V_e^n = V_s^n(0)$. $\square$

3.2.14. Следствие 2. Пусть $c = (c(t), 0 \leq t \leq \omega)$ — невырожденная эллиптическая $^{****})$ замкнутая геодезическая на поверхности M , т. е. $\dim M = 2$. Обозначим через k число сопряженных с $c(0)$ точек вдоль $c(t)$ на интервале $]0, \omega[$ $^{*****})$. Если c ориентируема {неориентируема}, то индекс s равен $k+1 \{k\}$ или $k \{k+1\}$ в зависимости от того, четно k или нечетно. В частности, на ориентируемой компактной поверхности индекс эллиптической замкнутой геодезической всегда нечетный.

Доказательство (ср. Хедлунд [1], Клингенберг [19]). В нашем случае $n=1$, $\rho=1$ (речь идет об обычном индексе), $V^2(0) = V_{co} = V_{un}^2$, $\rho=0$, $V_e^1(0) = V_{un}^1 = V_s^1 = W(0)$, все нетривиальные $W(t)$ одномерны. Тогда формула 3.2.12 дает $I_c = k$. Осталось определить число

$$M_1 = (\text{индекс} + \text{дефект}) Q_1 \text{ на } V_e^1(0).$$

Рассмотрим сначала случай, когда c ориентируема, т. е. нормальное расслоение $V^1 \rightarrow S_\omega$ иммерсии $c: S_\omega \rightarrow M$ тривиально. Выберем ортогональный к $\dot{c}(0)$ единичный нормальный вектор E . С помощью параллельного переноса вдоль c получаем каноническое отождествление нормальной к c прямой, являющейся слоем над $t \in S_\omega$, с нормальной прямой — слоем над $0 \in S_\omega$. Кроме того, каноническое отождествление расслоений τ_h^1 и τ_v^1 над S_ω с нормальным расслоением приводит к каноническому отождествлению расслоения $\tau^2 = \tau_h^1 \oplus \tau_v^1: V^2 \rightarrow S_\omega$ с тривиальным расслоением $S_\omega \times \mathbb{R}^2$, где слой $\mathbb{R}^2$ обладает ортонормированным базисом $\tilde{E}_h =$

$^{*)}$ Точнее, значениями в точке t инвариантных векторных полей $\tilde{Y} = (Y, \nabla Y)$ геодезического потока.

$^{**})$ Для которых Y ортогонально к $\dot{c}$.

$^{***})$ Все собственные значения P лежат на единичной окружности и $\neq 1$, причем если они равны -1 , то элементарные делители P_c должны быть простыми. (Иногда в определение эллиптичности включают еще требование, чтобы -1 не было собственным значением, но в нашем случае это не нужно.)

$^{****})$ Напомним определение сопряженных точек в общем случае. Точки t_1 и t_2 называются сопряженными (вдоль c ; говорят также о сопряженных точках (на) c), если существует нетривиальное (не равное тождественно нулю) поле Якоби, обращающееся в нуль при $t=t_1$ и при $t=t_2$.

$= (E, 0)$, $\tilde{E}_v = (0, E)$. В этих терминах, если векторное поле $Y(t)$ вдоль $c(t)$ всюду ортогонально $\dot{c}(t)$ и имеет координату $y(t)$ «по нормали» (т. е. $Y(t) = y(t) E(t)$), а $\tilde{Y}(t) = (Y(t), \nabla Y(t))$, то

$$\tilde{Y}(t) = y(t) \tilde{E}_h(t) + \dot{y}(t) \tilde{E}_v(t),$$

и уравнение Якоби сводится к $\ddot{y}(t) + k(c(t)) y(t) = 0$, где $k(c(t))$ — кривизна M в точке $c(t)$.

Обозначим через

$$\tilde{X}(t) = x(t) \tilde{E}_h + \dot{x}(t) \tilde{E}_v; \quad \tilde{Y}(t) = y(t) \tilde{E}_h + \dot{y}(t) \tilde{E}_v$$

фундаментальную систему решений уравнения Якоби (точнее, соответствующей системы уравнений в вариациях), т. е. инвариантные векторные поля с начальными значениями $(x(0), \dot{x}(0)) = (1, 0)$, $(y(0), \dot{y}(0)) = (0, 1)$. Тогда матрица отображения Пуанкаре P ; запишется в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x(\omega) & y(\omega) \\ \dot{x}(\omega) & \dot{y}(\omega) \end{pmatrix},$$

где $2 - x(\omega) - \dot{y}(\omega) > 0$, так как P_c — эллиптическое *).

Так как $\tilde{Y}(0) \in V_c^1$, то нам достаточно вычислить

$$Q_1(\tilde{Y}(0), \tilde{Y}(0)) = -2\alpha(\tilde{Y}(0), (P-1)^{-1}\tilde{Y}(0)) = \langle \nabla Y(0), Z(0) \rangle,$$

где, как обычно, $\tilde{Z}(t)$ обозначает инвариантное векторное поле с начальным значением $\tilde{Z}(0) = (P-1)^{-1}\tilde{Y}(0)$. Разложим $\tilde{Z}(t)$ по базису $\tilde{E}_h, \tilde{E}_v$: $\tilde{Z}(t) = z(t) E_h + \dot{z}(t) E_v$. Тогда $\langle \nabla Y(0), Z(0) \rangle = z(0)$. Вычисляя $z(0)$ из линейного уравнения $(P-1)\tilde{Z}(0) = \tilde{Y}(0)$, получим, что

$$(*) \quad z(0) = -y(\omega)/(2 - x(\omega) - \dot{y}(\omega)); \quad 2 - x(\omega) - \dot{y}(\omega) > 0.$$

Число k точек на интервале $]0, \omega[$, сопряженных с $c(0)$, равно числу пересечений $\tilde{Y}(t)$ с вертикальной осью $\mathbb{R}\tilde{E}_v$. Все эти пересечения трансверсальны, и в момент пересечения $\tilde{Y}(t)$ движется по часовой стрелке.

Пусть k четно. Это эквивалентно неравенству $y(\omega) \geq 0$, в котором $y(\omega) = 0$ лишь в тех случаях, когда $\tilde{Y}(0)$ — собственный вектор отображения P_c , отвечающий собственному значению -1 . Из (*) получаем, что $Q_1(\tilde{Y}(0), \tilde{Y}(0)) \leq 0$, т. е. $M_1 = 1$. С другой стороны, если k нечетно, то $y(\omega) < 0$, т. е. $z(0) > 0$. (Возмож-

*) Собственно, условие эллиптичности есть $2 > x(\omega) + \dot{y}(\omega) \geq -2$ (причем если имеет место равенство, то дополнительно требуется, чтобы элементарные делители P_c были простыми), но нам понадобится только указанная выше его часть.

ность $y(\omega) = 0$ исключается, так как по условию у P_c нет собственного значения 1.) Поэтому $M_1 = 0$. Это завершает доказательство 3.2.14 в ориентируемом случае.

▲ В неориентируемом случае нормаль E после одного «обхода» вдоль c переходит в $-E$, а τ^{2n} получается из $[0, \omega] \times \mathbb{R}^2$ при отождествлении $(0, x, y)$ с $(\omega, -x, -y)$, так что P_c представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} -x(\omega) & -y(\omega) \\ -\dot{x}(\omega) & -\dot{y}(\omega) \end{pmatrix}$$

и

$$(**) \quad z(0) = y(\omega)/(2 + x(\omega) + \dot{y}(\omega))$$

(знаменатель положителен ввиду эллиптичности P_c ; в данном случае это означает, что $2 > -x(\omega) - \dot{y}(\omega) \geq -2$, с обычным добавлением в случае равенства). Четность k означает, что $y(\omega) \geq 0$, причем $y(\omega) = 0$ только в исключенном случае, когда $P_c \tilde{Y}(0) = \tilde{Y}(0)$. Тогда из $(**)$ получаем $Q_1(\tilde{Y}(0), \tilde{Y}(0)) > 0$, и $M_1 = 0$. В случае нечетного k аналогичные рассуждения показывают, что $M_1 = 1$. ▲ □

Пусть $P = P_c$ — отображение Пуанкаре, соответствующее замкнутой геодезической c . Собственные значения P , по модулю равные 1, мы будем записывать в виде $(\rho_j, \bar{\rho}_j) = (e^{2\pi i a_j}, e^{-2\pi i a_j})$, $1 \leq j \leq l-1$, где $a_0 = 0 \leq a_1 < \dots < a_{l-1} \leq a_l = 1/2$. При этом мы не исключаем возможность того, что $l-1 = 0$, т. е. P_c не имеет собственных значений, равных по модулю 1.

Из 3.2.12 видно, что ρ -индекс $I_c(\rho)$ геодезической c , рассматриваемый как функция на S , постоянен на компонентах связности $S - \{\rho_j, \bar{\rho}_j; 1 \leq j \leq l-1\}$. Обозначим через $I_{c,j}$ значение функции I_c в точке $\rho = e^{2\pi i a}$, $a_{j-1} < a < a_j$, $1 \leq j \leq l$. Положим

$$\alpha_c = 2 \sum_{j=1}^l I_{c,j} (a_j - a_{j-1}); \quad \beta_c = 2 \sum_{j=1}^l I_{c,j}.$$

Используя эти числа, получим оценку для роста индекса кратных повторений c^m , $m = 1, 2, \dots$, геодезической c .

3.2.15. Лемма. Пусть c — замкнутая геодезическая. Тогда индекс I_{c^m} m -кратного повторения c удовлетворяет соотношениям

$$(*) \quad m\alpha_c - \beta_c \leq I_{c^m} \leq m\alpha_c + \beta_c.$$

Замечание. Слабая форма неравенства $(*)$ содержится в полученной Боттом формуле для «усредненного индекса» $I_c = \lim_{m \rightarrow \infty} I_{c^m}/m$; см. Ботт [3]. Громол и Мейер [2] заметили, что формула, похожая на формулу $(*)$, может быть получена из результата Ботта.

Кроме того, слабый вариант (*) получен Клинггенбергом [16]. Настоящая формулировка принадлежит Циллеру [1]. Можно показать, что в общем случае это наилучшая оценка.

Доказательство. Нам потребуется, что $I_c(\rho_j) \leq I_c(\rho)$ для ρ , достаточно близких к ρ_j . Это следует из непрерывности по ρ спектра оператора ${}_\rho A_c$, определяемого формой $D^2 E_\rho(c)$, т. е. оператора

$${}_\rho A_c = \text{id} - (\text{id} - \nabla^2)^{-1} \cdot (\tilde{K}_c + \text{id}): {}_\rho T_c \Lambda \rightarrow {}_\rho T_c \Lambda;$$

см. Ботт [3]. Это также следует из приведенных ниже формул 3.2.16. Если пожелать обойтись без этого результата, можно получить соотношение типа (*), заменив в определении β_c числа $I_{c,j}$ на $\max(I_{c,j}, I_c(\rho_j), I_c(\rho_{j-1}))$.

Из 3.2.9 мы знаем, что $I_c^m = \sum I_c(\rho)$, $\rho^m = 1$. Разобьем S на дуги, исходя из представления S в виде $e^{2\pi i[-1/2, 1/2]}$ и разбивая $]-1/2, 1/2]$ следующим образом:

$$]-1/2, 1/2] = \left(\bigcup_{j=1}^l]-a_j, -a_{j-1}] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^l]a_{j-1}, a_j] \right).$$

Обозначим через $k_{m,j}$ число тех корней из единицы $\rho = e^{2\pi i h/m}$, для которых $a_{j-1} < h/m < a_j$, через $k_{m,-j}$ — число тех из них, для которых $-a_j < h/m < -a_{j-1}$, через $k'_{m,j}$ — число тех ρ , для которых $a_{j-1} \leq h/m \leq a_j$; оно совпадает с числом $k'_{m,-j}$ тех ρ , для которых $-a_j \leq h/m \leq -a_{j-1}$. Для этих чисел имеют место оценки

$$m(a_j - a_{j-1}) - 1 \leq k_{m,j} = k_{m,-j} \leq k'_{m,j} = k'_{m,-j} \leq m(a_j - a_{j-1}) + 1.$$

Заметим также, что если $I_{c,-j}$ — значение $I_c(\rho)$ на дуге $\rho = e^{2\pi i a}$, $-a_j < a < -a_{j-1}$, то $I_{c,-j} = I_{c,j}$. Действительно, $I_c(\rho) = I_c(\bar{\rho})$, ибо отображение

$$H^0(c^*TM) \rightarrow H^0(c^*TM), \quad \xi \mapsto \bar{\xi},$$

переводит ${}_\rho T_c \Lambda$ в ${}_\rho T_c \Lambda$ и при этом

$$D^2 E_\rho(c)(\xi, \bar{\xi}) = D^2 E_{\bar{\rho}}(c)(\bar{\xi}, \xi) = D^2 E_{\bar{\rho}}(c)(\xi, \bar{\xi}).$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} m\alpha_c - \beta_c &= 2 \sum_{j=1}^l I_{c,j} (m(a_j - a_{j-1}) - 1) \leq \sum_{j=1}^l (I_{c,j} k_{m,j} + I_{c,-j} k_{m,-j}) \leq \\ &\leq \sum_{\rho^m=1} I_c(\rho) = I_c^m \leq \sum_{j=1}^l (I_{c,j} k'_{m,j} + I_{c,-j} k'_{m,-j}) \leq \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^l I_{c,j} (m(a - a_{j-1}) + 1) = m\alpha_c + \beta_c. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание. Осталось исследовать $I_c(\rho_0)$ для тех ρ_0 , $|\rho_0|=1$, которые являются собственными значениями отображения P . Мы уже знаем, что $I_c(\rho)$ остается постоянным, если ρ меняется в одной компоненте связности $S^1 - \{\rho_j\}$, где $\{\rho_j\}$ — множество собственных значений P , лежащих в S^1 . Следуя Ботту [3], введем числа расщепления в точке $\rho_0 \in S^1$:

$$S_c^\pm(\rho_0) = \lim_{\rho \rightarrow \rho_0} (I_c(\rho) - I_c(\rho_0)), \quad \arg \rho \bar{\rho}_0 \begin{cases} > 0, \\ < 0. \end{cases}$$

По аналогии с теоремой 3.2.12 можно предположить, что числа расщепления зависят только от ρ_0 и P . То, что это так на самом деле, было доказано Боттом [3], который использовал топологическую теорию пересечений. Совершенно другое доказательство элементарно-алгебраического характера предложено Клингенбергом [15]. В то же время в этой работе устанавливаются явные выражения для $S_c^\pm(\rho_0)$ в терминах «нормальной формы» отображения P , приведенной в 3.2.4 (т. е. в терминах инвариантов строящегося в 3.2.4 разложения $V^{2n}(0)$ в прямую сумму инвариантных подпространств описанного в 3.2.3 типа^{*)}.

Для собственного значения ρ_0 отображения P , $|\rho_0|=1$, определим следующие целые неотрицательные числа.

Рассмотрим сначала случай, когда $\rho_0^l \neq 1$. Определим $k_{co}^\pm(\rho_0, \bar{\rho}_0)$ как число тех одномерных подпространств типа 3.2.3 (ii) с $l=0$, $\rho=\rho_0$, для которых в формуле с α из 3.2.3 (ii) справа стоит соответственно $\pm i$. Определим $k_{ev}^\pm(\rho_0, \bar{\rho}_0)$ как число тех подпространств типа 3.2.3 (ii) с $l>0$, $\rho=\rho_0$, для которых в той же формуле справа стоит соответственно $\pm i$. Наконец, определим

^{*)} Тогда как Ботт охарактеризовал $S_c^\pm(\rho_0)$ в терминах некоторых свойств некоторого вспомогательного двумерного семейства операторов, определенным образом связанного с P и ρ_0 . Из этого результата Ботта следует его результат (упомянутый после формулировки 3.2.12) о том, что $I_c(\rho)$ можно представить как сумму некоторой величины, зависящей от c , но не от ρ , и некоторой величины, зависящей только от P и ρ и постоянной на связных компонентах $S^1 - \{\rho_j\}$.

Существенная часть теории Ботта фактически связана с использованием грасманова многообразия комплексных лагранжевых плоскостей (т. е. изотропных подпространств максимальной размерности). Точнее, в этой теории рассматриваются пересечения некоторых кривых в этом многообразии с некоторым циклом коразмерности один. Впрочем, у самого Ботта рассмотрения велись в группе симплектических преобразований, и лишь по ходу дела (при разрешении особенностей некоторого псевдомногообразия) привлекались лагранжевы плоскости. Использовать последние с самого начала предложил Эдвардс [1]. В действительной области аналогичные объекты по другому поводу появились позднее у Арнольда [3]. Его работа получила широкую известность и оказала влияние (включая обозначения и терминологию) на те из позднейших работ об индексе, в которых используется и развивается топологический подход Ботта — Эдвардса.

$k_{od}^-(\rho_0, \bar{\rho}_0)$ как число тех подпространств типа 3.2.3 (i) с $\rho = \rho_0$, для которых в формуле с α из 3.2.3 (i) справа стоит -1 .

Если $\rho_0^2 = 1$, то через $2k_{co}(\rho_0, \bar{\rho}_0)$ обозначим число всех подпространств типа 3.2.3 (ii) с $\rho = \rho_0$, $l = 0$. Аналогично определим $2k_{ev}(\rho_0, \bar{\rho}_0)$. Наконец, $k_{od}^-(\rho_0, \bar{\rho}_0)$ положим равным числу тех подпространств типа 3.2.3 (i) с $l > 0$, $\rho = \rho_0$, для которых в формуле с α из 3.2.3 (i) справа стоит -1 .

Используя эти инварианты симплектического преобразования P , можно сформировать следующую теорему (ср. Клингенберг [15]).

3.2.16. Теорема. Числа расщепления $S_c^\pm(\rho_0)$ ρ -индекса для собственного значения ρ_0 отображения Пуанкаре P , соответствующего замкнутой геодезической c , равны

$$S_c^\pm(\rho_0) = \begin{cases} k_{co}^\pm(\rho_0, \bar{\rho}_0) + k_{ev}^\pm(\rho_0, \bar{\rho}_0) + k_{od}^\pm(\rho_0, \bar{\rho}_0), & \text{если } \rho_0^2 \neq 1; \\ k_{co}(\rho_0, \bar{\rho}_0) + k_{ev}(\rho_0, \bar{\rho}_0) + k_{od}^-(\rho_0, \bar{\rho}_0), & \text{если } \rho_0^2 = 1. \quad \square \end{cases}$$

3.3. Свойства отображения Пуанкаре

В этом параграфе мы более подробно исследуем отображение Пуанкаре, соответствующее замкнутой траектории геодезического потока. В частности, мы исследуем, при каких условиях отображение Пуанкаре имеет периодические точки. Как уже было замечено, эти периодические точки находятся во взаимно однозначном соответствии с периодическими траекториями геодезического потока, целиком лежащими около рассматриваемой периодической траектории.

Уже линейная часть P отображения Пуанкаре $P: (\Sigma_0, X_0) \rightarrow (\Sigma_0, X_0)$ в неподвижной точке X_0 содержит некоторую информацию относительно интересующего нас вопроса. Однако, как мы увидим, лишь аппроксимация третьего порядка отображения $\mathcal{P}$ в точке X_0 (так называемая 3-струя) несет достаточно информации для того, чтобы гарантировать существование периодических точек; это составляет содержание теоремы о неподвижной точке Биркгофа и Льюиса, см. 3.3.3 и добавление к § 3.3.

Пусть $P: V^{2n} \rightarrow V^{2n}$ — симплектическое преобразование. Из 3.2.4 мы знаем, что каждое из собственных значений $+1$ и -1 встречается с четной кратностью. В самом деле, например, в случае $+1$ оба числа $\dim V_{od,1}$ и $\dim(V_{ev,1} \otimes \bar{V}_{ev,1})$ четны.

В свете 3.2.1 мы выберем из $2n$ собственных значений отображения P (которые считаются с кратностями) подмножество из n так называемых *главных собственных значений*. При этом ρ называется *главным собственным значением*, если $|\rho| < 1$ или $\rho = e^{2\pi i a}$, где $0 \leq a \leq 1/2$, причем в случае тех ρ , для которых

$\alpha = 0$ или $1/2$, мы берем половину из них (т. е. $\rho = \pm 1$ берутся с половинной кратностью).

Линейное симплектическое преобразование P мы назовем N -элементарным, где $N > 0$ — целое, если множество $\{\rho_1, \dots, \rho_n\}$ главных собственных значений отображения P удовлетворяет следующему условию. Для любых целых $k_1, \dots, k_n$, таких, что $1 \leq \sum |k_j| \leq N$, выполняется соотношение $\prod_j \rho_j^{k_j} \neq 1$.

1-элементарность означает, что 1 не является собственным значением отображения P , 2-элементарность — что $+1$ и -1 не являются собственными значениями и что нет кратных собственных значений. Мы будем интересоваться главным образом 4-элементарностью, которая означает, в частности, что отображение не имеет собственных значений, которые являются корнями из единицы степени ≤ 4 , и что у него нет кратных собственных значений. ⁽⁵¹⁾

Прежде чем мы объясним наш интерес к 4-элементарным преобразованиям, изложим полезный метод описания «формальных» симплектических преобразований с помощью так называемых производящих функций. Заметим, что каждое «формальное» симплектическое преобразование совпадает до порядка k с некоторым симплектическим преобразованием класса C^l , $l \geq k$, или класса C^ω (т. е. аналитическим). Здесь k можно взять любым. Наше изложение следует Мозеру [5].

Пусть (x^k, y^k) , $1 \leq k \leq n$, или короче, (x, y) — канонические координаты в $\mathbb{R}^{2n}$ с канонической 2-формой $\sum_k dx^k \wedge dy^k$. Обозначим через

$$(*) \quad \begin{aligned} \xi^k &= x^k + a_{(r)}^k(x, y) + \dots, \\ \eta^k &= y^k + b_{(r)}^k(x, y) + \dots \end{aligned}$$

формальное локальное симплектическое преобразование $\psi: (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, 0)$, где $a_{(r)}^k, b_{(r)}^k$ — однородные многочлены степени $r \geq 2$.

3.3.1. Предложение. Пусть $(*)$ — формальное симплектическое преобразование ψ . Тогда существует такой однородный многочлен $H_{(r+1)}(x, y)$ степени $r+1$, что

$$(**) \quad a_{(r)}^k(x, y) = \partial H_{(r+1)}(x, y) / \partial y^k; \quad b_{(r)}^k(x, y) = -\partial H_{(r+1)}(x, y) / \partial x^k.$$

Обратно, если $H_{(r+1)}(x, y)$ — однородный многочлен степени $r+1$, то существует формальное симплектическое преобразование ψ , для которого выполняются формулы $(*)$ и $(**)$.

Вводя комплексно сопряженные координаты $(\xi, \bar{\xi}) = (\xi + i\eta, \xi - i\eta)$ и $(z, \bar{z}) = (x + iy, x - iy)$, можно записать (*) и (**) в виде

$$(*)_{\mathbb{C}} \quad \xi^k = z^k + c_{(r)}^k(z, \bar{z}) + \dots,$$

$$c_{(r)}^k(z, \bar{z}) = \partial K_{(r+1)}(z, \bar{z}) / \partial \bar{z}^k,$$

$$(**)_{\mathbb{C}} \quad \overline{K_{(r+1)}(z, \bar{z})} = -K_{(r+1)}(z, \bar{z}).$$

Доказательство. Так как определяемое формулами (*) преобразование ψ симплектическое, то 1-форма

$$\sum_k (\xi^k - x^k) d\eta^k + \sum_k (y^k - \eta^k) dx^k$$

замкнута. Используя (x, η) как независимые переменные (что возможно, так как $D\psi(0)$ — тождественное отображение), мы можем записать эту форму в виде $dH(x, \eta)$, где H можно нормировать условием $H(0, 0) = 0$. Другими словами,

$$(***) \quad \xi^k = x^k + \partial H(x, \eta) / \partial \eta^k; \quad y^k = \eta^k + \partial H(x, \eta) / \partial x^k.$$

Функция $H(x, \eta)$ называется *производящей функцией* преобразования ψ .

Сравнение формул (***) с формулами (*) показывает, что $H(x, \eta)$ начинается с однородного многочлена $H_{(r+1)}(x, \eta)$ степени $r+1$, для которого выполняется (**).

Обратно, пусть теперь $H_{(r+1)}(x, \eta)$ — однородный многочлен. Тогда формулы (***) неявно определяют симплектическое преобразование ψ . Ясно, что это ψ удовлетворяет (*) и (**).

Выражения (*) $_{\mathbb{C}}$ и (**) $_{\mathbb{C}}$ получаются простым вычислением, если положить

$$K_{r+1}(z, \bar{z}) = -2iH_{(r+1)}((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/2i),$$

$$c_{(r)}^k(z, \bar{z}) = a_{(r)}^k((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/2i) + ib_{(r)}^k((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/2i)$$

и учесть, что

$$\partial / \partial z^k = (\partial / \partial x^k - i \partial / \partial y^k) / 2, \quad \partial / \partial \bar{z}^k = (\partial / \partial x^k + i \partial / \partial y^k) / 2. \quad \square$$

▲ *Замечание.* Аналогично можно доказать, что если симплектический C^1 -диффеоморфизм имеет вид (*), где многоточием обозначены остаточные члены порядка $o(|x|^r + |y|^r)$, то по-прежнему существует такой однородный многочлен $H_{(r+1)}(x, y)$ степени $r+1$, что имеют место формулы (**). Именно, так же, как и раньше, доказывается, что преобразование (*) можно задать посредством некоторой производящей C^2 -функции H посредством формулы (***). Значит,

$$\begin{aligned} \partial H(x, \eta) / \partial \eta^k &= a_{(r)}^k(x, y(x, \eta)) + o(|x|^r + |y|^r) = \\ &= a_{(r)}^k(x, \eta) + o(|x|^r + |\eta|^r) \end{aligned}$$

(ведь $\eta - y(x, \eta) = o(|x|^{2r-1} + |\eta|^{2r-1})$), и аналогично

$$\partial H(x, \eta)/\partial x^k = -b_{(r)}^k(x, \eta) + o(|x|^r + |\eta|^r).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} H(x, \eta) &= \int_0^\eta a_{(r)}^k(0, \eta') d\eta' - \int_0^x b_{(r)}^k(\xi, \eta) d\xi + o(|x|^{r+1} + |\eta|^{r+1}) = \\ &= - \int_0^x b_{(r)}^k(\xi, 0) d\xi + \int_0^\eta a_{(r)}^k(x, \eta') d\eta' + o(|x|^{r+1} + |\eta|^{r+1}). \end{aligned}$$

Обе разности интегралов являются некоторыми однородными многочленами $H_{(r+1)}(x, \eta)$ и $H'_{(r+1)}(x, \eta)$ степени $r+1$. Как видно, разность этих однородных многочленов есть $o(|x|^{r+1} + |\eta|^{r+1})$, так что на самом деле они совпадают. Из выражения $H_{(r+1)}$ в виде первой разности видно, что $\partial H/\partial \eta = -b_{(r)}^k$, а в виде второй — что $\partial H/\partial x = a_{(r)}^k$. ▲

Теперь мы можем получить нормальную форму Биркгофа 4-элементарного симплектического преобразования. Основные идеи, связанные с этим кругом вопросов, можно найти у Биркгофа [2] и [3], а настоящее доказательство содержится у Мозера [5].

3.3.2. Лемма. Пусть

$$\mathcal{F}: (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, 0)$$

— локальное симплектическое преобразование класса C^1 , принадлежащее в начале координат 0 классу C^{3*}). Предположим, что собственные значения отображения $P = D\mathcal{F}(0)$ равны по модулю 1 и что оно 4-элементарно. Тогда в некоторой окрестности $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ существуют такие вещественно-аналитические комплексно сопряженные координаты $(z, \bar{z})$, что в этих координатах преобразование $\mathcal{F}$ задается так называемой нормальной формой Биркгофа

$$z^{**} = z^k \exp 2\pi i \left(a^k + \sum_l b_l^k z^l \bar{z}^l \right) + w^k(z, \bar{z}).$$

Здесь $w^k(z, \bar{z})$ — функции класса C^1 , у которых в точке 0 производные до третьего порядка включительно равны нулю, a^k и b_l^k — действительные числа, причем a^k таковы, что $\rho_k = \exp(2\pi i a^k)$ — главные собственные значения. При этом если a^k пронумерованы

* В данном случае это надо понимать в том смысле, что для $\mathcal{F}$ и $D\mathcal{F}$ в точке 0 имеет место разложение Тейлора такого же типа, как для функций из C^3 и C^2 соответственно, т. е. координаты $\mathcal{F}$ представляются как суммы однородных многочленов порядков 1, 2, 3 и остаточных членов o (от третьего порядка), а первые производные этих координат представляются в виде суммы однородных многочленов порядков 1, 2 и остаточных членов o (от второго порядка). Аналогичное разъяснение касается w^k ниже.

в порядке монотонного возрастания, то матрица b_i^k определяется единственным образом. В частности, свойство $\det(b_i^k) \neq 0$ не зависит от выбора нормальной формы (т. е. если оно выполняется при одной какой-нибудь нумерации a^k , то оно выполняется и при всех других нумерациях). ⁽⁵²⁾

Доказательство. Введем с помощью подходящей линейной замены такие комплексно сопряженные координаты $(z^*, \bar{z}^*)$ в $\mathbb{R}^{2n}$, чтобы в них отображение $\mathcal{F}$ принимало вид

$$(\dagger) \quad \xi^{**} = \rho_k(z^{**} + p_{(2)}^k(z^*, \bar{z}^*)) + \dots,$$

где $p_{(2)}^k$ — однородные многочлены степени 2. Согласно замечанию к 3.3.1, примененному к $P^{-1}\mathcal{F}$, существует такой однородный многочлен третьей степени $S_{(3)}(z^*, \bar{z}^*) = -\overline{S_{(3)}(z^*, \bar{z}^*)}$, что $p_{(2)}^k(z^*, \bar{z}^*) = \partial S_{(3)}(z^*, \bar{z}^*) / \partial \bar{z}^{**k}$.

Сделаем в $(\dagger)$ вещественно аналитическую симплектическую замену координат $\psi: (z, \bar{z}) \rightarrow (z^*, \bar{z}^*)$ вида $(*)_{\mathbb{C}}$, $(**)_{\mathbb{C}}$. В новых координатах получившееся отображение $\mathcal{Q} = \psi^{-1} \circ \mathcal{F} \circ \psi$ запишется так:

$$\begin{aligned} \zeta^k &= \rho_k(z^k + q_{(2)}^k(z, \bar{z})) + \dots, \\ q_{(2)}^k(z, \bar{z}) &= \partial T_{(3)}(z, \bar{z}) / \partial \bar{z}^k, \end{aligned}$$

где $T_{(3)}(z, \bar{z}) = -\overline{T_{(3)}(z, \bar{z})}$ — однородный многочлен степени 3. Мы утверждаем, что

$$(\dagger \dagger) \quad T_{(3)}(z, \bar{z}) = S_{(3)}(z, \bar{z}) - K_{(3)}(\rho z, \bar{\rho} \bar{z}) + K_{(3)}(z, \bar{z}).$$

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим квадратичные члены в разложении Тейлора для $\psi \circ \mathcal{Q} = \mathcal{F} \circ \psi$:

$$\begin{aligned} \rho_k \partial T_{(3)}(z, \bar{z}) / \partial \bar{z}^k + \rho_k \partial K_{(3)}(\rho z, \bar{\rho} \bar{z}) / \partial \bar{z}^k &= \\ &= \rho_k \partial S_{(3)}(z, \bar{z}) / \partial \bar{z}^k + \rho_k \partial K_{(3)}(z, \bar{z}) / \partial \bar{z}^k. \end{aligned}$$

Наше утверждение следует из того, что все члены в этом выражении однородны и что при сопряжении лишь меняются знаки, так что наряду с последним равенством имеет место аналогичное равенство с заменой $\partial / \partial \bar{z}^k$ на $\partial / \partial z^k$.

Запишем $K_{(3)}$ в виде $K_{(3)}(z, \bar{z}) = \sum K_{\alpha\bar{\beta}} z^\alpha \bar{z}^\beta$, где $z^\alpha = \prod z_k^{a_k}$, $\bar{z}^\beta = \prod \bar{z}_k^{b_k}$, α и β — мультииндексы, и $|\alpha| = \sum a_k$, $|\beta| = \sum b_k$, $|\alpha| + |\beta| = 3$. Используя аналогичные обозначения для $S_{(3)}$ и $T_{(3)}$, перепишем $(\dagger \dagger)$ в виде

$$(\dagger \dagger \dagger) \quad T_{\alpha\bar{\beta}} = S_{\alpha\bar{\beta}} + K_{\alpha\bar{\beta}}(1 - \rho^{\alpha-\beta}).$$

Так как P 4-элементарно и $|\alpha| + |\beta| = 3$, так что и подавно $0 \leq \sum |\alpha_j - \beta_j| \leq 4$, то $1 - \rho^{\alpha-\beta} = 0$ лишь в том случае, когда

$\alpha = \beta$. А так как равенство исключается (хотя бы из-за того, что $|\alpha| + |\beta| = 3$), то $K_{\alpha\bar{\beta}}$ можно подобрать так, чтобы $T_{\alpha\bar{\beta}} = 0$.

Поэтому можно считать, что в выражении $(+)$ для $\mathcal{F}$ вместо $p_{(2)}^k$ стоит $p_{(3)}^k(z^*, \bar{z}^*) = \partial S_{(4)}(z^*, \bar{z}^*) / \partial \bar{z}^{*k}$, где $S_{(4)}$ — однородный многочлен степени 4. Делая в $(+)$ вещественно аналитическую замену переменных ψ вида $(*)_{\mathbb{C}}$, $(**)_{\mathbb{C}}$ с $r=3$, получим, как и прежде, соотношение $(++)$, но теперь уже с однородными многочленами степени 4. В соответствующем выражении $(+++)$ равенство $1 - \rho^{\alpha-\beta} = 0$ снова возможно лишь в том случае, когда $\alpha = \beta$, так как $|\alpha| + |\beta| = 4$. Поэтому, выбирая подходящим образом $K_{\alpha\bar{\beta}}$, мы можем все $T_{\alpha\bar{\beta}}$ сделать равными нулю, если только $\alpha \neq \beta$. Чтобы окончательно зафиксировать ψ , положим $K_{\alpha\bar{\alpha}} = 0$ (из $(+++)$ видно, что это можно сделать). Таким образом, отображение $\mathcal{Q} = \psi^{-1} \cdot \mathcal{F} \cdot \psi$ задается формулой

$$\xi^k = \rho_k \left(z^k + \partial \left(\sum_{l, m} T_{l\bar{m}} z^l \bar{z}^m \right) / \partial \bar{z}^k \right) + \dots$$

Если теперь мы положим $T_{l\bar{k}\bar{k}} + T_{k\bar{l}\bar{l}} = 3\pi i b_l^k$, то получим искомую нормальную форму (заметим, что $T_{l\bar{k}\bar{k}}$ чисто мнимые). Из наших рассуждений видно, что при фиксированной нумерации a^k многочлены $K_{(3)}$ и $K_{(4)}$, задающие (в нужных порядках) симплектическое преобразование, приводящее $\mathcal{F}$ к нормальной форме, определяются однозначно (за исключением коэффициентов $K_{\alpha\bar{\alpha}}$ с $|\alpha| = 2$, которые не влияют на b_l^k). Следовательно, 3.3.2 доказано. $\square$

Замечание. Если P является $(2L+1)$ -элементарным, то $\mathcal{F}$ можно привести к виду $z^{*k} = z^k \exp 2\pi i$ (многочлен степени L от $z\bar{z}$) $+ O(|z|^{2L+1})$. Если P при всех N является N -элементарным, то, проводя аналогичные рассуждения, можно получить формальный степенной ряд, который, однако, в общем случае не сходится (см. Зигель и Мозер [1], Мозер [4] и Зигель [1], [2], [3]).

Важность нормальной формы для наших целей связана с тем, что с ее помощью можно определить следующее свойство. Локальный симплектический диффеоморфизм $\mathcal{F}: (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, 0)$ назовем *закручивающим*, если все собственные значения линейной части P этого диффеоморфизма равны по модулю 1, P является 4-элементарным и в нормальной форме 3.3.2 для $\mathcal{F}$ определитель $\det(b_l^k) \neq 0$.

Чтобы прояснить геометрический смысл этого определения, введем в $\mathbb{R}^{2n}$ вне 0 (но возле 0) новые симплектические координаты $\tau^k > 0$ и $\theta^k \bmod 2\pi$, $1 \leq k \leq n$, полагая

$$2\tau^k = z^k \bar{z}^k; \quad 2i\theta^k = \log z^k - \log \bar{z}^k.$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$\sum_k dx^k \wedge dy^k = \frac{i}{2} \sum_k dz^k \wedge d\bar{z}^k = \sum_k d\tau^k \wedge d\theta^k,$$

т. е. (τ, θ) действительно являются симплектическими координатами.

В этих координатах нормальная форма 3.3.2 превращается в

$$(\S) \quad \tau^{*k} = \tau^k + o(|\tau|^{5/2}, \theta); \quad \theta^{*k} = \theta^k + 2\pi \left(a^k + \sum_l 2b_l^k \tau^l \right) + o(|\tau|^{3/2}, \theta)$$

(θ в o стоит просто как напоминание, что соответствующие члены зависят от θ). Отсюда видно, что $\mathcal{F}$ можно рассматривать как возмущение отображения $\mathcal{F}_0$, определяемого формулами

$$(\S_0) \quad \tau^{*k} = \tau^k; \quad \theta^{*k} = \theta^k + 2\pi \left(a^k + \sum_l 2b_l^k \tau^l \right).$$

Отображение $\mathcal{F}_0$ оставляет инвариантными торы $\{\tau^k = \tau_0^k\}$ и действует на каждом из этих торов как произведение вращений $\theta^k \mapsto \theta^k + 2\pi \left(a^k + \sum_l 2b_l^k \tau_0^l \right)$. То что отображение $\mathcal{F}$ закручивающее, означает, что эти вращения, рассматриваемые как функции τ^k , трансверсальны к этим торам, т. е. $(\partial \theta^{*k} / \partial \tau^l) \neq 0^*$.

Важность понятия закручивающего отображения связана с тем, что такие отображения имеют бесконечно много периодических точек — точнее, даже периодических траекторий — в каждой окрестности нуля. При этом точку $z \neq 0$, лежащую в некоторой окрестности U точки $0 \in \mathbb{R}^{2n}$, мы называем *периодической периода N* , если все точки $\mathcal{F}^{kz}$ определены, $\mathcal{F}^N z = z$ и если $\mathcal{F}^{kz} \neq z$ при $0 < k < N$ **). Множество $\{\mathcal{F}^k z; 0 \leq k \leq N-1\}$ называется *периодической траекторией* отображения $\mathcal{F}$.

Так как $\det(b_l^k) \neq 0$, то в каждой окрестности 0 существуют такие числа $\tau_0^k > 0$, $1 \leq k \leq n$, что $\mathcal{F}_0$ действует на торах $\{\tau^k = \tau_0^k\}$ как произведение рациональных вращений (вращений на углы, соизмеримые с 2π):

$$N \left(a^k + \sum_l 2b_l^k \tau_0^l \right) = m^k \in \mathbb{Z}.$$

Это означает, что все точки тора $\{\tau^k = \tau_0^k\}$ периодические периода N . При этом мы предполагаем, что N и $(m^1, \dots, m^n)$ не имеют общих делителей > 1 .

*) Точнее говоря, отображение, сопоставляющее каждой точке, достаточно близкой к 0 в $\mathbb{R}^{2n}$ и имеющей координаты (τ^k, θ^k) , точку $\mathbb{R}^n$ с координатами θ^{*k} , является трансверсальным.

**) Как и в случае периодических траекторий, часто N называют минимальным периодом, а к периодам относят также и кратные N .

Используя некоторые априорные оценки, можно показать, что в каждой окрестности тора $\{\tau^k = \tau_0^k\}$ отображение $\mathcal{F}$ имеет периодические траектории. Это утверждение составляет содержание теоремы Биркгофа — Льюиса о неподвижной точке:

3.3.3. Теорема. Пусть $\mathcal{F}: (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, 0)$ — локальное симплектическое закручивающее отображение. Тогда в каждой окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ существует бесконечно много периодических траекторий.

Замечания. Для случая $n=1$ и вещественно-аналитического $\mathcal{F}$ это было доказано Биркгофом [3], который воспользовался идеей Пуанкаре [2]; см. также доказательство у Мозера [1], Зигеля, Мозера [1], Зигеля [1]. Для случая $n > 1$ основные идеи доказательства содержатся у Биркгофа [4], Арнольда [2], [4] и Арнольда и Авеца [1]. Однако до сих пор полное доказательство опубликовано не было. Тем более отсутствовало доказательство этого утверждения при более слабых предположениях, а именно для случая, когда $\mathcal{F}$ не аналитично, а лишь дифференцируемо. Доказательство теоремы в этом случае было изложено Мозером в его лекциях в Нью-Йоркском университете. В добавлении к этому параграфу мы приводим его доказательство.

Происходящие в рассматриваемой ситуации явления тесно связаны с тем, что происходит в гамилтоновых системах с изолированной неподвижной точкой «общего устойчивого типа», аналогом которой в нашей ситуации является неподвижная точка закручивающего отображения. Для произвольного n такие вещественно-аналитические системы изучали Биркгоф и Льюис [1]. Пробел в их доказательстве был ликвидирован Харрисом [1]. Дифференцируемый вариант изучен Марзоуком [1] и Цендером [1].

Закручивающие локальные симплектические преобразования $\mathcal{F}$ привлекли к себе заметное внимание в последние годы. Толчком к этому послужили исследования Колмогорова, Арнольда и Мозера, в которых для таких преобразований доказано существование «большого» множества инвариантных торов вблизи точки $0 \in \mathbb{R}^{2n}$, на каждом из которых отображения $\mathcal{F}$ действуют как квазипериодические преобразования; см. Арнольд [1], [4], Арнольд и Авец [1], Мозер [2], [3], [4], Зигель и Мозер [1].

В случае «элементарного закручивающего отображения» $\mathcal{F}_0$ вида (5₀) эти инвариантные торы соответствуют в достаточно точном смысле тем $\tau^k = \tau_0^k$, для которых совокупность чисел 1 и $a^k + \sum_i 2b_i^k \tau_0^i$ ($k = 1, \dots, n$) в некотором смысле сильно несоизмерима, в то время как торы $\tau^k = \tau_0^k$ с рациональными $a^k + \sum_i 2b_i^k \tau_0^i$ соответствуют, как уже было сказано выше, перио-

дическим точкам. Дальнейшие подробности см. в работах: Арнольд и Авец [1], Арнольд [4], Мозер [4], Цендер [1] и в добавлении к этому параграфу.

Интересным следствием этих теорем об инвариантных торах является то, что в случае $n=1$ теорема Биркгофа — Льюиса о неподвижной точке может быть усилена следующим образом.

3.3.4. Дополнение. Пусть $\mathcal{F}: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ — локальный сохраняющий площадь закручивающий диффеоморфизм класса C^4 . Тогда замыкание периодических точек имеет положительную меру.

За доказательством этого утверждения мы отсылаем к Мозеру [4], с. 54, и Цендеру [1], который, кроме того, цитирует аналогичный результат для закручивающих отображений в произвольной размерности. $\square$

Если мы хотим применить теорему Биркгофа — Льюиса о неподвижной точке (3.3.3) к геодезическому потоку, то мы должны начать с периодической траектории $\varphi_t X_0$, для которой отображение Пуанкаре $\mathcal{F}$ является закручивающим. Последнее условие, в частности, означает, что все собственные числа линейной части P отображения Пуанкаре лежат на единичной окружности.

Однако эта ситуация не является общей, и даже малых возмущений геодезического потока может оказаться недостаточно для того, чтобы ее получить. Действительно при каждом q , $0 \leq q \leq n$, рассмотрим в линейной симплектической группе*) $Sp(n)$ множество $Sp_{(q)}(n)$ тех элементов $P \in Sp(n)$, у которых из $2n$ собственных значений ровно $2q$ лежат на единичной окружности и которые N -элементарны, $N > 1$. Легко проверить, что эти $Sp_{(q)}(n)$ являются непустыми открытыми подмножествами в $Sp(n)$.

В случае когда $P \in Sp_{(0)}(n)$, т. е. когда P не имеет собственных значений, лежащих на единичной окружности, или, что то же самое, когда P гиперболическое (см. 3.2.13), отображение $\mathcal{F}$ заведомо не имеет периодических точек, траектории которых целиком лежат в малой окрестности точки 0. Однако для $P \in Sp_{(q)}(n)$, $q > 0$, такие периодические точки существовать могут. Идея состоит в том, чтобы ограничить отображение $\mathcal{F}$ на такое локальное инвариантное подмногообразие размерности $2q > 0$, для которого все собственные числа соответствующего линейного отображения (т. е. ограничения P на касательное

*) То есть группе симплектических линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^{2n}$, снабженного стандартной симплектической формой. (Часто тем же символом $Sp(n)$ обозначают группу автоморфизмов кватернионного пространства, сохраняющих стандартную эрмитову форму в последнем, а для рассматриваемой нами группы используют обозначение $Sp(n, \mathbb{R})$.)

пространство к многообразию в точке 0) лежат на единичной окружности, и затем применить теорему Биркгофа — Льюиса о неподвижной точке.

Существование таких инвариантных подмногообразий утверждает следующая теорема об инвариантных многообразиях.

3.3.5. Теорема. Пусть $\mathcal{F}: (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, 0)$ — локальный симплектический диффеоморфизм. Пусть $P = D\mathcal{F}(0)$ — линейная часть этого диффеоморфизма, и пусть

$$(V_s^P + V_u^P) \oplus V_{ce}^{2q}$$

— разложение пространства $V^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$ на устойчивое, неустойчивое и центральное подпространства по отношению к P . Другими словами, эти пространства инвариантны относительно P , и все собственные числа ρ отображения $P|V_s^P$ таковы, что $|\rho| < 1$, все собственные числа ρ отображения $P|V_u^P$ таковы, что $|\rho| > 1$, и, наконец, все собственные числа отображения $P|V_{ce}^{2q}$ равны по модулю единице (ср. 3.2.4).

Утверждение. Существуют такие локальные вложения $W_s^P, W_u^P: (\mathbb{R}^P, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, 0)$, $W_{ce}^{2q}: (\mathbb{R}^{2q}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, 0)$, что*) $T_0 W_s^P = V_s^P$, $T_0 W_u^P = V_u^P$, $T_0 W_{ce}^{2q} = V_{ce}^{2q}$ и эти вложения инвариантны относительно $\mathcal{F}$, т. е. $\mathcal{F}W_s^P, \mathcal{F}W_u^P$ и $\mathcal{F}W_{ce}^{2q}$ локально равны W_s^P, W_u^P и W_{ce}^{2q} соответственно. Эти подмногообразия называются соответственно устойчивым, неустойчивым и центральным многообразиями.

3.3.6. Дополнение. Если отображение $\mathcal{F}$ принадлежит классу C^k или классу C^∞ , то ограничения $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}|W_s^P$ и $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}|W_u^P$ также принадлежат классу C^k или классу C^∞ соответственно, а $\mathcal{F}_{ce} = \mathcal{F}|W_{ce}^{2q}$ принадлежит классу C^k . Кроме того, если $\mathcal{F}$ — класса C^∞ , то для любого $l < \infty$, взяв W_{ce}^{2q} достаточно малым, можно добиться, чтобы $\mathcal{F}_{ce}$ принадлежало классу C^l .

Многообразия W_s^P и W_u^P возле 0 определены единственным образом, а многообразие W_{ce}^{2q} , вообще говоря, — нет.

Доказательство. За доказательством мы отсылаем к Мозеру [5]; см. также Келли [1] и Хирш, Пью, Шуб [1]. Дёйстермат дал полное доказательство (неопубликованная рукопись, датированная августом 1972 г.), используя метод Перрона [1]. Частные случаи рассмотрены у Хартмана [1]; см. также работы

*) Далее автор фактически обозначает образы этих локальных вложений теми же самыми буквами.

Ирвина [1] и Ленфорда [1]. Формулировку этой теоремы можно найти также у Абрахама и Марсдена [1]*). $\square$

Замечание. На самом деле у нас отображение $\mathcal{P}$ появляется как отображение Пуанкаре, соответствующее периодической траектории $\varphi_t X_0$, $0 \leq t \leq \omega$, геодезического потока $\varphi_t: T_1 M \rightarrow T_1 M$. Существует вариант теоремы об инвариантных многообразиях для периодических траекторий, который мы сейчас изложим. Допустим, что линейная часть P отображения $\mathcal{P}$ обладает свойствами, описанными в 3.3.5. Тогда существуют глобально определенные иммерсии

$$\widetilde{W}_s^{p+1}, \widetilde{W}_u^{p+1}: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, (0, 0)) \rightarrow (T_1 M, X_0),$$

которые $\blacktriangle$ (точнее, их образы) $\blacktriangle$ называются соответственно *устойчивым* и *неустойчивым* многообразиями и обладают следующими свойствами:

$$(t, X) \mapsto \varphi_t \cdot (\widetilde{W}_s^{p+1} \text{ или } \widetilde{W}_u^{p+1})(0, X);$$

$$T_{X_0} \widetilde{W}_s^{p+1} | \{0\} \times \mathbb{R}^p = V_s^p \quad \blacktriangle \text{ (в понятном смысле при естественных отождествлениях) } \blacktriangle;$$

$$T_{X_0} \widetilde{W}_u^{p+1} | \{0\} \times \mathbb{R}^p = V_u^p;$$

так называемые *сильно устойчивое* и *сильно неустойчивое* многообразия

$$W_{ss}^p := \widetilde{W}_s^{p+1} | \{0\} \times \mathbb{R}^p, \quad W_{uu}^p := \widetilde{W}_u^{p+1} | \{0\} \times \mathbb{R}^p$$

переходят под действием φ_ω в себя, причем φ_ω действует на W_{ss}^p и W_{uu}^p соответственно как (обобщенные) сжатие и растяжение. Эти иммерсии однозначно определяются своими свойствами**):

$$W_{ss}^p = \{X \in T_1 M; \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t X = X_0\}, \quad W_{uu}^p = \{X \in T_1 M; \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t X = X_0\}.$$

Аналог центрального многообразия можно ввести как локально определенную иммерсию:

$$\widetilde{W}_{ce}^{2q+1}: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2q}, (0, 0)) \rightarrow (T_1 M, X_0), \quad (t, X) \mapsto \varphi_t \cdot V_{ce}^{2q} X,$$

где (t, X) принадлежит некоторой окрестности множества $[0, \omega] \times \{0\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2q}$ и $T_{X_0} \widetilde{W}_{ce}^{2q+1} | \{0\} \times \mathbb{R}^{2q} = V_{ce}^{2q}$. Кроме того, $W_{ce}^{2q} := \widetilde{W}_{ce}^{2q+1} | \{0\} \times \mathbb{R}^{2q}$ инвариантно относительно действия потока в том смысле, что существует такое локально определенное дифференцируемое отображение $\delta: W_{ce}^{2q} \rightarrow \mathbb{R}$, $\delta(X_0) = 0$, что $\varphi_{\omega+\delta(X)}(X) \in W_{ce}^{2q}$.

*). Существование центрального инвариантного многообразия впервые доказал Плисс [1] (хотя в несколько иной ситуации).

**). Надо добавить, что стремление к пределу экспоненциальное.

Важно, однако, отметить, что, вообще говоря, W_{ce}^{2q} не является локально единственным и W_{ce}^{2q} не переходит в себя под действием φ_ω , как W_{ss}^p и W_{uu}^p .

Во всяком случае, если $2q > 0$, мы определим *центральное отображение Пуанкаре*

$$\mathcal{P}_{ce}: (\Sigma_{ce, 0}, X_0) \rightarrow (\Sigma_{ce, \omega}, X_0)$$

как некоторый диффеоморфизм некоторой окрестности $\Sigma_{ce, 0}$ точки X_0 на W_{ce}^{2q} на некоторую окрестность $\Sigma_{ce, \omega}$ точки X_0 на W_{ce}^{2q} , который в случае 3.3.6 является ограничением $\mathcal{P}$ на $\Sigma_{ce, 0}$, а в описанном выше случае — отображением $X \mapsto \varphi_{\omega+\delta(X)} X \in W_{ce}^{2q}$, где $X \in W_{ce}^{2q}$ достаточно близко к X_0 .

Ввиду наличия инвариантных центральных многообразий мы следующим образом обобщим понятие закручивающего отображения.

Локальное симплектическое отображение $\mathcal{P}: (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, 0)$ называется закручивающим, если:

(i) соответствующая линейная часть P не является гиперболической, т. е. существуют $2q > 0$ собственных чисел, лежащих на единичной окружности;

(ii) P является 4-элементарным;

(iii) в нормальной форме 3.3.2 отображения $\mathcal{P}_{ce} := \mathcal{P}|W_{ce}^{2q}$ определитель $\det(b_i^k) \neq 0^*$.

Наша следующая цель состоит в исследовании, при каких условиях отображение Пуанкаре, соответствующее периодической траектории геодезического потока (который рассматривается как поток в T_1M или, что эквивалентно, в T^*M , см. (42)), является закручивающим в только что указанном обобщенном смысле**).

Рассмотрим в качестве примера геодезический поток на единичном касательном расслоении T_1S^{n+1} сферы S^{n+1} , кривизна которой всюду постоянна. В этом случае отображение Пуанкаре тождественно, так как все траектории периодические и имеют одинаковый период 2π .

* Ограничение $\alpha|W_{ce}^{2q}$ определяет на W_{ce}^{2q} симплектическую структуру (невырожденность этой формы в некоторой окрестности 0 следует из невырожденности $\alpha|T_0W_{ce}^{2q} = \alpha|V_{ce}^{2q}$, а последнее следует из 3.2.1). Очевидно, $\mathcal{P}_{ce} = \mathcal{P}|W_{ce}^{2q}$ сохраняет эту структуру, поэтому к $\mathcal{P}_{ce}$ можно применять все понятия и результаты, относящиеся к симплектическим диффеоморфизмам.

** Заметим, что если для данной замкнутой траектории отображение Пуанкаре является закручивающим при одном каком-нибудь выборе локальной трансверсальной гиперповерхности Σ , то оно будет закручивающим и при любом другом выборе Σ , так что интересующее нас свойство не зависит от этого выбора и является внутренним свойством рассматриваемой траектории.

Поэтому встает следующий вопрос. Пусть $\varphi_t X_0$ — периодическая траектория геодезического потока. Можно ли тогда с помощью произвольно малого возмущения метрики сделать так, чтобы $\varphi_t X_0$ осталось периодической траекторией, а соответствующее отображение Пуанкаре было закручивающим?

Первое, что мы должны сделать, — это определить топологию на множестве $\mathcal{S} = \mathcal{S}M$ всех римановых метрик на компактном дифференцируемом многообразии M . Напомним, что риманова метрика на многообразии M — это такое дифференцируемое сечение

$$g: M \rightarrow L^2_+(TM)$$

векторного расслоения $L^2_+(\tau)$ симметрических билинейных форм, ассоциированного с касательным расслоением τ многообразия M , что $g(p)$ принадлежит открытому конусу положительно определенных форм на $T_p M$, см. § 1.1.

Если на многообразии M фиксирована риманова метрика, то она определяет риманову метрику на каждом векторном расслоении $\alpha: A \rightarrow M$, ассоциированном с векторным расслоением $\tau: TM \rightarrow M$, и, в частности, определяет метрику на $L^2_+(\tau)$. Используя ковариантные производные, можно построить риманову метрику на расслоении r -струй $J^r(\alpha): J^r(A) \rightarrow M$ расслоения α , см. Абрахам и Роббин [1] и Элиассон [3].

Пусть теперь $\Gamma^r(\alpha)$ — векторное пространство C^r -сечений расслоения $\alpha: A \rightarrow M$. Тогда норма, определяемая римановой метрикой на $J^r(\alpha)$, превращает $\Gamma^r(\alpha)$ в банахово пространство*). Таким образом, множество $\mathcal{S}^r M$ римановых метрик класса C^r становится открытым подмножеством банахова пространства $\Gamma^r(L^2_+(\tau))$, состоящего из C^r -сечений расслоения $L^2_+(\tau)$.

Через $\mathcal{S}^\infty M$ мы будем обозначать множество римановых метрик класса C^∞ . Множество $\mathcal{S}^\infty M$ может быть превращено в открытое подпространство пространства Фреше.

Во всех этих случаях пространства $\mathcal{S}M$ являются открытыми подмножествами полных метрических пространств, а индуцированная топология не зависит от римановой метрики, так как M компактно. В частности, $\mathcal{S}M$ — пространство Бэра, что означает следующее: каждое остаточное множество $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}M$ плотно. При этом *остаточным* множеством мы называем такое множество, которое является пересечением счетного числа открытых плотных подмножеств**).

*) Менее элегантно, но более элементарным образом можно ввести в $\Gamma^r(\alpha)$ эквивалентную норму с помощью локальных координат.

**) Иными словами, это есть всюду плотное множество типа G_δ . Нередко «остаточное множество» (residual set) понимают в более широком смысле — как множество, дополнение к которому является множеством первой категории (объединением счетного числа нигде не плотных множеств). Именно в таком смысле употреблял данный термин его автор, А. Данжуа. Но для множества,

Остаточное подмножество можно рассматривать как аналог для пространств Бэра (или по крайней мере для полных метрических пространств) множества меры 1 в пространстве с мерой, мера которого сама равна 1. Примером остаточного множества в пространстве действительных чисел является множество всех иррациональных чисел.

Свойство римановой метрики g на M мы назовем *типичным*, если множество $\mathcal{U}^*$, состоящее из метрик, удовлетворяющих этому свойству, является остаточным ^{*}).

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству того, что следующее свойство является типичным: у каждой периодической траектории геодезического потока соответствующее отображение Пуанкаре или гиперболическое, или закручивающее.

Первым шагом к доказательству этой теоремы является следующее предложение.

3.3.7. Предложение. Пусть $\varphi_t X_0$, $0 \leq t \leq \omega$, — периодическая траектория геодезического потока с минимальным периодом ω . Положим $\tau \cdot \varphi_t X_0 = c(t)$, т. е. $c(t)$ — однократная замкнутая геодезическая длины ω , $|\dot{c}| = 1$.

Утверждение. В произвольно малой окрестности произвольной точки геодезической c можно так сколь угодно мало возмутить метрику g на M (малость подразумевается в смысле C^r -топологии на $\mathcal{U}M$, причем $r \geq 0$ — любое), что в возмущенной метрике $c(t)$ по-прежнему останется замкнутой геодезической и соответствующее линейное отображение Пуанкаре P будет N -элементарным, где $N > 0$ — произвольное заданное целое число.

Доказательство (ср. Клингенберг и Такенс [1]). Мы начнем с введения координат Ферми вдоль $c(t)$; см. Громол, Клингенберг, Мейер [1]. Для этого возьмем в $T_{c(0)}M$ такой ортонормированный репер E_i , $0 \leq i \leq n$, что $E_0 = \dot{c}(0)$. Через $E_i(t_0)$ обозначим ортонормированный репер в точке $T_{c(t_0)}M$, полученный из $E_i(0)$ с помощью параллельного переноса вдоль $c(t)$, $0 \leq t \leq t_0$.

дополнительного к множеству первой категории, имеются и другие названия: массивное множество, множество второй категории (в узком смысле; в широком смысле множество второй категории — это множество, не являющееся множеством первой категории). При наличии таковых лучше резервировать термин «остаточное множество» для обозначения более узкого понятия, как это и делает автор. Неустойчивость терминологии, видимо, связана с тем, что по большей части эти оттенки не имеют большого значения: обычно интерес представляет массивность множества, а имеет ли оно при этом тип G_δ , уже не столь важно.

^{*} Естественнее называть свойство типичным также и тогда, когда соответствующее $\mathcal{U}^*$ является множеством второй категории (в узком смысле). Но для того свойства, которым мы будем заниматься, $\mathcal{U}^*$ будет остаточным множеством.

Рассмотрим дифференцируемое отображение

$$\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow M, \quad (t; x^1, \dots, x^n) \mapsto \exp \left(\sum_{i=1}^n x^i E_i(t) \right).$$

В точках $(t_0; 0)$ это отображение имеет максимальный ранг $n+1$, поэтому отображение Φ , рассматриваемое в достаточно малой окрестности любой точки $(t_0; 0)$, определяет локальную систему координат возле $c(t_0)$.

▲ Мы будем рассматривать Φ при малых x (скажем, при $x \in \text{Int } D_\varepsilon^n$, где D_ε^n — шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса ε) и при произвольных t . (Позднее мы фактически сможем ограничиться $t \in]-\varepsilon, \omega + \varepsilon[$, но, если сделать такое ограничение с самого начала, это не внесло бы упрощений.) Очевидно, $\Phi|_{\mathbb{R} \times \text{Int } D_\varepsilon^n}$ является иммерсией. Мы все-таки будем говорить о $(t; x)$ как о «локальных координатах возле c », хотя на самом деле одной и той же точке многообразия M соответствует много различных координат $(t; x)$. Вместо t в данном контексте часто будем писать x^0 .

Пусть $\Phi(x^0 + \omega; x) = \Phi(x^0, x')$. Выясним, как связаны x и x' . Разложим $E_j(\omega)$, $j > 0$, по базису $E_i(0)$, $i > 0$, пространства $V^n(0)$ (то же обозначение, что и в замечании к 3.2.10):

$$E_j(\omega) = \sum_{i=1}^n a_{ij} E_i(0).$$

Матрица $A = (a_{ij})$ ортогональная. Тогда и $E_j(t + \omega) = \sum_{i=1}^n a_{ij} E_i(t)$.

Если $\Phi(x^0 + \omega; x) = \Phi(x^0, x')$, то $\sum_1^n x_j E_j(x^0 + \omega) = \sum_1^n x'_i E_i(x^0)$,

откуда $x'_i = \sum_1^n a_{ij} x_j$, т. е. $x' = Ax$. Можно сказать еще так: наряду с локальной системой координат $(x^0; x)$ в окрестности точки $c(t_0)$ отображение Φ определяет в той же окрестности и другую систему $(x'^0; x')$, для которой $x'^0 = x^0 - \omega$, $x' = Ax^*$.

Отображение Φ индуцирует отображение

$$(\Phi^*)^{-1}: \mathbb{R} \times D_\varepsilon^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow T^*M,$$

с помощью которого в T^*M вводятся канонические координаты $\{(x^0; x), (y^0; y)\}$ с $y = (y^1, \dots, y^n)^{**}$. Сделанные выше оговорки

*¹ Можно было бы профакторизовать $\mathbb{R} \times \text{Int } D_\varepsilon^n$ по отношению эквивалентности $(x^0, x) \sim (x^0 - \omega, Ax)$, но если c имеет самопересечения, то мы все-таки не получим вложения факторпространства в M .

**¹ Собственно, в духе традиционных обозначений тензорного исчисления следовало бы у y ставить индексы внизу (ковариантный вектор), но я сохранил обозначения Клингенберга.

насчет неоднозначности координат $(x^0; x)$ в M относятся и к координатам $\{(x^0; x), (y^0; y)\}$ в T^*M . Рассмотренным выше двум картам в M (координаты $(x^0; x)$ и $(x'^0; x')$) отвечают две карты в T^*M , причем соответствующие координаты $\{(x^0; x), (y^0; y)\}$ и $\{(x'^0; x'), (y'^0; y')\}$ связаны следующим образом:

$$x'^0 = x^0 - \omega, \quad x' = Ax, \quad y'^0 = y^0, \quad y' = A^{-1}y.$$

(Действительно, известно, что если (φ, U) и (φ', U') — две карты в M , то соответствующие координаты в T^*M связаны следующим образом. Пусть $p \in U \cap U'$, $\varphi(p) = x$, $\varphi'(p) = x'$; тогда $v \in T_p^*M$ имеет в этих картах координаты (x, y) и (x', y') , где $y' = D(\varphi \circ \varphi'^{-1})(x') \cdot y$.)

Выразим в этих координатах интересующие нас объекты — исходную риманову метрику g , нужную нам возмущенную метрику g^* , инвариантную гиперповерхность $T_1^*M \subset T^*M$ (поскольку она зависит от используемой римановой метрики, мы временно будем писать $T_1^*(M, g)$ и $T_1^*(M, g^*)$), локальную трансверсальную гиперповерхность Σ , уравнения геодезических потоков $\{\varphi_t\}$ и $\{\varphi_t^*\}$ для метрик g и g^* соответственно, уравнения в вариациях для этих потоков и соответствующие линейные отображения Пуанкаре P и P^* . ▲ Из определения следует, что

$$g_{ik}(t; 0) = \delta_{ik}; \quad \partial g_{ik}(t; 0)/\partial x^i = 0;$$

$$\partial^2 g_{00}(t; 0)/\partial x^i \partial x^k = -2R_{0i0k}(t; 0).$$

▲ Действительно, формула для g_{ik} очевидна. Формула для $\partial g_{ik}/\partial x^i$ следует из того, что все $\Gamma_{kl}^i(t, 0, \dots, 0) = 0$ (короче мы будем говорить, что $\Gamma_{kl}^i = 0$ вдоль $c(t)$). Последнее же доказывается так. Во-первых, в точках $c(t)$ базис

$$\partial/\partial t, \partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n = E_0(t), E_1(t), \dots, E_n(t)$$

получается параллельным перенесением из этого базиса в $T_{c(0)}M$, поэтому для любого векторного поля вдоль $c(t)$ его ковариантное дифференцирование по t сводится к обычному дифференцированию компонент этого поля в этом базисе. Отсюда все $\Gamma_{0k}^i = 0$ *). Во-вторых, $(t_0, tx^1, \dots, tx^n)$ — координаты геодезической линии; отсюда, используя уравнение геодезических и симметрию Γ_{jk}^i по нижним индексам, получаем, что $\Gamma_{jk}^i = 0$ при $i, k \neq 0$. Наконец, поскольку $(j\text{-компонента } \nabla_{\partial/\partial x^k} \partial/\partial x^i) = \Gamma_{kl}^j$ и $g_{ij} = \delta_{ij}$, то $R_{0i0k} = R_{i0k}^0 = (0\text{-компонента } R(\partial/\partial t, \partial/\partial x^k, \partial/\partial x^i)) = (0\text{-компонента } (\nabla_{\partial/\partial t} \nabla_{\partial/\partial x^k} - \nabla_{\partial/\partial x^k} \nabla_{\partial/\partial t}) \partial/\partial x^i) = \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{kl}^0 - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{0l}^0 = -1/2 \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} + \right.$

*). Поскольку связность Леви-Чивита не имеет кручения, мы можем не заботиться о порядке нижних индексов у символов Кристоффеля.

$+ \frac{\partial g_{00}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^k}$. При вычислении вторых ковариантных производных мы воспользовались здесь тем, что в точках $c(t)$ ковариантное дифференцирование (уже не только по t , но и в любом направлении) сводится к обычному дифференцированию компонент (коль скоро все $\Gamma_{jk}^i = 0$). Далее, $\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ki}^0 = 0$, ибо $\Gamma_{ki}^0 = 0$ вдоль $c(t)$, а $\frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{0i}^0 = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{0,0i}$ в точках $c(t)$, ибо $\Gamma_{0i}^0 = \sum g^{0j} \Gamma_{j,0k}$, а в этих точках $g^{0j} = \delta_{0j}$ и $\partial g^{0j} / \partial x^k = 0$. $\blacktriangle$

Если мы хотим, чтобы $c(t)$ оставалась геодезической при малых возмущениях заданной метрики g , то возмущенная метрика g^* должна иметь вид $^{*)}$

$$\begin{aligned} g^{*00}(t; x) &= g^{00}(t; x) + \sum_{i, k > 0} \alpha_{ik}(t; x) x^i x^k; \\ g^{*0i}(t; x) &= g^{0i}(t; x) + \sum_{k > 0} \beta_{ik}(t; x) x^k, \quad i > 0; \\ g^{*ik}(t; x) &= g^{ik}(t; x) + \gamma_{ik}(t; x), \quad i, k > 0. \end{aligned}$$

Поскольку $g^{*ik} = g^{*ki}$, мы должны потребовать, чтобы $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$. Кроме того, мы можем потребовать, чтобы было $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, ибо всегда можно заменить α_{ik} на $(\alpha_{ik} + \alpha_{ki})/2$.

В самом деле, легко проверить, что кривая $x^0(t) = t$, $x^i(t) = 0$ при $i > 0$ удовлетворяет уравнениям геодезической для метрики g^* :

$$\ddot{x}^i(t) + \sum_{k, l} \Gamma_{k, l}^{*i}(x(t)) \dot{x}^k \dot{x}^l = 0,$$

так как $\Gamma_{00}^{*i}(t; 0) = 0$, $i \geq 0$. $\blacktriangle$ Последнее следует из того, что $g_{0i}^* = \delta_{0i}$ и $\partial g_{00}^* / \partial x^i = 0$ вдоль $c(t)$:

$$\Gamma_{00}^{*i} = \sum_{j=0}^n g^{ij} \Gamma_{j, 00}^* = \sum_{j=0}^n g^{ij} \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial g_{j0}^*}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}^*}{\partial x^j} \right) = 0. \quad (53)$$

Кроме того, мы будем считать, что носители функций $\alpha_{ik}(t; x)$, $\beta_{ik}(t; x)$ и $\gamma_{ik}(t; x)$ находятся в окрестности U точки $(t_0; 0)$, причем $c(t_0)$ не является точкой самопересечения кривой c и U столь

$^{*)}$ Мы непосредственно задаем не матрицу g_{ij}^* , а обратную к ней матрицу g^{*ij} , описывающую метрику в T^*M , двойственную к метрике g^* в TM , см. § 3.1. Заметим, что звездочка сейчас используется для обозначения перехода к возмущенной метрике, тогда как в § 3.1 звездочка служила для обозначения того, что речь идет о метрике в T^*M , а не в TM . Поэтому для функции Гамильтона (кинетической энергии, рассматриваемой как функция на T^*M), отвечающей исходной метрике g , теперь будет использоваться обозначение H (вместо H^* из § 3.1), тогда как H^* будет обозначать функцию Гамильтона для возмущенной метрики g^* .

мала, что находится строго внутри $[0, \omega] \times D_\varepsilon^n$ и

$$\Phi^{-1}(\Phi(U)) \cap (]-\varepsilon, \omega + \varepsilon[\times \text{Int } D_\varepsilon^n) = U.$$

«Координату» x^0 мы теперь будем рассматривать лишь при $-\varepsilon < x^0 < \omega + \varepsilon$. Сказанное обеспечивает, что g^* действительно можно рассматривать как риманову метрику на M , совпадающую с g вне $\Phi(U)$. В то же время предположение, что $c(t_0)$ не является точкой самопересечения, не ограничивает общности, ибо у однократной геодезической точек самопересечения конечное число и в любой окрестности точки самопересечения имеется точка, не являющаяся точкой самопересечения.

Как уже говорилось, когда речь идет об отображении Пуанкаре $\mathcal{P}$ для геодезической c римановой метрики g , мы рассматриваем геодезический поток как поток $\{\varphi_t\}$ в $T_1^*(M, g)^*$. В терминах канонических координат $\{(x^0; x), (y^0; y)\}$ в T^*M инвариантная гиперповерхность $T_1^*(M, g)$ выделяется соотношением

$$\sum_{i, k=0}^n g^{ik}(x^0; x) y^i y^k = 1, \text{ а локальную трансверсальную гиперпо-}$$

верхность (гиперповерхность уже в $T_1^*(M, g)$, а не в T^*M)

$\Sigma = \Sigma(X_0)$ в точке $X_0 = \dot{c}(0) = E_0(0)$ можно задать следующим образом. Для ее точек $x^0 = t = 0$, $x = (x^1, \dots, x^n)$ принадлежит некоторой окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^n$, $y = (y^1, \dots, y^n)$ тоже принадлежит некоторой окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^n$, а y^0 близко к 1

и удовлетворяет уравнению $\sum_{i, k=0}^n g^{ik}(0, x) y^i y^k = 1$. (См. два абзаца

перед 3.1.9.)

В качестве координат на Σ можно взять $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$.

Возмущенную метрику g^* мы определили в терминах прежних координат $(x^0; x)$ на M (конечно, они, вообще говоря, уже не будут координатами Ферми для g^*). Геодезический поток $\{\varphi_t^*\}$ в T^*M для g^* будем описывать в тех же координатах $\{(x^0; x), (y^0; y)\}$, что и $\{\varphi_t\}$. Поток $\{\varphi_t^*\}$ имеет инвариантную гиперповерхность $T_1^*(M, g^*)$, для которой $\sum_{i, k=0}^n g^{*ik}(x^0; x) y^i y^k = 1$ и отобра-

*1) Обозначения для потоков, стало быть, тоже несколько отличаются от принятых в § 3.1 и в (42). В данном случае нам удобнее говорить о T_1^*M , а не о T_1M , потому что мы пользуемся каноническими координатами $\{(x^0; x), (y^0; y)\}$ в T^*M . Впрочем, при желании их можно рассматривать и как координаты в TM , пользуясь естественным изоморфизмом $TM \rightarrow T^*M$, который геодезическую пульверизацию в TM переводит в гамилтоново векторное поле в T^*M (см. 3.1.5). Но тогда надо помнить, что этот изоморфизм зависит от той римановой метрики, для которой мы рассматриваем геодезическую пульверизацию, и т. д., так что и $(y^0; y)$ -компонента наших координат в TM будет от нее зависеть.

жение Пуанкаре $\mathcal{P}$ строится для ограничения $\{\varphi_i^*\}$ на $T_1^*(M, g^*)$. Последняя гиперповерхность не совпадает с $T_1^*(M, g)$, но различаются только те их части, которые лежат в $(\tau_M^*)^{-1}\Phi(U)$ (где $\tau_M^*: T^*M \rightarrow M$ — стандартная проекция). В частности, те области на $T_1^*(M, g)$ и $T_1^*(M, g^*)$, которые проектируются в некоторую малую окрестность точки $c(0)$ на M , совпадают. Поэтому для $\{\varphi_i^*\}|T_1^*(M, g^*)$ в качестве локальной трансверсальной гиперповерхности мы можем взять прежнюю Σ . $\blacktriangle$

Определим координаты z^α , $1 \leq \alpha \leq 2n$, полагая $z^i = x^i$, $z^{i+n} = y^i$. Пусть $J^{\alpha\alpha'}$ обозначают элементы матрицы

$$(J^{\alpha\alpha'}) = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы можем записать уравнения Гамильтона в виде

$$(H^0) \quad \dot{x}^0 = H_{y^0}, \quad \dot{y}^0 = -H_{x^0},$$

$$(H^\alpha) \quad \dot{z}^\alpha = \sum_{\alpha'=1}^{2n} J^{\alpha\alpha'} H_{\alpha'}, \quad (\alpha = 1, \dots, 2n),$$

где через H_α обозначается $\partial H / \partial z^\alpha$. Старшие частные производные функции H мы будем обозначать аналогично, например $H_{\alpha\beta} = \partial^2 H / \partial z^\alpha \partial z^\beta$.

Координаты x^i , y^i , $i > 0$, рассматриваемые как координаты на построенной выше гиперповерхности $\Sigma = \Sigma(X_0)$, будем обозначать через ζ^α , $1 \leq \alpha \leq 2n$. Заметим, что точка X_0 на Σ описывается в этих координатах уравнениями $\zeta^\alpha = 0$. Обозначим через

$$(*) \quad x^0(t; \zeta); \quad y^0(t; \zeta); \quad z^\alpha(t; \zeta)$$

решения систем (H^0) , (H^α) , которые при $t=0$ проходят через $\zeta \in \Sigma$. Тогда отображение Пуанкаре задается соответствием

$$(\zeta^\alpha) \mapsto (z^\alpha(\omega(\zeta), \zeta)),$$

где $\omega(\zeta) = \omega + \delta(\zeta)$ (см. 3.1.10).

Частные производные решений $(*)$ по ζ^α при $\zeta=0$ мы будем обозначать с помощью индекса α внизу. В частности, функции

$$z_\beta^\alpha(t) := \partial z^\alpha(t; 0) / \partial \zeta^\beta$$

являются координатами поля Якоби $\check{Y}_\beta(t) = (Y_\beta(t), \nabla Y_\beta(t))$ вдоль $c(t)$ с начальным условием

$$Y_\beta(0) = \sum_{i>0} z_\beta^i(0) E_i(0) = \sum_{i>0} \delta_{i\beta} E_i(0) = \begin{cases} E_\beta(0), & \beta \leq n, \\ 0, & \beta > n, \end{cases}$$

$$\nabla Y_\beta(0) = \sum_{i>0} z_\beta^{i+n}(0) E_i(0) = \sum_{i>0} \delta_{i+n, \beta} E_i(0) = \begin{cases} 0, & \beta \leq n, \\ E_{\beta-n}(0), & \beta > n \end{cases}$$

Это означает, что матрица $(z_{\beta}^{\alpha}(t))$ является фундаментальной матрицей решений уравнений Якоби *):

$$(J) \quad \dot{x}^i(t) = y^i(t); \quad \dot{y}^i(t) = - \sum_k R_{0i0k}(t) x^k(t).$$

Это следует из 3.1.6. В этом можно убедиться и непосредственно, дифференцируя (H^0) , (H^{α}) по ξ^{β} при $\xi=0$.

Для того чтобы это сделать, напомним сначала, что $H(x, y) = \frac{1}{2} \sum g^{ij}(x) y^i y^j$. По правилу дифференцирования обратной матрицы

$$(\partial g^{ij} / \partial x^k) = - (g_{ij})^{-1} (\partial g_{ij} / \partial x^k) (g_{ij})^{-1}.$$

Значит, в нашем случае $\partial g^{ij} / \partial x^k = 0$ при $x=0$ (нам уже случалось это использовать). Вычисляя $\partial^2 g^{ij} / \partial x^k \partial x^l$, получим выражение в виде некоторой суммы. При $x=0$ слагаемые, содержащие первые производные, равны нулю, а $g_{ij} = \delta_{ij}$. Поэтому вдоль $c(t)$

$$\partial^2 g^{ij} / \partial x^k \partial x^l = - \partial^2 g_{ij} / \partial x^k \partial x^l. \quad \blacktriangle$$

Заметим далее, что вдоль $c(t)$ в координатах Ферми

$$H_{x^0 x^i} = H_{x^0 y^i} = H_{y^0 x^i} = 0, \quad H_{y^0 y^i} = \delta_{0i} \quad \text{при } i=0, 1, \dots, n.$$

Поэтому из (H^0) получаем

$$(H_{\beta}^0) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{\beta}^0 &= H_{y^0 y^0} y_{\beta}^0 + \sum_{i>0} H_{y^0 y^i} y_{\beta}^i = y_{\beta}^0, \\ \dot{y}_{\beta}^0 &= 0. \end{aligned}$$

Так как $y_{\beta}^0(0) = 0$, $x_{\beta}^0(0) = 0$, то и $y_{\beta}^0(t) = x_{\beta}^0(t) = 0$. Геометрически это означает уже известный нам факт, что $V^{2n}(0)$ (то же обозначение, что в § 3.2) инвариантно относительно действующего в $T_{c(0)}M$ линейного преобразования $T_{\Phi_{\omega}}(\dot{c}(0))$. Поэтому при нашем выборе Σ линейное отображение Пуанкаре $P = T_{\Phi_{\omega}}|V^{2n}(0)$. Далее, дифференцируя (H^{α}) по ξ^{β} , получим

$$(H_{\beta}^{\alpha}) \quad \dot{z}_{\beta}^{\alpha}(t) = \sum_{\alpha', \rho=1}^{2n} J^{\alpha\alpha'} H_{\alpha'\rho}(t) z_{\beta}^{\rho}(t),$$

* Непосредственно уравнение Якоби вместе с $\dot{c}^i = \delta_{i0}$ дает

$$\ddot{x}^i + \sum_k R_{0k0}^i x^k = 0.$$

Далее используем, что в нашем случае $R_{0k0}^i = R_{i0k0}$ и что $R_{ijkl} = R_{jilk}$ ввиду известных свойств симметрии R (см. начало § 2.4).

Под фундаментальной матрицей решений часто понимают любую матрицу, столбцы которой образуют максимальную систему линейно независимых решений, а в том частном случае (с которым мы как раз имеем дело), когда при $t=0$ эта матрица обращается в единичную, говорят о *матрицанте*.

где $H_{\alpha'\rho}(t) = H_{\alpha'\rho}((t; 0), (1; 0))$. Теперь

$$\begin{aligned} H_{ij}(t) &= (1/2) \partial^2 g^{00}(t; 0) / \partial x^i \partial x^j = R_{0ij}(t), \\ H_{i,j+n}(t) &= \partial g^{\alpha i}(t; 0) / \partial x^j = 0, \\ H_{i+n,j+n}(t) &= g^{ij}(t; 0) = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Это означает, что матрица $(z_{\beta}^{\alpha}(t))$, удовлетворяющая уравнениям (H_{β}^{α}) и равенствам $z_{\beta}^{\alpha}(0) = \delta_{\alpha}^{\beta}$, является фундаментальной матрицей решений системы (J). $\blacktriangle$ При $t = \omega$ она описывает линейное отображение Пуанкаре P , однако при этом для отображаемых векторов используются координаты, отвечающие $t=0$, а для их образов — отвечающие $t=\omega$. Чтобы для образов перейти к координатам, отвечающим $t=0$, нужно, как мы видели, подействовать еще матрицей $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$. Итак, P в координатах ζ представляется следующей матрицей:

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} (z_{\beta}^{\alpha}(\omega)).$$

Для возмущенной метрики g^* геодезический поток описывается гамильтоновой системой $(H^{*0}), (H^{*\alpha})$, аналогичной $(H^0), (H^{\alpha})$, с заменой H на

$$H^*(x^0, x, y^0, y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^n g^{*ij}(x^0; x) y^i y^j.$$

Через

$$x^{*0}(t; \zeta); \quad y^{*0}(t; \zeta); \quad z^{*\alpha}(t; \zeta)$$

обозначим ее решение с начальным значением $x^{*0}=0, y^{*0}=0, z^{*}=\zeta$ при $t=0$. Дифференцируя $(H^0), (H^{\alpha})$, получим дифференциальные уравнения для $x_{\beta}^{*0}, y_{\beta}^{*0}, z_{\beta}^{*\alpha}$. Займемся сначала $x_{\beta}^{*0}, y_{\beta}^{*0}$. По-прежнему при $i=0, 1, \dots, n$

$$H_{x^0 x^i}^* = H_{x^0 y^i}^* = H_{y^0 x^i}^* = 0, \quad H_{y^0 y^i}^* = \delta_{0i},$$

поэтому $\dot{x}_{\beta}^{*0} = \dot{y}_{\beta}^{*0}, \dot{y}_{\beta}^{*0} = 0$, откуда ввиду нулевых начальных значений для $x_{\beta}^{*0}, y_{\beta}^{*0}$ следует, что $x_{\beta}^{*0}(t) = 0, y_{\beta}^{*0}(t) = 0$. Теперь для $\dot{z}_{\beta}^{*\alpha}(t)$ получается система

$$(H_{\beta}^{*\alpha}) \quad \dot{z}_{\beta}^{*\alpha}(t) = \sum_{\alpha', \rho=1}^n J^{\alpha\alpha'} H_{\alpha', \rho}^*(t) z_{\beta}^{*\rho}(t);$$

матрица $(z_{\beta}^{*\alpha}(t))$ является фундаментальной матрицей решений этой системы с начальным значением $z_{\beta}^{*\alpha}(0) = \delta_{\alpha\beta}$. Непосредственное вычисление показывает, что матрица коэффициентов этой систе-

мы отличается от матрицы коэффициентов системы (H_{β}^{α}) на матрицу

$$\left(\sum_{\alpha'=1}^{2n} J^{\alpha\alpha'} H_{\alpha', \rho}^*(t) - \sum_{\alpha'=1}^{2n} J^{\alpha\alpha'} H_{\alpha', \rho}(t) \right) = \begin{pmatrix} \beta_{ij}(t; 0) & \gamma_{ij}(t; 0) \\ -\alpha_{ij}(t; 0) & -\beta_{ji}(t; 0) \end{pmatrix}.$$

(В правом нижнем блоке элемент, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, равен β_{ji} .) Здесь α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} суть функции от t (бывшее $\alpha_{ij}(t; 0)$ и т. д.). Сейчас мы их будем рассматривать при $0 \leq t \leq \omega$. Напомним, что они удовлетворяют следующим условиям симметрии: $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ и $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$. Кроме того, эти функции должны быть малыми (в рассматриваемой топологии) и их носители лежат в некоторой малой окрестности точки t_0 . В остальном они, очевидно, могут быть произвольными.

Положим $(\Delta z_{\beta}^{\alpha}(t)) := (z_{\beta}^{\alpha}(t))^{-1} (z_{\beta}^{*\alpha}(t))$. Выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $\Delta z_{\beta}^{\alpha}$. Вообще, пусть неособые матрицы $Z(t)$ и $Z^*(t)$ удовлетворяют матричным дифференциальным уравнениям

$$\dot{Z}(t) = B(t)Z(t), \quad \dot{Z}^*(t) = (B(t) + C(t))Z^*(t).$$

Тогда для $\Delta Z := Z^{-1}Z^*$ легко получить $(\Delta Z)^{\cdot} = (Z^{-1}CZ)\Delta Z$. Значит, в нашем случае

$$(\Delta z_{\beta}^{\alpha})^{\cdot} = (z_{\beta}^{\alpha})^{-1} \begin{pmatrix} \beta_{ij} & \gamma_{ij} \\ -\alpha_{ij} & -\beta_{ji} \end{pmatrix} (z_{\beta}^{\alpha}) (\Delta z_{\beta}^{\alpha}).$$

Заметим, что общий вид элемента из алгебры Ли симплектической группы $Sp(n)$ совпадает с видом матрицы $\begin{pmatrix} \beta_{ij} & \gamma_{ij} \\ -\alpha_{ji} & -\beta_{ji} \end{pmatrix}^{*1}$. Далее, $(z_{\beta}^{\alpha}(t))$ — некоторая фиксированная матричная C^{∞} -функция $[0, \omega] \rightarrow Sp(n)$. Очевидно, задав произвольно какую-нибудь матричную функцию $L(t)$ со значениями в алгебре Ли группы $Sp(n)$, достаточно малую в рассматриваемой топологии и с носителями в рассматриваемой окрестности t_0 , мы сможем подобрать такие α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} с перечисленными выше свойствами, что

$$(z_{\beta}^{\alpha})^{-1} \begin{pmatrix} \beta_{ij} & \gamma_{ij} \\ -\alpha_{ij} & -\beta_{ji} \end{pmatrix} (z_{\beta}^{\alpha}) = L(t).$$

Но любую симплектическую матрицу S , достаточно близкую к I_{2n} , можно получить как $S(\omega)$, где $S(t)$ — решение матричного урав-

*1) Напомним, что обычное описание общего вида элементов из алгебры Ли группы $Sp(n)$ таково: будучи разбиты на блоки n -го порядка, они имеют вид $L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix}$, где $B = {}^tB$ и $C = {}^tC$. (Это сразу следует из уравнения ${}^tLJ + JL = 0$ для элементов этой алгебры Ли.)

нения $\dot{S}(t) = L(t) S(t)$ (с $L(t)$ указанного выше типа), $S(0) = I_{2n}$ (⁵⁴). Итак, для любой симплектической матрицы S , достаточно близкой к I_{2n} , за счет малого изменения метрики можно добиться, чтобы $(\Delta z_{\beta}^{\alpha}(\omega)) = S$.

Перейдем к линейному отображению Пуанкаре P^* для геодезической с метрики g^* . Такие же рассуждения, как выше для P , показывают, что

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} (z_{\beta}^{*\alpha}(\omega)) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} (z_{\beta}^{\alpha}(\omega)) (\Delta z_{\beta}^{\alpha}(\omega)) = P (\Delta z_{\beta}^{\alpha}(\omega)). \quad \blacktriangle$$

Наконец, заметим, что условие N -элементарности отображения P открыто, плотно и инвариантно, т. е. множество N -элементарных элементов $P \in Sp(n)$ открыто, плотно и инвариантно относительно действия внутренних автоморфизмов. Поэтому можно найти такое сколь угодно малое возмущение метрики g описанного выше вида, что соответствующее возмущенной метрике g^* линейное отображение Пуанкаре $P^* = P \Delta z_{\beta}^{\alpha}(\omega)$ будет N -элементарным. Это замечание заканчивает доказательство предложения 3.3.7. $\square$

▲ Замечание. Мы не уточнили, какова гладкость исходной метрики g . Вообще говоря, в настоящем параграфе обычное соглашение, что все объекты принадлежат классу C^{∞} , не действует. Однако для наших целей (теоремы 3.3.9 и 3.3.10) достаточно доказать 3.3.7 лишь для того случая, когда g — класса C^{∞} . Тогда координаты Ферми тоже будут класса C^{∞} , и если в этих координатах компоненты g_{ij}^* тензора возмущенной метрики g^* принадлежат классу C^{∞} и C^r -близки к g_{ij} , то это значит, что g^* принадлежит классу C^{∞} и C^r -близка к g . Поэтому в 3.3.7 можно r считать любым, а возмущенную метрику считать метрикой класса C^{∞} . То же самое относится и к следующей далее лемме 3.3.8. $\blacktriangle$

Предложение 3.3.7 можно рассматривать как утверждение о том, что с помощью произвольно малого возмущения римановой метрики можно так изменить 1-струю отображения Пуанкаре, чтобы она удовлетворяла некоторому открытому, плотному и инвариантному условию. В следующей лемме аналогичный результат доказывается для 3-струи отображения Пуанкаре. Общий результат такого типа изложен у Клингенберга и Такенса [1].

3.3.8. Лемма. Пусть $\varphi_t X_0$, $0 \leq t \leq \omega$, — периодическая траектория с минимальным периодом ω и $s(t) := \tau \cdot \varphi_t X_0$ — соответствующая однократная замкнутая геодезическая длины ω , $|\dot{s}| = 1$. Пусть, далее, $\mathcal{P}$ — соответствующее отображение Пуанкаре. Предположим, кроме того, что линейное отображение Пуанкаре P

имеет $2q$ собственных значений, лежащих на единичной окружности, $2q > 0$.

Утверждение. В произвольно малой окрестности произвольной точки геодезической c можно так сколь угодно мало возмутить метрику g на M , что в возмущенной метрике $c(t)$ по-прежнему останется геодезической и соответствующее отображение Пуанкаре будет закручивающим.

Доказательство. Мы можем считать, что P 4-элементарно (см. 3.3.7). Так же, как в доказательстве 3.3.7, введем координаты Ферми вдоль c . ▲ Сохраним введенные там обозначения. Как и раньше, в некоторой окрестности точки $X_0 = \dot{c}(0) \in T^*M$ имеем две системы канонических координат, естественно соответствующих тем двум системам координат возле точки $c(0)$ в M , которые получаются с помощью Φ из стандартных координат в $]-\varepsilon, \varepsilon[\times \text{Int } D_\varepsilon^n$ и $]\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon[\times \text{Int } D_\varepsilon^n$. На время, как и в соответствующем месте доказательства 3.3.7, обозначим эти координаты в M через $(x'^0; x')$ и $(x^0; x)$, а в T^*M — через $\{(x'^0; x'), (y'^0; y')\}$ и $\{(x^0; x), (y^0; y)\}$; в 3.3.7 мы видели, как первые связаны со вторыми. Поверхность Σ задается уравнением $x'^0 = 0$ или $x^0 = \omega$. Координаты ζ^α на Σ — это (x'^i, y'^i) . Траектория $\varphi_t X$ с $X \in \Sigma$, где X имеет (достаточно малые) координаты ζ^α , вторично пересекает Σ в момент времени $t = \omega(\zeta)$, где $\omega(\zeta)$ является непрерывным (даже дифференцируемым) по ζ решением уравнения $x^0(\omega(\zeta), \zeta) = \omega$, причем $\omega(0) = \omega$. В этот момент времени z -координаты траектории суть $z^\alpha(\omega(\zeta), \zeta)$. Они же образуют часть ее координат во второй (нештрихованной) системе локальных координат возле X_0 . Соответствующие им штрихованные координаты суть

$$\begin{pmatrix} x'^i \\ y'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} (z^\alpha(\omega(\zeta), \zeta)).$$

Итак, в терминах координат ζ^α на Σ отображение Пуанкаре

$$(\mathcal{P}) \quad \mathcal{P}(\zeta^\alpha) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} (z^\alpha(\omega(\zeta), \zeta)).$$

Аналогично для возмущенной метрики g^* такого типа, как в 3.3.7 (фактически мы будем рассматривать некий более частный тип возмущений), Σ по-прежнему является локальной трансверсальной гиперповерхностью и соответствующее отображение Пуанкаре имеет вид

$$(\mathcal{P}^*) \quad \mathcal{P}^*(\zeta^\alpha) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} (z^{*\alpha}(\omega^*(\zeta), \zeta)),$$

где $\omega^*(\zeta)$ — непрерывное (даже дифференцируемое) по ζ решение уравнения $x^{*0}(\omega^*(\zeta), \zeta) = \omega$ и $\omega^*(0) = \omega$. $\blacktriangle$

Рассмотрим возмущения фундаментального тензора $g^{ik}(t; x)$ следующего вида:

$$g^{*00}(t; x) = g^{00}(t; x) + \sum_{i, j, k, l > 0} \alpha_{ijkl}(t; x) x^i x^j x^k x^l / 12;$$

$$g^{*0i}(t; x) = g^{0i}(t; x) + \sum_{i, k, l > 0} \beta_{i+n jkl}(t; x) x^j x^k x^l / 6, \quad i > 0;$$

$$g^{*ij}(t; x) = g^{ij}(t; x) + \sum_{k, l > 0} \gamma_{i+n j+n k l}(t; x) x^k x^l / 2, \quad i, j > 0.$$

Здесь мы должны потребовать симметрии γ по первым двум индексам. Кроме того, мы вправе считать, что γ симметричны по последним двум, β — по последним трем и α — по всем четырем индексам. Далее, α , β и γ имеют носители в той же области U , что и в доказательстве 3.3.7, и являются малыми в рассматриваемой топологии, а в остальном произвольны. Как мы увидим, возмущения такого типа не изменяют 1-струю и 2-струю отображения $\mathcal{P}$ и в то же время позволяют варьировать третьи производные $\mathcal{P}$ по ζ .

Дифференцируя уравнения (H^0) , (H^α) , (H^{*0}) , $(H^{*\alpha})$, мы получим уравнения для 1-струй, 2-струй и 3-струй функций $(\zeta^\alpha) \mapsto x^0(\omega, \zeta^\alpha)$, $(\zeta^\alpha) \mapsto y^0(\omega, \zeta^\alpha)$, $(\zeta^\alpha) \mapsto (z^\alpha(\omega, \zeta^\alpha))$ и аналогичных функций x^{*0} , y^{*0} , $z^{*\alpha}$, а от них перейдем к 1-струям, 2-струям и 3-струям отображений $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$.

$\blacktriangle$ Мы уже рассматривали уравнения для x_β^α , y_β^α , z_β^α и соответствующих величин со звездочкой. В частности, мы видели, что

$$x_\beta^\alpha(t) = y_\beta^\alpha(t) = x_\beta^{*0}(t) = y_\beta^{*0}(t) = 0.$$

К сожалению, старшие производные от x^0 и y^0 по начальным данным, вообще говоря, $\neq 0$ *) и не выпадают из уравнений для производных остальных z^α . Поэтому мы временно изменим обозначения, считая, что $z^i = x^i$ при $i = 0, \dots, n$ и $z^i = y^{i-n-1}$ при $i = n+1, \dots, 2n+1$. Соответственно изменим смысл $J^{\alpha\alpha'}$. Тогда исходная гамильтонова система есть

$$(H^\alpha) \quad \dot{z}^\alpha = \sum_{\alpha'} J^{\alpha\alpha'} H_{\alpha'}.$$

*) Хотя в английском оригинале этой книги ошибочно утверждается обратное.

Дифференцируя ее по начальным данным, получаем

$$(H_{\beta}^{\alpha}) \quad \dot{z}_{\beta}^{\alpha} = \sum_{\alpha', \rho} J^{\alpha\alpha'} H_{\alpha'\rho} z_{\beta}^{\rho},$$

$$(H_{\beta\gamma}^{\alpha}) \quad \dot{z}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \sum_{\alpha', \rho} J^{\alpha\alpha'} H_{\alpha'\rho} z_{\beta\gamma}^{\rho} + \sum_{\alpha', \rho, \sigma} J^{\alpha\alpha'} H_{\alpha'\rho\sigma} z_{\beta}^{\rho} z_{\gamma}^{\sigma},$$

$$(H_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}) \quad \dot{z}_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \sum_{\alpha', \rho} J^{\alpha\alpha'} H_{\alpha'\rho} z_{\beta\gamma\delta}^{\rho} + \sum_{\alpha', \rho, \sigma} J^{\alpha\alpha'} H_{\alpha'\rho\sigma} (z_{\beta\gamma}^{\rho} z_{\delta}^{\sigma} + \dots) + \\ + \sum_{\alpha', \rho, \sigma, \tau} J^{\alpha\alpha'} H_{\alpha'\rho\sigma\tau} z_{\beta}^{\rho} z_{\gamma}^{\sigma} z_{\delta}^{\tau}.$$

Здесь нижние индексы у H обозначают производные по соответствующим z , и значения всех этих производных берутся при $z^0 = t$ и прочих $z^{\alpha} = 0$. Суммирование ведется по всем индексам, стоящим под знаком суммы, от 0 до $2n+1$. В $(H_{\beta\gamma\delta}^{\alpha})$ в записи $(z_{\beta\gamma}^{\rho} z_{\delta}^{\sigma} + \dots)$ многоточием обозначены два других слагаемых, которые получаются из первого (выписанного явно) слагаемого при некоторых перестановках нижних индексов (причем из двух перестановок, отличающихся только порядком индексов у второй производной, надо использовать только одну какую-нибудь, так что всего имеется 3, а не 6 слагаемых; например, можно взять циклические перестановки). (Подобная запись встречается и далее.) Аналогичные уравнения $(H^{*\alpha})$, ..., $(H_{\beta\gamma\delta}^{*\alpha})$ имеют место для $z^{*\alpha}$ и их производных по переменным ξ ; надо только всюду поставить звездочку у H .

Докажем, что $z_{\beta}^{*\alpha}(t) = z_{\beta}^{\alpha}(t)$ и $z_{\beta\gamma}^{*\alpha}(t) = z_{\beta\gamma}^{\alpha}(t)$. Первое нам фактически уже известно из доказательства 3.3.7: фигурирующая там матрица $\begin{pmatrix} \beta_{ij} & \gamma_{ij} \\ -\alpha_{ij} & -\beta_{ji} \end{pmatrix}$ в нашем случае является нулевой, но ради единообразия мы заново убедимся в этом факте немного иначе. Ясно, что начальные значения у переменных со звездочкой и без звездочки одинаковы. Докажем совпадение правых частей уравнений (H_{β}^{α}) и $(H_{\beta}^{*\alpha})$, $(H_{\beta\gamma}^{\alpha})$ и $(H_{\beta\gamma}^{*\alpha})$. Надо доказать, что $H_{\alpha'\rho} = H_{\alpha'\rho}^{*}$ (это уже обеспечит, что $z_{\beta}^{\alpha} = z_{\beta}^{*\alpha}$) и $H_{\alpha'\rho\sigma} = H_{\alpha'\rho\sigma}^{*}$ (с учетом предыдущего это даст $z_{\beta\gamma}^{\alpha} = z_{\beta\gamma}^{*\alpha}$). Иными словами, если $E := H^{*} - H$, то при $x^0 = t$, $x = 0$, $y^0 = 1$, $y = 0$ 3-струя функции E равна нулю^{*)}. Имеем

$$E = \sum_{i,j=0}^n \Delta g^{ij}(x^0; x) y^i y^j, \quad \text{где} \quad \Delta g^{ij} = g^{*ij} - g^{ij}.$$

^{*)} То, что при этих значениях аргументов $E=0$ и $E_{\rho}=0$, нам фактически уже известно ($E_{\rho}=0$ эквивалентно тому, что $\varphi_i X_0$ остается траекторией при возмущении системы, а $E=0$ — что вдоль этой траектории $H=H^{*}$: ведь в обозначениях из доказательства 3.3.7) она лежит в $T_1^{\dagger}(M, g)$, где $H=1/2$, и в $T_1^*(M, g^*)$, где $H^{*}=1/2$).

Дадим приращения $\Delta x^0, \Delta x, \Delta y^0, \Delta y$ аргументам E :

$$\begin{aligned} E(x^0 + \Delta x^0, \Delta x, 1 + \Delta y^0, \Delta y) &= \\ &= \sum_{i,j} \Delta g^{ij}(x^0 + \Delta x^0; \Delta x) (\delta_{i0} + \Delta y^i) (\delta_{j0} + \Delta y^j) = \\ &= \Delta g^{00}(x^0 + \Delta x^0; \Delta x) + 2 \sum_j \Delta g^{0j}(x^0 + \Delta x^0; \Delta x) \Delta y^j + \\ &\quad + \sum_{i,j} \Delta g^{ij}(x^0 + \Delta x^0; \Delta x) \Delta y^i \Delta y^j = \\ &= O(|\Delta x|^4) + O(|\Delta x|^3) |\Delta y| + O(|\Delta x|^2) |\Delta y|^2. \end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, следует, что 3-струя дифференцируемой функции E в точке $(t, 0, 1, 0)$ равна нулю.

Теперь для разностей $w_{\beta\gamma\delta}^\alpha(t) := z_{\beta\gamma\delta}^{\alpha*}(t) - z_{\beta\gamma\delta}^\alpha(t)$ получаем уравнения

$$(W) \quad \dot{w}_{\beta\gamma\delta}^\alpha(t) = \sum_{\alpha', \rho} J^{\alpha\alpha'} H_{\alpha'\rho}(t) w_{\beta\gamma\delta}^\rho(t) + \sum_{\alpha', \rho, \sigma, \tau} J^{\alpha\alpha'} E_{\alpha'\rho\sigma\tau}(t) z_\beta^\rho(t) z_\gamma^\sigma(t) z_\delta^\tau(t),$$

где $w_{\beta\gamma\delta}^\alpha(0) = 0$, $H_{\alpha'\rho}(t) := H_{\alpha'\rho}(t, 0, 1, 0)$, $E_{\alpha'\rho\sigma\tau}(t) := E_{\alpha'\rho\sigma\tau}(t, 0, 1, 0)$.

Отсюда легко вывести, что $w_{\beta\gamma\delta}^0(t) = w_{\beta\gamma\delta}^{n+1}(t) = 0$. Действительно, для этих переменных уравнения таковы:

$$\begin{aligned} \dot{w}_{\beta\gamma\delta}^0 &= w_{\beta\gamma\delta}^{n+1} + \sum_{\rho, \sigma, \tau} E_{n+1\rho\sigma\tau} z_\beta^\rho z_\gamma^\sigma z_\delta^\tau, \\ \dot{w}_{\beta\gamma\delta}^{n+1} &= \sum_{\rho, \sigma, \tau} E_{0\rho\sigma\tau} z_\beta^\rho z_\gamma^\sigma z_\delta^\tau \end{aligned}$$

(однородная часть та же, что и в уравнениях для $\dot{x}_\beta^0, \dot{y}_\beta^0$). Поскольку $E_{\rho\sigma\tau}(t, 0, 1, 0) = 0$ при всех t , в последнем уравнении справа стоит нуль. Учитывая начальные значения, остается убедиться, что и в первом уравнении $E_{n+1\rho\sigma\tau} = 0$, т. е. что 3-струя функции E_{n+1} в точке $(t, 0, 1, 0)$ равна нулю. Рассуждения аналогичны приведенным выше:

$$\begin{aligned} E_{n+1}(x^0 + \Delta x^0, \Delta x, 1 + \Delta y^0, \Delta y) &= \\ &= \sum_j \Delta g^{0j}(x^0 + \Delta x^0; \Delta x) (\delta_{j0} + \Delta y^j) = \\ &= \Delta g^{00}(x^0 + \Delta x^0; \Delta x) + \sum_j \Delta g^{0j}(x^0 + \Delta x^0; \Delta x) \Delta y^j = \\ &= O(|\Delta x|^4) + O(|\Delta x|^3) |\Delta y|. \end{aligned}$$

После сказанного можно выкинуть из (W) уравнения для $\alpha = 0, n+1$, в оставшихся уравнениях отбросить члены с $w_{\beta\gamma\delta}^0, w_{\beta\gamma\delta}^{n+1}$ и

с первыми производными $z^0 (= x^0)$ и $z^{n+1} (= y^{n+1})$ по β, γ, δ . Учтем еще, что если $\alpha \neq 0, n+1$, то $J^{\alpha 0} = J^{\alpha n+1} = 0$. Поэтому можно считать, что при суммировании в правых частях остальных уравнений индексы пробегают значения $1, \dots, n, n+2, \dots, 2n+1$. А тогда естественно вернуться к прежним обозначениям для z^α (т. е. выбросить x^0 и y^0 из набора z^α и сдвинуть нумерацию z^α с $\alpha > n+1$), соответственно изменить смысл $w_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ и $J^{\alpha\alpha'}$ и считать, что (W) является системой для этих $w_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ и что суммирование в правой части производится от 1 до $2n$.

Посмотрим теперь, как выразить различие между 3-струями $\mathcal{F}^*$ и $\mathcal{F}$ через $w_{\beta\gamma\delta}^\alpha(\omega)$. Сначала выразим 2-струю $\omega(\zeta)$ (3-струя нам не понадобится) через 2-струи функций

$$\zeta \mapsto x^0(\omega, \zeta); \quad \zeta \mapsto y^0(\omega, \zeta); \quad \zeta \mapsto z^\alpha(\omega, \zeta).$$

Из $x^0(\omega(\zeta), \omega) = \omega$ находим, что

$$\begin{aligned} \dot{x}^0 \omega_\alpha + x_\alpha^0 &= 0, \quad \text{т. е.} \quad \omega_\alpha(0) = 0, \\ \dot{x}^0 \omega_{\alpha\beta} + \ddot{x}^0 \omega_\alpha \omega_\beta + \dot{x}_\alpha^0 \omega_\beta + \dot{x}_\beta^0 \omega_\alpha + x_{\alpha\beta}^0 &= 0, \end{aligned}$$

т. е. $\omega_{\alpha\beta}(0) = -x_{\alpha\beta}^0$. Далее, выразим 3-струю $\mathcal{F}$ через 3-струи тех же функций. Согласно $(\mathcal{F})$,

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} (Q^\alpha(\zeta)), \quad \text{где} \quad Q^\alpha(\zeta) := z^\alpha(\omega(\zeta), \zeta).$$

Дифференцируя, находим

$$\begin{aligned} Q_\beta^\alpha &= \dot{z}^\alpha \omega_\beta + z_\beta^\alpha, \\ Q_{\beta\gamma}^\alpha &= \dot{z}^\alpha \omega_{\beta\gamma} + \ddot{z}^\alpha \omega_\beta \omega_\gamma + \dot{z}_\beta^\alpha \omega_\gamma + \dot{z}_\gamma^\alpha \omega_\beta + z_{\beta\gamma}^\alpha, \\ Q_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= \dot{z}^\alpha \omega_{\beta\gamma\delta} + \ddot{z}^\alpha (\omega_{\beta\gamma} \omega_\delta + \dots) + (\dot{z}_\delta^\alpha \omega_{\beta\gamma} + \dots) + \\ &\quad + \ddot{z}^\alpha \omega_\beta \omega_\gamma \omega_\delta + (\ddot{z}_\delta^\alpha \omega_\beta \omega_\gamma + \dots) + (\dot{z}_{\beta\delta}^\alpha \omega_\gamma + \dots) + z_{\beta\gamma\delta}^\alpha. \end{aligned}$$

При $\zeta = 0$ получаем, что

$$\begin{aligned} Q^\alpha &= 0, \quad Q_\beta^\alpha = z_\beta^\alpha, \quad Q_{\beta\gamma}^\alpha = z_{\beta\gamma}^\alpha, \\ Q_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= z_{\beta\gamma\delta}^\alpha - \dot{z}_\delta^\alpha x_{\beta\gamma}^0 - \dot{z}_\gamma^\alpha x_{\beta\delta}^0 - \dot{z}_\beta^\alpha x_{\gamma\delta}^0. \end{aligned}$$

Точно так же $\mathcal{F}^* = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} (Q^{*\alpha})$, где $Q^{*\alpha}$ и их производные аналогичным образом выражаются при $\zeta = 0$ через $z^{*\alpha}(\omega, \zeta)$ и их производные по ζ . Поэтому

$$Q^{*\alpha} = Q^\alpha, \quad Q_\beta^{*\alpha} = Q_\beta^\alpha, \quad Q_{\beta\gamma}^{*\alpha} = Q_{\beta\gamma}^\alpha, \quad Q_{\beta\gamma\delta}^{*\alpha} = w_{\beta\gamma\delta}^\alpha(\omega) + Q_{\beta\gamma\delta}^\alpha.$$

Если бы мы рассматривали возмущения в классе всех гамильтоновых систем^{*)}, то мы могли бы с самого начала положить $H^* = H + E$, где функция E мала, имеет нулевую 3-струю на нашей траектории и ее носитель лежит в малой окрестности какой-нибудь точки этой траектории. В остальном E могла бы быть произвольной. Тогда изменение (при этом возмущении) траекторий, близких к рассматриваемой, описывалось бы в нужном порядке системой (W) . Пока что речь идет о первоначальном варианте этой системы — с $\alpha = 0, \dots, 2n+1$. Отбросить $\omega_{\beta\gamma\delta}^0$ и $\omega_{\beta\gamma\delta}^{n+1}$ мы могли бы при условии, что $E_{n+1\rho\sigma\tau} = 0$. Это — дополнительное ограничение на E , не влияющее на другие производные четвертого порядка. При его выполнении мы смогли бы перейти к системе (W) для $z^1, \dots, z^{2n} = x^1, \dots, y^n$ (и с суммированием по всем индексам от 1 до $2n$). В этой системе $E_{\alpha'\rho\sigma\tau}(t)$ могли бы быть произвольными функциями от t , удовлетворяющими обычным условиям о малости и о носителе (и, конечно, симметричными по всем индексам). Кажется правдоподобным, что за счет возмущений такого рода можно обеспечить произвольное малое изменение членов третьего порядка малости (по ζ) отображения Пуанкаре (в классе симплектических диффеоморфизмов). Ниже мы приведем доказательство, содержащее соображения, которые будут полезны и в нашем случае.

В нашем случае, когда рассматривается возмущение в классе геодезических потоков, функция E ограничена тем требованием, чтобы она была квадратичной формой по y^0, y (с коэффициентами, зависящими от x^0, x). Данное выше определение g^* как раз и гарантирует, что

$$E = \frac{1}{2} \sum_{c, k=0}^n (g^{*ik}(t, x) - g^{ik}(t, x)) y^i y^k$$

можно взять произвольной такой формой (с обычными оговорками о малости и о носителе^{**)}). Ее четвертые производные таковы (латинские индексы принимают значения от 1 до n):

$$\begin{aligned} E_{ijkl}(t) &= \alpha_{ijkl}(t; 0); \\ E_{i+n jkl}(t) &= \beta_{i+n jkl}(t; 0); \\ E_{i+n j+n kl}(t) &= \gamma_{i+n j+n kl}(t; 0). \end{aligned}$$

^{*)} Но по-прежнему считая невозмущенную систему геодезическим потоком (поскольку предыдущее исследование уравнений в вариациях в координатах Ферми относилось именно к этому случаю; возмущений периодических траекторий произвольных гамильтоновых систем мы не касаемся не из-за каких-то принципиальных трудностей, но просто потому, что это не относится к теме данной книги).

^{**) Обращаем внимание, что, когда мы говорим о «малости носителя функции E » в случае общего гамильтонова возмущения и случае геодезического потока, это означает разные вещи: в последнем случае носитель в фазовом пространстве не может быть мал (по y он не ограничен) — мала его проекция на M .}

Для этих производных не возникает никаких ограничений из-за специального вида E , но

$$E_{i+n \ j+n \ k+n \ l}(t) = E_{i+n \ j+n \ k+n \ l+n}(t) \equiv 0.$$

Однако $E_{\alpha' \rho \sigma \tau}(t)$ входят в (W) с множителями $z_{\beta}^{\rho}(t) z_{\gamma}^{\sigma}(t) z_{\delta}^{\tau}(t)$ и по ρ, σ, τ производится суммирование. Грубо говоря, из-за этого на $w_{\beta \gamma \delta}^{\alpha}$ с большими индексами (лежащими в «плохом» интервале $[n+1, 2n]$) влияют $E_{\alpha' \rho \sigma \tau}$ с «малыми» индексами (лежащими в «хорошем» интервале $[1, n]$), т. е. те $E_{\alpha' \rho \sigma \tau}$, выбор которых находится в нашей власти, и это позволяет получить произвольные малые $w_{\beta \gamma \delta}^{\alpha}(\omega)$, (в классе тех $\{w_{\beta \gamma \delta}^{\alpha}\}$, при которых сохраняется симплектичность преобразования Пуанкаре).

Решение с нулевыми начальными данными системы, имеющей в векторно-матричной записи вид $\dot{w} = A(t)w + f(t)$, следующим образом выражается через матрицант $Z(t)$ однородной системы $\dot{z} = A(t)z(t)$:

$$w(t) = Z(t) \int_0^t Z^{-1}(s) f(s) ds$$

(обычный метод вариации постоянных). В нашем случае получаем

$$w_{\beta \gamma \delta}^{\alpha}(\omega) = \sum_{\lambda, \mu, \alpha', \rho, \sigma, \tau} z_{\lambda}^{\alpha}(\omega) \int_0^{\omega} (Z^{-1}(t))_{\mu}^{\lambda} J^{\mu \alpha'} E_{\alpha' \rho \sigma \tau}(t) z_{\beta}^{\rho}(t) z_{\gamma}^{\sigma}(t) z_{\delta}^{\tau}(t) dt,$$

где $(Z^{-1})_{\mu}^{\lambda}$ — коэффициенты матрицы, обратной к $Z = (z_{\mu}^{\lambda})$. Но $Z(t)$ — симплектическая матрица (в обычном смысле, т. е. $\langle JZ(t)\xi, Z(t)\xi' \rangle = \langle J\xi, \xi' \rangle$)*, т. е. ${}^t Z J Z = J$, $Z^{-1} J {}^t Z^{-1} = J$, $Z^{-1} J = J {}^t Z$. Поэтому

$$(I) \quad w_{\beta \gamma \delta}^{\alpha}(\omega) = \sum_{\lambda, \mu} z_{\lambda}^{\alpha}(\omega) J^{\lambda \mu} \int_0^{\omega} \sum_{\alpha', \rho, \sigma, \tau} E_{\alpha' \rho \sigma \tau} z_{\mu}^{\alpha'} z_{\beta}^{\rho} z_{\gamma}^{\sigma} z_{\delta}^{\tau} dt.$$

Посмотрим теперь, какими могут быть члены третьего порядка в струе $\tilde{\mathcal{P}} - \mathcal{P}$ в точке $\xi = 0$, если $\tilde{\mathcal{P}}$, как и $\mathcal{P}$, — симплектический диффеоморфизм и струя второго порядка равна нулю. Для наших целей удобнее говорить не о $\mathcal{P}$ и $\tilde{\mathcal{P}}$, а о $Q = (Q^{\alpha})$ и $\tilde{Q} = (\tilde{Q}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{P}}$. Поскольку координаты (x^i, y^i) ($i = 0, \dots, n$)

*) Это явствует как из «общих соображений» (3.1.7 и выражение для формы 2α в координатах Ферми), так и попросту из того, что система (H_{β}^{α}) является гамильтоновой (в обычном смысле).

канонические, то $2\alpha = \sum_0^n dx^i \wedge dy^i$, а значит, $2\alpha|_\Sigma = \sum_1^n dx^i \wedge dy^i$.

Поэтому симплектичность отображения в координатах ξ^α означает, что матрица его частных производных первого порядка — симплектическая в обычном смысле. Итак, при любых ξ

$${}^t(DQ(\xi)) \cdot J \cdot DQ(\xi) = J$$

и аналогично для $\tilde{Q}$. Выделяем члены третьего порядка в разности $\tilde{Q} - Q$: пусть

$$\begin{aligned}\tilde{Q}^\alpha - Q^\alpha &= \frac{1}{6} \sum_{\beta, \gamma, \delta} v_{\beta\gamma\delta}^\alpha \xi^\beta \xi^\gamma \xi^\delta + \dots, \\ v^\alpha(\xi) &= \frac{1}{6} \sum_{\beta, \gamma, \delta} v_{\beta\gamma\delta}^\alpha \xi^\beta \xi^\gamma \xi^\delta, \quad v = (v^1, \dots, v^n).\end{aligned}$$

Тогда из условия симплектичности $D\tilde{Q}(\xi) = DQ(\xi) + Dv(\xi)$ получаем

$$\begin{aligned}{}^t(DQ(\xi)) \cdot J \cdot DQ(\xi) + {}^t(DQ(\xi)) \cdot J \cdot Dv(\xi) + \\ + {}^t(Dv(\xi)) \cdot J \cdot DQ(\xi) + {}^t(Dv(\xi)) \cdot J \cdot Dv(\xi) = J.\end{aligned}$$

В левой части первое слагаемое равно J , второе и третье равны

$${}^t(DQ(0)) \cdot J \cdot Dv(\xi) + o(\|\xi\|^2), \quad {}^t(Dv(\xi)) \cdot J \cdot DQ(0) + o(\|\xi\|^2),$$

а четвертое есть $O(\|\xi\|^4)$, так что

$${}^t(DQ(0)) \cdot J \cdot Dv(\xi) + {}^t(Dv(\xi)) \cdot J \cdot DQ(0) = o(\|\xi\|^2).$$

Так как левая часть однородна по ξ второй степени, она тождественно по ξ равна нулю. Поскольку $DQ(0) = (z_\beta^\alpha(\omega))$, то при любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$(II) \quad \sum_{\lambda, \mu} z_\lambda^\alpha(\omega) J^{\lambda\mu} v_{\beta\gamma\delta}^\mu + \sum_{\lambda, \mu} v_{\lambda\gamma\delta}^\alpha J^{\lambda\mu} z_\beta^\mu(\omega) = 0.$$

Условие (II) приобретает более простой и удобный вид в терминах величин $s_{\alpha\beta\gamma\delta}$, связанных с $v_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ следующим образом:

$$(S) \quad v_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \sum_{\lambda, \mu} z_\lambda^\alpha(\omega) J^{\lambda\mu} s_{\mu\beta\gamma\delta}.$$

Поскольку матрицы $Z = (z_\lambda^\alpha)$ и J обратимы, то $s_{\alpha\beta\gamma\delta}$ однозначно определяются через $v_{\beta\gamma\delta}^\alpha$, и обратно. Сейчас мы покажем, что в терминах s условие (II) сводится к тому, что $s_{\alpha\beta\gamma\delta}$ симметрично по первым двум индексам. А поскольку из (S) видно, что $s_{\alpha\beta\gamma\delta}$, подобно $v_{\beta\gamma\delta}^\alpha$, симметрично по β, γ, δ , то окончательно получаем, что s должны быть симметричны по всем четырем индексам.

Доказывая, что $s_{\alpha\beta\gamma\delta} = s_{\beta\alpha\gamma\delta}$, мы будем считать γ и δ фиксированными, поэтому можно ввести матрицы

$$V = (v_{\beta\gamma\delta}^{\alpha})_{\alpha, \beta=1, \dots, 2n}, \quad S = (s_{\alpha\beta\gamma\delta})_{\alpha, \beta=1, \dots, 2n}$$

(на самом деле зависящие от γ и δ , на что наши обозначения не указывают). В этих терминах (II) и (S) означают, что

$${}^tZJV + {}^tVJZ = 0, \quad V = ZJS$$

Подставив второе соотношение в первое, воспользовавшись равенством ${}^tJ = -J$, симплектичностью Z и равенством $JJ = -I_{2n}$, получим, что $S - {}^tS = 0$. А это означает симметричность s по первым двум индексам.

Сопоставляя теперь (I) и (S), приходим к выводу, что нам достаточно доказать следующее: если заданы достаточно малые $s_{\alpha\beta\gamma\delta}$, симметричные по всем индексам, то существуют такие $E_{\alpha\beta\gamma\delta}(t)$, удовлетворяющие перечисленным выше условиям, что

$$(III) \quad s_{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_0^{\omega} E_{\mu\rho\sigma\tau}(t) z_{\alpha}^{\mu}(t) z_{\beta}^{\rho}(t) z_{\gamma}^{\sigma}(t) z_{\delta}^{\tau}(t) dt.$$

Будем рассматривать $s_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $E_{\mu\rho\sigma\tau}(t)$ как коэффициенты 4-линейных симметричных форм S и $E(t)$ на $\mathbb{R}^{2n}$, так что, например,

$$S(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \sum s_{\alpha\beta\gamma\delta} \xi_1^{\alpha} \xi_2^{\beta} \xi_3^{\gamma} \xi_4^{\delta}, \quad \xi_i = (\xi_i^{\alpha}) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Такие формы образуют векторное пространство $L_s^4(\mathbb{R}^{2n})$. Линейное отображение $A: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ естественным образом индуцирует два линейных отображения $L_s^4(A)$ и $D(A)$ в $L_s^4(\mathbb{R}^{2n})$, которые определяются так:

$$(L_s^4(A)S)(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = S(A\xi_1, A\xi_2, A\xi_3, A\xi_4),$$

$$(D(A)S)(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = S(A\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) +$$

$$+ S(\xi_1, A\xi_2, \xi_3, \xi_4) + S(\xi_1, \xi_2, A\xi_3, \xi_4) + S(\xi_1, \xi_2, \xi_3, A\xi_4)$$

($D(A)$ тесно связано с некоторым дифференцированием в обычном смысле, см. далее; отсюда и обозначение). Легко видеть, что

$$L_s^4(I_n) = \text{id}_{L_s^4(\mathbb{R}^{2n})}, \quad L_s^4(AB) = L_s^4(B) \cdot L_s^4(A).$$

Поэтому при обратимом A преобразование $L_s^4(A)$ тоже обратимо.

В этих терминах (III) означает, что

$$S = \int_0^{\omega} L_s^4(Z(t)) E(t) dt.$$

В случае общих гамильтоновых возмущений существование надлежащих $E(t)$ очевидно. Именно, пусть $\Delta \subset]\varepsilon, \omega - \varepsilon[$ — тот отрезок, внутри которого должен лежать носитель $E(t)$. Зафик-

спирuem какую-нибудь C^∞ -функцию, носитель которой лежит строго внутри Δ и для которой $\int_{\Delta} f(t) dt = 1$. Тогда можно положить $E(t) = f(t) L_s^4(Z^{-1}(t)) S$.

Обратимся теперь к нужному нам случаю. Обозначим через L подпространство в $L_s^4(\mathbb{R}^{2n})$, состоящее из тех форм, у которых равны нулю все коэффициенты $s_{\alpha\beta\gamma\delta}$, имеющие три или четыре индекса $> n$. Иными словами, если какие-нибудь три из векторов ζ_i принадлежат подпространству $0 \times \mathbb{R}^n$ (здесь 0 — нуль в $\mathbb{R}^n$), то $S(\zeta_1, \dots, \zeta_4) = 0$. Очевидно, имеющееся у нас ограничение на коэффициенты как раз и состоит в том, что $E(t) \in L$ при всех t .

Докажем сначала, что если $A \in L(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^{2n})$ действует на стандартный базис e_α пространства $\mathbb{R}^{2n}$ таким образом, что

$$(A) \quad Ae_i \in 0 \times \mathbb{R}^{2n}, \quad Ae_{i+n} = e_i$$

(здесь, как и раньше, латинские индексы принимают значения от 1 до n , а 0 есть нуль в $\mathbb{R}^n$), то $L + (D(A))^2 L = L_s^4(\mathbb{R}^{2n})$.

Непосредственно находим, что $(D(A))^2 = D(A^2) + 2D'(A)$, где $D'(A)S(\zeta_1, \dots, \zeta_4) = S(A\zeta_1, A\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) +$

$$+ S(A\zeta_1, \zeta_2, A\zeta_3, \zeta_4) + \dots + S(\zeta_1, \zeta_2, A\zeta_3, A\zeta_4)$$

(всего $\binom{4}{2} = 6$ слагаемых, в каждом из которых A действует на два из четырех аргументов S). Из (A) следует, что $D(A^2)L = L$ (действительно, если $\zeta_i \in 0 \times \mathbb{R}^{2n}$, то и $A^2\zeta_i \in 0 \times \mathbb{R}^{2n}$). Поэтому достаточно доказать следующее: для любой $S \in L_s^4(\mathbb{R}^{2n})$ существует такая $B \in L$, что $S - D'(A)B \in L$.

Выразим через коэффициенты $b_{\alpha\beta\gamma\delta}$ формы B те из коэффициентов $b'_{\alpha\beta\gamma\delta}$ формы B' , у которых 3 или 4 индекса $> n$. Имеем $b'_{i+n \ j+n \ k+n \ l+n} = B'(e_{i+n}, e_{j+n}, e_{k+n}, e_{l+n}) =$

$$= B(Ae_{i+n}, Ae_{j+n}, e_{k+n}, e_{l+n}) + \dots =$$

$$= B(e_i, e_j, e_{k+n}, e_{l+n}) + \dots = 2b_{ij \ k+n \ l+n} + \dots$$

(6 слагаемых, в каждом из которых 2 индекса те же, что и соответствующие индексы у b' , а 2 других на n меньше, чем соответствующие индексы у b'). Далее,

$$b'_{i+n \ j+n \ k+n \ i} = B(Ae_{i+n}, Ae_{j+n}, e_{k+n}, e_i) + \dots;$$

справа стоят 6 слагаемых, в трех из которых A действует на какие-нибудь два из трех векторов $e_{i+n}, e_{j+n}, e_{k+n}$, а в других трех слагаемых A действует на e_i и еще на один из векторов $e_{i+n}, e_{j+n}, e_{k+n}$. Но эти последние 3 слагаемых равны нулю: например,

$$B(e_{i+n}, Ae_{j+n}, e_{k+n}, Ae_i) = B(e_{i+n}, e_j, e_{k+n}, \text{вектор из } 0 \times \mathbb{R}^n) = 0$$

(3 из четырех аргументов принадлежат $0 \times \mathbb{R}^n$). В первых же трех слагаемых действие A на соответствующий вектор сводится к уменьшению индекса этого вектора на n . В итоге

$$\begin{aligned} b'_{i+n, j+n, k+n, l} &= B(e_i, e_j, e_{k+n}, e_l) + \\ &\quad + B(e_i, e_{j+n}, e_k, e_l) + B(e_{i+n}, e_j, e_k, e_l) = \\ &= b_{ij, k+n, l} + b_{i, j+n, kl} + b_{i+n, jkl}. \end{aligned}$$

Итак, мы должны доказать, что если заданы $s_{\alpha\beta\gamma\delta}$, симметричные по всем индексам, то существуют такие $b_{\alpha\beta\gamma\delta}$, тоже симметричные по всем индексам, что

$$(\text{?}) \quad s_{i+n, j+n, k+n, l+n} = 2b_{ij, k+n, l+n} + \dots,$$

$$(\text{??}) \quad s_{i+n, j+n, k+n, l} = 2b_{ij, k+n, l} + 2b_{i, j+n, kl} + 2b_{i+n, jkl}.$$

(Если последние соотношения выполняются, то ввиду симметрии для тех $s_{\alpha\beta\gamma\delta}$, у которых другие 3 коэффициента $> n$, тоже выполняются аналогичные соотношения.) Положим при $i \geq j$ и $k \geq l$

$$(\text{+}) \quad b_{ij, k+n, l+n} = \frac{1}{12} s_{i+n, j+n, k+n, l+n}$$

и при $i \geq j \geq k$

$$\begin{aligned} (\text{++}) \quad b_{ijk, l+n} &= \frac{1}{6} (s_{i, j+n, k+n, l+n} + s_{i+n, j, k+n, l+n} + \\ &\quad + s_{i+n, j+n, k, l+n} - 2s_{i+n, j+n, k+n, l}). \end{aligned}$$

По симметрии определяются остальные $b_{\alpha\beta\gamma\delta}$, для которых (ровно) один или (ровно) два индекса $> n$; те же $b_{\alpha\beta\gamma\delta}$, у которых либо все индексы $\leq n$, либо хотя бы три индекса $> n$, несущественны для наших целей, и ради определенности их положим равными нулю. Очевидно, те $b_{\alpha\beta\gamma\delta}$, у которых ровно два индекса $\leq n$, определяются по следующему рецепту: надо эти два индекса увеличить на n , взять s с полученным набором индексов и разделить на 12. Теперь ясно, что при нашем определении b выполняется (?). Далее, правая часть (++) симметрична относительно i, j, k ; поэтому (++) имеет место не только при $i \geq j \geq k$, но и вообще при всех i, j, k . Перепишем (++) , заменяя i, j, k, l сначала на i, j, l, k , затем на i, k, l, j и, наконец, на j, k, l, i ; иными словами, выпишем аналогичные формулы для $b_{ijl, k+n}$, $b_{ikl, j+n}$ и $b_{jkl, i+n}$, т. е. для величин, фигурирующих в правой части (??). Сложив написанные выражения для этих величин, убедимся, что выполняется (??)*).

* По существу, здесь дело в том, что решение системы уравнений (с неизвестными a, b, c, d)

$$a + b + c = D, \quad a + b + d = C, \quad a + c + d = B, \quad b + c + d = A$$

имеет вид $a = \frac{1}{3}(B + C + D - A)$ и т. д.

Свяжем теперь $D(A)$ с настоящим дифференцированием. Пусть $A(t)$ — матрица коэффициентов системы (H_β^α) , а $E \in L_s^1(\mathbb{R}^{2n})$. Тогда

$$\frac{d}{dt} L_s^1(Z(t)) E = L_s^1(Z(t)) D(A(t)) E.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(Z(t)\xi_1, \dots, Z(t)\xi_4) &= E(A(t)Z(t)\xi_1, Z(t)\xi_2, Z(t)\xi_3, Z(t)\xi_4) + \dots \\ &\quad + E(Z(t)\xi_1, Z(t)\xi_2, Z(t)\xi_3, A(t)Z(t)\xi_4), \end{aligned}$$

а $(L_s^1(Z) D(A) S)(\xi_1, \xi_2, \dots)$ как раз и равно

$$\begin{aligned} (D(A) S)(Z\xi_1, Z\xi_2, \dots) + \dots &= \\ &= S(AZ\xi_1, Z\xi_2, \dots) + S(Z\xi_1, AZ\xi_2, \dots) + \dots \end{aligned}$$

Если же E сама дифференцируемым образом зависит от t : $E = E(t)$, то

$$\frac{d}{dt} L_s^1(Z(t)) E(t) = L_s^1(Z(t)) \dot{E}(t) + L_s^1(Z(t)) \cdot D(A(t)) \cdot E(t).$$

Непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned} (+ + +) \quad \frac{d^2}{dt^2} L_s^1(Z(t)) E(t) &= L_s^1(Z(t)) \{\ddot{E}(t) + 2D(A(t)) \dot{E}(t) + \\ &\quad + D(\dot{A}(t)) E(t) + (D(A(t)))^2 E(t)\}. \end{aligned}$$

Это позволяет сделать вывод, что для любой формы $S \in L_s^1(\mathbb{R}^{2n})$ найдется такая $E(t)$, которая принимает значения в L , дифференцируема, носитель которой лежит внутри Δ и для которой

$$S = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=t_0} L_s^1(Z(t)) E(t)$$

(t_0 — фиксированная внутренняя точка Δ). Действительно, мы можем независимо предписать, какими должны быть $E(t_0)$, $\dot{E}(t_0)$, $\ddot{E}(t_0)$. Наше $A(t)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ * & 0 \end{pmatrix}$ (конкретный вид блока, обозначенного звездочкой, для нас несуществен), т. е. удовлетворяет (A). Поэтому существует такая форма $E(t_0)$, что

$$L_s^1(Z^{-1}(t_0)) S - (D(A(t_0)))^2 E(t_0) \in L.$$

Далее, $\dot{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$, так что $\dot{A}(0 \times \mathbb{R}^{2n}) = 0$; поэтому у формы $D(\dot{A}(t_0)) E(t_0)$ могут быть ненулевыми лишь те коэффициенты, у которых все индексы $\leq n$, и тем более эта форма принадлежит L . Полагаем

$$\dot{E}(t_0) = 0,$$

$$\ddot{E}(t_0) = L_s^1(Z^{-1}(t_0)) S - (D(A(t_0)))^2 E(t_0) - D(\dot{A}(t_0)) E(t_0);$$

тогда, очевидно, выполняется требуемое равенство.

Возьмем теперь какой-нибудь базис $S_1, \dots, S_N$ пространства $L_s^1(\mathbb{R}^{2n})$ и такие $E_i(t)$ (дифференцируемые, со значениями в L и с носителем в Δ), что

$$S_i = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t_0} L_s^1(Z(t)) E_i(t) \quad (i = 1, \dots, N).$$

Возьмем дифференцируемую функцию f с носителем в Δ , которая настолько хорошо аппроксимирует (в известном смысле) δ -функцию $\delta(t - t_0)$, что

$$S'_i := \int_{\Delta} f(t) \frac{d^2}{dt^2} L_s^1(Z(t)) E_i(t) dt \quad (i = 1, \dots, N)$$

тоже образуют базис в $L_s^1(\mathbb{R}^{2n})$ (это обеспечено при достаточной их близости к S_i). Интегрируя по частям, получаем

$$S'_i = \int_{\Delta} \tilde{f}(t) L_s^1(Z(t)) E_i(t) dt.$$

Любая форма $S \in L_s^1(\mathbb{R}^{2n})$ представляется в виде $\sum s_i S'_i$, причем надлежащая малость S гарантирует малость s_i . Очевидно,

$$S = \int_0^{\omega} L_s^1(Z(t)) E(t) dt,$$

где $E(t) = \sum s_i f_i(t) E_i(t)$ мала при достаточно малых s_i , т. е. $-S$, и удовлетворяет всем прочим условиям. $\blacktriangle$ $\square$

Теперь мы в состоянии доказать типичность свойств, сформулированных в 3.3.7 и 3.3.8.

Точнее, пусть $\kappa > 0$, $N \geq 1$ — целое. Через $\mathcal{E}^r(N, \kappa)$ обозначим множество тех римановых метрик на M , которые принадлежат классу C^r и обладают тем свойством, что для каждой замкнутой геодезической E -уровня $\leq \kappa$ соответствующее линейное отображение Пуанкаре N -элементарно.

Через $\mathcal{E}^r(N) \subset \mathcal{E}^r M$ обозначим множество таких римановых метрик, что для каждой замкнутой геодезической соответствующее линейное отображение Пуанкаре N -элементарно.

3.3.9. Теорема. Пусть M — компактное дифференцируемое многообразие и $r \geq 2$.

Утверждения. (i) Множество $\mathcal{E}^r(N, \kappa)$ плотно в $\mathcal{E}^r M$ и содержится во внутренности $\mathcal{E}^r(N, \kappa/2)$.

(ii) $\mathcal{E}^r(N)$ содержит остаточное в $\mathcal{E}^r M$ множество, т. е. свойство метрики, состоящее в том, что линейная часть отображения Пуанкаре каждой замкнутой геодезической N -элементарна, типичное.

Замечание. При $N=1$ утверждение (ii) есть теорема о бугристой (bumpy) метрике Абрахама [1].

▲ Доказательство теоремы о бугристых метриках см. в работе: Аносов [6]. Здесь же мы приведем только доказательство теоремы 3.3.9 для $N>1$, в котором используется ее справедливость для $N=1$.

Абрахам предполагает, что $r \geq 5$. Но, как видно из наших рассуждений, если его теорема доказана при $r=5$, то она верна и при $r=2, 3, 4$.

Доказательство. Ясно, что (ii) следует из (i), ибо $\mathcal{E}^r(N)$ можно представить как пересечение счетного числа множеств $\mathcal{E}^r(N, \kappa)$ с $\kappa=1, 2, \dots$. Поэтому достаточно доказать (i).

(а) Отметим сначала несколько простых фактов из теории динамических систем. Пусть на замкнутом дифференцируемом многообразии задан поток класса C^1 , у которого нет положений равновесия (т. е. соответствующее векторное поле нигде не обращается в нуль)^{*)} и у которого все периодические траектории периода $\leq \omega$ таковы, что соответствующие отображения Пуанкаре не имеют собственного значения 1 (ради краткости будем по аналогии с введенной выше терминологией называть такие траектории 1-элементарными^{**)}, хотя понятия N -элементарности для них мы не вводим). Тогда этих траекторий конечное число^{***)}, и при некотором $\varepsilon > 0$ у потока нет траекторий с периодами из $[\omega, \omega + \varepsilon]$. Далее, при малом (в смысле C^1) возмущении потока^{****)} эти траектории непрерывно изменяются, как и соответствующие линейные отображения Пуанкаре; в частности, наши траектории остаются 1-элементарными. Поскольку имеется известный произвол в выборе начальной точки траектории, то точный смысл утверждения о непрерывной зависимости траектории от потока таков: можно таким образом сопоставить каждому потоку, достаточно близкому к исходному, некоторую периодическую траекторию этого близкого потока, что она непрерывно зависит от потока

*) Это не очень существенно — просто при наличии положений равновесия очевидным образом усложнились бы формулировки.

**) Чаше их называют невырожденными. Впрочем, мы говорили о периоде, а не о минимальном периоде, так что рассматриваемые траектории могут не быть однократными (как замкнутые кривые), тогда как обычная терминология обычно относится к однократным траекториям.

***) Разумеется, с точностью до изменения начальных точек на этих траекториях. Эта оговорка была бы не нужна, если бы под траекториями понимались просто соответствующие множества точек. Но тогда замкнутую траекторию нельзя было бы отличить от той же траектории, пройденной два раза. По-видимому, здесь лучше всего понимать траекторию как ориентированную кривую (без фиксированного начала).

****) То есть возмущенный поток задается векторным полем, C^1 -близким к полю, задающему исходный поток.

и совпадает с исходной периодической траекторией для невозмущенного потока. В основном все сводится к тому, чтобы каждому близкому потоку сопоставить подходящую начальную точку (непрерывно зависящую от потока и определяющую периодическую траекторию этого потока). (Для линейного отображения Пуанкаре имеется произвол еще в выборе трансверсальной (к вектору фазовой скорости) гиперплоскости в касательном пространстве к фазовому многообразию в начальной точке траектории. Но если начальная точка непрерывно зависит от потока, то гиперплоскость тоже можно взять непрерывно зависящей от потока, и тогда линейное отображение Пуанкаре (теперь оно однозначно определено) будет непрерывно зависеть от потока, — надо учесть, что период периодической траектории в нашем случае тоже непрерывно зависит от потока.) Чтобы обеспечить непрерывность этих начальных точек, фиксируем какие-нибудь локальные трансверсальные гиперповерхности Σ_i в начальных точках исходных периодических траекторий (какие именно из их точек взять начальными и как именно выбрать Σ_i — безразлично) и потребуем, чтобы возмущенные периодические траектории начинались на Σ_i . Тогда вопрос сводится к малым возмущениям отображений Пуанкаре. Наконец, при возмущении периоды некоторых из рассматриваемых траекторий могут стать $> \omega$, но, во всяком случае, новых траекторий периода $\leq \omega$ не возникнет.

(b) Пусть теперь $g_0 \in \mathcal{S}^r(1, \kappa)$, $r \geq 2$. Тогда соответствующий геодезический поток $\{\varphi_t^{g_0}\}$, рассматриваемый на $T_1^*(M, g_0)$ (обозначение из доказательства 3.3.7), обладает свойствами потока из (a) (с $\omega = \sqrt{2\kappa}$). Посмотрим, что происходит при малом (в смысле C^1) возмущении рассматриваемой метрики. Для возмущенной метрики g геодезический поток $\{\varphi_t^g\}$ рассматривается на инвариантном многообразии $T_1^*(M, g) \neq T_1^*(M, g_0)$. Однако можно спроектировать $T_1^*(M, g)$ на $T_1^*(M, g_0)$ (в каждом слое расслоения $T^*M \rightarrow M$ по радиусам) и с помощью этой проекции p_{gg_0} «перенести» поток $\{\varphi_t^g\}$ в $T_1^*(M, g_0)$, т. е. рассмотреть поток $\{p_{gg_0} \varphi_t^g p_{gg_0}^{-1}\}$. Этот поток близок к $\{\varphi_t^{g_0}\}$ в смысле C^{r-1} (см. ниже). Поэтому все его периодические траектории с периодом $\leq \sqrt{2\kappa}$ непрерывно зависят от g (в понятном смысле) и 1-элементарны. Соответствующие траектории потока $\{\varphi_t^g\}$ тоже 1-элементарны (ясно, что диффеоморфизм, переводящий один поток в другой, — в нашем случае проекция p_{gg_0} — сохраняет свойство 1-элементарности периодической траектории). Сказанное означает, что $g \in \mathcal{S}^r(1, \kappa)$. Мы видим, что множества $\mathcal{S}^r(1, \kappa)$ — открытые.

Далее, пусть $g_0 \in \mathcal{S}^r(N, \kappa)$. Поскольку линейные отображения Пуанкаре для рассматриваемых траекторий непрерывно зависят от g (или, лучше сказать, поскольку задающие эти отобра-

жения «данные» — начальную точку и соответствующие гиперповерхности — можно выбрать так, чтобы отображения непрерывно зависели от g), то при достаточной близости g к g_0 эти отображения останутся N -элементарными. Здесь надо пояснить, почему вообще можно говорить об N -элементарности линейных отображений Пуанкаре для периодических траекторий потока $\{p_{gg_0}\varphi_t^g p_{gg_0}^{-1}\}$. Эти отображения являются симплектическими в том смысле, что они сохраняют некоторую невырожденную кососимметрическую 2-форму — не ту, которую мы рассматриваем для потока $\{\varphi_t^{g_0}\}$, а ту, которая является образом при диффеоморфизме p_{gg_0} аналогичной 2-формы для $\{\varphi_t^g\}$. Как бы то ни было, они обладают тем свойством, что если ρ — собственное значение, то и ρ^{-1} — тоже (с той же кратностью), а $+1$ и -1 имеют четную кратность. А именно это и нужно, чтобы можно было говорить об N -элементарности. Ясно, что при малом возмущении N -элементарного линейного преобразования в классе всех преобразований, обладающих указанным выше свойством, преобразование останется N -элементарным. Наконец, преобразования Пуанкаре для периодических траекторий потока $\{\varphi_t^g\}$ в $T_1^*(M, g)$ сопряжены преобразованиям Пуанкаре для соответствующих периодических траекторий потока $\{p_{gg_0}\varphi_t^g p_{gg_0}^{-1}\}$, и потому для всех траекторий потока $\{\varphi_t^g\}$ с периодом $\leq \sqrt{2\kappa}$ они N -элементарны. Следовательно, $g \in \mathcal{S}^r(N, \kappa)$. Мы видим, что множества $\mathcal{S}^r(N, \kappa)$ — тоже открытые.

Убедимся в C^{r-1} -близости $\{p_{gg_0}\varphi_t^g p_{gg_0}^{-1}\}$ к $\{\varphi_t^{g_0}\}$. Пусть $x^1, \dots, x^{n+1}$ — локальные координаты в M , а $y^1, \dots, y^{n+1}$ — соответствующие координаты в слоях T^*M . Рассматривая $\{\varphi_t^g\}$ и $T_1^*(M, g)$, будем писать η^i вместо y^i . Тогда потоки $\{\varphi_t^{g_0}\}$ и $\{\varphi_t^g\}$ во всем T^*M имеют функции Гамильтона

$$H_0(x, y) = \frac{1}{2} \sum g^{ij}(x) y^i y^j, \quad H(x, \eta) = \frac{1}{2} \sum g^{ij}(x) \eta^i \eta^j,$$

$T_1^*(M, g_0)$ и $T_1^*(M, g)$ задаются уравнениями

$$H_0(x, y) = \frac{1}{2}, \quad H(x, \eta) = \frac{1}{2},$$

проекции p_{g_0g} и p_{g^*g} — уравнениями

$$y^i = \eta^i / \sqrt{2H_0(x, \eta)}, \quad \eta^i = y^i / \sqrt{2H(x, y)},$$

и непосредственное вычисление показывает, что $\{p_{gg_0}\varphi_t^g p_{gg_0}^{-1}\}$

описывается уравнениями *)

$$(*) \quad \dot{x}^i = D_{i+n}H/\sqrt{2H}, \quad \dot{y}^i = -D_iH - \sqrt{2} y_i \Delta_i/\sqrt{H},$$

где $\Delta_i = \begin{vmatrix} D_i H_0 & D_i H \\ D_{i+n} H_0 & D_{i+n} H \end{vmatrix}$, у H и H_0 всюду подразумеваются

аргументы (x, y) , $D_i := \partial/\partial x^i$ и $D_{i+n} := \partial/\partial y^i$. (Собственно говоря, непосредственно при вычислении $\dot{y}^i$ получаются дополнительные знаменатели: $(2H_0)^{1/2}$ у первого слагаемого и $(2H_0)^{3/2}$ у второго. Но на $T_1^*(M, g_0)$ эти знаменатели равны 1.) Ясно, что, когда $g^{ij}(x) \rightarrow g^{0ij}(x)$ в смысле C^r , а $|y|$ ограничено и отделено от нуля (как это имеет место на $T_1^*(M, g_0)$), правые части (*) стремятся к $(D_{i+n}H_0, -D_iH_0)$ в смысле C^{r-1} .

(с) Докажем теперь, что $\mathcal{E}^r(N, \kappa)$ плотно в $\mathcal{E}^r M$. Пусть g_0 — произвольная C^r -метрика. Ее можно аппроксимировать (в смысле C^r) бугристой метрикой g_1 . (При $r \geq 5$ это просто утверждение теоремы о бугристых метриках. При $r=2, 3, 4$ сначала аппроксимируем (в смысле C^r) g метрикой класса C^5 , затем аппроксимируем последнюю (в смысле C^5 и тем более C^r) бугристой метрикой.) Далее, g_1 можно сколь угодно близко в C^r -топологии аппроксимировать C^∞ -метрикой g . Поскольку $g_1 \in \mathcal{E}^r(1, \kappa)$ и $\mathcal{E}^r(1, \kappa)$ открыто, то и $g \in \mathcal{E}^r(1, \kappa)$. Пусть $c_1, \dots, c_k$ — «все» замкнутые геодезические для g с $0 < E \leq \kappa$ (т. е. любая замкнутая геодезическая с $0 < E \leq \kappa$ принадлежит $O(2)$ -орбите одной из c_i). У g имеется такая окрестность $\mathcal{U}$ в $\mathcal{E}^r(1, \kappa)$, что при всех $g' \in \mathcal{U}$ определены непрерывно зависящие от g' замкнутые геодезические **) $c_i(g')$, причем $c_i(g) = c_i$, а других замкнутых геодезических с $0 < E \leq \kappa$ у метрики g' «нет» (с обычным уточнением смысла этого «нет»). Геодезические c_i не обязаны все быть однократными, но среди них имеются однократные — пусть это будут $c_{i_1}, \dots, c_{i_r}$, — а все прочие c_i являются кратными повторениями этих c_{i_j} ; пусть наибольшая кратность повторения равна m . Две различные (и не сводящиеся друг к другу посредством действия $O(2)$) однократные геодезические могут иметь лишь конечное число общих

) Хотя здесь написано $2(n+1)$ уравнений, но на самом деле x^i и y^i не независимы, а подчинены соотношению $2H_0(x, y) = 1$. Если локально независимыми координатами являются, скажем, $x^1, \dots, x^{n+1}, y^1, \dots, y^n$, то можно выразить y^{n+1} через остальные переменные, подставить это выражение вместо y^{n+1} в правые части уравнений для $\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^{n+1}, \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^n$, а уравнения для $\dot{y}^{n+1}$ не писать вовсе. Но можно сказать и иначе: у системы () мы берем только решения с начальными значениями, удовлетворяющими соотношению $2H_0(x, y) = 1$.

**) Собственно говоря, мы не доказывали непрерывной зависимости c_i как элементов топологического пространства ΛM от g' , и она нам не понадобится; можно иметь в виду просто непрерывность по g' соответствующих траекторий геодезического потока, как в (а).

точек, поэтому на каждой из c_{i_j} имеются точки, не принадлежащие никаким другим c_{i_h} . Пусть

$$c_{i_j}(t_j) \notin \bigcup_{h \neq i} c_{i_h}(S);$$

c_{i_j} могут иметь самопересечения, но поскольку у однократной геодезической может быть лишь конечное число точек самопересечения, то, слегка изменив, если потребуется, t_j , можно добиться, чтобы $c_{i_j}(t_j)$ не были точками самопересечения. У точек $c_{i_j}(t_j)$ можно взять такие малые окрестности U_j , что

$$(**) \quad U_i \cap \bigcup_{h \neq i} (c_{i_h}(S) \cup U_h) = \emptyset.$$

Из 3.3.7 видно, что за счет сколь угодно малого возмущения $\delta_j g$ метрики g , сосредоточенного в U_j , можно добиться, чтобы линейное отображение Пуанкаре для c_{i_j} , оставшейся замкнутой геодезической для $g + \delta_j g$, стало Nm -элементарным. (Ввиду ⁽⁵¹⁾ тогда оно станет N -элементарным для всех повторений c_{i_j} кратности $\leq m$.) Из (**) видно, что это возмущение не «задевает» остальных c_{i_h} и тех окрестностей U_h , где производится возмущение, корректирующее свойства c_{i_h} . Поэтому можно произвести все эти возмущения

одновременно, т. е. взять метрику $g^* = g + \sum_1^k \delta_j g$; при достаточной малости возмущений она принадлежит ${}^{\mathcal{A}}\mathcal{P}$. Ясно, что $c_i(g^*) = c_i$ и что для g^* линейные отображения Пуанкаре являются N -элементарными для всех c_i , а ведь других замкнутых геодезических с $0 < E \leq \kappa$ у g^* нет. Значит, $g^* \in \mathcal{S}^r(N, \kappa)$. $\square \blacktriangle$

Теперь мы докажем последний результат этой главы.

3.3.10. Теорема. Пусть M — компактное дифференцируемое многообразие и $r \geq 4$. Тогда следующее свойство римановой метрики является типичным (в $\mathcal{S}^r M$).

Отображение Пуанкаре каждой замкнутой геодезической на многообразии M с метрикой g является гиперболическим или закручивающим.

Доказательство (ср. с работой Клингенберга и Такенса [1], где приведено немного другое доказательство). Будем рассуждать так же, как при доказательстве 3.3.9. Очевидно, достаточно доказать лишь аналог утверждения 3.3.9 (i).

Для $\kappa > 0$ обозначим через $\mathcal{S}^r(\tau, \kappa)$ множество тех метрик $g \in \mathcal{S}^r M$, для которых выполняется следующее свойство: у всех замкнутых геодезических на (M, g) , для которых $0 < E \leq \kappa$, отображения Пуанкаре гиперболические или закручивающие.

Из 3.3.9 мы знаем, что множество $\mathcal{S}^r(4, \kappa)$ открыто и плотно в $\mathcal{S}^r M$. Поэтому заданное $g \in \mathcal{S}^r M$ может быть аппроксимировано C^∞ -метрикой g' , у которой есть лишь конечное число замкнутых геодезических с $0 < E \leq \kappa$. К каждой из этих геодезических применяем 3.3.8. Таким образом, $\mathcal{S}^r(\tau, \kappa)$ плотно в $\mathcal{S}^r M$. Так как рассматриваемое свойство отображений Пуанкаре открыто, то малое возмущение элемента $g \in \mathcal{S}^r(\tau, \kappa)$ не выведет g из $\mathcal{S}^r(\tau, \kappa)$ (поскольку, очевидно, $\mathcal{S}^r(\tau, \kappa) \subset \mathcal{S}^r(1, \kappa)$, при малом возмущении g новых замкнутых геодезических с $0 < E \leq \kappa$ не возникает). Таким образом, $\mathcal{S}^r(\tau, \kappa)$ открыто. $\square$

Добавление к § 3.3

Теорема Биркгофа — Льюиса о неподвижной точке

Юрген Мозер

Мы изложим полное доказательство так называемой теоремы Биркгофа — Льюиса о неподвижной точке 3.3.3. Эта теорема родственна другой теореме Биркгофа и Льюиса [1], а именно теореме о периодических решениях действительной аналитической гамильтоновой системы около неподвижной точки общего устойчивого типа. Отметим, что доказываемая ниже теорема сформулирована при очень слабых предположениях о дифференцируемости. Дальнейшие комментарии можно найти в замечании после 3.3.3.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $(x_k), (y_k)$, $1 \leq k \leq n$, — координаты в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, снабженном канонической симплектической 2-формой $\sum_k dx_k \wedge dy_k$. Мы рассматриваем каноническое преобразование

$$\varphi: (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, 0)$$

вида $(x, y) \mapsto (x^{(1)}, y^{(1)})$,

$$(1) \quad \begin{aligned} x_k^{(1)} &= x_k \cos \Phi_k(x, y) - y_k \sin \Phi_k(x, y) + f_k(x, y), \\ y_k^{(1)} &= x_k \sin \Phi_k(x, y) + y_k \cos \Phi_k(x, y) + f_{k+n}(x, y), \end{aligned}$$

$$\Phi_k(x, y) = \alpha_k + \sum_{l=1}^k \frac{1}{2} \beta_{kl} (x_l^2 + y_l^2).$$

При этом предполагается, что в начале координат производные возмущающих членов $f_k(x, y)$ и $f_{k+n}(x, y)$ равны нулю вплоть до третьего порядка включительно, а сами эти члены всего лишь принадлежат классу C^1 . Для простоты можно предположить, что f принадлежит классу C^3 , но, во-первых, в доказательстве это более сильное предположение нам не понадобится, а во-вторых, предположения о слабой дифференцируемости в дальнейшем окажутся полезными.

Положим $\rho^2 = \sum_k (x_k^2 + y_k^2)$; тогда

$$(2) \quad \rho^{-3} \{ |f(x, y)| + \rho (|D_x f| + |D_y f|) \}$$

стремится к нулю при $\rho \rightarrow 0$.

Если мы предположим, что матрица (β_{kl}) невырождена, то получим локальное симплектическое закручивающее отображение; см. 3.3.2 и 3.3.3, где были использованы комплексные координаты

$$z^k = x_k + iy_k, \quad \bar{z}^k = x_k - iy_k, \quad 2\pi a^k = \alpha_k, \quad 4\pi b_l^k = \beta_{kl}.$$

3.3.A.1. Теорема. Если отображение $\varphi: (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, 0)$ является каноническим преобразованием с невырожденной матрицей (β_{kl}) , то каждая проколота окрестность $0 < \sum_k (x_k^2 + y_k^2) < \varepsilon$ содержит периодическую траекторию. Период этих траекторий стремится к бесконечности, когда ε стремится к нулю.

Доказательство. Введем новые координаты (τ_k, θ_k) , полагая

$$(3) \quad x_k = \sqrt{2\tau_k \varepsilon} \cos \theta_k, \quad y_k = \sqrt{2\tau_k \varepsilon} \sin \theta_k,$$

где θ_k определены с точностью до 2π . Заметим, что это преобразование вырождено, если одно или больше τ_k равны нулю. По этой причине будем рассматривать шар

$$B_\rho: \sum_k \left(2\tau_k - \frac{1}{2n} \right)^2 < \rho^2, \quad 0 < \rho < 1/2n,$$

на котором $2\tau_k > 1/2n - \rho > 0$. Кроме того, на этом шаре

$$0 < \sum_k (x_k^2 + y_k^2) = \varepsilon \sum_k 2\tau_k < \varepsilon \left(\frac{1}{2} + n\rho \right) < \varepsilon,$$

так что этот шар целиком лежит в рассматриваемой проколоте окрестности. Отображение φ определено в области $B_\rho \times T^n$, где через T^n обозначен тор $\{\theta_k \bmod 2\pi\}$.

Преобразование (3) переводит 2-форму $\alpha = \sum_k dx_k \wedge dy_k$ в форму $\varepsilon \sum_k d\tau_k \wedge d\theta_k$, так что φ в новых координатах по-прежнему остается каноническим преобразованием относительно симплектической 2-формы $\sum_k d\tau_k \wedge d\theta_k$. Кроме того, φ есть «строгое каноническое» преобразование, т. е. для любой замкнутой кривой Γ из $B_\rho \times T^n$ выполняется соотношение

$$\int_{\Gamma} \sum_k \tau_k d\theta_k = \int_{\varphi(\Gamma)} \sum_k \tau_k d\theta_k.$$

В самом деле, из равенства $2\epsilon\tau_k d\theta_k = x_k dy_k - y_k dx_k$ и теоремы Стокса получаем

$$2\epsilon \int_{\Gamma} \sum_k \tau_k d\theta_k = \int_{\partial\Omega} \sum_k (x_k dy_k - y_k dx_k) = 2 \int_{\Omega} \alpha,$$

где Ω — двумерное многообразие в $|x|^2 + |y|^2 < \epsilon$ с краем $\partial\Omega = \Gamma$. Так как исходное отображение сохраняет α , а следовательно, и $\int \alpha$, то новое отображение сохраняет $\int \sum_k \tau_k d\theta_k$ для всех замкнутых кривых Γ в $B_\rho \times T^m$. Здесь мы воспользовались односвязностью множества $|x|^2 + |y|^2 < \epsilon$, в то время как множество $B_\rho \times T^m$, конечно, не односвязно. Заметим, что понятие «строго канонический» сильнее, чем понятие «канонический», в чем можно убедиться на примере отображения $\tau_k \mapsto \tau_k + c_k$, $\theta_k \mapsto \theta_k$.

В терминах переменных τ_k , θ_k исходное отображение φ представляется как некоторое новое отображение, — мы снова будем обозначать его через φ , — которое фактически определено на накрывающем пространстве для $B_\rho \times T^m$; это накрывающее пространство параметризовано с помощью τ_k и θ_k .

Рассматриваемое отображение записывается в виде *)

$$(4) \quad (\tau, \theta) \mapsto (\tau^{(1)}, \theta^{(1)}), \quad \tau_k^{(1)} = \tau_k + o_1(\epsilon);$$

$$\theta_k^{(1)} = \theta_k + \psi_k(\tau, \epsilon) + o_1(\epsilon); \quad \psi_k = \alpha_k + \epsilon \sum_{l=1}^n \beta_{kl} \tau_l.$$

Здесь $o_1(\epsilon)$ обозначает такую функцию $f = f(\tau, \theta, \epsilon)$, периодическую по θ_k с периодом 2π , что $\epsilon^{-1}f$ и первые производные $\epsilon^{-1}f$ по τ и θ равномерно стремятся к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$ **). Если мы обозначим через $|f|_s$ максимум на $B_\rho \times T^n$ среди всех производных порядка $\leq s$, то последнее условие можно сформулировать так:

$$\epsilon^{-1}|f|_1 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Через $o(\epsilon)$ мы обозначаем функции, для которых $\epsilon^{-1}|f|_0 \rightarrow 0$, а через $O(\epsilon)$ — функции, для которых $\sup \epsilon^{-1}|f|_0 < \infty$. Понятный смысл имеют также $o(1)$ и $O(1)$. В различных формулах и даже в разных частях одной и той же формулы эти $o_1(\epsilon)$, $o(\epsilon)$ и т. д. могут обозначать различные величины.

*) Мы намерены рассматривать его при различных ϵ , поэтому точнее было бы сказать, что теперь имеется однопараметрическое семейство отображений φ_ϵ с малым положительным параметром ϵ .

**) Позднее эти f могут еще зависеть от некоторого индекса (например, j в (6) и N в 3.3.А.5); тогда подразумевается, что равномерность стремления к нулю соответствующих величин имеет место также и по рассматриваемым значениям этих индексов.

3.3.A.2. Теорема. Пусть φ — такое строго каноническое отображение вида (4), определенное на $B_\rho \times T^n$, что матрица (β_{kl}) невырождена. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ область $B_\rho \times T^n$ содержит по крайней мере одну периодическую точку.

Ясно, что из этой теоремы следует теорема 3.3.A.1. Доказательство теоремы 3.3.A.2 мы разобьем на несколько шагов (см. также Цендер [1]).

3.3.A.3. Лемма. Пусть $0 < \rho' < \rho$ и c_1 — положительная константа. Тогда если $\varepsilon N < c_1$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 зависит от ρ , ρ' и c_1 , то при $j = 1, \dots, N$ определены итерации

$$(5) \quad \varphi^j: B_{\rho'} \times T^n \rightarrow B_\rho \times T^n.$$

Кроме того, при этих j

$$\varphi^j - \chi^j = \varepsilon^{-1} o_1(\varepsilon) \rightarrow 0,$$

где $\chi^j: (\tau, \theta) \mapsto (\tau, \theta + \psi(\tau, \varepsilon))$.

Эта лемма нужна для того, чтобы показать, что итерации $\varphi^j(\tau, \theta)$ не покидают области определения, если $j = O(\varepsilon^{-1})$. Кроме того, нам понадобятся оценки для первых производных итераций φ^j в том виде, в котором они даны в (6).

Доказательство. Используя в пространстве (τ, θ) обычную евклидову норму, получим, что, пока итерации φ^j определены, их τ -компоненты удовлетворяют неравенствам

$$|\tau^{(j)} - \tau| < |\tau^{(1)} - \tau| + \dots + |\tau^{(j)} - \tau^{(j-1)}| < j o(\varepsilon),$$

а так как $j \leq N < c_1/\varepsilon$ и $\tau \in B_{\rho'}$, то $|\tau^{(j)} - \tau| < c_1 \varepsilon^{-1} o(\varepsilon) < \rho - \rho'$, если только ε достаточно мало. Отсюда индукцией по $j = 1, \dots, N$ заключаем, что все φ^j определены и $\varphi^N(\tau, \theta) \in B_\rho \times T^n$. Тем самым (5) доказано. Кроме того,

$$\begin{aligned} |\theta^{(j)} - \theta - j\psi(\tau, \varepsilon)| &\leq |\theta^{(1)} - \theta - \psi(\tau, \varepsilon)| + \dots \\ &\dots + |\theta^{(j)} - \theta^{(j-1)} - \psi(\tau, \varepsilon)| \leq o(\varepsilon) + (o(\varepsilon) + |\psi(\tau^{(1)}, \varepsilon) - \psi(\tau, \varepsilon)|) + \dots \\ &\dots + (o(\varepsilon) + |\psi(\tau^{(j-1)}, \varepsilon) - \psi(\tau, \varepsilon)|) \leq \\ &\leq N o(\varepsilon) + (\|\beta\| \varepsilon + o(\varepsilon)) \sum_{l=1}^{j-1} |\tau^{(l)} - \tau| \leq \\ &\leq N o(\varepsilon) + \varepsilon \sum_{l=1}^{j-1} l o(\varepsilon) = N o(\varepsilon) + N^2 \varepsilon o(\varepsilon) = (1 + c_1) N o(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} o(\varepsilon), \end{aligned}$$

где через $\|\beta\|$ обозначена норма матрицы $\beta = (\beta_{kl})$. Это доказы-

*) Подробнее, конечно, следовало бы писать не χ , а χ_ε .

вает, что $|\varphi' - \chi'|_0 = o(\varepsilon)$. Для доказательства (6) осталось получить оценки разностей якобианов $d\varphi'$ и $d\chi'$.

Якобиан $d\varphi$ в точке $\tau^{(j)}$, $\theta^{(j)}$ обозначим через F_j , а якобиан $d\chi$, который во всех точках одинаков, — через G . Так как ψ не зависит от θ , то

$$G = \begin{pmatrix} I & \varepsilon\beta \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $|G - I|_0 = O(\varepsilon)$ и

$$|F_j - I|_0 = |F_j - G|_0 + |G - I|_0 = o(\varepsilon) + O(\varepsilon) = O(\varepsilon).$$

Поэтому композиция N таких отображений F_j или G может быть оценена как

$$(1 + O(\varepsilon))^N = e^{NO(\varepsilon)} = O(1),$$

т. е. она ограничена, если ограничено $N\varepsilon$. Поэтому получаем

$$|d\varphi' - d\chi'|_0 = \left| \sum_{k=0}^{j-1} F_{j-1} F_{j-2} \dots F_{k+1} (F_k - G) G^k \right|_0 \leq N C_2 o(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} o(\varepsilon).$$

(Здесь у F_i подразумевается аргумент $(\tau^{(i-1)}, \theta^{(i-1)})$. При $k = j - 1$ подразумевается, что сомножители $F_{j-1}, \dots, F_{k+1}$ отсутствуют.) Это доказывает 3.3.A.3. $\square$

Теперь мы хотим отыскать неподвижную точку отображения χ^N в $B_{\rho'} \times T^n$. Для этого нам надо найти такое $\tau \in B_{\rho'}$, чтобы при всех $k = 1, \dots, n$ числа $(2\pi)^{-1} N\psi_k(\tau, \varepsilon)$ были целыми, т. е.

$$(7) \quad (2\pi)^{-1} N\psi(\tau, \varepsilon) \in \mathbb{Z}^n.$$

3.3.A.4. Лемма. Если $\varepsilon N\rho'' > 2\pi \sqrt{n} \|\beta^{-1}\|$, то существует $\tau^* \in B_{\rho'}$, удовлетворяющее условию (7), т. е. такое, что тор $\tau = \tau^*$ целиком состоит из неподвижных точек отображения χ^N .

(Эта лемма относится к отображению χ , которое определено при всех $\tau, \theta, \varepsilon$, поэтому в условиях леммы нет никаких ограничений на ρ'' и на малость ε (подразумевается, конечно, что $\varepsilon, N, \rho'' > 0$). Другое дело, что такие ограничения появляются при ее применении.)

Доказательство. Образ шара $B_{\rho'}$ (имеющего радиус $\rho''/2$) при отображении $\tau \mapsto \psi(\tau, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon\beta\tau$ содержит шар радиуса $\varepsilon\|\beta^{-1}\|^{-1}\rho''/2$. В самом деле, если $\sigma = \psi(\tau, \varepsilon)$ и $\sigma' = \psi(\tau', \varepsilon)$, то $|\tau - \tau'| \leq \varepsilon^{-1}\|\beta^{-1}\| |\sigma - \sigma'|$. Пусть теперь τ' — центр шара $B_{\rho'}$ (т. е. $r'_k = 1/4n$, $k = 1, \dots, n$), а σ' — образ τ' . Каждое σ является образом некоторого τ . Тогда из $|\sigma - \sigma'| \leq \varepsilon\|\beta^{-1}\|^{-1}\rho''/2$ следует, что $|\tau - \tau'| \leq \rho''/2$, что доказывает утверждение.

* «Якобиан» в данном случае означает, конечно, не определитель, а соответствующую матрицу (она же на другом языке называется производной Фреше).

Таким образом, при отображении $\tau \mapsto (2\pi)^{-1} N\psi(\tau, \varepsilon)$ образ шара $B_{\rho'}$ содержит шар радиуса $R = (4\pi)^{-1} \|\beta^{-1}\|^{-1} N\varepsilon\rho''$ и, следовательно, содержит куб со стороной $2n^{-1/2}R$. Поэтому, если $2n^{-1/2}R > 1$, то этот куб содержит точку решетки $\mathbb{Z}^n$, что и доказывает лемму. $\square$

Фиксируем теперь до конца доказательства такие ρ' и ρ'' , что $0 < \rho'' < \rho' < \rho < 1/2n$.

3.3.A.5. Лемма. Положим

$$c_0 = 2\pi \sqrt{n} \|\beta^{-1}\| \rho'', \quad c_1 = c_0 + 1.$$

Тогда при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ и любом целом N , для которого $c_0 < \varepsilon N < c_1$, в $B_{\rho'} \times T^n$ существует такой тор $\tau = \tau(\theta, \varepsilon) = \tau^* + \varepsilon^{-1} o_1(\varepsilon)$, что φ^N отображает его «радиально», т. е. так, что

$$\theta^N - \theta \in 2\pi\mathbb{Z}^n.$$

Доказательство. Согласно лемме 3.3.A.3,

$$\theta^N - \theta = N\psi(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{-1} o_1(\varepsilon),$$

а по предыдущей лемме существуют такое $\tau^* \in B_{\rho'}$ и такая точка h решетки $\mathbb{Z}^n$, что

$$(2\pi)^{-1} N\psi(\tau^*, \varepsilon) = h \in \mathbb{Z}^n.$$

Для доказательства леммы нам надо разрешить относительно τ уравнение

$$(8) \quad \theta^N - \theta = N\psi(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{-1} o_1(\varepsilon) = 2\pi h.$$

Для этого можно применить теорему о неявной функции. Если мы отбросим возмущающий член $\varepsilon^{-1} o_1(\varepsilon) = o_1(1)$, то получим решение $\tau = \tau^*$. Возмущающий член является сокращенным обозначением для некоторой функции $f_N(\tau, \theta, \varepsilon)$ (иными словами, f_N — это θ -компонента разности $d\varphi^N - d\chi^N$). Заменяя τ на $\tau^* + \delta\tau$, получаем для $\delta\tau$ уравнение

$$(9) \quad \begin{aligned} \varepsilon N \beta \delta\tau + f_N(\tau^* + \delta\tau, \theta, \varepsilon) &= 0, \\ \delta\tau &= -(\varepsilon N \beta)^{-1} f_N(\tau^* + \delta\tau, \theta, \varepsilon). \end{aligned}$$

Решаем (9) с помощью обычных последовательных приближений, начиная с $\delta\tau^{(0)} = 0$ и используя, что f_N и ее первые производные (по τ, θ) суть $o(1)$, а

$$\|(\varepsilon N \beta)^{-1}\| \leq c_0^{-1} \|\beta^{-1}\|.$$

Это доказывает существование малого решения $\delta\tau(\theta, \varepsilon)$. Оно единственно среди всех $\delta\tau$ с $\tau^* + \delta\tau \in B_{\rho'}$, ибо если $\delta\tau'$ тоже

удовлетворяет (9) (с теми же θ , ε), то

$$|\delta\tau - \delta\tau'| < c_0^{-1} \|\beta^{-1}\| o(1) \quad |\delta\tau - \delta\tau'| < \frac{1}{2} |\delta\tau - \delta\tau'|,$$

т. е. $\delta\tau - \delta\tau' = 0$. Далее, зависимость $\delta\tau$ от θ — класса C^1 . Это получается непосредственным применением обычной теоремы о неявной функции к (9) (с фиксированным малым ε): коль скоро мы знаем, что при некотором θ_0 имеется решение, то при всех θ , достаточно близких к θ_0 , имеется решение с непрерывной производной по θ ; но ввиду единственности оно совпадает с нашим $\delta\tau(\theta, \varepsilon)$. Наконец, отсюда же видно, что, в понятных обозначениях,

$$\frac{\partial(\delta\tau)}{\partial\theta} = - \left(I - (\varepsilon N\beta)^{-1} \left(\frac{\partial f_N}{\partial\tau} \right) \right)^{-1} \left(\frac{\partial f_N}{\partial\theta} \right) = o(1).$$

(Таким образом, нам действительно понадобились оценки не только для разности $\varphi^N - \chi^N$, но и для $d\varphi^N - d\chi^N$.)

Возвращаясь к (8), заключаем, что у этого уравнения имеется искомое решение класса C^1 (по θ):

$$\tau = \tau^* + \varepsilon^{-1} o_1(\varepsilon) \in B_{\rho^*}. \quad \square$$

Чтобы найти неподвижную точку отображения φ^N , мы должны решить систему уравнений

$$\theta^{(N)} - \theta = 2\pi h, \quad h \in \mathbb{Z}^n;$$

$$\tau^{(N)} - \tau = 0.$$

Пока что мы решили только первое уравнение из этой системы; мы установили, что оно выполняется на m -мерном торе $\mathcal{T}$: $\tau = \tau(\theta, \varepsilon)$. На геометрическом языке наша задача состоит в отыскании точки пересечения $\mathcal{T}$ с $\varphi^N(\mathcal{T})$; каждая такая точка будет неподвижной точкой φ^N .

Вообще говоря, два близко расположенных n -мерных тора в $2n$ -мерном пространстве не обязаны пересекаться, и именно для доказательства существования пересечения мы воспользуемся строгой каноничностью отображения φ .

Покажем, что на торе $\tau = \tau(\theta, \varepsilon)$ существует такая 2π -периодическая по $\theta_1, \dots, \theta_n$ функция $W(\theta, \varepsilon) \in C^2$, что

$$(10) \quad \tau_k^{(N)} - \tau_k = \partial W / \partial \theta_k.$$

В самом деле, так как φ — строго каноническое отображение, то

$$\int_{\Gamma} \sum_k \tau_k^{(N)} d\theta_k^{(N)} - \sum_k \tau_k d\theta_k = 0$$

для каждой замкнутой кривой Γ на $\tau = \tau(\theta, \varepsilon)$. Так как $\theta^{(N)} - \theta =$

$= 2\pi h$ и, следовательно, $d\theta^{(N)} = d\theta$, то

$$\int_{\Gamma} \sum_k (\tau_k^{(N)} - \tau_k) d\theta_k = 0$$

для каждой лежащей на торе замкнутой кривой Γ . Поэтому интеграл

$$W(\theta) = \int_0^\theta \sum_k (\tau_k^{(N)} - \tau_k) d\theta_k$$

не зависит от пути и определяет искомую функцию W .

Неподвижной точкой отображения φ^N является такая точка $\tau = \tau(\theta, \epsilon)$, что $\tau^{(N)} = \tau$, т. е., согласно (10), критическая точка функции W . Например, точки максимума или минимума функции W доставляют примеры таких точек. Они принадлежат $B_{\rho'} \times T^n$, а их траектории лежат в $B_{\rho} \times T^n$. Это доказывает теорему 3.3.A.1. $\square$

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ЗАМКНУТЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

В этой главе мы займемся проблемой существования нескольких или даже бесконечного числа замкнутых геодезических на компактном римановом многообразии. Отметим, что до сих пор мы доказали существование лишь одной замкнутой геодезической; см. 2.1.3 и 2.1.6. Этот результат, полученный Люстерником и Фетом [1] в 1951 г., не был улучшен вплоть до 1965 г., когда Фет [3] доказал существование по крайней мере двух замкнутых геодезических в предположении, что все замкнутые геодезические невырождены.

В § 4.1 мы изложим полное доказательство теоремы Фета. Но сначала в качестве подготовительного материала для этого доказательства мы, следуя А. С. Шварцу [1], детально опишем локальную топологическую структуру пространства непараметризованных замкнутых кривых около невырожденного критического подмногообразия.

В § 4.2 излагается упрощенное доказательство слегка усиленного варианта знаменитой теоремы Громола и Мейера [2], которая утверждает существование бесконечного числа однократных замкнутых геодезических на компактном римановом многообразии M в том случае, когда числа Бетти пространства ΛM неограничены.

В § 4.3 мы доказываем, что на каждом компактном римановом многообразии, фундаментальная группа которого конечна, существует бесконечно много однократных замкнутых геодезических. Доказательство, помимо изложенных в § 4.2 результатов Громола и Мейера, использует построенную Сулливаном теорию рационального гомотопического типа и — существенным образом — свойства комплекса Морса. В написанном Дж. Саксом добавлении содержится подробное описание минимальной модели пространства ΛM .

В § 4.4 содержится несколько теорем о существовании замкнутых геодезических (в том числе — с определенными специальными свойствами) для «типичных» метрик. В доказательствах этих теорем используются свойства геодезического потока.

4.1. Критические точки на ПМ и теорема Фета

Мы начнем с описания локальной топологической структуры пространства непараметризованных кривых возле невырожденного критического многообразия. В течение долгого времени оставался незамеченным тот факт, что наличие в общем случае нетривиальной группы изотропии делает эту структуру намного более сложной, чем в случае невырожденного критического многообразия в пространстве параметризованных кривых. Впервые на это указал А. С. Шварц [1]. Наше изложение восходит к статьям Клингенберга [4], [5], [6], где со всеми подробностями было разобрано несколько частных случаев.

В качестве первого применения этих результатов мы дадим полное доказательство теоремы Фета, которая утверждает существование по крайней мере двух однократных замкнутых геодезических в предположении, что все замкнутые геодезические невырождены.

Так же как в § 2.4, мы рассматриваем невырожденное критическое подмногообразие B . Мы предполагаем, что B связно и что все его элементы имеют одинаковую кратность, скажем m . Имея это в виду, мы будем иногда писать B_m вместо B . Пусть $k = k_m$ — индекс критического подмногообразия $B = B_m$ и $E|_{B_m} = \kappa = \kappa_m$. Ясно, что $\kappa_m > 0$.

Обозначим через B_1 подмногообразие ΛM , состоящее из однократных замкнутых геодезических, соответствующих замкнутым геодезическим из B_m . Будем считать, что B_1 невырожденно и что его индекс равен k_1 . Кроме того, положим $E|_{B_1} = \kappa_1$.

Пусть $\mu = \mu_m$: $N = N_m \rightarrow B = B_m$ — нормальное расслоение подмногообразия B . Слой $\mu^{-1}(c)$ над $c \in B_m$ есть подпространство пространства $T_c \Lambda M$, ортогональное касательному пространству $T_c B_m$ подмногообразия B_m в точке c .

Расслоение μ_m расщепляется на положительное и отрицательное подрасслоения:

$$\mu_m^\pm: N_m^\pm \rightarrow B_m,$$

для которых слоем $(\mu_m^\pm)^{-1}(c)$ является $T_c^\pm \Lambda M$.

▲ Они инвариантны относительно действия $T\tilde{\chi}$ группы S . При обычной интерпретации касательных векторов к ΛM в c как векторных полей вдоль c это действие, так же как и $\tilde{\chi}$, сводится просто к сдвигам аргументов. Отображение, возникающее при факторизации ΛM по действию $\tilde{\chi}$ группы S , мы уже обозначили через

$$\tilde{\pi}: \Lambda M \rightarrow \tilde{\Pi} M = \Lambda M / S.$$

Тем же символом $\tilde{\pi}$ будем обозначать и отображение, возникаю-

щее при факторизации N_m по действию $T\tilde{\chi}$ группы S . $\blacktriangle$ Мы хотим описать отображение $\tilde{\pi}|N_m^-$. (Аналогичное описание будет справедливо и для $\tilde{\pi}|N_m^+$.)

$\blacktriangle$ Факторизацию по S можно осуществить в два шага: сначала профакторизовать по подгруппе

$$\mathbb{Z}_m := \{z_0^l; 0 \leq l < m, z_0 := e^{2\pi i/m}\}$$

группы S , а затем по факторгруппе $S/\mathbb{Z}_m$, элементы которой очевидным образом представляются числами r , $0 \leq r < 1/m$. Очевидно, элементы $\mathbb{Z}_m$ переводят каждый элемент $c_m \in B_m$ в себя, а $T\tilde{\chi}|\mathbb{Z}_m$ действует в слое $(\mu_m^-)^{-1}(c_m)$ как группа изометрий. Легко видеть, что для близких c_m эти действия сопряжены. Ввиду связности B_m они сопряжены для всех c_m . Точнее, существует такой атлас расслоения μ_m^- , что во всех его векторных картах $T\tilde{\chi}(z_0)$ представляется одной и той же ортогональной матрицей T (а переход от одной векторной карты к другой описывается посредством ортогональных преобразований, коммутирующих с T). Поэтому при факторизации по $\mathbb{Z}_m$ получается расслоение

$$\mu_m^-/\mathbb{Z}_m: N_m^-/\mathbb{Z}_m \rightarrow B_m$$

со стандартным слоем $D^k/\mathbb{Z}_m$, где подразумевается, что действие $\mathbb{Z}_m$ в D^k определяется описанным выше образом. Далее, каждый элемент из $S/\mathbb{Z}_m$, отличный от единичного, переводит $(c_m(t))$ в другую кривую $(c_m(t+r))$, где $0 < r < 1/m$. Поэтому при факторизации по $S/\mathbb{Z}_m$ ни одну точку слоя расслоения $\mu_m^-/\mathbb{Z}_m$ не приходится отождествлять ни с какой другой точкой того же слоя. Значит, при этой факторизации получается расслоение

$$N_m^-/S = (N_m^-/\mathbb{Z}_m)/(S/\mathbb{Z}_m) \rightarrow \tilde{\Delta}_m := B_m/S = B_m/(S/\mathbb{Z}_m)$$

с таким же, что и раньше, стандартным слоем $D^k/\mathbb{Z}_m$. $(55) \blacktriangle$

Таким образом, мы получили следующий результат.

4.1.1. Лемма. Пусть множество критических точек многообразия ΛM , принадлежащих E -уровню $\kappa = \kappa_m > 0$, содержит среди своих связных компонент невырожденное критическое подмногообразие $B = B_m$ индекса $k = k_m$, все элементы которого имеют одинаковую кратность m .

Пусть $\mu^- = \mu_m^-: N^- = N_m^- \rightarrow B = B_m$ — отрицательное расслоение над B_m , слоем которого над точкой $c_m \in B_m$, согласно определению в § 2.2, является отрицательное пространство $T_{c_m}^- \Lambda M$.

Каноническое S -действие на ΛM индуцирует S -действие на μ_m^- . Пусть $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}_m = B_m/S$ — фактормногообразие подмногообразия B_m .

Тогда для факторизации расслоения μ_m^- по S -действию имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 N_m^- & \xrightarrow{/Z_m} & N_m^-/Z_m & \xrightarrow{/(S/Z_m)} & N_m^-/S \\
 \downarrow \mu_m^- & & \downarrow \mu_m^-/Z_m & & \downarrow \mu_m^-/S \\
 B_m & \xrightarrow{/Z_m} & B_m/Z_m & \xrightarrow{/(S/Z_m)} & \tilde{\Delta}_m
 \end{array}$$

Здесь первые горизонтальные отображения получаются в результате действия на слоях группы изотропии Z_m подмногообразия B_m ; следовательно, в частности, $B_m \rightarrow B_m/Z_m$ — изоморфизм. Вторые горизонтальные отображения являются расслоениями на окружности.

Соответствующая диаграмма имеет место и для положительного расслоения μ_m^+ . $\square$

Эта лемма позволяет нам полностью описать относительные гомологии пространства $\tilde{P}^* \bmod \tilde{P}^{*-}$ для невырожденного критического значения.

4.1.2. Теорема. Предположим, что множество критических точек многообразия $\Lambda = \Lambda M$, принадлежащих E -уровню $\kappa > 0$, является невырожденным критическим подмногообразием B индекса k и что все элементы из B имеют одинаковую кратность, скажем m . Пусть $\tilde{\pi}B = \tilde{\Delta}$; $\tilde{\Delta}$ — многообразие. Пусть $\tilde{P} = \tilde{P}M$.

Утверждение. $H^*(\tilde{P}^*, \tilde{P}^{*-}) = H^*(N_m^-/S, \partial N_m^-/S) = H^*(\tilde{\Delta}) \otimes \otimes H^*(D^k/Z_m, \partial D^k/Z_m)$, где во втором равенстве надо использовать гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ *).

Доказательство. Первое равенство следует из 2.4.10, 2.4.11 и 4.1.1, так как все конструкции эквивариантны. Доказательство второго равенства аналогично доказательству изоморфизма Тома для гомологий расслоения на диски по модулю его края, сдвигающего размерности гомологий базы на $k = \text{размерность слоя}$ (см. Клингенберг [4]). $\square$

Особый интерес представляет случай, когда B является $O(2)$ -орбитой единственной невырожденной замкнутой геодезической s .

4.1.3. Следствие. Пусть множество критических точек многообразия $\Lambda = \Lambda M$, принадлежащих E -уровню $\kappa > 0$, является $O(2)$ -

* В английском оригинале утверждается также, что если расслоение μ_m^-/S ориентируемо (см. (55)), то аналогичный факт справедлив для гомологий с любыми коэффициентами. Однако в статье Клингенберга [4], на которую здесь делается ссылка, рассматриваются только коэффициенты в $\mathbb{Z}_2$.

орбитой $S \cup S$ в невырожденной замкнутой геодезической индекса k .

Утверждение. Для любых коэффициентов

$$H_*(\Pi^*, \Pi^{*-}) = H_*(D^k/\mathbb{Z}_m, \partial D^k/\mathbb{Z}_m).$$

Доказательство. Отметим, что $(\Pi^*, \Pi^{*-}) = (\tilde{\Pi}^*, \tilde{\Pi}^{*-})/\partial \mathbb{Z}_2$; см. § 2.2. Под действием θ отождествляются обе части $\Delta = O(2) \cdot c/\tilde{x}S$. Поэтому 4.1.3 следует из 4.1.2. (Все расслоение $\mu_m^{-1}S$ в данном случае состоит из одного-единственного слоя, так что утверждение о гомологиях справедливо при любых коэффициентах.) $\square$

Замечание. Предыдущие примеры показывают, что важно знать гомологии пространства $(D^k/\mathbb{Z}_m, \partial D^k/\mathbb{Z}_m)$, где факторизация производится по ортогональному действию циклической группы $\mathbb{Z}_m$ в $\mathbb{R}^k$. То, что гомологии этого пространства могут быть более богатыми, чем гомологии пространства $(D^k, \partial D^k)$, видно из следующей леммы.

4.1.4. Лемма. Пусть дано ортогональное представление циклической группы $\mathbb{Z}_n$ порядка n в евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^k$, при котором образующая z_0 группы $\mathbb{Z}_n$ представляется преобразованием T .

Утверждение. (i) Рассмотрим гомологии с рациональными коэффициентами. Тогда

$$H_i = H_i(D^k/\mathbb{Z}_m, \partial D^k/\mathbb{Z}_m) = 0, \text{ если } i \neq k$$

или если $i = k$, а инвариантное подпространство, на котором T действует как $-\text{id}$, имеет нечетную размерность. Последнее эквивалентно тому, что $(D^k/\mathbb{Z}_m, \partial D^k/\mathbb{Z}_m)$ неориентируемо. Во всех остальных случаях $H_k = \mathbb{Q}$.

(ii) Рассмотрим гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. Если T имеет нечетный порядок, то $H_i(D^k/\mathbb{Z}_m, \partial D^k/\mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_2$ при $i = k$ и $i = 0$ в противном случае.

Если инвариантное подпространство пространства $\mathbb{R}^k$, на котором $\mathbb{Z}_m$ действует как группа нечетного порядка, имеет размерность $a < k$, то

$$H_i(D^k/\mathbb{Z}_m, \partial D^k/\mathbb{Z}_m) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{когда } a+2 \leq i \leq k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай рациональных коэффициентов. Хорошо известно, что тогда $D^k/\mathbb{Z}_m \bmod \partial D^k/\mathbb{Z}_m$ имеет те же гомологии, что и $D^k \bmod \partial D^k$, за исключением того случая, когда T меняет ориентацию; см. Борель [2]. Это происходит в точности тогда, когда подпространство, на котором T действует как $-\text{id}$, имеет нечетную размерность.

В случае коэффициентов в $\mathbb{Z}_2$ отметим, что гомологии пространства не изменятся, если произвести факторизацию по действию циклической группы нечетного порядка. Поэтому если мы положим $m=r2^s$, где r нечетно, то достаточно вычислить гомологии пространства, полученного при факторизации по подгруппе $\mathbb{Z}_{2^s} \subset \mathbb{Z}_m$, так как дальнейшая факторизация по $\mathbb{Z}_r$ больше не изменит гомологий.

Итак, мы можем считать, что $m=2^s$, где $s \geq 0$. Если образующая переходит в оператор нечетного порядка, значит, она действует тождественно и, следовательно, $H_i = H_i(D^k/\mathbb{Z}_m, \partial D^k/\mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_2$ при $i=k$ и $=0$ при $i \neq k$.

Осталось рассмотреть случай, когда имеет место ортогональное разложение

$$\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^a \oplus \mathbb{R}^b \oplus \mathbb{C}^c$$

на такие подпространства, инвариантные относительно T (оператора, представляющего образующую группы $\mathbb{Z}_m$), что $T|_{\mathbb{R}^a} = \text{id}$, $T|_{\mathbb{R}^b} = -\text{id}$, $\mathbb{C}^c = \mathbb{C}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}_c$ и $T|_{\mathbb{C}_j}$ действует как умножение на $e^{i\alpha_j}$, $0 < \alpha_j < \pi$, $a+b+2c=k$, $b+2c > 0$.

Обозначим координаты в $\mathbb{R}^a$ через x_k , $1 \leq k \leq a$, координаты в $\mathbb{R}^b$ через y_i , $1 \leq i \leq b$, и координаты в $\mathbb{C}_j$ через z_j , $1 \leq j \leq c$. Определим последовательность пространств, в которой каждое пространство содержит предыдущее, полагая

$$u^a = \mathbb{R}^a \cap D^k;$$

$$u^{a+i} = \{y_i \geq 0; y_{i+1} = \dots = y_b = z_1 = \dots = z_c = 0\} \cap D^k, \quad 1 \leq i \leq b;$$

$$u^{a+b+2j-1} = \{\arg z_j = 0; z_{j+1} = \dots = z_c = 0\} \cap D^k;$$

$$u^{a+b+2j} = \{0 \leq \arg z_j \leq \alpha_j; z_{j+1} = \dots = z_c = 0\} \cap D^k, \quad 1 \leq j \leq c.$$

Можно проверить, что множества $u \bmod \partial u$ образуют клеточное разбиение пространства $D^k/\mathbb{Z}_m \bmod \partial D^k/\mathbb{Z}_m$. Кроме того, оператор границы устроен следующим образом:

$$\partial u^{a+1} = u^a, \quad \partial u^{a+v} = 0, \quad 2 \leq v \leq b+2c.$$

Поэтому группы гомологий пространства $D^k/\mathbb{Z}_m \bmod \partial D^k/\mathbb{Z}_m$ равны $\mathbb{Z}_2$ в размерностях i , где $a+2 \leq i \leq k$, и равны 0 в прочих размерностях. $\square$

Замечание. Лемма 4.1.4 впервые была доказана А. С. Шварцем [1]. Он сделал несущественную ошибку в вычислениях, которая затем была исправлена Альбером [2] и Клингенбергом [6]. На самом деле Шварц вычислял гомологии с коэффициентами в произвольном простом поле $\mathbb{Z}_p$; результат при этом зависит от разложения $m=rp^s$, $(r, p)=1$.

Если мы хотим использовать леммы 4.1.3 и 4.1.4 для вычисления относительных гомологий изолированной критической $O(2)$ -

орбиты, то нам надо воспользоваться теоремой 3.2.9, определяющей индекс I_{c^m} m -кратного повторения геодезической c в терминах ρ -индекса $I_c(\rho)$:

$$I_{c^m} = \sum_{\rho^m=1} I_c(\rho).$$

Отрицательное подпространство $T_c^- \Lambda$ является слоем над c отрицательного расслоения μ^- над $O(2) \cdot c$. Фактически отрицательное расслоение μ^- над $O(2) \cdot c$ определено также и в случае, когда c — вырожденная геодезическая; при этом слоем над $z \cdot c$ является $T_z^- \Lambda$.

Во всяком случае, из 3.2.8 — 3.2.9 и определения ρ -индекса $I_c(\rho)$ геодезической c получаем

4.1.5. Предложение. Пусть $c = c_0^m$ — замкнутая геодезическая кратности m . Тогда ρ -индекс $I_c(\rho)$, где ρ — корень степени m из единицы, следующим образом описывает представление группы изотропии $\mathbb{Z}_m$ в слое $T_c^- \Lambda$ отрицательного расслоения над $O(2) \cdot c$.

Размерность подпространства, на котором $\mathbb{Z}_m$ действует тождественно, равна $I_c(1)$.

Пусть T — образ образующей группы $\mathbb{Z}_m$ и $0 < \rho < [(m+1)/2]$. Тогда размерность подпространства, на котором T действует как умножение на $e^{\pm 2\pi i \rho / m}$, равна $2I_c(e^{2\pi i \rho / m})$.

Размерность подпространства, на котором T действует как $-\text{id}$ (такое может существовать при четном m), равна $I_c(-1)$. $\square$

4.1.6. Следствие. Пусть $c = c_1$ — однократная замкнутая геодезическая, и пусть все ее повторения $c_m := c^m$, $m \geq 1$, невырождены. Для каждого целого $m \geq 1$ обозначим через $D\mu_m^-$ отрицательное расслоение на диске над невырожденным критическим подмногообразием $O(2) \cdot c_m$. Обозначим через $D_{c_m} \mu_m^-$ стандартный слой расслоения $D\mu_m^-$. Рассмотрим гомологии с рациональными коэффициентами.

Утверждение. (i) Пусть $I_{c_1}(-1) = \text{ind } c_2 - \text{ind } c_1$ — нечетное число. Тогда для всех четных m

$$H_*(D_{c_m} \mu_m^- / \mathbb{Z}_m, \partial D_{c_m} \mu_m^- / \mathbb{Z}_m) = 0.$$

Следовательно, если критическое множество, лежащее на E -уровне $\kappa_m = E(c_m)$, состоит в точности из $O(2) \cdot c_m$ и m четно, то

$$H_*(\Pi^{x_m}, \Pi^{x_m-}) = 0.$$

(ii) Пусть $\text{ind } c = k$. Тогда при всех $m \geq 1$

$$H_{\bullet + \text{нечетное}}(D_{c_m} \mu_m^- / \mathbb{Z}_m, \partial D_{c_m} \mu_m^- / \mathbb{Z}_m) = 0.$$

Доказательство. (i) следует из 4.1.4, 4.1.3 и 4.1.2.

Для того чтобы доказать (ii), заметим сначала, что из $H_{k+\text{нечетное}} \neq 0$ следует, что $\dim D_{c_m} \mu_m^- = \text{ind } c_m = \text{ind } c_1 + \text{нечетное}$ число. Имеем

$$\text{ind } c_m = \text{ind } c_1 + \sum_{\rho^m=1} I_c(\rho), \quad \rho \neq 1,$$

а так как $I_c(\rho) = I_c(\bar{\rho})$, то правая часть имеет вид $k + \text{нечетное}$ число в том и только том случае, когда $I_c(-1)$ нечетно, а m четно. Теперь применяем (i). $\square$

Замечание. 4.1.6 (ii) играет решающую роль при доказательстве теоремы Фета 4.1.8.

Применим 4.1.2 к вычислению относительных гомологий для критического уровня $\kappa_q = 2\pi^2 q^2 > 0$ пространства ΠS^n (см. Клингенберг [4]). Прежде всего из 2.5.3 мы знаем, что критическое многообразие B_q из ΛS^n , принадлежащее уровню κ_q , является многообразием Штифеля $V(2, n-1) = O(n+1)/O(n-1)$. Следовательно, $\Delta_q := \pi B_q = O(n+1)/O(n-1) \times O(2)$ — многообразие Грассмана $G(2, n-1)$, состоящее из двумерных подпространств (или $(n-1)$ -мерных подпространств) в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Отрицательное расслоение μ_q^- над B_q представимо в виде

$$\mu_q^- = \eta^{n-1} \oplus (\sigma_1^{2n-2} \oplus \dots \oplus \sigma_{q-1}^{2n-2}),$$

где η^{n-1} — расслоение, индуцированное отображением π из канонического $(n-1)$ -мерного расслоения ζ^{n-1} над $G(2, n-1)$ (см. Милнор и Стасеф [1])

$$\begin{array}{ccc} E(\eta^{n-1}) & \xrightarrow{\quad} & E(\zeta^{n-1}) \\ \downarrow \eta^{n-1} = \pi^* \zeta^{n-1} & & \downarrow \zeta^{n-1} \\ V(2, n-1) \cong B_q & \xrightarrow{\pi} & G(2, n-1) \cong \Delta_q \end{array}$$

Группа изотропии Z_q многообразия B_q действует на η^{n-1} тождественно.

Все $q-1$ расслоений σ_p^{2n-2} , $1 \leq p \leq q-1$, изоморфны расслоению σ^{2n-2} , индуцированному отображением π из касательного расслоения $\tau = \tau^{2n-2}$ многообразия $G(2, n-1)$:

$$\begin{array}{ccc} \pi^* TG(2, n-1) & \xrightarrow{\tau^* \pi} & TG(2, n-1) \\ \downarrow \sigma^{2n-2} := \pi^* \tau^{2n-2} & & \downarrow \tau = \tau^{2n-2} \\ V(2, n-1) \cong B_q & \xrightarrow{\pi} & G(2, n-1) \cong \Delta_q \end{array}$$

Для того чтобы описать действие $\mathbb{Z}_q$ на σ_p^{2n-2} , заметим, что двулистное накрытие $\tilde{G}(2, n-1)$ многообразия $G(2, n-1)$, состоящее из ориентированных двумерных подпространств в $\mathbb{R}^{n+1}$, обладает естественной комплексной структурой; тем самым можно определить действие группы $\mathbb{Z}_q$ на $T\tilde{G}(2, n-1)$, считая, что образующая группы действует как умножение на $e^{2\pi i p/q}$. Тогда индуцированное действие на $TG(2, n-1)$ будет действием $\mathbb{Z}_q$ на σ_p^{2n-2} .

4.1.7. Теорема. *Отрицательное расслоение π_q^- над $\Delta_q = \pi B_q$ имеет вид*

$$\pi_q^-/\mathbb{Z}_q = \xi^{n-1} \oplus (\tau_1^{2n-2} \oplus \dots \oplus \tau_{q-1}^{2n-2})/\mathbb{Z}_q.$$

Здесь ξ^{n-1} — каноническое $(n-1)$ -мерное расслоение над $\Delta_q \cong \cong G(2, n-1)$. Все τ_p^{2n-2} , $1 \leq p \leq q-1$, изоморфны касательному расслоению τ_p^{2n-2} многообразия $G(2, n-1)$, причем образующая группы $\mathbb{Z}_q$ действует на τ_p^{2n-2} как умножение на $e^{2\pi i p/q}$.

Следовательно, гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ пространства $\Pi^* q S^n \bmod \Pi^* q^- S^n$ определяются следующим образом. Пусть $q = 2^{q_0} q_1$, где q_1 нечетно.

Если $q_0 = 0$, т. е. q нечетно, то

$$H_*(N_m^-/S, \partial N_m^-/S) = \tilde{H}_{*-(2q-1)(n-1)}(G(2, n-1));$$

если $q_0 > 0$, то

$$H_*(N_m^-/S, \partial N_m^-/S) = \bigoplus_{i=(2q_1-1)(n-1)+?}^{(2q-1)(n-1)} \tilde{H}_{*-i}(G(2, n-1)).$$

Доказательство. Теорема следует из 4.1.2 и 4.1.4. $\square$

В качестве дальнейшего применения 4.1.4 докажем теорему Фета [3]. В § 4.3 мы докажем обобщение теоремы Фета.

4.1.8. Теорема. *Пусть M — компактное риманово многообразие.*

(i) *Если фундаментальная группа $\pi_1 M$ не является конечной, то на M существуют по крайней мере две однократные замкнутые геодезические.*

(ii) *Пусть $\pi_1 M$ конечна и все замкнутые геодезические *) невырождены. Тогда на компактном универсальном накрытии $\tilde{M}$ существуют по крайней мере две однократные замкнутые геодезические, индексы которых равны k_0 и $k_0 + 1$, причем $k_0 + 1 \leq k + 1$, где число $k + 1 \geq 2$ равно размерности первой ненулевой гомотопической группы многообразия M . Эти две геодезические проектируются на такие две замкнутые геодезические многообразия M , что соответствующие однократные замкнутые геодезические различны.*

*) В том числе и кратные.

Доказательство. Сначала предположим, что универсальное накрытие $\tilde{M}$ многообразия M стягиваемо. (Тогда, в частности, фундаментальная группа $\pi_1 M$ бесконечна.) Фет [2] утверждает, что в этой ситуации существуют две замкнутые геодезические. Однако сейчас мы не можем предложить доказательства этого утверждения. Мы можем лишь перечислить несколько фактов, которые делают весьма правдоподобным предположение о том, что наличие только одной замкнутой геодезической ведет к противоречию. Очевидно, из этого предположения следует существование такого элемента $\alpha \in \pi_1 M$, что каждый элемент из $\pi_1 M$ сопряжен некоторой степени α . Теперь можно вывести, что $\pi_1 M$ не имеет элементов конечного порядка и что ее первое число Бетти равно нулю ⁽⁵⁶⁾.

Теперь предположим, что группа $\pi_1 M$ бесконечна и что универсальное накрытие $\tilde{M}$ не стягиваемо. Тогда существует такое наименьшее $k+1$, $2 \leq k+1 \leq n = \dim M$, что $\pi_{k+1} M \neq 0$. С помощью гомотопически нетривиального отображения $f: S^{k+1} \rightarrow M$ мы, так же как и в 2.1.8, построим гомотопную нулю замкнутую геодезическую на M . Нетривиальный элемент бесконечного порядка группы $\pi_1 M$ порождает вторую замкнутую геодезическую ⁽⁵⁷⁾. Однократные замкнутые геодезические, соответствующие этим двум геодезическим, должны отличаться друг от друга, так как никакое повторение второй геодезической не будет гомотопно нулю.

Пусть теперь $\pi_1 M = 0$. Первая нетривиальная гомотопическая группа появляется в размерности $k+1$, $2 \leq k+1 \leq n = \dim M$. Из 2.1.6 или 2.1.8 следует, что в этой ситуации существует невырожденная замкнутая геодезическая c индекса k^* .

Возьмем замкнутые геодезические с наименьшим индексом — пусть он равен k_0 — и среди них возьмем замкнутую геодезическую c_0 с наименьшим E -уровнем x_0 . Тогда c_0 будет однократной геодезической и $k_0 \leq k$. Отрицательный диск $D^-(\tilde{\pi}c_0)$ в точке $\tilde{\pi}c_0 \in \tilde{P} = \tilde{P}M$ находится во взаимно однозначном соответствии с отрицательным диском $D^-(c_0)$ в точке $c_0 \in \Lambda M$, накрывающей $\tilde{\pi}c_0$.

Как видно из § 2.5 **), диск $D^-(\tilde{\pi}c_0)$ (сильно неустойчивое многообразие) представляет нетривиальный k_0 -мерный цикл пространства $\tilde{P}^{x_0} \bmod \tilde{P}^{x_0-}$.

^{*}) Или $k-1$. (Если в ΛM φ -семейство носителей циклов, принадлежащих ненулевому классу гомологий из $H_k(\Lambda M; \mathbb{Z}) = \pi_k(\Lambda M)$, «повисает» на $S.c$, то в понятных обозначениях, должно быть

$$H_k(D\mu^-(S.c), \partial D\mu^-(S.c); \mathbb{Z}) \neq 0,$$

а это возможно только при указанных двух значениях индекса.) Впрочем, в дальнейшем не играет роли, каков индекс c .

^{**}) Или из описания деформации $\tilde{P}^{x_0}$ в $D^-(\tilde{\pi}c_0) \cup \tilde{P}^{x_0-e}$ (§ 2.4 для Λ и эквивариантность).

Рассмотрим вложение

$$(*) \quad (\tilde{\Pi}^{k_0}, \tilde{\Pi}^{k_0-}) \hookrightarrow (\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi}^{k_0-}).$$

▲ Допустим сначала, что при этом вложении цикл $D^-(\tilde{\pi}c_0)$ переходит в нуль. Рассмотрим $\tilde{\psi}$ -семейство, порожденное «пленками», «заклеивающими» этот цикл в $\tilde{\Pi}$. Оно должно повисать на некоторой критической точке $\tilde{\pi}c_1^m \in \tilde{\Pi}$ (где c_1 — однократная), для которой ввиду 4.1.3 в обозначениях из 4.1.6

$$(**) \quad H_{k_0+1}(D_{c_1^m} \mu_m^- / \mathbb{Z}_m, \partial D_{c_1^m} \mu_m^- / \mathbb{Z}_m) \neq 0.$$

Пусть теперь при вложении $(*)$ цикл $D^-(\tilde{\pi}c_0)$ не переходит в нуль. Тогда, в частности, $k_0 > 0$, ибо при $k_0 = 0$, очевидно, $D^-(\tilde{\pi}c_0) = \tilde{\pi}c_0$ и ввиду связности $\tilde{\Pi}$ этот случай является частным случаем рассмотренного выше. ▲ Покажем, что существует гомотопия h^* , переводящая цикл $D^-(\tilde{\pi}c_0)$ в $D^-(\theta\tilde{\pi}c_0)$. Для этого прежде всего заметим, что отрицательный цикл $D^-(c_0)$ в точке $c_0 \in \Lambda M$ может быть получен в духе § 2.1 (особенно см. 2.1.7) с помощью отображения $f: S^{k_0+1} \rightarrow M$, которое определяет такое отображение

$$f^* = \Lambda f \circ \delta^{k_0}: (D^{k_0}, \partial D^{k_0}) \rightarrow (\Lambda M, \Lambda^0 M),$$

что $f^* D^{k_0} = D^-(c_0)$. При этом центр m_0 диска D^{k_0} соответствует точке c_0 , а соседние точки переходят в элементы сильно неустойчивого многообразия (⁵⁸).

Рассмотрим D^{k_0} как полуэкватор сферы S^{k_0+1} и фиксируем два касательных к S^{k_0+1} в точке m_0 ортонормальных вектора (e_1, e_2) , один из которых ортогонален D^{k_0} . Рассмотрим вращение, которое переводит (e_1, e_2) в $(-e_1, -e_2)$. Оно определяет гомотопию h отображения δ^{k_0} в $-\theta\delta^{k_0}$, которую мы рассматриваем как цепь в ΛS^{k_0+1} . Положим $h^* = \Lambda f \circ h$.

▲ Таким образом, помимо однократной замкнутой геодезической c_0 индекса k_0 всегда существует однократная замкнутая геодезическая c_1 , для которой при некотором $m \geq 1$ выполняется (**). Но индекс $c_1 \geq k_0$. Если он равен k_0 , то $H_{k_0+1} = 0$ ввиду 4.1.6 (ii). Значит, индекс $c_1 \geq k_0 + 1$. Индекс c_1^m ввиду 4.1.4 может равняться только $k_0 + 1$, поэтому окончательно заключаем, что индекс $c_1 = k_0 + 1$.

Итак, мы имеем две однократные замкнутые геодезические двух различных индексов k_0 и $k_0 + 1$, так что они не могут сводиться друг к другу под действием $O(2)$. ▲

Наконец, рассмотрим случай $\pi_1 M < \infty$. Тогда универсальное накрытие $\tilde{M}$ многообразия M компактно, и на нем существуют две однократные замкнутые геодезические $\tilde{c}_0$ и $\tilde{c}_1$, индексы кото-

рых равны соответственно k_0 и $k_0 + 1$. Замкнутая геодезическая c_0 должна получаться при накрытии из какой-то замкнутой геодезической многообразия M . Последняя может и не быть однократной; пусть она есть некая c_0^m , где c_0 уже однократна. Другие накрытия c_0^m получаются из $\tilde{c}_0$ под действием скользящих. Все они имеют индекс k_0 . Ясно, что любые другие кратные повторения c_0 (с кратностью $\neq m$) при накрытии не дадут однократной замкнутой геодезической на $\tilde{M}$ — они либо не будут замыкаться при накрытии, либо дадут некоторые кратные повторения $\tilde{c}_0$ или одного из образов $\tilde{c}_0$ под действием скользящих.

Аналогично, $\tilde{c}_1$ получается при накрытии некоторого кратного повторения c_1^n некоторой однократной замкнутой геодезической c_1 на M , причем все другие накрытия c_1^n имеют, как и $\tilde{c}_1$, индекс $k_0 + 1$, а другие кратные повторения c_1 (с кратностью $\neq n$) при накрытии вообще не дают однократных замкнутых геодезических. Очевидно, из сказанного следует, что $c_0 \neq c_1$. $\square$

Замечание. Гомотопия, которую мы использовали в доказательстве этой теоремы, будет играть важную роль при доказательстве обобщения 5.1.1 теоремы Фета.

4.2. Теорема Громола — Мейера

В этом параграфе мы изложим несколько упрощенное доказательство слегка усиленного варианта теоремы Громола — Мейера: если существует такое простое поле, для которого последовательность чисел Бетти многообразия ΛM не ограничена, то на многообразии M есть бесконечно много однократных замкнутых геодезических.

Решающим шагом в доказательстве этой теоремы является следующий полулокальный результат о последовательности c^m , $m = 1, 2, \dots$, кратных повторений замкнутой геодезической c . Допустим, что при некотором $m_0 \geq 1$ индекс $c^{m_0} > 0$ и что все $S \cdot c^m$ являются изолированными критическими множествами. Тогда для всех достаточно больших i сумма $\sum_m b_i(c^m)$, где b_i есть i -е типовое число (см. ниже), ограничена сверху не зависящей от i константой.

Пусть $c = (c(t))$ — замкнутая геодезическая кратности $m \geq 1$. Обозначим через $T'_c = T'_c \Lambda M$ подпространство коразмерности 1 пространства $T_c \Lambda M$, ортогональное к $\dot{c} \in T_c \Lambda M$. Из разложения 2.4.3 получаем ортогональное разложение

$$(*) \quad T'_c \Lambda = T_c^+ \Lambda \oplus T_c^- \Lambda \oplus T_c^0 \Lambda,$$

где $T_c^0 \Lambda = T_c^0 \Lambda \cap T_c' \Lambda$ состоит из ортогональных к δ периодических полей Якоби вдоль c .

Напомним, что, согласно § 2.4, $\text{ind } c = \dim T_c' \Lambda$, а $\text{nul } c = \dim T_c^0 \Lambda$. Мы не будем предполагать, что $\text{nul } c = 0$, т. е. что c невырождена. (Напомним, что через $\text{nul } \delta$ мы обозначаем дефект замкнутой геодезической c .)

Пусть $\mu = \mu(S, c): N \rightarrow S$ — нормальное расслоение для c (точнее, для S, c), рассматриваемое над S , т. е. расслоение, индуцированное вложением

$$S \rightarrow \Lambda, \quad z \mapsto z^{1/m} \cdot \delta,$$

где m есть кратность δ , из нормального расслоения подмногообразия S, δ , образованного S -орбитой геодезической δ (ср. с § 4.1). Заметим, однако, что здесь мы не предполагаем, что S, c — невырожденное критическое подмногообразие.

Пусть $\mu = \mu^+ \oplus \mu^- \oplus \mu^0$ — разложение нормального расслоения, определенное разложением (*) каждого слоя этого расслоения. Используя экспоненциальное отображение, мы можем отождествить пространство расслоения $D = D(S, c)$ на достаточно малые диски D_μ расслоения μ с открытой окрестностью окружности $S \subset N$ (S вкладывается в N как нулевое сечение). Это позволяет перенести на D риманову метрику и интеграл энергии E . Действие S на D сохраняет эти величины.

Для $z \in S$ обозначим через D_z слой над z расслоения D_μ . Ограничение E на D_z будем обозначать через E_z , а градиентное поле функции E_z по отношению к индуцированной метрике — через $\text{grad } E_z$.

Однако для наших целей полезно рассматривать другую метрику на D . Пусть m — кратность геодезической δ . Определим на D новую риманову метрику, полагая

$$\langle \xi, \xi' \rangle_{m,1} := \langle \xi, \xi' \rangle_0 + \frac{1}{m^2} \langle \nabla \xi, \nabla \xi' \rangle_0.$$

Ясно, что на касательном пространстве в каждой точке $\xi \in D$ метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m,1}$ эквивалентна метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. При такой замене метрики индекс и дефект геодезической c останутся неизменными.

Градиентное поле функции E_z по отношению к метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m,1}$ будем обозначать через $\text{grad}_m E_z$. Для каждого $\xi \in N$ через $T_\xi N \subset T_\xi N$ будем обозначать касательное к слою подпространство касательного пространства.

4.2.1. Предложение. Пусть c — замкнутая геодезическая дефекта $l \geq 0$ и кратности $m \geq 1$. Используя ранее введенные понятия, положим $\mu^+ \oplus \mu^- = \mu^*$, так что $\mu = \mu^* \oplus \mu^0$ и размерность слоя $\mu^0 = l$. Обозначим через 0 нулевое сечение расслоения μ ,

а через D_- — тотальное пространство расслоения на диски, ассоциированного с расслоением μ , где $\sim \in \{-, 0, +, *\}$.

Утверждение. Существует локальное эквивариантное вложение^{*})

$$W_{ca}: (D_0, 0_{D_0}) \rightarrow (D, 0_D),$$

которое характеризуется следующими свойствами:

$$T'_{0_z} W_{ca} = T'_{0_z} D_0 = (\mu^0)^{-1}(z)$$

и вектор $\text{grad}_m E_z(W_{ca}(\xi_0)) \in T'_{W_{ca}(\xi_0)} D$ параллелен слою $(\mu^0)^{-1}(z)$.

Кроме того, существуют такой локальный эквивариантный диффеоморфизм ψ тотального пространства D и такое сечение $z \mapsto P_z$, $z \in S$, $P_z \in L(\mu^*; \mu^*)$, где P_z — ортогональная послойная проекция, что при $(\xi, \xi_0) \in D_* \oplus D_0$

$$E_z \cdot \psi(\xi, \xi_0) = \|P_z \xi\|_{m,1}^2 - \|(\text{id} - P_z) \xi\|_{m,1}^2 + E_z \cdot W_{ca}(\xi_0),$$

где $z = \mu^*(\xi) = \mu^0(\xi_0)$, $\dim \ker P_z = \text{ind } c = \text{размерность слоя } \mu^-$.⁽⁵⁹⁾

Замечание. Предложение 4.2.1 было доказано Громолом и Мейером [1]. Оно является видоизменением для случая гильбертова пространства (основывающимся на данном Пале доказательстве обобщенной леммы Морса 2.4.8) более точного результата Тома [1], который также доказал единственность (с точностью до сопряжения) вырожденной части $E_z \cdot W_{ca}: D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ функции E_z . Мы будем называть W_{ca} *характеристическим многообразием в точке c* , а если нужно специально указать, что речь идет о характеристическом многообразии в этой именно точке, то будем писать $W_{ca}(c)$.

Доказательство. Определим локальное послойное отображение $\lambda: D_* \oplus D_0 \rightarrow D_* \oplus D_0$, полагая

$$\lambda(\eta, \xi_0) = \text{pr}_1 \text{grad}_m E_z(\eta, \xi_0) + \xi_0,$$

где pr_1 — послойная проекция $\mu = \mu^* \oplus \mu^0 \rightarrow \mu^*$. Мы утверждаем, что в

$$D\lambda(0_z) = D(\text{pr}_1 \text{grad}_m E_z)(0_z) + \text{id}_{\mu_0}(0_z)$$

первое отображение обратимо. В самом деле, заметим, что при достаточно малых $\|\eta\|_{m,1}$ и $\|\xi_0\|_{m,1}$ произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m,1}$ в $T'_{(\eta, \xi_0)} \mu$ может быть приближено произведением в $T'_{0_z} D = \mu^{-1}(z)$.

^{*}) Его образ тоже обозначается через W_{ca} (аналогично тому, как это было в § 2.5 для устойчивого и неустойчивого многообразий), так что надо быть внимательным к контексту. Ниже принято

$$T'_{0_z} W_{ca} = T_{0_z} W_{ca} \cap T'_{0_z} N$$

и аналогично для $T'_{0_z} D_0$.

Отсюда с учетом невырожденности билинейной формы

$$\langle D \operatorname{grad}_m E_z(0_z) \cdot \eta', \eta \rangle_{m,1} = D^2 E_z(0_z) \cdot (\eta, \eta'),$$

где $\eta, \eta' \in (\mu^*)^{-1}(0)$, следует наше утверждение.

Таким образом, λ — локально обратимое послонное отображение. Положим $\lambda^{-1}(\xi_0) = W_{ca}(\xi_0)$. Тогда $DW_{ca}(0_z) = \operatorname{id}_{\mu^0}(0_z)$. Кроме того, $\operatorname{pr}_1 \operatorname{grad}_m E_z(W_{ca}(\xi_0)) = \operatorname{pr}_1 \operatorname{grad}_m E_z(\lambda^{-1}(\xi_0)) = \lambda \cdot \lambda^{-1}(\xi_0) = \xi_0 = 0$.

Теперь для $(\eta, \xi_0) \in D_{*,z} \oplus D_{0,z}$ положим $\rho(\eta, \xi_0) = (\eta, 0) + W_{ca}(\xi_0)$ и

$$F_z(\eta, \xi_0) := E_z \circ \rho(\eta, \xi_0) - E_z \circ W_{ca}(\xi_0).$$

Обозначим через D^*F_z ограничение дифференциала DF_z на подпространство, параллельное $\mu^* \subset \mu^* \oplus \mu^0 = \mu$. Имеем

$$F_z(\eta, \xi_0) = \int_0^1 (1-t) D^{*2} F_z(t\eta, \xi_0) \cdot (\eta, \eta) dt.$$

Определим билинейные формы $h_z(\eta, \xi_0)$ на $T'_z D_*$, полагая

$$h_z(\eta, \xi_0) \cdot (\xi_1, \xi_2) := \int_0^1 (1-t) D^{*2} F_z(t\eta, \xi_0) \cdot (\xi_1, \xi_2) dt.$$

Затем с помощью соотношения

$$\langle k_z(\eta, \xi_0) \cdot \xi_1, \xi_2 \rangle_{m,1} = h_z(\eta, \xi_0) \cdot (\xi_1, \xi_2)$$

определим самосопряженные операторы $k_z(\eta, \xi_0)$ на $T'_z D_*$. Оператор $k_z(0, 0)$ обратим. Поэтому, так же как в доказательстве 2.4.7, мы можем определить $m_z(\eta, \xi_0) := \sqrt{k_z(\eta, \xi_0) k_z(0, 0)^{-1}}$ и в результате получить

$$\begin{aligned} F_z(\eta, \xi_0) &= \langle k_z(\eta, \xi_0) \cdot \eta, \eta \rangle_{m,1} = \\ &= \langle k_z(0, 0) m_z(\eta, \xi_0) \cdot \eta, m_z(\eta, \xi_0) \cdot \eta \rangle_{m,1}. \end{aligned}$$

$W_{ca}(\xi_0)$ можно записать в виде $(\eta(\xi_0), \xi_0)$. Положим $\eta' = \eta - \eta(\xi_0)$, так что $(\eta, \xi_0) = \rho(\eta', \xi_0)$. Определим φ' , полагая для $(\eta, \xi_0) \in D_{*,z} \oplus D_{0,z}$

$$\varphi'^{-1}: (\eta, \xi_0) \mapsto (\xi', \xi_0), \quad \xi' := m_z(\eta', \xi_0) \cdot \eta' \in D_{*,z}.$$

Тогда, как видно из сказанного,

$$\begin{aligned} E_z \circ \varphi'(\xi', \xi_0) &= E_z(\eta, \xi_0) = E_z \circ \rho(\eta', \xi_0) = \\ &= \langle k_z(0, 0) \xi', \xi' \rangle_{m,1} + E_z \circ W_{ca}(\xi_0). \end{aligned}$$

Поскольку оператор $k_z(0, 0)$ представляет $D^{*2} E_z(0_z)$, мы можем завершить доказательство предложения 4.2.1 так же, как и в 2.4.8. $\square$

Заметим, что все приведенные конструкции эквивариантны.

4.2.2. Следствие. Пусть выполнены условия предложения 4.2.1 и, кроме того, множество критических точек S с изолировано. Тогда $0_z \in D_z$ является изолированной критической точкой функции $E_z: D_z \rightarrow \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $\xi \in D_z$ — критическая точка функции E_z , т. е. вектор $\text{grad}_m E(\xi) \in T_\xi D$ ортогонален D_z (в смысле $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m,1}$ -метрики). Согласно 1.4.13, существует такое векторное поле u , что $u(z.c) = \partial(z.c)$, т. е. $u(z.c)$ ортогонально $T_{0_z} D_z$, и $\langle u, \text{grad} E \rangle_1 = 0$. Мы можем построить векторное поле u_m , обладающее теми же свойствами, но уже для метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m,1}$. Таким образом, при достаточно малом $\|\xi\|_{m,1}$ вектор $u_m(\xi) \neq 0$ «почти ортогонален» подпространству $T'_\xi D$ коразмерности 1. Из того, что $\text{grad}_m E(\xi)$ ортогонален и этому подпространству, и $u_m(\xi)$, заключаем, что $\text{grad}_m E(\xi) = 0$. Ввиду изолированности S с это (при достаточно малых ξ) возможно лишь при $\xi = 0_z$. $\square$

Предложение 4.2.1 приводит нас к рассмотрению следующей ситуации. Пусть $D_+ \oplus D_- \oplus D_0$ — сумма трех гильбертовых дисков, $\dim D_+ = \infty$, $\dim D_- = k < \infty$, $\dim D_0 = l < \infty$. Обозначим эту сумму через B . Пусть на B задана такая риманова метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, что разложение $D_+ \oplus D_- \oplus D_0 \subset T_{0_B} B$ в «начале координат» — точке $0_B = (0_{D_+}, 0_{D_-}, 0_{D_0})$ — ортогонально.

Кроме того, пусть на B задана дифференцируемая функция

$$E(\xi) = \|\xi_+\|^2 - \|\xi_-\|^2 + E_0(\xi_0),$$

где $\xi = (\xi_+, \xi_-, \xi_0)$, а $\|\cdot\|_1$ — норма, порожденная метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ в точке 0_B . Пусть, далее, точка 0_B является изолированной критической точкой функции E , а точка $0_{D_0} \in D_0$ «полностью вырожденна» и $E_0(0_{D_0}) = 0$, т. е.

$$E_0(0_{D_0}) = DE_0(0_{D_0}) = D^2 E_0(0_{D_0}) = 0.$$

Наконец, будем предполагать, что градиентное поле функции E относительно римановой метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ удовлетворяет условию (C) из § 1.4.

Обозначим через $\varphi_s \xi$ интегральную кривую с началом в точке ξ поля $-\text{grad} E$.

Для каждого подмножества $A \subset B$ определим множества

$$A^0 := A \cap E^{-1}([-\infty, 0]), \quad A^0 := A \cap E^{-1}([-\infty, 0])$$

и обозначим через B_ε ε -шар с центром в точке $0_B \in B$.

4.2.3. Лемма. Существует такая фундаментальная система окрестностей Z_ε точки $0_B \in B$, что $B_\varepsilon^0 \subset Z_\varepsilon$ и существует деформация пары $(Z_\varepsilon, B_\varepsilon^0)$, которая слабо ретрагирует ее

в $(0_B \cup B_e^0, B_e^-)$ и при которой точка 0_B остается неподвижной. Следовательно,

$$H_*(Z_e, B_e^0) = H_*(0_B \cup B_e^0, B_e^-)$$

— локальный инвариант.

Здесь в качестве коэффициентов мы выбираем произвольное простое поле $\mathbb{Z}_p$, т. е. p — простое число или ∞ и $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Q}$ = поле рациональных чисел.

Существует деформация пары $(0_B \cup B_e^0, B_e^-)$, слабо ретрагирующая ее в $(0_B \cup (D_0 \oplus D_-)^0, (D_0 \oplus D_-)^0)$, а последняя пара гомологически эквивалентна произведению пары $(0_B \cup D_0^0, D_0^-)$ с относительным диском $(D_-, D_-^0) = (D_-^0, D_-^0)$. Таким образом, при $k = \dim D_-$

$$(\dagger) \quad H_*(0_B \cup B_e^0, B_e^-) = H_{*-k}(0_{D_0} \cup D_0^0, D_0^-).$$

Кроме того, все фигурирующие здесь группы гомологий конечно порождены; они обращаются в нуль во всех достаточно больших размерностях.

Замечание. Размерность векторного пространства $H_i(0_B \cup B_e^0, B_e^-; \mathbb{Z}_p)$ называется i -м типовым числом $(\bmod \mathbb{Z}_p)$ функции $E: (B, 0_B) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ в точке 0_B и обозначается через $b_i(0_B)$. Аналогично i -е особое типовое число $(\bmod \mathbb{Z}_p)$ функции E в точке 0_B определяется как размерность $H_i(0_{D_0} \cup D_0^0, D_0^-; \mathbb{Z}_p)$. Его мы обозначим через $b_i^0(0_{D_0})$. Используя эти понятия, можно сформулировать такое следствие.

4.2.4. Следствие. Имеем

$$b_{i+k}(0_B) = b_i^0(0_{D_0}),$$

где k — индекс критической точки 0_B функции $E: (B, 0_B) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$.

Замечание. Наше доказательство отличается от доказательства, данного Громом и Мейером [1] для весьма похожего результата, тем, что мы близко следуем Зейферту и Трельфаллю [1]. Формула $(\dagger)$ есть так называемая теорема о сдвиге из работы Громола и Мейера [1]. Мы докажем эту формулу, используя тот факт, что в гомологиях пары происходит сдвиг размерностей на $+k$, когда пара умножается на пару (k -мерный диск, край k -мерного диска).

Доказательство. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ определим Z_ε следующим образом. Во-первых, $B_\varepsilon^0 \subset Z_\varepsilon$. Кроме того, в Z_ε входят еще те $\xi \in B_\varepsilon$, которые удовлетворяют условию $0 \leq E(\xi) \leq \varepsilon$ и обладают одним из следующих двух свойств:

- (i) $\lim \varphi_s \xi = 0_D$;
- (ii) существует такое конечное $s \geq 0$, что $\varphi_s \xi \in B_\varepsilon \cap E^{-1}(0)$.

Сначала мы покажем, что Z_e действительно является окрестностью точки $0_B \in B$. В самом деле, в противном случае должна существовать такая последовательность $\{\xi_m\}$, что $\xi_m \notin Z_e$, $\lim \xi_m = 0_B$ и $E(\xi_m) > 0$.

Мы утверждаем, что при всех достаточно больших m траектория $\varphi_s \xi_m$, $s \geq 0$, пересекает границу шара B_e и притом в такой точке η_m , что $E(\eta_m) \geq 0$. Действительно, в противном случае ввиду того, что $\xi_m \notin Z_e$, мы имели бы $E(\varphi_s \xi_m) \geq 0$ и $\varphi_s \xi_m \in B_e$ при всех $s \geq 0$. Тогда $\|\text{grad } E(\varphi_s \xi_m)\|_1 \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$ *). Так как 0_B — единственная критическая точка в B_e , то отсюда будет следовать, что $\varphi_s \xi_m = 0_B$. А это противоречит тому, что $\xi_m \notin Z_e$.

Так как $E(\xi_m) > E(\eta_m) \geq 0$ и $\lim \xi_m = 0_B$, то $\lim E(\eta_m) = 0$. С другой стороны, для всех $\eta \in B_e - B_{e/2}$ величина $\|\text{grad } E(\eta)\|_1$ отделена от нуля, а время, за которое траектория может прийти от границы $B_{e/2}$ до границы B_e , равномерно ограничено снизу ввиду 1.4.10 (ii). Поэтому при достаточно больших m , при которых $E(\xi_m)$ близко к 0, функция E настолько уменьшится вдоль проходящего через $B_e - B_{e/2}$ отрезка траектории $\varphi_s \xi_m$, который начинается в точке ξ_m и кончается в точке η_m , что станет отрицательной.

Следовательно, Z_e действительно является окрестностью точки 0_B . Так как $Z_e \subset B_e$ и так как B_e образуют фундаментальную систему окрестностей точки $0_B \in B$, то окрестности Z_e также образуют фундаментальную систему окрестностей.

Определим теперь деформацию Φ_τ ($0 \leq \tau \leq 1$) тройки $(Z_e, Z_e^0, 0_B)$, ретрагирующую последнюю в $(0_B \cup Z_e^0, Z_e^0, 0_B)$. Точки $\xi \in Z_e^0 = B_e^0$ остаются при этой деформации неподвижными. Для каждой точки $\xi \in Z_e$, для которой $E(\xi) > 0$, существует такое первое $s \geq 0$ (возможно, $s = \infty$), что $E(\varphi_s \xi) = 0$. Положим теперь $\Phi_\tau \xi$ равным $\varphi_{s(\tau)} \xi$, где $s(\tau) \geq 0$ определяется из условия $E(\varphi_{s(\tau)} \xi) = (1 - \tau)E(\xi)$. Таким образом, $\Phi_1 \xi \in Z_e^0$.

Докажем, что Φ_τ действительно является деформацией. В специальном рассмотрении нуждается только непрерывность в точках $(\xi, \tau) = (\xi_0, 1)$, для которых $\Phi_1 \xi_0 = 0_B$. В остальных точках непрерывность, по существу, следует из непрерывной зависимости $\varphi_s \xi$ от (ξ, s) . Рассмотрим такую последовательность $\{\xi_m\}$ из Z_e , что

*1) Если бы для некоторого ξ_m существовала такая последовательность $s_n \rightarrow \infty$, что $\|\text{grad } E(\varphi_{s_n} \xi_m)\|_1^2 > a > 0$, то существовало бы такое $\delta > 0$, что

$\|\text{grad } E(\varphi_s \xi_m)\|_1^2 > a/2$ при всех $s \in [s_n - \delta, s_n + \delta]$, и оттого $\int_0^\infty \|\text{grad } E(\varphi_s \xi_m)\|_1^2 ds =$

$= \infty$, а это противоречило бы 1.4.10 (i). Существование δ следует из того, что а) $\varphi_s \xi_m$ как функция от s удовлетворяет условию Липшица (см. 1.4.10 (ii)); б) $\|\text{grad } E(\varphi_s \xi)\|_1^2$ в B_e при достаточно малом ε удовлетворяет условию Липшица, ибо ковариантная производная поля $\text{grad } E(\xi)$ непрерывна и потому при достаточно малом ε ограничена в B_e .

$E(\xi_m) > 0$, и такую последовательность $\{\tau_m\}$ из $[0, 1]$, что $\lim \tau_m = 1$. Мы должны показать, что $\lim \Phi_{\tau_m} \xi_m = \Phi_1 \xi_0 = 0_B$.

Допустим противное. Нетривиален лишь случай, когда бесконечное число $E(\xi_m) > 0$. Перейдя, если потребуется, от последовательности $\{\xi_m, \tau_m\}$ к некоторой ее подпоследовательности, которую мы снова обозначим через $\{\xi_m, \tau_m\}$, можем считать, что все $E(\xi_m) > 0$ и что существует такое $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon' \leq \varepsilon$, что $\Phi_{\tau_m} \xi_m \notin Z_{\varepsilon'} \cap E^{-1}(0)$. Но тогда и $\Phi_{1-\varepsilon'} \xi_m \notin Z_{\varepsilon'}$, в то время как $\lim \Phi_{1-\varepsilon'} \xi_m = \Phi_{1-\varepsilon'} \xi_0 \in Z_{\varepsilon'}$.

Ясно далее, что вслед за деформацией Φ_τ , $0 \leq \tau \leq 1$, можно выполнить деформацию Φ_τ , $1 \leq \tau \leq 2$, осуществляющую слабую ретракцию $(0_B \cup B_\varepsilon^0, B_\varepsilon^0)$ в $(0_B \cup B_\varepsilon^{0-}, B_\varepsilon^{0-})$ и оставляющую 0_B на месте.

Наконец, деформация Φ_τ , $2 \leq \tau \leq 3$,

$$\xi = (\xi_+, \xi_-, \xi_0) \mapsto ((3-\tau)\xi_+, \xi_-, \xi_0), \quad \xi, \Phi_\tau(\xi) \in B_\varepsilon,$$

переводит $(0_B \cup B_\varepsilon^{0-}, B_\varepsilon^{0-})$ в $(0_B \cup (D_- \oplus D_0)^{0-}, (D_- \oplus D_0)^{0-})$.

▲ Докажем, что тождественное вложение произведения *)

$$(0_{D_0} \cup D_0^{0-}, D_0^{0-}) \times (D_-, D_-^{0-}) = ((0_{D_0} \times D_0^{0-}) \times D_-, \text{ то же без точки } 0_B)$$

в пару $(0_B \cup (D_0 \oplus D_-)^{0-}, (D_0 \oplus D_-)^{0-})$ индуцирует изоморфизм в гомологиях. Для этого мы определим некоторую деформацию Ψ_τ последней пары, слабо ретрагирующую ее в первую пару. Ψ_τ не меняет ξ_- -компонент и $\Psi_\tau(\xi_0, \xi_-)$ при любом фиксированном ξ_- получается с помощью некоторого (зависящего от ξ_0, ξ_-) сдвига ξ_0 по траектории градиентной системы в D_0 , соответствующей функции $E_0(\xi_0)$. Тем самым (+) доказано. ▲

Для окончания доказательства 4.2.3 нам осталось показать, что пространство $H_*(0_0 \cup D_0^{0-}, D_0^{0-}; Z_p)$ имеет конечный базис. Для этого прежде всего заметим, что, как видно из предыдущих рассуждений,

$$H_*(0_0 \cup D_0^{0-}, D_0^{0-}) = H_*(Z_{0,\varepsilon}, Z_{0,\varepsilon}^{0-}) = H_*(Z_{0,\varepsilon}, Z_{0,\varepsilon}^0).$$

Здесь $0 < \delta \leq \varepsilon$ и $Z_{0,\varepsilon}$ — окрестность точки $0_0 \in D_0$, которая задается так же, как определенная выше окрестность Z_ε , но уже с использованием функции $E_0 := E|_{D_0}$ и индуцированной римановой метрики на D_0 . Верхний индекс $-\delta$ обозначает, что берется подмножество, удовлетворяющее соотношению $E_0 \leq -\delta$.

Теперь воспользуемся известным утверждением (см. Зейферт, Трельфалль [1]) о том, что функция $E_0: (D_0, 0_0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ может быть аппроксимирована невырожденной функцией $E_0^*: (D_0, 0_0) \rightarrow$

*) При необходимости D_- , D_0 и $D_0 \times D_- = D_0 \oplus D_-$ (автор иногда употребляет знак $\times$, а иногда $\oplus$) естественным образом рассматриваются как подпространства B , так что, например, их центры («начала координат») при этом совпадают с 0_B .

$\rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, все критические точки которой находятся в малой окрестности точки 0_0 внутри области $E_0^{-1}([-\delta/2, \delta/2])$. Отсюда следует, что размерность векторного пространства гомологий пары $(Z_{0,\varepsilon}, Z_{0,\varepsilon}^0)$ ограничена сверху индексами конечного числа невырожденных критических точек функции E_0^* . $\square$

Теперь мы вернемся к случаю однократной замкнутой геодезической c_0 и предположим, что при всех $m=1, 2, \dots$ орбиты $S \cdot c_0^m$ являются изолированными множествами критических точек в ΛM . Положим $E(c_0^m) = m^2 E(c_0) = \kappa_m$. Когда m фиксировано, мы также будем вместо c_0^m писать c . Пусть $\mu = \mu(S \cdot c)$ — нормальное расслоение над S , индуцированное отображением

$$S \rightarrow \Lambda, \quad z \mapsto (z \cdot c_0)^m = z^{1/m} \cdot c_0^m,$$

и пусть

$$\mu(S \cdot c) = \mu^+(S \cdot c) \oplus \mu^-(S \cdot c) \oplus \mu^0(S \cdot c)$$

— введенное выше разложение, отвечающее знаку собственных значений.

При каждом $z \in S$ рассмотрим функцию $E_z: ((D_z(S \cdot c_0^m), 0_z(S \cdot c_0^m)) \rightarrow (\mathbb{R}, \kappa_m)$. На $D_z(S \cdot c_0^m)$ определена риманова метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m,1}$. Тогда, согласно 4.2.1, существует корректно определенная функция

$$E_{0,z} := E_z \circ W_{ca}: (D_{0,z}(S \cdot c_0^m), 0_{0,z}(S \cdot c_0^m)) \rightarrow (\mathbb{R}, \kappa_m).$$

Так как все наши построения эквивариантны по отношению к S -действию на $D(S \cdot c_0^m)$, то группы гомологий и типовые числа, получаемые в соответствии с 4.2.3 и 4.2.4, не зависят от выбора $z \in S$. Поэтому мы обозначаем их через $b_i(c_0^m)$ и $b_i^0(c_0^m)$ соответственно.

Мы можем также определить фундаментальные системы окрестностей $B_{z,\varepsilon}(c_0^m)$ и $Z_{z,\varepsilon}(c_0^m)$ точки $0_z(c_0^m)$. Объединения этих окрестностей по всем $z \in S$ будут обозначаться соответственно через $B_\varepsilon(S \cdot c_0^m)$ и $Z_\varepsilon(S \cdot c_0^m)$. Эти объединения суть S -инвариантные окрестности нулевого сечения $0(S \cdot c_0^m)$ расслоения $\mu(S \cdot c_0^m)$. Их можно рассматривать и как тотальные пространства расслоения над S , являющегося ограничением расслоения $\mu(S \cdot c_0^m): N(S \cdot c_0^m) \rightarrow S$ на окрестность сечения $0(S \cdot c_0^m)$.

Из 4.2.3 следует, что пара $(Z_\varepsilon(S \cdot c_0^m), B_\varepsilon(S \cdot c_0^m)^{\kappa_m-})$ может быть эквивариантно ретрагирована в $(0(S \cdot c_0^m) \cup B_\varepsilon(S \cdot c_0^m)^{\kappa_m-}, B_\varepsilon(S \cdot c_0^m)^{\kappa_m-})$. Обозначим через $b_i(S \cdot c_0^m)$ размерность векторного пространства над Z_p :

$$H_i(0(S \cdot c_0^m) \cup B_\varepsilon(S \cdot c_0^m)^{\kappa_m-}, B_\varepsilon(S \cdot c_0^m)^{\kappa_m-}).$$

Число $b_i(S \cdot c_0^m)$ называется i -м типовым числом ($\text{mod } \mathbb{Z}_p$) орбиты $S \cdot c_0^m$. Ясно, что оно не зависит от выбора ε ; см. Зейферт и Трельфалль [1].

4.2.5. Лемма. Пусть c_0 — однократная замкнутая геодезическая и при каждом $m = 1, 2, \dots$ орбиты $S \cdot c_0^m$ являются изолированными критическими множествами. Рассмотрим гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$. Пусть $\kappa_m = E(c_0^m)$, $k_m = \text{индекс } c_0^m$.

Утверждение. (i) Для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ группа $H_{*+k_m}(0(S \cdot c_0^m) \cup B_\varepsilon(S \cdot c_0^m)^{\kappa_m-}, B_\varepsilon(S \cdot c_0^m)^{\kappa_m-})$ является подгруппой группы $H_*(S) \otimes H_*(c_0^m \cup B_{\varepsilon, \varepsilon}(c_0^m)^{\kappa_m-}, B_{\varepsilon, \varepsilon}(c_0^m)^{\kappa_m-})$. Следовательно,

$$b_{i+k_m}(S \cdot c_0^m) \leq b_i^0(c_0^m) + b_{i-1}^0(c_0^m).$$

(ii) Пусть $m = qm_0$, где q и m_0 — целые числа, и пусть $\text{nul } c^{m_0} = \text{nul } c^m$. Тогда $b_i^0(c_0^{m_0}) = b_i^0(c_0^m)$.

Доказательство. В (i) речь идет о сравнении гомологий пространства расслоения с гомологиями слоя. При включении слоя в тотальное пространство некоторые гомологии могут исчезнуть. Действительно, два негомологичных цикла слоя могут стать гомологичными в тотальном пространстве, если они являются границей цепи вида $e^{2\pi i r} \cdot u$, где $0 \leq r \leq l/m$ и l — целое. С другой стороны, $S \cdot u$, конечно, будет циклом в тотальном пространстве, если только u — цикл в слое. Ясно*, что других новых циклов в тотальном пространстве нет. Отсюда следует (i).

Для доказательства (ii) рассмотрим отображение

$$(\dagger)^q \quad e \mapsto e^q, \quad e \in D(S \cdot c_0^{m_0}), \quad e^q \in D(S \cdot c_0^{qm_0}), \quad qm_0 = m,$$

отождествляя при этом $D(S \cdot c^r)$ с окрестностью орбиты $S \cdot c^r$ в Λ . В метриках $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m_0, 1}$ на $D(S \cdot c_0^{m_0})$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m, 1}$ на $D(S \cdot c_0^m)$ отображение $(\dagger)^q$ является изометричным вложением. Мы утверждаем, что $\text{grad}_{m_0} E(e)$ переходит при отображении $(\dagger)^q$ в $\text{grad}_m E(e^q)$ (с точностью до постоянного множителя). В самом деле, $E(e^q) = q^2 E(e)$ и $\text{grad}_m E(e^q)$, будучи инвариантным относительно действия группы изотропии элемента e^q , касается образа $D(S \cdot c_0^{m_0})$ в $D(S \cdot c_0^{qm_0})$. Далее, $\mu^0(S \cdot c_0^{m_0})$ переходит в $\mu^0(S \cdot c_0^m)$. Таким образом, канонически определенное характеристическое подмногообразие из 4.2.1

$$W_{ca}(c_0^{m_0}): (D_0(S \cdot c_0^{m_0}), 0_0(S \cdot c_0^{m_0})) \rightarrow (D(S \cdot c_0^{m_0}), 0(S \cdot c_0^{m_0}))$$

отображается в характеристическое подмногообразие

$$W_{ca}(c_0^m): (D_0(S \cdot c_0^m), 0_0(S \cdot c_0^m)) \rightarrow (D(S \cdot c_0^m), 0(S \cdot c_0^m)).$$

*) Или, если угодно, известно.

Поэтому функция $E_0 = E \cdot W_{ca}(c_0^{m_0})$ на $D_0(S, c_0^{m_0})$ совпадает с точностью до постоянного множителя с функцией $E_0 = E \cdot W_{ca}(c_0^m)$ на $D_0(S, c_0^m)$. Это завершает доказательство (ii). $\square$

4.2.6. Предложение. Пусть c — однократная замкнутая геодезическая.

Утверждение. Существует такая последовательность $m_1, \dots, m_s$ положительных целых чисел, $s \leq 2^n$, и для каждого целого $j \in [1, s]$ существует такая строго возрастающая последовательность $\{q_{ji}; i = 1, 2, \dots\}$ положительных чисел, что множества $N_j := \{m_j q_{ji}; i = 1, 2, \dots\}$ образуют разбиение множества $N^* = N - \{0\}$ и

$$(*)_j \quad \text{nul } c^{m_j q_{ji}} = \text{nul } c^{m_j}.$$

Доказательство. Напомним, что, согласно 3.2.9, $\text{nul}(c^m) = \sum_p N_c(\rho)$, $\rho^m = 1$. В соответствии с 3.2.12 $N_c(\rho)$ — размерность корневого подпространства, отвечающего собственному значению ρ отображения Пуанкаре P , соответствующего геодезической c .

Рассмотрим собственные значения $\rho = e^{2\pi i a}$ и $\bar{\rho} = e^{-2\pi i a}$ отображения P , где $0 < a \leq 1/2$, $a = p/q$ — рациональное, p и q взаимно просты. Обозначим через D (возможно, пустое) множество знаменателей этих a . Для каждого подмножества $E \subset D$ обозначим через $m(E)$ наименьшее общее кратное всех чисел из E . В случае $E = \emptyset$ положим $m(\emptyset) = 1$. Пусть $m_1, \dots, m_s$ — множество всех различных чисел, полученных таким способом. Ясно, что $s \leq 2^n$. Далее, можно считать, что $m_1 = 1$.

Для каждого j , $1 \leq j \leq s$, рассмотрим максимальную последовательность $\{q_{ji}, i = 1, 2, \dots\}$ целых положительных чисел, такую, что ни одно из m_k при $m_k \nmid m_j$ не делит $m_j q_{ji}$.

Отсюда видно, что $(*)_j$ выполнено. Кроме того, каждое положительное целое m может быть записано в виде $m = m_j q$, где q — положительное целое, а m_j определяется тем, что оно должно быть наибольшим делителем числа m среди чисел $m_1, \dots, m_s$. $\square$

4.2.7. Предложение. Пусть c — замкнутая геодезическая, и пусть $\text{ind } c^m > 0$ при некотором $m \geq 1$.

Тогда существуют такие $\alpha > 0$ и $\beta \geq 0$, что для всех целых $m_0, m_1 \geq 1$

$$\text{ind } c^{m_0 + m_1} \geq \text{ind } c^{m_0} + m_1 \alpha - \beta.$$

Доказательство. Из предположений следует, что определенное в 3.2.15 число α_c больше нуля, так как в противном случае $I_{c,j} = 0$ при всех j и, следовательно, $I_c(\rho) = 0$ при всех ρ . Применяя затем 3.2.15, получим 4.2.7 с $\alpha = \alpha_c$ и $\beta = 2\beta_c$. $\square$

*) N — множество натуральных чисел, к которым причисляется и нуль.

Теперь мы можем доказать центральную лемму Громола и Мейера [2]. Мы предпочитаем рассматривать ее как полулокальный результат, так как в ней содержится утверждение о топологии окрестности единственной замкнутой геодезической c и всех ее кратных повторений c^m , $m = 1, 2, \dots$

4.2.8. Лемма. Пусть c — замкнутая геодезическая, и пусть все ее кратные повторения c^m , $m = 1, 2, \dots$, порождают изолированные орбиты критических точек $S \cdot c^m$. Тогда сумма $\sum_m b_i(c^m)$ i -х типовых чисел с $\mathbb{Z}_p$ -коэффициентами ограничена сверху некоторой константой $R(c)$ равномерно по всем $i \geq$ некоторого i_0 .

Доказательство. Из 4.2.6 и 4.2.5 мы знаем, что для каждого m существует такое m_i из некоторого конечного набора $\{m_1, \dots, m_s\}$, что $b_i^0(c^m) = b_i^0(c^{m_i})$. Кроме того, $b_i^0(c^{m_i}) = 0$ при всех i , больших некоторого $i(m_i)$. Пусть $i_0 = \sup_i i(m_i)$. Тогда если $i > i_0$, то $b_i^0(c^m) = 0$ при всех m . Заметим, что в случае, когда все c^m невырождены, $b_i^0(c^m) = 0$ при всех m и всех $i > 0$.

Выберем теперь $i > i_0$. Тогда или $b_i(c^m) = 0$ при всех m , или существует такое наименьшее $m_0 \geq 0$, что $b_i(c^{m_0}) > 0$. Но тогда из 4.2.5 следует, что $\text{ind } c^{m_0} > 0$, и, следовательно, существуют $\alpha > 0$ и $\beta \geq 0$, для которых выполняется 4.2.7. Поэтому если $m_1 > (i_0 + \beta)/\alpha$, то

$$\text{ind } c^{m_0+m_1} > \text{ind } c^{m_0} + i_0,$$

т. е. $b_i(c^{m_0+m_1}) = 0$. Таким образом, в сумме $\sum_m b_i(c^m)$ самое большее $[(i_0 + \beta)/\alpha + 1]$ слагаемых не равны нулю. Из 4.2.5 и 4.2.6 следует, что существует верхняя граница для $b_i(c^m)$ при всех $i > i_0$ и всех m . Тем самым получаем искомую верхнюю оценку для $\sum_m b_i(c^m)$. $\square$

Замечание. Если предположить, что все c^m , $m = 1, 2, \dots$, невырождены, то лемма становится тривиальным следствием предложения 4.2.7, которое в свою очередь непосредственно следует из формулы Ботта 3.2.9. Следовательно, в случае, когда все замкнутые геодезические на многообразии M невырождены, приводимая ниже теорема имеет очень простое доказательство.

Для удобства формулировки теоремы назовем условием $(GM)_p$ следующее условие: последовательность $\mathbb{Z}_p$ -чисел Бетти $\{b_i \Lambda M\}$ многообразия ΛM неограничена.

4.2.9. Теорема. Пусть M — компактное риманово многообразие, и пусть при некотором p выполнено условие $(GM)_p$. Тогда на M

существует бесконечно много однократных замкнутых геодезических.

Замечание. Для случая $p = \infty$, т. е. рациональных чисел Бетти, эта теорема была доказана Громолом и Мейером [2]. Отметим также, что мы не делаем никаких предположений относительно фундаментальной группы многообразия ΛM .

Доказательство. Допустим, рассуждая от противного, что существует только конечное число однократных замкнутых геодезических $c_1, \dots, c_s$ (с точностью до стандартного действия S). Из 4.2.8 мы знаем, что при фиксированном j , $1 \leq j \leq s$, и при больших i сумма $\sum_m b_i(c_j^m)$ ограничена сверху некоторой константой $R(c_j)$.

Таким образом, $R = 2 \sum_j R(c_j)$ — верхняя граница для $\sum_c b_i(S \cdot c)$, где сумма берется по всем различным S -орбитам критических точек (лежащих в $\Lambda M - \Lambda^0 M$).

Выберем теперь k так, чтобы $b_k(\Lambda M) > R$ и $k > \dim M$. Число критических орбит $S \cdot c$, для которых $b_k(S \cdot c) > 0$, конечно, поэтому существует такой не критический уровень $\kappa > 0$, что все эти орбиты принадлежат $\Lambda^* M$. Объединяя 2.1.2 и 4.2.3 с доказательством неравенств Морса 2.4.12, получаем противоречие:

$$R < b_k(\Lambda, \Lambda^e) = b_k(\Lambda^*, \Lambda^e) \leq \sum b_k(S \cdot c) \leq R,$$

где последняя сумма берется по всем критическим орбитам из $\Lambda M - \Lambda^0 M$. $\square$

Замечание. В связи с этой теоремой, естественно, возникает вопрос: какие компактные многообразия M удовлетворяют условию $(GM)_p$? Ясно, что выполнение условия $(GM)_p$ зависит только от гомотопического типа многообразия M .

Случай $p = \infty$ был исследован Виге-Пуарье и Сулливаном [1], которые дали полное описание тех M , для которых выполнено $(GM)_\infty$. Это описание составляет первую часть теоремы 4.2.10.

Напомним, что срезанное рациональное кольцо полиномов $T_{d,h}(x)$ степени d и высоты h определяется как факторкольцо $\mathbb{Q}[x]/(x^h)$ кольца $\mathbb{Q}[x]$, порожденного элементом x степени d ; см. Спеньер [1]. При $h=2$ кольцо $T_{d,h}(x)$ является кольцом когомологий сферы размерности d . При $d=2, 4$ и произвольном $h \geq 3$, соответственно при $d=8$ и $h=3$, $T_{d,h}(x)$ является кольцом когомологий одного из проективных пространств над комплексными числами, кватернионами, соответственно над числами Кэли.

4.2.10. Теорема. (i) Пусть M — односвязное компактное дифференцируемое многообразие. Тогда выполнение условия $(GM)_\infty$

эквивалентно тому, что кольцо рациональных когомологий $H^*(M, \mathbb{Q})$ не является срезанным кольцом полиномов.

(ii) Условие $(GM)_p$ не выполняется ни при каком p , если M имеет гомотопический тип одного из неприводимых симметрических пространств ранга 1.

Доказательство (i) можно найти в работе Виге-Пуарье и Сулливана [1]. В нем существенно используется теория Сулливана [1] рационального гомотопического типа; некоторые подробности можно найти в § 4.3. Утверждение (ii) следует из работы А. С. Шварца [1], в которой он вычислил целочисленные когомологии многообразия ΛM для симметрических пространств ранга 1. $\square$

Мы хотели бы подчеркнуть, что помимо симметрических пространств ранга 1 существует много других пространств, кольцо рациональных когомологий которых есть срезанное кольцо полиномов; см. также ниже 4.2.11.

Отметим также, что еще до появления работы Сулливана и Виге-Пуарье различные частные условия, выполнение которых влечет за собой выполнение $(GM)_\infty$, были найдены Клейном [1] и Саксом [1].

Сулливан [1] показал, что для каждого компактного односвязного многообразия существует такая последовательность $\{\omega_r\}$ рациональных классов когомологий пространства ΛM , что $\dim(\omega_r) = 2ar + b$, где a и b — целые, $a > 0$, $b \geq 0$, $r = 1, 2, \dots$; подробности см. в § 4.3. Отсюда можно заключить, что если M имеет гомотопический тип произведения $M' \times M''$ двух односвязных компактных многообразий M' и M'' , то M удовлетворяет $(GM)_\infty$.

Действительно, заметим, что

$$H_k \Lambda(M' \times M'') = H_k(\Lambda M' \times \Lambda M'') = \sum_i H_i \Lambda M' \otimes H_{k-i} \Lambda M''.$$

$H^* \Lambda M'$ содержит классы ω'_i размерности $2a'r + b'$, а $H^* \Lambda M''$ содержит классы ω''_j размерности $2a''r + b''$. Поэтому в размерности $k = 2a'a''m + b' + b''$ у многообразия $\Lambda(M' \times M'')$ число Бетти $\geq m + 1$, так как при $i = 2a'a''j + b'$ группы $H_i \Lambda M'$ и $H_{k-i} \Lambda M''$ содержат классы $\omega'_{ja'}$ и $\omega''_{(m-j)a''}$.

Циллер [1] определил $\mathbb{Z}_2$ -гомологии пространства ΛM для всех компактных симметрических пространств M . Как следствие этого он выяснил, что симметрические пространства, за исключением пространств ранга 1, удовлетворяют $(GM)_p$ при $p = \infty$ или при $p = 2$. Те из них, для которых выполняется $(GM)_2$, а $(GM)_\infty$ — нет, следующие:

$$SU(3)/SO(3); \quad SO(2n+1)/SO(2n-1) \times SO(2); \quad G_2/SO(4).$$

Таким образом, используя 4.2.9, Циллер [1] получил такой результат.

4.2.11. Теорема. *Если дифференцируемое многообразие M имеет гомотопический тип симметрического пространства ранга > 1 , то у любой римановой метрики на M имеется бесконечно много однократных замкнутых геодезических.* $\square$

4.3. Существование бесконечного числа замкнутых геодезических

В § 4.2 мы видели, что многие компактные дифференцируемые многообразия обладают следующим свойством: каждая риманова метрика на таком многообразии имеет бесконечное число замкнутых геодезических (см., например, 4.2.10 и 4.2.11). Однако, как показано в 4.2.10, к некоторым многообразиям, например к сферам, эти результаты неприменимы. Причина этого в том, что топологическая структура соответствующего пространства замкнутых кривых не является достаточно сложной.

В этом параграфе мы покажем, что на произвольном компактном римановом многообразии с конечной фундаментальной группой всегда существует бесконечное число однократных замкнутых геодезических (см. 4.3.5). Для этого мы воспользуемся более тонкой структурой комплекса Морса, в частности эквивариантностью по отношению к S -действию $\tilde{\chi}$ и $\mathbb{Z}_2$ -действию θ .

Основным новшеством, используемым в доказательстве, является соотношение делимости между кратностями некоторых пар замкнутых геодезических (см. лемму 4.3.4). Кроме того, в доказательстве используются классы гомологий пространства ΛM , которые были построены Сулливаном [1] с помощью его теории минимальной модели. Заметим, что в свете полученного Виге-Пуарье и Сулливаном [1] результата 4.2.10 (i) мы можем ограничиться рассмотрением односвязных компактных многообразий, рациональное кольцо когомологий которых есть срезанное кольцо полиномов. Классы Сулливана для таких многообразий особенно просты и уже были получены А. С. Шварцем [1].

Поэтому если интересоваться, например, лишь случаем сферы с произвольной римановой метрикой, с изучения которого в работе Пуанкаре [1] началась вся теория замкнутых геодезических, то можно и не знать теории минимальной модели^{*)}.

Мы начнем с формулировки основных свойств минимальной модели, уделяя при этом особое внимание геометрической интерпретации. ⁽⁶⁰⁾

Минимальная модель $\mathfrak{M}(M)$ рационального гомотопического типа односвязного счетного CW -комплекса M определяется как

^{*)} Особенно просто обстоит дело тогда, когда M — нечетномерная сфера. Как раз в этом случае программа Клингенберга всего ближе к реализации.

дифференциальная градуированная алгебра (произведение в которой мы обозначим через $\wedge$) над полем рациональных чисел, обладающая следующими свойствами:

(i) $\mathfrak{M}(M)$ — свободная алгебра (за исключением соотношений, вызванных ассоциативностью и правилами коммутирования элементов различной степени *). Векторное пространство, порожденное образующими любой данной степени k , конечномерно. Его дуальное пространство изоморфно $\pi_k(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$;

(ii) значение дифференциала d на образующей есть либо нуль, либо элемент, степень которого на единицу больше и который является полиномом от образующих строго меньшей степени;

(iii) $H^*(\mathfrak{M}(M)) = H^*(M)$ (над рациональными числами).

Имея $\mathfrak{M}(M)$, можно следующим образом построить минимальную модель $\mathfrak{M}(\Lambda M)$ рационального гомотопического типа пространства ΛM . Каждую образующую y из $\mathfrak{M}(M)$ будем считать также и образующей из $\mathfrak{M}(\Lambda M)$, причем действие дифференциала на этой образующей будет прежним. Так как $\pi_k \Lambda M = \pi_k M + \pi_k \Omega M$ и $\pi_k \Omega M = \pi_{k+1} M$ (см. 2.1.5), то остальные образующие получим, сопоставляя каждой образующей y из $\mathfrak{M}(M)$ образующую $\bar{y}$ из $\mathfrak{M}(\Lambda M)$ на единицу меньшей степени. Осталось определить дифференциал. Сначала продолжим — на все $\mathfrak{M}(M)$ как действующую справа производную, а затем определим $d\bar{y}$ как $\overline{dy}$.

Замечание. Можно интерпретировать y как дифференциальную форму, а $\bar{y} := iy$ — как форму, получающуюся при внутреннем умножении y на такое векторное поле i , что $di + id = 0$. В частности, $x \wedge y := i(x \wedge y) = ix \wedge y + (-1)^{|x|} x \wedge iy$, где $|x|$ — степень x .

Теперь мы в состоянии доказать существование так называемых классов (когомологий) Сулливана многообразия ΛM ; см. Сулливан [1].

4.3.1. Теорема. Пусть M — компактное односвязное дифференцируемое многообразие. Тогда существует такая последовательность $\{\omega^*(l; s)\}$, $s = 0, 1, \dots$, рациональных классов когомологий, где $l \geq 0$ — некоторое целое, зависящее только от M , что размерности классов $\omega^*(l; s)$ (со всевозможными s) образуют арифметическую прогрессию. Наконец, если обозначить через

$$i: (\Omega M, *) \rightarrow (\Lambda M, \wedge^0 M)$$

каноническое вложение, то $i^* \omega^*(l; s) \neq 0$.

Замечание. Если M — нечетномерная сфера S^n , то $l = 0$ и $\omega^*(0; s)$ под действием i^* переходит в $(s+1)$ -ю степень $(n-1)$ -мерного базисного класса из $H^{n-1}(\Omega S^n)$. Аналогично, если M —

*) Подразумевается свойство, называемое «косоккоммутативностью» или «коммутативностью градуированной алгебры». См. добавление к данному параграфу.

четномерная сфера, то $l=1$ и $\omega^*(1; \cdot)$ под действием i^* переходит в произведение образующей из $H^{n-1}(\Omega S^n)$ и s -й степени образующей из $H^{2n-2}(\Omega S^n)$.

В этих и в других специальных случаях (в частности, для остальных симметрических пространств ранга 1) классы Сулливана уже были рассмотрены А. С. Шварцем [1], Клейном [1] и Саксом [1].

Вместо $\omega^*(0; s)$ мы будем писать также $\omega^*(s)$.

Доказательство. Алгебра $\mathfrak{M}(M)$ должна иметь образующие нечетной степени, так как в противном случае для всех степеней y^i образующей четной степени y было бы $dy^i=0$. Но тогда размерность $H^*(M)$ была бы бесконечна — противоречие.

Пусть x — образующая минимальной нечетной степени. Тогда $dx=0$ или же dx — полином от образующих четной степени, скажем $e_1, \dots, e_l, de_j=0, 1 \leq j \leq l$. Положим

$$\begin{aligned}\omega^*(0; s) &\equiv \omega^*(s) = \bar{x}^{s+1}, & \text{если } dx=0; \\ \omega^*(l, s) &= \bar{e}_1 \wedge \bar{x}^s \wedge \bar{e}_2 \wedge \dots \wedge \bar{e}_l, & \text{в противном случае.}\end{aligned}$$

Тогда $d\omega^*=0$. Это очевидно, если $dx=0$. Если же $dx \neq 0$, то каждое слагаемое суммы $d\bar{x}$ содержит одно из $\bar{e}_j \in \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_l\}$, а так как $\bar{e}_j \wedge \bar{e}_j=0$ и $d\bar{e}_j=0$, то все равно $d\omega^*=0$.

ω^* не является границей, поскольку $d\mathfrak{M}(\Lambda M)$ содержится в идеале, порожденном элементами положительной степени алгебры $\mathfrak{M}(M)$, рассматриваемыми как элементы $\mathfrak{M}(\Lambda M)^*$.

Докажем последнее утверждение. Напомним, что минимальная модель $\mathfrak{M}(\Omega M)$ для ΩM имеет образующие $\tilde{y}$ — по одной на каждую образующую y из $\mathfrak{M}(M)$, — причем степень этой образующей на единицу меньше степени y . Дифференциал задается равенством $d\tilde{y}=0$. Это соответствует хорошо известному факту о том, что кольцо рациональных когомологий пространства петель ΩM является свободной алгеброй, образующие которой составляют базис рациональных гомотопических групп.

Вложение $i: \Omega M \rightarrow \Lambda M$ определяет отображение гомотопий $\pi_* \Omega M$ в гомотопии $\pi_* \Lambda M \cong \pi_* M \oplus \pi_* \Omega M$ и фактически является изоморфизмом на второе слагаемое. Из двойственности между $\pi_k M \otimes \mathbb{Q}$ и образующими степени k алгебры $\mathfrak{M}(M)$ следует, что вложение $i: \Omega M \rightarrow \Lambda M$ определяет морфизм

$$i^*: \mathfrak{M}(\Lambda M) \rightarrow \mathfrak{M}(\Omega M),$$

*1) Проверим, что если y — образующая $\mathfrak{M}$, то dy и $\overline{dy}$ принадлежат указанному идеалу. Для dy это ясно, а поскольку dy является суммой произведений элементов положительной степени из $\mathfrak{M}$, то $d\tilde{y} = \overline{dy}$ является суммой произведений, в каждом из которых хотя один сомножитель есть элемент положительной степени из $\mathfrak{M}$.

при котором образующая типа y переходит в 0, а образующая типа $\bar{y}$ переходит в $\bar{y}$. В частности, для индуцированного гомоморфизма когомологий получаем $i^*(\bar{e}_1 \wedge \bar{x}^s \wedge \dots \wedge \bar{e}_l) = \bar{e}_1 \wedge \bar{x}^s \wedge \dots \wedge \bar{e}_l$. Это завершает доказательство. $\square$

Для построения некоторых циклов, представляющих классы гомологий, двойственные классам когомологий Сулливана, рассмотрим сферу $(S^{|y|}, *)$ постоянной кривизны, равной 1, где $*$ — отмеченная точка и $\dim S^{|y|} = |y| \geq 2^*$.

Рассмотрим также пространство петель $(\Omega S^{|y|}, *)$ сферы $S^{|y|}$ с отмеченной точкой $*$. Из конца § 2.5 мы знаем, что лежащие в $(\Omega S^{|y|}, *)$ повторенные $r+1$ раз большие круги c_0^{r+1} составляют невырожденное критическое подмногообразие $B_{r+1}^\Omega \sim S^{|y|}$. Пусть $W_u^\Omega(B_{r+1}^\Omega)$ — его неустойчивое многообразие (см. 2.5.6). Замыкание $W_u^\Omega(B_{r+1}^\Omega)$ при нечетном $|y|$ дает нам образующий элемент группы $H_{(2r+2)|y|}(\Omega S^{|y|}; \mathbb{Z})$, который мы обозначим через $v_*^{|y|}(2r+2)$.

Ограничение $W_u^\Omega(B_{r+1}^\Omega)$ на слой над элементом $c_0^{r+1} \in B_{r+1}^\Omega$ является сильно неустойчивым многообразием элемента c_0^{r+1} :

$$W_{uu}^\Omega(c_0^{r+1}): (\mathbb{R}^{(2r+1)|y|}, 0) \rightarrow (\Omega S^{|y|}, c_0^{r+1}).$$

При нечетном $|y|$ замыкание этого отображения снова представляет образующий элемент группы $H_{(2r+1)|y|}(\Omega S^{|y|}; \mathbb{Z})$. Этот элемент мы будем обозначать через $v_*^{|y|}(2r+1)$.

В частности, при $r=0$ мы получаем сферический цикл

$$v_*^{|y|}(1): (S^{|y|}, *) \rightarrow (\Omega S^{|y|}, *).$$

Дадим явное описание цикла $v_*^{|y|}(1)$. отождествим $(S^{|y|}, *)$ со сферой на $(S^{|y|}, *)$ коразмерности 1, которая в точке $*$ ортогональна вектору скорости в начальной точке большого круга c_0 . Тогда $v_*^{|y|}(1)$ есть отображение, которое каждой точке $\bar{p} \in S^{|y|}$ ставит в соответствие окружность на $S^{|y|}$, которая начинается в точке $*$, движется в направлении той же полусферы, что и c_0 , и при $t=1/2$ ортогонально пересекает $S^{|y|}$ в точке $\bar{p}$.

Отсюда следует, что цикл $v_*^{|y|}(2)$ состоит из всех окружностей на $S^{|y|}$ с началом в точке $*$ $\in S^{|y|}$.

Пусть у нас есть два сферических цикла

$$u: (S^{|u|}, *) \rightarrow (\Omega M, *) \quad \text{и} \quad v: (S^{|v|}, *) \rightarrow (\Omega M, *).$$

*1) Пока что $|y|$ обозначает просто некоторое целое число ≥ 2 . Впоследствии это число, как и подсказывает обозначение, будет взято равным степени некоторого элемента y из $\mathfrak{M}(M)$. В соответствии с этим $|\bar{y}| = |y| - 1$ (пока что это просто обозначение).

Тогда мы можем образовать новый сферический цикл, взяв произведение Понтрягина $u \cdot v$ циклов u и v (см. Ботт и Самельсон [1]):

$$u \cdot v: (S^{|u|} \times S^{|v|}, *) \rightarrow (\Omega M, *).$$

При этом $u \cdot v(p, q)$ определяется как обычная композиция в $(\Omega M, *)$ путей $u(p)$ и $v(q)$.

При нечетном $|y|$ s -я степень $v_*^{|y|}(1)^s$ цикла $v_*^{|y|}(1)$ представляет образующий элемент группы $H_{s, |y|}(\Omega S^{|y|}; \mathbb{Z})$. Таким образом, цепь $v_*^{|y|}(1)^s$ гомологична $v_*^{|y|}(s)$.

Мультипликативная структура кольца $H^*(\Omega S^{|y|}; \mathbb{Z})$ хорошо известна; см. Серр [1]. Мы снова ограничимся рассмотрением случая, когда $|y|$ нечетно. Пусть $\bar{y}(s)$ обозначает образующую группы $H^{s, |y|}(\Omega S^{|y|})$; тогда $\bar{y}(1)^s = s! \bar{y}(s)$. Следовательно, значение $\bar{y}(1)^s$ на $v_*(1)^s \sim v_*(s)$ равно $s!$.

Пусть теперь $y: (S^{|y|}, *) \rightarrow (M, *)$, $|y| \geq 2$, представляет нетривиальный гомотопический класс бесконечного порядка. Тогда определим

$$\omega_*^{\bar{y}}(1) = \Omega y \circ v_*^{|y|}(1): (S^{|y|}, *) \rightarrow (\Omega M, *).$$

Если $|y|$ нечетно, то для каждого целого $s \geq 1$ введем

$$\omega_*^{\bar{y}}(s) := \Omega y \circ v_*^{|y|}(s): (V_*^{|y|}(s), *) \rightarrow (\Omega M, *),$$

где $V_*^{|y|}(s)$ есть область определения $v_*^{|y|}(s)$.

Теперь мы готовы к тому, чтобы определить класс гомологий, двойственный классу когомологий Сулливана.

Пусть сначала $\omega^* = \omega^*(2r+1) = \bar{x}^{2r+1}$ и $|x|$ нечетно. При этом мы можем считать, что $x: (S^{|x|}, *) \rightarrow (M, *)$ не является кратным некоторого другого сферического целочисленного цикла. Определим $\omega_* = \omega_*(2r+1)$ как $\omega_*^{\bar{x}}(1) \cdot \omega_*^{\bar{x}}(2)^r$. Мы можем считать, что в разложении $\omega^* = \omega^*(l; s) = \bar{e}_1 \wedge \bar{x}^s \wedge \dots \wedge \bar{e}_l$ элементы $e_j: (S^{|e_j|}, *) \rightarrow (M, *)$ являются неделимыми элементами из $H_{|e_j|}(M; \mathbb{Z})$. Определим

$$\begin{aligned} \omega_* = \omega_*(l; s) &= \omega_*^{\bar{e}_1}(1) \cdot \omega_*^{\bar{x}}(1)^s \cdot \omega_*^{\bar{e}_2}(1) \cdot \dots \cdot \omega_*^{\bar{e}_l}(1) \sim \\ &\sim \omega_*^{\bar{e}_1}(1) \cdot \omega_*^{\bar{x}}(s) \cdot \dots \cdot \omega_*^{\bar{e}_l}(1), \end{aligned}$$

где точка снова обозначает произведение Понтрягина.

Мы хотим определить гомотопию ω_* некоторых циклов из ω_* . Для этого представим сферу $S^{|y|}$ размерности $|y| \geq 2$ как единичную сферу в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{|y|+1}$ с координатами $(x_i)_{0 \leq i \leq |y|}$. Пусть $*$ $= (-1, 0, \dots, 0)$. Тогда $S^{|y|}$ — это сфера $\{x_1 = 0\} \cap S^{|y|}$. Пусть ψ_τ , $0 \leq \tau \leq 1$, есть вращение в плоскости (x_1, x_2) в положительном направлении на угол $\tau \cdot 180^\circ$, которое

затем продолжено до изометрии пространства $\mathbb{R}^{|\bar{x}|+1}$, действующей на ортогональном дополнении к этой плоскости тождественно.

Определим гомотопию

$$w'_*(2r+1): (W_*(2r+1), *) \times [0, 1] \rightarrow (\Omega M, *),$$

где

$$W_*(2r+1) = S^{|\bar{x}|} \times V_{*}^{|\bar{x}|}(2)^r,$$

$$V_{*}^{|\bar{x}|}(2) = \text{область определения } v_{*}^{|\bar{x}|}(2),$$

полагая

$$w'_*(2r+1)(\cdot; \tau) = (\Omega(x \circ \psi_\tau) \circ v_{*}^{|\bar{x}|}(1)) \circ w_{*}^{\bar{x}}(2)^r.$$

Для $w_*(l; s)$ определим

$$w'_*(l; s): (W_*(l; s), *) \times [0, 1] \rightarrow (\Omega M, *),$$

где

$$W_*(l; s) = S^{|\bar{e}_1|} \times (\cup |\bar{x}|)^s \times \dots \times S^{|\bar{e}_l|},$$

полагая

$$w'_*(l; s)(\cdot; \tau) = (\Omega(e_1 \circ \psi_\tau) \circ v_{*}^{|\bar{e}_1|}(1)) \cdot w_{*}^{\bar{x}}(1)^s \cdot w_{*}^{\bar{e}_2}(1) \cdot \dots \cdot w_{*}^{\bar{e}_l}(1).$$

4.3.2. Предложение. (i) $w'_*(2r+1)$ — ограничение цикла $w_*(2r+3)$;

(ii) $w'_*(l; s)$ — ограничение цикла $w_*(l; s+1)$.

Доказательство. (i) будет доказано, если мы покажем, что $v_{*}^{\bar{x}}(1)(\cdot; \tau) := \Omega\psi_\tau \circ v_{*}^{|\bar{x}|}(1)$ является ограничением цикла $v_{*}^{|\bar{x}|}(2)$. Но $v_{*}^{|\bar{x}|}(2)$ — неустойчивое многообразие семейства больших кругов в $(\Omega S^{|\bar{x}|}, *)$.

Для доказательства (ii) рассмотрим соотношение $dx =$ полином от $(e_1, \dots, e_l)$. В этом полиноме нет ни постоянного, ни линейного членов. Поэтому $|e_1| \leq |\bar{x}|$.

Пусть $k_1: (D^{|\bar{e}_1|}, \partial D^{|\bar{e}_1|}) \rightarrow (S^{|\bar{e}_1|}, *)$ — каноническое отображение, где $*$ обозначает точку, противоположную отмеченной точке $*$ сферы $S^{|\bar{e}_1|}$. Тогда можно так вложить диск $(D^{|\bar{e}_1|}, *)$ в $(S^{|\bar{x}|}, *)$, что $x|_{D^{|\bar{e}_1|}} = e_1 \circ k_1^*$.

Через $v_{*}^{|\bar{e}_1|}(2)$ мы, согласно определению $v_{*}^{|\bar{y}|}(2)$, обозначаем совокупность окружностей на $S^{|\bar{e}_1|}$ с началом в точке $* \in S^{|\bar{e}_1|}$. В частности, $v_{*}^{|\bar{e}_1|}(2)$ содержит элементы гомотопии $\psi_\tau \circ v_{*}^{|\bar{e}_1|}(1)$. Рассмотрим лежащие на $S^{|\bar{x}|}$ окружности $v_{*}^{|\bar{x}|}(1)|_{D^{|\bar{e}_1|}}$. Вращая эти окружности вокруг точки $* \in S^{|\bar{x}|} \subset S^{|\bar{x}|}$ на угол $\pi/2$, получим окружности, лежащие на $D^{|\bar{e}_1|} \subset S^{|\bar{e}_1|} \subset S^{|\bar{x}|}$. Другими сло-

^{*} Странное утверждение: вложение в сферу большей размерности заведомо гомотопно нулю. Но это возражение не затрагивает (i) (чего достаточно для того случая, когда M — нечетномерная сфера).

вами, так как $x | D^{|\epsilon_1|} = e_1 \cdot k_1$, то

$$\Omega x \circ v_*^{\bar{x}}(1) | D^{|\epsilon_1|} = \omega_*^{\bar{x}}(1) | D^{|\epsilon_1|}$$

гомотопно отображению $\Omega e_1 \circ v_*^{\bar{\epsilon}_1}(2)$, которое содержит элементы $\Omega(e_1 \circ \psi_\tau) v_*^{\bar{\epsilon}_1}(1)$. Таким образом, гомотопия $\omega'_*(l; s)(\cdot; \tau)$ может быть получена из $\omega_*(l; s+1)$ ограничением области определения $W_*(l; s+1)$ до

$$\{*\} \times D^{|\epsilon_1|} \times (S^{\bar{x}})^s \times \dots \times S^{|\epsilon_l|}.$$

Это завершает доказательство 4.3.2. $\square$

4.3.3. Предложение. (i) $\partial w'_*(2r+1) = -(\theta w_*^{\bar{x}}(1) \circ \iota) \cdot w_*^{\bar{x}}(2)^r - w_*^{\bar{x}}(1) \cdot w_*^{\bar{x}}(2)^r$;

(ii) $\partial w'_*(l; s) = -(\theta w_*^{\bar{\epsilon}_1}(1) \circ \iota) \cdot w_*^{\bar{x}}(1)^s \cdot \dots \cdot w_*^{\bar{\epsilon}_l}(1) - w_*^{\bar{\epsilon}_1}(1) \cdot w_*^{\bar{x}}(1)^s \cdot \dots \cdot w_*^{\bar{\epsilon}_l}(1)$.

Здесь $\iota: S^{\bar{y}} \rightarrow S^{\bar{y}}| -$ отражение относительно гиперплоскости $\{y_2 = 0\}$, ограниченное затем на $S^{\bar{y}}| = \{y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_{\bar{y}}^2 = 1\}$.

(iii) Для краткости будем обозначать через $w_*(r)$ и $w'_*(r)$ либо $w_*(2r+1)$ и $w'_*(2r+1)$, либо $w_*(l; r)$ и $w'_*(l; r)$. Тогда образ $w'_*(r)/\theta$ цикла $w'_*(r)$ в $(\Lambda M \bmod \Lambda_0 M)/\theta$ является нетривиальным $\mathbb{Z}_2$ -циклом.

Доказательство. Заметим, что большой круг c_0 из $S^{\bar{y}}|$, лежащий в плоскости (y_0, y_1) , переходит при $\psi_1: S^{\bar{y}}| \rightarrow S^{\bar{y}}|$ в θc_0 . Кроме того, $\psi_1|_{(S^{\bar{y}}| = S^{\bar{y}}| \cap \{y_1 = 0\})}$ действует как ограниченное на $S^{\bar{y}}|$ отражение относительно $\{y_2 = 0\}$. Это доказывает (i) и (ii).

Для доказательства (iii) рассмотрим в $(\Lambda - \Lambda_0)/\theta$ стандартный одномерный коцикл по модулю 2 $\mathcal{J}$. Ясно, что w'_*/θ — цикл по модулю 2. Напомним, как определяется $\cap$ -произведение симплекса δ из $(\Lambda \bmod \Lambda_0)/\theta$ с $\mathcal{J}$. Для получения этого произведения надо взять заднюю грань цикла δ коразмерности 1 с коэффициентом, равным значению коцикла $\mathcal{J}$ на одномерной передней грани цикла δ .

Для того чтобы определить произведение $\mathcal{J}$ на $w'_*(r)/\theta$, рассмотрим сначала случай, когда $r=0$. Отображение $w'_*(0): S^{\bar{y}}| \times [0, 1] \rightarrow \Omega M$ есть образ при Ωy семейства проходящих через точку $* = (-1, 0, \dots)$ окружностей, которые получаются при вращении на 180° окружностей из $w_*^{\bar{y}}(1) = \{\text{окружности, ортогонально пересекающие } S^{\bar{y}}| = S^{\bar{y}}| \cap \{y_1 = 0\}\}$. Поэтому произведение $\mathcal{J}$ на $w'_*(0)/\theta$ в точности равно циклу $w_*(0)/\theta$, который не гомологичен нулю. Следовательно, также и $w'_*(0)/\theta \not\sim 0$.

Случай произвольного r сводится к случаю $r=0$, так как произведение $(w'_*(r)/\theta) \cap \mathcal{J}$ определяется значением коцикла $\mathcal{J}$ на

передних одномерных симплексах, т. е. на передних одномерных симплексах цикла $\omega'_*(0) \subset \omega'_*(r)$. Это доказывает (iii). $\square$

Теперь мы докажем фундаментальную лемму о делимости.

4.3.4. Лемма. Пусть M — компактное односвязное риманово многообразие. Фиксируем $r^* \geq 0$ и выберем значение κ^* так, чтобы оно не было критическим и чтобы образ $\omega'_*(r^*) \subset \Lambda^{\kappa^*} M$. Пусть, кроме того, замкнутые геодезические из $\Lambda^{\kappa^*} M$ невырождены.

Тогда при каждом $r = 0, \dots, r^*$ существуют такие замкнутые геодезические $c(r)$ и $c'(r)$, индексы которых равны соответственно $\dim \omega_*(r)$ и $\dim \omega'_*(r) = \dim \omega_*(r) + 1$, что

$$(i) \quad E(c(r)) < E(c'(r)) < E(c(r+1)).$$

Кроме того, если $m(r)$ и $m'(r)$ — кратности геодезических $c(r)$ и $c'(r)$, то $m(r)$ делится на $m'(r)$:

$$(ii) \quad m'(r) \mid m(r).$$

Доказательство. Фиксируем r и дальше вместо $\omega_*(r)$, $\omega'_*(r)$, $c(r)$, $c'(r)$, $m(r)$, $m'(r)$ и т. д. будем писать также просто ω , ω' , c , c' , m , m' и т. д.

Через $\mathcal{M}^{\kappa^*} M$ или просто через $\mathcal{M}$ будем обозначать комплекс Морса, определяемый неустойчивыми многообразиями $W_u(S.c)$, $E(c) < \kappa^*$.

Мы хотим «представить» цепь ω' в $\mathcal{M}$. Так как ω'/θ — цикл, мы можем деформировать $\omega' \subset \Lambda^{\kappa^*}$ посредством стандартной эквивариантной деформации φ_s и нестандартных эквивариантных деформаций в любую указанную окрестность множества, состоящего из тех $W_u(S.c)$ и $W_{uu}(c')$, которые имеют размерность, равную $\dim \omega'$. Мы представляем себе ω' как подмногообразие из Λ^{κ^*} с особенностями коразмерности ≥ 2 . Можно считать, что ω' находится в общем положении по отношению к устойчивым многообразиям $W_s(S.c)$ и сильно устойчивым многообразиям $W_{ss}(c')$ коразмерности $\dim \omega'$.

Перетянув деформированную цепь ω' в $\mathcal{M}$, получим представление ω' в виде суммы с целыми коэффициентами многообразий $W_{uu}(c')$ и так называемых трубчатых кусков $I \cdot W_{uu}(c) = \{z \cdot W_{uu}(c); z = e^{2\pi i r}, r \text{ принадлежит интервалу положительной длины } I \subset S\}$; размерности слагаемых этой суммы равны $\dim \omega'$.

Аналогично, $\omega \in \partial \omega'$ представляется в виде суммы с целыми коэффициентами многообразий $W_{uu}(c)$ и трубчатых кусков $I \cdot W_{uu}(\tilde{c})$, в которой все слагаемые имеют размерность $\dim \omega$. Эти представления в $\mathcal{M}$ снова будем обозначать соответственно через ω и ω' .

Теперь покажем, что в ω' и ω входят такие $W_{uu}(c')$ и $W_{uu}(c)$, что $W_{uu}(c) \subset \partial W_{uu}(c')$. Заметим, что ω'/θ — нетривиальный $\mathbb{Z}_2$ -цикл в $\Lambda M \bmod \Lambda_0 M$, и, следовательно, в ω' не все $W_{uu}(c')$ и $I \cdot W_{uu}(c)$

имеют нулевые коэффициенты. В самом деле, так как все критические точки функции $E \neq \text{const}$ находятся вне некоторой окрестности множества Λ_0 , то локальные типовые числа критической точки c/θ из $(\Lambda - \Lambda_0)/\theta$ равны индексам соответствующих критических точек c и θc из $\Lambda - \Lambda_0$. Более того, мы утверждаем, что ω' состоит не только из трубчатых кусков. Отсюда будет следовать, что $\tilde{\pi} \cdot \omega \subset \tilde{\pi} \partial \omega'$, рассматриваемый как цикл из $\tilde{P}M \bmod \tilde{P}_0 M$, гомологичен нулю. Для того чтобы в этом убедиться, представим область определения $\tilde{W}$ цикла ω в виде произведения $S^{|\tilde{y}|} \times \tilde{W}$, где $y = x$ в случае, если $\omega_*(r) = \omega_*(2r+1)$, и $y = e_1$, если $\omega_*(r) = \omega_*(l; r)$. Отмеченные точки на $S^{|\tilde{y}|}$ и $\tilde{W}$ будем обозначать через $*$ и $*$ соответственно.

Рассмотрим теперь цикл $\tilde{\pi} \cdot \omega | S^{|\tilde{y}|} \times \{\tilde{c}\}$, где $\tilde{c}$ — некоторый элемент из $\tilde{W}$. Мы знаем, что он не гомологичен нулю, так как он гомологичен циклу $\tilde{\pi} \cdot \omega | S^{|\tilde{y}|} \times \{\tilde{*}\}$, который в свою очередь гомологичен

$$\tilde{\pi} \cdot \Omega z \cdot v_*^{|\tilde{y}|}(1): S^{|\tilde{y}|} \rightarrow \Lambda M \bmod \Lambda_0 M.$$

Но про этот цикл известно, что он не гомологичен нулю, так как $y: S^{|\tilde{y}|} \rightarrow M$ — нетривиальный цикл. Следовательно, также и $\tilde{\pi} \cdot \omega \not\sim 0$.

Мы рассматриваем $W_{uu}(c)$ из ω и $W_{uu}(c')$ из ω' , такие, что $W_{uu}(c) \subset \partial W_{uu}(c')$. Так как все деформации и представления были сделаны эквивариантными по отношению к S -действию и $\mathbb{Z}_2$ -действию, то в $\partial W_{uu}(c')$ вместе с $W_{uu}(c)$ входит и вся $\tilde{I}(c')$ -орбита $\{W_{uu}(z_0 \cdot c); z_0 \in \tilde{I}(c')\}$. Наше утверждение (ii) равносильно тому, что $\tilde{I}(c')$ -орбита многообразия $W_{uu}(c)$ состоит только из $W_{uu}(c)$.

Следующий шаг в доказательстве состоит в построении пары цепей ω'_0, ω_0 , где $\tilde{\pi} \cdot \omega_0$ — цикл размерности $\dim \omega$, а $\tilde{\pi} \cdot \omega'_0/\theta$ — цикл по модулю 2 размерности $\dim \omega'$, обладающих следующими свойствами: в ω_0 и в ω'_0 есть соответственно $W_{uu}(c)$ и $W_{uu}(c')$, такие, что $W_{uu}(c) \subset \partial W_{uu}(c')$, и — это существенно — представление ω_0 в комплексе Морса $\mathcal{M}$ не содержит, помимо $W_{uu}(c)$, других элементов $W_{uu}(z \cdot c)$, $z \in S$.

Предположим, что мы уже построили пару ω_0, ω'_0 . Рассмотрим $\tilde{I}(c')$ -орбиту многообразия $W_{uu}(c)$. Если она содержит элементы $W_{uu}(z \cdot c)$, у которых $z \cdot c \neq c$, то в ω'_0 должно найтись такое $W_{uu}(c'_1)$, что $W_{uu}(z \cdot c)$ входит в $\partial W_{uu}(c'_1)$, а коэффициенты при всех $W_{uu}(z \cdot c)$ должны давать в сумме 0. Заметим, однако, следующее. Пусть $W_{uu}(c')$, $W_{uu}(c'_1)$, $W_{uu}(c'_2)$, ... — все элементы из ω' , граница которых содержит $W_{uu}(z \cdot c)$, где $z \cdot c$ лежит на критической орбите $S \cdot c$. Пусть, далее, $\tilde{I}(c')$ -, $\tilde{I}(c'_1)$ -, $\tilde{I}(c'_2)$ -, ... орбиты этих элементов $W_{uu}(z \cdot c)$ состоят соответственно из m' , m'_1 , m'_2 , ...

элементов. Если все $m', m'_1, m'_2, \dots$ больше 1, то эти орбиты не могут дать в сумме единственное многообразие $W_{uu}(c')$ (с некоторым не равным нулю коэффициентом). В самом деле, орбиты, состоящие из m элементов, распределены подобно тому, как на единичной окружности распределены корни степени m из единицы. Если $m > 1$, то сумма этих корней на комплексной плоскости равна 0. Таким образом, для того чтобы получился единственный элемент $W_{uu}(c)$ на $S.c$, по крайней мере для одной из геодезических $c', c'_1, c'_2, \dots$ группа изотропии должна действовать тождественно на c .

Теперь мы приступим к построению пары ω_0, ω'_0 . Рассмотрим в ω' такое многообразие $W_{uu}(c')$, что цикл $\omega \cap \partial W_{uu}(c')$ нетривиален при отображении $\tilde{\pi}$. Пусть $W_{uu}(c)$ входит в $\omega \cap \partial W_{uu}(c')$ с целым коэффициентом $\alpha \neq 0$. Если $\partial \alpha W_{uu}(c) = 0$, то положим $\omega_0 = \alpha W_{uu}(c)$. В противном случае существует такая критическая орбита $S.\tilde{c}$, что $\text{ind } \tilde{c} = \dim W_{uu}(c) - 1$ и $\partial \alpha W_{uu}(c)$ содержит элементы $\beta_j W_{uu}(e^{2\pi i r_j} \cdot \tilde{c})$, $0 \leq r_j < 1$, $j = 1, \dots, l$, порожденные неустойчивыми многообразиями точек, лежащих на $S.\tilde{c}$. Рассмотрим

$$(*) \quad \alpha W_{uu}(c) - \sum_j [0, r_j] \cdot \beta_j W_{uu}(\tilde{c}).$$

Ее граница есть

$$(**) \quad \left(\sum_j \beta_j \right) W_{uu}(\tilde{c}) + \sum_j [0, r_j] \beta_j \partial W_{uu}(\tilde{c})$$

и, возможно, плюс некоторые члены, содержащие многообразия $W_{uu}(\tilde{c}_1)$, у которых $\tilde{c}_1$ не принадлежит $S.\tilde{c}$.

Так как $\tilde{\pi} \cdot (\omega \cap \partial W_{uu}(c'))$ — цикл, то либо $\sum_j \beta_j = 0$, либо в $\omega \cap \partial W_{uu}(c')$ должны входить еще некоторые $(\alpha_1 W_{uu}(c_1))$, граница которых тоже содержит элементы $W_{uu}(z.\tilde{c})$, $z.\tilde{c} \in S.\tilde{c}$. Прделав для них такую же конструкцию (*), что и для $\alpha W_{uu}(c)$, получим линейную комбинацию цепей вида (*), граница которой не содержит $W_{uu}(z.\tilde{c})$, $z.\tilde{c} \in S.\tilde{c}$.

Действуя аналогично, мы можем исключить остальные элементы $W_{uu}(\tilde{c}_1)$ размерности $\dim \omega - 1$, которые, возможно, содержатся в границе $\alpha W_{uu}(c)$. Тем самым в конце концов мы приходим к цепи ω_0 , которая из всех элементов $W_{uu}(z.c)$, $z.c \in S.c$, содержит с некоторым ненулевым коэффициентом только $W_{uu}(c)$.

Теперь мы можем определить ω'_0 с помощью следующей конструкции. Для $W_{uu}(c)$ из ω_0 мы берем ограничение ω' на эти $W_{uu}(c)$. Заметим, что эти $W_{uu}(c)$ уже принадлежат исходному ω , для которого мы определяли ω' . Для трубчатого куска $[0, r].W_{uu}(\tilde{c})$ мы рассмотрим $\omega' | W_{uu}(\tilde{c})$ (заметим, что $W_{uu}(\tilde{c})$ было частью исходной цепи $\partial \omega$) и затем определим $\omega'_0 | z.W_{uu}(\tilde{c})$ как $z.\omega'_0 | W_{uu}(\tilde{c})$, т. е. с помощью эквивариантного продолжения.

Поясним, что мы имеем в виду, говоря об ограничении ω' . Первоначально ω' определялся как гомотопия $\omega': W \times I \rightarrow \Lambda$ цикла $\omega: W \rightarrow \Lambda$. Мы сохраняем эту интерпретацию также и для представлений ω и ω' в комплексе Морса $\mathcal{M}$. В данной ситуации это означает, что мы рассматриваем различные открытые подмножества из W , которые при $\omega: W \rightarrow \mathcal{M}$ переходят в $W_{uu}(c)$ и в трубчатые куски $I \cdot W_{uu}(\tilde{c})$ размерности $\dim \omega$, и включаем те части границ этих открытых подмножеств, которые переходят в имеющие размерность $\dim \omega - 1$ многообразия $W_{uu}(\tilde{c})$ и, возможно, в трубчатые куски $I \cdot W_{uu}(\tilde{c})$, лежащие в $\partial W_{uu}(c)$.

Определенные таким способом ω_0 и ω'_0 снова обладают представлениями в комплексе Морса $\mathcal{M}$. За этими представлениями мы сохраним обозначения ω_0 и ω'_0 . При этом ω'_0 должно включать такие многообразия $W_{uu}(c')$ размерности $\dim \omega'_0 = \dim \omega_0 + 1$, границы которых содержат $W_{uu}(c)$. Из конструкции цепи ω'_0 следует, что $W_{uu}(c)$ не входит в границу трубчатых кусков из ω'_0 . Поэтому мы можем заключить, как это было показано выше, что существует многообразие $W_{uu}(c')$, для которого $\tilde{I}(c')$ действует тождественно на c . Это завершает доказательство (ii).

Неравенство $E(c(r)) < E(c'(r))$ из (i) выполняется очевидным образом. Для доказательства неравенства $E(c'(r)) < E(c(r+1))$ напомним, что, согласно 4.3.2, $\omega'_*(r)$ можно рассматривать как ограничение $\omega_*(r+1)$, и, следовательно, $\tilde{\pi} \cdot \omega'_*(r)$ тоже можно рассматривать как ограничение $\tilde{\pi} \cdot \omega_*(r+1)$. Отсюда следует, что критическую точку $c(r+1)$ размерности $\dim \omega_*(r+1)$, которая является первым элементом в удовлетворяющей (ii) паре $(c(r+1), c'(r+1))$, можно выбрать так, чтобы $E(c'(r)) < E(c(r+1))$. $\square$

Замечания. 1) Более подробное изложение приведенного выше доказательства можно найти в статье Клингенберга и Шикаты [1]*).

2) Для доказательства 4.3.4 необычайно важно, что $\tilde{\pi} \cdot \partial \omega'_*(0) \neq 0 \bmod 2$. Это было так, потому что цикл $\bar{y}: S^{|\bar{y}|} \rightarrow \Omega M \subset \Lambda M$ получался из цикла $y: S^{|\bar{y}|} \rightarrow M$, который представлял неделимый целый гомотопический класс бесконечного порядка многообразия M . Для того чтобы сделать это обстоятельство более ясным, рассмотрим случай $M = S^3$ и выберем в качестве y отображение Хопфа $y: S^3 \rightarrow S^2$. Тогда y не обладает отмеченными выше свойствами. Выберем на $S^{|\bar{y}|} = S^3$ сферу $S^{|\bar{y}|} = S^2$ так, чтобы она была ортогональна слою $y^{-1}(*)$ над отмеченной точкой $*$ в S^3 . Тогда все окружности, лежащие на S^3 и проходящие через $*$, содер-

* В которой, однако, рассматривается только тот случай, когда M — четномерная сфера, и, кроме того, метрика предполагается такой, что для нее не возникает неприятностей, указанных в (3^b).

жаты дважды в образе отображения

$$\bar{y}: (S^1, *) = (S^2, *) \rightarrow (\Omega M, *) = (\Omega S^2, *).$$

Поэтому $\theta \cdot \bar{y}$ имеет тот же образ, что и $\bar{y}$. Следовательно, если мы для $\omega_*(0) = \bar{y}$ определим гомотопию

$$\bar{y}' = \omega'_*(0): (S^1, *) \times [0, 1] \rightarrow (\Omega S^2, *),$$

как и выше, то получим $\partial \omega'_*(0) = 0 \bmod 2$.

Теперь мы готовы доказать нашу основную теорему.

4.3.5. Теорема. Пусть M — компактное риманово многообразие с конечной фундаментальной группой. Тогда на M существует бесконечно много однократных замкнутых непараметризованных геодезических.

Замечание. Теорему достаточно доказать для односвязных многообразий. Действительно, при проекции $\tilde{M} \rightarrow M$ универсального накрывающего $\tilde{M}$ многообразия M на M одну и ту же однократную замкнутую геодезическую на M могут накрывать не более k различных однократных замкнутых геодезических на $\tilde{M}$, где k — порядок $\pi_1 M$.

Мы не утверждаем, что однократные замкнутые геодезические не имеют самопересечений. В самом деле, как показывает пример 2-мерного эллипсоида, оси которого попарно различны и имеют примерно одинаковую длину, может и не быть больше трех замкнутых геодезических без кратных точек. В рассматриваемом случае такими геодезическими являются главные эллипсы. По поводу этого примера см. также 5.1.2.

Доказательство. Для того чтобы сделать основную идею доказательства более прозрачной, мы сначала рассмотрим случай, когда все замкнутые геодезические на M невырождены. При рассмотрении случая вырожденных замкнутых геодезических будет использована теорема Громола — Мейера.

Итак, допустим, что имеется лишь конечное число однократных замкнутых геодезических, скажем c_j , $1 \leq j \leq s$. Мы рассмотрим лишь те из них, для которых существует такое целое $m > 0$, что $\text{ind } c_j^m > 0$. Эти геодезические снова обозначим через c_j , $1 \leq j \leq s$.

Из 3.2.15 и 4.2.7 следует, что существуют такие действительные числа $\alpha > 0$, $A > 0$ и $\beta \geq 0$, что для всех $j \in \{1, \dots, s\}$

$$(*) \quad \begin{aligned} (i) \quad & \alpha(m' - m) - \beta \leq \text{ind } c_j^{m'} - \text{ind } c_j^m, \\ (ii) \quad & \text{ind } c_j^m / A \leq m. \end{aligned}$$

Фиксируем целое $r_0 \geq 0$ и рассмотрим последовательность $\omega'_*(r_0 + i)$, $0 \leq i \leq s$, состоящую из последовательных гомотопий классов Сулливана $\omega_*(r_0 + i)$. Согласно 4.3.4, существуют такие геодезические $c, c' \in \{c_1, \dots, c_s\}$ и целые числа a, b , $0 \leq a < b \leq s$, что геодезические $c(r_0 + b)$, $c'(r_0 + a)$ и $c'(r_0 + b)$, соответствующие $\omega(r_0 + b)$, $\omega'(r_0 + a)$ и $\omega'(r_0 + b)$, имеют вид c^m , c'^{m_a} и c'^{m_b} . Здесь $m = qm_b$, где $q \geq 1$ — некоторое целое. Кроме того, $E(c'^{m_a}) < E(c^m) < E(c'^{m_b})$.

Положим $E(c) = \kappa$, $E(c') = \kappa'$. Тогда $m_a^2 \kappa' < q^2 m_b^2 \kappa < m_b^2 \kappa'$, и, следовательно,

$$0 < (\kappa'/\kappa - q^2) < (m_b^2/m_a^2 - 1)q^2 < (m_b^2/m_a^2 - 1)(\kappa'/\kappa).$$

Мы получим требуемое противоречие с предположением о том, что существует лишь конечное число однократных замкнутых геодезических, если сможем показать, что $m_b^2/m_a^2 \rightarrow 1$ при $r_0 \rightarrow \infty$. Заметим, что есть лишь конечное число отношений $\kappa'/\kappa > 1$.

Из (*) (i) получается оценка

$$\begin{aligned} \alpha(m_b - m_a) - \beta &\leq \text{ind } c'^{m_b} - \text{ind } c'^{m_a} = \\ &= \dim \omega'(r_0 + b) - \dim \omega'(r_0 + a) \leq d(s + 1), \end{aligned}$$

где $d = 2|\bar{x}|$, а x — образующая минимальной нечетной степени в минимальной модели $\mathfrak{M}(M)$ многообразия M . Поэтому

$$m_b/m_a \leq (d(s + 1) + \beta)/\alpha m_a + 1.$$

Но $m_a \rightarrow \infty$ при $r_0 \rightarrow \infty$. Это следует из (*) (ii) и того, что $\dim \omega'(r_0 + a) = \text{ind } c'^{m_a} \geq \dim \omega'(r_0)$, а $\dim \omega'(r_0)$ растет линейно по r_0 .

Рассмотрим теперь общий случай, т. е. случай, когда на M есть конечное число однократных замкнутых геодезических $\{c_1, \dots, c_s\}$ и все их кратные повторения c_j^m лежат на изолированных критических S -орбитах $S \cdot c_j^m$. Снова предполагаем, что при каждом j найдется такое $m \geq 1$, что $\text{ind } c_j^m > 0$.

Для каждого j , $1 \leq j \leq s$, существует конечное множество $M^*(c_j) = \{m_1^*, \dots, m_{s(j)}^*\}$ целых чисел, обладающее таким свойством (см. 4.2.5, 4.2.6): для каждого кратного повторения c_j^m геодезической c_j существует такое корректно определенное $m^* \in M^*(c_j)$, что $m = qm^*$, где $q \geq 1$ — целое; кроме того, характеристическое многообразие $W_{ca}(c_j^{m^*})$ геодезической $c_j^{m^*}$ изометрично характеристическому многообразию $W_{ca}(c_j^m)$ геодезической c_j^m .

Действительно, отображение $e \mapsto e^q$, определенное на окрестности $D(S \cdot c_j^{m^*})$ S -орбиты $S \cdot c_j^{m^*}$, отображает $D(S \cdot c_j^{m^*})$ в окрестность $D(S \cdot c_j^m)$ S -орбиты $S \cdot c_j^m$. В подходящих метриках на

этих окрестностях ограничение этого отображения на $W_{ca}(c_j^{m*})$ является изометрией между $W_{ca}(c_j^{m*})$ и $W_{ca}(c_j^m)$. В частности, $b_i^0(c_j^{m*}) = b_i^0(c_j^m)$.

Пусть $m^*(c_j)$ — наименьшее общее кратное элементов множества $M^*(c_j)$.

Фиксируем теперь некоторое некритическое значение $\kappa^* > 0$. Конечное число критических орбит, лежащих в $\Lambda^{\kappa^*}M - \Lambda^0M$, обозначим через $S.c_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq \alpha_0$. Положим $E(c_\alpha) = \kappa_\alpha$.

Рассмотрим открытые окрестности $\mathcal{U}$ в $\Lambda^{\kappa^*}M$ критического множества в $\Lambda^{\kappa^*}M$ вида

$$\mathcal{U} = \Lambda^{\varepsilon_0}M \cup \bigcup_{\alpha} \mathcal{U}(S.c_\alpha).$$

Здесь $\varepsilon_0 > 0$ столь мало, что $\Lambda^{\varepsilon_0}M$ можно ретрагировать на Λ^0M с помощью деформации φ_s , $s \rightarrow \infty$ (см. 1.4.15); $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}(S.c_\alpha)$ — такая открытая S -инвариантная окрестность S -орбиты $S.c_\alpha$, что $\theta\mathcal{U}(S.c_\alpha) = \mathcal{U}(S.\theta c_\alpha)$. Все $\mathcal{U}_\alpha$ попарно не пересекаются. Кратность элемента из $\mathcal{U}_\alpha$ является делителем кратности $m(c_\alpha)$ геодезической c_α .

Ясно, что такие окрестности существуют и образуют фундаментальную систему окрестностей критического множества в $\Lambda^{\kappa^*}M$.

Мы хотим рассмотреть некоторые возмущения $\tilde{g}$ римановой метрики g на M . Последнее означает, что $\tilde{g}$ должна лежать в некоторой окрестности метрики g в пространстве $\mathcal{M}M$ римановых метрик на M (см. § 3.3). Соответствующее дифференцируемое многообразие, снабженное римановой метрикой $\tilde{g}$, будем обозначать через $\tilde{M}$, а через $\tilde{E}$ — интеграл энергии на $\Lambda\tilde{M}$.

Фиксируем окрестность $\mathcal{U}$ описанного выше вида и некоторое $\varepsilon > 0$. Мы будем рассматривать только те возмущения $\tilde{g} = \tilde{g}(\mathcal{U}, \varepsilon)$ метрики g , которые удовлетворяют следующим условиям:

- (а) κ^* не является критическим значением функции $\tilde{E}$ на $\Lambda\tilde{M}$;
- (б) при каждом α критическая орбита $S.c_\alpha$ из ΛM распадается на конечное число невырожденных критических орбит, которые все принадлежат $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}(S.c_\alpha)$, и значение функции $\tilde{E}$ на новых критических орбитах, лежащих в $\mathcal{U}(S.c_\alpha)$, должно отличаться по абсолютной величине от $E(c_\alpha) = \kappa_\alpha$ меньше, чем на ε . Кроме того,

$$H_*(\Lambda^{\kappa_\alpha^-}M \cup \mathcal{U}_\alpha, \Lambda^{\kappa_\alpha^-}M) = H_*(\Lambda^{\kappa_\alpha^-}\tilde{M} \cup \mathcal{U}_\alpha, \Lambda^{\kappa_\alpha^-}\tilde{M});$$

- (с) если c_α имеет вид c_j^m , то кратность $\tilde{m}$ любой из принадлежащих $\mathcal{U}_\alpha$ невырожденных замкнутых геодезических из $\Lambda\tilde{M}$ такова, что целое число $m/\tilde{m}$ делит наименьшее общее кратное $m^*(c_j)$ элементов из $M^*(c_j)$. В частности, $m/\tilde{m} \leq m^*(c_j)$.

Доказательство того, что действительно существуют возмущения $\tilde{g} = \tilde{g}(\mathcal{U}, \varepsilon)$, обладающие свойствами (а), (b) и (с), может быть получено с помощью методов и результатов § 3.3. В самом деле, (а) и (b) немедленно следуют из 3.3.7. Убедимся, что условие (с) также выполнимо. Для этого фиксируем j . Из определения $m^*(c_j)$ следует, что характеристическое многообразие $W_{ca}(c_j^{m^*(c_j)})$ геодезической $c_j^{m^*(c_j)}$ имеет максимальную размерность среди всех характеристических многообразий $W_{ca}(c_j^{m_i^*})$, $m_i^* \in M^*(c_j)$.

С помощью подходящего возмущения $\tilde{g}$ метрики g мы можем заменить критическую орбиту $S.c_j^{m^*(c_j)}$ некоторым количеством невырожденных критических орбит $S.\tilde{c}$, которые все принадлежат выбранной окрестности $\mathcal{U}(S.c_j^{m^*(c_j)})$. В этом случае мы также будем говорить, что $W_{ca}(c_j^{m^*(c_j)})$ разрешается в $S.\tilde{c}$.

Фиксируем некоторое целое $q_0 \geq 1$. Если $\tilde{g}$ достаточно близко к g , то $W_{ca}(c_j^{qm^*(c_j)})$ при всех $q \leq q_0$ разрешается в конечное число критических невырожденных орбит, лежащих около $S.c_j^{qm^*(c_j)}$. Фактически эти орбиты будут образами $S.\tilde{c}^q$ при отображении $e \mapsto e^q$ невырожденных критических орбит $S.\tilde{c}$, находящихся вблизи $S.c_j^{m^*(c_j)}$.

Пусть $m_i^* \in M^*(c_j)$; тогда $m^*(c_j) = pm_i^*$, где p — положительное целое. Рассмотрим отображение окрестности $D(S.c_j^{m_i^*})$ орбиты $S.c_j^{m_i^*}$ в окрестность $D(S.c_j^{m^*(c_j)})$, определяемое соответствием $e \mapsto e^p$. При этом отображении $W_{ca}(c_j^{m_i^*})$ переходит в подмногообразие многообразия $W_{ca}(c_j^{m^*(c_j)})$. Следовательно, если при замене g на $\tilde{g}$ многообразие $W_{ca}(c_j^{m^*(c_j)})$ разрешается в некоторое число невырожденных критических орбит $S.\tilde{c}$, лежащих около $S.c_j^{m^*(c_j)}$, то мы можем предполагать, что одновременно

$W_{ca}(c_j^{m_i^*})$ разрешается в лежащие вблизи $S.c_j^{m_i^*}$ невырожденные критические орбиты $S.\tilde{c}(m_i^*)$, которые при отображении $e \mapsto e^p$ переходят в орбиты вида $S.\tilde{c} \in \mathcal{U}(S.c_j^{m^*(c_j)})$. В частности, $p \cdot (\text{кратность } \tilde{c}(m_i^*))$ делит $m^*(c_j)$. Таким образом, при всех c_j^m , где m не превосходит некоторого m_0 и $m = m_i^*q$, принадлежащие $\mathcal{U}(S.c_j^m)$ невырожденные критические орбиты из $\Lambda\tilde{M}$, получающиеся при разрешении $W_{ca}(c_j^m) \cong W_{ca}(c_j^{m_i^*})$, имеют такую кратность $\tilde{m}$, что $m/\tilde{m}$ делит $m^*(c_j)$.

Это завершает доказательство того, что возмущения $\tilde{g}$ метрики g , удовлетворяющие условиям (а), (b) и (с), существуют.

Согласно 4.2.5 и 4.2.6, для каждого $j \in \{1, \dots, s\}$ существует такое $i_0(j)$, что из $i > i_0(j)$ следует, что $b_i^j(c_j^m) = 0$ при всех m . Положим $i_0 = \sup_j i_0(j)$. Из 4.2.4 следует, что если $i > i_0$ и $b_i(c_j^m) \neq 0$, то

$$(**) \quad 0 < \text{ind } c_j^m \leq i \leq \text{Ind } c_j^m + i_0.$$

Рассмотрим конечное множество K таких действительных чисел > 1 вида $(m_k^{*2} \kappa_k)/(m_l^{*2} \kappa_l)$, что m_k^* делит $m^*(c_k)$ и m_l^* делит $m^*(c_l)$. Выберем $\lambda \in K$ и целое $q \geq 1$ так, чтобы $\lambda - q^2$ было положительно и одновременно являлось минимальным среди чисел вида $\lambda - q^2 > 0$, $\lambda \in K$. Пусть $\hat{\lambda} = \max \{\lambda \in K\}$, $d = 2|\bar{x}|$, а $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ такие же, как и выше. Выберем целое $m_0 > 0$ так чтобы

$$(+)\quad [((d(s+1) + i_0 + \beta)/\alpha m_0 + 1)^2 - 1] \bar{\lambda} < \lambda - q^2.$$

Существует такое $i_* \geq i_0$, что если $i > i_*$ и $b_i(c_j^m) \neq 0$, то $m \geq m_0$. В самом деле, согласно (**) и (*) (ii), $0 < (i - i_0)/A \leq m$. Выберем $i_* \geq \alpha m_0 + i_0$. Существует также такое целое $r_0 \geq 0$, что при $r \geq r_0$ выполняется неравенство $\dim \omega_*(r) > i_*$.

Рассмотрим $\omega'_*(r_0 + i)$, $0 \leq i \leq s$. Выберем некритическое $\kappa^* > 0$ так, чтобы носители цепей $\omega'_*(r_0 + i)$ принадлежали $\Lambda^{*-}M$. Для этого κ^* выберем, как и выше, окрестность $\mathcal{U}$ критического множества из Λ^{*-} и для малого $\varepsilon > 0$ рассмотрим возмущения $\tilde{g} = \tilde{g}(\mathcal{U}, \varepsilon)$ римановой метрики g на M , обладающие свойствами (а), (b) и (с).

Как первое следствие мы получаем из 4.3.4, что для каждого $\omega'_*(r_0 + i)$, $\omega_*(r_0 + i)$, $0 \leq i \leq s$, замкнутые геодезические $\tilde{c}'(r_0 + i)$ и $\tilde{c}(r_0 + i)$ на M удовлетворяют условиям 4.3.4 (i) и (ii). Каждая из этих геодезических принадлежит корректно определенной окрестности $\mathcal{U}(S.c_\alpha)$ одной из критических орбит $S.c_\alpha$ из $\Lambda^{*-}M - \Lambda^0 M$.

Существуют такие целые числа a и b , $0 \leq a < b \leq s$, и $c' \in \{S.c_1, \dots, S.c_s\}$, что

$$\tilde{c}'(r_0 + a) \in \mathcal{U}(S.c'^{m_a}); \quad \tilde{c}'(r_0 + b) \in \mathcal{U}(S.c'^{m_b}).$$

Пусть $\tilde{c}(r_0 + b) \in \mathcal{U}(S.c^m)$, $c \in \{S.c_1, \dots, S.c_s\}$. Положим $E(c') = \kappa'$, $E(c) = \kappa$.

Кратности $\tilde{m}_a$, $\tilde{m}_b$ и $\tilde{m}$ геодезических $\tilde{c}'(r_0 + a)$, $\tilde{c}'(r_0 + b)$ и $\tilde{c}(r_0 + b)$ удовлетворяют соотношениям

$$m_a = \tilde{m}_a m'^*, \quad m_b = \tilde{m}_b m'^*, \quad m = \tilde{m} m^*.$$

Здесь m^{**} и m'^* принадлежат множеству $M^*(c')$ и поэтому делят $m^*(c')$; m^* принадлежит $M^*(c)$ и, следовательно, $m^* | m^*(c)$. Свойство 4.3.4 (i) устанавливает, что

$$(\dagger\dagger) \quad E(\tilde{c}'(r_0+a)) < E(\tilde{c}(r_0+b)) < E(\tilde{c}'(r_0+b)),$$

а согласно свойству 4.3.4 (ii) существует такое целое $q \geq 1$, что $\tilde{m} = q\tilde{m}_b$.

Так как ε в $\tilde{g}(\mathcal{U}, \varepsilon)$ можно выбрать произвольно малым, то из $(\dagger\dagger)$ мы можем заключить, что

$$\begin{aligned} E(c'^{m_a}) &= m_a^2 \kappa' < E(c^m) = m^2 \kappa = q^2 \tilde{m}_b^2 m'^{**} \kappa = \\ &= q^2 \tilde{m}_b^2 (m'^{**}/m'^{**}) \kappa < E(c'^{m_b}) = m_b^2 \kappa' = \tilde{m}_b^2 m'^{**} \kappa'. \end{aligned}$$

Поэтому

$$1 \leq q^2 < m'^{**} \kappa' / m'^{**} \kappa; \quad m'^{**} \kappa' / m'^{**} \kappa < q^2 (m_b^2 / m_a^2).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\S) \quad 0 < \lambda - q^2 &\leq \frac{m'^{**} \kappa'}{m'^{**} \kappa} - q^2 < \left(\frac{m_b^2}{m_a^2} - 1 \right) q^2 < \left(\frac{m_b^2}{m_a^2} - 1 \right) \frac{m'^{**} \kappa'}{m'^{**} \kappa} \leq \\ &\leq \left(\frac{m_b^2}{m_a^2} - 1 \right) \lambda. \end{aligned}$$

$\omega'_*(r_0+a)$ определяет локально возле $c'(r_0+a)$ нетривиальный цикл размерности $\dim \omega'_*(r_0+a)$. Из свойства (b) возмущенной метрики $\tilde{g}$ следует, что типовое число $b_i(c'^{m_a})$ геодезической c'^{m_a} в размерности $i = \dim \omega'_*(r_0+a)$ не равно нулю. Аналогично $b_j(c'^{m_b}) \neq 0$ при $j = \dim \omega'_*(r_0+a)$. Поэтому из (**) следует, что

$$\dim \omega'_*(r_0+a) \leq \text{ind } c'^{m_a} + i_0; \quad \text{ind } c'^{m_b} \leq \dim \omega'_*(r_0+b).$$

Из (*) (i) мы тем самым получаем

$$\begin{aligned} \alpha(m_b - m_a) - \beta - i_0 &\leq \text{ind } c'^{m_b} - \text{ind } c'^{m_a} - i_0 \leq \\ &\leq \dim \omega'_*(r_0+b) - \dim \omega'_*(r_0+a) \leq d(s+1). \end{aligned}$$

Следовательно, так как $m_a \geq m_0$,

$$m_b/m_a \leq (d(s+1) + i_0 + \beta)/(\alpha m_0) + 1.$$

Вместе с $(\dagger)$ это противоречит соотношению (§). $\square$

Добавление к § 4.3

Минимальная модель рационального гомотопического типа многообразия ΔM

Джонатан Сакс

Дифференциальная градуированная коммутативная алгебра (над $\mathbb{Q}$) (сокращенно ДГА) — это такая градуированная алгебра

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{A}^k$$

вместе с дифференциалом степени $+1$

$$d: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A},$$

что

- (i) $xy = (-1)^{kl} yx$ ($x \in \mathcal{A}^k$, $y \in \mathcal{A}^l$);
- (ii) $d(xy) = dx \cdot y + (-1)^k x \cdot dy$ ($x \in \mathcal{A}^k$);
- (iii) $d^2 = 0$.

Если $\mathcal{A}$ — ДГА, то через $I(\mathcal{A}) = \bigoplus_{k \geq 1} \mathcal{A}^k$ обозначим идеал элементов положительной степени.

ДГА $\mathcal{M}$ называется *минимальной*, если

- (i) $\mathcal{M}$ свободна как градуированная коммутативная алгебра (и, следовательно, $\mathcal{M}$ является тензорным произведением некоторой алгебры полиномов с образующими четной степени и внешней алгебры с образующими нечетной степени);
- (ii) $dI(\mathcal{M}) \subseteq I(\mathcal{M}) \cdot I(\mathcal{M})$.

Через $\{t, dt\}$ обозначим $\mathbb{Q}[t] \otimes \mathbb{Q}[t] dt$, т. е. полиномиальные формы от одной переменной t степени 0. Два отображения (морфизма) ДГА

$$\mathcal{A} \xrightarrow{f_i} \mathcal{B} \quad (i=0, 1)$$

называются *гомотопными*, если существует отображение ДГА $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \otimes \{t, dt\}$, такое, что $f_i = F|_{t=i}$ ($i=0, 1$). (Через $F|_{t=0}$ мы обозначаем композицию F с отображением ДГА $\mathcal{B} \otimes \{t, dt\} \rightarrow \mathcal{B}$, которое получается, если положить $t=0=dt$.)

4.3.A.1. Теорема. *Отношение гомотопии между отображениями ДГА является отношением эквивалентности.*

Для данного абелева гомотопического типа X (см. ⁽⁶⁰⁾) выберем рациональный полиэдр, представляющий рациональный гомотопический тип X^*). На этом рациональном полиэдре можно опре-

^{*}) В этом месте можно взять произвольный симплициальный полиэдр из X (или из соответствующего рационального гомотопического типа). Но во второй половине формулировки 4.3.A.2. нужна рациональность этого полиэдра.

делить ДГА над $\mathbb{Q}$, состоящую из кусочно-полиномиальных форм с рациональными коэффициентами; ее мы будем обозначать через $\mathcal{A}_{p.l.}(X)$. В классе эквивалентности ДГА $\mathcal{A}_{p.l.}(X)$ (где эквивалентность есть гомотопическая эквивалентность между ДГА) содержится единственный (с точностью до изоморфизма) минимальный представитель. Эта минимальная ДГА называется минимальной моделью для $\mathcal{A}_{p.l.}(X)$ и обозначается через $\mathfrak{M}(X)$.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует отображение $f^*: \mathcal{A}_{p.l.}(Y) \rightarrow \mathcal{A}_{p.l.}(X)$, получаемое с помощью «обратного переноса» кусочно-полиномиальных дифференциальных форм. В свою очередь отображение f^* индуцирует отображение $\bar{f}: \mathfrak{M}(Y) \rightarrow \mathfrak{M}(X)$, гомотопический класс которого зависит только от гомотопического класса отображения f .

Основной относящийся сюда результат следующий.

4.3.A.2. Теорема (Квиллен, Сулливан). *Имеет место эквивалентность категорий*

$$\{\text{абелевы рациональные гомотопические типы}\} \leftrightarrow \{\text{ДГА над } \mathbb{Q} \text{ по модулю гомотопической эквивалентности}\}.$$

Эта эквивалентность категорий устанавливает соответствия $\{\text{рациональное пространство } X\} \leftrightarrow \mathfrak{M}(X)$;

$$\{\text{отображения } X \xrightarrow{\perp} Y\} \leftrightarrow \{\bar{f}: \mathfrak{M}(Y) \rightarrow \mathfrak{M}(X)\},$$

где $\{\}$ обозначает гомотопический класс. Доказательство см. в работе Фридлендера, Гриффитса и Моргана [1].

Имея две ДГА $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, можно следующим образом превратить их тензорное произведение (как векторных пространств) в ДГА.

Введем сначала в $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ градуировку, полагая $^*) \deg(a \otimes b) = \deg a + \deg b$, где $a \in \mathcal{A}$ и $b \in \mathcal{B}$ — образующие.

Для того чтобы определить умножение на $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, достаточно сделать это для образующих, а затем очевидным образом распространить его на все $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Итак, пусть $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ и $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ — образующие. Положим

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (-1)^{\deg b_1 \cdot \deg a_2} a_1 a_2 \otimes b_1 b_2.$$

Пусть $d_{\mathcal{A}}$ и $d_{\mathcal{B}}$ — дифференциалы соответственно в $\mathcal{A}$ и в $\mathcal{B}$, Определим дифференциал d в $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, полагая

$$d = d_{\mathcal{A}} \otimes \text{id} + \varepsilon_{\mathcal{A}} \otimes d_{\mathcal{B}},$$

где на однородных элементах $\varepsilon_{\mathcal{A}}(a) = (-1)^{\deg a} a$. Легко проверить, что со всеми этими определениями $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ удовлетворяет всем аксиомам ДГА.

*) Степень однородного элемента x теперь обозначается $\deg x$, а не $|x|$, как раньше.

Пусть M — односвязное многообразие и $\mathfrak{M}(M)$ — ДГА над $\mathbb{Q}$ с образующими $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и дифференциалом d . Пусть $\mathcal{A}$ — ДГА над $\mathbb{Q}$ с образующими $\{x_i, \bar{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, где степень $\bar{x}_i$ на единицу меньше степени x_i . Распространим на всю $\mathfrak{M}(M)$ как действующую справа производную и определим дифференциал в $\mathcal{A}$, полагая, что на образующих без черты он действует так же, как и в $\mathfrak{M}(M)$, а на образующих с чертой — по формуле $d\bar{x}_i = \overline{dx}_i$.

4.3.A.3. Теорема. $\mathcal{A}$ изоморфна как ДГА минимальной модели $\mathfrak{M}(\Lambda M)$.

Теорема доказывается с помощью следующего предложения.

4.3.A.4. Предложение. Пусть $\{e\}$ — минимальная модель рационального гомотопического типа окружности S^1 , т. е. $\{e\}$ есть ДГА над $\mathbb{Q}$, порожденная одним элементом e степени 1 и $de=0$. Тогда существует такое отображение ДГА

$$\Phi: \mathfrak{M}(M) \rightarrow \mathcal{A} \otimes \{e\},$$

что для любой ДГА $\mathcal{B}$ и любого отображения ДГА $\Psi: \mathfrak{M}(M) \rightarrow \mathcal{B} \otimes \{e\}$ существует единственное отображение ДГА $\tilde{\Psi}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, при котором следующая диаграмма становится коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}(M) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{A} \otimes \{e\} \\ & \searrow \Psi & \downarrow \tilde{\Psi} \otimes \text{id} \\ & & \mathcal{B} \otimes \{e\} \end{array}$$

Доказательство предложения. Определим Φ на образующих, полагая $\Phi(x_i) = x_i \otimes 1 + \bar{x}_i \otimes e$, и продолжим его очевидным образом на всю $\mathfrak{M}(M)$ как отображение алгебр.

Прежде всего мы должны показать, что Φ является отображением ДГА, т. е. коммутирует с дифференциалами. Легко видеть, что для этого достаточно доказать, что Φ коммутирует с дифференциалами на образующих. Пусть $x \in \mathfrak{M}(M)$ — образующая, и пусть

$$dx = \sum_{(i_1, \dots, i_r)} a_{i_1 \dots i_r} x_{i_1} \dots x_{i_r}, \quad \text{где } a_{i_1 \dots i_r} \in \mathbb{Q}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d(\Phi(x)) &= d(x \otimes 1 + \bar{x} \otimes e) = dx \otimes 1 + \overline{dx} \otimes e = \\ &= \left(\sum_{(i_1, \dots, i_r)} a_{i_1 \dots i_r} x_{i_1} \dots x_{i_r} \right) \otimes 1 + \\ &+ \left(\sum_{(i_1, \dots, i_r)} a_{i_1 \dots i_r} \sum_{j=1}^r (-1)^{de \cdot x_{i_{j+1}} + \dots + de \cdot x_{i_j}} x_{i_1} \dots x_{i_{j-1}} \bar{x}_{i_j} \dots x_{i_r} \right) \otimes e, \end{aligned}$$

так как — действует как производная справа. Далее,

$$\begin{aligned}\Phi(dx) &= \Phi\left(\sum_{(i_1, \dots, i_r)} a_{i_1 \dots i_r} x_{i_1} \dots x_{i_r}\right) = \sum_{(i_1, \dots, i_r)} a_{i_1 \dots i_r} \Phi(x_{i_1}) \dots \Phi(x_{i_r}) = \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_r)} a_{i_1 \dots i_r} (x_{i_1} \otimes 1 + \bar{x}_{i_1} \otimes e) \dots (x_{i_r} \otimes 1 + \bar{x}_{i_r} \otimes e) = \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_r)} a_{i_1 \dots i_r} (x_{i_1} \dots x_{i_r}) \otimes 1 + \\ &+ \left(\sum_{(i_1, \dots, i_r)} a_{i_1 \dots i_r} \sum_{j=1}^r (-1)^{\deg x_{i_{j+1}} + \dots + x_{i_r}} x_{i_1} \dots x_{i_{j-1}} \bar{x}_{i_j} x_{i_{j+1}} \dots x_{i_r} \right) \otimes e,\end{aligned}$$

так как $e^2 = 0$. Множитель $(-1)^{\deg x_{i_{j+1}} + \dots + \deg x_{i_r}}$ возникает из определения умножения в $\mathcal{A} \otimes \{e\}$. Таким образом, как и утверждалось, для каждой образующей x_i имеем $d\Phi(x_i) = \Phi(dx_i)$. Теперь мы покажем, что пара $(\mathcal{A} \otimes \{e\}, \Phi)$ обладает указанным в предложении универсальным свойством.

Пусть $\Psi: \mathfrak{M}(M) \rightarrow \mathcal{B} \otimes \{e\}$ — отображение ДГА. Для каждой образующей $x_i \in \mathfrak{M}(M)$ ее образ $\Psi(x_i)$ единственным образом записывается в виде $\Psi(x_i) = b_i \otimes 1 + \tilde{b}_i \otimes e$, где $b_i \otimes 1$ — компонента $\Psi(x_i)$, не содержащая множителя e , а $\tilde{b}_i \otimes e$ — компонента $\Psi(x_i)$, содержащая этот множитель.

Определим $\tilde{\Psi}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ на образующих, полагая

$$\tilde{\Psi}(x_i) = b_i, \quad \tilde{\Psi}(\bar{x}_i) = \tilde{b}_i,$$

и продолжим это отображение как отображение (морфизм) алгебр на всю $\mathcal{A}$. Ясно, что $\tilde{\Psi}$ — единственное отображение алгебр, такое, что $(\tilde{\Psi} \otimes \text{id}) \cdot \Phi = \Psi$.

Далее, для каждой образующей $x_i \in \mathfrak{M}(M)$ имеем $\Psi(dx_i) = d(\Psi(x_i))$, так как Ψ — отображение ДГА. Но

$$\begin{aligned}\Psi(dx_i) &= (\tilde{\Psi} \otimes \text{id})(\Phi(dx_i)) = (\tilde{\Psi} \otimes \text{id})(d(\Phi(x_i))) = \\ &\quad (\text{так как } \Phi \text{ — отображение ДГА}) \\ &= (\tilde{\Psi} \otimes \text{id})(dx_i \otimes 1 + d\bar{x}_i \otimes e) = \tilde{\Psi}(dx_i) \otimes 1 + \tilde{\Psi}(d\bar{x}_i) \otimes e,\end{aligned}$$

в то время как

$$\begin{aligned}d(\Psi(x_i)) &= d((\tilde{\Psi} \otimes \text{id})(\Phi(x_i))) = d((\tilde{\Psi} \otimes \text{id})(x_i \otimes 1 + \bar{x}_i \otimes e)) = \\ &= d(\tilde{\Psi}(x_i) \otimes 1 + \tilde{\Psi}(\bar{x}_i) \otimes e) = d\tilde{\Psi}(x_i) \otimes 1 + d(\tilde{\Psi}(\bar{x}_i)) \otimes e.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{\Psi}(dx_i) = d\tilde{\Psi}(x_i) \quad \text{и} \quad \tilde{\Psi}(d\bar{x}_i) = d\tilde{\Psi}(\bar{x}_i)$$

для всех образующих $x_i, \bar{x}_i$ из $\mathcal{A}$, т. е. $\tilde{\Psi}$ — отображение ДГА. $\square$

Доказательство теоремы. Пусть $ev: \Lambda M \times S^1 \rightarrow M$ — отображение значений:

$$ev(c, t) = c(t) \quad \text{для } c \in \Lambda M \text{ и } t \in S^1.$$

Пара $(\Lambda M \times S^1, ev)$ обладает следующим универсальным свойством*).

Пусть X — произвольное пространство и $f: X \times S^1 \rightarrow M$ — произвольное непрерывное отображение. Тогда существует единственная непрерывная функция $\tilde{f}: X \rightarrow \Lambda M$, такая, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{ev} & \Lambda M \times S^1 \\ & \nwarrow f & \uparrow \tilde{f} \times \text{id} \\ & & X \times S^1 \end{array}$$

Очевидно, $\tilde{f}$ определяется равенством $\tilde{f}(x)(t) = f(x, t)$.

Возьмем теперь в качестве X рациональный гомотопический тип $X_{\mathcal{A}}$, соответствующий $\mathcal{A}$ в только что доказанном предложении, а в качестве f любое непрерывное отображение f_{Φ} , соответствующее $\Phi: \mathfrak{M}(M) \rightarrow \mathcal{A} \otimes \{e\}$ при эквивалентности категорий, о которой говорится в теореме Квиллена и Сулливана. Согласно той же теореме, эта коммутативная диаграмма порождает гомотопически коммутативную диаграмму в категории ДГА над $\mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}(M) & \xrightarrow{\Psi_{ev}} & \mathfrak{M}(\Lambda M) \otimes \{e\} \\ & \searrow \Phi & \downarrow \tilde{\Phi} \otimes \text{id} \\ & & \mathcal{A} \otimes \{e\} \end{array}$$

где отображение ДГА Ψ_{ev} получается из ev , а отображение ДГА $\tilde{\Phi} \otimes \text{id}$ получается из $\tilde{f} \otimes \text{id}$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}(M) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{A} \otimes \{e\} \\ & \searrow \Psi_{ev} & \downarrow \tilde{\Psi}_{ev} \otimes \text{id} \\ & & \mathfrak{M}(\Lambda M) \otimes \{e\} \\ & \searrow \Phi & \downarrow \tilde{\Phi} \otimes \text{id} \\ & & \mathcal{A} \otimes \{e\} \end{array}$$

* Как видно из следующего абзаца, под ΛM сейчас понимается $C^0(S, M)$, что законно ввиду 1.2.10.

где $\tilde{\Psi}_{ev}$ — единственное отображение ДГА (его существование гарантируется доказанным предложением), при котором верхний треугольник становится коммутативным. Так как нижний треугольник гомотопически коммутативен, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}(M) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{A} \otimes \{e\} \\ & \searrow \Phi & \downarrow (\tilde{\Phi} \cdot \tilde{\Psi}_{ev}) \otimes \text{id} \\ & & \mathcal{A} \otimes \{e\} \end{array}$$

также гомотопически коммутативна.

Из предложения следует, что $(\tilde{\Phi} \cdot \tilde{\Psi}_{ev}) \otimes \text{id}$ гомотопно $\text{id} \otimes \text{id}$, откуда в свою очередь вытекает, что $\tilde{\Psi}_{ev}: \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{M}(\Lambda M)$ — гомотопическая эквивалентность. Так как $\mathfrak{M}(\Lambda M)$ — единственная (с точностью до изоморфизма) минимальная ДГА в своем гомотопическом классе, а $\mathcal{A}$ минимальна по построению, то $\mathcal{A}$ изоморфна как ДГА алгебре $\mathfrak{M}(\Lambda M)$. $\square$

4.4. Несколько теорем о существовании в типичной ситуации

В § 4.3 мы доказывали существование бесконечного числа замкнутых геодезических, проводя подробный анализ комплекса Морса многообразия ΛM . При этом мы нигде не использовали геодезический поток, за исключением формулы Ботта 3.2.9, выражающей индекс кратной замкнутой геодезической через ρ -индекс.

Теперь мы хотим показать, как можно воспользоваться типичными свойствами геодезического потока, установленными в § 3.3, для доказательства того, что в типичном случае существует бесконечно много замкнутых геодезических.

Конечно, это утверждение слабее, чем теорема 4.3.5. Но его доказательство несколько проще, и, помимо этого, при некоторых условиях из него можно получить информацию о существовании бесконечного числа замкнутых геодезических около заданной геодезической эллиптического типа. Этот результат предвосхитили в своих ранних работах Пуанкаре и Биркгоф.

Снова решающую роль играет соотношение делимости (ii) из нашей фундаментальной леммы 4.3.4. Другими нашими средствами будут классы Сулливана и, что наиболее важно, теорема Биркгофа — Льюиса о неподвижной точке 3.3.3. В самом конце мы докажем, что у четномерных многообразий неотрицательной кривизны с нетривиальной фундаментальной группой есть негиперболические замкнутые геодезические. Это подкрепляет нашу гипотезу о том, что в общем случае на многообразии с конечной фундаментальной группой не все замкнутые геодезические обязательно гиперболические. Доказательство этого факта весьма просто и не требует применения тонкой фундаментальной леммы.

Результаты этого параграфа (за исключением теоремы 4.4.6) изложены в работе Клингенберга [16].

Мы рассматриваем введенные в § 4.3 классы гомологий $\omega_*(r)$, $r = 1, 2, \dots$, двойственные некоторым классам когомологий Сулливана. Напомним, что $\omega_*(r)$ двойствен либо классу $\bar{x} \wedge \bar{x}^{2r}$, либо $\bar{e}_1 \wedge \bar{x}^r \wedge \dots \wedge \bar{e}_r$.

4.4.1. Лемма. Пусть M — компактное односвязное риманово многообразие. Предположим, что все замкнутые геодезические на M гиперболические (см. § 3.2). Тогда при каждом $r = 0, 1, \dots$ существует однократная замкнутая геодезическая $c'(r)$ индекса $\dim \omega'_*(r)$. Она строится с помощью $\omega'_*(r)$ так же, как и в 4.3.4.

Замечание. Кажется маловероятным, чтобы на компактном односвязном римановом многообразии M все замкнутые геодезические могли быть гиперболическими. Действительно, Пуанкаре [1] показал, что в окрестности стандартной метрики g_0 на S^2 существует открытое множество таких метрик g , что у (S^2, g) есть эллиптическая геодезическая, длина которой приблизительно равна 2π . См. также 4.4.6. Торбергсон недавно обобщил эти результаты *).

С другой стороны, если кривизна M в каждой точке по любому двумерному направлению отрицательна или, более общо, если геодезический поток на касательном расслоении многообразия M является потоком Аносова, то все замкнутые геодезические будут гиперболическими. Заметим, однако, что в этом случае фундаментальная группа весьма велика, а именно имеет экспоненциальный рост (см. Аносов [1], Клингенберг [12], § 5.3) **).

Доказательство. Согласно предположению, все замкнутые геодезические на M невырождены. Поэтому так же, как в 4.3.4, при каждом $r = 0, 1, \dots$ мы можем построить замкнутые геодезические $c(r)$ и $c'(r)$ с индексами $\dim \omega_*(r)$ и $\dim \omega'_*(r)$ соответственно, такие, что кратность $m'(r)$ геодезической $c'(r)$ делит кратность $m(r)$ геодезической $c(r)$.

Теорема 3.2.12 дает простую формулу для индексов гиперболических замкнутых геодезических $c(r) = c_0(r)^{m(r)}$ и $c'(r) = = c'_0(r)^{m'(r)}$. Из этой формулы получаем

$$m(r) \operatorname{ind} c_0(r) + 1 = m'(r) \operatorname{ind} c'_0(r).$$

*). См. Грюнталь [2], Торбергсон [3], Бальмани, Торбергсон и Циллер [1].

**). Легко доказать, что у потока Аносова число периодических траекторий с периодом $\leq T$ экспоненциально растет с ростом T . А из § 5.3 следует, что если геодезический поток является потоком Аносова, то в каждом нетривиальном классе сопряженных элементов фундаментальной группы имеется ровно одна замкнутая геодезическая.

Поэтому из $m'(r) | m(r)$ следует, что $m'(r) = 1$, и тем самым теорема 4.4.1 доказана. $\square$

Пусть $\mathcal{S} = \mathcal{S}M$ — пространство римановых метрик на компактном односвязном дифференцируемом многообразии. Рассмотрим следующие его подмножества

$\mathcal{S}_H$ = множество таких g , что (M, g) имеет лишь гиперболические замкнутые геодезические;

$\mathcal{S}_T$ = множество таких g , что (M, g) имеет по крайней мере одну замкнутую геодезическую закручивающего типа, т. е. этой замкнутой геодезической отвечает закручивающее отображение Пуанкаре (см. § 3.3). Ясно, что $\mathcal{S}_T$ открыто.

Как уже было сказано выше, $\mathcal{S}_H$, по-видимому, пусто. Внутренность $\mathcal{S}_H$ обозначим через $\tilde{\mathcal{S}}_H$.

4.4.2. Теорема. Пусть M — компактное односвязное дифференцируемое многообразие. Тогда $\tilde{\mathcal{S}} := \tilde{\mathcal{S}}_H \cup \mathcal{S}_T$ является открытым и плотным множеством в $\mathcal{S} = \mathcal{S}M$. В частности, если $\mathcal{S}_H$ пусто, то в $\mathcal{S}$ существует такое открытое и плотное подмножество $\tilde{\mathcal{S}}$, что при каждом $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{S}}$ на $\tilde{M} = (M, \tilde{g})$ имеется по крайней мере одна такая однократная замкнутая геодезическая $\tilde{c}_0$, что в каждой окрестности иммерсированной окружности $\tilde{c}_0(S)$ на $\tilde{M}$ существует бесконечно много однократных замкнутых геодезических $\tilde{c}_0(k)$, $k = 1, 2, \dots$, длины которых стремятся к бесконечности.

Замечание. Особый интерес представляет вторая часть этой теоремы, где утверждается, что существует бесконечно много однократных замкнутых геодезических на $\tilde{M}$, которые группируются вокруг одной замкнутой геодезической $\tilde{c}_0$ на $\tilde{M}$. Это явление происходит каждый раз, когда появляется замкнутая геодезическая закручивающего типа. Есть надежда, что когда-нибудь удастся доказать существование в типичной ситуации столь большого числа замкнутых геодезических закручивающего типа, что замыкание тех $X_0 \in T_1M$, которые соответствуют периодическим траекториям геодезического потока в T_1M , имеет положительную меру. Как частичный результат в этом направлении можно рассматривать 3.3.4 вместе с приведенной ниже теоремой 4.4.6 в применении к проективной плоскости с метрикой положительной кривизны.

Доказательство. Ясно, что $\tilde{\mathcal{S}}$ открыто. Оно также и плотно. В самом деле, в дополнении к множеству $\mathcal{S}_H$ всюду плотны такие метрики $g \in \mathcal{S}$, для которых (M, g) имеет по крайней мере одну замкнутую геодезическую c , такую, что для нее отображение Пуанкаре P_c не гиперболическое. Из 3.3.8 видно, что каждую такую метрику можно сколь угодно близко аппроксиро-

мировать метрикой, имеющей замкнутую геодезическую закручивающего типа. Остальная часть доказательства следует из 3.3.3. $\square$

Укажем теперь еще одно остаточное множество $\mathcal{E}^*$ из $\mathcal{E}M$, которое может оказаться полезным в дальнейшей работе над типичными свойствами замкнутых геодезических. Оно использовалось в работе Клингенберга [16] для доказательства типичности существования бесконечного числа однократных замкнутых геодезических.

Пусть $g \in \mathcal{E}$. Для каждой замкнутой геодезической c на (M, g) рассмотрим соответствующее линейное отображение Пуанкаре P_c . Собственные значения отображения P_c , равные по модулю 1, запишем в виде $e^{\pm 2\pi i a}$, $0 \leq a \leq 1/2$. Напомним, что $a=0$ означает, что c вырожденна, см. 3.2.12..

Обозначим через $A(M, g)$ множество всех чисел a , определенных таким способом для всех замкнутых геодезических c на (M, g) . Рассмотрим следующее свойство метрики g на M :

(α) множество $A(M, g) \cup \{1\}$ свободно над
рациональными числами.

Иными словами, все $a \in A(M, g)$ иррациональны и любая конечная система таких a линейно независима над $\mathbb{Q}$.

Заметим, что риманова метрика g , удовлетворяющая условию (α), имеет только невырожденные замкнутые геодезические. Метрики с этим последним свойством Абрахам [1] назвал бугристыми. Поэтому для метрик, удовлетворяющих условию (α), напрашивается название *сверхбугристые*.

4.4.3. Лемма. *Множество $\mathcal{E}(\alpha)$, состоящее из римановых метрик, удовлетворяющих условию (α), содержит остаточное подмножество.*

Доказательство (см. Клингенберг [16]). Для каждого целого $m > 0$ рассмотрим следующее свойство:

(α, m) если $\{k_a; a \in A(M, g)\}$ — такое семейство
целых чисел, что $1 \leq \sum_a |k_a| \leq m$, то $\sum_a k_a a \notin \mathbb{Z}$.

Заметим, что при выполнении (α, m), в частности, ни для какой o ни одно собственное значение отображения Пуанкаре P_c не является корнем степени m из единицы.

Ясно, что (α) является пересечением свойств (α, m) по всем $m \in \mathbb{N}$. Поэтому достаточно показать, что множество $\mathcal{E}(\alpha, m)$, состоящее из римановых метрик, удовлетворяющих (α, m), содержит остаточное множество.

Для этого будем действовать так же, как и при доказательстве 3.3.9. Рассмотрим свойство

(α, m, κ) все замкнутые геодезические c , для которых $E(c) \leq \kappa$, удовлетворяют (α, m) .

Покажем, что

(i) множество $\mathcal{S}(\alpha, m, \kappa) \subset \mathcal{S}$ метрик, удовлетворяющих (α, m, κ) , плотно;

(ii) $\mathcal{S}(\alpha, m, \kappa)$ открыто.

Для доказательства (i) напомним, что множество метрик, у которых все замкнутые геодезические невырождены, плотно (см. 3.3.9). У такой метрики при каждом κ существует лишь конечное число замкнутых геодезических, лежащих в Λ^* . Из этих геодезических мы получаем конечное число условий на множество $A(M, g)$. С помощью возмущений того же типа, что и в доказательстве 3.3.9, мы можем сколь угодно хорошо приблизить метрику g элементами из $\mathcal{S}(\alpha, m, \kappa)$.

Для доказательства (ii) напомним, что если у метрики g все замкнутые геодезические с $0 < E \leq \kappa$ невырождены, то существует такое $\varepsilon > 0$, что ни у g , ни у достаточно близкой к g метрики нет новых замкнутых геодезических с $0 < E < \kappa + \varepsilon$, а «прежние» замкнутые геодезические (замкнутые геодезические g с $0 < E \leq \kappa$) при малом изменении g непрерывно изменяются. При этом для них сохраняется открытое и инвариантное свойство (α, m) . $\square$

Для нашего следующего результата нам понадобится понятие *среднего индекса* геодезической c . Будем обозначать его через I_c . Определим I_c для замкнутой геодезической c как

$$I_c = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} I_{c^m},$$

где $I_{c^m} = \text{ind } c^m$ (см. Ботт [3]).

Мы должны показать, что этот предел существует. Это, а также формула для I_c содержится в 3.2.15 — в принятых там обозначениях $I_c = \alpha_c$.

Пусть $P = P_c$ — отображение Пуанкаре, соответствующее замкнутой геодезической c . Напомним, что через $(p_j, \bar{p}_j) = (e^{2\pi i a_j}, e^{-2\pi i a_j})$, $1 \leq j \leq l-1$, мы обозначили те собственные значения отображения P_c , которые равны по модулю единице. При этом

$$a_0 = 0 \leq a_1 < \dots < a_{l-1} \leq a_l = 1/2.$$

Пусть $I_{c,j}$ — значение ρ -индекса $I_c(\rho)$ для $\rho = e^{2\pi i a_j}$, $a_{j-1} < a < a_j$, $1 \leq j \leq l$.

4.4.4. Предложение. *Средний индекс замкнутой геодезической c равен*

$$I_c = I_{c,l} - 2 \sum_{j=1}^{l-2} a_j (I_{c,j+1} - I_{c,j}).$$

Доказательство. Из 3.2.15 имеем

$$I_c = \alpha_c = 2 \sum_{j=1}^l I_{c,j} (a_j - a_{j-1}).$$

Далее положим $a_l = 1/2$. $\square$

Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему.

4.4.5. Теорема. Пусть M — компактное односвязное дифференцируемое многообразие и $\mathcal{E}^*$ — подмножество пространства $\mathcal{E}$, состоящее из тех римановых метрик g на M , у которых показатели отображений Пуанкаре, соответствующих замкнутым геодезическим на (M, g) , свободны над рациональными числами; см. (α). Тогда $\mathcal{E}^*$ содержит остаточное подмножество.

Если $g^* \in \mathcal{E}^*$, то из леммы 4.3.4 и предложения 4.4.4 о среднем индексе следует, что на (M, g^*) есть бесконечно много замкнутых геодезических.

Доказательство. Мы выведем противоречие из следующего предположения: существует такая последовательность целых чисел $\{r_i\}$, что если $c(r_i)$ и $c'(r_i)$ — геодезические, построенные в соответствии с леммой 4.3.4 по циклам $\omega_*(r_i)$ и их гомотопиям $\omega'_*(r_i)$, то $c(r_i)$ и $c'(r_i)$ являются повторениями ровно двух однократных замкнутых геодезических c и c' соответственно. Ясно, что отсюда следует теорема.

Для получения противоречия рассмотрим геодезические $c(r_i) = c^{m_i}$ и $c'(r_i) = c'^{m'_i}$, где $m_i = q_i m'_i$, q_i — целое и $E(c(r_i)) = m_i^2 E(c) < E(c'(r_i)) = m_i'^2 E(c')$.

Ясно, что $c \neq c'$. Мы утверждаем, что последовательность $\{q_i\}$ ограничена. В самом деле, согласно 4.2.7 (см. также 3.2.15), существуют такие $\alpha > 0$ и $\beta \geq 0$, что

$$q_i m'_i \alpha - \beta + 1 \leq \text{ind } c^{q_i m'_i} + 1 = \text{ind } c'^{m'_i}.$$

С другой стороны, из 3.2.15 следует существование таких $\alpha', \beta' \geq 0$, что $\text{ind } c'^{m'_i} \leq \alpha' m'_i + \beta'$. Поэтому $q_i \leq (\alpha' + \beta' + \beta)/\alpha$, т. е. последовательность $\{q_i\}$ ограничена.

Следовательно, перейдя к подпоследовательности, которую мы снова будем обозначать через $\{i\}$, можно считать, что $m_i = q m'_i$. Тогда из равенства $\text{ind } c'(r_i) = \text{ind } c(r_i) + 1$ мы получаем, что $q I_c = I_{c'}$, или, применяя 4.4.4,

$$2q \sum_j a_j \Delta I_j - q I_l = 2 \sum_{j'} a'_{j'} \Delta I'_{j'} - I'_{l'},$$

где ΔI_j , I_l , $\Delta I'_{j'}$ и $I'_{l'}$ — целые числа. Из предположения о рациональной независимости показателей следует, что ΔI_j и $\Delta I'_{j'}$ все равны нулю. Следовательно, если ρ не является собственным

значением отображения P_c , то $I_c = I_c(\rho)$, а если ρ не является собственным значением отображения $P_{c'}$, то $I_{c'} = I_{c'}(\rho)$.

Так как ни P_c , ни $P_{c'}$ не имеют собственных значений, которые были бы корнями из единицы, то при всех i получаем

$$\text{ind } c^{m_i} + 1 = m_i I_c + 1 = m_i' I_{c'}, \quad m_i = q m_i',$$

что означает противоречие. $\square$

Мы закончим этот параграф частным результатом о существовании негиперболических замкнутых геодезических. Напомним, что $\mathcal{E}_T$ — это открытое подмножество в пространстве $\mathcal{E} = \mathcal{E}M$ римановых метрик на компактном дифференцируемом многообразии M , состоящее из таких метрик $g^* \in \mathcal{E}_T$, что на (M, g^*) есть закручивающие замкнутые геодезические. Согласно 3.3.3, (M, g^*) имеет бесконечно много однократных замкнутых геодезических.

4.4.6. Теорема. Пусть (M, g) — неодносвязное риманово многообразие четной размерности с кривизной $K \geq 0$ и c — такая негомотопная нулю замкнутая геодезическая, что на ней достигается минимальное значение функции E в свободном гомотопическом классе этой геодезической. Согласно 2.1.3, такие геодезические существуют. Тогда c не является гиперболической. Значит, метрика g принадлежит замыканию множества $\mathcal{E}_T$. В частности, g может быть приближена такими римановыми метриками g^* , что на (M, g^*) есть бесконечно много однократных замкнутых геодезических.

Доказательство. Так как минимальное значение функции E достигается на c , то индекс c равен нулю. Пусть $\tilde{c} = c^2$ — дважды пройденная геодезическая c , т. е. $\tilde{c}(t) = c(2t)$, $t \in S$. Тогда $\tilde{c}$ ориентируема. Это означает, что при параллельном перенесении нормального слоя над точкой $0 \in S$ иммерсии

$$S \rightarrow M, \quad t \mapsto \tilde{c}(t)$$

вдоль $\tilde{c}(t)$ в точку $1 = 0 \in S$ полученное линейное преобразование слоя является элементом специальной ортогональной группы $SO(2m-1)$, $2m = \dim M$. Следовательно, вдоль $\tilde{c}(t)$ существует такое параллельное периодическое векторное поле $\xi(t)$, что $|\xi(t)| = 1$, $\langle \xi(t), \dot{\tilde{c}}(t) \rangle = 0$ и $\nabla \xi(t) = 0$.

Так как $\langle R(\xi(t), \dot{\tilde{c}}(t), \dot{\tilde{c}}(t)), \xi(t) \rangle = K(\xi, \dot{\tilde{c}})(t) |\dot{\tilde{c}}(t)|^2 \geq 0$ (где $K(\xi, \dot{\tilde{c}})$ — кривизна в двумерном направлении, определяемом векторами $\xi, \dot{\tilde{c}}$), то

$$D^2 E(\tilde{c})(\xi, \xi) = - \int_0^1 \langle R(\xi(t), \dot{\tilde{c}}(t), \dot{\tilde{c}}(t)), \xi(t) \rangle dt \leq 0.$$

Равенство достигается, только если $K(\xi, \dot{\tilde{c}})(t) \equiv 0$. Тогда, в частности, $\xi(t)$ — периодическое поле Якоби и, следовательно, $\tilde{c}$ вырожденна *).

Если бы теперь c была гиперболической, то и $\tilde{c}$ должна была бы быть гиперболической, а не вырожденной, вопреки доказанному. $\square$

Замечание. Пусть M — компактное многообразие произвольной размерности (не обязательно четной) и $K > 0$. Тогда при достаточно большом m повторение c^m геодезической c будет содержать сопряженные точки и, следовательно, иметь положительный индекс. Поэтому если $\text{ind } c = 0$, то c не может быть гиперболической. Это доказывает существование негиперболических замкнутых геодезических на M в предположении, что M односвязно.

*1) Такое же рассуждение используется при доказательстве теоремы Синга: замкнутое риманово многообразие четной размерности, кривизна которого положительна (во всех точках и по всем двумерным направлениям), односвязно.

ДРУГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этой главе мы собрали дополнительные результаты о замкнутых геодезических. Мы начнем с доказательства теоремы о трех замкнутых геодезических. Эта теорема является обобщением на произвольные компактные односвязные римановы многообразия классического результата Люстерника и Шнирельмана [1], доказавших существование трех замкнутых геодезических на поверхности рода сферы.

Суть этой теоремы состоит в том, что всегда существуют по крайней мере три относительно короткие замкнутые геодезические, — заметим, что в гл. 4 ничего не было сказано о соотношениях между длинами геодезических и другими геометрическими величинами на многообразии.

В § 5.2 мы собрали несколько результатов о компактных односвязных многообразиях специального вида, таких, как симметрические пространства, пространства, у которых все геодезические замкнуты и имеют одинаковую длину, многообразия, на которых геодезические потоки имеют дополнительные интегралы (такими многообразиями являются, например, поверхности Лиувилля).

В § 5.3 мы приводим подробное описание геодезического потока на многообразиях гиперболического типа. Типичными примерами таких многообразий являются многообразия, допускающие метрику строго отрицательной кривизны.

Этот параграф мы закончим результатом о многообразиях, которые накрываются торами.

5.1. Теорема о трех замкнутых геодезических

В 1929 г. Люстерник и Шнирельман [1] доказали, что на произвольной поверхности топологического рода 2-мерной сферы всегда существуют три замкнутые геодезические без самопересечений. Подробное доказательство их результата было дано значительно позже Люстерником [1].

Доказательство Люстерника и Шнирельмана существенно использует теорему Жордана для двумерной сферы. Мы дадим обобщение их теоремы на произвольные компактные односвязные многообразия. Доказательство основывается на соотношении делимости того же типа, что и соотношение, установленное в 4.3.4.

В нашем обобщенном варианте теоремы не утверждается, что геодезические, о существовании которых идет речь, не имеют самопересечений. Их основное свойство здесь состоит в том, что они сравнительно короткие. В конце параграфа мы докажем результат Морса о том, что в общем случае существует лишь «несколько» коротких замкнутых геодезических.

Мы начнем с построения некоторых цепей в пространстве окружностей на сфере S^k . Напомним, что в § 2.3 мы определили в пространствах AS^k и ΓS^k , состоящих соответственно из параметризованных и непараметризованных окружностей на S^k , структуры векторных расслоений

$$\alpha: AS^k - A^0S^k \rightarrow BS^k \cong V(2, k-1),$$

$$\gamma: \Gamma S^k - \Gamma^0S^k \rightarrow \Delta S^k \cong G(2, k-1),$$

стандартным слоем в которых является $(k-1)$ -мерный диск. При этом нам пришлось удалить из AS^k и ΓS^k тривиальные окружности A^0S^k и Γ^0S^k .

Отображения α и γ ставят в соответствие нетривиальной окружности большой круг, лежащий в плоскости, параллельной той плоскости, в которой находится окружность.

Так же, как в § 2.3, мы считаем, что сфера S^k изометрично вложена в евклидово пространство $\mathbb{R}^{k+1}$ с координатами $(x_0, \dots, x_k)$.

В § 2.3 мы ввели базис $[a_1, a_2]$, $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq k-1$, $\mathbb{Z}_2$ -гомологий пространства $\Delta S^k = G(2, k-1)$. Обозначим через $v(a_1, a_2)$ цикл из $\Gamma S^k \bmod \Gamma^0S^k$, который соответствует циклу $[a_1, a_2]$ при изоморфизме Тома *):

$$H_*(G(2, k-1)) \rightarrow H_{*+(k-1)}(\Gamma S^k, \Gamma^0S^k).$$

Другими словами, $v(a_1, a_2)$ есть взятое по модулю Γ^0S^k ограниченное расслоения на $(k-1)$ -мерные диски γ на цикл $[a_1, a_2]$ из базисного пространства расслоения γ . Заметим, что $\dim[a_1, a_2] = a_1 + a_2$ и, следовательно, $\dim v(a_1, a_2) = a_1 + a_2 + k - 1$.

Мы начнем с $(k-1)$ -мерного цикла $v(0, 0)$. Он может быть записан в виде $\pi \circ u(0, 0)$, где

$$\pi = \pi|_{AS^k}: (AS^k, A^0S^k) \rightarrow (\Gamma S^k, \Gamma^0S^k)$$

*) В § 2.3 мы писали $\{a_1, a_2\}$ вместо $v(a_1, a_2)$.

— проекция, а

$$u(0, 0): (D^{k-1}, \partial D^{k-1}) \rightarrow (AS^k, A^0S^k)$$

состоит из параметризованных окружностей, параллельных параметризованному большому кругу $(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0, \dots, 0)^*$.

Наша следующая цель состоит в отыскании для оставшихся пар (a_1, a_2) , $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq k-1$, таких цепей $u(a_1, a_2)$ из $AS^k \bmod A^0S^k$, что $\pi \cdot u(a_1, a_2) = v(a_1, a_2)$. Для этого мы построим несколько гомотопий.

Пусть $\psi_t^{1,2}$, $0 \leq \tau \leq 1$, — продолжение на $\mathbb{R}^{k+1}$ вращения в плоскости (x_1, x_2) в положительном направлении на угол $\tau \cdot 180^\circ$, которое на ортогональной $(k-1)$ -мерной плоскости является тождественным преобразованием. Определим

$$u(0, 1): (D^{k-1}, \partial D^{k-1}) \times [0, 1] \rightarrow (AS^k, A^0S^k),$$

полагая $^{**}) u(0, 1)(c; \tau) := \psi_t^{1,2} \cdot u(0, 0)(c)$.

Имеет место равенство

$$\partial u(0, 1) = -\partial u(0, 0) - u(0, 0),$$

т. е. $u(0, 1)$ — гомотопия, соединяющая $u(0, 0)$ с $-\partial u(0, 0)$. В самом деле, отображение

$$u(0, 1)(c; 0) = u(0, 0)(c) \mapsto \partial u(0, 1)(c; 1)$$

переводит образ $u(0, 0)$ в себя и действует на нем как некоторое отражение $^{***})$.

Кроме того, $\pi \cdot u(0, 1) = v(0, 1)$.

Пусть $\psi_t^{2,3}$, $0 \leq \tau \leq 1$, — продолжение на $\mathbb{R}^{k+1}$ вращения в плоскости (x_2, x_3) в положительном направлении на угол $\tau \cdot 180^\circ$, которое на ортогональной $(k-1)$ -мерной плоскости является тождественным преобразованием. Для $k-1 > 1$ определим

$$u(0, 2): (D^{k-1} \times [0, 1], \partial D^{k-1} \times [0, 1]) \times [0, 1] \rightarrow (AS^k, A^0S^k),$$

полагая $u(0, 2)(c; \tau_1, \tau) = \psi_t^{2,3} \cdot u(0, 1)(c; \tau_1)$.

Ясно, что $\pi \cdot u(0, 2) = v(0, 2)$.

$^*)$ Будем считать D^{k-1} вложенным в $\mathbb{R}^{k+1}$ как единичный диск подпространства $x_0 = x_1 = 0$. Тогда при $c \in D^{k-1}$

$$u(0, 0)(c)(t) = \sqrt{1 - |c|^2} (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0, \dots, 0) + (0, 0, c_2, \dots, c_k).$$

Точке $c=0$ — центру диска — соответствует большой круг, указанный в основном тексте. Как элемент AS^k он является точкой, лежащей в BS^k , а $u(0, 0)(D^{k-1} - \partial D^{k-1})$ совпадает со слоем расслоения α над этой точкой.

$^{**})$ Собственно, здесь следовало бы писать $\Lambda \psi_t^{1,2}$, а не $\psi_t^{1,2}$. Аналогичные замечания относятся к некоторым формулам ниже.

$^{***})$ $\partial u(0, 1)(c; 1) = u(0, 0)(c')$, где c' получается из c изменением знака у c_2 .

Кроме того, имеет место равенство $\partial u(0, 2) = \theta u(0, 1) - u(0, 1)$, в котором мы, конечно, отбросили цепи размерности $\leq k^*$.

В самом деле, на больших кругах сферы $S^2 = \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, начинающихся в точке $x_0 = 1$, преобразование

$$u(0, 2)(c; \tau, 0) = u(0, 1)(c; \tau) \mapsto \theta u(0, 2)(c; \tau, 1)$$

действует как отражение в плоскости (x_0, x_2) . А цепь $u(0, 1)$ в AS^k совпадает с прообразом (точнее, замыканием прообраза) при проекции α этого множества параметризованных больших кругов (как точек BS^k). Следовательно, на цепи в BS^k , образованной этими большими кругами, рассматриваемое отображение меняет ориентацию и имеет неподвижную точку — большой круг, лежащий в плоскости (x_0, x_2) . На слое расслоения α над этим большим кругом (как элементом BS^k) рассматриваемое преобразование сводится к некоторому отражению $^{**})$.

Действуя аналогично, мы построим в конце концов гомотопию

$$u(0, k-1): (D^{k-1} \times [0, 1]^{k-2}, \partial D^{k-1} \times [0, 1]^{k-2}) \times [0, 1] \rightarrow (AS^k, A^0 S^k),$$

полагая

$$u(0, k-1)(c; \tau_1, \dots, \tau_{k-2}, \tau) = \psi_\tau^{k-1, k} \cdot u(0, k-2)(c; \tau_1, \dots, \tau_{k-2}).$$

Здесь $\psi_\tau^{k-1, k}$ — продолжение на $\mathbb{R}^{k+1}$ вращения в плоскости (x_{k-1}, x_k) в положительном направлении на угол $\tau \cdot 180^\circ$, которое является тождественным преобразованием на ортогональном дополнении.

Ясно, что $\pi \cdot u(0, k-1) = v(0, k-1)$.

Кроме того, $\partial u(0, k-1) = (-1)^{k-1} \theta u(0, k-2) - u(0, k-2)$.

$^*)$ На самом деле граница содержит и другие k -мерные участки кроме указанных.

$^{**})$ Вообще для

$$u(0, i)(c; \tau_1, \dots, \tau_i) := \Lambda \psi_{\tau_i}^{i, i+1} \dots \Lambda \psi_{\tau_1}^{1, 2} \cdot u(0, 0)(c)$$

преобразование

$$(*) \quad u(0, i+1)(c; \tau_1, \dots, \tau_i, 0) = \\ = u(0, i)(c; \tau_1, \dots, \tau_i) \mapsto \theta u(0, i+1)(c; \tau_1, \dots, \tau_i, 1)$$

сводится при $c=0$ к преобразованию

$$u(0, i)(0; \tau_1, \dots, \tau_i) \mapsto u(0, i)(0; 1-\tau_1, \dots, 1-\tau_i),$$

а слой расслоения α над неподвижной точкой этого последнего преобразования, для которой все $\tau_j = 1/2$, переходит под действием $(*)$ в себя, и в нем (даже в его замыкании) преобразование $(*)$ сводится к

$$u(0, i)(c; 1/2, \dots, 1/2) \mapsto u(0, i)(c'; 1/2, \dots, 1/2),$$

где c' получается из c изменением знака c_{i+2} .

Теперь мы будем строить цепи $u(i, k-1)$, для которых $\pi \cdot u(i, k-1) = v(i, k-1)$ и $0 \leq i \leq k-1$. Начнем с

$u(1, k-1): (D^{k-1} \times [0, 1]^{k-1}, \partial D^{k-1} \times [0, 1]^{k-1}) \times [0, 1] \rightarrow (AS^k, A^0 S^k)$, где

$$u(1, k-1)(c; \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, \tau) = \psi_\tau^{0,1} \cdot u(0, k-1)(c; \tau_1, \dots, \tau_{k-1}).$$

Здесь $\psi_\tau^{0,1}$ — продолжение на $\mathbb{R}^{k+1}$ вращения в плоскости (x_0, x_1) в положительном направлении на угол $\tau \cdot 180^\circ$, которое, как обычно, является тождественным преобразованием на ортогональном дополнении.

Мы утверждаем, что

$$\partial u(1, k-1) = -\theta e^{i\pi} \cdot u(0, k-1) - u(0, k-1).$$

Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что отображение

$$u(1, k-1)(c; \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, 0) = u(0, k-1)(c; \tau_1, \dots, \tau_{k-1}) \mapsto \mapsto e^{i\pi} \cdot u(1, k-1)(c; \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, 1)$$

действует на больших кругах с началом в точке $x_0 = 1$ как отражение в плоскости (x_0, x_1) . Следовательно, на этих больших кругах отображение

$$u(1, k-1)(c; \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, 0) \mapsto \theta e^{i\pi} \cdot u(1, k-1)(c; \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, 1)$$

есть отражение относительно пространства $(x_0, x_2, \dots, x_k)$, и поэтому оно меняет ориентацию цепи в BS^k , образованной этими большими кругами. А цепь $u(0, k-1)$ в AS^k совпадает с замыканием прообраза при проекции α этого множества больших кругов. На слое расслоения α над большим кругом, принадлежащим пространству $x_1 = 0$, отображение также обращает ориентацию. Следовательно, наше утверждение верно.

Ясно, что $\pi \cdot u(1, k-1) = v(1, k-1)$. Действительно, $\pi|u(1, k-1)$ является взаимно однозначным отображением, за исключением границы $\partial u(1, k-1)$.

Продолжая эти построения, мы для $k-1 > 1$ определим $u(2, k-1)(c; \tau_1, \dots, \tau_k, \tau)$, полагая

$$u(2, k-1)(c; \tau_1, \dots, \tau_k, \tau) = \psi_\tau^{0,2} \cdot u(1, k-1)(c; \tau_1, \dots, \tau_k),$$

где $\psi_\tau^{0,2}$ есть обычное продолжение вращения в плоскости (x_0, x_2) в положительном направлении на угол $\tau \cdot 180^\circ$. Снова

$$\partial u(2, k-1) = \pm \theta e^{i\pi} \cdot u(1, k-1) - u(1, k-1)$$

и

$$\pi \cdot u(2, k-1) = v(2, k-1).$$

Продолжая в том же духе, мы в конце концов определим такой цикл $u(k-1, k-1)$, что $\pi \cdot u(k-1, k-1) = v(k-1, k-1)$

Если мы окончим первую серию деформаций на построении цикла $u(0, a_2)$ и сразу после этого начнем вторую серию, то получим, что для каждой пары (a_1, a_2) , $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq k-1$, можно построить цепь $u(a_1, a_2)$, которая под действием π проектируется на $v(a_1, a_2)$ так, что $\pi|u(a_1, a_2)$ взаимно однозначно, за исключением границы.

Теперь мы сформулируем так называемую *теорему о трех замкнутых геодезических*.

5.1.1. Теорема. Пусть (M, g) — компактное односвязное риманово многообразие. Здесь M обозначает соответствующее дифференцируемое многообразие, а g — риманову метрику на M . Пусть

$$f: (S^k, g_0) \rightarrow (M, g)$$

— отображение стандартной k -мерной сферы, которое представляет неделимый целочисленный класс гомологий бесконечного порядка. Известно, что такие отображения существуют и $k \geq 2$.

Тогда на (M, g) существуют $2k-1 \geq 3$ однократных замкнутых геодезических, которые являются короткими в следующем смысле. Пусть $\lambda(f)$ — верхняя грань длин кривых на (M, g) , которые являются образами при отображении f окружностей из (S^k, g_0) . Тогда длины этих $2k-1$ однократных геодезических $\leq \lambda(f)$.

Замечание. В случае $M = S^2$ Люстерник и Шнирельман [1] существенно использовали теорему Жордана для доказательства теоремы. Поэтому их доказательство не может быть обобщено. Наше доказательство использует соотношение делимости того же типа, что и в лемме 4.3.4.

Отметим, что мы не утверждаем, что эти $2k-1$ геодезических не имеют самопересечений. Для случая $M = S^n$ и при некоторых ограничениях на кривизну некоторый результат в этом направлении был доказан в 2.3.9.

Доказательство. Если в наших рассуждениях метрика g не меняется, то для простоты вместо (M, g) мы будем писать просто M .

Пусть $\kappa^* > 0$ — такое некритическое значение функции $E: \Lambda M \rightarrow \mathbb{R}$, что $\Lambda f(AS^k) \subset \Lambda^{\kappa^*} M$.

Предположим сначала, что все геодезические, лежащие в Λ^{κ^*} , невырождены. Тогда будет определен комплекс Морса $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\kappa^*} M$ многообразия $\Lambda^{\kappa^*} M$, см. § 2.5. Используя те же рассуждения, что и при доказательстве 4.3.4, можно убедиться в том, что гомотопический класс каждой из цепей $u(a_1, a_2)$ может быть представлен в $\mathcal{M}$ суммой с целыми коэффициентами неустойчивых и сильно неустойчивых многообразий размерности $\leq \dim u(a_1, a_2)$.

Это представление в $\mathcal{M}$ мы обозначим через $u_j(a_1, a_2)$.

Мы рассматриваем следующие отображения (см. § 2.2):

$$\tilde{\pi}: \Lambda M \rightarrow \tilde{\Pi} M = \Lambda M/S; \quad \pi: \Lambda M \rightarrow \Pi M = \Lambda M/O \quad (2).$$

Из предположений относительно $f: S^k \rightarrow M$ следует, что отображение

$$\pi \cdot u_f(0, 0): (D^{k-1}, \partial D^{k-1}) \rightarrow (\Pi M, \Pi^0 M)$$

является нетривиальным циклом mod 2 (см. доказательство 4.3.4). Поэтому в $u_f(0, 0)$ входит такое сильно неустойчивое многообразие $W_{uu}(c)$ размерности $\dim u(0, 0)$, что $\pi \cdot W_{uu}(c)$ входит в $\pi \cdot u_f(0, 0)$ с нечетным коэффициентом. Фиксируем это c и назовем его $c(0, 0)$.

Мы утверждаем, что в $u_f(0, 1)$ есть такое $W_{uu}(c')$ размерности $\dim u(0, 1)$, что $\pi \cdot W_{uu}(c')$ входит в $\pi \cdot u_f(0, 1)$ с нечетным коэффициентом и $W_{uu}(c(0, 0))$ принадлежит краю $\partial W_{uu}(c')$ многообразия $W_{uu}(c')$.

Для того чтобы это доказать, заметим прежде всего, что из $\pi \cdot W_{uu}(c(0, 0)) \in \pi \cdot u_f(0, 0) \bmod 2$ следует, что целый коэффициент при $\tilde{\pi} \cdot W_{uu}(c(0, 0))$ в $\partial \tilde{\pi} \cdot u_f(0, 1) = \tilde{\pi} \cdot \partial u_f(0, 1) = -\tilde{\pi} \cdot \theta u_f(0, 0) = \tilde{\pi} u_f(0, 0)$ нечетный, так как целые коэффициенты при $\tilde{\pi} \cdot W_{uu}(c(0, 0))$ и при $\tilde{\pi} \cdot W_{uu}(\theta c(0, 0))$ в $\tilde{\pi} \cdot u_f(0, 0)$ различаются по модулю 2 на 1. Поэтому, так как $W_{uu}(c(0, 0)) \subset u_f(0, 0)$, должно существовать такое $W_{uu}(c') \subset u_f(0, 1)$ размерности $\dim u(0, 1)$, что $W_{uu}(c(0, 0)) \subset \partial W_{uu}(c')$. Кроме того, коэффициент при $\tilde{\pi} \cdot W_{uu}(c')$ в $\tilde{\pi} \cdot u_f(0, 1)$ отличается по модулю 2 на 1 от коэффициента при $\tilde{\pi} \cdot W_{uu}(\theta c')$ в $\tilde{\pi} \cdot u_f(0, 1)$, так как соответствующий факт верен для коэффициентов при $\tilde{\pi} \cdot W_{uu}(c(0, 0)) \subset \tilde{\pi} \cdot \partial W_{uu}(c')$ и при $\tilde{\pi} \cdot W_{uu}(\theta c(0, 0)) \subset \tilde{\pi} \cdot \partial W_{uu}(c')$ в $\tilde{\pi} \cdot u_f(0, 0)$. Это завершает доказательство утверждения о том, что $\pi \cdot W_{uu}(c') \in \pi \cdot u_f(0, 1) \bmod 2$.

Мы не утверждаем, что ненулевой $\mathbb{Z}_2$ -цикл $\pi \cdot u_f(0, 1)$ не гомологичен нулю. Все, что мы использовали для доказательства соотношения $\pi \cdot u_f(0, 1) \neq 0 \bmod 2$, — это то, что $\pi \cdot u_f(0, 0) \neq 0 \bmod 2$. Рассуждая аналогично, мы можем показать, что $\pi \cdot u_f(0, 2)$ также является ненулевым циклом из $\Pi M \bmod \Pi^0 M$ (если $k-1 > 1$), и т. д. до тех пор, пока не дойдем до $\pi \cdot u_f(k-1, k-1)$. Только лишь про следующие $\mathbb{Z}_2$ -циклы из $\Pi M \bmod \Pi^0 M$ мы действительно уверены, что они не гомологичны нулю: $\pi \cdot u_f(0, 0)$, $\pi \cdot u_f(0, k-1)$ и $\pi \cdot u_f(k-1, k-1)$ (см. Клингенберг [6]).

Мы также рассматриваем продолжения отображений $\Lambda f \cdot u(a_1, a_2)$, $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq k-1$, до отображений полных S -орбит:

$$S \cdot \Lambda f \cdot u(a_1, a_2): S \times D^{k-1} \times [0, 1]^{a_1+a_2} \rightarrow \Lambda M,$$

$$(z, c, \tau_1, \dots, \tau_{a_1+a_2}) \mapsto z \cdot \Lambda f \cdot u(a_1, a_2)(c; \tau_1, \dots, \tau_{a_1+a_2}) = \Lambda f \cdot z \cdot u(a_1, a_2)(c; \tau_1, \dots, \tau_{a_1+a_2}).$$

На области определения этого отображения определено действие S (посредством канонического действия S на первом сомножителе S), а на ΛM определено каноническое S -действие $\tilde{\chi}$. Отображение $S \cdot \Lambda f \cdot u(a_1, a_2)$ эквивариантно по отношению к этим S -действиям. Деформации, переводящие $\Lambda f \cdot u(a_1, a_2)$ в $u_f(a_1, a_2)$, также переводят S -орбиты в S -орбиты. Поэтому мы можем рассматривать эти деформации как деформации, переводящие $S \cdot \Lambda f \cdot u(a_1, a_2)$ в эквивариантное отображение

$$S \cdot u_f(a_1, a_2): S \times D^{k-1} \times [0, 1]^{a_1+a_2} \rightarrow \mathcal{M}, \\ (z, c, \tau_1, \dots, \tau_{a_1+a_2}) \mapsto z \cdot u_f(a_1, a_2)(c; \tau_1, \dots, \tau_{a_1+a_2}).$$

Вернемся к рассмотренным выше многообразиям $W_{uu}(c(0, 0))$ из $u_f(0, 0)$ и $W_{uu}(c')$ из $u_f(0, 1)$, обладающих, как было описано выше, тем свойством, что $W_{uu}(c(0, 0))$ входит в $\partial W_{uu}(c')$. Вместо c' мы теперь будем писать $c(0, 1)$.

Существенный этап нашего доказательства состоит в установлении того факта, что кратность $m(0, 1)$ геодезической $c(0, 1)$ делит кратность $m(0, 0)$ геодезической $c(0, 0)$.

Для доказательства этого факта рассмотрим цепь $\partial W_{uu}(c(0, 1)) \cap \cap u_f(0, 0)$. Она содержит $W_{uu}(c(0, 0))$. Так как $W_{uu}(c(0, 1))$ инвариантно относительно группы изотропии $\tilde{I}(c(0, 1))$ геодезической $c(0, 1)$, то цепь $\partial W_{uu}(c(0, 1)) \cap u_f(0, 0)$ целиком содержит $\tilde{I}(c(0, 1))$ -орбиту

$$\{z_0 \cdot W_{uu}(c(0, 0)) = W_{uu}(z_0 \cdot c(0, 0)); z_0 \in \tilde{I}(c(0, 1))\}$$

многообразия $W_{uu}(c(0, 0))$. В этих терминах наше утверждение состоит в том, что по $u_f(0, 0)$ можно построить цикл $u_f^*(0, 0)$, содержащий только $W_{uu}(c(0, 0))$ и не содержащий других элементов $\tilde{I}(c(0, 1))$ -орбиты многообразия $W_{uu}(c(0, 0))$. Кроме того, существует гомотопия $u_f^*(0, 1)$ цикла $u_f^*(0, 0)$, которая содержит сильно неустойчивое многообразие, обозначаемое через $W_{uu}(c(0, 1))$, такое, что $W_{uu}(c(0, 0)) \subset \partial W_{uu}(c(0, 1))$. Так как цепь $\partial W_{uu}(c(0, 1)) \cap u_f^*(0, 0)$ должна целиком содержать $\tilde{I}(c(0, 1))$ -орбиту многообразия $W_{uu}(c(0, 0))$, то $c(0, 0)$ инвариантна относительно $\tilde{I}(c(0, 1))$.

Для построения $u_f^*(0, 0)$ будем действовать так же, как в доказательстве 4.3.4. В самом простом случае $\partial W_{uu}(c(0, 0)) = 0$. Тогда положим $u_f^*(0, 0) = W_{uu}(c(0, 0))$. Пусть $u_f^*(0, 1)$ — ограничение гомотопии $u_f(0, 1)$ на $W_{uu}(c(0, 0)) \subset u_f(0, 0)$. Так же, как и выше, мы заключаем, что в $u_f^*(0, 1)$ существует такое сильно неустойчивое многообразие, снова обозначаемое через $W_{uu}(c(0, 1))$, что $\tilde{\pi} \cdot W_{uu}(c(0, 0))$ входит в $\partial \tilde{\pi} \cdot W_{uu}(c(0, 1))$ с нечетным коэффициентом, в то время как $\tilde{\pi} \cdot W_{uu}(c(0, 0))$ входит с четным

коэффициентом. Но тогда

$$\tilde{I}(c(0, 1)) \cdot W_{uu}(c(0, 0)) = W_{uu}(c(0, 0)).$$

Вообще говоря, $\partial W_{uu}(c(0, 0)) \neq 0$. Этот случай мы разобьем на два. Пусть сначала ни одно из $W_{uu}(c_1) \subset \partial W_{uu}(c(0, 0))$ не входит (с противоположным знаком) в край ни одного из $W_{uu}(z_0 \cdot c(0, 0))$, $z_0 \in \tilde{I}(c(0, 1))$, $z_0 \cdot c(0, 0) \neq c(0, 0)$. Тогда мы можем построить цикл $u_f^*(0, 0) \subset u_f(0, 0)$, который содержит $W_{uu}(c(0, 0))$ и не содержит ни одного другого элемента S -орбиты многообразия $W_{uu}(c(0, 0))$. Ограничивая гомотопию $u_f(0, 1)$ на $u_f^*(0, 0)$, получим гомотопию $u_f^*(0, 1)$ цикла $u_f^*(0, 0)$. К $u_f^*(0, 0)$ и $u_f^*(0, 1)$ применимы все те же рассуждения, что и к паре $u_f(0, 0)$ и $u_f(0, 1)$. Поэтому найдется сильно неустойчивое многообразие в $u_f^*(0, 1)$, снова обозначаемое через $W_{uu}(c(0, 1))$, край которого содержит $W_{uu}(c(0, 0))$. Так как $u_f^*(0, 1)$ должна содержать всю $\tilde{I}(c(0, 1))$ -орбиту многообразия $W_{uu}(c(0, 0))$, то эта орбита состоит только из $W_{uu}(c(0, 0))$, т. е. $\tilde{I}(c(0, 1))$ — подгруппа группы $\tilde{I}(c(0, 0))$.

Наконец, пусть некоторое $W_{uu}(c_1) \subset \partial W_{uu}(c(0, 0))$ входит с противоположным знаком в $\partial W_{uu}(z_0 \cdot c(0, 0))$, $z_0 \cdot c(0, 0) \neq c(0, 0)$, $z_0 \in \tilde{I}(c(0, 1))$. Тогда

$$W_{uu}(c_1) - W_{uu}(z_0 \cdot c_1) \subset \partial W_{uu}(c(0, 0)).$$

Рассмотрим цепь

$$W_{uu}(c_1)[0, -r_0] = \{e^{-2\pi i r} \cdot W_{uu}(c_1); \quad 0 \leq r \leq r_0\},$$

где $z_0 = e^{2\pi i r_0}$. Граница этой цепи $W_{uu}(c(0, 0)) + W_{uu}(c_1)[0, -r_0]$ не содержит ни $W_{uu}(c_1)$, ни $-W_{uu}(z_0 \cdot c_1)$. Так же мы поступим и с остальными элементами из $\partial W_{uu}(c(0, 0))$.

В результате, так же как в доказательстве леммы 4.3.4, мы построим цикл $u_f^*(0, 0)$, содержащий $W_{uu}(c(0, 0))$, но не содержащий других элементов S -орбиты $W_{uu}(c(0, 0))$. Образ по модулю 2 цикла $u_f^*(0, 0)$ при отображении $\tilde{\pi}$ полностью принадлежит $\tilde{\pi} \cdot u_f(0, 0)$. Ограничивая $u_f(0, 1)$ на сильно неустойчивые многообразия из $u_f^*(0, 0)$ (и, в частности, на $W_{uu}(c(0, 0))$), получим гомотопию $u_f^*(0, 1)$. Определение этой гомотопии на цепи $W_{uu}(c_1)[0, -r_0]$ — то же самое, что и в доказательстве 4.3.4. К паре $u_f^*(0, 0)$, $u_f^*(0, 1)$ применимы те же рассуждения, что и к паре $u_f(0, 0)$, $u_f(0, 1)$. Поэтому мы заключаем, что в $u_f^*(0, 1)$ существует сильно неустойчивое многообразие, снова обозначаемое через $W_{uu}(c(0, 1))$, край которого содержит $W_{uu}(c(0, 0)) \subset u_f^*(0, 0)$. Полная $\tilde{I}(c(0, 1))$ -орбита многообразия $W_{uu}(c(0, 0))$ должна принадлежать $\partial W_{uu}(c(0, 1)) \cap u_f^*(0, 0)$. Следовательно, $c(0, 0)$ остается инвариантной под действием группы $\tilde{I}(c(0, 1))$. Тем

самым мы показали, что во всех случаях кратность $m(0, 1)$ геодезической $c(0, 1)$ делит кратность $m(0, 0)$ геодезической $c(0, 0)$.

Переходя далее (при $k-1 > 1$) к $u_f(0, 2)$, рассмотрим многообразие $W_{uu}(c') \subset u_f(0, 2)$ размерности $\dim u_f(0, 2)$, такое, что $\pi \cdot W_{uu}(c') \neq 0 \bmod 2$ и $W_{uu}(c(0, 1)) \subset \partial W_{uu}(c')$. Мы утверждаем, что (быть может, после некоторых изменений $u_f(0, 1)$ и вытекающих отсюда изменений $u_f(0, 2)$) группа изотропии $\tilde{I}(c')$ геодезической c' оставляет $c(0, 1)$ инвариантной. Полагая $c(0, 2)$ равной c' , получим, что кратность $m(0, 2)$ геодезической $c(0, 2)$ делит кратность $m(0, 1)$ геодезической $c(0, 1)$.

Для доказательства нашего утверждения мы снова начнем с замечания, что $\partial W_{uu}(c') \cap u_f(0, 1)$ целиком содержит $\tilde{I}(c')$ -орбиту многообразия $W_{uu}(c(0, 1))$. Так же, как и выше, мы по $u_f(0, 1)$ построим цикл $u_f^*(0, 1)$, содержащий $W_{uu}(c(0, 1))$ и не содержащий других элементов S -орбиты многообразия $W_{uu}(c(0, 1))$. Затем определим гомотопию $u_f^*(0, 2)$ цикла $u_f^*(0, 1)$. В $u_f^*(0, 2)$ существует многообразие максимальной размерности $W_{uu}(c(0, 2))$, край которого содержит $W_{uu}(c(0, 1))$. Далее мы заключаем, что $\tilde{I}(c(0, 2))$ оставляет $c(0, 1)$ инвариантной.

Аналогичные рассуждения мы применяем к $u_f(0, 3)$, ..., $u_f(0, k-1)$. Так, рассматривая $u_f(0, k-1)$, мы докажем существование критической точки $c(0, k-1)$, кратность которой (как замкнутой геодезической) $m(0, k-1)$ делит кратность $m(0, k-2)$ ранее построенной геодезической $c(0, k-2)$. Затем мы перейдем к построению $c(1, k-1)$, ..., $c(k-1, k-1)$. Таким образом мы получим последовательность $2k-1$ замкнутых геодезических $c(0, 0)$, $c(0, 1)$, ..., $c(k-1, k-1)$, в которой кратность каждого элемента делит кратность предыдущего элемента. Так как значения функции E на элементах этой последовательности строго возрастают, то однократные замкнутые геодезические, соответствующие элементам этой последовательности, попарно различны, а значения функции E на них тоже строго возрастают.

Осталось рассмотреть общий случай, когда не предполагается, что все геодезические из Λ^{*-} невырождены. Мы можем предполагать, однако, что все лежащие в $\Lambda^{*-} - \Lambda^0$ критические S -орбиты являются изолированными критическими множествами, скажем $S.c_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq \alpha_0$. Мы хотим свести этот случай к невырожденному случаю, рассматривая возмущения нашей римановой метрики g . Пусть $\tilde{g}$ — возмущение метрики. Тогда через $\tilde{M}$ мы будем обозначать соответствующее дифференцируемое многообразие, снабженное римановой метрикой $\tilde{g}$, а через $\tilde{E}$ — интеграл энергии на $\Lambda\tilde{M}$.

Так же как в доказательстве теоремы 4.3.5, мы рассмотрим окрестность $\mathcal{U}$ критического множества многообразия $\Lambda^{*-}M$, удовлетворяющую определенным условиям. Зафиксировав доста-

точно малое $\varepsilon > 0$ и такую окрестность $\mathcal{U}$, мы рассмотрим возмущения $\tilde{g} = \tilde{g}(\mathcal{U}, \varepsilon)$, удовлетворяющие условиям (а), (b) и (с), сформулированным в доказательстве теоремы 4.3.5. Из наших предыдущих рассуждений следует существование последовательности $\tilde{c}(0, 0), \dots, \tilde{c}(k-1, k-1)$ из $2k-1$ однократных замкнутых геодезических, на которых функция $\tilde{E}$ строго возрастает.

Из ограничений, наложенных на $\tilde{g}$, вытекает, что для каждой геодезической $\tilde{c}(a, b)$ из этой последовательности существует ровно одно α , при котором $\tilde{c}(a, b) \in \mathcal{U}(S.c_\alpha)$. Мы будем обозначать это c_α через $c(a, b)$. Далее, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ значения $\kappa(0, 0), \dots, \kappa(k-1, k-1)$ функции E на элементах последовательности $c(0, 0), \dots, c(k-1, k-1)$ возрастают. Чуть позже мы убедимся в том, что эти значения даже строго возрастают. Причина этого состоит в том, что элементы последовательности циклов $v(0, 0), \dots, v(k-1, k-1)$ получаются один из другого с помощью вращений, а это делает их взаимно подчиненными в некотором геометрическом смысле.

Рассмотрим $c(0, 1)$. Из того, что $\tilde{c}(0, 1) \in \mathcal{U}(S.c(0, 1))$, и свойства (b) вытекает, что гомотопический класс цикла $\Lambda f \cdot u(0, 1)$ имеет локальное представление $u_f(0, 1)$ в виде цикла из $(\Lambda^{\times(0, 1)} - M) \cup c(0, 1)$, $\Lambda^{\times(0, 1)} - M$ размерности $\dim u(0, 1)$. Другими словами, существуют такая точка $0(0, 1)$ из $D^{k-1} \times]0, 1[$ и такая ее открытая окрестность $D(0, 1)$, что

$$\begin{aligned} u_f(0, 1): (D(0, 1), D(0, 1) - 0(0, 1)) \rightarrow \\ \rightarrow (\Lambda^{\times(0, 1)} - M) \cup c(0, 1), \Lambda^{\times(0, 1)} - M), \\ u_f(0, 1)(0(0, 1)) = c(0, 1). \end{aligned}$$

Поэтому $E|_{\partial u_f(0, 1)} < \kappa(0, 1)$ и, следовательно, $\kappa(0, 0) < \kappa(0, 1)$.

Аналогично показываем, что $\kappa(0, 1) < \kappa(0, 2)$, и т. д., пока не дойдем до $\kappa(k-1, k-1)$.

Теперь мы покажем, что возмущение $\tilde{g}$ римановой метрики g может быть выбрано так, чтобы $\tilde{c}(0, 1) = c(0, 1)$. Тогда кратность $m(0, 1)$ геодезической $\tilde{c}(0, 1) = c(0, 1)$ будет делить кратность $\tilde{m}(0, 0)$ геодезической $\tilde{c}(0, 0)$. Но $\tilde{m}(0, 0)$ делит в свою очередь кратность $m(0, 0)$ геодезической $c(0, 0)$, так как $\tilde{c}(0, 0) \in \mathcal{U}(S.c(0, 0))$. Поэтому $m(0, 1)$ будет делить $m(0, 0)$.

Чтобы доказать существование метрики $\tilde{g}$ с этим свойством, рассмотрим в качестве типичного примера случай, когда $\text{ind } c(0, 1) = k-1$. Последнее означает, что гомотопический класс отображения $u_f(0, 1)$ может быть представлен в следующем виде. Во-первых, отождествим проходящий через $0 = 0(0, 1)$ поддиск D -корультиности 1 диска $D = D(0, 1)$ с диском из отрицательного инвариантного пространства $T_{c(0, 1)}^- \Lambda M$ в точке $c(0, 1)$. Кроме

того, существуют такие два единичных вектора X_{-1} и X_{+1} из ядра $T_{c(0,1)}^0 \Delta M$ и такое $\varepsilon > 0$, что соответствующий $c(0, 1)$ относительный цикл, определяемый по $u_f(0, 1)$, может быть записан в виде

$$(X, t) \in D \times]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto \begin{cases} \exp(X + tX_{-1}) & \text{при } t \leq 0, \\ \exp(X + tX_{+1}) & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

В частности, не существует семейства X_s , $-1 \leq s \leq 1$, единичных касательных векторов из $T_{c(0,1)} \Delta M$, для которого $E(\exp(tX_s)) < \chi(0, 1)$ при достаточно малых $t > 0$.

Положим $X_{-1} + X_{+1} = Y$ и $X_{-1} - X_{+1} = Z$. Вместе с X_{-1} и X_{+1} векторы Y и Z являются периодическими полями Якоби вдоль $c(0, 1)$, ортогональными к $\dot{c}(0, 1)$. В то время как $Z \neq 0$, возможность того, что $Y = 0$, не исключена. Кроме того, $\langle Y, Z \rangle_1 = 0$. Теперь выбираем такое возмущение струи второго порядка римановой метрики вдоль $c(0, 1)$, чтобы для новой метрики помимо свойств (а), (b) и (с) выполнялись бы еще неравенства

$$D^2 E(c(0, 1))(Y, Y) \geq 0 \quad \text{и} \quad > 0, \quad \text{если} \quad Y \neq 0, \\ D^2 E(c(0, 1))(Z, Z) < 0.$$

Это можно сделать при помощи методов § 3.3.

Применяя те же рассуждения, можно показать, что $m(0, 2)$ делит $m(0, 1)$, и т. д. до $m(k-1, k-1)$. Тем самым, так же как и в невырожденном случае, можно заключить, что однократные замкнутые геодезические, соответствующие последовательности $c(0, 0), \dots, c(k-1, k-1)$, все различны. $\square$

Следующий пример, изученный Морсом [2], показывает, что, вообще говоря, существует не более $n(n+1)/2$ замкнутых геодезических, которые являются короткими в смысле 5.1.1.

5.1.2. Предложение. При любом $\kappa > 2\pi^2$ все эллипсоиды $E(a_0, \dots, a_n)$, определяемые в $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнением

$$(*) \quad \sum_{i=0}^n a_i^2 x_i^2 = 1,$$

где $0 < a_0 < \dots < a_n$ и $|a_i - 1|$ достаточно малы, обладают следующим свойством. Единственными однократными замкнутыми геодезическими на $E(a_0, \dots, a_n)$, на которых значения функции E меньше κ , являются $n(n+1)/2$ главных эллипсов, которые получаются при пересечении эллипсоида с координатными плоскостями.

Доказательство. Совокупность $n+1$ функций $(x_i(s))$ тогда и только тогда задает геодезическую на $E(a_0, \dots, a_n)$, параметр на которой равен длине дуги, когда $(x_i(s))$ удовлетворяют сле-

дующим уравнениям:

$$(i) \quad x_i''(s) + \lambda(s) a_i^2 x_i(s) = 0, \quad i = 0, \dots, n,$$

с некоторой функцией $\lambda(s)$ и $\sum_i x_i'(s) x_i'(s) = 1$. В самом деле,

это означает просто, что кривая $(x_i(s))$ на $E(a_0, \dots, a_n)$, параметризованная длиной дуги, является геодезической в том и только в том случае, когда вторая производная направлена перпендикулярно эллипсоиду. Можно указать явный вид функции $\lambda(s)$, а именно

$$\lambda(s) = \sum_i a_i^2 x_i'(s) x_i'(s) / \sum_i a_i^4 x_i(s) x_i(s).$$

Эллипсоид $E(1, \dots, 1)$ — это сфера со стандартной метрикой g_0 . В этом случае для каждой геодезической $(x_i(s))$ выполняется следующее свойство. Пусть $x_k(s) \not\equiv 0$. Тогда при некотором s , скажем $s = s_0$, $x_k(s)$ равно нулю, а все остальные нули $x_k(s)$ находятся в точках $s = s_0 + q\pi$, $q \in \mathbb{Z}$.

Фиксируем $\kappa > 2\pi^2$ и выберем целое q^* так, чтобы $\sqrt{2\kappa} < q^*\pi + \pi/2$. Из нашего предыдущего замечания вытекает существование такого $\varepsilon = \varepsilon(q^*) > 0$, что эллипсоид $E(a_0, \dots, a_n)$, у которого $|a_i - 1| < \varepsilon$, обладает следующим свойством. Для произвольной геодезической $(x_i(s))$ рассмотрим такое $k \in [0, n]$, что $x_k(s) \not\equiv 0$. Тогда существует такое s_0 , что $x_k(s_0) = 0$ и первые q^* следующих за s_0 нулей $s_1, \dots, s_{q^*}$ удовлетворяют неравенствам

$$s_0 + q\pi - \pi/2 < s_q < s_0 + q\pi + \pi/2.$$

Выберем теперь a_i так, чтобы $|a_i - 1| < \varepsilon$ и $0 < a_0 < \dots < a_n$. Пусть $(x_i(s))$ — замкнутая геодезическая на $E(a_0, \dots, a_n)$, для которой $E \leq \kappa$. Если $x_i(s) \equiv 0$ при всех i , за исключением двух, то геодезическая является кратным повторением одного из главных эллипсов. Следовательно, для того, чтобы доказать наше предложение, достаточно получить противоречие, допустив, что есть три значения i , скажем $i = j, k, l$, такие, что $x_i(s) \not\equiv 0$. Будем считать, что $j < k < l$ и, следовательно, $a_j < a_k < a_l$.

Для каждого i положим $(x_i(s), x_i'(s)) = X_i(s)$. Тогда $X_i(s + \omega) = X_i(s)$, где $\omega \leq \sqrt{2\kappa}$ — длина замкнутой геодезической. Таким образом, $X_i(s)$ — замкнутая кривая в $\mathbb{R}^2$, которая при $i \in \{j, k, l\}$ не сводится к одной точке.

Каждая из функций $x_j(s)$ и $x_k(s)$ имеет по крайней мере два нуля. Если $x_j(s_0) = x_k(s_0) = 0$, то, как вытекает из теоремы Штурма, следующий нуль функции $x_j(s)$ не будет нулем функции $x_k(s)$. Поэтому имеется такое r_0 , что $x_i(r_0) = 0$ и $x_k(r_0) \neq 0$. Положим

$$U_k(s) = (u_k(s), u_k'(s)),$$

где $u_k(s)$ — решение уравнения $(i)_{i-k}$, определенное условием $U_k(r_0) = \pm X_j(r_0)$, в котором знак выбран так, чтобы пара $\{X_k(r_0), U_k(r_0)\}$ составляла положительный репер в $\mathbb{R}^2$.

Проследим теперь за поведением репера $\{X_k(s), U_k(s)\}$ при $r_0 \leq s \leq r_0 + \omega$. У функции $u_k(s)$ на этом интервале имеется $\leq q^*$ нулей, больших r_0 . Сравним эти нули с нулями функции $x_j(s)$. Согласно теореме Штурма, нули функции $u_k(s)$ будут встречаться раньше, так как $a_j^2 < a_k^2$. Кроме того, последующие нули разделены числами $s_0 + q\pi - \pi/2$, $q = 1, 2, \dots$. Следовательно, первая компонента вектора $U_k(s_0 + \omega)$ в репере $\{X_k(s_0), U_k(s_0)\}$ положительна.

Это означает, что линейное отображение Пуанкаре, соответствующее периодическому решению уравнения $(i)_{i-k}$, имеет нормальную форму вида

$$(\dagger) \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a > 0.$$

Под линейным отображением Пуанкаре мы подразумеваем отображение, которое каждому вектору $Y_k(s_0) = (y_k(s_0), y'_k(s_0)) \in \mathbb{R}^2$ ставит в соответствие вектор $Y_k(s_0 + \omega)$, где $y_k(s)$ является решением уравнения $(i)_{i-k}$.

Применяя соответствующие рассуждения к паре $\{X_k(s), V_k(s)\}$ линейно независимых решений уравнения $(i)_{i-k}$, где $V_k(s)$ определяется из условия $V_k(t_0) = \pm X_l(t_0)$, мы обнаружим, что, поскольку $a_k^2 < a_l^2$, отображение Пуанкаре, соответствующее уравнению $(i)_{i-k}$, также типа $(\dagger)$, но уже с $a < 0$ в отличие от предыдущего случая, где a было > 0 .

Итак, мы получили противоречие. Это завершает доказательство предложения 5.1.2. $\square$

Замечание. Если не налагать никаких ограничений на длины осей эллипсоида, то число относительно коротких однократных замкнутых геодезических на эллипсоиде, даже не имеющих самопересечений, может быть больше $n(n+1)/2$. См. Физель [2], где разобран случай $n=2$.

5.2. Некоторые многообразия эллиптического типа

Хорошо известно, что род поверхностей в сильной степени определяет макроструктуру геодезического потока на них. Рассматривая «величину» фундаментальной группы $\pi_1 M$ как грубое обобщение рода на произвольные многообразия M , мы покажем, что такое же утверждение можно сделать и в случае более высоких размерностей.

В этом параграфе мы рассмотрим многообразия *эллиптического типа*, т. е. многообразия, фундаментальная группа которых

конечна. Многообразия гиперболического и параболического типа будут рассмотрены в § 5.3.

Мы начнем с симметрических пространств ранга 1. Они замечательны тем, что все геодезические на них замкнуты, а все однократные геодезические имеют одну и ту же длину и не имеют самопересечений. Описание всех многообразий, у которых все геодезические замкнуты, — известная нерешенная проблема. Этому предмету целиком посвящена недавно вышедшая книга Бессе [1]. По этой причине мы ограничимся тем, что приведем лишь несколько относящихся сюда наиболее важных результатов.

Другим весьма интересным объектом изучения являются римановы многообразия с вполне интегрируемым геодезическим потоком. Это классическая область исследований. Здесь мы приведем результаты Клеро, Лиувилля, Якоби, Штеккеля и Арнольда.

При выполнении некоторого общего условия, тесно связанного с введенным в § 3.3 понятием закручивающего отображения, периодические траектории вполне интегрируемого геодезического потока плотны. Это условие выполняется, в частности, для эллипсоидов, оси которых попарно различны.

С другой стороны, существуют примеры вполне интегрируемых геодезических потоков, у которых «мало» периодических траекторий, т. е. мера их замыкания мала. Мы приведем пример, восходящий к Дарбу. Наконец, отметим, что теорему 4.4.6 о существовании замкнутых эллиптических геодезических можно рассматривать как результат о многообразиях эллиптического типа.

Прежде всего рассмотрим однородные римановы многообразия. Ясно, что в этом случае при изучении структуры геодезического потока оказываются полезными методы, развитые в теории представлений; см. Ауслендер и Грин [1] и Мур [1]. Еще более точная информация может быть получена в случае римановых симметрических пространств; см. Маутнер [1], Чейвл [1], Хелгасон [1]. Здесь же мы остановимся только на *односвязных компактных симметрических пространствах ранга 1*.

Таковыми пространствами являются

- (i) сфера $S^n = SO(n+1)/SO(n)$,
- (ii) комплексное проективное пространство $P\mathbb{C}^n = U(n+1)/U(n) \times U(1)$,
- (iii) кватернионное проективное пространство $P\mathbb{H}^n = Sp(n+1)/Sp(n) \times S(1)$ и
- (iv) проективная плоскость Кэли $P\mathbb{O}a^2 = F_4/Spin(9)$.

Для этих пространств имеет место следующий результат, полученный Картаном [1].

5.2.1. Теорема. *На односвязном компактном симметрическом пространстве ранга один все геодезические замкнуты, а однократные замкнутые геодезические имеют одинаковую длину.*

Более точно, предположим, что метрика на таком пространстве M нормирована так, что верхняя грань кривизны по всем двумерным направлениям равна 1. Тогда длина всех однократных замкнутых геодезических равна 2π .

Если M — сфера, то все геодезические с началом в точке $p \in M$ снова пересекаются, пройдя расстояние π .

Если M — одно из проективных пространств $P\mathbb{C}^n$, $P\mathbb{H}^n$ или $P\mathbb{O}a^2$, действительная размерность которых соответственно есть $2n$, $4n$ или 16 , то проективные прямые, размерности которых соответственно 2, 4 и 8, являются изометрически вложенными сферами постоянной кривизны, равной 1. Следовательно, каждая однократная замкнутая геодезическая лежит в виде большого круга на своей сфере S^2 , S^4 или S^8 , и среди геодезических, проходящих через точку $p \in M$, снова пересекаются через расстояние π в точности те из них, которые лежат на общей для них такой сфере, содержащей точку p .

Доказательство. См. Хелгасон [1]. $\square$

Может возникнуть вопрос: верно ли, что все пространства, на которых все геодезические замкнуты, исчерпываются симметрическими пространствами ранга 1. Это не так, однако, как было показано Боттом [2], ответ становится утвердительным, если интересоваться только когомологиями с целочисленными коэффициентами. Напомним, что кольцом когомологий с целочисленными коэффициентами симметрического пространства M ранга 1 является срезанное кольцо полиномов $T_{d,h}(x) = \mathbb{Z}[x]/(x^h)$, в котором степень x равна d . При этом для сфер d может быть любым, а $h=2$; для проективных пространств $d=2, 4$, а $h \geq 3$ — любое или $d=8$, а $h=3$.

5.2.2. Теорема. Пусть M — компактное риманово многообразие размерности $n+1$, и пусть существуют точка $p \in M$ и число $\omega > 0$, такие, что исходящая из точки p в любом направлении геодезическая замкнута, имеет длину ω и не имеет самопересечений.

Утверждение. Пусть λ — индекс одного из геодезических сегментов длины ω с началом в точке p . Если $\lambda=0$, то $\pi_1 M = \mathbb{Z}_2$ и универсальная накрывающая $\tilde{M}$ многообразия M имеет гомотопический тип сферы размерности $n+1$. Если $\lambda \geq 1$, то $\pi_1 M = 0$ и M имеет то же кольцо целочисленных когомологий, что и односвязное неприводимое компактное симметрическое пространство ранга 1.

В частности, индекс λ одинаков для всех геодезических сегментов длины ω с началом в точке p .

Замечание. Этот результат принадлежит Ботту [2], за исключением нескольких фактов из алгебраической топологии (см.

Милнор [2])^{*}. Если $\lambda = n$ или $\lambda = 1$, то M имеет гомотопический тип сферы S^{n+1} или комплексного проективного пространства $P\mathbb{C}^m$, $2m = n + 1$.

Доказательство. Пусть $c(t)$, $0 \leq t \leq a$, $|\dot{c}| = 1$, — геодезический сегмент длины $a > 0$. Согласно теореме Морса об индексе (см. Морс [2] и Милнор [1]), индекс сегмента c , рассматриваемого как критическая точка в пространстве $\Omega(p, q)$, состоящем из H^1 -кривых, соединяющих точку $p = c(0)$ с точкой $q = c(a)$, задается формулой

$$\text{ind}_{\Omega} c = \sum_{0 < t < a} \dim D\varphi_t V_{\omega}^n(0) \cap V_{\omega}^n(t),$$

где через $V_{\omega}^n(t)$ обозначено вертикальное пространство над t , а через $D\varphi_t V_{\omega}^n(0)$ — результат действия геодезического потока на вертикальное пространство $V_{\omega}^n(0)$ над 0; см. § 3.1 и Клингберг [12], где можно найти такую интерпретацию теоремы Морса.

Так как для любой замкнутой геодезической $c(t)$, $0 \leq t \leq \omega$, с началом в точке p отображение Пуанкаре тождественно, то $D\varphi_{\omega} V_{\omega}^n(0) = V_{\omega}^n(0)$. Поэтому если $t \neq \omega$ и $|t - \omega|$ достаточно мало, то

$$D\varphi_t V_{\omega}^n(0) \cap V_{\omega}^n(t) = 0.$$

Пусть c — некоторая замкнутая геодезическая длины ω и $c(0) = p$. Тогда на c существует такая точка $q = c(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, что каждая геодезическая, соединяющая p с q , идет вдоль кривой c и точка q не сопряжена с p . Точнее, такая геодезическая имеет вид

$$c(t), \quad 0 \leq t \leq \varepsilon + k\omega, \quad \text{или} \quad c(-t), \quad 0 \leq t \leq -\varepsilon + \omega + k\omega,$$

где $k \geq 0$ — некоторое целое.

Для доказательства этого утверждения предположим обратное: пусть существует такая последовательность чисел $\varepsilon_i > 0$, что $\lim \varepsilon_i = 0$ и p может быть соединена с точкой $p_i = c(\varepsilon_i)$ геодезическим сегментом c_i , который не лежит на замкнутой геодезической c . Так как каждый сегмент является частью некоторой замкнутой геодезической, то мы можем предположить, что $L(c_i) < \omega$. С другой стороны, так как экспоненциальное отображение локально инъективно, то существует такое $\delta > 0$, что $\delta < L(c_i) < \omega - \delta$. Но тогда любой из предельных элементов по-

^{*} В односвязном случае Ботт доказал, что $H^*(M, \mathbb{Z}) = T_{d, h}(x)$, и отметил, что из имевшихся в то время результатов о когомологических операциях следуют сильные ограничения на d и h (это пояснено подробнее в примечаниях к русскому переводу его статьи). Но эти ограничения еще не исключали возможности, что $d = 2^k$, $k > 3$, и $h = 3$. Ее исключил Милнор.

следовательности $\{c_i\}$ является геодезической, которая соединяет p с p и длина которой лежит в интервале $[\delta, \omega - \delta]$, что невозможно. Наконец, так как сопряженные точки изолированы на c , точку $q = c(\varepsilon)$ можно выбрать так, чтобы она не была сопряжена с p .

Если $\pi_1 M > 0$, то в $\Omega(p, p)$ существует геодезический сегмент c индекса 0. Этот сегмент должен быть замкнутой геодезической длины ω . Ясно, что c должен быть гомотопен своему обратному и любому другому геодезическому сегменту, представляющему нетривиальный элемент из $\pi_1 M$. Поэтому $\pi_1 M = \mathbb{Z}_2$. Пусть $\tilde{M}$ — односвязное накрывающее пространство M ; тогда существует такая точка $\tilde{p} \in \tilde{M}$, что в любом направлении из нее выходит замкнутая геодезическая длины 2ω , индекс которой равен n . Последнее утверждение непосредственно следует из того факта, что при $t = \omega$ имеет место соотношение

$$\dim(D\varphi_\omega V_v^n(0) \cap V_v^n(0)) = n.$$

Если на такой замкнутой геодезической $\tilde{c}$ выбрать, как и выше, точку $\tilde{q} \neq \tilde{p}$, то все геодезические сегменты, лежащие в пространстве путей $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}(\tilde{p}, \tilde{q})$, будут иметь индекс kn , $k = 0, 1, 2, \dots$, — это следует из описания этих сегментов и формулы для индекса. Поэтому, так как $\pi_{i+1} \tilde{M} = \pi_i \tilde{\Omega}$, то $\pi_i \tilde{M} = 0$ при $0 < i < n+1$, т. е. $\tilde{M}$ имеет гомотопический тип сферы S^{n+1} .

Пусть теперь $\pi_1 M = 0$. В этом случае мы можем предположить, что наша замкнутая геодезическая c , длина которой равна ω и которая проходит через точку p , имеет индекс $\lambda > 0$. В самом деле, в противном случае в пространстве путей $\Omega = \Omega(p, q)$ было бы два геодезических сегмента индекса 0 и, кроме того, геодезические сегменты индекса $\geq n$. При $n > 1$ это невозможно, так как две геодезические индекса 0 должны быть гомотопны «посредством» геодезической индекса 1. Если $n = 1$, т. е. M — поверхность типа двумерной сферы S^2 , то в множестве раздела для точки p должны быть сопряженные точки, т. е. через точку p должна проходить замкнутая геодезическая длины ω индекса > 0 ; см. Пуанкаре [1] и Майерс [1].

Пусть $\Omega = \Omega(p, q)$, где $q = c(\varepsilon)$ и c — замкнутая геодезическая индекса $\lambda > 0$. Учитывая специальный вид геодезических сегментов из Ω , с помощью формулы для индекса получаем, что Ω имеет структуру CW -комплекса с одной 0-мерной клеткой, одной λ -мерной клеткой, одной $(n + \lambda)$ -мерной клеткой и с клетками размерности $\geq n + 2\lambda$.

Теперь для окончания доказательства теоремы надо воспользоваться стандартными методами алгебраической топологии. Рассмотрим пространство $E = E(p, M)$, состоящее из таких не-

прерывных кривых $g(t)$, $0 \leq t \leq 1$, на M , что $g(0) = p$. Пространство E стягиваемо, и отображение E в M , определяемое соответствием $g \mapsto g(1)$, является расслоением со слоем Ω . Как мы только что видели, до размерности $\lambda + n \geq n + 1 = \dim M$ слой Ω гомотопически эквивалентен сфере S^λ . Поэтому, применяя к этому расслоению последовательность Гизина, получим

$$\begin{aligned} H^i(M; \mathbb{Z}) &= 0 & \text{при } i \not\equiv 0 \pmod{\lambda + 1}, \\ H^i(M; \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} & \text{при } i = k(\lambda + 1), k = 0, \dots, m > 1, \end{aligned}$$

где $m(\lambda + 1) = n + 1$. $\square$

Можно усилить предположения теоремы, потребовав, чтобы для каждой точки $p \in M$ все проходящие через нее геодезические были замкнуты и имели одинаковую длину. Однако сейчас мало известно, какие новые следствия влечет за собой это добавочное предположение. Отметим здесь только следующий результат Вейнштейна [4]. См. также Бессе [1].

5.2.3. Теорема. *Предположим, что все траектории геодезического потока на единичном касательном расслоении компактного риманова многообразия M периодические с периодом 2π . Тогда объем многообразия M является целым кратным объема сферы S^n постоянной кривизны 1, где $n = \dim M$.* $\square$

Важно отметить, однако, что существуют примеры римановых многообразий, у которых все геодезические замкнуты и имеют одинаковую длину, но которые не изометричны ни одному из симметрических пространств ранга 1. Первые примеры таких поверхностей были построены Цоллем [1], который усовершенствовал одну идею Дарбу [1].

5.2.4. Лемма. *На дифференцируемой двумерной сфере S^2 существует такое однопараметрическое семейство g_t , $0 \leq t \leq \varepsilon$, аналитических метрик, что g_0 — стандартная метрика постоянной кривизны 1 и при каждом $t > 0$ поверхность (S^2, g_t) не изометрична (S^2, g_0) , но вместе с тем (S^2, g_t) является поверхностью вращения, на которой все геодезические замкнуты. Далее, однократные замкнутые геодезические на этой поверхности не имеют самопересечений, и длина их равна 2π . При достаточно больших t поверхность (S^2, g_t) содержит области, в которых кривизна отрицательна.*

Доказательство. См. Цолль [1], а также Берже [1] и Бессе [1]. $\square$

На сфере со стандартной метрикой (S^2, g_0) первым сопряженным множеством точки p , конечно, является антиподальная точка p' . Следуя Бляшке [1], поверхность M типа сферы мы будем называть поверхностью возвращения, если для каждой точки

$p \in M$ первым сопряженным множеством является точка $p' \neq p$. Обозначим через $\omega: M \rightarrow M$ отображение, к торое каждой точке ставит в соответствие ее первое сопряженное множество.

В течение долгого времени оставался открытым вопрос: является ли сфера единственной поверхностью возвращения. Историю этого вопроса можно проследить по различным изданиям книги Бляшке [1]. Функ [1] сумел доказать, что не существует нетривиального аналитического однопараметрического семейства поверхностей возвращения, содержащего сферу постоянной кривизны, и только в 1963 г. Грин доказал следующую теорему.

5.2.5. Теорема. *Поверхность возвращения изометрична сфере постоянной кривизны.*

Доказательство этой теоремы можно найти у Грина [3], Берже [1] и Бессе [1]. Здесь же мы покажем только, что на поверхности возвращения M все геодезические замкнуты, а однократные геодезические имеют одинаковую длину и не имеют самопересечений.

Начнем с замечания о том, что множество раздела $C(p)$ точки $p \in M$ совпадает с p' , т. е. все однократные замкнутые геодезические не имеют самопересечений. Здесь множество раздела $C(p)$ состоит из тех точек на геодезических лучах, исходящих из точки p , в которых эти лучи перестают быть минимизирующими кривыми; подробности см. в книге Громола, Клингенберга, Мейера [1]. Для доказательства равенства $C(p) = p'$ мы воспользуемся утверждением, которое было доказано Майерсом [1]: для любой метрики на S^3 ближайшая к p сопряженная точка принадлежит $C(p)$.

Пусть c — такая геодезическая, что $|\dot{c}| = 1$, $c(0) = p$, и числа t_0 и t_1 являются минимальными числами, для которых выполнены следующие условия: $c(t_0) = \omega(p)$, $c(t_1) = p$ и $0 < t_0 < t_1$. Из известных свойств сопряженных точек (теорема Штурма) следует, что при достаточно малых положительных ε будет $\omega \cdot c(\varepsilon) = c(t_0 + \varepsilon_0(\varepsilon))$ и $c(\varepsilon) = \omega^2 \cdot c(\varepsilon) = c(t_1 + \varepsilon_1(\varepsilon))$, где $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$ достаточно малы. Так как это верно при всех малых $\varepsilon \geq 0$, то $c(t_1 + t) = c(t)$, т. е. c замкнута и ее длина равна t_1 .

Рассмотрим точку $p \in M$ и такую геодезическую c_0 с началом в точке p , что $|\dot{c}_0| = 1$. Пусть $c_0(t_0) = \omega(p)$ — первая сопряженная точка на c_0 . Так как поверхность является поверхностью возвращения, то у всех геодезических c с $|\dot{c}| = 1$, которые исходят из точки $p \in M$ в направлении, достаточно близком к $\dot{c}_0(0)$, первая сопряженная точка встречается при одном и том же $t = t_0(p)$. По непрерывности заключаем, что у всех геодезических c с $|\dot{c}| = 1$, начинающихся в фиксированной точке $p \in M$, первая сопряженная точка находится на постоянном расстоянии $t_0(p)$. Тогда

$2t_0(p)$ — длина однократной замкнутой геодезической, проходящей через p . Так как каждая точка $q \in M$ лежит на одной из геодезических, проходящих через точку p , то $2t_0(q) = 2t_0(p)$, т. е. все однократные геодезические на M имеют одинаковую длину.

Это все, что мы хотели доказать из 5.2.5. $\square$

Аналог понятия поверхности возвращения в высших размерностях рассматривался разными авторами. Лучший общий результат, который является ослабленным вариантом отмеченного выше результата Функа, получен Мишелем [1].

5.2.6. Теорема. Пусть (S^k, g_t) , $0 \leq t \leq 1$, — деформация стандартной метрики g_0 на сфере, принадлежащая классу C^∞ . Предположим, что эта деформация g_t ортогональна орбите стандартной метрики при действии группы диффеоморфизмов. Если (S^k, g_t) при всех t обладает тем свойством, что все геодезические, начавшие в точке p снова встречаются на расстоянии π в точке p' , то все производные деформации g_t по t при $t=0$ равны нулю. $\square$

Мишель [1] получил аналогичные результаты для деформации стандартной метрики на других неприводимых симметрических пространствах ранга 1. См. также Бессе [1].

Замечание. Совсем недавно Берже удалось показать, что многообразие четной размерности, являющееся аналогом поверхности возвращения, изометрично стандартной сфере.

Помимо однородных и, в частности, симметрических римановых многообразий есть другой класс многообразий, для которых геодезический поток может быть описан весьма подробно, а именно многообразия с вполне интегрируемым геодезическим потоком *).

Для того чтобы определить это понятие, рассмотрим гамильтонову систему общего вида (N, α, H) ; см. § 3.1. Если $F: N \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, то можно определить векторное поле ζ_F , полагая

$$2\alpha_*\zeta_F = i_{\zeta_F}\alpha = dF.$$

Функция F называется *интегралом* системы (N, α, H) , если она постоянна вдоль траекторий векторного поля ζ_H , т. е. если

$$dF \cdot \zeta_H = 2\alpha(\zeta_F, \zeta_H) = -dH \cdot \zeta_F = 0.$$

Говорят, что два интеграла F и F' находятся в *инволюции*, если $2\alpha(\zeta_F, \zeta_{F'}) = 0$.

Гамильтонова система (N, α, H) , $\dim N = 2n$, называется *вполне интегрируемой*, если помимо $F_1 = H$ на N существуют еще

*) Между прочим, в последнее время исследовалась интегрируемость геодезических потоков, отвечающих односторонне инвариантным метрикам на группах Ли и однородных пространствах. (Такую трактовку допускают и некоторые классические случаи интегрируемости задач аналитической механики.)

$n-1$ таких функций $F_2, \dots, F_n$, что для всех q , принадлежащих некоторому открытому плотному подмножеству в N , соответствующие векторные поля $\xi_{F_i}(q)$ порождают в $T_q N$ лагранжево подпространство, т. е. $F_1, \dots, F_n$ являются интегралами в инволюции и $dF_1 \wedge \dots \wedge dF_n \neq 0$ на открытом плотном подмножестве из N . См. Абрахам, Марсен [1], Арнольд, Авец [1], Арнольд [4] и Такенс [1].

Следующая теорема Арнольда (см. Арнольд, Авец [1] и Арнольд [4]) является фундаментальной в теории вполне интегрируемых гамильтоновых систем (N, α, H) .

5.2.7. Теорема. Пусть $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$ — функционально независимые интегралы в инволюции вполне интегрируемой гамильтоновой системы (N, α, H) , $2n = \dim N$. Рассмотрим дифференцируемое отображение

$$\varphi: N \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto (F_1(p), \dots, F_n(p)).$$

По предположению φ регулярно на открытом плотном подмножестве $N' \subset N$. Если при каждом c , принадлежащем образу $\varphi|N'$, связные компоненты n -мерного многообразия $(\varphi|N')^{-1}(c)$ компактны, то каждая компонента является вложенным n -мерным тором T_c^n . Кроме того, при достаточно малом $\delta = \delta(c) > 0$ существует такой симплектический диффеоморфизм

$$\psi: B_\delta^n \times T^n \rightarrow U = U(T_c^n)$$

произведения шара радиуса δ в $\mathbb{R}^n$ и n -мерного тора $T^n = (S^1)^n$ на открытую окрестность U тора T_c^n , что $\varphi \cdot \psi| \{I\} \times T^n$ постоянно при каждом $I \in B_\delta^n$.

Симплектические координаты $(I, \varphi) \in B_\delta^n \times T^n$, где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ периодически с периодом 2π , называются *переменными действие — угол*. В этих координатах гамильтонов поток на U задается уравнениями

$$I(t) = I_0 = \text{const}; \quad \varphi(t) = \varphi_0 + t\omega(I_0),$$

где компоненты $\omega(I_0) = -\partial H \cdot \psi(I, \varphi) / \partial I|_{I=I_0}$ — так называемые *периоды* потока на торе $I = I_0$.

Доказательство можно найти в работах: Арнольд, Авец [1], Арнольд [4] и Цендер [1]. □

Мы видим, что гамильтонов поток, ограниченный на тор, линейен; он называется еще *квазипериодическим*. Естественно различать три случая.

(i) Периоды (т. е. набор чисел $\omega(I_0) \in \mathbb{R}^n$) свободны над рациональными числами. В этом случае поток эргодичен.

(ii) Существуют ровно r , $1 \leq r \leq n-1$, независимых однородных линейных уравнений с рациональными коэффициентами, которым удовлетворяет $\omega(I_0) \in \mathbb{R}^n$. В этом случае n -мерный тор допускает такую факторизацию $T^n = T^{n-r} \times T^r$, что поток эргодичен на каждом $T^{n-r} \times \{\omega^r\} \subset T^{n-r} \times T^r$.

(iii) $\omega(I_0) \in \omega_0 \mathbb{Q}^n$. В этом случае все траектории периодические.

Важная информация о замкнутых геодезических содержится в следующей теореме.

5.2.8. Теорема. *Предположим, что геодезический поток $\phi_t: TM \rightarrow TM$ вполне интегрируем. Если определяемое периодом отображение, которое локально задается соответствием $I \rightarrow \omega(I)$, $I \in B_\delta^n$, $\omega(I) \in \mathbb{R}^n$, невырожденно, т. е. гессиан $(\partial^2 H(I, \phi)/\partial I_i \partial I_j)$ невырожден на некотором открытом плотном множестве, то периодические траектории плотны в TM .*

Доказательство. Нам всего лишь надо заметить, что множества $\omega_0 \mathbb{Q}^n$, где $\omega_0 \in \mathbb{R}$, плотны в $\mathbb{R}^n$. $\square$

Наиболее известным примером, в котором это явление встречается, служит эллипсоид.

5.2.9. Предложение. *Геодезический поток на n -мерном эллипсоиде с попарно различными главными осями вполне интегрируем, а соответствующее отображение Пуанкаре невырожденно. В частности, периодические траектории геодезического потока плотны.*

Доказательство. Полное доказательство невырожденности отображения Пуанкаре есть у Шюта [1]. То, что геодезический поток на эллипсоиде вполне интегрируем в двумерном случае, было известно еще Якоби [1], [2]. Для n -мерного случая это было доказано Розохатиусом [1]. Этот факт также содержится у Штеккеля [1]; см. также Тимм [1]. $\square$

При доказательстве полной интегрируемости геодезического потока на касательном расслоении эллипсоида используются так называемые эллиптические координаты, которые были введены Якоби [1]*). В этих координатах линейный элемент имеет особенно простой вид. В самом деле, этот линейный элемент является частным случаем *линейного элемента Штеккеля* (см. Штеккель [1])**)

$$ds^2 = \sum_i g_{ii}(u) du^i du^i,$$

*) О них говорится во многих курсах аналитической механики, например у Леви-Чивита и Амальди [1].

**) Во многих курсах аналитической механики (см., например, Леви-Чивита и Амальди [1]) доказывается интегрируемость так называемых систем Штеккеля, частным случаем которых являются так называемые системы Лиувилля. Если потенциальная энергия системы тождественно равна нулю, то движение происходит по геодезическим линиям соответствующих римановых метрик. (Продолжение на следующей странице.)

в котором коэффициенты $g_{ii}(u)$ имеют следующий вид:

$$g_{ii}(u) = (-1)^{i+1} \det(h_{kl}(u)) / \text{codet}(h_{i1}(u)),$$

где функции $h_{ij}(u)$ являются элементами регулярной $n \times n$ -матрицы $(h_{ij}(u))$, а элементы $h_{ij}(u)$ из i -й строки являются функциями только u^i . Конечно, $h_{ij}(u)$ должны быть такими, чтобы коэффициенты $g_{ii}(u)$ были положительны. См. также Пранге [1], Бляшке [2] и Тимм [1].

В случае $n = \dim M = 2$ линейный элемент Штекеля становится линейным элементом Лиувилля:

$$ds^2 = (U - V)(U_1^2 du^2 + V_1^2 dv^2).$$

Здесь U , U_1 и V , V_1 являются функциями соответственно только от u или от v ; см. Дарбу [1], Бляшке [1], [3] и Физель [1].

5.2.10. Предложение. *Геодезический поток над областью о линейным элементом Лиувилля вполне интегрируем. Действительно, рассмотрим на множестве ненулевых касательных векторов X функцию*

$$F(X) = (U - V)(VU_1^2 (du X)^2 + UV_1^2 (dv X)^2) / 2H(X) = \\ = U \cos^2 \theta(X) + V \sin^2 \theta(X),$$

где $\theta(X)$ — угол между X и линией параметра v . Тогда F постоянна на $c(t)$, где $c(t)$ — нетривиальная геодезическая, и $dH \wedge dF \neq 0$.

Доказательство. Выберем константу A так, чтобы было $V < A < U$, по крайней мере локально. Определим новые координаты (u', v') , полагая

$$du' = U_1 \sqrt{U - A} du \pm V_1 \sqrt{A - V} dv; \\ dv' = U_1 du / \sqrt{U - A} \mp V_1 dv / \sqrt{A - V}.$$

В этих координатах

$$ds^2 = (du')^2 + (U - A)(A - V)(dv')^2,$$

т. е. (u', v') — геодезически параллельные координаты и линия $v' = \text{const}$ — геодезическая.

Координаты $du X$, $dv X$ касательного вектора X к такой геодезической равны (здесь $H(X) = B^2/2 > 0$):

$$du X = B \sqrt{U - A} / (U - V) U_1; \quad dv X = \pm B \sqrt{A - V} / (U - V) V_1.$$

Поэтому

$$\cos^2 \theta(X) = (A - V) / (U - V); \quad \sin^2 \theta(X) = (U - A) / (U - V).$$

Формально алгебраическая проверка того факта, что в эллиптических координатах геодезический поток на n -мерном эллипсоиде является системой Штекеля (но не Лиувилля, если $n > 2$), не составляет особого труда (хотя об этом надолго забыли). Представляют интерес более геометрические исследования (см. добавление в конце списка литературы).

Следовательно, $F(X) = A$, $H(X) = B^2/2$, т. е. F постоянно на касательных векторах к геодезической $v' = \text{const}$. Это завершает доказательство 5.2.10. $\square$

Замечание. Мы видели, что если поверхность обладает линейным элементом Лиувилля, то у нее есть второй интеграл F (помимо H), который является квадратичным по координатам du X , dv X вектора X . Аналогичный результат для линейных элементов Штеккеля приводится ниже.

5.2.11. Предложение. *Геодезический поток над областью с линейным элементом Штеккеля вполне интегрируем. Существует n интегралов в инволюции $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$ вида*

$$F_i(X) = \sum_j k_{ij}(u) g_{jj}(u)^2 (du^j X)^2,$$

таких, что $dF_1 \wedge \dots \wedge dF_n \neq 0$ при $X \neq 0$. При этом $(k_{ij}(u))$ является обращением регулярной матрицы $(h_{ij}(u))$, определяющей линейный элемент Штеккеля.

Доказательство. См. Штеккель [1], Тимм [1]. $\square$

Замечание. Существование n интегралов в инволюции F_i вида 5.2.11 выделяет линейный элемент Штеккеля среди диагональных линейных элементов; см. Штеккель [1] и Тимм [1]. Для случая $n=2$, т. е. для линейного элемента Лиувилля, это было доказано Масье [Massieu. Thèse. — Paris, 1861]; см. также Дарбу [1].

Мы отметим еще одну характеристику линейного элемента Штеккеля, полученную Цвирнером и Бляшке.

5.2.12. Предложение. *Линейный элемент Штеккеля (u , в частности, линейный элемент Лиувилля) характеризуется тем свойством, что в каждом достаточно малом n -мерном координатном кубе все геодезические диагонали имеют одинаковую длину.*

Доказательство. См. Бляшке [2], Тимм [1], а при $n=2$ — также Бляшке [3]. $\square$

Гамильтонова система общего вида (N, α, H) не обладает помимо H дополнительными интегралами. Однако есть важный класс систем, которые допускают групповое действие, сохраняющее структуру (N, α, H) . У таких систем имеются дополнительные интегралы^{*)}. Подробности об этих так называемых законах

^{*)} Имеется в виду теорема Нётер, излагаемая во многих курсах аналитической механики и вариационного исчисления, например у Арнольда [4]. В порядке уточнения следует заметить, что в ней рассматривается гамильтонова система специального вида, а именно получающаяся из некоторой лагранжевой системы, причем как раз последняя и должна быть инвариантна относительно действия группы (другое дело, что тогда естественно определяется и групповое действие в фазовом пространстве гамильтоновой системы).

сохранения можно найти у Абрахама и Марсдена [1] и у Такенса [1].

Здесь мы рассмотрим только изометрическое действие S на компактном римановом многообразии и при этом определим те орбиты этого действия, которые являются замкнутыми геодезическими.

5.2.13. Теорема. Пусть нам дано изометрическое действие окружности на M

$$\rho: S \times M \rightarrow M,$$

и пусть

$$R(p) = (d/ds) \rho(s, p)_{s=0}$$

— соответствующее порождающее векторное поле на M . Тогда функция

$$F: TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad X \mapsto \langle X, R(\tau X) \rangle,$$

постоянна вдоль траекторий геодезического потока, т. е. F является интегралом. Кроме того, если

$$\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle R(p), R(p) \rangle,$$

имеет критическое значение в точке p_0 и $R(p_0) \neq 0$, то S -орбита, проходящая через точку p_0 , является замкнутой геодезической.

5.2.14. Следствие. Пусть $\dim M = 2$ и $dF \neq 0$ на открытом плотном подмножестве из TM . Тогда геодезический поток на TM вполне интегрируем.

Замечание. Наиболее важными примерами поверхностей, удовлетворяющих условиям 5.2.14, являются поверхности вращения. Можно показать, что, наоборот, поверхность, на которой геодезический поток обладает вторым интегралом, линейным по X , локально изометрична поверхности вращения (Масье; см. Дарбу [1]).

Для поверхностей вращения утверждение о существовании интеграла F известно как теорема Клеро. Величина $F(X)/|X|$ называется также угловым моментом (моментом импульса).

Доказательство. Пусть $c(t)$ — геодезическая. Тогда $F(\dot{c}(t))$ может быть записана в виде

$$\langle \dot{c}(t), R(c(t)) \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \rho(s, c(t)), \frac{\partial}{\partial s} \rho(s, c(t)) \right\rangle \Big|_{s=0}.$$

Беря производную по t и учитывая, что $\rho(s, c(t))$ при постоян-

ном s — геодезическая, получим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \rho(s, c(t)), \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \rho(s, c(t)) \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \rho(s, c(t)), \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \rho(s, c(t)) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \rho(s, c(t)), \frac{\partial}{\partial t} \rho(s, c(t)) \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

так как $|T\rho(s, \dot{c}(t))| = \text{const}$. Следовательно, $F(\dot{c}(t)) = \text{const}$.

Теперь предположим, что $D\Phi(p_0) = 0$. Пусть $\rho(t)$, $0 \leq t \leq \varepsilon$, — произвольная кривая на M с началом в точке $\rho(0) = p_0$ и $d\rho(0)/dt = X$. Положим $\rho(s, p_0) = c(s)$. Тогда из $D\Phi(p_0) = 0$ следует, что

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \rho(s, c(t)), \frac{\partial}{\partial s} \rho(s, \rho(t)) \right\rangle \Big|_{t=0} = \\ &= \left\langle c'(s), \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \rho(s, \rho(t)) \right\rangle \Big|_{t=0} = \left\langle c'(s), \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \rho(s, \rho(t)) \right\rangle \Big|_{t=0} = \\ &= - \left\langle \frac{\nabla}{\partial s} c'(s), T\rho(s, X) \right\rangle. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\langle c'(s), T\rho(s, X) \rangle = \langle T\rho(s, c'(0)), T\rho(s, X) \rangle$ не зависит от s .

Поэтому так как $T\rho(s, X)$ может быть любым вектором, то $\nabla c'(s)/ds = 0$. Это завершает доказательство 5.2.13. Следствие 5.2.14 немедленно вытекает отсюда. $\square$

Мы закончим этот параграф примером поверхности вращения, у которой отображение Пуанкаре вырожденно. Это означает, что для такой поверхности периоды одинаковы на всех двумерных инвариантных торах (в отличие от ситуации в 5.2.8). Следовательно, либо геодезический поток является эргодическим на каждом двумерном торе, либо он периодический. Согласно 5.2.14, S -орбита максимальной длины будет замкнутой геодезической. Для нее тор вырождается в саму эту орбиту.

Введем отношение

$$\pi(M) = \text{vol}(\text{Per } T_1 M) / \text{vol}(T_1 M).$$

Здесь через $\text{Per } T_1 M$ обозначено множество тех единичных касательных векторов X , для которых траектории $\phi_t X$ периодичны; $\text{vol}(\text{Per } T_1 M)$ обозначает меру замыкания множества $\text{Per } T_1 M$ в $T_1 M$.

Следующий пример, помимо всего прочего, иллюстрирует неустойчивость поведения числа $\pi(M)$. На сфере и на всех эллипсоидах $\pi(M) = 1$.

5.2.15. Предложение. В любой C^0 -окрестности стандартной сферы S^2 существуют выпуклые поверхности вращения, для которых отношение $\pi(M)$ становится произвольно малым.

Доказательство (см. Клингенберг [8]). Наш пример основывается на конструкции Дарбу [1]. Похожее рассуждение есть у Вейнштейна [2].

Искомые поверхности строятся следующим образом. Пусть a — действительное число, удовлетворяющее условию $0 < a \leq 1$. Тогда

$$f_a(u, v) = \left(a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, \int_0^u \sqrt{1 - a^2 \sin^2 t} dt \right),$$

где $|u| < \pi/2$, представляет неполную поверхность вращения постоянной кривизны, равной 1. Выберем малое $\delta > 0$. Обозначим через $S^2(a, \delta)$ поверхность, покрываемую при отображении $(u, v) \mapsto f_a(u, v)$ с $|u| \leq \pi/2 - \delta$ и произвольным v . Заклеив $S^2(a, \delta)$ двумя выпуклыми «шапочками», получим выпуклую поверхность вращения, обозначаемую в дальнейшем через $M(a, \delta)$.

Мы будем интересоваться действием геодезического потока только на тех $X \in T_1 M(a, \delta)$, для которых соответствующая геодезическая $c(t) = \tau_t X$ остается в $S^2(a, \delta)$ при всех t . Из теоремы Клеро (5.2.14) мы знаем, что это все равно, что рассматривать только те $X \in T_1 S^2(a, \delta)$, для которых

$$F(X) = \left\langle X, \frac{\partial f_a}{\partial v}(u(\tau X), v(\tau X)) \right\rangle \geq a \sin \delta.$$

Множество элементов $X \in T_1 M(a, \delta)$, обладающих этим свойством, обозначим через $T_1' S^2(a, \delta)$ или просто через T_1' .

Для того чтобы получить описание геодезического потока на T_1' , мы сначала изучим геодезический поток на области $T_1' S^2(1, \delta)$ единичного касательного расслоения $T_1 S^2$ стандартной сферы S^2 . Траектории потока в этой области проектируются в геодезические виды

$$c(t) = \cos(t - t_0) E_1 + \sin(t - t_0) B_\alpha,$$

где $E_1 = (1, 0, 0)$, $B_\alpha = (0, \cos \alpha, \sin \alpha)$ и $0 \leq \alpha \leq \pi/2 - \delta$.

Если фиксировать $\alpha > 0$, то множество касательных векторов $\dot{c}(t)$ к соответствующим геодезическим будет представлять собой двумерный тор T_α^2 , инвариантный относительно геодезического потока. При $\alpha = 0$ получим вырожденный тор, образованный касательными к экватору векторами. T_α^2 характеризуется тем, что $F(X) = \cos \alpha$.

Для того чтобы получить отображение Пуанкаре, мы опишем орбиты на T_α^2 посредством их начальных значений $\{c(0), \dot{c}(0)\}$. Воспользовавшись комплексными обозначениями, получим

$$c(t) + i\dot{c}(t) = e^{it - it_0} (E_1 - iB_\alpha) = e^{it} (c(0) + i\dot{c}(0)).$$

Заметим, что $S^2(a, \delta)$ изометрична части $\{0 \leq v < 2\pi a\}$ поверхности $S^2(1, \delta)$. Таким образом, отображение Пуанкаре, соответствующее периодической траектории, лежащей над экватором $M(1, \delta)$, задается соответствием

$$\mathcal{P}: c(0) + ic'(0) \mapsto e^{i2\pi a} (c(0) + ic'(0)).$$

Другими словами, $\mathcal{P}$ совпадает со своей линейной частью $P = D\mathcal{P}$ (см. § 3.3) и экватор является эллиптической замкнутой геодезической.

Отсюда следует, что траектории геодезического потока, лежащие на инвариантном подмножестве $T_1 S^2(a, \delta)$, являются периодическими в том и только том случае, когда a рационально. Если a иррационально, то периодическими будут только траектории, проектирующиеся в экватор. А так как мера множества $T_1 S^2(a, \delta)$ сколь угодно мало отличается от меры $T_1 M(a, \delta)$, то отсюда следует 5.2.15. $\square$

Замечание. Такое поведение геодезического потока около эллиптической траектории, как мы только что описали, конечно, является исключительным. С помощью произвольно малого шевеления метрики отображение Пуанкаре может быть сделано закручивающим, см. 3.3.8. В этом случае эллиптическая траектория не будет изолированной, более того, замыкание множества периодических траекторий будет иметь положительную меру в любой окрестности этой траектории.

Это является следствием теоремы Колмогорова — Арнольда — Мозера об инвариантных торах и теоремы Биркгофа — Льюиса о неподвижной точке (3.3.3). Полное доказательство есть у Цендера [1]. Для случая $\dim M = 2$ мы уже отметили этот факт в 3.3.4.

В рассматриваемой ситуации геодезический поток на инвариантных торах, существующих согласно теореме Колмогорова — Арнольда — Мозера, эргодичен. Однако, как показывает теорема Биркгофа — Льюиса, эти торы являются пределами периодических траекторий. Подобные примеры доставляют эллипсоиды с попарно различными осями и все достаточно близкие к ним римановы метрики.

Очень может быть, что для геодезического потока над многообразием эллиптического типа такое поведение является типичным (всюду в пространстве метрик). Для того чтобы продвинуться в доказательстве утверждения такого типа, надо прежде всего найти много эллиптических замкнутых геодезических. Теорема 4.4.6 является первым шагом в этом направлении; правдоподобно, что будут получены и другие результаты такого рода.

5.3. Геодезические на многообразиях гиперболического и параболического типа

До сих пор мы рассматривали в основном односвязные многообразия или многообразия с конечной фундаментальной группой. В этом параграфе мы изложим некоторые результаты о многообразиях, универсальное накрывающее пространство которых гомеоморфно евклидову пространству).

Давно известно, что свойства геодезического потока, соответствующего замкнутой поверхности, в сильной степени зависят от знака кривизны K ; см., например, Хедлунд [2]. Основная причина этого кроется в том, что при $K \equiv 0$ фундаментальная группа либо является бесконечной абелевой, либо в некотором смысле близка к таковой, а при $K < 0$ она имеет экспоненциальный рост (это понятие можно найти у Милнора [3], [4]).

Среди многообразий, фундаментальная группа которых имеет экспоненциальный рост, мы сосредоточим внимание на тех, которые будем называть многообразиями гиперболического типа. Это многообразия, допускающие такую риманову метрику, что геодезический поток, индуцированный на единичном касательном расслоении, является потоком Аносова. Основными примерами многообразий гиперболического типа (может быть, ими исчерпываются все такие многообразия) являются многообразия, допускающие риманову метрику строго отрицательной кривизны^{*)}. Наш главный результат состоит в том, что если на многообразии гиперболического типа задана некоторая метрика, то в единичном касательном расслоении существует довольно большое инвариантное замкнутое подмножество, на котором геодезический поток обладает многими свойствами, присущими тем геодезическим потокам, которые являются потоками Аносова (см. 5.3.6).

Мы будем говорить, что компактное многообразие является многообразием параболического типа, если его фундаментальная группа абелева, или, более общо, если у него есть конечное накрытие с абелевой фундаментальной группой. Из различных результатов, касающихся многообразий параболического типа, мы приведем только один принадлежащий Буземану [1] результат о существовании многих замкнутых геодезических в предположении, что риманова метрика на таком многообразии не имеет сопряженных точек (см. 5.3.7).

^{*)} Иногда (в том числе в некоторых работах самого Клингенберга) только такие многообразия и называются многообразиями гиперболического типа, а в том более общем случае, о котором говорилось выше, многообразие называют многообразием (типа) Аносова. (Этот термин кое-где используется и в этой книге. Терминология, как видно, здесь еще не вполне установилась.)

Напомним, что, согласно § 3.2, касательное расслоение $\tau_{T_1M}: TT_1M \rightarrow T_1M$ единичного касательного расслоения риманового многообразия M содержит некоторое выделенное подрасслоение со слоями коразмерности 1. Если $\dim M = n + 1$, то это расслоение мы будем обозначать через

$$\tau^{2n}: T^{2n} = T^{2n}T_1M \rightarrow T_1M.$$

Слой $(\tau^{2n})^{-1}(X_0) = T_{X_0}^{2n}$ над $X_0 \in T_1M$ состоит из тех векторов, которые ортогональны геодезической пульверизации.

Ограничение горизонтального подрасслоения расслоения $\tau_{TM}: TTM \rightarrow TM$ на τ^{2n} будем обозначать через $\tau_h^n: T_h^n = T_h^nT_1M \rightarrow T_1M$. Аналогично посредством ограничения получаем вертикальное подрасслоение $\tau_v^n: T_v^n = T_v^nT_1M \rightarrow T_1M$ расслоения τ^{2n} .

Таким образом, каждый элемент $\tilde{Y} \in T_{X_0}^{2n}$ допускает разложение $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_h, \tilde{Y}_v) \in T_{X_0,h}^n \oplus T_{X_0,v}^n$, где $\tilde{Y}_h$ и $\tilde{Y}_v$, рассматриваемые как элементы из $T_{X_0}M$, удовлетворяют условию $\langle \tilde{Y}_h, X_0 \rangle = \langle \tilde{Y}_v, X_0 \rangle = 0$.

Траекторию $\varphi_t X_0$ геодезического потока, которая при $t=0$ проходит через точку $X_0 \in T_1M$, мы будем обозначать также через X_t . Пусть $\dot{c}(t) := \tau_* X_t$ — соответствующая геодезическая на M . Тогда $X_t = \dot{c}(t)$.

Из 3.1.6 и 3.1.7 мы знаем, что если $\tilde{Y} \in T_{X_0}^{2n}$, то векторное поле $D\varphi_t \tilde{Y}$ имеет вид $\tilde{Y}(t) = (Y(t), \nabla Y(t)) \in T_{X_t,h}^n \oplus T_{X_t,v}^n$, где $Y(t)$ — поле Якоби, т. е.

$$\nabla^2 Y(t) + R(Y(t), \dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 0 \text{ и } \langle Y(t), \dot{c}(t) \rangle = \langle \nabla Y(t), \dot{c}(t) \rangle = 0.$$

Это показывает, в частности, что поток $T\varphi_t: TT_1M \rightarrow TT_1M$, индуцированный геодезическим потоком $\varphi_t: T_1M \rightarrow T_1M$, оставляет подрасслоение τ^{2n} инвариантным.

Следуя работе Клингенберга [12], назовем геодезический поток φ_t на T_1M потоком Аносова, если τ^{2n} допускает такое разложение $\tau^{2n} = \tau_s^n \oplus \tau_u^n$ на два $T\varphi_t$ -инвариантных подрасслоения

$$\tau_s^n: T_s^n := T_s^n T_1M \rightarrow T_1M; \quad \tau_u^n: T_u^n := T_u^n T_1M \rightarrow T_1M,$$

называемых *устойчивым* и *неустойчивым* расслоениями, что размерность слоя в каждом из них равна n и $T\varphi_t|T_s^n$ действует как сжатие, а $T\varphi_t|T_u^n$ действует как растяжение, т. е. существуют такие положительные числа $a \geq 1$ и k , что при всех действительных $t_1 \leq t_2$ и всех $\tilde{Y}_s \in T_s^n$, $\tilde{Y}_u \in T_u^n$ выполняются следующие

соотношения *):

$$\begin{aligned}
 (+) \quad & |D\varphi_{t_1}\tilde{Y}_s|^2 \leq a^2 |D\varphi_{t_1}\tilde{Y}_s|^2 e^{-2k(t_1-t_1)}, \\
 & |D\varphi_{t_1}\tilde{Y}_u|^2 \geq a^{-2} |D\varphi_{t_1}\tilde{Y}_u|^2 e^{2k(t_1-t_1)}.
 \end{aligned}$$

Замечание. Если геодезический поток на T_1M является потоком Аносова, то все замкнутые геодезические на M гиперболические, т. е. линейная часть отображения Пуанкаре, соответствующего периодической траектории геодезического потока, не имеет собственных значений, равных по модулю 1. Многообразия, геодезический поток которых является потоком Аносова, являются единственными известными примерами многообразий с этим свойством.

Эберлейн [2] приводит различные характеристики многообразий, геодезический поток на которых является потоком Аносова. Наиболее важные примеры многообразий, обладающих этим свойством, даются следующей леммой.

5.3.1. Лемма. *Предположим, что кривизна по всем двумерным направлениям на компактном римановом многообразии строго отрицательна. Тогда геодезический поток является потоком Аносова.*

Точнее, допустим, что существуют такие числа $k_1 \geq k_2 > 0$, что при всех $X_0 \in T_1M$ и при всех $Y \in TM$, при которых $\tau Y = \tau X_0$ и $\langle Y, X_0 \rangle = 0$, имеет место неравенство

$$-k_1^2 |Y|^2 \leq \langle Y, R(Y, X_0, X_0) \rangle \leq -k_2^2 |Y|^2.$$

Тогда в соотношениях (+) константы могут быть выбраны равными $k = (k_2 - \epsilon)$ и $a = k_1/(k_2 - \epsilon)$, где $\epsilon > 0$ сколь угодно мало. Поэтому мы можем даже положить $k = k_2$ и $a = k_1/k_2$.

Доказательство (ср. Аносов [1], Аносов, Синай [1]). Напомним, что, согласно 3.1.3, на каждом слое $T_{X_0}^{2n}$ расслоения $\tau^{2n}: T^{2n} \rightarrow T_1M$ имеется симплектическая структура, определяемая формулой

$$2\alpha(\tilde{Y}, \tilde{Y}') = \langle \tilde{Y}_h, \tilde{Y}'_v \rangle - \langle \tilde{Y}'_h, \tilde{Y}_v \rangle.$$

Пусть $V \subset T_{X_0}^{2n}$ — лагранжево подпространство, т. е. изотропное подпространство размерности n . Если V не пересекается с $T_{X_0,0}^n$, то легко доказать, что существует единственная симметрическая

* В общем определении потока Аносова (не обязательно геодезического) не требуется, чтобы размерности устойчивого и неустойчивого расслоений были равны. Но если геодезический поток является потоком Аносова, то это так (что видно хотя бы из симплектичности линейных отображений Пуанкаре для их периодических траекторий, а таковые существуют; см. ниже). Другое специфическое для геодезических потоков обстоятельство, которое автор с самого начала использует в определении, состоит в том, что в этом случае можно говорить о подрасслоении τ^{2n} и что оно инвариантно относительно $T\varphi_t$.

$(n \times n)$ -матрица S , такая, что V может быть представлено в виде $V = \{(Y, SY) \in T_{X_0}^n \oplus T_{X_0}^n\}$,

берутся все Y , для которых $\langle Y, X_0 \rangle = 0$.

Обратно, такое V является лагранжевым.

Рассмотрим траекторию $X_t = \varphi_t X_0$, $X_0 \in T_1 M$, геодезического потока. Пусть $c(t) = \tau \cdot X_t$ — соответствующая геодезическая, т. е. $\dot{c}(t) = X_t$. Для произвольного $\tau \in \mathbb{R}$ обозначим через S_τ какую-нибудь положительно определенную симметрическую $(n \times n)$ -матрицу^{*}, спектр которой лежит в $[k_2 - \varepsilon, k_1]$. Пусть V_τ^n — соответствующее лагранжево подпространство в $T_{X_\tau}^{2n}$. Тогда $V_\tau^n(t) := D\varphi_{t-\tau} V_\tau^n$ — лагранжево подпространство в $T_{X_t}^{2n}$. Если $V_\tau^n(t)$ не пересекает вертикальное пространство $T_{X_t}^n$ (кроме как в нуле), то это подпространство определяет симметрическую матрицу, которую мы обозначим через $S_\tau(t)$.

Так как для любого инвариантного векторного поля $\dot{Y}(t) = (Y(t), \nabla Y(t)) \in V_\tau^n(t)$ имеет место равенство $\nabla Y(t) = S_\tau(t) Y(t)$ и $Y(t)$ — поле Якоби, то $S_\tau(t)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$(*) \quad \nabla S_\tau(t) + S_\tau(t) S_\tau(t) + R(\cdot, \dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 0.$$

Утверждение (i). При всех $t \geq \tau$ спектр $S_\tau(t)$ лежит в $[k_2 - \varepsilon, k_1]$. В частности, при всех $t \geq \tau$ лагранжево подпространство $V_\tau(t)$ не пересекается с $T_{X_t}^n$.

Для того чтобы доказать это утверждение, рассмотрим функции

$$\alpha(t) := \max_{|Y|=1} \langle S_\tau(t) Y, Y \rangle, \quad \beta(t) := \min_{|Y|=1} \langle S_\tau(t) Y, Y \rangle.$$

Из (*) мы заключаем, что имеют место неравенства

$$\dot{\alpha}(t) \leq -\alpha^2(t) + k_1^2, \quad \dot{\beta}(t) \geq -\beta^2(t) + k_2^2$$

или, точнее говоря, что справедливы соответствующие разностные соотношения. Как бы то ни было, отсюда следует, что если $\alpha(t_0) \leq k_1$, то $\alpha(t) \leq k_1$ при всех $t \geq t_0$, и что если $\beta(t_0) \geq k_2 - \varepsilon$, то $\beta(t) \geq k_2 - \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$.

Утверждение (ii). Пусть $\tau' \leq \tau$, и пусть $S_{\tau'}(t)$ и $S_\tau(t)$ — решения уравнения (*), которые определены соответственно при $t \geq \tau'$ и при $t \geq \tau$ и которые задаются начальными значениями $S_{\tau'}$ и S_τ ,

* Точнее, отображение подпространства $\{Y; \langle Y, X_\tau \rangle = 0\} \subset T_{c(\tau)} M$ в себя; стандартные отождествления позволяют рассматривать его как отображение $T_{X_0}^n \rightarrow T_{X_\tau}^n$.

спектр которых лежит в $[k_2 - \varepsilon, k_1]$. Тогда при всех $t \geq \tau$

$$(**) \quad |S_\tau(t) - S_{\tau'}(t)| \leq |S_\tau - S_{\tau'}(\tau)| e^{-2(k_2 - \varepsilon)(t - \tau)}.$$

Для доказательства этого утверждения положим $S_\tau(t) - S_{\tau'}(t) = R(t)$. Тогда из (*) имеем

$$\nabla R(t) = -S_\tau(t) R(t) - R(t) S_{\tau'}(t).$$

Решение $R(t)$ имеет вид

$$R(t) = Q(t) (S_\tau - S_{\tau'}(t)) Q'(\tau),$$

где $Q(t)$ и $Q'(\tau)$ суть $(n \times n)$ -матрицы, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \nabla Q(t) &= -S_\tau(t) Q(t), & Q(\tau) &= E; \\ \nabla Q'(\tau) &= -Q'(\tau) S_{\tau'}(\tau), & Q'(\tau) &= E. \end{aligned}$$

Используя свойство спектра матрицы $S_\tau(t)$, получим

$$\frac{d}{dt} |Q(t)|^2 = -2 \langle S_\tau(t) Q(t), Q(t) \rangle \leq -2(k_2 - \varepsilon) |Q(t)|^2.$$

Следовательно, $|Q(t)| \leq e^{-(k_2 - \varepsilon)(t - \tau)}$. Аналогичное рассуждение применимо и к $Q'(\tau)$.

Как следствие утверждения (ii) мы получаем, что предел $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} S_\tau(t)$ существует и равен симметрической матрице $S_u(t)$, спектр которой лежит в $[k_2 - \varepsilon, k_1]$ и которая определена при всех $t \in \mathbb{R}$. Кроме того, пространства

$$T_u^n(t) := \{(Y, S_u(t)Y) \in T_{X_t, h}^n \oplus T_{X_t, v}^n;$$

берутся все Y , для которых $\langle Y, X_0 \rangle = 0\}$

являются лагранжевыми подпространствами, переходящими друг в друга под действием $D\varphi_t$. Другими словами, инвариантное относительно потока векторное поле $\tilde{Y}(t) = (Y(t), \nabla Y(t)) \in T_u^n(t)$ удовлетворяет уравнению $\nabla Y(t) = S_u(t)Y(t)$.

Так как спектр $S_u(t)$ лежит в $[k_2 - \varepsilon, k_1]$, то для такого $\tilde{Y}(t)$ получаем

$$\begin{aligned} 2k_1 |Y(t)|^2 &\geq \frac{d}{dt} |Y(t)|^2 = 2 \langle Y(t), S_u(t)Y(t) \rangle \geq 2(k_2 - \varepsilon) |Y(t)|^2, \\ k_1^2 |Y(t)|^2 &\geq |\nabla Y(t)|^2 \geq (k_2 - \varepsilon)^2 |Y(t)|^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|Y(t_2)|^2 \geq |Y(t_1)|^2 e^{2(k_2 - \varepsilon)(t_2 - t_1)}$$

и

$$|\nabla Y(t_2)|^2 \geq ((k_2 - \varepsilon)^2 / k_1^2) |\nabla Y(t_1)|^2 e^{2(k_2 - \varepsilon)(t_2 - t_1)},$$

т. е. $T_u^n(t)$ является слоем над X_t неустойчивого расслоения π_u^n .

Аналогично строятся слои $T_s^n(t)$ расслоения τ_s^n . Это завершает доказательство леммы 5.3.1. $\square$

Для последующего применения рассмотрим в единичном касательном расслоении T_1M , $\dim M = n+1$, периодическую траекторию $\varphi_t X_0$ с периодом ω *). Пусть $c_0(t) = \tau \cdot \varphi_t X_0$ — соответствующая замкнутая геодезическая длины ω . Пусть $c = c_0(t)$, $0 \leq t \leq m\omega$, есть m -кратное повторение геодезической c_0 . Рассмотрим иммерсию

$$t \mapsto c(t), \quad t \in S_{m\omega}, \quad c(t) \in M,$$

окружности длины $m\omega$. Мы назовем геодезическую c *ориентируемой*, если ориентируемо нормальное расслоение $n_c: N_c^n \rightarrow S_{m\omega}$ этой иммерсии. Другими словами, отображение

$$\mathbb{I}_c: (T_{c(0)}M, \dot{c}(0)) \rightarrow (T_c M, \dot{c}(0)),$$

получаемое с помощью параллельного переноса вдоль геодезической, имеет определитель, равный $+1$.

Рассмотрим индуцированное расслоение $(\dot{c})^* \tau^{2n}$

$$\begin{array}{ccc} V^{2n} & \xrightarrow{\quad} & T^{2n} = T^{2n} T_1 M \\ \downarrow (\dot{c})^* \tau^{2n} & & \downarrow \tau^{2n} \\ S_{m\omega} & \xrightarrow{\quad \dot{c} \quad} & T_1 M \end{array}$$

Для краткости будем его обозначать так:

$$\tau^{2n}: V^{2n} \rightarrow S_{m\omega}.$$

Расслоение τ^{2n} допускает разложение $\tau^{2n} = \tau_h^n \oplus \tau_v^n$, где

$$\tau_h^n: V_h^n \rightarrow S_{m\omega}, \quad \tau_v^n: V_v^n \rightarrow S_{m\omega}.$$

Поток $T\varphi_t$ на $T^{2n} T_1 M$ индуцирует поток на тотальном пространстве V^{2n} расслоения τ^{2n} ; его мы будем также обозначать через $T\varphi_t$. Через $D\varphi_t$ мы будем обозначать ограничение $T\varphi_t$ на слои расслоения **).

Пусть c — гиперболическая геодезическая. Это означает, что слой $V^{2n}(0)$ расслоения τ^{2n} над точкой $0 \in S_{m\omega}$ допускает разложение

$$V^{2n}(0) = V_s^n(0) + V_u^n(0)$$

на такие n -мерные подпространства, инвариантные относительно $P^m = D\varphi_{m\omega} = (D\varphi_\omega)^m$, что собственные значения отображения $P^m|V_s^n(0)$ по модулю меньше 1, а собственные значения отображения $P^m|V_u^n(0)$ по модулю больше 1.

*) Уже не предполагая, что геодезический поток является потоком Аносова.

**) Когда рассматривается некоторый фиксированный слой.

Теперь мы можем определить *устойчивое* и *неустойчивое* расслоения над $S_{m\omega}$

$$\tau_s^n: V_s^n \rightarrow S_{m\omega}, \quad \tau_u^n: V_u^n \rightarrow S_{m\omega},$$

беря в качестве слоя над точкой $t \in S_{m\omega}$ соответственно $D\varphi_t V_s^n(0)$ и $D\varphi_t V_u^n(0)$. Из 3.2.13 мы знаем, что

$$\begin{aligned} \text{ind } c &= \sum_{0 \leq t < m\omega} \dim(V_v^n(t) \cap V_s^n(t)) = \\ &= m \sum_{0 \leq t < \omega} \dim(V_v^n(t) \cap V_s^n(t)) = m \text{ ind } c_0. \end{aligned}$$

5.3.2. Лемма. Пусть $c = (c(t), 0 \leq t \leq m\omega)$, $|\dot{c}| = 1$, — гиперболическая замкнутая геодезическая.

Утверждение. Индекс геодезической c четный в том и только в том случае, когда нормальное расслоение $\pi_c: N_c^n \rightarrow S_{m\omega}$ и устойчивое расслоение $\tau_s^n: V_s^n \rightarrow S_{m\omega}$, отвечающие геодезической c и соответствующей траектории $(\dot{c}(t), 0 \leq t \leq m\omega)$ в T_1M , одновременно ориентируемы или одновременно неориентируемы.

Доказательство (ср. Клингенберг [12]). Изменив, если надо, начальную точку, мы можем считать, что $V_v^n(0) \cap V_s^n(0) = 0$. Последнее равносильно тому, что линейное отображение $T\tau|V_s^n(0): V_s^n(0) \rightarrow N_c^n(0)$ ($=$ слой из N_c^n над $0 \in S_{m\omega}$) является биекцией.

Положим $\dim(V_v^n(t) \cap V_s^n(t)) = d(t)$. Выберем ориентацию на $V_s^n(0)$. Тогда биекция $T\tau|V_s^n(0)$ определяет ориентацию на $N_c^n(0)$. С помощью отображений $D\varphi_t$ мы перенесем эти ориентации на все $V_s^n(t)$, $0 \leq t < m\omega$, а с помощью параллельного перенесения — на все $N_c^n(t)$, $0 \leq t < m\omega$.

Пусть $t_0 > 0$ — первое значение, при котором $d(t_0) \neq 0$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ отображение $T\tau|V_s^n(t_0 + \varepsilon): V_s^n(t_0 + \varepsilon) \rightarrow N_c^n(t_0 + \varepsilon)$ является биекцией, которая сохраняет или меняет ориентацию в зависимости от того, четно или нечетно $d(t_0)$. Так как $\text{ind } c = \sum_{0 \leq t < \omega} d(t)$, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ отображение

$T\tau|V_s^n(m\omega - \varepsilon): V_s^n(m\omega - \varepsilon) \rightarrow N_c^n(m\omega - \varepsilon)$ сохраняет ориентацию в том и только том случае, когда индекс геодезической c четный. $\square$

Пусть $c(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — геодезическая и $|\dot{c}| = 1$. Напомним, что c имеет сопряженную точку, если существует такое нетривиальное поле Якоби $Y(t)$ вдоль $c(t)$ и такое $t_0 > 0$, что $Y(0) = Y(t_0) = 0$. Точка $c(t_0)$ называется сопряженной с точкой $c(0)$ вдоль $c| [0, t_0]$; ср. Громол, Клингенберг, Мейер [1].

Можно дать другое определение сопряженной точки в терминах траектории $\varphi_t X_0$, $X_0 = \dot{c}(0)$, в $T_1 M$. Как и выше, иммерсия

$$t \mapsto \varphi_t X_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_t X_0 \in T_1 M,$$

индуцирует расслоения $\tau^{2n}: V^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau_h^n: V_h^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau_v^n: V_v^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau^{2n} = \tau_h^n \oplus \tau_v^n$. Тогда наличие сопряженной точки при $t = t_0 > 0$ означает, что

$$D\varphi_{t_0} V_v^n(0) \cap V_v^n(t_0) \neq 0.$$

Мы напомним еще одно определение сопряженных точек, восходящее к Морсу [2] (доказательство есть, например, в книге: Громол, Клингленберг, Мейер [1]).

5.3.3. Лемма. Пусть $c = c(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $|\dot{c}| = 1$, — геодезическая на римановом многообразии.

(i) Предположим, что существуют $\omega > 0$ и H^1 -векторное поле ξ вдоль $c|_{[0, \omega]}$, удовлетворяющие условию $\xi(0) = \xi(\omega) = 0$ и такие, что ξ не есть поле Якоби, ξ не равно тождественно нулю и

$$H_\omega(\xi, \xi) := \int_0^\omega (\langle \nabla \xi(t), \nabla \xi(t) \rangle - \langle R(\xi(t), \dot{c}(t), \dot{c}(t)), \xi(t) \rangle) dt \leq 0.$$

Тогда у c есть сопряженная точка при некотором t_0 , $0 < t_0 < \omega$.

(ii) Обратно, если c имеет сопряженную точку при некотором $t_0 > 0$, то для любого $\omega > t_0$ найдется векторное поле ξ , обладающее всеми перечисленными в (i) свойствами. $\square$

Сейчас мы докажем основной результат о многообразиях Аносова (см. Клингленберг [10]).

5.3.4. Теорема. Пусть геодезический поток $\varphi_t: T_1 M \rightarrow T_1 M$ является потоком Аносова.

Утверждения. (i) На M не существует гомотопных нулю замкнутых геодезических; все замкнутые геодезические гиперболические, и их индекс равен нулю.

(ii) На M нет сопряженных точек^{*)}; следовательно, универсальная накрывающая $\tilde{M}$ многообразия M диффеоморфна любому касательному пространству посредством экспоненциального отображения.

(iii) При каждом $X_0 \in T_1 M$ устойчивый слой над X_0 и вертикальный слой над X_0 пересекаются только по нулевому вектору; то же верно и для неустойчивого слоя.

(iv) Пусть $k > 0$ — коэффициент в экспоненте в условии Аносова. Тогда существуют константы $t_0 > 0$, $k' > 0$, $k > k'$, для которых

^{*)} В то же время фокальные точки могут быть (Гулливер [1]).

выполняется следующее. Пусть $Y(t)$ — поле Якоби вдоль геодезической $c = (c(t))$, $|\dot{c}| = 1$, $\langle \dot{c}(t), Y(t) \rangle = 0$, $Y(0) = 0$. Тогда при всех $t \geq t_0$

$$|Y(t)| \geq |\nabla Y(0)| \operatorname{sh}(k't).$$

(v) Пусть Λ' — связная компонента многообразия ΛM , не содержащая одноточечных кривых. Тогда лежащее в Λ' критическое множество состоит из одной критической орбиты $S \cdot c'$, для которой $E(c') = \inf E|_{\Lambda'}$.

(vi) Множество $\operatorname{Per} T_1 M$, состоящее из тех $X_0 \in T_1 M$, для которых орбита $\varphi_t X_0$ периодическая, плотно в $T_1 M$.

(vii) Геодезический поток транзитивен в следующем смысле. Существует такое подмножество $\operatorname{Trans} T_1 M$, мера которого равна мере $T_1 M$, что при $X_0 \in \operatorname{Trans} T_1 M$ траектория $\varphi_t X_0$, $t \geq 0$ (или $\varphi_t X_0$, $t \leq 0$) плотна в $T_1 M$.

(viii) Фундаментальная группа $\pi_1 M$ многообразия M имеет экспоненциальный рост; любая нетривиальная абелева подгруппа группы $\pi_1 M$ является бесконечной циклической.

Замечание. Утверждения (vi) и (vii) являются одними из основных результатов Аносова [1] для сохраняющих меру потоков, удовлетворяющих так называемому условию Аносова. Мы не будем здесь повторять доказательства этих результатов, а займемся доказательством утверждений (i) — (v), в котором существенно используются результаты Аносова (vi) и (vii).

Доказательство (см. Клингенберг [12]). Утверждение (i) эквивалентно отсутствию замкнутых геодезических на универсальной накрывающей $\tilde{M}$ многообразия M . Для доказательства этого утверждения заметим, что универсальная накрывающая устойчивого расслоения $\tilde{\tau}_s^n: T_s^n T_1 \tilde{M} \rightarrow T_1 \tilde{M}$ ориентируема. Поэтому если $\tilde{c}$ — замкнутая геодезическая на $\tilde{M}$, то ее устойчивое расслоение и ее нормальное расслоение являются ориентируемыми одновременно. Следовательно, согласно 5.3.2, индекс $\tilde{c}$ четный.

Пусть теперь $\tilde{c}_0$ — замкнутая геодезическая на $\tilde{M}$. Как мы только что видели, индекс $\tilde{c}_0$ четный. Если, кроме того, среди таких геодезических у $\tilde{c}_0$ минимальный индекс и функция E принимает на $\tilde{c}_0$ минимальное значение, то из доказательства теоремы Фета (4.1.8) видно, что тогда на $\tilde{M}$ существует такая замкнутая геодезическая $\tilde{c}_1$, что $\operatorname{ind} \tilde{c}_1 = \operatorname{ind} \tilde{c}_0 + 1$, т. е. индекс $\tilde{c}_1$ нечетный — противоречие.

Для доказательства (ii) рассмотрим множество $\operatorname{Conj} T_1 M$, состоящее из тех $X_0 \in T_1 M$, для которых геодезическая $c(t) = \tau \cdot \varphi_t X_0$ имеет сопряженную точку. Ясно, что $\operatorname{Conj} T_1 M$ открыто.

Кроме того, из 5.3.3 следует, что при $t \geq 0$

$$\varphi_t \cdot \text{Conj } T_1 M \subset \text{Conj } T_1 M.$$

Пусть теперь $\varphi_t: T_1 M \rightarrow T_1 M$ — поток Аносова и $\text{Conj } T_1 M$ непусто. Из (vii) следует, что $\text{Conj } T_1 M$ открыто и плотно. Поэтому из (vi) вытекает существование такой периодической траектории $\varphi_t X_0$ с минимальным периодом ω , что соответствующая геодезическая $c(t) = \tau \cdot \varphi_t X_0$, $t \in \mathbb{R}$, имеет сопряженную точку, скажем при $t = t_0 > 0$.

Мы утверждаем, что индекс $c > 0$, где через c обозначена однократная замкнутая геодезическая $c(t)$, $0 \leq t \leq \omega$. Так как c гиперболическая и, следовательно, $\text{ind } c^m = m \text{ ind } c$, то положительность индекса c эквивалентна тому, что $\text{ind } c^m > 0$ при некотором $m \geq 1$.

Выберем теперь m столь большим, чтобы $m\omega > t_0$. Тогда из 5.3.3 следует, что существует нетривиальное периодическое векторное поле $\xi(t)$, $0 \leq t \leq m\omega$, вдоль $c(t)$, $0 \leq t \leq m\omega$, удовлетворяющее условию $D^2 E(c^m)(\xi, \xi) \leq 0$. Так как ξ не принадлежит ядру формы $D^2 E(c^m)$, то это доказывает наше утверждение.

Обозначим через Λ' связную компоненту многообразия ΛM , содержащую негомотопную нулю замкнутую геодезическую c положительного индекса. Согласно 2.1.3, в Λ' существует также такая замкнутая геодезическая c' , что $E(c') = \inf E|_{\Lambda'} := \kappa' > 0$ и $\text{ind } c' = 0$.

Мы утверждаем, что индекс c' и индекс c имеют одинаковую четность, и, следовательно, $\text{ind } c = 2k > 0$. Для того чтобы в этом убедиться, заметим, что нормальные расслоения геодезических c и c' одновременно ориентируемы или одновременно неориентируемы. То же верно и для устойчивых расслоений этих геодезических, так как эти расслоения могут рассматриваться как получающиеся при факторизации расслоения $\tilde{\tau}_s^n: T_s^n T_1 \tilde{M} \rightarrow T_1 \tilde{M}$ по одному и тому же элементу фундаментальной группы и последующего ограничения этого факторрасслоения на гомотопные кривые c и c' (точнее, последующего индуцирования расслоения над S посредством гомотопных отображений c и c').

Рассмотрим теперь в Λ' замкнутую геодезическую c с минимальным положительным индексом, скажем $2k$. Пусть, кроме того, на c функция E принимает минимальное значение среди таких геодезических. При помощи отрицательного диска или, лучше, неустойчивого многообразия геодезической c получим ненулевой сферический цикл

$$u: (S^{2k}, *) \rightarrow (\Lambda', c').$$

Композиция этого цикла с обычной проекцией $\Lambda M \rightarrow M$ дает нетривиальный цикл

$$v: (S^{2k}, *) \rightarrow (M, c'(0)).$$

Но тогда, согласно 2.1.8, получаем гомотопную нулю замкнутую геодезическую на M , что противоречит (i). Это доказывает (ii), за исключением последнего утверждения, которое является обычным обобщением теоремы Адамара — Картана; см. Громоу, Клингенберг, Мейер [1], Милнор [1]*).

Для доказательства (iii) предположим обратное; пусть существует такая геодезическая $c(t)$, $|\dot{c}| = 1$, на M , что при $X_1 = \dot{c}(1)$ имеет место соотношение

$$V_{X_1}^n \cap V_{X_1}^n \neq 0.$$

Другими словами, существует нетривиальное инвариантное поле $\tilde{Y}(t) \in V_s^n(t)$, у которого $Y(1) = 0$. Выберем $\omega \gg 1$ и определим H^1 -векторное поле ξ вдоль c $[0, \omega]$ с помощью следующих условий:

$$\xi(t) = 0 \text{ при } 0 \leq t \leq 1; \quad \xi(t) = Y(t) \text{ при } 1 \leq t \leq \omega - 1;$$

$$\xi(t) = (\omega - t) Y(\omega - 1) \text{ при } \omega - 1 \leq t \leq \omega$$

▲ (подразумевается, что $Y(\omega - 1)$ параллельно переносится вдоль c). ▲ Тогда для $|H_\omega(\xi, \xi)|$ из 5.3.3 получим оценку вида $|H_\omega(\xi, \xi)| \leq b |\tilde{Y}(\omega)|^2$, где $b > 0$ не зависит от геодезической c и от выбора ω . Определим векторное поле $\eta(t)$ вдоль $c(t)$ посредством условий $\eta(0) = 0$, $\eta(t) = 0$ при $2 \leq t \leq \omega$ и $H_\omega(\xi, \eta) = 1$. После этого для векторного поля $\xi(t) := \eta(t) - H_\omega(\eta, \eta)\xi(t)$ находим, что

$$H_\omega(\xi, \xi) = H_\omega(\eta, \eta)(-1 + H_\omega(\eta, \eta)H_\omega(\xi, \xi)),$$

$$|H_\omega(\xi, \xi)| \leq ba |\tilde{Y}(0)| e^{-2k\omega}.$$

Если $H_\omega(\eta, \eta)$ все еще > 0 , то $H_\omega(\xi, \xi) \leq 0$ (конечно, при достаточно большом ω), и, согласно 5.3.3, у c будет сопряженная точка, что противоречит (ii). Этим завершается доказательство (iii).

Для доказательства (iv) мы сначала покажем, что рассматриваемое поле Якоби $Y(t)$ удовлетворяет соотношению

$$(\dagger) \quad |\nabla Y(t)| \leq k_1 |Y(t)|,$$

где k_1 такое, что $-k_1^2$ является нижней границей кривизны по двумерным направлениям в M . Для того чтобы в этом убедиться, заметим, что вертикальное пространство $V_v^n(0)$ над $0 \in \mathbb{R}$ лагранжево, и, следовательно, то же верно для всех $D\varphi_t V_v^n(0)$.

* В работе Аносова [2] приведен набросок другого доказательства отсутствия сопряженных точек, пригодного и для финслеровых метрик (даже необратимых). Заодно доказывается и (iii). Поэтому я не пытался восполнить пробелы в рассуждениях Клингенберга (и даже не стал отмечать их).

Кроме того, из (ii) мы знаем, что $D\varphi V_v^n(0) \cap V_v^n(t) = 0$ при всех $t > 0$. Поэтому так же, как в доказательстве 5.3.1, при $t > 0$ существует симметрическая $(n \times n)$ -матрица (точнее, оператор) $S(t)$, удовлетворяющая уравнению Риккати. Уравнение в свою очередь позволяет нам получить для спектра $S(t)$ верхнюю оценку вида $\leq k_1$.

Рассмотрим теперь $\dot{Y}(t) = (Y(t), \nabla Y(t))$. В разложении $\dot{Y}(t) = \dot{Y}_s(t) + \dot{Y}_u(t) \in V_s^n(t) + V_u^n(t)$, согласно (iii), будет $\dot{Y}_u(0) \neq 0$. Поэтому, воспользовавшись (+) и неравенствами для устойчивых и неустойчивых полей, получим

$$\begin{aligned} |Y(t)|^2 &\geq |\dot{Y}(t)|^2 / (1 + k_1^2), \\ |\dot{Y}(t)| &\geq |\dot{Y}_u(t)| - |\dot{Y}_s(t)| \geq \\ &\geq a(|\dot{Y}_u(0)| e^{kt} - |\dot{Y}_s(0)| e^{-kt}) \geq |\dot{Y}(0)| \operatorname{sh}(k't), \end{aligned}$$

причем последнее неравенство выполняется только для достаточно больших t . Таким образом, (iv) тоже доказано.

(v) является теперь простым следствием (i). Действительно, если есть две различные критические орбиты $S \cdot c'_1$ и $S \cdot c'_2$ в связанной компоненте Λ' многообразия ΛM , а $\Lambda^0 M \not\subset \Lambda'$, то в Λ' должна существовать гомотопия, соединяющая c'_1 с c'_2 . В данном случае это просто кривая в Λ' , идущая из c'_1 в c'_2 . Такие кривые образуют φ -семейство, повисающее на критической точке, являющейся замкнутой геодезической индекса 1 (ср. с § 4.1), что невозможно.

Доказательство (viii) есть у Клингенберга [12]. (vi) и (vii) доказаны у Аносова [1].

Итак, доказательство теоремы 5.3.4 закончено. $\square$

Будем говорить, что компактное дифференцируемое многообразие M является многообразием *гиперболического типа*, если на M существует такая риманова метрика g^* , что соответствующий геодезический поток в единичном касательном расслоении является потоком Аносова.

В статье Клингенберга [10] понятие «гиперболический» определено с помощью другого, быть может более сильного, условия: существует метрика g^* , такая, что кривизна (M, g^*) , где (M, g^*) обозначает многообразие M , снабженное римановой метрикой g^* , строго отрицательна. Наша следующая цель состоит в том, чтобы исследовать геодезический поток и, в частности, периодические траектории на римановом многообразии в случае, когда соответствующее дифференцируемое многообразие имеет гиперболический тип.

Легко показать, что для ориентируемых поверхностей «гиперболический тип» эквивалентен «роду > 1 ». Этот случай изучен Морсом [1]. Дальнейшие ссылки можно найти у Клингенберга [10].

5.3.5. Лемма. Пусть g^* и g — две метрики на компактном дифференцируемом многообразии и геодезический поток на $T_1(M, g^*)$ является потоком Аносова. Пусть, далее, $(\tilde{M}, g^*)$ и $(\tilde{M}, g)$ — римановы универсальные накрывающие многообразий (M, g^*) и (M, g) соответственно.

Утверждение. Существует константа $\rho > 0$, обладающая следующим свойством. Пусть p и q — две любые точки на $\tilde{M}$ и c^* и c — кратчайшие геодезические, соединяющие p с q , соответственно в $(\tilde{M}, g^*)$ и в $(\tilde{M}, g)$. Тогда каждая точка, лежащая на геодезической c , находится от c^* на g -расстоянии $\leq \rho$.

Замечание. $(\tilde{M}, g^*)$ не имеет сопряженных точек. Поэтому существует ровно одна геодезическая c^* , соединяющая p и q . Под g -расстоянием и g -геодезической на $\tilde{M}$ мы подразумеваем расстояние и геодезическую на $(\tilde{M}, g)$. Аналогично мы используем понятие g^* -расстояния и т. д.

Доказательство (ср. Клингенберг [12] и Эшенбург [1]). Так как M компактно, то существуют такие положительные числа b , a , $b \leq 1 \leq a$, что при всех $X \in TM$ имеет место соотношение

$$(\dagger) \quad b^2 g^*(X, X) \leq g(X, X) \leq a^2 g^*(X, X).$$

Отсюда следует, что на универсальном накрывающем $\tilde{M}$ многообразия M длины кривых, измеренные в g -метрике и в g^* -метрике, равномерно сравнимы.

Из 5.3.4 (iv) мы заключаем, что существует константа $\sigma_0 > 0$, для которой имеет место следующее свойство. Пусть pqr — треугольник в $(\tilde{M}, g^*)$, у которого сторона qr находится на расстоянии $\geq \sigma_0/2$ от p . Обозначим через $\tilde{M}'$ поверхность постоянной отрицательной кривизны $-k'^2$, где k' такое же, как и в 5.4.3 (iv). На $\tilde{M}'$ существует единственный с точностью до конгруэнтности треугольник $p'q'r'$, стороны которого имеют ту же самую длину, что и у g^* -треугольника pqr . Мы утверждаем, что $\angle qpr$ в точке p меньше или равен $\angle q'p'r'$ в точке p' .

Этот результат называется *теоремой сравнения для больших треугольников*. Доказательство получается, как обычно, с помощью интегрирования соотношения 5.3.4 (iv); похожая техника используется в книге: Громол, Клингенберг, Мейер [1].

Другим полезным для нас инструментом является следующее утверждение.

Утверждение. Существует константа $\sigma \geq \sigma_0$, обладающая следующим свойством. Пусть $c^* = c^*(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $|\dot{c}^*| = 1$, — полная геодезическая на $(\tilde{M}, g^*)$. Пусть $c_1 = c_1(t)$, $0 \leq t \leq 1$, — геодезический сегмент на $(\tilde{M}, g)$, соединяющий $p = c_1(0)$ с $q = c_1(1)$,

такой, что при всех $t \in [0, 1]$ g^* -расстояние $d^*(c_1(t), c^*) \geq \sigma$ и $d^*(p, c^*) = d^*(q, c^*) = \sigma$. Пусть, кроме того, g -длина сегмента c_1 равна $d(p, q)$. Тогда g^* -проекции p^* и q^* точек p и q на c^* находятся на g^* -расстоянии $d^*(p^*, q^*) < \sigma_0$.

Предположим на время, что это утверждение уже доказано. Тогда $\rho := b\sigma$, где a такое же, как и в $(+)$, является константой с требуемыми в лемме свойствами. Чтобы в этом убедиться, допустим, что имеется такая точка $r \in c$, что $d(r, c^*) > \rho$ и, следовательно, $d^*(r, c^*) > \rho/a = b\sigma$, см. $(+)$. На геодезической c существует сегмент $c_1 = c_1(t)$, $0 \leq t \leq 1$, удовлетворяющий условиям утверждения и такой, что $r = c_1(t_0)$, $0 < t_0 < 1$, т. е. точка r лежит внутри этого сегмента. Тогда проекции p^* и q^* точек $p = c_1(0)$ и $q = c_1(1)$ на c^* находятся на g -расстоянии $< \sigma_0$ друг от друга. Поэтому g^* -длина кривой, идущей из p в p^* , затем в q^* и затем в q , меньше 3σ , и, следовательно, ее g -длина $< \rho/2$. Но тогда геодезический сегмент c_1 , содержащий точку $r = c_1(t_0)$, находящуюся на g -расстоянии $> \rho$ от c , не является кривой с минимальной g -длиной, соединяющей p с q .

Осталось доказать утверждение. Для этого мы приведем к противоречию предположение о том, что существует произвольно большое $\sigma \geq \sigma_0$, для которого $d^*(p^*, q^*) \geq \sigma_0$, где σ_0 то же, что и выше.

Прежде всего разобьем сегмент p^*q^* с помощью некоторых точек $c_0^* = p^*$, $c_1^*, \dots, c_r^* = q^*$ на сегменты равной g^* -длины, которая $\geq \sigma_0$ и $< 2\sigma_0$. Найдем далее такое подразделение $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ отрезка $[0, 1]$, что g^* -проекция точки $c_1(t_i)$ на c^* дает точку c_i^* , $0 \leq i \leq r$.

При каждом $i > 0$ сравним g^* -угол в точке c_i^* большого треугольника $c_{i-1}^*c_i^*c_1(t_{i-1})$ с соответствующим углом соответствующего треугольника на гиперболической плоскости $\tilde{M}'$. Последний угол $< \gamma_0 < \pi/2$, где γ_0 — угол при основании в равнобедренном треугольнике на $\tilde{M}'$, длина основания которого $2\sigma_0$, а боковые стороны уходят в бесконечность. Следовательно, g^* -угол в точке c_i^* g^* -треугольника $c_1(t_{i-1})c_i^*c_1(t_i)$ отделен от нуля.

Так как точки из $c_1[t_{i-1}, t_i]$ находятся на g^* -расстоянии $\geq \sigma \geq \sigma_0$ от c_i^* , то из 5.3.4 (iv) получаем нижнюю оценку для g^* -длины сегмента $c_1[t_{i-1}, t_i]$ вида $a_0 \operatorname{sh}(k_0\sigma)$, где положительные константы a_0 и k_0 не зависят от σ и i .

Воспользовавшись $(+)$, мы тем самым получим нижнюю оценку для g -длины сегмента c_1 вида $u(\sigma) = ra_0 \operatorname{sh}(k_0\sigma)/b$. Так как c_1 — кратчайшая g -кривая, соединяющая p с q , то верхней оценкой для g -длины сегмента c_1 является g -длина кривой pp^*q^*q , т. е. верхнюю оценку можно взять в виде $v(\sigma) = 2a(\sigma + r\sigma_0)$. Но при больших σ справедливо неравенство $v(\sigma) < u(\sigma)$. Это завершает доказательство леммы 5.3.5. $\square$

Для того чтобы сформулировать основные следствия леммы 5.3.5, рассмотрим универсальное риманово покрывающее $(\tilde{M}, g)$ компактного риманова многообразия (M, g) . Через $\gamma: (\tilde{M}, g) \rightarrow (M, g)$ обозначим покрывающее отображение, т. е. факторизацию по действию группы скользящих $\Gamma \cong \pi_1 M$. Мы будем использовать γ также для обозначения индуцированного отображения $T_1(\tilde{M}, g)$ на $T_1(M, g)$. Будем говорить, что геодезическая $\tilde{c}$, $|\dot{\tilde{c}}|=1$, на $(\tilde{M}, g)$ минимизирующая, если для любых двух ее точек длина соединяющего их сегмента геодезической $\tilde{c}$ равна g -расстоянию между этими точками *).

Пусть $\tilde{c}^*$, $|\dot{\tilde{c}}^*|=1$, — минимизирующая геодезическая на $(\tilde{M}, g^*)$, которая остается инвариантной под действием некоторого элемента $\tau \neq \text{id}$ из Γ , т. е. $\tau \tilde{c}^*(t) = \tilde{c}^*(t + \omega)$ с некоторым $\omega > 0$ **). Это эквивалентно тому, что спроектированная на (M, g^*) геодезическая $c^* = \gamma \tilde{c}^*$ — периодическая, т. е. $c^*(t + \omega) = c^*(t)$. Если теперь $\tilde{c}$, $|\dot{\tilde{c}}|=1$, — минимизирующая геодезическая на $(\tilde{M}, g)$, находящаяся на ограниченном расстоянии от $\tilde{c}^*$, то мы ее назовем почти инвариантной, так как все образы $\tau^k \tilde{c}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, геодезической $\tilde{c}$ также находятся на ограниченном расстоянии от $\tilde{c}$. Проекцию $c = \gamma \tilde{c}$ геодезической $\tilde{c}$ на (M, g) будем называть геодезической, почти периодической по отношению к элементу τ . Через $\text{Per } T_1(M, g)$ обозначим множество касательных векторов к почти периодическим геодезическим на (M, g) , параметризованным длиной дуги.

5.3.6. Теорема. Пусть M — компактное многообразие гиперболического типа и g — произвольная риманова метрика на M . Пусть g^* — такая риманова метрика на M , что геодезический поток на $T_1(M, g^*)$ является потоком Аносова.

Утверждение. (i) Пусть $\tilde{c}^*$, $|\dot{\tilde{c}}^*|=1$, — полная геодезическая на $(\tilde{M}, g^*)$ (которая, в частности, является также минимизирующей геодезической). Тогда существует полная минимизирующая геодезическая $\tilde{c}$, $|\dot{\tilde{c}}|=1$, на $(\tilde{M}, g)$, находящаяся на ограниченном расстоянии от $\tilde{c}^*$. Если $\tilde{c}^*$ инвариантна относительно действия некоторого элемента $\tau \neq \text{id}$ из Γ , то существует замкнутое множество $\tilde{C}$, состоящее из минимизирующих геодезических $\tilde{c}$, почти инвариантных относительно τ ; $\tau \tilde{c} = \tilde{c}$.

*) Морс говорил о «геодезических класса (A)», Бузман — о прямых (линиях), Клингенберг в [21] принял термин line.

**) Геодезическую, которая под действием некоторого движения τ пространства $\tilde{M}$ сдвигается по себе, часто называют осью (этого движения).

(ii) Пусть $\tilde{c}^*$, $|\dot{\tilde{c}}^*| = 1$, — такая полная геодезическая на $(\tilde{M}, g^*)$, что множество $\{\dot{\tilde{c}}^*(t), t \in \mathbb{R}\}$ касательных векторов плотно в $T_1(M, g^*)$, т. е. траектория $\varphi_t \dot{\tilde{c}}^*(0)$ плотна в $T_1(M, g^*)$. Тогда среди минимизирующих геодезических на $(\tilde{M}, g)$, находящихся на ограниченном расстоянии от $\tilde{c}^*$, существует такая, скажем $\tilde{c}$, $|\dot{\tilde{c}}| = 1$, которая обладает следующими свойствами. Положим $\tilde{y}\tilde{c} = c$, обозначим через $T_{1,c}(M, g)$ замыкание множества $\{\dot{c}(t), t \in \mathbb{R}\}$, и пусть

$$\text{Per } T_{1,c}(M, g) := T_{1,c}(M, g) \cap \text{Per } T_1(M, g).$$

Тогда:

- (a) Множество $T_{1,c}(M, g)$ φ_t -инвариантно.
- (b) Ограничение потока $\varphi_t|_{T_{1,c}(M, g)}$ топологически транзитивно. Точнее, траектория $\varphi_t \dot{c}(0)$ плотна в $T_{1,c}(M, g)$.
- (c) $\text{Per } T_{1,c}(M, g)$ плотно в $T_{1,c}(M, g)$.
- (d) Для каждого $\tau \in \Gamma$, $\tau \neq \text{id}$, существует такая почти периодическая по отношению к τ геодезическая c' , что $c' \in T_{1,c}(M, g)$.

Замечания. 1) Мы видим, что геодезический поток $\varphi_t|_{T_{1,c}(M, g)}$ имеет много общих свойств с геодезическим потоком на $T_1(M, g^*)$, который является потоком Аносова. Основное различие состоит в том, что, вообще говоря, $T_{1,c}(M, g)$ будет только собственным подмножеством $T_1(M, g)$.

Что касается свойства (d), то заметим, что каждому нетривиальному классу сопряженных элементов Γ отвечает связная компонента $\Lambda'(M, g)$ многообразия $\Lambda(M, g)$, не содержащая одноточечных кривых. Из 2.1.3 мы знаем, что в $\Lambda'(M, g)$ существует такая замкнутая геодезическая c' , что $E(c') = \inf E|_{\Lambda'(M, g)}$. Поднятие $\tilde{c}'$ геодезической c' в $(\tilde{M}, g)$ будет находиться на ограниченном расстоянии от полной геодезической $\tilde{c}^*$ многообразия $(\tilde{M}, g^*)$, которая инвариантна относительно элемента τ из рассматриваемого класса. Такая $\tilde{c}'$ также будет инвариантной относительно τ , однако, вообще говоря, не обязательно минимизирующей. Именно по этой причине мы ввели выше понятия почти инвариантной и почти периодической геодезической.

2) Как было показано Морсом [1], в случае, когда M — компактная ориентируемая поверхность, теорема 5.3.6 может быть усилена. В то время как в общем случае есть только почти периодические минимизирующие геодезические, в этом специальном случае геодезические являются периодическими на самом деле. Поэтому множество $\tilde{C}$ из 5.3.6 (i) состоит из единственной минимизирующей геодезической, инвариантной относительно элемента $\tau \neq \text{id}$ группы Γ . Кроме того, можно считать, что в 5.3.6 (ii d)

геодезическая c' замкнута и имеет минимальную длину в своем гомотопическом классе.

Объяснение этого явления получается из следствия 2 теоремы об индексе (3.2.12). Пусть c — замкнутая геодезическая на ориентируемой поверхности, имеющая минимальную длину в своем свободном гомотопическом классе. Тогда индекс c равен нулю и она ориентируема. Согласно 3.2.14, c будет либо гиперболической, либо вырожденной. Из этого мы можем заключить, что все кратные повторения c^q геодезической c также будут иметь индекс 0. Это доказывает наше утверждение. В самом деле, это в точности то свойство, которое гарантирует, что полная геодезическая $\tilde{c}$ на универсальной накрывающей $(\tilde{M}, g)$ многообразия (M, g) , проектирующаяся на замкнутую геодезическую c на (M, g) , является кратчайшей между любыми своими двумя точками, а не только между точками $\tilde{c}(t)$ и $\tilde{c}(t + \omega) = \tau\tilde{c}(t)$, расстояние между которыми равно ω , т. е. длине c .

Пусть теперь c — гиперболическая геодезическая индекса 0; тогда и $\text{ind } c^q = q \cdot \text{ind } c = 0$, см. 3.2.13. Если, с другой стороны, c вырожденна, то существует нетривиальное периодическое поле Якоби $Y(t)$ вдоль $c(t)$. Так как индекс c равен нулю и c ориентируема, то $Y(t) \neq 0$ при всех t . Пусть $c^q = \{c(t); 0 \leq t \leq q\omega\}$ есть q -кратное повторение геодезической c . Тогда каждое периодическое векторное поле ξ вдоль c^q может быть записано в виде $\xi(t) = \omega(t) Y(t)$, $0 \leq t \leq q\omega$. Отсюда следует, что форма $D^2E(c^q)(\xi, \xi) \geq 0$ и равна 0 лишь в том случае, если $\omega(t) = \omega_0 = \text{const}$ (ср. с концом доказательства теоремы 3.2.12), т. е. когда ξ лежит в ядре формы $D^2E(c^q)$.

Доказательство теоремы 5.3.6. (i) Для данной геодезической $\tilde{c}^*$ на $(\tilde{M}, g^*)$ обозначим через $\tilde{c}_m$ кратчайший геодезический сегмент на $(\tilde{M}, g)$, соединяющий $\tilde{c}^*(-m)$ с $\tilde{c}^*(m)$, где $m \geq 1$ — произвольное целое. Из 5.3.5 мы заключаем, что последовательность $\{\tilde{c}_m(0)\}$ касательных векторов остается в ограниченной области многообразия $T_1(\tilde{M}, g)$, и поэтому у нее есть сходящаяся подпоследовательность. Предельная точка такой подпоследовательности определяет полную минимизирующую геодезическую $\tilde{c}$ на $(\tilde{M}, g)$, находящуюся на ограниченном расстоянии от $\tilde{c}^*$.

Если в Γ существует такой элемент $\tau \neq \text{id}$, что $\tau\tilde{c}^* = \tilde{c}^*$, то, начав с построенной выше геодезической $\tilde{c}$, получим последовательность $\{\tau^n \tilde{c}\}$ минимизирующих геодезических из $(\tilde{M}, g)$, остающихся в ограниченной области вдоль $\tilde{c}^*$. Поэтому эта последовательность имеет точки накопления. Ясно, что множество этих точек глобально инвариантно относительно τ . Вообще говоря, в этом множестве могут существовать инвариантные подмноже-

ства. Если такое инвариантное множество состоит из единственной полной геодезической, то проекция ее на (M, g) дает замкнутую геодезическую c , которая как элемент Λ обладает тем свойством, что функция E принимает на нем минимальное значение среди всех элементов из содержащей c компоненты связности Λ . Аналогичным свойством обладают и кратные повторения c .

Для доказательства (ii) рассмотрим на $(\tilde{M}, g)$ минимизирующую геодезическую $\tilde{c}$, $|\dot{\tilde{c}}| = 1$, которая находится на ограниченном расстоянии от геодезической $\tilde{c}^*$ многообразия $(\tilde{M}, g^*)$. Положим $\gamma\tilde{c} = c$, $T_{1,c}(M, g) :=$ замыкание множества $\{\dot{c}(t), t \in \mathbb{R}\}$. Мы утверждаем, что $T_{1,c}(M, g)$ обладает свойством (d).

Для доказательства этого утверждения напомним, что для любого $\tilde{X}_0^* \in T_1(\tilde{M}, g^*)$ существуют такая последовательность $\{t_n\}$ действительных чисел ≥ 0 и такая последовательность $\{\tau_n\}$ элементов из Γ , что $\lim \tau_n \dot{\tilde{c}}^*(t_n) = \tilde{X}_0^*$. Из 5.3.5 вытекает, что последовательность $\{\tau_n \dot{\tilde{c}}(t_n)\}$ ограничена, и поэтому у нее имеются предельные точки $\tilde{X}_0$. Если, в частности, g^* -геодезическая $\tilde{c}_0^*$, определяемая начальным условием $\dot{\tilde{c}}^*(0) = \tilde{X}_0^*$, инвариантна относительно нетривиального элемента $\tau \in \Gamma$, то геодезическая $\tilde{c}_0$, для которой $\dot{\tilde{c}}_0(0) = \tilde{X}_0$, почти инвариантна относительно τ . Замыкание множества касательных векторов к геодезической $c_0 = \gamma\tilde{c}_0$ на (M, g) принадлежит $T_{1,c}(M, g)$.

Так как $\text{Per } T_1(M, g^*)$ плотно в $T_1(M, g^*)$, то существуют такие последовательность $\{\tau_n\}$ нетривиальных элементов из Γ и последовательность $\{\tilde{c}_n^*\}$ полных геодезических риманова многообразия $(\tilde{M}, g^*)$, инвариантных относительно τ_n , что $\lim \dot{\tilde{c}}_n^*(0) = \dot{\tilde{c}}^*(0)$, где $\tilde{c}^*$ — исходная геодезическая, с которой мы начали. Для каждого n существует также τ_n -инвариантное множество $\tilde{C}_n$, состоящее из почти инвариантных относительно τ_n геодезических $\tilde{c}_n$ риманова многообразия $(\tilde{M}, g)$. Проекция на $T_1(M, g)$ множества касательных векторов к этим $\tilde{c}_n$ принадлежит $T_{1,c}(M, g)$. Предельное множество последовательности $\{\tau_n \tilde{c}_n\}$, $\tilde{c}_n \in \tilde{C}_n$, содержит геодезическую $\tilde{c}'$ многообразия $(\tilde{M}, g)$, находящуюся на ограниченном расстоянии от $\tilde{c}$ и $\tilde{c}^*$.

Как и раньше, определим $T_{1,c'}(M, g)$ с помощью геодезической $c' = \gamma\tilde{c}'$. Тогда $T_{1,c'}(M, g) \subset T_{1,c}(M, g)$ и $T_{1,c'}(M, g)$ снова обладает свойством (d).

Продолжая этот процесс, получим последовательность $\tilde{c} = \tilde{c}^{(0)}$, $\tilde{c}' = \tilde{c}^{(1)}$, $\tilde{c}^{(2)}$, ... минимизирующих геодезических из $(\tilde{M}, g)$,

находящихся на ограниченном расстоянии от $\tilde{c}^*$. Поэтому у этой последовательности должны быть предельные геодезические. Одну из них снова обозначим через $\tilde{c}$. Множество $T_{1,c}(M, g)$, определяемое, как и выше, как замыкание касательных векторов к $c = \tilde{c}$, обладает теперь уже не только свойством (d), но и свойством (c), что немедленно следует из определения $\tilde{c}$ как предела геодезических $\tilde{c}^{(k)}$. Свойства (a) и (b), очевидно, следуют из определения множества $T_{1,c}(M, g)$. Это завершает доказательство теоремы 5.3.6. $\square$

Геодезический поток на римановом многообразии без сопряженных точек стал объектом большого числа исследований. Специальный случай, когда M — замкнутая поверхность отрицательной кривизны, был изучен еще Адамаром [1]. Среди других работ, помимо Аносов [1] и Аносов, Синай [1], отметим только следующие: Картан [2], Хедлунд [2], Буземан [1], Грин [1, 2] и Эберлейн [2] ⁽⁶¹⁾.

Заметим, что, в частности, плоские римановы многообразия не имеют сопряженных точек. Фундаментальный результат Бибербаха (см. Вольф [1]) состоит в том, что у компактного плоского риманова многообразия есть конечное накрытие, являющееся тором. Мы примем это свойство за определение многообразий параболического типа. Точнее, будем говорить, что компактное дифференцируемое многообразие является многообразием параболического типа, если у него есть конечное и, следовательно, компактное накрытие с абелевой фундаментальной группой.

Из многочисленных результатов о римановых многообразиях параболического типа мы приведем здесь только следующую теорему Буземана [1].

5.3.7. Теорема. Пусть M — компактное риманово многообразие без сопряженных точек. Пусть, кроме того, фундаментальная группа $\Gamma := \pi_1 M$ абелева.

Утверждение. Для каждого элемента $\tau \neq \text{id}$ из Γ в универсальном накрывающем $\tilde{M}$ многообразия M существует семейство полных τ -инвариантных минимизирующих геодезических, однократно покрывающее $\tilde{M}$. Это означает, что для каждой точки $\tilde{p} \in \tilde{M}$ существует в точности одна геодезическая $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такая, что $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$, $|\dot{\tilde{\gamma}}| = 1$ и $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{c}(t + \omega)$, где $\omega > 0$ и не зависит от выбора точки $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Кроме того, для любой пары t_0, t_1 , $t_0 < t_1$, действительных чисел $d(\tilde{c}(t_0), \tilde{c}(t_1)) = t_1 - t_0$.

Как следствие получаем, что для каждого неделимого элемента $\tau \neq \text{id}$ из Γ , т. е. такого элемента, который не может быть записан в виде $\tau = \tau_0^m$, где $m > 1$ — целое и $\tau_0 \in \Gamma$, существует

однократно покрывающее M семейство однократных замкнутых геодезических c без самопересечений, имеющих одну и ту же длину, равную периоду ω отображения τ : $\tau \tilde{c}(t) = \tilde{c}(t + \omega)$.

Замечание. Поведение геодезического потока на T_1M в этой теореме очень похоже на поведение геодезического потока на плоском торе. Хопф [1] доказал, что в случае $\dim M = 2$ ориентируемое многообразие M , удовлетворяющее условиям теоремы, действительно изометрично плоскому тору.

Что касается ориентируемого многообразия M произвольной размерности $n+1$, удовлетворяющего условиям теоремы, то с помощью формулы 3.2.16 можно показать, что линейное отображение Пуанкаре P , соответствующее замкнутой геодезической c на M , имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} E_n & E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix}, \quad \text{где } E_n \text{ — единичная матрица размера } n \times n.$$

Это в точности вид отображения Пуанкаре на плоском торе. Если бы, кроме того, удалось показать, что лагранжево P -инвариантное подпространство является горизонтальным подпространством при любом выборе начальной точки геодезической, то отсюда следовало бы, что M плоское.

Доказательство. Для заданного $\tau \neq \text{id}$ из Γ рассмотрим функцию $f_\tau: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{p} \mapsto d(\tilde{p}, \tau\tilde{p})$. Так как Γ абелева, то при каждом $\sigma \in \Gamma$ имеем $f_\tau(\tilde{p}) = f_\tau(\sigma\tilde{p})$. Таким образом, f_τ достигает своей верхней грани ω в точке $\tilde{p}$, лежащей в компактной фундаментальной области многообразия $\tilde{M}$.

Пусть $\tilde{\sigma}$, $|\dot{\tilde{\sigma}}| = 1$, — полная геодезическая и $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{p}$, $\tilde{\sigma}(\omega) = \tilde{q} = \tau\tilde{p}$. Положим $\tilde{c}(2\omega) = \tilde{p}$. Из неравенств

$$\omega \geq d(\tilde{p}, \tau\tilde{p}) \geq d(\tau\tilde{p}, \tau\tilde{p}) - d(\tau\tilde{p}, \tilde{p}) = 2\omega - \omega$$

следует, что треугольник $\tilde{p}\tau\tilde{p}$ — вырожденный, т. е. $\tau\tilde{p} = \tilde{\sigma}(3\omega)$, и $\tilde{\sigma}$ инвариантна относительно τ .

Пусть теперь $\tilde{q}$ — произвольная точка из $\tilde{M}$. Для каждого положительного целого m имеем

$$md(\tilde{p}, \tau\tilde{p}) = d(\tilde{p}, \tau^m\tilde{p}) \leq d(\tilde{p}, \tilde{q}) + d(\tilde{q}, \tau\tilde{q}) + \dots + d(\tau^m\tilde{q}, \tau^m\tilde{p}) = \\ = 2d(\tilde{p}, \tilde{q}) + md(\tilde{q}, \tau\tilde{q}).$$

Разделив на m и взяв предел при $m \rightarrow \infty$, получим, что $d(\tilde{q}, \tau\tilde{q}) = d(\tilde{p}, \tau\tilde{p}) = \omega = \sup f_\tau$. Тем самым геодезическая $\tilde{c}'$, $|\dot{\tilde{c}}'| = 1$, соединяющая $\tilde{q}$ с $\tau\tilde{q}$, также инвариантна относительно τ .

Вторая часть теоремы, относящаяся к M , непосредственно следует из первой части. $\square$

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

(¹) В книге и особенно в первой главе используются понятия и обозначения, вводимые при бескоординатной трактовке дифференциального исчисления. В требуемой здесь степени общности — для отображений банаховых пространств — эти понятия и обозначения изложены у Дьедонне [1], Ленга [1] и Бурбаки [1]. Обратим внимание на следующее.

а) Пусть E, F — банаховы (у Клингенберга — гильбертовы) пространства. Совокупность $L^n(E; F)$ непрерывных n -линейных отображений $E \times \dots \times E \rightarrow F$ канонически отождествляется с $L(E; L(E; \dots L(E; F) \dots))$. Клингенберг не пользуется никакими особыми обозначениями, которые указывали бы, рассматривается ли элемент $\varphi \in L^n(E; F)$ как полилинейное отображение или как линейное отображение E в $L^{n-1}(E; F)$. Это выясняется из контекста. Так, запись $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ означает, что φ интерпретируется в первом смысле тогда как запись $\varphi(x_1)$ — что во втором.

б) $L^n(E) := L^n(E; \mathbb{R})$.

в) $L^n(\mathbb{R}; E)$ естественно отождествляется с E .

г) Производная (Фреше) отображения $f: U \rightarrow F$ (где U — открытое подмножество в E) в точке u обозначается через $Df(u)$, а образ вектора $x \in E$ под ее действием — через $Df(u) \cdot x$ (точка внизу; иногда она опускается). Клингенберг не употребляет довольно распространенного обозначения $D_x f(u)$ для того же образа, но в примечаниях я все же иногда буду им пользоваться. Заметим, что если отображение $f: U \rightarrow L(E; F)$ имеет производную в точке u , то $Df(u) \cdot x \in L(E, F)$, так что определено $(Df(u) \cdot x) \cdot y$; вместо этого часто пишется $Df(u) \cdot (x, y)$ (ср. в а)). Из сказанного ясен смысл записи типа $D^2 f(u) \cdot (x, y)$ для $f: U \rightarrow F$.

д) При $E = \mathbb{R}$ ввиду в) $Df(u)$ часто отождествляется с обычной производной векторной функции скалярного аргумента

$$\dot{f}(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(u+h) - f(u))$$

(предел в смысле входимости по норме). Более формально было бы сказать, что $\dot{f}(u) = Df(u) \cdot 1$.

е) Для «векторной функции / нескольких векторных переменных» производная по i -му аргументу обозначается через $D_i f$.

(²) Отечественная терминология еще не вполне установилась. В переводе книги Ленга [1] говорится: « M является моделью для M ; M есть M -многообразие», а в переводе Бурбаки [1] — « M есть чистое многообразие типа M ». Определение многообразия можно модифицировать таким образом, чтобы: 1) топология в M не предполагалась заранее заданной, а вводилась посредством атласа; 2) образы карт могли лежать в различных (хотя и изоморфных, если M связно) гильбертовых пространствах. См. Бурбаки [1], Ленг [1].

(³) а) Точнее, в (i) $\Phi_p = \text{rg}_2 \cdot \Phi|_{E_p}$, а в (ii) отображение $p \mapsto \Phi'_p \cdot \Phi_p^{-1}$, строго говоря, нельзя обозначать через $\Phi' \cdot \Phi^{-1}$ — последнее есть отображение

$\Phi(U \cap U') \times E \rightarrow \Phi'(U \cap U') \times E$. Тем не менее в дальнейшем $\Phi' \circ \Phi^{-1}$ часто обозначает именно отображение $p \mapsto \Phi'_p \circ \Phi_p^{-1}$.

б) Локальные представления в Бурбаки [1] названы векторными картами, а вся используемая их совокупность — векторным атласом расслоения. При случае мы тоже будем пользоваться этой терминологией.

в) В приведенном определении векторного расслоения, очевидно, подразумевается, что в каждом слое заранее введена структура банахова пространства. Определение можно модифицировать таким образом, чтобы структура банаховых пространств в слоях тоже определялась с помощью атласа. У Бурбаки [1] такое определение принято за исходное.

е) Если вместо дифференцируемости отображения $\Phi' \circ \Phi^{-1}$ требовать его непрерывности, то получится определение непрерывного векторного расслоения.

(4) В широком (и неформальном) смысле слова, связность в дифференциальной геометрии — это то, что позволяет говорить о ковариантном дифференцировании, параллельном перенесении и т. п. Если, скажем, первичным понятием является отображение $(\xi, v) \mapsto \nabla \xi \cdot v$ (см. замечание автора после определения ковариантной производной), обладающее определенными свойствами, то его и называют связностью. Такое определение связности одно время было господствующим. Отображение K при этом называли не связностью, а *отображением связности*, см. Громол, Клингенберг, Мейер [1], Флашель, Клингенберг [1] и Элиассон [3]. Но подход, при котором первичным понятием считается K , имеет некоторые преимущества (и, кстати, ближе к первоначальному определению), что и отразилось в изменении терминологии.

(5) а) У Элиассона [3] для K используется термин *local connector*. Собственно, следовало бы писать Γ_Φ , Φ и K_Φ , Φ , а не Γ_Φ и K_Φ . Обозначения в настоящих «Лекциях» связаны с тем, что в дальнейшем рассматриваются преимущественно связности в TM , причем используются естественные векторные карты, соответствующие картам многообразия M , так что Φ однозначно определяет Φ .

В классическом смысле (относящемся только к евклидову, т. е. конечномерному, случаю) *символы Кристоффеля (второго рода)* — это коэффициенты Γ_{jk}^i в координатном представлении Γ_Φ : если

$$M = \mathbb{R}^n, E = \mathbb{R}^m, T\Phi \cdot y = (y^1, \dots, y^n), \quad \Phi\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m),$$

то

$$i\text{-я координата } \Gamma_\Phi(x) \cdot (y, \xi) = \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i(\Phi(x)) y^j \xi^k.$$

б) Нетрудно установить, что символы Кристоффеля для локальных представлений (Φ, φ, U) и (Φ', φ', U') связаны посредством следующей формулы преобразования:

$$(\Phi' \circ \Phi^{-1}) \Gamma_{\Phi, \Phi} = \Gamma_{\Phi', \Phi'} \circ (D(\Phi' \circ \Phi^{-1}) \times (\Phi' \circ \Phi^{-1})) + D(\Phi' \circ \Phi^{-1})$$

на $\Phi(U \cap U') \times M \times E$ (здесь $\Phi' \circ \Phi^{-1}$ рассматривается как отображение $\Phi(U \cap U') \rightarrow L(E; F)$).

в) Пусть $\{(\Phi_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ — векторный атлас для E . Пусть для каждого α заданы дифференцируемые отображения $\Gamma_\alpha: \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow L(M \times E; E)$, причем Γ_α и Γ_β для любых α, β связаны посредством формулы преобразования из б) (разумеется, с заменой Φ, φ, U на $\Phi_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha$). Тогда в E существует связность $K: TE \rightarrow E$, для которой Γ_α являются символами Кристоффеля. Именно, определив с помощью Γ_α отображения $K_\alpha: \varphi_\alpha(U_\alpha) \times E \times M \times E \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times E$, получим, что K_α и K_β представляют одно и то же отображение $TE \rightarrow E$ над $U_\alpha \cap U_\beta$.

(6) Точнее, в локальном варианте (*) (для сравнения с (***) в нем надо заменить v на u) фигурируют $\xi_\Phi(x)$ и $\eta_\Phi(x)$ — функции от $x \in \Phi(U)$ со значениями в E (в данном случае в M), тогда как в (***) вместо них фигурируют

постоянные векторы v и w . Поэтому (****) не совпадает в точности с локальным вариантом (*), однако эти две формулы эквивалентны. Действительно, левая часть локального варианта (*) есть

$$D(g_\varphi(x))(\xi_\varphi(x), \eta_\varphi(x)) \cdot u = \\ = Dg_\varphi(x) \cdot u(\xi_\varphi(x), \eta_\varphi(x)) + g_\varphi(x)(D\xi_\varphi(x) \cdot u, \eta_\varphi(x)) + g_\varphi(x)(\xi_\varphi(x), D\eta_\varphi(x) \cdot u).$$

Заменяв первое слагаемое в правой части согласно (****), получим после очевидной перегруппировки членов

$$g_\varphi(x)(D\xi_\varphi(x) \cdot u + \Gamma_\varphi(x)(u, \xi_\varphi(x)), \eta_\varphi(x)) + \\ + g_\varphi(x)(\xi_\varphi(x), D\eta_\varphi(x) \cdot u + \Gamma_\varphi(x)(u, \eta_\varphi(x))),$$

т. е. правую часть локального варианта (*).

(7) Введенные здесь «производные в горизонтальном и вертикальном направлениях» $D_1f(\xi)$ и $D_2f(\xi)$ можно определить и в более общем случае дифференцируемого послойного отображения f расслоений E и F с любыми (не обязательно совпадающими) базами M и N . Поскольку область определения $T_{\xi \in E}E$ отображения $D_2f(\xi)$ отождествляется с $E_{\pi\xi}$, а $\text{im } D_2f(\xi) \subset T_{f(\xi)}F$, причем последнее пространство отождествляется с $E_{\pi f(\xi)}$, то под $D_2f(\xi)$ часто понимается отображение

$$J_{\bar{f}}^{-1}(\xi) \cdot Tf(\xi) \cdot J_\xi: E_{\pi\xi} \rightarrow F_{\pi f(\xi)}.$$

(о J_ξ см. подстрочное примечание перед 1.1.1.) Например, фактически это так в 1.2.5. У D_1f можно заменить область определения $T_{\xi \in E}E$ на $T_{\pi\xi}M$. (Впрочем, это не важно, ибо D_1f далее не используется.)

Аналогично для любого дифференцируемого отображения $f: E \rightarrow N$, где E — по-прежнему дифференцируемое векторное расслоение над M , а N — многообразие, можно определить

$$\nabla_1f(\xi) := Tf(\xi) \cdot (T\pi|E_{\xi N})^{-1}: T_{\pi\xi}M \rightarrow T_{\pi f(\xi)}N,$$

$$\nabla_2f(\xi) := Tf(\xi) \cdot J_\xi: E_{\pi\xi} \rightarrow T_{\pi f(\xi)}N$$

(они используются в § 1.3 для $f = \text{exp}: TM \rightarrow M$). Определения D_1 и ∇_1 зависят от используемой связности в E , а D_2 и ∇_2 не зависят (поэтому Элиассон [3] пишет: ∇_1 и D_2).

(8) Полезно иметь в виду еще следующие утверждения.

1.2.2'. Пусть $E_1, \dots, E_k, F$ — конечномерные непрерывные векторные расслоения над S . Тогда естественные вложения

$$C^0(L(E_1, \dots, E_k; F)) \rightarrow L(H^0(E_1), C^0(E_2), \dots, C^0(E_k); H^0(F)),$$

$$C^0(L(E_1, \dots, E_k; F)) \rightarrow L(C^0(E_1), C^0(E_2), \dots, C^0(E_k); C^0(F))$$

непрерывны.

1.2.3'. Пусть $\mathcal{O}$ — такое открытое подмножество в тотальном пространстве конечномерного непрерывного векторного расслоения $\pi: E \rightarrow S$, что $\mathcal{O}_t := \mathcal{O} \cap \pi^{-1}(t) \subset E_t$ при всех $t \in S$ непусто. Тогда в $C^0(F) := \{\text{непрерывные сечения}\}$ (о соответствующей топологии) множество

$$C^0(\mathcal{O}) := \{\xi \in C^0(F); \xi(t) \in \mathcal{O}_t \text{ при всех } t \in S\}$$

открыто.

1.2.4'. Пусть $\pi: E \rightarrow S$ и $\mathcal{O} \subset E$ такие же, как в 1.2.3'. Пусть $\varphi: F \rightarrow S$ — непрерывное конечномерное векторное расслоение, а $\bar{f}: \mathcal{O} \rightarrow E$ — непрерывное послойное отображение. Тогда индуцированное отображение $\tilde{f}: C^0(\mathcal{O}) \rightarrow C^0(F)$ непрерывно.

1.2.5'. Пусть, в дополнение к условиям 1.2.4', ограничения $\bar{f}$ на слоях дифференцируемы (« $\bar{f}$ послойно дифференцируемо») и отображения $D_{\bar{f}}^k: \mathcal{O} \rightarrow$

→ $L^k(E; F)$, сопоставляющие каждой точке k -ю производную f по слою в этой точке, непрерывны при всех k . Тогда индуцированное отображение $\tilde{f}: C^0(\mathcal{O}) \rightarrow C^0(F)$ дифференцируемо и $D\tilde{f} = (D_2 f)^{\sim}$ (здесь подразумеваются отождествления, аналогичные указанным в подстрочном примечании к 1.2.5).

Доказательства отличаются от доказательств 1.2.2—1.2.5 только некоторым упрощением (не надо дифференцировать по f).

(9) а) Не утверждается, что обязательно $H^1(\mathcal{O}_{c,d}) \neq \emptyset$ при $\mathcal{O}_{c,d} \neq \emptyset$. При наложенном пока что условии на e , сформулированном в 1.2.6, этого нельзя гарантировать. Так, для $M = S$ наложенному условию удовлетворяет любое $e < 1/2$, в то же время если $e > 1/4$, то e -окрестности любых двух точек пересекаются, так что $\mathcal{O}_{c,d} \neq \emptyset$ для любых $c, d: S \rightarrow S$, в том числе и имеющих разную степень. Если бы в последнем случае существовало такое непрерывное $e: S \rightarrow S$, для которого $d_S(e(t), c(t)) < e$ и $d_S(e(t), d(t)) < e$ при всех t , то c и d были бы гомотопны e , т. е. имели бы одинаковую степень.

Потребуем, чтобы лемма 1.2.6 была справедлива с заменой e на $2e$, и будем по-прежнему работать с $\mathcal{O} = \mathcal{O}_e$. Тогда $H^1(\mathcal{O}_{c,d}) \neq \emptyset$ при $\mathcal{O}_{c,d} \neq \emptyset$. Действительно, теперь из $\mathcal{O}_{c,d} \neq \emptyset$ следует, что $d(t)$ можно представить в виде $d(t) = \exp \tau^* c \xi(t)$, где $\xi \in H^1(c^* TM)$ и $|\xi| < 2e$. Тогда кривая $\exp_c(1/2\xi)$ содержится в $\mathcal{U}(c) \cap \mathcal{U}(d)$.

б) Если бы вместо 1.2.8 мы попытались доказать аналогичный факт для $c, d \in H^1(S, M)$, то вместо 1.2.5 нам понадобилось бы некое утверждение о более громоздкой формулировкой (вместо дифференцируемости f в нем говорилось бы о различной степени дифференцируемости в различных направлениях).

(10) а) Для удобства читателей приведем формулировку используемой здесь теоремы 16 из работы Пале [3].

Пусть V_1 и V_0 — локально выпуклые топологические векторные пространства и $f: V_1 \rightarrow V_0$ — непрерывное линейное отображение, образ которого плотен в V_0 . Пусть U^0 — открытое подмножество в V_0 и $U^1 := f^{-1}(U^0)$, причем U^0, U^1 паракомпактны (что заведомо выполнено, если V_0, V_1 метризуемы, и тем более в нашем случае банаховых V_0, V_1). Тогда $f|U^1: U^1 \rightarrow U^0$ — гомотопическая эквивалентность.

б) Хотя доказательство с помощью ссылки на «общую теорию» является в некотором смысле простейшим, вероятно, многие читатели предпочли бы обойтись без этой ссылки. В связи с этим отметим, что рассуждение, которое по несколько иному поводу имеется у Милнора [1] (теорема 17.1), без труда переносится на наш случай.

(11) Иными словами, если $\zeta_1, \zeta_2 \in (\alpha^0)^{-1}(\mathcal{U}(c) \cap \mathcal{U}(d))$, $\alpha^0(\zeta_1) = \alpha^0(\zeta_2) = e$, $\Phi_{0,c}(\zeta_i) = (\xi, \eta_i)$, $\Phi_{0,d}(\zeta_i) = (\chi, \omega_i)$ ($i = 1, 2$), то $\langle \tilde{G}_c(\xi) \eta_1, \eta_2 \rangle_0 = \langle G_d(\chi) \omega_1, \omega_2 \rangle_0$, так что это число можно принять за $\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_0$. Действительно, оба выражения совпадают с интегралом $\int \langle \zeta_1(t), \zeta_2(t) \rangle_{e(t)} dt$ (что, кстати, доказывает его сходимость). Этот факт для сечений следует из аналогичного факта для векторов: если $\xi, \eta_1, \eta_2 \in T_x M$, $\zeta_i = \nabla_x \exp(\xi)$, $\eta_i \in T_z M$, то $\langle G(\xi) \eta_1, \eta_2 \rangle_x = \langle \nabla_x \exp(\xi) \cdot \eta_1, \nabla_x \exp(\xi) \cdot \eta_2 \rangle_{\exp \xi} = \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_x$. Ясно, что можно с самого начала определить $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ на $H^0(e^* TM)$ при всех $e \in H^1(S, M)$ как написанный выше интеграл (сходимость которого в этом случае ясна заранее). С этой точки зрения содержательное утверждение теоремы 1.3.3 состоит в том, что эта метрика имеет надлежащие свойства дифференцируемости.

(12) а) Формула преобразования для символов Кристоффеля, соответствующих локальным представлениям $(\Phi_{0,c}, \exp_c^{-1}, \mathcal{U}(c))$ и $(\Phi_{0,d}, \exp_d^{-1}, \mathcal{U}(d))$ расслоения α^0 , имеет вид (ср. (5) б)):

$$\begin{aligned} (\Phi_{0,d} \circ \Phi_{0,c}^{-1})(\xi) \cdot (\tilde{\Gamma}_c(\xi) \cdot (\eta \cdot \zeta)) = \\ = \tilde{\Gamma}_d(\chi) \cdot (D(\exp_d^{-1} \cdot \exp_c)(\xi) \cdot \eta, (\Phi_{0,d} \circ \Phi_{0,c}^{-1})(\xi) \cdot \zeta) + \\ + (D(\Phi_{0,d} \circ \Phi_{0,c}^{-1})(\xi) \cdot \eta) \cdot \zeta \end{aligned}$$

при $(\xi, \eta, \zeta) \in H^1(\mathcal{O}_{c,d}) \times H^1(c^*TM) \times H^0(c^*TM)$; $\chi = \exp_d^{-1} \circ \exp_c \xi$, а $\Phi_{0,d} \cdot \Phi_{0,c}^{-1}$ интерпретируется здесь как отображение $H^1(\mathcal{O}_{c,d}) \rightarrow L(H^0(c^*TM); H^0(d^*TM))$. Вспоминая определения входящих сюда величин, получаем, что выполнение этой формулы преобразования эквивалентно тому, что при почти всех t выполняются формулы преобразования для символов Кристоффеля, соответствующих картам $((\exp|_{\mathcal{O}_{c(t)}})^{-1}, \exp|_{\mathcal{O}_{c(t)}})$, $((\exp|_{\mathcal{O}_{d(t)}})^{-1}, \exp|_{\mathcal{O}_{d(t)}})$ многообразия M , при значениях аргументов $\tau^*c\xi(t)$, $\tau^*c\eta(t)$, $\tau^*c\zeta(t)$ (причем в правой части Γ берется в точке $\tau^*d\chi(t) = \exp_d^{-1}(t) \circ \exp_c(t) \cdot c^*\xi(t)$).

б) Формула

$$\langle (D_2G(\xi) \cdot \eta) \cdot \zeta, \theta \rangle_{\tau\xi} = \langle G(\xi) \Gamma(\xi) \cdot (\eta, \zeta), \theta \rangle_{\tau\xi} + \langle G(\xi) \Gamma(\xi) \cdot (\eta, \theta), \zeta \rangle_{\tau\xi}$$

$(\xi, \eta, \zeta, \theta)$ — векторы) является формулой (****) из § 1.1, записанной с использованием введенного выше выражения для римановой метрики в M с помощью G в карте $((\exp|_{\mathcal{O}_x})^{-1}, \exp|_{\mathcal{O}_x})$. Из этой формулы сразу следует приведенная в тексте аналогичная формула для $\tilde{G}_c$ и $\tilde{\Gamma}_c$ (в которой ξ, η, ζ, θ — уже не векторы, а сечения соответствующих расслоений).

в) Параллельное перенесение, отвечающее введенной связности в расслоении α^0 , легко описывается в терминах геометрических построений в самом M .

Пусть $s \mapsto c(s)$, $a \leq s \leq b$, — кривая класса C^1 в многообразии Λ , и пусть задано $\xi_a \in (\alpha^0)^{-1}c(a)$, $\xi_s \in (\alpha^0)^{-1}c(s)$ получается из ξ_a параллельным перенесением вдоль этой кривой. При каждом s имеем некоторую замкнутую кривую $c(s)$ в M , т. е. $c(s)$ есть отображение $S \rightarrow M$; вместо $c(s)(t)$ будем писать $c(t, s)$.

При каждом $t \in S$ кривая $\gamma_t: s \mapsto c(t, s)$ является C^1 -кривой в M . Это следует из дифференцируемости отображения

$$ev_t: \Lambda \rightarrow M, \quad ev_t(c) = c(t).$$

Последняя очевидна, если воспользоваться картами $(\exp_c^{-1}, \mathcal{U}(c))$ в Λ (с какой-нибудь фиксированной кривой $c \in C^\infty(S, M)$; при любом s_0 все $c(s)$ с достаточно малыми $|s - s_0|$ лежат в некоторой такой карте) и $((\exp|_{\mathcal{O}_{c(t)}})^{-1}, \exp|_{\mathcal{O}_{c(t)}})$ в M : отображение

$$\mathcal{O}_c \xrightarrow{\exp} \mathcal{U}(c) \xrightarrow{ev_t} \exp|_{\mathcal{O}_{c(t)}} \xrightarrow{(\exp|_{\mathcal{O}_{c(t)}})^{-1}} \mathcal{O}_{c(t)}$$

имеет вид $\xi \mapsto \xi(t)$, т. е. получается при ограничении на $\mathcal{O}_c$ композиции $H^1(c^*TM) \rightarrow C^0(c^*TM) \rightarrow T_{c(t)}M$ непрерывных линейных операторов. Кстати, отсюда же видно, что если $c(s) = \exp_c \xi(s)$, где $\xi(s)$ есть H^1 -сечение расслоения c^*TM , имеющее в точке $t \in S$ значение $\xi(t, s)$, то значение в точке t сечения $d\xi(s)/ds$ (которое существует, ибо $s \mapsto \xi(s)$ есть C^1 -функция) равно $d\xi(t, s)/ds$. В частности, эта последняя производная существует; при этом она непрерывна по (t, s) . Действительно, если Δ — замкнутый интервал оси s , для которого $\xi(\Delta) \subset \mathcal{U}(c)$, то

$$\frac{d\xi(s)}{ds} \in C^0(\Delta, H^1(c^*TM)) \hookrightarrow C^0(\Delta, C^0(c^*TM)) \hookrightarrow C^0(S \times \Delta, c^*TM),$$

где все естественные включения непрерывны.

Геометрически ξ_a описывается как некоторое векторное поле $t \mapsto \tau^*c(a) \cdot \xi_a(t)$ вдоль кривой $c(a)$ в M , определенное, правда, только при почти всех t . (Точнее, ξ_a есть класс таких полей, отличающихся одно от другого только на множестве меры нуль; возьмем какое-нибудь из них.) При каждом t , при котором определен вектор $\tau^*c(a) \xi(t) \in T_{c(t,a)}M$, перенесем этот вектор параллельно вдоль кривой γ_t . При каждом s получим некоторый вектор в $T_{\gamma_t(s)}M$, который обозначим через $\xi(t, s)$. При фиксированном s имеем векторное поле вдоль кривой $c(s)$:

$$\xi(s): t \mapsto \xi(t, s).$$

определенное при почти всех t (одних и тех же при всех s). Оказывается оно и является полем ξ_s (точнее, одним из его представителей).

Чтобы доказать это, надо проверить, что $\xi(s) \in H^0(H^1(S, M)^* TM)$ и $\frac{\nabla}{ds} \xi(s) = 0$. Можно ограничиться случаем, когда вся кривая $c(s)$ лежит в $\mathcal{U}(c)$ (в общем случае надо последовательно рассматривать кусочки, лежащие в пределах таких «координатных окрестностей»), так что $c(t, s) = \exp_{c(t)} \xi(t, s)$, а $\xi(t, s)$ можно представить в виде $\xi(t, s) = \nabla_s \exp(\xi(t, s)) \cdot \eta(t, s)$. При почти всех t имеем $\frac{\nabla}{ds} \xi(t, s) = 0$ при всех s , т. е.

$$(a) \quad \frac{\partial \eta(t, s)}{\partial s} + \Gamma(\xi(t, s)) \cdot \left(\frac{\partial \xi(t, s)}{\partial s}, \eta(t, s) \right) = 0.$$

(При фиксированном t мы воспользуемся фиксированной картой $((\exp|_{\mathcal{O}_{c(t)}})^{-1}, \exp|_{\mathcal{O}_{c(t)}})$ в M .) Очевидно, имеют место соотношения (M_i — некоторые константы)

$$\left| \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial s} \right| \leq \left\| \frac{d\xi(s)}{ds} \right\|_{\infty} \leq \sqrt{2} \left\| \frac{d\xi(s)}{ds} \right\|_1 \leq M_1,$$

$$|\eta(t, s)| \leq M_2 |\xi(t, s)|, \quad \left| \Gamma(\xi) \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial s}, \eta \right) \right| \leq M_3 \left| \frac{\partial \xi}{\partial s} \right| |\eta|,$$

$|\xi(t, s)| = |\xi(t, a)|$ (свойство параллельного перенесения). Поэтому ввиду (a)

$$(b) \quad \left| \frac{\partial \eta(t, s)}{\partial s} \right| = \left| \Gamma(\xi) \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial s}, \eta \right) \right| \leq M_1 M_2 M_3 |\xi_a(t)| = M |\tau^* c(a) \xi_a(t)|$$

с некоторой константой M .

(a) является линейным дифференциальным уравнением для η как функции s , непрерывно зависящим от параметра t . Пусть $\eta(s; \eta_a, t)$ — решение (a) с начальным значением $\eta(a; \eta_a, t) = \eta_a$. Оно непрерывно по (s, η_a, t) . Очевидно, $\eta(t, s) = \eta(s; \eta_a(t), t)$, где $\eta_a(t)$ служит представлением для $\tau^* c(a) \xi_a(t)$ в карте $((\exp|_{\mathcal{O}_{c(t)}})^{-1}, \exp|_{\mathcal{O}_{c(t)}})$. Отображение

$$S \rightarrow c^* TM \times S, \quad t \mapsto (\eta_a(t), t),$$

измеримо. Значит, при каждом s измеримо отображение

$$(v) \quad t \mapsto \eta(t, s) = \eta(s; \eta_a(t), t),$$

ибо непрерывная функция от измеримой функции измерима. Теперь из (a) следует, что и отображение $t \mapsto \partial \eta(t, s)/\partial s$ измеримо.

Поскольку $\int_S |\tau^* c(a) \xi_a(t)|^2 dt < \infty$, из (b) и из измеримости $t \mapsto \partial \eta(t, s)/\partial s$ следует, что $\int_S |\partial \eta(t, s)/\partial s|^2 dt < \infty$, так что можно говорить о сечении $\chi(s) \in H^0(c^* TM)$, для которого $\chi(s)(t) = \partial \eta(t, s)/\partial s$; при этом $\|\chi(s)\|_0 \leq M \|\xi_a\|_0$. Далее,

$$|\eta(t, s)| \leq |\eta(t, a)| + \int_0^s \left| \frac{\partial \eta(t, r)}{\partial r} \right| dr \leq |\eta(t, a)| + Ms |\tau^* c(a) \xi_a(t)|.$$

Отсюда и из измеримости (v) следует, что $\int_S |\eta(t, s)|^2 dt < \infty$, так что можно говорить о сечении $\eta(s) \in H^0(c^* TM)$, для которого $\eta(s)(t) = \eta(t, s)$, и

о $\Phi_{0,c}^{-1}(c(s), \eta(s))$; ясно, что последнее есть $\xi(s)$, так что $\xi(s) \in H^0(H^1(S, M)^* TM)$. Осталось доказать, что при всех s существует производная $d\eta(s)/ds$, так что можно говорить о $\frac{\nabla}{ds} \xi(s)$, и что главная часть локального представления

$$\Phi_{0,c} \left(\frac{\nabla}{ds} \xi(s) \right)$$

$$(r) \quad \frac{d\eta(s)}{ds} + \tilde{\Gamma}_c(\xi(s)) \cdot \left(\frac{d\xi(s)}{ds}, \eta(s) \right) = 0.$$

Будет доказано, что

$$(д) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (\eta(s+h) - \eta(s)) - \chi(s) \right\|_0 = 0,$$

так что производная $d\eta(s)/ds$ действительно существует и равна $\chi(s)$, а сечение $H^0(c^* TM)$, являющееся левой частью (r), принимает при почти всех t значение

$$\frac{d\eta(t, s)}{ds} + \Gamma(\xi(t, s)) \cdot \left(\frac{\partial \xi(t, s)}{\partial s}, \eta(t, s) \right)$$

и ввиду (a) равно нулю.

(д) означает, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_S \left| \frac{1}{h} (\eta(s, t+h) - \eta(t, s)) - \frac{\partial \eta(t, s)}{\partial s} \right|^2 dt = 0.$$

Обозначим подынтегральное выражение через $\varphi^2(t, h)$. Тогда, во-первых, $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(t, h) = 0$ при почти всех t и, во-вторых,

$$\begin{aligned} |\varphi(t, h)| &\leq \left| \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \frac{\partial \eta(t, r)}{\partial r} dr \right| + \left| \frac{\partial \eta(t, s)}{\partial s} \right| \leq \\ &\leq \sup_{s \leq r \leq s+h} \left| \frac{\partial \eta(t, r)}{\partial r} \right| + \left| \frac{\partial \eta(t, s)}{\partial s} \right| \leq 2M |\tau^* c(a) \zeta_a(t)| \end{aligned}$$

(см. (б)). Отсюда следует, что $\lim_{h \rightarrow 0} \int_S \varphi^2(t, h) dt = 0$. В самом деле, пусть дано $\varepsilon > 0$. Существует такое $\delta > 0$, что если мера $\text{mes } B < \delta$, то

$$4M^2 \int_B |\tau^* c(a) \zeta_a(t)|^2 dt < \varepsilon.$$

Положим

$$A_n = \{t; t \in S, \varphi^2(t, h) \leq \varepsilon \text{ при всех } h < 1/n\}.$$

Множества A_n измеримы. Действительно, $\varphi(t, h)$ непрерывно по h , поэтому в определении A_n вместо всех $h < 1/n$ можно говорить о всех рациональных $h < 1/n$, так что A_n является пересечением счетного числа множеств вида

$$\{t; t \in S, \varphi(t, h) \leq \varepsilon\} = \left\{t; t \in S, \left| \frac{1}{h} (\eta(t, s+h) - \eta(t, s)) - \frac{\partial \eta(t, s)}{\partial s} \right| \leq \varepsilon \right\},$$

которые измеримы ввиду измеримости сечений

$$t \mapsto \eta(t, s+h), \quad t \mapsto \eta(t, s), \quad t \mapsto \frac{\partial \eta(t, s)}{\partial s}.$$

Далее, ясно, что A_n возрастают с ростом n и $\text{mes}(S - \bigcup A_n) = 0$, так что $\text{mes}(S - A_n) < \delta$ при достаточно большом n . А тогда при $h < 1/n$

$$\int_S \varphi^2(t, h) dt = \int_{A_n} \varphi^2(t, h) dt + \int_{S - A_n} \varphi^2(t, h) dt \leq 2\varepsilon.$$

(13) Сформулированное утверждение фактически означает, что $\nabla_{\alpha^0} \partial(e) \cdot \xi = \nabla_e \xi$ для любой кривой $e \in C^\infty(S, M)$, ибо для такой e можно взять карту $(\exp_c^{-1}, \mathcal{U}(c))$ с $c = e$. Однако его доказательство не намного проще, чем доказательство той же формулы $\nabla_{\alpha^0} \partial(e) \cdot \xi = \nabla_e \xi$ в общем виде — в предположении, что $e \in H^1(S, M)$, $\xi \in H^1(e^*TM)$ и, вообще говоря, $e \neq a$, которое и будет приведено.

Мы хотим доказать, что

$$(a) \quad (\tau^*c)_t^{-1} \cdot [\nabla_2 \exp(\tau^*c_\xi^*(t))]^{-1} \cdot \tau^*e \cdot \nabla_c \xi(t) = \\ = \nabla_c \eta(t) + D_2 \partial_c(\xi(t)) \cdot \eta(t) + \Gamma_c(\xi(t)) \cdot (\eta(t), \partial_c \xi(t)).$$

При сделанных предположениях во всех точках $t \in S$, кроме, возможно, точек некоторого исключительного множества N меры нуль, существуют $\dot{e}(t)$ и $(T\xi)_t$. Тогда для любой карты $(\exp_c^{-1}, \mathcal{U}(c))$, содержащей e , если $\Phi_{1,c}(\xi) = (\xi, \eta)$, то при всех $t \in S - N$ существуют $(T\eta)_t$ и $(T\xi)_t$. Значит, при всех этих t существуют $\nabla_e \xi(t)$, $\nabla_c \eta(t)$ и $\partial_c \xi(t)$, а потому в (а) имеют смысл обе части. Их равенство будет доказано при всех $t \in S - N$.

Положим при $t \in S$ и $s \in \mathbb{R}$

$$\xi(t, s) := \xi(t) + s\eta(t).$$

Ясно, что при достаточно малых s , скажем при $s \in I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, сечение $\xi_s = \xi + s\eta \in H^1(\mathcal{O}_c)$, так что можно рассмотреть кривые $f_s := \exp_c(\xi + s\eta)$: $t \mapsto f(t, s) := \exp(\tau^*c_\xi^*(t, s))$. Когда s меняется, $\xi(t, s)$ находится в одном и том же слое $(c^*\tau)^{-1}(t)$ расслоения c^*TM , поэтому

$$D_2 f(t, s) = \nabla_2 \exp(\tau^*c_\xi^*(t, s)) \cdot \tau^*c \cdot \eta(t),$$

$$(b) \quad D_2 f(t, 0) = \tau^*e \xi(t).$$

Пусть $t_0 \in S - N$. Мы хотим написать представление для $\tau^*e \nabla_c \xi(t_0)$ в терминах «подвижной» (изменяющейся с изменением t) «системы координат» $((\exp \circ (\tau^*c)_t | \mathcal{O}_{c,t})^{-1}, \exp \mathcal{O}_{c,t_0})$. Для этого опишем нужные нам величины в терминах «неподвижной системы координат» $((\exp | \mathcal{O}_{c(t_0)})^{-1}, \exp \mathcal{O}_{c(t_0)})$, которую обозначим короче через (φ, U) . При $t = t_0$ подвижная система, по существу, совпадает с неподвижной с точностью до изоморфизма $(\tau^*c)_{t_0}$: $(c^*\tau)^{-1}(t_0) \rightarrow T_{c(t_0)}M$, поэтому при $t = t_0$ несложно связать описания различных величин в терминах «подвижных» и «неподвижных» систем координат.

При достаточно малых Δ и I будет

$$\exp \tau^*c([0, 1] \times \xi(\Delta, I)) \subset U$$

(в частности, $c(\Delta) \subset U$). Положим при $(t, s) \in \Delta \times I$

$$x(t) := \varphi \circ c(t),$$

$$\psi(t, s) := \varphi \circ f(t, s),$$

$$\xi_0(t) := \text{pr}_2 \circ (T\varphi) \circ \tau^*c \cdot \xi(t),$$

$$\eta_0(t) := \text{pr}_2 \circ (T\varphi) \circ \tau^*c \cdot \eta(t),$$

$$\xi_0(t, s) := \text{pr}_2 \circ (T\varphi) \circ \tau^*c \cdot \xi(t, s) = \xi_0 + s\eta_0(t).$$

Ясно, что $\psi(t_0, s) = \varphi(f(t_0, s)) = (\tau^*c)_{t_0}(\xi(t_0) + s\eta(t_0))$,

$$(v) \quad \psi(t_0, 0) = \tau^*c_\xi(t_0), \quad D_2 \psi(t_0, s) = \tau^*c \eta(t_0).$$

Кроме того, поскольку

$$(r) \quad [\nabla_2 \exp(\tau^* c_{\xi}^*(t_0))]^{-1} = \text{rg}_2 \cdot (T\varphi | T_{f(t_0, 0)} M),$$

то

$$(d) \quad \tau^* c \cdot \partial_c \xi(t_0) = (\text{образ } de(t_0) = D_1 f(t_0, 0) \text{ под действием } (r)) = D_1 \psi(t_0, 0).$$

Далее, ясно, что η_0 и ξ_0 непрерывны при всех t и дифференцируемы при $t = t_0$ и что ξ_0 непрерывно и обладает следующими свойствами дифференцируемости:

$$(e_0) \quad \text{при любом } s \text{ существуют } D_1 \xi_0(t_0, s) \text{ и } D_2 D_1 \xi_0(t_0, s);$$

$$(ж_0) \quad \begin{cases} \text{при любых } t, s \text{ существует } D_2 \xi_0(t, s) \text{ и при любом } s \\ \text{существует } D_1 D_2 \xi_0(t_0, s); \end{cases}$$

$$(з_0) \quad D_1 D_2 \xi_0(t_0, s) = \dot{\eta}_0(t_0) = D_2 D_1 \xi_0(t_0, s).$$

Если $x \in \mathcal{O}_{c(t_0)}$ достаточно близко к $x(t_0) = 0$, а $\xi - \kappa \xi_0(t_0)$, то определено C^∞ -отображение

$$(x, \xi) \mapsto F(x, \xi) := \varphi \circ \exp \circ T \exp \cdot (x, \xi)$$

(здесь использовано естественное отождествление $\mathcal{O}_{c(t_0)} \times T_{c(t_0)} M = T\mathcal{O}_{c(t_0)}$). Уменьшив, если потребуется, Δ и I , будем считать, что область определения F содержит $x(\Delta) \times \xi(\Delta, I)$. Тогда при $(t, s) \in \Delta \times I$

$$(и) \quad \xi_1(t, s) = F(x(t), \xi_0(t, s)).$$

Поскольку F и $x(\cdot)$ — класса C^∞ , то из (e_0) и $(ж_0)$ следует, что ξ_1 обладает свойствами дифференцируемости (e_1) и $(ж_1)$, аналогичными (e_0) и $(ж_0)$. Далее, из $(и)$

$$(к) \quad D_1 D_2 \xi_1(t_0, s) = D_2 F(x(t_0), \xi_0(t_0, s)) \cdot D_1 D_2 \xi_0(t_0, s) + \dots,$$

$$(л) \quad D_2 D_1 \xi_1(t_0, s) = D_2 F(x(t_0), \xi_0(t_0, s)) \cdot D_2 D_1 \xi_0(t_0, s) + \dots$$

где члены, обозначенные многоточием, в $(к)$ и $(л)$ совпадают. А тогда ввиду $(з_0)$

$$(з_1) \quad D_1 D_2 \xi_1(t_0, s) = D_2 D_1 \xi_1(t_0, s).$$

$\xi_1(t, s)$ служит локальным представлением в карте (φ, U) для $f(t, s)$. Из (e_1) и $(ж_1)$ следует, что существуют $D_1 f(t_0, s)$, $D_2 f(t, s)$, $\nabla_2 D_1 f(t_0, s)$ и $\nabla_1 D_2 f(t_0, s)$. Теперь очевидное вычисление в терминах локального представления, использующее $(ж_1)$ и отсутствие кручения у связности Леви-Чивита, показывает, что

$$(з) \quad \nabla_2 D_1 f(t_0, s) = \nabla_1 D_2 f(t_0, s).$$

Но тогда ввиду $(б)$

$$(м) \quad \tau^* e \nabla_c \xi(t_0) = \nabla_1 D_2 f(t_0, 0) = \nabla_2 D_1 f(t_0, 0).$$

При всех s существует $D_1 f(t_0, s) = \partial f_s(t_0)$. Согласно 1.3.2,

$$D_1 f(t_0, s) = \nabla_2 \exp(\tau^* c_{\xi}^*(t_0, s)) \cdot \tau^* c \cdot (\nabla_{c_1} \xi(t_0, s) + \theta_c(\xi(t_0, s)))$$

(∇_{c_1} обозначает ковариантную производную по первому аргументу). Ввиду $(г)$ это равно $\text{rg}_2 \cdot T\varphi \cdot D_1 f(t_0, s) = D_1 \psi(t_0, s)$, так что

$$D_1 \psi(t_0, s) = (\tau^* c)_{t_0} \nabla_c \xi(t_0) + s (\tau^* c)_{t_0} \nabla_c \eta(t_0) + (\tau^* c)_{t_0} \theta_c(\xi(t_0, s)).$$

$$(н) \quad D_2 D_1 \psi(t_0, s) = (\tau^* c)_{t_0} \nabla_c \eta(t_0) + (\tau^* c)_{t_0} D_2 \theta_c(\xi(t_0, s)) \cdot \eta(t_0),$$

а

$$(о) \quad \text{rg}_2 \cdot T\varphi \cdot \nabla_2 D_1 f(t_0, 0) = D_2 D_1 \psi(t_0, 0) + \Gamma(\psi(t_0, 0)) \cdot (D_2 \psi(t_0, 0), D_1 \psi(t_0, 0)).$$

Сопоставляя $(м)$, $(н)$, $(о)$, $(в)$, $(д)$ и $(г)$, получаем $(а)$ в $t = t_0$.

(14) Карте $(\exp_c^{-1}, \mathcal{U}^c(c))$ отвечает локальное представление (векторная карта) $(T \exp_c^{-1}, \exp_c^{-1}, \mathcal{U}^c(c))$ расслоения TM , т. е. α^1 . Очевидно, отображение

$$T \exp_c^{-1}: (\mathcal{U}^c \cap T_c M) \times H^1(c^* TM) \rightarrow T \mathcal{U}^c(c) = (\alpha^1)^{-1} \mathcal{U}^c(c)$$

определяется такой же формулой, что и введенное в начале этого параграфа отображение $\Phi_{1,c}^{-1}$ (только теперь не предполагается, что $c \in C^\infty(S, M)$), так что можно обозначать его через $\Phi_{1,c}^{-1}$ тоже. Естественно рассмотреть аналогичные карты для расслоения α^0 . Как и в начале этого параграфа, определим

$$\Phi_{0,c}^{-1}: (\mathcal{U}^c \cap T_c M) \times H^0(c^* TM) \rightarrow (\alpha^0)^{-1} \mathcal{U}^c(c)$$

(той же формулой, но уже не считая, что $c \in C^\infty(S, M)$). Покажем, что $(\Phi_{0,c}^{-1}, \exp_c^{-1}, \mathcal{U}^c(c))$ — действительно векторная карта расслоения α^0 . Доказывая 1.3.1, мы фактически проверили, что $\Phi_{0,c}^{-1}$ действительно переводит $\xi \times H^0(c^* TM)$ в $(\alpha^0)^{-1} \exp_c \xi$ (даже не только при $\xi \in \mathcal{U}^c \cap T_c M$, но и при $\xi \in H^1(\mathcal{O}_c)$) и что ограничение $\Phi_{0,c}^{-1}|_{\xi \times H^0(c^* TM)}$ является ограниченным линейным оператором, имеющим ограниченный обратный. (См. последнее подстрочное примечание к этому доказательству.) Остается проверить согласованность рассматриваемой карты с прежними: если $d \in C^\infty(S, M)$, то отображения

$$\Phi_{0,d} \circ \Phi_{0,c}^{-1}: \mathcal{U}(d) \cap \mathcal{U}^c(c) \rightarrow L(H^0(c^* TM); H^0(d^* TM)),$$

$$\Phi_{0,c} \circ \Phi_{0,d}^{-1}: \mathcal{U}^c(c) \cap \mathcal{U}(d) \rightarrow L(H^0(d^* TM); H^0(c^* TM))$$

являются дифференцируемыми. (По поводу обозначений см. комментарий в (8), а.) Проверим, скажем, дифференцируемость первого из них, для чего представим его как композицию

$$\mathcal{U}(d) \cap \mathcal{U}^c(c) \xrightarrow{\Phi} C^0(L(c^* TM; d^* TM)) \rightarrow L(H^0(c^* TM); H^0(d^* TM)).$$

Справа стоит естественное вложение, являющееся ограниченным линейным оператором (ср. с 1.2.2' в (8)), а Φ сопоставляет кривой $c = \exp_c \xi = \exp_d \eta$ непрерывное сечение расслоения $L(c^* TM; d^* TM)$; значением этого сечения в точке $t \in S$ является линейное отображение

$$(\tau^* d)_t^{-1} \cdot [\nabla_2 \exp(\tau^* d \eta(t))]^{-1} \cdot \nabla_2 \exp(\tau^* c \xi(t)) \cdot (\tau^* c)_t$$

пространства $(c^* \tau)^{-1}(t)$ в $(d^* \tau)^{-1}(t)$. Достаточно доказать дифференцируемость отображения

$$\psi = \Phi \circ \exp_c | \exp_c^{-1}(\mathcal{U}(d) \cap \mathcal{U}^c(c)).$$

Определим $\mathcal{O}_{c,d}$ и $f_{d,c}$ аналогично тому, как это делалось при доказательстве 1.2.8. Тогда, с одной стороны, очевидно, что $f_{d,c}$ посылно дифференцируемо и производные $D_2^k f_{d,c}$ непрерывны на всем $\mathcal{O}_{c,d}$. Поэтому (см. (8), 1.2.5') существуют производные $D^k \tilde{f}_{d,c} = \tilde{D}_2^k f_{d,c}$ (волна сверху теперь обозначает переход к индуцированному отображению пространства непрерывных функций); в частности, $\tilde{D}_2 f_{d,c}$ дифференцируемо. С другой стороны,

$$\psi = (\tilde{D}_2 f_{d,c}) \circ (\text{вложение } \exp_c^{-1}(\mathcal{U}(d) \cap \mathcal{U}^c(c)) \hookrightarrow C^0(\mathcal{O}_{d,c})).$$

(15) Название «интеграл энергии» связано с наглядным представлением о кривой c как о неоднородно растянутой упругой однородной гибкой «беско-

нечно-тонкой» нити. t играет роль «лагранжевой координаты», жестко связанной с некоторой частицей нити; в рассматриваемом натянутом состоянии эта частица находится в точке $c(t)$. Однако свойства воображаемой нити с потенциальной энергией $E(c)$ мало похожи на свойства реальных упругих нитей даже сильно идеализированных (достаточно сказать, что в ненапрянутом состоянии длина нашей нити должна равняться нулю). В линейной теории упругости потенциальная энергия нити описывается квадратичным интегралом $\int |\dot{u}(t)|^2 dt$, но здесь $u(t)$ описывает не положение, а смещение частицы с лагранжевой координатой t .

При другой наглядной интерпретации можно представлять себе, что по c движется материальная точка, занимающая в момент времени t положение $c(t)$; ее кинетическая энергия равна $\frac{1}{2} \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle$, а никаких «внешних сил» нет.

Тогда $E(c)$ (не только для замкнутых, но и для незамкнутых кривых $c = (c(t))$, $a \leq t \leq b$) — это известный в аналитической механике функционал действия, (точнее, действия по Гамильтону), а 1.3.11 — это частный случай принципа Мопертюн — Лагранжа — Якоби.

В многомерных задачах аналогичный функционал часто называют «интегралом Дирихле».

(16) В конце этой выкладки используется то, что при каждом фиксированном s отображение

$$(a) \quad S \rightarrow TM, \quad t \mapsto \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial s}(t, s),$$

является векторным полем вдоль $\kappa(s)$ класса H^1 . Последнее же доказывается так. Для любого s_0 имеются такие окрестность $I \ni s_0$ в $[0, 1]$ и кривая $c \in C^\infty(S, M)$, что $\kappa(I) \subset \mathcal{U}(c)$. Тогда $\xi(s) := \exp_{c(s)}^{-1} \kappa(s) \in H^1(c^*TM)$, и поскольку зависимость $\kappa(s)$ от s дифференцируемая, то $d\xi(s)/ds \in H^1(c^*TM)$. Но

$$\frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial s}(t, s) = \left(\Phi_{1,c}^{-1} \frac{d\xi(s)}{ds} \right)(t)$$

(то же рассуждение, что и при проверке (ii) в доказательстве 1.3.1). Значит, поле (a) является образом при отображении $\Phi_{1,c}^{-1}$ поля $d\xi(s)/ds$ из $H^1(c^*TM)$ и потому принадлежит $H^1(\kappa(s)^*TM)$.

(17) Подробнее содержание последнего абзаца заключается в следующем. Пусть $\xi \in T_p M$, а $\xi' \in T_{p'} \Lambda^0$ таково, что $\tau^* c_p \xi' = \xi$ (т. е. ξ' есть то же самое ξ , рассматриваемое как постоянное сечение в $c_p^* TM$). Ясно, что $\langle \xi', \xi' \rangle_1 = \langle \xi', \xi' \rangle_0 = \langle \xi, \xi \rangle_p$. Но в то же время $\xi' = (Ti)_p \xi$. Действительно, очевидно, что $\exp_{c_p}(s\xi') = c_{\exp(s\xi)}$ при достаточно малых s , а отсюда

$$\xi' = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp_{c_p}(s\xi') = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} c_{\exp(s\xi)} = (Ti)_p \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp(s\xi) = (Ti)_p \xi.$$

Тем самым доказано, что i — изометрическое вложение.

Значит, $d_\Lambda(c_p, c_{p'}) \leq d_M(p, p')$. Осталось доказать обратное неравенство. Пусть $\kappa(s)$, $0 \leq s \leq 1$, — дифференцируемая кривая в Λ соединяющая c_p с $c_{p'}$. Докажем, что $d_M(p, p') \leq L(\kappa)$.

Сколь угодно мало увеличив $L(\kappa)$, можно считать, что $d\kappa(s)/ds \neq 0$ при всех s . А тогда можно считать, что дифференцируемая кривая κ параметризована пропорционально длине дуги, так что $\|d\kappa(s)/ds\|_1 = L(\kappa)$ при всех s . Обозначим $\tilde{\kappa}(t, s) := \kappa(s)(t)$, $l_t :=$ длина кривой $s \mapsto \tilde{\kappa}(t, s)$ ($0 \leq s \leq 1$) в M . В нашем случае все эти кривые соединяют p с p' , поэтому $d_M(p, p') \leq$

$\leq l_t$ при всех t и

$$\begin{aligned} d_M^2(p, p') &\leq \int_S l_t^2 dt = \int_S dt \int_0^1 \left| \frac{\partial \tilde{\kappa}(t, s)}{\partial s} \right|^2 ds = \\ &= \int_0^1 ds \int_S \left| \frac{\partial \tilde{\kappa}(t, s)}{\partial s} \right|^2 dt = \int_0^1 \left\| \frac{d\kappa(s)}{ds} \right\|_0^2 ds \leq \int_0^1 \left\| \frac{d\kappa(s)}{ds} \right\|_1 ds = L^2(\kappa). \end{aligned}$$

(18) а) Непосредственный переход от условия

$$(a) \quad \langle \nabla \eta, \nabla \xi \rangle_0 + \langle \eta, \xi \rangle_0 = \langle \partial c, \nabla \xi \rangle_0 \quad \text{для всех } \xi \in H^1(c^*TM),$$

определяющего $\eta = \text{grad } E(c)$, к уравнению

$$(b) \quad \nabla^2 \eta(t) - \eta(t) = \nabla \partial c(t)$$

предполагает не только, что $\partial c \in H^1(c^*TM)$, но и что $\nabla \eta \in H^1(c^*TM)$, а последнее а priori не ясно. Однако можно рассуждать «в обратную сторону». Если η — решение (б) (т. е. $\eta \in H^1(c^*TM)$, $\nabla \eta \in H^1(c^*TM)$) и почти при всех t выполняется (б)), то взяв $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ -произведение с ξ и проинтегрировав по частям, получим (а). А так как градиент определяется однозначно, то отсюда следует, что $\eta = \text{grad } E(c)$. Таким образом, надо доказать, что (б) действительно имеет решение. Если рассматривать t не как точки S , а как вещественные числа, то решение, конечно, существует. Однако в этих терминах нам нужно не просто решение, а решение, периодическое по t с периодом 1. Поскольку решение однозначно определяется начальными данными $\eta(0)$ и $\nabla \eta(0)$, а $\eta(t+1)$ является решением (б) одновременно с $\eta(t)$ (правая часть (б), очевидно, периодична), то периодичность эквивалентна тому, что

$$(в) \quad \eta(0) = \eta(1), \quad \nabla \eta(0) = \nabla \eta(1).$$

Положим $u = \eta + \nabla \eta$, $v = \eta - \nabla \eta$. В новых переменных (б) переписывается как система

$$(г) \quad \nabla u = u + \nabla \partial c, \quad \nabla v = -v - \nabla \partial c, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

а условие (в) — как

$$(д) \quad u(0) = u(1), \quad v(0) = v(1).$$

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — ортонормированный базис в $(c^*\tau)^{-1}(0)$. Возьмем такие $\xi_t: \mathbb{R} \rightarrow c^*TM$, что $c^*\tau \xi_t(t) = t \bmod 1$ и $\nabla_c \xi_t = 0$. Так как $\xi_t(1) \in (c^*\tau)^{-1}(0)$, то $\xi_t(1)$ можно разложить по базису $\xi_i(0)$:

$$\xi_t(1) = \sum_i a_{ji} \xi_j(0).$$

Матрица $A = (a_{ij})$ — ортогональная (сохранение скалярного произведения при параллельном перенесении вдоль кривой). Если теперь $z(t) = \sum x_i(t) \xi_i(t)$, то условие $z(0) = z(1)$ эквивалентно тому, что

$$x_j(0) = \sum_i a_{ji} x_i(1),$$

или, записывая $x_1, \dots, x_n$ в виде столбца $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x(0) = Ax(1).$$

Пусть $\nabla \partial c = \sum \varphi_i(t) \xi_i(t)$; обозначим через Φ столбец, состоящий из $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Будем искать решение u, v краевой задачи (г), (д) в виде

$$u = \sum x_i(t) \xi_i(t), \quad v = \sum y_i(t) \xi_i(t).$$

В термных векторов-столбцов x, y задача принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + \varphi, & \dot{y} &= -y - \varphi, \\ (ж) \quad x(0) &= Ax(1), & y(0) &= Ay(1). \end{aligned}$$

Из (е) получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t x(0) + \int_0^t e^{t-\tau} \varphi(\tau) d\tau, \\ y(t) &= e^{-t} y(0) - \int_0^t e^{-t+\tau} \varphi(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

и (ж) сводится к тому, что

$$\begin{aligned} (з) \quad (eA - E)x(0) &= -A \int_0^1 e^{1-\tau} \varphi(\tau) d\tau, \\ (и) \quad (e^{-1}A - E)y(0) &= A \int_0^1 e^{-1+\tau} \varphi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ввиду ортогональности A матрицы в левых частях (з) и (и) невырожденные, так что эти уравнения разрешимы.

б) В а) никак не использовалось, что в правой части (б) стоит $\nabla \partial c$, а не какое-нибудь другое $\chi \in H^0(c^*TM)$; дифференцируемость же c использовалась лишь постольку, поскольку она позволяет говорить о $\nabla \partial c$. Поэтому для любой кривой $c \in \Lambda M$ и любого сечения $\chi \in H^0(c^*TM)$ уравнение

$$(к) \quad \nabla^2 \eta(t) - \eta(t) = \chi(t)$$

имеет единственное решение $\eta \in H^1(c^*TM)$. (Если χ не непрерывно, это надо понимать в том смысле, что $\eta \in H^1(c^*TM)$, $\nabla \eta \in H^1(c^*TM)$ и (к) имеет место при почти всех t . Если же $\chi \in C^0(c^*TM)$, то $\nabla^2 \eta \in C^0(c^*TM)$, и (к) имеет место при всех t .) Естественно обозначать η через $(\nabla^2 - 1)^{-1} \chi$. При этом для всех $\xi \in H^1(c^*TM)$ имеем $\langle \nabla \eta, \nabla \xi \rangle_0 = -\langle \nabla^2 \eta, \xi \rangle_0$, так что $\langle \eta, \xi \rangle_1 = -\langle \chi, \xi \rangle_0$; иными словами, оператор

$$(1 - \nabla^2)^{-1} := -(\nabla^2 - 1)^{-1}: H^0(c^*TM) \rightarrow H^1(c^*TM)$$

является сопряженным к тождественному вложению

$$i: H^1(c^*TM) \rightarrow H^0(c^*TM).$$

Последнее компактно, а оператор, сопряженный к компактному, компактен; отсюда следует компактность $(\nabla^2 - 1)^{-1}$. (Ее можно вывести также и из интегральных соотношений для решения уравнения (к).)

Заметим еще, что при $c \in C^\infty(S, M)$ оператор $(\nabla^2 - 1)^{-1}$ повышает гладкость: если $\chi \in C^r(c^*TM)$, то $(\nabla^2 - 1)^{-1} \chi \in C^{r+2}(c^*TM)$. Действительно, в этом случае условия $\nabla^2 \eta \in C^s(c^*TM)$ и $\eta \in C^{s+2}(c^*TM)$ эквивалентны; если

$$q = \max \{s; (\nabla^2 - 1)^{-1} \chi \in C^s(c^*TM)\},$$

то ввиду (к) $\nabla^2 (\nabla^2 - 1)^{-1} \chi \in C^{\min(q, r)}(c^*TM)$, т. е. $q \geq \min(q, r) + 2$, $q \geq r + 2$.

Чтобы определить линейный оператор, надо указать не только то, как он действует на функции, но и то, функции из какого именно функциональ-

ного пространства берутся в качестве его аргументов и в каком функциональном пространстве рассматриваются его значения. Иногда это ясно само по себе, а иногда должно быть специально пояснено. Тривиальный пример: выражение «оператор, переводящий ξ в ξ » можно понимать в трех смыслах: как оператор $H^1 \rightarrow H^1$, $H^0 \rightarrow H^0$ и $H^1 \rightarrow H^0$ (мы ограничиваемся здесь теми функциональными пространствами, которые преимущественно используются в этой книге). В последнем случае мы имеем дело с компактным оператором i , тогда как в первых двух операторы id_{H^1} и id_{H^0} не компактны. (Так называемые «свойства оператора», например компактность или самосопряженность, являются в действительности его свойствами по отношению к определенным структурам в тех функциональных пространствах, где он действует, и оттого зависят от последних.)

Выше мы рассматривали $(1 - \nabla^2)^{-1}$ как оператор из H^0 в H^1 и видели, что он совпадает с i^* . Но можно рассматривать $(1 - \nabla^2)^{-1}\xi$ только для $\xi \in H^1(c^*TM)$, а область значений по-прежнему считать $H^1(c^*TM)$. Это будет уже другой оператор — не i^* , а i^*i (ибо можно сказать, что сначала $\xi \in H^1(c^*TM)$ вкладывается в $H^0(c^*TM)$: $\xi \mapsto i\xi$, а затем на $i\xi$ действует прежний оператор $(1 - \nabla^2)^{-1}$, т. е. i^*). Заметим, что оператор i^*i тоже компактен, и это следует не только из компактности i^* , но и непосредственно из компактности i (плюс ограниченность i^*).

В таких случаях, когда различные операторы могут с равным основанием обозначаться одним и тем же символом (например, i^* и i^*i — символом $(1 - \nabla^2)^{-1}$), нужно быть особенно внимательным.

(1^a) Будем по-прежнему обозначать локальные представления c , u , $\text{grad } E$ в используемых нормальных координатах через c , u , $\text{grad } E$. В некоторой окрестности нуля $\mathbb{R}^n$, $n = \dim M$, теперь имеются две римановы метрики: стандартная евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$, которую будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle^e$, и метрика, которая представляет в наших локальных координатах исходную метрику на M и которую мы снова будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Соответствующий смысл будут иметь знаки $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ и они же с верхним индексом e . Поскольку для евклидовой метрики ковариантное дифференцирование совпадает с обычным, символ ∇ сохраним для ковариантного дифференцирования, отвечающего метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle$, т. е. ее связности Ливи-Чивита, а символы Кристоффеля для этой связности, соответствующие используемым локальным координатам, обозначим через Γ .

В достаточно малой окрестности нуля

$$|v|^e < (1 + \varepsilon) |v|, \quad |v| < (1 + \varepsilon) |v|^e, \quad |\Gamma|^e < \varepsilon,$$

где ε можно считать сколь угодно малым. Отсюда следуют аналогичные неравенства для $\|v\|_0$, $\|v\|_0^e$, если $v \in H^0(c^*TM)$ и c лежит в этой окрестности. Получим оценку для $\|v\|_1^e$ через $\|v\|_1$ ($v \in H^1(c^*TM)$, $E(c)$ мало). Имеем

$$\dot{v} = \nabla v - \Gamma(c) \cdot (\dot{c}, v), \quad \text{так что } \|\dot{v}\|_0^e \leq \|\nabla v\|_0^e + \|\Gamma(c) \cdot (\dot{c}, v)\|_0^e. \quad \text{Здесь}$$

$$\|\Gamma(c) \cdot (\dot{c}, v)\|_0^e \leq \varepsilon \|\dot{c}\|_0^e \|v\|_0^e \leq \varepsilon (1 + \varepsilon)^2 \|\dot{c}\|_0 \|v\|_0.$$

Но $\|\dot{c}\|_0 = \sqrt{2E(c)}$ и можно считать, что это < 1 . Значит,

$$(\|v\|_1^e)^2 = (\|v\|_0^e)^2 + (\|\dot{v}\|_0^e)^2 \leq (1 + \varepsilon)^2 \|v\|_0^2 + ((1 + \varepsilon) \|\nabla v\|_0 + \varepsilon (1 + \varepsilon)^2 \|v\|_0)^2.$$

Уменьшив в несколько раз ε , можно считать, что

$$\|v\|_1^e \leq (1 + \varepsilon) \|v\|_1.$$

Пусть $y(t) := (\text{grad } E(c))(t)$, $z(t) := \int_0^t y(s) ds$, $u(t) := u(c)(t)$. Имеем $\dot{u} + \Gamma(c)(\dot{c}, u) = y(t)$, и при $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(0) - z(t)\|^e &= \left\| \int_0^t \Gamma(c) \cdot (\dot{c}, u) ds \right\|^e \leq \int_0^1 \|\dot{c}\|^e \|u\|^e dt \leq \\ &\leq \varepsilon \|\dot{c}\|_0^e \|u\|_0^e = \varepsilon \sqrt{2E(c)} \|u\|_0^e < \varepsilon(1+\varepsilon) \|u\|_0. \end{aligned}$$

Но $u(c) = \nabla \text{grad } E(c) - \partial c$,

$$\|u\|_0 \leq \|\nabla \text{grad } E(c)\|_0 + \|\partial c\|_0 \leq \|\text{grad } E(c)\|_1 + \sqrt{2E(c)},$$

так что

$$\|u(t) - u(0) - z(t)\|^e \leq \varepsilon(1+\varepsilon) (\|\text{grad } E(c)\|_1 + \sqrt{2E(c)})$$

и тем более

$$\|u - u(0) - z\|_0^e \leq \varepsilon(1+\varepsilon) (\|\text{grad } E(c)\|_1 + \sqrt{2E(c)}).$$

Теперь можно оценить $\langle \partial c, u \rangle_0$:

$$\frac{1}{1+\varepsilon} |\langle \partial c, u_0 \rangle| \leq |\langle \partial c, u \rangle_0^e| \leq |\langle \partial c, u(0) \rangle_0^e| + |\langle \partial c, z \rangle_0^e| + |\langle \partial c, u - u(0) - z \rangle_0^e|.$$

Первое слагаемое равно нулю. Второе не превосходит

$$\begin{aligned} \|\partial c\|_0^e \|z\|_0^e &\leq (1+\varepsilon) \|\partial c\|_0 \|z\|_\infty^e \leq (1+\varepsilon) \sqrt{2E(c)} \|y\|_\infty^e \leq \\ &\leq 2(1+\varepsilon) \sqrt{2E(c)} \|y\|_1^e \leq 2(1+\varepsilon)^2 \sqrt{2E(c)} \|\text{grad } E(c)\|_1 \leq \\ &\leq 2(1+\varepsilon)^2 (\|\text{grad } E(c)\|_1^2 + E(c)/2). \end{aligned}$$

Третье слагаемое не превосходит

$$\begin{aligned} \|\partial c\|_0^e \|u - u(0) - z\|_0^e &\leq \varepsilon(1+\varepsilon)^2 \sqrt{2E(c)} (\|\text{grad } E(c)\|_1 + \sqrt{2E(c)}) \leq \\ &\leq \varepsilon(1+\varepsilon)^2 (\|\text{grad } E(c)\|_1^2 + 5E(c)/2) \end{aligned}$$

Очевидно, при достаточно малом ε отсюда следует (*).

(20) Вообще говоря, такого ε для данного α может и не существовать (в этом случае α — неизолированное критическое значение). Для такого α понятие Φ -семейства $\Lambda \bmod \Lambda^\alpha$ не определяется. Заметим, что $\alpha=0$ является неизолированным критическим значением и что для целей настоящей книги критические значения всегда можно предполагать изолированными, ибо в противном случае очевидно существование бесконечного числа простых замкнутых геодезических с различными значениями E (так что эти геодезические не могут входить друг к другу посредством изменений параметризации или ориентации). Ведь если бы множество

$$\{E(c); c \text{ — простые замкнутые геодезические}\}$$

было конечным, то множество

$$E(Cr \Lambda) = \{kE(c); k \geq 0 \text{ целые, } c \text{ — простые замкнутые геодезические}\}$$

не могло бы иметь предельных точек.

(21) Приведенная формулировка понятия « A повисает на K_i » (кстати, в ней первое из отмеченных уточнений заимствовано из книги: Флашель, Клингенберг [1]) оставляет некоторое чувство неудовлетворенности: в ней роль «препятствия» к «спуску» A в Λ^α играет скорее $\mathcal{U}_i$, чем K_i . Не исключено, что $\Phi_s A$ никогда не попадает в некоторую меньшую окрестность $\mathcal{U}_i$ множества K_i . Роль K_i исчерпывается тем, что окрестность $\mathcal{U}_i$ содержит K_i и «отделена» от остальных K_j .

Можно рассмотреть более сильное условие «повисания»: для любой окрестности $\mathcal{U} \supset K_i$ найдется такое $s(\mathcal{U})$, что $\varphi_s A \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ при всех $s \geq s(\mathcal{U})$ (и по-прежнему $\varphi_s A \cap \mathcal{U} \not\subset \Lambda^{*-}$); при этом естественно добавить еще требование, чтобы критический уровень φ -семейства $\{\varphi_s A; s \geq 0\}$, т. е. $\lim_{s \rightarrow \infty} \max E \mid \varphi_s A$,

совпадал с κ . (Если он больше κ , то естественно считать, что A висит «где-то выше».) Но в $\mathcal{A}$ может и не существовать такого множества A , для которого $\kappa_{\{\varphi_s A; s \geq 0\}} = \kappa_{\mathcal{A}}$ (при этом первое из условий рассматриваемого сильного варианта «повисания» может как выполняться, так и нарушаться). Правда, если такое A существует то оно повисает на некотором K_i (в обсуждаемом сейчас более сильном смысле). При этом такое A повисает на K_i в том и только том случае, когда K_i содержит ω -предельную точку (и, следовательно, все ω -предельное множество) траектории $\varphi_s c$ некоторой точки c из A .

Ситуация улучшается, если $\kappa = \kappa_{\mathcal{A}}$ — изолированное критическое значение E . Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ из $A \subset \Lambda^{+\varepsilon}$, $A \in \mathcal{A}$ следует, что A висит (в сильном смысле) на некотором K_i . Все же надо иметь в виду, что и при изолированном κ может случиться следующее: одно и то же A может висеть сразу на нескольких K_i (более того, может и не существовать такого A , которое висело бы только на одном K_i); различные A могут висеть на различных K_i (точнее, множества тех K_i , на которых висят, скажем, A и A' , могут не пересекаться); наконец, если A висит на множестве K_i , которое в свою очередь можно разбить на непересекающиеся замкнутые подмножества $K_{i1}, \dots, K_{iL}$, то A висит хотя бы на одном из них, но не обязательно на всех. (Это, впрочем, соответствует обычной разговорной практике: картина может висеть на нескольких гвоздях; если одежда висит на вешалке, то различные предметы одежды обычно висят на различных крючках; наконец, если шляпа висит на вешалке с пятью крючками, то это не означает, будто ее ухитрились нацепить сразу на все пять крючков.)

Если же стремиться однозначно сопоставить компактному множеству $A \subset \Lambda$ «то место на множестве уровня $E^{-1}(\kappa_{\{\varphi_s A; s \geq 0\}})$, где повисает A при градиентном спуске», то наилучшим кандидатом на эту роль представляется множество

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_s A \cap E^{-1}(\kappa_{\{\varphi_s A; s \geq 0\}}).$$

Здесь верхний предел множеств $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_s A := \bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{t \geq s} \varphi_t A = \{e; \text{ для любой окрестности } \mathcal{U} \text{ точки } e \text{ и любого } t \text{ существует такое } s > t, \text{ что } \varphi_s A \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$.

(22) а) В формулировке леммы 2.1.4 говорится о гомотопической эквивалентности двух отображений (γ и γ^0). Если это не оговорка, то это можно понимать как эквивалентность в гомотопической категории отображений (см. Спенсер [1], гл. 7, § 8). Правдоподобно даже более сильное утверждение, что j является последней гомотопической эквивалентностью, т. е. что существуют также гомотопически обратное к j отображение и соответствующие гомотопии, которые не просто отображают слои в некоторые слои, но при которых слои над точкой $x \in M$ переходят в слой над той же точкой x . (Если понимать «слои над x » просто как $\gamma^{-1}(x)$ и $\gamma^{0-1}(x)$, то формулировка будет иметь смысл независимо от того, являются ли γ и γ^0 расслоениями. Впрочем, в нашем случае γ и γ^0 в самом деле являются расслоениями — о γ^0 это известно^{*}, а насчет γ см. б) ниже.) Как бы то ни было, у Клингенберга доказано только то, что пространство ΛM гомотопически эквивалентно (посредством j) про-

^{*} Между прочим в данном случае, когда M — многообразие, γ^0 является не только расслоением в смысле Серра (что общеизвестно), но и локально тривиальным расслоением; см. Болтянский [1].

пространству $C^0(S, M)$, которое является пространством расслоения γ^0 . Этого достаточно для дальнейшего.

б) Клинггенберг часто называет γ «расслоением». Хотя в его книге это не доказывается (н, по существу, не используется, так что на такое название для γ можно смотреть просто как на некоторую вольность речи), но γ действительно является локально тривиальным расслоением. Это можно доказать с помощью одной теоремы Эрла и Иллса (Эрл, Иллс [1], предложение на п. (С) § 4). Условия этой теоремы (формулируемые применительно к нашему случаю) таковы:

1) *Отображаемое пространство* ΛM полно (выполняется в силу 1.4.5).

2) *Отображение γ является дифференцируемой субмерсией.*

О дифференцируемости γ см. в доказательстве 1.4.2 (в используемых там обозначениях $\gamma = ev_0$). Ясно, что если $\xi \in H^1(c^*TM)$, то $T\gamma(c) \cdot \xi = \xi(0)$ и что $T\gamma(c): T_c\Lambda M \rightarrow T_{\gamma(c)}M$ — эпиморфизм.

В определении субмерсии часто включают еще требование, чтобы ядро $\ker T\gamma(c)$ при всех $c \in \Lambda M$ разлагало $T_c\Lambda M$ (т. е. чтобы в $T_c\Lambda M$ имелось дополнительное к $\ker T\gamma(c)$ замкнутое пространство), см. Ленг [1]; в статье Эрла и Иллса [1] это условие тоже налагается с самого начала. Но в нашем случае оно автоматически выполняется сразу по трем причинам: оно следует из 3); мы имеем дело с гильбертовыми многообразиями; ядро имеет конечную коразмерность.

3) Для каждого $x \in M$ существуют такие окрестность $V_0 \ni x$ и число η_0 , что для каждого $c \in \gamma^{-1}(V_0)$ существует линейное отображение

$$(a) \quad s_c: T_{\gamma(c)}M \rightarrow T_c\Lambda M,$$

для которого

$$(b) \quad T\gamma(c) \circ s_c = \text{id}_{T_{\gamma(c)}M},$$

$$(v) \quad \|s_c\|_1 \leq \eta_0.$$

В нашем случае можно взять $V_0 = M$ и $\eta_0 = 4e/(e-1)$. Именно, определим линейное отображение s_c так, чтобы его образ был ортогонален в $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ метрике $\ker T\gamma(c)$. Заметим, что если $\xi(t)$ — класса C^2 при $0 \leq t \leq 1$ (но, вообще говоря, $\xi \notin C^2(c^*TM)$ — при «закрывании» интервала $[0, 1]$ в окрестность S допускается разрыв производной в точке $t=0$), то при любом $\eta \in H^1(c^*TM)$ в интеграле $\int \langle \nabla \xi(t), \nabla \eta(t) \rangle dt$ можно осуществить интегрирование по частям, и поэтому

$$(r) \quad \langle \xi, \eta \rangle_1 = \int \langle \xi - \nabla^2 \xi, \eta \rangle_0 dt + \langle \nabla \xi(1) - \nabla \xi(0), \eta(0) \rangle_1.$$

(Последнее слагаемое здесь получается из $\langle \nabla \xi, \eta \rangle_0^1$ с учетом того, что $\eta(0) = \eta(1)$.) Если же $\langle \xi, \eta \rangle_1 = 0$ при всех η , для которых $T\gamma(c) \cdot \eta = 0$, т. е. $\eta(0) = 0$, то, считая дифференциальные свойства ξ на $[0, 1]$ достаточно хорошими (что будет далее оправдано a posteriori), заключаем, что

$$\int \langle \xi - \nabla^2 \xi, \eta \rangle dt = 0$$

при любом $\eta \in H^1(c^*TM)$, для которого $\eta(0) = \eta(1) = 0$. Иными словами,

$$(d) \quad \nabla^2 \xi(t) - \xi(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Если мы хотим, чтобы при этом было $T\gamma(c) \cdot \xi = Z$ с заданным $Z \in T_{\gamma(c)}M$, то

$$(e) \quad \xi(0) = \xi(1) = Z.$$

Рассуждая в обратную сторону, заключаем, что решение краевой задачи (д), (е) (при «закрывании» интервала $[0, 1]$ в S оно оказывается элементом $H^1(c^*TM)$, ибо $\xi(0) = \xi(1)$ ортогонально $\ker T\gamma(c)$ и проектируется в Z).

Аналогично ⁽¹⁸⁾ введем новые переменные $u = \xi + \nabla \xi$, $v = \xi - \nabla \xi$ и будем искать u и v в виде

$$u = \sum x_i(t) \xi_i(t), \quad v = \sum y_i(t) \xi_i(t)$$

(с такими же ξ_i , что и там). Пусть, кроме того, $Z = \sum z_i \xi_i(0)$. В этих терминах (д) принимает вид

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y,$$

так что $x(t) = e^t x(0)$, $y(t) = e^{-t} y(0)$, а (е) принимает вид

$$x(0) + y(0) = 2z, \quad x(1) + y(1) = 2A^{-1}z,$$

так что все сводится к системе

$$x(0) + y(0) = 2z, \quad ex(0) + e^{-1}y(0) = 2A^{-1}z,$$

имеющей ровно одно решение:

$$x(0) = \frac{1}{\operatorname{sh} 1} (A^{-1} - e^{-1}E) z, \quad y(0) = -\frac{1}{\operatorname{sh} 1} (A^{-1} - eE) z.$$

Матрицы $A^{-1} - e^{-1}E$ и $A^{-1} - eE$ — нормальные, причем их собственные значения не превосходят по норме $1 + e^{-1}$ и $1 + e$; поэтому при $0 \leq t \leq 1$

$$|x(t)| \leq e |x(0)| \leq \frac{e+1}{\operatorname{sh} 1} |z|, \quad |y(t)| \leq |y(0)| \leq \frac{e+1}{\operatorname{sh} 1} |z|.$$

Далее,

$$\xi(t) = \frac{1}{2} \sum (x_i(t) + y_i(t)) \xi_i(t), \quad \nabla \xi(t) = \frac{1}{2} \sum (x_i(t) - y_i(t)) \xi_i(t),$$

и ввиду ортонормированности базиса ξ_i

$$|\xi(t)|, |\nabla \xi(t)| \leq \frac{1}{2} (|x(t)| + |y(t)|),$$

так что

$$\begin{aligned} \|\xi\|_1 &\leq \|\xi\|_\infty + \|\nabla \xi\|_\infty \leq \max_t |x(t)| + \max_t |y(t)| \leq \\ &\leq \frac{2(e+1)}{\operatorname{sh} 1} |z| = \frac{4e}{e-1} |z|. \end{aligned}$$

А $|z| = |Z|$, так что действительно $|s_e \cdot Z|_1 \leq \frac{4e}{e-1} |Z|$.

⁽²³⁾ Точнее, стандартным фактом является аналогичное утверждение для $C^0(S, M)$ (в обозначениях из 2.1.4 расслоение γ^0 имеет сечение j), а ΛM имеет те же гомотопические группы. Но если пожелать уточнить, как именно слагаемые $\pi_k M$ и $\pi_{k+1} M$ вложены в $\pi_k \Lambda M$, то (если мы не хотим использовать, что γ — расслоение, т. е. сослаться на работу Эрла и Иллса [1]) требуется небольшое дополнительное рассуждение. Ясно, что вложение $\pi_k M$ в $\pi_k \Lambda M$ индуцировано отображением i , ибо в аналогичном разложении для $\pi_k C^0(S, M)$ слагаемое $\pi_k M$ вложено посредством $(j)_k$, а $j_k: \pi_k \Lambda M \rightarrow \pi_k C^0(S, M)$ — изоморфизм. Что же касается Ω , то, конечно, вложение $\Omega \rightarrow C^0(S, M)$ не факторизуется через j . Однако любой элемент $\alpha \in \pi_k(\Omega, ix_0)$ (здесь x_0 — точка, являющаяся начальной и конечной для всех путей из Ω , а односточечная кривая ix_0 рассматривается как петля из Ω) имеет среди своих представителей такое отображение $F: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (\Omega, ix_0)$ (здесь $I = [0, 1]$, а ∂ обозначает границу), для которого $F(x_1, \dots, x_n)(t)$ гладко зависит от $(x_1, \dots, x_n, t)$; такое отображение F можно рассматривать как отображение в ΛM (и даже в $\gamma^{-1}(x_0)$), и соответствующий элемент группы $\pi_k(\Lambda M, ix_0)$ есть $j_k^{-1}\alpha$. Как известно, изоморфизм $\pi_{k+1}(M, x_0) = \pi_k(\Omega, ix_0)$ можно описать так:

отображению $g: (I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \rightarrow (M, x_0)$ сопоставляется $G: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (\Omega M, ix_0)$, для которого $G(x_1, \dots, x_n)(t) = g(x_1, \dots, x_n, t)$. При этом можно ограничиться гладкими g , а G определяет элемент из $\pi_k(\Lambda M, ix_0)$, который является образом при вложении $\pi_{k+1}M \rightarrow \pi_k \Lambda M$ элемента группы $\pi_{k+1}M$, содержащего g .

Заметим, кстати, что Λ есть ретракт Λ , так что точная гомотопическая последовательность пары (Λ, Λ^0) тоже расщепляется: $\pi_k \Lambda = \pi_k M + \pi_k(\Lambda, \Lambda^0)$. Сравним это с полученным ранее разложением $\pi_k \Lambda = \pi_k M + \pi_{k+1}M$. В обоих разложениях первое слагаемое есть образ $\pi_k \Lambda^0$ при вложении $\Lambda^0 \hookrightarrow \Lambda$, так что вторые слагаемые изоморфны.

(24) Имеет смысл сравнить эти два доказательства. Их различия сводятся к следующим двум.

1) В первом доказательстве рассматривается отображение $\pi_{k+1}M \rightarrow \pi_k \Lambda M$ и используется его мономорфность. Во втором — отображению $f: S^{k+1} \rightarrow M$ явно сопоставляется некоторое $f^*: (D^k, \partial D^k) \rightarrow (\Lambda, \Lambda^0)$ и явно описывается гомотопия $f \sim 0$, отвечающая некоторой определенной гомотопии $f^* \sim 0$. Построение f^* по f — это фактически построение гомоморфизма $\pi_{k+1}M \rightarrow \pi_k(\Lambda, \Lambda^0)$, который совпадает с композицией уже известных нам отображений $\pi_{k+1}M \rightarrow \pi_k \Lambda \rightarrow \pi_k(\Lambda, \Lambda^0)$ и потому мономорфен (см. (23)). Действительно, конкретизируя построение f^* , положим *

$$H^{k+1} := \{(x_0, \dots, x_{k+1}) \in S^{k+1}; x_0 \geq 0\},$$

$$S^k := \partial H^{k+1} = \{(x_0, \dots, x_{k+1}) \in S^{k+1}; x_0 = 0\},$$

$$D^k := \{(x_0, \dots, x_{k+1}) \in S^{k+1}; x_0 = 0, x_{k+1} \leq 0\}$$

и при $0 \leq s \leq 1$

$$b_s := (0, \dots, 0, 1/s)$$

($b_s \in \mathbb{R}^{k+2}$ при $s > 0$, а при $s = 0$ берется соответствующая бесконечно удаленная точка в обычном проективном смысле),

$$\psi_s: D^k \rightarrow S^k, \quad (0, x_1, \dots, x_{k+1}) \mapsto (0, y_1, \dots, y_{k+1}),$$

где $y_{k+1} = s + (1+s)x_{k+1}$, $y_i = \alpha x_i$ ($i = 1, \dots, k$), причем $\alpha > 0$ определяется из условия $y_1^2 + \dots + y_k^2 + y_{k+1}^2 = 1$.

При $x \in S^k$ рассмотрим окружность на S^{k+1} , получающуюся в пересечении этой сферы с двумерной плоскостью, проходящей через точки x , b_s и параллельной оси x_0 . (Когда $s = 1$ и $x = b_1$, эта плоскость еще не определена однозначно; доопределяем ее как касательную плоскость к S^n в точке b_1 . Если $x_{k+1} = s$, то окружность вырождается в точку x .) Параметризуем эту окружность пропорционально длине дуги, приняв точку x за начало, а за положительное направление в этой точке — направление возрастания x_0 . Обозначим через $\alpha_x^s(t)$ точку на окружности с параметром t , $0 \leq t \leq 1$; при необходимости можно считать $\alpha_x^s(t)$ определенной для всех t (с периодом 1). Введем отображения

$$\delta_s^k: S^k \rightarrow \Lambda S^{k+1}, \quad x \mapsto \alpha_x^s,$$

и положим

$$f_s^* := \Lambda f \circ \delta_s^k \circ \psi_s: (D^k, \partial D^k) \rightarrow (\Lambda M, \Lambda^0 M).$$

(Ясно, что точки ∂D^k действительно отображаются в одноточечные кривые.)

* Эти обозначения вводятся временно: так, в § 2.3 S^k имеет другой смысл. Координаты в $\mathbb{R}^{k+2}$ будем нумеровать от 0 до $k+1$.

Очевидно $^*)$, $f^* = f_0^* \sim f_1^*$. Поскольку ∂D^k при отображении f_1^* переходит в точку $if^*(b_1)$, соответствующий элемент группы $\pi_k(\Lambda, \Lambda^0)$ является образом некоторого $\beta \in \pi_k \Lambda$. Именно, надо профакторизовать f_1^* через отображение $(D^k, \partial D^k) \rightarrow (S^k, b_1)$, «склеивающее» ∂D^k в точку; в качестве такого годится ψ_1 . Итак, $\beta \equiv F := \Lambda f \cdot \delta_1^k: (S^k, b_1) \rightarrow (\Lambda M, if(b_1))$. Но изоморфизм $\pi_{k+1} M = \pi_k \Lambda M$, описанный в $(^{23})$ в «кубических» терминах, в «сферических» терминах возникает как раз путем сопоставления отображению f отображения F . Действительно, возьмем какое-нибудь отображение $X: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (S^n, b_1)$, гомеоморфное на $I^n - \partial I^n$, и положим

$$\chi: (I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \rightarrow (S^{n+1}, b_1), \quad \chi(x_1, \dots, x_{n+1}) = a_X(x_1, \dots, x_n) \left(x_{n+1} + \frac{1}{2} \right).$$

Ясно, что если $g = f \circ \chi$, то, в обозначениях из $(^{23})$, $G = F \circ X$.

2) Вместо ретракции $\Lambda^0 \rightarrow \Lambda^0$ по траекториям градиентной системы в Λ во втором доказательстве использовано стягивание в точку коротких кривых посредством простого геометрического построения в самом M (кривая $s(t)$ представляется в виде $\exp \xi(t)$, $\xi(t) \in T_{s(t)} M$), и при значении параметра деформации s она переходит в кривую $\exp s\xi(t)$. Ясно, что элементарное построение такого рода годится и в более общей ситуации — для финслеровых метрик или даже для метрик Буземана (см. Буземан [1]), и если предыдущие рассуждения тоже каким-то образом перенесены на этот случай $^{**)}$, то получится доказательство существования одной замкнутой геодезической в этой более общей ситуации.

$(^{25})$ В теории Люстерника — Шнирельмана, к которой теперь переходит автор, не делается никаких предположений о невырожденности замкнутых геодезических. Излагаемая же поздняя теория Морса относится — по крайней мере, непосредственно относится — к тому случаю, когда такое предположение выполняется. В аналогичном вопросе о критических точках функции на многообразии в теории Морса тоже делается предположение о невырожденности критических точек; в противном случае эта теория, грубо говоря, дает оценки снизу для числа критических точек лишь с учетом приписываемых последним некоторых «весов» $^{***)}$. В связи с этим в отечественной литературе было при-

$^*)$ Непрерывность $\delta_s^k \cdot \psi_s$ в точке $(b_1, 1)$ нуждается в специальной проверке, ибо $\delta_s^k(x)$ не непрерывно по $(x, s) \in S^k \times [0, 1]$ в единственной точке $(b_1, 1)$. Здесь существенно, что речь идет именно о $\delta_s^k \cdot \psi_s$. Несложное геометрическое рассуждение показывает, что при $(x, s) \in D^k \times [0, 1]$, близких к $(b_1, 1)$, окружности $\{a_{\psi_s(x)}^s(t)\}$ получают целиком лежащими в малой окрестности точки b_1 на S^n . Значит, если $a_{\psi_s(x)}^s(t) = \exp \xi(t)$, $\xi(t) \in T_{b_1} S^n$, то $|\xi(t)|$ мало; кроме того, окружность должна быть короткой. При используемой нами параметризации, пропорциональной длине дуги, скорость $\left| \frac{\partial}{\partial t} a_{\psi_s(x)}^s(t) \right|$ должна быть малой, а поскольку при малых $|\xi|$ отображение $V_2 \exp(\xi)$ мало меняет нормы векторов, то и $|\dot{\xi}(t)|$ должна быть малой.

$^{**)}$ Во всяком случае, для финслеровых метрик это возможно (хотя бы с помощью прежних «кустарных» приемов — собственно, Морс и Фет рассматривали именно финслеровы метрики).

$^{***)}$ Для изолированной критической точки c функции f на замкнутом многообразии M ее i -е типовое число есть

$$m_i(c) := \dim H_i((M^* \cup c) \bmod M^*),$$

где $M^* := \{x \in M; f(x) < \kappa\}$, $\kappa := E(c)$, гомологии берутся с коэффициен-

нято говорить, что теория Люстерника — Шнирельмана дает оценки снизу для числа «геометрически различных» критических точек, а теория Морса — для «алгебраического (или аналитического) числа» критических точек. Применительно к задаче о замкнутых геодезических термин «геометрически различные критические точки» не очень удачен — «геометрическим» лучше было бы называть то, что относится непосредственно к M , а в данном случае речь идет только о различных критических точках функционала E в Λ (точнее, в Π , см. § 2.2), которые, как уже говорилось, могут соответствовать одной и той же замкнутой геодезической в M .

(20) Ситуация со статьей Пуанкаре [1] вкратце такова. Эта статья, не считая введения и параграфа с предварительными сведениями о сопряженных точках, естественно делится на четыре части ^{*)}.

1) § 3 посвящен метрике g_μ , которая зависит от параметра μ и при $\mu=0$ обращается в стандартную метрику. Исследуются замкнутые геодезические при малых μ , замыкающиеся, грубо говоря, после одного оборота вдоль (и возле) некоторого большого круга (заметим, что такие замкнутые геодезические не могут самопересекаться). Вводится вспомогательная осредненная функция Гамильтона, определенная на проективной плоскости, точки которой интерпретируются как большие круги. Эта осредненная функция Гамильтона должна иметь хотя бы три критические точки. Если они невырожденные, то исходная метрика g_μ должна при малых μ иметь замкнутые геодезические, близкие к соответствующим большим кругам, — это можно доказать обычными методами теории возмущений. Вопрос о том, что будет в случае вырождения критических точек, не обсуждается. За исключением этой последней оговорки (которая, конечно, существенна для точной формулировки того, что же здесь доказано), в остальном рассуждения Пуанкаре в § 3, по существу, являются строгими, хотя и было бы желательно сделать их формально более четкими. Как заметил А. И. Грюнталь, при этом целесообразно воспользоваться техникой из работы Мозера [6].

2) В § 4 рассматривается уже произвольное аналитическое однопараметрическое семейство метрик положительной кривизны g_μ . Пуанкаре пытается использовать аналитическое продолжение замкнутых геодезических по μ . Его формулировки здесь не являются достаточно четкими. Главное же, он не дока-

тами в поле k (традиционно $k=\mathbb{Z}_2$). Неравенства Морса (см. Зейферт и Трельфалль [1]) гласят, что в случае замкнутого M при $j=0, 1, \dots, \dim M$

$$\sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \sum_c m_i(c) \geq \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} b_i,$$

где $b_i := \dim H_i(M)$ есть i -е число Бетти; при $j = \dim M$ неравенство обращается в равенство. Отсюда следует, что если принять $\sum_i m_i(c)$ за «вес» c , то

сумма весов всех критических точек $\geq \sum b_i$. Обычно, впрочем, говорят только о типовых числах точки c , не вводя особого названия для их суммы. Следует подчеркнуть, что хотя эта сумма в теории Морса играет как бы роль «кратности» критической точки, но лучше не называть ее кратностью, ибо она не совпадает с той кратностью, которая вводится в теории особенностей гладких отображений и которая обобщает соответствующие понятия из алгебры и элементарного анализа. Например, функция одной переменной $f(x) = ax^n + o(x^n)$, $a \neq 0$, имеет в точке 0 критическую точку кратности $n-1$, тогда как ее типовые числа равны нулю, за одним только исключением: $m_0(0) = 1$ при четном n .

^{*)} Я не сохраняю языка и обозначений Пуанкаре и не воспроизвожу его формулировок. Читатель при желании может обратиться к самой его статье, которая переведена на русский язык и легкодоступна. См. также Аносов [5], [6].

зывает возможность аналитического продолжения замкнутых геодезических, а, считая ее чем-то само собой разумеющимся (для всех μ), доказывает, что при этом продолжении хотя одна несамопересекающаяся замкнутая геодезическая остается в действительной области. Биркгоф [1] устранил основной пробел в этой аргументации, доказав, что если замкнутая геодезическая без самопересечений c_μ непрерывно зависит от параметра μ , $0 \leq \mu < \mu_0$, то при $\mu \rightarrow \mu_0$ ее длина остается равномерно ограниченной^{*}; эта «априорная оценка» гарантирует, что при $\mu = \mu_0$ существует замкнутая геодезическая c_0 , являющаяся в понятном смысле предельной по крайней мере для некоторой подпоследовательности c_{μ_l} . После этого для завершения доказательства надо посмотреть, что происходит в окрестности c_0 при μ , достаточно близких к μ_0 . (При этом проще использовать не соображения аналитичности, а свойства простейших бифуркаций для «типичных» однопараметрических семейств метрик. Последнее, кстати, позволяет вместо аналитичности довольствоваться принадлежностью метрики к классу C^n с подходящим n .) Подчеркну, что это дополнение Биркгофа относится только к тому случаю, когда кривизна положительна (во всех точках и при всех μ). Любопытно, что Пуанкаре делает именно такое предположение, хотя в имеющихся у него рассуждениях оно используется только в стоящих особняком § 7, 8.

Пока что речь шла о самонепересекающихся замкнутых геодезических. Если же говорить вообще о замкнутых геодезических независимо от наличия или отсутствия у них самопересечений, то здесь ситуация осложняется. Нужно различать эти замкнутые геодезические по чему-то вроде числа точек самопересечения. К сожалению, пока что не исключено, что при изменении μ число точек самопересечения у замкнутой геодезической c_μ непрерывно зависит от μ , может измениться. Точнее говоря, c_μ обладает, очевидно, следующим свойством: если при некотором $\mu = \mu_0$ она имеет точки самокасания, то c_{μ_0} «вырождается» путем слияния нескольких ее частей друг с другом (кратность c_μ при $\mu = \mu_0$ повышается). Не исключено, что число точек самопересечения изменится при прохождении μ через значение μ_0 . Во всяком случае, легко показать на примере, что изменение числа точек самопересечения может произойти, если рассматривать не замкнутую геодезическую, а просто замкнутую кривую c_μ , непрерывно зависящую от μ и обладающую указанным выше свойством. Может ли подобное явление произойти для замкнутых геодезических, неизвестно. Пуанкаре утверждал и использовал, что не может, однако в соответствующих его рассуждениях никак не используется тот факт, что мы имеем дело именно с замкнутой геодезической, а не вообще с какой-то замкнутой кривой, так что эти рассуждения заведомо бездоказательны.

Игнорируя эту трудность^{**}, можно подумать, что из его рассуждений следует существование бесконечного числа замкнутых геодезических для рассматриваемых метрик. Биркгоф этого не оспаривал (если не считать упоминания о соответствующей модификации его дополнения насчет «априорной оценки» длины). В действительности же на этом пути можно будет получить какие-то результаты лишь тогда, когда либо будет доказано, что для замкнутых геодезических подобного явления не происходит, либо будет введен какой-то более сложный инвариант рассматриваемого класса деформаций замкнутых кривых (причем надо, чтобы «априорная оценка», «срабатывала» бы с этим инвариантом). Еще об одном препятствии см. Аносов [5].

^{*} Это, конечно, сразу следует из известной оценки сверху для длины несамопересекающейся замкнутой геодезической через минимум кривизны (Топоногов [1]), но во времена Биркгофа эта оценка не была известна. Рассуждения Биркгофа проще, чем у Топоногова, но зато и не дают явной оценки, тем более точной.

^{**} Которую и в наши дни не заметил Клингенберг [20].

3) В § 5, 6 обсуждаются качественные свойства замкнутых геодезических. В § 5 речь идет об устойчивости или неустойчивости (в линейном приближении), а в § 6 — об устойчивости и двойных точках замкнутых геодезических, возникающих при бифуркации.

Пуанкаре считал доказанным, что всегда существует устойчивая замкнутая геодезическая без самопересечений. Но это неверно, как показал Грюнталь [1]. Формально в статье Грюнталья метрика не аналитическая, а бесконечно дифференцируемая. Однако несложные дополнительные соображения показывают, что при малом возмущении построенной им метрики снова получается метрика, у которой все замкнутые несамопересекающиеся геодезические являются гиперболическими. Поэтому существует и аналитический пример.

Вместе с тем основные утверждения Пуанкаре могут быть строго обоснованы для метрик, достаточно близких к стандартной. В отличие от 1) сейчас речь идет не об окрестности стандартной метрики в однопараметрическом семействе, но о ее окрестности в пространстве всех метрик. По поводу вопросов такого рода см. Грюнталь [2], Торбергсон [3], Бальманн, Торбергсон и Циллер [1]*).

4) В § 7 Пуанкаре приводит еще одно доказательство существования замкнутой геодезической без самопересечений. Оно является вариационным. Рассматриваются всевозможные замкнутые кривые без самопересечений, которые разделяют поверхность на две области, имеющие полную кривизну 2π . Кратчайшая из этих кривых является геодезической. На мой взгляд, в рассуждениях § 7 имеется пробел (доказывая «от противного», что у предела минимизирующей последовательности нет дуг, которые соприкасаются друг с другом, Пуанкаре использует известную регулярность этих дуг, которая априори не очевидна). Однако правдоподобно, что их можно сделать вполне строгими.

Наконец, в § 8 Пуанкаре устанавливает, что не всякая замкнутая геодезическая без самопересечений может получиться как решение рассматриваемой вариационной задачи.

(27) Докажем, что $\bar{w}^i = (0, i)$. Интерпретируем многообразия Шуберта в терминах плоскостей. Элемент многообразия $[a, b]$ есть плоскость в $\mathbb{R}^{b+2}$, имеющая нетривиальное пересечение с $\mathbb{R}^{a+1}$. Слоем расслоения $\gamma^{n-1} | (\gamma^{n-1})^{-1} [a, b]$ над этим элементом является ортогональное дополнение к этой плоскости в $\mathbb{R}^{n+1}$; оно при всех таких плоскостях содержит ортогональное дополнение к $\mathbb{R}^{b+2}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Последнее имеет размерность $n - b - 1$. Получается, что векторное расслоение $\gamma^{n-1} | (\gamma^{n-1})^{-1} [a, b]$ имеет $n - b - 1$ линейно независимых сечений.

Пусть вообще некоторое m -мерное векторное расслоение ξ , база которого является клеточным разбиением, имеет k линейно независимых сечений. Препятствием по модулю 2 к построению таковых над $(m - k + 1)$ -мерным остовом базы служит $(m - k + 1)$ -й характеристический класс Штифеля — Уитни $w^{m-k+1}(\xi)$ данного расслоения, см. Милнор, Стасеф [1]; итак, $w^{m-k+1}(\xi) = 0$. А так как из существования k линейно независимых сечений следует существование и любого меньшего числа линейно независимых сечений, то заключаем, что $w^j(\xi) = 0$ при $j \geq m - k + 1$.

В нашем случае получается, что при отображении $H^*(G(2, n-1)) \rightarrow H^*([a, b])$, индуцированном вложением $[a, b] \hookrightarrow G(2, n-1)$, образ $\bar{w}^j$, который мы обозначим через $\bar{w}^j | [a, b]$, равен нулю при $j \geq b + 1$. Значит,

$$\langle \bar{w}^i, [1, i-1] \rangle = 0, \quad \langle \bar{w}^i, [2, i-2] \rangle = 0, \dots$$

В $H_i(G(2, n-1))$ остается еще только один образующий элемент $[0, i]$, и поскольку $\bar{w}^i \neq 0$, то $\langle \bar{w}^i, [0, i] \rangle = 1$. Но полученные соотношения — как раз те, посредством которых определяется $(0, i)$.

* Пользуясь случаем отметить, что в моем докладе [2] по небрежности выпало упоминание о близости метрики к стандартной и в итоге получилось неверное утверждение.

Ясно, что $\omega^1 = (0, 1)$ (ведь $H^1(G(2, n-1)) = \mathbb{Z}_2$ имеет единственный ненулевой элемент). Рассмотрим, далее, векторное расслоение $\gamma^2 | (\gamma^2)^{-1} [0, 2]$. Элементы из $[0, 2]$ суть плоскости, лежащие в $\mathbb{R}^4$ и проходящие через $\mathbb{R}^1$. Значит, расслоение $\gamma^2 | (\gamma^2)^{-1} [0, 2]$ имеет нетривиальное сечение (сопоставляем фиксированный вектор из $\mathbb{R}^1$ каждому элементу из $[0, 2]$). Соответствующее препятствие есть $\omega^2 | [0, 2]$. Итак, $\langle \omega^2, [0, 2] \rangle = 0$, а поскольку $H_2(G(2, n-1))$ имеет образующие $[0, 2]$ и $[1, 1]$, то $\langle \omega^2, [1, 1] \rangle = 1$. Тем самым доказано, что $\omega^2 = (1, 1)$.

(23) Пусть $p: E \rightarrow B$ есть k -мерное векторное расслоение, имеющее своей базой конечное клеточное разбиение (клетки $e_1, \dots, e_N$), а E_1 — соответствующее расслоение на (замкнутые) диски. Стягивая ∂E_1 (границу E_1 в E , т. е. расслоение на сферы, ограничивающие диски) в точку (обозначим ее e_0), получим пространство Тома $E_1/\partial E_1$ расслоения E . Тогда $e_0, p^{-1}(e_1), \dots, p^{-1}(e_N)$ — клетки пространства $E_1/\partial E_1$, и легко видеть, что они образуют клеточное разбиение. При этом по модулю 2 коэффициенты инцидентности

$$[e_i : e_j] = [p^{-1}(e_i) : p^{-1}(e_j)],$$

так что возникает изоморфизм соответствующих клеточных цепей, коммутирующий с граничным оператором и индуцирующий некоторый изоморфизм гомологий

$$\varphi: H_i(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{i+k}(E_1/\partial E_1; \mathbb{Z}_2) = H_{i+k}(E_1, \partial E_1; \mathbb{Z}_2).$$

Изоморфизм φ^{-1} совпадает с изоморфизмом Тома. Несмотря на общеизвестность данного утверждения, я не знаю учебника, содержащего его доказательство. Впрочем, оно очевидно в нашем случае когда $B = P^{n-1}$ и в качестве клеточного разбиения можно взять разбиение на $P^0, \dots, P^1, \dots, P^{n-1}$, где проективные пространства P^i вложены в P^{n-1} в соответствии с естественными вложениями $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n$. В этом случае в каждой размерности имеется только одна клетка и ей отвечает единственный нетривиальный элемент группы гомологий $H_i(B; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, так что имеется единственный изоморфизм

$$H_i(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{i+n-1}(G(2, n-1), G(2, n-2); \mathbb{Z}_2),$$

а потому φ^{-1} и изоморфизм Тома заведомо должны совпадать^{*}. К тому же нам важно только то, что при некотором изоморфизме — неважно, что это изоморфизм Тома, — образы циклов $[a_1, n-1]$ в $H_*(G(2, n-1), G(2, n-2); \mathbb{Z}_2)$ переходят в циклы P^{a_1} . Очевидно, что это так при изоморфизме φ^{-1} : ведь если U — фигурировавшая раньше окрестность $G(2, n-2)$, то

$$(p_{n-1} | (G(2, n-1) - U))^{-1}(P^{a_1}) = [a_1, n-1] - U.$$

(20) В совпадении $h_*[0, n-1]$ и $i_*\{0, 0\}$ можно убедиться также путем прямого геометрического рассуждения, аналогичного (24). Фигурирующее там число k будет теперь равно $n-1$, а для сферы, обозначенной в (24) через S^k , примем обозначение S^{*n-1} . Отметим, что определения b_s и $a_x^s(t)$ (а значит, и δ_s^{n-1}), использованные в (24) при $0 \leq s \leq 1$, сохраняют смысл и при других s ; теперь у нас будет $0 \leq s \leq \infty$. Впрочем, отрезки $0 \leq s \leq 1$ и $1 \leq s \leq \infty$ все равно мы будем рассматривать отдельно, поэтому обозначим

$$b_s := b_{1/s} = (0, \dots, 0, s), \quad \bar{a}_x^s(t) := a_x^{1/s}(t), \quad \bar{\delta}_s^{n-1} := \delta_{1/s}^{n-1}.$$

^{*} Однако позднее нам понадобится совпадение φ^{-1} и изоморфизма Тома в таком случае, когда соответствующие группы уже не сводятся к $\mathbb{Z}_2$.

При $s=1$, $p=b_1=b_1$ мы по-прежнему доопределяем $\bar{a}_{b_1}^1(t) = a_{b_1}^1(t)$ как $\bar{b}_1=b_1$ при всех t и соответственно понимаем $\bar{\delta}_1^{n-1} = \delta_1^{n-1}$.

При $0 \leq s \leq 1$ в (24) строились отображения $f_s^* = \Lambda f \cdot \delta_s^{n-1} \cdot \psi_s$. У нас $M = S^n$, $f = \text{id}_{S^n}$, так что $\Lambda f = \text{id}_{\Lambda S^n}$. Кроме того, каждая кривая $\delta_s^{n-1}(x)$ является окружностью на сфере, параметризованной пропорционально длине дуги, поэтому можно рассматривать δ_s^{n-1} как отображение

$$S^{*n-1} \rightarrow \Lambda S^n, \quad x \mapsto a_x^s.$$

Сопоставляя определения $\{0, 0\}$ и δ_0^{n-1} , заключаем, что в $H_{n-1}(\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n)$

$$\{0, 0\} = \pi_* H_2[\delta_0^{n-1}],$$

где $[\delta_0^{n-1}] \in \pi_{n-1}(\Lambda S^n, \Lambda^0 S^n)$ — определяемый «относительным сфероидом» δ_0^{n-1} элемент этой гомотопической группы, H_2 — композиция гомоморфизма Гуревича

$$H: \pi_{n-1}(\Lambda S^n, \Lambda^0 S^n) \rightarrow H_{n-1}(\Lambda S^n, \Lambda^0 S^n; \mathbb{Z})$$

с последующей заменой группы коэффициентов на $\mathbb{Z}_2$, а π_* индуцировано проекцией $\pi: \Lambda S^n \rightarrow \Gamma S^n$. Но отображения

$$\delta_s^{n-1} \cdot \psi_s: (D^{n-1}, \partial D^{n-1}) \rightarrow (\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n)$$

осуществляют гомотопию $\delta_0^{n-1} = \delta_0^{n-1} \cdot \psi_0$ и $\delta_1^{n-1} \cdot \psi_1$, так что

$$(*) \quad \{0, 0\} = \pi_* H_2[\delta_1^{n-1} \cdot \psi_1].$$

Теперь при $0 \leq s \leq 1$ определим отображение

$$\bar{\psi}_s: S^{*n-1} \rightarrow S^{*n-1}, \quad \bar{\psi}_s(x) = (\sqrt{1+s^2 x_n^2 - s^4} - s x_n) x + b_s,$$

$\psi_s(x)$ есть точка пересечения с S^{*n-1} прямолинейного луча, исходящего из b_s и имеющего то же направление, что и луч, исходящий из 0 и проходящий через x . Отсюда ясно, что при $s < 1$ плоскость $V_{(x,s)}^2$, параллельная оси x_0 и проходящая через точки $\bar{\psi}_s(x)$ и b_s , пересекает S^{*n-1} еще в точке $\bar{\psi}_s(-x)$, причем $\psi_s(x)$ и $\bar{\psi}_s(-x)$ являются диаметрально противоположными точками окружности $V_{(x,s)}^2 \cap S^n$. При $s=1$ подобное утверждение имеет смысл для точек с $x_n < 0$. При $x_n \geq 0$ будет $\bar{\psi}_1(x) = b_1$, так что плоскость $V_{(x,s)}^2$ не определена, однако при $x_n=0$ ее можно доопределить как касательную плоскость к S^n в точке b_1 , а при $x_n > 0$ — как плоскость $V_{(-x,s)}^2$, соответствующую тому же построению с заменой $\bar{\psi}(x)$ на $\bar{\psi}(-x)$. После этого можно доопределить $\bar{a}_{\bar{\psi}_1(x)}^1(t)$ при $x_n \geq 0$. При этом при всех x, s, t

$$(**) \quad \bar{a}_{\bar{\psi}_s(-x)}^s(t) = \bar{a}_{\bar{\psi}_s(x)}^s(t/2 - t).$$

Для всех $s \in [0, 1]$ можно определить отображения

$$g_s: S^{*n-1} \rightarrow \Lambda S^n, \quad g_s(x) := \bar{a}_{\bar{\psi}_s(x)}^s;$$

$g_s(x)$ непрерывно по (x, s) . При $s < 1$ или $x_n < 0$ это следует из того, что $g_s = \bar{\delta}_s^{n-1} \cdot \bar{\psi}_s$, а при $s=1$ и $x_n > 0$ — из непрерывности при $x_n < 0$ и (**), так что в специальной проверке нуждается лишь непрерывность в точках

$\partial D^{n-1} \times 1$. Но ясно, что все они под действием g_1 отображаются в одноточечную кривую $S \rightarrow \bar{b}_1$, и нетрудно убедиться, что, когда t достаточно близко к 1, а x — к ∂D^{n-1} , соответствующая окружность $g_s(x)$ целиком лежит в малой окрестности точки $\bar{b}_1$ на S^n . Поскольку она параметризована пропорционально длине дуги, то $\left| \frac{\partial}{\partial t} g_s(x)(t) \right|$ мало. Следовательно, если $g_s(x)(t) = \exp \xi(t)$, где $\xi(t) \in T_{\bar{b}_1} S^n$, то $|\xi(t)|$ и $|\dot{\xi}(t)|$ малы. (Попутно мы отметим, что при $s=1$ и $x \in \partial D^{n-1}$ тоже имеет место равенство $g_1 = \bar{\delta}_1^{n-1} \cdot \bar{\psi}_1$.)

(**) можно перефразировать так: если $l: S^n \rightarrow S^n$ — инволюция $x \mapsto -x$, то $g_s \circ l = e^{2\pi i} \cdot \theta \cdot g_s$. Следовательно, можно определить $h_s: P^{n-1} \rightarrow \Gamma S^n$, считая, что если точки P^{n-1} по-прежнему суть пары $(x, -x)$, $x \in S^{n-1}$, и $\hat{\pi}: S^{n-1} \rightarrow P^{n-1}$ — соответствующая проекция, то $h_s \hat{\pi} x = \pi g_s x$. Из построения ясно, что h_0 — это композиция естественных вложений

$$P^{n-1} = [0, n-1] \hookrightarrow G(2, n-1) \hookrightarrow \Gamma S^n.$$

Обозначая еще через l вложение $(\Gamma S^n, \emptyset) \hookrightarrow (\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n)$, заключаем, что

$$h_* [0, n-1] = l_* h_{0*} [P^{n-1}] = l_* h_{1*} [P^{n-1}].$$

А поскольку h_1 отображает P^{n-2} в $\Gamma^0 S^n$, то последний гомологический класс совпадает с $(lh_1)_* [P^{n-1} \bmod P^{n-2}]$. Далее, относительный гомологический класс $[P^{n-1} \bmod P^{n-2}]$ получается при гомоморфизме Гуревича

$$\pi_{n-1}(P^{n-1}, P^{n-2}) \rightarrow H_{n-1}(P^{n-1}, P^{n-2}; \mathbb{Z})$$

и последующей замене группы коэффициентов на $\mathbb{Z}_2$ из элемента

$$[\hat{\pi} | (D^{n-1}, \partial D^{n-1})] \in \pi_{n-1}(P^{n-1}, P^{n-2}).$$

Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (D^{n-1}, \partial D^{n-1}) & \xrightarrow{g_1} & (AS^n, A^0 S^n) \\ \hat{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ (P^{n-1}, P^{n-2}) & \xrightarrow{lh_1} & (\Gamma S^n, \Gamma^0 S^n) \end{array}$$

теперь видно, что

$$(lh_1)_* [P^{n-1} \bmod P^{n-2}] = \pi_* H_2 [g_1 | (D^{n-1}, \partial D^{n-1})].$$

Ввиду (*) нам остается доказать, что если область определения $\bar{\psi}_1$ сократить до D^{n-1} , то

$$[\delta_1^{n-1} \cdot \psi_1] = [\bar{\delta}_1^{n-1} \cdot \bar{\psi}_1].$$

Во-первых, заметим, что отображение $\delta_1^{n-1} = \bar{\delta}_1^{n-1}: S^{n-1} \rightarrow AS^n$ непрерывно (хотя $\delta_s^{n-1}(x)$ и $\bar{\delta}_s^{n-1}(x)$ разрывны как функции от (x, s) в точке $(b_1, 1)$). Действительно, когда x близко к точке $b_1 = \bar{b}_1$ (только в этой точке и надо специально проверять непрерывность), то окружность $\{a_x^1(t)\} = \{\bar{a}_x^1(t)\}$ целиком лежит в малой окрестности точки $b_1 = \bar{b}_1$ на S^n , а параметризация у нас пропорциональна длине дуги. Значит, если $\xi(t) \in T_{\bar{b}_1} S^n$ таково, что $a_x^1(t) = \exp \xi(t)$, то $|\xi(t)|$ и $|\dot{\xi}(t)|$ малы. Во-вторых, отображения

$$\psi_1 \text{ и } \bar{\psi}_1: (D^{n-1}, \partial D^{n-1}) \rightarrow (S^{n-1}, b_1)$$

хотя и не совпадают, но гомотопны $\text{rel } \partial D^{n-1}$.

(30) Очевидно, можно обеспечить и $2n-2s-1$ (где s — то же, что в 2.3.3) критических уровней (что $> n$ при $n \neq 2^k-1$), если рассмотреть подчиненные

гомологические классы, являющиеся образами при отображении h_{T*} произведений Чеха относительного гомологического класса $\{n-1, n-1\} \cap (1, 1)^s$ и когомологических классов $(0, 1)^i$, $i=0, 1, \dots, 2n-2s-2$. Обеспечить же $g(n)$ подчиненных гомологических классов (такую оценку пытался получить Альбер [1]) мы не можем, ибо не знаем, существует ли в $ПМ - П_0M$ (т. е. в $PS^n - P_0S^n$) такой коцикл $(1, 1)'$, для которого было бы $h_{T*}(1, 1)' = (1, 1)$.

Люстерник [1] указал другую оценку снизу: $n+1$ (что лучше $2n-2s-1$ при $n=2^k-1$ и равно $2n-2s-1$ при $n=2^k-2$). Соответствующие классы суть образы при h_{T*} классов

$$\{n-1, n-1\}, \{n-1, n-1\} \cap (0, n-1), \{n-1, n-1\} \cap (0, n-1) \cap (0, 1)^i, \quad i=1, \dots, n-1.$$

Естественно, достаточно ограничиться случаем $h_{T*} = i$ (i — то же, что в 2.3.6). Используя 2.3.2, легко получаем по индукции, что

$$(0, 1) \cup (j, n-1) = (j+1, n-1) \quad \text{при } j=0, \dots, n-2,$$

так что $(0, n-1) \cap (0, 1)^{n-1} = (n-1, n-1)$ и

$$\{n-1, n-1\} \cap (0, n-1) \cap (0, 1)^{n-1} = \{n-1, n-1\} \cap (n-1, n-1) = \{0, 0\}.$$

Поскольку при отображении когомологий, индуцированном вложениями

$$\Gamma S^n - \Gamma_0 S^n \hookrightarrow PS^n - P_0 S^n \hookrightarrow PS^n,$$

коцикл α , построенный при доказательстве 2.3.5, переходит в $(0, n-1)$, то

$$\begin{aligned} i_* \{n-1, n-1\} \cap (\alpha | (PS^n - P_0 S^n)) \cap ((0, 1)')^{n-1} = \\ = i_* (\{n-1, n-1\} \cap (0, n-1) \cap (0, 1)^{n-1}) = i_* \{0, 0\} \neq 0. \end{aligned}$$

Хотя обе эти оценки лучше, чем 2.3.7, ниже (в теореме 2.3.9) используется только 2.3.7, ибо для нас будет существенным не только факт существования определенного числа подчиненных гомологических классов, но и то, как именно они строятся. Классы $\{0, q\}$ удастся использовать, а можно ли использовать все те классы, о которых шла речь выше, — неясно. Впрочем, при наличии более сильных ограничений, чем в 2.3.9, удастся использовать все $g(n)$ подчиненных классов, имеющих в $\Gamma S^n \bmod \Gamma_0 S^n$ (теорема Альбера; см. Альбер [3], Аносов [3]).

(³¹) а) Гессиан дифференцируемой (хотя бы класса C^2) функции E , заданной на многообразии N (не обязательно $N = \Lambda M$), в критической точке c — это квадратичный функционал $D^2E(c)$ на $T_c N$, который в терминах карты (φ, U) , содержащей c , определяется так. Если $\xi, \xi' \in T_c N$, то

$$D^2E(c) \cdot (\xi, \xi') = D^2(E \circ \varphi^{-1})(\varphi(c)) \cdot (T\varphi \cdot \xi, T\varphi \cdot \xi').$$

Непосредственно проверяется, что это определение не зависит от конкретного выбора карты, содержащей c (при этом надо воспользоваться тем, что точка c — критическая). Можно также дать определение гессиана в инвариантных терминах (оно очевидным образом эквивалентно предыдущему). Именно, рассматривая DE как сечение кокасательного расслоения T^*N , возьмем

$$T(DE): TN \rightarrow T(T^*N).$$

Если $DE(c) = 0_c$ (нуль пространства T_c^*N), то имеем стандартное разложение на горизонтальную и вертикальную части

$$T_{DE(c)}(T^*N) = T_c N \oplus T_c^* N.$$

Для $\xi, \xi' \in T_c N$ вертикальная часть $(T(DE)(c) \cdot \xi)_v$ есть некоторый линейный функционал на $T_c N$, так что определено число $(T(DE)(c) \cdot \xi)_v \cdot \xi'$, которое мы и принимаем за $D^2 E(c) \cdot (\xi, \xi')$.

б) В классическом вариационном исчислении говорили не о гессиане, а о *второй вариации (функционала E)* или о *функционале второй вариации*; для этого функционала, как и для E , использовали явную запись в виде соответствующего интеграла. Морс [2] понимал под индексной формой не гессиан, а некое конечномерное приближение к нему, «улавливающее» индекс и дефект (коранг, nullity) гессиана.

в) С функцией E и римановой метрикой g на N связывается градиентная динамическая система $\{\varphi_s\}$, описываемая дифференциальным уравнением $\dot{c} = -\text{grad } E(c)$. (Здесь градиент функции E относительно римановой метрики g определяется из условия $g(\text{grad } E(c), \xi) = DE(c) \cdot \xi$ для всех $\xi \in T_c N$.) Если c — критическая точка E , то для градиентной системы c является положением равновесия. Рассмотрим поток $\{\varphi_s | T_c N\}$, дающий «линейное приближение к $\{\varphi_s\}$ » возле c . (Согласно классической терминологии, восходящей к Пуанкаре, $\{\varphi_s | T_c N\}$ описывается соответствующим уравнением в вариациях. Это понятие не связано специфически ни с градиентными потоками, ни с положениями равновесия: если поток $\{\varphi_s\}$ в N определяется векторным полем $\omega: N \rightarrow TN$, то поток $\{\varphi_s\}$ в TN — векторным полем $T\omega: TN \rightarrow T(TN)$. Когда c — положение равновесия, $T_c N$ под действием $T\varphi_s$ переходит в себя; в точках $T_c N$ векторное поле $T\omega$ вертикально и поэтому может рассматриваться как касательное поле на $T_c N$.) Легко доказать, что $\{\varphi_s | T_c N\}$ есть градиентная динамическая система в $T_c N$, определяемая градиентом $\frac{1}{2} D^2 E(c)$ (как функции на $T_c N$) относительно римановой метрики $g | T_c N$. (Говоря о $g | T_c N$ как о римановой метрике в $T_c N$, мы отождествляем касательное пространство к $T_c N$ в точке $\xi \in T_c N$ с самим $T_c N$.)

(32) а) Идея доказательства 2.4.7 состоит в том, что квадратичный функционал $h(\eta)(\xi, \xi')$ приводится к некоторому «стандартному» виду посредством некоторого обратимого преобразования $\zeta = m(\eta) \xi$ с $m(\eta)$, дифференцируемым по η :

$$h(\eta)(\xi, \xi') = h_0(\zeta, \zeta').$$

Тогда $E(\eta) = h(\eta)(\eta, \eta) = h_0(\zeta, \zeta)$, если $\zeta = m(\eta) \eta$. Проверяется, что $\eta \rightarrow \zeta = m(\eta) \eta$ — диффеоморфизм, так что, действительно, он служит решением задачи в фиксированном слое, а при хорошей зависимости $m(\eta)$ от η , пробегающего все $D_{\text{ем}}$, — и во всем $D_{\text{ем}}$.

В обычных курсах алгебры рассматриваются два способа приведения квадратичной формы к «стандартному» виду (там это просто сумма квадратов). Морс использовал простейший «аффинный» прием — выделение «чистых» квадратов (изложение см. у Милнора [1]). В нашем случае это не годится по трем причинам: бесконечномерность, требование эквивариантности и тот факт, что мы имеем дело с расслоением (нельзя определить глобально 1-ю, 2-ю, ..., n -ю координату, а если бы это и можно было, отсюда не следовало бы, что можно «глобально» произвести замену координат, после которой всюду стало бы $a_{11}(0_c) \neq 0$). А вот «метрический» способ приведения легко приспособить для наших целей, что и делается в изложенном доказательстве. (Разумеется, в конечномерном случае с помощью ортогональных преобразований квадратичная форма приводится к виду «сумма квадратов с коэффициентами»; после этого приведение к виду «сумма квадратов с коэффициентами ± 1 » требует уже аффинного преобразования, но очень простого. Аналогичный завершающий этап имеется и в нашем случае — переход от ξ' к ξ .)

б) Поясним происхождение условий (*) на операторы m и построение последних на другом языке. Ввиду обратимости $k(0)$ скалярное произведение

$$[\xi, \xi'] = \langle k(0) \xi, \xi' \rangle_1$$

задает метрику в H^1 , эквивалентную метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. В терминах $[\cdot, \cdot]$

квадратичный функционал $h(\eta)$ есть

$$[k(0)^{-1} k(\eta) \xi, \xi'] = [l(\eta) \xi, \xi'],$$

а равенство $l(\eta)^* k(0) = k(0) l(\eta)$ означает самосопряженность $l(\eta)$ относительно $[\cdot, \cdot]$. Ввиду близости $l(\eta)$ к id оператор $l(\eta)$ положителен. Теперь ясно, что в этих терминах $m(\eta)$ есть самосопряженный (относительно $[\cdot, \cdot]$) положительный квадратный корень из $l(\eta)$.

в) Остановимся на дифференцируемости Φ и P_c . Пусть Q_c — оператор проектирования в N_c на инвариантное подпространство оператора $k(0_c)$, отвечающее положительной части его спектра. Тогда можно положить, обозначая $\Phi|_{N_c}$ через Φ_c ,

$$\Phi_c^{-1} = \sqrt{k(0_c) Q_c} - \sqrt{-k(0_c) (1 - Q_c)}, \quad P_c = \Phi_c^{-1} \cdot Q_c \cdot \Phi_c,$$

где подразумевается, что корень из неотрицательного самосопряженного оператора сам должен быть таковым. Чтобы доказать дифференцируемость Q_c в написанных квадратных корнях, проще всего представить локально $k(0_c)$ в какой-нибудь векторной карте расслоения μ как некоторый оператор $\hat{k}(x)$, действующий в гильбертовом пространстве — стандартном слое расслоения μ — и зависящий от параметра x — точки евклидова пространства, служащей локальным представлением (набором локальных координат) точки $c \in B$. Локальным представлением оператора Q_c служит $\hat{Q}(x)$ — оператор, проектирующий гильбертово пространство на инвариантное подпространство оператора $\hat{k}(x)$, отвечающее положительным собственным значениям, параллельно инвариантному подпространству, отвечающему отрицательным собственным значениям. Как известно,

$$\hat{Q}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\lambda}{\lambda - \hat{k}(x)},$$

где интегрирование ведется по контуру в плоскости комплексного переменного, заключающему строго внутри себя положительную часть спектра $\hat{k}(x)$ и не пересекающемуся со спектром. Существование такого контура, пригодного при всех x , обусловлено тем, что ни при одном x спектр не содержит нуля, так что контур можно составить из некоторого отрезка мнимой оси и некоторой полуокружности в правой полуплоскости. Подынтегральное выражение дифференцируемо по x , а следовательно, и $\hat{Q}(x)$ тоже. Аналогично локальные представления $\sqrt{k(0_c) Q_c}$ и $\sqrt{-k(0_c) (1 - Q_c)}$ тоже выражаются с помощью интегралов

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\sqrt{\lambda} d\lambda}{\lambda - \hat{k}(x)}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\sqrt{\lambda} d\lambda}{\lambda + \hat{k}(x)}$$

по надлежащему контуру (здесь подразумевается та ветвь функции $\sqrt{\lambda}$ в правой полуплоскости, которая положительна на положительной полуоси). Поэтому они тоже дифференцируемы по x .

(⁸³) Поясним, почему из точной гомологической последовательности тройки — последнюю мы для краткости обозначим через (A, B, C) — вытекают нужные неравенства и равенство. Обозначим гомоморфизмы, фигурирующие в точной последовательности, следующим образом:

$$\dots \rightarrow H_1(B, C) \xrightarrow{i_1} H_1(A, C) \xrightarrow{j_1} H_1(A, B) \xrightarrow{\partial_1} H_{1-1}(B, C) \rightarrow \dots$$

Обозначим также

$$\begin{aligned} \alpha_i &:= \dim H_i(B, C), & b_i &:= \dim H_i(A, C), & c_i &:= \dim H_i(A, B), \\ \alpha_i &:= \dim \text{im } i_i, & \beta_i &:= \dim \text{im } j_i, & \gamma_i &:= \dim \text{im } \partial_i. \end{aligned}$$

Тогда

$$b_l = \alpha_l + \gamma_l, \quad a_l = \gamma_{l+1} + \alpha_l, \quad c_l = \beta_l + \gamma_l.$$

Мы хотим доказать, что

$$\sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} b_l \leq \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} (a_l + c_l),$$

т. е.

$$\sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} (\alpha_l + \beta_l) \leq \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} (\gamma_{l+1} + \alpha_l + \beta_l + \gamma_l).$$

Это эквивалентно тому, что

$$0 \leq \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} \gamma_{l+1} + \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} \gamma_l = \gamma_{m+1} + (-1)^m \gamma_0 = \gamma_{m+1} \geq 0$$

(пользуемся тем, что $\gamma_0 = 0$). Кроме того, в нашем случае при достаточно больших m будет $\gamma_{m+1} = 0$ и неравенство обращается в равенство. (По существу при различных больших m это одно и то же равенство.)

⁽³⁴⁾ Оговорка, что устойчивые многообразия рассматриваются локально, связана с тем, что траектории φ_s с градиентного потока, возможно, определены не при всех $s < 0$. Первоначально и устойчивое, и неустойчивое многообразия строятся локально, а потом они продолжаютсся с помощью траекторий потока φ_s , причем неустойчивые многообразия продолжаютсся с помощью φ_s с $s > 0$, а устойчивые — с помощью φ_s с $s < 0$. Однако естественно продолжать локальные устойчивые многообразия настолько, насколько это возможно, и то, что получится при таком максимальном продолжении, называть просто устойчивыми многообразиями. Это несколько упрощает формулировки. Соответствующие изменения внесены далее в основной текст. Впрочем, основную роль в дальнейшем играют неустойчивые многообразия.

⁽³⁵⁾ Необходимо сразу же предупредить, что «комплекс Морса», если его определять с помощью замыканий неустойчивых многообразий, не будет комплексом в том смысле, как это понимается в алгебраической топологии. Это обусловлено тем обстоятельством.

1) Каждое инвариантное неустойчивое многообразие W_u в нашем случае является m -мерным «цилиндром» или «листом Мёбиуса» т. е. существует гомеоморфизм $E \xrightarrow{\text{на}} W_u$, где E — пространство некоторого векторного расслоения ξ над S (ориентируемого или неориентируемого). Между тем обычные комплексы состоят из «ячеек», гомеоморфных евклидовым пространствам. Дополнительное несходство вызывает еще $M^0 M$.

Конечно, это отличие, так сказать, запланировано с самого начала; оно имеется для всех римановых многообразий M и должно как-то отражаться при последующем применении аппарата алгебраической топологии. Если бы мы рассматривали функцию f на конечномерном многообразии M с невырожденными критическими точками ^{*}, то неустойчивые многообразия были бы гомео-

^{*} Напомним, что в теории Морса критических точек функций на конечномерных многообразиях подразумевается еще, что либо многообразие замкнуто, либо функция f ограничена снизу и «компактного характера», т. е. при любом $c \in \mathbb{R}$ множество $f^{-1}([-\infty, c])$ компактно. (Это условие не имеет отношения к рассматриваемому сейчас свойству неустойчивых многообразий — тому, что они гомеоморфны евклидову пространству, — но оно нужно, чтобы установить связь между топологией M и критическими точками. Когда оно нарушается, критических точек может вообще не быть, например при $M = \mathbb{R}$ и $f(x) = x$.)

морфны евклидовым пространствам, так что аналог комплекса Морса для этого случая — будем по-прежнему называть его комплексом Морса и обозначать $\mathcal{M}(M, f)$ — более похож на обычные клеточные комплексы. Однако два других обстоятельства остаются в силе и для этого случая; именно для него мы их вначале и сформулируем.

2а) Хотя в $\mathcal{M}(M, f)$ каждое неустойчивое многообразие W_u является гомеоморфным образом некоторого открытого диска $\text{Int } D^k$ ниоткуда не следует, что имеется такой гомеоморфизм $\text{Int } D^k \xrightarrow{\text{на}} W_u$, который можно продолжить до непрерывного отображения $D^k \rightarrow M$. Между тем для «клеток» обычного клеточного комплекса такой гомеоморфизм существует.

3а) Назовем предельным множеством многообразия W_u совокупность точек вида $\lim x_n$, где все $x_n \in W_u$ и последовательность $\{x_n\}$ не имеет предельных точек в индуцированной топологии. Ниоткуда не следует, что предельное множество j -мерного W_u содержится в объединении всех W_u меньшей размерности. Между тем предельные множества j -мерных клеток обычных клеточных комплексов (ввиду 2а) эти предельные множества совпадают с образами границ дисков D^k при соответствующих отображениях $D^k \rightarrow M$) содержатся в объединении клеток меньшей размерности.

Аналогичные обстоятельства 2) и 3) имеют место и для рассматриваемого Клингенбергом «комплекса» $\mathcal{M}^*M$. Именно, 3) текстуально совпадает с 3а). а 2) таково.

2) Хотя в $\mathcal{M}^*M$ каждое W_u является гомеоморфным образом пространства расслоения $\text{Int } D\xi$, где $D\xi$ — расслоение на замкнутые единичные шары, ассоциированное с ξ из 1), а $\text{Int } D\xi$ — соответствующее расслоение на открытые шары, ниоткуда не следует, что имеется такой гомеоморфизм $\text{Int } D\xi \xrightarrow{\text{на}} W_u$, который можно продолжить до непрерывного отображения $D\xi \rightarrow M$.

Если бы не было этих неприятных обстоятельств 2) и 3), то, видимо, комплексы Морса $\mathcal{M}^*M$ могли бы служить объектами содержательной алгебраической теории (подобно тому как $\mathcal{M}(M, f)$ при отсутствии указанных в 2а) и 3а) неприятностей были бы обычными клеточными комплексами и с ними были бы связаны соответствующие алгебраические объекты). Неизвестно, в какой степени неизбежны 2) и 3). Допустим, что можно сказать о множестве тех римановых метрик на M , для которых эти неприятности не возникают? С другой стороны, не исключено, что построение $\mathcal{M}^*M$ целесообразно как-то модифицировать. Скажем, вместо $\text{grad } E(c)$ можно взять другое векторное поле, имеющее в каком-то смысле близкие свойства (в частности, вдоль его траекторий $E(c)$ должно убывать; Впрочем не исключено, что может оказаться полезным модифицировать также и E , не меняя, разумеется, критических точек), и построить W_u для потока, порожденного этим новым векторным полем.

В связи с этим целесообразно напомнить, что в дифференциальной топологии строится некоторый клеточный комплекс, связанный с M и j , но это построение не сводится к тому, чтобы взять неустойчивые многообразия критических точек (Милнор [1]). Топологи сперва вводит возле каждой невырожденной критической точки c такие локальные координаты, в которых f имеет вид $f(c) + |\xi_+|^2 - |\xi_-|^2$, и определяют маленький «кусочек» многообразия $W_u(c)$ возле с уравнением $\xi_+ = 0$. Этот «кусочек $W_u(c)$ » является, конечно, локальным неустойчивым многообразием точки c для системы $\dot{e} = -\text{grad } f(e)$, где градиент берется по отношению к римановой метрике, которая в терминах используемых локальных координат совпадает со стандартной метрикой в евклидовом пространстве (и которая пока рассматривается только в соответствующей координатной окрестности), но построение этого неустойчивого многообразия в данном случае тривиально. Если затем продолжить эту риманову метрику с малой окрестности множества всех критических точек на все M , то можно продолжить $W_u(c)$ с помощью соответствующего градиентного потока. Пока что можно сказать, что $W_u(c)$ строится как неустойчивое многообразие точки c , рассматриваемой как положение равновесия градиентного потока, где градиент

$\text{grad } f$ берется по отношению к некоторой римановой метрике, определенным образом связанной с f . Но когда траектории, «заметающие» $W_u(c)$, близко подходят к уже построенным ранее клеткам, отвечающим критическим точкам c' с $f(c') < f(c)$, построение меняется. Так, возле c' приклеивание подошедшего к c' «куска» $W_u(c)$ к проходящей через c' клетке $W_u(c')$ осуществляется не с помощью траектории градиентного потока, а с помощью ретракции, которая в терминах соответствующих локальных координат ξ'_+ , ξ'_- (в которых $f = f(c') + |\xi'_+|^2 - |\xi'_-|^2$ имеет вид $(\xi'_+, \xi'_-) \mapsto (0, \xi'_-)$). Подобные модификации позволяют избежать 2а); применяют еще некоторые «малые шевеления», посредством которых удается избежать 3а). В итоге получается настоящее клеточное разбиение, клетки которого соответствуют критическим точкам f , но даже нет необходимости обсуждать вопрос, являются ли эти клетки неустойчивыми многообразиями каких-то потоков, имеющих какое-то отношение к f .

Описывая построение комплекса Морса (несколько абзацев перед 2.3.2), Клингенберг игнорирует 2). Было бы преждевременным обсуждать, какой именно из возможных вариантов стоит считать окончательным.

(3^а) Теорема 2.5.1 представляет собой приспособленный для целей данной книги вариант известной теоремы Адамара — Перрона. Со временем эта теорема обросла различными модификациями и уточнениями. Ее стандартные варианты см. в книгах: Коддингтон и Левинсон [1], Хартман [1], некоторые исторические сведения — в книге: Аносов [1]*; отметим также новую работу Хирша, Пью и Шуба [1]. Употребительны два метода доказательства этой теоремы, принадлежащие Адамару и Перрону. Последний метод использован в настоящей книге, причем в своем, так сказать, первоначальном оформлении, при котором для решения вспомогательных интегральных уравнений используются обычные последовательные приближения. Но метод Перрона можно оформить и так, что в конечном счете доказательство сводится к теореме о неявных функциях (разумеется, бесконечномерной). Такое доказательство опубликовано в статье Ирвина [1] (однако без указания, что это — модификация метода Перрона). Достоинством такого подхода является то, что теорема о неявных функциях автоматически обеспечивает надлежащую степень гладкости инвариантных многообразий (такую же, какая имеется у рассматриваемой динамической системы). При применении метода Адамара для достижения того же результата приходится использовать некоторые дополнительные ухищрения (причем вначале это удавалось проделать только в конечномерном случае (использовалась теорема Асколи — Арцела), и только позднее Хирш, Пью и Шуб предложили такой способ, который годится и в бесконечномерном случае).

Клингенберг не доказывает гладкости инвариантных многообразий. Поскольку в настоящее время инвариантные многообразия намного более известны,

*1) Дополнительно стоит упомянуть еще о Боле [1], [2], который, по-видимому, первым доказал гладкость инвариантных многообразий (не считая, конечно, аналитического случая), см. Боль [1]. Доказательство существования инвариантных многообразий у Боля основано на наглядной геометрической идее, которую для потоков на плоскости можно выразить так: если одни траектории проходят справа от положения равновесия, а другие — слева от него, то какие-то траектории должны стремиться к положению равновесия. Как это часто бывает, детальная реализация наглядной идеи (тем более в многомерном случае) оказывается громоздкой и наглядность в значительной мере утрачивается; кроме того, такое доказательство мало пригодно для различных модификаций (в частности, оно не переносится на нужный нам бесконечномерный случай). Поэтому исследования Боля не оказали большого влияния на последующие работы в этой области и даже были надолго забыты. (С другой стороны, следует отметить, что в связи со своим геометрическим подходом к задаче об инвариантных многообразиях Боль [2] за несколько лет до Брауэра сформулировал и доказал теорему о неподвижной точке для непрерывных отображений шара в себя.)

чем вариационное исчисление в целом, то мне кажется, что в данной книге можно и не восполнять этот пробел. Отмечу только, что так как здесь исходный поток — класса C^∞ , то можно ограничиться более слабым результатом с потерей гладкости на единицу — все равно получится, что инвариантное многообразие имеет гладкость класса C^∞ . Такой более слабый результат легко получается при применении любого из двух методов — Адамара или Перрона.

(37) По существу, все, что здесь требуется, — это именно ввести возле c_q такие локальные координаты

$$(\xi_+, \xi_0, \xi_-) \in N_{c_q}^-(B_q) \oplus T_{c_q} B_q \oplus N_{c_q}^+(B_q),$$

в которых $\text{grad } E(\xi)$ принимает указанный ниже вид с нужными оценками (*) для «нелинейных членов» C^* . Существование таких координат почти тривиально, и для их построения незачем вводить поле подпространств $T_{\xi}^0 N(B_q)$, по поводу которого сразу возникают различные вопросы. Является ли оно непрерывным (и дифференцируемым)? Интегрируемо ли оно, т. е. существует ли возле B_q слоение, для которого это поле является касательным полем (полем касательных пространств слоев)? Заметим, что для $T_{\xi}^0 N$ в 2.5.1 мы имели положительные ответы на аналогичные вопросы (вопрос об интегрируемости даже не упоминался явно ввиду одномерности $T_{\xi}^0 N$).

Видимо, автору казалось, что эти $T_{\xi}^0 N(B_q)$ как-то помогут обеспечить эквивариантность. Но в этом месте об эквивариантности просто не надо заботиться. Говоря в общих чертах, локальные координаты нужны для того, чтобы: 1) убедиться, что полутраектория, не выходящая из малой окрестности B_q и начинающаяся достаточно близко к c_q , стремится к некоторой точке B_q , причем с определенной скоростью; 2) построить локальные устойчивые и неустойчивые многообразия и убедиться в их гладкости. После этого доказывается (iv), а затем уже тривиально получается эквивариантность.

Поскольку в этой схеме большая часть рассуждений никак не зависит от того, что B_q является однородным пространством, то возможно, что она в чем-то отходит от замысла Клингенберга (которого я в таком случае не понимаю) и ближе к упоминаемой им далее работе Дейстермата.

(38) Отметим, что для индекса s как критической точки E^Q в ΩM имеется красивое и полезное описание в терминах сопряженных точек, см. Морс [2], Милнор [1], Постников [1]. В связи с этим Морс в [2] специально исследовал разность между индексом s как критической точки E в ΛM и индексом s как критической точки E^Q в ΩM (см. также работу Эдвардса [1]). Однако на сегодняшний день для индекса s как критической точки E в ΛM более плодотворным оказался другой подход, предложенный Боттом и развитый далее Клингенбергом. В этой книге только он и излагается (§ 3.2), и используется (гл. 4).

(39) Рассуждения аналогичны доказательству 2.5.3, но только теперь нас интересуют не периодические решения фигурирующего в 2.5.3 уравнения (*), а решения, удовлетворяющие краевому условию $\xi(0) = \xi(1) = 0$. У (кас.) не тривиальных решений такого рода при интересующих нас отрицательных значениях λ нет, а у (верт.) они имеются при

$$\lambda = \frac{p^2 \pi^2 - 4\pi^2 q^2}{1 + p^2 \pi^2}, \quad p = 1, 2, \dots, 2q - 1,$$

причем при каждом таком λ имеется $n - 1$ линейно независимых решений. Отсюда получается указанный в тексте значение индекса. Дефект же равен $n - 1$, поскольку при $\lambda = 0$ (кас.) не имеет решений с нужными свойствами, а (верт.) имеет $n - 1$ линейно независимых решений. Отсюда следует упоминаемая далее невырожденность критических многообразий B_q .

(40) Для внешних дифференциальных форм употребительны две системы определения основных операций, различающиеся некоторыми множителями. Система, которой пользуется Клингенберг, раньше была очень распространенной, по последнее ее популярность упала, так что молодым читателям множители в некоторых формулах могут показаться странными. Поэтому стоит пояснить, что в принятой здесь системе форма $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ получается альтернированием формы $dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$; иными словами,

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} (X_1, \dots, X_k) = \frac{1}{k!} \det (X_h^{i_j})_{j, h=1, \dots, k},$$

где $X_h^i = dx^i(X_h)$ — компоненты векторов X_h (точнее, их локальных представлений, отвечающих локальным координатам x^i). Далее, внутреннее умножение k -формы α на вектор X_1 определяется так:

$$(i_{X_1} \alpha) (X_2, \dots, X_k) = k \alpha (X_1, X_2, \dots, X_k).$$

Формула для производной Ли (см. доказательство 3.1.2) в обеих системах одна и та же; в теореме Стокса появляется дополнительный множитель.

(41) Имеется в виду ортогональное дополнение по отношению к α (тогда как раньше ортогональность обозначала обычную ортогональность в $T_{c(t)}M$ относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$). При $t=0$ пара соотношений $\langle \dot{c}, Y \rangle = 0$, $\langle \dot{c}, \nabla Y \rangle = 0$ эквивалентна α -ортогональности $\dot{Y}(0)$ описанному двумерному подпространству. Значит, $\dot{Y}(t)$ при всех t α -ортогонально подпространству V_t^2 в $T_{\dot{c}(t)}TM$, порожденному $T\varphi_t(\dot{c}(0), 0)$ и $T\varphi_t(0, \dot{c}(0))$. Кстати, $T\varphi_t(\dot{c}(0), 0) = (\dot{c}(t), 0)$ и $T\varphi_t(0, \dot{c}(0)) = (t\dot{c}(t), \dot{c}(t))$; действительно, вертикальная компонента здесь есть ∇ от горизонтальной, а последняя удовлетворяет уравнению для полей Якоби; наконец, при $t=0$ написанные выражения принимают нужные значения. (См. также ниже.)

Описание α -ортогонального к V_t^2 множества $\{\dot{Y}\}$ в терминах $\langle \dot{c}, \dot{Y}_h \rangle = \langle \dot{c}, \dot{Y}_0 \rangle = 0$ не зависит от t . Поэтому V_t^2 при всех t порождено $(\dot{c}(t), 0)$ и $(0, \dot{c}(t))$. Конечно, в этом легко убедиться и непосредственно:

$$T\varphi_{t-t_0}(\dot{c}(t_0), 0) = (\dot{c}(t), 0),$$

$$T\varphi_{t-t_0}(0, \dot{c}(t_0)) = ((t-t_0)\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = T\varphi_t(0, \dot{c}(0)) - t_0 T\varphi_t(\dot{c}(0), 0).$$

Теперь ясно также, что интересующие нас $\dot{Y}$ образуют ортогональное дополнение к V_t^2 и в смысле римановой метрики на TM , индуцированной разложением $TM = T_h TM \oplus T_v TM$:

$$\langle Z, Z' \rangle = \langle Z_h, Z'_h \rangle + \langle Z_v, Z'_v \rangle \quad (Z, Z' \in T_X TM, X \in TM).$$

Кроме того, они лежат в $T_{\dot{c}(t)} T_1 M$ ($T_1 M$ — пространство единичных касательных векторов, см. (42)). Действительно, вектор $(0, \dot{c}(t)) \in V_t^2$ ортогонален $T_{c(t)} T_1 M$ (см. описание последнего пространства в (42)).

Пусть W^2 — иммерсированное подмногообразие в TM , получающееся при иммерсии

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \{\text{ось } x_1 = 0\} \rightarrow TM, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 \dot{c}(x_2)$$

(это действительно иммерсия: соответствующие «частные производные» суть

$(0, \dot{c})$ и $(x_1 \dot{c}, 0)$). Ясно, что $b\dot{c}$ ($a + bt$) ($a, b = \text{const}$; $b \neq 0$)*) суть траектории геодезического потока, лежащие на W^2 и заполняющие его. (Соответствующие геодезические суть $c(a + bt)$.) Тогда $V_t^2 = T_{\dot{c}(t)} W^2$, и написанные выше решения уравнения Якоби (или уравнений в вариациях) можно получить дифференцированием $c(a + bt)$ (соответственно $b\dot{c}(a + bt)$) по a, b при $a=0, b=1$. Ясно, что эти решения не несут никакой геометрической информации о геодезических, близких к c .

(42) Совокупность единичных касательных векторов (т. е. векторов единичной длины) образует в TM подмногообразие T_1M коразмерности 1. Будучи снабжено проекцией $\tau|_{T_1M}: T_1M \rightarrow M$, оно является расслоением над M со стандартным слоем сферы. Его называют по-разному: единичным касательным расслоением (или пространством), расслоением (пространством) единичных сфер, а также пространством линейных элементов (хотя последний термин может иметь и другой смысл). Если $X \in T_1M$, то

$$T_X T_1M = \{Z \in T_X TM; \langle X, Z_v \rangle = 0\}.$$

Очевидно, $|\Phi_t X_0| = \text{const}$, так что T_1M является инвариантным многообразием геодезического потока. Двойственная риманова метрика в T^*M позволяет говорить о T_1^*M ; это тоже инвариантное многообразие (для гамильтоновой системы ζ_{H^*} в T^*M). Часто каждый из четырех объектов

$$\{\Phi_t\}, \quad \{\Phi_t|T_1M\}, \quad \{g_*\Phi_t g_*^{-1}\}, \quad \{g_*\Phi_t g_*^{-1}|T_1^*M\}$$

называют геодезическим потоком (однако геодезической пульверизацией — только первый из них или соответствующее векторное поле S на TM), так что надо быть внимательным к контексту. Клингенберг, как видно из его последнего замечания, намерен по большей части рассматривать именно $\{\Phi_t|T_1M\}$ и $\{g_*\Phi_t g_*^{-1}|T_1^*M\}$, причем стандартное отображение позволяет не особенно педантично различать их. Так, построение локального сечения (см. далее в основном тексте) описывается для $\{\Phi_t|T_1M\}$.

(43) Вообще, если $\Sigma \subset T_1M$ — гиперповерхность, трансверсальная геодезическому потоку (т. е. $S(X) \notin T_X \Sigma$ при $X \in \Sigma$), то ограничение формы α на Σ определяет на Σ симплектическую структуру. Надо доказать невырожденность $\alpha|_{\Sigma}$, т. е. что если $X \in \Sigma, Y \in T_X \Sigma$ и $Y \neq 0$, то $\alpha(Y, T_X \Sigma) \neq 0$. Из (43), (3.1.3) и определения S видно, что

$$T_X T_1M = \{Y \in T_X TM; \alpha(Y, S(X)) = 0\}.$$

$T_X \Sigma$ можно задать как ядро некоторого линейного функционала на $T_X T_1M$ или как пересечение с $T_X T_1M$ ядра некоторого линейного функционала l на $T_X TM$, линейно независимого с тем функционалом, ядром которого является $T_X T_1M$, т. е. с функционалом $\alpha(\cdot, S(X))$. Ввиду невырожденности α , l можно задать в виде $\alpha(\cdot, A)$, причем A и $S(X)$ линейно независимы. Наконец, $S(X) \notin T_X \Sigma$ означает, что $\alpha(S(X), A) \neq 0$ (кстати, последнее условие включает в себя и независимость $S(X)$ и A). Если бы теперь было $\alpha(Y, T_X \Sigma) = 0$, то функционал $\alpha(\cdot, Y)$ был бы линейной комбинацией задающих $T_X \Sigma$ функционалов $\alpha(\cdot, S(X))$ и $\alpha(\cdot, A)$, а тогда и $Y = \lambda S(X) + \mu A$, причем $\mu \neq 0$, ибо $S(X) \notin T_X \Sigma$. Но тогда $\alpha(Y, S(X)) = \mu \alpha(A, S(X)) \neq 0$.

*) Здесь через $\dot{c}(a + bt)$ обозначено $\frac{d}{dt} c(\tau) \Big|_{\tau=a+bt}$, а не $\frac{d}{dt} c(a + bt)$, так что $\frac{d}{dt} c(a + bt) = b\dot{c}(a + bt)$.

(44) Буквально это надо было бы понимать в том смысле, что α переопределяется: через $\alpha(X, Y)$ теперь обозначается то, что раньше записывалось бы как $\alpha(X, \bar{Y})$. Однако из дальнейшего видно, что это не так: по большей части α сохраняет свое прежнее значение; просто часто используется косозермитова форма $(X, Y) \mapsto \alpha(X, \bar{Y})$, для которой никакого специального обозначения не вводится. В то же время под «ортогональностью» далее (например, в формулировке 3.2.1) понимается ортогональность относительно этой косозермитовой формы; то же относится к термину «ортогональное дополнение».

По существу же, стоит заметить, что в комплексной области переход от α к этой косозермитовой форме и далее к эрмитовой форме $\frac{1}{i}\alpha(X, \bar{Y})$ позволяет рассматривать вещественные α -кососимметрические, соответственно симплектические, преобразования как эрмитово-кососимметрические (а после умножения или деления этих преобразований на i — как эрмитово-симметрические), соответственно унитарные преобразования, что более привычно. Надо только помнить, что указанная эрмитова форма не является положительно определенной.

В связи с этим надо иметь в виду двусмысленность термина «дополнения»: наряду с «ортогональными дополнениями» существуют еще «дополнения» в более привычном смысле — подпространство F называется дополнительным к E , или дополнением (для, к) E , если $E + F = V$ и $E \cap F = \{0\}$. Когда под ортогональностью понимают ортогональность относительно положительно определенной эрмитовой формы, то ортогональное дополнение является дополнением и во втором смысле (причем это именно такое дополнение, которое ортогонально E), но в нашем случае это не всегда так. Однако если ограничение используемой эрмитовой формы на E невырожденно (в основном тексте такие E называются далее невырожденными), то ортогональное дополнение F к E является дополнением и во втором смысле тоже. При этом F — тоже невырожденное.

(45) При данном ρ может быть несколько подпространств $V_{od, \rho}$ или $V_{ev, \rho}$; тогда они и даже их сумма определены неоднозначно. Но число таких подпространств размерности $j+1$ при любом j определено однозначно — в терминах жордановой нормальной формы матрицы P оно равно числу жордановых клеток порядка $j+1$ с ρ на главной диагонали. Число тех из них, для которых $\alpha((P\rho - 1)^h X, (P\rho - 1)^{j-h} \bar{X})$ ($j = 2h - 1$, соответственно $2h$) при надлежащей нормировке равно $+1$, соответственно $+i$, тоже определено однозначно. Это видно из следующего описания этого числа r_{j+1} . Рассмотрим на $V_{j+1}(\rho)$ билинейную форму

$$\psi_{j+1}(X, Y) := \alpha((P\rho - 1)^h X, (P\rho - 1)^{j-h} \bar{Y}).$$

Тогда $\psi_{j+1}(Y, X) = (-1)^{j+1} \overline{\psi_{j+1}(X, Y)}$, а $(P\rho - 1)V_{j+2}(\rho) + V_j(\rho)$ (т. е. та часть $V_{j+1}(\rho)$, которая порождена пересечениями $V_{j+1}(\rho)$ с имеющимися в $V(\rho)$ циклическими подпространствами размерности $\neq j+1$) совпадает с ядром ψ_{j+1} .

При приведении ψ_{j+1} (соответственно $\frac{1}{i}\psi_{j+1}$) к сумме квадратов модулей координат число положительных квадратов равно r_{j+1} . (Заметим еще без доказательства, что именно эти числа r_{j+1} надо добавить к известным инвариантам жордановой нормальной формы, чтобы получить для P полную систему инвариантов относительно действительных симплектических преобразований.)

(46) Более геометрически смысл 3.2.9 состоит в следующем. Поскольку $E \cdot \bar{\chi}_z = E$, то, взяв $z = e^{2\pi i/m}$, получаем, что форма $D^2E(c^m)$ инвариантна относительно унитарного действия группы $Z_m = \{z^k\}$ на комплексифицирован-

*1) Но не всегда: см., например, следующий абзац основного текста.

ном $T_{c^m} \Lambda$, описанного в замечании к 3.2.8. Значит,

$${}^t(\tilde{T}_{\chi c}(c^m))^{\circ} A_c \cdot \tilde{T}_{\chi c}(c^m) = A_c,$$

а ввиду унитарности $\tilde{T}_{\chi c}(c^m)$ это означает, что A_c коммутирует с $\tilde{T}_{\chi c}(c^m)$. Следовательно, A_c оставляет инвариантными ортогональные друг другу собственные подпространства $\text{im } i_l$, а поэтому $D^2 E(c^m)$ разлагается в прямую сумму своих ограничений на эти подпространства. Ограничение же на $\text{im } i_k$, точнее $D^2 E(c^m) \circ (i_k \times i_k)$, совпадает с $m^2 D^2 E_{\rho k}(c)$, ибо

$$\begin{aligned} \langle \nabla i_k \zeta_k, \nabla i_k \bar{\zeta}'_k \rangle_0 &= \int_0^1 \langle m(\nabla \zeta_k)(mt), m(\nabla \bar{\zeta}'_k)(mt) \rangle dt = \\ &= m^2 \int_0^1 \langle (\nabla \zeta_k)(mt), (\nabla \bar{\zeta}'_k)(mt) \rangle dt = m \int_0^m \langle \nabla \zeta_k(t), \nabla \bar{\zeta}'_k(t) \rangle dt = \\ &= m^2 \langle \nabla \zeta_k, \nabla \bar{\zeta}'_k \rangle_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\sigma^m}(i_k \zeta_k)(t) &= R(i_k \zeta_k(t), \dot{c}^m(t), \dot{c}^m(t)) = \\ &= R(\zeta_k(mt), \dot{m}c(mt), \dot{m}c(mt)) = m^2 \tilde{K}_c(\zeta_k)(mt), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^2 E(c^m)(i_k \zeta_k, i_k \bar{\zeta}'_k) &= m^2 \langle \nabla \zeta_k, \nabla \bar{\zeta}'_k \rangle_0 - \\ &- m^2 \int_0^1 \langle \tilde{K}_c(\zeta_k)(mt), \bar{\zeta}'_k(mt) \rangle dt = m^2 D^2 E_{\rho k}(c). \end{aligned}$$

(47) Заметим, что V_{in}^p определено однозначно, независимо от случайностей нашего построения (от выбора векторов при доказательстве 3.2.4). Действительно, легко видеть, что

$$(a) \quad V_{in}^p = V_s \oplus \sum_{|\rho|=1} \oplus \sum_{l \geq 1} (P\bar{\rho} - 1)^l V_{2l}(\rho)$$

($V_l(\rho)$ — те же, что в доказательстве 3.2.1). Напротив, V_{in}^{2q} , вообще говоря, зависит от случайностей построения. Однако пространство $E^{2n-p} := V_{in}^p \oplus V_{in}^{2q}$ определено однозначно, ибо оно совпадает с

$$(b) \quad V_s \oplus \sum_{|\rho|=1} \oplus \sum_{l \geq 0} (P\bar{\rho} - 1)^l V_{2l+1}(\rho).$$

Обозначим, далее, естественную проекцию

$$E^{2n-p} \rightarrow F^{2q} := E^{2n-p}/V_{in}^p$$

через π , и пусть $F^q := \pi(V_n^p \cap E^{2n-p})$: это максимальное изотропное подпространство в F^{2q} (кососимметрическая 2-форма в F^{2q} естественным образом получается из α). Тогда $V_e^n = \pi^{-1}F^q$, так что V_e^n тоже определено однозначно. Наконец, Q_ρ в 3.2.11 и 3.2.12 строится согласно 3.2.7 с $V^{2n}(0)$ вместо V^{2q} и V_e^n вместо V^q . Тем самым оказывается, что все вспомогательные объекты, фигурирующие в следующей далее теореме о ρ -индексе (3.2.12), не зависят от случайностей построения.

Можно было бы с самого начала определить подпространство E^{2n-p} как (б) и доказать, что его ортогональное дополнение дается правой частью (а), которую тогда можно принять за определение V^n . При этом полезно сперва доказать, что ортогональное дополнение к $(P\bar{\rho} - 1)^l V_l(\rho)$ в $V(\rho)$ равно $(P\bar{\rho} - 1)^{j-l} V(\rho) + V_i(\rho)$.

Заметим еще, что у эрмитовой формы Q_ρ на V_ρ^n ядро $Q_\rho = V_\rho^n \cap (P\bar{\rho} - 1)^{-1} \cdot V_\rho^n \supset V_{l'n}^p \cap (P\bar{\rho} - 1)^{-1} V_{l'n}^p = V_{l'n}^p$ (используем, что $PV_{l'n}^p = V_{l'n}^p$). Поэтому Q_ρ можно рассматривать как эрмитову форму на V_{un}^q или на не зависящих от случайностей построения пространствах F^q или $V_\rho^q(0) \cap E^{2n-p}$.

(48) а) Допустим, что $\rho_- E \neq \rho_- T_c^- \Lambda$, и докажем, что тогда существует такое $\xi \in \rho_- T_c \Lambda$, для которого

$$D^2 E_\rho(c)(\xi_\rho W, \xi) = 0 \quad \text{и} \quad D^2 E_\rho(c)(\xi, \xi) < 0.$$

$H := \rho_- T_c^- \Lambda \oplus \rho_+ \xi_\rho W$ — конечномерное пространство. Рассуждая так же, как в конце доказательства 2.4.7, убеждаемся, что в H можно ввести такое положительно определенное эрмитово скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, с помощью которого $Q := D^2 E_\rho(c)|_H$ представляется в виде

$$Q(\xi, \bar{\eta}) = -\langle \rho_- \xi, \rho_- \eta \rangle + \langle \rho_+ \xi, \rho_+ \eta \rangle.$$

Теперь в $\xi_\rho W \subset H$ однозначно выделяются такие подпространства E и F , что $\xi_\rho W = E \oplus F$, $\langle E, F \rangle = 0$, $Q(E, F) = 0$, $Q|_E \leq 0$ и $Q|_F > 0$. Если $\xi \in E$, $\eta \in F$, то

$$\langle \xi, \eta \rangle = \langle \rho_- \xi, \rho_- \eta \rangle + \langle \rho_+ \xi, \rho_+ \eta \rangle = 0$$

и

$$Q(\xi, \bar{\eta}) = -\langle \rho_- \xi, \rho_- \eta \rangle + \langle \rho_+ \xi, \rho_+ \eta \rangle = 0,$$

поэтому $\langle \rho_- E, \rho_- F \rangle = 0$ и $\langle \rho_+ E, \rho_+ F \rangle = 0$. Пусть X — ортогональное дополнение (в смысле $\langle \cdot, \cdot \rangle$) к $\rho_- E$ в $\rho_- T_c^- \Lambda$, а $Y = \rho_+ F$; тогда $F \subset X \oplus Y$. Найдем такой ненулевой элемент $\xi \in X \oplus Y$, что $Q(F, \xi) = 0$; из $\xi \in X \oplus Y$ следует, что $Q(E, \xi) = 0$. Поскольку $\ker(\rho_+|_F) = 0$ (это доказывается аналогично тому что $\ker(\rho_-|_E) = 0$), то $F \subset X \oplus Y$ имеет вид

$$\{Ay + y; y \in Y, A \in L(Y; X)\}.$$

При этом из $Q|_F > 0$ следует, что $\langle y, y \rangle - \langle Ay, Ay \rangle > 0$ при всех $y \in Y$, $y \neq 0$, т. е. норма (относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$) $\|A\| < 1$.

Ищем ξ в виде $u + v$, $u \in X$, $v \in Y$. При всех y должно быть

$$0 = Q(Ay + y, u + v) = -\langle Ay, u \rangle + \langle y, v \rangle = \langle y, v - A^*u \rangle$$

(звездочка обозначает сопряженный оператор по отношению к скалярному произведению $\langle \cdot, \cdot \rangle$), откуда $v = A^*u$. Итак, $\xi = u + A^*u$, где можно взять любой ненулевой элемент $u \in X$. Тогда $Q(\xi_\rho W, \xi) = Q(E \oplus F, \xi) = 0$, а

$$Q(\xi, \bar{\xi}) = -\langle u, u \rangle + \langle A^*u, A^*u \rangle < 0$$

(ведь $\|A^*\| = \|A\| < 1$).

б) Теперь докажем, что если $\rho_- E \neq \rho_- T_c^- \Lambda$, то существует дифференцируемое $\xi \in \rho_- T_c \Lambda$, для которого $D^2 E_\rho(c)(\xi_\rho W, \xi) = 0$ и $D^2 E_\rho(c)(\xi, \xi) < 0$. Ввиду а) для этого достаточно доказать, что в

$$L := \{\xi; \xi \in \rho_- T_c \Lambda, D^2 E_\rho(c)(\xi_\rho W, \xi) = 0\}$$

всюду плотны дифференцируемые ξ . Но условие $D^2 E_\rho(c)(\xi_\rho W, \xi) = 0$ эквивалентно тому, что если $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r$ — все те $t \in [0, \omega)$, для которых $W(t) \neq 0$, то

$$(*) \quad \langle K \circ W(t_i), \bar{\xi}(t_i/\omega) \rangle = 0 \quad \text{при} \quad i = 0, \dots, r$$

(K , как и в замечании к 3.2.10, — отображение связности). Иными словами,

это условие эквивалентно тому, что значения ξ в точках t_i/ω должны удовлетворять некоторым соотношениям. Ясно, что дифференцируемые ξ всюду плотны в L .

в) Докажем, наконец, что если $\rho E \neq \rho T_c^- \Lambda$, то существует такое ξ , для которого $\langle \dot{c}(t), \bar{\xi}(t) \rangle = 0$ при всех t и которое обладает свойствами, указанными в б). В общем случае ξ из б) представляется в виде $\xi(t) = a(t) \dot{c}(t) + \eta(t)$, где $\langle c(t), \bar{\eta}(t) \rangle = 0$ при всех t ; при этом $\bar{\eta}(1) = \eta(0)$ и

$$\eta(t) = \xi(t) - \frac{1}{\omega^2} \langle \xi(t), \dot{c}(t) \rangle,$$

так что из дифференцируемости ξ следует дифференцируемость η . Поскольку $\tilde{K}_c(\dot{c}) = 0$ (R кососимметрично по первым двум аргументам) и $\nabla c = 0$, то для любого $\xi \in \rho T_c \Lambda$

$$D^2 E_\rho(c)(a\dot{c}, \bar{\xi}) = \int \langle \dot{a}\dot{c}, \nabla \bar{\xi} \rangle dt.$$

Если $\langle \dot{c}(t), \bar{\eta}(t) \rangle = 0$ при всех t , то, дифференцируя, получим $\langle \dot{c}(t), \nabla \bar{\eta}(t) \rangle = 0$, так что, взяв в предыдущей формуле $\xi = \eta$, найдем, что $D^2 E_\rho(c)(a\dot{c}, \eta) = 0$. Взяв же $\eta = a\dot{c}$, получим

$$D^2 E_\rho(c)(a\dot{c}, \bar{a}\dot{c}) = \omega^2 \int |\dot{a}|^2 dt \geq 0.$$

Значит, если для $\xi = a\dot{c} + \eta$ выполняются условия

$$D^2 E_\rho(c)(\zeta_\rho W, \bar{\xi}) = 0, \quad D^2 E_\rho(c)(\xi, \bar{\xi}) < 0,$$

то они выполняются и для η . Мы видим, что η обладает всеми свойствами, требуемыми в б) от ξ , и сверх того $\langle \dot{c}(t), \bar{\eta}(t) \rangle = 0$ при всех t .

г) Забегая вперед (см. (50)), заметим, что мы можем дополнительно потребовать еще, чтобы $(\xi(0), \nabla \bar{\xi}(0)) \in V_{in}^p$. Действительно, условия (*) при $t=0$ и $\langle \dot{c}(0), \bar{\xi}(0) \rangle = 0$ из в) гарантируют, что $\xi(0) \in T\tau$. V_{in}^p , а добавляя при данном $\xi(0)$ к нашим условиям еще какие-то ограничения на $\nabla \bar{\xi}(0)$ (лишь бы они были совместными), мы выделяем среди дифференцируемых $\xi \in L$ в данном $\xi(0)$ и $\langle \dot{c}, \bar{\xi} \rangle \equiv 0$ некоторое плотное подмножество.

(49) а) Покажем, что ξ , удовлетворяющее всем перечисленным выше условиям, представляется в виде

$$\xi(t) = \sum \omega^j(t) Y_j(\omega t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

с дифференцируемыми ω^j . В рассмотрении нуждаются лишь значения t , близкие к тем значениям t_0/ω , для которых $W(t_0) \neq \{0\}$.

Действительно, при остальных t векторы $Y_j(\omega t)$ образуют базис в пространстве $V^n(t)$ (используем обозначения из замечания к 3.2.10). Поэтому при этих t имеет место разложение $\xi(t) = \sum \omega^j(t) Y_j(t)$ с однозначно определенными и дифференцируемыми $\omega^j(t)$. Значит, если мы докажем, что в некоторой окрестности Δ точки t_0 для которой $W(t_0) \neq \{0\}$, имеет место разложение $\xi(t) = \sum \hat{\omega}^j(t) Y_j(t)$ с какими-то дифференцируемыми $\hat{\omega}^j$, то $\hat{\omega}^j(t)$ при $t \in \Delta - \{t_0\}$ должны совпадать с предыдущими $\omega^j(t)$, а потому эти последние можно определить при $t = t_0$ как $\hat{\omega}^j(t_0)$, и тогда они будут определены и дифференцируемы при всех t .

Пусть сперва $0 \leq t_j < 1$; воспользуемся теми же обозначениями, что и в 3.2.10. Дополнительно потребуем, чтобы было

$$\langle \nabla Y_i(t_0), \nabla Y_j(t_0) \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, l_0)$$

(это легко обеспечить, применив обычный процесс ортонормирования к $\{\nabla Y_i(t_0), i \leq i_0\}$: если новые $\nabla Y_i(t_0)$ выражаются как некоторые линейные комбинации старых, то в качестве новых $\tilde{Y}_i(t_0) = (0, \nabla Y_i(t_0))$ берем такие же линейные комбинации старых $\tilde{Y}_i(t_0)$ и

$$\langle Y_i(t_0), Y_j(t_0) \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = i_0 + 1, \dots, n).$$

Итак, $\nabla Y_1(t_0), \dots, \nabla Y_{i_0}(t_0), Y_{i_0+1}(t_0), \dots, Y_n(t_0)$ — ортонормированный базис в $V^n(t_0)$.

Положим

$$Z_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-t_0} Y_i(t), & t \neq t_0, \\ \nabla Y_i(t), & t = t_0 \end{cases}$$

($i = 1, \dots, i_0$). Тогда $Z_1(t), \dots, Z_{i_0}(t), Y_{i_0+1}(t), \dots, Y_n(t)$ — дифференцируемый базис в $V^n(t)$ при t , достаточно близких к t_0 (скажем, в некотором интервале Δ). При $t = t_0$ он ортонормирован. Если теперь $\xi(t)$ дифференцируема, то в разложении

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{i_0} u^i(t) Z_i(t) + \sum_{j=i_0+1}^n w^j(t) Y_j(t)$$

коэффициенты u^i, w^j суть дифференцируемые функции t (при $t \in \Delta$), причем при $t = t_0$

$$u^i(t_0) = \langle \xi(t_0), Z_i(t_0) \rangle = 0.$$

Следовательно, функции $w^j(t) := \frac{1}{t-t_0} u^j(t)$ — тоже дифференцируемые. А ведь

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^n w^j(t) Y_j(t) \quad \text{при } t \in \Delta.$$

Мы доказали, что при некотором специальном (зависящем от t_0) выборе инвариантных полей $\tilde{Y}_j = (Y_j, \nabla Y_j)$, образующих базис в $T\Phi_t V_e^n$, в некоторой окрестности $\Delta \ni t_0$ имеет место представление $\xi(t) = \sum w^j(t) Y_j(t)$ с дифференцируемыми w^j . Но тогда аналогичное представление имеет место при любом выборе такого рода полей. Действительно, если $\tilde{Y}'_j = (Y'_j, \nabla Y'_j)$ — другая система инвариантных полей, образующих базис в $T\Phi_t V_e^n$, то $\tilde{Y}'_j(t) = \sum a_{jk} \tilde{Y}_k(t)$ с некоторыми постоянными коэффициентами a_{jk} . Значит, $Y_j(t) = \sum a_{jk} Y'_k(t)$ и $\xi(t) = \sum w'^k(t) Y'_k(t)$ с $w'^k(t) = \sum a_{jk} w^j(t)$.

Предыдущие рассуждения охватывали бы и случай $t_0 = 1$, если бы мы знали, что $\langle \nabla Y(\omega), \bar{\xi}(1) \rangle = 0$ для всех инвариантных полей $\tilde{Y}$ с $\tilde{Y}(1) \in \mathcal{W}(\omega)$, т. е. что $\langle K \cdot \mathcal{W}(\omega), \bar{\xi}(1) \rangle = 0$ (обозначения те же, что в замечании к 3.2.10). Среди условий, которым удовлетворяет ξ , непосредственно такого свойства нет, однако оно легко выводится из того, что $\bar{\xi}(1) = \rho \bar{\xi}(0)$ и $\langle K \cdot \mathcal{W}(0), \bar{\xi}(0) \rangle = 0$. Дело в том, что $K \cdot \mathcal{W}(\omega) \subset K \cdot \mathcal{W}(0)$. Действительно, для $V^n(0) = V^n(\omega)$ имеются два представления в виде ортогональных прямых сумм

$$T\tau \cdot V_e^n \oplus K \cdot \mathcal{W}(0), \quad T\tau \cdot T\Phi_\omega \cdot V_e^n \oplus K \cdot \mathcal{W}(\omega).$$

$$\text{Но } T\Phi_\omega = P, \quad V_{in}^P = PV_{in}^P.$$

$$T\tau \cdot V_e^n = T\tau \cdot V_{in}^P = T\tau \cdot T\Phi_\omega \cdot V_{in}^P \subset T\tau \cdot T\Phi_\omega (V_{in}^P \oplus V_v^q) = T\tau \cdot T\Phi_\omega \cdot V_e^n.$$

Отсюда и следует, что $K \cdot W(\omega) \subset K \cdot W(0)$. (Между прочим, поскольку $K \mid V_0^n(0)$ — изоморфизм, то имеем даже $W(\omega) \subset W(0)$.)

б) Из рассуждений в а) легко вытекает следующий факт, который нам понадобится в ⁽⁵⁰⁾:

Пусть на некотором интервале $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ задано $\eta(t) \in V^n(t)$, причем η дифференцируемо и $\eta(t_0) = \nabla \eta(t_0) = 0$. Пусть по-прежнему $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n$ — инвариантные векторные поля, образующие базис в $T\Phi_1 V_\varepsilon^n$. Тогда в разложении $\eta(t) = \sum_{i=1}^n \omega^i(t) Y_i(t)$ с дифференцируемыми ω^i (которое априори а) существует и единственно в некоторой окрестности t_0) все $\omega^i(t_0) = 0$.

В рассмотрении нуждается только тот случай, когда $W(t_0) \neq 0$, причем достаточно доказать наше утверждение только при каком-нибудь одном выборе полей $\tilde{Y}_i$. Рассмотрим такую же специальную систему этих полей, что и в а). Тогда в использованных там обозначениях $\omega^i(t)$ ($i \leq i_0$) и $\omega^i(t)$ ($i > i_0$) будут $o(|t - t_0|)$, а значит, все $\omega^i(t_0) = 0$.

⁽⁵⁰⁾ Соотношения

$$(*) \quad \omega^k(0) = \omega^k(1) = 0, \quad \omega^j(0) = \sum_l \bar{\rho} a_l^j \omega^l(1) \quad (k > p; j, l \leq p)$$

не следуют непосредственно из того, что $\xi(t) = \sum_j \omega^j(t) Y_j(\omega t)$, $\xi(1) = \rho \xi(0)$,

$\tilde{Y}_j(0) \in V_{in}^p$ при $j \leq p$ и $\tilde{Y}_k(0) \in V_0^q$ при $k > p$. Из них следует только, что $\xi(0)$ и $\xi(1)$ можно записать в виде $\sum \xi^j Y_j(0)$ и $\sum \xi'^j Y_j(1)$ с

$$\xi^k = \xi'^k = 0, \quad \xi^j = \sum_l \bar{\rho} a_l^j \xi'^l \quad (k > p; j, l \leq p).$$

Но поскольку $Y_j(0)$, вообще говоря, линейно зависимы, равно как и $Y_j(1)$, то в общем случае нельзя утверждать, что

$$\omega^i(0) = \xi^i, \quad \omega^i(1) = \xi'^i \quad (i = 1, \dots, n).$$

(Например, можно взять $\xi(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \rho^h \Phi_h(t-h) Y_n((t-h)\omega)$, где носитель $\text{supp } \Phi_h$ сосредоточен возле $t=0$.) Фактически соотношения (*) являются некоторыми дополнительными условиями на ξ , и надо доказать, что им можно удовлетворить (не теряя прочих нужных свойств ξ). Мы докажем, что если взять ξ таким, как в ⁽⁴⁸⁾, г), то соотношения (*) будут выполняться.

Дополним базис $\tilde{Y}_1(0), \dots, \tilde{Y}_n(0)$ пространства V_0^n до базиса $\tilde{Y}_1(0), \dots, \tilde{Y}_{2n}(0)$ всего $V^{2n}(0)$ и разложим $\tilde{\xi}(t) := (\xi(t), \nabla \xi(t)) \in V^{2n}(\omega t)$ по базису $\tilde{Y}_1(\omega t), \dots, \tilde{Y}_{2n}(\omega t)$:

$$\tilde{\xi}(t) = \sum_{i=1}^{2n} v^i(t) \tilde{Y}_i(\omega t).$$

Коэффициенты v^i определяются однозначно и являются дифференцируемыми функциями от t . Поскольку $\tilde{\xi}(0) \in V_{in}^p$, то $v^i(0) = 0$ при $i > p$. Рассмотрим

$$\eta(t) := \xi(t) - \sum_{i=1}^p v^i(0) Y_i(\omega t)$$

возле точки $t=0$. Ясно, что $\eta(0)=0$ и $\nabla\eta(0)=\nabla\xi(0)-\sum_{i=1}^p v^i(0)\nabla Y_i(0)=0$

(ибо $\nabla\xi(t)=\sum_{i=1}^{2n} v^i(t)\nabla Y_i(\omega t)$ и $v^i(0)=0$ при $i > p$). Следовательно, согласно

(49), б), $\eta(t)=\sum_{i=0}^n u^i(t)Y_i(\omega t)$ с дифференцируемыми u^i , причем $u^i(0)=0$. Но тог-

да в представлении $\xi(t)=\sum_{i=1}^n w^i(t)Y_i(\omega t)$ с дифференцируемыми w^i (которые, как мы видели в (49), а), на любом отрезке времени определены однозначно, коль скоро требуется их дифференцируемость (и даже одна только непрерывность)) при малых t должно быть

$$w^i(t)=\begin{cases} v^i(0)+u^i(t) & \text{при } i \leq p, \\ u^i(t) & \text{при } i > p. \end{cases}$$

Следовательно,

$$w^i(0)=v^i(0) \quad \text{при } i \leq p \quad \text{и} \quad w^i(0)=0 \quad \text{при } i > p.$$

Далее, $\tilde{\xi}(1)=\rho\tilde{\xi}(0) \in V_{in}^p$, а поскольку $\tilde{Y}_1(\omega), \dots, \tilde{Y}_p(\omega)$ — тоже базис V_{in}^p , то, повторяя для t , близких к 1, те же рассуждения, что и для t , близких к 0, приходим к выводу, что

$$w^i(1)=v^i(1) \quad \text{при } i \leq p \quad \text{и} \quad w^i(1)=0 \quad \text{при } i > p.$$

Наконец, разложим $\tilde{Y}_i(\omega)$ по базису $\tilde{Y}_j(0)$ пространства $V^{2n}(0)$:

$$\tilde{Y}_i(\omega)=\sum_{j=1}^{2n} a_i^j \tilde{Y}_j(0) \quad (i=1, \dots, 2n).$$

Отметим, что при $i \leq p$ коэффициенты a_i^j с $j \leq p$ те же, что и в основном тексте (а если $j > p$, то $a_i^j=0$). Тогда

$$\begin{aligned} \rho \sum_{j=1}^{2n} v^j(t) \tilde{Y}_j(\omega t) &= \rho \tilde{\xi}(1) = \tilde{\xi}(t+1) = \\ &= \sum_{i=1}^{2n} v^i(1+t) \tilde{Y}_i(\omega + \omega t) = \sum_{i,j=1}^{2n} v^i(1+t) a_i^j \tilde{Y}_j(\omega t), \end{aligned}$$

откуда $\rho v^j(t) = \sum_{i=1}^{2n} a_i^j v^i(1+t)$. Значит, при $j \leq p$

$$\rho \omega^j(0) = \sum_{i=1}^p a_i^j \omega^i(1)$$

(прочие слагаемые = 0).

(51) Докажем следующее утверждение, которое нам понадобится в доказательстве 3.3.9: из Nm -элементарности P следует N -элементарность P^m .

Предварительно перефразируем определение N -элементарности преобразования P следующим образом. Совокупность собственных значений преобразования P (с учетом кратности) разобьем на пары взаимно обратных элементов $(\rho_1, \rho_1^{-1}), \dots, (\rho_m, \rho_m^{-1})$. (Это можно сделать, ибо если ρ — собственное значение, то и ρ^{-1} — тоже, а 1 и -1 имеют четные кратности. Очевидно, главные

собственные значения — это просто представители этих пар, выбранные по определенному рецепту.) Пусть $k_i \geq 0$ целые и $1 \leq \sum k_i \leq N$, а $\lambda_i \in (\rho_i, \rho_i^{-1})$; тогда $\prod \lambda_i^{k_i} \neq 1$.

Пусть теперь P является Nm -элементарным. Если $\rho_1, \dots, \rho_n$ — главные собственные значения P , то, вообще говоря, нельзя утверждать, что $\rho_1^m, \dots, \rho_n^m$ являются главными собственными значениями P^m , но ясно, что $(\rho_1^m, \rho_1^{-m}), \dots, (\rho_n^m, \rho_n^{-m})$ есть разбиение совокупности собственных значений P^m (с учетом кратности) на пары взаимно обратных чисел. Пусть $k_i \geq 0$ целые и $1 \leq \sum k_i \leq N$, а $\lambda_i \in (\rho_i^m, \rho_i^{-m})$; утверждается, что $\prod \lambda_i^{k_i} \neq 1$. Действительно, $\lambda_i = \mu_i^m$, где $\mu_i \in (\rho_i, \rho_i^{-1})$; очевидно, Nm -элементарность P гарантирует, что интересующее нас произведение $\neq 1$.

(52) Следует пояснить, как понимать использование комплексных переменных, если рассматриваемые функции не являются аналитическими. В нашем случае годится любой из следующих трех способов.

а) Неаналитическими у нас могут быть лишь остаточные члены, тогда как вычисления будут производиться только с членами первых трех порядков, причем полученный результат — нормальную форму — можно переписать в вещественном виде (см. добавление к § 3.3, (1)). Поэтому можно, записав $\mathcal{F}$ в виде $\mathcal{F}_3 + \mathcal{R}_3$, где $\mathcal{F}_3$ — члены первых трех порядков, а $\mathcal{R}_3$ — остаточные члены, рассмотреть сперва одно $\mathcal{F}_3$, провести для него все рассуждения с временным выходом в комплексную область и окончательно получить, что $\mathcal{F}_3$ в некоторых новых вещественных координатах $(x', y') = f(x, y)$ представляется в виде определенного выражения плюс остаточные члены, которые имеют определенный порядок малости и производные которых тоже имеют определенный порядок. Правда, $\mathcal{F}_3$ не обязано быть симплектическим, так что на самом деле надо подобрать такой аналитический добавок $\mathcal{A}$ более высокого порядка, чтобы $\mathcal{F}_3 + \mathcal{A}$ было симплектическим преобразованием^{*)}, провести все рассуждения для $\mathcal{F}_3 + \mathcal{A}$ и заметить, что коэффициенты a^k и b_1^k нормальной формы на самом деле выражаются через коэффициенты $\mathcal{F}_3$. Очевидно, $\mathcal{F}$ в новых координатах представляется как

$$(x', y') \mapsto f \cdot ((\mathcal{F}_3 + \mathcal{A}) + (\mathcal{R}_3 - \mathcal{A})) \circ f^{-1}(x', y').$$

Это отличается от $f \cdot (\mathcal{F}_3 + \mathcal{A}) \circ f^{-1}(x', y')$ только на члены, которые сами имеют тот же порядок, что и $\mathcal{R}_3 - \mathcal{A}$, а их производные имеют тот же порядок, что и $D(\mathcal{R}_3 - \mathcal{A})$.

б) Когда мы вводим комплексные координаты, можно считать, что у нас они принимают значения не во всей окрестности нуля в $\mathbb{C}^{2n}$, а только в некотором подмножестве — образе в рассматриваемых координатах окрестности нуля в $\mathbb{R}^{2n}$. Так, мы начинаем с того, что, полагая $z^k = x^k + iy^k$, $z_1^k = x^k - iy^k$, переписываем преобразование

$$\begin{aligned} x'^k &= x^k \cos 2\pi a_k - y^k \sin 2\pi a_k + \dots, \\ y'^k &= x^k \sin 2\pi a_k + y^k \cos 2\pi a_k + \dots \end{aligned}$$

в виде

$$z'^k = e^{2\pi i a_k} z^k + \dots, \quad z_1'^k = e^{-2\pi i a_k} z_1^k + \dots$$

^{*)} Чтобы убедиться в существовании $\mathcal{A}$, возьмем производящую функцию $H(x, y)$ преобразования $P^{-1}\mathcal{F}$, возьмем сумму ее однородных частей до четвертого порядка включительно и примем эту сумму за производящую функцию нового преобразования (см. 3.3.1 и последующее замечание). Это и будет преобразование $P^{-1}(\mathcal{F} + \mathcal{A})$.

Поскольку исходное преобразование мы рассматриваем только при вещественных x^k и y^k , то в пространстве $\mathbb{C}^{2n}$ с координатами $(z^k, \bar{z}^k)$ мы рассматриваем подмножество, выделяющееся уравнениями $z_1^k = \bar{z}^k$. (Соответственно везде и пишется $\bar{z}^k$, а не z_1^k .) В тех комплексных переменных, которые получаются в самом конце — обозначим их снова через z и z_1 , — по-прежнему образ $\mathbb{R}^{2n}$ выделяется теми же уравнениями.

Собственно, при этом запись остаточных членов в виде $\omega^k(z, \bar{z})$ (или, если угодно, $\omega^k(z, z_1)$) аналогична тому, как если бы, скажем, рассматривая функцию f , заданную на некоторой линии в плоскости (x, y) , мы бы писали $f(x, y)$.

в) Можно с самого начала продолжить неаналитические остаточные члены в некоторую окрестность нуля в пространстве $\mathbb{C}^{2n}$ с координатами x^k, y^k (теперь уже комплексными) как некоторые C^1 -функции от вещественных и мнимых частей этих комплексных координат, удовлетворяющие прежним условиям малости (самых этих функций и их производных по $\operatorname{Re} x^k, \operatorname{Im} x^k, \operatorname{Re} y^k, \operatorname{Im} y^k$). Конечно, теперь $x^k - iy^k$, вообще говоря, уже не будет комплексно сопряженным с $\bar{z}^k = x^k + iy^k$ (хотя в конечном счете нас будут интересовать вещественные x^k и y^k , для которых $x^k - iy^k = \bar{z}^k$).

(⁵³) Мы доказали, что если g^* имеет указанный выше вид, то $(t, 0, \dots, 0)$ — геодезическая. Обратное, вопреки несколько небрежной формулировке в основном тексте, неверно (и, естественно, не используется далее). Читатель при желании может проверить, что общий вид римановой метрики g^* , для которой $(t, 0, \dots, 0)$ — геодезическая, таков:

$$g_{00}^*(t; x) = a \left(1 + 2 \sum_{i \geq 0} b_i x^i + O(|x|^2) \right),$$

$$g_{0i}^*(t; x) = a (b_i t + O(|x|)),$$

$$g_{ij}^* \text{ при } i, j > 0 \text{ произвольны.}$$

$$\text{Соответственно } g^{*00} = \frac{1}{a} \left(1 - 2 \sum b_i x^i + \dots \right),$$

$$g^{*0i} = -\frac{1}{a} \sum_{k \geq 0} g^{*ik}(t; 0) b_k t + \dots$$

$$(g^{*ik}(t; 0))_{i, k \geq 0} = (g_{ik}^*(t; 0))_{i, k \geq 0}^{-1}.$$

Если потребовать, чтобы для этой геодезической норма вектора скорости равнялась 1, то получим, что $a=1$, но остаются еще b_i , для обращения которых в нуль нужны дополнительные требования. Например, можно потребовать, чтобы при $x=0$ векторы $\partial/\partial x^i$ ($i \geq 0$) были ортогональны $\partial/\partial x^0$. Для нас всего важнее, чтобы не только кривая $(t, 0, \dots, 0)$ была геодезической, но и чтобы траектория геодезического потока в канонических координатах $(x^0, \dots, x^n, y^0, \dots, y^n)$, естественно связанных с $(x^0, \dots, x^n)$, имела вид

$$(t, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0).$$

Это условие обеспечивает, что $a=1$ и $b_i=0$.

(⁵⁴) Действительно, известно, что если

$$V_\varepsilon := \{L; {}^t L \bar{L} + \bar{L} L, |L| < \varepsilon\},$$

то $\{\exp V_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$ — фундаментальная система окрестностей I_{2n} в $Sp(n)$. Зафиксируем какую-нибудь C^∞ -функцию $\varphi(t)$, которая имеет носитель в рассматриваемой окрестности t_0 и для которой $\int_0^\omega \varphi(t) dt = 1$. При достаточной

малости матрицы L , скажем при $|L| < \delta$, матричная функция $\varphi(t) L$ будет удовлетворять требуемым условиям о малости и носителе. Ясно, что матрицант уравнения $\dot{S} = (\varphi(t) L) S$ равен $\exp \left(\int_0^\infty \varphi(t) dt \cdot L \right) = \exp L$, и мы видим, что так

можно получить любую матрицу из окрестности $\exp V_\delta$ единичной матрицы.

⁽⁵⁵⁾ Структурной группой построенного расслоения является подгруппа ортогональной группы $O(k)$, состоящая из ортогональных преобразований, коммутирующих с T (такие преобразования очевидным образом действуют на $D^k/\mathbb{Z}_m$). Если ее можно редуцировать до аналогичной подгруппы группы $SO(k)$, то (по аналогии с векторными расслоениями) можно условиться называть данное расслоение ориентируемым. Можно также построить такое векторное расслоение $\nu^-: 0_m^- \rightarrow \tilde{\Delta}_m$, что μ_m^-/S получается из ν^- факторизацией его слоев по действию группы $\mathbb{Z}_m$ (z_0 действует как T). Ориентируемость ν^- соответствует ориентируемости μ_m^-/S . В статье Клингенберга [4] и в английском оригинале данной книги построение ν^- некорректно.)

⁽⁵⁶⁾ Последнее, конечно, за исключением тривиального случая, когда $\pi_1 M = \mathbb{Z}$, т. е. $M = S^1$.

Каждому нетривиальному классу сопряженных элементов группы $\pi_1 M$ соответствует некоторая замкнутая геодезическая, лежащая в соответствующем классе свободной гомотопных замкнутых кривых (и минимизирующая в этом классе E). Если для всех классов сопряженных элементов эти замкнутые геодезические суть кратные повторения одной и той же замкнутой геодезической c_0 , соответствующей классу $\{\beta\alpha\beta^{-1}; \beta \in \pi_1 M\}$, то всевозможные классы суть $\{\beta\alpha^i\beta^{-1}; \beta \in \pi_1 M\}$, где i пробегает целые числа. Иными словами, каждый элемент группы $\pi_1 M$ сопряжен с некоторой степенью α .

Пусть теперь a есть образ α при факторизации по коммутанту. Ясно, что прокоммутированная группа порождается a . Если мы предполагаем, что $\pi_1 M \neq \mathbb{Z}$, то в коммутанте должен быть элемент β , отличный от единицы группы. Он тоже сопряжен с некоторой степенью α , скажем $\beta = \gamma\alpha^n\gamma^{-1}$, где $n \neq 0$. Но при факторизации по коммутанту β переходит в единицу e прокоммутированной группы, так что $e = a^n$. Итак, при коммутировании $\pi_1 M$ получается конечная группа, и одномерное число Бетти группы $\pi_1 M$ равно нулю.

$\pi_1 M$ не имеет кручения для любого конечного комплексного типа $K(\pi_1, 1)$. Иначе отсутствие кручения у $\pi_1 M$ легко доказывается при несколько более сильном условии на метрику. Именно, помимо невырожденности всех замкнутых геодезических потребуем еще, чтобы соответствующие отображения Пуанкаре были либо гиперболическими, либо закручивающимися. Согласно 3.3.10, такие метрики «типичны». При выполнении этого условия достаточно рассмотреть тот случай, когда все замкнутые геодезические являются гиперболическими, ибо в противном случае имеется бесконечное число замкнутых геодезических (§ 3.3 и добавление к нему). А для гиперболических замкнутых геодезических имеется простая связь между их индексами и индексами их кратных повторений (см. 3.2.13). В частности, упомянутая выше c_0 (минимизирующая E в компоненте связности пространства ΛM , отвечающей $\{\beta\alpha\beta^{-1}; \beta \in \pi_1 M\}$) имеет индекс 0. Значит, все ее кратные повторения тоже имеют индекс 0, и оттого на критических множествах $S \cdot c_0^m$ в ΛM функция E имеет локальные минимумы.

Допустим, что в $\pi_1 M$ имеется элемент конечного порядка m , скажем $(\beta\alpha\beta^{-1})^m = 1$. Тогда $\alpha^m = 1$ (так что $\pi_1 M$ имеет конечный показатель: $\gamma^m = 1$ для всех $\gamma \in \pi_1 M$). В частности, замкнутая геодезическая c_0^m стягиваема. Рассмотрим в компоненте связности пространства ΛM , точки которой суть стягиваемые замкнутые кривые, всевозможные пути, соединяющие $S \cdot c_0^m$ с $\Lambda^0 M$. Они образуют некоторое ϕ -семейство $\mathcal{A}$, повисающее на некоторой критической орбите $S \cdot c$. На последней E не может иметь локального минимума.

Ведь в противном случае существовало бы такое $\varepsilon > 0$, что на пути, имеющем хотя одну точку в некоторой окрестности $S \cdot c$ и кончающемся в $\Lambda^0 M$, $\max E > E(S \cdot c) + \varepsilon$; а тогда $\mathcal{A}$ не могло бы повисать на уровне $E(S \cdot c)$. Следовательно, c не является кратным повторением c_0 .

В этих рассуждениях использовались условия, наложенные на метрику и свойства фундаментальной группы, а стягиваемость $\tilde{M}$ не играла роли. С помощью рассуждений такого же характера Бальманн, Торбергсон и Циллер [2] показали, что при выполнении того же условия на метрику и некоторых условий на фундаментальную группу имеется бесконечное число различных однократных замкнутых геодезических.

(37) Автор упускает из виду то, что $\pi_1 M$ может быть бесконечной периодической группой.

Если порядки элементов $\pi_1 M$ не ограничены в совокупности, то годится простая модификация приведенных в основном тексте рассуждений (причем они доказывают даже существование бесконечного числа различных замкнутых геодезических). Остается тот случай, когда существует такое m , что $\gamma^m = 1$ для всех $\gamma \in \pi_1 M$. Кроме того, выше мы видели, что при бесконечной $\pi_1 M$ существование двух геодезических остается под вопросом только тогда, когда все элементы группы $\pi_1 M$ сопряжены с различными степенями фиксированного элемента α , причем в рассматриваемом сейчас случае, когда $\alpha^m = 1$, существование двух геодезических можно доказать при наложенном в (36) дополнительном условии на метрику.

(38) Поясним, почему существует f с нужными свойствами. Надо доказать только существование такого отображения $g: (D^{k_0}, \partial D^{k_0}) \rightarrow (\Lambda M, \Lambda^0 M)$, что $\tilde{\pi} \circ g$ реализует цикл $D^{-1}(c_0)$ в $\Pi^{k_0} \bmod \Pi^{k_0-}$; как после этого перейти к f , ясно из § 2.1. Сперва несколько уменьшив D^{k_0} , построим такое отображение $g_1: (D^{k_0}, \partial D^{k_0}) \rightarrow (\Lambda^{k_0}, \Lambda^{k_0-\varepsilon})$, что $\tilde{\pi} \circ g_1$ реализует рассматриваемый относительный цикл. Мы докажем, что отображение $g_1|_{\partial D^{k_0}}: \partial D^{k_0} \rightarrow \Lambda^{k_0-\varepsilon}$ гомотопну нулю. Тогда с помощью соответствующей гомотопии отображение g_1 легко продолжить до отображения большего диска в Λ^{k_0} , имеющего требуемые свойства.

Можно считать, что в $\Lambda^{k_0-\varepsilon} - \Lambda^0$ нет критических точек. (Действительно, в противном случае там имелась бы однократная замкнутая геодезическая c_1 . Для нее $E(c_1) < \kappa_0 = E(c_0)$, так что она отлична от c_0 , и теорема доказана.) Стало быть, $\Lambda^{k_0-\varepsilon}$ деформируется на Λ^0 вдоль траекторий градиентного потока, так что $g_1|_{\partial D^{k_0}}$ гомотопну в $\Lambda^{k_0-\varepsilon}$ некоторому отображению $\partial D^{k_0} \rightarrow \Lambda^0 = M$. А последнее гомотопну нулю, ибо $\pi_{k_0-1} M = 0$ (при $k_0 = 1$ здесь речь идет о связности M).

(39) Громол и Мейер [1] определяли характеристическое многообразие как образ D_0 при таком локальном эквивариантном диффеоморфизме ψ , при котором $E_x \circ \psi$ «расщепляется», как указано в формулировке 4.2.1, на квадратичную часть, зависящую только от ξ , и вырожденную часть, зависящую только от ξ_0 . (Именно это и нужно для дальнейшего.) Характеристическое многообразие (в этом смысле), вообще говоря, не единственно. (Тем более не единственно ψ .) В теореме 4.2.1 сперва посредством условий фигурирующих в первой части утверждения теоремы, выделяется некоторое подмногообразие, а затем доказывается, что оно характеристическое (т. е. для него существует надлежащее ψ).

(40) Предположим этому несколько замечаний.

а) Рассматриваемые топологические пространства предполагаются связными, имеющими гомотопический тип счетного CW -комплекса и абелеву фундаментальную группу, тривиально действующую на все гомотопические группы, а также на группы гомологий универсального накрывающего пространства. Следуя Постникову [2], будем называть такое пространство, равно как и соответствующий гомотопический тип, *абелевым*. (Абелевы пространства часто называют

простыми, но, во-первых, классически простота означает только тривиальность соответствующего действия группы π_1 , но не ее абелевость, и, во-вторых, напрашивающееся словосочетание «простой гомотопический тип» имеет совсем другой смысл.)

Если M односвязно, то AM абелево. Окружность абелева.

б) По поводу понятий: рациональное пространство, рационализация абелева пространства мы отсылаем читателя к статье Постникова [2].

в) *Рациональный гомотопический тип* можно понимать в двух смыслах: либо как совокупность гомотопически эквивалентных рациональных пространств, либо как совокупность всех пространств, рационализации которых гомотопически эквивалентны. Отображения $f, g: X \rightarrow Y$ называются рационально гомотопными, если соответствующие отображения рационализаций этих пространств гомотопны.

г) Определение минимальной дифференциальной градуированной алгебры (ДГА) в общем случае отличается от того, которое дается в добавлении к § 4.3. Однако последнее годится для тех ДГА, у которых все элементы степени один являются циклами. Именно таковы минимальные модели абелевых пространств.

Некоторые сведения о минимальных моделях имеются в начале статьи Гриффитса, Делиня, Моргана и Сулливана [1]. См. также сборник: Геометрическая теория дифференциальных форм. — М.: Мир, 1981.

(61) Многочисленные литературные ссылки имеются в обзорах Хедлунда [2], Катка, Синая и Степина [1], Песина [3], Песина и Синая [1], а также в книге Аносова [1]. Первые несколько страниц лекций Алексеева [1] посвящены возникновению символической динамики в ранних работах данного направления. Некоторые новые работы геометрического характера отражены или упомянуты у Клингенберга [21]; см. также работы Грина, Эберлейна, Песина, О'Сулливана, Эшенбурга и Гото в списке литературы в настоящих «Лекциях».

Основным объектом исследования здесь является риманово многообразие (полное, но не обязательно замкнутое), на котором геодезический поток не имеет сопряженных точек (короче говорят, что метрика не имеет сопряженных точек). Уже одно это условие отсутствия сопряженных точек накладывает определенные ограничения на свойства многообразия (теорема Адамара — Картана), а при слабом дополнительном условии, что кривизна ограничена снизу, можно построить некие аналоги подпространств T_s^n , T_u^n (соответствующие так называемым предельным решениям уравнения Якоби, см. Грин [4], Эберлейн [2]) и орисфер (Эшенбург [2]). Однако в общем случае эти объекты не имеют тех свойств, которые делают их столь полезными в случае отрицательной кривизны. Так, T_s^n и T_u^n не обязаны быть трансверсальными (условие трансверсальности выделяет потоки Аносова, см. Эберлейн [2]), а в случае евклидовой метрики они вообще совпадают. Чтобы получить достаточно содержательные результаты, в какой-то степени воспроизводящие то, что относится к метрике отрицательной и отделенной от нуля кривизны, нужно потребовать выполнения каких-то дополнительных условий. В качестве такого условия часто используется аксиома видимости, введенная в статьях Эберлейна [1], [3], Эберлейна и О'Нейла [1]. Замечательная особенность аксиомы видимости состоит в своего рода топологической инвариантности этого свойства: если на замкнутом многообразии имеется метрика без сопряженных точек, удовлетворяющая аксиоме видимости, то и все другие метрики без сопряженных точек, которые существуют на этом многообразии, тоже удовлетворяют этой аксиоме (Эберлейн [3]). При выполнении аксиомы видимости или некоторых других условий можно довольно далеко продвинуться в изучении как геометрических свойств рассматриваемых многообразий, так и свойств соответствующих геодезических потоков, а также связанных с ними объектов (потоки реперов, орициклические потоки, орисферические слоения),

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Абрахам (Abraham R.)

- [1] Bumpy metrics. — Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math. vol. XIV, 1—3. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1970.

Абрахам, Марсен (Abraham R., Marsden J.)

- [1] Foundations of mechanics. — New York and Amsterdam: Benjamin, 1967.

Абрахам, Роббин (Abraham R., Robbin J.)

- [1] Transversal mappings and flows. — New York and Amsterdam: Benjamin, 1967.

Адамар (Hadamard J.)

- [1] Les surfaces à courbures opposées et leur lignes géodésiques. — J. Math. Pures Appl. (5), 4, 27—73 (1898).

Александров А. Д.

- [1*] Квазигеодезические на многообразиях, гомеоморфных сфере. — Докл. АН СССР 70, № 4, 557—560 (1950).

Алексеев В. М.

- [1*] Символическая динамика. — Одиннадцатая летняя математическая школа. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976.

Альбер С. И.

- [1] О периодической задаче вариационного исчисления в целом. — Успехи матем. наук, 12, № 4, 57—124 (1957).
[2] Топология функциональных пространств. — Доклады АН СССР, 168, № 4, 727—730 (1966).
[3] Топология функциональных многообразий и вариационное исчисление в целом. — Успехи матем. наук, 25, № 4, 57—122 (1970).

Аносов Д. В.

- [1] Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. — Труды МИАН, № 90. М.: Наука, 1967.
[2*] Геодезические в финслеровой геометрии. — Proc. Int. Congress of Math., Vancouver, 1974, 2, 293—297 (1975).
[3*] Некоторые гомотопии в пространстве замкнутых кривых. — Изв. АН СССР, сер. матем., 44, № 6, 1219—1254 (1980).
[4*] Некоторые гомологии в пространстве замкнутых кривых на n -мерной сфере. — Изв. АН СССР, сер. матем. 45, № 3, 467—490 (1981).
[5*] Замкнутые геодезические. — В кн.: Качественные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 5—24.
[6*] О типичных свойствах замкнутых геодезических. — Изв. АН СССР, сер. матем., 46, № 4 (1982).

Аносов Д. В., Синай Я. Г.

- [1] Некоторые гладкие динамические системы. — Успехи матем. наук, 22, № 5, 107—172 (1967).

Арнольд В. И.

- [1] Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом возмущении функции Гамильтона. — Успехи матем. наук, 18, № 5, 13—40 (1963).
[2] Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique céleste. — C. R. Acad. Sci. Paris, 281, 3719—3722 (1965).
[3] О характеристическом классе, входящем в условия квантования. — Функц. анализ и приложения, 1, № 1, 1—14 (1967).
[4*] Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.

Арнольд В. И., Авец А. (Arnold V. I., Avez A.)

- [1] Problèmes ergodiques de la mécanique classique. — Paris: Gauthier-Villars, 1967. [Имеется перевод на английский: Ergodic problems of classical mechanics. — New York and Amsterdam: Benjamin, 1968.]

Ауслендер, Грин (Auslander L., Green L.)

- [1] G -induced flows. — Amer. J. Math., 88, № 1, 43—60 (1966). [Имеется перевод с препринта в книге: Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф. Потоки на однородных пространствах. — М.: Мир, 1966, с. 162—185.]

Бальманн (Ballmann W.)

- [1] Doppelpunktfreie geschlossene Geodätische auf Flächen. — Bonn: Math. Institut Univ. Bonn, 1977.

- [2*] Doppelpunktfreie geschlossene Geodätische auf kompakten Flächen. — Math. Zeitschr., 161, 1, 41—46 (1978).

Бальманн, Торбергссон, Циллер (Ballmann W., Thorbergsson G., Ziller W.)

- [1*] On the existence of short closed geodesics and their stability properties. — Preprint, 1980.

- [2*] Closed geodesics and the fundamental group. — Duke Math. J., 48, № 3, 585—588 (1981).

Бангерт (Bangert V.)

- [1*] Closed geodesics on complete surfaces. — Math. Ann., 251, № 1, 83—86 (1980).

Берже (Berger M.)

- [1] Lectures on geodesics in Riemannian geometry. — Bombay: Tata Institute, 1965.

Бессе (Besse A.)

- [1] Manifolds all of whose geodesics are closed. — Ergebnisse der Mathematik. Berlin — Heidelberg — New York: Springer, 1977. [Имеется перевод: Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. — М.: Мир, 1980.]

Биркгоф (Birkhoff G. D.)

- [1] Dynamical systems with two degrees of freedom. — Trans. Amer. Math. Soc., 18, 199—300 (1917).

- [2] Surface transformations and their dynamical applications. — Acta Math., 43, 1—119 (1920).

- [3] Dynamical systems. — Amer. Math. Soc. Colloq. publ., vol. 9. New York: Amer. Math. Soc., 1927. Revised ed. 1966. [Имеется перевод первого издания: Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. — М.—Л.: ОГИЗ — ГИТТЛ, 1941.]

- [4] Une généralization à n dimensions du dernier théorème de géométrie de Poincaré. — C. R. Acad. Sci. Paris, 192, 196—198 (1931).

- [5] Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques. — Mem. Pon. Acad. Sci. Novi Lyncei (3) 1, 85—216 (1935).

Биркгоф, Льюис (Birkhoff G. D., Lewis D. C.)

- [1] On the periodic motions near a given periodic motion of a dynamical system. — Ann. di Mat. (4) 12, 117—133 (1933).

Бляшке (Blaschke W.)

- [1] Vorlesungen über Differentialgeometrie, I. — Berlin: Springer, 1921. 2. Auflage: 1924. 3. Auflage: 1930. 5. Vollständig neubearbeitete Auflage von K. Leichtweiss, 1973. [Имеется перевод третьего издания: Бляшке В. Дифференциальная геометрия. — М.—Л.: ОНТИ, 1935.]

- [2] Eine Verallgemeinerung der Theorie der konfokalen F_2 . — Math. Zeitschr., 27, 653—668 (1927).

- [3*] Введение в дифференциальную геометрию. — М.: ГИТТЛ, 1957.

Болтянский В. Г.

- [1*] Расслоение пространств отображений. — Труды Моск. матем. о-ва, 5, 299—309 (1955).

Боль П.

- [1*] О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, приме-

- нимых в механике. — В кн.: Боль П. Собрание трудов. Рига: Зинатне, 1974, с. 73—198.
- [2*] О движении механической системы вблизи положения равновесия. — В кн.: Боль П. Собрание трудов. Рига: Зинатне, 1974, с. 199—290.
- Борель (Borel A.)
- [1] La cohomologie mod 2 des certaines espaces homogènes. — *Comment. Math. Helv.*, 27, 165—197 (1953).
- [2] Seminar on transformation groups. — *Ann. Math. Studies*, № 46. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1960.
- Ботт (Bott R.)
- [1] Non-degenerate critical manifolds. — *Ann. of Math.*, 60, 248—261 (1954).
- [2] On manifolds all of whose geodesics are closed. — *Ann. of Math.*, 60, 375—382 (1954). [Имеется перевод: Ботт Р. Многообразия, на которых все геодезические замкнуты. — В сб.: Расслоенные пространства и их приложения. — М.: ИЛ, 1958, с. 115—123.]
- [3] On the iteration of closed geodesics and the Sturm intersection theory. — *Comm. Pure Appl. Math.*, 9, № 2, 171—206 (1956).
- Ботт, Самельсон (Bott R., Samelson H.)
- [1] On the Pontryagin product in spaces of paths. — *Comment. Math. Helv.*, 27, 320—337 (1953).
- Бредон (Bredon G. E.)
- [1] On the continuous image of a singular chain complex. — *Pacific J. Math.*, 15, № 4, 1115—1118 (1965).
- Буземан (Busemann H.)
- [1] The geometry of geodesics. — New York: Acad. Press, 1955. [Имеется перевод: Буземан Г. Геометрия геодезических. — М.: Физматгиз, 1962.]
- Бурбаки Н.
- [1*] Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. — М.: Мир, 1975.
- Вассерман (Wassermann A.)
- [1] Morse theory for G -manifolds. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 71, № 2, 384—387 (1965).
- [2] Equivariant differential topology. — *Topology*, 8, 127—150 (1969).
- Вейнштейн (Weinstein A.)
- [1] Singularities of families of functions. — *Ber. Math. Forsch. Inst. Oberwolfach* 4, 323—330. Mannheim—Wien—Zürich: Bibl. Institut, 1971.
- [2] Sur la non-densité des géodésiques fermées. — *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A—B*, 271, № 11, A504 (1970).
- [3] Normal modes for nonlinear Hamiltonian systems. — *Inv. Math.*, 20, № 1, 47—57 (1973).
- [4] On the volume of manifolds all of whose geodesics are closed. — *J. diff. geom.*, 9, № 4, 513—517 (1974).
- Виге-Пуарье, Сулливан (Vigué-Poirrier M., Sullivan D.)
- [1] The homology theory of the closed geodesic problem. — *J. diff. geom.*, 11, № 4, 633—644 (1976).
- Вильямсон (Williamson J.)
- [1] On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems. — *Amer. J. Math.*, 58, 141—163 (1936).
- [2*] On the normal forms of linear canonical transformations in dynamics. — *Amer. J. Math.*, 59, № 3, 599—617 (1937).
- Вольф (Wolf J.)
- [1] Spaces of constant curvature. New York—Toronto—London: McGraw-Hill, 1967. [Имеется перевод: Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. — М.: Наука, 1981.]
- Гото (Goto M. S.)
- [1*] Manifolds without focal points. — *J. diff. geom.*, 13, № 3, 341—359 (1978).

Грин (Green L.)

[1] Surfaces without conjugate points.—Trans. Amer. Math. Soc., 76, № 3, 529—546 (1954).

[2] Geodesic instability.—Proc. Amer. Math. Soc., 7, № 3, 438—448 (1956).

[3] Auf Wiedersehensflächen.—Ann. of Math., 78, № 1, 289—299 (1963).

[4*] A theorem of E. Hopf.—Michigan Math. J., 5, № 1, 31—34 (1958).

Гриффитс Ф., Делинь П., Морган Дж., Сулливан Д.

[1*] Вещественная гомотопическая теория кэлеровых многообразий.—Успехи матем. наук, 32, № 3, 119—152 (1977).

Грове (Grove K.)

[1] Condition (C) for the energy integral on certain path spaces and applications to the theory of geodesics.—J. diff. geom., 8, № 2, 207—223 (1973).

[2] Isometry-invariant geodesics.—Topology, 13, № 3, 281—292 (1974).

Грове, Гальперин, Виге-Пуарье (Grove K., Halperin S., Vigué-Poirrier M.)

[1*] The rational homotopy theory of certain path spaces, with applications to geodesics.—Acta Mathematica, 140, № 3—4, 277—303 (1978).

Грове, Танака (Grove K., Tanaka M.)

[1*] On the number of invariant closed geodesics.—Acta Mathematica, 140, № 1—2, 33—48 (1978).

Громов (Gromov M.)

[1*] Homotopical effect of dilatations.—J. diff. geom., 13, № 3, 303—310 (1978).

Громол, Клингенберг, Мейер (Gromoll D., Klingenberg W., Meyer W.)

[1] Riemannsche Geometrie im Großen.—Lecture Notes in Mathematics 55. Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1968. 2. Auflage 1975. [Имеется перевод первого издания: Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом.—М.: Мир, 1971.]

Громол, Мейер (Gromoll D., Meyer W.)

[1] On differentiable functions with isolated critical points.—Topology, 8, № 4, 361—369 (1969).

[2] Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds.—J. diff. geom., 3, № 4, 493—510 (1969).

Грюнталь А. И.

[1*] Существование выпуклых сферических метрик, все замкнутые самонепересекающиеся геодезические которых гиперболические.—Изв. АН СССР, сер. матем., 43, № 1, 3—18 (1979).

[2*] Существование замкнутой самонепересекающейся геодезической общего эллиптического типа на поверхностях, близких к сфере.—Матем. заметки, 24, № 2, 267—278 (1978).

Гулливвер (Gulliver R.)

[1*] On the variety of manifolds without conjugate points.—Trans. Amer. Math. Soc., 210, 185—201 (1975).

Дарбу (Darboux G.)

[1] Leçons sur la théorie des surfaces. 3^{ème} partie.—Paris, Gauthier-Villars, 1894.

Дейстермаат (Duistermaat J. J.)

[1] On the Morse index in variational calculus.—Advances in Math., 21, № 2, 173—195 (1976).

Джеймс (James I. M.)

[1*] On category in the sense of Lusternik—Schnirelman.—Topology, 17, № 4, 331—348 (1978).

Дьедонне Ж.

[1*] Основы современного анализа.—М.: Мир, 1964.

Зейферт, Трельфалль (Seifert H., Threlfall W.)

[1] Variationsrechnung im Großen.—Leipzig: Teubner, 1938. [Имеется пере-

вод: Зейферт Г., Трельфалль В. Вариационное исчисление в целом. — М.: ИЛ, 1947.]

Зигель К. Л.

[1*] Лекции по небесной механике. — М.: ИЛ, 1959.

[2*] Об интегралах канонических систем. — Сб. Математика, 5, № 2, 103—117 (1961).

[3*] О существовании нормальной формы аналитических дифференциальных уравнений Гамильтона в окрестности положения равновесия. — Сб. Математика, 5, № 2, 129—155 (1961).

Зигель, Мозер (Siegel C. L., Moser J. K.)

[1] Lectures on celestial mechanics. — Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1971.

Иллс (Eells J. Jr.)

[1] On the geometry of function spaces. — Symp. Inter. de Topologia Alg., Mexico (1956) 1958, 303—308.

[2] A setting for global analysis. — Bull. Amer. Math. Soc., 72, 751—807 (1966). [Имеется перевод: Иллс Дж. Основания глобального анализа. — Успехи матем. наук, 24, № 3, 157—210 (1969).]

Иллс, Лемэр (Eells J., Lemaire L.)

[1*] A report on harmonic maps. — Bull. London Math. Soc., 10, № 1, 1—68 (1978).

Ирвин (Irwin M. C.)

[1] On the stable manifold theorem. — Bull. London Math. Soc., 2, part 2, № 2, 196—198 (1970).

Картан (Cartan E.)

[1] Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple. — Ann. Sci. École Norm. Sup., 44, 345—467 (1927).

[2] Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. — Paris: Gauthier-Villars, 1928. [Имеется перевод: Картан Э. Геометрия римановых пространств. — М.—Л.: Гостехиздат, 1936.]

Кархер (Karcher H.)

[1] Closed geodesics on compact riemannian manifolds. — Глава 8 в книге: Шварц Дж. [1]

[2] On the Hilbert manifold $H_1(S^1, M)$ of closed curves. — Comm. pure appl. math., 23, № 2, 201—219 (1970).

[3] Добавление в книгу: Флашель, Клингенберг [1].

Каток А. Б.

[1] Эргодические возмущения вырожденных интегрируемых гамильтоновых систем. Изв. АН СССР, сер. матем., 37, № 3, 539—576 (1973).

Каток А. Б., Синай Я. Г., Степин А. М.

[1*] Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой. — В кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13. М.: ВИНТИ, 1975, с. 129—262.

Келли (Kelley A.)

[1] The stable, center-stable, center, center-unstable and unstable manifolds. — Добавление С в кн.: Абрахам, Роббин [1].

Клейн (Klein P.)

[1] Über die Kohomologie des freien Schleifenraums. — Bonn Math. Schr. № 55 (1972).

Клиггенберг (Klingenberg W.)

[1] Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung. — Comment. Math. Helv., 35, 47—54 (1961).

[2] On the number of closed geodesics on a Riemannian manifold. — Bull. Amer. Math. Soc., 70, № 2, 279—282 (1964).

[3] The theorem of the three closed geodesics. — Bull. Amer. Math. Soc., 71, № 4, 601—605 (1965).

[4] The space of closed curves on the sphere. — Topology, 7, 395—415 (1968).

- [5] The space of closed curves on a projective space. — *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 20, № 77, 11—31 (1969).
- [6] Closed geodesics. — *Ann. of Math.*, 89, № 1, 68—91 (1969).
- [7] Simple closed geodesics on pinched spheres. — *J. diff. geom.*, 2, № 3, 225—232 (1968).
- [8] Closed geodesics. — *Ber. Math. Forsch. Inst. Oberwolfach* 4, 77—103, Mannheim — Wien — Zürich: Bibl. Institut, 1971.
- [9] Closed geodesics on riemannian manifolds. — *Proc. 13th Biennial Sem. Canad. Math. Congress*, Montreal, 1972.
- [10] Geodätischer Fluß auf Mannigfaltigkeiten vom hyperbolischen Typ. — *Invent. Math.*, 14, № 1, 63—82 (1971).
- [11] Hyperbolic closed geodesics. — *Dynamical systems*, ed. M. M. Peixoto. New York—London: Acad. Press, 155—164 (1973).
- [12] Manifolds with geodesic flow of Anosov type. — *Ann. of Math.*, 99, № 1, 1—13 (1974).
- [13] Le théorème de l'indice pour les géodésiques fermées. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, 278, № 14, A1005—A1009 (1973).
- [14] The index theorem for closed geodesics. — *Tôhoku Math. J.*, 26, № 4, 573—579 (1974).
- [15] Der Indexsatz für geschlossene Geodätische. — *Math. Zeitschr.*, 139, № 3, 231—256 (1974).
- [16] Existence of infinitely many closed geodesics. — *J. diff. geom.*, 11, № 2, 299—308 (1976).
- [17] The theorem of the three closed geodesics. — *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (to appear).
- [18] Die Existenz unendlich vieler geschlossener Geodätischer. — *Preprint: Bonn*, 1977.
- [19] Über den Index geschlossener Geodätischer auf Flächen. — *Vorabdruck: Bonn*, 1976. *Nagoya Math. J.*, 69 (1977).
- [20] Closed geodesics on surfaces of genus 0. — *Ann. Scuola Norm. Pisa*, 6, № 1, 19—38 (1979).
- [21*] Riemannian geometry. — *Math. Inst. der Univ. Bonn*, 1980.
- [22*] On the existence of closed geodesics on spherical manifolds. To appear in *Math. Zeitschr.*

Клингенберг, Такенс (Klingenberg W., Takens F.)

- [1] Generic properties of geodesic flows. — *Math. Ann.* 197, 323—334 (1972).

Клингенберг, Шиката (Klingenberg W., Shikata Y.)

- [1*] On the existence theorem of infinitely many closed geodesics. — *Топология. Сб. статей/Под ред. П. С. Александрова. Труды МИАН*, № 154. М.: Наука, 1981.

Кобаяси, Номидзу (Kobayashi S., Nomizu K.)

- [1] Foundations of differential geometry. Vol. 1 and 2. — New York: Interscience, 1963/69. [Имеется перевод: Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1 и 2. — М.: Наука, 1981.]

Коддингтон, Левинсон (Coddington E., Levinson N.)

- [1] Theory of ordinary differential equations. — New York: McGraw-Hill, 1955. [Имеется перевод: Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.]

Колмогоров А. Н., Фомин С. В.

- [1*] Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968.

Кушман, Дэйстермат (Cushman R., Duistermaat J. J.)

- [1] The behavior of the index of a periodic linear Hamiltonian system under iteration. — *Advances in Math.*, 23, № 1, 1—21 (1977).

Леви-Чивита Т., Амальди У.

- [1*] Курс теоретической механики. Т. 2, ч. 2. — М.: ИЛ, 1951.

Ленг (Lang S.)

- [1] Differential manifolds. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1972, [Имеется

перевод: Леиг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1976.]

Ленфорд (Lanford O. E., III)

- [1] Bifurcation of periodic solutions into invariant tori: The work of Ruelle and Takens. — Lecture Notes in Mathematics, 322, 159—192. Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1973.

Люстерник Л. А.

- [1] Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом. — Труды МИАН, № 19. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1947.
- [2*] Sur quelques méthodes topologiques dans la géométrie différentielle. — Atti del Congr. Intern. Matem., Bologna, 1928, 4, 291—296 (1931).
- [3*] Топология и вариационное исчисление. — Успехи матем. наук, 1, № 1, 30—56 (1946).

Люстерник Л. А., Фет А. И.

- [1] Вариационные задачи на замкнутых многообразиях. — Докл. АН СССР, 81, № 1, 17—18 (1951).

Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г.

- [1] Sur le problème de trois géodésiques fermées sur les surfaces de genre 0. — C. R. Acad. Sci. Paris, 189, 269—271 (1927).
- [2] Топологические методы в вариационных задачах. — Труды Научно-исслед. ин-та матем. и мех. при И МГУ. М.: ГИТТЛ, 1930.
- [3*] Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхностей. — Успехи матем. наук, 2, № 1, 166—217 (1947).

Майерс (Myers S. B.)

- [1] Connection between differential geometry and topology: I. Simply connected surfaces. — Duke Math. J., 1, № 3, 376—391 (1935).

Марзоук (Marzouk M.)

- [1] Der Fixpunktsatz von Birkhoff—Lewis im differenzierbaren Fall. — Bonn. Math. Schr., № 74 (1974).

Матиас (Matthias H. H.)

- [1] Eine Finslermetrik auf S^2 mit zwei geschlossenen Geodätischen, Diplomarbeit. — Math. Institut der Univ. Bonn: Bonn, 1977.

Маутнер (Mautner F.)

- [1] Geodesic flows on symmetric riemannian spaces. — Ann. of Math., 65, № 3, 416—431 (1957).

Мейер (Meyer W.)

- [1] Kritische Mannigfaltigkeiten in Hilbertmannigfaltigkeiten. — Math. Ann., 170, 45—66 (1967).

Меркури (Mercuri F.)

- [1] The critical points theory for the closed geodesic problem. — Math. Zeitschr., 156, 231—245 (1977).

Мишель (Michel R.)

- [1] Sur certains tenseurs symétriques des projectifs réels. — J. Math. pures appl., 51, 273—292 (1972).

Милнор (Milnor J.)

- [1] Morse theory. — Ann. Math. Studies, 51. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1963. [Имеется перевод: Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965.]
- [2] Some consequences of a theorem of Bott. — Ann. of Math., 68, 444—449 (1958). [Имеется перевод: Милнор Дж. Несколько следствий одной теоремы Ботта. Сб. Математика, 3, № 3, 3—7 (1959).]
- [3] A note on curvature and fundamental group. — J. diff. geom., 2, № 1, 1—7 (1968).
- [4] Growth of finitely generated solvable groups. — J. diff. geom., 2, № 4, 447—449 (1968).

Милнор, Стасеф (Milnor J., Stasheff J.)

- [1] Characteristic classes. — Ann. Math. Studies, № 76. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press and Univ. of Tokyo Press, 1974. [Имеется перевод: Милнор Дж., Стасеф Дж. Характеристические классы. — М.: Мир, 1979.]

Мозер (Moser J.)

- [1] Periodische Lösungen der restringierten Dreikörperproblems, die sich erst nach vielen Umläufen schließen. — Math. Ann., 126, № 4, 325—335 (1953).
 [2] Stabilitätsverhalten kanonischer Differentialgleichungssysteme. — Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.—Phys. Kl. IIa, 87—120 (1955).
 [3] Lectures on hamiltonian systems. — Mem. Amer. Math. Soc., 81. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1968. [Имеется перевод: Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. — М.: Мир, 1973.]
 [4] Stable and random motions in dynamical systems. — Ann. Math. Studies, № 77. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1973.
 [5] Proof of a generalized form of a fixed point theorem due to G. D. Birkhoff. — Geometry and topology. Rio de Janeiro, July 1976. Proceedings of the school held at the Instituto de Matematica Pura e Aplicada, ed. J. Palis and M. do Carmo. Lecture Notes in Mathematics, 597, 464—594. Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1977.
 [6*] Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold. — Comm. on pure and appl. math., 23, № 4, 609—636 (1970).
 [7*] On the volume elements of a manifold. — Trans. Amer. Math. Soc., 120, № 2, issue II, 286—294 (1965).

Морс (Morse M.)

- [1] A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one. — Trans. Amer. Math. Soc., 26, 25—60 (1924).
 [2] The calculus of variations in the large. — Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 18. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1934, 4th printing, 1965.

Мур (Moore C.)

- [1] Ergodicity of flows on homogeneous spaces. Amer. J. Math., 88, № 1, 154—178 (1966).

Оливьер (Olivier R.)

- [1] Die Existenz geschlossener Geodätischer auf kompakten Mannigfaltigkeiten. — Comment. Math. Helv., 35, 146—152 (1961).

О'Сулливан (O'Sullivan J. J.)

- [1*] Manifolds without conjugate points. — Math. Ann., 210, № 4, 295—311 (1974).
 [2*] Riemannian manifolds without focal points. — J. diff. geom., 11, № 3, 321—333 (1976).

Пале (Palais R.)

- [1] The classification of G -spaces. — Mem. Amer. Math. Soc., 36, Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1960.
 [2] Morse theory on Hilbert manifolds. — Topology, 2, 299—340 (1963).
 [3] Homotopy theory of infinite dimensional manifolds. — Topology, 5, 1—16 (1966).
 [4] Lusternik—Schnirelmann theory of Banach manifolds. — Topology, 5, 115—132 (1966).

Пале, Смейл (Palais R., Smale S.)

- [1] A generalized Morse theory. — Bull. Amer. Math. Soc., 70, 165—172 (1964).

Перрон (Perron O.)

- [1] Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. — Math. Zeitschr., 32, 703—728 (1930).

Песни Я. Б.

- [1*] Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях без

- фокальных точек.—Изв. АН СССР, сер. матем., 41, № 6, 1252—1288 (1977).
- [2*] Формулы для энтропии геодезического потока на компактном римановом многообразии без сопряженных точек.—Матем. заметки, 24, № 4, 553—570 (1978).
- [3*] Геодезические потоки с гиперболическим поведением траекторий и связанные с ними объекты.—Успехи матем. наук, 36, № 4, 3—51 (1981).
- Песин Я. Б., Синяй Я. Г.
- [1*] Hyperbolicity and stochasticity of dynamical systems.—Soviet scientific surveys, ser. C. Math. Physics Rev., 2, ed. S. P. Novikov. Overseas publishing association Gordon and Breach, 1981, pp. 53—115.
- Плисс В. А.
- [1*] Принцип сведения в теории устойчивости движения.—Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 6, 1297—1324 (1964).
- Погорелов А. В.
- [1*] Квазигеодезические линии на выпуклой поверхности.—Матем. сб. 25, № 2, 275—306 (1949).
- Постников М. М.
- [1*] Введение в теорию Морса.—М.: Наука, 1971.
- [2*] Локализация топологических пространств.—Успехи матем. наук, 32, № 6, 117—181 (1977).
- Пранге (Prange G.)
- [1] Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik.—Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Band IV, 2 Mechanik. Leipzig: Teubner, 1933.
- Пуанкаре (Poincaré H.)
- [1] Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes.—Trans. Amer. Math. Soc., 6, 237—274 (1904). [Имеется перевод: Пуанкаре А. О геодезических линиях на выпуклых поверхностях.—В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2.—М.: Наука, 1972, с. 735—774.]
- [2] Sur un théorème de Géométrie.—Rend. Circ. Mat. Palermo, 33, 375—407 (1912). [Имеется перевод: Пуанкаре А. Об одной геометрической теореме. В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2.—М.: Наука, 1972, с. 775—807.]
- Робинсон (Robinson C.)
- [1] Lectures on hamiltonian systems.—I. M. P. A. Monografias de Matemática, № 7, Guanabara (1971).
- Розохатиус (Rosochatius E.)
- [1] Über Bewegungen eines Punktes.—Dissertation: Göttingen, 1877.
- Сакс (Sacks J.)
- [1] Some applications of the theory of rational homotopy types to closed geodesics.—Thesis: Berkeley, Ca., 1975.
- Серр (Serre J.-P.)
- [1] Homologie singulière des espaces fibrés.—Ann. of Math., 54, 425—505 (1951). [Имеется перевод: Серр Ж.—П. Сингулярные гомологии расслоенных пространств.—В сб.: Расслоенные пространства и их приложения.—М.: ИЛ, 1958, с. 9—98.]
- Сидзума (Shizuma R.)
- [1] Über geschlossene Geodätische auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten.—Nagoya Math. J., 13, 101—114 (1958).
- Смейл (Smale S.)
- [1] Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms.—Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (3) 17, № 1—2, 97—116 (1963).
- [2] Differentiable dynamical systems.—Bull. Amer. Math. Soc., 73, № 6, 747—817 (1967). [Имеется перевод: Смейл С. Дифференцируемые динамические системы.—Успехи матем. наук, 25, № 1, 113—185 (1970).]

Спеньер (Spanier E.)

- [1] Algebraic topology. — New York: McGraw Hill, 1966. [Имеется перевод: Спеньер Э. Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971.]

Стернберг С. (Sternberg S.)

- [1] Celestial mechanics, part II. — New York: Benjamin, 1969.

- [2*] Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.

Сулливан (Sullivan D.)

- [1] Differential forms and the topology of manifolds. — Manifolds-Tokyo 1973, ed. A. Hattori. Tokyo: Univ. of Tokyo Press, 1975.

Такенс (Takens F.)

- [1] Introduction to global analysis. — Communications Math. Inst. Utrecht, 1973.

- [2*] Hamiltonian systems: Generic properties of closed orbits and local perturbations. — Math. Ann., 188, 304—312 (1970).

Тимм (Thimm A.)

- [1] Integrabilität beim geodätischen Fluß. Diplomarbeit, Math. Institut Univ. Bonn, Bonn, 1976.

Том (Thom R.)

- [1] Stabilité structurelle et morphogénèse. — Reading, Mass.: Benjamin, 1972. Топоногов В. А.

- [1*] Оценка длины замкнутой геодезической на выпуклой поверхности. — Докл. АН СССР, 124, № 2, 282—284 (1959).

Торберссон (Thorbergsson G.)

- [1] Geschlossene Geodätische auf nicht-kompakten riemannschen Mannigfaltigkeiten. — Bonn. Math. Schr., № 101, 1977.

- [2*] Closed geodesics on non-compact riemannian manifolds. — Math. Zeitschr., 159, № 3, 249—258 (1978).

- [3*] Non-hyperbolic closed geodesics. — Mathem. Scand., 44, № 1, 135—148 (1979).

Феррарис (Ferraris C. J.)

- [1*] On the resolution of degenerate closed geodesics. — Math. Zeitschr. 173, № 3, 223—228 (1980).

Фет А. И.

- [1] Вариационные задачи на замкнутых многообразиях. — Матем. сб., 30, № 2, 271—316 (1952).

- [2] Связь между топологическими свойствами и числом экстремалей на многообразии. — Докл. АН СССР, 88, № 3, 415—417 (1953).

- [3] О периодической задаче вариационного исчисления в целом. — Докл. АН СССР, 160, № 2, 287—289 (1965).

Фишель (Viesel H.)

- [1] Die Gestalt analytischer Liouvillescher Flächen im Großen. — Math. Ann., 166, 175—186 (1966).

- [2] Über einfach geschlossene Geodätische auf dem Ellipsoid. — Arch. Math., 22, 106—112 (1971).

Флашель, Клингенберг (Flaschel P., Klingenberg W.)

- [1] Riemannsche Hilbertmannigfaltigkeiten. Periodische Geodätische. (Mit einem Anhang von H. Karcher). — Lecture Notes in Mathematics, 282. Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1972.

Фридлендер, Гриффитс, Морган (Friedlander R., Griffiths P. A., Morgan J.)

- [1] De Rham theory of Sullivan. — Lecture Notes, Instituto Matematico, Florence, Italy, 1972.

Фролов С. В., Эльсгольд Л. Э. (Froloff S. V., Elsholz L. E.)

- [1] Limite inférieure pour le nombre des valeurs critiques d'une fonction, donné sur variété. — Матем. сб., 42, № 5, 637—643 (1935).

Функ (Funk P.)

- [1] Über Flächen mit einem festen Abstand der konjugierten Punkte. — Math. Zeitschr., 16, 159—162 (1923).

Харрис (Harris T. C.)

- [1] Periodic solutions of arbitrarily long periods in Hamilton systems. — J. diff. equations, 4, № 2, 131—141 (1968).

Хартман (Hartman P.)

- [1] Ordinary differential equations. — New York: Wiley, 1964. [Имеется перевод: Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.]

Хедлунд (Hedlund G. A.)

- [1] Poincaré's rotation number and Morse's type number. — Trans. Amer. Math. Soc., 34, 75—97 (1932).
[2] The dynamics of geodesic flows. — Bull. Amer. Math. Soc., 45, № 4, 241—260 (1939).

Хелгасон (Helgason S.)

- [1] Differential geometry and symmetric spaces. — New York and London: Academic Press, 1962. [Имеется перевод: Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.]

Хирш, Пью, Шуб (Hirsch M., Pugh C., Shub M.)

- [1] Invariant manifolds. — Lecture Notes in Mathematics, 583 (1977). Berlin—Heidelberg—New York: Springer. См. также: Bull. Amer. Math. Soc., 76, № 5, 1015—1019 (1970).

Хопф Э. (Hopf E.)

- [1] Closed surfaces without conjugate points. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 34, № 2, 47—51 (1948).

Цендер (Zehnder E.)

- [1] Stability and instability in celestial mechanics. — Enseignement du 3ème cycle de la Physique en Suisse Romande. École Polytechnique Fédérale, Lausanne, 1975.

Циллер (Ziller W.)

- [1] Geschlossene Geodätische auf global symmetrischen und homogenen Räumen. — Bonn. Math. Schr. № 85, 1976.
[2*] Closed geodesics on homogeneous spaces. — Math. Zeitschr., 152, № 1, 67—88 (1976).

Цолль (Zoll O.)

- [1] Über Flächen mit Scharen geschlossener geodätischer Linien. — Math. Ann., 57, 108—133 (1903).

Чейвл (Chavel I.)

- [1] On Riemannian symmetric spaces of rank 1. — Advances in Math., 4, № 2, 236—263 (1970).

Чжэнь Шэншэнь (Chern S. S.)

- [1] On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle. — Ann. of Math., 49, № 2, 362—372 (1948).

Шварц А. С.

- [1] Гомологии пространств замкнутых кривых. — Тр. Московского матем. об-ва, 9, 3—44 (1960).

Шварц Дж. (Schwartz J.)

- [1] Nonlinear functional analysis, with an additional chapter by H. Karcher. — New York—London—Paris: Gordon and Breach, 1969.

Шнирельман Л. Г. (Schnirelmann L. G.)

- [1*] Über eine neue kombinatorische Invariante. — Monatshefte f. Math. und Phys., 37, 131—134 (1930).

Штеккель (Stäckel P.)

- [1] Über die Integration der Hamilton—Jacobischen Differentialgleichung mittels Separation der Variablen. — Habilitationsschrift: Halle—Wittenberg, 1891.

Шют (Schüth H.)

- [1] Stabilität von periodischen Geodätischen auf n -dimensionalen Ellipsoiden. — Bonn. Math. Schr., № 60 (1972).

Эберлейн (Eberlein P.)

- [1] Geodesic flow on negatively curved manifolds, I. — *Ann. of Math.*, **95**, № 3, 492—510 (1972). II. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, **178**, 57—82 (1973).
- [2] When is a geodesic flow of Anosov type? I and II. — *J. diff. geom.*, **8**, № 3, 437—463, and № 4, 565—577 (1973).
- [3*] Geodesic flows in certain manifolds without conjugate points. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, **167**, 151—170 (1972).

Эберлейн, О'Нейл (Eberlein P., O'Neill B.)

- [1*] Visibility manifolds. — *Pacific J. of Math.*, **46**, № 1, 45—109 (1973).

Эдвардс (Edwards H. M.)

- [1*] A generalized Sturm theorem. — *Ann. of Math.*, **80**, № 1, 22—27 (1964).

Элиассон (Eliasson H.)

- [1] Über die Anzahl geschlossener Geodätischer in gewissen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. — *Math. Ann.*, **166**, № 2, 119—147 (1966).
- [2] Morse theory for closed curves. — *Symposium for inf. dim. Topology. Louisiana State University. Ann. Math. Studies*, № 69, 63—77. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press. 1972.
- [3] Geometry of manifolds of maps. — *J. diff. geom.*, **1**, № 2, 169—194 (1967).
- [4] Convergence of gradient curves. — *Math. Zeitschr.*, **136**, 107—116 (1974).

Эресман (Ehresmann C.)

- [1] Sur la topologie des certains espaces homogènes. — *Ann. of Math.*, **35**, 396—443 (1934).

Эрл, Иллс (Earle C. J., Eells J.)

- [1*] Foliations and fibrations. — *J. diff. geom.*, **1**, № 1, 33—41 (1967).

Эшенбург (Eschenburg J. H.)

- [1] Stabilitätsverhalten des geodätischen Flusses Riemannscher Mannigfaltigkeiten. — *Bonn. Math. Schr.* № 87 (1976).
- [2*] Horospheres and the stable part of the geodesic flow. — *Math. Zeitschr.*, **153**, № 3, 237—251 (1977).

Эшенбург, О'Сулливан (Eschenburg J. H., O'Sullivan J. J.)

- [1*] Growth of Jacobi fields and divergence of geodesics. — *Math. Zeitschr.*, **150**, № 3, 221—237 (1976).

Яглом И. М.

- [1*] Квадратичные и кососимметрические билинейные формы в вещественных симплектических пространствах. — *Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями в геометрии, механике и физике*, **8**. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1950, с. 364—381.

Якоби (Jacobi C. G. J.)

- [1] Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution. — *Crelles J.*, **19**, 309—313 (1839).
- [2] Vorlesungen über Dynamik, gehalten an der Universität zu Königsberg im Wintersemester 1842—1843. Die kürzeste Linie auf dem dreiaxigen Ellipsoid. Achtundzwanzigste Vorlesung. Hrg. A. Clebsch. Berlin: Reimer, 1866. [Имеется перевод: Якоби К. Г. Лекции по динамике. — Л.—М.: ОНТИ, 1936.]

Якубович В. А., Старжинский В. М.

- [1*] Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972.

Добавление при корректуре. В связи с интегрируемыми системами см.

Кнёрер (Knörrer H.)

- [1*] Geodesics on the ellipsoid. — *Invent. Math.*, **59**, 119—143 (1980).

Мозер (Moser J.)

- [8*] Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем. — *УМН*, **36**, № 5, 109—151 (1981).

Степин А. М.

- [1*] Интегрируемые гамильтоновы системы. — В кн.: *Качественные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний.* — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathcal{A}$	65	$S_c^\pm (\rho_0)$	196
$\mathcal{A}$ (ДФА)	288	TM	21
$\mathcal{A}_{P.L.} (X)$	289	TE	22
$\mathcal{B}$	89	$T_{\xi^w} E, T_{\xi^h} E$	23
$b_i (0_B), b_i^? (0_{D_0})$	262	T, T^φ	27
$C^0 (S, M), C^\infty (S, M)$	29	$\mathcal{U} (c)$	35
$C^0 (c^* TM)$	30	$V_{ss}^{loc} (z, c)$	146
$Cr (\Lambda)$	56	$V_s^{loc} (c)$	147
$Conj T_1 M$	338	$V_{nc}, V_{su}, V_{co}, V_{od}, V_{ev},$	
c	43	$V_{ev, in}$	175
Du, D_{e^u}	124	V^n	178
$Df (u), Df (u). x, D_{x f} (u)$	350	W^e	259
$\deg x$	289	W^{ca}	140
$\partial t (d/dt, \partial/\partial t, \partial_t)$	25	$W_n (S, c), W_{uu} (c)$	140
∂c	43	$W_s (S, c), W_{ss} (c)$	207
∂_c	86	W_{uu}^p, W_{ss}^p	207
$E (c)$	49	$\tilde{W}^{p+1}, \tilde{W}_u^{p+1}$	207
E, E	22	W^{2q+1}, W_{ce}^{2q}	207
$\exp_c$	35	$ y $	274
$\exp$	47	AS^n, BS^n	96
$ev (c, t)$	292	$\Gamma S^n, \Delta S^n$	96
$\mathcal{G}M$	209, 295	Γ_φ	23, 351
$\mathcal{G}^\infty M$	209	δ^h	71
$\mathcal{G}, \mathcal{G}_H, \mathcal{G}_T, \tilde{\mathcal{G}}$	295	ζ_H	160
$G (a, b)$	97	θ	83
$H (x, \eta)$	199	$\kappa_{\mathcal{A}}$	66
$H^1 (S, M)$	29, 40	$\Lambda, \Lambda M$	10, 21, 40
$H^0 (c^* TM), H^1 (c^* TM)$	30	Λ^x, Λ^{x-}	54
$H^r (H^1 (S, M)^* TM)$	40	$\Xi (M), \Xi_E (M)$	24
$\mathcal{H}$	277	ΠM	10, 83
I_c	297	$\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi} M$	81
$\tilde{I} (c)$	81	$\Pi^x, \tilde{\Pi}^x$	85
$\text{ind } c$	121	π	22, 83
J_ξ	23	$\pi (M)$	327
J^c	188	$\Sigma = \Sigma (X_0)$	167
K	22—23, 351	$\Sigma (c)$	85
$\kappa, \tilde{\kappa}$	118	τ_M	21
$L_a^1 (\tau; \tau), L_a^2 (TM; TM),$		φ_s	64
$L_a^2 (M; M)$	27	φ_t	163
$L_s^2 (\pi), L_s^2 (E)$	26—27	ΩM	155
$L^n (E; F), L^n (E)$	350	$\langle \cdot, \cdot \rangle$	29, 44, 161
M, M	21	$\langle \cdot, \cdot \rangle_i$	124
M_ρ	188	$\langle \cdot, \cdot \rangle_i^*$	161
MM	149	$\langle \cdot, \cdot \rangle_e$	363
$M^x M, M$	139, 149, 278	$\ \cdot\ _0, \ \cdot\ _1, \ \cdot\ _\infty$	30
$\mathfrak{M} (M)$	271—272	∇	119
$\mathfrak{M} (X)$	289	∇, ∇_ξ^c	24, 25
$\text{nul } c$	121	$\nabla_\xi, X, \nabla_{X\xi}$	24
$\mathcal{P}$	168	$\nabla_{c\xi}^c$	25
$\mathcal{P}^{ce}$	208	$\nabla_\xi^c (x)$	26
$\text{Per } T_1 (M, g)$	344	∇_c^c	46
$Ri (E)$	27		
$S = [0, 1] / \{0, 1\}$	25		

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абрахам 161, 167, 207, 209, 233, 296,
322, 326, 397
Авец 171, 204, 205, 322, 397
Адамар 5—7, 17, 348, 381, 397
Александров А. Д. 397
Алексеев В. М. 396, 397
Альбер С. И. 10, 15, 18, 96, 101, 104,
109, 251, 396, 397
Амалди 323, 402
Аносов Д. В. 15, 39, 47, 95, 104, 108,
233, 294, 332, 338, 340, 341, 348,
370, 371, 376, 381, 396, 397
Арнольд В. И. 159, 171, 196, 204, 205,
315, 322, 325, 397
Ауслендер 315, 398

Бальманн 15, 104, 294, 372, 395, 398
Бангерт 398
Берже 319, 320, 321, 398
Бессе 315, 319—321, 398
Биркгоф 5, 7, 17, 95, 204, 238, 293, 371,
398
Бляшке 319, 320, 324, 325, 398
Болтянский В. Г. 365, 398
Боль 381, 398, 399
Борель 99, 250, 399
Ботт 79, 96, 181, 183, 188, 194—196,
275, 297, 316, 317, 382, 399
Бредон 15, 399
Буземан 330, 344, 348, 399
Бурбаки 13, 22, 23, 183, 350, 351, 399

Вассерман 125, 399
Вейнштейн 319, 328, 399
Виге-Пуарье 12, 18, 63, 269—271, 399,
400
Вильямсон 171, 399
Вольф 348, 399

Гальперин 63, 400
Гото 396, 399
Грин 315, 320, 348, 396, 398, 400
Гриффитс 289, 396, 400, 406
Грове 63, 155, 400
Громов 400
Громол 12, 14, 18, 25, 34, 61, 62, 110,
113, 118, 150, 194, 210, 246, 259,
262, 269, 320, 336, 337, 340, 342, 351,
370, 372, 395, 400
Грюнталь А. И. 294, 400
Гулливер 337, 400

Данжуа 209
Дарбу 5, 6, 315, 319, 324—326, 328,
400

Дейстермат 155, 171, 188, 206, 400, 402
Делинь 396, 400
Джеймс 77, 400
Дьедонне 350, 400

Зейферт 9, 370, 400
Зигель 202, 204, 401

Иллс 10, 150, 366, 367, 401
Ирвин 207, 381, 401

Картан 315, 348, 401
Кархер 60, 85, 401
Квиллен 289
Келли 206, 401
Клейн 152, 270, 273, 401
Клеро 5, 315
Клингенберг 10, 12—15, 18, 19, 21, 24,
25, 27, 34, 43, 47, 61, 62, 78, 110,
112, 113, 118, 150, 171, 182, 188, 189,
192, 195, 197, 210, 219, 237, 247, 251,
271, 281, 294, 307, 317, 320, 328,
331, 336, 337, 338, 340—342, 344,
351, 365, 366, 371, 382, 394, 396, 400,
402, 406
Кобаяси 402
Коддингтон 145, 381, 402
Колмогоров А. Н. 51, 402
Крейн М. Г. 171
Кушман 171, 188, 402

Левинсон 145, 381, 402
Леви-Чивита 323, 402
Лемэр 10, 401
Ленг 13, 22, 23, 27, 133, 161, 350, 366,
402
Ленфорд 207, 403
Лиувиль 315
Люстерник Л. А. 7, 17, 18, 64, 70, 71,
72, 78, 95, 96, 104, 109, 246, 301, 306,
376, 403
Льюис 204, 238, 397

Майерс 318, 320, 403
Марзоук 204, 403
Марсен 161, 167, 207, 322, 326, 397
Масье 325, 326
Матиас 403
Маутнер 315, 403
Мейер 12, 14, 18, 25, 34, 61, 62, 110,
113, 118, 125, 127, 150, 194, 210,
246, 259, 262, 269, 320, 336, 337, 340,
342, 351, 395, 400, 403
Меркури 403

- Милнор 9, 34, 73, 97, 98, 100, 109, 152, 317, 330, 340, 353, 372, 377, 380, 382, 403, 404
 Мильграм 10
 Мишель 321, 403
 Мозер 158, 159, 198, 200, 202, 204, 205, 370, 401, 404
 Морган 289, 396, 400, 406
 Морс 7, 9, 10, 17, 78, 79, 95, 96, 150, 302, 317, 337, 341, 344, 345, 377, 382, 404
 Мур 315, 404
- Номидзу 402**
- Оливьер 70, 404
 О'Нейл 396
 О'Сулливан 396, 404, 408
- Пале 18, 77, 125, 128, 131, 155, 353, 404
 Перрон 155, 206, 381, 404
 Песин Я. Б. 396, 404, 405
 Плисс В. А. 207, 405
 Погорелов А. В. 405
 Постников М. М. 9, 16, 382, 395, 405
 Пранге 324, 405
 Пуанкаре 5—7, 17, 19, 95, 204, 271, 293, 294, 318, 370, 371, 372, 405
 Пью 206, 381, 407
- Роббин 209, 397
 Робинсон 405
 Розенблют 10
 Розохатиус 323, 405
- Сакс 246, 270, 273, 405
 Самельсон 275, 399
 Серр 71, 275, 405
 Сидзума 96, 405
 Синай Я. Г. 332, 348, 396, 401, 405
 Скляренко Е. Г. 16
 Смейл 18, 404, 405
 Спеньер 70, 71, 73, 76, 97, 107, 365, 406
 Старжинский В. М. 171, 408
 Сташеф 73, 97, 98, 100, 109, 152, 372, 404
 Степин А. М. 396, 401
 Стернберг 159, 161, 406
 Сулливан 12, 246, 269, 270, 271, 289, 396, 400, 406
- Том 259, 406
 Топоногов В. А. 371, 406
 Торберсон 15, 20, 294, 372, 395, 397, 406
 Трельфалль 9, 370, 400
- Феррарис 406
 Фет А. И. 18, 64, 70, 71, 246, 403, 406
 Физель 314, 324, 406
 Флашель 14, 21, 22, 24, 27, 47, 78, 351, 401, 406
 Фомин С. В. 51, 402
 Фридлендер 289, 406
 Фролов С. В. 72, 406
 Фукс Д. Б. 16
 Функ 320, 321, 406
- Харрис 204, 407
 Хартман 206, 381, 407
 Хедлунд 192, 330, 348, 396, 407
 Хелгасон 315, 316, 407
 Хирш 206, 381, 407
 Хопф 349, 407
- Цвирнер 325
 Цендер 204, 205, 322, 329, 407
 Циллер 15, 20, 150, 195, 271, 294, 372, 395, 397, 407
 Цолль 319, 407
- Чейвл 315, 407
 Чжэнь Шэншэнь 99, 101, 407
- Шварц А. С. 70, 79, 96, 150, 152, 247, 251, 270, 271, 407
 Шварц Дж. 77, 125, 246, 273, 401, 407
 Шиката 12, 281, 402
 Шнирельман Л. Г. 7, 17, 18, 72, 78, 95, 96, 109, 301, 306, 403, 407
 Штеккель 315, 323, 325, 407
 Шуб 206, 381, 407
 Шют 323, 407
- Эберлейн 332, 348, 396, 408
 Эдвардс 188, 196, 382, 408
 Элиассон 18, 21, 24, 55, 60, 118, 149, 150, 152, 209, 351, 352, 408
 Эльсгольц Л. Э. 72, 406
 Эресман 99, 408
 Эрл 366, 367, 408
 Этенбург 342, 396, 408
- Яглом И. М. 171, 408
 Якоби 5, 7, 17, 315, 323, 408
 Якубович В. А. 171, 408
- Такенс 210, 219, 237, 322, 326, 402, 406
 Танака 63, 400
 Тимм 323—325, 406

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абелево пространство 395
 Абрахама теорема о бугристой метрике 232
 Адамара—Перрона теорема 381
 Аксиома видности 396
 Аносова поток 331, 332
 Арнольда теорема 322
 Ассоциированное расслоение 26—27

 Биркгофа—Льюиса теорема 197, 204, 238
 — нормальная форма 200
 Бугристая метрика 232, 296
 Буземана теорема 348
 Бэра пространство 209

 Векторные карты 351
 — расслоения 22
 Векторный атлас 351
 Вертикальное подпространство 23, 141
 Вполне интегрируемая гамильтонова система 321

 Гамильтона осредненная функция 370
 — уравнение 161
 — функция 160
 Гамильтонова система 160, 321
 Гамильтоново векторное поле 160
 Гамильтонов поток 161
 Геодезическая пульверизация 163, 384
 Геодезический поток 163, 384
 Гессиан 376
 Гильбертово многообразие 20
 Гиперболическая замкнутая геодезическая 191
 Главная часть локального представления 22
 Главные собственные значения 197
 Гомотопные отображения ДГА 288
 Горизонтальное подпространство 23, 141
 Градиентная динамическая система 377
 Градиентное поле 55
 Грассмана многообразие 97
 Грина теорема 320
 Громола—Мейера теорема 257
 Группа изотропии 81

 Действительное подпространство 172
 Дефект геодезической 121
 — критического подмногообразия 123
 Дифференциальная градуированная коммутативная алгебра (ДГА) 288
 Длина пространства 77

 Естественный атлас 37

 Закручивающее отображение 208
 Закручивающий симплектический диффеоморфизм 202
 Замкнутые геодезические 49, 62, 95

 Изотропное пространство 172
 Инвариантная относительно изометрии геодезическая 63
 Индекс геодезической 121, 156, 180
 — критического подмногообразия 123
 Индексная форма 118, 181
 Интеграл гамильтоновой системы 321
 — энергии 49

 Касательное расслоение 21, 22
 Категория пространства 77
 Квазипериодический поток 322
 Квиллена—Сулливана теорема 289
 Кинетическая энергия 161
 Клеро теорема 326
 Ковариантная производная 24, 26
 Когомологическая длина 77
 Колмогорова—Арнольда—Мозера теорема 329
 Кратное повторение кривой 81
 Кристоффеля символы 23, 351
 Критический уровень 66
 — элемент 81
 Критическое подмногообразие 122
 Кручение 27

 Леви-Чивита связность 28
 Лемма о делимости 278
 Лиувилля линейный элемент 324
 — система 323
 Локальные устойчивые многообразия 139, 146
 Люстерника—Фета теорема 70
 — Шнирельмана теория 369—370

 Матрицант 216
 Минимальная ДГА 288
 — модель 271, 289
 Минимизирующая геодезическая 344
 Многообразия гиперболического типа 330, 341
 — параболического типа 330, 348
 — (типа) Аносова 330
 — эллиптического типа 314
 Морса комплекс 139, 149, 155, 287, 379, 380
 — лемма обобщенная 124
 — неравенства обобщенные 137—138
 — теория 118, 369—370
 — функция 124

 Невырожденная геодезическая 123, 156

- Невырожденное критическое подмногообразие 123
 — подпространство 172
 Неустойчивое расслоение 331, 336
 Неустойчивые многообразия 139, 140, 154, 207
 Нормальная форма Биркгофа элементарного симплектического преобразования 200
- Область меньших значений 7**
 Однократная кривая 81
 Окружность на S^n 96
 Ориентируемая геодезическая 335
 Остаточное множество 209
 Изображение последования 167, 168
 — связности 351
- Пале** лемма 34
 — **Смейла** условие (C) 55
 Параметризованная окружность 29
 Перемежные действия — угол 322
 Периодическая точка 203
 — траектория 166
 — — отображения Пуанкаре 203
 Период траектории 166
 Периоды потока на торе 322
 Поверхность возращения 319—320
 Подчиненные гомотопические классы 72, 75, 90, 93
 Полный комплекс Морса 149
 Положительно определенные формы 27
 Полугруппа уменьшающих E деформаций 64
 Почти инвариантная геодезическая 344
 — периодическая геодезическая 344
 Производящая функция симплектического преобразования 199
 Пространство непараметризованных замкнутых кривых многообразия M 9, 83
 — — больших кругов на S^n 96
 — — окружностей на S^n 96
 — параметризованных больших кругов на S^n 96
 — — окружностей на S^n 96
 — петель 155
Пуанкаре отображение 167, 168
 — — линейное 184
 — — центральное 208
- Расслоения 22**
 Рациональный гомотопический тип 396
 Риманова метрика 27
 — связность 27
 Риманово векторное расслоение с действием группы $O(2)$ 123
 — многообразие 27
- Сверхбугристые метрики 296
 Связность 22, 351
 — без кручения 27
 — **Леви-Чивита** 28
Серра расслоение 69
 Сильно неустойчивое многообразие 140, 207
 — устойчивое многообразие 140, 154, 207
 Симметрические пространства ранга 1 315
 Симплектический атлас 158
 Симплектическое многообразие 158
Синга теорема 300
 Сопряженные точки 192, 336
 Специальные сингулярные симплексы 94
 Средний индекс геодезической 294
 Срез действия 85
Сулливана классы когомологий 272
- Теорема об инвариантных многообразиях 206**
 — о сфере 110
 — о трех замкнутых геодезических 306
 — сравнения для больших треугольников 342
 Типичное свойство 210
 Типовое число 262, 266, 369
- Условие $(GM)_p$ 268**
 — (C) 55
 Устойчивое многообразие 140, 154, 207
 — подпространство 191
 — расслоение 331, 336
- Ферми** координаты 210
Фета теорема 247, 254
 Фундаментальная матрица решений 216
- Характеристическое многообразие 258**
Хопфа—Ринова теорема 62
- Чеха** произведение 73
 Числа расщепления 196, 197
- Штекеля** линейный элемент 323
 — система 323
Штифеля многообразие 96
Шуберта многообразия 98
- Элементарные симплектические преобразования 198**
 Эллиптические координаты 323
Эрла—Илса теорема 366
- Якоби** поле 164
 — уравнение 164

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	17
ГЛАВА 1. Гильбертово многообразие замкнутых кривых	21
1.1. Гильбертовы многообразия	21
1.2. Многообразие замкнутых кривых	29
1.3. Риманова метрика и интеграл энергии на многообразии замкнутых кривых	40
1.4. Условие (C) Пале—Смейла и его следствия	51
ГЛАВА 2. Теория Морса — Люстерника — Шнирельмана на многообразии замкнутых кривых	64
2.1. Теория Люстерника — Шнирельмана на AM	64
2.2. Пространство непараметризованных замкнутых кривых	78
2.3. Замкнутые геодезические на сферах	95
2.4. Теория Морса на AM	118
2.5. Комплекс Морса	138
ГЛАВА 3. Геодезический поток	158
3.1. Гамильтоновы системы	158
3.2. Теорема об индексе для замкнутых геодезических	171
3.3. Свойства отображения Пуанкаре	197
Добавление к § 3.3. Теорема Биркгофа — Льюиса о неподвижной точке. <i>Юрген Мозер</i>	238
ГЛАВА 4. Существование нескольких замкнутых геодезических	246
4.1. Критические точки на PM и теорема Фета	247
4.2. Теорема Громола — Мейера	257
4.3. Существование бесконечного числа замкнутых геодезических	371
Добавление к § 4.3. Минимальная модель рационального гомотопического типа многообразия AM . <i>Дж. Сакс</i>	388
4.4. Несколько теорем о существовании в типичной ситуации	393
ГЛАВА 5. Другие результаты	301
5.1. Теорема о трех замкнутых геодезических	301
5.2. Некоторые многообразия эллиптического типа	314
5.3. Геодезические на многообразиях гиперболического и параболического типа	330
Примечания редактора перевода	350
Список литературы	397
Указатель обозначений	409
Именной указатель	410
Предметный указатель	412

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛИ

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

В. Клингенберг

ЛЕКЦИИ О ЗАМКНУТЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Старший научный редактор

Н. И. Плужникова

Младший научный редактор

Ю. С. Андреева

Художник А. В. Шипов

Художественный редактор Е. И. Шаповалов

Технический редактор И. Г. Кузнецова

Корректор В. И. Киселева

ИБ № 2341

Сдано в набор 81.02.09.

Подписано к печати 82.04.29.

Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 2.

Гарнитура литературная. Печать высокая.

Объем 13 бум. л. Усл. печ. л. 26. Усл. кр.-отт. 26.

Уч.-изд. л. 27,1. Изд. № 1/0858.

Тираж 6200 экз. Зак. № 224. Цена 3 р. 40 к.

Издательство «Мир»

129820, Москва, И-110, ГСП

1-й Рижский пер., 2.

Набрано и сматрицировано в Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградском производственно-техническом объединении «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

197136, Ленинград, П-136. Чкаловский пр., 15. Отпечатано в Ленинградской типографии № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10. Зак. 173.