Дж. АДАМС

ЛЕКЦИИ ПО ГРУППАМ ЛИ

Перевод с английского
Н. Р. КАМЫШАНСКОГО

Под редакцией
А. Л. ОНИЩИКА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

22.14
А 28
УДК 519.46

Lectures on Lie groups
by

J. Frank Adams

University of Manchester

W. A. Benjamin, Inc.
New York · Amsterdam
1969

Лекции по группам Ли. Адамс Дж.: Пер. с англ.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 000 с.

Книга известного американского математика посвящена теории компактных групп Ли и их линейных представлений. При этом подробно изучаются вещественные и симплектические представления. После введения основных понятий излагается теория максимальных торов в компактных группах Ли, затем рассматриваются веса, корни, геометрия диаграмм и классические результаты Г. Вейля.

Книга будет интересна математикам всех специальностей. Ее смогут использовать студенты университетов и пединститутов, знакомые с основными понятиями алгебры и топологии.

Библ. 34.

Джон Френк Адамс

ЛЕКЦИИ ПО ГРУППАМ ЛИ

М., 1979 г., 144 стр.

Редактор *Ф. И. Кизнер*

Техн. редактор *Е. В. Морозова* Корректор *Е. В. Сидоркина*

ИБ № 11239.

Сдано в набор 03.01.79. Подписано к печати 21.05.79. Бумага 84×108$^1/_{32}$, тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 7,56. Уч.-изд. л. 7,28. Тираж 12 500 экз. Заказ № 254. Цена книги 50 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано в тип. № 4 изд-ва «Наука», Новосибирск, 77, Станиславского, 25. заказ 613, с матриц ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского производственно-технического объединения «Печатный Двор» имени А. М. Горького «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская, 26.

А $\frac{20203-097}{053(02)-79}$ 27-79. 1702040000

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга основана на курсе лекций по теории представлений компактных групп Ли, прочитанном мной в Манчестерском университете в 1965 году, и, в частности, на конспекте этого курса, подготовленном доктором Майклом Мазером.

Может возникнуть вопрос, почему математик, не являющийся специалистом по группам Ли, решил опубликовать такой курс лекций. Ответ отчасти заключается в очень ограниченных и скромных целях этого курса, а отчасти — в продолжавшемся спросе на конспект лекций, который, по-видимому, показывает, что ряд читателей сочувствует этим целям. Я считаю, что теория представлений компактных групп Ли является красивой, приносящей удовлетворение и по существу простой главой математики и что некоторые основные сведения из этой теории заслуживают того, чтобы их знали математики разных специальностей. В своих первоначальных лекциях я обращался главным образом к слушателям — топологам. Если тополог попытается читать статью Бореля и Хирцебруха «Характеристические классы и однородные пространства» [3], то он обнаружит, что ему необходимо знать основные факты о максимальных торах, весах и корнях групп Ли. Если он попытается читать, например, «Лекции по K-теории» Ботта [4], то он обнаружит, что ему надо знать две главные теоремы теории представлений компактных групп Ли (см. [4 (№ 3), с. 4, теоремы I и II]). Эти теоремы появляются в современной «одежде», но они восходят к Г. Вейлю [22]. Я привел эти примеры для иллюстрации, но они достаточно типичны. Кроме того, они помогают указать основную программу по группам Ли, которая может быть полезна студентам многих различных специальностей — от функционального анализа и дифференциальной геометрии до алгебры. Цель данной книги состоит в том, чтобы охватить эту основную программу с доказательствами, изложенными в разумно сжатом виде. Материал о максимальных торах, весах и корнях появляется в главах 4 и 5. Две вышеупомянутые теоремы теории представлений появляются в главе 6 в качестве теоремы 6.20 и теоремы 6.41. Первые три главы позволяют начать доказательства более или менее сначала.

В этой книге нет или почти нет претензий на оригинальность; просто я постарался собрать воедино идеи доказательств, которые показались мне наиболее привлекательными в классических первоисточниках. Возможно, в следующих местах доказательства отклоняются от классических.

(i) В главе 3, посвященной элементарной теории представлений, я действовал инвариантным и бескоординатным способом даже в тех случаях, когда так обычно не делают. Моей отправной точкой здесь было предложение Шатрика: доказать соотношения ортогональности для характеров, не опираясь на соотношения ортогональности для матричных элементов представлений (см. 3.33 (ii) и 3.34 (i)).

К сожалению, традиционное доказательство полноты системы характеров проводится с использованием соотношений ортогональности для матричных элементов представлений. Поэтому мне пришлось переписать его также в инвариантной форме (см. 3.46 и 3.47).

В литературе, с которой мне приходилось иметь дело, я не видел таких «инвариантных» доказательств, но я бы не хотел считать, что они не известны специалистам.

(ii) В той же главе особое внимание я уделил вещественным и симплектическим представлениям, важным для топологов; при этом я предпочел те методы, которые одновременно применимы в вещественном и симплектическом случаях.

(iii) Теорема 5.47 позволяет сразу получить фундаментальную группу компактной связной группы Ли из ее штифелевой диаграммы; это утверждение, конечно, хорошо известно специалистам и, несомненно, подразумевается в работе Штифеля, но я не помню, чтобы я видел точную формулировку или доказательство этого утверждения в источниках, которые просматривал *).

(iv) Чтобы придать смысл словам «старший вес», обычно вводят лексикографическое упорядочение весов; вместо этого я предпочел воспользоваться частичным упорядочением, которое заведомо инвариантно и которое, кажется, обладает некоторыми техническими преимуществами (см. 6.22 и 6.25). Надеюсь, что это отступление от традиций может привлечь последователей.

Я очень признателен Борелю, Хариш-Чандре и, особенно, Самельсону за консультации по группам Ли и теории представлений. Кроме того, мне была полезна работа Суона «Заметки о максимальных торах и т. п.» (Swan R. Note on Maximal Tori, etc.). Я также очень благодарен Майклу Мазеру, который подготовил конспект первоначального курса лекций. В частности, ему принадлежит один прием в настоящем доказательстве теоремы 2.19, что позволило уменьшить первоначальный объем лекций за счет устранения большого количества стандартного материала о связи между группой Ли и ее алгеброй Ли. Он также сильно упростил доказательство леммы 5.55. Наконец, я благодарен Шатрику за указанное выше предложение.

---

*) Соответствующая формулировка и доказательство имеются в статье [28] и в книге [32]. — *Прим. перев.*

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Определения. Пусть V, W — конечномерные векторные пространства над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Пусть U — открытое подмножество пространства V, f — отображение множества U в W и x — точка из U. Отображение f называется *дифференцируемым в точке* x, если существует такое линейное отображение $f'(x)$: $V \to W$, что

$$f(x+h) = f(x) + (f'(x))(h) + o(|h|)\ ^{*}).$$

Если f дифференцируемо в каждой точке области U, то мы говорим, что f *дифференцируемо на* U. В этом случае мы имеем функцию

$$f'\colon\ U \to \operatorname{Hom}(V,\ W)$$

и можем поставить вопрос о ее дифференцируемости. Мы говорим, что отображение f *гладко* (или *класса* C^∞) на U, если каждая из функций f, f', f'', ... дифференцируема на U (конечно, существование каждой из них зависит от того, будет ли определена и дифференцируема предыдущая).

1.2. Определения. Если X — топологическое пространство и V — конечномерное векторное пространство, то *картой* на X называется любой гомеоморфизм φ_α: $U_\alpha \to X_\alpha$, где $U_\alpha \subset V$ и $X_\alpha \subset X$ — открытые подмножества.

Атласом называется набор карт $\{\varphi_\alpha\}$, такой, что $\bigcup_\alpha X_\alpha = X$. Атлас называется *гладким*, если фукции $\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha$, определенные на $\varphi_\alpha^{-1}(X_\alpha \cap X_\beta)$, являются гладкими.

---

*) Через $o(|h|)$ обозначается вектор, норма которого при $h \to 0$ бесконечно мала по сравнению с нормой $|h|$ вектора h (это определение не зависит от выбора нормы). — *Прим. перев.*

Пусть X, Y — топологические пространства с гладкими атласами $\{\varphi_\alpha\}$ и $\{\psi_\beta\}$ соответственно. Отображение f: $X \to Y$ называется *гладким*, если гладкими являются отображения $\psi_\beta^{-1} f \varphi_\alpha$, определенные на $\varphi_\alpha^{-1}(X_\alpha \cap f^{-1} Y_\beta)$. Заметим, что композиция двух гладких отображений гладка и что тождественное отображение пространства с гладким атласом является гладким отображением.

Два атласа $\{\varphi_\alpha\}$, $\{\psi_\beta\}$ на X называются *эквивалентными*, если отображения

$$1\colon X, \{\varphi_\alpha\} \to X, \{\psi_\beta\},$$
$$1\colon X, \{\psi_\beta\} \to X, \{\varphi_\alpha\}$$

являются гладкими.

Дифференцируемым (или *гладким*) *многообразием* называется хаусдорфово пространство с заданным на нем классом эквивалентности гладких атласов. Этот класс эквивалентности называется *дифференциальной структурой* многообразия.

1.3. Предложение. *Если X, Y — гладкие многообразия, то на топологическом пространстве $X \times Y$ можно единственным способом задать структуру гладкого многообразия, удовлетворяющую следующим условиям*:

(i) *проекции π_1: $X \times Y \to X$ и π_2: $X \times Y \to Y$ являются гладкими отображениями*;

(ii) *отображение f: $Z \to X \times Y$ гладко в том и только том случае, когда отображения $\pi_1 f$ и $\pi_2 f$ являются гладкими.*

Доказательство. Если дана карта φ_α на X и карта ψ_β на Y, то образуем карту $\varphi_\alpha \times \psi_\beta$ на пространстве $X \times Y$. Сделаем это для каждой пары α, β. Оставшаяся часть доказательства заключается в проверке необходимых свойств и может быть предоставлена читателю.

1.4. Определения. *Группой Ли* G называется

(i) гладкое многообразие и одновременно

(ii) группа с умножением μ: $G \times G \to G$ и взятием обратного элемента ι: $G \to G$, такая, что

(iii) μ и ι — гладкие отображения.

Гомоморфизмом θ: $G \to H$ группы Ли G в группу Ли H называется

(i) гомоморфизм групп и одновременно

(ii) гладкое отображение.

1.5. Примеры.

1. Пространство $\mathbb{R}^n$, которое рассматривается как группа по сложению, с атласом, состоящим только из одной карты, заданной тождественным отображением.

2. Тор $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, где $\mathbb{Z}^n$ — множество точек пространства $\mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, который рассматривается как факторгруппа группы Ли $\mathbb{R}^n$, с картами, заданными при помощи ограничения проекции $\mathbb{R}^n \to T^n$ на малые открытые множества.

3. Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Тогда множество $\operatorname{Aut} V$ автоморфизмов пространства V есть открытое подмножество векторного пространства $\operatorname{Hom}(V, V)$, заданное условием $\det \neq 0$. Поэтому $\operatorname{Aut} V$ является гладким многообразием и группой относительно композиции автоморфизмов. Умножение гладко, поскольку оно задается многочленами $\left(\sum_j a_{ij} b_{jk}\right)$, и взятие обратного элемента гладко, поскольку оно задается многочленами, деленными на определитель. Следовательно, $\operatorname{Aut} V$ — группа Ли. Группа Ли $\operatorname{Aut} \mathbb{R}^n$ обозначается через $\operatorname{GL}(n, \mathbb{R})$.

Эта конструкция работает также над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и телом кватернионов $\mathbb{H}$. Например, $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ представляет собой линейное подпространство в $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ и $\operatorname{Aut}_{\mathbb{C}} V = \operatorname{Aut}_{\mathbb{R}} V \cap \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$. Значит, $\operatorname{Aut}_{\mathbb{C}} V$ является открытым подмножеством в $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$.

1.6. Определение касательного расслоения гладкого многообразия X. Пусть $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to X_\alpha\}$ — атлас, карты которого определены на подмножествах векторного пространства V. Возьмем дизъюнктное объединение пространств $X_\alpha \times V$ по всем α и для любого $x \in X_\alpha \cap X_\beta$ отождествим точку $(x, v) \in X_\alpha \times V$ с точкой $(x, (\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)' v) \in X_\beta \times V$. Полученное пространство обозначим через $T(X)$ и определим проекцию $p: T(X) \to X$ с помощью проекции каждого произведения на первый сомножитель. Это — *касательное расслоение*. Оно является инвариантом многообразия X.

Множество $p^{-1}x$ называется *касательным пространством* к многообразию X в точке $x \in X$ и обозначается через X_x, а точки пространства X_x называются *касательными векторами* к X в точке x.

Отметим, что пространство $T(X)$ можно очевидным способом превратить в гладкое многообразие, при этом проекция p становится гладким отображением.

Если задано гладкое отображение $f\colon X \to Y$, то можно следующим образом построить естественное гладкое отображение расслоений $f_*\colon T(X) \to T(Y)$. Для $x \in X_\alpha$ и $fx \in Y_\beta$ положим $f_*(x, v) = (fx, (\psi_\beta^{-1} f \varphi_\alpha)' v)$.

1.7. Обозначение. Пусть G — группа Ли с единицей e. Мы пишем $L(G)$ вместо G_e и $L(f)$ вместо $f_* \mid G_e$. Тогда L — функтор из категории групп Ли в категорию векторных пространств. В свете следующего примера мы будем писать также f' вместо f_*.

1.8. Пример. Рассмотрим пример 1.5.1. Касательное пространство в точке 0 многообразия $\mathbb{R}^n$ можно отождествить с $\mathbb{R}^n$ посредством указанной в этом примере карты. Если $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, то $f_* \mid \mathbb{R}^m_0 = f'$ при этом отождествлении.

1.9. Определения. *Гладким векторным полем* на многообразии X называется гладкое сечение его касательного расслоения, т. е. гладкое отображение λ: $X \to T(X)$, такое, что $p\lambda = 1$.

Пусть G — группа Ли. Для любого $x \in G$ определим левый сдвиг $L_x\colon G \to G$, положив $L_x(g) = xg$; это отображение гладко. Гладкое векторное поле λ на G называется *левоинвариантным*, если для каждого $x \in G$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} T(G) & \xrightarrow{L_{x*}} & T(G) \\ \uparrow{\scriptstyle\lambda} & & \uparrow{\scriptstyle\lambda} \\ G & \xrightarrow{L_x} & G \end{array}$$

1.10. Определение. Пусть G — группа Ли. Для каждого $x \in G$ определим отображение $A_x\colon G \to G$ формулой $A_x(g) = xgx^{-1}$. Получим гладкий автоморфизм. Следовательно, определено линейное отображение A_x': $G_e \to G_e$, т. е. $A_x' \in \operatorname{Aut} G_e$. Значит, соответствие $x \longmapsto A_x'$ определяет отображение $\operatorname{Ad}\colon G \to \operatorname{Aut} G_e$. Оно является гладким гомоморфизмом *).

---

*) Гомоморфизм Ad обычно называют присоединенным представлением группы G. Его гладкость легко следует из того, что отображение $G \times G \to G$, переводящее (x, g) в xgx^{-1}, гладко. — *Прим. перев.*

Глава 2

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ, ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ И Т. Д.

2.1. Лемма. *Пусть в окрестности U точки* 0 *пространства $\mathbb{R}^n$ задано гладкое векторное поле $v(x)$. Рассмотрим уравнения*

$$f'(t, 1) = v(f(t)), \quad f(0) = 0$$

с неизвестной функцией $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что эти уравнения имеют решение на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$; это решение единственно и гладко.

Сформулированная лемма является частным случаем следующего более общего результата.

2.2. Лемма. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$ — окрестности точек* 0 *и y_0 соответственно. Пусть $v(x, y)$ — векторное поле в U, гладко зависящее от $x \in U$ и $y \in V$* *). *Считая $y \in V$ фиксированным, рассмотрим уравнения*

$$f'(t, 1) = v(f(t), y), \quad f(0) = 0$$

с неизвестной функцией $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и окрестность V' точки y_0 в $\mathbb{R}^m$, такие, что для каждой точки $y \in V'$ существует решение, определенное на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$; это решение единственно и гладко зависит от $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ и $y \in V'$.

Доказательство. Мы отсылаем читателя к книгам [12, с. 132, предложение 1], [5, гл. 2, теорема 4.1], [2, приложение, раздел II] или [8, гл. 9, теорема 1] **).

---

*) Это значит, что задано гладкое отображение $v\colon U \times V \to \mathbb{R}^n$. — *Прим. ред.*

**) См. также [24, гл. 4, § 31, п. 8] или [25, гл. 10, § 1]. — *Прим. перев.*

2.3. Определение. *Однопараметрической подгруппой* в группе Ли G называется гомоморфизм $\theta\colon \mathbb{R}^1 \to G$ групп Ли, где $\mathbb{R}^1$ — группа Ли по сложению с атласом, состоящим из единственной карты, заданной тождественным отображением.

2.4. Пример. В торе $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ положим $\theta(t) = (t, ct)$ для любой постоянной c.

2.5. Пусть θ — однопараметрическая подгруппа в G. Пусть $(0, 1)$ — единичный касательный вектор в точке $0 \in \mathbb{R}^1$. Сопоставим подгруппе θ вектор $\theta'(0, 1) \in G_e$. Тогда справедлива

2.6. Теорема. *Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между однопараметрическими подгруппами в G и векторами пространства G_e.*

Для доказательства нам потребуется

2.7. Лемма. *Пусть X — гладкое многообразие, $v(x)$ — гладкое векторное поле на X и θ, $\varphi\colon [a, b] \to X$ — гладкие отображения, удовлетворяющие условиям*

$$\theta'(t, 1) = v(\theta(t)),$$
$$\varphi'(t, 1) = v(\varphi(t)),$$
$$\theta(a) = \varphi(a).$$

Тогда $\theta(t) = \varphi(t)$ для всех $t \in [a, b]$.

Доказательство. Пусть c — наименьшая верхняя грань множества чисел d, для которых $\theta(t) = \varphi(t)$ на отрезке $[a, d]$. Тогда $\theta(c) = \varphi(c)$ по непрерывности. Если $c < b$, то выберем локальные координаты в точке $\theta(c) = \varphi(c)$ и, применив лемму 2.1, получим, что $\theta(t) = \varphi(t)$ на некотором интервале $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, но это противоречит определению числа c. Следовательно, $c = b$.

Доказательство теоремы 2.6.

(i) Единственность. Предположим, что θ соответствует вектору $v \in G_e$. Вектор $(0, 1)$ можно продолжить до левоинвариантного векторного поля $(t, 1)$ на $\mathbb{R}^1$, а вектор v — до левоинвариантного векторного поля $v(x)$ на G *). Рассмотрев диаграмму касательных про-

---

*) Поле $v(x)$ определяется формулой

$$v(x) = L'_x v \qquad (x \in G).$$

Его левая инвариантность означает, что

$$v(gx) = L'_g v(x).$$

— *Прим. ред.*

странств, соответствующую коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^1 & \xrightarrow{\theta} & G \\ {\scriptstyle L_t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L_{\theta(t)}} \\ \mathbb{R}^1 & \xrightarrow{\theta} & G \end{array}$$

мы увидим, что $\theta'(t, 1) = L'_{\theta(t)}v = v(\theta(t))$. Значит, в силу 2.7 отображение θ единственно.

(ii) Существование. Зададим вектор $v \in G_e$ и продолжим его до левоинвариантного векторного поля $v(x)$ на G. Тогда, согласно лемме 2.1, уравнения $\theta'(t, 1) = v(\theta(t))$, $\theta(0) = e$ имеют решение для $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Покажем сначала, что $\theta(s)\theta(t) = \theta(s+t)$ при $|s| < \frac{1}{2}\varepsilon$, $|t| < \frac{1}{2}\varepsilon$. При фиксированном s обе функции $\theta(s)\theta(t)$ и $\theta(s+t)$ удовлетворяют уравнениям $\varphi'(t, 1) = v(\varphi(t))$, $\varphi(0) = \theta(s)$. Следовательно, $\theta(s)\theta(t) = \theta(s+t)$ по лемме 2.7.

Теперь следующим образом определим отображение ψ: $\mathbb{R}^1 \to G$. Для каждого $t \in \mathbb{R}^1$ выберем такое положительное целое N, что $\left|\frac{t}{N}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, и положим $\psi(t) = \left(\theta\left(\frac{t}{N}\right)\right)^N$. Отображение ψ определено корректно, так как если M — другое такое целое число, то в силу результата предыдущего абзаца имеем $\left(\theta\left(\frac{t}{MN}\right)\right)^N = \theta\left(\frac{t}{M}\right)$ *), откуда $\left(\theta\left(\frac{t}{N}\right)\right)^N = \left(\theta\left(\frac{t}{MN}\right)\right)^{MN} = \left(\theta\left(\frac{t}{M}\right)\right)^M$. Далее, ψ является гомоморфизмом групп, ибо если $\left|\frac{s}{N}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\left|\frac{t}{N}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, то

$$\psi(s+t) = \left(\theta\left(\frac{s+t}{N}\right)\right)^N = \left(\theta\left(\frac{s}{N}\right)\right)^N \left(\theta\left(\frac{t}{N}\right)\right)^N = \psi(s)\psi(t).$$

Наконец, отображение ψ гладко и продолжает θ. Следовательно, ψ — однопараметрическая подгруппа и $\psi'(0, 1) = v$.

---

*) Действительно, легко доказать индукцией по N, что $\theta(Ns) = \theta(s)^N$ для любого натурального N и такого s, что $|s| < \frac{\varepsilon}{2N}$. Затем положим $s = \frac{t}{M}$. — *Прим. ред.*

2.8. Определение *экспоненциального отображения.* Определим отображение $\exp\colon G_e \to G$ следующим образом. Пусть $v \in G_e$, и пусть θ_v — соответствующая однопараметрическая подгруппа в G. Тогда положим $\exp(tv) = \theta_v(t)$.

Мы должны еще доказать, что $\theta_v(t)$ зависит только от tv. Но при фиксированном s функция $\theta_v(st)$ является однопараметрической подгруппой в G, соответствующей вектору sv *). Значит, $\theta_v(st) = \theta_{sv}(t)$, так что $\theta_v(s) = \theta_{sv}(1)$.

2.9. Теорема. *Отображение* exp *гладко.*

Доказательство. Пусть $v_0 \in G_e$. Покажем, что exp является гладким отображением в окрестности точки v_0.

Функция $\theta_v(t)$ служит решением дифференциального уравнения

$$\theta_v'(t,\ 1) = v(\theta_v(t)) = L'_{\theta_v(t)}v.$$

Но $L'_x v$ — гладкая функция от $x \in G$ и $v \in G_e$. Поэтому (см. 2.2) это решение является гладкой функцией от t и v, если $|t| < \varepsilon$, а v изменяется в окрестности точки v_0.

Возьмем такое положительное целое N, что $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Тогда $\exp v = \theta_v(1) = \left(\theta_v\left(\frac{1}{N}\right)\right)^N$ и, следовательно, есть гладкая функция от v в окрестности точки v_0.

2.10. Замечание. Отображение $\exp\colon G_e \to G$ индуцирует тождественное отображение $\exp_* \mid G_e = 1\colon G_e \to G_e$.

2.11. Предложение. *Отображение* exp *естественно. Это значит, что если задан гомоморфизм* $\varphi\colon G \to H$ *групп Ли, индуцирующий отображение* $\varphi'\colon G_e \to H_e$, *то коммутативна следующая диаграмма*:

$$\begin{array}{ccc} G_e & \xrightarrow{\varphi'} & H_e \\ {\scriptstyle\exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\exp} \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

Доказательство. Пусть $v \in G_e$, и пусть $\theta\colon \mathbb{R}^1 \to G$ — соответствующая однопараметрическая подгруппа в G. Тогда $\varphi\theta\colon \mathbb{R}^1 \to H$ — однопараметрическая подгруппа в H, отвечающая касательному вектору $\varphi' v$,

---

*) В самом деле, $\theta_v(st) = (\theta_v \circ F_s)(t)$, где $F_s(t) = st$. Значит, касательный вектор к $\theta_v(st)$ имеет вид $(\theta_v \circ F_s)'(0,\ 1) = (\theta_v' \circ F_s')(0,\ 1) = \theta_v'(0,\ s) = sv$. — *Прим. перев.*

поскольку взятие производной естественно. Следовательно, $\exp \varphi' v = \varphi\theta(1) = \varphi \exp v$.

2.12. Пример. Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство. Возьмем в качестве G группу $\mathrm{Aut}\, V$, которая является открытым подмножеством векторного пространства $\mathrm{Hom}(V, V)$. Пространство G_e можно отождествить с $\mathrm{Hom}(V, V)$. Пусть $A \in \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Тогда мы утверждаем, что *)

$$\exp A = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \ldots$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $1 + At + \frac{A^2t^2}{2} + \ldots + \frac{A^nt^n}{n!} + \ldots$ Легко видеть, что это гладкий гомоморфизм из $\mathbb{R}^1$ в $\mathrm{Aut}\, V$, который является однопараметрической подгруппой, отвечающей касательному вектору A **). Следовательно,

$$\exp A = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots$$

2.13. Пример. Рассмотрим группу Ли $G = T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Тогда $G_e = \mathbb{R}^n$ и $\exp$ можно отождествить с накрывающим отображением $\mathbb{R}^n \to T^n$.

2.14. Теорема. *Отображение* $\exp$ *является диффеоморфизмом некоторой окрестности точки* $0 \in G_e$ *на некоторую окрестность единицы* $e \in G$.

---

*) Покажем, что указанный ряд сходится для любого $A \in \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Для этого достаточно доказать, что если $v \in V$, то сходится ряд $|v| + |Av| + \ldots + \frac{|A^nv|}{n!} + \ldots$, где $|\ |$ — какая-либо норма в V. Возьмем такое положительное M, что $|Av| \leqslant \leqslant M|v|$ для всех $v \in V$. Тогда $|A^nv| \leqslant M^n|v|$ и, следовательно,

$$|v| + |Av| + \ldots + \frac{|A^nv|}{n!} + \ldots \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + M + \ldots + \frac{M^n}{n!} + \ldots\right)|v| = |v|\, e^M.$$

— *Прим. перев.*

**) Действительно, ясно, что функция $\theta(t) = 1 + tA + \frac{t^2}{2}A + \ldots$ гладкая и что $\theta'(0, 1) = A$. Дифференцируя эту функцию, находим, что она удовлетворяет уравнению

$$\theta'(t, 1) = \theta(t)A = L'_{\theta(t)}(A).$$

Как видно из доказательства теоремы 2.6, θ — однопараметрическая подгруппа. — *Прим. ред.*

Доказательство. Это сразу следует из замечания 2.10 и из теоремы о неявной функции. (См. [12, с. 24, теорема 1].) *)

2.15. Теорема. *Пусть* $G_e = V_1 \oplus V_2$. *Определим отображение* φ: $G_e \to G$, *положив* $\varphi(v_1, v_2) = \exp v_1 \exp v_2$. *Тогда* φ — *диффеоморфизм некоторой окрестности точки* $0 \in G_e$ *на некоторую окрестность единицы* $e \in G$.

Доказательство. Отображение φ является композицией отображений $V_1 \oplus V_2 \xrightarrow{\exp \times \exp} G \times G \xrightarrow{\mu} G$ и поэтому дифференцируемо. Далее, отображение φ' тождественно и на V_1, и на V_2, а следовательно, оно тождественно на G, и доказательство можно закончить так же, как доказательство теоремы 2.14.

2.16. Предложение. *Пусть* G_1 — *связная компонента единицы в* G, *и пусть* $S \subset G_1$ — *некоторая окрестность элемента* e. *Тогда подгруппа* $\mathrm{gp}\{S\}$, *порожденная множеством* S, *совпадает с* G_1.

Доказательство. Ясно, что $\mathrm{gp}\{S\} \subset G_1$ **). Но $\mathrm{gp}\{S\}$ — открытая подгруппа в G_1, поэтому все ее смежные классы открыты в G_1. Значит, $\mathrm{gp}\{S\}$ является также замкнутым подмножеством в G_1, откуда $\mathrm{gp}\{S\} = G_1$.

2.17. Теорема. *Если группа* G *связна, то гомоморфизм* θ: $G \to H$ *групп Ли полностью определяется индуцированным отображением* θ': $G_e \to H_e$.

Доказательство. Согласно предложению 2.11, мы имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} G_e & \xrightarrow{\theta'} & H_e \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{\theta} & H \end{array}$$

Таким образом, гомоморфизм θ определяется гомоморфизмом θ' по крайней мере на подгруппе в G, порожденной образом отображения exp. Но этот образ является окрестностью точки e в G, так что гомоморфизм θ однозначно определяется на всей группе G.

---

*) См. также [25, гл. 10, § 2]. — *Прим. перев.*

**) Автор использует тот факт, что G_1 — подгруппа в G. Для доказательства этого утверждения заметим, что для любого $x \in G_1$ множество $L_x(G_1)$ связно и $x = L_x(e) \in G_1 \cap L_x(G_1)$. Значит, $L_x(G_1) \subset G_1$, т. е. $xy \in G_1$ для любого $y \in G_1$. Аналогично доказывается, что $x^{-1} \in G_1$ для любого $x \in G_1$. На самом деле, G_1 — нормальная подгруппа в G. — *Прим. ред.*

2.18. Лемма. *Пусть φ_α: $U_\alpha \to G_\alpha$ — карта на G, которая переводит $0 \in G_e$ в $e \in G$. Тогда, опуская φ_α, мы можем в окрестности точки e в G записать равенство $xy = x + y + o(r)$, где $r = r(x, y)$ обозначает расстояние от (x, y) до (e, e) в G относительно какой-либо метрики.*

Доказательство. Так как умножение в G дифференцируемо, то найдутся постоянный вектор a и постоянные линейные функции b, c: $G_e \to G_e$, такие, что $xy = a + bx + cy + o(r)$. Положив $x = e$, мы получим $y = a + cy + o(r)$, откуда $a = 0$, $c = 1$. Аналогично получим, что $b = 1$. Следовательно, $xy = x + y + o(r)$.

2.19. Теорема. *Любая связная абелева группа G имеет вид $T^a \times \mathbb{R}^b$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $\exp$: $G_e \to G$ — гомоморфизм групп. Поскольку группа G абелева, имеем

$$\exp s \exp t = \left(\exp \frac{s}{N}\right)^N \left(\exp \frac{t}{N}\right)^N = \left(\exp \frac{s}{N} \exp \frac{t}{N}\right)^N$$

и в силу 2.18 и 2.14

$$\exp s \exp t = \left[\exp\left(\frac{s}{N} + \frac{t}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right]^N,$$

где s, t считаются фиксированными, а N — переменным. Отсюда

$$\exp s \exp t = \exp(s + t + o(1)) = \exp(s + t).$$

Таким образом, $\exp$ — гомоморфизм групп, сюръективный в силу предложения 2.16.

Рассмотрим $K = \operatorname{Ker} \exp$. Поскольку $\exp$ является гомоморфизмом групп, то из теоремы 2.14 следует, что K — дискретная подгруппа в G_e. Но дискретная подгруппа вещественного векторного пространства является свободной абелевой группой с образующими $g_1, \ldots, g_r$, линейно независимыми над $\mathbb{R}$. (Это доказывается индукцией по размерности векторного пространства *).) Дополним множество образующих до базиса в G_e. Тогда K есть множество точек пространства G_e с координатами

---

*) Доказательство см., например, в [26, гл. VII, § 1]. — *Прим. ред.*

$(n_1, \ldots, n_r, 0, \ldots, 0)$, где $n_i \in \mathbb{Z}$. Значит, $G \cong G_e/K \cong$ $\cong T^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ *).

2.20. Следствие. *Связная компактная абелева группа Ли является тором.*

2.21. Упражнение. Классифицируйте компактные абелевы группы Ли.

2.22. Определение подмногообразия. Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство и W — подпространство в V. Пусть M — гладкое многообразие и N — подмножество в M. Карта φ_α: $V_\alpha \to M_\alpha$ называется *правильной*, если

(i) $M_\alpha \cap N = \varnothing$ (пустое множество) или

(ii) φ_α отображает $V_\alpha \cap W$ на $M_\alpha \cap N$.

Атлас называется *правильным*, если все его карты правильны.

Подмножество N называется *подмногообразием*, если в дифференциальной структуре многообразия M существует правильный атлас.

Эквивалентность правильных атласов, как и раньше, определяется требованием, чтобы тождественное отображение было гладким.

2.23. Предложение. *Если N — подмногообразие в M, то N можно снабдить такой дифференциальной структурой многообразия, что*

(i) *вложение многообразия N в M гладко и*

(ii) *отображение $P \to N$ гладко тогда и только тогда, когда композиция $P \to N \to M$ является гладкой.*

Доказательство очевидно и предоставляется читателю.

2.24. Замечание. Из определения следует, что $T(N)$ вкладывается в $T(M)$.

---

*) Дифференциальную структуру в G_e/K можно задать так же, как это было сделано в 1.5 для $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Если алгебраический изоморфизм групп Ли является локальным диффеоморфизмом, то, очевидно, он также является изоморфизмом групп Ли. Поэтому из теоремы 2.14 следует, что алгебраический изоморфизм $x+K \longmapsto \exp x$ группы G_e/K на группу G является изоморфизмом групп Ли. Изоморфизм $G_e/K \cong T^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ можно, например, получить так. Пусть $G_e = \mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^{n-r}$, где $K \subset \mathbb{R}^r$. Тогда соответствие $(x+y)+K \longmapsto (x+K)+y$, где $x \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}^{n-r}$, определяет алгебраический изоморфизм G_e/K на $T^r \times \mathbb{R}^{n-r}$, ограничение которого на достаточно малую окрестность единицы является диффеоморфизмом. — *Прим. перев.*

2.25. Упражнение. Если N_1, N_2 — подмногообразия в M_1, M_2 соответственно, то $N_1 \times N_2$ — подмногообразие в $M_1 \times M_2$, причем его дифференциальная структура как подмногообразия совпадает с дифференциальной структурой произведения многообразий.

2.26. Предложение. *Если G — группа Ли и H — подмногообразие и подгруппа в G одновременно, то H — группа Ли.*

Доказательство. Примените предложение 2.23 и упражнение 2.25 к отображениям пар μ: $G \times G$, $H \times H \to G$, H и ι: G, $H \to G$, H.

2.27. Теорема. *Всякая замкнутая подгруппа H группы Ли G является подмногообразием.*

Доказательство. Следующие три леммы составляют доказательство теоремы.

2.28. Лемма. *Предположим, что пространство G_e в теореме 2.27 снабжено нормой. Допустим, что $0 \neq h_n \in G$ — последовательность точек, такая, что $\exp h_n \in H$, $h_n \to 0$ и $\frac{1}{|h_n|} h_n \to v \in G_e$. Тогда $\exp(tv) \in H$ для всех $t \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Ясно, что $\frac{t}{|h_n|} h_n \to tv$ и $|h_n| \to 0$. Поэтому можно выбрать такие целые m_n, что $m_n |h_n| \to t$. Тогда $\exp m_n h_n \to \exp tv$. Но $\exp m_n h_n = (\exp h_n)^{m_n} \in H$ и H замкнута. Следовательно, $\exp tv \in H$, что и требовалось доказать.

Пусть W — множество таких векторов tv в G_e. Тогда $\exp W \subset H$.

2.29. Лемма. *Множество W является векторным подпространством в G_e.*

Доказательство. Очевидно, из $w \in W$ следует, что $tw \in W$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Предположим, что w_1, $w_2 \in W$ и $w_1 + w_2 \neq 0$, и покажем, что $w_1 + w_2 \in W$.

Рассмотрим функцию $\exp(tw_1)\exp(tw_2)$; все ее значения принадлежат H. Для достаточно малых t можно записать равенство $\exp(tw_1)\exp(tw_2) = \exp(f(t))$, где $f(t)$ — гладкая кривая в G_e и $f(0) = 0$. Теперь, согласно лемме 2.18, $\exp(tw_1)\exp(tw_2) - \exp t(w_1 + w_2) = o(t)$. Следовательно, $\frac{1}{t} f(t) \to w_1 + w_2$ при $t \to 0$. Поэтому к последовательности $h_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ для достаточно больших n и к вектору $v = \frac{1}{|w_1 + w_2|}(w_1 + w_2)$ можно применять лемму 2.28 и заключить, что $w_1 + w_2 \in W$.

2.30. Лемма. *Множество* $\exp W$ *служит окрестностью единицы* e *в* H.

Доказательство. Разложим G в прямую сумму $W' \oplus W$ и рассмотрим диффеоморфизм $\varphi(w', w) = \exp(w')\exp(w)$ некоторой окрестности точки 0 в G_e и некоторой окрестности единицы e в G (см. 2.15). Предположим, что лемма неверна. Тогда найдется такая последовательность пар (w'_n, w_n), что $\exp(w'_n)\exp(w_n) \in H$, $\exp(w'_n)\exp(w_n) \to e$ и $w'_n \neq 0$. При этом $\exp(w'_n) \in H$, так как $\exp(w_n) \in H$. Мы можем так выбрать подпоследовательность последовательности w'_n, что $\frac{1}{|w'_{n_k}|} w'_{n_k} \to w' \in W'$ при подходящем w'. Из 2.28 тогда следует, что $w' \in W$, противоречие.

Итак, $\exp W$ — окрестность единицы e в H.

Теперь ясно, что отображение exp дает правильную карту в окрестности единицы e в G. С помощью левого сдвига можно построить правильную карту вблизи любой другой точки подгруппы H *). Этим завершается доказательство теоремы 2.27.

2.31. Примеры.

$$\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),$$
$$\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),$$
$$\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$$

— замкнутые подгруппы и подмногообразия групп Ли **). Следовательно, они являются группами Ли.

В каждом случае касательное пространство к подгруппе в точке e *состоит из матриц* X, *таких, что* $\bar{X}^{\mathrm{T}} = -X$.

Доказательство. (i) Предположим, что матрица X лежит в касательном пространстве одной из

---

*) Автор имеет в виду карту $L_a \exp$ в окрестности точки $a \in H$. — *Прим. ред.*

**) Напомним, что каждая из этих подгрупп определяется условием $\bar{X}^{\mathrm{T}} X = 1$, где черта над X означает сопряжение в соответствующем теле. Подгруппа $\mathrm{O}(n)$ называется ортогональной группой, $\mathrm{U}(n)$ — унитарной группой, а $\mathrm{Sp}(n)$ — симплектической группой. Более подробное описание этих групп содержится в книге [27]. — *Прим. перев.*

указанных подгрупп в точке e. Возьмем в этой подгруппе гладкую кривую вида $f(t)=1+tX+o(t)$. Тогда $\overline{f(t)}^{\mathrm{T}} f(t)=1$ по определению подгруппы, т. е.

$$(1+t\bar{X}^{\mathrm{T}}+o(t))(1+tX+o(t))=1.$$

Следовательно,

$$\bar{X}^{\mathrm{T}}+X=0.$$

(ii) Предположим, что $\bar{X}^{\mathrm{T}}=-X$. Тогда в силу 2.12 имеем

$$(\overline{\exp tX})^{\mathrm{T}}=\left(\overline{\sum_{n=0}^{\infty} t^n X^n/n!}\right)^{\mathrm{T}}=\sum t^n(\bar{X}^{\mathrm{T}})^n/n!=$$

$$=\sum t^n(-X)^n/n!=(\exp tX)^{-1}.$$

Поэтому матрица $\exp(tX)$ лежит в рассматриваемой подгруппе, а X — в ее касательном пространстве.

2.32. Пример. Если G — компактная группа Ли и H — ее связная замкнутая абелева подгруппа, то H — тор.

2.33. Предложение. *Связная замкнутая подгруппа H группы Ли G полностью определяется своим касательным пространством в точке e.*

Доказательство. См. 2.17.

2.34. Определение. Предположим, что G — группа Ли и H — замкнутая подгруппа в G. Тогда *факторпространство G/H* — это множество левых смежных классов gH. Мы имеем естественную проекцию $p\colon G\to G/H$. Снабдим множество G/H фактортопологией *).

2.35. Упражнение. Пространство G/H хаусдорфово.

2.36. Предложение. *Если H — замкнутая подгруппа группы Ли G, то топологическое пространство G/H можно снабдить дифференциальной структурой многообразия, такой, что*

(i) *проекция p — гладкое отображение,*

(ii) *отображение $f\colon G/H\to M$ гладко тогда и только тогда, когда $fp\colon G\to M$ — гладкое отображение.*

---

*) Фактортопология определяется условием: множество $\bar{U}\subset G/H$ открыто в том и только том случае, когда множество $U=p^{-1}(\bar{U})$ открыто в G. — *Прим. перев.*

Доказательство. Как и раньше, разложим G_e в прямую сумму $W' \oplus W$, где $W = H_e$. Пусть U — малая окрестность точки 0 в W'. Определим отображение ψ: $U \to G/H$ посредством композиции $U \to W' \to G_e \xrightarrow{\exp} G \xrightarrow{p} G/H$. Тогда ψ — гомеоморфизм области U на некоторую окрестность точки eH. Оставшаяся часть доказательства оставляется читателю в качестве упражнения.

2.37. Предложение. *Последовательность $H \to G \to G/H$ является расслоением.*

Доказательство. См. [17, 1.7.5].

Глава 3

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В этой главе мы излагаем элементарную теорию представлений. Основные определения и конструкции содержатся в пп. 3.1—3.13. Затем мы вводим интегрирование и получаем обычные следствия, включая полную приводимость (3.15—3.21). После этого мы переходим к лемме Шура, некоторым ее следствиям и к определению кольца представлений (3.22—3.28). Затем идут следы, характеры и соотношения ортогональности (3.29—3.37). Далее следует теорема Петера — Вейля и полнота характеров (3.38—3.49). Затем идет обычный материал о вещественных и симплектических представлениях (3.50—3.64). Далее изучаются кольца представлений произведений (3.65—3.67) и накрытий (3.68—3.70). Наконец, мы рассматриваем теорию представлений торов (3.71—3.78).

3.1. Определения. Пусть Λ — одно из классических тел $\mathbb{R}$ (вещественных чисел), $\mathbb{C}$ (комплексных чисел) или $\mathbb{H}$ (кватернионов). Пусть G — топологическая группа. Тогда *ΛG-пространством* называется конечномерное векторное пространство V над Λ, снабженное непрерывным гомоморфизмом

$$\theta = \theta_V\colon\ G \to \operatorname{Aut} V.$$

(Такое пространство V называется также *представлением* группы G над Λ или *G-пространством* над Λ.)

Другими словами, V есть G-пространство над Λ, если для каждого $g \in G$ и каждого $v \in V$ задан вектор $gv \in V$, причем выполняются следующие условия:

(i) $ev = v$ и $g(g'v) = (gg')v$.

(ii) gv есть Λ-линейная функция от v.

(iii) gv есть непрерывная функция от g и v.

Выбрав базис в пространстве V, мы можем считать, что θ принимает значения в группе $GL(n, \Lambda)$. Тогда мы говорим о *матричном представлении*. Если при $\Lambda = \mathbb{H}$ мы хотим писать наши матрицы слева, то разумно считать, что V — правый модуль над $\mathbb{H}$. К счастью, любой левый модуль над $\mathbb{H}$ при помощи формулы

$$vq = \bar{q}v \qquad (q \in \mathbb{H},\ v \in V)$$

можно превратить в правый модуль над $\mathbb{H}$, и наоборот *). Здесь сопряжение кватернионов определяется как обычно: если $q = a + bi + cj + dk$, то $\bar{q} = a - bi - cj - dk$.

Пусть V и W — два ΛG-пространства. Отображение f: $V \to W$, перестановочное с действием группы G, т. е. такое, что

$$f(gv) = g(fv),$$

называется *G-отображением*, а G-отображение, которое Λ-линейно, называется *ΛG-отображением* **). По большей части мы будем иметь дело именно с такими отображениями. Множество ΛG-отображений обозначается через $\mathrm{Hom}_{\Lambda G}(V, W)$ или иногда просто через $\mathrm{Hom}_G(V, W)$, если Λ подразумевается. Оно является векторным пространством над $\mathbb{R}$, если $\Lambda = \mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$, и над $\mathbb{C}$, если $\Lambda = \mathbb{C}$.

ΛG-изоморфизмом называется ΛG-отображение, которое обладает обратным отображением. Как обычно, мы говорим, что два ΛG-пространства *эквивалентны*, если они изоморфны.

3.2. Определение. Пусть V — G-пространство над $\mathbb{C}$. *Структурным отображением* на V называется G-отображение j: $V \to V$, такое, что

(i) j полулинейно, т. е.

$$j(zv) = \bar{z}j(v),$$

(ii) $j^2 = \pm 1$.

3.3. Пояснение. Если V — G-пространство над $\mathbb{H}$, то его можно рассматривать как G-пространство над $\mathbb{C}$ со структурным отображением, обладающим свойством $j^2 = -1$. В действительности это можно сделать двумя

---

*) То, что действительно получится правый $\mathbb{H}$-модуль, вытекает из равенства $\overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q}$. — *Прим. перев.*

**) Такое отображение часто называют также сплетающим оператором. — *Прим. перев.*

способами. С одной стороны, можно взять структуру $\mathbb{C}$-модуля, заданную умножением на i слева, и структурное отображение, заданное умножением на j слева. С другой стороны, можно взять структуру $\mathbb{C}$-модуля, заданную умножением на i справа (умножением на $-i$ слева), и структурное отображение, заданное умножением на j справа (умножением на $-j$ слева). Какую из них брать — безразлично, потому что можно определить автоморфизм α: $V \to V$, переводящий одну структуру в другую, например, $\alpha(v) = kv$.

Обратно, если дано G-пространство над $\mathbb{C}$ с таким структурным отображением j, что $j^2 = -1$, то можно очевидным способом восстановить G-пространство над $\mathbb{H}$.

Аналогичным образом, часто удобно вместо G-пространства V над $\mathbb{R}$ рассматривать G-пространство V' над $\mathbb{C}$, снабженное таким структурным отображением j, что $j^2 = +1$. Чтобы перейти от V к V', возьмем пространство $V' = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$, снабженное очевидными операциями и структурным отображением:

$$z(z' \otimes v) = zz' \otimes v \qquad (z,\ z' \in \mathbb{C}),$$
$$g(z \otimes v) = z \otimes gv,$$
$$j(z \otimes v) = \bar{z} \otimes v.$$

Чтобы перейти от V' к V, расщепим V на собственные подпространства отображения j, отвечающие собственным значениям $+1$ и -1. Эти подпространства являются G-пространствами над $\mathbb{R}$ и изоморфно отображаются друг на друге при умножении на i. Ясно, что описанные конструкции обратны друг к другу с точностью до изоморфизмов.

3.4. Определение. Если даны ΛG-пространства V и W, то можно образовать прямую сумму $V \oplus W$ этих векторных пространств и определить действие группы G на $V \oplus W$, положив

$$g(v,\ w) = (gv,\ gw).$$

Точно так же можно взять два G-пространства V и W над $\mathbb{C}$ со структурными отображениями j_V, j_W, такими, что $j_V^2 = j_W^2$, и снабдить пространство $V \oplus W$ структурным отображением $j_V \oplus j_W$.

Опишем пять конструкций, с помощью которых из G-пространства V над Λ получается G-пространство над некоторым Λ'. Их можно продемонстрировать на следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} \arrow[dd, "t"] & \\
\mathbb{R} \arrow[ur, "c"] & & \mathbb{H} \arrow[ul, "c'"'] \\
 & \mathbb{C} \arrow[ul, "r"] \arrow[ur, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

которая не коммутативна.

3.5. Определение.

(i) Если V — G-пространство над $\mathbb{R}$, то определим пространство $cV = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ и зададим на нем структуру G-пространства над $\mathbb{C}$, как указано в 3.3.

(ii) Аналогично, если V — G-пространство над $\mathbb{C}$, то определим $qV = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V$ и очевидным образом зададим на нем структуру G-пространства и структуру левого модуля над $\mathbb{H}$.

(iii) Если V — G-пространство над $\mathbb{H}$, то пространство $c'V$ совпадает с V как множество и снабжено тем же действием группы G, что и V, но рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{C}$.

(iv) Аналогично, если V — G-пространство над $\mathbb{C}$, то пространство rV совпадает с V как множество и снабжено тем же действием группы G, но рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{R}$.

(v) Пусть V — G-пространство над $\mathbb{C}$. Будем считать, что пространство tV совпадает с V как множество и снабжено тем же действием группы G, что и V, но действие поля $\mathbb{C}$ зададим по-новому: z действует на tV так же, как $\bar{z}$ действовало на V.

Примем точку зрения п. 3.3. Тогда конструкции c и c' будут применяться к G-пространству над $\mathbb{C}$, снабженному структурным отображением j, причем они заключаются в забывании структурного отображения.

Все эти конструкции естественны: если дано ΛG-отображение f: $V \to W$, то можно построить соответствующие отображения cf, qf, $c'f$, rf и tf.

Все эти конструкции перестановочны с прямой суммой $\oplus$.

3.6. Предложение.

$$rc = 2, \quad cr = 1 + t, \quad qc' = 2, \quad c'q = 1 + t,$$
$$tc = c, \quad rt = r, \quad tc' = c', \quad qt = q, \quad t^2 = 1.$$

Эти равенства нужно интерпретировать следующим образом:

$$rcV \cong V \oplus V \quad \text{для любого } V \text{ над } \mathbb{R},$$
$$crV \cong V \oplus tV \quad \text{для любого } V \text{ над } \mathbb{C},$$

и т. д.

Доказательство. Большую его часть можно без опасений оставить читателю. Мы покажем, что $cr = 1 + t$.

Пусть V — G-пространство над $\mathbb{C}$. Мы собираемся изучить пространство $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$, где $\mathbb{C}$ действует на первый множитель, а G — на второй. Пусть $\mathbb{C}$ действует на первый множитель тензорного произведения $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, и пусть алгебра $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ действует на $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ очевидным образом. Тогда $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ является G-пространством над $\mathbb{C}$-алгеброй $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Разложим теперь единицу $1 \otimes 1$ алгебры $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ на ортогональные идемпотенты и таким образом получим расщепление пространства $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$. Более подробно, пусть

$$e_1 = {}^1/_2 (1 \otimes 1 + i \otimes i), \quad e_2 = {}^1/_2 (1 \otimes 1 - i \otimes i).$$

Тогда $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 e_2 = 0$ и $e_1 + e_2 = 1$, как и требовалось. Следовательно,

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V \cong e_1 (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V) \oplus e_2 (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V),$$

где изоморфизм является G-изоморфизмом над $\mathbb{C}$. Далее,

$$V \cong e_2 (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V), \quad tV \cong e_1 (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V)$$

(можно взять соответственно изоморфизмы $v \longmapsto e_2 (1 \otimes v)$ и $v \longmapsto e_1 (1 \otimes v)$ *)). Таким образом, $crV \cong V \oplus tV$.

---

*) То, что эти отображения — изоморфизмы, следует из равенств

$$e_2 (1 \otimes z) = (z \otimes 1) e_2 = z e_2 \quad \text{и} \quad e_1 (1 \otimes z) = (\bar{z} \otimes 1) e_1 = \bar{z} e_1.$$

— *Прим. перев.*

3.7. Определение. Если даны G-пространства V и W над $\mathbb{C}$, то можно образовать тензорное произведение этих векторных пространств $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ и задать на нем действие группы G по формуле

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw.$$

Предположим теперь, что пространства V и W допускают структурные отображения j_V, j_W, такие, что $j_V^2 = \varepsilon_V$, $j_W^2 = \varepsilon_W$. Тогда пространство $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ допускает структурное отображение $j = j_V \otimes j_W$, такое, что $j^2 = \varepsilon_V \varepsilon_W$. Можно выделить три случая.

(i) $\varepsilon_V = \varepsilon_W = +1$. Тензорное произведение двух вещественных представлений вещественно.

Наша конструкция сводится в данном случае к построению тензорного произведения $V \otimes_{\mathbb{R}} W$ двух G-пространств V, W над $\mathbb{R}$.

(ii) $\varepsilon_V = +1$, $\varepsilon_W = -1$. Тензорное произведение вещественного представления V и кватернионного представления W является кватернионным представлением. Конструкция сводится к тому, что берется $V \otimes_{\mathbb{R}} W$ и на нем задается действие тела $\mathbb{H}$ по формуле

$$q(v \otimes w) = v \otimes qw.$$

Аналогичное положение имеет место в случае $\varepsilon_V = -1$, $\varepsilon_W = +1$.

(iii) $\varepsilon_V = \varepsilon_W = -1$. Тензорное произведение двух кватернионных представлений V и W вещественно. Конструкции естественно интерпретировать здесь в терминах тензорного произведения $V \otimes_{\mathbb{H}} W$. Чтобы придать этому произведению смысл, надо рассматривать V как правый модуль над $\mathbb{H}$, а W — как левый модуль над $\mathbb{H}$. Собственное подпространство результирующего структурного отображения $j_V \otimes j_W$ в $V \otimes_{\mathbb{C}} W$, отвечающее собственному значению -1, совпадает с $V \otimes_{\mathbb{H}} W$.

3.8. Предложение.

(i) *Все наши тензорные произведения совместимы с отображениями* c, c'.

(ii) *Тензорное произведение* $\otimes$ *билинейно относительно прямой суммы* $\oplus$.

3.9. Определение. Если даны G-пространства V и W над одним и тем же телом Λ, то можно образовать $\operatorname{Hom}_\Lambda(V, W)$ — множество Λ-линейных отображений из V в W. Оно является векторным пространством над $\mathbb{R}$, если $\Lambda = \mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$, и над $\mathbb{C}$, если $\Lambda = \mathbb{C}$. На этом пространстве можно задать действие группы G, положив

$$(gh)\,v = g\,(h\,(g^{-1}v)) \qquad (h \in \operatorname{Hom}_\Lambda(V,\ W)),$$

что равносильно равенству

$$gh = (\theta_W g)\,h\,(\theta_V g^{-1}).$$

(Отметим, что функтор $\operatorname{Hom}_\Lambda(V,\ W)$ ковариантен по W и контравариантен по V.) Подпространство элементов в $\operatorname{Hom}_\Lambda(V,\ W)$, инвариантных относительно G, есть в точности $\operatorname{Hom}_{\Lambda G}(V,\ W)$.

Далее можно рассуждать так же, как в 3.3, 3.7. Пусть V и W — G-пространства над $\mathbb{C}$, которые допускают структурные отображения j_V, j_W, такие, что $j_V^2 = \varepsilon_V$, $j_W^2 = \varepsilon_W$. Тогда G-пространство $\operatorname{Hom}_\mathbb{C}(V,\ W)$ допускает структурное отображение, заданное равенством

$$jh = j_W h j_V^{-1}.$$

Имеем $j^2 = \varepsilon_V \varepsilon_W$. Можно выделить три случая.

(i) $\varepsilon_V = \varepsilon_W = +1$. Значение функтора Hom от двух вещественных представлений вещественно. Конструкция сводится к тому, что берутся два G-пространства V, W над $\mathbb{R}$ и образуется G-пространство $\operatorname{Hom}_\mathbb{R}(V,\ W)$. В самом деле, если рассмотреть пространство $\operatorname{Hom}_\mathbb{C}(cV,\ cW)$, то собственное подпространство отображения j, отвечающее собственному значению $+1$, можно отождествить $\operatorname{Hom}_\mathbb{R}(V,\ W)$. Таким образом,

$$\operatorname{Hom}_\mathbb{C}(cV,\ cW) \cong c\operatorname{Hom}_\mathbb{R}(V,\ W).$$

(ii) $\varepsilon_V = +1$, $\varepsilon_W = -1$. Значение функтора Hom от вещественного и кватернионного представлений является кватернионным представлением. Случай $\varepsilon_V = -1$, $\varepsilon_W = +1$ аналогичен. Мы оставляем читателю интерпретацию конструкции в этих случаях в духе 3.7 (ii).

(iii) $\varepsilon_V = \varepsilon_W = -1$. Значение функтора Hom от двух кватернионных представлений вещественно. Конструкция сводится к тому, что берутся два G-пространства V, W над $\mathbb{H}$ и образуется G-пространство $\operatorname{Hom}_\mathbb{H}(V,\ W)$. В самом деле, если мы рассмотрим $\operatorname{Hom}_\mathbb{C}(c'V,\ c'W)$, то собственное подпространство структурного отображения j, соответствующее собственному значению $+1$, есть $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(V, W)$. Таким образом,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(c'V, c'W) \cong c\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(V, W).$$

3.10. Следствие.

(i) *Если V и W — два G-пространства над $\mathbb{R}$, то*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(cV, cW) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}G}(V, W).$$

(ii) *Если V и W — два G-пространства над $\mathbb{H}$, то*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(c'V, c'W) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}G}(V, W).$$

Это немедленно следует из 3.9 (i) и (iii). Достаточно рассмотреть подпространства, состоящие из элементов, инвариантных относительно группы G.

3.11. Предложение.

(i) *Все наши функторы* Hom *совместимы с отображениями c, c'.*

(ii) *Функтор* Hom *билинеен относительно прямой суммы* $\oplus$.

Отметим важный частный случай определения 3.9.

3.12. Определение. Для заданного G-пространства V над $\mathbb{C}$ определим *дуальное* G-пространство V^*, положив

$$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}).$$

Здесь подразумевается, что на пространстве значений $\mathbb{C}$ группа G действует тривиально: $gz = z$ для всех $g \in G$ и $z \in \mathbb{C}$. Такое G-пространство $\mathbb{C}$ является вещественным. Отсюда следует, что представление, дуальное к вещественному представлению, вещественно, а представление, дуальное к кватернионному представлению, кватернионно.

Общий случай 3.9 можно свести к частному случаю 3.12.

3.13. Лемма. *Имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \cong V^* \otimes_{\mathbb{C}} W,$$

перестановочный с действием группы G и с любыми структурными отображениями j.

Доказательство. Искомый изоморфизм переводит элемент $v^* \otimes w \in V^* \otimes W$ в отображение h: $V \to W$, заданное формулой

$$h(v) = v^*(v)\,w.$$

В случае, когда мы имеем дело с компактными топологическими группами, одним из наилучших средств исследования является интегрирование.

3.14. Интегрирование. Пусть G — компактная топологическая группа. Тогда для любой непрерывной функции $f\colon G \to \mathbb{R}$ можно определить вещественное число

$$\int_G f = \int_{g \in G} f(g)$$

так, чтобы выполнялись следующие условия:

(i) $\int_G$ обладает обычными свойствами интеграла, т. е. является положительным линейным функционалом.

(ii) $\int_G 1 = 1$.

(iii) Интеграл инвариантен относительно левых и правых сдвигов, т. е. для каждого $x \in G$ имеем

$$\int_{y \in G} f(xy) = \int_{y \in G} f(y),$$

$$\int_{y \in G} f(yx) = \int_{y \in G} f(y).$$

Аналогично можно интегрировать функции, принимающие значения в любом конечномерном векторном пространстве над $\mathbb{R}$; при этом значения интеграла будут лежать в том же векторном пространстве. Это интегрирование перестановочно с линейными отображениями.

В случае, когда G — группа Ли, построить интеграл несколько легче, чем для топологических групп G общего вида. Здесь мы не будем обсуждать этот вопрос, отсылая читателя к книгам [13, 14, 20].

Первой функцией, к которой мы применим операцию интегрирования, является представление

$$\theta : G \to \mathrm{Hom}_\Lambda(V, V).$$

3.15. Предложение. *Предположим, что дано представление $\theta\colon G \to \mathrm{Hom}_\Lambda(V, V)$. Тогда оператор*

$$I = \int_G \theta \in \mathrm{Hom}_\Lambda(V, V)$$

идемпотентен ($I^2 = I$) и его образ есть подпространство V_G, состоящее из элементов, инвариантных относительно G.

Доказательство. Для каждого фиксированного $v \in V$ функция $\mathrm{Hom}(V, V) \to V$, заданная формулой $h \longmapsto h(v)$, линейна (над $\mathbb{R}$). Следовательно, она перестановочна с интегрированием. Таким образом,

$$Iv = \int_{g \in G} gv.$$

Теперь ясно, что $\mathrm{Im}(I) \subset V_G$. Действительно, учитывая линейность действия группы G и инвариантность интегрирования относительно левых сдвигов, имеем

$$g'(Iv) = g' \int_{g \in G} gv = \int_{g \in G} g'gv = \int_{g \in G} gv = Iv,$$

так что $Iv \in V_G$. Мы также имеем $I|V_G = 1$. Действительно, если $v \in V_G$, то

$$Iv = \int_{g \in G} gv = \int_{g \in G} v = v.$$

Предложение доказано.

Предложения 3.16 и 3.18 можно рассматривать как применения принципа, воплощенного в предложении 3.15. Их легко также доказать непосредственно.

3.16. Предложение. *Пусть G — компактная топологическая группа, и пусть V — G-пространство над $\mathbb{C}$. Тогда на V можно задать положительно определенную эрмитову форму H, инвариантную относительно группы G. Более того, если на V задано структурное отображение j, то H можно выбрать так, чтобы*

$$H(jv, jw) = \overline{H(v, w)}.$$

При желании читатель может проверить, что если V снабжено структурным отображением j, то эрмитова форма с указанным свойством сводится к эрмитовой форме над $\Lambda = \mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$ (соответственно рассматриваемому случаю). Сформулированное утверждение позволяет рассматривать эти случаи одновременно и поэтому удобно для дальнейшего использования.

Доказательство. Рассмотрим пространство L эрмитовых форм H на V. Это — векторное пространство над $\mathbb{R}$, и G действует на нем по формуле

$$(gH)(v, w) = H(g^{-1}v, g^{-1}w).$$

Если взять любую эрмитову форму H и проинтегрировать функцию gH, то, согласно предложению 3.15, получим эрмитову форму, инвариантную относительно G. Она задается равенством

$$K(v, w) = \int_{g \in G} H(g^{-1}v, g^{-1}w).$$

Если исходная форма H положительно определена, то и форма K положительно определена.

Предположим теперь, что V снабжено структурным отображением j и что мы исходим из положительно определенной эрмитовой формы H, инвариантной относительно G. Тогда мы можем построить новую форму, интегрируя по $\mathbb{Z}_2$ или по $\mathbb{Z}_4$, т. е. по группе, порожденной структурным отображением j. Соответствующая формула имеет вид

$$K(v, w) = \frac{1}{2}(H(v, w) + H(jv, jw)).$$

Эта форма обладает требуемыми свойствами.

Если снабдить V инвариантной эрмитовой формой, то в пространстве V можно выбрать ортонормированный базис. Таким образом; можно считать, что гомоморфизм θ: $G \to \operatorname{Aut} V$ принимает значения не просто в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, а в $\mathrm{U}(n)$. Тогда мы говорим об *унитарном* представлении. Аналогично вводятся *ортогональные* и *симплектические* представления в случаях $\Lambda = \mathbb{R}$ и $\mathbb{H}$.

3.17. Следствие. *Если группа G компактна и $\Lambda = \mathbb{C}$, то $V^* \cong tV$.*

Доказательство. Снабдим пространство V инвариантной положительно определенной эрмитовой формой H. Точнее, предположим, что форма $H(v, w)$ полулинейна по v и линейна по w. Тогда можно определить отображение

$$\alpha: tV \to V^*,$$

положив

$$(\alpha v) w = H(v, w).$$

Отображение α является G-изоморфизмом над $\mathbb{C}$.

3.18. Предложение. *Если G — компактная группа, то каждое G-пространство V проективно. А именно, предположим, что дана следующая диаграмма из*

ΛG-отображений:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\beta"] \\ V \arrow[r, "\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

в которой β сюръективно. Тогда существует ΛG-отображение γ: $V \to X$, такое, что следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\beta"] \\ V \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[r, "\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Рассмотрим векторное пространство $\mathrm{Hom}_\Lambda(V, X)$, превращенное в G-пространство, как указано в 3.9. Согласно предложению 3.15, если мы возьмем любое Λ-отображение δ: $V \to X$ и проинтегрируем функцию $g\delta$, то получим Λ-отображение γ, которое инвариантно относительно G, т. е. является ΛG-отображением. Оно задается формулой

$$\gamma = \int\limits_{g \in G} (\theta_X g)\, \delta\, (\theta_V g^{-1}).$$

Можно так выбрать Λ-отображение δ, что $\beta\delta = \alpha$. Тогда имеем

$$\beta\gamma = \beta \int\limits_{g \in G} (\theta_X g)\, \delta\, (\theta_V g^{-1}) = \int\limits_{g \in G} \beta\, (\theta_X g)\, \delta\, (\theta_V g^{-1}) =$$
$$= \int\limits_{g \in G} (\theta_Y g)\, \beta\delta\, (\theta_V g^{-1}) = \int\limits_{g \in G} (\theta_Y g)\, \alpha\, (\theta_V g^{-1}) = \int\limits_{g \in G} \alpha = \alpha.$$

3.19. Определение. Ненулевое G-пространство V называется *приводимым*, если некоторое собственное подпространство пространства V является G-пространством. В противном случае V называется *неприводимым*.

3.20. Теорема. *Если G — компактная группа, то каждое G-пространство V является прямой суммой неприводимых G-пространств.*

Доказательство проведем индукцией по $\dim_\Lambda V$. Итак, предположим, что теорема справедлива для всех

G-пространств W, удовлетворяющих условию $\dim_\Lambda W < \dim_\Lambda V$. Теперь достаточно показать, что если V приводимо, то оно является прямой суммой двух подпространств меньшей размерности. Предположим, что в пространстве V есть собственное подпространство S, которое является G-пространством. Тогда предложение 3.18 показывает, что точная последовательность

$$0 \to S \to V \to V/S \to 0$$

расщепляется. Следовательно, мы имеем ΛG-изоморфизм

$$V \cong S \oplus V/S.$$

Другое доказательство. Если $\Lambda = \mathbb{C}$, то пространство V можно наделить эрмитовой формой H, инвариантной относительно G, и взять в качестве T ортогональное дополнение к подпространству S; тогда

$$V = S \oplus T.$$

Если пространство V снабжено структурным отображением j и S инвариантно относительно j, а форма H удовлетворяет условию, указанному в предложении 3.16, то подпространство T инвариантно относительно j.

3.21. Пример. Покажем, что теорема 3.20 не справедлива для некомпактных групп.

Вложим $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^2$ как подпространство векторов вида $\begin{Vmatrix} x \\ 0 \end{Vmatrix}$. Пусть G — подгруппа в $GL(2, \mathbb{R})$, которая сохраняет подпространство $\mathbb{R}^1$. Иначе говоря, G есть множество матриц $\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{Vmatrix}$, где $ac \neq 0$. Тогда $\mathbb{R}^2$ — приводимое G-пространство. Однако в $\mathbb{R}^2$ нет никаких других собственных подпространств, инвариантных относительно G, т. е. $\mathbb{R}^2$ не разлагается в прямую сумму неприводимых G-пространств.

Чтобы получить «минимальный» контрпример, можно в качестве G взять множество матриц $\begin{Vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Наша ближайшая цель заключается в том, чтобы выяснить, в какой мере разложение G-пространства на неприводимые слагаемые является единственным (см. 3.24). Для этого нам понадобится следующий классический результат.

3.22. Лемма Шура. *Пусть G — любая топологическая группа.*

(i) *Если f: $V \to W$ есть ΛG-отображение и представления V, W неприводимы, то f — либо нулевое отображение, либо изоморфизм.*

(ii) *Если $\Lambda = \mathbb{C}$, f: $V \to V$ есть $\mathbb{C}G$-отображение и представление V неприводимо, то $fv = \lambda v$ для некоторой постоянной $\lambda \in \mathbb{C}$.*

(Во втором случае можно писать $f = \lambda$.)

Доказательство. (i) Поскольку представления V и W неприводимы, $\operatorname{Ker} f$ есть либо V, либо 0, а $\operatorname{Im} f$ есть либо 0, либо W. Отсюда следует требуемый результат.

(ii) Рассмотрим отображение $f - \lambda$: $V \to V$, где λ пробегает поле $\mathbb{C}$. Для некоторого λ это отображение вырождено. Тогда, согласно (i), $f - \lambda$ — нулевое отображение. Следовательно, $f = \lambda$.

3.23. Следствие. *Пусть V и W — неприводимые ΛG-пространства.*

(i) *Если V и W не эквивалентны, то* $\operatorname{Hom}_{\Lambda G}(V, W) = 0$.

(ii) *Если V и W эквивалентны и $\Lambda = \mathbb{C}$, то* $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) = 1$.

(iii) *Если V и W эквивалентны и $\Lambda = \mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$, то* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Hom}_{\Lambda G}(V, W) \geqslant 1$.

Доказательство. Для доказательства утверждения (iii) достаточно заметить, что $\operatorname{Hom}_{\Lambda G}(V, W)$ содержит хотя бы один изоморфизм.

Чтобы сформулировать следующую теорему, нам надо ввести некоторые обозначения. Пусть G — любая топологическая группа, и пусть V_i пробегает множество всех неэквивалентных неприводимых ΛG-пространств (когда i пробегает некоторое множество индексов I). Пусть m_i, n_i — неотрицательные целые числа, среди которых только конечное число отличных от нуля. Пусть $m_i V_i$ — прямая сумма m_i экземпляров представления V_i, аналогичный смысл имеет $n_i V_i$.

3.24. Теорема. *Если представление $\bigoplus_i m_i V_i$, эквивалентно представлению $\bigoplus_i n_i V_i$, то $m_i = n_i$ для всех i.*

Доказательство. Предположим, что

$$\bigoplus_i m_i V_i \cong \bigoplus_i n_i V_i.$$

Тогда

$$\operatorname{Hom}_{\Lambda G}(V_j, \bigoplus_i m_i V_i) \cong \operatorname{Hom}_{\Lambda G}(V_j, \bigoplus_i n_i V_i),$$

т. е.

$$\bigoplus_i m_i \operatorname{Hom}_{\Lambda G}(V_j, V_i) \cong \bigoplus_i n_i \operatorname{Hom}_{\Lambda G}(V_j, V_i).$$

Учитывая 3.23 (i), получим

$$m_j \operatorname{Hom}_{\Lambda G}(V_j, V_j) \cong n_j \operatorname{Hom}_{\Lambda G}(V_j, V_j).$$

Приравнивая размерности обеих частей этого равенства и используя 3.23 (ii) или (iii), получим, что $m_j = n_j$.

Если группа G компактна и $\Lambda = \mathbb{C}$, то положение, которое здесь возникает, можно описать следующим образом (это понадобится в дальнейшем). Для любого G-пространства V над $\mathbb{C}$ можно образовать пространство

$$\bigoplus_i \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, V) \otimes_{\mathbb{C}} V_i.$$

Это конечная сумма, так как в силу 3.20 и 3.23 (i) $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, V)$ обращается в нуль для всех i, кроме конечного числа. Можно определить отображение

$$\mu: \bigoplus_i \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, V) \otimes_{\mathbb{C}} V_i \to V$$

с помощью свертки

$$\mu(h_i \otimes v_i) = h_i(v_i).$$

Зададим действие группы G на $\bigoplus_i \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, V) \otimes_{\mathbb{C}} V_i$ по формуле

$$g(h_i \otimes v_i) = h_i \otimes g v_i.$$

Тогда μ является G-отображением над $\mathbb{C}$.

3.25. Лемма. *Предположим, что группа G компактна и $\Lambda = \mathbb{C}$. Тогда отображение*

$$\mu: \bigoplus_i \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, V) \otimes_{\mathbb{C}} V_i \to V$$

есть изоморфизм G-пространств.

Доказательство. Если V неприводимо, то этот результат немедленно вытекает из следствия 3.23. Нужно перейти к прямым суммам и использовать 3.23.

3.26. Определение. Пусть G — компактная топологическая группа. Тогда через $K_\Lambda(G)$ обозначается свободная абелева группа, порожденная классами эквивалентности неприводимых G-пространств над Λ.

Таким образом, элементы группы $K_\Lambda(G)$ — это формальные линейные комбинации вида $\sum_i n_i V_i$, в которых V_i представляют собой классы эквивалентности неприводимых G-пространств над Λ, а n_i — целые числа (положительные, отрицательные или равные нулю), среди которых только конечное число отличных от нуля. В силу 3.20 и 3.24 классы эквивалентности G-пространств над Λ взаимно однозначно соответствуют тем элементам $\sum_i n_i V_i$ в $K_\Lambda(G)$, у которых $n_i \geqslant 0$ для всех i.

Элементы группы $K_\Lambda(G)$ называются *виртуальными представлениями* или *виртуальными G-пространствами.*

Операции c, c', r, q и t из п. 3.5 индуцируют гомоморфизмы абелевых групп, указанные на следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
 & K_{\mathbb{C}}(G) \arrow[dd, "t"] & \\
K_{\mathbb{R}}(G) \arrow[ur, "c"] & & K_{\mathbb{H}}(G) \arrow[ul, "c'"'] \\
 & K_{\mathbb{C}}(G) \arrow[ul, "r"] \arrow[ur, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

которая не коммутативна. При этом остаются справедливыми равенства из предложения 3.6.

3.27. Предложение. *Отображения*

$$c\colon K_{\mathbb{R}}(G) \to K_{\mathbb{C}}(G),$$
$$c'\colon K_{\mathbb{H}}(G) \to K_{\mathbb{C}}(G)$$

инъективны.

Доказательство следует из того, что $rc = 2$, $qc' = 2$ и $K_{\mathbb{R}}(G)$, $K_{\mathbb{H}}(G)$ — свободные абелевы группы.

Группы $K_{\mathbb{R}}(G)$ и $K_{\mathbb{H}}(G)$ мы обычно будем считать вложенными в $K_{\mathbb{C}}(G)$ при помощи гомоморфизмов c и c'.

3.28. Следствие.

(i) *Если* V *и* W — *два* G-*пространства над* $\mathbb{R}$, *такие, что* $cV \cong cW$, *то* $V \cong W$.

(ii) *Если* V *и* W — *два* G-*пространства над* $\mathbb{H}$, *такие, что* $c'V \cong c'W$, *то* $V \cong W$.

Это следствие немедленно вытекает из 3.27, но на тот случай, если оно покажется возникшим из ничего, мы приведем прямое доказательство. Пусть даны два G-пространства V, W над $\mathbb{C}$, допускающих такие структурные отображения j_V, j_W, что $j_V^2 = j_W^2$. Предположим, что дан $\mathbb{C}G$-изоморфизм $f\colon V \to W$, который не обязательно перестановочен с j, и что мы хотим построить по нему $\mathbb{C}G$-изоморфизм, перестановочный с j. Интегрируя по $\mathbb{Z}_2$ или по $\mathbb{Z}_4$, т. е. по группе, порожденной j, получим формулы:

$$f' = \frac{1}{2}\left(f + j_W f j_V^{-1}\right),$$

$$f'' = \frac{1}{2} i \left(f - j_W f j_V^{-1}\right).$$

Имеем $f' - if'' = f$. Следовательно, $\det(f' + zf'')$ есть многочлен от z, не равный тождественно нулю (так как он не равен нулю при $z = -i$). Поэтому найдется такое вещественное число x, что $\det(f' + xf'') \neq 0$. Тогда $f' + xf''$ есть $\mathbb{C}G$-изоморфизм, перестановочный с j.

Тривиальное упражнение. Если V допускает структурное отображение j, то оно также допускает $-j$, а при забывании структуры j, очевидно, получается тот же результат, что и при забывании структуры $-j$. Укажите $\mathbb{C}G$-автоморфизм, переводящий j в $-j$.

Если $\Lambda = \mathbb{C}$, то абелеву группу $K_{\mathbb{C}}(G)$ можно превратить в кольцо, используя тензорное произведение G-пространств над $\mathbb{C}$. Это кольцо называется *кольцом представлений* группы G. Если x лежит в $K_\Lambda(G) \subset K_{\mathbb{C}}(G)$, где $\Lambda = \mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$, а y лежит в $K_{\Lambda'}(G) \subset K_{\mathbb{C}}(G)$, где $\Lambda' = \mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$, то произведение xy ведет себя так, как описано в п. 3.7.

Стандартным методом изучения кольца $K_{\mathbb{C}}(G)$, а на самом деле стандартным методом доказательства теоремы 3.24, является исследование *характеров*. Чтобы дать определение характеров, нам необходимо понятие следа.

3.29. Определение. Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$, и пусть $f\colon V \to V$ — линейное отображение. Тогда можно двумя способами определить $\operatorname{Tr} f$ — *след* отображения f.

(i) Возьмем в пространстве V какой-нибудь базис. Отображению f в этом базисе отвечает некоторая матрица (M_{ij}). *Положим* $\operatorname{Tr} f = \sum_i M_{ii}$. Это число инвариантно относительно изменения базиса, поскольку

$$\sum_{i,j,k} T_{ij} M_{jk} (T^{-1})_{ki} = \sum_{j,k} \delta_{kj} M_{jk} = \sum_j M_{jj}.$$

(ii) (Бурбаки) Имеет место изоморфизм

$$\alpha\colon V^* \otimes V \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V),$$

заданный формулой $(\alpha(v^* \otimes w))\, v = v^*(v)\, w$, как в лемме 3.13. Отображение *свертки*

$$\varepsilon\colon V^* \otimes V \to \mathbb{C}$$

задается формулой $\varepsilon(v^* \otimes w) = v^*(w)$. Положим $\operatorname{Tr} f = \varepsilon\alpha^{-1} f$.

Нетрудно проверить, что эти определения эквивалентны. В следующем предложении сформулированы основные свойства следа.

3.30. Предложение.

(i) $\operatorname{Tr}\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V) \to \mathbb{C}$ — *линейное отображение.*

(ii) *Рассмотрим линейные отображения* $V \xrightarrow{\beta} W \xrightarrow{\gamma} V$. *Тогда* $\operatorname{Tr}(\beta\gamma) = \operatorname{Tr}(\gamma\beta)$.

(iii) *Рассмотрим отображение* $\beta \oplus \gamma\colon V \oplus W \to V \oplus W$. *Тогда* $\operatorname{Tr}(\beta \oplus \gamma) = \operatorname{Tr} \beta + \operatorname{Tr} \gamma$.

(iv) *Рассмотрим отображение* $\beta \otimes \gamma\colon V \otimes W \to V \otimes W$. *Тогда* $\operatorname{Tr}(\beta \otimes \gamma) = \operatorname{Tr} \beta \cdot \operatorname{Tr} \gamma$.

(v) *Если дано* $\beta\colon V \to V$, *то определим* $\beta^*\colon V^* \to V^*$, *как обычно, положив* $(\beta^* v^*)\, v = v^*(\beta v)$. *Тогда* $\operatorname{Tr} \beta^* = \operatorname{Tr} \beta$.

(vi) *Если дано* $\beta\colon V \to V$, *то пусть* $t\beta\colon tV \to tV$ — *отображение, о котором говорилось в п.* 3.5. *Тогда* $\operatorname{Tr}(t\beta) = \operatorname{Tr} \beta$.

(vii) *Если* $\beta\colon V \to V$ *идемпотентно, то* $\operatorname{Tr} \beta = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Im} \beta$.

Доказательство без опасений можно предоставить читателю.

3.31. Определение. Если дано G-пространство над $\mathbb{C}$, то определим его *характер* $\chi_V\colon G\to\mathbb{C}$ по формуле

$$\chi_V(g)=\operatorname{Tr}\theta g.$$

Ясно, что χ_V зависит только от класса эквивалентности представления V.

Если V — G-пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$, то его характером по определению будем считать характер комплексного G-пространства cV или $c'V$ соответственно. (В случае $\Lambda=\mathbb{R}$ можно было бы с тем же успехом рассматривать след над $\mathbb{R}$, но при $\Lambda=\mathbb{H}$ аналогичный прием не годится.)

3.32. Предложение.

(i) *Отображение* $\chi_V\colon G\to G$ *непрерывно.*

(ii) $\chi_V(xyx^{-1})=\chi_V(g)$.

(iii) $\chi_{V\oplus W}(g)=\chi_V(g)+\chi_W(g)$.

(iv) $\chi_{V\otimes W}(g)=\chi_V(g)\cdot\chi_W(g)$.

(v) $\chi_{V^*}(g)=\overline{\chi_V(g^{-1})}$.

(vi) $\chi_{tV}(g)=\overline{\chi_V(g)}$; *если* V *вещественно или кватернионно, то* $\chi_V(g)=\overline{\chi_V(g)}$.

(vii) $\chi_V(e)=\dim_{\mathbb{C}}(V)$.

Каждый пункт этого предложения вытекает из соответствующего пункта предложения 3.30. Кроме того, для доказательства второй части утверждения (vi) надо воспользоваться равенствами $tc=c$, $tc'=c'$ из предложения 3.6.

3.33. Предложение. *Предположим, что группа G компактна. Тогда*

(i) $\chi_V(g^{-1})=\chi_{V^*}(g)=\chi_{tV}(g)=\overline{\chi_V(g)}$.

(ii) $\int\limits_{g\in G}\chi_V(g)=\dim_{\mathbb{C}}V_G$, *где* V_G — *пространство, состоящее из элементов пространства* V, *инвариантных относительно* G.

Доказательство. (i) См. следствие 3.17.

(ii) Принимая во внимание линейность следа Tr и используя 3.15 и 3.30 (vii), получим

$$\int\limits_{g\in G}\operatorname{Tr}\theta g=\operatorname{Tr}\int\limits_{g\in G}\theta g=\operatorname{Tr}I=\dim_{\mathbb{C}}\operatorname{Im}I=\dim_{\mathbb{C}}V_G.$$

3.34. Теорема (соотношения ортогональности для характеров).

(i) *Пусть группа G компактна, и пусть V, W — G-пространства над Λ. Тогда*

$$\int_{g \in G} \overline{\chi_V(g)}\, \chi_W(g) = \dim \operatorname{Hom}_{\Lambda G}(V, W) = d,$$

где размерность берется над $\mathbb{C}$, если $\Lambda = \mathbb{C}$, и над $\mathbb{R}$, если $\Lambda = \mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$.

(ii) *Предположим теперь, что представления V и W неприводимы. Если V и W не эквивалентны, то $d = 0$. Если V и W эквивалентны и $\Lambda = \mathbb{C}$, то $d = 1$. Если V и W эквивалентны и $\Lambda = \mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$, то $d \geqslant 1$.*

Доказательство. (i) Согласно следствию 3.10, справедливость теоремы при $\Lambda = \mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$ немедленно вытекает из справедливости этой теоремы при $\Lambda = \mathbb{C}$. Итак, предположим, что $\Lambda = \mathbb{C}$, и рассмотрим G-пространство $H = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$. Имеем

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) = \dim_{\mathbb{C}} H_G =$$
$$= \int_{g \in G} \chi_H(g) = \int_{g \in G} \chi_{V^* \otimes W}(g) = \int_{g \in G} \overline{\chi_V(g)}\, \chi_W(g)$$

в силу 3.33 (ii), 3.13, 3.32 (iv) и 3.33 (i).

(ii) См. 3.23.

Пусть из каждого класса эквивалентности выбрано по одному неприводимому ΛG-пространству V_i, как это было сделано перед формулировкой теоремы 3.24, и пусть χ_i — характер ΛG-пространства V_i. Функции χ_i ортогональны. Поэтому справедливо

3.35. Следствие. *Функции χ_i линейно независимы.*

Очевидно, этот факт можно использовать для того, чтобы дать второе доказательство теоремы 3.24. Если два представления эквивалентны:

$$\bigoplus_i m_i V_i \cong \bigoplus_i n_i V_i,$$

то характеры этих представлений равны. Следовательно,

$$\sum_i m_i \chi_i = \sum_i n_i \chi_i$$

и $m_i = n_i$ для всех i. Но теорема 3.34 (i) показывает, что это доказательство совпадает с первым.

Пусть $C(G)$ — множество всех непрерывных функций $f\colon G \to \mathbb{C}$.

3.36. Определение. Если $f(xyx^{-1}) = f(y)$ для всех x, $y \in G$, то функция $f \in C(G)$ называется *функцией классов*.

Множество функций классов мы будем обозначать через $\mathrm{Cl}(G)$. С помощью поточечного сложения и умножения функций превратим $\mathrm{Cl}(G)$ в кольцо.

В силу 3.32 (i) и (ii) характеры являются функциями классов. Определим гомоморфизм абелевых групп

$$\chi\colon K_{\mathbb{C}}(G) \to \mathrm{Cl}(G)$$

по формуле

$$\chi\left(\sum_i n_i V_i\right) = \sum_i n_i \chi_i.$$

Для каждого G-пространства в силу 3.32 (iii) имеем

$$\chi(V) = \chi_V.$$

Используя 3.32 (iv), получим, что χ — гомоморфизм колец.

3.37. Предложение. *Гомоморфизм* $\chi\colon K_{\mathbb{C}}(G) \to \mathrm{Cl}(G)$ *является мономорфизмом.*

Доказательство. См. 3.35.

Образ гомоморфизма χ называется *кольцом характеров* группы G. Естественно возникает вопрос: насколько большую часть кольца $\mathrm{Cl}(G)$ занимает кольцо характеров. Мы увидим, что эта часть так велика, как вообще можно было бы надеяться (см. 3.47). Чтобы доказать это, нам нужна теорема Петера — Вейля.

Напомним, что классическая теорема Петера — Вейля сформулирована в терминах функций, являющихся элементами $M_{ij}(g)$ матричных представлений $M(g)$. Чтобы получить такую функцию, надо, очевидно, взять матричное представление $M\colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ и рассмотреть его композицию с линейным отображением $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, а именно, с проекцией на (i, j)-й элемент. Поэтому мы приведем следующую лемму.

3.38. Лемма. *Дуальное векторное пространство к* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ *есть* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V)$, *причем спаривание между* $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ *и* $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V)$ *задается формулой*

$$\langle\beta, \alpha\rangle = \mathrm{Tr}(\alpha\beta) = \mathrm{Tr}(\beta\alpha).$$

Доказательство. Имеем $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \cong V^* \otimes \otimes W$. Следовательно, дуальное пространство изоморфно

$$V \otimes W^* \cong W^* \otimes V \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V).$$

Осталось проверить, что указанная формула действительно определяет спаривание, но это читатель должен был уже сделать при доказательстве равенства $\mathrm{Tr}(\alpha\beta) = \mathrm{Tr}(\beta\alpha)$ (см. 3.30 (ii)).

3.39. Теорема (Петер и Г. Вейль [15]). *Пусть G — компактная топологическая группа. Тогда любую непрерывную функцию f: $G \to G$ можно равномерно аппроксимировать функциями вида* $\mathrm{Tr}(\alpha\theta(g))$, *где* θ *пробегает представления* θ: $G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$, *а* α *пробегает* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$.

Доказательство теоремы займет пп. 3.40—3.44. На самом деле в ходе доказательства мы будем аппроксимировать f функциями вида $\mathrm{Tr}(\alpha\theta(g^{-1}))$. Это безразлично, так как с самого начала можно заменить функцию f на f', где $f'(g) = f(g^{-1})$.

Доказательство основано на следующих идеях. Зададим действие группы G в пространстве $C(G)$, полагая

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x).$$

Тогда $C(G)$ станет бесконечномерным представлением группы G. Тем не менее, используя интегральные операторы

$$\int_{y \in G} k(x, y) f(x),$$

мы сможем найти некоторые конечномерные подпространства в $C(G)$, инвариантные относительно G. Зададим действие группы G в пространстве $C(G \times G)$ по формуле

$$(gk)(x, y) = k(g^{-1}x, g^{-1}y).$$

Если «ядро» k инвариантно относительно G, то интегральный оператор определяет G-отображение из $C(G)$ в $C(G)$, и, следовательно, его собственные подпространства инвариантны относительно G. В рассматриваемом случае эти подпространства конечномерны (см. 3.42), что и дает нам необходимые представления.

Теперь примемся за работу.

3.40. Лемма. *Пусть G — компактная группа и $f \in C(G)$. Тогда f можно равномерно аппроксимировать функциями вида*

$$v(x) = \int_{y \in G} k(x, y) f(y),$$

где k вещественна, симметрична и инвариантна относительно G.

Доказательство. Найдется такая окрестность U единицы e в G, что

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \text{ при } x^{-1}y \in U$$

и что $U^{-1} = U$. Пусть $\mu: G \to \mathbb{R}$ — такая непрерывная функция, что

$$\mu(x) \geqslant 0, \quad \mu(x) = 0 \text{ при } x \notin U,$$
$$\mu(x^{-1}) = \mu(x)$$

и

$$\int_{x \in G} \mu(x) = 1.$$

Положим

$$k(x, y) = \mu(x^{-1}y).$$

Тогда k вещественна, симметрична и инвариантна относительно G. Кроме того,

$$|\mu(x^{-1}y) f(x) - \mu(x^{-1}y) f(y)| \leqslant \varepsilon\mu(x^{-1}y)$$

при всех $x, y \in G$. Интегрируя по $y \in G$, получим

$$|f(x) - v(x)| \leqslant \varepsilon,$$

где

$$v(x) = \int_{y \in G} k(x, y) f(y).$$

Итак, для доказательства теоремы 3.39 достаточно аппроксимировать функции $v(x)$ указанного вида.

3.41. Теорема. *Предположим, что ядро k эрмитово*) и $u \in C(G)$. Тогда функцию*

$$v(x) = \int_{y \in G} k(x, y) u(y)$$

---

*) Это значит, что $k(y, x) = \overline{k(x, y)}$ $(x, y \in G)$. — *Прим. ред.*

можно равномерно аппроксимировать конечными линейными комбинациями собственных функций ядра k, соответствующих ненулевым собственным значениям.

Собственные функции, соответствующие собственному значению λ, — это, конечно, такие функции w, что

$$\int_{y \in G} k(x, y)\, w(y) = \lambda w(x).$$

Доказательство. См. [16, с. 117, 127]*). (Смитис рассматривает интегральные уравнения на отрезке $[a, b]$, но результат будет тот же самый и для интегральных уравнений на компактном многообразии.)

Отметим также, что даже если бы нам нужно было рассматривать какой-либо класс функций, более широкий, чем $C(G)$, например, $L^2(G)$, то собственные функции все равно были бы непрерывны, поскольку k непрерывна.

3.42. Теорема. *Предположим, что ядро k эрмитово и $\lambda \neq 0$. Тогда векторное пространство V собственных функций интегрального оператора с ядром k, отвечающих собственному значению λ, имеет конечную размерность. Кроме того, ряд $\sum_i |\lambda_i|^2$, где каждое слагаемое $|\lambda|^2$ повторяется с надлежащей кратностью, сходится.*

Доказательство. См. [16, с. 48, 102, 112]*).

3.43. Лемма. *Пусть в предположениях теоремы 3.42 функция k инвариантна относительно G. Тогда все элементы пространства V можно записать в требуемом виде* $\operatorname{Tr}(\alpha\theta(g^{-1}))$.

Доказательство. Пространство V есть конечномерное G-пространство. Пусть $v \in V$. Определим линейное отображение

$$\beta\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V) \to \mathbb{C}$$

следующим образом: если $h \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$, то положим

$$\beta(h) = (hv)(e).$$

Тогда мы имеем

$$\beta(\theta(g^{-1})) = v(g).$$

---

*) См. также [25, гл. 11]. — *Прим. перев.*

По лемме 3.38 элемент β отвечает некоторому элементу $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$, такому, что

$$\mathrm{Tr}(\alpha\theta(g^{-1})) = v(g).$$

3.44. Лемма. *Множество непрерывных функций $G \to \mathbb{C}$, которые можно записать в виде $\mathrm{Tr}(\alpha\theta(g^{-1}))$, является подпространством в $C(G)$.*

Доказательство. Предположим, что заданы

$$\theta': G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V', V'), \quad \theta'': G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V'', V''),$$
$$\alpha' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V', V'), \quad \alpha'' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V'', V'')$$

и $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{C}$. Образуем G-пространство $V = V' \oplus V''$ и рассмотрим элемент $\alpha = \lambda'\alpha' \oplus \lambda''\alpha'' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$. Тогда мы имеем

$$\mathrm{Tr}(\alpha\theta(g^{-1})) = \lambda' \,\mathrm{Tr}(\alpha'\theta'(g^{-1})) + \lambda'' \,\mathrm{Tr}(\alpha''\theta''(g^{-1})).$$

На этом заканчивается доказательство теоремы 3.39. В самом деле, любая функция $f(x)$ может быть равномерно аппроксимирована функцией $v(x)$ из леммы 3.40, которая в свою очередь может быть равномерно аппроксимирована линейной комбинацией собственных функций согласно теореме 3.41. В силу 3.42—3.44 эта линейная комбинация записывается в требуемом виде $\mathrm{Tr}(\alpha\theta(g^{-1}))$.

3.45. Замечание. *Если $\alpha: V \to V$ — G-отображение, то $\mathrm{Tr}(\alpha\theta(g^{-1}))$ — функция классов.*

Доказательство. Учитывая предложение 3.30 (ii), имеем

$$\mathrm{Tr}(\alpha\theta(xyx^{-1})) = \mathrm{Tr}(\alpha(\theta x)(\theta y)(\theta x^{-1})) =$$
$$= \mathrm{Tr}((\theta x^{-1})\alpha(\theta x)(\theta y)) = \mathrm{Tr}(\alpha\theta(y)),$$

поскольку α — G-отображение.

Справедливо в некотором смысле обращение этого замечания.

3.46. Предложение. *Пусть G — компактная группа. Тогда каждую функцию классов $f: G \to G$ можно равномерно аппроксимировать функциями вида $\mathrm{Tr}(\beta\theta(g))$, где θ пробегает множество представлений $\theta: G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$, а β пробегает $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, V)$, т. е. β пробегает множество G-отображений.*

Доказательство. По теореме 3.39 найдутся такое представление $\theta: G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ и такой элемент $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$, что

$$|f(x) - \mathrm{Tr}(\alpha\theta(x))| \leqslant \varepsilon.$$

Если f — функция классов, то в это неравенство можно вместо x подставить $y^{-1}xy$ и получить

$$|f(x) - \mathrm{Tr}(\alpha\theta(y^{-1}xy))| \leqslant \varepsilon.$$

Рассуждая как при доказательстве замечания 3.45, получим

$$|f(x) - \mathrm{Tr}((\theta y)\,\alpha\,(\theta y^{-1})(\theta x))| \leqslant \varepsilon.$$

Интегрирование по y дает неравенство

$$|f(x) - \mathrm{Tr}(\beta(\theta x))| \leqslant \varepsilon,$$

где

$$\beta = \int\limits_{y \in G} (\theta y)\,\alpha\,(\theta y^{-1}).$$

Но из доказательства предложения 3.18 видно, что β есть G-отображение.

3.47. Теорема. *Пусть G — компактная топологическая группа. Тогда каждую функцию классов $f\colon G \to \mathbb{C}$ можно равномерно аппроксимировать линейной комбинацией $\sum\limits_i \lambda_i\chi_i$ неприводимых комплексных характеров.*

Доказательство. Пусть θ и β такие же, как в предложении 3.46, и пусть V_i и μ такие же, как в лемме 3.25. Тогда G-отображение $\beta\colon V \to V$ индуцирует некоторые отображения

$$\beta_i\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, V).$$

Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus\limits_i \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, V) \otimes V_i & \xrightarrow[\cong]{\mu} & V \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \bigoplus\limits_i \beta_i \otimes \theta_i(g)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \beta\theta(g)} \\
\bigoplus\limits_i \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, V) \otimes V_i & \xrightarrow[\cong]{\mu} & V
\end{array}$$

Следовательно, справедлива формула

$$\mathrm{Tr}(\beta\theta(g)) = \sum_i (\mathrm{Tr}\,\beta_i)\,\mathrm{Tr}(\theta_i g),$$

правая часть которой имеет требуемый вид $\sum\limits_i \lambda_i\chi_i$, Естественно попытаться найти аналог теоремы 3.47 для тел $\mathbb{R}$ и $\mathbb{H}$. В силу 3.6 мы имеем $tcV = cV$, $tc'V = c'V$. Следовательно, согласно 3.32 (vi), характер представления над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$ является вещественным. В силу 3.33 (i) он удовлетворяет условию $\chi(g^{-1}) = \chi(g)$.

3.48. Следствие. *Каждую функцию классов $f\colon G \to \mathbb{R}$, такую, что $f(g) = f(g^{-1})$, можно равномерно аппроксимировать $\mathbb{R}$-линейными комбинациями характеров представлений над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}$-линейными комбинациями характеров представлений над телом $\mathbb{H}$.*

Доказательство. Пусть $f\colon G \to \mathbb{R}$ — такая функция классов, что $f(g) = f(g^{-1})$. По теореме 3.47 найдутся такие комплексные числа λ_i, что

$$\left| f(g) - \sum_i \lambda_i \chi_i(g) \right| < \varepsilon.$$

Так как $f(g) = f(g^{-1})$, то

$$\left| f(g) - \sum_i \lambda_i \chi_i(g^{-1}) \right| < \varepsilon.$$

Отсюда, используя предложение 3.33 (i), получим

$$\left| f(g) - \sum_i \lambda_i \overline{\chi_i(g)} \right| < \varepsilon.$$

Поскольку функция f вещественна, мы также имеем

$$\left| f(g) - \sum_i \bar{\lambda}_i \overline{\chi_i(g)} \right| < \varepsilon,$$

$$\left| f(g) - \sum_i \bar{\lambda}_i \chi_i(g) \right| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left| f(g) - \sum_i {}^1/_4 \left(\lambda_i + \bar{\lambda}_i\right)\left(\chi_i(g) + \overline{\chi_i(g)}\right) \right| < \varepsilon.$$

Но здесь ${}^1/_4(\lambda_i + \bar{\lambda}_i)$ — вещественные коэффициенты, а $(\chi_i + \bar{\chi}_i)$ — характеры вещественных представлений rV_i или кватернионных представлений qV_i (см. 3.6).

3.49. Следствие. *Каждую функцию классов $f\colon G \to \mathbb{C}$, такую, что $f(g) = f(g^{-1})$, можно равномерно аппроксимировать $\mathbb{C}$-линейными комбинациями характеров представлений над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$-линейными комбинациями характеров представлений над телом $\mathbb{H}$.*

Доказательство. Аппроксимируйте вещественную и мнимую части функции f при помощи следствия 3.48.

Рассмотрим теперь более подробно вопрос о том, какие комплексные представления являются вещественными или кватернионными.

3.50. Теорема. *Представление V над $\mathbb{C}$ является вещественным тогда и только тогда, когда существует невырожденная симметрическая билинейная форма β: $V \otimes V \to \mathbb{C}$, инвариантная относительно G.*

Представление V над $\mathbb{C}$ является кватернионным тогда и только тогда, когда существует невырожденная кососимметрическая билинейная форма β: $V \otimes V \to \mathbb{C}$, инвариантная относительно G.

Доказательство. Предположим сначала, что V снабжено структурным отображением j, таким, что $j^2 = \varepsilon = \pm 1$. Согласно предложению 3.16, на V можно определить положительно определенную эрмитову форму H, инвариантную относительно G и удовлетворяющую условию

$$H(jv, jw) = \overline{H(v, w)}.$$

Положим

$$B(v, w) = H(jv, w).$$

Ясно, что форма B билинейна, невырождена и инвариантна относительно G. Кроме того, мы имеем

$$B(w, v) = H(jw, v) = \overline{H(v, jw)} = H(jv, j^2w) = \\ = \varepsilon H(jv, w) = \varepsilon B(v, w).$$

Таким образом, форма B является симметрической или кососимметрической в соответствии со знаком ε.

Теперь попытаемся обратить это рассуждение. Предположим, что в пространстве V задана невырожденная билинейная форма $B: V \otimes V \to \mathbb{C}$, инвариантная относительно G и удовлетворяющая условию

$$B(w, v) = \varepsilon B(v, w),$$

где $\varepsilon = \pm 1$. В силу 3.16 можно считать, что на V задана положительно определенная эрмитова форма H, инвариантная относительно G. Определим отображение f: $V \to V$ с помощью условия

$$B(v, w) = H(fv, w).$$

Отображение f полулинейно, взаимно однозначно и является G-отображением. Используя свойство формы B, получим

$$H(fv, w) = B(v, w) = \varepsilon B(w, v) = \\ = \varepsilon H(fw, v) = \varepsilon \overline{H(v, fw)}.$$

Следовательно,

3.51. $H(fv, w) = \varepsilon \overline{H(v, fw)}$.

Определим теперь другую положительно определенную эрмитову форму в пространстве V формулой

3.52. $K(v, w) = \overline{H(fv, fw)}$.

Форма K инвариантна относительно G. Подставляя fv и fw вместо v и w в формулу 3.51, получим

$$H(f^2v, fw) = \varepsilon \overline{H(fv, f^2w)}.$$

Переходя к комплексно сопряженным числам, получим

3.53. $K(fv, w) = \varepsilon \overline{K(v, fw)}$.

Разложим теперь пространство V в прямую сумму собственных пространств V_i пары форм H, K *). Собственные значения этой пары форм являются положительными вещественными числами λ_i; для каждого λ_i пространство V_i есть множество таких векторов v_i, что

3.54. $K(v_i, w) = \lambda_i H(v_i, w)$ для всех $w \in V$.

Собственные пространства V_i инвариантны относительно группы G. Я утверждаю, что V_i сохраняются также и при отображении f. В самом деле, в силу 3.53, 3.54 и 3.51 имеем

$$K(fv_i, w) = \varepsilon \overline{K(v_i, fw)} = \varepsilon \lambda_i \overline{H(v_i, fw)} = \lambda_i H(fv_i, w).$$

Следовательно, $fv_i \in V_i$.

Учитывая 3.51, 3.52 и 3.54, мы имеем также

$$H(f^2v_i, w) = \varepsilon \overline{H(fv_i, fw)} = \varepsilon K(v_i, w) = \varepsilon \lambda_i H(v_i, w).$$

Следовательно, $f^2 \mid V_i = \varepsilon \lambda_i$, где λ_i вещественно и положительно.

Определим теперь отображение $j\colon V \to V$, положив

$$j \mid V_i = (\lambda_i)^{-1/2} f \mid V_i.$$

Тогда j полулинейно, является G-отображением и удовлетворяет условию $j^2 = \varepsilon$. Итак, представление V

*) То есть V_i — собственное подпространство эрмитова оператора $H^{-1}K\colon V \to V$, где $H, K\colon V \to V^*$ — изоморфизмы, соответствующие формам H, K. — *Прим. перев.*

вещественно или кватернионно в соответствии со знаком ε. На этом заканчивается доказательство теоремы.

Резюмируя, можно сказать, что преимущество структурных отображений заключается в том, что они нормализуются условием $j^2 = \pm 1$, а недостаток билинейных отображений заключается в том, что они могут быть денормализованы произвольным скалярным множителем на каждом G-инвариантном слагаемом G-пространства V.

3.55. Определение. Мы говорим, что представление V группы G *самосопряжено*, если $tV \cong V$. Очевидно, представления над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{H}$ являются самосопряженными (это следует либо из предложения 3.6, либо из того, что структурное отображение j дает изоморфизм представления tV на V).

3.56. Предложение. *Если неприводимое комплексное представление V группы G самосопряжено, то оно либо вещественно, либо кватернионно, но не то и другое одновременно.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $V^* \otimes V^*$ билинейных отображений из $V \otimes V$ в $\mathbb{C}$. Оно обладает автоморфизмом τ, определенным формулой

$$\tau(v^* \otimes w^*) = w^* \otimes v^*.$$

Имеем $\tau^2 = 1$. Следовательно, $V^* \otimes V^*$ разлагается в прямую сумму двух собственных подпространств автоморфизма τ, отвечающих собственным значениям $+1$ и -1. Первое из них есть пространство S^* симметрических билинейных отображений, а второе — пространство A^* кососимметрических билинейных отображений.

Далее, имеем

$$V^* \otimes V^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V^*).$$

По следствию 3.17 $V^* \cong tV$, и если представление V самосопряжено, то $V^* \cong V$. Если V неприводимо, то таким же будет и V^*, поэтому в силу 3.23 мы имеем

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, V^*) = 1.$$

Это значит, что элементы, инвариантные относительно G, обладают свойством

$$\dim_{\mathbb{C}} S^*_G + \dim_{\mathbb{C}} A^*_G = 1.$$

Кроме того, ненулевому билинейному отображению B, инвариантному относительно G, отвечает ненулевое G-отображение $V \to V^*$, которое должно быть изоморфизмом. Следовательно, такое билинейное отображение B невырождено. Отсюда мы заключаем, что возможны только два случая.

(i) $\dim_{\mathbb{C}} S_G^* = 1$, $\dim_{\mathbb{C}} A_G^* = 0$. В этом случае представление V допускает симметрическую невырожденную билинейную форму, инвариантную относительно G, но не допускает кососимметрической формы, обладающей этими свойствами.

(ii) $\dim_{\mathbb{C}} S_G^* = 0$, $\dim_{\mathbb{C}} A_G^* = 1$. В этом случае представление V допускает кососимметрическую невырожденную билинейную форму, инвариантную относительно G, но не допускает симметрической формы, обладающей этими свойствами.

Требуемый результат теперь вытекает из теоремы 3.50.

3.57. Теорема. *Пусть дана компактная группа G. Тогда можно так выбрать представления U_m над $\mathbb{R}$, V_n над $\mathbb{C}$ и W_p над $\mathbb{H}$, чтобы выполнялись следующие условия.*

(i) *Неэквивалентные неприводимые представления над $\mathbb{R}$ — это в точности представления U_m, rV_n и $rc'W_p$.*

(ii) *Неэквивалентные неприводимые представления над $\mathbb{C}$ — это в точности представления cU_m, V_n, tV_n и $c'W_p$.*

(iii) *Неэквивалентные неприводимые представления над $\mathbb{H}$ — это в точности представления qcU_m, qV_n и W_p.*

Доказательство. Начнем с выбора неприводимых комплексных представлений V. Прежде всего, мы можем разбить их на представления, для которых $tV \cong V$, и на представления, для которых $tV \not\cong V$. Последние встречаются парами (V, tV), и мы выберем одно представление V_n из каждой пары.

В силу предложения 3.56 представления первого типа являются либо вещественными, либо кватернионными. Выберем представления U_m над $\mathbb{R}$ и W_p над $\mathbb{H}$ так, чтобы cU_m и $c'W_p$ давали все такие представления V. Ясно, что полученный набор представлений U_m, V_n и W_p удовлетворяет условию (ii).

Утверждается также, что представления U_m, rV_n и $rc'W_p$ над $\mathbb{R}$ неприводимы и аналогично для представлений над $\mathbb{H}$. В самом деле, представление U_m неприводимо, так как неприводимым является cU_m. Далее, мы имеем

$$crV_n \cong (1+t)V_n, \quad crc'W_p \cong 2c'W_p,$$

и ни одно из этих представлений нельзя разложить в сумму вещественных представлений, потому что V_n и tV_n не самосопряжены, а $c'W_p$ не вещественно. Аналогично для представлений над $\mathbb{H}$.

Осталось только доказать, что никаких других неприводимых представлений над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$ не существует. Для этой цели докажем следующую лемму.

3.58. Лемма. *Если V и W — неэквивалентные неприводимые представления над $\mathbb{R}$, то никакое комплексное неприводимое представление не может встречаться в качестве слагаемого одновременно в cV и в cW. Аналогичное утверждение справедливо для представлений $c'V$ и $c'W$, если V и W — неприводимые представления над $\mathbb{H}$.*

Доказательство. В силу 3.10 и 3.23 имеем

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(cV, cW) = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}G}(V, W) = 0.$$

Чтобы закончить доказательство теоремы 3.57, осталось только заметить, что все комплексные неприводимые представления встречаются в качестве слагаемых в представлениях

$$cU_m, \quad crV_n = (1+t)V_n, \quad crc'W_p = 2c'W_p.$$

Поэтому других неприводимых представлений над $\mathbb{R}$ не существует. Аналогично рассматриваются представления над $\mathbb{H}$.

Существует классический критерий для выяснения того, является ли комплексное неприводимое представление вещественным или кватернионным. Для вывода этого критерия мы проведем следующие рассуждения.

3.59. Определение. Пусть $V^n = V \otimes V \otimes \ldots \otimes V$ (n множителей). Пусть $\lambda^n V^n$ — слагаемое в V^n, на котором группа подстановок Σ_n действует по формуле

$$\rho w = (\varepsilon\rho)\, w,$$

где $\varepsilon\rho$ — знак подстановки ρ, т. е. $\lambda^n V$ есть пространство кососимметрических тензоров. G-пространство $\lambda^n V$ называется *n-й внешней степенью* пространства V.

Рассмотрим степенную сумму

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_m^k$$

от $m \geqslant k$ переменных. Эту сумму можно записать в виде многочлена $P_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ от элементарных симметрических функций σ_i с переменными $x_1, \ldots, x_m$. В действительности вид многочлена P_k не зависит от числа m, и эта формула справедлива даже при $m < k$.

3.60. Определение. Если V — комплексное представление группы G, то определим виртуальное представление $\psi^k(V)$ формулой

$$\psi^k(V) = P_k(\lambda^1 V, \lambda^2 V, \ldots, \lambda^k V)$$

(значение могочлена вычисляется в кольце $K_{\mathbb{C}}(G)$).

3.61. Лемма. *Если* $W = \psi^k V$, *то*

$$\chi_W(g) = \chi_V(g^k).$$

Ясно, что $\chi_V(g^k)$ есть функция классов. В связи с теоремой 3.47 естественно возникает вопрос: характером чего является эта функция?

Доказательство. Снабдим пространство V инвариантной положительно определенной эрмитовой формой H. Зафиксируем g. Тогда $\theta_V(g)$ — унитарное отображение, и в пространстве V можно найти базис, состоящий из его собственных векторов v_i с собственными значениями λ_i. Тогда пространство V^n обладает базисом, состоящим из собственных векторов $v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}$ оператора $\theta_V(g) \otimes \theta_V(g) \otimes \ldots \otimes \theta_V(g)$ с собственными значениями $\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_n}$, и аналогичное утверждение справедливо для пространства $\lambda^n V^n$. Следовательно, g действует на $\lambda^n V$ со следом σ_n, равным n-й элементарной симметрической функции от λ_i. Отсюда, учитывая определение многочлена P_k, получаем

$$\chi_W(g) = P_k(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k) = \\ = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots = \operatorname{Tr}((\theta_V g)^k) = \chi_V(g^k).$$

3.62. Теорема. *Пусть V — неприводимое комплексное представление компактной группы G. Тогда*

$$\int_{g \in G} \chi_V(g^2) = \begin{cases} 1, & \text{если } V \text{ вещественно,} \\ 0, & \text{если } V \text{ не самосопряжено,} \\ -1, & \text{если } V \text{ кватернионно.} \end{cases}$$

Доказательство. Действуя, как в доказательстве предложения 3.65, получим разложение $V \otimes V \cong \cong S \oplus A$. Мы имеем

$$P_2(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1)^2 - 2\sigma_2$$

и, следовательно,

$$\psi^2(V) = V^2 - 2A = S - A.$$

Поэтому

$$\int_{g \in G} \chi_V(g^2) = \int_{g \in G} \chi_S(g) - \chi_A(g) = \dim_{\mathbb{C}} S_G - \dim_{\mathbb{C}} A_G.$$

Это равенство дает требуемый результат.

3.63. Замечание. *Если представление V вещественно, то и $\lambda^n V$ вещественно. Если представление V кватернионно, то $\lambda^n V$ при четном n является вещественным, а при нечетном n — кватернионным.*

Доказательство. Предположим, что V допускает структурное отображение j, квадрат которого равен ε. Тогда V^n допускает структурное отображение $j \otimes j \otimes \ldots \otimes j$, квадрат которого равен ε^n, и то же самое справедливо для $\lambda^n V$.

3.64. Замечание. *Если представление V вещественно, то и виртуальное представление $\psi^k V$ вещественно. Если представление V кватернионно, то $\psi^k V$ при четном k является вещественным, а при нечетном k — кватернионным.*

Доказательство. Припишем функции σ_i вес i, тогда $P_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ — многочлен веса k. Для завершения доказательства достаточно использовать результаты п. 3.7.

Теперь мы переходим к вычислению кольца $K_{\mathbb{C}}(G \times H)$ в терминах колец $K_{\mathbb{C}}(G)$ и $K_{\mathbb{C}}(H)$. Пусть V — G-пространство и W — H-пространство (над $\mathbb{C}$). Тогда можно образовать пространство $V \otimes W$ и превратить его в $G \times H$-пространство, положив

$$(g, h)(v \otimes w) = gv \otimes hw.$$

Тем самым определен гомоморфизм колец

$$\nu: K_{\mathbb{C}}(G) \otimes K_{\mathbb{C}}(H) \to K_{\mathbb{C}}(G \times H).$$

3.65. Теорема. *Отображение ν — изоморфизм. Точнее, неэквивалентные неприводимые $G \times H$-простран-*

ства (над $\mathbb{C}$) — это в точности произведения вида $V_i \otimes W_j$, где V_i пробегает неэквивалентные неприводимые G-пространства, а W_j — неэквивалентные неприводимые H-пространства.

Если эта теорема доказана для $K_{\mathbb{C}}(G \times H)$, то ее легко установить для представлений группы $G \times H$ над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{H}$. Действительно, неприводимое представление $V_i \otimes W_j$ является самосопряженным тогда и только тогда, когда оба представления V_i и W_j являются самосопряженными, причем $V_i \otimes W_j$ является вещественным или кватернионным в соответствии с природой представлений V_i и W_j, как указано в п. 3.7.

Теорема 3.65 непосредственно вытекает из следующих двух результатов.

3.66. Лемма. *Если V — неприводимое G-пространство и W — неприводимое H-пространство (над $\mathbb{C}$), то $V \otimes W$ — неприводимое $G \times H$-пространство.*

3.67. Лемма. *Любое $G \times H$-пространство U (над $\mathbb{C}$) можно представить в виде $\bigoplus_{i,j} n_{ij} V_i \otimes W_j$. В частности, все неприводимые $G \times H$-пространства имеют вид $V_i \otimes W_j$.*

Первое доказательство леммы 3.66. Имеем

$$\chi_{V \otimes W}(g, h) = \chi_V(g)\chi_W(h).$$

Следовательно,

$$\int_{(g,h) \in G \times H} \overline{\chi}_{V \otimes W}(g, h)\chi_{V \otimes W}(g, h) = \int_{g \in G} \overline{\chi}_V(g)\chi_V(g) \int_{h \in H} \overline{\chi}_W(h)\chi_W(h) = 1.$$

Согласно теоремам 3.20 и 3.34, $V \otimes W$ неприводимо.

Доказательство леммы 3.67. По лемме 3.25 мы имеем следующий изоморфизм над H:

$$\mu: \bigoplus_j \mathrm{Hom}_H(W_j, U) \otimes W_j \xrightarrow{\cong} U.$$

Пусть G действует на $\mathrm{Hom}_H(W_j, U)$ по формуле

$$(gk)w = g(kw) \text{ для } k \in \mathrm{Hom}_H(W_j, U).$$

(Легко проверить, что gk действительно является H-отображением.) Тогда μ есть $G \times H$-отображение. Но по теореме 3.20 мы имеем изоморфизм G-модулей

$$\mathrm{Hom}_H(W_j, U) \cong \bigoplus_i n_{ij} V_i.$$

Следовательно,

$$U \cong \bigoplus_{i,j} n_{ij} V_i \otimes W_j.$$

Наконец, если U неприводимо, то очевидно, что эта сумма может содержать только одно произведение.

Второе доказательство леммы 3.66. Предположим, что представления V и W неприводимы и что $V \otimes W$ имеет $G \times H$-подпространство S. Тогда в силу 3.67 имеем

$$S = \bigoplus_{i,j} n_{ij} V_i \otimes W_j.$$

Рассматривая $V \otimes W$ как H-пространство, мы можем написать

$$V \otimes W \cong (\dim V)\, W.$$

Следовательно, единственное представление W_j, для которого может выполняться неравенство $n_{ij} \neq 0$, есть W. Аналогично, единственное представление V_i, для которого может выполняться неравенство $n_{ij} \neq 0$, есть V. Значит, $\dim S$ делится на $(\dim V)(\dim W)$ и $S = 0$ или $S = V \otimes W$.

Теперь мы перейдем к рассмотрению случая двулистного накрытия $\pi\colon \tilde{G} \to G$. Это значит, что π — эпиморфизм топологических групп и что $\operatorname{Ker} \pi = \mathbb{Z}_2 = \{1, z\}$. Конечно, $\operatorname{Ker} \pi$ — нормальная подгруппа в $\tilde{G}$ и даже лежит в ее центре, так как $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_2 = 1$.

3.68. Теорема. *Характер $\tilde{\chi}\colon \tilde{G} \to \mathbb{C}$ разлагается в композицию вида $\tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}$, где χ — характер, тогда и только тогда, когда $\tilde{\chi}$ разлагается в композицию отображений множеств. Кроме того, χ является вещественным тогда и только тогда, когда $\tilde{\chi}$ вещественен. Аналогично, χ является кватернионным тогда и только тогда, когда $\tilde{\chi}$ — кватернионный.*

Доказательство. «Только тогда» тривиально. Поэтому предположим, что $\tilde{V}$ — представление группы $\tilde{G}$. Тогда элемент z действует на $\tilde{V}$ и удовлетворяет условию $z^2 = 1$. Значит, $\tilde{V}$ разлагается в прямую сумму собственных подпространств автоморфизма z, отвечающих собственным значениям $+1$ и -1, скажем, $\tilde{V} = V \oplus V^-$. Поскольку элемент z — центральный, V и

V^- являются G-пространствами. Имеем

$$\tilde{\theta}(zg) = \theta(g) \oplus (-\theta^-(g))$$

и, взяв следы, получим

$$\tilde{\chi}(zg) = \chi(g) - \chi^-(g).$$

Если $\tilde{\chi}$: $\tilde{G} \to \mathbb{C}$ разлагается в композицию как отображение множеств, то

$$\tilde{\chi}(zg) = \tilde{\chi}(g) = \chi(g) + \chi^-(g),$$

откуда $\chi^-(g) = 0$ и $V^- = 0$. Ясно, что тогда $\tilde{V} = V$ — представление группы G. Пусть $\tilde{V}$ снабжено каким-либо структурным отображением, перестановочным с действием группы $\tilde{G}$, тогда то же самое структурное отображение будет перестановочно с действием группы G.

3.69. Замечание. Эта теорема справедлива также для виртуальных характеров.

3.70. Упражнение. Обобщить теорему 3.68 на любые конечные накрытия, предполагая, что группа G компактна и связна и что $\Lambda = \mathbb{C}$.

Теперь обратимся к рассмотрению представлений тора.

3.71. Предложение. *Если группа G абелева и $\Lambda = \mathbb{C}$, то всякое неприводимое G-пространство V одномерно.*

Доказательство. Для каждого $g \in G$ рассмотрим отображение $\theta(g)$: $V \to V$. Оно является G-отображением, поскольку группа G абелева. По лемме Шура 3.22 (ii) отображение $\theta(g)$ есть умножение на некоторый скаляр $\lambda(g)$. Значит, каждое подпространство пространства V инвариантно относительно G и, следовательно, $\dim V = 1$.

3.72. Замечание. В доказательстве предложения 3.71 $\lambda(g) \in \mathbb{C} - \{0\}$.

3.73. Замечание. *Пусть G — компактная абелева группа и V — неприводимое G-пространство, так что θ можно записать в виде λ: $G \to \mathbb{C} - \{0\}$. Тогда $\lambda(G) \subset S^1 \subset \mathbb{C} - \{0\}$, где S^1 — единичная окружность в $\mathbb{C}$.*

Первое доказательство. Если $|\lambda(g)| = r > 1$, то $|\lambda(g^n)| = r^n \to \infty$, а если $|\lambda(g)| = r < 1$, то $|\lambda(g^n)| = r^n \to 0$.

Второе доказательство. Зададим в V положительно определенную эрмитову форму H, инвариантную относительно G. Тогда

$$H(v, v) = H(gv, gv) = |\lambda(g)|^2 H(v, v),$$

откуда

$$|\lambda(g)| = 1.$$

Напомним, что тор T^1 был определен как фактор-группа $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

3.74. Предложение. *Любой гомоморфизм α: $T^1 \to T^1$ имеет вид $\alpha(x) = nx \bmod 1$ для некоторого целого n.*

Доказательство. Используя 2.11 и 2.13, или же обычную теорию накрывающих пространств, мы можем утверждать, что α поднимается до гомоморфизма β: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда $\beta(1) = 0 \bmod 1$, следовательно, $\beta(1) = n \in \mathbb{Z}$, а $\beta(a) = na$ для $a \in \mathbb{Z}$ и $b\beta(a/b) = \beta(a) = na$ для $b \in \mathbb{Z}$. Итак, $\beta(a/b) = n \cdot a/b$ при a, $b \in \mathbb{Z}$. В силу непрерывности имеем $\beta(x) = nx$ для всех $x \in \mathbb{R}$, и $\alpha(x) = nx \bmod 1$.

3.75. Следствие. *Любой гомоморфизм α: $T^k \to T^1$ имеет следующий вид:*

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_k) = n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k \mod 1$$

для некоторых $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$.

3.76. Следствие. *Всякое неприводимое комплексное T^k-пространство имеет следующий вид:*

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \exp 2\pi i (n_1x_1 + \ldots + n_kx_k),$$

где $\exp z = e^z$.

Это вытекает из 3.71, 3.73 и 3.75, так как группа T^1 изоморфно отображается на S^1 при гомоморфизме $x \to \exp 2\pi i x$.

Пусть $1 \leqslant j \leqslant k$, и пусть ρ_j — T^k-пространство, определенное формулой

$$\lambda(x_1, \ldots, x_k) = \exp 2\pi i x_j.$$

Тогда ρ_j обратимы *), и для любых целых $n_1, n_2, \ldots$ $\ldots, n_k$ (положительных, отрицательных или нулевых) $\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\ldots\rho_k^{n_k}$ есть T^k-пространство, определенное формулой

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \exp 2\pi i (n_1x_1 + \ldots + n_kx_k).$$

*) Как элементы кольца $K_{\mathbb{C}}(T^k)$. — *Прим. перев.*

3.77. Следствие. *Кольцо представлений $K_{\mathbb{C}}(T^k)$ есть кольцо конечных рядов Лорана от $\rho_1, \ldots, \rho_k$, и, следовательно, в нем нет делителей нуля.*

Имеем

$$t\left(\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\ldots\rho_k^{n_k}\right)=\rho_1^{-n_1}\rho_2^{-n_2}\ldots\rho_k^{-n_k}.$$

Таким образом, единственное неприводимое представление группы T^k, которое является самосопряженным, — это тривиальное представление 1.

3.78. Следствие. *Неэквивалентные неприводимые вещественные представления — это*

(i) *тривиальное представление* 1 *размерности* 1 *и*

(ii) *представления*

$$r\left(\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\ldots\rho_k^{n_k}\right)=r\left(\rho_1^{-n_1}\rho_2^{-n_2}\ldots\rho_k^{-n_k}\right),$$

где $(n_1, n_2, \ldots, n_k)\neq(0, 0, \ldots, 0)$, имеющие размерность 2.

Это следует из теоремы 3.57 и сделанного выше замечания.

Глава 4

МАКСИМАЛЬНЫЕ ТОРЫ В КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ ЛИ

Предупреждение. Начиная с п. 4.5, G означает связную компактную группу Ли.

4.1. Определение. Пусть G — топологическая группа, и пусть $g \in G$. Подгруппу, порожденную элементом g, обозначим через H. Элемент g называется *образующим* группы G, если $\bar{H} = G$, где черта означает замыкание.

Группа G называется *монотетической* (или *моногенной*), если в ней есть образующий элемент.

4.2. Упражнение. Монотетичность влечет за собой коммутативность.

4.3. Предложение. *Тор T^k монотетичен. На самом деле образующие тора T^k составляют множество, плотное в T^k.*

Доказательство. Пусть U_1, U_2, ... — счетная база открытых множеств в T^k. Пусть $(x_1, \ldots, x_k)$ — координаты в $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$, индуцированные стандартными координатами в $\mathbb{R}^k$. Назовем *кубом* множество вида $\{x \in T^k \mid |x_i - \xi_i| \leqslant \varepsilon\}$, где ξ — фиксированная точка и $\varepsilon > 0$ — вещественное число *). Пусть C_0 — произвольный куб. Определим убывающую последовательность его подкубов, пересечение которых даст образующий элемент тора.

По индукции предположим, что уже определены кубы $C_0 \supset C_1 \supset \ldots \supset C_{m-1}$ и что ребро куба C_{m-1}

*) Таким образом, куб в T^k — это образ обычного куба в $\mathbb{R}^n$, заданного неравенствами $|x_i - \xi_i| \leqslant \varepsilon$, при естественном гомоморфизме $\mathbb{R}^k \to T^k$. Куб является компактным подмножеством. Число 2ε автор называет ребром куба. — *Прим. ред.*

равно 2ε. Тогда найдется такое целое $N = N(m)$, что $N \cdot 2\varepsilon > 1$ и, следовательно, образ куба C_{m-1} при возведении в степень N есть T^k. Можно найти такой куб $C_m \subset C_{m-1}$, что $C_m^N \subset U_m$.

Пусть $g \in \bigcap_m C_m$. Тогда $g^{N(m)} \in U_m$, значит, g — образующий тора T^k.

4.4. Предложение. *Пусть G — топологическая абелева группа с подгруппой $T^k \subset G$, такой, что, $G/T^k \cong \mathbb{Z}_m$. Тогда G монотетична.*

Доказательство. Пусть t — образующий тора T^k. Выберем элемент $u \in G$, который проектируется в образующий группы $\mathbb{Z}_m$. Тогда $u^m \in T^k$ и $tu^{-m} \in T^k$. Группа T^k делима, поэтому $s^m = tu^{-m}$ для некоторого $s \in T^k$. Возьмем $g = us \in G$. Тогда $g^m = (us)^m = t$, следовательно, множество степеней элемента g плотно в T^k. Применяя сдвиг на g^r, получим, что множество степеней элемента g плотно в смежном классе по подгруппе T^k, содержащем u^r. При этом получаются все смежные классы по T^k.

4.5. Предупреждение. Начиная с этого места, G — связная компактная группа Ли.

4.6. Определение. *Максимальным тором* $T \subset G$ называется

(i) подгруппа, которая является тором и такая, что

(ii) если $T \subset U \subset G$ и U — тор, то $T = U$.

4.7. Замечание. Если G некомпактна, то она может не содержать ни одного нетривиального тора.

4.8. Предложение. *Любой подтор в группе G содержится в максимальном торе.*

Доказательство. Рассмотрим строго возрастающую последовательность торов $T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset G$. Тогда $L(T_1) \subset L(T_2) \subset \ldots \subset L(G)$ — строго возрастающая последовательность подпространств и, следовательно, она конечна.

4.9. Предложение. *Пусть T — максимальный тор в G и A — связная абелева подгруппа в G, такая, что $T \subset A$. Тогда $T = A$.*

Доказательство. Имеем $T \subset A \subset \bar{A}$. Но $\bar{A}$ есть связная замкнутая абелева подгруппа и, следовательно, является тором (см. 2.20). Таким образом, $T = \bar{A}$ и $T = A$.

4.10. Конструкции. Если T — тор в G, то он действует на пространстве G_e при помощи представления

$T \subset G \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{Aut}\, G_e$. Выберем положительно определенную форму на G_e, инвариантную относительно G, а следовательно, и относительно T. Тогда (см. 3.78) пространство G_e расщепляется на ортогональные неприводимые T-пространства размерности 1 и 2. В T-пространствах размерности 1 группа T действует тривиально. В каждом неприводимом T-пространстве размерности 2 можно выбрать ортонормальный базис и рассмотреть соответствующее представление $T \to \mathrm{SO}(2)$.

4.11. Определение. Целочисленной решеткой в $L(T)$ называется множество $\exp^{-1}(e)$, где $\exp\colon L(T) \to T$ — экспоненциальное отображение.

4.12. Предложение. *Пространство $L(G) = G_e$, как T-пространство, расщепляется в прямую сумму вида $V_0 \oplus \sum_{i=1}^{m} V_i$, где T тривиально действует на V_0, $\dim V_i = 2$ для $i > 0$ и действие тора T на V_i задается матрицей*

$$\begin{Vmatrix} \cos 2\pi\theta_i(t) & -\sin 2\pi\theta_i(t) \\ \sin 2\pi\theta_i(t) & \cos 2\pi\theta_i(t) \end{Vmatrix}.$$

Здесь $\theta_i\colon T \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ определяется линейной формой $\theta_i\colon L(T) \to \mathbb{R}$, принимающей целые значения на целочисленной решетке, и все формы θ_i — ненулевые.

4.13. Определение. Если T — максимальный тор, то формы $\pm\theta_i$ называются *корнями* группы G. В силу теоремы 3.24 они однозначно определяются тором T. Мы увидим, что совокупность этих форм не зависит от выбора максимального тора T.

4.14. Предложение. *Тор T максимален тогда и только тогда, когда $V_0 = L(T)$.*

Доказательство. Ясно, что $L(T) \subset V_0$.

(i) Предположим, что $V_0 = L(T)$ и $T \subset T'$. Тогда $L(T) \subset L(T') \subset V_0' \subset V_0$, следовательно, $L(T) = L(T')$ и $T = T'$.

(ii) Предположим, что $V_0 \neq L(T)$. Тогда $X \notin L(T)$ для некоторого $X \in V_0$. Затем, $\exp(tX)$, $t \in \mathbb{R}$, есть однопараметрическая подгруппа H в G, на которой T действует тривиально *) и которая не содержится в T.

*) Здесь имеется в виду действие группы T на G с помощью внутренних автоморфизмов A_g. Если $x \in V_0$ и $g \in T$, то в силу 2.11
$$A_g(\exp tx) = \exp t((\mathrm{Ad}\, g)\, x) = \exp tx.$$
— *Прим. ред.*

Следовательно, подгруппа, порожденная подгруппами T и H, является связной абелевой подгруппой, строго содержащей T, т. е. тор T не максимален.

4.15. Следствие. *Число* $\dim G - \dim T$ *четно.*

4.16. Пример. Пусть $G = \mathrm{U}(n)$, и пусть T — множество диагональных матриц

$$D = \left\| \begin{matrix} \exp 2\pi i x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \exp 2\pi i x_n \end{matrix} \right\|.$$

Пространство $L(\mathrm{U}(n))$ можно разложить на следующие прямые слагаемые.

(i) Пространство матриц

$$\left\| \begin{matrix} id_1 & & \\ & \ddots & \\ & & id_n \end{matrix} \right\|$$

с вещественными d_j. Оно совпадает с пространством $L(T)$.

(ii) Пространство матриц вида

$$M_{rs} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & r & & s \end{array} & \\ \left\| \begin{array}{cccc} & & & z \\ & & & \\ & -\bar{z} & & \end{array} \right\| & \begin{array}{c} r \\ \\ s \end{array} \end{array},$$

где $r < s$. Имеем

$$DM_{rs}D^{-1} = \left\| \begin{array}{cccc} & & & w \\ & & & \\ & -\bar{w} & & \end{array} \right\|,$$

где $w = \exp(2\pi i \theta_{rs})\, z$ и $\theta_{rs} = x_r - x_s$.

Матрицы (i) и (ii) порождают $L(G)$, значит, $V_0 = L(T)$ и тор T максимален. Корнями являются формы $x_r - x_s$ $(r \neq s)$.

4.17. Пример. Пусть $G = \mathrm{SU}(n)$. Тогда матрицы M_{rs} предыдущего примера принадлежат пространству $L(\mathrm{SU}(n))$, так как производная функции $\det(E + tM_{rs})$

по t при $t=0$ есть нуль. Аналогично, матрицы типа (1), для которых $\sum d_i = 0$, лежат в $L(\mathrm{SU}(n))$ *).

Пусть T — множество диагональных матриц

$$D = \begin{Vmatrix} \exp 2\pi i x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \exp 2\pi i x_n \end{Vmatrix},$$

где $\sum x_i = 0$. Формы $x_r - x_s$ по-прежнему нетривиальны, следовательно, $V_0 = L(T)$, тор T максимален, а корнями являются формы $x_r - x_s$ $(r \neq s)$.

4.18. Пример. Пусть $G = \mathrm{Sp}(n)$, и пусть T — множество диагональных матриц

$$D = \begin{Vmatrix} \exp 2\pi i x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \exp 2\pi i x_n \end{Vmatrix}.$$

Пространство $L(\mathrm{Sp}(n))$ разлагается на следующие слагаемые.

(i) Пространство матриц вида

$$\begin{Vmatrix} id_1 & & \\ & \ddots & \\ & & id_n \end{Vmatrix},$$

где d_i вещественны.

(ii) Пространство матриц вида

$$M_{rs} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad r & \quad s \end{array} \\ \begin{Vmatrix} & & & \\ & & z & \\ & & & \\ & -\bar{z} & & \\ & & & \end{Vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ r \\ \\ s \end{array},$$

где $z \in \mathbb{C}$.

(iii) Пространство матриц вида

$$N_r = \begin{array}{c} r \\ \begin{Vmatrix} & & \\ & & \\ & zj & \\ & & \end{Vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ r \end{array},$$

*) Автор пользуется здесь тем, что подпространство $L(\mathrm{SU}(n)) \subset L(\mathrm{U}(n))$ выделяется условием $\mathrm{Tr}\, X = 0$. Это легко следует из равенства $\mathrm{Tr}\, X = \frac{d}{dt} \det(E + tX)\big|_{t=0}$. — *Прим. ред.*

где $z \in \mathbb{C}$. Для этих матриц имеем

$$DN_rD^{-1} = \left\| \exp(2\pi i x_r)\, zj \exp(-2\pi i x_r) \right\| =$$

$$= \left\| \exp(4\pi i x_r)\, zj \right\|.$$

(iv) Пространство матриц вида

$$P_{rs} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & s \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} & zj \\ zj & \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} r \\ s \end{array},$$

где $z \in \mathbb{C}$. Для этих матриц имеем

$$DP_{rs}D^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} & \exp 2\pi i (x_r + x_s)\, zj \\ \exp 2\pi i (x_r + x_s)\, zj & \end{array} \right\|.$$

Итак, $V_0 = L(T)$, T — максимальный тор, а корнями являются формы $\pm 2x_r$, $x_r - x_s$ и $\pm (x_r + x_s)$ $(r \neq s)$.

4.19. Пример. Пусть $G = SO(2n)$. Имеем $U(n) \subset \subset SO(2n)$ *). В качестве T возьмем образ максимального тора, который был выбран в $U(n)$. Таким образом, T — это множество матриц

$$D = \left\| \begin{array}{cccc} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_n \end{array} \right\|,$$

где

$$D_i = \left\| \begin{array}{cc} \cos 2\pi x_i & -\sin 2\pi x_i \\ \sin 2\pi x_i & \cos 2\pi x_i \end{array} \right\|.$$

Тогда пространство $L(SO(2n))$ разлагается на следующие слагаемые.

*) Чтобы из матрицы $X = (x_{rs} = u_{rs} + i w_{rs}) \in U(n)$ получить соответствующую матрицу группы $SO(2n)$, надо каждый элемент x_{rs} заменить блоком $\left\| \begin{array}{cc} u_{rs} & -w_{rs} \\ w_{rs} & u_{rs} \end{array} \right\|$. — *Прим. перев.*

(i) Пространство $L(T)$, состоящее из матриц

$$\left\| \begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} 0 & -d_1 \\ d_1 & 0 \end{vmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{vmatrix} 0 & -d_n \\ d_n & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right\|.$$

(ii) Остальные слагаемые пространства $L(\mathrm{U}(n))$, состоящие из матриц

$$M_{rs} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & s \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} & W \\ -W^{\mathrm{T}} & \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ r \\ s \end{array},$$

где

$$W = \left\| \begin{array}{cc} x & -y \\ y & x \end{array} \right\|.$$

Тогда $DM_{rs}D^{-1} = M'_{rs}$, где

$$\left\| \begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \cos 2\pi (x_r - x_s) & -\sin 2\pi (x_r - x_s) \\ \sin 2\pi (x_r - x_s) & \cos 2\pi (x_r - x_s) \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\|.$$

Следовательно, соответствующие корни имеют вид $\theta_{rs} = x_r - x_s$ $(r \neq s)$.

(iii) Пусть

$$E_s = \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array} \right\| s.$$

Рассмотрим пространство матриц вида $E_s M_{rs} E_s^{-1} \in L(\mathrm{SO}(2n))$. В этом случае возникают корни $x_r + x_s$ $(r < s)$.

Итак, $V_0 = L(T)$, T — максимальный тор, а корнями являются формы $x_r - x_s$, $\pm(x_r + x_s)$ при $r \neq s$.

4.20. Пример. Пусть $G = SO(2n+1)$. Считая, что $SO(2n)$ действует на первые $2n$ координат, получим вложение $SO(2n) \subset SO(2n+1)$. Пусть T — максимальный тор, который мы выбрали в $SO(2n)$. Тогда $L(SO(2n+1))$ разлагается на следующие слагаемые.

(i) $L(SO(2n))$.

(ii) Пространства матриц

$$F_r = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \quad & r & \quad \end{array} & \\ \left\| \begin{array}{ccc} & & \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \\ & & \\ & \begin{matrix} x & y \end{matrix} & \end{array} \right\| & \begin{array}{c} r \\ \\ \\ \end{array} \end{array}.$$

В этом случае T действует при помощи поворота на угол $2\pi x_r$.

Итак, $V_0 = L(T)$, T — максимальный тор, а корнями являются формы $\pm x_r$, $x_r - x_s$ и $\pm(x_r + x_s)$ при $r \neq s$.

4.21. Теорема. *Пусть $T \subset G$ — максимальный тор. Тогда любой элемент $g \in G$ содержится в некоторой подгруппе, сопряженной тору T.*

Доказательство (мы следуем А. Вейлю [21], см. также [11]).

Рассмотрим пространство G/T левых смежных классов. Пусть f: $G/T \to G/T$ — преобразование, индуцированное левым сдвигом на g, т. е. $f(xT) = gxT$. Неподвижная точка преобразования f — это такой смежный класс xT, что $gxT = xT$, т. е. что $g \in xTx^{-1}$. Значит, нам надо только доказать, что f имеет неподвижную точку. Мы воспользуемся теоремой Лефшеца о неподвижной точке в той форме, которую ей придал Дольд [6]. (Эта теорема чаще применяется к многообразиям, чем к симплициальным комплексам.) Резюмируем то, что нам нужно.

Пусть f: $X \to X$ — непрерывное отображение. Определим число $\Lambda(f) \in \mathbb{Z}$, полагая $\Lambda(f) = \sum_q (-1)^q \operatorname{Tr} f^*$, где f^*: $H^q(X, \mathbb{Q}) \to H^q(X, \mathbb{Q})$ — индуцированный гомоморфизм рациональных когомологий. Тогда $\Lambda(f)$ зависит только от гомотопического класса отображения f. Если f не имеет неподвижных точек, то $\Lambda(f) = 0$. Если f имеет только изолированные неподвижные точки (и следовательно, число неподвижных точек конечно), то $\Lambda(f)$

есть число неподвижных точек, подсчитанное с учетом кратностей, которые определяются следующим образом. Пусть X — гладкое многообразие и x — неподвижная точка отображения f. Рассмотрим линейное отображение $1-f'\colon X_x \to X_x$. Если $\det(1-f')>0$, то f в точке x имеет кратность $+1$, если же $\det(1-f')<0$, то кратность равна -1. Случай $\det(1-f')=0$ рассматривать нам не придется.

Для вычисления $\Lambda(f)$ можно заменить f любым гомотопным ему отображением f_0. Значит, элемент g можно заменять любым другим элементом $g_0 \in G$, так как группа G линейно связна. В качестве g_0 возьмем какой-либо образующий элемент группы T (см. 4.3), пусть f_0 — соответствующее отображение. Тогда неподвижными точками отображения f_0 являются смежные классы вида nT, где n лежит в нормализаторе $N(T)$ подгруппы T в G (читатель это легко проверит). Исследуем группу $N(T)$.

Ясно, что $N(T)$ — замкнутая подгруппа в G и, следовательно, является группой Ли (см. 2.26 и 2.27). Компонента единицы $N(T)_1$ открыта в $N(T)$ и, следовательно, имеет конечное число смежных классов. Покажем, что $N(T)_1=T$. Группа $N(T)$ действует на торе T посредством сопряжений (т. е. $n(t)=ntn^{-1}$), а группа $\operatorname{Aut} T$ автоморфизмов тора T дискретна, следовательно, $N(T)$ действует на торе тривиально. (Читатель должен проверить, что отображение $N \to \operatorname{Aut} T$ непрерывно в указанной топологии *) на $\operatorname{Aut} T$. Заметим, что это отображение порождается отображением $N \times T \to T$, которое является ограничением отображения $G \times G \to G$, заданного формулой $(g, h) \to ghg^{-1}$.) Если T есть собственная подгруппа в $N(T)_1$, то $N(T)_1$ содержит однопараметрическую подгруппу, не лежащую в T, но поэлементно перестановочную с элементами тора T, что противоречит максимальности тора T. Отсюда следует что $N(T)_1=T$, что подгруппа T в $N(T)$ имеет лишь

*) Сопоставляя каждому гладкому автоморфизму $\alpha \in \operatorname{Aut} T$ линейное преобразование α' пространства $L(T)$, мы получим инъективное (в силу 2.17) линейное представление $\rho\colon \operatorname{Aut} T \to \mathrm{GL}(L(T))$. Образ $\rho(\operatorname{Aut} T)$ переводит в себя целочисленную решетку и, следовательно, в некотором базисе записывается целочисленными матрицами. Значит, топология в $\operatorname{Aut} T$, индуцированная вложением ρ, дискретна. Эту топологию и имеет в виду автор. — *Прим. ред.*

конечное число смежных классов и что множество неподвижных точек отображения f_0 конечно.

Нам достаточно рассмотреть только одну из этих неподвижных точек, скажем T. В самом деле, пусть nT — другая неподвижная точка. Определим отображение r_n: $G/T \to G/T$ по формуле $r_n(gT) = gTn$. Это отображение является корректно определенным диффеоморфизмом; оно перестановочно с f_0 и переводит T в nT. Таким образом, кратность неподвижной точки nT та же, что и точки T.

Заметим, что отображение f_0 можно задать также соотношением $f_0(xT) = g_0xg_0^{-1}T$, т. е. f_0 получается факторизацией отображения $G \to G$, заданного формулой $x \to g_0xg_0^{-1}$. Преимущество последнего отображения заключается в том, что оно переводит e в себя.

Чтобы получить базис в пространстве $(G/T)_T$, достаточно взять какой-либо базис в T_e, дополнить его до базиса в G_e и отбросить векторы, лежащие в T_e. Тогда (см. 4.12, 4.14) отображение $1 - f_0'$ в подходящем базисе запишется матрицей

$$\left\| \begin{array}{cc|c} 1-\cos 2\pi\theta_1(g_0) & \sin 2\pi\theta_1(g_0) & \\ -\sin 2\pi\theta_1(g_0) & 1-\cos 2\pi\theta_1(g_0) & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \ddots \end{array} \right\|.$$

Следовательно, число

$$\det(1-f_0) = \prod_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} 1-\cos 2\pi\theta_i(g_0) & \sin 2\pi\theta_i(g_0) \\ -\sin 2\pi\theta_i(g_0) & 1-\cos 2\pi\theta_i(g_0) \end{vmatrix}$$

положительно, если $\cos 2\pi\theta_r(g_0) \neq 1$ при всех r. Но $\theta_r(g_0) \not\equiv 0 \bmod 1$, так как θ_r — нетривиальная функция на торе T (см. 4.12). Значит, искомая кратность равна $+1$ и $\Lambda(f) = |N(T)/T| > 0$. Итак, отображение f имеет по крайней мере одну неподвижную точку, и теорема доказана.

4.22. Следствие. *Каждый элемент группы G лежит в некотором максимальном торе, поскольку подгруппа, сопряженная максимальному тору, сама есть максимальный тор.*

4.23. Следствие. *Любые два максимальных тора T, U сопряжены.*

Доказательство. Пусть u — образующий тора U. Тогда $u \in xTx^{-1}$ для некоторого $x \in G$ и, следовательно, $\subset xTx^{-1}$. Но U — максимальный тор, поэтому $U = xTx^{-1}$.

Отсюда следует, что любая конструкция, кажущаяся зависимой от выбора максимального тора T, на самом деле с точностью до внутреннего автоморфизма группы G не зависит от этого выбора.

4.24. Определение. Из доказанного видно, что любые два максимальных тора в G имеют одну и ту же размерность. Эта размерность называется *рангом* группы G и обозначается через k, l или $\operatorname{rank} G$.

4.25. Предложение. *Пусть S — связная абелева подгруппа в G, и пусть $g \in G$ перестановочен со всеми элементами группы S. Тогда существует тор T, содержащий g и S.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа в G, порожденная элементом g и подгруппой S. Ясно, что группа H абелева, поэтому $\bar{H}$ есть компактная абелева группа Ли. Значит, компонента единицы $\bar{H}_1$ есть тор. Факторгруппа $\bar{H}/\bar{H}_1$ конечна и порождена элементом $g\bar{H}_1$, следовательно, $\bar{H}/\bar{H}_1 \cong \mathbb{Z}_m$ для некоторого целого m. Согласно предложению 4.4, группа $\bar{H}$ имеет образующий h, который лежит в некотором максимальном торе T. Тогда $\{g\} \cup S \subset H \subset \bar{H} \subset T$.

4.26. Предложение. *Пусть T — максимальный тор в G. Если $T \subset A \subset G$, где A — абелева группа, то $T = A$. Таким образом, максимальный тор является максимальной абелевой подгруппой.*

Доказательство. Пусть $g \in A$. Тогда в силу предложения 4.25 найдется тор U, содержащий g и T. Но тор T — максимальный, значит, $U = T$ и $g \in T$. Таким образом, $A \subset T$.

4.27. Пример. Если матрица $u \in \mathrm{U}(n)$ перестановочна со всеми диагональными матрицами, то она сама диагональна.

4.28. Замечание. Вообще говоря, неверно, что любая максимальная абелева подгруппа является тором. Например, пусть $G = \mathrm{SO}(n)$. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{Vmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{Vmatrix}.$$

Эти матрицы образуют максимальную абелеву подгруппу в G.

4.29. Определение. Пусть T — максимальный тор в G. *Группой Вейля* W (или Φ) группы G называется группа тех автоморфизмов тора T, которые являются ограничениями внутренних автоморфизмов группы G. Она не зависит от выбора T.

Любой автоморфизм из W имеет вид $t \to ntn^{-1}$, $n \in N(T)$. Подгруппа $N(T)$ замкнута в G и, следовательно, компактна. Пусть $Z(T)$ — централизатор тора T, т. е. множество таких $z \in G$, что $ztz^{-1} = t$ для всех $t \in T$. Подгруппа $Z(T)$ также замкнута в G и $T \subset Z(T) \subset N(T)$. Итак, $N(T)$ отображается на $N(T)/Z(T) \cong W$. Группа $N(T)/T$ конечна (см. доказательство теоремы 4.21), следовательно, группа W конечна.

Так как мы рассматриваем только связные группы G, то $Z(T) = T$ (см. 4.26) и $W = N(T)/T$.

4.30. Следствие из теоремы 4.21. *Пусть V — некоторое G-пространство. Тогда функция χ_V определяется своим ограничением на T, которое инвариантно относительно W.*

4.31. Следствие. *Гомоморфизм i^*: $K(G) \to K(T)$ колец (комплексных) представлений есть мономорфизм, и его образ содержится в подкольце элементов, инвариантных относительно W.*

4.32. Предложение. *Операция ограничения задает взаимно однозначное соответствие между функциями классов на G и непрерывными функциями на T, инвариантными относительно W.*

Доказательство. Мы уже показали, что это соответствие является мономорфизмом.

Предположим, что дана непрерывная функция f: $T \to Y$, инвариантная относительно W. Продолжим f до функции $\bar{f}$: $G \to Y$, положив $\bar{f}(xtx^{-1}) = f(t)$. Корректность определения функции $\bar{f}$ вытекает из следующей леммы.

4.33. Лемма. *Если t_1, $t_2 \in T$ сопряжены в G, то найдется такой автоморфизм $w \in W$, что $t_2 = wt_1$.*

Доказательство. Пусть $H = N(t_2) = Z(t_2)$ — нормализатор элемента t_2 в G; и пусть $t_2 = gt_1g^{-1}$. Тогда $T \subset Z(t_2)$, а также $gTg^{-1} \subset Z(t_2)$, поскольку $T \subset Z(t_1)$. Замкнутая подгруппа H группы Ли G является группой Ли, а T, gTg^{-1} — максимальные торы в H. Следовательно, найдется такой элемент $h \in H_1$, что $T = hgTg^{-1}h^{-1}$, где H_1 — компонента единицы в H.

Но $h \in Z(t_2)$, значит, $hgt_1g^{-1}h^{-1} = t_2$. Таким образом, сопряжение, определенное элементом hg, принадлежит группе Вейля W и переводит t_1 в t_2.

Завершение доказательства предложения 4.32. Нам осталось проверить, что функция $\bar{f}$ непрерывна.

Предположим, что $\bar{f}$ не непрерывна. Тогда найдется такая последовательность $g_n \to g_\infty$, что никакая подпоследовательность последовательности $\bar{f}(g_n)$ не сходится к $\bar{f}(g_\infty)$. Пусть $g_n = x_n t_n x_n^{-1}$, где $x_n \in G$, $t_n \in T$. Возьмем подпоследовательность g_{n_k}, удовлетворяющую условиям $x_{n_k} \to x_\infty$, $t_{n_k} \to t_\infty$ для некоторых $x_\infty \in G$, $t_\infty \in T$. Тогда $g_{n_k} \to x_\infty t_\infty x_\infty^{-1}$ и, следовательно, $x_\infty t_\infty x_\infty^{-1} = g_\infty$. Тогда $\bar{f}(g_{n_k}) = f(t_{n_k}) \to f(t_\infty) = \bar{f}(g_\infty)$, что противоречит нашему предположению. Таким образом, предложение 4.32 доказано.

4.34. Лемма. *Пусть $N(g)_1$ — компонента единицы нормализатора некоторого элемента $g \in G$. Тогда $N(g)_1$ является объединением максимальных торов группы G, содержащих g.*

Доказательство. Ясно, что $N(g)_1$ содержит все такие торы. Обратно, пусть $n \in N(g)_1$. Тогда n лежит в некотором максимальном торе S группы $N(g)_1$. Тор S поэлементно перестановочен с g, поэтому (см. 4.25) в G существует максимальный тор T, содержащий S и g.

4.35. Следствие. *Следующие два определения эквивалентны:*

(i) *элемент $g \in G$ называется* регулярным, *если он содержится ровно в одном максимальном торе, и* сингулярным, *если он содержится более чем в одном максимальном торе;*

(ii) *элемент $g \in G$ называется* регулярным, *если* $\dim N(g) = \operatorname{rank} G$, *и* сингулярным, *если* $\dim N(g) > \operatorname{rank} G$.

Доказательство. Если g лежит ровно в одном торе T, то $\dim N(g) = \dim N(g)_1 = \dim T$.

Если g лежит в максимальных торах T_1 и T_2, $T_1 \neq T_2$, то $L(T_1) \neq L(T_2)$ и $L(N(g)) \supset L(T_1) + L(T_2)$, следовательно, $\dim N(g) > \dim T$.

4.36. Пример. В качестве G возьмем группу $\operatorname{Sp}(1)$, которая совпадает с множеством кватернионов q, удовлетворяющих условию $|q|=1$. [Максимальными торами служат окружности $\cos\theta+p\sin\theta$, где p — любой чисто мнимый кватернион такой, что $|p|=1$.

Сингулярные точки исчерпываются точками ± 1, при этом $\dim N(\pm 1)=3$.

Все остальные точки g регулярны и $\dim N(g)=1$.

4.37. Предложение. *Группа Вейля W переставляет корни группы G.*

Доказательство (обозначения были введены в п. 1.10). Для каждого $w\in W$ мы должны рассмотреть два представления группы T, а именно, $T\xrightarrow{\mathrm{Ad}}\mathrm{Aut}\,G_e$ и $T\xrightarrow{w}T\xrightarrow{\mathrm{Ad}}\mathrm{Aut}\,G_e$. Достаточно доказать, что эти представления эквивалентны. Но $w=A_x|T$ для некоторого $x\in G$ и $G_e\xrightarrow{A'_x}G_e$ — требуемая эквивалентность, так как диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{A_x} & T \\ {\scriptstyle\mathrm{Ad}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Ad}} \\ \mathrm{Aut}\,G_e & \longrightarrow & \mathrm{Aut}\,G_e \end{array}$$

где нижнее отображение индуцировано элементом $A'_x\in\mathrm{Aut}\,G_e$, коммутативна.

4.38. Определение. Пусть $U_r=\{t\in T\mid\theta_r(t)\equiv 0 \bmod 1\}$. Очевидно, U_r есть замкнутая подгруппа размерности $k-1$ в T, где $k=\mathrm{rank}\,G$. Ясно, что она монотетична *). Эта группа может быть несвязной.

4.39. Пример. В группе $\mathrm{Sp}(1)$ имеем $\theta_1=2x_1$, и U_1 задается условием $x_1=0$ или $1/2 \bmod 1$.

4.40. Лемма. *Если t лежит ровно в ν подгруппах U_r, то* $\dim N(t)=k+2\nu$.

Доказательство. Пусть $V\subset L(G)$ — подпространство, на котором t действует тождественно. Тогда по определению подгрупп U_r имеем $\dim V=k+2\nu$. Покажем, что $N(t)_e=V$.

(i) Элементы из $N(t)$ перестановочны с t, поэтому t действует тождественно на $N(t)$, а следовательно, и на $N(t)_e$. Таким образом, $N(t)_e\subset V$.

---

*) Согласно предложению 4.4. достаточно проверить, что группа $U_r/(U_r)_1$ является циклической. Пусть $M_r=\exp^{-1}(U_r)=\{x\in L(T)\mid\theta_r(x)\in\mathbb{Z}\}$. Очевидно, гомоморфизм $\exp\colon M_r\to U_r$ отображает каждую связную компоненту группы на компоненту группы U_r. Поэтому возникает эпиморфизм $\mathbb{Z}\cong M_r/L(U_r)\to U_r/(U_r)_1$, откуда и следует утверждение. — *Прим. ред.*

(ii) Предположим, что $x \in V$. Тогда t тривиально действует на x, а следовательно, и на однопараметрической подгруппе H, соответствующей вектору x. Поэтому $H \subset N(t)$ и $x \in N(T)_e$. Таким образом, $V \subset \subset N(t)_e$.

4.41. Следствие. *Элемент $t \in T$ регулярен, если он не содержится ни в одной из подгрупп U_r, и сингулярен, если он содержится в некоторой подгруппе U_r.*

4.42. Следствие. *Сингулярные элементы группы G образуют множество размерности $\leqslant n-3$, где $n = \dim G$, в том смысле, что это множество является образом некоторого компактного многообразия размерности $n-3$ при гладком отображении.*

Доказательство. Пусть u — образующий группы U_r. Тогда $\dim N(u) \geqslant k+2$, и если $z \in N(u)$, то z оставляет неподвижной каждую степень элемента u, а следовательно, и каждый элемент группы U_r.

Определим отображение f: $G/N(u) \times U_r \to G$ формулой $f(g, t) = gtg^{-1}$. Тогда $\operatorname{Im} f$ состоит из всех точек, сопряженных к элементам подгруппы U_r, отображение f гладко и $\dim G/N(u) \times U_r \leqslant n-(k+2)+(k-1) = n-3$. Чтобы получить все сингулярные точки, нужно взять образ несвязного объединения конечного семейства многообразий $G/N(u) \times U_r$. Отсюда следует требуемый результат.

Глава 5

ГЕОМЕТРИЯ ШТИФЕЛЕВЫХ ДИАГРАММ

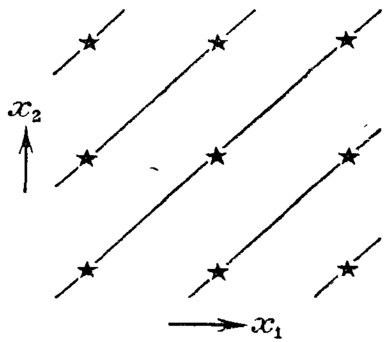
Предупреждение. На протяжении этой главы G — связная компактная группа Ли, а T — максимальный тор в G.

5.1. Определение. *Инфинитезимальной диаграммой* группы G называется фигура в $L(T)$, состоящая из гиперплоскостей $L(U_r)$.

Диаграммой группы G называется фигура в $L(T)$, состоящая из гиперплоскостей, заданная условием $\theta_r(t) \in \mathbb{Z}$. Диаграмма совпадает с полным прообразом множества сингулярных точек группы G, принадлежащих T, при экспоненциальном отображении exp.

5.2. Примеры диаграмм*).

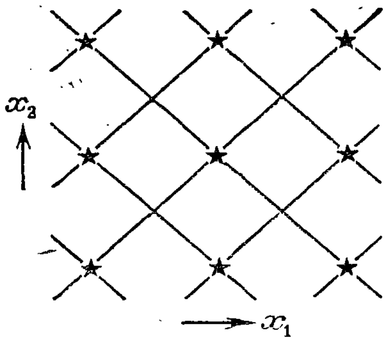
(i) U (2). Корень $x_1 - x_2$.



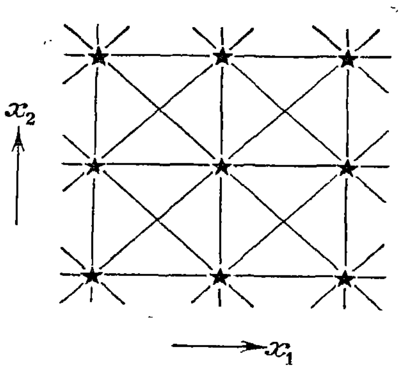
Целочисленная решетка в $L(T)$ отмечена звездочками.

*) Из каждой пары взаимно противоположных корней автор указывает здесь по одному корню, что достаточно для построения диаграммы. — *Прим. ред.*

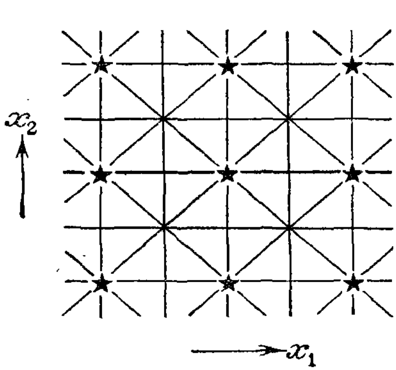
(ii) SO (4). Корни $x_1 \pm x_2$.



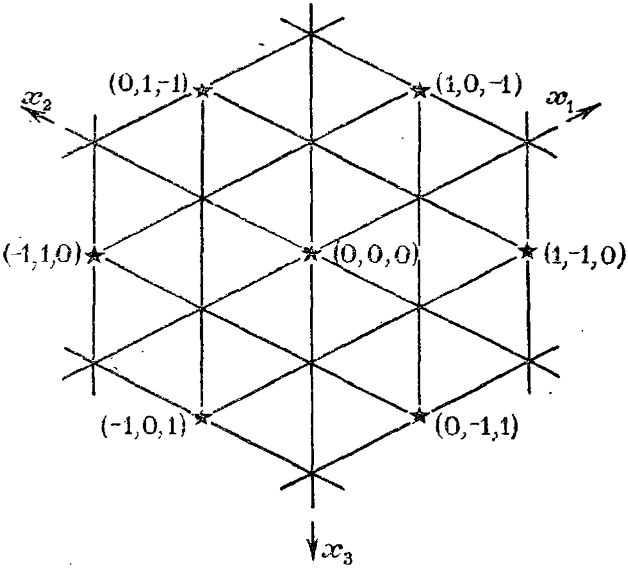
(iii) SO (5). Корни $x_1 \pm x_2$, x_1, x_2.



(iv) Sp (2). Корни $x_1 \pm x_2$, $2x_1$, $2x_2$.



(v) $\mathrm{SU}(3)$. Корни x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1.



5.3. Предложение. $Z(G)=\bigcap U_r$.

Доказательство. Во-первых, $Z(G)\subset Z(T)=T$. Далее, если $z\in Z(G)$, то z тривиально действует на G и, следовательно, на G_e. Поэтому $\theta_r(z)\equiv 0 \bmod 1$ для всех r, т. е. $z\in\bigcap\limits_r U_r$.

Обратно, если $g\in T$ и $\theta_r(g)\equiv 0 \bmod 1$ для всех r, то g тривиально действует на G_e, а следовательно, и на G (см. 2.17).

5.4. Примеры.

(i) $\mathrm{U}(n)$. Множество $\bigcap U_r$ задается условием $x_1\equiv\ldots\equiv x_n \bmod 1$, следовательно, центр этой группы состоит из матриц $e^{2\pi i x}E$.

(ii) $\mathrm{SU}(n)$. Множество $\bigcap U_r$ задается условиями $x_1\equiv\ldots\equiv x_n \bmod 1$ и $x_1+\ldots+x_n\equiv 0 \bmod 1$. Таким образом, центр этой группы состоит из матриц ωE, где $\omega^n=1$.

(iii) $\mathrm{Sp}(n)$. Множество $\bigcap U_r$ задается условием $x_i\pm x_j\equiv 0 \bmod 1$ для всех i, j, т. е. $x_i\equiv 0 \bmod 1$ для всех i или $x_i\equiv {}^1/_2 \bmod 1$ для всех i. Таким образом, центр этой группы состоит из матриц $\pm E$.

(iv) $\mathrm{SO}(2n)$. Множество $\bigcap U_r$ задается условием $x_i\pm x_j\equiv 0 \bmod 1$ для $i\neq j$. При $n>1$ имеем то же множество, что и для $\mathrm{Sp}(n)$, и центр группы $\mathrm{SO}(2n)$ состоит из матриц $\pm E$. Группа $\mathrm{SO}(2)$, конечно, абелева.

(v) $\mathrm{SO}(2n+1)$. Множество $\bigcap U_r$ задается условием $x_r \equiv 0 \bmod 1$ для всех r. Таким образом, центр этой группы состоит только из единичной матрицы E.

5.5. Теорема. *Если $r \neq s$, то θ_r и θ_s линейно независимы.*

Доказательство. Подгруппа U_r имеет размерность $k-1$. Мы покажем, что $\dim N((U_r)_1) = k+2$. Требуемый результат тогда будет следовать из леммы 4.40, если ее применить к образующему тора $(U_r)_1$. Нам необходимы две леммы.

5.6. Лемма. *Предположим, что $H \subset T$ и что H — замкнутая подгруппа, которая нормальна в G. Тогда*:

(i) $N(T/H) = N(T)/H$.

(ii) *T/H есть максимальный тор в G/H.*

(iii) $W(G/H) \cong W(G)$.

Доказательство. (i) Если n переводит в себя T, то nH переводит в себя T/H. Обратно, если $n(tH)n^{-1} \subset$ $\subset T$, то $ntn^{-1} \in T$.

(ii) Группа T/H есть связная компактная абелева подгруппа в G/H и, следовательно, тор.

Предположим теперь, что $T/H \subset U/H$, где U/H — некоторый тор в G/H. Тогда $U/H \subset N(T/H) = N(T)/H$. Следовательно, $T \subset U \subset N(T)$. Это значит, что $\dim T =$ $= \dim U$. Следовательно, $\dim T/H = \dim U/H$ и $T/H =$ $= U/H$.

(iii) $W(G/H) \cong N(T/H)/T/H \cong N(T)/H/T/H \cong$ $\cong N(T)/T \cong W(G)$.

5.7. Лемма. *Если $\dim T = 1$ и $\dim G = n$, то*

(i) $n = 1$ *и* $W = 0$

или

(ii) $n = 3$ *и* $W = \mathbb{Z}_2$.

(Замечание: на самом деле в случае (i) $G = S^1$, а в случае (ii) $G = \mathrm{SO}(3)$ или $\mathrm{Sp}(1)$.)

Доказательство. Если $n = 1$, то, очевидно, $G = T = S^1$ и $W = 0$. Поэтому предположим, что $n > 1$.

Выберем в $L(G)$ какую-либо евклидову метрику, инвариантную относительно присоединенного представления. Пусть v — единичный вектор в $L(T)$, причем $\exp v \in T$ — образующий элемент. Определим отображение $f\colon G/T \to S^{n-1} \subset L(G)$, положив $f(g) = (\mathrm{Ad}\, g)\, v$. Это отображение корректно определено, непрерывно (даже гладко) и инъективно. Действительно, если $(\mathrm{Ad}\, g_1)\, v = (\mathrm{Ad}\, g_2)\, v$, то $\mathrm{Ad}\,(g_1^{-1}g_2)\, v = v$, т. е. $g_1^{-1}g_2$ оставляет на месте v и, значит, тривиально действует на T. Отсюда следует, что $g_1^{-1}g_2 \in T$ и $g_1T = g_2T$.

Далее, пространство G/T компактно, а S^{n-1} хаусдорфово, следовательно, f является гомеоморфизмом пространства G/T на его образ в S^{n-1}. Но пространства G/T и S^{n-1} оба являются компактными многообразиями размерности $n-1$, так что f сюръективно. Тогда существует такой $g \in G$, что $(\mathrm{Ad}\, g)\, v = -v$ и, следовательно, g действует на T по формуле $gtg^{-1} = t^{-1}$. Но T имеет только два автоморфизма, поэтому $W \cong \mathbb{Z}_2$.

Пусть i — образующий группы $\pi_1(T)$. Поскольку G связна, точку g можно соединить с e некоторой кривой в G. Поэтому в $\pi_1(G)$ имеем $i = -i$, т. е. $2i = 0$.

В силу предложения 2.37 мы имеем расслоение $S^1 \to G \to G/T \cong S^n$. Из точной гомотопической последовательности следует, что последовательность $\pi_2(S^{n-1}) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(G)$ — точная. Но гомоморфизм $\pi_1(S^1) \to \pi_1(G)$ не является мономорфизмом, так как $2i \to 0$ Следовательно, $\pi_2(S^{n-1}) \neq 0$ и $n = 3$.

Доказательство теоремы 5.5. Рассмотрим компоненту единицы $(U_r)_1$ группы U_r. Это — тор размерности $k-1$. Пусть u — образующий этого тора. Мы хотим показать, что $u \notin U_s$ при $r \neq s$, ибо отсюда будет следовать, что θ_s не кратна форме θ_r.

Рассмотрим подгруппу $N(u)_1$. Ясно, что T — максимальный тор в $N(u)_1$. Все элементы группы $N(u)$ оставляют на месте u, поэтому они оставляют на месте каждый элемент подгруппы $(U_r)_1$. Мы можем применить лемму 5.6 к случаю $T = T$ и $H = (U_r)_1$. Тогда $T/(U_r)_1$ есть максимальный тор в $N(u)_1/(U_r)_1$ и $W(N(u)_1/(U_r)_1) \cong W(N(u)_1)$. Далее, размерность тора $T/(U_r)_1$ равна 1, значит, в силу 5.7 группа $N(u)_1/(U_r)_1$ имеет размерность 1 или 3, а размерность группы $N(u)_1$ равна k или $k+2$. Но, согласно лемме 4.40, $\dim N(u)_1 = k + 2\nu$, если u лежит ровно в ν из подгрупп U_r. Следовательно, $\nu = 1$ и u не лежит в U_s.

5.8. Теорема. *Для каждого r найдется элемент $\varphi_r \in W$, который отличен от единицы, но оставляет на месте каждую точку подгруппы U_r.*

Доказательство. Мы воспользуемся идеей доказательства теоремы 5.5, но иначе выберем элемент u.

Рассмотрим подгруппу U_r. Мы уже отмечали (см. 4.38), что группа U_r — монотетическая. Пусть v — ее образующий.

Теперь рассмотрим группу $N(v)_1$. Очевидно, T есть максимальный тор в $N(v)_1$ и $N(v)_1$ оставляет на месте каждый элемент подгруппы U_r. Мы можем применить лемму 5.6 к случаю $G=N(v)_1$, $T=T$ и $H=U_r$. Получаем, что T/U_r есть максимальный тор в $N(v)_1/U_r$ и что $\dim N(v)_1/U_r$ равна 1 или 3. В силу леммы 4.40 $\dim N(v)_1/U_r \geqslant 3$, следовательно, $\dim N(v)_1/U_r = 3$ и $W(N(v)_1/U_r) \cong \mathbb{Z}_2$. Это значит, что найдется элемент $n \in N(v)_1$, который оставляет на месте каждую точку подгруппы U_r и который преобразует группу T/U_r по формуле $t \to t^{-1}$.

5.9. Следствие (из доказательства). *Элемент $\varphi_r \in W$ есть ограничение на T внутреннего автоморфизма группы G, порожденного элементом n, который можно соединить с e таким путем, что каждая его точка оставляет на месте все элементы подгруппы U_r.*

5.10. Следствие. *Группа U_r имеет либо одну, либо две компоненты.*

Доказательство. Элемент φ_r действует на $T/(U_r)_1$ посредством преобразования $t \to t^{-1}$, которое имеет только две неподвижные точки, а именно, 0 и $1/2 \bmod 1$. Но $U_r/(U_r)_1$ состоит из неподвижных точек относительно φ_r.

5.11. Пример. Корень $2x_2$ группы $\mathrm{Sp}(n)$ дает подгруппу U_r с двумя компонентами.

5.12. Определение. Для каждого r пусть $\varepsilon_r = \pm 1$. Рассмотрим множество

$$\{t \in L(T) \mid \varepsilon_r \theta_r > 0 \text{ для всех } r\}.$$

Оно либо пусто, либо является непустым выпуклым множеством. В последнем случае это множество называется *камерой Вейля* группы G, и его замыкание имеет вид

$$\{t \in L(T) \mid \varepsilon_r \theta_r \geqslant 0 \text{ для всех } r\}.$$

Таким образом, можно утверждать, что гиперплоскости инфинитезимальной диаграммы разбивают $L(T)$ на камеры Вейля.

Стенкой камеры Вейля называется пересечение ее замыкания с гиперплоскостью $L(U_r)$ в случае, когда размерность этого пересечения равна $k-1$.

Согласно предложению 4.37, группа Вейля W переставляет плоскости диаграммы и камеры Вейля.

Чтобы сформулировать следующую теорему, предположим, что в $L(G)$ выбрана инвариантная евклидова метрика. Слово «отражение» следует понимать в смысле этой метрики.

5.13. Теорема.

(i) *Группа W переставляет камеры Вейля просто транзитивно.*

(ii) *Для каждого r группа W содержит отражение в плоскости $L(U_r)$.*

(iii) *Отражения из* (ii) *порождают W.*

(iv) *Точнее, для любой камеры Вейля отражения в стенках этой камеры порождают W.*

(v) *Пусть $p \in L(T)$ и W_p — стабилизатор элемента p в W. Тогда W_p просто транзитивно переставляет камеры Вейля, замыкания которых содержат p.*

(vi) *Группа W_p порождается отражениями в плоскостях $L(U_r)$, которые содержат p.*

(vii) *Точнее, достаточно рассматривать те плоскости, которые являются стенками фиксированной камеры Вейля B_0, такой, что $p \in B_0$.*

Доказательство. Полагая $p=0$, мы видим, что (v) $\Rightarrow$ (i), (vi) $\Rightarrow$ (iii) и (vii) $\Rightarrow$ (iv), так что нам надо доказать только утверждения (ii), (v), (vi), (vii).

(ii) Для каждого r группа W содержит элемент φ_r, который оставляет на месте все точки подгруппы U_r (см. 5.8), а следовательно, оставляет на месте и все точки гиперплоскости $L(U_r)$ в $L(T)$ и сохраняет скалярное произведение в $L(T)$. Значит, преобразование φ_r может быть только отражением в плоскости $L(U_r)$.

(v) Во-первых, W_p действует на камерах Вейля свободно. Доказательство этого факта разобьем на две леммы.

5.14. Лемма. *Если вектор $v \in L(T)$ неподвижен относительно некоторого преобразования $\psi \in W$, $\psi \neq 1$, то $v \in L(U_r)$ для некоторого r.*

Доказательство. Предположим, что $n \in N(T)$, $n \notin T$, и что n оставляет v на месте. Тогда n оставляет на месте все элементы однопараметрической подгруппы H, соответствующей вектору v (см. 2.17). Следовательно, существует максимальный тор U, содержащий n и H (см. 4.25). Таким образом, H лежит в двух различных максимальных торах. Значит, $H \subset \subset \bigcup U_r$ и $v \in L(U_r)$ для некоторого r.

5.15. Лемма. *Пусть $\psi \in W$. Если $\psi B = B$ для некоторой камеры Вейля B, то $\psi = 1$.*

Доказательство. Группа W конечна, поэтому $\psi^q = 1$ для некоторого целого $q > 0$. Пусть $v \in B$. Тогда вектор $v' = \frac{1}{q} \sum_{1}^{q} \psi^r v$ лежит в B и неподвижен относительно ψ. Если $\psi \neq 1$, то лемма 5.14 показывает, что v' лежит в некоторой плоскости $L(U_r)$, что противоречит предположению.

Продолжение доказательства теоремы 5.13.

(v) Во-вторых, W_p действует транзитивно на множестве камер Вейля, замыкания которых содержат p. Это вытекает из следующего рассуждения.

Пусть B_0, B' — камеры Вейля, замыкания которых содержат p, и пусть $x_0 \in B_0$, $x' \in B'$. В силу теоремы 5.5 при $r \neq s$ размерность подпространства $L(U_r) \cap L(U_s)$ равна $k-2$. Поэтому в $L(T)$ найдется ломаная, соединяющая x_0 с x', которая не пересекается ни с одним из подпространств $L(U_r) \cap L(U_s)$, а также ни с одним из подпространств $L(U_r)$, не содержащих p, и которая остальные подпространства $L(U_r)$ пересекает трансверсально, если вообще пересекает. (Возьмем ломаную $x_0 p x'$ и слегка ее сдвинем.)

Предположим, что эта ломаная последовательно пересекает плоскости $L(U_{k_1}), \ldots, L(U_{k_r})$; двигаясь вдоль нее, мы из B_0 попадаем в $B_1, \ldots, B_r = B'$. Тогда $\varphi_{k_r} \ldots \varphi_{k_2}\varphi_{k_1}$ переводит B_0 через $B_1, \ldots, B_{r-1}$ в $B_r = B'$.

Итак, группа W_p транзитивна на множестве камер Вейля, замыкания которых содержат p.

(vi) Пусть $\psi \in W_p$. Возьмем такую камеру Вейля B_0, что $p \in \bar{B}_0$. Положим $B' = \psi(B_0)$. Тогда в указанных выше обозначениях имеем $B' = \varphi_{k_r} \ldots \varphi_{k_1} B_0$, поэтому $\psi^{-1}\varphi_{k_r} \ldots \varphi_{k_2}\varphi_{k_1} B_0 = B_0$. Но W_p действует свободно, значит, $\psi^{-1}\varphi_{k_r} \ldots \varphi_{k_1} = 1$ или $\psi = \varphi_{k_r} \ldots \varphi_{k_1}$. Итак, эти отражения порождают W_p.

(vii) Запишем $\psi = \varphi_{k_r} \ldots \varphi_{k_1}$, как указано выше, и допустим в качестве индуктивного предположения, что преобразование $\varphi_{k_s} \ldots \varphi_{k_1}$ записано в виде произведения отражений в стенках камеры Вейля B_0. Это, очевидно, справедливо при $s=1$. Кроме того, $\varphi_{k_{s+1}}$ есть отражение в стенке $L(U_{k_{s+1}})$ камеры Вейля B_s. Но $\varphi_{k_1}^{-1} \ldots$ $\ldots \varphi_{k_s}^{-1}$ отображает B_s в B_0, а $L(U_{k_{s+1}})$, скажем, в плоскость $L(U_m)$, содержащую p. Тогда

$$\varphi_{k_s} \ldots \varphi_{k_1}\varphi_m\varphi_{k_1}^{-1} \ldots \varphi_{k_s}^{-1} = \varphi_{k_{s+1}}.$$

Следовательно,

$$\varphi_{k_{s+1}} \ldots \varphi_{k_1} = \varphi_{k_s} \ldots \varphi_{k_1}\varphi_m.$$

Таким образом, ψ можно записать в виде произведения отражений в стенках камеры Вейля B_0, замыкание которой содержит p.

5.16. Следствие. *Разобьем $L(T)$ на орбиты относительно W. Тогда каждая орбита содержит ровно одну точку из замыкания каждой камеры Вейля B.*

Доказательство. Множество $\bar{B}$ содержит хотя бы одну точку из каждой орбиты. Действительно, пусть $v \in L(T)$. Тогда $v \in \bar{B}'$ для некоторой камеры Вейля B' и $B = wB'$ для некоторого $w \in W$. Значит, $wv \in \bar{B}$.

Множество $\bar{B}$ содержит не более одной точки из каждой орбиты. Действительно, пусть p, $q \in \bar{B}$ и $p = wq$. Тогда $p \in \overline{wB}$. Так как группа W_p транзитивна на множестве камер Вейля, замыкания которых содержат p, найдется такой элемент $w' \in W_p$, что $w'wB = B$. Значит, $w'w = 1$ и, следовательно, $p = w'p = w'wq = q$.

5.17. Примеры.

(i) $G = \mathrm{U}(n)$. Пространство G_e состоит из косоэрмитовых матриц. Определим скалярное произведение на G_e по формуле $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(\bar{X}^{\mathrm{T}}Y) = \mathrm{tr}(-XY)$. Оно инвариантно относительно G. Ограничение соответствующей квадратичной формы на $L(T)$ имеет вид $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ (с точностью до множителя $4\pi^2$). Это «обычное» скалярное произведение, поэтому отражение является «обычным» отражением.

Корень $\theta_{rs} = x_r - x_s$ определяет плоскость $L(U_{rs})$: $x_r = x_s$, а отражение в этой плоскости задается формулами

$$y_1 = x_1, \ \ldots, \ y_r = x_s, \ \ldots, \ y_s = x_r, \ \ldots, \ y_n = x_n.$$

Оно действительно индуцировано внутренним автоморфизмом, а именно, сопряжением посредством матрицы

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} & & & r & & & & s & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ r \\ \\ \\ \\ s \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\left\|\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & -1 & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right\|.
\end{array}$$

(Мы пишем здесь -1, а не $+1$, имея в виду следующий пример.) Итак, W есть симметрическая группа на множестве $x_1, \ldots, x_n$. Порядок $|W|$ группы Вейля W равен $n!$.

(ii) $G = \mathrm{SU}(n)$. Можно повторить те же вычисления и получить, что W есть симметрическая группа на множестве $x_1, \ldots, x_n$. $|W| = n!$.

(iii) $G = \mathrm{Sp}(n)$. На этот раз W состоит из преобразований вида

$$y_1 = \varepsilon_1 x_{\rho(1)}, \quad \ldots, \quad y_n = \varepsilon_n x_{\rho(n)},$$

где $\varepsilon = \pm 1$ для каждого r, а ρ — некоторая подстановка. $|W| = n! 2^n$.

(iv) $G = \mathrm{SO}(2n+1)$. В этом случае имеем ту же группу Вейля, что и для $\mathrm{Sp}(n)$. $|W| = n! 2^n$.

(v) $G = \mathrm{SO}(2n)$. Группа Вейля W состоит из преобразований вида

$$y_1 = \varepsilon_1 x_{\rho(1)}, \quad \ldots, \quad y_n = \varepsilon_n x_{\rho(n)},$$

где $\varepsilon_r = \pm 1$ для каждого r, $\prod\limits_{r=1}^{n} \varepsilon_r = +1$, а ρ — некоторая подстановка. $|W| = n! 2^{n-1}$.

5.18. Рассуждение. Корни θ_r являются вещественными линейными формами на $L(T)$, т. е. элементами пространства $L(T)^*$. Группа Вейля W действует на $L(T)^*$ по формуле $(wh)(v) = h(w^{-1}v)$.

В пространстве $L(T)$ есть инвариантное скалярное произведение, поэтому мы можем отождествить $L(T)$ и $L(T)^*$ при помощи изоморфизма $\iota: L(T) \to L(T)^*$, где $(\iota v_1)(v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle$. Это отображение перестановочно с действием группы $\tilde{W}$, поэтому все результаты, относящиеся к действию группы W на $L(T)$, можно с помощью изоморфизма ι перенести на $L(T)^*$. Снабдим пространство $L(T)^*$ скалярным произведением, скопировав его с пространства $L(T)$, т. е. положив

$$\langle \iota v_1, \iota v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

или, если угодно,

$$\langle h, \iota v \rangle = h(v).$$

Оно, конечно, инвариантно относительно W.

Преобразование φ_r действует на $L(T)$, оставляя на месте векторы v, для которых $\theta_r(v) = 0$. Поэтому φ_r действует на $L(T)^*$, оставляя на месте векторы ιv, для которых $\theta_r(v) = 0$, т. е. $\langle \theta_r, \iota v \rangle = 0$. Таким образом, φ_r оставляет на месте векторы пространства $L(T)^*$, перпендикулярные к θ_r, так что φ_r есть отражение в плоскости, перпендикулярной к θ_r.

Заметим, что отражение в плоскости, перпендикулярной к единичному вектору v, задается формулой $w \to w - 2\langle v, w \rangle$.

5.19. Предложение.

$$\varphi_r(h) = h - \frac{2(\theta_r, h)}{\langle \theta_r, \theta_r \rangle}\theta_r.$$

Это следует из предшествующего рассуждения.

5.20. Определение. *Весом* группы G называется элемент пространства $L(T)^*$, принимающий целые значения на целочисленной решетке.

Например, каждый корень является весом.

Группа W переводит веса в веса. Следовательно, справедливо

5.21. Предложение. *Если λ — вес, то и*

$$\varphi_r(\lambda) = \lambda - \frac{2\langle \theta_r, \lambda \rangle}{\langle \theta_r, \theta_r \rangle}\theta_r$$

является весом.

Группа W переводит также корни в корни. Значит, справедливо

5.22. Предложение. *Если θ_s — корень, то и*

$$\varphi_r(\theta_s) = \theta_s - \frac{2\langle \theta_r, \theta_s \rangle}{\langle \theta_r, \theta_r \rangle}\theta_r$$

является некоторым корнем $\pm\theta_t$.

5.23. Пример. $\varphi_r(\theta_r) = -\theta_r$.

5.24. Предложение. *Коэффициент*

$$\frac{2\langle\theta_r, \lambda\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle}$$

в предложениях 5.21 *и* 5.22 *является целым.*

Доказательство. Выберем такой вектор $v \in L(T)$, что $\theta_r(v) = 1$. Тогда $\exp v \in U_r$. Преобразование φ_r оставляет на месте элементы подгруппы U_r, поэтому вектор $v - \varphi_r(v)$ принадлежит целочисленной решетке. Следовательно, число $\lambda(v) - (\lambda\,\varphi_r(v))$ — целое, т. е. число $\lambda(v) - (\varphi_r^{-1}(\lambda))(v)$ — целое. Так как $\varphi_r^{-1} = \varphi_r$, то отсюда видно, что число

$$\lambda(v) - \lambda(v) + \frac{2\langle\theta_r, \lambda\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle}\,\theta_r(v)$$

— целое, что и требовалось доказать.

5.25. Предложение. *Пусть α, β — такие корни, что $\alpha \neq \pm\beta$. Тогда имеет место одна из следующих возможностей:*

(0) *векторы α и β перпендикулярны;*

(1) *векторы α и β образуют угол, равный* 60° *или* 120°, *и* $|\alpha| = |\beta|$;

(2) *векторы α и β образуют угол, равный* 45° *или* 135°, *и отношение их длин равно* $\sqrt{2}$;

(3) *векторы α и β образуют угол, равный* 30° *или* 150°, *и отношение их длин равно* $\sqrt{3}$.

Доказательство. Это предложение будем доказывать вместе со следующим утверждением:

5.26. Предложение. *Пусть α, β — такие корни, что $\alpha \neq \pm\beta$, и пусть k — целое число, расположенное между* 0 *и* $\frac{-2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$ *включительно. Тогда $\beta + k\alpha$ также является корнем.*

Доказательство. Угол ω между α и β определяется формулой

$$\cos^2\omega = \frac{\langle\alpha, \beta\rangle^2}{\langle\alpha, \alpha\rangle\langle\beta, \beta\rangle} < 1.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant \left(\frac{-2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}\right)\left(\frac{-2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\beta, \beta\rangle}\right) < 4.$$

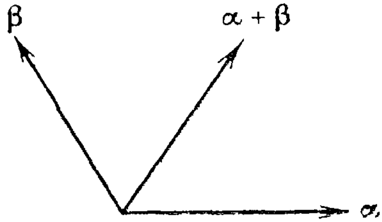
Умножив, если надо, вектор α на -1, мы можем считать, что $\langle\alpha, \beta\rangle \leqslant 0$. Если $\langle\alpha, \beta\rangle = 0$, то имеет место случай (0) предложения 5.25, а предложение 5.26 тривиально. В противном случае хотя бы одно из чисел

$$\left(\frac{-2\langle\alpha,\ \beta\rangle}{\langle\alpha,\ \alpha\rangle}\right),\quad \left(\frac{-2\langle\beta,\ \alpha\rangle}{\langle\beta,\ \beta\rangle}\right)$$

равно 1. Если $\left(\frac{-2\langle\alpha,\ \beta\rangle}{\langle\alpha,\ \alpha\rangle}\right)=1$, то вектор $\beta+\alpha$ получается из β отражением в плоскости, перпендикулярной к α, отсюда вытекает предложение 5.26 для этого случая. Поскольку утверждение предложения 5.25 симметрично относительно α и β, можно теперь считать, что $\frac{-2\langle\beta,\ \alpha\rangle}{\langle\beta,\ \beta\rangle}=1$.

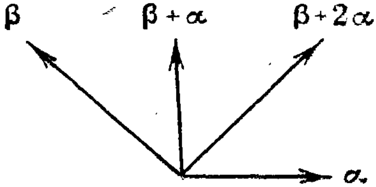
Пусть $\frac{-2\langle\alpha,\ \beta\rangle}{\langle\alpha,\ \alpha\rangle}=\nu$, $\nu=1$, 2 или 3. Тогда $\frac{\langle\beta,\ \beta\rangle}{\langle\alpha,\ \alpha\rangle}=\nu$. Значит, $\frac{|\beta|}{|\alpha|}=\sqrt{\nu}$ и $\cos^2\omega=\frac{\nu}{4}$, следовательно, $\cos\omega=$ $=-\frac{\sqrt{\nu}}{2}$.

Если $\nu=1$, то мы получаем случай (1) предложения 5.26, а предложение 5.26 уже доказано. Имеем следующую диаграмму:



Пример. $G=SU(3)$.

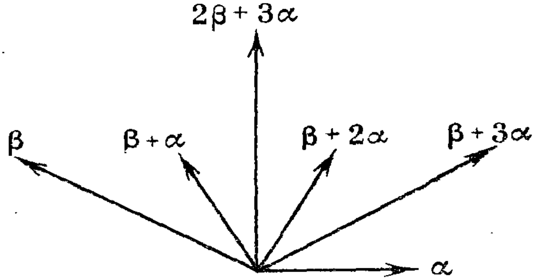
Если $\nu=2$, то мы получаем случай (2) предложения 5.25. При отражении вектора α в гиперплоскости, перпендикулярной к β, получается $\beta+\alpha$. При отражении вектора β в гиперплоскости, перпендикулярной к α, получается $\beta+2\alpha$. Значит, $\beta+\alpha$, $\beta+2\alpha$ — корни.



Группа Вейля W содержит отражения в двух гиперплоскостях, образующих угол в 45°, и, следовательно, содержит диэдральную группу D_8.

Примеры. $G = \mathrm{Sp}(2)$ или $\mathrm{SO}(5)$.

Если $\nu = 3$, то мы получаем случай (3) предложения 5.25. Отражая α в плоскости, перпендикулярной к β, получим вектор $\beta + \alpha$. Отражая β и $\beta + \alpha$ в плоскости, перпендикулярной к α, получим $\beta + 3\alpha$ и $\beta + 2\alpha$.



Группа Вейля W содержит отражения в двух гиперплоскостях, образующих угол в 30°, и, следовательно, содержит диэдральную группу D_{12}.

Пример. Группа $G = G_2$, которая является группой автоморфизмов множества чисел Кэли, рассматриваемого как алгебра над $\mathbb{R}$. (Мы не будем подробно изучать этот пример.)

5.27. Определение. Выберем в $L(T)$ некоторую камеру Вейля B и назовем ее *фундаментальной камерой Вейля* (ФКВ). Изменим знаки форм $\theta_1, \ldots, \theta_m$ так, чтобы для всех $v \in B$ и всех r выполнялось неравенство $\theta_r(v) > 0$. Тогда

$$\{v \in L(T) \mid \theta_r(v) > 0 \quad \text{для всех } r\} = B.$$

Корни $\theta_1, \ldots, \theta_m$ мы будем теперь называть *положительными корнями*, а $-\theta_1, \ldots, -\theta_m$ — *отрицательными корнями*.

5.28. Примеры. Пусть $G = \mathrm{U}(n)$. Пусть фундаментальная камера Вейля задается неравенствами $x_1 > x_2 > \ldots$ $\ldots > x_n$. Тогда положительными корнями являются формы $x_r - x_s$, где $r < s$.

В случае группы $\mathrm{Sp}(n)$ определим фундаментальную камеру Вейля неравенствами $x_1 > \ldots > x_n > 0$; аналогично для группы $\mathrm{SO}(2n+1)$.

Для групп $\mathrm{SO}(2n)$ определим фундаментальную камеру Вейля неравенствами $x_1 > \ldots > x_{n-1} > x_n > -x_{n-1}$.

5.29. Лемма. *Пусть θ_r — положительные корни и $\lambda_r \geqslant 0$, где $\lambda_r \in \mathbb{R}$. Тогда из равенства $\sum \lambda_r\theta_r = 0$ следует, что $\lambda_r = 0$ для всех r.*

Доказательство. Возьмем $v \in B$. Тогда $\left(\sum \lambda_r\theta_r\right) v = 0$, поэтому $\sum\lambda_r (\theta_r v) = 0$. Следовательно, каждое λ_r равно 0.

5.30. Определение. Корень α называется *простым*, если

(i) α — положительный корень,

(ii) α нельзя представить в виде $\alpha = \beta + \gamma$, где β и γ — положительные корни.

5.31. Предложение. *Любой положительный корень α можно записать в виде линейной комбинации простых корней с неотрицательными целыми коэффициентами.*

Доказательство. Если корень α не простой, то $\alpha = \beta + \gamma$, где β, γ — положительные корни. Если какой-либо из корней β, γ не простой, то мы можем продолжить этот процесс. Если он никогда не закончится, то в силу конечности числа корней мы получим на каком-то шаге равенство вида $\theta = \theta + \delta_1 + \ldots + \delta_r$, где δ_i — положительные корни, что противоречит лемме 5.29.

5.32. Лемма. *Если α, β — различные простые корни, то $\langle\alpha, \beta\rangle \leqslant 0$.*

Доказательство. Предположим, что $\langle\alpha, \beta\rangle > 0$. Тогда $\frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$ — положительное целое число и, значит, $\frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} \geqslant 1$. Согласно предложению 5.26, вектор $\beta - \alpha$ является корнем. Поэтому либо $\beta - \alpha$, либо $\alpha - \beta$ — положительный корень. Следовательно, либо $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$, либо $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$ — не простой корень, что противоречит нашему предположению.

5.33. Предложение. *Простые корни линейно независимы.*

Доказательство. Предположим, что $v = \sum \mu_r\theta_r = \sum \nu_s\theta_s$, где θ_r — простые корни, все μ_r, ν_s неотрицательны и суммирование проводится по непересекающимся множествам индексов. Тогда

$$\langle v, v\rangle = \sum \mu_r\nu_s \langle\theta_r, \theta_s\rangle \leqslant 0.$$

Значит, $v = 0$, и мы можем применить лемму 5.29.

5.34. Следствие. *Фундаментальная камера Вейля задается неравенствами* $\theta_1(v) > 0, \ldots, \theta_r(v) > 0$, *где* $\theta_1, \ldots, \theta_r$ *— набор всех простых корней.*

Доказательство. Это, очевидно, следует из предложения 5.31.

Таким образом, простые корни соответствуют стенкам фундаментальной камеры Вейля.

5.35. Пример. $G = U(n)$. Фундаментальная камера Вейля имеет вид $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$. Простые корни — это формы

$$x_1 - x_2, \quad x_2 - x_3, \quad \ldots, \quad x_{n-1} - x_n.$$

Любой другой корень можно записать в виде линейной комбинации этих корней, например,

$$x_r - x_s = (x_r - x_{r+1}) + \ldots + (x_{s-1} - x_s)$$

при $r < s$. Корни

$$x_1 - x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} - x_n$$

линейно независимы.

5.36. Упражнение. Если α — простой корень и мы имеем равенство $\alpha = \sum \mu_r \theta_r$, где μ_r — неотрицательные числа, а θ_r — положительные корни, то это равенство имеет вид $\alpha = \alpha$.

5.37. Определение. *Диаграмма Дынкина* строится следующим образом. Каждому простому корню сопоставляется кружок, затем кружки, соответствующие двум различным простым корням α, β, соединяются $\nu = 0, 1, 2$ или 3 чертами, где ν — номер соответствующего пункта в предложении 5.25.

5.38. Пример. $G = U(n)$. Корням $x_r - x_{r+1}$ и $x_{r+1} - x_{r+2}$ отвечает $\nu = 1$. В остальных случаях $\nu = 0$. Следовательно, диаграмма Дынкина имеет вид

где число кружков равно $n - 1$.

5.39. Лемма. *Если* θ_r *— простой корень, то* φ_r *переставляет между собой все положительные корни, кроме корня* θ_r, *который переходит в* $-\theta_r$.

Доказательство. Мы дадим два доказательства.

(i) Выберем такую точку v диаграммы, что $\theta_r(v) = 0$ и $\theta_s(v) > 0$ для любого другого простого корня θ_s. Тогда $\theta_t(v) > 0$ для любого положительного корня θ_t, отличного от θ_r.

Пусть S — шаровая окрестность точки v, не пересекающаяся ни с одной из плоскостей $\theta_t = 0$ при $t \neq r$. Пусть $w \in S \cap$ (ФКВ). Тогда $\varphi_r(w) \in S$. Значит,

$$(\varphi_r\theta_t)(w) = \theta_t(\varphi_r w) > 0$$

при $t \neq r$. Итак, $\varphi_r\theta_t$ — положительный корень.

(ii) Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_s$ — простые корни, и пусть θ_t — положительный корень. Представим его в виде

$$\theta_t = n_1\theta_1 + \ldots + n_s\theta_s.$$

Тогда корень

$$\varphi_r(\theta_t) = \theta_t - \frac{2\langle\theta_r, \theta_t\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle}\theta_r$$

отличается от θ_t только коэффициентом при θ_r. Поэтому, если $\theta_t \neq \theta_r$, то в разложении корня $\varphi_r(\theta_t)$ по простым корням есть хотя бы один положительный коэффициент. Следовательно (см. 5.31 и 5.33), этот корень является положительным.

5.40. Определение. *Дуальной фундаментальной камерой Вейля* (ДФКВ) называется множество точек в $L(T)^*$, соответствующее фундаментальной камере Вейля в $L(T)$ при изоморфизме ι, т. е. ДФКВ есть множество таких $h \in L(T)^*$, что $\langle\theta_r, h\rangle > 0$ для каждого простого корня θ_r.

5.41. Определение. Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_m$ — положительные корни. Определим форму $\beta \in L(T)^*$, положив $\beta = {}^1/_2(\theta_1 + \ldots + \theta_m)$. Эта форма не обязательно является весом.

3.42. Предложение. *Форма β лежит в дуальной фундаментальной камере Вейля. На самом деле $\frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = 1$ для каждого простого корня α.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \theta_r$. Тогда φ_r переставляет положительные корни, отличные от α. Возможны три случая:

(i) $\varphi_r(\theta_t) = \theta_t$. Тогда $\langle\theta_r, \theta_t\rangle = 0$, поэтому θ_t дает нулевой вклад в $\langle\alpha, \beta\rangle$.

(ii) φ_r переставляет корни θ_t и θ_u, $t \neq u$. Тогда

$$\langle\theta_r, \theta_t + \theta_u\rangle = 0,$$

поэтому $\theta_t + \theta_u$ дает нулевой вклад в $\langle\alpha, \beta\rangle$.

(iii) $\theta_t = \theta_r$. Вклад в $\langle\alpha, \beta\rangle$ для этого случая равен ${}^1/_2\langle\alpha, \alpha\rangle$. Следовательно, $\frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = 1$.

5.43. Упражнение. Найдите $^1/_2(\theta_1+\ldots+\theta_m)$ для следующих групп:

(i) $SU(3)$. (ii) $SO(5)$. (iii) G_2.

5.44. Предложение. *При $k\in\mathbb{Z}$ отражения в плоскостях $\theta_r=k$ пространства $L(T)$ накрывают действие преобразования φ_r на T.*

Доказательство. Пусть $v\in L(T)$ — такой вектор, что $\theta_r(v)=k$. Тогда указанное отражение задается формулой

$$x\longmapsto\varphi_r(x-v)+v=\varphi_r(x)-\varphi_r(v)+v.$$

Но v отображается в U_r, поэтому $\varphi_r(v)$ и v имеют один и тот же образ в T. Следовательно, $\varphi_r(x)$ и $\varphi_r(x)-$ $-\varphi_r(v)+v$ имеют один и тот же образ в T.

5.45. Определение. *Расширенной группой Вейля* называется группа Γ, порожденная отражениями в плоскостях диаграммы $\theta_r=k$, $k\in\mathbb{Z}$.

В силу 5.44 группа Γ накрывает действие группы Вейля на T. Положим $\Gamma_0=\operatorname{Ker}(\Gamma\to W)$.

5.46. Рассуждение. Мы имеем расщепляемое расширение

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_0 \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & W \\
& W \arrow[u] \arrow[ur, "1"'] &
\end{tikzcd}$$

Подгруппа Γ_0 состоит из параллельных переносов пространства $L(T)$. Каждый элемент группы Γ_0 является переносом на какой-либо вектор целочисленной решетки I. Значит, Γ_0 можно рассматривать как подгруппу в I. (Она не обязательно совпадает со всей группой I.)

Нашей ближайшей целью является вычисление фундаментальной группы $\pi_1(G)$ в терминах штифелевой диаграммы. Некоторым алгебраистам может прийтись не по вкусу топологический инвариант $\pi_1(G)$, поэтому мы сделаем несколько замечаний о той пользе, которую можно из него извлечь. Во-первых, классическая формулировка одной из наших основных теорем (а именно, теоремы 6.41) содержит условие $\pi_1(G)=0$. Кроме того, некоторые вспомогательные результаты, использованные в доказательстве этой теоремы, получаются при том же условии. Правда, мы как раз собираемся доказать (теорема 5.47), что $\pi_1(G)=I/\Gamma_0$; поэтому можно было бы заменить условие односвязности в 6.41 условием $\Gamma_0=I$, которое в конечном счете как раз и используется в доказательстве теоремы 6.41. Во-вторых, мы предполагаем применить фундаментальную группу $\pi_1(G)$ для классификации связных групп, накрывающих группу G, как это обычно делается в алгебраической топологии. Чтобы обойтись без нее в наших рассуждениях (мы имеем в виду п. 5.56), нам пришлось бы построить двулистное накрытие $\mathrm{Spin}(n)$ группы $SO(n)$ без ссылки на π_1. Конечно, это можно сделать чисто алгебраически, например, с помощью алгебр Клиффорда. Последние составляют интересную главу алгебры, но их конструкция связана с дополнительной работой и в то же время не приводит к более глубокому проникновению в суть предмета. Иногда алгебраическая чистота покупается слишком дорогой ценой (см. [23]).

Прежде чем приступить к вычислению группы $\pi_1(G)$, установим изоморфизм $I\cong\pi_1(T)$ следующим образом. Рассмотрим последовательность $I\subset L(T)\to T$. Для каждого $v\in I$ выберем какой-либо путь ω в $L(T)$ от некоторой точки $\omega(0)$ до точки $\omega(1)=v+\omega(0)$. Проекция этого пути является замкнутым путем в T и, следовательно, представляет некоторый элемент группы $\pi_1(T)$, поскольку $\pi_1(T)$ абелева.

Вложение $i\colon T\to G$ индуцирует гомоморфизм $I\cong\pi_1(T)\xrightarrow{i_*}\pi_1(G)$.

5.47. Теорема. *Отображение i_* является эпиморфизмом и индуцирует изоморфизм $I/\Gamma_0\cong\pi_1(G)$.*

Доказательство. Утверждения 5.48—5.55 составляют в совокупности доказательство теоремы.

5.48. Предложение. *Пусть γ_r — образ точки 0 при отражении в плоскости $\theta_r=1$. Тогда Γ_0 есть подгруппа в I, порожденная всеми γ_r.*

Доказательство. Подгруппа Γ_0 содержит все γ_r, так как последовательные отражения в плоскостях $\theta_r=0$ и $\theta_r=1$ дают параллельный перенос на вектор γ_r.

Обратно, мы утверждаем, что если $\gamma\in\Gamma_0$, то $\gamma(0)=\sum n_r\gamma_r$, где n_r — целые числа, откуда следует, что если $\gamma\in\Gamma_0$, то γ есть перенос на вектор $\sum n_r\gamma_r$. Докажем это утверждение индукцией по числу отражений, использованных для построения элемента γ.

Предположим, что $\gamma = \rho\delta$, где ρ — отражение в плоскости $\theta_r = k$, и что $\delta(0) = \sum n_s\gamma_s$, где n_s — целые. Имеем

$$\rho(x) = x + (k - \theta_r(x))\gamma_r.$$

Значит,

$$\rho\delta(0) = \sum n_s\gamma_s + k\gamma_r - \theta_r\left(\sum n_s\gamma_s\right)\gamma_r.$$

Но число $\theta_r(\sum n_s\gamma_s)$ целое, так как вектор $\sum n_s\gamma_s$ принадлежит целочисленной решетке. Следовательно, $\rho\delta(0)$ имеет требуемый вид.

5.49. Примеры.

(i) $G = \mathrm{U}(n)$ или $\mathrm{SU}(n)$. Образ точки 0 при отражении в плоскости $x_r - x_s = 1$ $(r < s)$ есть точка $(0 \ldots 0 \overset{r}{1} 0 \ldots 0 -\overset{s}{1} 0 \ldots 0)$. Определим гомоморфизм π: $I \to \mathbb{Z}$ формулой $\pi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$. Тогда $\Gamma_0 = \operatorname{Ker}\pi$. Для группы $\mathrm{SU}(n)$ имеем $I/\Gamma_0 = 0$, а для группы $\mathrm{U}(n)$ имеем $I/\Gamma_0 \cong \mathbb{Z}$.

(ii) $G = \mathrm{Sp}(n)$. Образ точки 0 при отражении в плоскости $2x_r = 1$ есть точка $(0 \ldots 0 \overset{r}{1} 0 \ldots 0)$. Имеем $I/\Gamma_0 = 0$.

(iii) $G = \mathrm{SO}(2n)$ или $\mathrm{SO}(2n+1)$. Образ точки 0 при отражении в плоскости $x_r - x_s = 0$ $(r < s)$ есть $(0 \ldots 0 \overset{r}{1} 0 \ldots 0 -\overset{s}{1} 0 \ldots 0)$, а образ точки 0 при отражении в плоскости $x_r + x_s = 0$ есть $(0 \ldots 0 \overset{r}{1} 0 \ldots 0 \overset{s}{1} 0 \ldots 0)$. Для группы $\mathrm{SO}(2n+1)$ образ точки 0 при отражении в плоскости $x_r = 1$ есть точка $(0 \ldots 0 \overset{r}{2} 0 \ldots 0)$, которая не дает ничего нового. Определим гомоморфизм π: $I \to \mathbb{Z}_2$ формулой $\pi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n \bmod 2$. Тогда $\Gamma_0 = \operatorname{Ker}\pi$. Значит, $I/\Gamma_0 \cong \mathbb{Z}_2$.

В частном случае группы $\mathrm{SO}(2)$ имеем $\Gamma_0 = 0$ и $I/\Gamma_0 \cong \mathbb{Z}$.

5.50. Лемма. *Гомоморфизм $I \cong \pi_1(T) \xrightarrow{i_*} \pi_1(G)$ отображает Γ_0 в 0.*

Доказательство. Покажем, что γ_r переходит в нуль. Пусть ω — прямолинейный путь от 0 до γ_r в $L(T)$. Тогда $\exp\omega(1-t) = \varphi_r \exp\omega(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1/2$. Согласно следствию 5.9, найдется элемент $g \in G$ такой, что $\varphi_r(x) = gxg^{-1}$, т. е. $\exp\omega(1-t) = g\exp\omega(t)g^{-1}$, и что в G существует путь от g до e, каждая точка которого оставляет на месте элементы группы U_r. Таким образом, путь $\exp\omega(1-t)$ гомотопен пути $e\exp\omega(t)e^{-1} = \exp\omega(t)$, причем гомотопия оставляет точки $t = 0$,

$t=1/2$ неподвижными. Следовательно, путь $\exp\omega(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, можно стянуть в точку, оставляя концы на месте. Значит, γ_r переходит в нуль группы $\pi_1(G)$.

5.51. Обозначения. Пусть G_R, T_R и $L(T)_R$ обозначают множества регулярных точек в G, T и $L(T)$ соответственно.

5.52. Лемма. *Гомоморфизм* i_*: $\pi_1(G_R) \to \pi_1(G)$, *порожденный вложением, является изоморфизмом.*

Доказательство. Из 4.42 и стандартной хаусдорфовой теории размерности видно, что дополнение к G_R в G имеет хаусдорфову размерность $\leqslant n-3$. Справедливость леммы теперь следует из стандартной теории гомотопий.

5.53. Лемма. *Определим отображение* f_R: $G/T \times T_R \to G_R$ *формулой* $f_R(g, t) = gtg^{-1}$. *Тогда* f_R — *накрытие со слоем* W.

Доказательство. Определим следующее левое действие группы W на G/T. Пусть $\varphi \in W$, и пусть $n \in N(T)$ представляет элемент φ. Положим

$$\varphi(gT) = gTn^{-1} = gn^{-1}T.$$

Группа W действует слева также на T_R и, следовательно, действует на $G/T \times T_R$. Пусть $G/T \times_W T_R$ — соответствующее пространство орбит. Поскольку W действует на G/T свободно, проекция

$$G/T \times T_R \to G/T \times_W T_R$$

является накрытием со слоем W.

Отображение f_R пропускается через $G/T \times_W T_R \to G_R$, причем полученное отображение $G/T \times_W T_R \to G_R$ является однолистным накрытием и, следовательно, гомеоморфизмом. Отсюда вытекает утверждение леммы.

5.54. Лемма. *Гомоморфизм* i_*: $\pi_1(T) \to \pi_1(G)$ *является эпиморфизмом.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$G/T \times T_R \xrightarrow{f_R} G_R \subset G,$$

где f_R — конечное накрытие. Компоненты множества T_R обозначим через T_R^i; тогда, поскольку G/T связно, компоненты многообразия $G/T \times T_R$ суть множества $G/T \times$

$\times T^l_R$. Поэтому каждое из отображений

$$\pi^1(G/T\times pt)\to\pi_1(G/T\times T^i_R)\xrightarrow{f_{R*}}\pi_1(G_R)\to\pi(G)$$

мономорфно.

Далее, отображение $G/T\times\{t_0\}\to G$, заданное формулой $g\to gt_0g^{-1}$, гомотопно постоянному отображению; соответствующую гомотопию можно получить, выбрав путь от t_0 до e. Значит, $\pi_1(G/T)=0$. Наконец, из точной гомотопической последовательности

$$\pi_1(T)\to\pi_1(G)\to\pi_1(G/T)$$

расслоения $G\to G/T$ следует, что $\pi_1(T)\to\pi_1(G)$ — эпиморфизм.

5.55. Лемма. *Если $v\in I$ переходит в 0 при гомоморфизме $I\cong\pi_1(T)\to\pi_1(G)$, то $v\in\Gamma_0$.*

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что для любого $\gamma\in\Gamma_0$ точка $v+\gamma$ не ближе к точке $0\in I$, чем v. Тогда $\theta_r(v)=-1$, 0 или 1 для каждого корня θ_r. Действительно, если $\theta_r(v)>1$, то образ точки v при отражении в плоскости $\theta_r=1$ лежит ближе к точке 0, чем v; аналогично рассматривается случай $\theta_r(v)<-1$.

Пусть ω — прямолинейный путь в $L(T)$ от $\omega(0)=0$ до $\omega(1)=v$. Этот путь не пересекает ни одну из плоскостей диаграммы, но может лежать на некоторых из них и встречаться с другими в точках $\omega(0)$ и $\omega(1)$. Поэтому найдется близкий к ω прямолинейный путь ω' от $\omega'(0)$ до $\omega'(1)=\omega'(0)+v$, который встречается с плоскостями диаграммы только вблизи точки $\omega'(1)$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G/T\times L(T)_R & \xrightarrow{f_R} & G_R \\ \cap & & \cap \\ G/T\times L(T) & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

Фиксируя смежный класс единицы в G/T, можно рассматривать ω' как путь в $G/T\times L(T)$. Тогда $f\omega'$ — петля в G, которая лежит в G_R, исключая точки, близкие к $f\omega'(1)$. В силу следствия 4.42 ее можно немного сдвинуть вблизи точки $f\omega'(1)$ так, чтобы она целиком лежала в G_R; полученная петля стягиваема в G_R. Поскольку $G/T\times L(T)_R\to G_R$ — накрытие, эта петля может быть поднята до пути ω'' в $G/T\times L(T)_R$ с началом вблизи точки $T\times 0$. Тогда путь ω'' будет совпадать с ω', исключая точки, близкие к $\omega'(1)$. Далее, проекция пути ω'' на множитель $L(T)$ является путем, близким к ω', так как путь $f\omega'$ мы изменили только около точки e в G. Петля $f_R\omega''$ стягиваема в G_R, поэтому ω'' — замкнутая петля в $L(T)_R$, а вектор v близок к нулю. Но v лежит в I, значит, $v=0$.

5.56. Обсуждение. Итак, мы показали (см. 5.47 и 5.49), что $\pi_1(\mathrm{SO}(m))\cong\mathbb{Z}_2$ при $m>2$. Следовательно, группа $\mathrm{SO}(m)$ обладает двулистным накрытием, которое обозначается через $\mathrm{Spin}(m)$. Ясно, что накрытие максимального тора в $\mathrm{SO}(m)$ есть максимальный тор в $\mathrm{Spin}(m)$ *). В качестве стандартного максимального тора $\tilde T$ в $\mathrm{Spin}(m)$ возьмем накрытие стандартного максимального тора в $\mathrm{SO}(m)$ (см. примеры 4.19, 4.20). Тогда накрывающее отображение определяет изоморфизм $L(T)\cong L(\tilde T)$, который, однако, не индуцирует изоморфизма целочисленных решеток. Решетка I состоит из всех точек $(x_1, \ldots, x_n)$ с целыми координатами x_r, а целочисленная решетка $\tilde I\subset L(\tilde T)$ состоит из точек $(x_1, \ldots, x_n)$ с целыми координатами x_r, для которых $x_1+\ldots+x_n$ четно. Аналогично, $L(\tilde T)^*\cong L(T)^*$, но указанный изоморфизм не отображает друг на друга решетки весов. Например, форма $^1/_2(x_1+\ldots+x_n)$ не является весом для $\mathrm{SO}(m)$, но служит весом для $\mathrm{Spin}(m)$.

Для любой группы G размерности n гомоморфизм Ad: $G\to\mathrm{SO}(n)$ индуцирует гомоморфизм

$$\mathrm{Ad}_*\colon\ \pi_1(G)\to\pi_1(\mathrm{SO}(n))\cong\mathbb{Z}_2 \qquad (\text{при } n>2).$$

Мы различаем два случая.

---

*) Как известно, накрывающее пространство $\tilde G$ для любой связной группы Ли G обладает такой структурой группы Ли, что накрытие $p\colon \tilde G\to G$ — гладкий гомоморфизм. При этом $\operatorname{Ker} p$ — дискретный нормальный делитель группы $\tilde G$, лежащий в ее центре (см. [29, гл. 3, § 22]). Предположим, что G компактна и что накрытие конечнолистно; тогда и $\tilde G$ компактна. Пусть T — максимальный тор в G, тогда $\tilde T=p^{-1}(T)$ — максимальный тор в $\tilde G$. Действительно, связная компонента единицы $\tilde T_1$ абелева, ибо p — локальный изоморфизм. Ясно, что $p(\tilde T_1)=T$. Поскольку p переводит любой тор из $\tilde G$ в тор той же размерности, лежащий в G, $\tilde T_1$ — максимальный тор в $\tilde G$. Но подгруппа $\tilde T=\tilde T_1\cdot\operatorname{Ker} p$ также абелева, откуда в силу 4.26 следует, что $\tilde T=\tilde T_1$. — *Прим. ред.*

(i) Гомоморфизм Ad_* нулевой, и мы можем поднять Ad в $\mathrm{Spin}(n)$ и получить следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d] \\ G \arrow[ur] \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] & \mathrm{SO}(n) \end{tikzcd}$$

(ii) Гомоморфизм Ad_* ненулевой. Тогда Ad определяет двулистное накрытие π: $\tilde{G} \to G$, и мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\mathrm{Ad}"] & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] & \mathrm{SO}(n) \end{tikzcd}$$

Группа $\tilde{G}$ относится к случаю (i). В силу 3.68 теория представлений группы $\tilde{G}$ определяет теорию представлений группы G. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что имеет место случай (i).

5.57. Предложение. *В этом случае* $\beta = {}^1/_2(\theta_1 + \ldots + \theta_m)$ (см. 5.41) *является весом.*

Доказательство. В предложении 4.12 мы записали T-пространство G_e в виде $V_0 \oplus \sum_{i=1}^{m} V_i$. Выберем базисы в $V_1, \ldots, V_m, V_0$ и, объединяя их в этом порядке, получим базис в G_e. Тогда композиция $T \subset G \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{Aut}\, G_e = \mathrm{SO}(n)$ переводит T в стандартный максимальный тор T' группы $\mathrm{SO}(n)$. Далее, если x_r: $L(T') \to \mathbb{R}$ обозначает r-ю координатную функцию, то композиция $L(T) \to L(T') \xrightarrow{x_r} \mathbb{R}$ есть корень $\pm\theta_r$ при $r \leqslant m$ или нуль при $r > m$. Взяв каждый корень θ_r с соответствующим знаком, будем иметь равенство $\pm\theta_1 \pm \ldots \pm \theta_m = (\sum x_r)\,\mathrm{Ad}$.

Гомоморфизм Ad поднимается в Spin(n), а $^1/_2\sum x_r$ есть вес для Spin(n), поэтому $^1/_2(\sum x_r)$ Ad есть вес для G. Итак, форма $^1/_2(\pm\theta_1\pm\ldots\pm\theta_m)$ является весом для группы G и, следовательно, весом является форма $\beta = {}^1/_2(\theta_1+\ldots+\theta_m)$, так как она отличается от формы $^1/_2(\pm\theta_1\pm\ldots\pm\theta_m)$ на некоторую сумму положительных корней.

5.58. Лемма. *В этом случае формула* $\omega\longmapsto\omega+\beta$ *задает взаимно однозначное соответствие между весами* $\omega\in\overline{\text{ДФКВ}}$ *и весами* $\omega+\beta\in$ ДФКВ.

Доказательство. (i) Если ω — вес и $\langle\omega, \theta_r\rangle\geqslant 0$ для всех простых корней θ_r, то $\langle\omega+\beta, \theta_r\rangle>0$ в силу 5.42.

(ii) Если ω — вес и $\langle\omega, \theta_r\rangle>0$ для всех простых корней θ_r, то $\frac{2\langle\omega, \theta_r\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle}>0$, это число целое (см. 5.24) и, следовательно, $\geqslant 1$. Но $\frac{2\langle\beta, \theta_r\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle}=1$, значит, $\frac{2\langle\omega-\beta, \theta_r\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle}\geqslant 0$ и $\omega-\beta$ является весом из $\overline{\text{ДФКВ}}$.

Ранее мы показали (см. 5.24), что если ω — вес и θ_r — корень, то число $\frac{2\langle\theta_r, \omega\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle}$ — целое. Теперь мы выясним, верно ли обратное утверждение.

5.59. Предложение. *Если для некоторого* $\omega\in L(T)^*$ *и для всех простых корней* θ_r *число* $\frac{2\langle\theta_r, \omega\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle}$ — *целое, то это число является целым для всех корней* θ_r.

Доказательство. Предположим, что $\frac{2\langle\theta_r, \omega\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle}$ — целое число для всех простых корней θ_r, а также для корня θ_s. Пусть φ_r отвечает некоторому простому корню θ_r, и пусть $\theta_t=\varphi_r(\theta_s)$. Тогда $\langle\theta_t, \theta_t\rangle=\langle\theta_s, \theta_s\rangle$ и, следовательно, число

$$\frac{2\langle\theta_t, \omega\rangle}{\langle\theta_t, \theta_t\rangle}=\frac{2}{\langle\theta_s, \theta_s\rangle}\left\langle\theta_s-\frac{2\langle\theta_r, \theta_s\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle}\theta_r, \ \omega\right\rangle=$$
$$=\frac{2\langle\theta_s, \omega\rangle}{\langle\theta_s, \theta_s\rangle}-\frac{2\langle\theta_r, \omega\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle}\frac{2\langle\theta_r, \theta_s\rangle}{\langle\theta_s, \theta_s\rangle}$$

— целое.

Но отражения φ_r порождают W (см. 5.34 и 5.13 (iv)), а любой корень θ_s можно представить в виде $\varphi\theta_r$, где θ_r — простой корень и $\varphi\in W$. Для этого нужно взять камеру Вейля со стенкой, определяемой θ_s, и перевести эту камеру в ФКВ (см. 5.34). Отсюда следует требуемое утверждение.

5.60. Предложение. *Предположим, что для некоторого* $\omega \in L(T)^*$ *и для каждого простого корня* θ_r *число* $\frac{2\langle\theta_r, \omega\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle}$ *— целое. Тогда* ω *принимает целые значения на* Γ_0.

Доказательство. Подгруппа Γ_0 порождается точками γ_r, где $\gamma_r = v - \varphi_r v$ для любого v, такого, что $\theta_r(v) = 1$. Имеем

$$\omega(\gamma_r) = \omega v - \omega(\varphi_r v) = (\omega - \varphi_r \omega)(v) = \frac{2\langle\theta_r, \omega\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle}\theta_r(v),$$

т. е. $\omega(\gamma_r)$ — целое. Таким образом, форма ω принимает целое значение на каждой точке γ_r и, следовательно, на всей подгруппе Γ_0.

5.61. Следствие. *Если* G *односвязна и* $\frac{2\langle\theta_r, \omega\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle}$ *— целое число для каждого простого корня* θ_r, *то* ω *— вес.*

Доказательство. $\Gamma_0 = I$.

5.62. Теорема. *Если группа* G *односвязна, то она имеет ровно* $k = \dim T$ *простых корней* $\theta_1, \ldots, \theta_k$ *и обладает такими весами* $\omega_1, \ldots, \omega_k$, *что* $\frac{2\langle\theta_r, \omega_t\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle} = \delta_{rt}$. *Тогда веса группы* G *суть линейные комбинации* $n_1\omega_1 + \ldots + n_k\omega_k$, *где* $n_r \in \mathbb{Z}$ *для каждого* r. *Дуальная фундаментальная камера Вейля ДФКВ состоит из всех форм вида* $\sum n_r\omega_r$, *где* $n_r > 0$, *а* $\overline{\text{ДФКВ}}$ *состоит из всех форм вида* $\sum n_r\omega_r$, *где* $n_r \geqslant 0$. *При этом*

$$^1/_2(\theta_1 + \ldots + \theta_m) = \omega_1 + \ldots + \omega_k.$$

Доказательство. Предположим, что имеется ровно $k - \nu$ простых корней. Тогда все корни лежат в подпространстве размерности $k - \nu$ в $L(T)^*$ и, следовательно, Γ_0 лежит в подпространстве размерности $k - \nu$ в $L(T)$. Тогда ранг группы I/Γ_0 не меньше ν, откуда следует равенство $\nu = 0$.

В $L(T)^*$ существуют такие формы ω_t, что $\frac{2\langle\theta_r, \omega_t\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle} = \delta_{rt}$, и в силу 4.61 эти формы являются весами. Каждый элемент ω пространства $L(T)^*$ можно представить в виде $\omega = \sum n_r\omega_r$, причем $\frac{2\langle\theta_r, \omega\rangle}{\langle\theta_r, \theta_r\rangle} = n_r$. Значит, ω тогда и только тогда является весом, когда каждое из чисел n_r — целое.

Утверждения о ДФКВ вытекают из определения 5.40.

Положим $\beta=\frac{1}{2}(\theta_1+\ldots+\theta_m)$. Тогда $\frac{2\langle\theta_r,\ \beta\rangle}{\langle\theta_r,\ \theta_r\rangle}=1$ (см. 5.42); следовательно, $\beta=\omega_1+\ldots+\omega_k$.

5.63. Пример. Пусть $G=\mathrm{SU}(n)$.

Возьмем $\omega_t=x_1+\ldots+x_t$ для $1\leqslant t\leqslant n-1$. Тогда

$$\langle x_r-x_{r+1},\ \omega_t\rangle\,\delta_{rt},$$

так что

$$\frac{2\langle\theta_r,\ \omega_t\rangle}{\langle\theta_r,\ \theta_r\rangle}=\delta_{rt}.$$

Поскольку $\sum x_i=0$, любой элемент пространства $L(T)^*$ можно записать в виде

$$a_1x_1+\ldots+a_{n-1}x_{n-1}.$$

Этот элемент лежит в ДФКВ, если

$$a_1>a_2>\ldots>a_{n-1}>0.$$

Его можно записать также в виде

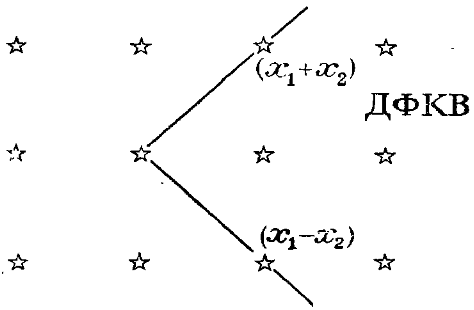
$$b_1\omega_1+\ldots+b_{n-1}\omega_{n-1},$$

и он лежит в ДФКВ, если $b_1,\ \ldots,\ b_{n-1}>0$.

5.64. Контрпримеры.

(i) Пусть $G=\mathrm{U}(2)$, где $\pi_1(\mathrm{U}(2))\cong\mathbb{Z}$. Имеем $\dim T=2$, но существует только один положительный корень. Дуальная фундаментальная камера Вейля есть полуплоскость, которую нельзя записать в указанном выше виде.

(ii) Пусть $G=\mathrm{SO}(4)$, где $\pi_1(\mathrm{SO}(4))\cong\mathbb{Z}_2$. Дуальная диаграмма имеет следующий вид:



Здесь звездочки представляют веса, дуальной фундаментальной камерой Вейля ДФКВ служит показанная на рисунке четверть. Веса, лежащие в ДФКВ, не образуют свободной абелевой полугруппы, а формы

$$\omega_1={}^1/_2\,(x_1+x_2),\quad \omega_2={}^1/_2\,(x_1-x_2)$$

не являются весами.

Глава 6

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Предупреждение. На протяжении этой главы G — связная компактная группа Ли, а T — максимальный тор в G.

6.1. Теорема (формула интегрирования Вейля). *На T существует такая вещественная функция u, что*

$$\int_G \varphi(g) = \int_T \varphi(t)\, u(t)$$

для всех функций классов φ на G.

На самом деле $u(t) = \delta\bar{\delta}/|W|$, где

$$\delta = \prod_{j=1}^{m} \left(e^{\pi i \theta_j(t)} - e^{-\pi i \theta_j(t)}\right)$$

и θ_j пробегает все различные положительные корни группы G.

Доказательство. Определим $f\colon G/T \times T \to G$ формулой $f(gt) = gtg^{-1}$ (см. 5.53). Тогда f пропускается через $G/T \times_W T$:

$$\begin{tikzcd}
G/T \times T \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "f"'] & G/T \times_W T \arrow[d, "c"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

Степень отображения c равна 1, так как его ограничение $G/T \times_W T_R \to G_k$ является гомеоморфизмом, а b

является $|W|$-листным накрытием. Следовательно, степень отображения f равна $|W|$ и

$$|W| \int_G \varphi\, dg = \int_{G/T \times T} \varphi^*\, dg^*,$$

где φ^*, dg^* — индуцированные функция и мера на $G/T \times T$ соответственно. Если φ — функция классов, то φ^* не зависит от аргумента из G/T.

Теперь мы должны вычислить $\det f'$ в произвольной точке (g, t) пространства $G/T \times T$. Сначала пусть u пробегает окрестность единице e в T. Тогда

$$f(g, tu) = gtug^{-1} = gtg^{-1}gug^{-1}.$$

Следовательно, $f'(g, t) = \operatorname{Ad} g$, если первый аргумент считать фиксированным. Теперь пусть v лежит на подмногообразии V в G, трансверсальном тору T. Тогда

$$f(gv, t) = gvtv^{-1}g^{-1},$$

так что

$$\begin{aligned} f'(g, t)(dv) &= g(dv)tg^{-1} - gt(dv)g^{-1} = \\ &= (gtg^{-1})(gt^{-1}(dv)tg^{-1} - g(dv)g^{-1}). \end{aligned}$$

Значит,

$$f'(g, t) = \operatorname{Ad} g(\operatorname{Ad} t^{-1} - E),$$

если второй аргумент считать фиксированным. Таким образом,

$$\det f'(g, t) = \det(\operatorname{Ad} t^{-1} - E).$$

Далее, $\operatorname{Ad} t$ имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \cos 2\pi\theta_1 & -\sin 2\pi\theta_1 & \\ \sin 2\pi\theta_1 & \cos 2\pi\theta_1 & \\ & & \ddots \end{Vmatrix},$$

поэтому $\operatorname{Ad} t^{-1} - E$ имеет следующий вид:

$$\begin{Vmatrix} \cos 2\pi\theta_1 - 1 & \sin 2\pi\theta_1 & \\ -\sin 2\pi\theta_1 & \cos 2\pi\theta_1 - 1 & \\ & & \ddots \end{Vmatrix}$$

и

$\det(\mathrm{Ad}\, t^{-1} - E) =$

$$= \prod_{r=1}^{m} (\cos^2 2\pi\theta_r - 2\cos 2\pi\theta_r + 1 + \sin^2 2\pi\theta_r) =$$

$$= \prod_{r=1}^{m} (4\sin^2 \pi\theta_r) = \prod (e^{\pi i\theta_r} - e^{-\pi i\theta_r}) \prod (e^{-\pi i\theta_r} - e^{\pi i\theta_r}) = \delta\bar{\delta},$$

где

$$\delta = \prod (e^{\pi i\theta_r} - e^{-\pi i\theta_r}).$$

Отсюда следует требуемый результат.

6.2. Определение. Группа Вейля W действует на $L(T)$. Для $\varphi \in W$ обозначим через $\operatorname{sign}\varphi$ знак определителя преобразования φ. Мы говорим, что $\chi \in K(T)$ — *симметрический* характер, если $\varphi\chi = \chi$ для каждого $\varphi \in W$, и *антисимметрический* или *альтернирующий* характер, если $\varphi\chi = (\operatorname{sign}\varphi)\chi$.

6.3. Пример. *Предположим, что* $\mathrm{Ad}\colon G \to SO(n)$ *поднимается в* $\mathrm{Spin}(n)$. *Тогда*

$$\delta = \prod_{r=1}^{m} (e^{\pi i\theta_r} - e^{-\pi i\theta_r})$$

— *антисимметрический характер.*

Доказательство. Имеем

$$\delta = \sum \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \exp \pi i (\varepsilon_1\theta_1 + \ldots + \varepsilon_m\theta_m),$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$ и сумма состоит из 2^m членов. Отметим, что в силу 5.57 форма

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_1\theta_1 + \ldots + \varepsilon_m\theta_m$$

является весом, так что $\delta \in K(T)$.

Пусть $x \in N(T)$ определяет преобразование $\varphi \in W$. Тогда φ можно считать действующим на G по формуле $g \to xgx^{-1}$. Оно индуцирует отображение $G_e \to G_e$, которое переводит T_e в T_e. На T_e это отображение сохраняет или меняет ориентацию в соответствии с $\operatorname{sign}\varphi$. Преобразование φ, кроме того, переставляет подпространства $V_1, \ldots, V_m$ (см. 5.5 и 3.22). Если φ отображает V_j в V_k с сохранением ориентации, то оно переводит θ_j в θ_k, а если ориентация меняется на противоположную, то оно переводит θ_j в $-\theta_k$. Если это преобразование меняет ориентацию ν раз, то $\varphi\delta = (-1)^\nu \delta$.

Но φ сохраняет ориентацию пространства G_r, поскольку x некоторым путем можно соединить с e. Следовательно,

$$(\operatorname{sign}\varphi)(-1)^{\nu}=+1,$$

т. е.

$$\varphi\delta=(\operatorname{sign}\varphi)\,\delta.$$

6.4. Предложение. *Если характер χ (группы T) обращается в нуль на U_r, то его можно представить в виде*

$$\chi=[\exp(2\pi i\theta_r)-1]\,\psi,$$

где ψ — характер.

Доказательство. (i) Пусть U_r имеет только одну компоненту. Тогда можно следующим образом выбрать базис $e_1, \ldots, e_k$ целочисленной решетки в $L(T)$: $e_2, \ldots, e_k$ — базис целочисленной решетки в $L(U_r)$, а e_1 — любая точка целочисленной решетки в $L(T)$, для которой $\theta_r(e_1)=1$ *). Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — характеры базисных представлений тора T, отвечающих базису $e_1, \ldots, e_k$. Тогда $\exp(2\pi i\theta_r)=\xi_1$, и мы можем записать $\chi=\sum\limits_n c_n\xi_1^n$, где каждый коэффициент c_n является конечным рядом Лорана от $\xi_2, \ldots, \xi_k$.

На U_r имеем $\xi_1=1$, следовательно, $\sum c_n=0$. Одночлены $\xi_2, \ldots, \xi_k$ линейно независимы на U_r, поэтому $\sum\limits_n c_n$ — нулевой ряд Лорана. Положим

$$\psi=\sum_n(\ldots+c_{n+1}+c_n)\,\xi_1^{n-1}.$$

Это конечный ряд Лорана, и $\chi=(\xi_1-1)\,\psi$.

---

*) Существование такого элемента e_1 следует из того, что exp отображает гиперплоскость $\{\theta_r=1\}$ на U_r (ср. примечание на стр. 75). Пусть $x=\sum\limits_{i=1}^{k}x_ie_i\in I$. Тогда $x_1=\theta_r(x)\in\mathbb{Z}$. Поэтому $x-x_1e_1=\sum\limits_{i=2}^{k}x_ie_i\in I\cap L(U_r)$. Согласно выбору элементов $e_2, \ldots, e_k$, имеем $x_i\in\mathbb{Z}$ $(i=2, \ldots, k)$. Следовательно, $e_1, \ldots, e_k$ — базис целочисленной решетки I. — *Прим. ред.*

(ii) Пусть U_r имеет две компоненты. Базис решетки в $L(T)$ возьмем такой же, как и раньше, но с условием $\theta_r(e_1)=2$ *). Тогда

$$\exp(2\pi i\theta_r)=\xi_1^2.$$

Рассмотрим $\chi=\sum c_n\xi_1^n$. Заметим, что U_r задается уравнениями $\xi_1=1$ и $\xi_1=-1$. Следовательно, $\sum c_n=0$ и $\sum(-1)^n c_n=0$. Значит, $\sum c_{2n-1}=0$ и $\sum c_{2n}=0$, и, рассуждая как в случае (i), получим $\chi=(\xi_1^2-1)\psi$.

6.5. Предложение. *Если χ — антисимметрический характер, то*

$$\chi=\prod_{i=1}^{m}[\exp(2\pi i\theta_i)-1]\psi,$$

где ψ — некоторый характер.

Доказательство. Достаточно показать, что если

$$\chi=[\exp(2\pi i\theta_i)-1]\psi$$

и χ обращается в нуль на U_r при $r\neq i$, то ψ также обращается в нуль на U_r, потому что тогда мы можем рассуждать по индукции, используя предложение 6.4. Характер ψ действительно обращается в нуль на U_r, исключая, может быть, точки множества $U_i\cap U_r$. Но $\dim U_r=k-1$ и $\dim U_i\cap U_r=k-2$. Поэтому ψ обращается в нуль на всей подгруппе U_r в силу непрерывности.

6.6. Теорема. *Предположим, что* Ad *поднимается в* Spin(n). *Тогда соответствие $\psi\longmapsto\psi\delta$ дает изоморфизм аддитивной группы симметрических характеров на аддитивную группу антисимметрических характеров.*

Доказательство. (i) Характер δ антисимметричен (см. 6.3), значит, указанное отображение действительно переводит симметрические характеры в антисимметрические.

(ii) Имеем $\frac{1}{|W|}\int\delta\bar{\delta}=1$, поэтому $\delta\neq 0$ и отображение $\psi\to\psi\delta$ мономорфно (см. 3.77).

*) Существование такого элемента e_1 следует из того, что exp отображает гиперплоскость $\{\theta_r=2\}$ на $(U_r)_1$ (ср. примечание на стр. 75). Гиперплоскости $\{\theta_r=2s+1\}$ отображаются на вторую компоненту группы U_r, так что θ_r принимает на целочисленной решетке I четные значения. Отсюда легко следует, что выбранная система элементов решетки I является базисом. — *Прим. ред.*

(iii) Предположим, что χ — антисимметрический характер. Тогда, согласно предложению 6.5, $\chi = \psi\delta$, где ψ — характер. Далее,

$$(\operatorname{sign} \varphi)\, \psi\delta = (\operatorname{sign} \varphi)\, (\varphi\psi)\, \delta$$

и $\varphi\psi(t) = \psi(t)$, исключая, возможно, точки, где $\delta(t) = 0$, т. е. точки множества $\bigcup_r U_r$. По непрерывности получаем, что $\varphi\psi(t) = \psi(t)$ для всех $t \in T$ и, следовательно, характер ψ симметричен. Таким образом, наше отображение сюръективно.

6.7. Определение. Пусть $h \in L(T)^*$ — вес, и пусть Wh — орбита точки h относительно W. Тогда *элементарная симметрическая сумма* $S(h)$ задается равенством

$$S(h) = \sum_{\omega \in Wh} \exp 2\pi i\omega.$$

6.8. Пример. Пусть $G = \mathrm{SU}(n)$. Тогда

$$S(x_1) = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

где $\xi_j = \exp 2\pi i x_j$,

$$\begin{aligned} S(x_1 + x_2) = \xi_1\xi_2 &+ \xi_1\xi_3 + \ldots + \xi_1\xi_n + \\ &+ \xi_2\xi_3 + \ldots + \xi_2\xi_n + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \xi_{n-1}\xi_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(2x_1 + x_2) = \xi_1^2\xi_2 &+ \ldots + \xi_1^2\xi_n + \\ + \xi_2^2\xi_1 &+ \ldots + \xi_2^2\xi_n + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \xi_n^2\xi_1 &+ \ldots + \xi_n^2\xi_{n-1}. \end{aligned}$$

6.9. Предложение. *Пусть h пробегает множество представителей орбит. Тогда $S(h)$ пробегает $\mathbb{Z}$-базис симметрических элементов кольца $K(T)$.*

Это очевидно.

6.10. Пример. В предложении 6.9 h может пробегать множество весов, принадлежащих $\overline{\text{ДФКВ}}$.

6.11. Лемма. *Пусть χ — антисимметрический характер и $h \in L(T)^*$ — сингулярный вес, т. е. $h \in L(U_r)^*$ для некоторого r. Тогда в χ член* $\exp 2\pi ih$ *встречается с коэффициентом* 0.

Доказательство. Предположим, что

$$\chi = a \exp 2\pi ih + \ldots$$

Пусть $\varphi \in W$ — отражение в плоскости $L(U_r)^*$. Тогда

$$-\chi = \varphi\chi = a \exp 2\pi ih + \ldots$$

Значит, $a = 0$.

6.12. Определение. Пусть $h \in L(T)^*$ — вес. Тогда *элементарная альтернирующая сумма* задается равенством

$$A(h) = \sum_{\varphi \in W} (\operatorname{sign} \varphi) \exp 2\pi i\, \varphi h.$$

Если h сингулярен, то $A(h) = 0$. В противном случае $A(h)$ содержит $|W|$ различных членов.

6.13. Пример. Пусть $G = \mathrm{SU}(n)$, и пусть

$$h = a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}.$$

Тогда

$$A(h) = \begin{vmatrix} \xi_1^{a_1} & \ldots & \xi_1^{a_{n-1}} & 1 \\ \xi_2^{a_1} & \ldots & \xi_2^{a_{n-1}} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_n^{a_1} & \ldots & \xi_n^{a_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}.$$

6.14. Предложение. *Пусть h пробегает множество представителей орбит регулярных весов. Тогда $A(h)$ пробегает $\mathbb{Z}$-базис антисимметрических характеров.*

Это очевидно.

6.15. Пример. В предложении 6.14 h может пробегать множество весов, принадлежащих ДФКВ.

6.16. Предложение. *Пусть χ — характер неприводимого комплексного представления группы G, и пусть $\psi = \chi \mid T$. Тогда $\psi\delta = A(h)$ для некоторого веса h.*

Доказательство. Если A_1, A_2 — элементарные альтернирующие суммы, то, согласно теореме 3.34, имеем

$$\int_T \bar{A}_1 A_2 = \begin{cases} |W|, & \text{если } A_1 = A_2, \\ -|W|, & \text{если } A_1 = -A_2, \\ 0, & \text{если } A_1 \neq \pm A_2, \end{cases}$$

так как любой вес является характером тора T. Далее, антисимметрический характер $\psi\delta$ можно записать в виде $\sum n_i A_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$ (см. 6.14). Следовательно, в силу теоремы 6.1 имеем

$$1=\int\limits_G \bar{\chi}\chi=\frac{1}{|W|}\int\limits_T \bar{\psi}\psi\bar{\delta}\delta=$$

$$=\frac{1}{|W|}\int\limits_T \left(\sum n_i \bar{A}_i\right)\left(\sum n_j A_j\right)=\sum n_i^2.$$

Значит, одно из чисел n_i равно ± 1, а остальные — нули. С помощью подходящего выбора веса h это число можно сделать равным $+1$, что и требовалось доказать.

6.17. Предложение. *Когда χ пробегает множество характеров различных неприводимых комплексных представлений группы G, соответствующие $A(h)$ все различны.*

Доказательство. Если A_1, A_2 отвечают характерам χ_1, χ_2, то

$$\frac{1}{|W|}\int\limits_T \bar{A}_1 A_2=\frac{1}{|W|}\int\limits_T \bar{\psi}_1\bar{\delta}\psi_2\delta=\int\limits_G \bar{\chi}_1\chi_2=$$

$$=\begin{cases}1, & \text{если } \chi_1=\chi_2,\\ 0, & \text{если } \chi_1\neq\chi_2,\end{cases}$$

что и требовалось доказать.

Дадим второе доказательство (в случае, когда Ad поднимается в $\mathrm{Spin}(n)$). Пусть $K(T)_W$ состоит из симметрических элементов кольца $K(T)$, т. е. из элементов, инвариантных относительно W, и пусть $K(T)_{-W}$ состоит из антисимметрических элементов. Рассмотрим следующую композицию:

$$K(G)\to K(T)_W\to K(T)_{-W}.$$

Первое отображение (ограничение) мономорфно в силу 4.31, а второе (умножение на δ) является изоморфизмом в силу 6.6.

6.18. Предложение. *Предположим, что* Ad *поднимается в* $\mathrm{Spin}(n)$. *Тогда каждая альтернирующая сумма $A(h)$ записывается в виде $\pm\psi\delta$ для некоторого неприводимого представления группы G.*

Доказательство. Для некоторого симметрического характера σ в $K(T)$ имеем $A(h)=\sigma\delta$ и для некоторой функции классов f на G имеем $\sigma=f\,|\,T$ (см. 4.32).

Далее, пусть χ — характер неприводимого комплексного представления группы G. Тогда, обозначая через $A(k)$ альтернирующую сумму, отвечающую характеру

χ, имеем

$$\int_G \bar{\chi} f = \frac{1}{|W|} \int_T \bar{\chi}\sigma\bar{\delta}\delta = \frac{1}{|W|} \int_T \bar{A}(k) A(h) = 0,$$

если $A(k) \neq \pm A(h)$ (см. доказательство предложения 6.16). Согласно теореме Петера — Вейля (см. 3.47), указанный интеграл не может обращаться в нуль для всех χ. Следовательно, $A(h) = \pm A(k)$ для характера χ некоторого неприводимого представления группы G.

Резюмируя, мы имеем следующее

6.19. Предложение. *Предположим, что* Ad: $G \to SO(n)$ *поднимается в* $\mathrm{Spin}(n)$. *Тогда имеет место взаимно однозначное соответствие между неприводимыми представлениями группы G и элементарными альтернирующими суммами в $K(T)$, заданное композицией*

$$K(G) \xrightarrow{\cong} K(T)_W \xrightarrow{\cong} K(T)_{-W}.$$

6.20. Теорема. *Если G компактна и связна (но без предположения о поднятии* Ad), *то отображение ограничения*

$$K(G) \to K(T)_W$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Согласно следствию 4.31, это отображение мономорфно.

Если Ad не поднимается в $\mathrm{Spin}(n)$, то мы имеем диаграмму из 5.56 (ii). Пусть ψ — симметрический элемент кольца $K(T)$. Тогда $\psi\pi \in K(\tilde{T})$ — симметрический элемент, поэтому $\psi\pi = \tilde{\chi} \mid \tilde{T}$ для некоторого виртуального характера $\tilde{\chi}$ группы $\tilde{G}$ (см. 6.19). Функция $\tilde{\chi} \mid \tilde{T}$ может быть пропущена через G, значит, функция $\tilde{\chi}$ также может быть пропущена через G (см. 4.32). Таким образом, согласно теореме 3.68, имеем $\tilde{\chi} = \chi\pi$ для некоторого виртуального характера χ группы G и $\chi \mid T = \psi$.

6.21. Замечание. Даже в случае, когда Ad не поднимается в $\mathrm{Spin}(n)$, можно определить антисимметрические элементы как такие элементы $\chi \in K(\tilde{T})$, что $\varphi\chi = (\mathrm{sign}\,\varphi)\,\chi$ и $\chi(xz) = -\chi(x)$ для $1 \neq z \in \mathrm{Ker}\,\pi$.

6.22. Обсуждение. Мы собираемся показать, что если $\pi_1(G) = 0$, то $K(G)$ есть алгебра многочленов. Традиционный подход состоит в том, чтобы каким-либо способом упорядочить множество весов. Когда мы хотим доказать равенство вида $P = Q +$ «низшие члены», погрешность должна быть «ниже» относительно любых упорядочений. Поэтому мы введем инвариантное частичное упорядочение, относительно которого равенство $P = Q +$ «низшие члены» будет иметь приблизительно такой смысл.

6.23. Определение. Пусть ω_1, ω_2 — веса в $L(T)^*$. Определим частичное упорядочение на множестве весов в $L(T)^*$, полагая $\omega_1 \leqslant \omega_2$, если ω_1 лежит в выпуклой оболочке орбиты веса ω_2 относительно W, т. е. $\omega_1 \leqslant \omega_2$, если $\omega_1 = \sum_{\varphi \in W} c_\varphi (\varphi \omega_2)$ для некоторых неотрицательных коэффициентов c_φ, удовлетворяющих условию $\sum c_\varphi = 1$.

Ясно, что условие $\omega_1 \leqslant \omega_2$ влечет за собой $\varphi_1\omega_1 \leqslant \varphi_2\omega_2$ для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in W$, т. е. мы упорядочиваем орбиты. Поэтому в дальнейшем достаточно рассматривать веса, лежащие в $\overline{\text{ДФКВ}}$.

6.24. Другое определение. Для весов ω_1, ω_2 из $\overline{\text{ДФКВ}}$ мы пишем $\omega_1 \leqslant \omega_2$, если $\omega_1(v) \leqslant \omega_2(v)$ для всех $v \in$ ФКВ. С тем же успехом можно брать все $v \in \overline{\text{ФКВ}}$.

6.25. Предложение. *Эти два определения эквивалентны.*

Нам нужна

6.26. Лемма. *Если $u \in \overline{\text{ДФКВ}}$, $v \in$ ФКВ и $\varphi \in W$, то $(\varphi u)(v) \leqslant u(v)$, причем равенство имеет место только в случае, если $\varphi u = u$.*

Доказательство. Если $\varphi u = u$, то $(\varphi u)(v) = u(v)$.

Предположим, что $\varphi u \neq u$ и $(\varphi u)(v) \geqslant u(v)$. Тогда, сдвинув немного вектор v в ФКВ, получим $(\varphi u)(v) > u(v)$.

Среди конечного множества элементов ψu, где ψ пробегает W, найдется один, скажем ω, такой, что число (ω, v) максимально, и, следовательно, $\omega \neq u$. Тогда $\omega \notin \overline{\text{ДФКВ}}$ (см. 5.16), поэтому найдется такой простой корень θ_r, что $\langle \theta_r, \omega \rangle < 0$. Рассмотрим вес $\varphi_r\omega$. Имеем

$$(\varphi_r\omega)(v) = \left(\omega - \frac{2\langle \theta_r, \omega \rangle}{\langle \theta_r, \theta_r \rangle}\theta_r\right)(v) =$$

$$= \omega(v) - \frac{2\langle \theta_r, \omega \rangle}{\langle \theta_r, \theta_r \rangle}\theta_r(v) > \omega(v),$$

что противоречит определению веса ω. Тем самым лемма доказана.

Неравенство $(\varphi u)(v) \leqslant u(v)$ остается справедливым для всех $v \in \overline{\text{ФКВ}}$ в силу непрерывности.

Доказательство предложения 6.25.

(i) Если выполняется условие первого определения, то $\omega_1 = \sum c_\varphi (\varphi\omega_2)$, где $0 \leqslant c_\varphi$, $\sum c_\varphi = 1$. Предположим, что $\omega_2 \in \overline{\text{ДФКВ}}$. Тогда, учитывая лемму 6.26, для всех $v \in \text{ФКВ}$ имеем

$$\omega_1(v) = \sum c_\varphi (\varphi\omega_2)(v) \leqslant \sum c_\varphi \omega_2(v) = \varphi_2(v).$$

Значит, выполняется и условие второго определения.

(ii) Обратно, предположим, что ω_1 не лежит в выпуклой оболочке орбиты веса ω_2 и что $\omega_1 \in \overline{\text{ДФКВ}}$. Тогда найдется такой вектор $\eta \in L(T)$, что $\omega_1(\eta) > (\varphi\omega_2)(\eta)$ для всех $\varphi \in W$. Запишем его в виде $\eta = \psi(v)$, где $\psi \in W$ и $v \in \overline{\text{ФКВ}}$. Тогда в силу 6.26 имеем

$$\omega_1(v) \geqslant \omega_1(\eta) > (\psi\omega_2)(\eta) = \omega_2(\psi^{-1}\eta) = \omega_2(v),$$

так что условие второго определения также не выполняется.

6.27. Свойства введенного упорядочения.

(i) *Транзитивность*: $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \omega_3$ *влечет за собой* $\omega_1 \leqslant \omega_3$; *это очевидно.*

(ii) *При фиксированном* ω_2 *число весов* ω_1, *таких, что* $\omega_1 \leqslant \omega_2$, *конечно.* Это ясно из первого определения.

(Заметим, что это упорядочение предпочтительнее традиционного, позволяющего проводить доказательство при помощи индукции по упорядочению только для полупростых групп Ли *). Например, группа $\mathrm{U}(n)$ не полупроста.)

(iii) *Неравенства* $\omega_1 \leqslant \omega_2$ *и* $\omega_2 \leqslant \omega_1$ *одновременно справедливы тогда и только тогда, когда* $\omega_1 = \varphi\omega_2$ *для некоторого* $\varphi \in W$. Для доказательства достаточно рассмотреть веса $\omega_1, \omega_2 \in \overline{\text{ДФКВ}}$. Если бы $\omega_1 \neq \omega_2$, то в любом открытом подмножестве пространства $L(T)$ нашелся бы вектор v, удовлетворяющий условию $\omega_1(v) \neq \omega_2(v)$, которое противоречит второму определению.

---

*) Связная компактная группа Ли называется полупростой, если ее центр дискретен и, следовательно, конечен. — *Прим. ред.*

6.28. Определение. Если $\omega_1 \leqslant \omega_2$, но отношение $\omega_2 \leqslant \omega_1$ не имеет места, то мы пишем $\omega_1 < \omega_2$. В этом случае мы говорим, что ω_1 *ниже*, чем ω_2.

6.29. Упражнение. Условие $u \leqslant v < w$ влечет за собой $u < w$, и условие $u < v \leqslant w$ влечет за собой $u < w$.

Продолжение пункта 6.27.

(iv) *Если* $u, v, w \in \overline{ДФКВ}$, *то* $u + w \leqslant v + w$ *тогда и только тогда, когда* $u \leqslant v$.

(v) *Если* $t, u, v, w \in \overline{ДФКВ}$ *и* $t \leqslant u$, $v \leqslant w$, *то* $t + v \leqslant u + w$, *причем равенство возможно только при* $t = u$, $v = w$.

Пусть $\beta = {}^1/_2 (\theta_1 + \ldots + \theta_m)$, и пусть ω — вес, лежащий в $\overline{ДФКВ}$.

6.30. Предложение. *Если* Ad *поднимается в* Spin (n), *то*

$$S(\omega)\,\delta = A(\omega + \beta) + \text{«низшие члены»},$$

т. е.

$$S(\omega)\,\delta = A(\omega + \beta) + \sum n_i A(\omega_i),$$

где $\omega_i < \omega + \beta$.

Доказательство. (См. 6.6.) Имеем

$$S(\omega) = \sum \exp(2\pi i \omega_j),$$

где ω_j пробегает множество различных весов вида $\varphi\omega$;

$$\delta = \sum \pm \exp(2\pi i u_k),$$

где

$$u_k = {}^1/_2 (\pm \theta_1 \pm \ldots \pm \theta_m).$$

Следовательно,

$$S(\omega)\,\delta = \sum \pm \exp 2\pi i (\omega_j + u_k) = \sum A(\omega_i),$$

где ω_i пробегает множество тех весов $\omega_j + u_k$, которые лежат в $\overline{ДФКВ}$.

Если теперь $x \in ФКВ$, то $\omega_j(x) = (\varphi\omega)(x) \leqslant \omega(x)$, причем равенство возможно только при $\varphi\omega = \omega$ (см. 6.26), и $u_k(x) \leqslant \beta(x)$, причем равенство возможно только при $u_k = \beta$. Таким образом, если $\omega_j + u_k \in \overline{ДФКВ}$, то $\omega_j + u_k \leqslant \omega + \beta$, причем равенство возможно только для члена с $\omega_j = \omega$, $u_k = \beta$, который встречается с коэффициентом $+1$.

6.31. Предложение. *Если* Ad *поднимается в* Spin (n), *то*

$$\frac{A(\omega+\beta)}{\delta} = S(\omega) + \text{«низшие члены»}.$$

Доказательство. По индукции. Предположим, что наше утверждение справедливо при всех $\omega' < \omega$. Тогда, согласно предложению 6.30,

$$S(\omega)\,\delta = A(\omega+\beta) + \sum n_i A(\omega_i+\beta),$$

где $\omega_i < \omega$, и

$$\frac{A(\omega_i+\beta)}{\delta} = \sum m_{ij} S(\omega_j),$$

где $\omega_j \leqslant \omega_i$. Следовательно,

$$\frac{A(\omega+\beta)}{\delta} = S(\omega) - \sum_{i,\,j} n_i m_{ij} S(\omega_j),$$

где $\omega_j < \omega$.

6.32. Пример. Если $\omega = 0$, то мы имеем $\frac{A(\beta)}{\delta} = S(0) = 1$, т. е. $A(\beta) = \delta$.

6.33. Теорема. *Существует взаимно однозначное соответствие между неприводимыми комплексными представлениями группы G и весами ω, лежащими в* $\overline{\text{ДФКВ}}$, *причем характер χ представления, соответствующего весу ω, удовлетворяет условию $\chi \mid T = S(\omega) +$ «низшие члены».*

Доказательство. (i) Если Ad поднимается в Spin (n), то формула $(\chi \mid T)\,\delta = A(\omega+\beta)$ задает требуемое соответствие (см. 6.19 и 5.58). Имеем

$$\chi \mid T = \frac{A(\omega+\beta)}{\delta} = S(\omega) + \text{«низшие члены»}$$

(см. 6.31).

(ii) Если Ad не поднимается в Spin (n), то определим накрытие $\pi\colon \tilde{G} \to G$, как это было сделано выше (см. 5.56 (ii)). Для $\tilde{G}$ имеет место случай (i).

Для G справедливо равенство $\chi \mid T = \sum n_i S(\omega_i)$, где ω_i пробегает веса группы G (см. 6.9). Значит, $\chi\pi \mid \tilde{T} = \sum n_i S(\omega_i)$, где ω_i рассматриваются как веса группы $\tilde{G}$. Если характер χ неприводим, то и $\chi\pi$ неприводим, поэтому $\chi\pi \mid \tilde{T} = S(\omega) +$ «низшие члены». Следовательно, в силу единственности такого выражения имеем $\chi \mid T =$

$= S(\omega) +$ «низшие члены». Тем самым задано требуемое соответствие и показано, что оно инъективно.

Теперь пусть ω — вес группы G, лежащий в $\overline{\text{ДФКВ}}$, и пусть $\tilde{\chi}$ — такой характер группы $\tilde{G}$, что $\tilde{\chi} \mid \tilde{T} = \frac{A(\omega+\beta)}{\delta}$. Тогда функция $\tilde{\chi} \mid \tilde{T}$ пропускается через T, поэтому $\tilde{\chi}$ пропускается через G и как функция, и как характер (см. 3.68). Поскольку характер $\tilde{\chi}$ неприводим, таким же является и χ.

6.34. Определение. Из доказанного выше следует, что с каждым неприводимым представлением группы G ассоциирован *максимальный вес*, который встречается с кратностью 1.

6.35. Пример. Пусть $G = \mathrm{SU}(n)$.

Для $\omega = x_1$ имеем

$$\omega + \beta = nx_1 + (n-2)x_2 + \ldots + x_{n-1}.$$

Тогда

$$\frac{A(\omega+\beta)}{\delta} = \frac{A(\omega+\beta)}{A(\beta)} = \frac{\begin{vmatrix} \xi_1^n & \xi_1^{n-2} & \ldots & \xi_1 & 1 \\ \xi_2^n & \xi_2^{n-2} & \ldots & \xi_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi_1^{n-1} & \xi_1^{n-2} & \ldots & \xi_1 & 1 \\ \xi_2^{n-1} & \xi_2^{n-2} & \ldots & \xi_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}} = \\ = \xi_1 + \ldots + \xi_n.$$

Для $\omega = 2x_1$ получим

$$\sum \xi_i^2 + \sum_{i<j} \xi_i \xi_j.$$

6.36. Предложение. *Пусть u, v — веса, лежащие в $\overline{\text{ДФКВ}}$. Тогда*

$$S(u)\,S(v) = S(u+v) + \text{«низшие члены»}.$$

Доказательство. Пусть

$$S(u) = \sum \exp 2\pi i u_j, \quad S(v) = \sum \exp 2\pi i v_k,$$

где u_j, v_k пробегают различные веса вида φu, φv для $\varphi \in W$. Тогда

$$S(u)\,S(v) = \sum \exp 2\pi i (u_j + v_k).$$

Если $x \in \text{ФКВ}$, то в силу леммы 6.26 $(\varphi u)(x) \leqslant u(x)$ и $(\varphi v)(x) \leqslant v(x)$, причем равенства имеют место только при $\varphi u = u$ и $\varphi v = v$ соответственно. Это значит, что

$$(u_j + v_k)(x) \leqslant (u + v)(x),$$

причем равенство возможно только для единственного члена с $u_j = u$, $v_k = v$. Итак, если $u_j + v_k \in \overline{\text{ДФКВ}}$, то $u_j + v_k < u + v$, исключая единственный случай $u_j = u$, $v_k = v$. Это и дает требуемый результат.

6.37. Примеры. Пусть $G = \mathrm{SU}(n)$ (см. 6.8). Имеем

$$\left(\sum \xi_i\right)\left(\sum \xi_j\right) = \sum \xi_i^2 + 2 \sum_{i<j} \xi_i \xi_j =$$
$$= \sum \xi_i^2 + \text{«низшие члены»},$$
$$\left(\sum \xi_i\right)\left(\sum_{j<k} \xi_j \xi_k\right) = \sum_{i \neq j} \xi_i^2 \xi_j + 3 \sum_{i<j<k} \xi_i \xi_j \xi_k =$$
$$= \sum_{i \neq j} \xi_i^2 \xi_j + \text{«низшие члены»}.$$

Пусть $G = \mathrm{SO}(2n+1)$. Имеем

$$\left(\sum \xi_i + \sum \xi_i^{-1}\right)\left(\sum \xi_j + \sum \xi_j^{-1}\right) =$$
$$= \left(\sum \xi_i^2 + \sum \xi_i^{-2}\right) + 2\left(\sum_{i<j} \xi_i \xi_j + \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j^{-1} + \sum_{i<j} \xi_i^{-1} \xi_j^{-1}\right) +$$
$$+ 2n = \left(\sum \xi_i^2 + \sum \xi_i^{-2}\right) + \text{«низшие члены»}.$$

6.38. Обсуждение. Предположим, что $\pi_1(G) = 0$. Мы знаем, что веса, лежащие в $\overline{\text{ДФКВ}}$, образуют свободную абелеву полугруппу, порожденную весами $\omega_1, \ldots, \omega_k$ (см. 5.62). Значит, существуют такие представления $\rho_1, \ldots, \rho_k$ группы G, что

$$\chi(\rho_r) \mid T = S(\omega_r) + \text{«низшие члены»}.$$

Используя 6.3 и применяя индукцию, получим

$$\chi\left(\rho_1^{n_1} \ldots \rho_k^{n_k}\right) \Big| T = S(n_1\omega_1 + \ldots + n_k\omega_k) + \text{«низшие члены»}$$

6.39. Предложение. *Если* $\pi_1(G) = 0$, *то естественное отображение*

$$\mathbb{Z}[\rho_1, \ldots, \rho_k] \to K(G)$$

является мономорфизмом.

Доказательство. Пусть

$$a_1 m_1 + \ldots + a_r m_r = 0$$

— линейная комбинация различных одночленов от ρ_i, где $0 \neq a_i \in \mathbb{Z}$. Поскольку эти одночлены взаимно однозначно соответствуют весам, лежащим в $\overline{\text{ДФКВ}}$, мы можем их упорядочить, воспользовавшись упорядочением весов. Если рассматриваемая линейная комбинация не пустая, то она содержит такой одночлен m_i, что ни один m_j не удовлетворяет условию $m_j > m_i$. Пусть ω — вес, отвечающий одночлену m_i. Тогда в линейной комбинации

$$\chi(a_1 m_1 + \ldots + a_r m_r) \mid T$$

единственный член, содержащий $S(\omega)$, равен $a_i S(\omega)$. Значит, $a_i = 0$, что противоречит сделанному предположению.

6.40. Предложение.

$$S(n_1\omega_1 + \ldots + n_k\omega_k) = \chi\left(\rho_1^{n_1} \ldots \rho_k^{n_k} + \text{«низшие члены»}\right) \Big| T.$$

Доказательство. Рассуждаем по индукции Запишем

$$\omega = n_1\omega_1 + \ldots + n_k\omega_k$$

и предположим, что этот результат справедлив для всех $\omega' < \omega$. Имеем

$$\chi\left(\rho_1^{n_1} \ldots \rho_k^{n_k}\right) \Big| T = S(\omega) + \sum m_i S(\omega_i),$$

где $\omega_i < \omega$. По индуктивному предположению

$$S(\omega_i) = \chi(\text{«низшие одночлены»}) \mid T.$$

Следовательно,

$$S(\omega) = \chi\left(\rho_1^{n_1} \ldots \rho_k^{n_k} + \text{«низшие одночлены»}\right) \Big| T.$$

6.41. Теорема. *Пусть G — компактная связная односвязная группа Ли. Тогда*

$$K(G) \cong \mathbb{Z}[\rho_1, \ldots, \rho_k].$$

Доказательство. В силу предложения 6.39 естественное отображение

$$\mathbb{Z}[\rho_1, \ldots, \rho_k] \to K(G)$$

мономорфно. Согласно предложению 6.40, следующая композиция

$$\mathbb{Z}[\rho_1, \ldots, \rho_k] \to K(G) \xrightarrow{\cong} K(T)_W$$

эпиморфна. Следовательно, указанное отображение является изоморфизмом.

Глава 7

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ

В этой главе мы вычислим кольца комплексных представлений классических компактных групп Ли. Мы выясним также, имеет ли каждая из этих групп вещественные или кватернионные неприводимые представления. Для этого рассмотрим следующие отображения:

$$K(G) \xrightarrow{1+t} K(G) \xrightarrow{1-t} K(G).$$

Положим $H = \mathrm{Ker}\,(1-t)/\mathrm{Im}\,(1+t)$.

7.1. Предложение. *Кольцо H является алгеброй над $\mathbb{Z}_2$, самосопряженные неприводимые представления группы G определяют $\mathbb{Z}_2$-базис алгебры H.*

Доказательство непосредственно следует из результатов главы 3. Поэтому вычисление алгебры H дает нам возможность решить вопрос о наличии самосопряженных неприводимых представлений.

Мы также будем пользоваться следующей леммой.

7.2. Лемма. *Для любого комплексного представления V представление $V^* \otimes V \cong \mathrm{Hom}\,(V, V)$ вещественно.*

Доказательство. В рассматриваемом пространстве определена билинейная форма

$$\mathrm{Tr}\,(\alpha\beta) = \mathrm{Tr}\,(\beta\alpha)$$

(см. 3.38); эта форма симметрична, невырождена и инвариантна. Остается воспользоваться теоремой 3.50.

Приступим теперь к изучению представлений групп $\mathrm{U}(n)$ и $\mathrm{SU}(n)$. Каждая из них имеет очевидное представление в пространстве $V = \mathbb{C}^n$; обозначим через λ^1, $\lambda^2, \ldots, \lambda^n$ внешние степени этого представления. Будем писать

$$z_j = \exp(2\pi i x_j),$$

так что произвольный элемент D нашего максимального тора примет вид

$$D = \begin{Vmatrix} z_1 & & & \\ & z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & z_n \end{Vmatrix}.$$

Тогда характером $\chi(\lambda^k)$ представления λ^k служит k-я элементарная симметрическая функция от $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (см. доказательство леммы 3.61). Группа Вейля действует подстановками множества $z_1, \ldots, z_n$. Таким образом, характер $\chi(\lambda^k)$ совпадает с элементарной симметрической суммой

$$S(x_1 + \ldots + x_k).$$

Поскольку $\chi(\lambda^k)$ состоит из единственной элементарной симметрической суммы, представление λ^k неприводимо. Представление λ^n группы $U(n)$ одномерно и по существу совпадает с $\det\colon U(n) \to S^1$. В частности, оно обратимо. Ограничение λ^n на $SU(n)$ тривиально.

7.3. Теорема. *Кольцо комплексных представлений $K(U(n))$ есть тензорное произведение кольца многочленов от $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}$ и кольца конечных рядов Лорана от λ^n. Алгебра H есть алгебра многочленов с образующими $\lambda^i\lambda^{n-i}/\lambda^n$, где $2 \leqslant 2i \leqslant n$. Эти образующие вещественны.*

Здесь, конечно, не утверждается, что модули $\lambda^i\lambda^{n-i}/\lambda^n$ неприводимы; в действительности это не так.

Доказательство теоремы 7.3. Согласно классической теореме, кольцо симметрических многочленов от $z_1, z_2, \ldots, z_n$ является кольцом многочленов, порожденным элементарными симметрическими функциями $\chi(\lambda^1), \ldots, \chi(\lambda^n)$. Возьмем теперь любой конечный ряд Лорана, который симметричен. Умножая его на достаточно большую степень одночлена $z_1z_2 \ldots z_n$, получим симметрический многочлен. Отсюда следует, что кольцо $K(T)_W$ имеет строение, описанное в условии теоремы. Соответствующий результат для кольца $K(U(n))$ вытекает из теоремы 6.20.

Так как мы имеем очевидное спаривание

$$\lambda^i \otimes \lambda^{n-i} \to \lambda^n,$$

то представление, дуальное к λ^i, есть λ^{n-i}/λ^n. (Это также следует из несложного вычисления с характерами.) Следовательно, представление, сопряженное к представлению

$$(\lambda^1)^{\nu_1}(\lambda^2)^{\nu_2}\ldots(\lambda^n)^{\nu_n},$$

есть

$$(\lambda^1)^{\nu_{n-1}}(\lambda^2)^{\nu_{n-2}}\ldots(\lambda^{n-1})^{\nu_1}(\lambda^n)^{-\nu_1-\nu_2-\ldots-\nu_n}.$$

Значит, t переставляет одночлены от $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$. Как нетрудно видеть, единственными многочленами, неподвижными относительно t, являются многочлены от

$$\lambda^i\lambda^{n-i}/\lambda^n \qquad (1 \leqslant i \leqslant n/2).$$

Они вещественны в силу леммы 7.2, поскольку

$$\mathrm{Hom}(\lambda^i, \lambda^i) \cong \lambda^i\lambda^{n-i}/\lambda^n.$$

7.4. Теорема. *Кольцо комплексных представлений $K(\mathrm{SU}(n))$ есть кольцо многочленов, порожденное представлениями $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}$. Алгебра H есть алгебра многочленов с образующими $\lambda^i\lambda^{n-i}$, где $2 \leqslant 2i < n$, и образующим λ^m, если $n = 2m$. Образующие $\lambda^i\lambda^{n-i}$ вещественны; образующий λ^m вещественен при четном m и кватернионен при нечетном m.*

Доказательство. Утверждение о $K(\mathrm{SU}(n))$ является частным случаем теоремы 6.41, отождествление базисных весов $\omega_1, \ldots, \omega_k$, упомянутых в разделе 6.38, указано в примере 5.63.

Как и выше, представлением, дуальным к λ^i, является λ^{n-i}. Следовательно, представление, сопряженное к

$$(\lambda^1)^{\nu_1}(\lambda^2)^{\nu_2}\ldots(\lambda^{n-1})^{\nu_{n-1}},$$

есть

$$(\lambda^1)^{\nu_{n-1}}(\lambda^2)^{\nu_{n-2}}\ldots(\lambda^{n-1})^{\nu_1}.$$

Значит, t переставляет одночлены от $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}$, и, как нетрудно видеть, многочленами, неподвижными относительно t, являются многочлены от $\lambda^i\lambda^{n-i}$ $(1 \leqslant i < n/2)$ и λ^m, если $n = 2m$. В силу 7.2 представление $\lambda^i\lambda^{n-i}$ вещественно. Что касается λ^m, то спаривание

$$\lambda^m \otimes \lambda^m \to \lambda^{2m} = \mathbb{C}$$

удовлетворяет условию

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^m \alpha \wedge \beta.$$

Теперь используем теорему 3.50.

7.5. Упражнение. Показать непосредственно, что всякое представление V группы $\mathrm{SU}(n)$ продолжается на $\mathrm{U}(n)$. (Указание: достаточно рассмотреть неприводимые представления; рассмотрите действие центра группы $\mathrm{SU}(n)$.)

Возьмем теперь группу $\mathrm{Sp}(n)$. Она обладает очевидным представлением в пространстве $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{C}^{2n}$; через $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^{2n}$ мы обозначаем внешние степени этого представления. Как мы видели в главе 3, представление λ^k вещественно при четном k и кватернионно при нечетном k. Если в T взять элемент

$$D = \begin{Vmatrix} z_1 & & & \\ & z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & z_n \end{Vmatrix},$$

то его действие в $\mathbb{C}^{2n}$ задается матрицей

$$\begin{Vmatrix} z_1 & & & & & & \\ & \bar{z}_1 & & & & & \\ & & z_2 & & & & \\ & & & \bar{z}_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & z_n & \\ & & & & & & \bar{z}_n \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, характером $\chi(\lambda^i)$ представления λ^i является i-я элементарная симметрическая функция от

$$z_1, z_1^{-1}, z_2, z_2^{-1}, \ldots, z_n, z_n^{-1}.$$

7.6. Теорема. *Кольцо $K(\mathrm{Sp}(n))$ есть алгебра многочленов с образующими $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$. Все неприводимые представления группы $\mathrm{Sp}(n)$ являются самосопряженными.*

Доказательство. (i) Достаточно легко проверить, что кольцо $K(T)_W$ имеет строение, описанное в теореме; затем используем теорему 6.20. С другой стороны, можно воспользоваться теоремой 6.41.

(ii) Из самосопряженности образующих следует, что все элементы кольца $K(\mathrm{Sp}(n))$ являются самосопряженными. Другое доказательство основано на том, что в $\mathrm{Sp}(n)$ каждый элемент g сопряжен элементу g^{-1} (см. 5.17).

Возьмем теперь группу $\mathrm{SO}(n)$. Она обладает очевидным представлением в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$; через $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$

обозначаем внешние степени этого представления. Эти представления вещественны. Если в $\mathrm{U}(n)$ взять элемент

$$D = \begin{Vmatrix} z_1 & & & \\ & z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & z_n \end{Vmatrix}$$

и вложить его в $\mathrm{SO}(2n)$, то действие этого элемента в $\mathbb{C}^{2n}$ эквивалентно действию диагональной матрицы

$$\begin{Vmatrix} z_1 & & & & & & \\ & \bar{z}_1 & & & & & \\ & & z_2 & & & & \\ & & & \bar{z}_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & z_n & \\ & & & & & & \bar{z}_n \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, характером $\chi(\lambda^i)$ представления λ^i является i-я элементарная симметрическая функция от

$$z_1,\ z_1^{-1},\ z_2,\ z_2^{-1},\ \ldots,\ z_n,\ z_n^{-1},$$

скажем σ_i. Аналогично, если вложить D в $\mathrm{SO}(2n+1)$, то действие этого элемента в $\mathbb{C}^{2n+1}$ эквивалентно действию диагональной матрицы

$$\begin{Vmatrix} z_1 & & & & & \\ & \bar{z}_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & z_n & & \\ & & & & \bar{z}_n & \\ & & & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Значит, мы имеем

$$\chi(\lambda^i) = \sigma_i + \sigma_{i-1}.$$

(Здесь под σ_0 следует понимать 1.)

7.7. Т о р е м а. *Кольцо $K(\mathrm{SO}(2n+1))$ есть алгебра многочленов с образующими $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$. Все неприводимые представления группы $\mathrm{SO}(2n+1)$ вещественны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Кольцо $K(T)_W$ в точности совпадает с соответствующим кольцом $\mathrm{Sp}(n)$.

(ii) Из вещественности образующих следует, что все элементы кольца $K(SO(2n+1))$ вещественны.

До сих пор внешние степени λ^i давали нам все образующие, какие были нужны. Нетрудно привести аргументы, показывающие, что для группы $SO(2n)$ нужно кое-что еще.

(i) В $SO(4n+2)$ не всякий элемент g сопряжен элементу g^{-1}. Значит, можно построить такую функцию классов f, что $f(g) \neq f(g^{-1})$. Значит, в силу теоремы 3.47 группа $SO(4n+2)$ обладает хотя бы одним несамосопряженным представлением. Но все представления λ^i вещественны.

(ii) Рассмотрим представление λ^n группы $SU(2n)$. Мы уже видели, что оно самосопряженно. Поэтому ограничение этого представления на подгруппу $SO(2n)$ является самосопряженным по двум существенно различным причинам: во-первых, потому, что λ^n является самосопряженным на $SU(2n)$, и, во-вторых, потому, что каждая внешняя степень λ^i вещественна на $SO(2n)$. Но мы уже видели, что неприводимое представление V может иметь по существу только один изоморфизм с дуальным представлением V^*. Следовательно, представление λ^n группы $SO(2n)$ приводимо.

Если n нечетно, то достаточно одного этого соображения: представление λ^i группы $SO(2n)$ одновременно является и кватернионным и вещественным, так что оно не может быть неприводимым. Если n четно, то выражение «по существу» нужно несколько уточнить, что и будет сделано ниже.

(iii) Другое соображение появляется при рассмотрении представления λ^n группы $O(2n)$. Возьмем такой элемент $g \in O(2n)$, что $\det g = -1$. Нетрудно видеть, что действие этого элемента в пространстве $\mathbb{C}^{2n}$ эквивалентно действию диагональной матрицы

$$\left\| \begin{matrix} z_1 & & & & & & \\ & \bar{z}_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & z_{n-1} & & & \\ & & & & \overline{z_{n-1}} & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & -1 \end{matrix} \right\| .$$

Теперь легко проверить, что ограничение характера $\chi=\chi(\lambda^n)$ на компоненту группы $O(2n)$, состоящую из элементов с определителем -1, равно нулю. Пусть ν — среднее значение функции $\bar{\chi}\chi$ на $SO(2n)$. Тогда среднее значение функции $\bar{\chi}\chi$ на $O(2n)$ есть $^1/_2\nu$. Значит, $^1/_2\nu \geqslant 1$ (см. 3.34) и $\nu \geqslant 2$, т. е. представление λ^n должно расщепляться на $SO(2n)$ хотя бы на две компоненты.

Теперь разовьем соображение (ii). Определим невырожденное спаривание

$$F\colon \lambda^n(\mathbb{R}^{2n}) \otimes \lambda^n(\mathbb{R}^{2n}) \to \lambda^{2n}(\mathbb{R}^{2n}) = \mathbb{R}$$

по формуле $F(v, w) = v \wedge w$. Тогда F инвариантно относительно $SO(2n)$. В самом деле, для любого $g \in O(2n)$ имеем

$$F(gv, gw) = (\det g)\, F(v, w).$$

Определим теперь другое невырожденное спаривание

$$S\colon \lambda^n(\mathbb{R}^{2n}) \otimes \lambda^n(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathbb{R}$$

по формуле

$$S((v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_n) \otimes (w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_n)) = \\ = \sum_{\rho} \varepsilon(\rho)\, (v'_{\rho(1)} w_1) \ldots (v'_{\rho(n)} w_n).$$

Здесь ρ пробегает все подстановки, а $v'w$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда S инвариантно относительно $O(2n)$. Определим автоморфизм β пространства $\lambda^n(\mathbb{R}^{2n})$, положив

$$S(\beta v, w) = F(v, w).$$

Легко проверить, что для любого $g \in O(2n)$ имеет место равенство

$$\beta g v = (\det g)\, \beta v.$$

Автоморфизм β можно описать следующим образом. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$ — любой ортонормальный базис в $\mathbb{R}^{2n}$ с определителем $+1$, тогда

$$\beta(v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_n) = v_{n+1} \wedge v_{n+2} \wedge \ldots \wedge v_{2n}.$$

Таким образом, $\beta^2 = (-1)^n$.

Отсюда следует, что пространство $\lambda^n(\mathbb{R}^{2n})$ расщепляется на собственные подпространства автоморфизма β, отвечающие собственным значениям ± 1, если n четно, и $\pm i$, если n нечетно. Конечно, последнее разложение имеет место над полем $\mathbb{C}$. Элементы группы $SO(2n)$ сохраняют эти два собственных подпространства, а элементы группы $O(2n)$ с определителем -1 меняют их местами. В частности, ни одно из этих собственных подпространств не может быть нулевым.

Изучим теперь характеры указанных компонент (скажем, V и W) представления λ^n. Характер $\chi(\lambda^n)$ представления λ^n есть n-я элементарная симметрическая функция от

$$z_1,\ z_1^{-1},\ z_2,\ z_2^{-1},\ \ldots,\ z_n,\ z_n^{-1}.$$

Введем обозначения

$$\alpha_+ = \sum z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \ldots z_n^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_r = \pm 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n = 1;$$

$$\alpha_- = \sum z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \ldots z_n^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_r = \pm 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n = -1.$$

Это элементарные симметрические суммы (см. 5.17 (v)). Имеем

$$\chi(\lambda^n) = \alpha_+ + \alpha_- + \text{«низшие члены»}.$$

Поскольку характеры представлений являются линейными комбинациями элементарных симметрических сумм с неотрицательными коэффициентами, мы имеем

$$\chi(V) = a\alpha_+ + b\alpha_- + \sigma,$$

где a и b равны 0 или 1, а σ — сумма низших членов. Рассмотрим теперь автоморфизм θ группы $SO(2n)$, являющийся сопряжением посредством некоторого элемента $g \in O(n)$ с определителем -1, например,

$$g = \begin{Vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{Vmatrix}.$$

Действие этого автоморфизма на T сводится к замене z_n на z_n^{-1}, таким образом, $\theta\alpha_+ = \alpha_-$, $\theta\alpha_- = \alpha_+$ и $\theta\sigma = \sigma$. Значит,

$$\chi(W) = b\alpha_+ + a\alpha_- + \sigma,$$
$$\chi(\lambda^n) = (a+b)(a_+ + a_-) + 2\sigma$$

и $a + b = 1$. Отсюда следует, что компоненты представления λ^n можно переименовать так, чтобы

$$\chi(\lambda_+^n) = \alpha_+ + \sigma, \quad \chi(\lambda_-^n) = \alpha_- + \sigma.$$

7.8. Следствие. *Автоморфизм* θ *группы* $SO(2n)$ *не является внутренним.*

Доказательство. Внутренний автоморфизм переводит любое представление в эквивалентное.

7.9. Теорема. *Кольцо* $K(SO(2n))$ *есть свободный модуль с двумя образующими* 1 *и* λ_+^n *(или, что равносильно,* 1 *и* λ_-^n*) над кольцом многочленов* $\mathbb{Z}[\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n]$. *Если* n *четно, то все неприводимые представления группы* $SO(2n)$ *вещественны. Если* n *нечетно, то*

$$H = \mathbb{Z}_2[\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}].$$

Доказательство. Мы должны изучить кольцо $K(T)_W$, т. е. множество конечных рядов Лорана от z_1, $z_2, \ldots, z_n$, которые симметричны относительно подстановок и обращений четного числа переменных z_r. Множество S таких симметрических элементов допускает автоморфизм θ: обращение нечетного числа переменных z_r. (Конечно, θ имеет описанное выше происхождение.) Имеем $\theta^2 = 1$. Поэтому над полем рациональных чисел S расщепляется в сумму собственных подпространств автоморфизма θ с собственными значениями $+1$ и -1:

$$S = {}^1/_2(1+\theta)S + {}^1/_2(1-\theta)S.$$

Собственное подпространство, отвечающее собственному значению $+1$, есть кольцо многочленов от

$$\chi(\lambda^1), \ \chi(\lambda^2), \ \ldots, \ \chi(\lambda^n)$$

(как и в 7.6, 7.7). Пусть дан элемент a собственного подпространства, отвечающего собственному значению -1. Тогда

$$a = \sum_r c_r(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) z_n^r,$$

где

$$c_r = -c_{-r},$$

так что

$$a = \sum_{r=1}^{n} c_r(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})(z_n^r - z_n^{-r}).$$

Значит,

$$a = a'(z_n - z_n^{-1}).$$

В силу симметрии a делится на остальные разности $(z_r - z_r^{-1})$. Следовательно,

$$a = a'' (z_1 - z_1^{-1}) (z_2 - z_2^{-1}) \ldots (z_n - z_n^{-1}).$$

Здесь a'' должен быть элементом подпространства с собственным значением $+1$. Поэтому мы имеем

$$a = p (\alpha_+ - \alpha_-),$$

где p — многочлен от $\chi(\lambda^1), \ldots, \chi(\lambda^n)$. Для произвольного $s \in S$ имеем

$$s = {}^1/_2 (1 + \theta) s + {}^1/_2 p (\alpha_+ - \alpha_-).$$

Поскольку $\alpha_+ + \alpha_-$ лежит в подпространстве с собственным значением $+1$, это равенство можно записать в виде

$$s = q + p\alpha_+,$$

где q лежит в подпространстве с собственным значением $+1$ и имеет целые коэффициенты (так как этим свойством обладают s и $p\alpha_+$).

Следовательно, кольцо $K(T)_W$ имеет строение, указанное в условии теоремы, а утверждение относительно $K(\mathrm{SO}(2n))$ вытекает из теоремы 6.20.

Если n четно, то все образующие кольца $K(\mathrm{SO}(2n))$ вещественны. Если же n нечетно, то $t(\lambda_+^n) = \lambda_-^n$, и кольцо H легко вычисляется. На этом доказательство теоремы закончено.

Ввиду недостатка времени я ничего не говорил о теории представлений группы $\mathrm{Spin}(n)$. Конечно, она содержится как частный случай в теореме 6.41, но некоторые читатели предпочли бы увидеть более непосредственно, как появляются базисные представления. Таким читателям я рекомендую изучить алгебры Клиффорда по работе [1] и представления алгебр Клиффорда по статье [7]. В последней статье Экманн в действительности изучает представления некоторой конечной группы G, но алгебра Клиффорда является очевидным факторкольцом группового кольца $R(G)$, и, следовательно, представления алгебры Клиффорда легко вывести из представлений группы G.

ЛИТЕРАТУРА

1. Atiyah M. F., Bott R. and Shapiro A. Clifford modules. — Topology, 1964, **3**, Supplement 1, p. 3—38.
2. Блисс Дж. А. Лекции по вариационному исчислению. — М.: ИЛ, 1950.
3. Borel A. and Hirzebruch F. Characteristic classes and homogeneous spaces. I. — Amer. J. Math., 1958, **80**, p. 458—538.
4. Ботт Р. Лекции по K-теории. — В сб. Математика, 1967, **11**, № 2, с. 32—56; **11**, № 3; с. 3—36.
5. Коддингтон Э. и Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1959.
6. Dold A. Fixed point index and fixed point theorem for Euclidean neighbourhood retracts. — Topology, 1965, **4**, p. 1—8.
7. Eckmann B. Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz—Radon über die Komposition quadratischer Formen. — Comment. Math. Helv., 1942, **15**, S. 358—366.
8. Graves L. M. Theory of Functions of Real Variables. — McGraw-Hill, 1946.
9. Hochschild G. The Structure of Lie Groups. — Holden-Day, 1965.
10. Hopf H. Maximale Toroide und singuläre Elemente in geschlossen Lieschen Gruppen. — Comment. Math. Helv., 1943, **15**, S. 59—70.
11. Hopf H. und Samelson H. Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Lieschen Gruppen. — Comment. Math. Helv., 1941, **13**, S. 240—251.
12. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967.
13. Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ. — М.: ИЛ, 1956.
14. Nachbin L. The Haar Integral. — Van Nostrand, 1965.
15. Peter F. und Weyl H. Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuerlichen Gruppe. — Math. Ann., 1927, **97**, S. 737—755.
16. Smithies F. Integral Equations. — Cambridge Univ. Press, 1962.
17. Стинрод Н. Топология косых произведений. — М.: ИЛ, 1953.
18. Stiefel E. Über eine Beziehung zwischen geschlossenen Lieschen Gruppen und diskontinuierlichen Bewegungsgruppen euklidischer Räume und ihrer Anwendung auf Aufzählung der

einfachen Lieschen Gruppen. — Comment. Math. Helv., 1942, 14, S. 350 — 380.
19. Stiefel E. Kristallographische Bestimmung der geschlossenen Lieschen Gruppen. — Comment. Math. Helv., 1945, 17, S. 165 — 200.
20. Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применение. — М.: ИЛ, 1950.
21. Weil A. Démonstration topologique d'un théorème fondamental de Cartan. — Paris: C. R. Acad. Sci., 1935, 200, p. 518—520.
22. Weyl H. Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen. — Math. Z., 1924, 23, S. 271 — 309; 1925, 24, S. 328 — 376; 1926, 24, S. 377 — 395. Пер. с нем. (сокр.): Вейль Г. Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований. — УМН, 1937, 4, с. 201 — 246.
23. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. — М.: ИЛ, 1947.
24 *). Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971.
25. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. — М.: Наука, 1964.
26. Бурбаки Н. Общая топология: Топологические группы, числа и связанные с ними группы и пространства. — М.: Наука, 1969.
27. *Шевалле К. Теория групп Ли*, Т. I. — М.: ИЛ, 1948.
28. Дынкин Е. Б. и Онищик А. Л. Компактные группы Ли в целом. — УМН, 1955, 10, 3 — 74.
29. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.: Наука, 1973.
30. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. — М.: ИЛ, 1949.
31. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. — М.: Мир, 1969.
32. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.
33. Humphreys J. E. Introduction to Lie algebras and representation theory. — Springer-Verlag, 1972.
34. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления. — М.: Наука, 1970.

*) Названия [24 — 34] добавлены при переводе. — *Прим. ред.*

А. Л. Онищик

Добавление

КЛАССИФИКАЦИЯ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ

Предлагаемая читателю книга известного американского тополога Дж. Ф. Адамса посвящена в основном теории линейных представлений компактных групп Ли. При отборе материала автор руководствовался соображениями «прикладного» характера, т. е. старался осветить те стороны теории, которые могут быть полезны математикам самых различных специальностей. К сожалению, в книге не получили отражения вопросы классификации, занимающие фундаментальное место в теории компактных групп Ли, хотя необходимый для этого аппарат (системы корней и штифелевы диаграммы) автором построен. В настоящем добавлении мы попытаемся восполнить этот пробел.

Интересной особенностью книги является то, что автор совершенно не использует алгебр Ли, хотя структура векторного пространства в касательном пространстве $L(G)$ к группе Ли G существенно участвует в его конструкциях и доказательствах. Важную роль играют в книге глобальные методы — инвариантное интегрирование по группе и некоторые топологические приемы (см. доказательства теорем 4. 21 и 5. 5). Изложение теории компактных групп Ли, не использующее алгебр Ли, восходит к работам Штифеля [18, 19], опиравшегося в свою очередь на идеи Э. Картана, у которого уже можно найти вычисление фундаментальной группы присоединенной компактной группы Ли в терминах геометрии ее «фундаментальной камеры Вейля» [30, стр. 186]. Заметим, что если 30—40 лет назад такое изложение представляло лишь методический интерес, то впоследствии этот опыт оказался чрезвычайно полезным при изучении алгебраических групп над полем ненулевой характеристики. Однако методы теории алгебр Ли и до сих пор не утратили своего значения. Ниже мы дадим краткое изложение конструкции алгебры Ли по группе Ли и применим ее для классификации компактных групп Ли.

§1. Абстрактные системы корней и теорема классификации

Пусть E — евклидово пространство. Наряду со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$ мы будем рассматривать в E функцию $\{\ ,\ \}$, линейную лишь по первому аргументу и заданную формулой

$$\{\gamma,\ \delta\} = 2\langle\gamma,\ \delta\rangle/\langle\delta,\ \delta\rangle \qquad (\gamma,\ \delta \in E).$$

Системой корней в E называется подмножество $\Sigma \subset E$ (или, точнее, пара $(\Sigma,\ E)$), обладающее следующими свойствами:

1) Σ конечно и $0 \notin \Sigma$;

2) если $\alpha \in \Sigma$, то $-\alpha \in \Sigma$, но $c\alpha \notin \Sigma$ для любых $c \in \mathbb{R}$, $c \neq \pm 1$;

3) если $\alpha \in \Sigma$ и $P_\alpha = \{\gamma \in E \mid \langle\gamma,\ \alpha\rangle = 0\}$, то отражение φ_α в гиперплоскости P_α переводит Σ в себя;

4) $\{\alpha,\ \beta\} \in \mathbb{Z}$ для любых $\alpha,\ \beta \in \Sigma$.

Примером является система корней $\Sigma(G) = \{\pm\theta_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ компактной группы Ли G, определенная в гл. 4. При этом $E = L(T)^*$, где T — максимальный тор в G, а скалярное произведение в E определяется скалярным произведением в $L(G)$, инвариантным относительно присоединенного представления. То, что $\Sigma(G)$ удовлетворяет условиям 2), 3,) 4), вытекает из теоремы 5.5 и предложений 5.22 и 5.24.

Многие понятия и результаты гл. 4 и гл. 5 переносятся на абстрактные системы корней, постольку их доказательства, как легко заметить, используют только свойства 1)—4). Гиперплоскости P_α разбивают E на камеры Вейля. Отражения φ_α порождают группу W, называемую группой Вейля системы Σ, которая просто транзитивно переставляет камеры Вейля. Если фиксировать некоторую фундаментальную камеру Вейля B, то определяется система положительных корней $\Sigma_+ = \{\alpha \in \Sigma \mid \langle\alpha,\ \gamma\rangle > 0\ (\gamma \in B)\}$ и в ней выделяется система простых корней $\Pi = \{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_l\}$, которую можно изобразить при помощи диаграммы Дынкина (см. 5.37).

С каждой системой корней $\Sigma \subset E$ можно связать две замкнутые подгруппы Λ_0, Λ_1 аддитивной группы E:

Λ_0 — подгруппа, порожденная системой Σ;

$\Lambda_1 = \{\lambda \in E \mid \{\lambda,\ \alpha\} \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in \Sigma\}$.

Согласно свойству 4), $\Lambda_0 \subseteq \Lambda_1$. Подгруппа Λ_0 — это решетка (т. е. свободная абелева группа) с базисом $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_l$, а

$$\Lambda_1 = (\Lambda_1 \cap E') \oplus E'',$$

где $\Lambda_1 \cap E'$ — решетка ранга l в линейной оболочке E' системы Σ, $E'' = E'^{\perp}$.

Рассмотрим вновь случай, когда $\Sigma = \Sigma(G)$ — система корней компактной группы Ли G. Согласно определению 5.20, элемент $\lambda \in E = L(T)^*$ называется *весом* группы G, если $\lambda(v) \in \mathbb{Z}$ для всех $v \in I$, где $I \subset L(T)$ — целочисленная решетка. Очевидно, веса группы G составляют подгруппу $\Lambda(G) \subset E$.

Предложение 1. *Подгруппа* $\Lambda(G)$ *есть решетка ранга* $n = \dim E = \operatorname{rk} G$, *причем*

$$\Lambda_0 \subseteq \Lambda(G) \subseteq \Lambda_1. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть V и V^* — двойственные друг другу конечномерные векторные пространства над $\mathbb{R}$. Тогда с каждой подгруппой $A \subseteq V$ связана двойственная подгруппа $A^* \subseteq V^*$, определенная формулой

$$A^* = \{u \in A \mid u(\gamma) \in \mathbb{Z} \ (\gamma \in A)\}.$$

Известно, что если A замкнута, то $(A^*)^* = A$, а если A — решетка ранга $n = \dim V$, то A^* — также решетка ранга n (см. [26]).

Пусть $\Gamma_0 \subset L(T)$ — решетка, определенная в 5.45. Рассмотрим замкнутую подгруппу

$$\Gamma_1 = \{v \in L(T) \mid \theta(v) \in \mathbb{Z} \ (\theta \in \Sigma(G))\}.$$

Очевидно,

$$\Gamma_0 \subseteq I \subseteq \Gamma_1. \tag{2}$$

По определению $\Lambda(G) = I^*$. Поэтому $\Lambda(G)$ — решетка ранга n. Ясно также, что $\Gamma_1 = \Lambda_0^*$, откуда $\Lambda_0 = \Gamma_1^*$. Далее, из предложения 5.60 и его доказательства видно, что $\Lambda_1 = \Gamma_0^*$. Переходя в (2) к двойственным подгруппам, получаем (1).

Заметим, что по теореме 5.47 имеем

$$I/\Gamma_0 \cong \pi_1(G).$$

С другой стороны, из предложения 5.3 видно, что

$$\Gamma_1/\Gamma_0 \cong Z(G).$$

Теорема классификации утверждает, что система корней $\Sigma(G)$ и решетка весов $\Lambda(G)$ полностью определяют связную компактную группу Ли G. Для ее точной формулировки нам понадобится следующее понятие.

Пусть $\Sigma \subset E$ и $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{E}$ — две системы корней. *Изоморфизмом* систем Σ и $\tilde{\Sigma}$ называется линейный изоморфизм $\varphi: E \to \tilde{E}$, отображающий Σ на $\tilde{\Sigma}$ и удовлетворяющий условию

$$\{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\} = \{\alpha, \beta\} \qquad (\alpha, \beta \in \Sigma).$$

Можно показать, что система корней $\Sigma(G)$ группы G определена лишь с точностью до изоморфизма (поскольку инвариантная метрика на $L(G)$ не единственна). Основная теорема классификации формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть* G *и* $\tilde{G}$ — *связные компактные группы Ли,* T *и* $\tilde{T}$ — *их максимальные торы,* $E = L(T)^*$, $\tilde{E} = L(\tilde{T})^*$. *Для всякого изоморфизма* $\varphi: E \to \tilde{E}$ *систем корней* $\Sigma(G)$ *и* $\Sigma(\tilde{G})$, *удовлетворяющего условию*

$$\varphi(\Lambda(G)) = \Lambda(\tilde{G}),$$

существует такой изоморфизм $\Phi: G \to \tilde{G}$, *переводящий* T *в* $\tilde{T}$, *что* $\Phi' \mid L(T) = \varphi^{*-1}$. *Далее, для любой системы корней* $\Sigma \subset E$ *и любой* *решетки Λ максимального ранга в E, удовлетворяющей условию $\Lambda_0 \subseteq \Lambda \subseteq \Lambda_1$, существуют связная компактная группа Ли G, максимальный тор $T \subset G$ и изоморфизм φ: $E \to L(T)^*$ систем корней Σ и $\Sigma(G)$, для которого $\varphi(\Lambda) = \Lambda(G)$.*

Доказательство будет дано в § 5.

§ 2. Алгебра Ли группы Ли

Алгебра L над полем $\mathbb{R}$ с операцией $(x, y) \longmapsto [x, y]$ называется *алгеброй Ли*, если выполняются следующие условия:

1) $[x, y] = -[y, x]$ $(x, y \in L)$ (антикоммутативность);

2) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ $(x, y, z \in L)$ (тождество Якоби).

В дальнейшем всегда будет предполагаться, что $\dim L < \infty$.

Приведем классическую конструкцию, сопоставляющую каждой группе Ли G некоторую алгебру Ли $L(G)$ над $\mathbb{R}$, имеющую ту же размерность, что и G. Алгебра Ли $L(G)$ совпадает как векторное пространство с касательным пространством G_e. Операция в $L(G)$ определяется членами 2-го порядка малости в тэйлоровском разложении функций, задающих умножение в группе G. Чтобы дать точное определение, нам удобно будет отождествить окрестность точки 0 в $L(G)$ с окрестностью точки e в G при помощи карты exp (см. теорему 2.15). Следующее утверждение доказывается так же, как лемма 2.18.

Лемма 1. *В окрестности точки e в G справедливо равенство*

$$xy = x + y + c(x, y) + o(r^2), \tag{3}$$

где c: $L(G) \times L(G) \to L(G)$ — некоторое билинейное отображение.

Определим теперь *операцию коммутирования* $[\ ,\ ]$ в $L(G)$ формулой

$$[x, y] = 2c(x, y) \qquad (x, y \in L(G)). \tag{4}$$

Очевидно, эта операция превращает $L(G)$ в алгебру.

Лемма 2. *Операция коммутирования антикоммутативна.*

Доказательство. Полагая в (3) $y = x^{-1} = -x$, получим

$$0 = e = xx^{-1} = -c(x, x) + o(r^2).$$

Таким образом, $c(x, x) = 0$, откуда, подставляя $x + y$ вместо x, легко выводим, что c кососимметрично по x и y.

Аналогично, но несколько сложнее, можно доказать, что операция коммутирования удовлетворяет тождеству Якоби (см. [29], теорема 81). Мы предпочтем получить это свойство в качестве тривиального следствия другой, очень важной для теории, интерпретации коммутирования.

Пусть L — произвольная алгебра Ли. Для любого $x \in L$ определим линейное преобразование $\operatorname{ad} x$: $L \to L$ формулой

$$(\operatorname{ad} x)\, y = [x, y] \qquad (y \in L). \tag{5}$$

Лемма 3. *В окрестности точки e в G имеем*

$$A_x(y)=xyx^{-1}=y+[x,\ y]+o(r^2), \tag{6}$$

$$(x,\ y)=xyx^{-1}y^{-1}=[x,\ y]+o(r^2), \tag{7}$$

$$\operatorname{Ad} x=1+\operatorname{ad} x+o(r). \tag{8}$$

Доказательство. Формулы (6) и (7) легко выводятся из леммы 1 и из (4), а формула (8) — из (6) и из того, что при нашем отождествлении $\operatorname{Ad} x=A_x$ в силу предложения 2.11.

Примеры. 1. Пусть $G=\mathrm{GL}(V)$ — группа линейных автоморфизмов *) конечномерного векторного пространства V. Применим лемму 3 для вычисления операции коммутирования в $L(G)=\operatorname{Hom}(V,\ V)$. Поскольку A_g $(g\in \mathrm{GL}(V))$ продолжается до линейного отображения A_g: $Y\longmapsto gYg^{-1}$ пространства $L(G)$, имеем $\operatorname{Ad} g=A'_g=A_g$. Значит,

$$\operatorname{Ad}(\exp X)\,Y=(\exp X)\,Y\,(\exp X)^{-1}=$$
$$=(1+X+o(r))\,Y\,(1-X+o(r))=Y+XY-YX+o(r)\,Y,$$

Отсюда

$$[X,\ Y]=XY-YX \qquad (X,\ Y\in \operatorname{Hom}(V,\ V)).$$

2. Если группа G абелева, то $[u,\ v]=0$ для всех $u,\ v\in L(G)$ (такая алгебра $L(G)$ называется *абелевой алгеброй Ли*). Это видно из доказательства теоремы 2.19.

Из определения операции коммутирования и предложения 2.11 легко выводится

Лемма 4. *Пусть* φ: $G\to H$ — *гомоморфизм групп Ли. Тогда* φ': $L(G)\to L(H)$ *является гомоморфизмом алгебр.*

Пусть, например, $\varphi=\operatorname{Ad}$: $G\to \mathrm{GL}(L(G))$ — присоединенное представление группы G. Тогда из леммы 3 следует, что $(\operatorname{Ad})'=\operatorname{ad}$, где ad: $L(G)\to \operatorname{Hom}(L(G),\ L(G))$ сопоставляет каждому $x\in L(G)$ оператор $\operatorname{ad} x$, заданный формулой (5). В частности, из теоремы 2.11 видно, что

$$\operatorname{Ad}(\exp x)=\exp \operatorname{ad} x=1+\operatorname{ad} x+\frac{1}{2!}(\operatorname{ad} x)^2+\ldots \qquad (x\in L(G)). \tag{9}$$

Лемма 5. *Операция коммутирования в $L(G)$ удовлетворяет тождеству Якоби.*

Доказательство. Применим лемму 4 к присоединенному представлению Ad. Имеем

$$\operatorname{ad}[x,\ y]=[\operatorname{ad} x,\ \operatorname{ad} y]=(\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)-(\operatorname{ad} y)(\operatorname{ad} x).$$

Применяя левую и правую части к любому $z\in L(G)$ и используя лемму 2, приходим к тождеству Якоби.

Следствие. *$L(G)$ является алгеброй Ли.*

---

*) См. 2.12. Мы отклоняемся здесь от обозначений автора книги, сохраняя символ Aut V для обозначения группы автоморфизмов некоторой алгебры V.

Заметим, что если L — произвольная алгебра Ли, то отображение

$$\mathrm{ad}\colon L \to \mathrm{Hom}(L, L),$$

определенное формулой (5), является гомоморфизмом алгебр (оно называется *присоединенным представлением* алгебры L).

Пусть G — группа Ли и H — ее подгруппа, являющаяся подмногообразием в G (см. гл. 2). Мы будем говорить, что H — *подгруппа Ли* в G. Рассматривая гомоморфизм вложения $H \to G$, легко убедиться в том, что $L(H)$ будет подалгеброй в алгебре Ли $L(G)$.

Подпространство M алгебры Ли L называется *идеалом* в L, если $[x, y] \in M$ для любых $x \in L$, $y \in M$. Примером идеала является *центр* алгебры L, определяемый формулой

$$Z(L) = \{x \in L \mid [x, y] = 0 \ (y \in L)\}.$$

Другой важный пример идеала — *коммутант* алгебры L, т. е. линейная оболочка $[L, L]$ всех элементов вида $[x, y]$ $(x, y \in L)$.

Предложение 2. *Если H — нормальная подгруппа Ли G, то $L(H)$ — идеал в $L(G)$. Если G связна, то*

$$L(Z(G)) = Z(L(G)).$$

Если G_1 и G_2 — две группы Ли, то

$$L(G_1 \times G_2) = L(G_1) \oplus L(G_2),$$

причем $L(G_i)$ — идеалы в $L(G_1 \times G_2)$.

Доказательство. Поскольку H инвариантна относительно всех A_g $(g \in G)$, $L(H)$ инвариантно относительно $A'_g = \mathrm{Ad}\, g$. Из леммы 3 следует, что $L(H)$ инвариантно относительно всех $\mathrm{ad}\, x$ $(x \in L(G))$, т. е. является идеалом.

В случае, когда $H = Z(G)$, $\mathrm{Ad}\, g$ $(g \in G)$ действуют на $L(H)$ тождественно. Значит, $\mathrm{ad}\, x \mid L(H) = 0$ $(x \in L(G))$, т. е. $L(H) \subseteq Z(L(G))$. Обратно, пусть $y \in Z(L(G))$. Тогда $\mathrm{ad}\, ty = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Из формулы (9) следует, что $\mathrm{Ad}(\exp ty) = 1$. Из теоремы 2.11 и предложения 2.16 получаем, что если G связна, то $A_{\exp ty} = 1$, т. е. $\exp ty \in Z(G)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Значит, $y \in L(H)$.

Последнее утверждение следует из того, что G_i нормальны в $G_1 \times G_2$.

Пусть L — алгебра Ли. *Дифференцированием* алгебры L называется линейное отображение $D\colon L \to L$, удовлетворяющее условию

$$D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy].$$

Легко проверить, что дифференцирования образуют подалгебру $\mathrm{Der}\, L$ в алгебре Ли $\mathrm{Hom}(L, L)$.

Примерами дифференцирований являются внутренние дифференцирования $\mathrm{ad} x$ $(x \in L)$; они составляют подалгебру $\mathrm{ad}\, L \subseteq \mathrm{Der}\, L$. Непосредственно доказывается

Лемма 6. *Для любых* $D \in \operatorname{Der} L$, $x \in L$ *имеем*

$$[D, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad} Dx.$$

В частности, $\operatorname{ad} L$ — *идеал в* $\operatorname{Der} L$.

Группа $\operatorname{Aut} L$ автоморфизмов алгебры L замкнута в $\mathrm{GL}(L)$ и по теореме 2.27 является подгруппой Ли этой группы.

Предложение 3. *Если* L — *алгебра Ли, то*

$$L(\operatorname{Aut} L) = \operatorname{Der} L.$$

Доказательство. Пусть $D \in L(\operatorname{Aut} L)$, и пусть $f(t)$ — такая гладкая кривая в $\operatorname{Aut} L$, что $f(0) = 1$ и $f'(0) = D$. Дифференцируя равенство

$$f(t)[x, y] = [f(t)x, f(t)y] \qquad (x, y \in L)$$

по t при $t = 0$, получим, что $D \in \operatorname{Der} L$. Обратно, пусть $D \in \operatorname{Der} L$. Покажем, что $\exp tD \in \operatorname{Aut} L$, откуда будет следовать, что $D \in L(G)$. Для фиксированных $x, y \in L$ положим

$$\varphi(t) = \exp(-tD)\,[(\exp tD)x, (\exp tD)y].$$

Имеем $\varphi(0) = [x, y]$. Легко проверить, что $\varphi'(t) = 0$. Значит, $\varphi(t) = [x, y]$ при всех t, т. е. $\exp tD \in \operatorname{Aut} L$.

Из предложения 3 вытекает, что $\exp(t \operatorname{ad} x) \in (\operatorname{Aut} L)_1$ $(t \in \mathbb{R}, x \in L)$. Обозначим через $\operatorname{Int} L$ подгруппу в $(\operatorname{Aut} L)_1$, порождаемую автоморфизмами вида $\exp(t \operatorname{ad} x)$; $\operatorname{Int} L$ называется *группой внутренних автоморфизмов* алгебры L.

Лемма 7. *Если* $L = L(G)$, *где* G — *связная группа Ли, то* $\operatorname{Int} L = \operatorname{Ad} G$.

Доказательство. Из (9) следует, что $\operatorname{Int} L \subseteq \operatorname{Ad} G$, а также, что $\operatorname{Int} L \supseteq \operatorname{Ad} U$, где U — некоторая окрестность единицы в G. Применяя предложение 2.16, получаем, что $\operatorname{Int} L = \operatorname{Ad} G$.

§ 3. Компактные алгебры Ли

Алгебра Ли L над полем $\mathbb{R}$ называется *компактной*, если в L можно ввести скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$, относительно которого все операторы $\operatorname{ad} x$ $(x \in L)$ кососимметричны, т. е. выполняется следующее условие:

$$\langle [x, y], z\rangle = -\langle y, [x, z]\rangle \qquad (x, y, z \in L).$$

Обозначим через $\mathrm{O}(L)$ группу всех ортогональных преобразований евклидова пространства L. Из формулы (9) видно, что алгебра L является компактной тогда и только тогда, когда в L существует такое скалярное произведение, что $\operatorname{Int} L \subseteq \mathrm{O}(L)$.

Лемма 8. *Алгебра Ли* L *компактна тогда и только тогда, когда замыкание* $\overline{\operatorname{Int} L}$ *подгруппы* $\operatorname{Int} L$ *в* $\mathrm{GL}(L)$ *компактно.*

Доказательство. Пусть L компактна. Тогда группа $\mathrm{O}(L)$ компактна и поэтому замыкание $\overline{\operatorname{Int} L} \subseteq \mathrm{O}(L)$ также компактно. Обратно, пусть $\overline{\operatorname{Int} L}$ компактно. Легко видеть, что $\overline{\operatorname{Int} L}$ — подгруппа и, следовательно, компактная подгруппа Ли в $GL(L)$. Согласно предложению 3.16, в L существует скалярное произведение, инвариантное относительно $\overline{\operatorname{Int} L}$.

Примеры. 1. Если G — компактная группа Ли, то алгебра Ли $L(G)$ компактна. Действительно, в этом случае группа $\operatorname{Ad} G_1$ компактна, так что по лемме 6 $\operatorname{Int} L(G) = \operatorname{Ad} G_1$ также компактна.

2. Любая абелева алгебра Ли L компактна. Отметим, что $L \cong L(T^n)$, где $n = \dim L$.

Мы хотим показать теперь, что всякая компактная алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой компактной группы Ли. Для этого нам понадобятся некоторые факты о строении компактных алгебр Ли.

Алгебра Ли L называется *простой*, если она не содержит ненулевых идеалов, и *полупростой*, если L не содержит ненулевых абелевых идеалов.

Ясно, что простая алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда она неабелева. Абелева простая алгебра Ли одномерна.

Предложение 4. *Пусть L — компактная алгебра Ли. Тогда имеем*

$$L = Z(L) \oplus S, \quad S = S_1 \oplus \ldots \oplus S_r,$$

где S — полупростой, а S_i — простые неабелевы идеалы в L. При этом S и S_i определены однозначно, причем $S = [L, L]$. В частности, L полупроста тогда и только тогда, когда $Z(L) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим компактную группу $G = \overline{\operatorname{Int} L}$, состоящую из автоморфизмов алгебры L. Очевидно, идеалы алгебры L — это в точности G-инвариантные подпространства. Согласно теореме 3.20, имеем

$$L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_s,$$

где L_i — неприводимые инвариантные подпространства. Тогда L_i — идеалы, причем $[L_i, L_j] = 0$ $(i \neq j)$. Заметим, что каждый идеал L_i является простым. Действительно, если M — идеал в L_i, то $[L_j, M] = 0$ для всех $j \neq i$, так что M — идеал в L и $M = 0$ или $M = L_i$ в силу неприводимости. Пусть $L_1, \ldots, L_m$ — одномерные абелевы, а $L_{m+1}, \ldots, L_s$ — неабелевы простые идеалы. Тогда $L_j \cap Z(L) = 0$ для $j > m$ и $L_1 \oplus \ldots \oplus L_m \subseteq Z(L)$, откуда $Z(L) = L_1 \oplus \ldots \oplus L_m$. Итак,

$$L = Z(L) \oplus L_{m+1} \oplus \ldots \oplus L_s.$$

Представления группы G в пространствах L_j $(j > m)$ попарно неэквивалентны. Действительно, если $i, j > m$, $i \neq j$ и $0 \neq x \in L_j$, то $\exp \operatorname{ad} x \in G$ нетривиально действует на L_j, но тривиально — на L_i. Используя лемму Шура (3.22), легко вывести отсюда, что любой неабелев простой идеал в L совпадает с одним из идеалов L_j $(j > m)$. Поэтому эти идеалы определены однозначно. По той же причине в $S = L_{m+1} \oplus \ldots \oplus L_s$ отсутствуют абелевы идеалы, т. е. S полупроста. Поскольку L_j $(j > m)$ проста и неабелева, имеем $[L_j, L_j] = L_j$. Следовательно, $[L, L] = S$.

Пусть L — произвольная алгебра Ли над $\mathbb{R}$. *Формой Киллинга* алгебры L называется симметрическая билинейная форма k_L на L, заданная формулой

$$k_L(x, y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y) \qquad (x, y \in L).$$

Лемма 9. *Если $\varphi: L_1 \to L_2$ — изоморфизм алгебр Ли, то*

$$k_{L_2}(\varphi(x), \varphi(y)) = k_{L_1}(x, y) \qquad (x, y \in L_1).$$

В частности, k_L инвариантна относительно всех автоморфизмов алгебры L. Если $D \in \operatorname{Der} L$, то

$$k_L(Dx, y) = -k_L(x, Dy) \qquad (x, y \in L).$$

Доказательство. Очевидно, $\operatorname{ad} \varphi(x) = \varphi(\operatorname{ad} x)\varphi^{-1}$ $(x \in L)$. Поэтому

$$k_{L_2}(\varphi(x), \varphi(y)) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}\varphi(x))(\operatorname{ad}\varphi(y)) = \operatorname{Tr}(\varphi(\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)\varphi^{-1}) = \\ = k_{L_1}(x, y) \qquad (x, y \in L).$$

Если $D \in \operatorname{Der} L$, то $\exp tD \in \operatorname{Aut} L$ для всех $t \in \mathbb{R}$, так что $k_L((\exp tD)x, (\exp tD)y) = k_L(x, y)$ $(x, y \in L)$. Дифференцируя это равенство по t при $t = 0$, получим (10).

Отсюда непосредственно выводится

Лемма 10. *Пусть M — идеал в L и*

$$M^{\perp} = \{x \in L \mid k_L(x, y) = 0 \ (y \in M)\}.$$

Тогда $M^{\perp}$ — идеал в L. Кроме того, имеем $k_L \mid M \times M = k_M$.

Лемма 11. *Если алгебра Ли L компактна, то $k_L(x, x) \leqslant 0$ $(x \in L)$. При этом L полупроста тогда и только тогда, когда форма k_L отрицательно определена.*

Доказательство. Если L компактна, то $\operatorname{ad} x$ в некотором базисе записывается кососимметрической матрицей (x_{ij}). Имеем

$$k_L(x, x) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x)^2 = \sum_{i,j} x_{ij}x_{ji} = -\sum_{i,j} x_{ij}^2 \leqslant 0.$$

При этом, если $k_L(x, x) = 0$, то $x_{ij} = 0$ для всех i, j, так что $\operatorname{ad} x = 0$ и $x \in Z(L)$. Теперь наше утверждение следует из предложения 4.

Предложение 5. *Пусть L — полупростая компактная алгебра Ли. Тогда $\operatorname{Der} L = \operatorname{ad} L$. Группы $\operatorname{Aut} L$ и $\operatorname{Int} L$ компактны, $\operatorname{Int} L = (\operatorname{Aut} L)_1$ и $L(\operatorname{Aut} L) = L(\operatorname{Int} L) \cong L$.*

Доказательство. Поскольку L полупроста, $Z(L) = 0$ и $\operatorname{ad}: L \to \operatorname{ad} L$ — изоморфизм алгебр. Согласно лемме 7, $\operatorname{ad} L$ — идеал в $\operatorname{Der} L$. По леммам 10 и 11 ограничение формы $k_{\operatorname{Der} L}$ на $\operatorname{ad} L \times \operatorname{ad} L$ невырождено. Значит,

$$\operatorname{Der} L = \operatorname{ad} L \oplus M,$$

где $M = (\operatorname{ad} L)^{\perp}$ — идеал в $\operatorname{Der} L$ (см. лемму 10). Имеем

$[\operatorname{ad} L, M] = 0$. Поэтому для любых $x \in L$ и $D \in M$ имеем $\operatorname{ad} D(x) = [D, \operatorname{ad} x] = 0$, т. е. $Dx = 0$ и $D = 0$. Это значит, что $M = 0$ и $\operatorname{Der} L = \operatorname{ad} L$.

Из лемм 9 и 11 следует, что группа $\operatorname{Aut} L$ состоит из ортогональных преобразований пространства L, снабженного скалярным произведением $-k_L$. Поскольку $\operatorname{Aut} L$ замкнута в $\operatorname{GL}(L)$, она является компактной. Согласно предложению 3, $L(\operatorname{Aut} L) = \operatorname{Der} L = \operatorname{ad} L$. Подгруппа $\operatorname{Int} L \subseteq \operatorname{Aut} L$ порождена множеством $\exp(\operatorname{ad} L) = \exp L(\operatorname{Aut} L)$ и поэтому совпадает со связной компонентой $(\operatorname{Aut} L)_1$. Значит, она также компактна, причем $L(\operatorname{Int} L) = \operatorname{ad} L \cong L$.

Следствие. *Любая компактная алгебра Ли L изоморфна алгебре Ли некоторой связной компактной группы Ли.*

Доказательство. По предложению 4 имеем $L = Z(L) \oplus S$, где S — полупростая компактная алгебра Ли. Пусть $G = T^n \times \operatorname{Int} S$, где $n = \dim Z(L)$. В силу предложений 5 и 2, имеем $L(G) \cong L$.

§ 4. Классификация компактных алгебр Ли

Пусть L — компактная алгебра Ли. Согласно следствию из предложения 5, мы можем считать, что $L = L(G)$, где G — некоторая связная компактная группа Ли. Пусть T — максимальный тор в G. Согласно предложениям 4.12 и 4.14, имеем

$$L = V_0 \oplus \sum_{k=1}^{m} V_k,$$

где $V_0 = L(T)$ и V_i $(i = 1, \ldots, m)$ — двумерные неприводимые подпространства для $\operatorname{Ad} T$, соответствующие парам корней $\pm\theta_i \in \Sigma(G)$. Заметим, что это разложение и корни $\pm\theta_i \in V_0^*$ не зависят от выбора связной компактной группы G, для которой $L = L(G)$, ибо определяются группой $\operatorname{Ad} G$, которая по лемме 7 совпадает с $\operatorname{Int} L$. Поэтому мы будем называть $\Sigma(G)$ *системой корней алгебры* L и обозначать через $\Sigma(L)$.

Перейдем теперь к классификации компактных алгебр Ли.

Теорема 2. *Пусть L и $\tilde{L}$ — компактные алгебры Ли, V_0 и $\tilde{V}_0$ — их абелевы подалгебры, соответствующие максимальным торам, $E = V_0^*$, $\tilde{E} = \tilde{V}_0^*$. Для всякого изоморфизма $\varphi : E \to \tilde{E}$ систем корней $\Sigma(L)$ и $\Sigma(\tilde{L})$ существует такой изоморфизм алгебр $\psi : L \to \tilde{L}$, переводящий V_0 в $\tilde{V}_0$, что $\psi \mid V_0 = \varphi^{*-1}$.*

Пусть (Σ, E) — система корней. Тогда существует компактная алгебра Ли, система корней которой изоморфна (Σ, E).

Доказательство этой теоремы весьма длинно, и мы не сможем его здесь воспроизвести. См. по этому поводу [29, 31—34].

Система корней Σ называется *неприводимой*, если ее нельзя представить в виде $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, где $\Sigma_1, \Sigma_2 \neq \varnothing$ и $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ для любых $\alpha \in \Sigma_1$, $\beta \in \Sigma_2$. Оказывается, что полупростая компактная алгебра Ли L проста тогда и только тогда, когда $\Sigma(L)$ неприводима.

Легко доказать, что любая система корней представляется в виде $\Sigma = \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_s$, где Σ_i — неприводимые и попарно ортогональные системы корней. Далее, любая система простых корней в Σ представляется в виде $\Pi = \Pi_1 \cup \ldots \cup \Pi_s$, где Π_i — система простых корней в Σ_i.

Перейдем теперь к классификации неприводимых систем корней.

Лемма 12. *Пусть $\Sigma \subset E$, $\Sigma' \subset E'$ — две системы корней, $\dim E = \dim E'$, и пусть $\Pi \subset \Sigma$, $\Pi' \subset \Sigma'$ — системы простых корней. Всякая биекция ψ: $\Pi \to \Pi'$, при которой $\{\psi(\alpha), \psi(\beta)\} = \{\alpha, \beta\}$ $(\alpha, \beta \in \Pi)$, продолжается до изоморфизма систем корней Σ и Σ'.*

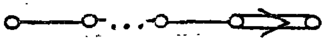
Из леммы 12 следует, что система корней (Σ, E) полностью определяется числом $\dim E$ и своей диаграммой Дынкина (см. 5. 37), на которой в случае, когда $-\{\beta, \alpha\} = \langle\beta, \beta\rangle / \langle\alpha, \alpha\rangle = 2$ или 3, следует отметить корень α, имеющий меньшую длину. Обычно это делают с помощью стрелки, указывающей на α.

Доказательство следующей теоремы см. в [29, 31, 33]:

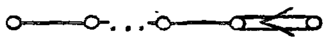
Теорема 3. *Если Σ — неприводимая система корней, то ее диаграмма Дынкина — это одна из следующих диаграмм (индекс обозначает число простых корней):*

A_l $(l \geqslant 1)$:

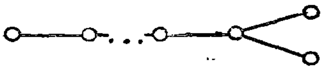
B_l $(l \geqslant 2)$:



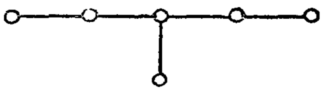
C_l $(l \geqslant 3)$:



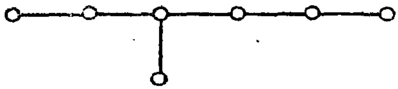
D_l $(l \geqslant 4)$:



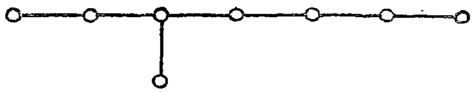
E_6:



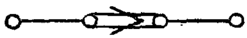
E_7:



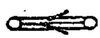
E_8:



F_4:



G_2:



Как видно из примеров 4.16—4.20, системы корней $\Sigma(U(l+1))$ и $\Sigma(SU(l+1))$ имеют тип A_l, $\Sigma(SO(2l+1))$ — тип B_l, $\Sigma(Sp(l))$ — тип C_l, а $\Sigma(SO(2l))$ — тип D_l. Таким образом, для любой системы корней классических типов A_l, B_l, C_l, D_l существуют компактная группа Ли и компактная алгебра Ли, имеющие эту систему корней. Явное построение компактной алгебры Ли можно провести и для систем корней пяти особых типов E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, что дает доказательство второго утверждения теоремы 2.

§ 5. Доказательство основной теоремы классификации

Мы дадим теперь доказательство теоремы 1. Пусть G, $\tilde{G}$ — связные компактные группы Ли, T и $\tilde{T}$ — их максимальные торы, $E = L(T)^*$, $\tilde{E} = L(\tilde{T})^*$, φ: $E \to \tilde{E}$ — изоморфизм систем корней, переводящий $\Lambda(G)$ в $\Lambda(\tilde{G})$. Согласно теореме 2, существует изоморфизм алгебр Ли ψ: $L(G) \to L(\tilde{G})$ такой, что $\psi \mid L(T) = \varphi^{*-1}$. Очевидно, $\varphi(I) = \tilde{I}$, где I и $\tilde{I}$ — единичные решетки в $L(T)$ и $L(\tilde{T})$ соответственно. Для упрощения записи условимся отождествлять $L = L(G)$ с $L(\tilde{G})$ при помощи ψ и E с $\tilde{E}$ при помощи φ; тогда группы $\Gamma_0 \subseteq I \subseteq \Gamma_1 \subseteq L(T)$ отождествятся с соответствующими группами $\tilde{\Gamma}_0 \subseteq \tilde{I} \subseteq \tilde{\Gamma}_1 \subseteq L(\tilde{T})$. Кроме того, группа $\mathrm{Ad}\, G = \mathrm{Int}\, L(G)$ отождествляется с $\mathrm{Ad}\, \tilde{G} = \mathrm{Int}\, L(\tilde{G})$.

Будем говорить, что компактная группа Ли G *полупроста*, если $L(G)$ полупроста, т. е. если $Z(G)$ конечен.

Лемма 13. *Связная компактная группа Ли G полупроста тогда и только тогда, когда все ее одномерные комплексные представления тривиальны.*

Доказательство. Пусть G полупроста и φ: $G \to T^1$ — одномерное представление. Тогда определен гомоморфизм φ': $L(G) = L(T^1) = \mathbb{R}$. Ясно, что $\varphi'([x, y]) = 0$ для x, $y \in L(G)$. Но $L(G) = [L(G), L(G)]$ в силу предложения 4. Значит, $\varphi' = 0$ и $\varphi(g) = 1$ для всех $g \in G$. Пусть теперь G не полупроста. Тогда $Z(L(G)) \neq 0$ и $E'' = \{\lambda \in E \mid \langle \lambda, \alpha \rangle = 0 \ (\alpha \in \Sigma)\} \neq 0$. Далее, $\Lambda(G) \cap E'' \neq 0$ и $E'' \subset$ ДФКВ. Если $0 \neq \omega \in \Lambda(G) \cap E''$, то по теореме 6.33 существует неприводимое линейное представление группы G с максимальным весом ω. Его характер χ удовлетворяет условию $\chi \mid T = \omega$, так что представление одномерно и нетривиально.

Предложение 6. *Любая связная компактная группа Ли G представляется в виде*

$$G = H \cdot Z(G)_1,$$

где H — связный компактный полупростой нормальный делитель. При этом $L(H) = [L(G), L(G)]$.

Доказательство. Рассмотрим коммутант (G, G) группы G. Подгруппа $H = \overline{(G, G)}$ есть замкнутый связный нормальный делитель в G. Из леммы 3 следует, что $[L(G), L(G)] \subseteq L(H)$. Согласно предложению 4, $L(G) = Z(L(G)) + L(H)$. Значит, $G = H \cdot Z(G)_1$. Отсюда $H = \overline{(G, G)} = (H, H)$. Из леммы 13 легко следует, что H полупроста. Поэтому $L(H)$ полупроста и наше разложение алгебры $L(G)$ совпадает с разложением из предложения 4.

Очевидно, имеется разложение $L(T) = L(T') \oplus Z(L)$, где T' — некоторый максимальный тор группы H. Ясно, что $L(T') = L(T) \cap [L, L]$, так что это разложение не зависит от выбора группы G с алгеброй Ли L. Пусть π', π'' — проекции пространства $L(T)$ на $L(T')$ и $Z(L)$ соответственно. Легко видеть, что $I' = \pi'(I)$ и $I'' = \pi''(I)$ суть решетки максимальных рангов в соответствующих подпространствах, причем $\Gamma_0 \subseteq I'$. Рассмотрим группу

$$G_0 = \mathrm{Int}\, L \times Z(L)/I''.$$

Очевидно, это компактная связная группа Ли с алгеброй Ли $L(G_0) \cong [L, L] \oplus Z(L) = L$; она однозначно определяется алгеброй Ли L и решеткой I. Оказывается, что G накрывает группу G_0. Действительно, накрытие $p: G \to G_0$ можно определить формулой $p(hz) = (\operatorname{Ad} h, q(z))$ $(h \in H, z \in Z(G)_1)$, где $q: Z(G)_1 = Z(L)/(I \cap \cap Z(L)) \to Z(L)/I''$ — естественная проекция. Если отождествить $[L, L]$ с $L(\operatorname{Int} L)$ при помощи ad, то будем иметь $p' = 1$, т. е. $p'(u) = (\pi'(u), \pi''(u))$ $(u \in L)$. Отсюда видно, что $p_*(\pi_1(G)) = (I'/\Gamma_0) \times I'' \subseteq (\Gamma_1'/\Gamma_0) \times \pi_1(Z(L)/I'') = \pi_1(G_0)$, где $\Gamma_1' = \Gamma_1 \cap L(T')$. Следовательно, $p_*(\pi_1(G))$ определяется решеткой I. Из теории накрывающих групп [29, гл. 9] следует, что для любых двух групп G, $\tilde{G}$ с решеткой I существует изоморфизм $\Phi: G \to \tilde{G}$ такой, что $\tilde{p}\Phi = p$, где $\tilde{p}: \tilde{G} \to G_0$ — накрытие, построенное для $\tilde{G}$. Очевидно, Φ — искомый изоморфизм.

Для доказательства существования группы G с заданными системой корней Σ и решеткой Λ построим сначала компактную алгебру Ли L с системой корней Σ (теорема 2). Затем обозначим через H универсальную накрывающую полупростой компактной группы Ли $\operatorname{Int} L$. Тогда $U = H \times Z(L)$ — односвязная группа Ли с алгеброй Ли L. Центр $Z(U)$ отождествляется с Γ_1/Γ_0, где $\Gamma_1 = \Lambda_0^*$, $\Gamma_0 = \Lambda_1^*$. Если $I = \Lambda^*$, то $I/\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1/\Gamma_0 = Z(U)$. Без труда проверяется, что $G = U/(I/\Gamma_0)$ является искомой связной компактной группой Ли. Теорема 1 доказана.

Связная компактная группа Ли G называется *простой*, если алгебра $L(G)$ проста, т. е. если система корней $\Sigma(G)$ неприводима. Из предложения 4 легко вывести, что любая полупростая компактная группа Ли разлагается в произведение простых неабелевых нормальных делителей. Как видно из доказательства теоремы 1, основную роль в классификации полупростых групп с заданной алгеброй Ли L играет «максимальная» фундаментальная группа $\pi_1(\operatorname{Int} L) \cong \Gamma_1/\Gamma_0 \cong \Lambda_1/\Lambda_0$. Для простых неабелевых алгебр Ли эта группа имеет следующий вид (ср. 5.49):

Тип системы $\Sigma(L)$	A_l	B_l, C_l, E_7	D_{2s}	D_{2s+1}	E_6	E_8, F_4, G_2
Γ_1/Γ_0	$\mathbb{Z}_{l+1}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	0